

## ATUALIZAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS PARA OTIMIZAÇÃO EM TEMPO REAL

Giovani Tonel<sup>1</sup>, Argimiro Resende Secchi<sup>1</sup>, Jorge Otávio Trierweiler<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Grupo de Integração, Modelagem, Simulação, Controle e Otimização de Processos (GIMSCOP)  
Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)  
R. Eng. Luis Englert, s/n. Campus Central. CEP: 90040-040 - Porto Alegre - RS - BRASIL,  
E-MAIL: {giotonel, arge, jorge}@enq.ufrgs.br

**Palavras Chaves:** Estimador de Horizonte Móvel, Filtro de Kalman, Otimização Dinâmica.

**Resumo:** Devido aos constantes avanços computacionais, bem como o desenvolvimento de eficientes métodos para a solução de problemas de otimização não-lineares, torna-se interessante a realização da otimização dinâmica em tempo real e o consequente uso de estimadores on-line em processos químicos não lineares. A estimação de parâmetros e de estados de modelos integra muitas estratégias de modelagem, monitoramento e controle. Neste sentido a atualização automática de modelos de planta torna-se atrativa, permitindo a realização de estimativas em tempo real de variáveis imensuráveis ou infreqüentemente mensuráveis, variáveis de estado e parâmetros de processo desconhecidos ou variantes no tempo. Usualmente, a atualização do modelo da planta é feita baseada em variáveis secundárias que são medidas on-line, como temperatura, pressão, composição e vazão. Nos estimadores tradicionais baseados em filtros de Kalman, como sua versão estendida, EKF, e a com restrições, CEKF, os esforços computacionais são relativamente pequenos, variando desde o cálculo de um ganho, como no caso do EKF, até a resolução de um problema de otimização quadrático como no caso do CEKF. Esses pequenos esforços computacionais permitem obter resultados rápidos com relativa acuracidade. Porém estes estimadores podem falhar quando o sistema possui não-linearidade acentuada. Já a formulação em horizonte móvel, MHE, consegue tratar uma vasta variedade de sistemas não-lineares, porém tem a necessidade da solução de um problema NLP, possivelmente não-convexo, com muitas equações de desigualdade e graus de liberdade. Neste trabalho técnicas de solução bem conhecidas são exploradas, visando aumentar a velocidade de solução dos estágios de integração e otimização dinâmica, permitindo uma compreensiva avaliação entre a formulação MHE e os estimadores baseados em filtros de Kalman. Aqui os estimadores foram aplicados ao modelo clássico de 4 tanques cilíndricos. Como primeiro resultado concluiu-se que a estratégia simultânea é justificada dentro da formulação MHE uma vez que isto permitiu diminuir o tempo computacional sensivelmente frente à estratégia seqüencial.

### 1 INTRODUÇÃO

A estimação de estados é freqüentemente parte das estratégias de controle avançado e otimização de processos químicos. Nos últimos anos diversas técnicas diferentes foram desenvolvidas para tratar de sistemas não-lineares. O desenvolvimento de eficientes softwares de

otimização e os avanços no poder computacional na última década permitiu um acréscimo de pesquisa na área estimadores de estados para sistemas não-lineares baseados em otimização. Motivado pelas técnicas de controle baseadas em otimização como Controle Preditivo (MPC), que usam um horizonte de predição fixo para calcular a próxima ação de controle, inúmeros métodos de estimação de

## VI-OKTOBER FÓRUM – PPGEQ

22, 23 E 24 DE OUTUBRO DE 2007

estados com horizonte móvel (MHE) têm sido propostos na literatura. Estes métodos superam parcialmente os problemas associados com o crescimento do problema de otimização que ocorre da estimação batelada a cada nova medição, fazendo sua aplicação impraticável para processos em tempo real. Muske e Rawlings (1995) reformularam o problema como um Estimador de Horizonte Móvel recursivo para sistemas lineares e não-lineares. Por tratar com problemas não-lineares, como aqueles que possuem inversão de ganho de acordo com o ponto de operação, a formulação MHE é reportada na literatura como vantajosa frente ao EKF e CEKF, tidos como os tradicionais estimadores baseados em filtros de Kalman. Porém na formulação MHE tem se necessidade de se resolver um problema NLP, possivelmente não-convexo, com muitas equações de desigualdade e graus de liberdade, e como consequência, o tempo de processamento se torna maior que o tempo de amostragem, fazendo impraticável a execução de ações de controle sobre o sistema em tempo real. Assim, é necessário implementar técnicas eficientes para resolver os problemas de otimização dinâmica e de integração associados à formulação MHE. Neste trabalho técnicas de solução bem conhecidas são exploradas, como as estratégias seqüencial e simultânea, visando aumentar a velocidade de solução dos estágios de integração e otimização dinâmica, permitindo uma avaliação de desempenho entre a formulação MHE e os estimadores baseados em filtros de Kalman. Para comparação dos resultados os estimadores foram aplicados ao modelo clássico de 4 tanques cilíndricos.

