

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**Fabricio Deives Kummer**

**ANÁLISE DE PÓRTICOS ESPACIAIS PELO MÉTODO DA  
RIGIDEZ: CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DA  
DEFORMAÇÃO POR CORTE**

Porto Alegre  
junho 2014

**FABRICIO DEIVES KUMMER**

**ANÁLISE DE PÓRTICOS ESPACIAIS PELO MÉTODO DA  
RIGIDEZ: CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DA  
DEFORMAÇÃO POR CORTE**

Trabalho de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil

**Orientador: Ronald José Ellwanger**

Porto Alegre  
junho 2014

**FABRICIO DEIVES KUMMER**

**ANÁLISE DE PÓRTICOS ESPACIAIS PELO MÉTODO DA  
RIGIDEZ: CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DA  
DEFORMAÇÃO POR CORTE**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pelo Professor Orientador e pela Coordenadora da disciplina Trabalho de Diplomação Engenharia Civil II (ENG01040) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, junho de 2014

Prof. Ronald José Ellwanger  
DSc. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Orientador

Profa. Carin Maria Schmitt  
Dra. pelo PPGA/UFRGS  
Coordenadora

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. João Ricardo Masuero (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Eduardo Bittencourt (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Profa. Virgínia Maria Rosito d'Avila (UFRGS)**  
Dra. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico este trabalho aos meus pais, Sérgio e Therezinha, à  
minha irmã Tabata e a minha namorada, Carmem Moraes,  
pelo apoio contínuo durante o Curso de Graduação.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, ao Prof. Ronald José Ellwanger, orientador deste trabalho, pelo incentivo, disponibilidade e comprometimento em transmitir seu conhecimento, bem como pela atenção disponibilizada durante todo o período de realização deste trabalho.

À Prof. Carin Maria Schmitt, por sua dedicação e pelo recorrente aperfeiçoamento deste trabalho através de suas valiosas críticas e sugestões.

Aos demais professores da Escola de Engenharia por sua competência e empenho, e à UFRGS, por nos possibilitar um ensino de qualidade.

Aos Engenheiros Rodrigo Costa Silveira e Mateus Rachelle Soccol pelos ensinamentos e oportunidades de aprendizados fornecidos.

Aos meus pais, por tornar possível a realização deste curso, bem como pelo apoio nos momentos de dificuldades, dúvidas e incertezas. Agradeço por tudo que me proporcionaram até o momento, pela demonstração de caráter, ética, respeito e humildade, em todas as circunstâncias, pela sinceridade, pela transparência e principalmente, por serem meus pais. Muito Obrigado.

Ao meu colega de graduação, Marcio Muller, primeira pessoa com quem tive a oportunidade de conviver, desde a chegada a Porto Alegre, pela recepção afetuosa, pelo apoio, pelos convites de jantares e almoços em sua casa, fazendo com que as saudades da família se amenizassem.

A minha avó Helena, por ser uma fonte de inspiração, vida, sonhos, e demonstrar em cada encontro que a vida pode ser maravilhosa. Aos meus avós paternos, Elma e Ervino, pela demonstração de força, luta e intenso trabalho que sempre realizaram e realizam até hoje, fornecendo um grande exemplo de vida às pessoas próximas.

Aos amigos, que tornaram o curso de graduação uma excelente experiência de vida.

A minha noiva, mulher, esposa, companheira, eterna namorada, Carmem Moraes, pela atenção, carinho, afeto, delicadeza e alegria proporcionados até o momento.

Existem momentos na vida onde a questão de saber se se  
pode pensar diferentemente do que se pensa, e perceber  
diferentemente do que se vê, é indispensável para  
continuar a olhar ou a refletir.

*Michel Foucault*

## RESUMO

Este trabalho tem como finalidade estudar a influência dos efeitos da deformação por corte na análise de pórticos espaciais pelo método da rigidez. Atualmente, grande parte dos *softwares* destinados ao dimensionamento de estruturas de concreto armado já contemplam a possibilidade de consideração destes efeitos, contudo é de fundamental importância o conhecimento de como os mesmos são implementados computacionalmente e as teorias envolvidas no processo de automatização dos cálculos. Com base no método da rigidez, são apresentados conceitos como idealização estrutural, montagem dos carregamentos na estrutura, sistemas de referência, matrizes de rotação no plano e no espaço. Do mesmo modo, são demonstrados os procedimentos matemáticos para obtenção das reações, solicitações e deslocamentos. A partir desses, são introduzidas as alterações necessárias nos modelos de cálculo, sob forma matricial, para consideração da deformação por corte na análise da estrutura. Esse processo é exemplificado efetuando-se alterações no código fonte de dois *softwares*, versão educacional, com a apresentação de macro - diagramas de cada etapa de cálculo. Para a obtenção de resultados, foi realizada a modelagem de um edifício executado em concreto armado, moldado no local, sendo esses comparados com a modelagem da mesma estrutura, porém sem a consideração da deformação por esforço cortante. Com a obtenção das solicitações, os deslocamentos e rotações nodais são analisados, considerando-se para fins de sistemas de contraventamento apenas pórticos planos. Por fim, são descritas as vantagens e desvantagens da consideração desses efeitos no processo de modelagem e dimensionamento estrutural. Tabelas e gráficos oriundos do processamento do modelo estrutural são apresentados com o intuito de facilitar a visualização dos efeitos da deformação por corte nos resultados finais da análise estrutural.

Palavras-chave: Estruturas Reticuladas de Concreto Armado. Pórticos Espaciais. Método da Rigidez. Teoria de Timoshenko. Deformação por Esforço Cortante.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama das etapas de pesquisa .....	24
Figura 2 – Aplicação do princípio da superposição dos efeitos .....	31
Figura 3 – Estrutura sob o sistema de forças $P_i$ .....	31
Figura 4 – Estrutura sob o sistema de forças $Q_j$ .....	31
Figura 5 – Divisão do domínio da estrutura em elementos discretos (nós e barras) .....	35
Figura 6 – Diagrama representativo do processo de idealização estrutural .....	36
Figura 7 – Diagrama tensão <i>versus</i> deformação: material perfeitamente elástico .....	39
Figura 8 – Diagrama tensão <i>versus</i> deformação: material linear até o ponto A .....	39
Figura 9 – Graus de liberdade da barra de pórtico espacial .....	41
Figura 10 – Barra biengastada: deslocamento unitário no nó da extremidade final .....	42
Figura 11 – Barra biengastada: deslocamento unitário no nó da extremidade inicial .....	42
Figura 12 – Matriz de rigidez da barra de pórtico espacial: deformação por flexão, esforço normal e torção .....	44
Figura 13 – Cargas nodais combinadas .....	45
Figura 14 – Projeção de $V$ no sistema de coordenadas $x, y$ .....	47
Figura 15 – Projeção de $V$ no sistema de coordenadas $x', y'$ .....	48
Figura 16 – Rotação dos eixos coordenados $x', y', z'$ em torno de $y, y'$ .....	51
Figura 17 – Rotação dos eixos coordenados $x'', y'', z''$ em torno de $z', z''$ .....	52
Figura 18 – Rotação dos eixos coordenados $x''', y''', z'''$ em torno de $x'', x'''$ .....	53
Figura 19 – Elemento submetido a tensões e deformações de cisalhamento .....	65
Figura 20 – Tensões de cisalhamento em uma viga de seção retangular .....	66
Figura 21 – Elemento de viga submetido a tensões de cisalhamento horizontais e verticais .....	66
Figura 22 – Deformações das seções transversais de uma viga devido às tensões de cisalhamento .....	67
Figura 23 – Propriedades geométricas das seções transversais .....	71
Figura 24 – Deslocamentos e giros unitários no nó inicial da barra: parcela de corte .....	73
Figura 25 – Deslocamentos e giros unitários no nó final da barra: parcela de corte .....	73
Figura 26 – Relação percentual entre a deformação por flexão e a deformação por esforço cortante .....	75
Figura 27 – Matriz de rigidez da barra de pórtico espacial considerando a deformação por corte: eixos locais .....	76
Figura 28 – Modelo de viga utilizado para a aferição dos resultados .....	81
Figura 29 – Comparação entre a contribuição do momento fletor e do esforço cortante na formação da flecha composta .....	82

Figura 30 – Planta do pavimento tipo .....	83
Figura 31 – Variação da rotação em torno do eixo Z .....	91
Figura 32 – Variação nos deslocamentos dos pilares 1 e 4 .....	92
Figura 33 – Variação nos deslocamentos do pilar 2 .....	93
Figura 34 – Variação nos deslocamentos dos pilares 3 e 7 .....	94
Figura 35 – Variação nos deslocamentos do pilar 5 .....	95
Figura 36 – Variação nos deslocamentos do pilar 6 .....	96

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetro $k_s$ , em função do coeficiente de Poisson e da relação altura–largura da seção transversal .....	72
Tabela 2 – Aferição do modelo matemático implementado – consideração da contribuição do esforço cortante na deformação total .....	82
Tabela 3 – Propriedades geométricas dos elementos estruturais da edificação .....	84
Tabela 4 – Coordenadas nodais para os pilares e vigas do primeiro pavimento .....	85
Tabela 5 – Conectividades das barras para os pilares e vigas do primeiro pavimento ....	86
Tabela 6 – Forças de arrasto aplicadas na direção Y global de cada pavimento .....	87
Tabela 7 – Carregamentos de vento aplicados nos pilares, por pavimento .....	88
Tabela 8 – Reações nodais forças, sem DPC .....	89
Tabela 9 – Reações nodais forças, com DPC .....	89
Tabela 10 – Rotações em torno do eixo z, com DPC: primeiro pavimento .....	90
Tabela 11 – Rotações em torno do eixo z, com DPC: segundo pavimento .....	90
Tabela 12 – Rotações em torno do eixo Z: todos pavimentos .....	90
Tabela 13 – Deslocamentos nodais ocorridos nos pilares 1 e 4: direção Y .....	92
Tabela 14 – Deslocamentos nodais ocorridos no pilar 2: direção Y .....	93
Tabela 15 – Deslocamentos nodais ocorridos nos pilares 3 e 7: direção Y .....	94
Tabela 16 – Deslocamentos nodais ocorridos no pilar 5: direção Y .....	95
Tabela 17 – Deslocamentos nodais ocorridos no pilar 6: direção Y .....	96

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A_1, A_2, P_i, Q_j$  – conjunto de forças e/ou binários aplicados à estrutura (kN, kNm)

$R_A$  – reação no apoio A, devido à atuação dos sistemas de forças  $A_1$  e  $A_2$  (kN)

$R_B$  – reação no apoio B, devido à atuação dos sistemas de forças  $A_1$  e  $A_2$  (kN)

$M_B$  – momento no apoio B, devido à atuação dos sistemas de forças  $A_1$  e  $A_2$  (kNm)

$D$  – deslocamento no centro do vão, devido à atuação dos sistemas de forças  $A_1$  e  $A_2$  (m)

$R_A'$  – reação no apoio A, devido à atuação única do sistema de forças  $A_1$  (kN)

$R_B'$  – reação no apoio B, devido à atuação única do sistema de forças  $A_1$  (kN)

$M_B'$  – momento no apoio B, devido à atuação única do sistemas de forças  $A_1$  (kNm)

$D'$  – deslocamento no centro do vão, devido à atuação única do sistema de forças  $A_1$  (m)

$R_A''$  – reação no apoio A, devido à atuação única do sistema de forças  $A_2$  (kN)

$R_B''$  – reação no apoio B, devido à atuação única do sistema de forças  $A_2$  (kN)

$M_B''$  – momento no apoio B, devido à atuação única do sistemas de forças  $A_2$  (kNm)

$D''$  – deslocamento no centro do vão, devido à atuação única do sistema de forças  $A_2$  (m)

$\delta_j^Q$  – deslocamentos produzidos nas direções das forças  $Q_j$ , devidos a atuação do sistema de forças  $P_i$  (m)

$\delta_i^P$  – deslocamentos produzidos nas direções das forças  $P_i$ , devidos a atuação do sistema de forças  $Q_j$  (m)

$W$  – escalar trabalho (kNm)

$P$  – vetor ou matriz coluna de forças (kN)

$P'$  – vetor ou matriz coluna transposta de  $P$  (kN)

$\Delta$  – vetor ou matriz coluna de deslocamentos (m)

$\Delta'$  – vetor ou matriz coluna transposta de  $\Delta$  (m)

$\{K\}$  – matriz formada pelos coeficientes de rigidez da barra

$K_{pq}$  – matriz que representa a p-ésima ação devida a um valor unitário do q-ésimo deslocamento

$K_{qp}$  – matriz que representa a q-ésima ação devida a um valor unitário do p-ésimo deslocamento

$\sigma$  – tensão (kN/m<sup>2</sup>)

$\varepsilon$  – deformação (m)

$\sigma_e$  – tensão de escoamento (kN/m<sup>2</sup>)

$x^L, y^L, z^L$  – sistema de referência local (m)

1, 9 – deslocamentos nodais na direção  $z^L$  dos nós j e k, respectivamente (m)

2, 8 – deslocamentos nodais na direção  $y^L$  dos nós j e k, respectivamente (m)

3, 7 – deslocamentos nodais na direção  $x^L$  dos nós j e k, respectivamente (m)

4, 12 – giros nodais na direção  $z^L$  dos nós j e k, respectivamente (radianos)

5, 11 – giros nodais na direção  $y^L$  dos nós j e k, respectivamente (radianos)

6, 10 – giros nodais na direção  $x^L$  dos nós j e k, respectivamente (radianos)

$F^L$  – forças aplicadas, em coordenadas locais (kN)

$K^L$  – rigidez da barra, no sistema de coordenadas locais

$U^L$  – deslocamentos da barra, em coordenadas locais (m)

E – módulo de elasticidade longitudinal (kN/m<sup>2</sup>)

$E_{cs}$  – módulo de elasticidade secante (kN/m<sup>2</sup>)

$I_X$  – momento de inércia da barra na direção x ( $m^4$ )

$I_Y$  – momento de inércia da barra na direção y ( $m^4$ )

$I_z$  – momento de inércia da barra na direção z ( $m^4$ )

A – área da seção transversal ( $m^2$ )

b – largura da seção transversal (m)

h – altura da seção transversal (m)

$r_v$  – raio da viga de seção circular (m)

G – módulo de elasticidade transversal ( $kN/m^2$ )

L – comprimento do vão (m)

w – carregamentos distribuídos ao longo das barras ( $kN/m$ )

$[F^{i,L}]$  – vetor de carregamentos da barra i, no sistema de coordenadas locais (kN, kNm)

$\{K^{i,L}\}$  – matriz de rigidez da barra i, no sistema de coordenadas locais

$[U^{i,L}]$  – vetor de deslocamentos da barra i, no sistema de coordenadas locais (m, radianos)

$[F_{ep}^{i,L}]$  – vetor de reações de engastamento perfeito da barra i, no sistema de coordenadas locais (kN, kNm)

V – módulo do vetor V

$\alpha$  – ângulo formado entre o eixo coordenado x e o vetor V (radianos)

$V_{x'}$ ,  $V_{y'}$ ,  $V_{z'}$  – componentes do vetor V, no sistema de coordenadas local ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ )

$\theta$  – ângulo formado entre os eixos coordenado x e  $x'$  (radianos)

$V'$  – vetor V no sistema de referência local

r – matriz de rotação do sistema de referência global para o local

$V^G$  – vetor V no sistema de referência global

$r^T$  – matriz transposta de  $r$

$r^{-1}$  – matriz inversa de  $r$

$V_x, V_y, V_z$  – componentes do vetor  $V$ , no sistema de coordenadas global

$\beta$  – ângulo de rotação realizado em torno do eixo coordenado  $y$  e  $y'$  (radianos)

$V_{x''}, V_{y''}, V_{z''}$  – componentes do vetor  $V$ , no sistema de coordenadas local ( $x'', y'', z''$ )

$\theta$  – ângulo de rotação realizado em torno do eixo coordenado  $z'$  e  $z''$  (radianos)

$V_{x'''}, V_{y'''}, V_{z'''}$  – componentes do vetor  $V$ , no sistema de coordenadas local ( $x''', y''', z'''$ )

$\alpha$  – ângulo de rotação realizado em torno do eixo coordenado  $x''$  e  $x'''$  (radianos)

$V'''$  – componentes do vetor  $V$ , no sistema de coordenadas local ( $x''', y''', z'''$ )

$r_\alpha$  – matriz obtida através da rotação de um ângulo  $\alpha$  em torno dos eixos coordenados  $x''$  e  $x'''$

$r_\theta$  – matriz de rotação obtida através da rotação de um ângulo  $\theta$  em torno dos eixos  $z'$  e  $z''$

$r_\beta$  – matriz de rotação obtida através da rotação de um ângulo  $\beta$  em torno dos eixos  $y$  e  $y'$

$R$  – matriz de rotação no espaço tridimensional

$x_j, y_j, z_j$  – coordenadas do nó  $j$ , no sistema de referência global (m)

$x_k, y_k, z_k$  – coordenadas do nó  $k$ , no sistema de referência global (m)

$F^1, F^2$  – vetores de solicitações nos extremos das barras 1 e 2, respectivamente (kN, kNm)

$K_1, K_2$  – matrizes de rigidez das barras 1 e 2, respectivamente

$U_1, U_2$  – vetores de deslocamentos das barras 1 e 2, respectivamente (m, radianos)

$F_{ep}^1, F_{ep}^2$  – vetores de reações de engastamento perfeito das barras 1 e 2, respectivamente (kN, kNm)

$F$  – vetor de ações externas aplicadas nos nós (kN, kNm)

$K$  – matriz de rigidez global da estrutura (formada pelo conjunto de sub-matrizes)

$U$  – vetor de deslocamentos nodais (m, radianos)

$F_{eq}$  – vetor contendo as cargas nodais equivalentes (kN, kNm)

$F^*$  – vetor de cargas nodais nos nós acrescidas das cargas equivalentes ( $F + F_{eq}$ ) (kN, kNm)

$a_{ij}$  – coeficientes angulares

$x_1, x_2, x_3$  – variáveis da solução

$b_1, b_2, b_3$  – termos independentes

$F_i^m, F_j^m$  – vetor de solicitações nos nós  $i$  e  $j$  da barra  $m$ , respectivamente (kN, kNm)

$K_{ii}^m, K_{ij}^m, K_{ji}^m, K_{jj}^m$  – partições nodais da matriz de rigidez da barra  $m$

$U^i, U^j$  – vetores de deslocamentos nodais da barra  $m$  nos nós  $i$  e  $j$ , respectivamente (m, radianos)

$F_{epi}^m, F_{epj}^m$  – vetor de reações de engastamento perfeito da barra  $m$  (kN, kNm)

$\tau$  – tensão de cisalhamento (kN/m<sup>2</sup>)

$\tau_M$  – tensão média de cisalhamento (kN/m<sup>2</sup>)

$\tau_{M\acute{a}x}$  – tensão máxima de cisalhamento (kN/m<sup>2</sup>)

$\gamma$  – deformação de cisalhamento (radianos)

$f_{ck}$  – resistência característica à compressão do concreto (kN/m<sup>2</sup>)

$Q$  – força de cisalhamento atuante (kN)

$Q'$  – primeiro momento da área da seção transversal acima ou abaixo do nível em que a tensão de cisalhamento  $\tau$  está sendo calculada (m<sup>3</sup>)

$\omega$  – fator de forma ou *shear correction factor*

$k_s$  – parâmetro de correção das distorções, denominado de *shear form* ou *shear stiffness factor*

$\nu$  – coeficiente de Poisson

$B$  – semi-largura de banda da estrutura

$c$  – maior diferença entre as conectividades das barras da estrutura

$V_0$  – velocidade básica do vento (m/s)

$S_1$  – fator topográfico

$S_2$  – fator que considera a rugosidade do terreno e as dimensões da edificação

$S_3$  – fator estatístico

$q$  – pressão dinâmica do vento.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	18
<b>2 DIRETRIZES DA PESQUISA</b> .....	21
2.1 QUESTÃO DE PESQUISA .....	21
2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA .....	21
<b>2.2.1 Objetivo principal</b> .....	21
<b>2.2.2 Objetivos secundários</b> .....	21
2.3 HIPÓTESES .....	22
2.4 PRESSUPOSTO .....	22
2.5 DELIMITAÇÕES .....	22
2.6 LIMITAÇÕES .....	23
2.7 DELINEAMENTO .....	23
<b>3 CONCEITOS BÁSICOS</b> .....	26
3.1 SISTEMA DE EQUAÇÕES .....	26
<b>3.1.1 Equações de compatibilidade de deslocamentos</b> .....	27
<b>3.1.2 Equações constitutivas</b> .....	27
<b>3.1.3 Equações de equilíbrio</b> .....	28
3.2 INDETERMINAÇÃO CINEMÁTICA .....	28
3.3 PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO .....	29
3.4 TEOREMAS DE RECIPROCIDADE .....	31
<b>4 MÉTODO DA RIGIDEZ POR COMPUTADOR</b> .....	34
4.1 IDEALIZAÇÃO ESTRUTURAL .....	34
<b>4.1.1 Tipos de estruturas reticuladas</b> .....	36
<b>4.1.2 Tipos de análise estrutural</b> .....	38
<b>4.1.3 Sistemas de referência</b> .....	40
<b>4.1.4 Estudo da barra</b> .....	41
<b>4.1.5 Matriz de rigidez da barra</b> .....	43
<b>4.1.6 Vetor de cargas nodais equivalentes</b> .....	44
<b>4.1.7 Matriz de rotação</b> .....	46
4.1.7.1 Rotação no plano .....	47
4.1.7.2 Rotação no espaço .....	50
4.1.7.3 Obtenção da matriz de rotação R para a barra .....	54
4.2 MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE CARGAS GLOBAL DA ESTRUTURA .....	56

4.3 INTRODUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	58
4.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES GLOBAL .....	60
4.5 CÁLCULO DAS SOLICITAÇÕES NOS EXTREMOS DAS BARRAS .....	61
<b>5 ESFORÇO CORTANTE .....</b>	<b>63</b>
5.1 TENSÕES E DEFORMAÇÕES POR CISALHAMENTO .....	63
<b>5.1.1 Tensões de cisalhamento em elementos de seção transversal retangular .....</b>	<b>65</b>
<b>5.1.2 Tensões de cisalhamento em elementos de seção transversal circular .....</b>	<b>69</b>
5.2 FATORES DE FORMA .....	70
5.3 COEFICIENTES DE RIGIDEZ DA BARRA: PARCELA DE CISALHAMENTO	72
5.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA: PARCELA DE CISALHAMENTO .....	75
<b>6 ANÁLISE DE PÓRTICOS ESPACIAIS .....</b>	<b>77</b>
6.1 ETAPAS DE PROCESSAMENTO DO <b>PORT-IN</b> .....	77
6.2 ETAPAS DE PROCESSAMENTO DO <b>PORT-OUT</b> .....	79
6.3 MODIFICAÇÕES REALIZADAS NO <b>PORT-IN</b> E <b>PORT-OUT</b> .....	80
6.4 EXEMPLO 1 .....	81
6.5 EXEMPLO 2 .....	83
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>97</b>
REFERÊNCIAS .....	99
APÊNDICE A .....	101
APÊNDICE B .....	103

# 1 INTRODUÇÃO

A rápida evolução no campo da informática, aliada à rapidez, capacidade de processamento e acessibilidade aos dispositivos eletrônicos, possibilitou o desenvolvimento de técnicas numéricas e computacionais aplicadas no campo do projeto estrutural cada vez mais eficientes. Estas possibilitaram o aperfeiçoamento dos processos de análise de estruturas e os tornaram mais seguros e produtivos.

Métodos consagrados de análise estrutural, tais como o método das forças e dos deslocamentos, foram o alvo inicial das técnicas computacionais. Com base em formulações e equações matemáticas fundamentadas e desenvolvidas no campo da álgebra matricial, nasceu a técnica computacional da análise matricial de estruturas. Posteriormente, essa evoluiu para métodos mais avançados, tais como diferenças finitas, elementos finitos e de contorno e, mais recentemente, elementos discretos e operadores discretos.

Não se pode esquecer que todos esses métodos e técnicas são a implementação numérica de modelos físicos e matemáticos de análise estrutural. Ou seja, o método é na verdade uma técnica que usa o computador para resolver as equações que foram formuladas baseadas nos modelos teóricos.

Apesar da grande acessibilidade aos programas de análise estrutural, o engenheiro precisa entender e conhecer bem o comportamento real do modelo idealizado e as considerações presentes na formulação computacional referente à teoria das estruturas. Desta forma, cresce o aproveitamento dos recursos disponibilizados por esses programas e a interpretação dos resultados obtidos tem melhor qualidade.

Com o intuito de avaliar de forma mais precisa e segura o comportamento das estruturas, o presente trabalho tem como proposta a consideração dos efeitos da deformação por corte na análise de pórticos espaciais. Deste modo, são apresentadas as alterações necessárias na formulação matricial do método da rigidez. Com isso, possibilita-se o entendimento das metodologias empregadas durante o processo de implementação computacional, e consequentemente, a realização de uma análise mais crítica dos resultados obtidos.

