

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIOGRANDE DO SUL
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO
PPGA – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

**SELEÇÃO DE CARTEIRA ATRAVÉS DO MODELO
DE MARKOWITZ**

Marco Moises Schiroky

Porto Alegre

2007.

Marco Moises Schiroky

Seleção de carteira através do modelo de Markowitz

Trabalho de conclusão de curso de Especialização apresentado ao Programa de Pós Graduação em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Mercado de Capitais.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto de Oliveira Kloeckner

Porto Alegre,

2007.

Lista de Ilustrações

Figura 1: Gráfico Risco Sistemático, relação entre o risco Diversificável e Risco não Diversificável. Fonte: (Assaf, 2001).....	18
Figura 2: Linha de compensação Risco/Retorno. Fonte: Assaf, 2001.....	24
Figura 3: Gráfico de Risco e Retorno. Fonte: Assaf, 2001.....	27
Figura 4: Tela do solver parâmetros e estimativas	42
Figura 5: Tela opções do Solver	42
Figura 6: gráfico carteira com risco minimizado & Ibovespa. Fonte: Elaborado pelo autor.	43
Tabela 1: Ativos de Risco e Retorno. Fonte markovitz, 195	15
Tabela 2: Base de dados para cálculo Solver.....	34
Tabela 3: Cálculo da Covariância	38
Tabela 4: Carteira sem cálculo do Solver	39
Tabela 5: Carteira Calculada pelo Solver	40

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
2	REFERENCIAL TEÓRICO	9
2.1	RISCO E RETORNO.....	9
2.2	RISCO DE MERCADO	10
2.3	RISCO DE TAXA DE JUROS	10
2.4	RISCO DE LIQUIDEZ	11
2.5	RISCO DE CRÉDITO	11
2.6	RISCO PAÍS.....	12
2.7	MENSURAÇÃO DO RISCO SISTEMÁTICO	12
2.8	RELAÇÃO ENTRE VARIÂNCIA, DESVIO PADRÃO E VALORES ESPERADOS	12
2.9	RELAÇÃO ENTRE RISCO E RETORNO E A COVARIÂNCIA NA SELEÇÃO DE UMA CARTEIRA	14
2.10	EFEITOS DA CORRELAÇÃO SOBRE O RISCO DA CARTEIRA	14
	TABELA 1: ATIVOS DE RISCO E RETORNO. FONTE MARKOVITZ, 195	15
2.11	DIVERSIFICAÇÃO E O SEU IMPACTO NO RISCO	15
2.12	DIVERSIFICAÇÃO DE INVESTIMENTOS	16
	2.12.1 <i>Vantagens e limites de Redução do risco incorrido.....</i>	<i>16</i>
2.13	SELEÇÃO DE CARTEIRAS E TEORIA DE MARKOWITZ	17
2.14	RISCO DE UMA CARTEIRA	17
	2.14.1 <i>Desvio Padrão.....</i>	<i>19</i>
	2.14.2 <i>Variância</i>	<i>19</i>
	2.14.3 <i>Coefficiente de Correlação.....</i>	<i>19</i>
	2.14.4 <i>Coefficiente de Covariância.....</i>	<i>20</i>
	2.14.5 <i>Coefficiente Beta.....</i>	<i>20</i>
	2.14.6 <i>Índice de Sharpe.....</i>	<i>21</i>
2.15	SELEÇÃO DE CARTEIRAS	21
2.16	COMBINANDO O ATIVO SEM RISCO E UM ÚNICO ATIVO DE RISCO.....	23
2.17	MODELO DE MARKOWITZ	25
2.18	PESQUISA OPERACIONAL	27
2.19	PROGRAMAÇÃO LINEAR.....	28
3	MÉTODO	30
3.1	FORMULAÇÃO DE UM PROBLEMA DE PESQUISA OPERACIONAL.....	30
3.2	DESCRIÇÃO DA AMOSTRA	31
3.3	APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR NA SELEÇÃO DE CARTEIRAS	31
3.4	A APLICABILIDADE DOS SOFTWARES PARA A UTILIZAÇÃO DA BASE DE DADOS.....	41
4	RESULTADOS	43
5	CONCLUSÕES	44
6	BIBLIOGRAFIA	45

RESUMO

Uma crescente quantidade de pessoas aplica seus recursos, em investimentos, na qual esperando agregar um maior valor, ou pelo menos protegê-lo dos riscos de perda do poder aquisitivo. Nos últimos tempos a número de opções de investimentos ampliou-se muito, sendo que o investimento no mercado de ações constitui-se uma dessas opções.

Paralelamente, nos últimos anos houve uma ampliação nos estudos sobre o comportamento do mercado de capitais, com a finalidade de prever quais seriam as melhores opções de investimentos em ações. A fim de auxiliar este estudo observa-se uma ampliação de estudos quantitativos baseados na teoria econômica e financeira, a fim de elaborar modelos para tomada de decisão dos investidores. O trabalho demonstra como o processo de criação de uma carteira de ações pode ser elaborado, partindo da teoria de Markowitz, a com objetivo de minimizar o risco do conjunto de investimento, mediante um retorno esperado, utilizando a programação linear.

Por fim, trabalho será concluído mostrando os resultados, de uma forma geral, as limitações dos cálculos feitos e como fazer para se chegar ao percentual de alocação ideal de um portfólio em renda variável. O trabalho ainda discutirá o número ótimo de ações que permite se obter carteiras diversificadas para a população de estudo (as ações mais negociadas no mercado acionário de São Paulo).

Palavras-chave: Carteira eficiente, Seleção de Carteira, Programação Linear, Análise Risco.

ABSTRACT

An increasing amount of people applies its resources, in investments, the which wait to link a great value, or at least to protect it of the risks of loss of the purchasing power. In the last times the number of options of investments was extended very, being that the investment in the action market consists one of these options.

Parallely, in the last years it had an enlargement in the studies on the behavior of the stock market, with the purpose to foresee, which would be the best options of investments in shares. In order to assist this study a magnifying of based quantitative studies in the economic and financial theory is observed, in order to elaborate models for taking of decision of the investors. The work demonstrates as the construction of a portfolio can be elaborated, from of the theory of Markowitz, with objective to minimize the risk of the set of investment, by means of a waited return, using the linear programming. These is a form the user can be helped by the softwares and to continue incriseasing hers applies by these compensation.

Finally, work will be concluded showing the results, of a general form, about limitations of the done calculations and as to make to arrive itself at the ideal percentage of allocation of a portfólio in changeable income. The work still will argue the excellent number of action that allows to get wallets diversified for the study population (the negotiated actions more in the shareholding market of São Paulo).

1 INTRODUÇÃO

Um elevado número de opções de investimento é oferecido atualmente no mercado de capitais, mas o investidor ainda decide a sua tomada de decisão com base na dicotomia risco-retorno. Uma destas opções investimentos são as ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo, e que podem se tornar uma ótima opção para aqueles que possuem tal possibilidade. Porém, o investidor espera que o risco de sua carteira seja minimizado pela diversificação, e que não comprometa o retorno esperado. A diversificação perfeita é aquela em que o risco é minimizado, sem prejuízo ao retorno, e pode ser bem dimensionado através da programação linear, que além de determinar o investimento otimizado, também possibilita a análise da sensibilidade de variáveis restritivas, que através desta análise o investidor pode determinar a sua carteira baseado nos seus critérios de risco e de retorno esperado.

Em 1990, Harry M. Markowitz ganhou o prêmio Nobel por ter desenvolvido a teoria de escolha de portfólio. O prêmio foi um reconhecimento do trabalho desenvolvido em 1952, publicado no artigo “Portfolio Selection” e posteriormente, de forma mais extensa, no livro “Portfolio Selection: Efficient Diversification” (1959). O artigo sobre seleção de carteira (portfólio) escrita por Markowitz foi o primeiro passo para a moderna teoria de portfólio e análise de investimentos como é chamado atualmente, o conjunto de algumas das mais utilizadas técnicas que permeiam as decisões de investimentos.

Apesar de suas limitações, esta teoria foi extremamente utilizada, com destaque para a época em que o microcomputador foi popularizado. Atualmente, os investidores possuem diversas formas de escolher seu portfólio, porém a que ganhou o prêmio Nobel ainda é utilizada por muitos (Michaud, 2002). Este trabalho mostra a aplicabilidade desta ao Brasil, qual o resultado alcançado ao utilizar dados históricos e como ela pode ser útil para analisar investimentos alternativos, neste caso renda variável. O mercado de renda variável possui um histórico de volume de operações bastante curto, mais precisamente desde a década de sessenta quando poucos investimentos podiam ser caracterizados como renda variável.

Com a crescente procura, nos dias de hoje, por ativos com maior lucratividade, os títulos de renda variável se tornaram uma opção de investimento para investidores que buscam novas alternativas. Porém, no momento da tomada de decisão de investir ou não em determinado ativo, a escolha esta diretamente relacionada ao retorno proporcionado pelo investimento. Contudo, o investidor deve levar em conta que, quanto maior o retorno maior o

risco agregado a sua carteira de investimento. Diante disto, na maioria das vezes, o investidor procura diversificar seus ativos, de forma a minimizar riscos buscando maior retorno possível que uma carteira possa gerar para cada percentual de risco agregado a estes. Porém, sua dúvida está em quanto devo investir em cada ativo, quais ativos que poderão gerar o maior retorno possível para cada percentual de risco agregado.

A metodologia proposta por Markowitz para seleção de portfólio pode ser uma boa alternativa na obtenção de uma distribuição de ativos com o objetivo de reduzir riscos e aumentar retornos. Os insumos utilizados serão os retornos, históricos, de ativos de renda variável. Neste trabalho a série de retornos utilizada reflete o comportamento passado de ativos de renda variável do Brasil, portanto, cabe observar que, por tratar-se de retornos passados, não permite que se tenha certeza de que o percentual achado seja o ideal.

Embora o modelo de Markowitz tenha um maior nível de precisão, o modelo de Sharpe (está introduzido nas tabelas) tornou-se o mais utilizado, devido a sua simplicidade. Porém, este último pode incorrer em alguns erros sutis devido a fatores tais como, escolha de um índice que represente o mercado e a análise da covariância entre os retornos de diversos ativos que compõem uma carteira de investimentos. Este último fator é mencionado, pois o modelo de Sharpe ao estimar a variância de uma carteira de ativos financeiros, considera, como sendo nulas as covariâncias entre os resíduos das regressões dos retornos dos ativos com os retornos do mercado. Embora este termo seja chamado de “residual”, acredita-se que este número possa influenciar de maneira expressiva o cálculo de risco de carteiras compostas por ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo. Baseado nisto, utilizar-se-á neste trabalho, a teoria de distribuição de carteiras pelo cálculo de risco de Markowitz (Assaf, 2001).

Com base neste problema, este trabalho, procura utilizar-se de análises estatísticas, que auxiliam na escolha por determinado ativo ou não, na formação de uma carteira de investimentos, com base em séries históricas de retornos, através da teoria de distribuição de carteira elaborada por Markowitz, que busca dentro de um universo previamente selecionado, responder a seguinte questão, qual a composição que melhor relaciona risco e retorno?

Justifica-se a elaboração deste trabalho, com a intenção de se compor uma carteira de ações que atenda a expectativa de retorno sobre o capital investido com menor risco possível dentre os títulos previamente selecionados.