### 1.1 Filtro de Kalman Estendido - EKF

O EKF é sem dúvida o mais popular estimador e tem sido usado na comparação com outros estimadores baseados em horizonte de predição. Devido a estas razões, no trabalho de Robertson *et al.* (1996) a propagação da estimação inicial e a matriz de pesos para o estimador de horizonte móvel são baseadas no algoritmo EKF. O EKF pode ser dividido em duas etapas. A primeira é a observação/correção (dado  $\hat{x}_{k|k-1}$ , sua covariância do erro ( $\hat{P}_{k|k-1}$ ) e a medição atual  $y_k$ , encontrar  $\hat{x}_{k|k}$  e  $\hat{P}_{k|k}$ ), e a segunda é a predição (dado  $\hat{x}_{k|k}$  e  $\hat{P}_{k|k}$ , encontrar  $\hat{x}_{k+1|k}$  e  $\hat{P}_{k+1|k}$  e assim por diante os passos são repetidos.

O EKF considerado aqui é descrito no seguinte sistema de tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + \xi_k \\ y_k &= g(x_k) + \varphi_k \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $x_k, u_k, y_k, \xi_k$  e  $\varphi_k$  são respectivamente, o vetor  $ns$ -dimensional de variáveis de estado, o vetor  $num$ -dimensional de variáveis de controle e/ou manipuladas, o vetor  $nms$ -dimensional de variáveis medidas e os vetores de distúrbio de modelo e de medição.

Se a equação do modelo é não-linear, a existência da aproximação via série de Taylor é ainda possível se  $\xi_k$  for pequeno, pois faz se uma expansão em torno de  $x_k$  da expressão  $\xi_k = x_{k+1} - f(x_k, u_k)$ . O mesmo vale se  $\varphi_k$  for pequeno em  $\varphi_k = y_k - g(x_k)$ . Assim, aplicando o filtro de Kalman variante no tempo para a série de Taylor de primeira ordem produz o seguinte algoritmo para o EKF:

Observação/Correção:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + L_k (y_k - g(\hat{x}_{k|k-1})) \\ L_k &= \hat{P}_{k|k-1} G_k^T (G_k \hat{P}_{k|k-1} G_k^T + R)^{-1} \\ \hat{P}_{k|k} &= (I - L_k G_k) \hat{P}_{k|k-1} \\ G_k &= \left. \frac{\partial g(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_{k|k}} \\ \hat{x}_{0|0} &= x_0 \\ \hat{P}_{0|0} &= P_0 \end{aligned} \quad (2)$$

Predição:

$$\hat{x}_{k+1|k} = f(\hat{x}_{k|k}, u_k) + \xi_k \quad (3)$$

$$\hat{P}_{k+1|k} = F_k \hat{P}_{k|k} F_k^T + Q \quad (4)$$

onde,  $F_k$  é a matriz Jacobiana de  $f(\hat{x}_{k|k}, u_k)$ .

Nesta formulação o novo estado do sistema é predito um passo à frente usando as equações do sistema não-linear. Com esta predição a estimação do novo estado é calculado usando o ganho do filtro de Kalman,  $L_k$ , calculado e com a aproximação linear de  $g$ . Esta formulação é usada como um mecanismo de atualização para o algoritmo MHE não-linear Robertson *et al.* (1996) que foi implementado neste trabalho.

### 1.2 Estimador de Horizonte Móvel com atualização via EKF

O estimador de Horizonte Móvel (MHE) foi introduzido por Muske e Rawlings (1995) e Robertson *et al.* (1996). As vantagens do MHE comparado aos estimadores clássicos (como o

EKF) são: a possibilidade de incorporar restrições físicas dos estados, tais como frações mássicas que variam sempre entre 0 e 1; e do fato de que acima do horizonte de predição considerado não são perdidas informações do sistema não linear Gesthuisen *et al.* (2001). A desvantagem vem da necessidade de se resolver um problema de otimização dinâmica não-linear.

A modelagem matemática do sistema dinâmico frequentemente resulta em um conjunto de equações diferenciais não lineares:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) + \xi(t) \\ x(0) &= x_0 + \xi_0 \\ y(t) &= g(x) + \varphi(t)\end{aligned}\quad (5)$$

Em sistemas com amostragem estas equações contínuas tem de ser transformadas para a forma de tempo discreto. Para sistemas não lineares isto é usualmente feito pela integração do sistema no tempo de amostragem  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ :

$$x_{k+1} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(x(t), u(t)) + \xi(t)) dt \quad (6)$$

$$\equiv F(x_k, u_k) + \xi_k$$

$$x(0) = x_0 + \xi_0 \quad (7)$$

$$y_k = g(x_k) + \varphi_k \quad (8)$$

O índice  $k$  indica o tempo atual de amostragem  $t = t_k$ .

Para o sistema discreto (6)-(8) o estimador MHE resultante, com as restrições apropriadas, tem a seguinte estrutura:

Observação/Atualização:

$$\begin{aligned}& \min_{\xi_{k-N+1|k}, \dots, \xi_{k-1|k}, \hat{\varphi}_{k-N|k}, \dots, \hat{\varphi}_{k|k}} \left( \Psi_k^N \right) \\ &= \xi_{k-N+1|k}^T P_{k-N+1|k}^{-1} \xi_{k-N+1|k} \\ &+ \sum_{j=k-N}^{k-1} \xi_{j|k}^T Q^{-1} \xi_{j|k} \\ &+ \sum_{j=k-N}^k \hat{\varphi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\varphi}_{j|k}\end{aligned}\quad (9)$$

sujeito a,

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k-N|k} &= \hat{x}_{k-N|k-1} + \hat{\xi}_{k-N+1|k} \\ \hat{x}_{j+1|k} &= F(\hat{x}_{j|k}) + \hat{\xi}_{j|k} \quad j = k-N, \dots, k-1 \\ y_j &= g(\hat{x}_{j|k}) + \hat{\varphi}_{j|k} \quad j = k-N, \dots, k\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{min} &\leq \hat{x}_{j|k} \leq \hat{x}_{max} \\ \hat{\xi}_{min} &\leq \hat{\xi}_{j-1|k} \leq \hat{\xi}_{max} \\ \hat{\varphi}_{min} &\leq \hat{\varphi}_{j|k} \leq \hat{\varphi}_{max} \\ &j = k-N, \dots, k\end{aligned}$$

