UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

MARCELIO ADRIANO DIOGO

PROBLEMAS GERADORES NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Porto Alegre

2007

MARCELIO ADRIANO DIOGO

PROBLEMAS GERADORES NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana

Porto Alegre

2007

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana

Prof. Dr. Rogério Ricardo Steffenon

Profa. Dra. Vera Clotilde Garcia

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

AGRADECIMENTOS

Agradeço o auxílio fundamental, o tempo dedicado e as palavras de apoio, cobrança e incentivo de meu orientador, Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana, que acreditou que a proposta desse trabalho era viável.

Agradeço aos professores do Mestrado que complementaram minha preparação com seus exemplos, seus princípios, suas crenças e suas atitudes as quais mostravam-nos quão valorosos eram seus ensinamentos.

Agradeço aos colegas do Mestrado pela prazerosa convivência ao longo desses 2 anos.

Agradeço especialmente aos colegas Pedro, Gláucia e Newton pelos momentos inesquecíveis, as piadas, os estudos, os almoços, a amizade.

Agradeço à minha esposa Deisi pelo incentivo incessante de que tudo isso era possível.

Agüente firme. Se você acha que está no caminho certo, não pare. Agüente firme.

Dominique Glocheux

RESUMO

Este trabalho pretende verificar se o uso de problemas geradores é um procedimento eficiente para justificar o estudo de um conteúdo novo em Matemática. Pretende-se com isso apresentar ao estudante uma visão antecipada de quais os benefícios desse estudo, deixando respondida previamente a pergunta “Para que serve isso?”, a qual é proferida em muitas situações de ensino.

Para auxiliar na verificação desse objetivo, foram aplicadas uma série de atividades introdutórias em alguns tópicos de Matemática. Nelas, os alunos se deparam com problemas que crescem em nível de dificuldade até que os pré-requisitos de que dispõem tornam-se insuficientes para a resolução, ou pelo menos, que as estratégias precisem ser mais bem elaboradas, tendo justificada nesse momento o estudo daquele conteúdo em Matemática.

Para tanto, foi utilizado como metodologia de pesquisa o Estudo de Caso e o referencial teórico foi baseado na resolução de problemas e nos conceitos de situações didáticas e adidáticas, de Brousseau, e aprendizagem significativa, de Ausubel.

O desempenho dos alunos durante as atividades, a visualização por parte deles de que o novo estudo é justificado e a produção que se origina a partir desse estudo apontam que o procedimento é eficiente na abordagem de um conteúdo novo em Matemática.

Palavras chave:
problemas geradores – resolução de problemas – aprendizagem significativa

ABSTRACT

This work intends to verify whether the use of generating problems is an efficient procedure to justify the study of a new Mathematical content. Therefore, in advance, a view of which benefits the study of a specific content is shown to the student, previously answering the question, which is asked in many teaching situations: “What is it for?”.

To help the verification of this objective, many activities were done as a starting point of some Mathematical topics. Doing them, the students face problems whose level of difficulty increases until the prerequisites they have become insufficient to solve them, or at least, the strategies need to be more elaborated, justifying, at this point, the study of that specific Mathematical content.

For this work, the research methodology was Case Study and the theoretical reference was based on problem solving and Brousseau’s concepts of didactic and not didactic situations, and on Ausubel’s meaningful learning concept.

The students’ performance during the activities, their perception of a real reason for the study of a new content and the result of that new study prove that the procedure is efficient regarding the approach of a new Mathematical content.

Key-words:
generating problems – problem solving – meaningful learning

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O que faz com que o estudante venha a se interessar em aprender um conhecimento novo? Uma das hipóteses é o fato de que esse conhecimento seja relevante na resolução de algum problema prático que instigue a investigação.

Há muitos modos de abordar um tópico de matemática ou introduzir um conteúdo em sala de aula. É relevante pensar, entretanto, quais as maneiras mais eficazes para que os estudantes tenham o crescimento e a preparação esperados. Muitos autores depositam confiança de que a abordagem através da resolução de problemas permite um desenvolvimento em que o aprendiz assume uma postura menos passiva no estudo. Através de problemas que estimulem o surgimento de estratégias e o confronto de idéias aliados à possibilidade do estudante perceber a matemática como uma ferramenta importante para resolver situações desconhecidas, damos um novo significado ao seu aprendizado na educação básica.

Embora cumpram uma finalidade específica, simples exercícios, conforme é detalhado no decorrer do trabalho, não desenvolvem aspectos importantes do aprendizado, pois permitem, muitas vezes, uma mecanização de procedimentos que não é saudável ao processo de ensino-aprendizagem. Problemas contextualizados costumam provocar análises mais extensas e produtivas, gerando o que Brousseau (1996) chama de situação adidática, ou seja, uma situação que vai além dos objetivos traçados inicialmente pelo professor, proveniente da ação dos próprios estudantes, e que deve ser explorada, uma vez que produz abordagens que vão ao encontro das expectativas dos alunos.

Entendemos que uma aprendizagem que privilegie a ação do estudante, ficando o professor na condição de orientador e sistematizador das atividades, e não de possuidor das respostas, produza benefícios que se acumulam ao longo dos anos, reforçando aspectos importantes relacionados à autonomia do aprendiz.

Atividades com essas características serão ditas potencialmente significativas, pois permitirão ao professor a verificação de como uma informação nova se relaciona com um aspecto relevante da estrutura cognitiva do aluno. Entendemos que essa relação prévia é que permitirá os avanços pretendidos no decorrer das atividades.

A hipótese que norteia esse trabalho é a de que o estudante se interessa, compreende, assimila, torna-se agente ativo e ser modificador do aprendizado tradicional quando ele pode visualizar como útil o conhecimento que está sendo desenvolvido ou oferecido. Defendemos a opção de apresentar cada tópico de matemática a partir de um problema gerador, uma motivação inicial que instigue o aprendiz a obter o conhecimento novo, percebendo nele mais que apenas estruturas lógicas abstratas. Listamos as finalidades do uso dos problemas geradores: investigar se o uso de problemas é eficiente para proporcionar uma aprendizagem por descoberta, verificar se o aluno tem justificado para si mesmo o estudo de um tópico novo em matemática quando se depara com situações-problema em que seus conhecimentos não são suficientes para resolvê-las e procurar evidências de uma aprendizagem significativa. Além disso, esse trabalho também tem como objetivo oferecer uma alternativa baseada nesses pressupostos para a abordagem de Análise Combinatória e Probabilidade em sala de aula.