Admitiu-se que as estruturas analisadas apresentavam comportamento elástico linear. No comportamento elástico linear, as cargas externas podem ser aplicadas gradualmente a partir do zero até os seus valores finais desprezando os efeitos variáveis no tempo, forças de inércia e amortecimento. Além disso, também é considerada a proporcionalidade entre as cargas externas e seus efeitos: deslocamentos, reações de apoio e esforços seccionais (SORIANO, 2005).

A resistência dos materiais distingue, para fins de tratamento matemático, as deformações por momento fletor, esforço cortante, esforço normal e momento torçor. Dessa forma, a flecha resultante corresponde a integração das deformações relativas a cada esforço. As deformações por esforço cortante geralmente são pequenas, porém, em elementos de estrutura onde a relação entre o comprimento e a altura é reduzida, a parcela contribuinte referente a deformação por cisalhamento pode perfazer de 0,2 a 3 vezes a deformação por momentos fletores, não podendo dessa forma ser desconsiderada (LEONHARDT, 1979).

A deformação por corte foi tratada na matriz de rigidez da barra considerando-se fatores de cisalhamento e os respectivos esforços cortantes. Esses se relacionam com as propriedades físicas das seções correspondentes a cada elemento estrutural em análise.

Dessa forma, com base no estudo da deformação por corte, realizaram-se simulações de caráter comparativo entre modelos estruturais que os contemplavam e modelos que desconsideravam esses fatores. Com isso, os resultados obtidos nas análises serviram como parâmetro qualitativo para a conclusão da real significância desses efeitos no comportamento global das estruturas.

No capítulo 2 realizou-se a descrição das metodologias de pesquisa aplicadas na realização deste trabalho, bem como a apresentação das seguintes diretrizes:

- a) questão de pesquisa;
- b) objetivos principais e secundários;
- c) hipóteses;
- c) pressupostos;
- d) delimitações;
- e) limitações.

Da mesma forma, esse capítulo apresentou a sequência operacional realizada durante todo o desenvolvimento do projeto. As etapas foram demonstradas sob a forma de diagrama, com o intuito de facilitar o entendimento, bem como elucidar o processo como um todo.

O capítulo 3 forneceu uma revisão de conceitos fundamentais para a realização da análise de estruturas reticuladas. Neste apresentou-se o teorema da reciprocidade, o princípio da superposição dos efeitos e o sistema de equações necessárias para a solução de estruturas hiperestáticas por computador.

Ao longo do capítulo 4, realizou-se o processo de idealização estrutural através do método da rigidez. Desse modo, especificaram-se os procedimentos de análise de estruturas por computador, bem como as equações utilizadas em cada etapa do processamento, com o intuito de favorecer o entendimento quanto às considerações realizadas pelos *softwares* computacionais.

Com base nos conceitos desenvolvidos para o método da rigidez, no capítulo 5 descreveu-se o esforço cortante, em termos de tensões e deformações nas barras. Neste mesmo capítulo justificou-se a importância na consideração deste efeito em termos de formação da flecha composta nos elementos estruturais.

No capítulo 6 realizou-se a análise de pórticos espaciais utilizando os *softwares* **PORT-IN** e **PORT-OUT**. Demonstraram-se as alterações realizadas na rotina computacional dos mesmos, para a consideração dos efeitos da deformação por corte, bem como a descrição dos processos de cálculo realizados. Neste mesmo capítulo desenvolveram-se dois exemplos, sendo que o primeiro corresponde a aferição do modelo matemático e estrutural implementado e o segundo uma aplicação mais prática em termos de análise de pórticos espaciais. Os resultados deste trabalho também são demonstrados.

As considerações finais correspondem ao capítulo 7, no qual é realizado o fechamento do trabalho, apresentando uma análise mais crítica dos resultados obtidos, bem como sugestões e indicações relativas ao tema em análise.

## 2 DIRETRIZES DA PESQUISA

As diretrizes para desenvolvimento do trabalho são descritas nos próximos itens.

### 2.1 QUESTÃO DE PESQUISA

A questão de pesquisa do trabalho é: quais as diferenças apresentadas nos resultados da análise estrutural de pórticos espaciais, pelo método da rigidez, ao se implementar a consideração da deformação por corte na rotina de um *software*?

### 2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

Os objetivos da pesquisa estão classificados em principal e secundários e são descritos a seguir.

#### 2.2.1 Objetivo principal

O objetivo principal do trabalho consiste na apresentação dos efeitos, nos resultados da análise estrutural de pórticos espaciais, pelo método da rigidez, devido à consideração da deformação por corte em rotinas computacionais.

#### 2.2.2 Objetivos secundários

Os objetivos secundários do trabalho são:

- a) exposição da formulação matricial básica utilizada nos programas computacionais de análise de estruturas reticuladas;
- b) descrição matemática das alterações realizadas na matriz de rigidez e no vetor de propriedades geométricas de cada barra, para a consideração dos efeitos da deformação por corte na análise de pórticos espaciais pelo método da rigidez;

- c) apresentação de macro - diagramas que representam a sequência operacional dos sistemas computacionais de análise de estruturas reticuladas.

## 2.3 HIPÓTESES

As hipóteses consideradas neste trabalho, baseadas na modelagem de pórticos espaciais pelo método da rigidez, são da confirmação dos seguintes efeitos nos resultados das análises estruturais devidos a consideração da deformação por corte:

- a) aumento na deformação de vigas e pilares, quando a relação entre o comprimento e a altura é reduzida;
- b) pilares que participam do sistema de contraventamento da estrutura apresentam acréscimos nas deformações.

## 2.4 PRESSUPOSTO

O trabalho tem por pressuposto a validade da Teoria de Timoshenko, que leva em conta a influência da deformação por cisalhamento no plano da seção transversal, para avaliação da contribuição do esforço cortante na formação da flecha composta.

## 2.5 DELIMITAÇÕES

O trabalho delimita-se ao estudo das alterações matemáticas necessárias no método da rigidez, para a consideração da deformação por corte, e posterior implementação computacional para avaliação dos efeitos nos resultados da análise estrutural. Os modelos estruturais analisados têm como particularidades:

- a) sistemas de contraventamento formados por pórticos planos;
- b) edificações executadas em concreto convencional;
- c) carregamentos considerados na modelagem das estruturas, que dependem da localização da edificação, tem como referência a cidade de Porto Alegre, no Rio Grande do Sul.

## 2.6 LIMITAÇÕES

São limitações do trabalho:

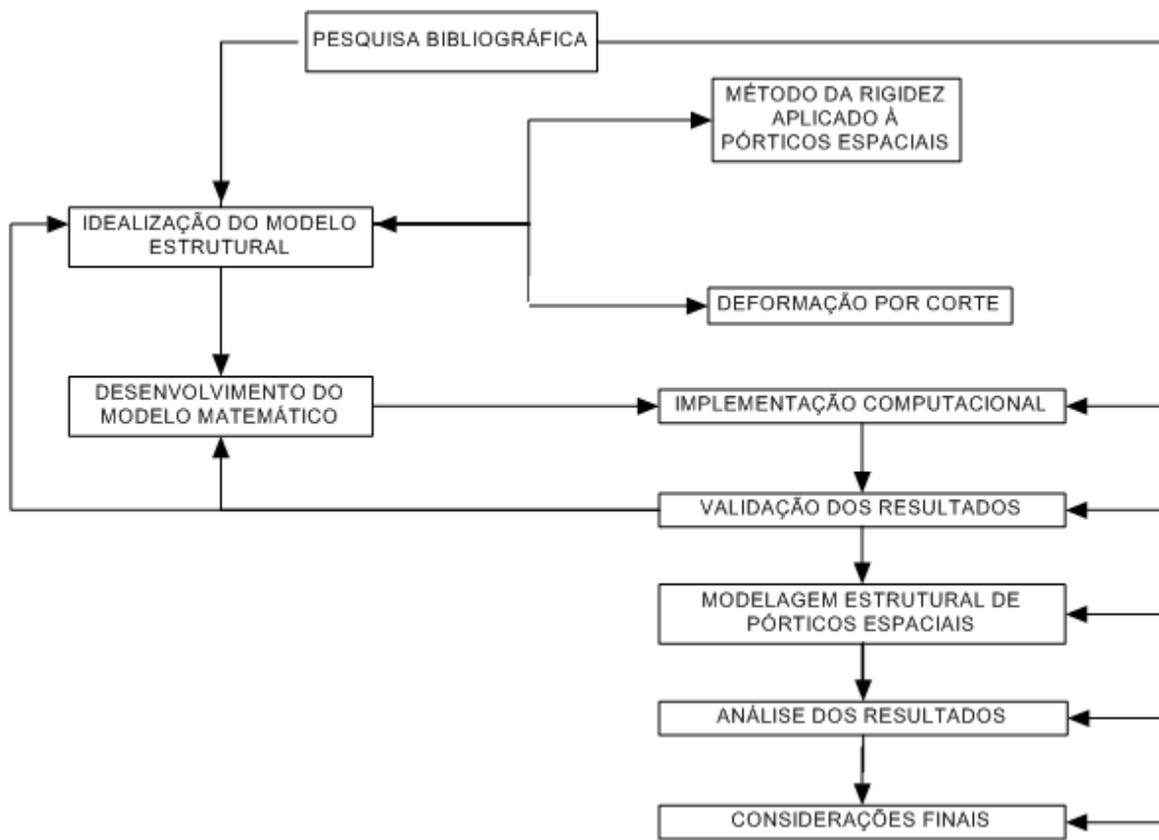
- a) consideração apenas de carregamentos estáticos, durante a modelagem estrutural das edificações;
- b) a análise linear das estruturas;
- c) análise de um número limitado de modelos estruturais, porém, satisfatório para avaliação dos efeitos da deformação por corte;
- d) edificações executadas em concreto convencional, moldado no local, com resistência característica à compressão até 50 MPa.

## 2.7 DELINEAMENTO

O trabalho foi realizado através das etapas apresentadas a seguir, representadas na figura 1, e descritas nos próximos parágrafos:

- a) pesquisa bibliográfica;
- b) idealização do modelo estrutural;
- c) desenvolvimento do modelo matemático;
- d) implementação computacional;
- e) validação dos resultados;
- f) modelagem estrutural de pórticos espaciais;
- g) análise dos resultados;
- h) considerações finais.

Figura 1 – Diagrama das etapas de pesquisa



(fonte: elaborado pelo autor)

A **pesquisa bibliográfica** está relacionada direta ou indiretamente a todas as etapas desenvolvidas no trabalho. Com base nessa, houve a definição das teorias e métodos a serem seguidos, bem como o estudo de publicações relacionadas à modelagem de estruturas pelo método da rigidez. Foram também objetos de pesquisa, rotinas computacionais relacionadas à verificação e dimensionamento de estruturas espaciais, bem como *softwares* comerciais atualmente disponíveis no mercado, capazes de considerar os efeitos da deformação por corte.

O processo de **idealização do modelo estrutural** consiste basicamente em transformar a estrutura real a ser edificada em um modelo de cálculo capaz de simular o comportamento da mesma sob a ação de diversos carregamentos. A descrição dos elementos estruturais e de suas solicitações é realizada de forma detalhada.

Na fase de **desenvolvimento do modelo matemático** tem-se a apresentação da formulação matricial utilizada para modelagem de pórticos espaciais pelo método da rigidez. Simultaneamente, foram demonstradas as alterações matemáticas necessárias em rotinas computacionais, para a consideração dos efeitos da deformação por corte.

Com base nas formulações matemáticas previamente definidas, iniciaram-se os procedimentos de **implementação computacional**. Estes correspondem a apresentação de diagramas vinculados à rotina computacional em desenvolvimento, bem como à descrição detalhada de cada etapa do modelo de cálculo implementado. De forma geral, consiste na tradução do modelo matemático para a linguagem computacional.

A **validação dos resultados** corresponde à comparação dos efeitos nos resultados de pórticos espaciais modelados pela rotina computacional implementada com os resultados de deslocamentos publicados por outros autores. Tem como objetivo a verificação tanto do processo de implementação computacional, como do modelo de cálculo desenvolvido.

A etapa seguinte consiste na **modelagem estrutural de pórticos espaciais**, visando a obtenção dos efeitos causados pela consideração da deformação por corte nos resultados da análise estrutural. Esta etapa abrange também o estudo dos carregamentos à serem aplicados na estrutura, bem como a concepção estrutural da edificação.

Com o término da modelagem estrutural, realizou-se o processamento computacional do modelo de cálculo para a obtenção dos resultados, tais como solicitações, deformações e reações de apoio. A estabilidade global da edificação também foi verificada. A **análise dos resultados** corresponde a uma avaliação geral dos dados obtidos, relacionando os mesmos com a bibliografia consultada.

Nas **considerações finais** são verificadas as hipóteses anteriormente citadas. A apresentação de conclusões mais específicas, vinculadas a realização de cada etapa, também ocorre nessa fase.

### 3 CONCEITOS BÁSICOS

A análise de uma estrutura consiste fundamentalmente na determinação do campo de deslocamentos e tensões produzidos na mesma por um conjunto de ações exteriores, pressupondo certas condições de contorno. Com vista à realização desta análise, é necessário constituir um modelo matemático da estrutura, sobre o qual se possa operar numericamente através do computador (VANDERBILT, c1974, p. 4, tradução nossa).

Dessa forma, este capítulo tem como objetivo definir alguns conceitos fundamentais, relacionados à análise matricial de estruturas reticuladas. Posteriormente, os mesmos são aplicados durante a apresentação do método da rigidez.

#### 3.1 SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Ao analisar-se uma estrutura pelo método da rigidez, assim como em qualquer problema de Elasticidade, três conjuntos de equações devem ser satisfeitas (MARTIN, c1966, p. 4, tradução nossa), ou seja, equações:

- a) de compatibilidade de deslocamentos;
- b) constitutivas;
- c) de equilíbrio.

As equações de compatibilidade relacionam as deformações da barra com os deslocamentos nodais. Introduzindo essas relações nas equações constitutivas, se relacionam as forças nos extremos das barras com os deslocamentos nodais. Essas últimas, quando inseridas nas equações de equilíbrio, obtém-se um conjunto de equações da estrutura expressa em termos de deslocamentos (VANDERBILT, c1974, p. 11, tradução nossa).

Segundo Soriano (2005, p. 50), “A partir desses deslocamentos podem ser determinados os esforços internos nas extremidades das barras e as reações de apoio da estrutura.”. Do mesmo modo, Gere e Weaver Junior (1981, p. 3) afirmam que “Em geral, todos os pontos da estrutura, exceto os pontos de apoio imóveis, sofrerão deslocamentos.”.

### 3.1.1 Equações de compatibilidade de deslocamentos

As barras que constituem a estrutura não podem se deformar livremente, dado que a continuidade da estrutura deve ser mantida ao longo de todo o processo de deformação. Dessa forma, por exemplo, nos nós correspondentes aos apoios, que estabelecem a ligação da estrutura com o meio exterior, devem ser introduzidas equações de compatibilidade (VANDERBILT, c1974, p. 13, tradução nossa).

A introdução destas equações pode ser devida a imposição de deslocamentos, anulação dos mesmos (apoios rígidos) ou definição de proporcionalidades entre a ação introduzida e o deslocamento correspondente (simulação matemática de molas). Dessa forma, Gere e Weaver Junior (1981, p. 12) afirmam que:

As condições de compatibilidade também devem ser satisfeitas em todos os pontos de todo o interior de uma estrutura. Comumente são as condições de compatibilidade nos nós da estrutura às de interesse. Por exemplo, em uma ligação rígida entre dois membros, os deslocamentos (translações e rotações) devem ser os mesmos nos dois membros.

Pode-se citar como exemplo que, se duas barras se encontram num nó através de uma ligação rígida, as extremidades em contato devem sofrer iguais deslocamentos (translações e rotações), para que a compatibilidade seja preservada. Se o encontro dessas for de maneira articulada, as extremidades em contato sofrem idênticas translações mas não obrigatoriamente, as mesmas rotações.

### 3.1.2 Equações constitutivas

As grandezas tensão e deformação relacionam-se através das chamadas equações constitutivas. O modo como relacionam-se entre si depende do material ou da classe do material em análise. Em geral, pode-se agrupar o comportamento dos materiais em modelos constitutivos, que incluem um ou mais comportamentos, como os que são referidos na Teoria da Elasticidade, por exemplo (VANDERBILT, c1974, p. 12, tradução nossa).

Pode-se definir um material elástico como sendo aquele que recupera seu estado inicial depois de submetido a um ciclo completo de carregamentos e descarregamentos, sem sofrer deformações permanentes. Segundo Timoshenko (1966, p. 24, grifo do autor), “Diz-se que o

corpo é **perfeitamente elástico** se recupera completamente a sua forma original depois da retirada da carga; **parcialmente elástico**, se a deformação produzida pelas forças exteriores não desaparece completamente depois da retirada da carga.”.

Com base no tipo de material, obtêm-se curvas de tensão *versus* deformação. A partir dessas, determina-se o grau de proporcionalidade entre as cargas aplicadas e os deslocamentos obtidos. Dessa forma, Timoshenko (1966, p. 29, grifo do autor), com base nessas curvas, complementa que “Conhecendo o limite de proporcionalidade, o limite de escoamento e a tensão de ruptura do material, é possível estabelecer-se, para cada problema particular de engenharia, a grandeza da tensão que pode ser considerada como **tensão de segurança**.”.

### 3.1.3 Equações de equilíbrio

A obediência às condições de equilíbrio é extremamente importante na análise de qualquer estrutura. Segundo Soriano (2010, p. 39, grifo do autor), “**Equilíbrio é uma condição fundamental em Análise de Estruturas [...]**”.

Considerando que o comportamento das estruturas seja estático frente à atuação das cargas ao longo de sua vida útil, e ainda assim linear, Soriano e Lima (2004, p. 4) afirmam que:

A menos de efeito de instabilidade elástica [...] a estrutura está em equilíbrio quando a resultante força e a resultante momento (em relação a um eixo qualquer) das ações e das reações de apoio são nulas. Decompondo essas resultantes em um referencial cartesiano XYZ, esse equilíbrio é expresso pela nulidade de suas componentes [...].

## 3.2 INDETERMINAÇÃO CINEMÁTICA

Ao se analisar o comportamento de uma estrutura sujeita a uma determinada sollicitação, as incógnitas de natureza cinemática presentes no problema são os deslocamentos que se verificam nos nós da estrutura e nos pontos de descontinuidades. O que caracteriza o comportamento das estruturas cinematicamente indeterminadas é a interação que se manifesta entre os elementos que a compõem (GERE; WEAVER JUNIOR, 1981, p. 12).

Desse modo, se o número de ações (reações) externas e internas for maior que o número de equações de equilíbrio, a estrutura é estaticamente indeterminada (VANDERBILT, c1974,

tradução nossa). Com base nisso, Gere e Weaver Junior (1981, p. 14, grifo do autor) afirmam que:

No método de análise da rigidez, os deslocamentos nodais da estrutura são as quantidades desconhecidas. [...]. Para compreender este tipo de indeterminação, deve ser lembrado que os nós nas estruturas reticuladas definem-se como os pontos onde dois ou mais membros se interceptam nos pontos de apoio e nas extremidades livres. Quando a estrutura está submetida a cargas, cada nó sofrerá deslocamentos sob a forma de translações e rotações, dependendo da configuração da estrutura. [...]. Estes deslocamentos nodais são as quantidades cinemáticas indeterminadas, sendo por vezes designados por redundantes cinemáticas. O seu número representa o grau de indeterminação cinemática da estrutura ou o número de **graus de liberdade** para o deslocamento nodal.

### 3.3 PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

O princípio da superposição dos efeitos é um dos mais importantes conceitos da análise de estruturas. Segundo este, os efeitos em uma dada estrutura submetida a diversas cargas ou deslocamentos podem ser considerados separadamente e depois somados ou considerados atuando em conjunto. Os resultados são rigorosamente iguais enquanto for válida a relação linear entre ações e deslocamentos (trabalho não publicado)<sup>1</sup>.

Conforme Ricardo (1978, p. 129), “Enquanto as estruturas mantiverem relações lineares entre as cargas e deflexões (translações ou deflexões angulares), vale o Princípio da Superposição.”. A aplicabilidade deste princípio é complementada pelo autor, ao descrever que “Nas estruturas elásticas lineares, sujeitas a várias cargas externas, as deflexões totais são a soma das deflexões devidas a cada carga agindo isoladamente.”.

Quanto a aplicabilidade da superposição dos efeitos, Gere e Weaver Junior (c1965, p. 22, tradução nossa) afirmam que “[...] as ações e deslocamentos produzidos por um sistema de forças  $A_1$  e  $A_2$  atuando separadamente [...] podem ser combinadas linearmente para obtenção das reações e deslocamentos causados por  $A_1$  e  $A_2$  atuando simultaneamente [...]”.

As equações 1 a 4 e a figura 2 demonstram a aplicação do princípio da superposição dos efeitos. A estrutura em análise consiste de uma viga apoiada na extremidade A e engastada na extremidade B, com comprimento do vão igual a L. Aplicando-se sobre essa viga dois

<sup>1</sup> Informação obtida na apostila de Métodos Matriciais para a Análise de Estruturas por Computador, elaborada pelos professores A. J. Ferrante e J. S. Gomes Franco, utilizada no curso de Pós - Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, março de 1977.

sistemas de forças  $A_1$  e  $A_2$  simultaneamente, obtêm-se as reações  $R_A$ ,  $R_B$  e  $M_B$ . Da mesma forma determina-se a deformada da viga para estes carregamentos, com deslocamento  $D$  no centro do vão (GERE; WEAVER JUNIOR, c1965, p. 22, tradução nossa).

Com base na validade do princípio da superposição dos efeitos, pode-se separar os sistemas de forças  $A_1$  e  $A_2$ , aplicando-os de forma isolada à viga. Com isso obtêm-se, respectivamente, as reações e deslocamentos  $R_{A'}$ ,  $R_{B'}$ ,  $M_{B'}$ ,  $D'$  e  $R_{A''}$ ,  $R_{B''}$ ,  $M_{B''}$ ,  $D''$  (GERE; WEAVER JUNIOR, c1965, p. 22, tradução nossa).

Dessa maneira pode-se escrever (GERE; WEAVER JUNIOR, c1965, p. 22):

$$R_A = R_{A'} + R_{A''} \quad (\text{equação 1})$$

$$R_B = R_{B'} + R_{B''} \quad (\text{equação 2})$$

$$M_B = M_{B'} + M_{B''} \quad (\text{equação 3})$$

$$D = D' + D'' \quad (\text{equação 4})$$

Onde:

$R_A$  = reação no apoio A, devido à atuação dos sistemas de forças  $A_1$  e  $A_2$ ;

$R_B$  = reação no apoio B, devido à atuação dos sistemas de forças  $A_1$  e  $A_2$ ;

$M_B$  = momento no apoio B, devido à atuação dos sistemas de forças  $A_1$  e  $A_2$ ;

$D$  = deslocamento no centro do vão, devido à atuação dos sistemas de forças  $A_1$  e  $A_2$ ;

$R_{A'}$  = reação no apoio A, devido à atuação única do sistema de forças  $A_1$ ;

$R_{B'}$  = reação no apoio B, devido à atuação única do sistema de forças  $A_1$ ;

$M_{B'}$  = momento no apoio B, devido à atuação única do sistemas de forças  $A_1$ ;

$D'$  = deslocamento no centro do vão, devido à atuação única do sistema de forças  $A_1$ ;

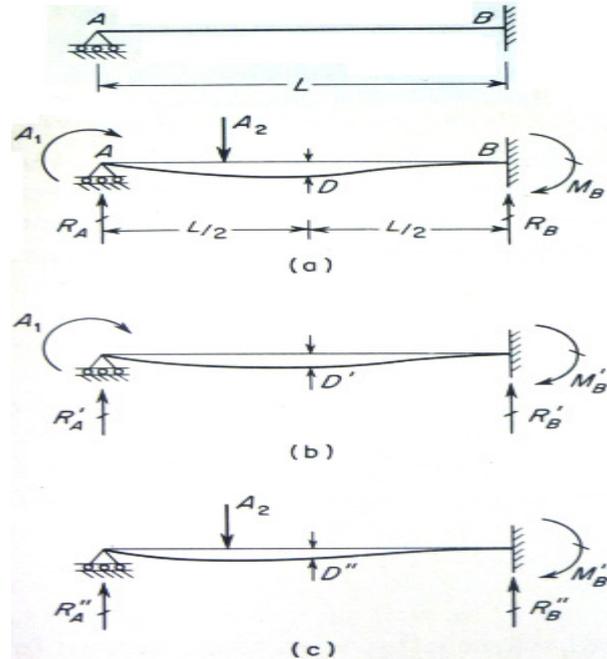
$R_{A''}$  = reação no apoio A, devido à atuação única do sistema de forças  $A_2$ ;

$R_{B''}$  = reação no apoio B, devido à atuação única do sistema de forças  $A_2$ ;

$M_{B''}$  = momento no apoio B, devido à atuação única do sistemas de forças  $A_2$ ;

$D''$  = deslocamento no centro do vão, devido à atuação única do sistema de forças  $A_2$ .