Como resultado da otimização  $\hat{\xi}_{k-N+1|k}^*$ ,  $\hat{\xi}_{k-N|k}^*$ ,  $\dots$ ,  $\hat{\xi}_{k-1|k}^*$  tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k-N|k} &= \hat{x}_{k-N|k-1} + \hat{\xi}_{k-N+1|k}^* \\ \hat{x}_{j+1|k} &= \hat{x}_{j|k} + \hat{\xi}_{j|k}^* \\ &j = k-N, \dots, k\end{aligned}\quad (11)$$

Atualização da matriz  $P$ :

$$\begin{aligned}L_k &= \hat{P}_{k|k-1} G_k^T (G_k \hat{P}_{k|k-1} G_k^T + R)^{-1} \\ \hat{P}_{k|k} &= (I - L_k G_k) \hat{P}_{k|k-1} \\ G_k &= \left. \frac{\partial g(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_{k|k}}\end{aligned}\quad (12)$$

$$\hat{x}_{0|0} = x_0$$

$$\hat{P}_{0|0} = P_0$$

Predição:

$$\hat{x}_{k+1|k} = f(\hat{x}_{k|k}, u_k) + \xi_k \quad (13)$$

$$\hat{P}_{k+1|k} = F_k \hat{P}_{k|k} F_k^T + Q \quad (14)$$

Seguindo a notação de Muske e Rawlings (1995),  $N$  representa o tamanho do horizonte. As últimas  $N + 1$  medições são consideradas.  $\hat{x}_{j|k}$  é a estimativa do estado  $x$  no tempo  $t = t_j$  baseado nas medições até o tempo  $t = t_k$ . Para resolver o problema de programação dinâmica não-linear, envolvido na formulação MHE, existem duas estratégias básicas, a seqüencial e a simultânea.

Na estratégia seqüencial as restrições de igualdade são resolvidas a cada passo da otimização, com a integração numérica do sistema de equações diferenciais. Devido ao grande esforço numérico, o cálculo do MHE seqüencial demanda um elevado tempo computacional. Outra desvantagem é a impossibilidade de controlar as restrições nos estados durante a integração do sistema pelos integradores tradicionais (tais como Runge-Kutta). Se a integração diverge, o algoritmo de otimização não convergirá também.

Na estratégia simultânea as restrições de igualdade são transformadas em restrições de igualdade algébricas via técnicas de discretização. Uma das técnicas de discretização muito usada para a aproximação de equações diferenciais não lineares é o método dos resíduos ponderados, J. E. Cuthrell (1987), onde comumente se usa colocação ortogonal. Nesta técnica as variáveis de estado são aproximadas por polinômios. Com o conjunto de restrições de igualdade algébricas, o problema pode ser resolvido usando os tradicionais algoritmos de SQP. Desta forma, é possível também controlar as restrições para os estados em cada passo de otimização.

### 1.3 Filtro de Kalman Estendido com restrição – CEKF

O CEKF é um tipo alternativo de estimador de estado baseado em otimização, ele é originário da formulação do MHE. A formulação do CEKF descrita a seguir é basicamente a resolução do MHE com horizonte de predição igual a 0 ( $N = 0$ ). Isto é similar ao Filtro de Kalman Estendido convencional, que também possui horizonte de predição igual a 0 na etapa de correção. Porém, o que diferencia o estimador CEKF do EKF é o fato das restrições do sistema aparecerem diretamente no problema de otimização na etapa de correção do filtro.

Modelo:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= f(\hat{x}_k, u_k) + \hat{\xi}_k \\ x_0 &= x_0 + \xi_{0|0} \\ y_k &= g(\hat{x}_k) + \hat{\phi}_k\end{aligned}\quad (15)$$

Correção:

$$\min_{\hat{\xi}_{k-1|k}, \hat{\phi}_{k|k}} \Psi_k = \hat{\xi}_{k-1|k}^T \hat{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\xi}_{k-1|k} + \hat{\phi}_{k|k}^T R^{-1} \hat{\phi}_{k|k}\quad (16)$$

sujeito a,

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k} &= f(\hat{x}_{k-1|k-1}, \hat{u}_{k|k}) + \hat{\xi}_{k-1|k} \\ y_k &= g(\hat{x}_{k|k}) + \hat{\phi}_{k|k} \\ \hat{x}_{min} &\leq \hat{x}_{j|k} \leq \hat{x}_{max} \\ \hat{\xi}_{min} &\leq \hat{\xi}_{j-1|k} \leq \hat{\xi}_{max} \\ \hat{\phi}_{min} &\leq \hat{\phi}_{j|k} \leq \hat{\phi}_{max}\end{aligned}\quad (17)$$

