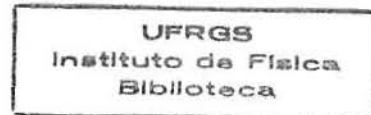


Universidade federal do Rio Grande do Sul
Instituto de física

Trabalho de conclusão de curso

Cicatrizes em grafos quânticos

Marco Aymone



Orientador: Alexandre Tavares Baraviera
Instituto de Matemática - UFRGS

Sumário

1	Introdução	3
2	Grafos e sua estrutura topológica	6
3	Grafos Quânticos	8
4	Cicatrices em grafos quânticos	12
4.1	Grafo estrela	12
4.2	Loops	16
4.3	Não-cicatrices	17
4.4	Existência de cicatrices e suas consequências no espectro	20
5	Discussões	28
6	Bibliografia	30

1 Introdução

Grafos são objetos simplesmente combinatórios: possuem vértices e elos que conectam esses vértices. Historicamente, a teoria de grafos foi introduzida por Euler na solução do famoso problema das pontes de Königsberg [1] (veja figura 1 abaixo). A questão era se uma pessoa podia passear pelas pontes de Königsberg sem passar duas vezes pela mesma ponte. Via teoria de grafos Euler mostrou que não. Suas aplicações na física são imensas. A primeira, provavelmente, foi para modelar elétrons livres em moléculas orgânicas [2], onde cada vértice representa um átomo e cada elo representa uma ligação entre esses átomos por onde o elétron pode passar. Outra aplicação importante são as redes elétricas, onde os vértices representam os *nodos* e os elos representam os fios por onde passa a corrente elétrica. Grafos também foram usados por Feynman para representar seus diagramas [3]. Cada elo de um diagrama de Feynman é visto como uma partícula e cada vértice é visto como um tipo de interação entre essas partículas. Uma aplicação mais recente é em teoria quântica de campos onde a geometria do espaço-tempo contínuo é substituída por objetos capazes de representar um espaço-tempo discreto: grafos [veja 4].

Recentemente, o estudo da equação de Schrödinger em grafos métricos (grafos onde a cada elo é atribuído um intervalo da reta com determinado comprimento) tem ganho muita atenção. Esses objetos ficaram conhecidos como **grafos quânticos** e suas aplicações vão desde física experimental quanto teórica. Eles podem representar alguns poucos elétrons em estruturas com uma única dimensão relevante (nanofios por exemplo) ou propagação de ondas acústicas ou eletromagnéticas em estruturas do mesmo tipo. Inclusive, grafos quânticos foram simulados experimentalmente [5].

Em mecânica quântica, o fenômeno de cicatriz (soluções compactamente suportadas) é uma anomalia exibida pelas autofunções no limite semiclássico quando se concentram perto de uma órbita periódica instável (veja figura 2). É certamente uma das propriedades mais surpreendentes dentro do contexto do caos quântico. Nesse contexto, o teorema da ergodicidade quântica em sua essência afirma que em sistemas onde a dinâmica clássica é ergódica, a medida de probabilidade associada ao módulo quadrado das funções de onda converge para a medida clássica invariante conforme se aproxima do limite semiclássico através de quase todas as seqüências de autoestados. Esse resultado originalmente foi provado para fluxos [6,7,8,9,10,11] e depois estendido para sistemas dinâmicos discretos [12,13,14,15]. Em contrapartida, o aparecimento de cicatrizes reforça o fato de que nem todas seqüências de auto-estados estão de acordo com esse limite. Observadas numericamente por McDonald

em dados não publicados [16] e depois trazidas à atenção da comunidade física por Heller [17], em geral o surgimento de cicatrizes em altas energias continua incompreendido.

Grafos quânticos são ótimos modelos para uma melhor compreensão desse limite. Até a presente data, ergodicidade para grafos quânticos foi provada para apenas alguns tipos de grafos (veja [18]). Aqui focamos nossa atenção para a existência de cicatrizes em grafos quânticos [19] que, grosseiramente falando, são subgrafos que concentram a probabilidade associada ao módulo quadrado da função de onda. Precisamente estamos interessados em propriedades assintóticas de um simples sistema quântico na física semiclássica, que nesse caso corresponde ao limite de altas energias, onde pelo princípio da correspondência de Bohr, espera-se recuperar o comportamento clássico.

A seção 2 introduz ao leitor o conceito de grafo e algumas de suas propriedades topológicas enquanto que na seção 3 introduzimos o conceito de grafo quântico e damos algumas propriedades da dinâmica desse sistema. Na seção 4 apresentamos o conceito formal de cicatriz em grafos quânticos. Mostramos que subgrafos chamados *loops* são exemplos de cicatrizes e também apresentamos uma generalização de um resultado obtido por Keating *et.al* [20] sobre existência de cicatrizes no contexto do grafo estrela. Na seção 4.3 apresentamos uma condição na estrutura topológica de grafos que exclui uma grande variedade de subgrafos que não podem ser cicatrizes. Também mostramos na seção 4.4 que a existência de cicatrizes está ligada a propriedades espectrais do operador em questão.

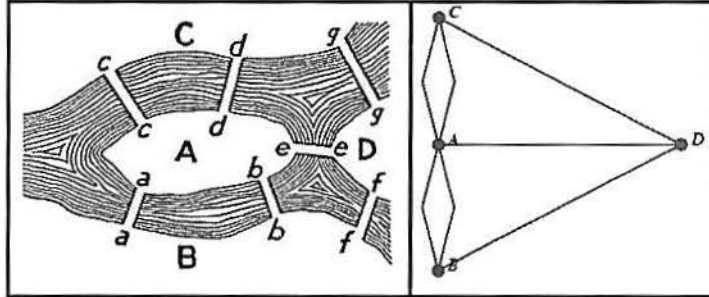


Figura 1: O problema das pontes de Königsberg. À esquerda diagrama das pontes. À direita o grafo proposto por Euler.

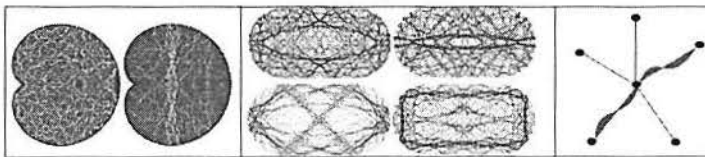


Figura 2: Exemplo de cicatrizes. À esquerda: partícula quântica presa em caixa em forma de cardióide com condições de contorno de Dirichlet (nesse caso a função de onda deve se anular na fronteira). A densidade de probabilidade de encontrar a partícula num dado ponto plotada no espaço de configuração é baixa nas regiões azuis e alta nas regiões vermelhas. A primeira imagem da esquerda para a direita vemos um estado no qual a função de onda está equidistribuída e na segunda um estado no qual a função de onda se concentra perto de uma órbita periódica instável. No meio: bilhar quântico em forma de estádio com condições de contorno de Dirichlet (nesse caso a função de onda deve se anular na fronteira). A cicatriz corresponde às cores mais escuras, como no caso do domínio em forma de cardióide. À direita: cicatrizes em vermelho no grafo estrela.

2 Grafos e sua estrutura topológica

Esta seção é voltada para as definições à nomenclatura da teoria de grafos usadas no texto. O leitor deve sentir-se encorajado a consultar essa seção sempre que ficar em dúvida quanto a algum termo não especificado localmente. As 3 últimas definições podem ser omitidas em uma primeira leitura e devem ser lidas após o leitor já possuir uma certa familiaridade com teoria de grafos; quando necessárias serão mencionadas no texto.