Dessa forma, o trabalho parte de uma prática desenvolvida predominantemente na 2ª série do Ensino Médio em que os conteúdos curriculares são precedidos de uma lista de problemas geradores – atividades que introduzem o tópico a ser desenvolvido e motivam o estudante a perceber que sua base de conhecimentos é insuficiente para resolver a situação apresentada ou, pelo menos, que exigirá o uso de novas estratégias para a resolução. Pretendemos justificar previamente o estudo de um conteúdo novo a partir da necessidade de novas estruturas matemáticas pelos educandos.

O primeiro capítulo tem a função de apresentar ao leitor a trajetória profissional do autor, sua visão prévia e a caracterização do local onde ocorre a situação didática, ou seja, as características da escola, do público e as condições de trabalho.

Os próximos três capítulos são dedicados a estabelecer referenciais teóricos que dêem suporte ao trabalho. Assim, no capítulo 2 é abordada a estratégia de resolução de problemas com considerações sobre o que caracteriza um problema e o que o distingue de um simples exercício. No capítulo 3 são apresentados os conceitos de situações didáticas e adidáticas e as fases que as compõem, como ação, formulação, validação e institucionalização. No capítulo 4 é feita uma abordagem a respeito de material potencialmente significativo, justificando o uso dos problemas geradores no decorrer do trabalho.

O capítulo 5 traz outras pesquisas realizadas na área de resolução de problemas. Foram utilizadas seis dissertações de mestrado e uma tese de doutorado para situar o leitor a respeito dos trabalhos desenvolvidos na área. Nelas, procuramos apresentar os objetivos e as considerações mais importantes dos autores a respeito da investigação realizada.

O capítulo 6 enfoca os objetivos e a metodologia empregados para a proposta ser implementada em sala de aula. São oferecidos alguns dados a respeito do desempenho dos alunos brasileiros frente a provas que objetivam medir o grau de desenvolvimento cognitivo do estudante na área de matemática. Por fim, são apresentados características e objetivos de cada seqüência de atividades utilizadas no decorrer do trabalho.

O último capítulo trata justamente de pormenorizar os problemas que compõem cada seqüência de atividades, assim como apresentar as expectativas do professor frente a eles e a análise dos resultados atingidos. Nessa etapa, apresentam-se alguns produtos gerados pela investigação inicial e pelo desenvolvimento da teoria em sala de aula.

Finalmente, como apêndice, é apresentada uma proposta de abordagem dos conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade a ser aplicada em turmas regulares de Ensino Médio.

1 CAMPO DE ATUAÇÃO

Iniciei minha carreira profissional ainda durante a graduação, precisamente em agosto de 1997, através de um dispositivo utilizado pelo Governo do Estado do Rio Grande do Sul para suprir a carência de professores que atingia e atinge as escolas da rede estadual, o Contrato de Emergência. Cabe dizer que o início da atividade docente correspondeu plenamente às minhas expectativas, pois via na atuação a possibilidade de modificação de uma realidade que enfrentei como estudante na educação básica – a mera reprodução de cálculos fora de contexto ou significado.

No ano de conclusão da faculdade de Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos, 2000, ingressei no Colégio Sinodal, escola bem conceituada no estado, como professor das 1ª e 2ª séries do Ensino Médio. Durante esse ano atuei nas rede pública e privada e ao final dele, devido ao aumento considerável da carga horária, deixei a rede pública, ficando somente com a particular.

Independente do tipo de escola, pública ou privada, sempre pautei meu trabalho por um sistema de crenças que era amparado por teorias de suporte, em que cabe ao professor proporcionar ao aprendiz o desenvolvimento amplo de suas habilidades pela ação mediadora nos conteúdos a serem vistos.

Dessa forma, a utilização da resolução de problemas nas propostas de ensino-aprendizagem apenas sofreu aperfeiçoamento, de modo que acredito que a sua utilização na introdução de conteúdos a serem desenvolvidos traz mais benefícios do que como exemplos de aplicação em um determinado assunto.

Para situar o leitor e possibilitar análise do melhor modo de implementar a proposta apresentada, as experiências que foram realizadas fazem parte de um ato contínuo nos últimos anos de atuação. O local de aplicação é o Colégio Sinodal, escola de rede privada, comunitária, de confissão luterana, fundada em 1936, situada em São Leopoldo, RS. A escola conta atualmente com cerca de 850 alunos e atua desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. Em 2005, alcançou a melhor média das escolas particulares do RS no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), tendo obtido o 5º lugar no ano seguinte. O público alvo da pesquisa são alunos da 2ª e 3ª série do Ensino Médio, média de 30 alunos por sala, e com carga horária de 4 períodos semanais de Matemática, com duração de 50 minutos.

Todas as atividades descritas foram realizadas em 2006, mas constituem-se em práticas rotineiras na minha atuação, isto é, foram utilizadas como modo de trabalho nos anos anteriores a essa pesquisa e serão igualmente utilizadas nos anos seguintes.

Com essa apresentação inicial quero estimular os leitores a se permitirem implantar algumas das idéias com a finalidade de produzir seus próprios resultados nos seus segmentos de atuação.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

As crenças que se perpetuam a respeito da resolução de problemas em matemática acabam inibindo tanto professores como alunos em desenvolver essa importante habilidade nas aulas. A revista Nova Escola apresenta uma matéria que encoraja o uso de problemas como estratégia de aprendizagem, argumentando que boa parte do fracasso escolar se deve à falta de capacidade de interpretar corretamente os enunciados, habilidade que pode ser desenvolvida com a abordagem da resolução de problemas (FALZETTA, 2003).

Guy Brousseau, professor, pesquisador e escritor, diretor do *Laboratoire Aquitain de Didactique des Sciences et des Technologies* da Universidade de Bordeaux, França, já desenvolveu trabalhos em que diz textualmente que:

> Saber matemática não é apenas aprender definições e teoremas, a fim de reconhecer as ocasiões em que eles podem ser utilizados e aplicados; sabemos perfeitamente que fazer matemática implica resolver problemas. Não se faz matemática simplesmente resolvendo problemas, mas por vezes esquece-se que resolver problemas é parte do trabalho; encontrar boas questões é tão importante como encontrar soluções para elas. (1996, p. 38).

Surge, então, a indagação: o que é um problema do ponto de vista da educação? Lester (apud Pozo, 1998, p. 15) o identifica como “uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para o qual não dispõe de um caminho rápido e direto que leve à solução”. Segundo Vila:

> Reservaremos, pois, o termo *problema* para designar uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova. (2006, p. 29).