Durante o desenvolvimento serão apresentadas etapas onde será explicado como é feito o cálculo da distribuição linear de Markowitz. Já tendo criado bases para se entender os cálculos feitos, os capítulos seguintes mostrarão como eles se deram e quais foram seus resultados e as interpretações mais adequadas aos números apresentados, tendo os seguintes objetivos durante sua elaboração:

- Objetivo Geral

 - Definir uma carteira com base na teoria de Markowitz;

- Objetivos específicos

 - Selecionar ativos para análise, dentre os que compõem o índice da Bovespa;

 - Calcular os retornos médios mensais destes ativos;

 - Calcular o desvio padrão, variância, covariância;

 - Analisar as proporções dos ativos selecionados que minimizam o risco da carteira, dado o retorno esperado;

 - Determinar as proporções dos ativos selecionados que minimizam o risco da carteira, dado o retorno esperado;

Demonstrado esses objetivos o trabalho primeiramente fará o referencial teórico analisando a teoria de Markowitz, posteriormente realizar-se-á a seleção dos ativos, objeto deste estudo, análise e conclusão dos resultados obtidos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 RISCO E RETORNO

A mensuração e a gestão do risco assumem cada vez mais importância no mercado, visto que as decisões financeiras são tomadas em ambientes econômico-financeiros com elevada taxa de incerteza e são voltadas, fundamentalmente, para o futuro. Decisões tomadas hoje têm seus resultados condicionados pelos acontecimentos futuros – conjuntura econômica, alterações do mercado e, até mesmo, comportamento dos próprios ativos – e revelam possibilidades de ganhos e perdas.

Sendo assim, o investidor enfrenta, permanentemente, o dilema entre risco e retorno que estão associados à tomada de decisão financeira, sendo que cada decisão envolve a opção entre algum tipo de risco e a possibilidade de ganho ou perda a ele associada. Geralmente, cada vez que o investidor opta pelo aumento em um atributo, implica a perda de outro atributo, ou seja, quando se espera um aumento nos retornos, este, necessariamente, vem acompanhado de uma ampliação dos riscos assumidos.

Diante das exigências, cada vez maiores, por parte dos investidores e da complexidade do mercado, o objetivo da administração de investimentos, é atender às necessidades do investidor em termos de rentabilidade segurança e liquidez. Cabe então, utilizar modelos que avaliem o mercado de ativos e orientem a decisão para melhor alocação disponível dos recursos.

A administração eficaz de risco direciona as ações no sentido de diversificar ou eliminar riscos desnecessários, que não gerem recompensa. Os vários instrumentos disponíveis são utilizados visam o eficiente gerenciamento de carteiras com objetivo de buscar a melhor relação risco retorno para a carteira. Diante disto, buscou-se através do método de Markowitz, neste trabalho, um portfólio que tivesse como objetivo reduzir ao máximo, riscos que são inerentes ao mercado de renda variável, tais como, os principais tipos de risco identificados abaixo, relacionados ao estudo da mensuração e gestão do risco: de mercado, de liquidez, de crédito, País.

2.2 RISCO DE MERCADO

O risco de mercado é o potencial de oscilação dos valores de um ativo durante um período de tempo. É representado pelos desvios – volatilidade – em relação ao resultado esperado (Assaf, 2001). As ações (ou uma carteira de ações) têm seu risco de mercado dividido entre risco diversificável e não diversificável. O risco diversificável corresponde aos fatores inerentes às companhias emissoras, tais como: performance do setor ou da companhia, novos produtos, preços internacionais, qualidade de seu gerenciamento, transparência na relação com investidores, etc. O risco não diversificável corresponde a movimentos na taxa de juros, nível crescimento econômico, etc., e caracteriza-se por atingir o conjunto de ações negociadas no mercado em maior ou menor escala. (Fonte: BankRisk. Certificação Profissional ANBID-CPA10. 2005).

Os preços dos ativos oscilam por natureza, uns mais, outros menos. A medida dessa oscilação é a volatilidade. Observa-se, por exemplo, que os preços das ações são mais voláteis. Para medir essas oscilações utilizamos o desvio padrão que representa a dispersão dos retornos de um ativo em relação à média desses retornos.

2.3 RISCO DE TAXA DE JUROS

Pode ser definido como o risco de perda no valor econômico de um ativo ou de uma carteira, decorrente dos efeitos de mudanças adversas das taxas de juros. É um dos riscos de mercado que surge da exposição à qual o valor de uma carteira ou de um ativo está submetido quando ocorre uma mudança na taxa de juros, utilizada para calcular o seu valor presente (Assaf, 2001).

2.4 RISCO DE LIQUIDEZ

Decorre da possibilidade de ocorrer incapacidade de honrar os compromissos assumidos, resultantes de desequilíbrio de caixa gerado pelo descasamento dos prazos de vencimentos das operações ativas e passivas (Assaf, 2001).

Uma instituição é considerada sem liquidez se os seus passivos se tornarem exigíveis antes da realização de ativos ou da obtenção de funding suficiente para suprir as necessidades financeiras, seja por má administração dos prazos, seja por inadimplência de devedores.

Já na renda variável, decorre da dificuldade de vender as ações no mercado, com rapidez e por um preço justo. Ações menos negociadas expõem o investidor ao risco de liquidez.

2.5 RISCO DE CRÉDITO

Medida numérica da incerteza relacionada ao recebimento de um valor contratado/compromissado, a ser pago por um tomador de empréstimo, contraparte de um contrato ou emissor de um título, descontadas as expectativas de recuperação e realização de garantias. Esse tipo de risco refere-se ao possível não-recebimento dos recursos a que se tem direito ou ao seu recebimento fora do prazo e das condições pactuadas (Assaf, 2001). Contudo este tipo de risco não se aplica ao mercado acionário, quando adquirimos ações, por menor que seja nossa participação na empresa, somos acionistas e não credores. A natureza da análise de risco de um investidor é diferente da de um banco que esteja emprestando dinheiro para a companhia, variando de objetivos, horizonte de tempo e perspectivas. O primeiro objetiva lucros, dividendos e valorização de papéis, enquanto o segundo objetiva receber de volta o principal e juros sobre o capital emprestado.

2.6 RISCO PAÍS

Consiste no grau de confiança que o mercado mundial deposita em um determinado país em relação à sua capacidade de honrar seus compromissos externos. Esse risco ocorre quando o governo ou autoridade dominante impossibilita a liberação, transferência, conversibilidade ou qualquer outra forma de câmbio ou troca de moeda local por outra moeda que tenha curso livre nos principais mercados mundiais (Assaf, 2001).

2.7 MENSURAÇÃO DO RISCO SISTEMÁTICO

Segundo Rios, ect. Afile (2002, p.300), o risco sistemático é fator crucial do retorno esperado do ativo, precisamos medir de alguma forma os níveis de risco sistemático de diferentes investimentos. A medida específica que utilizaremos é denominada coeficiente beta, e será usada a letra grega β para representá-la. O coeficiente beta, ou beta, para abreviar, nos diz quanto risco sistemático determinado ativo tem em relação a um ativo médio. Por definição, um ativo médio tem um beta de 1,0 em relação a ele mesmo. Um ativo com beta de 0,50 tem, portanto, a metade do risco sistemático de um ativo médio um ativo com beta igual a 2,0 tem o dobro. Coeficiente beta, portanto, é a quantidade de risco sistemático presente em determinado ativo com risco, relativamente a um ativo com risco médio (Assaf, 2001).

2.8 RELAÇÃO ENTRE VARIÂNCIA, DESVIO PADRÃO E VALORES ESPERADOS

No mercado de capitais uma medida que pode descrever adequadamente os retornos anuais passados, no mercado de ações, consiste no retorno médio de um período considerado

(Assaf, 2001). A medida dos retornos ou retornos esperados pode ser calculada por meio da fórmula abaixo:

$$\bar{R} = E_{(r)} = \frac{(R_1 + \dots + R_T)}{T - 1} \quad (01)$$

Onde,

\bar{R} – Retorno médio do período

$E_{(r)}$ – Retorno esperado do período

T – Número de anos no período

O retorno médio deve ser comparado a um parâmetro que represente uma aplicação com reduzida variabilidade, normalmente representada por um título de obrigação governamental, cujo risco de inadimplência é próximo de zero. A diferença entre tais retornos denomina-se retorno excedente do ativo com risco, em razão das oscilações de retornos bastante superiores às dos retornos dos títulos governamentais.

A segunda medida para caracterizar a distribuição das taxas de retorno é uma medida de risco existente nesses retornos. Essa medida é dada pelo grau de dispersão da distribuição de frequências, isto é, a medida de quanto um dado retorno pode se afastar do retorno médio. Se a distribuição apresentar dispersão grande, os retornos apresentam alto grau de incerteza. Para sabermos a variabilidade de retorno as medidas mais comumente utilizadas são a variância e o desvio padrão.

A variância é calculada da seguinte maneira:

$$Var(R) = s^2 = \frac{1}{T - 1} [(R_1 - \bar{R})^2 + (R_2 - \bar{R})^2 + \dots + (R_T - \bar{R})^2] \quad (02)$$

Onde:

$Var(R) = s_x^2$ - Variância dos retornos;

T - Quantidade de retornos anuais da amostra;

R_1, R_T - Retornos anuais observados;

\bar{R} - Retorno médio do período;

O cálculo do desvio padrão da amostra se da seguinte maneira:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})^2}{T - 1}} \quad (03)$$

Onde:

\bar{R} - média aritmética da amostra de n elementos;

$R_i - \bar{R}$ - desvio de cada um dos números R_i em relação à média da amostra (\bar{R});

2.9 RELAÇÃO ENTRE RISCO E RETORNO E A COVARIÂNCIA NA SELEÇÃO DE UMA CARTEIRA

A seleção de carteiras procura identificar a melhor combinação possível de ativos, obedecendo a preferência do investidor com relação ao risco e ao retorno esperados. Dentre as inúmeras possibilidades de formação de carteiras com os ativos disponíveis, devemos selecionar aquela que maximiza o grau de satisfação (utilidade) do investidor pela relação risco/retorno (Assaf, 2001).

Outro aspecto importante no risco de uma carteira é a forma como seus componentes se relacionam, isto é, covariam entre si. A covariância mede a extensão em que duas variáveis variam ao mesmo tempo e é muito utilizada pelos investidores para determinar o risco total associado com investimentos inter-relacionados.

2.10 EFEITOS DA CORRELAÇÃO SOBRE O RISCO DA CARTEIRA

Com o intuito de demonstrar mais claramente os efeitos da correlação dos retornos dos ativos sobre o risco de um portfólio, vamos admitir uma carteira formada por dois ativos A e B com os seguintes resultados separados:

Ativos	Retorno esperado E(R)	Risco (σ)
Ativo X	13,5%	14,34%
Ativo Y	10,5%	4,11%

Tabela 1: Ativos de Risco e Retorno. Fonte Markowitz, 195

O risco é calculado, conforme o modelo de Markowitz, levando-se em consideração o risco de cada ativo, sua participação na carteira e a correlação. A quantificação desse relacionamento é obtida estatisticamente por meio do coeficiente de correlação, que pode variar de +1 a -1. Quando o coeficiente de correlação for igual a -1, diz-se que as variáveis estão negativamente correlacionadas, isto é, quando a variável Y diminui, a variável X tende a elevar-se. Porém, quando o coeficiente de correlação for +1, diz-se que as variáveis estão positivamente correlacionadas, indicando então, que se a variável Y diminuir, a variável X tende a diminuir também. Podem, também, se encontradas, variáveis que se comportam de maneira totalmente independente entre si. Ou seja, não existe relação alguma entre as variáveis, o que permite dizer que são ativos não correlacionados. O coeficiente de correlação, neste caso, é igual a zero (Assaf, 2001).

Diante disto podemos dizer, que o conceito de diversificação de Markowitz, em que uma carteira tenha correlação negativa, permite a redução ou até a eliminação total do risco diversificável ou não sistemático, ficando, porém, sempre o risco sistemático.

2.11 DIVERSIFICAÇÃO E O SEU IMPACTO NO RISCO

Decisões financeiras de investimentos são tomadas com base no conhecimento dos fatos que temos presente e de probabilidade que podem ocorrer no futuro, num horizonte de curto, médio e longo prazo. Pode-se então concluir que as decisões financeiras são tomadas dentro de um contexto de total incerteza com relação a seus resultados, e que a incerteza aumenta quanto maior for o prazo determinado.