Definição 2.1: Um **Grafo** Γ é um par (V, E) onde elementos de V são ditos vértices e os elementos de E são ditos elos. Dois elementos $u, v \in V$ são ditos conectados quando o par (u, v) forma um elo em E . Pode ocorrer que um vértice é conectado a si mesmo, neste caso essa conexão é chamada de *loop*. Um **subgrafo** $\Lambda \subset \Gamma$ é um subconjunto de elos e de vértices de Γ .

Notação. Por simplicidade, sempre designaremos as letras u, v para os vértices do grafo, ou seja, $u, v \in \Gamma$ significa que $u, v \in V(\Gamma)$. As letras e, f irão representar os elos do grafo. Dado um subgrafo Λ , a notação $\Lambda \succ v$ indica o conjunto de elos pertencentes a Λ que possuem v como vértice. $|E(\Gamma)|$ denotará o número de elos de Γ e $|V(\Gamma)|$ o número de vértices.

Definição 2.2: Um **grafo métrico** é um terno (V, E, L) onde (V, E) é um grafo onde a cada elo e_j é associado um intervalo da reta $[0, L_j] \in \mathbb{R}$ e uma coordenada x_j nesse intervalo que vale 0 num vértice e L_j no outro; $L = (L_1, \dots, L_{|E|})$ é o vetor de comprimentos dos elos. Por conveniência, cada elo de um grafo métrico possui comprimento positivo.

Definição 2.3: Dada uma enumeração dos vértices de um grafo Γ , digamos v_1, \dots, v_b , a **matriz de conectividade** \mathcal{C} possui entradas definidas por:

$$\mathcal{C}_{i,j} = k + 2l, \text{ Se } (v_i, v_j) \text{ constituem } k \text{ elos e } l \text{ loops}$$

Definição 2.4: O **grau de um vértice** v_i de um grafo Γ , denotado por $d_\Gamma(v_i)$ também chamado de valência é igual ao número de elos e duas vezes o número de loops adjacentes ao mesmo. Precisamente:

$$d_\Gamma(v_i) = \sum_j \mathcal{C}_{i,j}$$

Também podemos falar em grau de um vértice com respeito a um subgrafo Λ . Nesse caso:

$$d_\Lambda(v_i) = \sum_{j; v_j \in \Lambda} \mathcal{C}_{i,j}$$

Definição 2.5: Um elo de um grafo Γ é dito **ponta** se possui pelo menos um vértice de grau 1. É chamado **interior** caso contrário. Também podemos falar em elos pontas e interiores para subgrafos.

Definição 2.6: Um grafo é dito **aberto** se possui pelo menos um elo-ponta. É dito **fechado** se todos os seus elos são interiores. A definição também se estende a subgrafos.

Definição 2.7: Um **circuito** é um subgrafo $\Lambda \subset \Gamma$ constituído de elos *adjacentes*, isto é, elos que compartilham pelo menos um vértice, de tal maneira que cada vértice $v \in \Lambda$ possui grau com respeito ao subgrafo Λ $d_\Lambda(v) \leq 2$. Pode ser *fechado* se todos os seus elos forem interiores ou *aberto* caso contrário.

Definição 2.8: Um grafo Γ é dito **conexo** se para todos seus vértices u, v existe um circuito conectando os mesmos. É dito **desconexo** caso contrário. A definição também se estende a subgrafos.

Definição 2.9: A **vizinhança** de um subgrafo Λ denotada por $Viz(\Lambda)$ é um subgrafo constituído de elos pertencentes ao subgrafo complementar a Λ denotado por Λ^c que possuem vértices em comum com os de Λ .

Definição 2.10: A **fronteira** de um subgrafo Λ denotada por $\partial\Lambda$ é o conjunto dos elos ponta de Λ e dos elos interiores a Λ que possuem seus dois vértices adjacentes aos elos de Λ^c .

Definição 2.11: **Colapso de subgrafos.** Seja Λ subgrafo *conexo* de Γ . O colapso de Λ denotado por $\Gamma \ominus \Lambda$ é o procedimento de adicionar um novo vértice u a Γ de tal maneira que cada elo da vizinhança de Λ é conectado a esse vértice u ; a antiga ligação entre esses elos e o subgrafo Λ é desfeita; o subgrafo Λ é eliminado. No caso de Λ desconexo, o procedimento $\Gamma \ominus \Lambda$ é realizado para cada parte conexa de Λ . Em certo sentido, é como se cada parte conexa de Λ se colapsa em um único vértice, mantendo a conectividade com os elos do subgrafo complementar.

3 Grafos Quânticos

Definição 3.1: O espaço de Hilbert $\mathcal{H}(\Gamma)$ num grafo métrico é definido por

$$\mathcal{H}(\Gamma) = \prod_{e \in \Gamma} L^2[0, L_e]$$

como sendo o espaço das funções de módulo quadrado integrável em cada elo com produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \sum_{e \in \Gamma} \int_0^{L_e} \bar{f}_e(x_e) g_e(x_e) dx_e$$

Definição 3.2: O Laplaciano no grafo Γ

$$\Delta : \prod_{e \in \Gamma} C^2[0, L_e] \rightarrow \mathcal{H}(\Gamma)$$

é definido por

$$\Delta \Psi = \left(-\frac{d^2 \psi_1}{dx_1^2}, \dots, -\frac{d^2 \psi_b}{dx_b^2} \right)$$

Definição 3.3: Um grafo quântico (veja figura 3 para um exemplo) Γ é um grafo métrico equipado com um espaço de Hilbert e autofunções $\Psi^{(n)}$ do laplaciano Δ

$$\Psi^{(n)} : \prod_{e \in \Gamma} [0, L_e] \rightarrow \mathbb{C}^{|\mathcal{E}(\Gamma)|}$$

com $\langle \Psi^{(n)}, \Psi^{(n)} \rangle = 1$ que satisfazem a equação de Schrödinger independente do tempo com autovalor k_n^2 :

$$\Delta \Psi^{(n)} = k_n^2 \Psi^{(n)}$$

e condições de contorno nos vértices v do grafo que tornam esse operador auto-adjunto:

1.

$$\mathcal{C}_{u,v} \psi_{(u,v)}^{(n)}|_v = \mathcal{C}_{u',v} \psi_{(u',v)}^{(n)}|_v$$

2.

$$\sum_u \mathcal{C}_{u,v} \frac{d\psi_{(u,v)}^{(n)}}{dx_{(u,v)}} \Big|_v = 0$$

Onde $\psi_{(u,v)}^{(n)}|_v$ é a componente de $\Psi^{(n)}$ no elo (u, v) aplicada na respectiva coordenada do vértice v e

$$\frac{d\psi_{(u,v)}^{(n)}}{dx_{(u,v)}} \Big|_v = -\frac{d\psi_{(u,v)}^{(n)}}{dx_{(u,v)}}(0), \text{ se } x_{(u,v)}(v) = x_{(u,v)}(0) \text{ ou}$$

$$\left. \frac{d\psi_{(u,v)}^{(n)}}{dx_{(u,v)}} \right|_v = + \frac{d\psi_{(u,v)}^{(n)}}{dx_{(u,v)}}(L_{(u,v)}), \text{ se } x_{(u,v)}(v) = x_{(u,v)}(L_{(u,v)})$$

A primeira condição simplesmente diz que a função de onda $\Psi^{(n)}$ é contínua nos vértices e a segunda condição, soma das derivadas das componentes nula em cada vértice, impõe conservação do fluxo de probabilidade no grafo. Em certo sentido, essas condições são análogas às leis de Kirchoff em circuitos elétricos e são conhecidas como condições de *Neumann* (veja figura 4 para um exemplo dessas condições).