Pode-se perceber que essa definição traz junto a informação de que aquilo que se constitui em problema para um determinado grupo de indivíduos pode ser apenas exercício para outros. De qualquer forma, é imprescindível para o professor a clareza dessa definição, pois é a partir dela que se pode diferenciar exercícios de situações-problema. Embora desejáveis para desenvolver habilidades, a utilização apenas de exercícios de fixação após a teoria ser apresentada pode levar os alunos a não estabelecer relações importantes, mecanizando todo o processo. Conforme Pozo:

> A realização de tarefas em contexto muito definidos e fechados – por exemplo, como ilustração ou aplicação dos conceitos explicados num ponto determinado – faz com que os alunos realizem mecanicamente as atividades, sem problematizar a questão. (1998, p. 160).

Para tornar mais clara a diferenciação entre problemas e exercícios, a figura 1 reúne algumas características de ambos:

1. Ao ler um exercício, vê-se imediatamente em que consiste a questão e qual é o meio de resolvê-la.
1. Diante de um problema não se sabe, à primeira vista, como atacá-lo e resolvê-lo; às vezes, nem sequer se vê com clareza em que consiste o problema.

2. O objetivo que o professor persegue quando propõe um exercício é que o aluno aplique de forma mecânica conhecimentos de algoritmos já adquiridos e fáceis de identificar.
2. O objetivo que o professor persegue ao propor um problema é que o aluno busque, investigue, utilize a intuição, aprofunde o conjunto de conhecimentos e experiências anteriores e elabore uma estratégia de resolução.

3. Em geral, a resolução de um exercício exige pouco tempo e este pode ser previsto de antemão.
3. Em geral, a resolução de um problema exige um tempo que é impossível de prever de antemão.

4. A resolução de um exercício não costuma envolver os afetos.
4. A resolução de um problema supõe um forte investimento de energia e afeto. Ao longo da resolução, é normal experimentar sentimentos de ansiedade, de confiança, de frustração, de entusiasmo, de alegria, etc.

5. Em geral, os exercícios são questões fechadas.
5. Os problemas estão abertos a possíveis variantes e generalizações e a novos problemas.

6. Os exercícios são abundantes nos livros didáticos.
6. Os problemas costumam ser escassos nos livros didáticos.

Figura 1[1]: Quadro de diferenças entre exercícios e problemas

Vila vai além, tecendo comentários a respeito do ambiente de aprendizagem:

> O ambiente de aprendizagem exige uma determinada formação dos professores, assim como certas atitudes e crenças. Ele é criado selecionando-se problemas que sejam acessíveis aos alunos, que não acarretem frustração, que pelo menos admitam um tratamento parcial mais simples, mas que ao mesmo tempo suponham um desafio; valorizando-se a exposição de idéias, a argumentação e o espírito crítico; fomentando-se o

---

[1] Fonte: VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

> trabalho em grupo, a comunicação de idéias, o contraste e o diálogo; envolvendo os estudantes em processos geradores de conhecimento, como definir, fazer-se perguntas e perguntar, observar, classificar, particularizar, conjecturar, demonstrar e aplicar. (2006, p. 29-30).

Conforme Vila (2006), o ensino-aprendizagem através da resolução de problemas visa tirar o foco das aulas do professor e colocá-lo no aluno, em seus processos mentais, instigando a intuição, testando hipóteses, analisando soluções.

Desde que foi lançado, em 1999, a versão para o Ensino Médio dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sustenta o uso de problemas para o desenvolvimento do saber matemático:

> Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre a resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (1999, p. 254).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio também apontam o uso de problemas na introdução e desenvolvimento de vários tópicos:

> No trabalho com *Números e operações* deve-se proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do quotidiano [...]. Também é preciso proporcionar aos alunos uma diversidade de problemas geradores da necessidade de ampliação dos campos numéricos e suas operações, dos números naturais para contar aos números reais para medir. [...] O estudo da função quadrática pode ser motivado via problemas de aplicação, em que é preciso encontrar um certo ponto de máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima). [...] Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola. [...] O estudo da *Geometria* deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano [...]. (2006, p. 70-5).

Polya (1945) estabelece uma seqüência de passos necessários para resolver um problema. Segundo ele, a solução exige compreensão da tarefa, concepção de um plano, execução desse plano e uma análise que leve a determinar se alcançaremos ou não a meta. É importante o auxílio do professor durante a resolução de problemas, mas sem tirar a autonomia do aprendiz. Conforme esclarece Polya, nem se deve auxiliar o aprendiz demais, impedindo que obtenha algum progresso por conta própria, nem de menos, pois é possível que não experimente progresso algum.

A introdução de algum assunto novo via problema tem o objetivo de fazer com que o aluno se desacomode, busque seus conhecimentos prévios relacionados de algum modo com a situação proposta. Segundo Vila (2006), é importante que os alunos saibam, saibam fazer e façam, mas não podemos esquecer que é conveniente que reflitam sobre o que sabem, o que sabem fazer e o que fazem.

O professor deve ter claro consigo que a habilidade de resolver problemas não é inata, muito pelo contrário, pode e deve ser desenvolvida. Os alunos precisam ser estimulados e amparados durante a resolução de uma situação a fim de que possam estabelecer os vínculos necessários entre o que já sabem e o que se pretende desenvolver. A resposta final não é o mais importante nesse tipo de atividade; as estratégias adotadas, a compreensão, a análise da solução encontrada ou dos caminhos utilizados constituem elementos mais importantes e que permitem o desenvolvimento de novas habilidades. Segundo Vila (2006, p. 98), “os alunos costumam valorizar mais o produto que o processo, porque os professores também o fazem”, razão pela qual salienta-se a necessidade de mudança de postura do professor.

Vila relata ainda que:

> Os sistemas de crenças dos professores sobre a idéia de problema e o papel destes na educação matemática leva-os a tomar decisões, em alguns casos de modo inconsistente, sobre a tipologia de problemas que propõem. (2006, p. 75).

Segundo o autor, um estudo realizado na Catalunha com quatro professores mostrou grande discrepância em relação ao que cada um considera como problema em Matemática. Importante que o mesmo estudo apontou o reflexo direto nos estudantes dessas concepções. Vila ainda cita que as crenças dos alunos em torno da resolução de problemas não são modeladas apenas na escola, tendo a família ou outros espaços de socialização grande importância. Sugere como forma de auxiliar os alunos a desenvolver crenças adequadas a respeito da resolução de problemas:

> – Começar logo a propor problemas.
> – Assegurar-se de que os problemas propostos sejam verdadeiros.