Quando diversos resultados possíveis podem ser quantificados por uma associação de incertezas e probabilidades diversas, diz-se que a decisão está sendo determinada em uma

situação de risco. Risco, portanto, está diretamente associado a possíveis mudanças futuras nos cenários e parâmetros sobre os quais foi baseada a decisão, no momento zero.

A diversificação entre mercados, produtos, papéis, prazo e seleção de carteiras favorecem a redução de risco. O risco procura quantificar os possíveis desvios (resultados – incluindo a possibilidade de perda), associados às probabilidades conhecidas e a estabelecer o grau de confiança (ou inversamente o grau de incerteza) de uma decisão de investimento que tem como objetivo um valor médio esperado (retorno esperado).

2.12 DIVERSIFICAÇÃO DE INVESTIMENTOS

2.12.1 Vantagens e limites de Redução do risco incorrido

Investidores são sempre orientados para minimizar o risco. Analistas e administradores de investimentos consideram a diversificação um método eficaz para somar as vantagens de cada investimento e neutralizar suas deficiências. Também é a diversificação bem estudada que permite ao investidor adaptar as características de sua carteira às necessidades e objetivos pessoais. Diversificam-se as aplicações por tipos de investimentos, ramos econômicos, regiões geográficas etc. Por meio da diversificação, é possível esperar que ativos com risco possam ser combinados no contexto de uma carteira de forma que se apure um risco menor que aquele calculado para cada um de seus componentes.

No entanto, essa redução constatada em uma carteira diversificada ocorre até certo limite, sendo impraticável a eliminação total do risco da carteira. Isso é explicado pela enorme dificuldade em encontrar-se, na prática, investimentos com correlação perfeitamente negativa, isto é, oposta.

2.13 SELEÇÃO DE CARTEIRAS E TEORIA DE MARKOWITZ

A avaliação de carteiras de investimentos, segundo Assaf, (2001), envolve três grandes fases de estudo: análise dos títulos, análise das carteiras e seleção de carteira. Já segundo Harry Markowitz (1952), o processo de seleção de uma carteira de ações pode ser dividido em dois estágios.

O primeiro começa com observação e experiência e termina com opiniões sobre a performance futura dos negócios avaliados. O segundo estágio começa com as opiniões relevantes sobre o futuro e termina com a escolha de uma carteira de ações. Este trabalho é baseado no segundo estágio.

Um investidor que esteja no mercado de ações, opções ou obrigações deve, ou pelo menos deveria, buscar o máximo retorno possível de seu investimento, dentro de níveis de risco aceitáveis. Isso parece lógico, já que risco e retornos, em geral, possuem uma correlação positiva entre si, quando um aumenta, o outro aumenta junto, quanto maior for o retorno, maior será o risco e vice-versa.

Porém essa relação entre risco e retorno pode ser trabalhada de forma que se consiga, através da diversificação, reduzir o risco de uma carteira a níveis algumas vezes menores que o risco do investimento mais seguro que participa da carteira, dependendo da correlação entre os componentes da carteira. Como será visto neste trabalho, pode-se através da diversificação do investimento, ou seja, composição de uma carteira de investimento, aumentar o retorno esperado mantendo o risco a níveis iguais ou menores que o risco individual de cada ativo.

2.14 RISCO DE UMA CARTEIRA

Segundo, Assaf, (2001), um aspecto relevante da teoria de portfólio é que o risco de um ativo mantido de uma carteira é diferente de seu risco quando incluído na carteira. No

estudo da diversificação, o risco de um ativo é avaliado pela sua contribuição ao risco total da carteira.

Elevando-se, de maneira diversificada, o número de títulos em uma carteira, é possível promover-se a redução de seu risco, porém a uma taxa decrescente. A partir de um determinado número de títulos, a redução do risco praticamente deixa de existir, conservando a carteira, de forma sistemática, certo nível de risco. Assim, até mesmo carteiras consideradas bem diversificadas costumam manter certo grau de risco, impossível de ser eliminado pela diversificação, denominado risco sistemático.

Este risco está demonstrado graficamente na Figura abaixo:

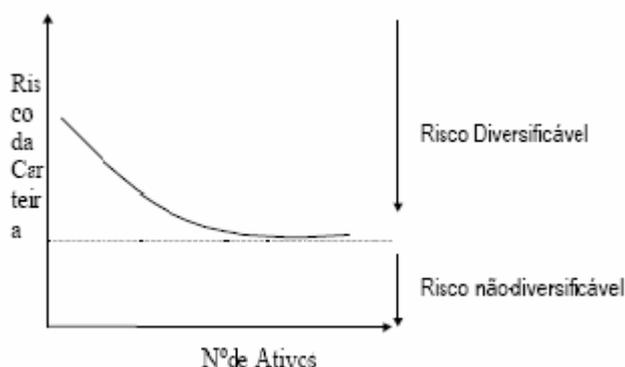


Figura 1: Gráfico Risco Sistemático, relação entre o risco Diversificável e Risco não Diversificável. Fonte: (Assaf, 2001)

O investidor baseado em algumas ferramentas quantitativas pode ter confiança na sua carteira de investimento, chamado também de portfólio, que busca o melhor método para maximizar retorno e minimizar risco, dependente na tolerância de risco do investidor. As ferramentas estatísticas mais utilizadas para medir risco retorno são desvio-padrão, variância, coeficiente de correlação, coeficiente de covariância, coeficiente de beta e índice de Sharpe. Abaixo breve definição destas ferramentas:

2.14.1 Desvio Padrão

Mede, estatisticamente, a variabilidade – grau de dispersão – de um conjunto de valores em relação a sua média. É uma medida que informa o quanto os valores de um conjunto distribuem-se ou dispersam-se em relação a seu ponto central – média. “A mensuração do risco de um investimento processa-se geralmente por meio do critério probabilístico, o qual consiste em atribuir probabilidades – subjetivas ou objetivas – aos diferentes estados de natureza esperados e, em consequência, aos possíveis resultados do investimento. O risco pode ser interpretado pelos desvios previsíveis dos fluxos de caixa resultantes de uma decisão de investimento”. (Assaf, 2003, p. 288).

2.14.2 Variância

Uma medida do grau de concentração da estimativa da média da amostra entorno da média da população é fornecida pela variância da média da amostra, que é a soma dos quadrados dos desvios (diferença entre a média da amostra e a média da população) dividida pelo número de amostras possíveis. Representando $s^2(\bar{X})$ a variância da média (Assaf, 2001).

2.14.3 Coeficiente de Correlação

É normalmente designado por $r(r\hat{o})$ para dados referentes a população e por r para dados referentes a amostras. É bastante utilizado nos problemas que envolvem o

relacionamento linear entre duas variáveis, pois, além de quantificar a correlação existente entre elas, de certa forma, ainda a qualifica (Assaf, 2001).

2.14.4 Coeficiente de Covariância

Reflete a variabilidade grau de dispersão dos valores individualmente em relação a sua média são o desvio-padrão e a variância. Visa identificar como determinados valores se inter-relacionam. É basicamente uma medida que avalia como as variáveis X e Y movimentam-se ao mesmo tempo em relação a seus valores médios (covariam). Em outras palavras, indica a simetria entre X e Y (Assaf, 2001).

2.14.5 Coeficiente Beta

Modelo que estuda o relacionamento a mensuração dos componentes básicos de avaliação de ativos, risco e o retorno, sendo usado no apoio às decisões em condições de risco, associando o retorno e o risco não diversificável para todos os ativos e especifica a relação entre risco e retorno exigido de um ativo quando ele é mantido em uma carteira bem diversificada, ou seja, o risco relevante de um ativo individual e a sua contribuição para o risco da carteira bem diversificada, indicando o incremento necessário ao retorno de um ativo, a fim de remunerar adequadamente o risco não eliminado pela diversificação (Assaf, 2001).

2.14.6 Índice de Sharpe

Índice que relaciona o retorno e o risco envolvido em determinado investimento, na tentativa de melhor qualificá-lo. Quanto maior o retorno e menor o risco do investimento, melhor será o Índice de Sharpe (Assaf, 2001).

2.15 SELEÇÃO DE CARTEIRAS

Seleção de carteiras é o estudo de como se pode investir um patrimônio. É um processo para compensar o risco e o retorno esperado para encontrar a melhor carteira de ativos e passivos. (Bodie, 1999) O risco que uma pessoa está disposta a assumir pode variar muito dependendo de fatores como idade, nível social, estado civil, número de filhos, perspectivas futuras e vários outros fatores.

Deste modo nunca existirá uma carteira de ações que agrade a todos, já que quanto maior o retorno desejado maior será o risco a se assumir. Ao selecionar uma carteira, começa-se por determinar os objetivos e o horizonte de tempo. As decisões que uma pessoa toma hoje são influenciadas pelo que ela pensa que pode acontecer amanhã.

A composição de uma carteira pode variar muito devido ao fato de existirem diferentes tipos de investidores que desejam assumir diferentes riscos e retornos. Markowitz (1952) e Sharpe (1964) contribuíram imensamente com o processo de seleção de carteiras de investimentos.

Ambos desenvolveram metodologias de avaliação e compensação do risco através da diversificação de investimentos. As teorias desenvolvidas por eles são amplamente utilizadas nos dias hoje, ambos demonstraram matematicamente que não se deve, carregar todos os ovos na mesma cesta.

Normalmente, uma ação com um maior retorno tende a ser um investimento arriscado, do que uma ação com um menor retorno. Por exemplo, duas ações “A” e “B” tiverem o

mesmo retorno, o investidor observando somente esta variável para sua decisão, tenderia ficar indiferente em escolher a opção pela ação “A” ou “B”, mas posteriormente analisando a estabilidade do retorno observou-se que a ação “A” tem uma maior estabilidade de retorno em relação ao retorno da ação “B”; ou seja, duas ações com retornos iguais podem não ter o mesmo grau de risco. Segundo Levine (2000, p.133), “*dois conjuntos de dados podem ter as mesmas medidas de da tendência central, porém divergir bastante em termos de variação*”, podendo ser avaliada por algumas das medidas de dispersão.

A dispersão considera como todos possíveis retornos se afastam do retorno médio; uma dispersão maior ao redor do retorno médio implica que uma ação leva mais risco, sendo que esta dispersão é medida através da variância ou do desvio-padrão.

A variância “é aproximadamente (ou quase) a média das diferenças ao quadrado entre cada uma das observações de um conjunto de dados e a média aritmética do conjunto” Levine. (2000, p.133). O desvio-padrão mede como valores atuais diferem dos valores esperados para uma determinada série de valores, e é a raiz quadrada da variância.

Às vezes é desejável determinar como um retorno de um investimento varia de outros retornos de outros investimentos, sendo que esta variabilidade é analisada através da covariância ou coeficiente de correlação. Uma covariância positiva indica que variáveis se mudam para a mesma direção, e uma covariância negativa indica eles se mudam para direções opostas.

Quando a covariância assume valores maiores (positivo ou negativo) indica que existe uma relação mais forte e, quando são valores menores (mais próximo de zero) indica que, a relação entre as duas variáveis é mais fraca. Porém, covariância, semelhante à variância, é um número absoluto e pode ser difícil de interpretar a sua magnitude por si só.

Então, é convertido frequentemente no coeficiente de correlação que é mais fácil interpretar que covariância. Os valores numéricos do alcance de coeficiente de correlação de +1 a -1. Se duas variáveis movem precisamente juntas, o valor do coeficiente de correlação é +1. Isto indica correlação positiva perfeita. Se duas variáveis movem precisamente opostas uma ao outra, então o valor do coeficiente de correlação é -1. Baixos valores numéricos indicam pequena relação entre as duas variáveis, como -0.10 ou +0.15.

Segundo Rattiner (2001), a diversificação requer que os investimentos não sejam altamente correlacionados, sendo que o risco é reduzido por uma mais baixa correlação

positiva ou uma maior correlação negativa entre os retornos, porém, a eliminação de risco não elimina, necessariamente retornos positivos.