Como resultado da otimização ( $\hat{\xi}_{k-1|k}^*$ ) tem-se:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \hat{\xi}_{k-1|k}^* \quad (18)$$

A atualização da matriz de covariância  $P$  é feita via a solução da equação de Ricatti:

$$\begin{aligned}\hat{P}_{k|k} &= Q + F_k \hat{P}_{k|k-1} F_k^T \\ &- F_k \hat{P}_{k|k-1} G_k^T [G_k \hat{P}_{k|k-1} G_k^T \\ &+ R]^{-1} G_k \hat{P}_{k|k-1} F_k^T \\ G_k &= \left. \frac{\partial g(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_{k|k}} \\ F_k &= \left. \frac{\partial f(x_k, u_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_{k|k}}\end{aligned}\quad (19)$$

Predição:

$$\hat{x}_{k+1|k} = f(\hat{x}_{k|k}, u_k) + \hat{\xi}_{k|k} \quad (20)$$

Com  $\hat{x}_{k|k-1}$  calculado a partir de  $\hat{x}_{k-1|k-1}$  via Equação (6). Se a equação de medição é linear, a solução do problema pode ser obtida via programação quadrática (QP), que é resolvida com um leve esforço computacional usando os tradicionais algoritmos de QP. A interpretação das matrizes  $P, Q$  e  $R$  é idêntica a do EKF e MHE, sendo novamente os parâmetros básicos de ajuste do filtro.

Segundo Marcon *et al.* (2002) outra vantagem da formulação CEKF frente ao EKF é que na etapa de predição são integradas apenas as equações que descrevem o comportamento dinâmico do processo. No EKF, além do modelo dinâmico, são integradas simultaneamente as equações diferenciais relacionadas à matriz de covariância  $P$ , e segundo Marcon *et al.* (2002) isto aumenta muito o tamanho do sistema a ser integrado e pode vir a ser problemático para sistemas com elevado número de estados.

## 2 MATERIAIS E MÉTODOS

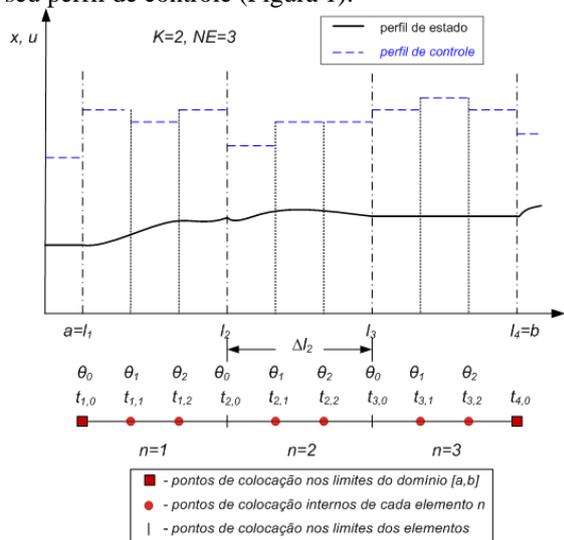
### 2.1 Discretização e aproximação via colocação ortogonal em elementos finitos

Considerando o problema de valor inicial (PVI) sob um elemento finito  $i$  com tempo  $t \in [l_n, l_{n+1}]$ ,

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t), t, p), \quad t \in [t_0, t_f]$$

Com o objetivo de resolver o problema NLP anterior, tem-se a necessidade de transformar as equações diferenciais em equações algébricas

usando colocação ortogonal. O tempo  $t \in [t_0, t_f]$  é dividido em  $NE$  elementos finitos e normalizados em cada um, onde estes admitem descontinuidade em seu perfil de controle (Figura 1).



**Figura 1:** Perfis de estado e controle com pontos de descontinuidade e não-diferenciação, discretizados em elementos finitos.

Então a relação entre o tempo e o tempo normalizado ( $\theta \in [0,1]$ ) é:

$$\theta_i = \frac{t_{n,i} - l_n}{l_{n+1} - l_n} \quad (21)$$

$n = 1, \dots, NE, \quad i = 1, \dots, K$

onde  $l_n$  e  $l_{n+1}$  são os elementos limites incluídos como graus de liberdade adicionais,  $\theta_i$  são os pontos de colocação que correspondem as raízes do polinômio ortogonal de Legendre (que pertence a classe dos polinômios de Jacobi) e  $K$  é o número de pontos de colocação. Rice e Do (1995) mostram que a escolha dos pontos de colocação é crítica e concluem que polinômios de Jacobi são particularmente atrativos. Embora haja uma equivalência entre as formulações MHE e MPC Findeisen (1997), na formulação MHE não é necessário a discretização em elementos finitos do perfil de controle. Neste trabalho foi considerado o tamanho dos elementos fixos e igual ao tempo de amostragem  $T_S$  ( $T_S = l_{n+1} - l_n$ ) e o número de elementos igual ao tamanho do horizonte móvel ( $NE = N$ ).

O polinômio de Lagrange para a aproximação do perfil da variável de estado é:

$$x_{n,K+1}(\theta) = \sum_{i=0}^K x_{n,i} \phi_i(\theta), \quad n = 1, \dots, NE \quad (22)$$

onde,

$$\phi_i(\theta) = \prod_{k=0, k \neq i}^K \frac{\theta - \theta_k}{\theta_i - \theta_k}, \quad i = 0, \dots, K \quad (23)$$

Assim o perfil de estado é aproximado por um polinômio de ordem  $K + 1$  (em cada elemento  $n$ ), permitindo a representação das não diferenciações no perfil da variável de estado, conforme a Figura 1.