> – Apresentar-se aos alunos como resolvedores de problemas que não conhecem todas as respostas.
> – Centrar-se nos processos de resolução, não só nos resultados.
> – Incentivar-se seguidamente os alunos a trabalharem em pequenos grupos, animando-os a discutir e a buscar soluções alternativas.
> – Ajudar os alunos a reconhecerem tanto seus próprios bloqueios quando se deparam com problemas difíceis e a superá-los como a satisfação e o prazer que experimentam quando encontram a solução.
> – Valorizar os processos, as explicações e as estratégias dos alunos, além de suas respostas, e animá-los a dar conta de seu trabalho.
> – Não enfatizar o cálculo. (2006, p. 77).

Pozo (1998) identifica alguns critérios que permitem transformar as tarefas escolares em problemas ao invés de exercícios. A figura 2 mostra alguns desses critérios:

Na proposição do problema

1. Propor tarefas abertas que admitam vários caminhos possíveis de resolução e, inclusive, várias soluções possíveis, evitando as tarefas fechadas.
2. Modificar o formato ou a definição dos problemas, evitando que o aluno identifique uma forma de apresentação com um tipo de problema.
3. Diversificar os conteúdos nos quais se propõe a aplicação de uma mesma estratégia, fazendo com que o aluno trabalhe os mesmos tipos de problemas em diferentes momentos do currículo, diante de conteúdos conceituais diferentes.
4. Propor as tarefas não só com um formato acadêmico mas também dentro de cenários cotidianos e significativos para o aluno, procurando fazer com que o aluno estabeleça conexões entre ambos os tipos de situações.
5. Adequar a definição do problema, as perguntas e a informação proporcionada aos objetivos da tarefa, usando, em diferentes momentos, formatos mais ou menos abertos, em função desses mesmos objetivos.
6. Usar os problemas com fins diversos durante o desenvolvimento ou seqüência didática de um tema, evitando que as tarefas práticas apareçam como ilustração, demonstração ou exemplificação de alguns conteúdos previamente apresentados aos alunos.

Durante a solução do problema

7. Habituar o aluno a adotar as suas próprias decisões sobre o processo de resolução, assim como a refletir sobre esse processo, dando-lhe uma autonomia crescente nesse processo de tomada de decisões.
8. Fomentar a cooperação entre os alunos na realização das tarefas, mas também incentivar a discussão e os pontos de vista diversos, que obriguem a explorar o espaço do problema para comparar as soluções ou caminhos de resolução alternativos.
9. Proporcionar aos alunos a informação que precisarem durante o processo de resolução, realizando um trabalho de apoio, dirigido mais a fazer perguntas ou fomentar nos alunos o hábito de perguntar-se do que a dar resposta às perguntas dos alunos.

Na avaliação do problema

10. Avaliar mais os processos de resolução seguidos pelo aluno do que a correção final da resposta obtida. Ou seja, avaliar mais do que corrigir.

Continuação:

11. Valorizar especialmente o grau em que esse processo de resolução envolve um planejamento prévio, uma reflexão durante a realização da tarefa e uma auto-avaliação pelo aluno do processo seguido.
12. Valorizar a reflexão e a profundidade das soluções alcançadas pelos alunos e não a rapidez com que são obtidas.

Figura 2[2]: Critérios que permitem transformar as tarefas escolares em problemas

Conforme vimos na figura 2, a proposição dos problemas pode variar em função dos objetivos do professor no desenvolvimento dos tópicos em Matemática. Por isso, cabe ao professor selecionar os problemas ou exercícios para atingir da melhor forma possível os objetivos específicos ou gerais traçados para determinado assunto. O que estamos chamando de problemas geradores cumpriria a finalidade de apresentar uma nova unidade didática, gerando necessidade de novos conhecimentos para o aprendiz ou, pelo menos, novas estratégias de resolução, e justificando o estudo de tópicos previstos na grade curricular de Matemática.

Brousseau (1996) já argumentava que a concepção moderna do ensino pede ao professor que provoque nos alunos as adaptações desejadas através de uma seleção criteriosa de problemas. Segundo ele, “Estes problemas, escolhidos de forma que o aluno possa aceitá-los, devem levá-lo a agir, a falar, a refletir, a evoluir por si próprio.” (1996, p. 49).

Finalmente, Vila entra no âmago da questão proposta pela introdução de um tópico matemático através do que estamos chamando de problemas geradores quando diz:

> Outra forma em que aparece a resolução de problemas no currículo é como método de ensino, quer dizer, “aprender resolvendo problemas”. Os problemas são utilizados para ajudar os alunos a terem consciência de que seus conhecimentos são insuficientes para responder às questões que lhes são propostas e despertar-lhes, assim, a motivação para incorporar novos conhecimentos, reestruturando os que já têm. (2006, p. 170).

Ao aplicar problemas na introdução de um capítulo, o professor se concentra mais na maneira como a matemática pode ser ensinada, não através de um

[2] Fonte: POZO, Juan Ignacio (org); ECHEVERRÍA, María del Puy Pérez. **A solução de problemas***:* aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

conhecimento pronto e acabado, mas numa forma do próprio aluno ser protagonista de seu desenvolvimento. Embora a aquisição do conhecimento seja importante, a proposta essencial para a aprendizagem da matemática é o aluno ser capaz de usá-la fora do contexto da sala de aula.

3 SITUAÇÕES DIDÁTICAS E ADIDÁTICAS

Segundo PAIS, uma situação didática “é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para a aprendizagem de um conteúdo específico” (2002, p. 65). Esses três elementos caracterizam o espaço vivo de uma sala de aula. O autor salienta ainda a importância de apresentar o conteúdo a ser estudado em um contexto que seja significativo para o aluno, destacando que sem esse vínculo palpável com uma realidade fica impossível alcançar as transformações almejadas.

Essa apresentação inicial, portanto, se mescla com os objetivos propostos quando da apresentação dos tópicos através dos problemas geradores. Tais questões têm justamente o objetivo de proporcionar ao aprendiz a possibilidade de enxergar que os conhecimentos até então podem ser ineficientes para resolver completamente uma situação apresentada ou, pelo menos, que as estratégias até então adotadas não são mais eficazes, justificando o aprofundamento dos estudos. Além disso, o trinômio professor, aluno, saber é parte fundamental para a estruturação da aprendizagem, pois é através disso que o conhecimento a ser produzido está sustentado, não relegando nenhuma das partes a segundo plano.