Observação: Para mais tipos de condições de contorno em grafos quânticos, veja [21].

Facilmente podemos ver que cada componente do vetor função de onda $\Psi^{(n)}$ pode ser escrita como:

$$\psi_e^{(n)}(x_e) = A_e^{(n)} \cos(k_n x_e) + B_e^{(n)} \sin(k_n x_e), \text{ com } A_e^{(n)}, B_e^{(n)} \in \mathbb{C}$$

Dessa maneira o problema padrão nesse modelo é obter informações sobre as amplitudes $A_e^{(n)}$ e $B_e^{(n)}$ e sobre o espectro do laplaciano $\sigma(\Delta)$.

Dado um autovalor k_n^2 a função $\mathbb{P}_n : \Gamma \times \{k_n\} \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\mathbb{P}_n(\Lambda \subset \Gamma) = \sum_{e \in \Lambda} \int_0^{L_e} |\psi_e^{(n)}|^2 dx_e$$

retorna a probabilidade associada ao subgrafo Λ no respectivo n -ésimo estado. Não é difícil de ver que essa função pode ser escrita como:

$$\mathbb{P}_n(\Lambda) = \sum_{e \in \Lambda} \int_0^{L_e} |\psi_e^{(n)}(x_e)|^2 dx_e = \sum_{e \in \Lambda} \frac{|A_e^{(n)}|^2 + |B_e^{(n)}|^2}{2} L_e + O\left(\frac{1}{k_n}\right)$$

Dessa maneira, no restante do texto sempre utilizaremos a seguinte expressão para a probabilidade associada a subgrafos:

$$\mathbb{P}_n(\Lambda) = \sum_{e \in \Lambda} \frac{|A_e^{(n)}|^2 + |B_e^{(n)}|^2}{2} L_e \quad \star$$

uma vez que todos os teoremas são provados no limite em que $k_n^2 \rightarrow \infty$.

Duas propriedades bastante úteis no que virá a seguir são de que:

1. A dinâmica quântica num grafo é invariante frente a orientação das coordenadas nos cmos, uma vez que não há potenciais magnéticos. Numa mudança arbitrária das coordenadas nos cmos,

podemos no máximo introduzir uma descontinuidade da derivada da função de onda nos vértices sem alterar a amplitude em cada componente da função de onda nos elos.

2. A dinâmica quântica num grafo não se altera ao se retirar ou adicionar vértices de grau 2, uma vez que nesses vértices a função de onda é contínua e podemos fazer que a derivada também seja orientando as coordenadas de maneira conveniente. Então dois elos adjacentes separados por um vértice de grau 2 podem ser substituídos por um único elo de comprimento equivalente. Da mesma maneira um único elo pode ser dividido em 2 elos com soma dos respectivos comprimentos equivalentes. Então quando for conveniente introduziremos e/ou retiraremos vértices de grau 2.

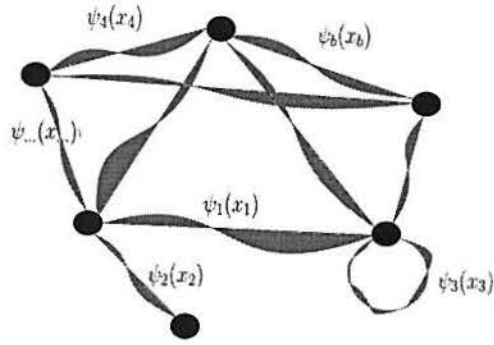


Figura 3: Exemplo de Grafo Quântico.

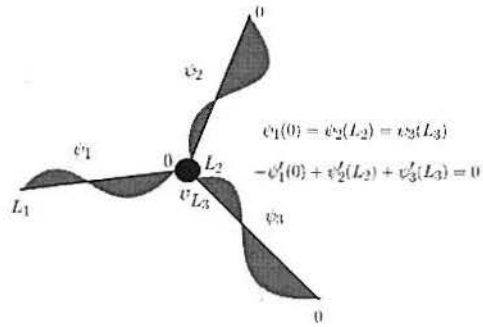


Figura 4: Visualização das condições de contorno em algum vértice v de algum grafo.

4 Cicatrizes em grafos quânticos

Nesta seção apresentamos a definição formal de cicatrizes em grafos:

Definição: Um subgrafo $\Lambda \subset \Gamma$ é dito **cicatriz** se existe uma sequência de autovalores $k_n^2 \rightarrow \infty$ onde as seguintes condições são satisfeitas:

$$\lim_n \mathbb{P}_n(\Lambda) = 1, \text{ e para cada elo } e \in \Lambda$$

$$\liminf_n \mathbb{P}_n(e) > 0$$

4.1 Grafo estrela

Um grafo estrela é um grafo constituído de b elos conectados a um único vértice central (figura 2). Aqui apresentamos uma generalização de existência de cicatrizes no grafo estrela:

Definição 4.1: Números reais x_1, \dots, x_b são ditos racionalmente independentes se a única solução para equação

$$\sum_{n=1}^b q_n x_n = 0, \text{ com } q_n \in \mathbb{Q}$$

é $q_1 = q_2 = \dots = q_b = 0$.

Teorema 4.1: Assuma Γ grafo estrela cujo comprimento dos elos são racionalmente independentes. Então qualquer subgrafo estrito $\Lambda \subset \Gamma$ constituído de pelo menos 2 elos é uma cicatriz.

Prova: Seja Γ grafo estrela de b elos e Λ subgrafo de $k < b$ elos. Para simplificar as notações, sempre consideraremos as primeiras k coordenadas dos vetores abaixo relacionadas aos elos de Λ . Resolvendo a equação de Schrödinger no grafo estrela, a componente do vetor função de onda $\Psi^{(n)}$ em cada elo é dada por:

$$\psi_e^{(n)}(x) = \left(\frac{2 \sec^2(k_n L_e)}{\sum_{f \in \Gamma} L_f \sec^2(k_n L_f)} \right)^{1/2} \cos(k_n x)$$

e logo pela equação (★) a probabilidade associada a um subgrafo Λ qualquer será dada por:

$$\mathbb{P}_n(\Lambda) = \sum_{e \in \Lambda} \frac{L_e \sec^2(k_n L_e)}{\sum_{f \in \Gamma} L_f \sec^2(k_n L_f)}$$

Então pela equação acima vê-se que para o subgrafo Λ ser cicatriz é suficiente encontrar uma seqüência de autovalores $k_n^2 \in \sigma(\Delta)$ com a propriedade de que $\forall e \in \Lambda, k_n L_e \bmod \pi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ e

$\forall e \in \Lambda^c, k_n L_e \bmod \pi \rightarrow 0$.