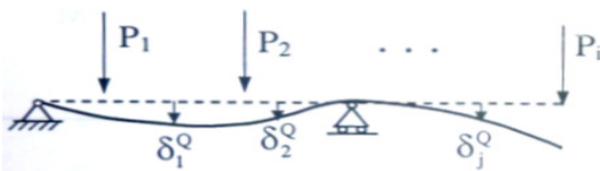
Figura 2 – Aplicação do princípio da superposição dos efeitos



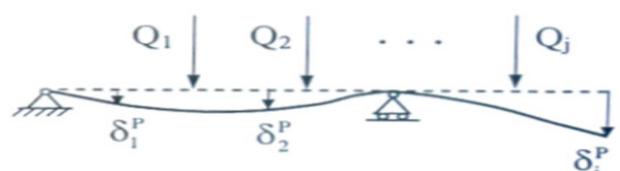
(fonte: GERE; WEAVER JUNIOR, c1965, p. 23)

### 3.4 TEOREMAS DE RECIPROCIDADE

Uma das consequências da linearidade física são os teoremas da reciprocidade. Nas figuras 3 e 4, tem-se a atuação de um sistemas de forças  $P_i$  e um sistema de forças  $Q_j$ , respectivamente.

Figura 3 – Estrutura sob o sistema de forças  $P_i$ 

(fonte: SORIANO; LIMA, 2004, p. 53)

Figura 4 – Estrutura sob o sistema de forças  $Q_j$ 

(fonte: SORIANO; LIMA, 2004, p. 53)

De modo que o trabalho produzido por um conjunto de forças corresponde ao valor médio do produto destas pelos deslocamentos produzidos em suas direções, pode-se escrever que (SORIANO; LIMA, 2004, p. 53):

$$\sum_j Q_j \delta_j^Q = \sum_i P_i \delta_i^P \quad (\text{equação 5})$$

Onde:

$P_i, Q_j$  = conjunto de forças;

$\delta_j^Q$  = deslocamentos produzidos nas direções das forças  $Q_j$ , devidos a atuação do sistema de forças  $P_i$ ;

$\delta_i^P$  = deslocamentos produzidos nas direções das forças  $P_i$ , devidos a atuação do sistema de forças  $Q_j$ .

Com base nesta igualdade, pode-se expressar uma das formas do teorema de **E. Betti**, que segundo Soriano e Lima (2004, p. 53, grifo do autor) se enuncia como: “[...] **em uma mesma estrutura de comportamento linear, considerando dois sistemas de forças, o trabalho do primeiro sistema nos deslocamentos provocados pelo segundo sistema é igual ao trabalho das forças desse sistema nos deslocamentos devidos ao primeiro sistema.**”.

Considera-se a partir de agora, somente o conjunto de forças  $P$  e representa-se os deslocamentos produzidos na direção dessas forças por  $\Delta$ . Sabendo que  $P$  e  $\Delta$  são vetores colunas ou matrizes coluna, escreve-se (GERE; WEAVER JUNIOR, 1981, p. 32):

$$W = P' \Delta \quad (\text{equação 6})$$

$$W = P \Delta' \quad (\text{equação 7})$$

Onde:

$W$  = escalar trabalho;

$P$  = vetor ou matriz coluna de forças;

$P'$  = vetor ou matriz coluna transposta de  $P$ ;

$\Delta$  = vetor ou matriz coluna de deslocamentos;

$\Delta'$  = vetor ou matriz coluna transposta de  $\Delta$ .

Inserindo no ponto de atuação das forças  $P$ , um sistema de molas unidirecionais, obtêm-se a seguinte equação:

$$[P] = \{K\} [\Delta] \quad (\text{equação 8})$$

Onde:

$\{K\}$  = matriz formada pelos coeficientes de rigidez da barra (ver item 4.1.5).

Segundo Gere e Weaver Junior (1981, p. 33), substituindo a equação 8 nas equações 6 e 7 pode-se perceber que “[...] a matriz de rigidez é também uma matriz simétrica, uma vez que é a mesma que sua transposta [...]”. O autor representa matematicamente essa conclusão através da seguinte equação:

$$K_{pq} = K_{qp} \quad (\text{equação 9})$$

Onde:

$K_{pq}$  = matriz que representa a p-ésima ação devida a um valor unitário do q-ésimo deslocamento;

$K_{qp}$  = matriz que representa a q-ésima ação devida a um valor unitário do p-ésimo deslocamento.

## 4 MÉTODO DA RIGIDEZ POR COMPUTADOR

No método da rigidez, estuda-se primeiramente o comportamento individual de cada elemento, o que nos permite estabelecer relações entre as forças de extremo de barra e os deslocamentos nodais. Estas relações expressas em forma matricial representam a matriz de rigidez da barra. Considerando a inter-relação de cada barra com as demais, obtém-se o sistema global de equações. Este define o comportamento de toda a estrutura e nos leva à solução do problema (MARTIN, c1966, p. 28, tradução nossa).

Este capítulo visa estabelecer e delimitar conceitos e processos elementares aplicados à solução de estruturas pelo método da rigidez. Nos itens subsequentes, são abordados os temas específicos relativos à deformação por corte. Estas duas considerações atuam diretamente na formulação matricial imposta através do método da rigidez.

Dessa forma, tem-se como objetivo desenvolver de forma simplificada, as diversas etapas aplicadas à implementação computacional para a realização de análises matriciais de estruturas reticuladas utilizando o computador. Também são definidos os tipos de estruturas reticuladas e de análise de estruturas. Por fim, demonstra-se a utilização do método de Gauss para a solução de sistemas lineares.

### 4.1 IDEALIZAÇÃO ESTRUTURAL

As estruturas reticuladas são formadas pela associação de barras (as quais se aplica a teoria das peças lineares) que se encontram e cruzam em pontos designados por pontos nodais ou nós da estrutura, e ligadas ao exterior em nós denominados apoios. Dessa forma, Gere e Weaver Junior (1981, p. 1, grifo do autor) definem “**Nós** de uma estrutura reticulada são os pontos de interseção dos membros, assim como os pontos de apoio e extremidades livres dos membros.”. Complementando, Soriano (2005, p. 1, grifo do autor) expressa:

[...] a barra é idealizada como a trajetória do centróide da figura plana que a gera, denominada **eixo geométrico**. Assim a barra é representada graficamente por um segmento de reta ou de curva que, por simplicidade, é também denominado barra ou elemento.

Com base nisso, Venancio Filho (1975, p. 1) define idealização estrutural como:

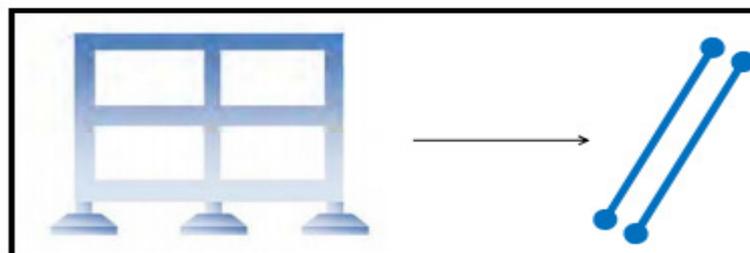
[...] a transformação de um corpo elástico contínuo num sistema estrutural formado por uma reunião de elementos estruturais unidos entre si, através de um número finito de pontos. Estes são os nós do sistema estrutural que procura ser o modelo do corpo elástico considerado. Um elemento estrutural é definido como uma parte do corpo elástico da qual é possível conhecer o comportamento a partir do conhecimento dos deslocamentos ou forças nodais do elemento. Os deslocamentos nodais do elemento são os deslocamentos dos nós e as forças nodais são as forças que atuam nos nós do elemento estrutural. O comportamento do elemento estrutural é representado pelos deslocamentos, deformações unitárias e tensões presentes em qualquer ponto do elemento.

A união dos elementos estruturais para formar o sistema estrutural é efetuada de maneira que sejam satisfeitas as condições de equilíbrio de forças nodais e de compatibilidade de deslocamentos nodais do sistema. Nos sistemas estruturais unidimensionais os elementos estruturais estão realmente unidos entre si apenas através dos nós. Portanto a idealização estrutural corresponde a situação real do sistema. No caso de sistema bi e tridimensionais, para que o sistema estrutural idealizado bem represente o corpo contínuo do qual procura ser o modelo, a união dos elementos estruturais através dos nós deve acarretar subsidiariamente a união através de lados e faces comuns a dois elementos estruturais adjacentes.

O processo de idealização estrutural é a primeira etapa a ser considerada na análise matricial de um sistema estrutural. Ela deve ser tal que o comportamento do modelo formado pela reunião dos elementos estruturais represente com precisão o comportamento do corpo elástico real.

O processo de idealização estrutural pode ser sintetizado pela figura 5, na qual a partir de um corpo contínuo obtém-se um modelo matemático representado por barras e nós. Cada barra é delimitada por um nó inicial e um nó final, formando assim as conectividades da estrutura. A geometria da mesma é formada com base no fornecimento das coordenadas de cada nó (vinculadas ao sistema de referência global). Através destas e da matriz de rotação da barra, obtém-se os dados de solicitações (sistema de referência local da barra).

Figura 5 – Divisão do domínio da estrutura em elementos discretos (nós e barras)



(fonte: QUEIROZ, 2010, p. 29)

O modelo matemático utilizado nas análises estruturais consiste em um sistema de equações que descrevem o comportamento idealizado da estrutura com base nos seus carregamentos. Na figura 6, têm-se um diagrama que fornece a sequência referente ao processo de idealização estrutural com base em modelos matemáticos.

Figura 6 – Diagrama representativo do processo de idealização estrutural



(fonte: VANDERBILT, c1974, p. 4, tradução nossa)

#### 4.1.1 Tipos de estruturas reticuladas

A decomposição de uma estrutura em partes, que possam ser associadas a uma teoria de cálculo já consolidada no meio técnico, dá origem aos elementos estruturais. Os sistemas estruturais idealizados por meio de elementos unidimensionais podem ser divididos em seis categorias com características específicas (MARTIN, c1966, p. 3, tradução nossa):

- a) vigas;
- b) treliças planas;
- c) treliças espaciais;
- d) grelhas;
- e) pórticos planos;
- f) pórticos espaciais.

O modelo de **vigas** é considerado como um dos mais comuns, para a análise de estruturas solicitadas por ações verticais. O modelo é simples, e consiste em vigas isoladas que recebem os carregamentos provenientes de peso próprio, lajes, alvenaria e outras vigas. As solicitações predominantes são os momentos fletores e os esforços cortantes (SORIANO, 2010, p. 103). Quando a torção é importante para o equilíbrio da viga, outro modelo deve ser considerado para a verificação dos esforços.

As **treliças planas e espaciais** são definidas por Soriano (2005, p. 7) como “[...] modelos de estruturas em que todas as barras são retas e rotuladas em suas extremidades, de maneira que em cada barra desenvolva unicamente força normal (constante)”. Como complemento Gere e Weaver Junior (1981, p. 2) explicam:

As cargas podem consistir em forças concentradas aplicadas aos nós, assim como cargas que atuam nos próprios membros. Para a finalidade de análise, estas últimas cargas podem ser substituídas por cargas estaticamente equivalentes que atuam nos nós.

As forças que atuam numa treliça tridimensional podem ter direções arbitrárias, mas qualquer binário que atue num membro deve ter seu vetor momento perpendicular ao eixo da barra. A razão dessa exigência é que um membro de treliça é incapaz de suportar momento torsor.

O modelo de **grelha** é formado por estruturas planas compostas por barras, e que recebem carregamento perpendicular ao seu plano. Em edifícios, as grelhas podem ser admitidas como formadas exclusivamente por vigas ou associadas às lajes adjacentes. A grelha caracteriza-se por apresentar uma translação, perpendicular ao seu plano e duas rotações por nó (SORIANO, 2010, p. 227).

**Pórticos planos** são composições de elementos lineares situados num mesmo plano. Nos edifícios eles formam painéis compostos por vigas, pilares e possíveis tirantes. Os esforços internos analisados por esse modelo são os momentos fletores, esforços cortantes e normais (SORIANO, 2010, p. 159).

Os **pórticos espaciais** são formados por elementos lineares com ligações rígidas, semi-rígidas ou flexíveis (PFEIL; PFEIL, 2009). Uma melhor modelagem é alcançada com a inserção de trechos rígidos nas ligações entre as barras.

O modelo tridimensional é o mais completo para análise estrutural, visto que é capaz de determinar momentos fletores e de torção, esforços cortantes e normais de todos os elementos.

Seu uso é adequado para a análise de carregamentos verticais e/ou horizontais, apresentando ou não simetria. A análise considera rotações devidas à torção, que podem interferir nos esforços finais. Além disso é possível a aplicação de forças em qualquer direção do espaço tridimensional (SORIANO, 2010, p. 214).

O ganho em precisão requer maior complexidade no cálculo, pois cada elemento possui seis graus de liberdade por nó, ou seja, translação paralela aos três eixos principais e rotação em torno desses mesmos três eixos (CASADO; CASADO, 1946, p. 361, tradução nossa). A solução do problema pode ser realizada através de programas de análise matricial.

#### **4.1.2 Tipos de análise estrutural**

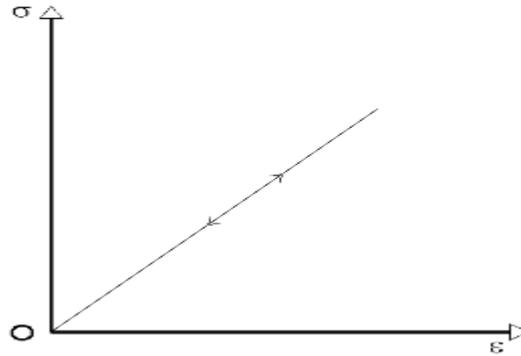
Ao analisar uma estrutura, pode-se levar ou não em consideração uma série de fatores. Dependendo de quais fatores são considerados, as ações atuantes podem ser de natureza estática ou dinâmica, e a análise do comportamento estrutural ser linear ou não linear. Deve-se ter em mente que a definição do tipo de análise a ser realizada está diretamente vinculada ao conhecimento do comportamento real da estrutura (CORRÊA, 1991).

Em elementos estruturais cujas ações são de natureza estática considera-se que as cargas e, conseqüentemente, a resposta da estrutura não variam com o tempo. Assim, os esforços desenvolvidos no seu interior são exclusivamente de natureza elástica.

A análise dinâmica de uma estrutura leva em consideração a variação no tempo das cargas aplicadas e a conseqüente resposta da estrutura. A necessidade de realização deste tipo de análise ocorre quando as ações são aplicadas à estrutura de modo impulsivo e/ou oscilatório. Nessas situações, as forças de inércia passam a ser relevantes (OLIVEIRA, 1987).

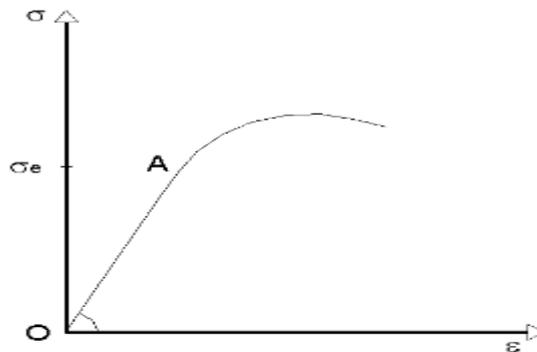
Na análise linear considera-se os materiais elástico-lineares. A elasticidade de um material está associada à sua tendência de voltar à configuração inicial após ter sofrido deformações decorrentes de ações externas, com posterior alívio de carregamento. As figuras 7 e 8 representam curvas de tensão *versus* deformação para dois materiais de comportamentos distintos.

Figura 7 – Diagrama tensão *versus* deformação: material perfeitamente elástico



(fonte: adaptado de TIMOSHENKO, 1966, p. 28)

Figura 8 – Diagrama tensão *versus* deformação: material linear até o ponto A



(fonte: PFEIL; PFEIL, 2009, p. 15)

Com base no trabalho produzido pelas forças exteriores durante a deformação, Timoshenko (1966, p. 24) explica que:

No caso de um corpo perfeitamente elástico, o trabalho produzido [...] será completamente transformado em energia potencial de deformação. No caso de um corpo elástico, parte do trabalho [...] será perdida sob a forma de calor, o qual será desenvolvida no corpo durante a deformação não elástica.

O modelo linear considera ainda uma relação direta entre as componentes de tensão e deformação do material, ou seja, que existe uma constante de proporcionalidade responsável por essa relação, e de valor característico para cada material. Essa constante é chamada de módulo de elasticidade, podendo ser facilmente determinada desde que se determine a tensão e o alongamento correspondente, em um ensaio de tração (TIMOSHENKO, 1966, p. 26). Segundo Corrêa (1991, p. 41), esta forma de análise é importante devido aos seguintes aspectos:

- a) é o modelo de mais fácil compreensão e utilização;
- b) possibilita a superposição dos efeitos, que simplifica sobremaneira a análise;
- c) em serviço é comum grande parte dos elementos estruturais de um edifício ter comportamento marcadamente linear;
- c) mesmo em situações em que a não linearidade é a característica do problema, a análise linear pode ser utilizada como primeira aproximação do comportamento estrutural;
- d) processos de análise não linear podem ser desenvolvidos por sucessivas etapas lineares.

Na análise não linear, a rigidez do sistema varia em função das cargas aplicadas. A não linearidade pode ser física e/ou geométrica. Quando ocorrer perda de rigidez devido a plastificação ou fissuração de determinadas partes da estrutura, diz - se que a análise é não linear física.

Em algumas situações específicas, mesmo que se apresente um campo de deslocamentos pequenos na estrutura, é necessário que as equações de equilíbrio sejam escritas na posição deslocada da estrutura. Com base nisso, se o material ainda se mantiver num regime de resposta linear elástica, pode- se determinar essa análise como não linear geométrica (PAULA, 2001, p. 8).

### 4.1.3 Sistemas de referência

Os sistemas de referência de uma estrutura são definidos em dois níveis: global e local. No primeiro, o sistema de eixos globais referencia a estrutura como um todo, formando um triedro direto. A esses eixos ficam referenciadas as grandezas vinculadas aos nós, tais como (SORIANO, 2005):

- a) coordenadas;
- b) deslocamentos;
- c) reações nodais;
- d) cargas nodais.

Quanto ao sistema de referência local ( $x^L$ ,  $y^L$ ,  $z^L$ ), a origem do sistema situa-se no nó inicial da barra, e o eixo  $x^L$  coincide com o eixo baricêntrico da barra, sendo orientado do nó inicial para o nó final. Os eixos  $y^L$  e  $z^L$  coincidem com os eixos principais centrais de inércia da

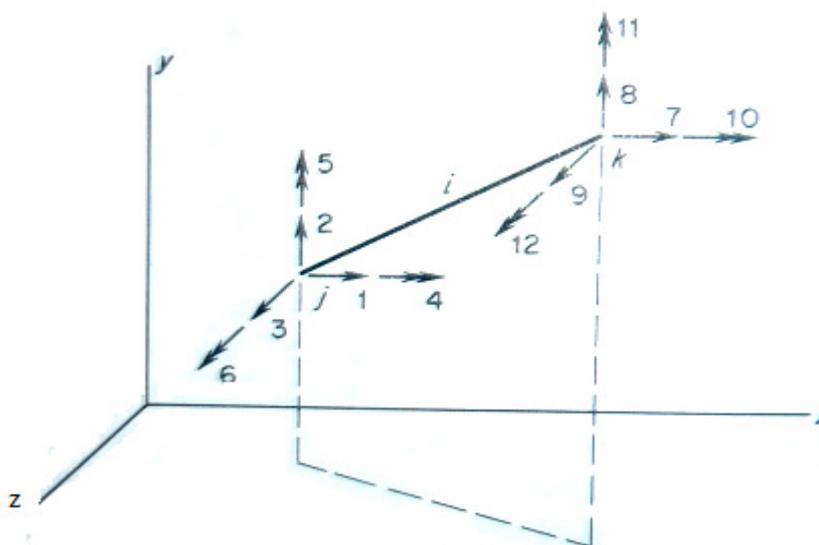
seção transversal e formam com  $x^L$  um triedro direto. Ficam referenciadas ao sistema local as grandezas inerentes à barra, tais como: momentos de inércia, carregamentos distribuídos e solicitações (LIVESLEY, c1964, tradução nossa).

#### 4.1.4 Estudo da barra

No método da rigidez considera-se, inicialmente, que todos os nós da estrutura estão fixados, isto é, restringe-se todos os deslocamentos nodais (barra biengastada). Cada um dos elementos se encontra assim isolado dos restantes, o que nos permite fazer a sua análise separadamente. Nesta etapa, trata-se como elemento a barra reta homogênea de seção constante (SORIANO, 2005). Isto porque, nada impede a consideração de qualquer outro tipo de barra de seção variável ou ainda de forma mais complexa, a associação de barras.

Considerando a barra  $i$  da figura 9, com base no sistema de referência  $x, y, z$  determina-se os graus de liberdade do pórtico espacial.

Figura 9 – Graus de liberdade da barra de pórtico espacial



(fonte: GERE; WEAVER JUNIOR, c1965, p. 290)

Onde:

- 1, 9 = deslocamentos nodais na direção  $z^L$  dos nós  $j$  e  $k$ , respectivamente;
- 2, 8 = deslocamentos nodais na direção  $y^L$  dos nós  $j$  e  $k$ , respectivamente;

- 3, 7 = deslocamentos nodais na direção  $x^L$  dos nós j e k, respectivamente;  
 4, 12 = giros nodais na direção  $z^L$  dos nós j e k, respectivamente;  
 5, 11 = giros nodais na direção  $y^L$  dos nós j e k, respectivamente;  
 6, 10 = giros nodais na direção  $x^L$  dos nós j e k, respectivamente.

Através do método da rigidez, idealiza-se o modelo da barra por um conjunto de molas unidirecionais de rigidez  $K$ . Dessa forma tem-se (VENANCIO FILHO, 1975):

$$F^L = K^L U^L \quad (\text{equação 10})$$

Onde:

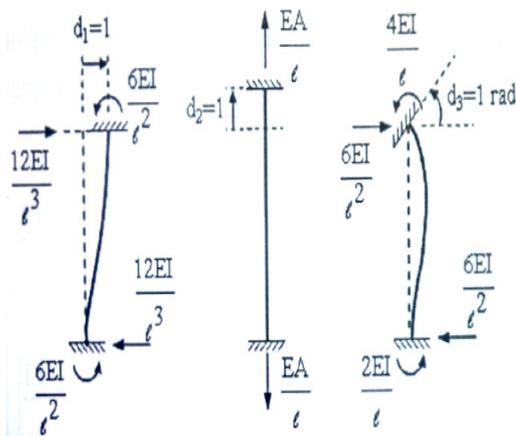
$F^L$  = forças aplicadas, em coordenadas locais;

$K^L$  = rigidez da barra, no sistema de coordenadas locais;

$U^L$  = deslocamentos da barra, em coordenadas locais.

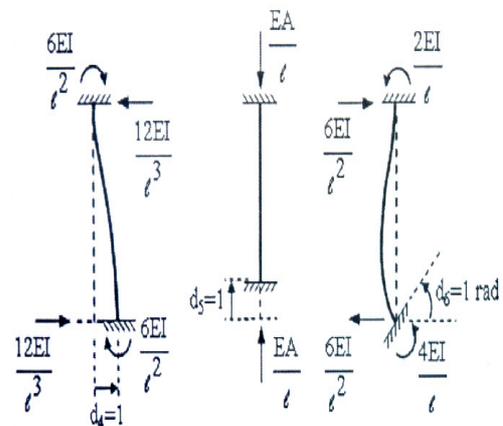
Considerando cada um dos graus de liberdade da barra de pórtico espacial, impondo-se deslocamentos e giros unitários sucessivamente, pode-se determinar os coeficientes de rigidez da barra, contemplando as deformações por flexão, esforço normal e torção. Nas figuras 10 e 11, têm-se a sequência de obtenção desses coeficientes.

Figura 10 – Barra biengastada: deslocamento unitário no nó da extremidade final



(fonte: SORIANO, 2005, p. 61)

Figura 11 – Barra biengastada: deslocamento unitário no nó da extremidade inicial



(fonte: SORIANO, 2005, p. 61)

Segundo Soriano (2005, p. 55, grifo do autor), o significado físico dos coeficientes de rigidez pode ser expresso da seguinte maneira:

[...] o coeficiente de rigidez  $K_{pq}$  é numericamente igual à força restritiva na direção do p-ésimo deslocamento nodal, quando se faz unitário o q-ésimo deslocamento nodal e se mantém nulos os demais deslocamentos nodais. A dimensão física desse coeficiente é a dimensão do esforço generalizado na direção do p-ésimo deslocamento, dividida pela dimensão do q-ésimo deslocamento generalizado. Com isso, embora  $K_{pq}$  seja numericamente igual a  $K_{qp}$ , a dimensão física do primeiro é o inverso da dimensão física do segundo. Diz-se que  $K_{pq}$  é o coeficiente de influência do deslocamento de translação ou de rotação na direção coordenada q sobre a ação força ou momento na direção coordenada p.