A partir de situações controladas pelo professor – apresentação de problemas geradores – o aluno passa a ter pouco a pouco autonomia para resolver questões sem a intervenção do professor, fora, muitas vezes, do contexto de ensino e na ausência de qualquer indicação intencional. Essa etapa, buscada desde o início, pois se entende como fundamental no desenvolvimento cognitivo do aluno, é chamada de situação adidática por Brousseau (1996). Considerar as situações adidáticas como presentes e necessárias no desenvolvimento do aprendiz sepulta a idéia de que o professor possa ser somente um transmissor de conhecimentos. A potencialidade de situações em que o aluno precisará de liberdade para resolver, dispensando a presença de terceiros para indicar-lhe o caminho a seguir, justifica a permanente intenção de delegar ao estudante mais autonomia, não desenvolvendo a aprendizagem de repetição e modelos. Segundo Brousseau (1996), o problema escolhido é parte de uma situação mais ampla, com objetivos específicos bem definidos, em que o professor provoca e orienta o aprendiz com mais questões surgidas a partir da atividade original – tal situação é definida como situação didática.

Brousseau argumenta ainda que,

> o único meio de “fazer” matemática é procurar e resolver determinados problemas específicos e, a este propósito, colocar novas questões. O professor tem, pois, de efetuar, não a comunicação de um conhecimento, mas a devolução do problema adequado. Se esta devolução se opera, o aluno entra no jogo e, se ele acaba por ganhar, a aprendizagem teve lugar. (1996, p. 51).

Percebe-se a potencialidade da introdução de tópicos através de problemas geradores com a descrição dada pelo autor ao modelo de aprendizagem sugerida acima, em que o aprendiz é desafiado a adaptar seus conhecimentos anteriores às condições de solução de um novo problema. O problema inicialmente proposto sempre terá a finalidade de desenvolver ao máximo as habilidades de autonomia e busca de pontes entre o que já é sabido e aquilo que se deseja saber.

Freitas reforça a idéia, dizendo que:

> O que impulsiona o processo de ensino-aprendizagem matemática são as atividades envolvendo a resolução de problemas. O trabalho pedagógico tem início exatamente com a escolha de um bom problema que deve ser compatível com o nível de conhecimento do aluno. (2002, p. 77).

Nesse ponto, é interessante que o professor tenha o cuidado de não ser formal demais na apresentação do problema, muito menos irreal, o que poderia tornar o estudo, nesse último caso, artificial e pouco atrativo. A adaptação pode ser entendida como a habilidade que o aluno possui em utilizar conhecimentos prévios na resolução de um problema. Nesse momento, é importante salientar, que diversos procedimentos de raciocínio ocorrem sem o controle do professor, típicos do componente criatividade, o qual deseja-se desenvolver no aluno. Pais (2002) chega mesmo a dizer que ao longo do trabalho didático o aluno deve ser motivado a engajar-se a andar pelas próprias pernas.

Sendo a etapa zero o desenvolvimento do estudo através de um problema gerador, Brousseau (apud PAIS, 2002) desenvolveu uma tipologia de ações para analisar as relações existentes entre as atividades de ensino com as diversas possibilidades de uso do saber matemático.

Segundo o autor, “Uma *situação de ação* é aquela em que o aluno realiza procedimentos mais imediatos para a resolução de um problema, resultando na produção de um conhecimento de natureza mais experimental e intuitiva do que teórica” (2002, p. 72). Nessa etapa, busca-se que o aluno resolva o problema sem a preocupação de explicitar todos os argumentos utilizados na elaboração.

“A *situação de formulação* é aquela em que o aluno passa a utilizar na resolução de um problema algum esquema de natureza teórica, contendo um raciocínio mais elaborado do que um procedimento experimental.” (PAIS, 2002, p.72). Imaginemos que um problema gerador solicite que os alunos determinem quanto múltiplos de 3 formados por três algarismos existem. Num primeiro momento, o aluno pode dividir 1000 por 3, em seguida 100 por 3, e, por fim, obter a resposta pela diferença entre os valores encontrados. Essa etapa caracteriza claramente a *situação de ação*. Posteriormente, será necessário que o aluno desenvolva argumentos que convençam a ele próprio que a estratégia está correta.

“A *situação de validação* é aquela em que o aluno já utiliza mecanismos de provas e o saber já elaborado por ele passa a ser usado com uma finalidade de natureza essencialmente teórica.” (PAIS, 2002, p. 73). Esse tipo de situação é utilizado para que o aprendiz possa contestar soluções apresentadas que ele não compreende e possa validar sua própria resposta através de mecanismos de testes.

“A *situação de institucionalização* tem a finalidade de buscar o caráter objetivo e universal do conhecimento estudado pelo aluno.” (PAIS, 2002, p. 73). Trabalhando assim, o professor pode selecionar aspectos formais do conteúdo que serão valorizados como um saber culturalmente acessível ao aluno.

Ao contrário do que pode estar parecendo, não há uma divisão nítida entre essas categorias de situações. Elas se entrelaçam e não seguem, necessariamente, a ordem estipulada acima.

A figura 3 traduz de forma mais clara e resumida as diferenças entre cada uma das situações expostas acima.

Fases	**Investigação do professor**	**Trabalho dos alunos**
Fase de ação	O professor propõe o problema.	Os alunos trabalham individualmente ou em grupo.
Fase de formulação	O professor anima, estimula, desbloqueia, mas deve evitar intervir sobre o conteúdo.	Os alunos explicitam oralmente ou por escrito como resolveram os problemas e a solução encontrada.
Fase de validação	O professor medeia as intervenções dos alunos, mas deve evitar intervir sobre o conteúdo.	Os alunos devem argumentar em favor da validade de sua solução, tentando convencer seus colegas.
Fase de institucionalização	O professor deve identificar o novo saber e saber-fazer e precisar as convenções. Trata-se de homogeneizar os conhecimentos	Os alunos reestruturam seus conhecimentos.

	da turma e de identificar quais dos saberes construídos devem ser retidos e de que forma.	
Fase de exercícios seguida de uma avaliação	O professor ajuda os alunos a se familiarizarem com os novos conhecimentos, a usá-los em diferentes situações para que se conscientizem de seu campo de aplicação.	Os alunos resolvem novos problemas e aplicam os novos conhecimentos.