A equação espectral $F(k_n) = 0$ associada ao grafo estrela é dada por

$$F(k_n) = \sum_{e \in \Gamma} \tan(k_n L_e) = 0$$

Agora defina $F : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^b = \mathbb{T}^b \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x_1, \dots, x_b) = \sum_{i=1}^b \tan(x_i)$$

e considere o conjunto $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{T}^b : F(x) = 0\}$. Uma vez que 0 é valor regular de F e \mathcal{S} é infinitamente diferenciável, o **Teorema da função implícita** diz precisamente que \mathcal{S} é uma hipersuperfície infinitamente diferenciável, isto é, $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^b$ é gráfico de uma função de $b-1$ variáveis de classe C^∞ . Mais ainda: o espaço vetorial tangente a um ponto $x \in \mathcal{S}$ é o subespaço ortogonal a $\nabla F(x)$.

Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^b$ o fluxo π -periódico em cada coordenada definido por

$$\phi(t) = (tL_1, \dots, tL_b) \bmod \pi$$

Na hipótese feita sobre os comprimentos L_1, \dots, L_b , esse fluxo é ergódico, isto é, sendo m a medida de Lebesgue em \mathbb{R} tem-se $\forall A \subset \mathbb{T}^b$ mensurável

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} m\{t \in [0, T] : \phi(t) \in A\} = \text{Volume}(A)$$

Dessa maneira o espectro pode ser visto como uma sequência de tempos que o fluxo leva para furar a superfície:

$$\sigma(\Delta) = \{t^2 : \phi(t) \in \mathcal{S}\}$$

Assumamos Λ com um número par de elos. Considere o hipercilindro regular $C_\varepsilon \subset \mathbb{T}^b$ de volume proporcional a ε^b cujo centro de massa é o ponto

$$P_{CM} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, \dots, 0\right) \in \mathbb{R}^b$$

e com vetor normal às bases paralelo ao vetor $\frac{d\phi}{dt}$. Uma vez que Λ possui um número par de elos $\forall 0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ o ponto

$$p_\delta = \left(-\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta, \dots, -\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta, 0, \dots, 0\right)$$

pertence a $\mathcal{S} \cap C_\varepsilon$, bastando zerar os k termos relacionados aos elos de Λ de $F(x)$ aos pares e pondo 0 nas outras coordenadas. No

caso em que Λ possui um número ímpar de elos, os pontos a serem considerados são da forma

$$p_\delta = \left(-\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta, \dots, -\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} - \delta, \right. \\ \left. \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\right), 0, \dots, 0\right)$$

e

$$P_{CM} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \dots, 0\right) \in \mathbb{R}^b$$

Usando o fato de que a hiperfície \mathcal{S} é diferenciável nos pontos p_δ , $\forall \varepsilon > 0$ suficientemente pequeno o conjunto $C_\varepsilon \cap \mathcal{S}$ é aproximadamente um hiperplano, isto é, pelo teorema da função implícita esse conjunto é um *gráfico* de uma das variáveis em função das demais. Por fim, o fluxo nunca é perpendicular a \mathcal{S} uma vez que

$$\frac{d\phi}{dt} \cdot \nabla F(x \in \mathcal{S}) > L_1 + \dots + L_b > 0$$

Então

$$\#\{t : \phi(t) \in \mathcal{S} \cap C_\varepsilon\} = \infty$$

o que conclui a demonstração (veja a figura 5 para um resumo da demonstração).

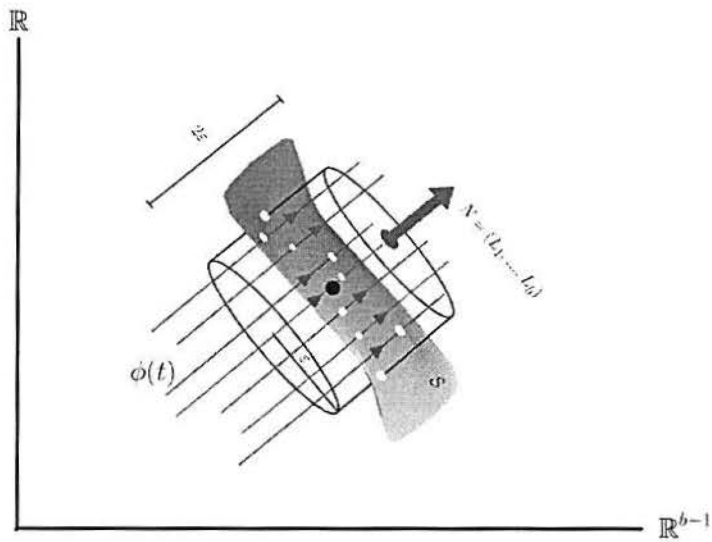


Figura 5: Visualização da demonstração do teorema 4.1. Em alguma vizinhança de P_{CM} (ponto preto) S é localmente gráfico de uma das variáveis em função das demais, digamos $x_b = f(x_1, \dots, x_{b-1})$. Uma vez que $\phi(t)$ é ergódico ele entra infinitas vezes no hipercilindro e quando entra, sendo a direção do fluxo paralela ao vetor N , necessariamente o fluxo 'fura' S gerando uma sequência de autovalores com os requisitos suficientes para que Λ seja cicatriz.

4.2 Loops

Proposição 4.2: Qualquer subgrafo $\Lambda \subset \Gamma$ constituído de loops de mesmo comprimento desconectados ou não é uma cicatriz.

Prova:

A prova é muito simples. Suponha Λ constituído de b loops de comprimento L . Para cada loop l_i , coloque $\psi_e^{(n)} = 0$ em cada elo do subgrafo complementar ao loop l_i . Isto leva ao seguinte problema em cada loop l_i :

$$\begin{cases} \psi_{l_i}^{(n)}(0) = \psi_{l_i}^{(n)}(L) \\ \frac{d\psi_{l_i}^{(n)}}{dx}(0) = \frac{d\psi_{l_i}^{(n)}}{dx}(L) \end{cases}$$

E logo

$$\Psi_i^{(n)} = (0, \dots, \psi_{l_i}^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2n\pi x_{l_i}}{L}\right), 0, \dots, 0)$$

é autofunção com autovalor $k_n^2 = \frac{4n^2\pi^2}{L^2}$. Mas cada um desses autovalores é degenerado uma vez que todos os loops possuem mesmo comprimento. Então por argumentos de simetria, concluímos que para esses autovalores, a autofunção é dada por:

$$\Psi^{(n)} = \left(\sqrt{\frac{1}{b}} \sin\left(\frac{2n\pi x_{l_1}}{L}\right), \dots, \sqrt{\frac{1}{b}} \sin\left(\frac{2n\pi x_{l_b}}{L}\right), 0, \dots, 0 \right)$$

e portanto cada loop concentra probabilidade $\frac{1}{b}$.

4.3 Não-cicatrizes

Na seção precedente mostrou-se ser necessário informação no espectro para mostrar existência de cicatrizes. No caso de não existência, apresentamos uma condição que se refere apenas à estrutura topológica de grafos:

Teorema 4.3: Uma cicatriz $\Lambda \subset \Gamma$ não pode possuir um elo-ponta que seja interior a Γ .