A função  $\phi_i$  é dependente somente da localização dos pontos de colocação. Com a aproximação polinomial o sistema de equações pode ser escrito através de um conjunto de equações residuais, em cada ponto de colocação  $i$  (raízes do polinômio de Lagrange):

$$R(t_{n,i}) = \frac{dx_{n,K+1}(\theta_i)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} - F(x_{n,i}, u_{n,i}, t_{n,i}) = 0 \quad (24)$$

$n = 1, \dots, NE, \quad i = 1, \dots, K$

Rice e Do (1995) propuseram uma notação vetorial para as derivadas do polinômio de Lagrange nos pontos de colocação:

$$\frac{dx_{n,K+1}(\theta)}{dz} = \underline{A} \cdot \underline{x}_n, \quad (25)$$

$$\underline{x}_n = [x_n(\theta_0), x_n(\theta_1), \dots, x_n(\theta_K)]^T$$

$n = 1, \dots, NE$

Em (25),  $\underline{A}$  é uma matriz de dimensão  $K + 1$  que é calculada a partir de  $\theta_i$ , e  $\underline{x}_n$  o vetor dos estados. De (21) vem:

$$\frac{d\theta_i}{dt_{n,i}} = \frac{1}{(l_{n+1} - l_n)} = \frac{1}{T_S} \quad (26)$$

Substituindo (25) e (26) em (24) obtemos um conjunto de equações algébricas residuais:

$$R(t_{n,i}) = \underline{A} \cdot \underline{x}_n \frac{1}{(l_{n+1} - l_n)} - F(x_{n,i}, u_{n,i}, t_{n,i}) = 0 \quad (27)$$

$n = 1, \dots, NE, \quad i = 1, \dots, K$

Outras restrições devem ser adicionadas para garantir a continuidade do perfil do estado nos limites do elemento. Conseqüentemente, os

## VI-OKTOBER FÓRUM – PPGEQ

22, 23 E 24 DE OUTUBRO DE 2007

polinômios são extrapolados para gerar um ponto inicial para o próximo elemento. Com a aproximação via colocação ortogonal, tem-se o seguinte problema NLP, Riascos e Pinto (2004):

$$\min_{x_{n,i}, u_{n,i}, t_{n,i}} \Phi(x_{n,i}, u_{n,i}, t_{n,i}) \quad (28)$$

sujeito a;

$$\begin{aligned} R(t_{n,i}) &= \underline{A} \cdot \underline{x}_n \frac{1}{(l_{n+1} - l_n)} - F(x_{n,i}, u_{n,i}, t_{n,i}) = 0 \\ h(x_{n,i}, u_{n,i}) &= 0 \\ g(x_{n,i}, u_{n,i}) &\leq 0 \\ x_{1,0} &= X_0 \\ x_{n,0} &= x_{n-1,K+1} = \sum_{i=0}^K x_{n-1,i} \phi_i(\theta = 1), \quad n = 2, \dots, NE \\ X^L &\leq x_{n,i} \leq X^U, \quad i = 0, \dots, K + 1 \end{aligned}$$

Então para a formulação MHE em que as variáveis otimizadas são  $\hat{\xi}_{k-N-1|k}, \dots, \hat{\xi}_{k-1|k}$  e  $\hat{\varphi}_{k-N|k}, \dots, \hat{\varphi}_{j|k}$ , o problema de otimização é descrito por:

$$\min_{\hat{\xi}_{j-1|k}, \hat{\varphi}_{j|k}, x_{j,i|k}} \Psi_k^N = f(\hat{\xi}_{j-1|k}, \hat{\varphi}_{j|k}, t_{j,i}) \quad (29)$$

sujeito as equações de igualdade :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k-N,0|k} &= \hat{x}_{k-N,0|k-1} + \hat{\xi}_{k-N-1|k} \\ \hat{x}_{j+1,0|k} &= f(\hat{x}_{j,0|k}) + \hat{\xi}_{j|k} \quad j = k - N, \dots, k - 1 \\ y_j &= g(\hat{x}_{j,0|k}) + \hat{\varphi}_{j|k} \quad j = k - N, \dots, k \\ \underline{A} \cdot \underline{x}_n &= F(\hat{x}_{n,i|k}, u_{n,i}, t_{n,i}) T_S \\ \hat{x}_{1,0|k} &= X_0 \\ \hat{x}_{NE+1,0|k} &= X_f \\ n &= 1, \dots, NE \\ i &= 0, \dots, K \end{aligned}$$

e limites nas variáveis :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{min} &\leq \hat{x}_{j,i|k} \leq \hat{x}_{max} \\ \hat{\xi}_{min} &\leq \hat{\xi}_{j-1|k} \leq \hat{\xi}_{max} \\ \hat{\varphi}_{min} &\leq \hat{\varphi}_{j|k} \leq \hat{\varphi}_{max} \\ j &= k - N, \dots, k \\ i &= 0, \dots, K \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \underline{x}_n &= [\hat{x}_{n,0|k}(\theta_0), \hat{x}_{n,1|k}(\theta_1), \dots, \hat{x}_{n,K|k}(\theta_K)]^T \\ \hat{x}_{n,0|k} &= \sum_{i=0}^K \hat{x}_{n-1,i} \phi_i(\theta = 1), \\ n &= 2, \dots, NE + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{2,0|k} &= \hat{x}_{k-N+1|k} \\ \hat{x}_{3,0|k} &= \hat{x}_{k-N+2|k} \\ &\dots \\ \hat{x}_{NE+1,0|k} &= \hat{x}_{k|k} \\ j &= k - N, \dots, k \\ n &= 1, \dots, NE \\ i &= 0, \dots, K \end{aligned}$$