Figura 3[3]: Tipologia de ações na resolução de um problema

É importante salientar que as conclusões corretas e erradas devem ser expostas pelos alunos. Todas têm contribuição importante no sentido de fazer com que as idéias sejam analisadas e os próprios aprendizes possam descartar aquelas que acabam não se sustentando, podendo o professor estimular os próprios alunos a conflitar suas teorias e conjecturas. Na última fase, cabe reforçar mais uma vez a necessidade de elaborar problemas que permitam que os alunos possam melhorar a compreensão e aplicar os novos conhecimentos obtidos, sem, no entanto, propor atividades que se configurem apenas em exercícios, isto é, que exijam alguma transformação da nova informação assimilada. Esse ponto é fundamental para completar o processo iniciado pelos problemas geradores.

Antes de qualquer coisa, queremos deixar como fator importante para a ocorrência da aprendizagem a desestruturação de idéias, ou seja, através da desacomodação surgem os conflitos que mais tarde podem ser equilibrados mediante a aquisição de novos conhecimentos.

[3] Fonte: VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

4 MATERIAL POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO

A idéia central da teoria da Aprendizagem Significativa, de Ausubel, é que "o fator isolado mais importante influenciando a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe." (MOREIRA, 1982, p. 7). Desse modo, o que se propõe é buscar ou estimular esses conhecimentos prévios nos alunos através de um material potencialmente significativo, ou seja, através dos problemas geradores.

Ausubel desenvolve consistente teoria relacionando os diversos tipos de aprendizagem. Interessa-nos no momento comparar as aprendizagens por recepção e por descoberta. Segundo Ausubel:

> Na aprendizagem receptiva todo o conteúdo daquilo que vai ser aprendido é apresentado ao aluno sob a forma final. A tarefa de aprendizagem não envolve qualquer descoberta independente por parte do estudante. Do aluno exige-se somente internalizar ou incorporar o material que é apresentado de forma a tornar-se acessível ou reproduzível em alguma ocasião futura.
>
> [...]
>
> A característica essencial da aprendizagem por descoberta, seja a formação de conceitos ou a solução automática do problema, é que o conteúdo principal daquilo que vai ser aprendido não é dado, mas deve ser descoberto pelo aluno antes que possa ser significativamente incorporado à sua estrutura cognitiva (1980, p. 20).

Nesse trabalho, não se defende a utilização de apenas uma das aprendizagens apresentadas acima, ainda mais porque ambas podem ser significativas. O principal é trazer ao aluno um material potencialmente significativo para que cada aprendiz possa se valer da bagagem acumulada de conhecimentos a fim de buscar estratégias de resolução para uma dada situação.

É possível, e desejável até, que os conhecimentos prévios não sejam suficientes para resolver um problema. Cabe ao professor, nessa ocasião, aproveitar essa incapacidade para justificar perante o aprendiz a necessidade de desenvolver um novo tópico de Matemática a fim de possibilitar que o aluno possa incorporar outras estruturas cognitivas.

Listamos, então, as duas primeiras finalidades do uso de problemas geradores no desenvolvimento do conteúdo programático de Matemática no Ensino Médio: investigar se o uso de tais problemas é eficiente para proporcionar uma aprendizagem por descoberta e verificar se o aluno tem justificado para si o estudo de um conteúdo novo em Matemática quando se depara com situações em que seus conhecimentos não são suficientes para resolvê-las, ou, pelo menos, que exigem outras formas de abordagem.

Entendemos que a aprendizagem de Matemática através do modelo tradicional, que compreende as etapas de enunciado e aplicação pode ser alterada porque a justificativa vem depois do estudo em si. Justamente, o estudo de um assunto novo pode amparar-se numa visualização prévia dos benefícios concretos que serão proporcionados ao aprendiz. Desse modo, permite-se a ligação dos conhecimentos anteriormente produzidos, das experiências anteriormente vivenciadas com a situação apresentada, fazendo com que o próprio aprendiz produza e teste suas hipóteses, descarte resultados insatisfatórios, trabalhe em conjunto quando suas estratégias iniciais não derem o resultado esperado e, principalmente, percebam a necessidade de aprender algo que possa ser incorporado às suas estruturas mentais já existentes.

A utilização de problemas geradores que conduzam, sobretudo, à necessidade de expandir o rol de conhecimentos acumulados pelo estudante, pode ser um dos focos do professor. A freqüente pergunta “Para que serve isso?” estaria antecipadamente respondida, tornando o objeto de estudo mais concreto e potencialmente mais significativo. Além disso, o estudo a partir do problema gerador ajudaria a evitar o que Piaget (apud Pozo, 1994) chama de Aprendizagem Reprodutiva e o que Ausubel (1980) chama de Aprendizagem Mecânica, pois há claramente um objetivo real e concreto a ser atingido e, devido a isso, o aluno sabe ser de seu direito a utilização de todo o conhecimento acumulado para a resolução do problema.

Além da motivação inicial que os problemas geradores oferecem, há de se destacar que eles são capazes de fazer com que o aprendiz estabeleça como secundária a memorização de passos e procedimentos, uma vez que ele mesmo está construindo esses passos e procedimentos.

Portanto, outra finalidade que se deve destacar na proposta é a verificação de evidências de aprendizagem significativa. Ausubel argumenta que:

> Uma longa experiência em exames torna os estudantes adeptos de memorização não somente de proposições e fórmulas-chaves, como também de causas, exemplos, razões, explicações e formas de reconhecer e solucionar “problemas típicos”. O perigo da estimulação mecânica da compreensão significativa é evitado mais apropriadamente formulando-se perguntas e apresentando-se problemas sob uma roupagem nova e

> desconhecida e que exija uma transformação máxima do conhecimento existente (1980, p. 123).

Dessa forma, a utilização de problemas geradores no início de um tópico pode preparar o estudante para um tipo de avaliação que permita investigar de que forma os novos conceitos estão sendo incorporados à estrutura cognitiva do aluno.

Para Ausubel (1980), por aprendizagem significativa, deve-se entender o processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo já existente. Assim, os problemas geradores podem ser utilizados na introdução de um novo tópico em Matemática para possibilitar ao aprendiz uma aprendizagem significativa, mas sobretudo podem ser fonte potencialmente significativa.