Prova:

Denote a componente do subgrafo Λ no elo-ponta e por

$$\psi_e^{(n)} = A_e^{(n)} \cos(k_n x) + B_e^{(n)} \sin(k_n x)$$

E as componentes nos elos (v, u_j) pertencentes ao subgrafo $Viz(\Lambda) \succ v$ (veja definição 2.9) por:

$$\chi_{v,j}^{(n)} = A_{v,j}^{(n)} \cos(k_n x) + B_{v,j}^{(n)} \sin(k_n x)$$

Coloque o 0 das coordenadas locais em v . No caso de loops em v , adicione um vértice no meio do loop de maneira que v continue a ser o 0 das coordenadas (veja propriedade 2 da seção 3). Seja:

$$l = \min_{f \in Viz(\Lambda) \succ v} L_f$$

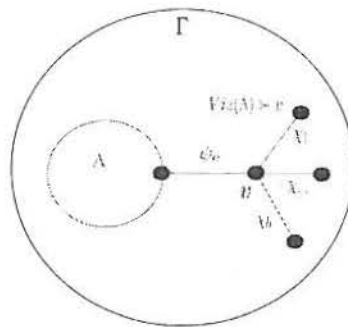


Figura 6: *Idéia da prova. Quando a probabilidade associada ao subgrafo em azul no desenho acima vai para 0, necessariamente a probabilidade do elo-ponta do subgrafo Λ também o vai.*

Então continuidade em v implica

$$|A_e^{(n)}|^2 = |A_{v,j}^{(n)}|^2 \leq \frac{2\mathbb{P}_n(Viz(\Lambda) \succ v)}{l}$$

Soma das derivadas nula em v implica

$$|B_e^{(n)}|^2 = \left| \sum_j C_{j,v} B_{j,v}^{(n)} \right|^2 \leq \frac{2(d(v)-1)\mathbb{P}_n(\text{Viz}(\Lambda) \succ v)}{l}$$

onde a última desigualdade é consequência da desigualdade Cauchy-Schwarz. Das duas desigualdades acima segue:

$$\mathbb{P}_n(e) \leq \mathbb{P}_n(\text{Viz}(\Lambda) \succ v) \frac{d(v)L_e}{l}$$

Então

$$\lim_n \mathbb{P}_n(\Lambda^c) = 0 \Rightarrow \lim_n \mathbb{P}_n(e) = 0$$

Concluimos da definição sobre cicatrizes que Λ não pode ser cicatriz.

Corolário 4.3.1: Qualquer subgrafo $\Lambda \subset \Gamma$ constituído de elos desconectados (ou um único elo) não pode ser uma cicatriz. Precisamente a probabilidade da vizinhança de Λ é limitada por baixo por:

$$\mathbb{P}_n(\text{Viz}(\Lambda)) \geq \frac{1}{1 + \sum_{e \in \Lambda} \frac{L_e d(e)}{l_e}}$$

onde

$$l_e = \min_{f \in \Lambda^c \succ e} L_f$$

e $d(e)$ é a soma dos graus de cada um dos vértices do respectivo elo e .

Prova: Considere $(u, v) = e$ um elo de Λ . Note que todos os vértices de Λ possuem valência 1. O truque é adicionar um novo vértice no meio de e de tal maneira que os vértices u e v sejam o 0 das coordenadas locais. Dessa maneira pode-se aplicar o mesmo procedimento da demonstração do teorema anterior e obter para cada elo a desigualdade:

$$\mathbb{P}_n(e) \leq \frac{L_e d(e)}{l_e} \mathbb{P}_n(\Lambda^c \succ \Lambda)$$

segue o corolário (veja figura 7 para um exemplo).

Corolário 4.3.2: Considere $\Gamma' \subset \Gamma$ um subgrafo sem elos pontas. Então qualquer circuito aberto $\Lambda \subset \Gamma'$ não pode ser uma cicatriz.

Prova:

Os vértices extremos de Λ ambos possuem grau com respeito a Λ igual a 1 e grau com respeito a Γ maior do que 1, logo estamos na condição do teorema 4.3. Então Λ não pode ser uma cicatriz (veja figura 8 para um exemplo).

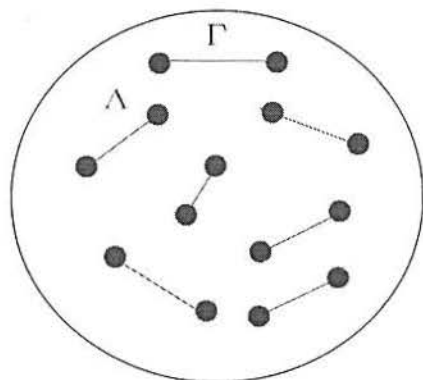


Figura 7: Exemplo de subgrafo de elos desconectados (em vermelho) que não pode ser cicatriz.

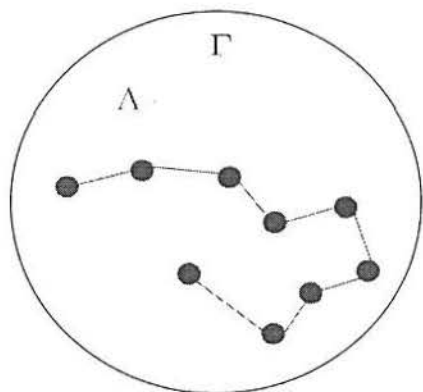


Figura 8: Exemplo de circuito aberto (em vermelho) que não pode ser cicatriz.

4.4 Existência de cicatrizes e suas consequências no espectro

Nesta seção voltamos a nossa atenção para condições que garantem a existência de cicatrizes em subgrafos não eliminados pela condição anterior. Precisamente, investigamos os circuitos fechados, obtendo condições necessárias e suficientes para que os mesmos sejam cicatrizes. Para o entendimento do próximo teorema é necessário ler a definição 2.10 sobre fronteira de um subgrafo.

Teorema 4.4: Assuma Λ subgrafo cuja fronteira é um circuito fechado. A fim de que a probabilidade de cada elo de Λ seja limitada por baixo e de que a da vizinhança de Λ vá para 0 é necessário que exista uma subsequência de autovalores (k_n) com a propriedade de que para todo elo $f \in \partial\Lambda$ se tenha $k_n L_f \bmod \pi \rightarrow 0$.

Em particular, essa condição no espectro é necessária para que um circuito fechado $\Lambda = \partial\Lambda$ seja uma cicatriz, além disso, nesse limite obtém-se a distribuição clássica de probabilidades no circuito Λ .

Prova : Sejam $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_m, v_1)$ elos de $\partial\Lambda$.

Em cada vértice v_j de $\partial\Lambda$ coloque o 0 das coordenadas para os elos pertencentes a vizinhança de Λ . Em cada elo $(v_j, v_{j+1}) \in \partial\Lambda$ denote a componente da autofunção por:

$$\psi_j^{(n)}(x) = A_j^{(n)} \cos(k_n x) + B_j^{(n)} \sin(k_n x), \quad A_j^{(n)}, B_j^{(n)} \in \mathbb{C}$$

Em cada elo $(v_j, u) \in \text{Viz}(\Lambda)$:

$$\chi_{v_j, u}^{(n)}(x) = A_{v_j, u}^{(n)} \cos(k_n x) + B_{v_j, u}^{(n)} \sin(k_n x), \quad A_{v_j, u}^{(n)}, B_{v_j, u}^{(n)} \in \mathbb{C}$$

Sejam

$$l = \min_{e \in \text{Viz}(\Lambda)} L_e$$

$$L = \max_{e \in \partial\Lambda} L_e$$

Da continuidade em v_j sai que

$$|A_j^{(n)}|^2 = |A_{v_j, u}^{(n)}|^2 < \frac{2\mathbb{P}_n(\text{Viz}(\Lambda))}{l}$$

$$|B_j^{(n)}|^2 > \frac{2\mathbb{P}_n(e_j)}{L} - \frac{2\mathbb{P}_n(\text{Viz}(\Lambda))}{l}$$