Um conceito importante para analisar a carteira é que o retorno de investimento individual e seu risco são importantes, mas o impacto do investimento na carteira é mais importante, pois é possível que um investimento com um grande retorno reduza o risco em uma determinada carteira, porque o investimento tem um retorno que é negativamente correlacionado com os lucros oferecido pelos outros investimentos. Então, o sucesso da carteira se dará pela melhor composição possível do mesmo, de tal forma que minimize o risco e aumente o retorno esperado, ou seja, o investidor pode reduzir o risco, sem necessariamente reduzir o seu retorno.

2.16 COMBINANDO O ATIVO SEM RISCO E UM ÚNICO ATIVO DE RISCO

Em primeiro lugar deve-se definir o que é um ativo sem risco. Ativo sem risco segundo Bodie (1999) refere-se a um ativo que oferece uma taxa de retorno previsível ao longo da duração do horizonte de transação, isto é, o horizonte de decisão mais curto possível. Se por exemplo tomar-se o dólar americano como unidade de conta no horizonte de transação em um dia, a taxa sem risco é a taxa de juros dos títulos do Tesouro com vencimento no dia seguinte. Supondo que se tenha uma quantia (X) de dinheiro para investir no ativo sem risco (A_f) com retorno (R_f) e no ativo com risco (A_r) com retorno ($R_r > R_f$) e desvio-padrão (σ_r). Quanto deverá ser investido em cada ativo?

Observe que se for tomada a decisão de se investir 100% do principal no ativo sem risco, o retorno será de (R_f) e o desvio-padrão será zero. Porém se for investido todo o principal no ativo de risco, o retorno será de (R_r) e o desvio-padrão será (σ_r). Assim, o retorno esperado de qualquer composição de carteira estará em algum ponto da reta apresentada pela figura 2 representada a seguir:

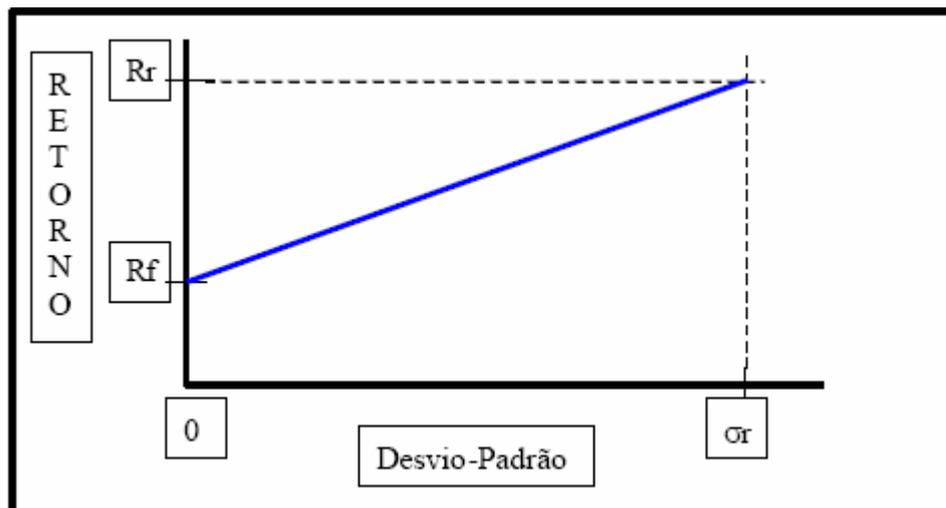


Figura 2: Linha de compensação Risco/Retorno. Fonte: Assaf, 2001.

Supondo que se aplique 100% no ativo sem risco, o investimento estará no ponto de cruzamento (R_f) e zero. À medida que se desloca o dinheiro para o ativo com risco, o retorno aumenta, porém o desvio-padrão também, até que se chegue ao ponto de 100% de investimento no ativo com risco.

Considerando-se (w) a proporção do investimento total a ser alocada ao ativo com risco, a proporção remanescente ($1 - w$) deverá ser alocada ao ativo sem risco, como mostrado na equação 1:

$$E(r) = w * R_r + (1 - w) * R_f \quad (04)$$

Onde $E(r)$ é o retorno esperado da composição.

O desvio padrão da carteira pode ser encontrado multiplicando-se o desvio padrão do ativo com risco vezes a composição deste na carteira, ou seja, (Assaf, 2001):

$$s = s_r * w \quad (05)$$

2.17 MODELO DE MARKOWITZ

Markowitz com a finalidade de precificar ativos demonstrou um modelo que conduzia à inversão de uma matriz de covariâncias (Toledo Filho, 1999). Uma matriz de covariâncias é uma matriz que apresenta as covariâncias dos títulos formadores de uma carteira, tomados dois a dois, ou seja, apresenta o relacionamento dos títulos entre si.

Esta matriz serve para poder calcular o risco da carteira, pois os riscos dos títulos podem se anular (quando tem covariância negativa) e diminuir o risco total da carteira. Assim a partir desta matriz também é possível determinar quais mudanças na carteira trariam diminuições no seu risco total.

A covariância entre os títulos A e B corresponde ao produto das diferenças entre os retornos de cada título e suas respectivas médias, quando se tomam dois ou mais títulos conjuntamente, torna-se necessário determinar o grau de associação entre os retornos dos títulos tomados dois a dois, dada pela probabilidade conjunta de retornos, isto é, pela probabilidade de que dois eventos de retornos dos títulos em consideração ocorram simultaneamente.

O risco da carteira então pode ser medido pela variância, calculada através da equação abaixo (Winston & Albrington, 2000):

$$\mathbf{S}_p = x_1^2 \mathbf{S}_1^2 + x_2^2 \mathbf{S}_2^2 + \dots + x_n^2 \mathbf{S}_n^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j \mathbf{r}_{ij} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \quad (06)$$

Onde:

$\mathbf{S}_{i=1,2,\dots}^2$ é variância dos retornos no ativo i ;

$\mathbf{S}_{i=1,2,\dots}$ é desvio-padrão dos retornos no ativo i ;

$\mathbf{r}_{i \neq j}$ é correlação entre retornos passados no ativo i e j ;

x_i é o percentual do ativo i na carteira;

Diversificação ingênua é aquela que diz que o investidor deve investir em mais de uma ação a fim de reduzir o risco de prejuízo. Presumivelmente, o conselho implica, também, que quanto maior for o número de ações na carteira, tanto menor será o risco de prejuízo.

Diversificação eficiente exige a combinação dos títulos em carteira de modo a reduzir o risco da carteira sem sacrificar o seu retorno esperado. Tanto os conceitos de seleção de carteira propostos por Markowitz quanto os conceitos de pesquisa operacional que serão utilizados neste trabalho já estão sendo utilizados há algum tempo.

Segundo Bernstein (1997) o objetivo de Markowitz foi utilizar a noção de risco para compor carteiras para investidores que consideram o retorno esperado algo desejável e a variância do retorno algo indesejável. O que parece bem lógico e sensato para a grande maioria dos investidores.

O modelo mostra que enquanto o retorno de uma carteira diversificada equivale à média ponderada dos retornos de seus componentes individuais, sua volatilidade será inferior à volatilidade média de seus componentes individuais. Mostrando que a diversificação é uma espécie de dádiva (Bernstein, 1997).

Como pode ser observado nas fórmulas 03 e 04, embora o retorno esperado de uma carteira seja a média ponderada dos retornos individuais, o mesmo não pode ser dito para a variância ou risco da carteira. De acordo com o modelo de Markowitz a variância da carteira depende da covariância entre os pares de ativos, a qual por sua vez depende da correlação entre os ativos. Assim, quando dois ou mais ativos pouco relacionados compõem uma carteira de investimentos consegue-se um risco menor que a média ponderada dos riscos individuais, conseguindo algumas vezes um risco menor que o do ativo de menor risco com um retorno maior que o deste ativo. Abaixo se pode observar a figura 03 que apresenta as chamadas fronteiras eficientes, que mostra o risco e o retorno para as diversas composições possíveis entre dois ou mais ativos. Para facilitar o entendimento a figura 03 representa uma composição entre dois ativos. Observa-se que quanto menor a correlação entre os dois ativos, menor é o risco da carteira (Assaf, 2001).

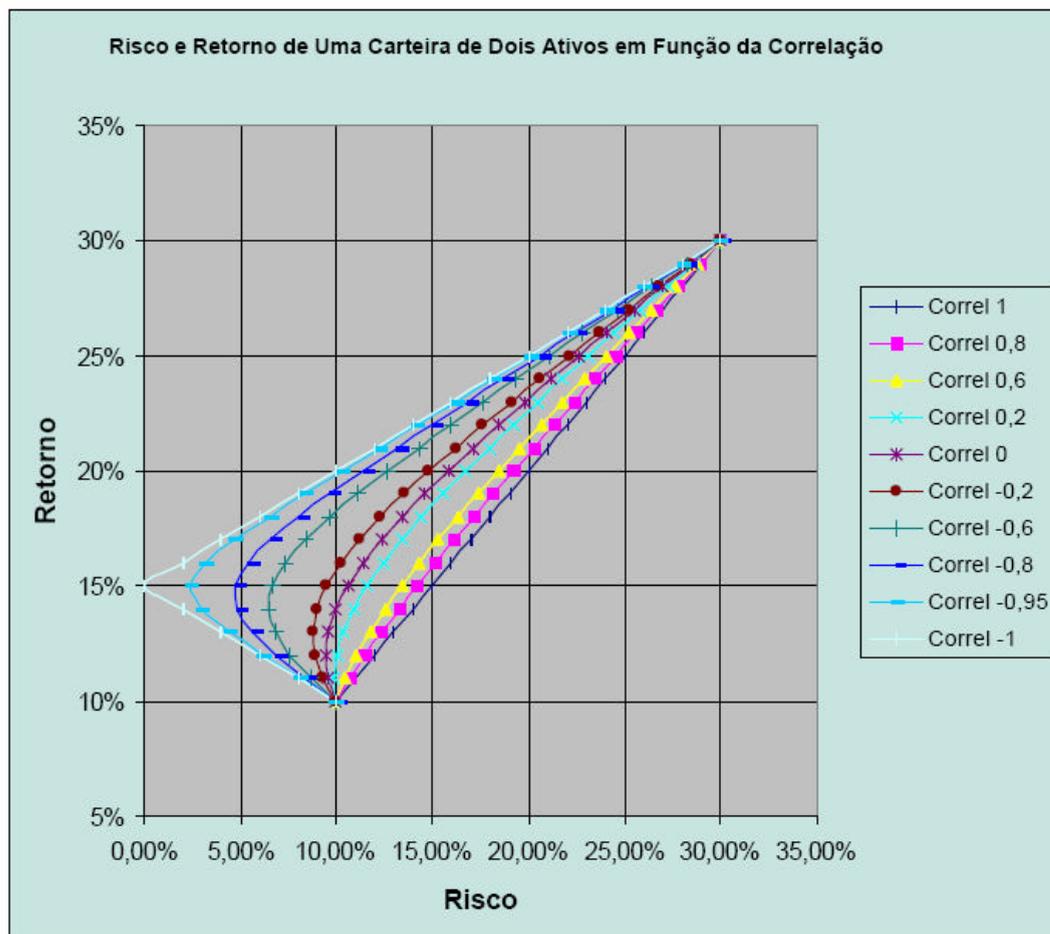


Figura 3: ¹ Gráfico de Risco e Retorno. Fonte: Assaf, 2001.

2.18 PESQUISA OPERACIONAL

Não há definição unânime para pesquisa operacional. A pesquisa operacional é, mais um conceito (abstração de idéia), muito abrangente, sobre a busca da melhor utilização (técnica, econômica, social, política) de recursos escassos e processos diversos, através da aplicação de métodos científicos, visando a maior satisfação possível (utilidade), do usuário ou público, definidos num contexto.