Segundo Ausubel,

> Quando a tarefa da aprendizagem é potencialmente significativa (relacionada de forma não arbitrária e substantiva à estrutura cognitiva do aluno) [...], no mínimo depende de dois fatores principais envolvidos ao estabelecer esse tipo de relação, ou seja, a natureza do assunto a ser aprendido e a natureza da estrutura cognitiva de *cada aluno*. (1980, p. 36).

Ausubel também esclarece que

> Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as idéias são relacionadas a algum *aspecto relevante existente* na estrutura cognitiva do aluno, como, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição. (1980, p. 34).

A utilização de resolução de problemas, implica, segundo Ausubel (1980) uma aprendizagem pela descoberta. Ele argumenta que

> A aprendizagem pela descoberta é significativa quando os aprendizes relacionam não arbitrariamente e substantivamente uma proposição problemática potencialmente significativa com sua estrutura cognitiva, objetivando gerar uma solução que, por sua vez, é potencialmente significativa (relacionável com a estrutura cognitiva na mesma base). Engloba, portanto, sob estas condições, todos os elementos essenciais que estão implicados na aprendizagem significativa em geral: uma disposição para a aprendizagem significativa, uma tarefa de aprendizagem logicamente significativa e a disponibilidade de idéias relevantes estabelecidas na estrutura cognitiva do aprendiz. (1980, p. 473).

Em todo esse processo há uma seqüência de ações que visam a resolução da questão proposta. Se Ausubel (1980) deposita o início da estratégia nos conhecimentos prévios que permitem uma interpretação inicial do problema a partir das experiências vivenciadas anteriormente e das estruturas pré-estabelecidas, pode-se inferir que nem sempre essas estruturas são suficientes para interpretar e responder corretamente o problema formulado. A partir de mecanismos de teste, do surgimento de conflitos entre o conhecimento prévio e o novo e de contra-exemplos que sirvam para invalidar teorias erradamente acomodadas, surge o processo de assimilação de uma nova estrutura de conceitos, os quais servirão como base para a investigação de soluções e para a montagem de futuras estratégias. Depois da etapa de assimilação ocorre o processo de acomodação, ou seja, o sucesso na resolução da situação-problema leva o aprendiz a acomodar tanto o conhecimento novo como os processos utilizados na solução.

5 OUTRAS PESQUISAS NA ÁREA

Para dar suporte ao trabalho desenvolvido, foram pesquisados outros trabalhos ligados ao tema. Foi obtido acesso à dissertação de Irineu Motta Filho sob o título *Atitudes e procedimentos de alunos da Educação de Jovens e Adultos frente à resolução de problemas*, apresentada em 2006, na PUC de São Paulo. O trabalho de Motta Filho busca investigar e analisar as atitudes e estratégias utilizadas nas atividades selecionadas. O objetivo é o de buscar alternativas para a aproximação de alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) com a matemática, utilizando experiências do dia-a-dia dos estudantes para superar os medos existentes.

O autor realizou uma pesquisa com um grupo voluntário de 32 alunos, aos sábados pela manhã, em que pôde estudar e analisar o comportamento frente a 12 atividades. Motta Filho observou em sua prática de sala de aula que apesar dos alunos da EJA resolverem muitos problemas de natureza diversa, eles não se consideravam capazes de resolver problemas de matemática, a não ser que houvesse uma indicação precisa do que necessitava ser feito ou que o problema aplicado fosse muito parecido com o que havia sido visto antes. É interessante essa observação do autor porque justamente isso é levantado por Ausubel (1980) quando ele fala que é preciso evitar a simulação de aprendizagem, evitando exercícios que possam ser a repetição de procedimentos já realizados anteriormente. Motta Filho vai ao encontro desse pensamento quando indica que essa habilidade não é suficiente e quando busca investigar as razões para que isso ocorra. É intenção do autor analisar os procedimentos dos alunos frente a problemas em sala de aula, visando um trabalho mais adequado com os conteúdos a serem desenvolvidos em matemática.

Motta Filho relata ainda que sua prática em sala permite dizer que se faz pouco uso da resolução de problemas, além de não se estimular devidamente o uso do raciocínio, da criatividade e do espírito crítico durante as aulas.

Outra dissertação cuja pesquisa envolve uso de problemas na abordagem de conteúdos de matemática é de Rosana Giaretta Sguerra Miskulin, sob o título *Concepções teórico-metodológicas baseadas em logo e em resolução de problemas para o processo ensino-aprendizagem da Geometria*, apresentada em 1994, na Unicamp. A autora propõe uma análise da Geometria Plana e Espacial na Educação Matemática, em uma abordagem histórico-crítica, utilizando o Sistema

Computacional Logo para a exploração das geometrias. Miskulin pretende com esse cenário traçar diretrizes para a elaboração de uma metodologia baseada no Sistema Computacional e em situações reais de Resolução de Problemas, em que, segundo a autora, evidencia-se a possibilidade de proporcionar a motivação necessária para formar jovens com espírito aberto e não-conformistas.

Apesar da autora dedicar parte de seu trabalho ao estudo e comparação dos sistemas tecnológicos aos quais crianças de diferentes classes sociais têm acesso, inclusive com referências a outros países, há de se destacar que o uso do ambiente Logo foi feito permeado por problemas os quais os alunos deviam refletir sobre e responder.

Em 2005, Maria Aparecida Vilela Mendonça Pinto Coelho apresentou dissertação sob o título *A resolução de problemas: da dimensão técnica a uma dimensão problematizadora*, na Unicamp. O objetivo do estudo foi compreender as significações sobre a Resolução de Problemas como prática pedagógica, produzidas pelos professores a partir de reuniões da área de matemática, e estudar as condições de produção dessas constituições quando elas extrapolam o próprio problema e dão origem a significados em dimensões mais amplas. A autora percebeu nas relações dialógicas com os professores que a prática de adotar a Resolução de Problemas como ponto de partida para o ensino da matemática é considerada prática inovadora. A análise de Coelho evidenciou que a atividade matemática em uma dimensão problematizadora pode ser geradora de significações sobre a matemática escolar e seu ensino, sobre as relações de aprendizado e sobre a vida além da escola. Concluiu também que ficou evidente a necessidade de espaço para os professores para a produção de significações e da relevância dessa produção para que os docentes não sejam apenas reprodutores ou aplicadores de conhecimentos produzidos por outros, já que conhecem melhor a realidade dos alunos e o tipo de problemática que pode ser criado a partir daí.