Continuidade em v_{j+1} implica que:

$$|A_j^{(n)} \cos(k_n L_j) + B_j^{(n)} \sin(k_n L_j)| = |A_{v_{j+1}, u}^{(n)}| < \sqrt{\frac{2\mathbb{P}_n(\text{Viz}(\Lambda))}{l}}$$

$$|B_j^{(n)} \sin(k_n L_j)| - |A_j^{(n)} \cos(k_n L_j)| < \sqrt{\frac{2\mathbb{P}_n(\text{Viz}(\Lambda))}{l}}$$

$$|\sin(k_n L_j)| < 2 \left(\frac{l}{L} \frac{\mathbb{P}_n(e_j)}{\mathbb{P}_n(\text{Viz}(\Lambda))} - 1 \right)^{-1/2}$$

Concluimos que para fazer $\mathbb{P}_n(\text{Viz}(\Lambda)) \rightarrow 0$ com $\liminf_n \mathbb{P}_n(e_j) > 0$ é necessário uma sequência de autovalores com a propriedade mencionada anteriormente.

No caso particular em que $\Lambda = \partial\Lambda$ precisamos apenas mostrar que a probabilidade em cada clo é assintoticamente afastada de 0, onde nesse subgrafo converge para distribuição clássica.

Seja

$$s = \max_{v_j \in \partial\Lambda} (d(v_j) - 2)$$

Soma das derivadas nula em v_{j+1} :

$$\frac{d\psi_j^{(n)}}{dx}(L_j) - \frac{d\psi_{j+1}^{(n)}}{dx}(0) - \sum_{u > v_{j+1}} \frac{d\chi_{v_j, u}^{(n)}}{dx}(0) = 0$$

$$|-A_j^{(n)} \sin(k_n L_j) + B_j^{(n)} \cos(k_n L_j) - B_{j+1}^{(n)}| = \left| \sum_{u > v_{j+1}} B_{v_{j+1}, u} \right| < \sqrt{\frac{2s\mathbb{P}_n(\text{Viz}(\Lambda))}{l}}$$

Onde a última desigualdade é consequência da desigualdade de Cauchy-Swarz. Segue então que

$$\left| |B_j^{(n)}| \left(1 - \frac{1}{\frac{l}{L} \frac{\mathbb{P}_n(e_j)}{\mathbb{P}_n(\text{Viz}(\Lambda))} - 1} \right)^{1/2} - |B_{j+1}^{(n)}| \right| < 2\sqrt{\frac{2s\mathbb{P}_n(\text{Viz}(\Lambda))}{l}}$$

Usando as hipóteses do teorema, para alguma constante $B \in \mathbb{C}$ obtemos que

$$|B_j^{(n)}| \rightarrow |B|$$

logo:

$$\lim_n \mathbb{P}_n(\Lambda) = \frac{|B|^2}{2} \sum_{e \in \Lambda} L_e = 1 \Rightarrow \frac{|B|^2}{2} = \frac{1}{\sum_{e \in \Lambda} L_e}$$

e portanto para $e_j \in \Lambda$

$$\lim_n \mathbb{P}_n(e_j) = \frac{L_j}{\sum_{e \in \Lambda} L_e}$$

o que conclui a demonstração.

Observação: Podemos formular uma versão deste resultado no caso em que $\partial\Lambda$ é um caminho aberto contanto que o teorema 4.3 não seja violado. Nesse caso a condição necessária no espectro é de que para os dois elos ponta p a subsequência de autovalores satisfaça $k_n L_p \bmod \pi \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

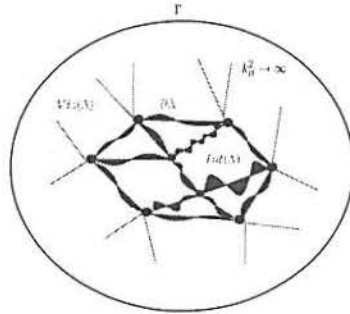


Figura 9: Visualização do teorema 4.4. No limite de altas energias, para que o subgrafo Λ constituído de sua fronteira $\partial\Lambda$ (azul) e seu interior $\text{Int}(\Lambda)$ (vermelho) possua probabilidades associadas aos seus elos limitadas por baixo com a da vizinhança (verde) indo pra 0 , é necessário que em cada elo da fronteira caiba assintoticamente um número inteiro de comprimentos de onda, afim de formar, em certo sentido, um escudo para o interior.

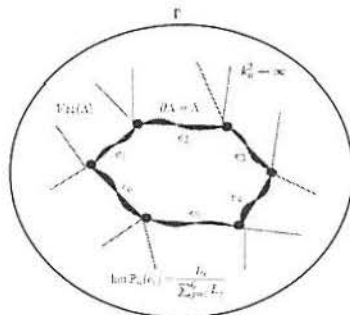


Figura 10: Visualização do teorema 4.4. Caso em que $\partial\Lambda = \Lambda$ é um circuito fechado.

Agora o leitor estará apto a ler a última definição 2.11 sobre colapso de subgrafos.

Teorema 4.4.2: Assuma Λ um circuito fechado de um grafo fechado Γ com a propriedade de que

$$\det \mathcal{D}(\Gamma \ominus \Lambda) \neq 0$$

A fim de que Λ seja cicatriz, as seguintes condições sobre o espectro são suficientes:

$$\exists (k_n^2) \subset \sigma(\Delta);$$

1. $\forall e \in \Lambda, k_n L_e \bmod 2\pi \rightarrow 0$
2. $\forall e \in \Lambda^c, k_n L_e \bmod 2\pi \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Prova:

Notação:

Denote os vértices e os respectivos elos de Λ por

$(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_m, v_1)$ com orientação cíclica. Cada um dos vértices v_j será o 0 das coordenadas para os elos da vizinhança de Λ . Na existência de loops, adicione um vértice no meio do mesmo. Para as componetes nos elos (v_i, v_{i+1}) de Λ designaremos

$$\psi_i^{(n)}(x) = A_i^{(n)} \cos(k_n x) + B_i^{(n)} \sin(k_n x)$$

Nos elos (u, v) de Λ^c

$$\chi_{(u,v)}^{(n)} = A_{(u,v)}^{(n)} \cos(k_n x) + B_{(u,v)}^{(n)} \sin(k_n x)$$

Seja

$$M = \max_{e \in \Gamma} \sqrt{\frac{2}{L_e}}$$

Para simplificar a notação, seja $L = (L_1, \dots, L_m, \dots, L_b)$ o vetor dos comprimentos dos elos cujas primeiras m coordenadas correspondem aos elos de Λ . Seja $\delta_n = |k_n L \bmod \pi - (0, \dots, 0, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})|$ onde $|\cdot|$ é a norma do máximo. Assumindo (k_n^2) uma subsequência que satisfaz as hipóteses do teorema, podemos fazer $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Então existe uma sequência $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ tal que:

1. $\forall e \in \Lambda: \cos(k_n L_e) > 1 - \varepsilon_n$ e $0 \leq |\sin(k_n L_e)| < \varepsilon_n$
2. $\forall e \in \Lambda^c: 0 \leq \cos(k_n L_e) < \varepsilon_n$ e $\sin(k_n L_e) > 1 - \varepsilon_n$

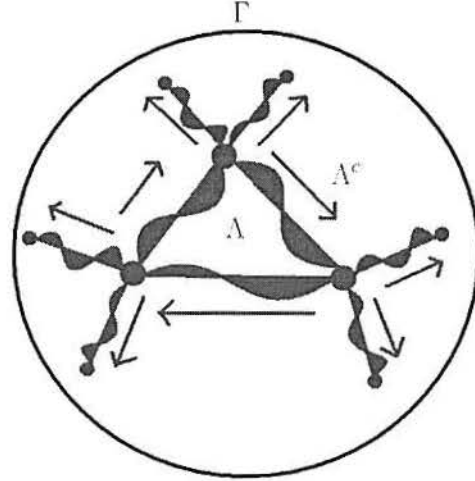


Figura 11: Descrição da situação. No limite $k_n^2 \rightarrow \infty$ cabe um número inteiro de comprimentos de onda nos elos do circuito fechado Λ (vermelho) e um número ímpar de comprimentos de onda nos elos do subgrafo complementar (azul). As setas indicam a orientação dos elos.