¹ Nota-se que quando a correlação entre os ativos é (1), não há melhora significativa na composição da carteira, o que é lógico pelo fato de se diversificar o investimento em ativos que reagem da mesma maneira as notícias do mercado. Já quando se tem uma correlação perfeitamente negativa (-1) pode-se reduzir o risco à zero, mantendo um retorno esperado de 15%. Infelizmente não existem ativos com correlação perfeitamente negativa no mercado financeiro.

Esse contexto para uma aplicabilidade aproxima ferramentas da informática as bases de conhecimento através da inserção de cálculos e seus parâmetros em modelos simuladores, segundo (Gebler, 2003). Para Ehrlich (1976, p.9) “Pesquisa operacional é uma colcha de retalhos, constituída de diversas técnicas quantitativas aplicadas às áreas de administração, produção, planejamento e organização”. Para se resolver os múltiplos problemas em uma organização, podem-se utilizar as várias técnicas conhecidas, sendo que, não existe uma regra que indique qual a melhor. O desenvolvimento do trabalho de pesquisa operacional envolve itens para aplicação dos métodos científicos a problemas reais encontrados no mercado de capitais, como ferramentas auxiliar para a tomada de decisões, em quaisquer setores e níveis da economia.

Harry Markowitz (1952) quando escreveu seu artigo *Portfólio Selection* era um estudante de pós-graduação em pesquisa operacional da Universidade de Chicago. Esse fato mostra que já há algum tempo tem-se estudado a aplicação da PO na seleção de carteiras. Os pequenos investidores muitas vezes tomam decisões sem a aplicação de nenhum conceito sobre mercado de capitais.

Para a observação e o acompanhamento dos resultados baseados em modelos lineares, o conhecimento compreende da entrada de componentes dos modelos sendo estes elementos finitos. As relações inseridas através de inequações que descrevem o comportamento dos resultados matemáticos expressos pelas diferentes expressões, dentre elas o que se preocupa o Pórtfólio de Seleção de Markowitz, conceituados dentro do mercado financeiro como apresentação da aplicação da PO na seleção de carteiras, conceituadas para uma aplicação de mercado.

2.19 PROGRAMAÇÃO LINEAR

Programação linear é uma ferramenta de pesquisa operacional, aplicada a solução de problemas que objetivam a otimização refere: (i) a maximização de parâmetros, tais como rentabilidade, retorno, lucro; ou (ii) a minimização de parâmetros, tais como, volatilidade, desvio padrão, risco.

Os modelos de programação linear são implementados por meio da elaboração de sistemas lineares constituídos de: (1) conjunto de equações e inequações que descrevem as restrições do sistema real em estudo; e (2) uma equação para descrever a função objetivo que expressa o parâmetro a ser maximizado ou minimizado, conforme supra citado.

Segundo Moreira (2004), a programação linear é um modelo matemático desenvolvido para resolver determinados tipos de problemas onde as relações entre as variáveis relevantes possam ser expressas por equações e inequações lineares. Daí a sua grande importância para a tomada de decisão. Conforme Maculan (1980) uma tomada de decisão considera as restrições e está ligada a um certo objetivo. Deve-se ter um cuidado especial na coleta, organização e seleção das variáveis envolvidas no problema, seguindo-se criteriosamente cada passo até a formulação matemática com a devida função objetivo.

Segundo Puccini (1972) a programação linear visa solucionar problemas de distribuição de recursos limitados objetivando, por exemplo, maximização de rentabilidade ou minimização de riscos. Conforme Kolman (1988, p.301) “como ferramenta essencial para a ciência da administração e a pesquisa operacional, resultou em uma grande economia de dinheiro”.

No presente trabalho foram utilizados, com base na teoria de Markowitz, modelos matemáticos de programação linear para a determinação da carteira de investimento de ações listadas na Bovespa, que possa trazer o maior retorno possível para cada percentual de risco agregado. O desenvolvimento foi realizado em planilha Excel, possibilitando que mesmo os investidores que pouco conhecem sobre essas teorias possam aplicá-las sem grandes dificuldades.

3 MÉTODO

3.1 FORMULAÇÃO DE UM PROBLEMA DE PESQUISA OPERACIONAL

Para se resolver um problema de pesquisa operacional utilizando a programação linear, é aconselhável que se siga uma metodologia como a proposta por Wayne (1995):

1. Definição das variáveis de decisão: são as incógnitas que devem ser determinadas na solução do problema.

2. Definição das limitações ou restrições: servem para considerar as limitações físicas do sistema, o modelo deve incluir restrições que limitam os valores possíveis das variáveis de decisão. Normalmente são expressas em forma de equações matemáticas.

3. Definição da função objetivo (FO): é uma função que define a medida de efetividade do sistema como uma função matemática de suas variáveis de decisão, a fim de minimizar o risco da carteira.

Além de se seguir esses passos, a literatura ainda recomenda que antes da construção de um modelo matemático deve-se responder a 4 perguntas:

1. Qual é a medida de efetividade do objetivo? Como será expressa a solução do problema.

2. Quais são os fatores sob controle (variáveis controladas)?

3. Quais são os fatores não controlados?

4. Quais são as relações entre estes fatores e os objetivos?

Após, formulado o modelo, pode-se partir para a otimização, que significa maximizar ou minimizar a função objetivo, variando-se as variáveis de decisão.

3.2 DESCRIÇÃO DA AMOSTRA

Como base de dados para se dar início da seleção da carteira dentre diversos ativos, utilizaremos:

- Ativos negociados na Bovespa (Bolsa de Valores de São Paulo);
- Que tenham sido negociados diariamente na Bovespa, no período de janeiro de 2000 a novembro de 2006;
- O critério para seleção dos ativos que resultou na amostra final de 15 empresas, resultou de uma seleção aleatória dentre os títulos mais negociados dos diversos setores que compõem a carteira virtual do Índice Bovespa;
- Foi utilizado como fonte de pesquisa, para coleta dos dados dos ativos, o site <http://br.financas.yahoo.com>;
- Foram coletados dados de fechamento mensais ajustados de cada ativo;
- Posteriormente, calcular-se-á a variação percentual mensal de cada ativo;
- Taxa de juros utilizados no cálculo do solver, como retorno mínimo esperado, fora de 2,50% a.m. (34,49% a.a.);
- A taxa livre de risco no período de análise, 01/2000 a 10/2006 fora de 292,73%, ou 1,47% a.m. fonte www.bcb.gov.br; acessada em novembro de 2006.

3.3 APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR NA SELEÇÃO DE CARTEIRAS

Um investidor deseja compor uma carteira de ações com base em ativos diferentes. Utilizando-se o método de Markowitz, qual é a melhor combinação de ações que minimiza o risco de acordo com um retorno desejado?

Conforme método proposto por Wayne (1995), as variáveis de decisão deste trabalho são:

Participações individuais, X_i

Retorno da carteira, E

Risco da carteira, V

Retorno individual de cada ativo, m_i

Variância s^2 e Covariâncias, s_{ij}

Deseja-se saber qual deverá ser a porcentagem de investimento em cada ativo (X_i) a fim de reduzir o risco. A função objetivo neste exemplo será de minimizar o risco ou a variância dada pelo modelo de Markowitz. O modelo de Markowitz apresentado anteriormente revela quais são as restrições que devem ser respeitadas na solução deste problema. Ou seja:

$$\text{Participações individuais (} X_i \text{) } \geq 0 \quad (06)$$

$$\text{Soma das participações individuais} = 100\% \quad (07)$$

Para que se possa resolver esse problema, deve-se determinar qual é a taxa de retorno mínima desejada, adota-se que seja de 2,50% a.m., então:

$$\text{Retorno da carteira (} E \text{) } \geq 0,025 \quad (08)$$

Posto isso, o problema pode ser apresentado da seguinte forma:

Minimizar:

$$VAR(R_p) = \sum_{i=1}^{15} \sum_{j=1}^{15} x_i x_j s_{ij} \quad (07)$$

S.a:

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 1 \quad (08)$$

$$0 \leq x_i \leq 1$$

$$R_p > 0,01;$$

Como foi dito no item anterior, quatro perguntas devem ser respondidas antes de se iniciar a solução do problema de PO. Deste modo, as respostas para as perguntas devem ser:

1. A medida de efetividade do objetivo será feita através da variância da carteira em porcentagem;
2. As variáveis controladas são: Retorno da carteira, Risco ou Variância da carteira e as Participações individuais;
3. Os fatores não controlados são: Retornos individuais, Variâncias e Covariâncias;
4. As relações entre estes fatores e o objetivo são dadas pelo modelo de Markowitz;

Com base nos retornos individuais, calculados a partir das cotações de fechamento ajustado, apresentados na Tabela 2, foram calculados as variâncias, covariâncias e o retorno esperado. A planilha Excel possui três fórmulas conhecidas como [MÉDIA, VARP e COVAR] estas funções foram utilizadas para calcular respectivamente [Retorno médio, Variância e Covariância dos pares de ações].

A Tabela 4 mostra uma composição de ativos não otimizada (são investidas proporções iguais em cada ativo). A partir desses dados iniciais, foi feita a otimização para se encontrar a carteira ótima. As variâncias e covariâncias entre os pares de ativos que poderão compor a carteira foram calculadas através da utilização das fórmulas (VARP e COVAR) do MS Excel.

Cada ativo contribui com a variância da carteira segundo a equação sete do modelo de Markowitz apresentada na página 23. Através do Excel, a variância da carteira foi calculada utilizando-se da fórmula 07.

Através do MS Excel, foi calculado o resultado desta fórmula com a função (MATRIZ.MULT), tabela 04. A tabela 5 mostra os resultados de retorno esperado e risco (variância) para a carteira com a composição da tabela 02. A tabela 3 mostra o quanto que cada ativo contribui com a variância e com o retorno, o que pode ser observado nas duas últimas linhas da tabela.

O objetivo é minimizar a variância mantendo um retorno esperado de no mínimo 34,49% a.a. A ferramenta (SOLVER) do Excel foi utilizada para encontrar nesse processo as participações individuais de cada ativo na carteira total. As restrições são aquelas vistas anteriormente. Deve-se também prever que não deve haver valores negativos para as participações dos ativos, isso deve ser feito dentro do sub-menu (Opções).

Tabela 2: Base de dados para cálculo Solver.