#### 4.1.5 Matriz de rigidez da barra

Com base nos coeficientes de rigidez determinados anteriormente, pode-se formar a matriz de rigidez da barra. Matricialmente essa pode ser relacionada da seguinte maneira (VENANCIO FILHO, 1975):

$$[F^{i,L}] = \{K^{i,L}\}[U^{i,L}] \quad (\text{equação 11})$$

Onde:

$[F^{i,L}]$  = vetor de carregamentos da barra i, no sistema de coordenadas locais;

$\{K^{i,L}\}$  = matriz de rigidez da barra i, no sistema de coordenadas locais;

$[U^{i,L}]$  = vetor de deslocamentos da barra i, no sistema de coordenadas locais.

A figura 12 representa a matriz de rigidez  $\{K^{i,L}\}$ , no sistema de coordenadas locais, para a barra de pórtico espacial, ou seja, com seis graus de liberdade por nó, considerando apenas as deformações por momentos fletores, esforços normais e torção. A obtenção de cada um dos coeficientes dessa matriz foi desenvolvida no item 4.1.4.

Figura 12 – Matriz de rigidez da barra de pórtico espacial: deformação por flexão, esforço normal e torção

1	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$-\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$
3	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0
4	0	0	0	$\frac{GI_x}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{GI_x}{L}$	0	0
5	0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{4EI_y}{L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{2EI_y}{L}$	0
6	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L}$
7	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
8	0	$-\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$
9	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0
10	0	0	0	$-\frac{GI_x}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GI_x}{L}$	0	0
11	0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{2EI_y}{L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{4EI_y}{L}$	0
12	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$

(fonte: GERE; WEAVER JUNIOR, 1981, p. 183)

#### 4.1.6 Vetor de cargas nodais equivalentes

Na maioria dos casos os carregamentos, atuantes na estrutura ao longo de sua vida útil, não estão aplicados diretamente sobre os nós da mesma, mas sim ao longo das barras. Desse modo, com base na validade do princípio da superposição dos efeitos pode-se transformar os carregamentos distribuídos sobre as barras em cargas nodais equivalentes (MARTIN, c1966, p. 88).

O campo elástico que uma combinação de carregamentos introduz numa estrutura de comportamento linear, é idêntico a combinação dos campos elásticos criados por cada um dos carregamentos atuando isoladamente (LIVESLEY, c1964, tradução nossa). Da mesma forma Gere e Weaver Junior (1981, p. 127, grifo do autor) afirmam que:

As cargas nodais determinadas a partir das cargas que atuam sobre os membros denominam-se **cargas nodais equivalentes**. Quando essas cargas são adicionadas às cargas nodais reais, as cargas totais que resultam denomina-se **cargas nodais combinadas**. Depois disso a estrutura pode ser analisada por métodos matriciais para os efeitos das cargas nodais combinadas.

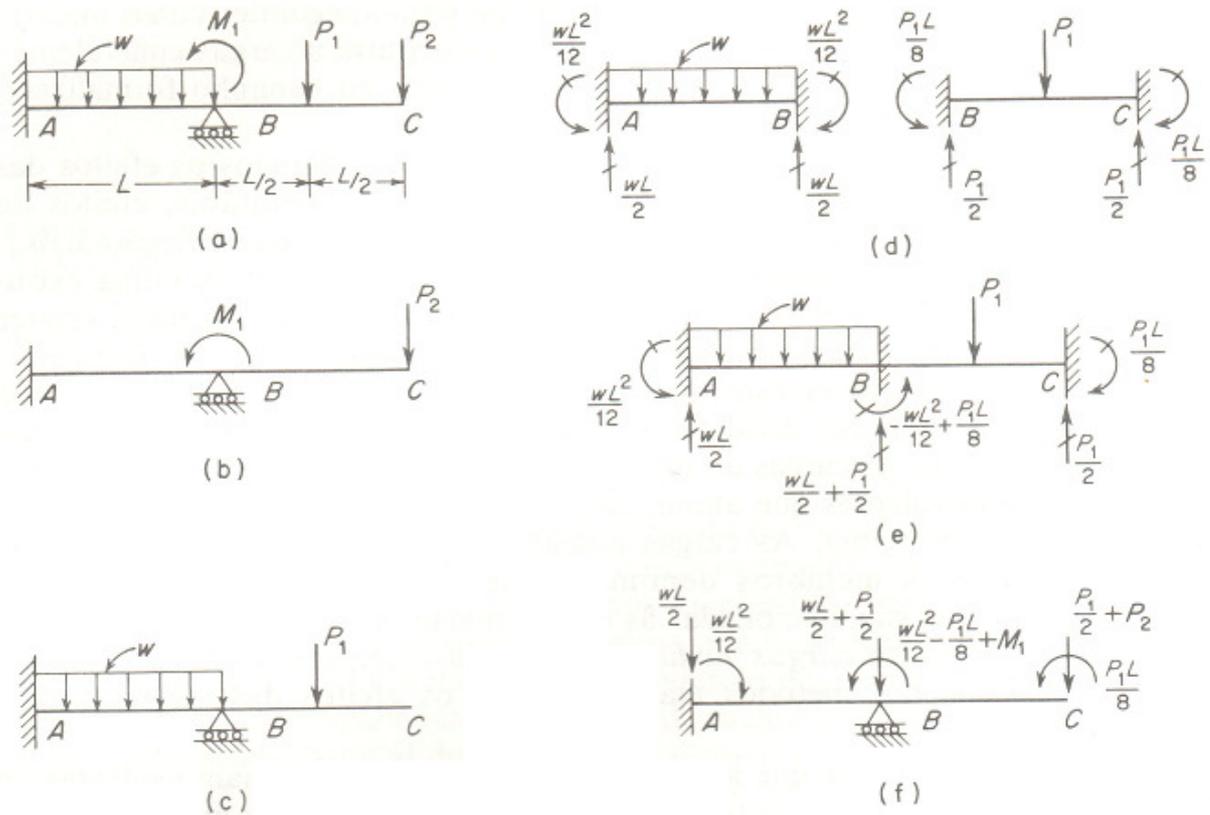
É vantajoso na análise que as cargas nodais combinadas sejam avaliadas de tal modo que os deslocamentos resultantes da estrutura sejam os mesmos que os deslocamentos produzidos pelas cargas reais. [...].

Em geral, as cargas nodais combinadas para qualquer tipo de estrutura podem ser encontradas pelo [seguinte] procedimento [...]. A primeira etapa é separar as cargas nodais reais das cargas de membro. Em seguida fixa-se a estrutura contra qualquer

deslocamento nodal introduzindo as ligações (vínculos) nodais apropriadas [...]. Depois calculam-se as ações de fixação produzidas pelas cargas de membro [...]. As ações opostas a estas são as cargas nodais equivalentes. Essas cargas adicionam-se às cargas nodais reais para dar as cargas combinadas.

Para a implementação do método da rigidez por computador é essencial uma correspondência unívoca entre os pontos de aplicação das cargas e os nós nos quais os deslocamentos estão sendo aplicados (SORIANO, 2005). Através da figura 13, pode-se entender o procedimento anteriormente citado.

Figura 13 – Cargas nodais combinadas



(fonte: GERE; WEAVER JUNIOR, 1981, p. 128)

A parte (a) desta figura apresenta uma viga ABC com carga distribuída  $w$  sobre o trecho AB, momento  $M_1$  aplicado sobre o nó do apoio B, carga concentrada  $P_1$  no centro do vão BC e carga nodal  $P_2$  aplicada em C. Na parte (b), encontra-se separadas as cargas nodais reais da estrutura, enquanto na parte (c), as cargas que se têm a necessidade de converter em cargas nodais equivalentes. Dessa maneira, considera-se cada trecho da viga ABC como restringido em todas os graus de liberdade, formando uma viga bi-engastada (figura 13-d). Com isso,

consegue-se determinar as reações de engastamento perfeito da mesma (GERE; WEAVER JUNIOR, 1981, p. 123).

Segundo Gere e Weaver Junior (c1965, p. 127, tradução nossa), “Se estas ações de fixação se invertem em direção, constituem um conjunto de forças e binários que é estaticamente equivalente às cargas de membro.”. Isto pode ser visto na parte (e) da figura 13. Para finalizar, na parte (f), tem-se o conjunto de forças nodais combinadas, válidos para analisar uma estrutura através do método da rigidez.

Dessa maneira, as solicitações nas extremidades de uma barra qualquer, são obtidas somando-se as reações de engastamento perfeito com as cargas nodais reais aplicadas. Dessa maneira, pode-se representar esse procedimento por:

$$[F^{i,L}] = \{K^{i,L}\}[U^{i,L}] + [F_{ep}^{i,L}] \quad (\text{equação 12})$$

Onde:

$[F^{i,L}]$  = vetor de carregamentos da barra i, no sistema de coordenadas locais;

$\{K^{i,L}\}$  = matriz de rigidez da barra i, no sistema de coordenadas locais;

$[U^{i,L}]$  = vetor de deslocamentos da barra i, no sistema de coordenadas locais;

$[F_{ep}^{i,L}]$  = vetor de reações de engastamento perfeito da barra i, no sistema de coordenadas locais.

#### 4.1.7 Matriz de rotação

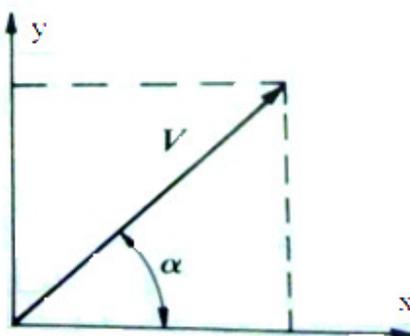
Para avaliar a iteração de cada barra com as demais, é necessário estabelecer um mesmo sistema de referência. Esse sistema é o sistema de referência global da estrutura (VENANCIO FILHO, 1975).

Dessa maneira são abordados, a seguir, os procedimentos necessários para a obtenção das quantidades vetoriais em diferentes sistemas de referência. No caso de pórticos espaciais, têm-se nove cossenos diretores, ou seja, sucessivas rotações são necessárias (VANDERBILT, c1974, p. 228, tradução nossa). Para facilitar o entendimento, foram desenvolvidos inicialmente os procedimentos de rotação no plano e, posteriormente, generalizados para o sistema tridimensional.

#### 4.1.7.1 Rotação no plano

O vetor  $V$  é expresso em termos das coordenadas  $x, y$ . Deste modo, o espaço bidimensional pode ser definido em termos de suas componentes, conforme demonstrado na figura 14 e nas equações 13 e 14 (VANDERBILT, c1974, p. 224, tradução nossa).

Figura 14 – Projeção de  $V$  no sistema de coordenadas  $x, y$



(fonte: VANDERBILT, c1974, p. 224)

$$V_x = V \cos \alpha \quad (\text{equação 13})$$

$$V_y = V \sin \alpha \quad (\text{equação 14})$$

Onde:

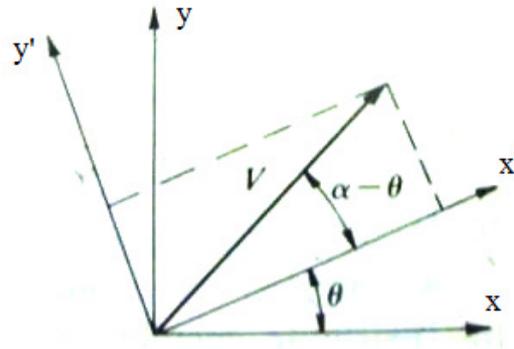
$V$  = módulo do vetor  $V$ ;

$V_x, V_y$  = projeções de  $V$  sobre os eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente;

$\alpha$  = ângulo formado entre o eixo coordenado  $x$  e o vetor  $V$ .

Acrescenta-se agora um segundo sistema de coordenadas  $x', y'$ . Esse sistema encontra-se defasado do sistema  $x, y$  através de um ângulo  $\theta$ , conforme figura 15 (VANDERBILT, c1974, p. 224, tradução nossa).

Figura 15 – Projeção de V no sistema de coordenadas  $x', y'$



(fonte: VANDERBILT, c1974, p. 224)

Pode-se assim, especificar as componentes de  $V$  nas direções  $x'$  e  $y'$  (VANDERBILT, c1974, p. 224, tradução nossa):

$$V_{x'} = V \cos (\alpha - \theta) \quad (\text{equação 15})$$

$$V_{y'} = V \sin (\alpha - \theta) \quad (\text{equação 16})$$

Onde:

$V$  = módulo do vetor  $V$ ;

$V_{x'}$ ,  $V_{y'}$  = projeções de  $V$  sobre os eixos  $x'$  e  $y'$  respectivamente;

$\theta$  = ângulo formado entre os eixos coordenado  $x$  e  $x'$ .

Com base em identidades trigonométricas pode-se escrever (VANDERBILT, c1974, p. 224, tradução nossa):

$$\cos (\alpha - \theta) = \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \quad (\text{equação 17})$$

$$\sin (\alpha - \theta) = \sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta. \quad (\text{equação 18})$$

Ao substituir as equações 17 e 18 nas equações 15 e 16, obtém-se (VANDERBILT, c1974, p. 225, tradução nossa):

$$V_{x'} = V (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) \quad (\text{equação 19})$$

$$V_{y'} = V (\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta). \quad (\text{equação 20})$$

As equações 19 e 20 podem ser simplificadas e reescritas com base nas projeções obtidas nas equações 13 e 14, sob a forma (VANDERBILT, c1974, p. 225, tradução nossa):

$$V_{x'} = V_x \cos \theta + V_y \sin \theta \quad (\text{equação 21})$$

$$V_{y'} = V_y \cos \theta - V_x \sin \theta. \quad (\text{equação 22})$$

Para utilizar-se desses resultados durante o processo de implementação computacional, é conveniente representar as equações 21 e 22 sob a forma matricial (SORIANO, 2005):

$$V' = r V^G \quad (\text{equação 23})$$

Onde:

$V'$  = vetor  $V$  no sistema de referência local;

$r$  = matriz de rotação do sistema de referência global para o local;

$V^G$  = vetor  $V$  no sistema de referência global.

Com base nas equações 21 e 22, obtém-se a matriz de rotação no plano, que transforma as grandezas vetoriais do sistema de coordenadas global para o sistema local, sendo representada como:

$$r = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{equação 24})$$

Ao realizar o mesmo procedimento para a obtenção da matriz de rotação do sistema local para o global, percebe-se que a matriz que representa essa transformação é a transposta de  $r$ . Com isso se tem que a matriz  $r$  é uma matriz ortogonal (VANDERBILT, c1974):

$$V^G = r^T V' = r^{-1} V' \quad (\text{equação 25})$$

Onde:

$r^T$  = matriz transposta de  $r$ ;

$r^{-1}$  = matriz inversa de  $r$ .

A equação 25 é de extrema importância nos processos de cálculo realizados através do método da rigidez. Isto se deve ao fato que, com base nela pode-se alternar entre os sistemas de referência, obtendo solicitações, deslocamentos e atribuir carregamentos.

#### 4.1.7.2 Rotação no espaço

Para a determinação da matriz de rotação no espaço tridimensional, aplica-se uma sequência de rotações no plano. Considera-se inicialmente o sistema  $x, y, z$  como fixo e gira-se  $x'$  e  $z'$  em torno de  $y'$  (VANDERBILT, c1974, p. 228, tradução nossa).

Considerando as equações 23 e 24 desenvolvidas para a rotação no plano, e que os eixos  $y$  e  $y'$  são coincidentes (figura 16), escreve-se sob a forma matricial, no espaço tridimensional, a matriz de rotação do sistema de referência global para o local para  $V$  (VANDERBILT, c1974, p. 229, tradução nossa):

$$\begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad (\text{equação 26})$$

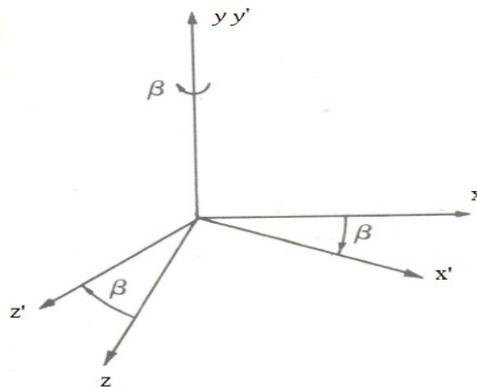
Onde:

$V_{x'}$ ,  $V_{y'}$ ,  $V_{z'}$  = componentes do vetor  $V$ , no sistema de coordenadas local ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ );

$V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  = componentes do vetor  $V$ , no sistema de coordenadas global;

$\beta$  = ângulo de rotação realizado em torno do eixo coordenado  $y$  e  $y'$ .

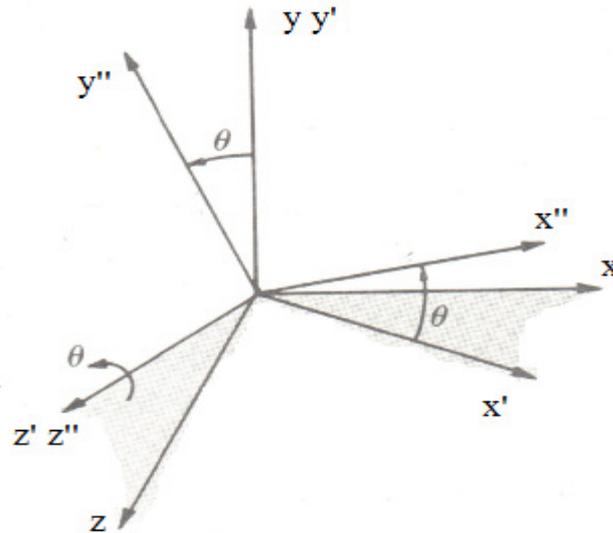
Figura 16 – Rotação dos eixos coordenados  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  em torno de  $y$ ,  $y'$



(fonte: VANDERBILT, c1974, p. 228)

Em seguida, acrescenta-se um terceiro sistema de eixos coordenados  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  (figura 17). Este encontra-se locado de forma que a direção do eixo coordenado  $z''$  coincida com a direção do eixo  $z'$  (VANDERBILT, c1974, p. 229, tradução nossa).

Figura 17 – Rotação dos eixos coordenados  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  em torno de  $z'$ ,  $z''$



(fonte: VANDERBILT, c1974, p. 228)

Escreve-se assim as componentes nas direções  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  em função de  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  (VANDERBILT, c1974, p. 229, tradução nossa):

$$\begin{bmatrix} V_{x''} \\ V_{y''} \\ V_{z''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 27})$$

Onde:

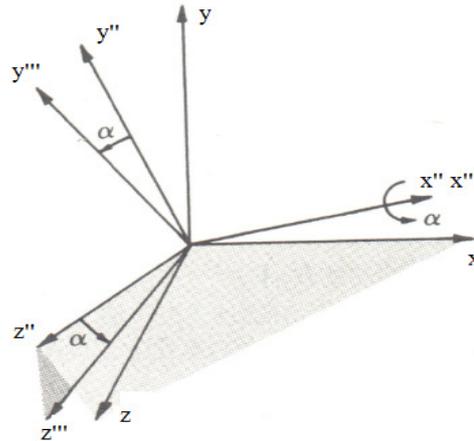
$V_{x''}$ ,  $V_{y''}$ ,  $V_{z''}$  = componentes do vetor  $V$ , no sistema de coordenadas local ( $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$ );

$V_{x'}$ ,  $V_{y'}$ ,  $V_{z'}$  = componentes do vetor  $V'$ , no sistema de coordenadas local ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ );

$\theta$  = ângulo de rotação realizado em torno do eixo coordenado  $z'$  e  $z''$ .

Por fim, considera-se fixos os eixos coordenados  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  e acrescenta-se o sistema de eixos  $x'''$ ,  $y'''$ ,  $z'''$  (figura 18). Ao rotacionar este em torno de  $x''$  e  $x'''$ , de modo que estes sejam coincidentes, completa-se a sequência de rotações no plano e pode-se assim escrever a matriz de rotação para o espaço tridimensional, válida para qualquer tipo de estrutura (VANDERBILT, c1974, p. 229, tradução nossa).

Figura 18 – Rotação dos eixos coordenados  $x'''$ ,  $y'''$ ,  $z'''$  em torno de  $x''$ ,  $x'''$



(fonte: VANDERBILT, c1974, p. 230)

Escreve-se assim a matriz de rotação em torno dos eixos  $x''$  e  $x'''$  (VANDERBILT, c1974, p. 229, tradução nossa):

$$\begin{bmatrix} V_{x'''} \\ V_{y'''} \\ V_{z'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{x''} \\ V_{y''} \\ V_{z''} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 28})$$

Onde:

$V_{x'''} , V_{y'''} , V_{z'''} =$  componentes do vetor  $V$ , no sistema de coordenadas local ( $x'''$ ,  $y'''$ ,  $z'''$ );

$V_{x''} , V_{y''} , V_{z''} =$  componentes do vetor  $V'$ , no sistema de coordenadas local ( $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$ );

$\alpha =$  ângulo de rotação realizado em torno do eixo coordenado  $x''$  e  $x'''$ .

Com base nas três rotações realizadas, as componentes do vetor  $V$  nas direções  $x'''$ ,  $y'''$ ,  $z'''$  são escritas em função dos eixos coordenados  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sob a forma matricial (VANDERBILT, c1974, p. 229, tradução nossa):

$$V''' = r_{\alpha} r_{\theta} r_{\beta} V^G \quad (\text{equação 29})$$

Onde:

$V''' =$  componentes do vetor  $V$ , no sistema de coordenadas local ( $x'''$ ,  $y'''$ ,  $z'''$ );

$r_\alpha$  = matriz obtida através da rotação de um ângulo  $\alpha$  em torno dos eixos coordenados  $x''$  e  $x'''$ ;

$r_\theta$  = matriz de rotação obtida através da rotação de um ângulo  $\theta$  em torno dos eixos  $z'$  e  $z''$ ;

$r_\beta$  = matriz de rotação obtida através da rotação de um ângulo  $\beta$  em torno dos eixos  $y$  e  $y'$ ;

$V^G$  = componentes do vetor  $V$ , no sistema de coordenadas global  $(x, y, z)$ .

Dessa forma, tem-se que a obtenção da matriz de rotação para um vetor no espaço tridimensional ocorre através do produto de três matrizes de rotação no plano. Com isso, a matriz de rotação que relaciona o sistema global  $x, y, z$  com o sistema local  $x''', y''', z'''$ , resultado da equação 29, escreve-se como (VANDERBILT, c1974, p. 230, tradução nossa):

$$R = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \theta & \sin \theta & \sin \beta \cos \theta \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \theta - \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \theta & -\cos \alpha \sin \beta \sin \theta + \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \sin \theta - \cos \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \cos \theta & \sin \alpha \sin \beta \sin \theta + \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (\text{equação 30})$$

Onde:

$R$  = matriz de rotação no espaço tridimensional.

Pode-se observar que as matrizes de rotação são obtidas a partir de cossenos diretores e os ângulos utilizados para a obtenção dos mesmos correspondem ao menor ângulo entre os eixos considerados. Da mesma forma, como obtido para a matriz de rotação no plano,  $R$  também é ortogonal (SORIANO, 2005).

#### 4.1.7.3 Obtenção da matriz de rotação $R$ para a barra

A formação da matriz  $R$  de rotação de uma barra é realizada através dos dados de entrada, no momento do lançamento dos elementos estruturais da edificação, ou seja, do modelo de cálculo. Em rotinas computacionais mais simples, a geometria da estrutura é configurada com o fornecimento das coordenadas globais de cada nó e das conectividades entre eles. Através destas, consegue-se determinar automaticamente o comprimento da barra, e por consequência formar a matriz de rotação do elemento estrutural (SORIANO, 2005).

Atualmente, os *softwares* de análise de estruturas reticuladas possuem uma interface gráfica bem desenvolvida, na qual lançando um elemento estrutural, o mesmo automaticamente

realiza a numeração dos nós e atribui as conectividades entre eles, formando assim a matriz de rotação da barra. Dessa maneira, consegue-se uma maior flexibilidade para a realizações de alterações no modelo estrutural, e por consequência maior agilidade.

Para facilitar o entendimento, considera-se os eixos locais  $x$ ,  $y$ ,  $z$  paralelos aos eixos globais da estrutura e com origens coincidentes. Dessa forma, pode-se determinar o comprimento da barra como (SORIANO, 2005, p. 106):

$$L = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2} \quad (\text{equação 31})$$

Onde:

$L$  = comprimento da barra, cujas unidades são coerentes com as coordenadas atribuídas para descrever a geometria da estrutura;

$x_j, y_j, z_j$  = coordenadas do nó  $j$ , no sistema de referência global;

$x_k, y_k, z_k$  = coordenadas do nó  $k$ , no sistema de referência global.