### 2.2 Estudo de caso: modelo clássico de 4 tanques cilíndricos

O primeiro caso de estudo utilizado para o teste dos estimadores foi o de uma planta laboratorial composta por quatro tanques. Este processo foi desenvolvido por Johansson (2000) possuindo diversas características interessantes para estudos na área de controle multivariável de processos. A representação esquemática desse sistema é apresentada na Figura 2.

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dz_1}{dt} &= z_1 F_1 + R_3 \sqrt{z_3} - R_1 \sqrt{z_1} \\ A_2 \frac{dz_2}{dt} &= z_2 F_2 + R_4 \sqrt{z_4} - R_2 \sqrt{z_2} \\ A_3 \frac{dz_3}{dt} &= (1 - X_2) F_2 - R_3 \sqrt{z_3} \\ A_4 \frac{dz_4}{dt} &= (1 - X_1) F_1 - R_4 \sqrt{z_4} \end{aligned} \quad (30)$$

onde,

$A_i$ : área da seção transversal de cada um dos tanques

$z_i$ : nível de cada um dos tanques

$R_i$ : constante relacionada à resistência ao escoamento do fluido

$F_1$ : vazão através da válvula  $V_1$

$F_2$ : vazão através da válvula  $V_2$

$X_1$ : parcela do escoamento que irá diretamente para o tanque 1 ( $0 \leq X_1 \leq 1$ )

$X_2$ : parcela do escoamento que irá diretamente para o tanque 2 ( $0 \leq X_2 \leq 1$ )

O fluido utilizado no processo é água. O fluxo de líquido total de cada bomba é dado pela soma  $F_1 + F_2$ . O fluxo para o tanque 1 é dado por  $X_1 F_1$  e para o tanque 4 é  $(1 - X_1) F_1$ , para os tanques 2 e 3 o cálculo é idêntico. As variáveis manipuladas nesse sistema são as vazões  $F_1$  e  $F_2$  dadas pelas aberturas das válvulas  $V_1$  e  $V_2$  e  $X_1$  e  $X_2$  são dadas pela abertura das válvulas  $v_1$  e  $v_2$ . Conforme a posição das válvulas  $v_1$  e  $v_2$ , o processo apresenta condições distintas de operação. À medida que suas aberturas são alteradas ( $X_1$  e  $X_2$ ), o modelo linearizado apresenta um zero de transmissão que se move ao longo do eixo real, assumindo valores positivos e negativos. As

distintas condições de operação podem ser classificadas conforme os valores da soma  $X_1$  e  $X_2$ :

$X_1 + X_2 < 1$  o sistema apresenta características de sistema de fase mínima;

$X_1 + X_2 > 1$  o sistema apresenta características de fase não-mínima (resposta inversa);

$X_1 + X_2 = 1$  o sistema apresenta ganho multivariável nulo, ou seja,  $\det(G(0)) = 0$ .

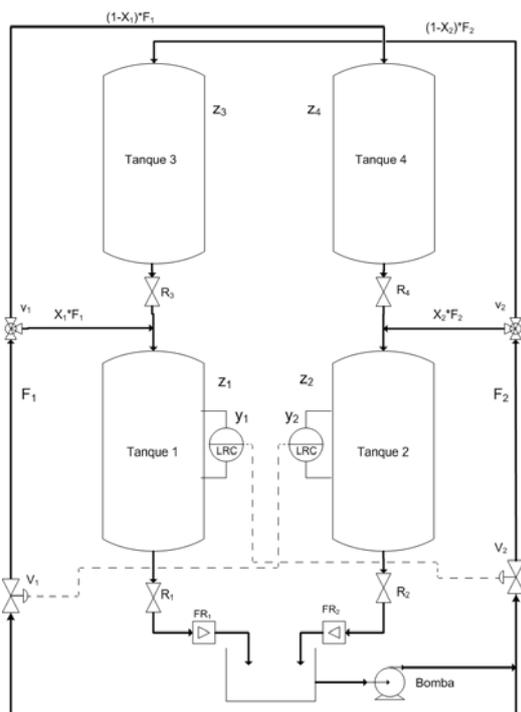


Figura 2 – Representação esquemática do modelo de 4 tanques cilíndricos.

Os valores dos parâmetros da planta laboratorial utilizadas na modelagem estão na Tabela 1.

Tabela 1 – Valores dos parâmetros para o modelo dinâmico com 4 tanques cilíndricos.