Data	cemig4	Csna3	tlpp4	elet6	petr4	ggbr4	vale5	ambv	bbdc4	cpsl3	pcar4	usim5	bbas3	itau4	arcz6	ibovespa
dez/99	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
jan/00	-4,61%	-1,52%	17,95%	-5,88%	13,21%	-1,76%	-4,93%	-9,99%	-13,50%	-1,35%	1,52%	-9,47%	-5,70%	11,11%	-7,30%	7,76%
fev/00	4,42%	-5,98%	-14,38%	2,13%	2,16%	-7,37%	-1,09%	50,00%	13,48%	-1,35%	3,50%	-6,97%	-15,57%	10,71%	1,75%	0,91%
mar/00	-9,75%	11,99%	-12,30%	-11,06%	-8,87%	-4,18%	-5,92%	-10,37%	-8,13%	-1,68%	-16,93%	-12,70%	-4,61%	-12,90%	-6,59%	-12,81%
abr/00	2,17%	-17,22%	3,34%	3,72%	-2,58%	-4,13%	1,80%	2,49%	-6,12%	13,01%	6,79%	5,97%	-6,67%	1,85%	-11,66%	-3,74%
mai/00	12,47%	17,67%	-26,29%	29,12%	30,04%	5,39%	11,92%	17,33%	25,36%	18,74%	6,37%	4,23%	15,18%	15,27%	13,19%	11,84%
jun/00	5,84%	-5,70%	-18,13%	6,54%	-14,10%	6,73%	-3,39%	26,46%	-0,58%	2,42%	-3,25%	17,40%	-3,10%	4,41%	10,12%	-1,63%
jul/00	-2,53%	0,74%	17,50%	-12,96%	17,76%	11,16%	0,24%	1,09%	0,00%	-8,02%	21,91%	10,07%	1,13%	4,54%	-2,51%	5,42%
ago/00	-6,29%	15,96%	-12,46%	1,27%	-4,92%	-9,39%	-5,86%	9,13%	-1,16%	2,79%	0,27%	-0,92%	1,46%	-5,20%	-15,43%	-8,18%
set/00	-5,15%	-12,10%	-6,42%	-9,54%	-3,36%	-15,43%	-5,19%	4,93%	-22,35%	8,15%	-1,70%	-6,60%	-6,56%	-9,45%	-9,46%	-6,66%
out/00	-13,03%	-8,81%	-8,72%	-2,37%	-6,42%	-24,50%	-10,68%	-2,58%	13,64%	-14,47%	-2,81%	-18,36%	-2,57%	1,01%	-17,91%	-10,63%
nov/00	11,88%	-2,81%	12,20%	8,81%	-3,43%	18,01%	20,84%	13,25%	4,00%	17,51%	7,87%	9,69%	4,92%	23,34%	22,73%	14,84%
dez/00	26,93%	20,58%	15,76%	11,13%	19,05%	20,40%	11,16%	18,89%	-3,21%	-2,50%	-0,97%	35,49%	32,66%	0,81%	0,74%	15,82%
jan/01	-14,22%	19,17%	-4,85%	-8,78%	0,83%	-11,21%	-0,38%	-10,52%	-15,23%	-12,82%	-4,39%	-12,57%	-6,06%	-8,58%	-5,51%	-10,08%
fev/01	-10,78%	-6,08%	-8,55%	9,55%	-14,47%	0,00%	0,76%	1,00%	1,56%	-8,24%	-1,49%	-15,31%	0,55%	-1,46%	6,23%	-9,14%
mar/01	-7,84%	-32,53%	8,27%	-13,84%	13,75%	6,26%	-3,94%	6,53%	6,92%	12,82%	-6,31%	-0,94%	18,98%	5,35%	15,38%	3,32%
abr/01	-8,90%	10,26%	0,00%	-26,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-6,82%	-0,17%	-23,65%	-9,25%	7,91%	0,00%	0,00%
mai/01	0,00%	-6,96%	-0,66%	0,00%	11,92%	-21,50%	11,99%	-0,56%	-4,32%	0,00%	0,00%	-2,49%	0,00%	0,00%	30,16%	-1,80%
jun/01	19,10%	-18,23%	-13,04%	6,69%	-9,67%	12,87%	-8,03%	0,94%	0,75%	-4,88%	-11,57%	0,64%	22,29%	5,76%	2,44%	-0,61%
jul/01	-4,00%	-8,72%	-3,96%	13,94%	0,50%	-4,94%	0,69%	-7,41%	-2,99%	-16,65%	-11,81%	-3,81%	-8,02%	-3,52%	-5,24%	-5,54%
ago/01	5,28%	-24,09%	2,44%	3,24%	1,41%	-2,83%	-2,81%	-3,60%	-1,54%	-8,48%	2,05%	-5,95%	1,47%	-9,92%	11,06%	-6,64%
set/01	-7,17%	3,64%	-14,78%	-8,11%	-6,73%	-17,58%	2,90%	-11,20%	-7,81%	-10,92%	-32,82%	-30,44%	-17,63%	-3,16%	-9,95%	-17,17%
out/01	3,88%	25,15%	16,93%	13,20%	1,23%	38,97%	6,46%	2,45%	-3,39%	-7,55%	18,51%	-1,01%	4,34%	0,88%	20,60%	6,85%
Nov/01	14,26%	4,15%	14,36%	-6,04%	-4,69%	16,40%	-6,57%	9,46%	12,28%	-1,02%	12,94%	46,60%	18,31%	2,62%	-8,96%	13,79%

dez/01	8,18%	2,19%	8,23%	-0,24%	3,37%	-2,73%	2,29%	-0,83%	8,59%	7,22%	11,20%	13,23%	16,25%	0,00%	-10,53%	5,00%
jan/02	8,09%	10,99%	-8,02%	3,88%	-4,23%	7,81%	-0,37%	-2,52%	-3,60%	7,69%	5,08%	10,04%	-15,01%	-3,70%	7,67%	-6,31%
fev/02	6,20%	1,22%	13,37%	11,15%	12,71%	19,57%	12,08%	0,83%	14,93%	3,57%	6,15%	14,34%	22,53%	20,66%	19,48%	10,31%
mar/02	-8,68%	11,43%	5,78%	-4,91%	4,58%	2,18%	1,67%	-2,75%	1,95%	1,55%	-6,20%	-5,37%	8,01%	-9,29%	-5,17%	-5,54%
abr/02	7,81%	3,44%	-7,04%	-4,38%	-4,92%	12,10%	4,15%	7,70%	-1,27%	-4,92%	6,23%	6,54%	16,29%	1,08%	7,97%	-1,28%
mai/02	-9,28%	-8,49%	8,19%	-9,91%	-0,66%	-1,59%	17,32%	-4,28%	-5,16%	-0,91%	-3,46%	-4,36%	-2,89%	-7,41%	0,97%	-1,71%
jun/02	-5,45%	-3,86%	-0,91%	-9,49%	-10,42%	-5,58%	-3,39%	-6,72%	-15,65%	-10,78%	-4,15%	-11,15%	-31,37%	-7,83%	9,42%	-13,39%
jul/02	-17,19%	-4,71%	-7,81%	-21,45%	-15,42%	-0,43%	5,47%	-3,54%	-20,97%	-5,07%	-17,48%	-22,81%	-4,12%	-22,81%	11,60%	-12,35%
ago/02	5,28%	-25,06%	4,79%	3,94%	6,44%	13,40%	-8,20%	0,36%	14,29%	-2,13%	10,00%	9,11%	31,68%	17,81%	-17,32%	6,34%
set/02	-25,79%	21,95%	-9,85%	-30,30%	-16,00%	-21,97%	19,07%	-0,95%	-20,54%	-17,39%	1,75%	-22,12%	-26,45%	-18,38%	8,38%	-16,94%
out/02	19,34%	31,06%	23,31%	25,13%	19,90%	31,69%	12,19%	27,06%	20,22%	0,00%	22,33%	19,71%	21,72%	34,74%	2,11%	17,92%
nov/02	-3,86%	5,46%	-1,99%	1,67%	-0,41%	-4,45%	-0,13%	3,19%	-0,93%	19,76%	0,86%	14,53%	3,90%	-4,37%	5,85%	3,35%
dez/02	11,38%	12,91%	-6,03%	21,26%	5,21%	6,48%	4,97%	-1,82%	16,04%	-3,32%	-6,03%	7,40%	-3,26%	12,09%	9,92%	7,22%
jan/03	-5,29%	7,37%	-12,36%	-13,30%	2,33%	-7,84%	-5,84%	-6,48%	-10,57%	2,27%	-8,80%	12,80%	-1,84%	-9,91%	-0,30%	-2,90%
fev/03	-9,40%	4,83%	12,41%	-12,46%	-10,16%	4,83%	6,64%	-0,59%	2,73%	8,89%	-10,86%	2,27%	3,82%	1,61%	4,01%	-6,03%
mar/03	11,28%	-11,24%	-8,55%	13,09%	8,77%	-7,07%	-10,61%	11,95%	15,04%	7,14%	-3,62%	20,99%	9,69%	17,13%	-4,14%	9,66%
abr/03	21,95%	-0,85%	12,94%	23,21%	7,48%	15,60%	-11,59%	3,74%	2,31%	8,57%	2,08%	17,07%	20,61%	4,95%	-8,93%	11,38%
mai/03	-2,57%	21,98%	-9,26%	0,98%	5,79%	-14,33%	7,31%	1,72%	-0,75%	28,07%	1,80%	1,57%	20,47%	3,63%	-5,23%	6,89%
jun/03	-12,18%	16,08%	4,20%	-12,25%	-3,33%	7,82%	-4,93%	-2,19%	-9,85%	19,86%	-0,84%	20,76%	-14,44%	-4,74%	1,72%	-3,35%
jul/03	3,01%	22,84%	-6,67%	3,53%	10,61%	2,69%	19,21%	2,24%	12,61%	2,86%	23,85%	18,76%	8,48%	11,80%	24,58%	4,62%
ago/03	19,30%	3,71%	8,77%	8,17%	7,75%	31,29%	7,76%	10,46%	5,22%	32,23%	7,34%	11,83%	11,68%	5,40%	10,20%	11,80%
set/03	6,06%	14,33%	7,49%	9,93%	-0,22%	-7,93%	2,97%	-3,04%	-9,22%	0,83%	-8,56%	14,72%	3,90%	-7,35%	-3,46%	5,52%
out/03	23,66%	13,57%	13,72%	39,20%	3,87%	2,25%	9,83%	-3,48%	5,47%	-0,75%	8,24%	17,67%	17,50%	12,98%	2,30%	12,31%
nov/03	10,88%	16,94%	1,34%	10,78%	6,16%	17,40%	-0,35%	13,21%	17,78%	3,69%	13,13%	21,64%	30,32%	5,49%	-0,62%	12,25%
dez/03	12,00%	4,34%	9,16%	8,36%	14,23%	24,49%	28,68%	6,48%	6,29%	10,93%	7,47%	26,53%	-2,04%	15,77%	33,33%	10,17%