Dessa maneira, a determinação da matriz de rotação  $R$  (ver item 4.1.7.2) do sistema de coordenadas local, para o sistema de coordenadas global pode ser feita através das relações matemáticas abaixo (VANDERBILT, c1974, p. 230, tradução nossa):

$$C_1 = \frac{(x_k - x_j)}{L} = \cos\beta \cos\theta \quad (\text{equação 32})$$

$$C_2 = \frac{(y_k - y_j)}{L} = \sin\theta \quad (\text{equação 33})$$

$$C_3 = \frac{(z_k - z_j)}{L} = \sin\beta \cos\theta. \quad (\text{equação 34})$$

Através da equação 33, determina-se o ângulo  $\theta$  e, conseqüentemente, a partir das equações 32 ou 34 obtém-se o valor do ângulo  $\beta$ . Os resultados de  $\theta$  e  $\beta$  encontram-se representados a seguir:

$$\theta = \arcsin(C_2) \quad (\text{equação 35})$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{C_1}{\sqrt{1 - C_2^2}}\right) \quad (\text{equação 36})$$

Com base nas equações 35 e 36 demonstra-se que os ângulos  $\beta$  e  $\theta$  são expressos em função de  $C_1$  e  $C_2$ , que por sua vez dependem exclusivamente das coordenadas dos nós inicial e final da barra. Quanto ao ângulo  $\alpha$ , trata-se de um dado adicional a ser fornecido pelo usuário. Ele é definido pelo giro de  $y''$  para  $y'''$ , no sentido do triedro direto. Por sua vez,  $y''$  é definido como sendo perpendicular ao  $x'''$  e contido no plano  $y-x'''$ . No caso particular em que o eixo da barra é paralelo ao eixo global  $y$ , tem-se:  $\beta = 0$  e  $\theta = \pm 90^\circ$ . O ângulo  $\alpha$  é medido entre  $z''$  (paralelo e com a mesma direção que  $z$ ) e  $z'''$  (SORIANO, 2005).

## 4.2 MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE CARGAS GLOBAL DA ESTRUTURA

As condições de equilíbrio da estrutura estabelecem que as cargas aplicadas em cada nó devem ser iguais à soma das solicitações nos extremos das barras que concorrem nos nós. Supondo que em um determinado nó da estrutura, duas barras concorrem no nó, pode-se escrever:

$$F^1 = K_1 U_1 + F_{ep}^1 \quad (\text{equação 37})$$

$$F^2 = K_2 U_2 + F_{ep}^2 \quad (\text{equação 38})$$

Onde:

$F^1, F^2$  = vetores de solicitações nos extremos das barras 1 e 2, respectivamente;

$K_1, K_2$  = matrizes de rigidez das barras 1 e 2, respectivamente;

$U_1, U_2$  = vetores de deslocamentos das barras 1 e 2, respectivamente;

$F_{ep}^1, F_{ep}^2$  = vetores de reações de engastamento perfeito das barras 1 e 2, respectivamente.

Da mesma forma, cabe salientar que as matrizes  $K_1$  e  $K_2$  são formadas por um conjunto de submatrizes (da matriz de rigidez) contendo os coeficientes de rigidez de cada nó devido aos deslocamentos unitários impostos. Contudo, o equilíbrio do nó  $j$  pode ser expresso por (SANTOS, 1981):

$$F_j = F_j^1 + F_j^2 \quad (\text{equação 39})$$

Onde:

$F_j$  = vetor de forças atuantes no nó  $j$ .

Desse modo, com base nas equações 37 e 38, pode-se representar o sistema global de equações da estrutura por (SANTOS, 1981):

$$F + F_{eq} = K U \quad (\text{equação 40})$$

Onde:

$F$  = vetor de ações externas aplicadas nos nós;

$K$  = matriz de rigidez global da estrutura (formada pelo conjunto de sub-matrizes);

$U$  = vetor de deslocamentos nodais;

$F_{eq}$  = vetor contendo as cargas nodais equivalentes (forças de engastamento perfeito com sinal trocado).

A equação 40 pode ser reescrita sob a forma (SANTOS, 1981):

$$F^* = K U \quad (\text{equação 41})$$

Onde:

$F^*$  = vetor de cargas nodais nos nós acrescidas das cargas equivalentes ( $F + F_{eq}$ ).

### 4.3 INTRODUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Dado que todas as matrizes de elementos tenham sido colocadas na matriz de rigidez global deve-se aplicar as condições de contorno para a obtenção da solução do problema. Em princípio estas condições de contorno podem ser de dois tipos: no primeiro os deslocamentos referentes aos vínculos são iguais a zero enquanto, no segundo, esses deslocamentos possuem valores previamente calculados (GERE; WEAVER JUNIOR, 1981).

O sistema obtido na equação 41 para o conjunto de barras corresponde à estrutura completa antes da aplicação das condições de contorno, dessa maneira é indeterminado, visto que  $K$  é singular. Essa singularidade resulta de não se ter considerado as ligações da estrutura com o meio exterior (SORIANO, 2005).

A introdução das condições de contorno retira a singularidade da matriz de rigidez, desde que o número de ligações seja pelo menos, o suficiente para eliminar os deslocamentos de corpo rígido. O conhecimento de determinados deslocamentos nodais diminui o número de incógnitas, tornando desnecessárias as equações correspondentes a estes deslocamentos (SORIANO, 2005).

Com base no sistema linear representado na equação 42, ilustra-se o processo de introdução das condições de contorno (trabalho não publicado)<sup>2</sup>:

---

<sup>2</sup> Informação obtida na apostila de Formulação dos Métodos de Gauss e de Cholesky para Análise Matricial de Estruturas, elaborada pelo professor Humberto Lima Soriano, utilizada no curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio de Janeiro, julho de 1972.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad (\text{equação 42})$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Onde:

$a_{ij}$  = coeficientes angulares;

$x_1, x_2, x_3$  = variáveis da solução;

$b_1, b_2, b_3$  = termos independentes.

Considerando que a variável  $x_2$  tenha valor conhecido e igual a  $C$ , pode-se escrever o sistema conforme a equação 43 (trabalho não publicado)<sup>3</sup>.

$$a_{11}x_1 + 0 + a_{13}x_3 = b_1 - a_{12} C \quad (\text{equação 43})$$

$$a_{21}x_1 + 0 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{22} C$$

$$a_{31}x_1 + 0 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{32} C$$

Tem-se agora três equações e duas incógnitas. Para a resolução deste sistema pode-se utilizar tanto a primeira equação quanto a terceira. Porém, como os coeficientes da matriz já estão armazenados no computador, estes deveriam ser reorganizados. Dessa forma, prefere-se substituir a condição de  $x_2 = C$  diretamente no sistema de equações, representado como (trabalho não publicado)<sup>4</sup>:

---

<sup>3</sup> Informação obtida na apostila de Formulação dos Métodos de Gauss e de Cholesky para Análise Matricial de Estruturas, elaborada pelo professor Humberto Lima Soriano, utilizada no curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio de Janeiro, julho de 1972.

<sup>4</sup> Idem.

$$a_{11}x_1 + 0 + a_{13}x_3 = b_1 - a_{12}C \quad (\text{equação 44})$$

$$x_2 = C$$

$$a_{31}x_1 + 0 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{32}C$$

o qual pode ser escrito sob a forma matricial da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 - a_{12}C \\ C \\ b_3 - a_{32}C \end{Bmatrix} \quad (\text{equação 45})$$

cuja solução do sistema fornece os valores de  $x_1$  e  $x_3$ , enquanto que  $x_2$ , mantém o valor prescrito.

O uso deste método, que introduz as condições de contorno no sistema de equações têm diversas vantagens. Entre estas, pode-se citar: não requer reorganização de linhas e colunas, é simples de ser aplicado e facilmente pode ser implementado computacionalmente. É importante salientar que, com essa forma de aplicação das condições de contorno, as cargas que estiverem aplicadas na direção do deslocamento prescrito são eliminadas (SORIANO, 2005).

#### 4.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES GLOBAL

Aplicadas às condições de contorno na estrutura, pode-se resolver o conjunto de equações lineares, obtendo-se assim deslocamentos, solicitações e reações nodais. Na literatura, existem vários métodos consagrados que possibilitam essa solução, dos quais pode-se destacar o método de Gauss e de Choleski, os quais podem ser classificados como métodos diretos (SORIANO, 2005, p. 251).

Soriano (2005, p. 251) explica que “[...] na grande maioria das aplicações em análise de estruturas, métodos diretos se mostram mais eficientes [...]. Essa maior eficiência se acentua

ainda mais quando se têm diversos vetores de termos independentes para uma mesma matriz de coeficientes.”.

Deve-se mencionar ainda que a solução do sistema de equações, excluindo-se estruturas de pequeno porte, depende grande parte do tempo de processamento da máquina. Assim, é de extrema importância a utilização de um método eficiente de solução. Para isto as características da matriz de rigidez devem ser levadas em conta, tais como a simetria e banda. Programas mais sofisticados consideram ainda sua característica de matriz esparsa (SORIANO, 2005).

Para a solução dos sistemas de equações, neste trabalho foi utilizado o método de eliminação de Gauss. Este consiste basicamente em passar de um sistema de equações  $Ax = b$  para um outro sistema  $A'x = B'$  obtido por combinação linear do primeiro, de tal forma que A seja uma matriz triangular.

#### 4.5 CÁLCULO DAS SOLICITAÇÕES NOS EXTREMOS DAS BARRAS

Uma vez conhecidos os deslocamentos nodais, podem-se calcular os esforços relativos a cada barra. Para isso, as seguintes equações são utilizadas:

$$F_i^m = K_{ii}^m U_i + K_{ij}^m U_j + F_{ep}^m \quad \text{(equação 46)}$$

$$F_j^m = K_{ji}^m U_i + K_{jj}^m U_j + F_{ep}^m \quad \text{(equação 47)}$$

Onde:

$F_i^m, F_j^m$  = vetor de solicitações nos nós i e j da barra m, respectivamente;

$K_{ii}^m, K_{ij}^m, K_{ji}^m, K_{jj}^m$  = partições nodais da matriz de rigidez da barra m;

$U_i^i, U_j^j$  = vetores de deslocamentos nodais da barra m nos nós i e j, respectivamente;

$F_{ep}^m, F_{ep}^m$  = vetor de reações de engastamento perfeito da barra m.

Os deslocamentos  $U_i$  e  $U_j$  são retirados do vetor que contém os deslocamentos nodais da estrutura, obtidos da solução do sistema de equações. As partições nodais da matriz de rigidez da barra  $m$  e do vetor de engastamento perfeito devem ser armazenadas no momento da realização da montagem da matriz de rigidez global e do vetor de cargas global (GERE; WEAVER JUNIOR, 1981).

A obtenção das solicitações, para verificação e dimensionamento estrutural, deve ser realizada no sistema de referência local. Desse modo, a utilização da matriz de rotação da barra se faz necessária (SORIANO, 2005).

## 5 ESFORÇO CORTANTE

Além dos esforços de flexão, os elementos estruturais de concreto armado estão, na maioria dos casos, sujeitos à ação de esforços cortantes. Da mesma forma ocorrem, para pórticos espaciais, momentos torçores e forças normais de compressão e/ou tração. Desse modo, caracterizam-se estados de flexo-compressão e flexo-tração, com ou sem torção.

O esforço cortante pode ser definido segundo Nash (1982, p. 70) como “[...] a componente, contida no plano da seção transversal considerada, da resultante das forças que atuam nessa seção [...]. A força cortante,  $Q$ , é então uma força que atua no próprio plano da seção transversal.”. Desse modo, este capítulo tem como objetivo a caracterização desse esforço, através dos seguintes itens:

- a) apresentação de equações envolvendo as tensões e deformações de cisalhamento;
- b) apresentação dos fatores de forma para diversos tipos de seções transversais;
- c) obtenção dos coeficientes de rigidez para a matriz de rigidez local da barra, considerando a deformação por esforço cortante.

Nos capítulos seguintes, esses conceitos são utilizados para alteração da formulação matricial do método da rigidez, e também no processo de implementação computacional da deformação por corte em pórticos espaciais. Deve-se lembrar que, para a consideração da deformação por corte, a teoria de Euler - Bernoulli não é válida.

### 5.1 TENSÕES E DEFORMAÇÕES POR CISALHAMENTO

As propriedades de um material, sujeito a tensões cisalhantes, podem ser determinadas experimentalmente a partir de ensaios de cisalhamento direto ou de ensaios de torção. A partir dos resultados obtidos, são traçados diagramas tensão *versus* deformação (tensão de cisalhamento  $\tau$  *versus* deformação de cisalhamento  $\gamma$ ).

Para muitos materiais, a parte inicial do diagrama tensão - deformação, por cisalhamento, é uma reta passando pela origem, exatamente como demonstrado anteriormente para o caso de

tração. Para esta região, elástico - linear, a tensão de cisalhamento e a deformação são proporcionais, e por isso pode-se expressar a lei de Hooke para o cisalhamento (TIMOSHENKO, 1966, p. 70):

$$\tau = G * \gamma \quad (\text{equação 48})$$

Onde:

$\tau$  = tensão de cisalhamento;

$G$  = módulo de elasticidade transversal, também chamado de módulo de corte;

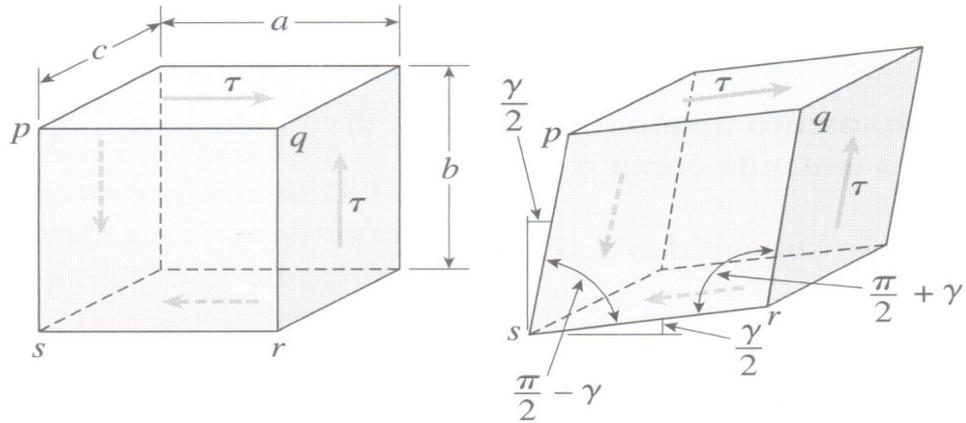
$\gamma$  = deformação de cisalhamento.

De acordo com a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003, p. 20), “Para tensões de compressão menores que  $0,5 f_c$  e tensões de tração menores que  $f_{ct}$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$  pode ser tomado como igual a 0,2 e o módulo de elasticidade para o cisalhamento,  $G$ , igual a  $0,4 E_{cs}$ .”. Neste caso,  $E_{cs}$  corresponde ao módulo de elasticidade secante, utilizado para determinação das solicitações na estrutura e verificação dos estados limites de serviço, sendo expresso em função da resistência característica do concreto à compressão,  $f_{ck}$ :

$$E_{cs} = 0,85 * 5600 * \sqrt{f_{ck}} \quad (\text{equação 49})$$

Desse modo, tensões de cisalhamento agindo em um elemento estrutural, são acompanhadas de deformações de cisalhamento. Como forma de visualizar esse efeito, nota-se através da figura 19, que as tensões de cisalhamento não têm a tendência de alongar ou encurtar o elemento nas direções  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Ou seja, as tensões de cisalhamento produzem uma alteração na forma do elemento estrutural.

Figura 19 – Elemento submetido a tensões e deformações de cisalhamento



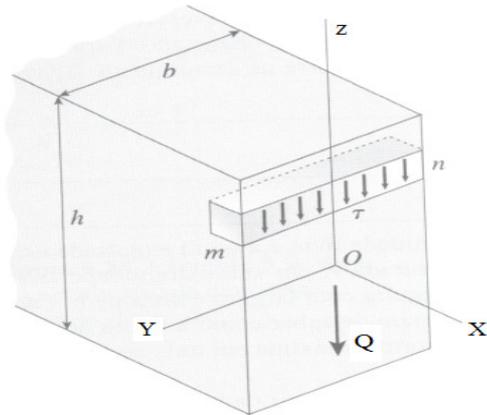
(fonte: BEER; JOHNSTON JUNIOR, 1982, p. 84)

O elemento original da figura 19, que é um paralelepípedo retangular, é deformado em um paralelepípedo oblíquo, e as faces anterior e posterior formam losangos. Por causa dessa deformação, os ângulos entre as faces laterais mudam. Os ângulos nos pontos  $q$  e  $s$ , que eram  $\pi/2$  antes da deformação foram reduzidos por um pequeno ângulo  $\gamma$  em  $(\pi/2 - \gamma)$ . Ao mesmo tempo os ângulos nos pontos  $p$  e  $r$  são aumentados em  $(\pi/2 + \gamma)$ . Com isso, pode-se concluir que a deformação por cisalhamento  $\gamma$  é a variação sofrida pelo ângulo reto, e é usualmente medida em graus ou radianos (BEER; JOHNSTON JUNIOR, 1982).

### 5.1.1 Tensões de cisalhamento em elementos de seção transversal retangular

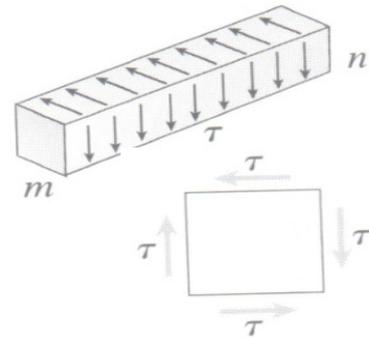
Considera-se uma viga, com seção transversal retangular (largura  $b$  e altura  $h$ ), submetida a uma força cortante positiva  $Q$ , conforme figuras 20 e 21. Admitindo que, as tensões de cisalhamento  $\tau$  agindo sobre a seção transversal são paralelas à força de cisalhamento, ou seja, paralelas aos lados verticais da seção transversal e que as tensões de cisalhamento são uniformemente distribuídas sobre a largura da viga, apesar de elas poderem variar ao longo da altura, pode-se determinar a intensidade da tensão de cisalhamento em qualquer ponto da seção transversal.

Figura 20 – Tensões de cisalhamento em uma viga de seção retangular



(fonte: adaptado de BEER; JOHNSTON JUNIOR, 1982, p. 84)

Figura 21 – Elemento de viga submetido a tensões de cisalhamento horizontais e verticais

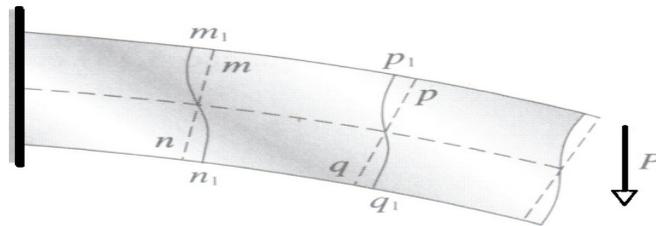


(fonte: adaptado de BEER; JOHNSTON JUNIOR, 1982, p. 84)

Nas figuras 20 e 21, pode-se perceber que as tensões de cisalhamento agindo numa face do elemento são acompanhadas de tensões de cisalhamento de igual magnitude agindo nas suas faces perpendiculares. Este efeito corresponde ao Princípio da Reciprocidade. Desse modo, existem tensões de cisalhamento horizontais agindo entre camadas horizontais da viga e também tensões de cisalhamento verticais agindo sobre as seções transversais. Em qualquer ponto da viga, essas tensões de cisalhamento complementares são iguais em termos de magnitude. Assim, conhecendo as tensões cisalhantes horizontais obtêm-se, conseqüentemente, as tensões cisalhantes verticais (TIMOSHENKO, 1966).

Devido às tensões de cisalhamento  $\tau$  variarem parabolicamente ao longo da altura de uma seção retangular, a deformação de cisalhamento também varia parabolicamente. Essa deformação pode ser visualizada na figura 22.

Figura 22 – Deformação das seções transversais de uma viga devido às tensões de cisalhamento



(fonte: adaptado de TIMOSHENKO, 1966, p. 143)

A máxima deformação de cisalhamento ocorre na superfície neutra do elemento. Nos pontos m, p, n e q a deformação de cisalhamento é zero e as tensões normais são máximas. Portanto, as curvas  $m_1n_1$  e  $p_1q_1$  são perpendiculares à superfície superior e inferior da viga.

Se o esforço cortante  $Q$  for constante ao longo do eixo da viga, a deformação é a mesma em toda a seção transversal. Portanto, o alongamento e o encurtamento de elementos longitudinais devidos aos momentos fletores não são afetados devido às tensões de cisalhamento. Desse modo, mesmo que as equações de deformação para momentos fletores tenham sido desenvolvidas para a situação de flexão pura, sob a maior parte das condições essas continuam válidas para as situações de flexão não uniforme (BEER; JOHNSTON JUNIOR, 1982).

Desse modo, pode-se escrever a equação para a tensão de cisalhamento, que pode ser calculada em qualquer ponto da seção transversal de uma viga retangular, como sendo (TIMOSHENKO, 1966):

$$\tau = \frac{Q * Q'}{I * b} \quad (\text{equação 50})$$

Onde:

$Q$  = força de cisalhamento atuante;

$Q'$  = primeiro momento da área da seção transversal acima ou abaixo do nível em que a tensão de cisalhamento  $\tau$  está sendo calculada;

$I$  = momento de inércia;

$b$  = largura da seção transversal.

Para uma viga de seção retangular, o valor de  $Q'$  é determinado pela seguinte equação (TIMOSHENKO, 1966):

$$Q' = \frac{b}{2} * \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (\text{equação 51})$$

Onde:

$b$  = largura da seção transversal;

$h$  = altura da seção transversal;

$y$  = distância a partir da linha neutra, na qual a tensão  $\tau$  está sendo verificada.

O cálculo da tensão de cisalhamento média  $\tau_M$ , numa determinada seção transversal, pode ser expresso por:

$$\tau_M = \frac{Q}{A} \quad (\text{equação 52})$$

Dessa maneira, sabendo que a deformação máxima por cisalhamento ocorre na linha neutra da viga, ou seja, onde as tensões principais normais são mínimas, fazendo  $y=0$  na equação 51 e inserindo o valor obtido de  $Q'$  na equação 50, pode-se escrever a tensão máxima cisalhante em uma viga de seção retangular como sendo:

$$\tau_{Max} = \frac{Q * h^2}{8I} = \frac{Q * h^2}{8 * b * \frac{h^3}{12}} = \frac{12 * Q}{8 * b * h} = \frac{3 * Q}{2 * A} \quad (\text{equação 53})$$

Onde:

$Q$  = força de cisalhamento atuante;

$b$  = largura da seção transversal;

$h$  = altura da seção transversal;

A = área da seção transversal;

I = momento de inércia.

Ao comparar as equações 52 e 53, percebe-se que a tensão máxima de cisalhamento é 1,5 vezes maior que a tensão média, para uma viga de seção retangular. Deve-se frisar que as equações determinadas anteriormente, tem validade somente para materiais elásticos lineares, e com pequenas deformações.

### 5.1.2 Tensões de cisalhamento em elementos de seção transversal circular

Realizando-se uma simplificação, ao considerar que as tensões de cisalhamento tenham intensidade constante ao longo da largura da viga, pode-se obter a equação para a tensão máxima de cisalhamento com o mesmo embasamento teórico desenvolvido para o caso da seção retangular. Desse modo, para a seção de viga circular tem-se (TIMOSHENKO, 1966):

$$Q' = \frac{2}{3} * r_v^3 \quad (\text{equação 54})$$

Onde:

Q' = primeiro momento da área da seção transversal acima ou abaixo do nível em que a tensão de cisalhamento  $\tau$  está sendo calculada;

$r_v$  = raio da viga de seção circular.

Substituindo Q' novamente na equação 50, e atribuindo-se o momento de inércia I, para uma seção circular, escreve-se a tensão máxima de cisalhamento como sendo (TIMOSHENKO, 1966):

$$\tau_{\text{Max},C} = \frac{Q * Q'}{I * b} = \frac{Q * 2 * r_v^3}{3 * I * b} = \frac{Q * 8 * r_v^3}{3 * \pi * r_v^4 * 2 * r_v} = \frac{4}{3} * \frac{Q}{A} \quad (\text{equação 55})$$

Onde:

$Q'$  = primeiro momento da área da seção transversal acima ou abaixo do nível em que a tensão de cisalhamento  $\tau$  está sendo calculada;

$Q$  = força de cisalhamento atuante;

$r_v$  = raio da seção circular;

$b$  = largura da seção transversal;

$A$  = área da seção transversal;

$I$  = momento de inércia.

Desse modo, para a viga de seção circular a tensão máxima de cisalhamento equivale a aproximadamente 1,3 vezes a tensão média de corte.