Condições de contorno

1. Continuidade:

i) vértices de Λ :

Continuidade nos vértices de Λ e condição (1) irão possibilitar reescrever as componentes da função de onda em Λ como:

$$\psi_i^{(n)}(x) = \omega_1^{(n)} \cos(k_n x) + B_i^{(n)} \sin(k_n x) + r_i^{(n)}(x)$$

com

$$|r_i^{(n)}(x)| = |(A_i^{(n)} - \omega_1^{(n)}) \cos(k_n x)| < \varepsilon_n m M$$

ii) vértices de Λ^c

Continuidade nos vértices de Λ^c e condição (2) irão possibilitar reescrever as componentes da função de onda como:

$$\chi_{u,v}^{(n)}(x) = \omega_u^{(n)} \cos(k_n x) + \omega_v^{(n)} \sin(k_n x) + r_{u,v}^{(n)}(x)$$

com

$$|r_{u,v}^{(n)}(x)| = |(A_{u,v}^{(n)} - \omega_u^{(n)}) \sin(k_n x) + (B_{u,v}^{(n)} - \omega_v^{(n)}) \cos(k_n x)| < 4\varepsilon_n d(v) M$$

2. Soma das derivadas nula:

i) Nos vértices $v_j \in \Lambda$ temos:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_j^{(n)}}{dx}(0) &= k_n B_j^{(n)} \\ \frac{d\psi_j^{(n)}}{dx}(0) &= k_n(B_j^{(n)} + R_j^{(n)})\end{aligned}$$

com

$$|R_j^{(n)}| = |B_j^{(n)}(\cos(k_n L_j) - 1) - \Lambda_j^{(n)} \sin(k_n L_j)| < 2\varepsilon_n M$$

Para os elos da vizinhança de Λ (v_j, u) temos

$$\frac{d\chi_{v_j, u}^{(n)}}{dx}(0) = k_n(\omega_u^{(n)} + \frac{1}{k_n} \frac{dr_{v_j, u}^{(n)}}{dx}(0))$$

Sendo $[C_{i,j}] = \mathcal{C}(\Gamma)$ a matriz de conectividade do grafo, aplicando a soma das derivadas no vértice $v_j \in \Lambda$:

$$B_{j-1}^{(n)} - B_j^{(n)} + R_j^{(n)} - \sum_u C_{v_j, u}(\omega_u^{(n)} + \frac{1}{k_n} \frac{dr_{v_j, u}^{(n)}}{dx}(0)) = 0 \quad (1)$$

Somando essa equação sobre os vértices de Λ obtemos

$$\sum_{v_j \in \Lambda, u} C_{v_j, u} \omega_u^{(n)} = \sum_{v_j \in \Lambda} R_j^{(n)} - \sum_{v_j \in \Lambda, u} C_{v_j, u} \frac{dr_{v_j, u}^{(n)}}{dx}(0) = G_1^{(n)}$$

Denotando $[D_{u,v}] = \mathcal{D}(\Gamma - \Lambda)$, podemos reescrever essa equação como:

$$\sum_u D_{1, u} \omega_u^{(n)} = G_1^{(n)}$$

onde "1" representa o vértice pelo qual Λ foi substituído e

$$|G_1^{(n)}| < 4\varepsilon_n d(1)$$

ii) vértices $v \in \Lambda^c$ obtemos :

Pelo mesmo procedimento do último item, obtemos as equações para cada um dos vértices $v \in (\Gamma - \Lambda)$

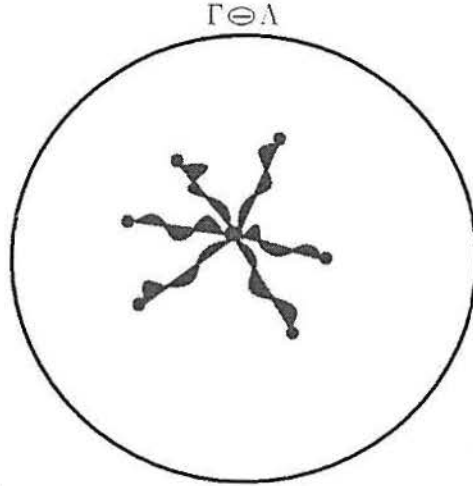
$$\sum_u D_{v, u} \omega_u^{(n)} = G_v^{(n)}$$

com

$$|G_v^{(n)}| < 4\varepsilon_n d(v)$$

E logo podemos juntar essas equações numa única equação matricial:

$$\mathcal{D}\Omega^{(n)} = G^{(n)}$$



O grafo $\Gamma \ominus \Lambda$

Usando o fato de que $\det \mathcal{D} \neq 0$, todas as variáveis $\omega_u^{(n)}$ são unicamente determinadas; no limite $n \rightarrow \infty$ todas as variáveis $G_v^{(n)} \rightarrow 0$ e logo

$$\lim_n \Omega^{(n)} = (0, \dots, 0)$$

Da equação (1) sai que

$$\lim_n \mathbb{P}_n(\Lambda) = 1$$

e

$$\lim_n \mathbb{P}_n(e \in \Lambda) = \frac{L_e}{\sum_{f \in \Lambda} L_f} > 0$$

o que conclui a demonstração.

Observação: A hipótese referente ao grafo Γ não possuir elos pontas não é necessária. Nesse caso, para os elos pontas p do subgrafo complementar ao circuito fechado, a condição sobre a seqüência de autovalores é: $k_n L_p \bmod 2\pi \rightarrow 0$. Só que nesse caso a matriz que deve ter determinante diferente de 0 é o da matriz de conectividade do grafo $(\Gamma \ominus \Lambda) \ominus P$, onde P é o conjunto de elos pontas do grafo Γ . Também podemos formular uma versão desse teorema para que um circuito aberto seja cicatriz, contanto que seus dois elos pontas não violem o teorema 4.3. Nesse caso, as condições no espectro para cada elo interior do circuito aberto Λ são as mesmas mencionadas anteriormente no teorema e para cada elo ponta de Λ deve valer que $k_n L_p \bmod 2\pi \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Nesse caso, o determinante que

deve ser diferente de 0 é o da matriz de conectividade do grafo $(\Gamma \ominus Int(\Lambda)) \ominus P(\Lambda^c)$, onde $Int(\Lambda)$ é o conjunto dos elos interiores de Λ e $P(\Lambda^c)$ o conjunto dos elos pontas do subgrafo Λ^c .