jan/04	-5,70%	13,76%	10,35%	-21,91%	2,48%	0,40%	-5,78%	-4,74%	-5,33%	3,80%	-4,30%	-9,40%	-15,02%	-2,79%	-12,74%	-1,73%
fev/04	4,54%	6,93%	-4,18%	-2,27%	4,72%	1,72%	5,30%	10,66%	1,87%	3,37%	-0,61%	8,09%	8,83%	0,36%	12,43%	-0,44%
mar/04	-2,98%	-29,87%	2,71%	9,59%	4,24%	7,94%	-6,52%	-25,29%	-5,03%	9,05%	-9,35%	19,52%	7,54%	-3,43%	5,87%	1,78%
abr/04	-9,01%	-73,83%	-10,98%	-14,61%	-12,61%	-7,76%	-16,47%	-7,47%	-13,82%	-9,54%	-16,80%	-26,58%	-17,94%	-13,79%	-16,44%	-11,45%
mai/04	-4,33%	4,13%	-6,39%	-1,97%	-3,93%	5,81%	18,42%	9,01%	10,42%	8,28%	-5,98%	2,24%	8,90%	12,51%	10,22%	-0,32%
jun/04	9,31%	16,14%	10,05%	5,79%	7,73%	13,27%	-10,70%	4,94%	8,55%	7,93%	11,78%	8,59%	8,17%	10,00%	-1,08%	8,21%
jul/04	20,52%	3,07%	10,79%	35,13%	0,99%	17,40%	10,99%	1,94%	2,25%	28,65%	10,19%	33,99%	2,20%	-2,03%	5,58%	5,62%
ago/04	-3,02%	-2,09%	1,02%	-8,27%	5,03%	13,23%	7,47%	1,60%	2,14%	27,32%	5,20%	10,41%	8,27%	6,15%	-2,74%	2,09%
set/04	12,84%	-5,08%	-0,99%	11,69%	14,41%	-3,83%	14,32%	2,12%	6,11%	-7,27%	-4,96%	-4,31%	3,89%	6,96%	-8,35%	1,94%
out/04	9,63%	22,91%	-8,92%	-0,63%	-0,38%	-9,47%	-5,13%	10,28%	15,24%	16,66%	17,47%	-2,87%	12,36%	9,03%	2,12%	-0,83%
nov/04	-4,31%	-1,94%	6,72%	2,87%	-0,63%	17,46%	7,72%	-1,48%	3,28%	8,08%	-1,91%	27,71%	12,51%	2,36%	5,19%	9,01%
dez/04	3,94%	3,15%	4,32%	-9,78%	4,61%	-2,99%	14,55%	5,26%	-27,60%	19,21%	3,01%	-0,74%	3,13%	14,10%	-0,20%	4,25%
jan/05	-10,56%	28,24%	-1,91%	-16,32%	-3,99%	-6,53%	2,94%	-8,26%	1,05%	8,42%	-15,59%	-0,83%	-4,91%	-2,21%	-9,58%	-7,04%
fev/05	16,43%	-5,79%	8,81%	10,36%	19,25%	17,24%	12,95%	14,65%	26,57%	-12,14%	6,21%	28,80%	1,12%	15,43%	7,98%	15,56%
mar/05	-8,62%	-12,86%	-5,38%	-5,51%	-7,26%	-13,06%	-3,77%	0,78%	-5,48%	-3,86%	-8,28%	-12,37%	-4,51%	-2,59%	-3,44%	-5,43%
abr/05	18,53%	-21,36%	-4,30%	-4,64%	-8,40%	-45,08%	-18,18%	-8,80%	3,41%	-0,58%	-10,27%	-13,05%	-1,16%	1,65%	-20,13%	-6,64%
mai/05	1,71%	-11,25%	-6,63%	12,31%	6,40%	1,92%	1,57%	2,14%	-2,67%	-5,89%	2,26%	-9,81%	4,93%	-4,07%	6,82%	1,46%
jun/05	2,71%	18,23%	4,61%	-8,19%	6,73%	-6,98%	-0,27%	1,50%	9,20%	-3,13%	-8,14%	-15,51%	3,12%	1,94%	-0,49%	-0,62%
jul/05	3,31%	3,40%	-0,90%	0,83%	1,56%	10,17%	12,82%	3,42%	-0,15%	-5,25%	11,84%	12,24%	-1,12%	4,45%	9,26%	3,96%
ago/05	6,31%	11,74%	-8,60%	2,79%	19,29%	16,54%	5,86%	2,43%	20,63%	2,49%	7,63%	14,25%	14,03%	10,02%	-2,82%	7,69%
set/05	3,22%	-16,45%	0,53%	36,94%	9,68%	17,24%	22,71%	10,48%	8,92%	7,98%	13,48%	9,21%	24,39%	8,06%	4,65%	12,62%
out/05	-3,53%	6,35%	2,80%	-9,54%	-9,65%	-8,74%	-4,60%	-3,83%	6,46%	-11,73%	-4,67%	-12,35%	-4,60%	1,28%	-3,56%	-4,40%
nov/05	8,88%	9,35%	2,57%	4,24%	6,34%	8,84%	1,30%	7,46%	18,24%	11,90%	16,54%	13,66%	-5,31%	3,92%	-2,07%	5,71%
dez/05	6,41%	29,22%	4,35%	-2,33%	8,66%	19,88%	-0,24%	5,06%	0,12%	-2,05%	8,16%	7,53%	7,65%	1,17%	9,41%	4,82%
jan/06	12,17%	4,08%	8,86%	6,05%	26,30%	22,13%	16,76%	1,32%	28,57%	-4,28%	8,42%	33,04%	26,89%	19,42%	-7,53%	14,73%

fev/06	2,29%	6,42%	-4,62%	11,44%	-4,87%	2,27%	-7,57%	0,45%	0,72%	4,99%	8,26%	-2,99%	4,40%	2,22%	22,09%	0,59%
mar/06	-9,40%	7,72%	7,65%	2,45%	8,80%	-0,10%	3,45%	1,86%	-11,49%	-4,46%	0,18%	16,67%	0,92%	-6,84%	8,57%	-1,70%
abr/06	1,81%	-5,66%	-7,26%	20,18%	7,16%	-25,80%	-1,11%	3,12%	2,74%	-2,97%	-10,12%	-0,93%	11,15%	2,81%	0,44%	6,35%
mai/06	-13,15%	1,91%	-14,69%	-25,55%	-4,82%	-11,26%	-4,76%	-3,12%	-12,02%	-4,95%	-6,44%	-5,03%	-7,33%	-8,02%	1,31%	-9,50%
jun/06	5,15%	0,29%	8,46%	10,05%	-1,86%	1,72%	0,09%	-2,48%	-3,24%	4,99%	-11,28%	2,85%	-11,08%	4,34%	-1,98%	0,28%
jul/06	2,43%	-10,19%	0,85%	-2,90%	3,98%	4,45%	-1,77%	-3,22%	8,16%	-1,07%	-2,96%	-3,42%	-0,16%	5,51%	-5,45%	1,22%
ago/06	-5,90%	-0,96%	3,69%	-1,83%	-4,23%	-8,97%	-8,04%	10,56%	-4,51%	3,47%	-10,77%	-10,37%	-2,14%	-2,86%	2,79%	-2,28%
set/06	-3,62%	7,26%	-0,19%	5,14%	-5,60%	-5,53%	1,26%	2,28%	3,61%	3,91%	-2,95%	-0,84%	-1,04%	0,91%	-2,71%	0,60%
out/06	8,35%	5,56%	3,90%	-4,67%	6,09%	9,44%	14,09%	-7,10%	7,46%	11,82%	13,70%	12,00%	9,35%	8,29%	8,19%	7,90%
MEDIA	1,99%	1,99%	0,45%	1,43%	2,34%	2,32%	2,51%	2,38%	1,67%	2,46%	0,66%	3,95%	3,52%	2,62%	1,94%	1,40%
DÉSVIO PADRÃO	10,39%	15,85%	9,60%	13,42%	9,36%	13,95%	9,27%	9,68%	11,06%	10,40%	10,08%	15,09%	12,56%	9,48%	10,56%	8,09%
VARIÂNCIA	1,08%	2,51%	0,92%	1,80%	0,88%	1,95%	0,86%	0,94%	1,22%	1,08%	1,02%	2,28%	1,58%	0,90%	1,12%	0,65%

Tabela 3: Cálculo da Covariância

COVARIÂNCIA	cemig4	csna3	tipp4	Elet6	petr4	ggbr4	vale5	ambv	bbdc4	cpsl3	pcar4	usim5	bbas3	itau4	arcz6	ibovespa	papéis	beta
cemig4	1,08%	0,14%	0,31%	0,96%	0,47%	0,68%	0,15%	0,40%	0,62%	0,28%	0,47%	0,96%	0,74%	0,60%	0,12%	0,62%	cemig4	0,9423
csna3	0,14%	2,51%	0,20%	0,07%	0,29%	0,44%	0,45%	0,25%	0,24%	0,22%	0,50%	0,50%	0,18%	0,20%	0,29%	0,24%	csna3	0,3653
tipp4	0,31%	0,20%	0,92%	0,21%	0,31%	0,69%	0,19%	-0,03%	0,11%	0,12%	0,37%	0,62%	0,34%	0,29%	0,06%	0,41%	tipp4	0,6300
elet6	0,96%	0,07%	0,21%	1,80%	0,52%	0,71%	0,30%	0,39%	0,71%	0,28%	0,47%	0,98%	0,83%	0,62%	0,29%	0,67%	elet6	1,0181
petr4	0,47%	0,29%	0,31%	0,52%	0,88%	0,56%	0,32%	0,23%	0,55%	0,18%	0,44%	0,69%	0,62%	0,52%	0,16%	0,55%	petr4	0,8392
ggbr4	0,68%	0,44%	0,69%	0,71%	0,56%	1,95%	0,50%	0,40%	0,59%	0,37%	0,76%	1,31%	0,84%	0,61%	0,55%	0,74%	ggbr4	1,1362
vale5	0,15%	0,45%	0,19%	0,30%	0,32%	0,50%	0,86%	0,18%	0,18%	0,17%	0,32%	0,42%	0,22%	0,30%	0,53%	0,28%	vale5	0,4269
ambv	0,40%	0,25%	-0,03%	0,39%	0,23%	0,40%	0,18%	0,94%	0,44%	0,18%	0,39%	0,43%	0,33%	0,42%	0,22%	0,34%	ambv	0,5160
bbdc4	0,62%	0,24%	0,11%	0,71%	0,55%	0,59%	0,18%	0,44%	1,22%	0,14%	0,49%	0,74%	0,75%	0,73%	0,07%	0,54%	bbdc4	0,8259
cpsl3	0,28%	0,22%	0,12%	0,28%	0,18%	0,37%	0,17%	0,18%	0,14%	1,08%	0,27%	0,63%	0,37%	0,25%	0,16%	0,31%	cpsl3	0,4789
pcar4	0,47%	0,50%	0,37%	0,47%	0,44%	0,76%	0,32%	0,39%	0,49%	0,27%	1,02%	0,81%	0,52%	0,49%	0,31%	0,50%	pcar4	0,7701
usim5	0,96%	0,50%	0,62%	0,98%	0,69%	1,31%	0,42%	0,43%	0,74%	0,63%	0,81%	2,28%	1,06%	0,63%	0,33%	0,91%	usim5	1,3979
bbas3	0,74%	0,18%	0,34%	0,83%	0,62%	0,84%	0,22%	0,33%	0,75%	0,37%	0,52%	1,06%	1,58%	0,61%	0,08%	0,72%	bbas3	1,0987
itau4	0,60%	0,20%	0,29%	0,62%	0,52%	0,61%	0,30%	0,42%	0,73%	0,25%	0,49%	0,63%	0,61%	0,90%	0,18%	0,58%	itau4	0,8798
arcz6	0,12%	0,29%	0,06%	0,29%	0,16%	0,55%	0,53%	0,22%	0,07%	0,16%	0,31%	0,33%	0,08%	0,18%	1,12%	0,19%	arcz6	0,2975
ibovespa	0,62%	0,24%	0,41%	0,67%	0,55%	0,74%	0,28%	0,34%	0,54%	0,31%	0,50%	0,91%	0,72%	0,58%	0,19%	0,65%	ibovespa	1,0000

Tabela 4: Carteira sem cálculo do Solver

	CMIG4	CSNA3	TLPP4	ELET6	PETR4	GGBR4	VALE5	AMBV4	BBDC4	CPSL3	PCAR4	USIM5	BBAS3	ITAU4	ARCZ6	TOTAL
Investimento	6,67%	6,67%	6,67%	6,67%	6,67%	6,67%	6,67%	6,67%	6,67%	6,67%	6,67%	6,67%	6,67%	6,67%	6,67%	100,00%
Retorno esp	1,99%	1,99%	0,45%	1,43%	2,34%	2,32%	2,51%	2,38%	1,67%	2,46%	0,66%	3,95%	3,52%	2,62%	1,94%	
Xi*Covij	0,53%	0,43%	0,31%	0,61%	0,45%	0,73%	0,34%	0,35%	0,50%	0,31%	0,51%	0,83%	0,60%	0,49%	0,30%	
Retorno Cart	0,13%	0,13%	0,03%	0,10%	0,16%	0,15%	0,17%	0,16%	0,11%	0,16%	0,04%	0,26%	0,23%	0,17%	0,13%	2,15%
Retorno Ptf	2,15%														CMIG4	6,67%
															CNSA3	6,67%
															TLPP4	6,67%
Var Ptf	0,49%														ELET6	6,67%
Dp Ptf	6,98%														PETR4	6,67%
Tx Livre Risco	1,00%														GGBR4	6,67%
Beta Ptf	0,0031943														VALE5	6,67%
Sharpe	0,164637														AMBV4	6,67%
															BBDC4	6,67%
Treynor	3,595305957														CPSL3	6,67%
															PCAR4	6,67%
															USIM5	6,67%
															BBAS3	6,67%
															ITAU4	6,67%
															ARCZ6	6,67%

3.4 A APLICABILIDADE DOS SOFTWARES PARA A UTILIZAÇÃO DA BASE DE DADOS

A vantagem do uso do sistema informatizado parte do uso de softwares e do foco como base a função (MATRIZ.MULT), tabela 04. Os resultados focados pela resolução do solver podem prever pelas análises, a tomada de medidas, com o objetivo de minimizar a variância e mantendo um retorno esperado de no mínimo 34,49% a.a..