Parâmetros	Valor	Unidade
$A_1, A_3$	28.0	$cm^2$
$A_2, A_4$	32.0	$cm^2$
$R_1, R_3$	3.1	$cm^{5/2}s^{-1}$
$R_2, R_4$	2.5	$cm^{5/2}s^{-1}$

### 2.3 Implementação dos Estimadores

A implementação dos algoritmos foi feita utilizando o modelo dinâmico da planta de 4

tanques, Equação (30). O objetivo é estimar os níveis dos tanques 3 e 4, já que os níveis dos tanques 1 e 2 são medidos diretamente no processo ( $y_1$  e  $y_2$ ). Para esses testes, os dados medidos são gerados a partir da simulação do modelo com a adição de um ruído gaussiano ou ruído branco. Na simulação parte-se de um ponto de operação no qual o sistema apresenta características de fase mínima e, devido a mudança na abertura das válvulas, passa para o ponto de fase não-mínima, Johansson (2000). A Tabela 2 apresenta os valores iniciais para as variáveis e as alterações realizadas na abertura das válvulas  $v_1$  e  $v_2$  ( $X_1$  e  $X_2$ ).

Tabela 2 – Condições iniciais para as variáveis de estado e controladas e degrau nas variáveis manipuladas.

Parâmetros	Valor Inicial (t= 0s)	Degrau (t= 300s)
$z_{10}, z_{20}$	12.4, 12.7 [cm]	
$z_{30}, z_{40}$	1.8, 1.4 [cm]	
$F_1, F_2$	8.0, 8.2 [ $cm^3s^{-1}$ ]	8.0, 8.2 [ $cm^3s^{-1}$ ]
$X_1, X_2$	0.7, 0.3	0.3, 0.3

Tabela 3 – Valores dos parâmetros dos estimadores/filtros.

Parâmetros	Valor
$P_{0 0}$	$diag(10^3)$ [ $cm^2$ ]
$Q$	$diag(1)$ [ $cm^2$ ]
$R$	$diag(4)$ [ $cm^2$ ]
Tempo de amostragem ( $T_s$ )	10 [s]
Amplitude do ruído ( $NA$ )	2 [cm]
Distúrbio inicial ( $\xi_{0 0}$ )	5 [cm]

Os três estimadores foram implementados em Matlab® (versão 5.3) com interface gráfica no Simulink®. O método de colocação ortogonal foi também inteiramente implementado em Matlab®. Outras ferramentas do Matlab® usadas foram o otimizador dinâmico *fmincon* e o integrador *ode45* (Runge-Kutta). As simulações foram rodadas em um PC Pentium IV® 3.0 GHz com 1.0 GB de memória RAM.

## 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O primeiro resultado apresentado neste trabalho é a verificação da qualidade da solução da integração dinâmica, obtida da estratégia simultânea via colocação ortogonal em elementos finitos, frente à estratégia seqüencial, ambas utilizadas na solução da integração dinâmica na

formulação MHE. A Figura 3 mostra os resultados da simulação com  $K = 2$  pontos de colocação. Percebe-se que a trajetória obtida para  $z_1$  e  $z_2$  são idênticas para ambas as estratégias. Com respeito ao tempo de simulação, conforme a Tabela 4, na simulação com horizonte  $N = 1$ , percebe-se que via colocação ortogonal o tempo é três vezes menor que o encontrado via *Runge-Kutta*. Isto é vantajoso para o estimador MHE uma vez que isto vem a diminuir o alto tempo computacional envolvido no mesmo, tornando possível o seu uso em processos on-line. Porém percebeu-se que para horizontes maiores que 2, o tempo computacional via colocação ortogonal se aproxima do tempo via *Runge-Kutta* e também do tempo on-line do processo, tornando o estimador MHE inviável como um estimador on-line em tempo real.

Os resultados comparativos entre o estimador MHE e os filtros de Kalman EKF e CEKF, aplicado ao modelo de 4 tanques cilíndricos com características levemente não-lineares, mostram que o estimador MHE apresentou resultados idênticos ao CEKF (Figura 3), tanto para

$N = 1$  e  $N = 2$ . O EKF foi o que apresentou uma pequena diferença nos valores estimados, mas que é ainda considerado um bom resultado. Embora na simulação executou-se uma mudança no ponto de operação da planta (degrau em 300s), que é caracterizado por uma inversão de ganho do modelo da planta, o modelo 4 tanques por ser levemente não-linear permitiu que tanto o EKF como o CEKF obtivessem bons resultados equiparados com o estimador MHE.

De fato esse resultado era esperado, as restrições não estão ativas no problema de otimização, o resultado do estimador EKF é similar aos estimadores CEKF e MHE.

As simulações com os três estimadores foram feitas usando o modelo idêntico ao da planta com condições iniciais diferentes ao do real. Nota-se assim na Figura 3 que os estimadores agem de forma a eliminar este distúrbio inicial  $\xi_{0|0}$ , trazendo a estimação rapidamente para próximo do valor real, caracterizando o seu papel de estimador.