## 5.2 FATORES DE FORMA

Como visto anteriormente, existe uma diferença significativa entre os valores da tensão cisalhante máxima e da tensão média de corte. De acordo com a lei de Hooke para o cisalhamento, expressa pela equação 48, as distorções médias e máximas também são distintas. Dessa maneira, para que seja possível realizar a implementação computacional da deformação por corte, é necessário corrigir o valor da distorção máxima, tendo-se como base a distorção média. Para isso utiliza-se o parâmetro  $k_s$ , em inglês denominado de *shear form* ou *shear stiffness factor*, representado pela equação 56.

$$k_s = \frac{Y_M}{Y_{MAX}} \quad (\text{equação 56})$$

Através do parâmetro  $k_s$  pode-se definir também o fator de forma, em inglês denominado de *shear correction factor*, conforme a equação 57. O fator de forma,  $\omega$ , depende exclusivamente da forma geométrica da seção transversal. Neste trabalho não se demonstra o processo de obtenção dos fatores de forma para as seções utilizadas, embora esses pudessem ser obtidos utilizando-se, por exemplo, os métodos de energias de deformação ou imposição de condições de contorno nas extremidades de uma viga bi-engastada.

$$\omega = \frac{1}{k_s} \quad (\text{equação 57})$$

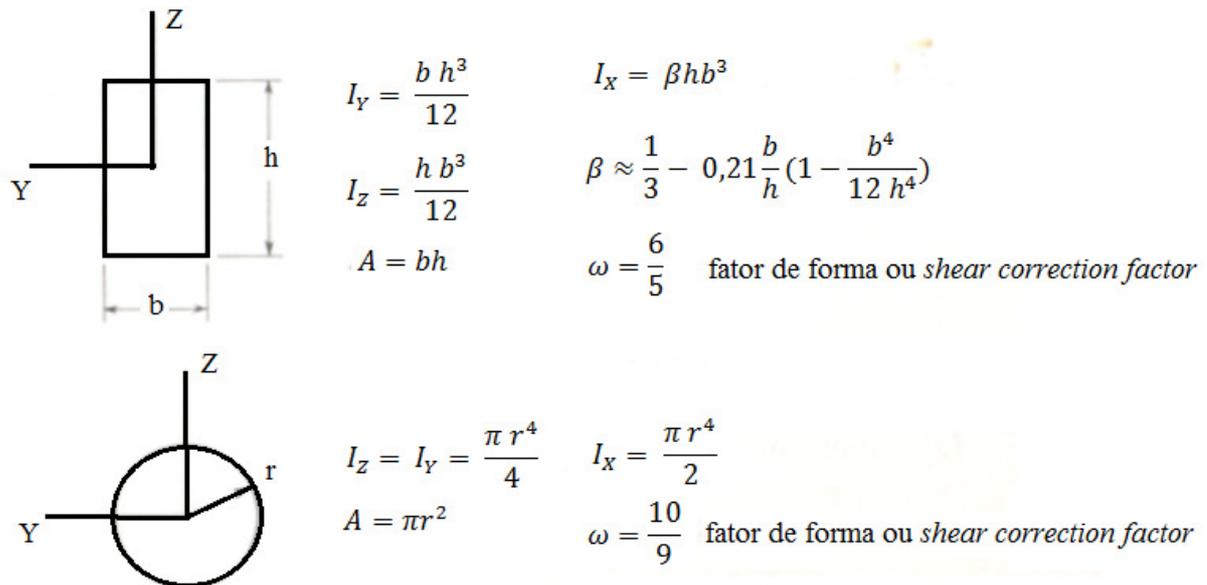
Onde:

$\omega$  = fator de forma ou *shear correction factor*;

$k_s$  = parâmetro de correção das distorções, denominado de *shear form* ou *shear stiffness factor*.

Desse modo, na figura 23, são apresentadas algumas propriedades geométricas das seções transversais mais comumente utilizadas em sistemas estruturais de concreto armado, bem como especificados os fatores de forma para determinação das deformações por corte.

Figura 23 – Propriedades geométricas das seções transversais



(fonte: GERE; WEAVER JUNIOR, 1981, p. 197)

Além das tabelas que fornecem os fatores de forma, existem equações analíticas cujos resultados foram obtidos utilizando as técnicas de elementos finitos, que nos fornecem o fator de forma das seções transversais em função do coeficiente de Poisson  $\nu$  (TIMOSHENKO; YOUNG, c1966). Abaixo, um exemplo desse tipo de equação, válida para seções retangulares.

$$k_s = \frac{1 + \nu}{1,2 + 1,1 * \nu} \quad (\text{equação 58})$$

Considerando o valor do coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ , o valor obtido para o fator de forma de seções retangulares fica muito próximo do valor sugerido pela figura 23. Para a aplicação dos fatores de forma, considerou-se que a relação entre a altura e a largura da seção transversal sempre é maior ou igual a dois, para os casos de seções retangulares. Isso se deve ao fato que, para relações entre altura e largura menores que um, o valor do parâmetro  $k_s$  reduz consideravelmente, aumentando o fator de forma  $\omega$  e conseqüentemente a parcela de deformação por cisalhamento. A tabela 1 representa essa alteração em função do coeficiente de Poisson e da relação altura – largura da seção transversal.

Tabela 1 – Parâmetro  $k_s$ , em função do coeficiente de Poisson e da relação altura – largura da seção transversal

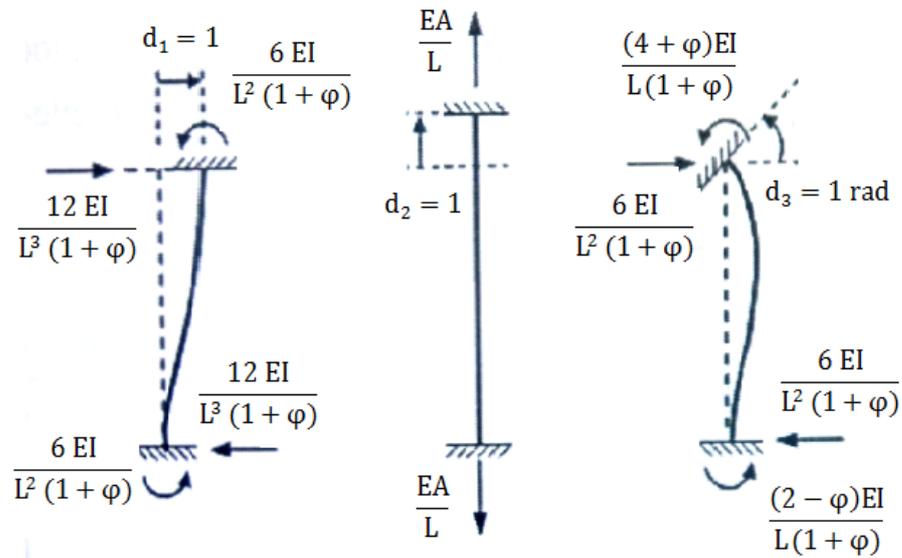
<b>h / b</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0.5</b>	<b>0.25</b>
<b>v = 0</b>	0.8333	0.8333	0.8333	0.8333
<b>v = 0.25</b>	0.8331	0.8295	0.7961	0.6308
<b>v = 0.5</b>	0.8325	0.8228	0.7375	0.4404

(fonte: TIMOSHENKO; YOUNG, c1966, p. 44)

### 5.3 COEFICIENTES DE RIGIDEZ DA BARRA: PARCELA DE CISALHAMENTO

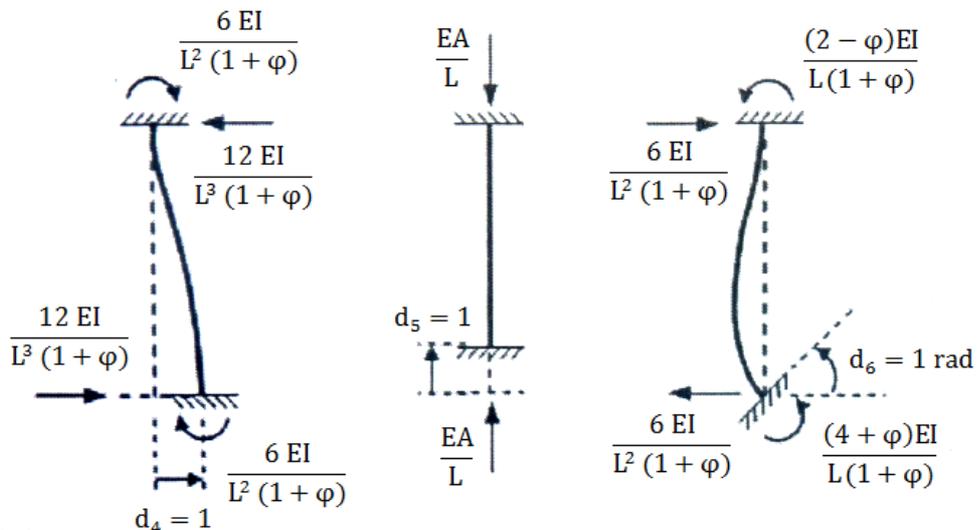
Para a obtenção dos coeficientes de rigidez da barra no sistema de referência local, incluindo a deformação por corte, seguiu-se o mesmo procedimento executado anteriormente para determinação dos coeficientes de rigidez nos casos de deformação por esforço normal e momentos fletores. Ou seja, aplicaram-se deslocamentos e giros unitários sucessivamente, anulando os demais graus de liberdade, obtendo-se assim as reações de extremidade da barra. Este procedimento encontra-se ilustrado nas figuras 24 e 25.

Figura 24 – Deslocamentos e giros unitários no nó inicial da barra: parcela de corte



(fonte: SORIANO, 2005, p. 61)

Figura 25 – Deslocamentos e giros unitários no nó final da barra: parcela de corte



(fonte: SORIANO, 2005, p. 61)

Com base nas reações de extremidade da barra, percebe-se claramente que houve um acréscimo da parcela de corte, denominada de  $\varphi$ . Esta pode ser representada pela seguinte equação (SORIANO, 2005):

$$\varphi = \frac{12 EI}{GA L^2} \omega \quad (\text{equação 59})$$

Onde:

$\varphi$  = parcela de consideração da deformação por esforço cortante;

E, G = módulos de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente;

A = área da seção transversal;

I = momento de inércia;

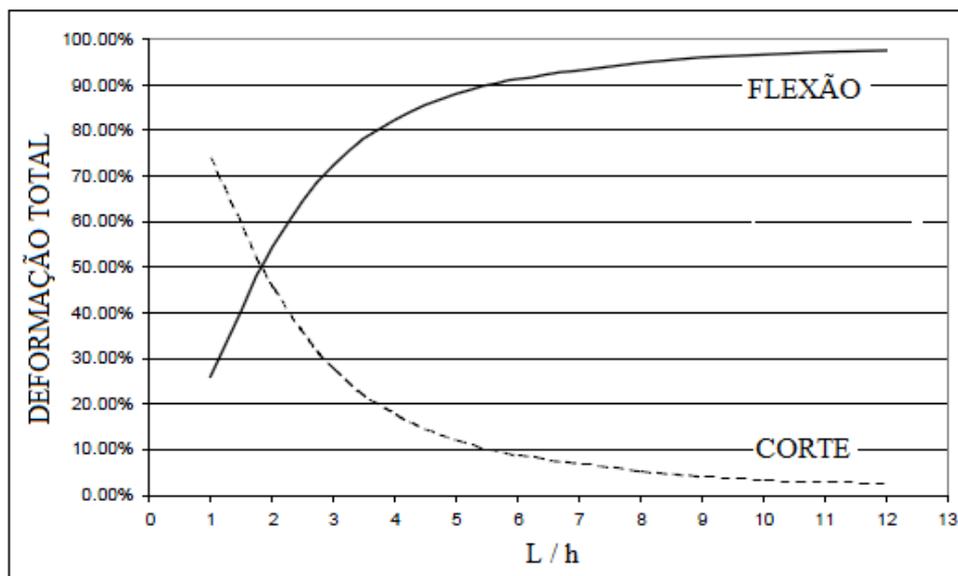
L = comprimento do elemento estrutural;

$\omega$  = fator de forma ou *shear correction factor*.

Através das figuras 24 e 25, e com base na equação 59, percebe-se que, considerando o fator de forma da seção igual a zero, os coeficientes de rigidez equivalem à situação de deformação apenas por flexão e esforço normal. Deve-se lembrar que, a deformação por esforço cortante manifesta-se mais claramente em situações onde a relação entre o comprimento e a altura do elemento estrutural se torna reduzida.

A figura 26 representa a variação percentual entre a deformação por corte e por flexão, realizada para um perfil metálico de seção W 24x335. Embora o comportamento do concreto armado seja diferenciado, se comparado ao aço, pode-se ter uma idéia da contribuição de cada esforço para a formação da flecha composta.

Figura 26 – Relação percentual entre a deformação por flexão e a deformação por esforço cortante



(fonte: IYER, 2005, p. 2)

Com base na figura 26, percebe-se que para relações entre o comprimento e a altura maiores que seis, a contribuição do esforço cortante na deformação fica abaixo de 10%. Contudo, à medida que essa relação reduz, a contribuição se torna significativa e importante, em termos de verificação dos estados limites de serviço.

#### 5.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA: PARCELA DE CISALHAMENTO

Utilizando os coeficientes de rigidez determinados anteriormente para a barra bi – engastada, no sistema de referência local, forma-se a matriz de rigidez da barra, também em coordenadas locais. A partir de alterações realizadas nessa matriz, é que a deformação por corte passa a ser considerada.

Na figura 27, nota-se que a inclusão da parcela de deformação por corte na matriz de rigidez da barra, reduz os coeficientes de rigidez da matriz. Desta maneira, os deslocamentos tendem a serem maiores, com base no modelo matemático de uma mola unidirecional. No capítulo seguinte, são realizadas duas aplicações visando verificar o acréscimo nos deslocamentos de pórticos espaciais, oriundos da deformação por corte.

Figura 27 – Matriz de rigidez da barra de pórtico espacial considerando a deformação por corte: eixos locais

1	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{-EA}{L}$	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{12EI_z}{L^3(1+\varphi_Y)}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2(1+\varphi_Y)}$	0	$\frac{-12EI_z}{L^3(1+\varphi_Y)}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2(1+\varphi_Y)}$
3	0	0	$\frac{12EI_Y}{L^3(1+\varphi_Z)}$	0	$\frac{-6EI_Y}{L^2(1+\varphi_Z)}$	0	0	0	$\frac{-12EI_Y}{L^3(1+\varphi_Z)}$	0	$\frac{-6EI_Y}{L^2(1+\varphi_Z)}$	0
4	0	0	0	$\frac{GI_X}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{-GI_X}{L}$	0	0
5	0	0	$\frac{-6EI_Y}{L^2(1+\varphi_Z)}$	0	$\frac{(4+\varphi_Y)EI_Y}{L(1+\varphi_Y)}$	0	0	0	$\frac{-6EI_Y}{L^2(1+\varphi_Z)}$	0	$\frac{(2-\varphi_Y)EI_Y}{L(1+\varphi_Y)}$	0
6	0	$\frac{6EI_z}{L^2(1+\varphi_Y)}$	0	0	0	$\frac{(4+\varphi_Y)EI_z}{L(1+\varphi_Y)}$	0	$\frac{-6EI_z}{L^2(1+\varphi_Y)}$	0	0	0	$\frac{(2-\varphi_Y)EI_z}{L(1+\varphi_Y)}$
7	$\frac{-EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
8	0	$\frac{-12EI_z}{L^3(1+\varphi_Y)}$	0	0	0	$\frac{-6EI_z}{L^2(1+\varphi_Y)}$	0	$\frac{12EI_z}{L^3(1+\varphi_Y)}$	0	0	0	$\frac{-6EI_z}{L^2(1+\varphi_Y)}$
9	0	0	$\frac{-12EI_Y}{L^3(1+\varphi_Z)}$	0	$\frac{6EI_Y}{L^2(1+\varphi_Z)}$	0	0	0	$\frac{12EI_Y}{L^3(1+\varphi_Z)}$	0	$\frac{6EI_Y}{L^2(1+\varphi_Z)}$	0
10	0	0	0	$\frac{-GI_X}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GI_X}{L}$	0	0
11	0	0	$\frac{-6EI_Y}{L^2(1+\varphi_Z)}$	0	$\frac{(2-\varphi_Y)EI_Y}{L(1+\varphi_Y)}$	0	0	0	$\frac{6EI_Y}{L^2(1+\varphi_Z)}$	0	$\frac{(4+\varphi_Y)EI_Y}{L(1+\varphi_Y)}$	0
12	0	$\frac{6EI_z}{L^2(1+\varphi_Y)}$	0	0	0	$\frac{(2-\varphi_Y)EI_z}{L(1+\varphi_Y)}$	0	$\frac{-6EI_z}{L^2(1+\varphi_Y)}$	0	0	0	$\frac{(4+\varphi_Y)EI_z}{L(1+\varphi_Y)}$

(fonte: adaptado de GERE; WEAVER JUNIOR, 1981, p. 183)

## 6 ANÁLISE DE PÓRTICOS ESPACIAIS

Para a realização das análises de pórticos espaciais, utilizaram-se como base dois *softwares* desenvolvidos por alunos do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, que contemplavam em sua execução apenas a deformação por flexão e esforço normal. Conceitos desenvolvidos nos capítulos anteriores estão empregados em suas formulações de cálculo. Para facilitar o entendimento das operações realizadas, bem como os respectivos procedimentos executados pelos mesmos, passou-se a denominá-los de **PORT-IN** e **PORT-OUT**. A linguagem de programação utilizada no desenvolvimento dos mesmos foi o *Basic*.

Desse modo, este capítulo tem como objetivo descrever as alterações realizadas nas rotinas dos *softwares* **PORT-IN** e **PORT-OUT**, validar os dados de saída e analisar uma estrutura de pórtico espacial para verificar os efeitos da deformação por esforço cortante. Para facilitar o entendimento das modificações implementadas, elaboraram-se dois macrodiagramas que representam a sequência operacional de cada *software*. Estes podem ser visualizados nos apêndices A e B. A partir dessa compreensão, a análise dos resultados se torna mais clara e a realização de considerações sobre os mesmos, mais precisa.

### 6.1 ETAPAS DE PROCESSAMENTO DO **PORT-IN**

O **PORT-IN** tem como finalidade realizar a entrada dos dados da estrutura, e armazená-los em variáveis, vetores ou matrizes para posterior processamento. Para facilitar a compreensão, o seu macro diagrama foi dividido em etapas (ver Apêndice A), as quais se encontram descritas a seguir.

Na **etapa 1**, o usuário fornece dados essenciais para que o programa possa realizar a locação de memória necessária para o processamento matemático. Com base no número de nós,  $N$ , define-se o tamanho dos vetores  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , que possuem a finalidade de guardar as coordenadas de cada nó, fornecidas durante a **etapa 2**.

A partir do número de barras,  $M$ , na **etapa 3** fornecem-se as conectividades. Essas são responsáveis por dar forma à estrutura, ou seja, definir sua geometria no espaço. A partir

dessa, o *software* consegue interpretar a estrutura a ser analisada. As conectividades são armazenadas numa matriz, de dimensões  $C(M, 2)$ , na qual a primeira coluna recebe o nó inicial e a segunda o nó final de cada barra.

Com a geometria da estrutura definida, na **etapa 4** são fornecidas as propriedades de cada barra, as quais são armazenadas em um vetor de dimensão  $P (6 * M)$ . Desse modo, o *software* reserva seis posições no vetor, para cada barra, as quais são preenchidas com as seguintes informações:

- a) posição 1: tipo de seção, retangular ou circular;
- b) posição 2: ângulo  $\alpha$  (ver conceitos de matriz de rotação);
- c) posição 3: momento de inércia em torno do eixo x (local);
- d) posição 4: momento de inércia em torno do eixo y (local);
- d) posição 5: momento de inércia em torno do eixo z (local);
- e) posição 6: área da seção transversal da barra.

Durante a **etapa 5**, são informados os carregamentos nodais atuantes sobre a estrutura, em coordenadas globais. Esses carregamentos podem ser forças ou momentos atuantes nas direções X, Y, Z. Caso algum carregamento nodal não esteja na direção dos eixos globais da estrutura, ele deve ser decomposto.

Seguindo com o fornecimento das cargas atuantes na estrutura, na **etapa 6** são discriminadas as cargas concentradas aplicadas ao longo das barras. Essas cargas tem como base o sistema de eixos local, e caso o carregamento não esteja vinculado a este, também deve ser decomposto. Para finalizar os carregamentos, na **etapa 7** são fornecidas as cargas distribuídas sobre as barras, também no sistema de eixos local. Têm-se a possibilidade de aplicar as cargas em toda a extensão da barra ou restringi-las a um trecho.

Com base nas etapas anteriores, a **etapa 8** consiste na realização da gravação dos resultados, em arquivos de texto, possibilitando ao usuário a conferência ou manipulação dos dados fornecidos.

## 6.2 ETAPAS DE PROCESSAMENTO DO PORT-OUT

Com base nos arquivos de textos gravados pelo **PORT-IN**, o **PORT-OUT** na **etapa 1** (ver Apêndice B), realiza a leitura dos dados. Com base nesta, ocorre à alocação de memória para a realização das etapas subsequentes.

Através da leitura do número de nós da estrutura  $N$  e da matriz de conectividades da estrutura, na **etapa 2** é realizado o cálculo da semi-largura de banda da estrutura,  $B$ . Esta é obtida através da seguinte equação:

$$B = 6 * (c + 1) \quad (\text{equação 60})$$

Onde:

$B$  = semi-largura de banda da estrutura;

$c$  = maior diferença entre as conectividades das barras da estrutura.

Através da equação 60, percebe-se que no momento da entrada dos dados da estrutura, deve-se ter o cuidado para que a diferença entre o número final e inicial de cada barra não fique elevado. Isto é de fundamental importância quando são utilizadas linguagens de programação mais antigas, como o *Basic*, visto que a memória disponibilizada pelo computador durante a realização da análise estrutural é reduzida. Para a situação de um pórtico espacial, por exemplo, o número de pavimentos analisados pode ser limitado pela semi-largura de banda da estrutura.

Durante a **etapa 3**, forma-se a matriz de rigidez de cada barra em coordenadas globais, aplicando-se a matriz de rotação para estruturas espaciais,  $R$ . Essa matriz possui dimensões  $S$  (12,12). Esta dimensão vem do fato que os pórticos espaciais possuem seis graus de liberdade por nó.

A partir das condições de contorno aplicadas à estrutura, na **etapa 4**, estas são introduzidas para a solução do sistema de equações lineares. Deve-se ter em mente, que as condições de contorno possíveis de serem aplicadas, para os *softwares* utilizados, consistem em: restrições à translações e rotações ao longo dos eixos  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  do sistema de referência global.

Utilizando-se dos conceitos referentes ao Método de Gauss para a solução de sistemas de equações lineares, e com base na semi-largura de banda da estrutura, na **etapa 5**, obtém-se os deslocamentos e giros atuantes nos pontos nodais da estrutura. A partir destes, na **etapa 6** realiza-se o cálculo das solicitações e reações nodais na estrutura. Com base nas solicitações obtidas para os nós da estrutura, através da Resistência dos Materiais, podem-se obter as solicitações ao longo das barras.

Na **etapa 7**, ocorre a publicação (gravação em arquivo) dos resultados, sendo essa caracterizada pela obtenção dos seguintes dados:

- a) deslocamentos e rotações nodais;
- b) reações força e momento, nodais;
- c) solicitações nodais, no sistema de referência local.

A partir da publicação dos resultados, caso o usuário desejar alterar alguma propriedade da estrutura, o mesmo pode recorrer às listagens impressas pelo **PORT-IN**, e iniciar novamente o processamento dos dados.

### 6.3 MODIFICAÇÕES REALIZADAS NO **PORT-IN** e **PORT-OUT**

Através dos conceitos desenvolvidos, referentes ao método da rigidez e a deformação por corte, o processo de alterações nas rotinas computacionais consistiu nas seguintes operações: inclusão do fator de forma da seção transversal,  $\omega$ , e acréscimo das parcelas de cisalhamento nos coeficientes de rigidez da matriz de rigidez da barra.

O fator de forma foi incluído aumentando a dimensão do vetor de propriedades da barra de  $P(6 * M)$  para  $P(7 * M)$ , onde  $M$  corresponde ao número de barras da estrutura. Desse modo, essa modificação foi realizada no **PORT-IN**. A partir da leitura dos dados, o **PORT-OUT** realiza o cálculo das parcelas de cisalhamento,  $\varphi$ , a serem inseridas na matriz de rigidez da barra.

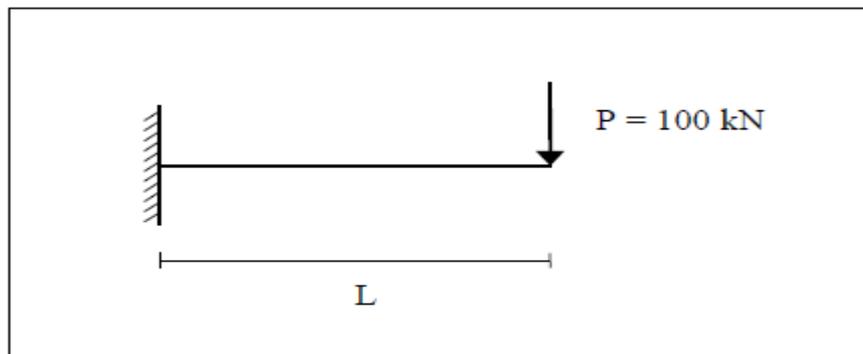
A parcela de cisalhamento, desse modo, foi acrescentada na matriz de rigidez da barra e implementada no **PORT-OUT**. Como as características da matriz de rigidez, simetria e banda não se alteram, modificações na forma de armazenamento dos dados não foram necessárias.

## 6.4 EXEMPLO 1

Neste exemplo, realizou-se a verificação dos resultados obtidos através dos *softwares* **PORT-IN** e **PORT-OUT**, com o intuito de aferir o modelo matemático implementado. Os dados de deslocamentos obtidos foram comparados com os publicados por Gere e Weaver Junior (c1965, p. 409).