5 Discussões

Dentro do contexto do grafo estrela, o resultado original obtido por Keating [5] afirmava que quaisquer dois elos constituíam uma cicatriz de um grafo estrela cujo comprimento dos elos são racionalmente independentes. Como demonstrado, sob as mesmas hipóteses qualquer subgrafo estrito de dois ou mais elos de um grafo estrela pode ser uma cicatriz. Um único elo não pode ser cicatriz da estrela pelo teorema 4.3. Um grafo estrela com comprimentos racionalmente **dependentes** não possui cicatrizes, uma vez que nesse caso apenas um número finito de pontos da hiperfície \mathcal{S} serão furados. Por outro lado, a hipótese sobre a independência racional entre os comprimentos é razoável tanto no sentido matemático quanto físico, uma vez que com probabilidade 1 ao se sortear n números reais eles são R.I entre si. No caso de grafos com *loops*, para que um único *loop* seja cicatriz nenhuma condição sobre os comprimentos é necessária. Para que *loops* desconectados ou não sejam cicatrizes é necessário dependência racional entre os seus comprimentos. O teorema 4.3 sobre não cicatrizes tem como consequência o fato de que elos desconectados não podem ser cicatrizes, e isto levaria a conjecturar que subgrafos desconexos não são cicatrizes se não fosse o contra exemplo dos loops desconectados de comprimentos racionalmente dependentes. Outra consequência não mencionada do teorema 4.3 é de quanto maior for o comprimento dos elos de um subgrafo constituído de elos desconectados (uma única ponta por exemplo), menor pode se tornar a probabilidade associada ao subgrafo complementar. Nos 2 últimos teoremas demonstrou-se que o problema de cicatrizes está relacionado à propriedades assintóticas do espectro. Vemos nesses teoremas que para formar-se uma cicatriz num circuito fechado Λ , deve existir uma sequência de níveis de energia que faça assintoticamente caber um número inteiro de comprimentos de onda em cada elo de Λ e um número ímpar de meios comprimentos de onda em cada elo do subgrafo complementar a Λ . Esse resultado em certo senso é parecido com a regra de quantização de Bohr-Sommerfeld, isto é, afim de evitar-se interferência destrutiva deve existir níveis de energia que façam caber um número exato de comprimentos de de Broglie sobre a órbita fechada. Por fim, a condição técnica sobre a matriz de conectividade do grafo em questão no último teorema pode ser substituída por uma condição mais fraca sobre a mesma assumindo uma condição distinta no espectro:

Teorema: Assuma Λ um circuito fechado de um grafo fechado Γ . Seja \mathcal{D} a matriz de conectividade do grafo $\Gamma \ominus \Lambda$ com a propriedade de que para alguma troca de sinais de suas entradas, essa nova matriz \mathcal{D}' possua determinante diferente de 0. A fim de que Λ seja cicatriz, as seguintes condições no espectro são suficientes:

$$\exists(k_n^2) \subset \sigma(\Delta);$$

- (a) $\forall e \in \Lambda, k_n L_e \bmod 2\pi \rightarrow 0$ se $D'_e > 0$ ou $k_n L_e \bmod 2\pi \rightarrow \pi$ se $D'_e < 0$
- (b) $\forall e \in \Lambda^c, k_n L_e \bmod 2\pi \rightarrow \frac{\pi}{2}$, se $D'_e > 0$ ou $k_n L_e \bmod 2\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ se $D'_e < 0$

Então um possível refinamento desse teorema seria caracterizar os grafos que possuem determinante de sua matriz de conectividade diferente de 0. Um possível prosseguimento seria incorporar potenciais magnéticos nos elos e estender ou não os resultados obtidos para as cicatrizes.

6 Bibliografia

- [1] Bolobás B., *Modern Graph Theory*, GTM 184, Springer 1998 (ISBN 0387984887), pág 17
- [2] L. Pauling, *The diamagnetic anisotropy of aromatic molecules*, J. Chem. Phys. 4, 673 (1936).
- [3] Dirk Kreime, *Knots and Feynman diagrams*, Cambridge University Press (July 2000), ISBN-10: 0521587611
- [4] Lee Smolin, *Atoms of space and time*, Scientific American, pág. 66-75, Janeiro 2004
- [5] O. Hul, Sz. Bauch, P. Pakónski, N. Savytskyy, K. Życzkowski, and L. Sirko. *Experimental simulation of quantum graphs by microwave networks*, Phys. Rev. E 69, 056205 (2004).
- [6] A. I. Shnirelman, *Ergodic properties of eigenfunctions*, Uspehi Mat. Nauk, vol. 29, no. 6(180), pp. 181-182, 1974.
- [7] Y. Colin de Verdière, *Ergodicité et fonctions propres du laplacien*, Comm. Math. Phys., vol. 102, no. 3, pp. 497-502, 1985.
- [8] B. Heller, A. Martinez, and D. Robert, *Ergodicité et limite semiclassique*, Comm. Math. Phys., vol. 109, no. 2, pp. 313-326, 1987.
- [9] S. Zelditch, *Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces*, Duke Math. J., vol. 55, no. 4, pp. 919-941, 1987.
- [10] P. Gérard and É. Leichtnam, *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke Math. J., vol. 71, no. 2, pp. 559-607, 1993.
- [11] M. Degli Esposti, S. Graffi, and S. Isola, *Classical limit of the quantized hyperbolic toral automorphisms*, Comm. Math. Phys., vol. 167, no. 3, pp. 471-507, 1995.
- [12] A. Bouzouina and S. De Bièvre, *Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus*, Comm. Math. Phys., vol. 178, no. 1, pp. 83-105, 1996.
- [13] P. Kurlberg and Z. Rudnick, *Hecke theory and equidistribution for the quantization of linear maps of the torus*, Duke Math. J., vol. 103, no. 1, pp. 47-77, 2000.
- [14] P. Kurlberg and Z. Rudnick, *On quantum ergodicity for linear maps of the torus*, Comm. Math. Phys., vol. 222, no. 1, pp. 201-227, 2001.
- [15] M. Degli Esposti, S. Nonnenmacher, and B. Winn, *Quantum variance and ergodicity for the baker's map*, Commun. Math. Phys., vol. 263, pp. 325-352, 2006.
- [16] S. W. McDonald, Lawrence Berkeley Lab. Report LBL-14837 (1983)

- [17] Heller, E. J. & Tomsovic, S. (1993), *Postmodern Quantum Mechanics*, Phys. Today 38Ü46.
- [18] G. Berkolaiko, J. P. Keating and U. Smilansky, *Quantum Ergodicity for Graphs Related to Interval Maps*, Communications in Mathematical Physics, 137-159, 2007
- [19] M. Aymone, A.T Baraviera, S.D. Prado, *Existence and non existence of scars on quantum graphs, in preparation*
- [20] J. Keating, *Fluctuation statistics for quantum star graphs*, in Proceedings of Joint Summer Research Conference on Quantum Graphs and Their Applications, 2005 (G. Berkolaiko, R. Carlson, S. Fulling, and P. Kuchment, eds.), AMS, 2006.
- [21] Peter Kuchment, *Quantum Graphs. Some basic Structures*, Joint Summer Research Conference in the Mathematical Sciences Quantum Graphs and Their Applications, 2005