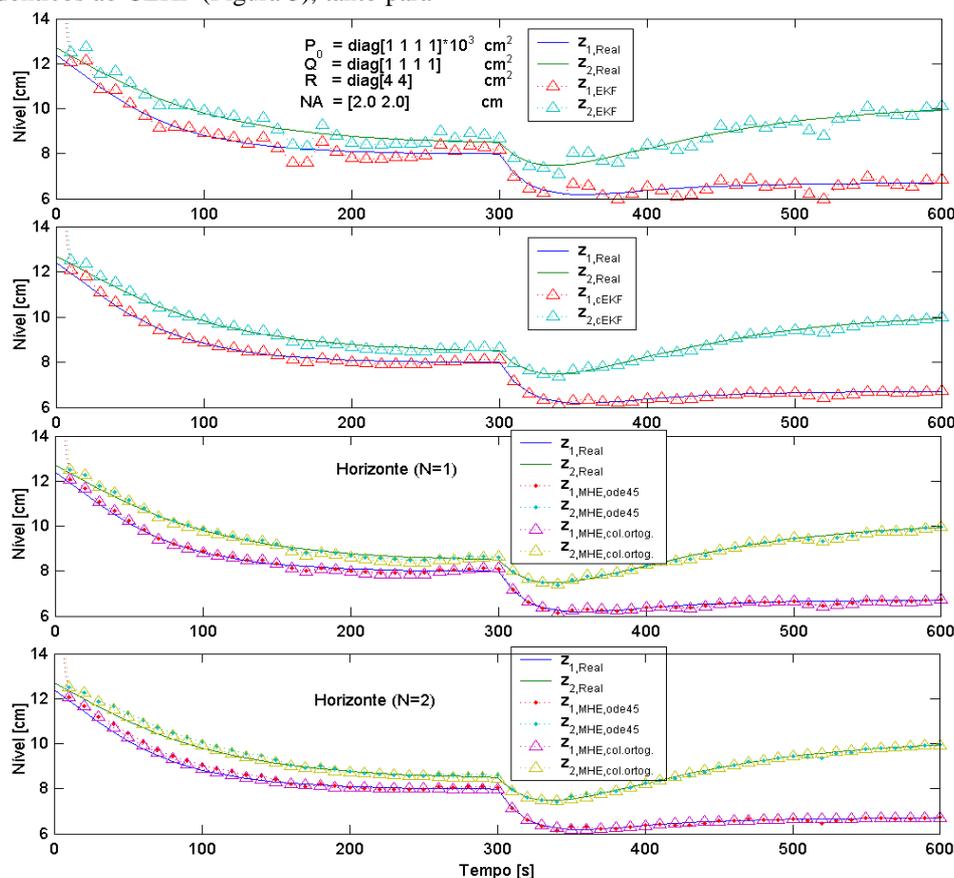


Figura 3 – Simulação para EKF, CEKF e MHE.

## VI-OKTOBER FÓRUM – PPGEQ

22, 23 E 24 DE OUTUBRO DE 2007

**Tabela 4** – Comparação do tempo de simulação para os três estimadores.

EKF	CEKF	MHE*		
		N	Seqüencial (ode45)	Simultâneo (Col. Ort.)
3.8 s	4.0 s	1	130.0 s	40.0 s
		2	400.0 s	250.0 s

\*parâmetros do otimizador *fmincon*:  $TolX = 10^{-4}$  e  $TolCon = 10^{-4}$ .

### 4 CONCLUSÕES

A partir dos resultados obtidos até agora, pode-se concluir que a estratégia simultânea é justificada dentro da formulação MHE uma vez que esta permite aumentar a velocidade de solução dos estágios de integração e otimização dinâmica, quando comparada com a estratégia seqüencial. Isto permite que o estimador MHE possa ser usado em processo on-line para a atualização automática de modelos de planta. Porém como objetivo principal tem se ainda a necessidade de justificar a sua implementação para sistemas bastante não-lineares, uma vez que os demais filtros falham na estimação de estados nestes casos. Para tanto, como futuras etapas deste trabalho pretende-se aplicar a formulação MHE proposta para o modelo de 6 tanques esféricos, que tem uma maior não linearidade associada. A partir disso será submetida semelhante validação do estimador MHE, como a que foi feita para o caso dos 4 tanques cilíndricos, equiparando-o com os tradicionais filtros de Kalman.

### 5 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES como órgão de fomento desta pesquisa.

### 6 REFERÊNCIAS

Findeisen, P. K. Moving Horizon State Estimation of Discrete Time Systems. (Thesis M.S. -- University of Wisconsin--Madison 1997.). 1997. xix, 157 leaves p.

Gesthuisen, R., K. U. Klatt, *et al.* Optimization-based State Estimation: a Comparative study for the batch Polycondensation of Polyethyleneterephthalate. European Control Conference, 2001. p.

J. E. Cuthrell, L. T. B. On the optimization of differential-algebraic process systems. AIChE Journal, v.33, n.8, p.1257-1270. 1987.

Johansson, K. H. The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. Control Systems Technology, IEEE Transactions on, v.8, n.3, p.456-465. 2000.

Marcon, S. M., J. O. Trierweiler, *et al.* EKF e CEKF: Comparação entre Duas Formulações do Filtro de Kalman Estendido. CBA. Brazil, 2002. p.

Muske, K. R. e J. B. Rawlings. Nonlinear Moving Horizon State Estimation. In: R. Berber (Ed.). Methods of Model Based Process Control. Antalya: Kluwer Academic, v.293, 1995. Nonlinear Moving Horizon State Estimation, p.349-365. (Applied Sciences)

Riascos, C. A. M. e J. M. Pinto. Optimal control of bioreactors: a simultaneous approach for complex systems. Chemical Engineering Journal, v.99, n.1, p.23-34. 2004.

Rice, R. G. e D. D. Do. Applied Mathematics and Modeling for Chemical Engineers: John Wiley & Sons. 1995. 730 p.

Robertson, D. G., J. H. Lee, *et al.* A Moving Horizon-Based Approach for Least-Squares Estimation. AIChE Journal, v.42, n.8, August, p.2209-2224. 1996.