O exemplo consiste em uma viga de seção transversal retangular, engastada em uma extremidade, na qual aplica-se uma carga vertical concentrada de 100 kN na extremidade livre, conforme figura 28.

Figura 28 – Modelo de viga utilizado para aferição dos resultados



(fonte: elaborado pelo autor)

Para analisar as deformações por flexão e esforço cortante, utilizaram-se as seguintes propriedades geométricas para a viga:

- a) módulo de elasticidade longitudinal =  $23800 \times 10^3$  kN/m<sup>2</sup>;
- b) módulo de elasticidade transversal =  $9520 \times 10^3$  kN/m<sup>2</sup>;
- c) coeficiente de Poisson = 0,2;
- d) fator de forma = 1,2;
- e) seção transversal = 15 x 100 cm

A tabela 2 apresenta os resultados obtidos, para uma variação do comprimento da viga de  $L = 1$  m até  $L = 5$  m, com intervalos de 0,25 m entre análises.

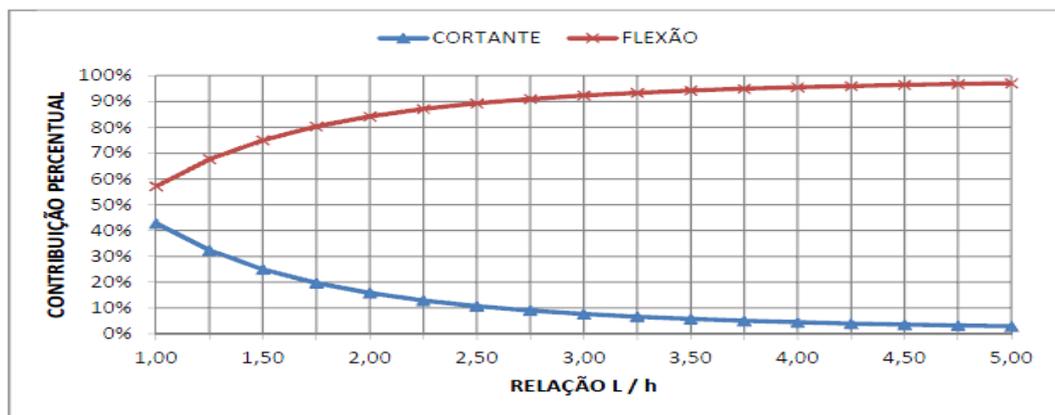
Tabela 2 – Aferição do modelo matemático implementado:  
consideração da contribuição do esforço cortante na deformação total

L m	GERE; WEAVER (c1965)			PORT-IN / PORT-OUT			CONTRIBUIÇÃO DO ESFORÇO CORTANTE NA FLECHA TOTAL	ERRO RELATIVO
	Δ FLEXÃO cm	Δ CORTANTE cm	Δ TOTAL cm	Δ FLEXÃO cm	Δ CORTANTE cm	Δ TOTAL cm		
5,00	1,40056	0,04202	1,44258	1,40056	0,04200	1,44256	2,91%	0,040%
4,75	1,20081	0,03992	1,24072	1,20081	0,03990	1,24071	3,22%	0,040%
4,50	1,02101	0,03782	1,05882	1,02101	0,03780	1,05881	3,57%	0,040%
4,25	0,86012	0,03571	0,89583	0,86012	0,03570	0,89582	3,99%	0,040%
4,00	0,71709	0,03361	0,75070	0,71709	0,03360	0,75069	4,48%	0,040%
3,75	0,59086	0,03151	0,62237	0,59086	0,03150	0,62236	5,06%	0,040%
3,50	0,48039	0,02941	0,50980	0,48039	0,02940	0,50979	5,77%	0,040%
3,25	0,38463	0,02731	0,41194	0,38463	0,02730	0,41193	6,63%	0,040%
3,00	0,30252	0,02521	0,32773	0,30252	0,02520	0,32772	7,69%	0,040%
2,75	0,23302	0,02311	0,25613	0,23302	0,02310	0,25612	9,02%	0,040%
2,50	0,17507	0,02101	0,19608	0,17507	0,02100	0,19607	10,71%	0,040%
2,25	0,12763	0,01891	0,14653	0,12763	0,01890	0,14653	12,90%	0,040%
2,00	0,08964	0,01681	0,10644	0,08964	0,01680	0,10644	15,78%	0,040%
1,75	0,06005	0,01471	0,07475	0,06005	0,01470	0,07475	19,67%	0,040%
1,50	0,03782	0,01261	0,05042	0,03782	0,01260	0,05042	24,99%	0,040%
1,25	0,02188	0,01050	0,03239	0,02188	0,01050	0,03238	32,42%	0,040%
1,00	0,01120	0,00840	0,01961	0,01120	0,00840	0,01960	42,85%	0,040%

(fonte: elaborado pelo autor)

Com base na tabela 2, elaborou-se um gráfico que demonstra a evolução da contribuição do esforço cortante, em termos percentuais, para a situação analisada (figura 29). Em caráter comparativo, acrescentaram-se também os dados referentes à deformação por momento fletor.

Figura 29 – Comparação entre a contribuição do momento fletor e do esforço cortante na formação da flecha composta



(fonte: elaborado pelo autor)

Realizando uma comparação entre os gráficos das figuras 26 e 29, percebeu-se uma semelhança no comportamento das curvas percentuais de contribuição dos deslocamentos, relativos à deformação por esforços de flexão e corte. As diferenças na taxa de variação dos

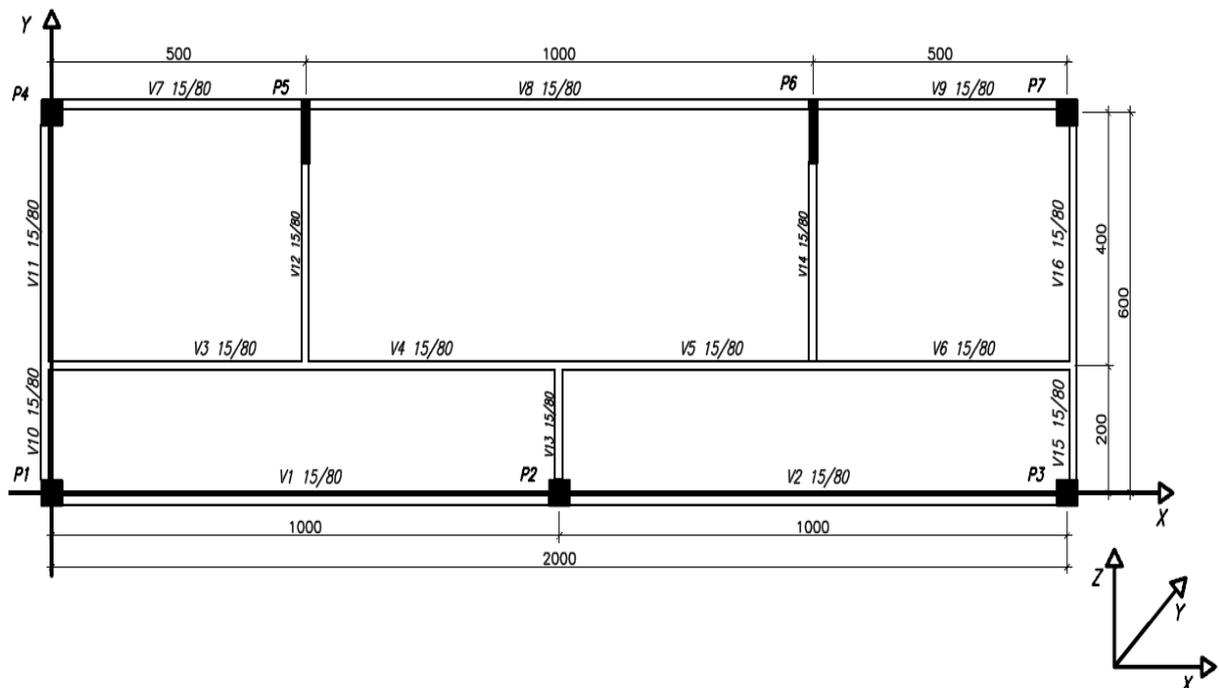
deslocamentos são devidas ao fato de que, os materiais e os tipos de seções transversais analisados foram distintos. Isto modifica consideravelmente o fator de forma a ser utilizado e conseqüentemente a contribuição do esforço cortante na deformação total.

Desse modo, com base nos resultados obtidos, entendeu-se que o modelo matemático implementado apresentou dados coerentes com a teoria de Timoshenko. A seguir realizou-se a modelagem estrutural de um pórtico espacial, com o intuito de verificar os efeitos nos resultados da análise estrutural.

## 6.5 EXEMPLO 2

Esse exemplo consistiu na modelagem de um edifício comercial de 10 pavimentos, com pé direito de 3m, cuja planta do pavimento tipo é apresentada na figura 30. Através desta edificação foram verificados deslocamentos nos pilares e rotações nas barras. Uma análise do comportamento da estrutura, como um todo, também é realizado. Esta visa a validação dos resultados obtidos, frente aos carregamentos impostos à estrutura.

Figura 30 – Planta do pavimento tipo



(fonte: elaborado pelo autor)

As propriedades geométricas dos elementos estruturais, vigas e pilares, que definem a geometria da edificação e também fornecem suporte estrutural aos carregamentos impostos a estrutura, ao longo de toda a sua vida útil, encontram-se especificados na tabela 3. As seções transversais adotadas para as vigas foram de 15x80 cm e para os pilares 40x40 cm, com exceção dos pilares P5 e P6, nos quais se considerou 15x100 cm.

Tabela 3 – Propriedades geométricas dos elementos estruturais da edificação

ELEMENTO ESTRUTURAL	ÁREA [m <sup>2</sup> ]	I <sub>x</sub> [m <sup>4</sup> ]	I <sub>y</sub> [m <sup>4</sup> ]	I <sub>z</sub> [m <sup>4</sup> ]
P1,P2, P3 P4,P7	0,1600	0,0036	0,0021	0,0021
P5, P6	0,1500	0,0010	0,0003	0,0125
VIGAS	0,1200	0,0008	0,0064	*

\* Considerado como 100 vezes maior que a inércia em torno do eixo y, com o intuito de simular o efeito do diafragma rígido na edificação.

(fonte: elaborado pelo autor)

Através da utilização dos *softwares* **PORT-IN** e **PORT-OUT**, não foi possível a discretização dos elementos de laje da edificação, porém estes possuem grande importância na caracterização do comportamento de diafragma rígido da estrutura. Ao assumir este comportamento, pressupõe-se que os pavimentos se tornem indeformáveis em seu plano, ou seja, isso implica que os mesmos possam apresentar somente movimento de corpo rígido. Com o intuito de simular este comportamento, considerou-se a inércia das vigas em torno do eixo z (local), como sendo 100 vezes maior que a inércia em torno do eixo y (local).

Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal dos elementos estruturais foram calculados para um  $f_{ck}$  de 25 MPa. Desse modo, encontram-se especificados abaixo os dados utilizados durante a realização da análise estrutural:

- a) módulo de elasticidade longitudinal (E): 23800000 kN/m<sup>2</sup>;
- b) módulo de elasticidade transversal (G): 9520000 kN/m<sup>2</sup>;
- c) coeficiente de Poisson ( $\nu$ ): 0,2;
- d) fator de forma ( $\omega$ ): 1,2.

A partir da planta do pavimento tipo, iniciou-se o processo de locação dos nós, definidos como os pontos de interseção entre duas barras. Na tabela 4 foram especificadas as coordenadas dos nós para o primeiro lance de pilares, bem como para as vigas do primeiro

pavimento. Com relação aos pavimentos superiores, os nós de interseção entre viga/viga e viga/pilar, possuem as mesmas coordenadas nas direções globais X e Y, porém a coordenada Z é modificada em 3 m para cada pavimento, em função do pé-direito da estrutura.

Tabela 4 – Coordenadas nodais para os pilares e vigas do primeiro pavimento

<b>NÓ</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>Z</b>
	<b>[m]</b>	<b>[m]</b>	<b>[m]</b>
<b>1</b>	0	0	0
<b>2</b>	10	0	0
<b>3</b>	20	0	0
<b>4</b>	0	6	0
<b>5</b>	5	6	0
<b>6</b>	15	6	0
<b>7</b>	20	6	0
<b>8</b>	0	0	3
<b>9</b>	10	0	3
<b>10</b>	20	0	3
<b>11</b>	0	2	3
<b>12</b>	5	2	3
<b>13</b>	10	2	3
<b>14</b>	15	2	3
<b>15</b>	20	2	3
<b>16</b>	0	6	3
<b>17</b>	5	6	3
<b>18</b>	15	6	3
<b>19</b>	20	6	3

(fonte: elaborado pelo autor)

Com base na numeração de nós definida anteriormente, estabeleceu-se as conectividades das barras, ou seja, definiu-se o nó inicial e o nó final para cada elemento estrutural. Na tabela 5, encontram-se especificadas as conectividades para os pilares e vigas do primeiro pavimento da estrutura.

Tabela 5 – Conectividades das barras para os pilares e vigas do primeiro pavimento

ELEMENTO ESTRUTURAL	BARRA	NÓ INICIAL	NÓ FINAL
PILAR P1	1	1	8
PILAR P2	2	2	9
PILAR P3	3	3	10
PILAR P4	4	4	16
PILAR P5	5	5	17
PILAR P6	6	6	18
PILAR P7	7	7	19
VIGAV1	8	8	9
VIGAV2	9	9	10
VIGAV3	10	11	12
VIGAV4	11	12	13
VIGAV5	12	13	14
VIGAV6	13	14	15
VIGAV7	14	16	17
VIGAV8	15	17	18
VIGAV9	16	18	19
VIGAV10	17	8	11
VIGAV11	18	11	16
VIGAV12	19	12	17
VIGAV13	20	9	13
VIGAV14	21	14	18
VIGAV15	22	10	15
VIGAV16	23	15	19

(fonte: elaborado pelo autor)

Os carregamentos verticais, permanentes e acidentais, atuantes na estrutura foram determinados conforme recomendações da NBR 6120 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 1980). A combinação de carregamentos considerada durante a realização da análise estrutural caracterizou-se pela atuação simultânea das cargas permanentes e acidentais. As cargas acidentais utilizadas foram a sobrecarga do pavimento e o vento.

As cargas de vento atuantes na estrutura foram determinadas com base nas sugestões da NBR 6123 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 1988), e obtidas com base nos seguintes parâmetros:

- a) velocidade básica do vento ( $V_0$ ) = 45 m/s;
- b) fator topográfico ( $S_1$ ) = 1,0;
- c) fator estatístico ( $S_3$ ) = 1,0.

O fator  $S_2$ , que considera a rugosidade do terreno e as dimensões da edificação, foi obtido com base na equação 61, onde os parâmetros  $b'$  e  $P$  foram determinados para uma edificação de classe B e categoria IV, enquanto o fator  $F_r$  correspondeu à categoria II.

$$S_2 = b' * F_r * \left(\frac{Z}{10}\right)^P \quad (\text{equação 61})$$

Onde:

$b'$  = parâmetro adimensional, estabelecido com base na categoria e classe da edificação;

$F_r$  = fator de rajada;

$Z$  = cota acima do terreno (m);

$P$  = expoente de variação do fator  $S_2$ .

A partir dos parâmetros estabelecidos acima, para os carregamentos de vento, especificou-se na tabela 6 a pressão dinâmica ( $q$ ) atuante em cada pavimento, bem como a força total na direção Y global. Esta foi obtida considerando-se a altura do pé-direito da edificação, bem como a área efetiva de influência horizontal, na qual o vento incide.

Tabela 6 – Forças de arrasto aplicadas na direção Y global de cada pavimento

PAVIMENTO	ALTURA [m]	S1=S3	S2	q [kN/m <sup>2</sup> ]	FY [kN]
1	3	1	0,72	0,64	26,77
2	6	1	0,78	0,76	31,84
3	9	1	0,82	0,84	35,24
4	12	1	0,85	0,90	37,86
5	15	1	0,88	0,95	40,04
6	18	1	0,90	1,00	41,90
7	21	1	0,91	1,04	43,55
8	24	1	0,93	1,07	45,03
9	27	1	0,94	1,10	46,37
10	30	1	0,96	1,13	23,81

(fonte: elaborado pelo autor)

A excentricidade na atuação dos carregamentos de vento foi considerada com base na equação 62, ou seja, adotou-se como premissa que ocorrem efeitos de vizinhança sobre a estrutura. Para este exemplo, considerou-se somente o vento atuante na direção Y global (maior área de influência), enquanto as parcelas de vento correspondentes à sucção na direção X foram desconsideradas. Essa simplificação é válida visto que, devido à simetria da estrutura, as forças de arrasto se anulam.

$$e_a = 0,15 * a \quad (\text{equação 62})$$

Onde:

$e_a$  = excentricidade na direção da maior dimensão da edificação;

$a$  = maior dimensão da edificação.

A força de vento atuando de forma excêntrica na estrutura produz um efeito de torção (MZ) na edificação. Esse efeito foi considerado durante a análise estrutural, decompondo-se a força total atuante no pavimento em um conjunto de forças nodais, de intensidades diferentes, cujo momento resultante no centro geométrico da edificação fosse igual ao momento provocado pela excentricidade da força total de arrasto do vento.

Através da tabela 7, podem-se visualizar as intensidades dos carregamentos de vento impostos em cada pilar. O último pavimento da edificação apresenta uma menor carga aplicada, devido a sua área efetiva de influência ser reduzida pela metade pela ausência de platibanda na cobertura.

Tabela 7 – Carregamentos de vento aplicados nos pilares, por pavimento

PAVIMENTO	FY-P1	FY-P2	FY-P3	FY-P4	FY-P5	FY-P6	FY-P7	MZ
	[kN]	[kNm]						
1	4,91	8,92	12,94	3,48	5,09	8,30	9,91	80,32
2	5,84	10,61	15,39	4,14	6,05	9,87	11,78	95,52
3	6,46	11,75	17,03	4,58	6,69	10,92	13,04	105,71
4	6,94	12,62	18,30	4,92	7,19	11,74	14,01	113,59
5	7,34	13,35	19,35	5,20	7,61	12,41	14,81	120,11
6	7,68	13,97	20,25	5,45	7,96	12,99	15,50	125,71
7	7,98	14,52	21,05	5,66	8,27	13,50	16,11	130,65
8	8,26	15,01	21,76	5,85	8,56	13,96	16,66	135,08
9	8,50	15,46	22,41	6,03	8,81	14,38	17,16	139,12
10	4,36	7,94	11,51	3,09	4,52	7,38	8,81	71,42

(fonte: elaborado pelo autor)

Aplicados os carregamentos na estrutura e fornecidos os dados de entrada necessários para a análise da mesma, através do **PORT-OUT** iniciou-se o processo de verificação dos resultados obtidos. Nas situações onde foram considerados os efeitos da deformação por esforço

cortante, passou-se a denominar de (com DPC), e onde os mesmos foram desconsiderados (sem DPC).

Com os resultados das análises realizadas, inicialmente realizou-se a verificação das reações de força na base dos pilares, visando aferir o processamento dos dados. Nas tabelas 8 e 9 apresentam-se as reações obtidas.

Tabela 8 – Reações nodais forças, sem DPC

REAÇÕES - FORÇAS (sem DPC)			
PILAR	FX	FY	FZ
	kN	kN	kN
1	-7,4	-42,32	3845,00
2	-10,0	-63,57	8007,00
3	-6,6	-105,22	3843,00
4	7,5	-41,01	2892,00
5	3,1	-146,18	5654,00
6	3,2	-242,23	5658,00
7	10,1	-104,44	2900,00
$\Sigma$	0,0	-744,97	32799,00

(fonte: elaborado pelo autor)

Tabela 9 – Reações nodais forças, com DPC

REAÇÕES - FORÇAS (com DPC)			
PILAR	FX	FY	FZ
	kN	kN	kN
1	-7,4	-42,29	3840,00
2	-10,1	-63,6	8008,00
3	-6,6	-105,3	3843,00
4	7,6	-41,2	2895,00
5	3,3	-145,9	5657,00
6	3,2	-242,4	5659,00
7	9,8	-104,6	2898,00
$\Sigma$	-0,1	-745,29	32800,00

(fonte: elaborado pelo autor)

Percebeu-se, através das tabelas 8 e 9, que as reações nodais na direção  $F_z$  coincidiram com os carregamentos verticais impostos à estrutura, correspondentes a 32800 kN. Devido à simetria na aplicação das cargas e na geometria da estrutura, notou-se que os pilares 1 e 3 receberam praticamente o mesmo carregamento, bem como os pilares 4 e 7. Observou-se também que os pilares 5 e 6 receberam o maior percentual das cargas verticais.

O somatório das reações  $F_y$  apresentou uma diferença pequena, em relação ao carregamento horizontal aplicado de 744,81 kN. As reações  $F_x$  se cancelaram, visto que não foram aplicadas cargas nesta direção da estrutura. Também conclui-se que a consideração da deformação por corte na estrutura não afetou os resultados de reações na base da edificação.

A simplificação realizada para simular o comportamento de diafragma rígido dos pavimentos também pôde ser verificada nos resultados. As tabelas 10 e 11 fornecem as rotações em torno do eixo Z, para os nós do primeiro e segundo pavimento, respectivamente. Com base nestas, observou-se que todos os nós do pavimento realizaram a mesma rotação, ocorrendo assim apenas deslocamentos de corpo rígido. Nos pavimentos superiores este comportamento também foi verificado.

Tabela 10 – Rotações em torno do eixo z, com DPC: primeiro pavimento

Nó	Rz
8	2,57E-04
9	2,58E-04
10	2,59E-04
11	2,57E-04
12	2,57E-04
13	2,58E-04
14	2,59E-04
15	2,59E-04
16	2,58E-04
17	2,57E-04
18	2,59E-04
19	2,59E-04

(fonte: elaborado pelo autor)

Tabela 11 – Rotações em torno do eixo z, com DPC: segundo pavimento

Nó	Rz
20	6,50E-04
21	6,49E-04
22	6,49E-04
23	6,49E-04
24	6,50E-04
25	6,50E-04
26	6,49E-04
27	6,49E-04
28	6,49E-04
29	6,50E-04
30	6,49E-04
31	6,49E-04

(fonte: elaborado pelo autor)

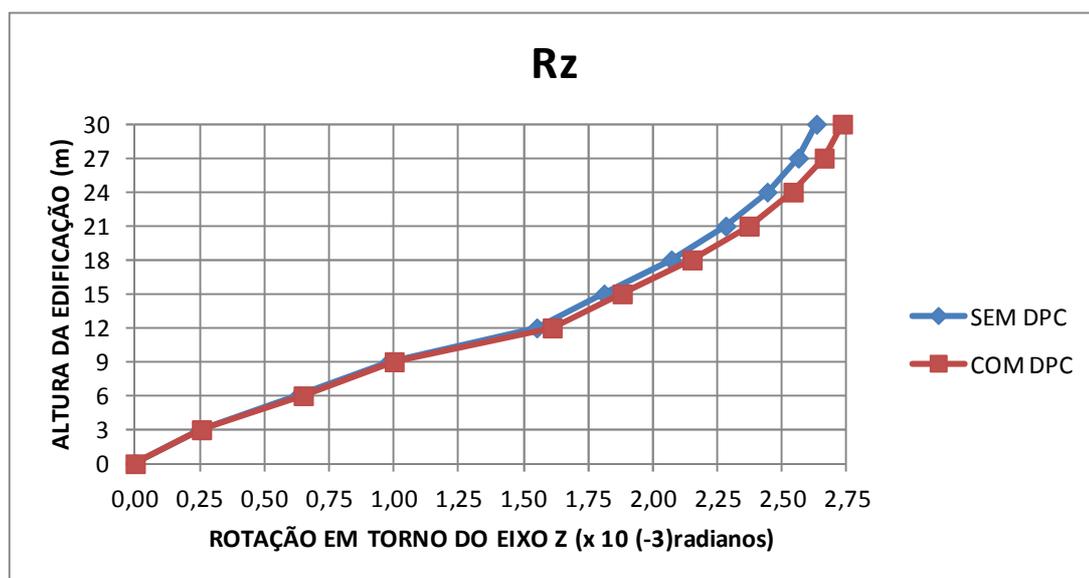
Na tabela 12 foram especificados os dados de rotações, em torno do eixo Z, obtidos para todos os pavimentos da estrutura. Através da figura 31 pôde-se perceber a variação ocorrida na rotação, ao ser considerada a deformação por esforço cortante. O sinal positivo nos dados das rotações significou que a mesma realizou-se na direção do eixo Z positivo, conforme especificado na planta baixa do pavimento tipo. Isso ocorreu, visto que a excentricidade na atuação da força de arrasto do vento foi considerada para a direita do centro geométrico da edificação.