A ferramenta (SOLVER) do Excel pode auxiliar nesse processo além da análise dos cálculos possibilita antecipadamente prevenir os custos passivos de compensação para a composição de risco e de retorno na carteira.

A etapa que consiste na determinação dos valores para a aplicabilidade do conhecimento e aplicabilidade dos parâmetros das bases econômicas de cálculo e variáveis de riscos na utilização de modelos matemáticos que simulam as taxas econômicas e financeiras descritas pelas inequações, construídas a partir das bases lineares.

Através desses modelos, a aplicabilidade da teoria de Markovitz vem se estruturada visto que, pela composição das informações que correlacionadas as coletas de dados bibliográficos e as associações aos softwares minimizam os erros para a aproximação entre o que se descreve e o que se aplica.



Figura 4: Tela do solver pa²râmetros e estimativas

O campo (Definir célula de destino) mostra a posição do termo que será minimizado, no caso da variância da carteira. As células variáveis são as participações individuais de cada ativo na carteira total. As restrições são as citadas anteriormente para esclarecimento aos usuários. Deve-se também prever que não deve haver valores negativos para as participações dos ativos, isso deve ser feito dentro do sub-menu (Opções). Ao clicar no botão (Resolver) o resultado apresentado será o mostrado na tabela 05.

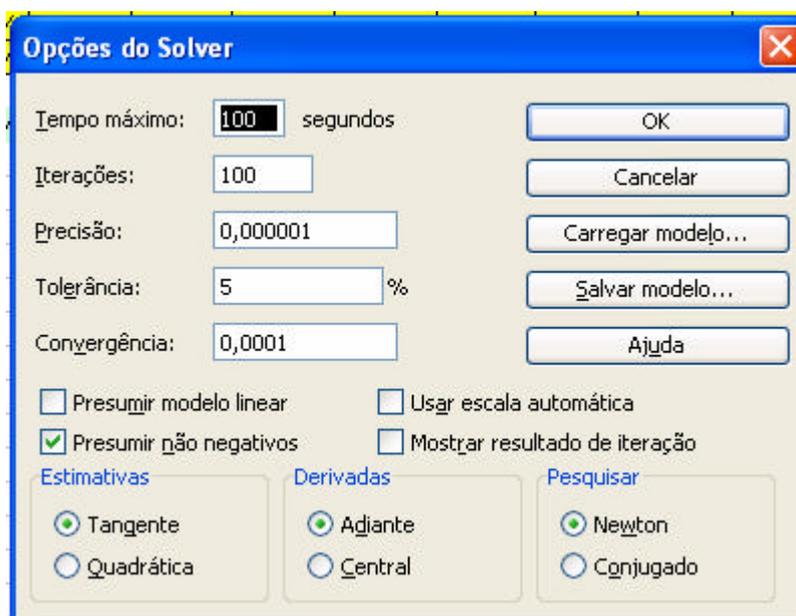


Figura 5: Tela opções do Solver

² Os dados coletados já ajustados a distribuição de dividendos e alterações em seus lotes padrões.

³ A instalação do (SOLVER) no Excel deve ser feita através do menu (Ferramentas, Suplementos). Após ativá-lo pode-se programá-lo para resolver o problema de seleção de carteira aqui apresentado. Abaixo se pode observar a tela do (SOLVER) no Excel.

4 RESULTADOS

Diante da seleção proposta, de 15 ativos aleatórios negociados na Bovespa, conseguiu-se aumentar o retorno da carteira de 2,15% para 2,5% a.m., ou seja, aumento de 0,35% pontos percentuais na rentabilidade média mensal, como pode ser visualizado na tabela 05. Já o risco em relação à composição inicial da carteira, como se vê na tabela 04, reduziu de 6,98% para 6,18%, ou seja, 0,80% pontos percentuais.

O resultado obteve-se, através da aplicação do modelo de Markowitz, com a seleção de apenas 09 ativos dentre os 15 selecionados previamente. O modelo também alocou participações distintas para cada ativo selecionado, de forma que se obtive o menor risco possível diante do retorno esperado.

Pode-se também verificar que a carteira, ao longo do período analisado, superou a rentabilidade do Ibovespa, conforme figura 06 abaixo, tendo rendido, no período compreendido de janeiro 2000 a outubro de 2006, 399,75% diante dos 139,98% do Ibovespa.

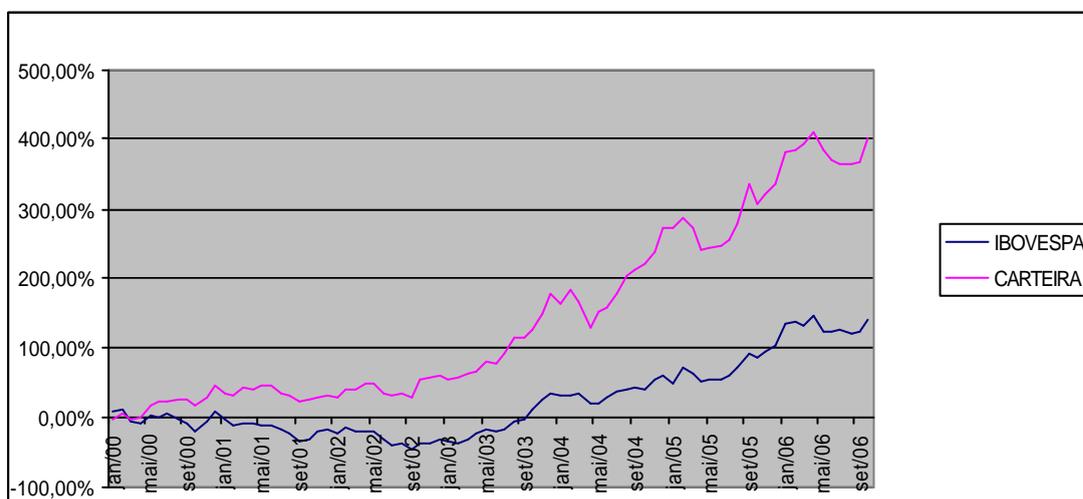


Figura 6: gráfico carteira com risco minimizado & Ibovespa. Fonte: Elaborado pelo autor.

5 CONCLUSÕES

Os atuais investimentos que são realizados devem ser devidamente efetuados à luz da teoria econômica, a diversificação dos investimentos minimiza o risco, sem prejudicar o retorno esperado. A programação linear torna-se um instrumento muito útil ao investidor, na tentativa de compor a carteira ótima de investimento, além de abrir a possibilidade de analisar a sensibilidade das variáveis restritivas do mercado.

A diversificação dos títulos do tipo ações, negociados na Bolsa São Paulo, podem trazer um retorno esperado mínimo bem maior do que investimento em aplicações livres de risco, o que demonstra uma boa opção de investimento para aqueles que possuem a possibilidade de tal oportunidade de investimento.

Como pôde ser observada na distribuição, a aplicação da programação linear na seleção de carteira pode ser realizada de maneira relativamente fácil. Com a utilização de planilha eletrônica ou algum outro software com recursos de otimização, a carteira é rapidamente encontrada. Observe na tabela 5 que a carteira otimizada possui uma composição que seria quase impossível de se obter apenas através de observação ou da experiência. As técnicas de otimização podem prover um auxílio importante no momento de se decidir pela diversificação de um investimento. O estudo corrobora o que é apresentado na literatura, sobre as vantagens da diversificação para a redução do risco, aqui essa vantagem foi mostrada através de um exemplo prático. A utilização da planilha eletrônica facilitou o trabalho de programação e cálculo da carteira ótima, possibilitando que mesmo os investidores com poucos conhecimentos do mercado de capitais possam selecionar carteiras que atendam suas exigências.

Deve-se lembrar que o mercado financeiro atual é imensamente mais complexo que o exemplo apresentado aqui, quando se pretende diversificar um investimento utilizando opções, obrigações, câmbio entre outros, a otimização se torna ainda mais complexa, em alguns casos inviabilizando o uso da programação linear através do método de Média e Variância de Markowitz.

6 BIBLIOGRAFIA

ASSAF NETO, Alexandre. Mercado Financeiro. São Paulo: Editora Atlas, 4ª edição, 2001.

BANKRISK. Certificação Profissional ANBID-CPA10. 2005.

BERNSTEIN, Peter L. *Desafio aos Deuses: A Fascinante História do Risco*. Editora Campus, 2ª Edição, 1997.

BODIE, Zvi. MERTON, Robert C. *Finanças*. Editora Bookman, 1ª Edição, 1999

DAMODARAN, A. *Investment Valuation: tools and techniques for determining the value of any asset*. New York, Editora Wiley, 1996.

BRIGHAM, Eugene F.; HOUSTON, Joel F. Fundamentos da Moderna Administração Financeira. Rio de Janeiro: Campus, 1999.

COSTA JR; Newton C. A.; et. al. Mercado de capitais: análise empírica no Brasil. São Paulo: Atlas, 2000.

EHRlich, Pierre Jacques. Pesquisa Operacional: curso introdutório. São Paulo: Atlas, 1976.

FALCINI, Primo. Avaliação econômica de empresas: técnica e prática. São Paulo: Atlas, 1995.

GEBLER, L. Considerações sobre modelagem matemática e seu uso como ferramenta para a pesquisa. Conselho em Revista, Porto Alegre, RS, p. 14 - 14, 10 out. 2005.

HOLTTHAUSEN, Felipe S; GALLI, Oscar C. Lançamento de DRs por empresas brasileiras no mercado norte-americano: valorização de mercado, volatilidade e performance ajustada ao risco. In: Enanpad Encontro Nacional Da Anpad, 25, 2001, Campinas: Associação Nacional dos Programas de Pós-graduação em Administração, 2001.[in CD ROM].

KOLMAN, Bernard. Álgebra Linear com aplicações. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 1999.

LEVINE, David M.; et. al. Estatística: teoria e aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

MARCON, Rosilene; ALBERTON, Anente; COSTA JR; Newton C. A. Segmentação de mercado, comportamento do mercado doméstico e de ADRs: Algumas evidências do mercado brasileiro e argentino. In: Enanpad Encontro Nacional Da Anpad, 25, 2001,

Campinas: Associação Nacional dos Programas de Pós-graduação em Administração, 2001.[in CD ROM].

MARKOWITZ, Harry. "Portfolio Selection." *Journal of Finance* (USA) 7 (March 1952): 77-91.

MICHAUD, Richard O.; Na Introduction to Resampled Eddiciency. The Monitor – investment Management Consulting Association, 2002.

MOREIRA, DanieL A. Administração da Produção e Operações. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

MURTY, Katta G. Linear and combinatorial programming. New York: Wiley, 1976

PUCCINI, A. De Lima. Introdução à programação linear. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972.

RATTINER, Jeffrey H. Equitable Divorce: Creatin a S[pecialty Niche By Knowing the rules, Financial Planning Magazine, New York, jully 2001.

SHARPE, William F. "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk." *The Journal of Finance* (New York) Vol XIX, 3 (September 1964): 425-442.

TOLEDO FILHO, Jorge Ribeiro De. Modelo de precificação de ativos CAPM, APT e Derivativos: os problemas para sua contabilização. Revista de Contabilidade do CRC-SP, São Paulo, n.8, p.20-30, jun.1999.

WAYNE L. *Introduction to Mathematical Programming - Applications and Algoritms*. Winston Duxbury Press. 1995.

WESTON, J. Fred. BRIGHAM, Eugene, F. *Fundamentos da Administração Financeira*. Editora Makron, 10ª Edição, 2000

WINSTON, Wayne L.; ALBRIGHT, S. Christian. *Practical Management Science*. 2.ed. Pacific Grove: Duxbury, 2000.