Tabela 12 – Rotações em torno do eixo Z: todos pavimentos

ROTAÇÕES EM Z (GLOBAL)			
PAVIMENTO	ALTURA	RZ (radianos)	RZ (radianos)
	[m]	com DPC	sem DPC
TÉRREO	0	0	0,00
1	3	2,56E-04	2,50E-04
2	6	6,49E-04	6,30E-04
3	9	1,00E-03	9,80E-04
4	12	1,61E-03	1,55E-03
5	15	1,88E-03	1,81E-03
6	18	2,15E-03	2,07E-03
7	21	2,37E-03	2,28E-03
8	24	2,54E-03	2,44E-03
9	27	2,66E-03	2,56E-03
10	30	2,73E-03	2,63E-03

(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 31 – Variação da rotação em torno do eixo Z



(fonte: elaborado pelo autor)

Com os carregamentos horizontais aplicados na direção Y (global), e o centro de rigidez da estrutura deslocado nesta direção, a análise dos deslocamentos nodais foi realizada nesta direção. Desse modo, nas tabelas e figuras abaixo foram especificados os deslocamentos nodais e a variação dos mesmos, ao ser considerada a deformação por corte nas barras da estrutura.

Através dos dados da tabela 13 e do comportamento das curvas da figura 32, percebeu-se que para os pilares 1 e 4, os maiores deslocamentos acontecem no topo da edificação. Pode-se notar também que, entre o primeiro e o segundo pavimento obteve-se a maior taxa de variação da curva de deslocamentos. A partir do sexto pavimento (18 m) essa variação reduz, tendendo a apresentar um comportamento similar à deformada de um núcleo rígido, normalmente existente em poços de elevadores e/ou escadas.

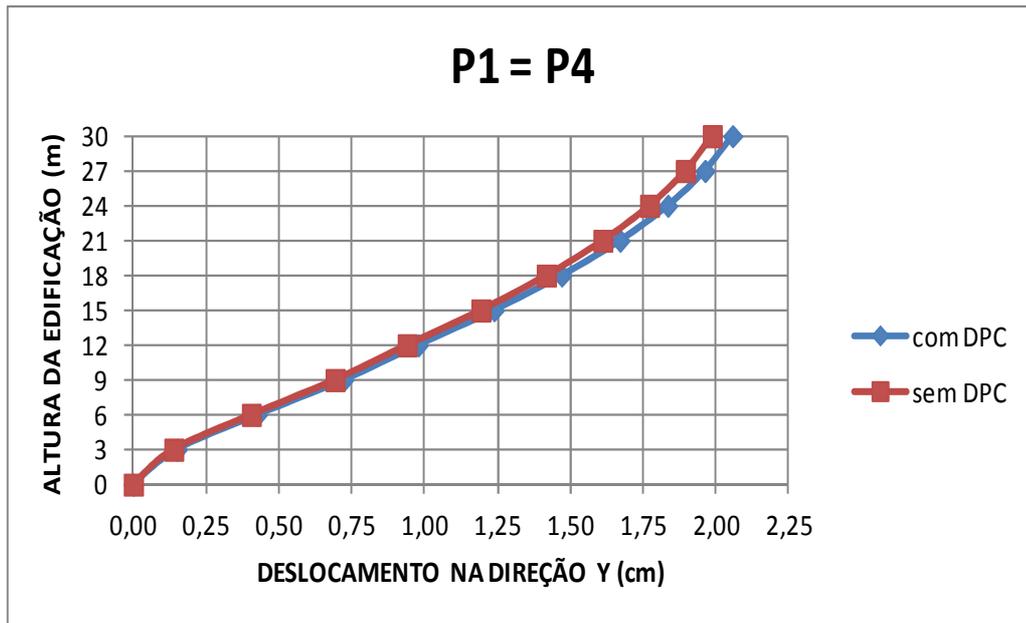
Como a força de arrasto do vento foi aplicada à direita do eixo de simetria na direção Y, observou-se também que os pilares 1 e 4 apresentaram deslocamentos menores em relação aos demais. Isso devido ao fato de terem sido utilizados intensidades de forças diferentes, aplicadas nos nós, visando simular o efeito de torção no edifício.

Tabela 13 – Deslocamentos nodais ocorridos nos pilares 1 e 4: direção Y

DESLOCAMENTOS -P1 = P4				
PAVIMENTO	ALTURA [m]	DY (cm)		$\Delta\%$
		sem DPC	com DPC	
TÉRREO	0	0,000	0,000	
1	3	0,139	0,150	8,3%
2	6	0,405	0,426	5,1%
3	9	0,692	0,722	4,3%
4	12	0,939	0,977	4,0%
5	15	1,192	1,237	3,8%
6	18	1,417	1,469	3,7%
7	21	1,610	1,670	3,7%
8	24	1,770	1,833	3,6%
9	27	1,894	1,961	3,5%
10	30	1,986	2,055	3,5%

(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 32 – Variação nos deslocamentos dos pilares 1 e 4



(fonte: elaborado pelo autor)

Ao realizar a comparação dos deslocamentos do pilar 2 (ver tabela 14 e figura 33) com os deslocamentos do pilar 1 notou-se que o acréscimo na amplitude dos mesmos ocorreu devido ao fato dos pavimentos apresentarem comportamento de diafragma rígido. Desse modo, os nós apresentam a mesma rotação, mas os deslocamentos nos pilares aumentam à medida que os mesmos se afastam do eixo de rotação da estrutura. Observa-se também que as curvas

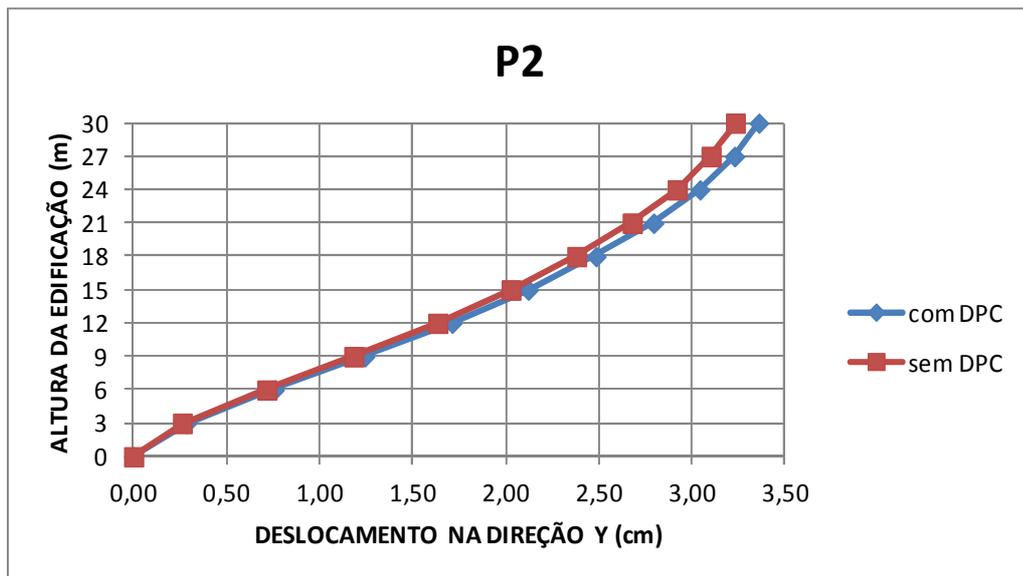
apresentaram um comportamento muito similar, havendo uma pequena diferença próximo ao topo da edificação.

Tabela 14 – Deslocamentos nodais ocorridos no pilar 2: direção Y

DESLOCAMENTOS -P2				
PAVIMENTO	ALTURA	DY (cm)	DY (cm)	$\Delta\%$
	[m]	sem DPC	com DPC	
TÉRREO	0	0,000	0,000	
1	3	0,262	0,284	8,1%
2	6	0,716	0,756	5,6%
3	9	1,182	1,241	5,0%
4	12	1,634	1,710	4,7%
5	15	2,027	2,119	4,6%
6	18	2,379	2,484	4,4%
7	21	2,677	2,792	4,3%
8	24	2,919	3,041	4,2%
9	27	3,101	3,226	4,1%
10	30	3,231	3,357	3,9%

(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 33 – Variação nos deslocamentos do pilar 2



(fonte: elaborado pelo autor)

Os pilares 3 e 7 correspondem às barras cujos nós de extremidade receberam os maiores carregamentos ao longo dos pavimentos. Comparando os deslocamentos obtidos (ver tabela

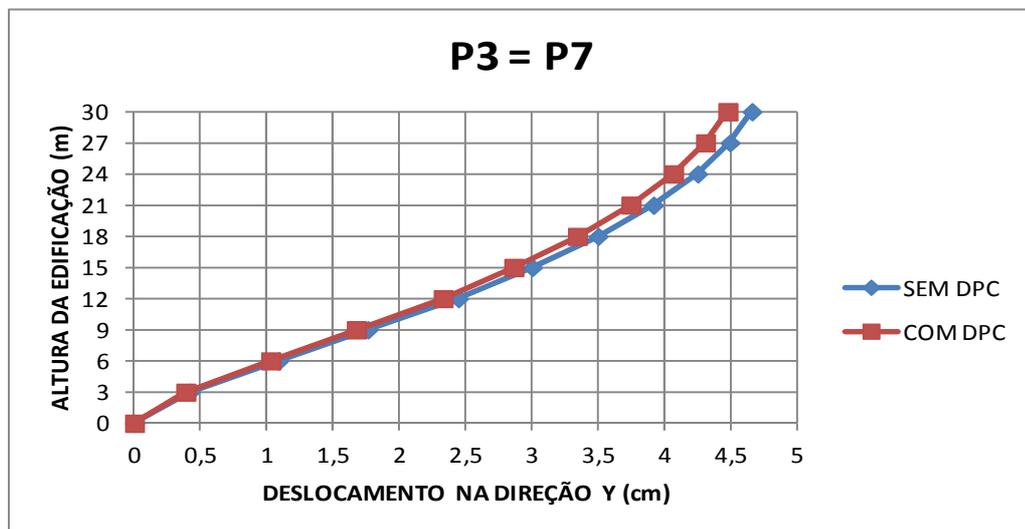
15 e figura 34) nota-se que, em relação aos demais pilares, nestes foram observados as maiores amplitudes nos deslocamentos.

Tabela 15 – Deslocamentos nodais ocorridos nos pilares 3 e 7: direção Y

DESLOCAMENTOS -P3 = P7				
PAVIMENTO	ALTURA [m]	DY (cm)		$\Delta\%$
		sem DPC	com DPC	
TÉRREO	0	0,000	0,000	
1	3	0,386	0,418	8,1%
2	6	1,027	1,086	5,7%
3	9	1,673	1,761	5,2%
4	12	2,328	2,443	4,9%
5	15	2,861	3,001	4,9%
6	18	3,340	3,499	4,7%
7	21	3,745	3,915	4,6%
8	24	4,067	4,249	4,5%
9	27	4,307	4,492	4,3%
10	30	4,476	4,658	4,1%

(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 34 – Variação nos deslocamentos dos pilares 3 e 7



(fonte: elaborado pelo autor)

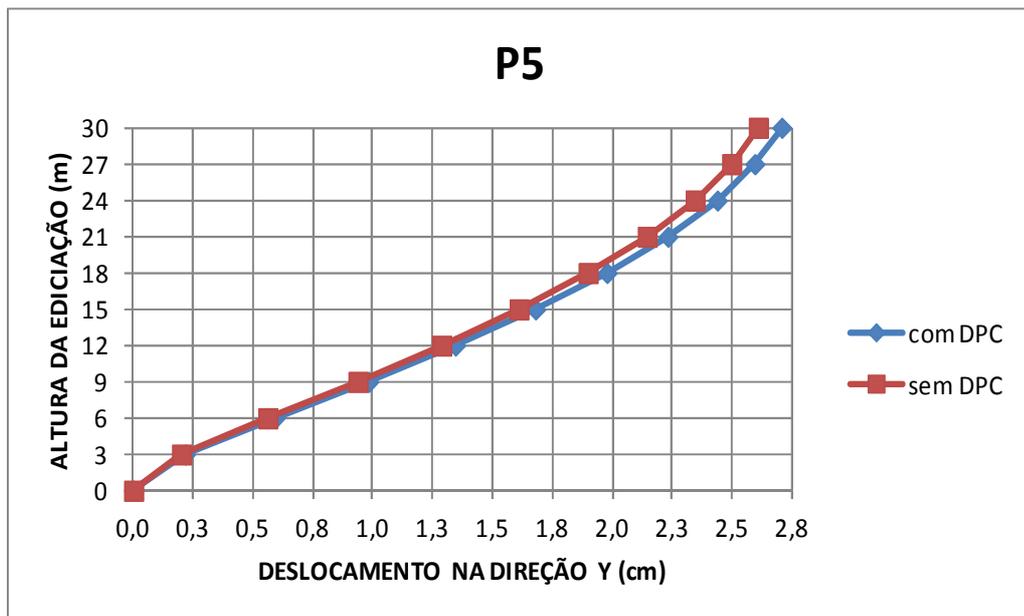
Os pilares 5 e 6, apresentaram comportamentos semelhantes nas curvas de deslocamentos, conforme pode ser verificado nas figuras 35 e 36. Deve-se lembrar, que a rigidez destes pilares é maior, se comparada aos demais, nesta direção. Próximo a cobertura, as curvas tendem a formar uma assíntota vertical, visto que o carregamento no último pavimento é reduzido.

Tabela 16 – Deslocamentos nodais ocorridos no pilar 5: direção Y

DESLOCAMENTOS -P5				
PAVIMENTO	ALTURA	DY (cm)	DY (cm)	$\Delta\%$
	[m]	sem DPC	com DPC	
TÉRREO	0	0,000	0,000	
1	3	0,201	0,217	8,2%
2	6	0,561	0,591	5,4%
3	9	0,937	0,981	4,7%
4	12	1,287	1,344	4,4%
5	15	1,609	1,678	4,3%
6	18	1,898	1,977	4,2%
7	21	2,144	2,231	4,1%
8	24	2,344	2,437	4,0%
9	27	2,497	2,594	3,9%
10	30	2,608	2,706	3,8%

(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 35 – Variação nos deslocamentos do pilar 5



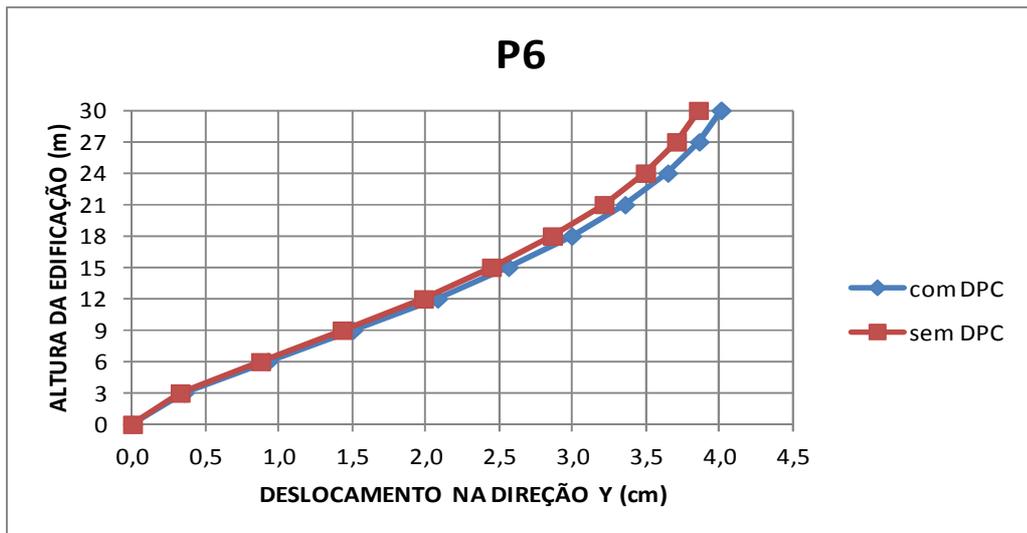
(fonte: elaborado pelo autor)

Tabela 17 – Deslocamentos nodais ocorridos no pilar 6: direção Y

DESLOCAMENTOS -P6				
PAVIMENTO	ALTURA [m]	DY (cm)		$\Delta\%$
		sem DPC	com DPC	
TÉRREO	0	0,000	0,000	
1	3	0,324	0,350	8,1%
2	6	0,872	0,921	5,7%
3	9	1,428	1,501	5,1%
4	12	1,981	2,077	4,8%
5	15	2,444	2,560	4,8%
6	18	2,860	2,991	4,6%
7	21	3,211	3,354	4,5%
8	24	3,493	3,645	4,3%
9	27	3,704	3,859	4,2%
10	30	3,853	4,008	4,0%

(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 36 – Variação nos deslocamentos do pilar 6



(fonte: elaborado pelo autor)

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo objetiva a realização da análise final dos efeitos apresentados nas estruturas devidos à consideração da deformação por esforço cortante. Da mesma forma, são apresentadas algumas limitações enfrentadas durante a realização do processo de implementação computacional, bem como sugestões para realização de trabalhos futuros, que venham a abordar a deformação por cisalhamento nas seções transversais.

Nos elementos, nos quais as relações entre o comprimento e a altura se tornam reduzidos, a contribuição do esforço cortante na formação da flecha composta chegou a ser de 43 %, como pode ser verificado no exemplo 1. A não consideração deste efeito nestes elementos inviabilizaria a utilização dos mesmos em termos de estados limites de serviço, bem como acarretaria possivelmente na fissuração do elemento estrutural. Em situações mais críticas o rompimento parcial ou até mesmo total da capacidade de suporte poderia ser caracterizado.

Para o exemplo 2, ao considerar a deformação por esforço cortante nas barras da estrutura, verificou-se uma contribuição média de 5% do mesmo nos deslocamentos e 3,5% nas rotações nodais. Conforme pressuposto anteriormente, os pilares que participaram do sistema de contraventamento da estrutura apresentaram acréscimos nos deslocamentos e rotações, devidos às cargas horizontais de vento e a torção da edificação, oriunda da excentricidade na atuação da força de arrasto. Contudo, os deslocamentos nodais totais apresentados na estrutura, não estariam de acordo com os estados limites de serviço relacionados à segurança e conforto nas edificações, visto que os pórticos analisados demonstraram-se bastante flexíveis.

A forma da deformada da estrutura (gráficos de deslocamentos) apresentou um padrão de comportamento para todos os pilares. Nestes verificou-se uma taxa de variação elevada nos primeiros dois pavimentos, mantendo-se assim até o sexto pavimento. A partir deste, ocorreu uma redução na variação dos deslocamentos da estrutura, aproximando-se de uma reta no décimo e último pavimento.

Pode-se comparar a deformada apresentada pelos pilares analisados com a deformada resultante de um sistema de contraventamento formado por núcleos rígidos e pórticos planos, atuando concomitantemente na edificação. A presença isolada de um núcleo rígido, como

elemento de contraventamento, é representada pelo modelo de uma barra engastada – livre. Desse modo, a forma da deformada tende a se aproximar da apresentada na parte inicial (até aproximadamente o sexto pavimento) das curvas de deslocamentos obtidas. Já a atuação de pórticos planos tende a apresentar uma deformada com características similares a parte final da curva de deslocamentos (sexto pavimento em diante). Desse modo, conclui-se que os pilares 5 e 6, por apresentarem uma maior rigidez na direção Y, simularam o comportamento de núcleos rígidos na edificação.

Com base na importância do esforço cortante na formação da flecha composta, conforme pôde ser verificado nas aplicações dos exemplos 1 e 2, aliada a simplicidade do processo de implementação computacional para consideração destes efeitos, entende-se que o mesmo deveria ser considerado na análise de estruturas usuais de concreto armado. Recentemente, o *software* TQS, na sua versão 17.0, incorporou a verificação da deformação por cisalhamento. Outros *softwares*, como o Midas Gen, por exemplo, também já possuem incorporadas as deformações por corte, porém sua consideração deve ser solicitada pelo usuário durante o processo de análise estrutural. Com base nisso, este trabalho reforçou a necessidade dos usuários de programas de análise de estruturas possuírem o conhecimento de cada etapa de cálculo realizada pelo mesmo, bem como as simplificações e limitações inerentes ao processo de verificações estrutural.

Como sugestão para a realização de trabalhos futuros fica a tradução da linguagem computacional dos *softwares* **PORT-IN** e **PORT-OUT** para uma linguagem mais avançada, com o intuito de possibilitar a análise de estruturas com um número mais elevados de nós. Isso se deve ao fato do *Basic* limitar o processamento dos dados em função da semi-largura de banda da matriz de rigidez global. A criação de uma interface gráfica para a realização da entrada das coordenadas e conectividades favoreceria o desenvolvimento de uma série maior de análise de dados.

## REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**: cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980.
- \_\_\_\_\_. **NBR 6123**: forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro, 1988.
- \_\_\_\_\_. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2003.
- BEER, F. P.; JOHNSTON JUNIOR, E. R. **Resistência dos Materiais**. Traduzido por Paulo Prestes Castilho. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.
- CASADO, C. F.; CASADO, J. L. F. **Cálculo de Estructuras Reticulares**: nudos rígidos. 4. ed. Madrid: Dossat, 1946.
- CORRÊA, M. R. S. **Aperfeiçoamento de Modelos usualmente empregados no Projeto de Sistemas Estruturais de Edifícios**. 1991. 331 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.  
Disponível em:  
<[http://web.set.eesc.usp.br/static/data/producao/1991DO\\_MarcioRobertoSilvaCorrea.pdf](http://web.set.eesc.usp.br/static/data/producao/1991DO_MarcioRobertoSilvaCorrea.pdf)>.  
Acesso em: 15 set. 2013.
- GERE, J. M.; WEAVER JUNIOR, W. **Analysis of Framed Structures**. New York: Litton Educational, c1965.
- \_\_\_\_\_. **Análise de Estruturas Reticuladas**. Traduzido por Carlos M. P. Ferreira Pinto. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.
- IYER, H. **The Effects of Shear Deformation in Rectangular and Wide Flange Sections**. 2005. 121 f. Thesis (Master of Science in Civil Engineering) – Virginia Polytechnic Institute, Virginia State University, Virginia, 2005. Disponível em:  
[http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-03062005-132504/unrestricted/MS\\_Thesis.pdf](http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-03062005-132504/unrestricted/MS_Thesis.pdf)  
Acesso em: 13 mar. 2014.
- LEONHARDT, F. **Construções de Concreto**: verificação da capacidade de utilização – limitação da fissuração, deformações, redistribuição de momentos e teoria das linhas de ruptura em estruturas de concreto armado. Traduzido por João Luís Escosteguy Merino. 1. ed. (1.reimpr.) Rio de Janeiro: Interciência, 1979 (reimpr. 1981). v. 4.
- LIVESLEY, R. K. **Matrix Methods of Structural Analysis**. London: Pergamon Press, c1964.
- MARTIN, H. C. **Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis**. New York: McGraw-Hill, c1966.
- NASH, W. A. **Resistência dos Materiais**. Traduzido por Giorgio Eugenio Oscare Giacaglia. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.

OLIVEIRA, J. A. V. de A. **Análise Estática e Dinâmica de Estruturas Reticuladas Planas em Micro-Computador**. 1987. 179 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Estrutural) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 1987. Paginação irregular. Disponível em: <<http://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/12186>>. Acesso em: 10 set. 2013.

PAULA, C. F. de. **Contribuição ao Estudo das Respostas Numéricas Não-Lineares Estática e Dinâmica de Estruturas Reticuladas Planas**. 2001. 157 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001. Disponível em: <[web.set.eesc.usp.br/static/data/producao/2001DO\\_CristinaFerreiradePaula.pdf](http://web.set.eesc.usp.br/static/data/producao/2001DO_CristinaFerreiradePaula.pdf)>. Acesso em: 20 out. 2013.

PFEIL, W.; PFEIL, M. **Estruturas de Aço**: dimensionamento prático de acordo com a NBR 8800: 2008. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009 (reimpressão 2011).

QUEIROZ, P. C. de O. **Análise Estática e Dinâmica de Estruturas Reticuladas**: ambiente de simulação em Java. 2010. 235 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2010. Disponível em: <[http://bdt.d.biblioteca.ufpb.br/tde\\_busca/arquivo.php?codArquivo=1440](http://bdt.d.biblioteca.ufpb.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=1440)>. Acesso em: 11 out. 2013.

RICARDO, O. G. de S. **Teoria das Estruturas**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1978.

SANTOS, M. I. G. dos. **Tópicos Especiais em Análise Matricial de Estruturas**. Porto Alegre: UFRGS, 1981. Caderno Técnico CT – 27/81.

SORIANO, H. L.; LIMA, S. de S. **Análise de Estruturas**: método das forças e método dos deslocamentos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2004. v. 1.

SORIANO, H. L. **Análise de Estruturas**: formulação matricial e implementação computacional. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2005.

\_\_\_\_\_. **Estática das Estruturas**. 2.ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2010.

TIMOSHENKO, S. P. **Resistência dos Materiais**. Traduzido por José Rodrigues de Carvalho. 1. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1966 (reimpressão 1976). v. 1.

TIMOSHENKO, S. P.; YOUNG, D. H. **Elementos de Resistência de Materiais**. Traduzido por Luis Ibáñez Morlán. Barcelona, ESP: Montayner y Simon, c1966.

VANDERBILT, M. D. **Matrix Structural Analysis**. New York: Quantum, c1974.

VENANCIO FILHO, F. **Análise Matricial de Estruturas**: estática, estabilidade, dinâmica. Rio de Janeiro: Almeida Neves, 1975.

## **APÊNDICE A – Macro diagrama do *software* PORT-IN**



## **APÊNDICE B – Macro diagrama do *software* PORT-OUT**