Em 2006, Irene da Conceição Rodrigues Prestes defendeu na PUC de São Paulo, dissertação sob o título *Geometria Esférica: uma conexão com a Geografia* que justamente procura responder se o estudo da geometria esférica pode favorecer o estudo da Geografia do Globo Terrestre, em especial o de mapas. Para tanto, uma seqüência didática foi proposta em que os conceitos da geometria na esfera eram produzidos com auxílio dos próprios alunos através de perguntas que se caracterizavam como problemas a serem respondidos. Novamente as atividades foram desenvolvidas com um grupo restrito de alunos do ensino regular, a saber 14 alunos da 8ª série de uma escola pública. Prestes aproveitou a potencialidade do tema, apresentando material concreto para o estudo da esfera e dos conceitos relacionados à sua geometria.

Irene Pataki, em 2003, apresentou na PUC/SP, dissertação sob o título *Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar*, em que novamente estabelece conexões entre Geometria esférica e Geografia, segundo palavras da autora, “formando interconexões entre esses domínios, ao mesmo tempo em que contextualiza os conteúdos a serem considerados e possibilita uma aprendizagem motivadora, que articule o objeto de estudo com a realidade.” (2003, p. 7). A autora utiliza uma seqüência didática a partir de um problema e outras atividades e novamente estabelece-se o estudo de um tópico a partir da resolução de uma situação inicial.

Sob o título *A resolução de problemas em genética Mendeliana*, Lucio Ely Ribeiro Silvério, apresentou dissertação na Universidade Federal de Santa Catarina, em 2005. Nela, Silvério conclui, através de entrevistas feitas com os alunos envolvidos no projeto, que ocorre a utilização de recursos algorítmicos como a principal estratégia de resolução de problemas, muitas vezes sem a devida compreensão sobre o contexto e o motivo para usá-los. Como Silvério mesmo analisa, a capacidade do aluno aprender genética de forma significativa, a partir dessa estratégia, fica comprometida uma vez que os estudantes não entendem os passos que estão dando na resolução das atividades – estabelece-se aqui o que Ausubel (1980) chama de aprendizagem mecânica e que é fruto de análise em nosso trabalho.

Na parte final de sua dissertação, Silvério propõe alternativas pedagógicas para que os aprendizes venham a estabelecer domínios conceituais e procedimentais a partir de problemas que levem em conta os conhecimentos prévios dos alunos. Ao usar as palavras de Pozo, Silvério deixa clara a finalidade de seu trabalho:

> Sabemos resolver os problemas que propomos aos nossos alunos, mas nem sempre somos conscientes dos passos para resolvê-los, o que torna muito difícil ajudar os alunos a dar esses passos. (2005, p. 104).

Com sua pesquisa, podemos verificar a potencialidade da resolução de problemas em outros campos do conhecimento, ficando claro que o autor credita o sucesso da compreensão de assuntos relacionados à genética à elaboração de atividades que permitam ao aluno estabelecer relações importantes entre suas experiências já vivenciadas, com o propósito de desenvolver aprendizagem significativa.

Outro trabalho que discorre sobre o tema é a dissertação de Érica Valeria Alves, sob o título *Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio*, apresentada na Unicamp, em 1999. A autora dividiu seu trabalho em duas etapas, sendo a primeira destinada a avaliar a auto-percepção e o desempenho na solução de problemas e a segunda destinada a analisar os componentes da habilidade matemática, sendo uma conclusão da autora que os estudantes apresentam maior dificuldade no primeiro estágio da solução de problemas, no qual ocorre a obtenção da informação a partir do enunciado verbal.

Ainda cabe se fazer valer de uma tese de doutorado de Nelson Antonio Pirola sob o título *Solução de problemas geométricos: dificuldades e perspectivas*, de 2000, pela Unicamp. Nela, o autor investiga a solução de problemas geométricos, tendo como atividades dez problemas com informações completas, incompletas e supérfluas aplicados a 124 estudantes do curso de Habilitação ao Magistério e 90 alunos do curso de Licenciatura em Matemática. A escolha dos dois grupos teve como intenção a comparação entre as soluções apresentadas, sendo que os resultados obtidos pelos estudantes do curso de licenciatura foram bem superiores aos do Magistério, apesar de ainda sofríveis – média de 2 acertos contra média de 0,68 acerto. Pirola chama atenção em seu trabalho para a necessidade de que programas de educação continuada sejam desenvolvidos contemplando aspectos metodológicos relacionados ao ensino e à aprendizagem de conceitos utilizados na solução de problemas geométricos.

Pirola procurou investigar também o motivo da escolha do curso, a aptidão que cada aluno julgava ter para ensinar geometria, além de partes desse conteúdo que cada um considera mais fácil ou mais difícil e seus motivos. Como alguns problemas não dispunham de todas as informações necessárias, o autor dividiu a resolução de cada um em duas partes, uma concernente à resposta em si e outra relativa ao método empregado, sua estratégia.

As médias obtidas no trabalho traduzem ao leitor imediatamente as dificuldades que esses alunos trazem desde a educação básica, mesmo aqueles que ingressaram na licenciatura e, por esse motivo, esperava-se que tivessem um domínio maior dos conceitos matemáticos. Claramente nota-se aí uma simulação de aprendizagem no ensino fundamental e médio, não agregando valor formativo à estrutura cognitiva desse grupo de estudantes. Para justificar essa afirmação, pode-se citar um depoimento constante na tese de Pirola, que traduz com muita propriedade a falta de base matemática dos estudantes:

> Respondi tudo com a maior sinceridade, agora acho que dá para vocês entenderem por que não estou apta para ensinar Geometria no ensino fundamental.
>
> Agora, uma coisa eu lhes digo:
>
> — Estou “boba” por não saber nada disso, sabia que o ensino era fraco, mas não tanto.
>
> Obs: Falta “professor” de verdade, e nessa “bola de neve” a coisa continua aumentando, será que terei base para ensinar corretamente? (2000, p. 151).

Pirola, em suas considerações finais, traz como fundamental a capacitação do aluno em resolver problemas matemáticos diversificados, tanto abertos como fechados, com informações completas, incompletas e supérfluas. Para tanto, entende que os cursos de formação de professores estejam direcionados para o ensino e a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos bem como para o desenvolvimento de habilidades de solução de problemas. Conclui ainda que o baixo índice de acertos pode ser um indicativo de que a abordagem dos conceitos geométricos pode estar centrando no uso de fórmulas toda a estratégia necessária para a resolução dos exercícios, deixando de lado os aspectos de análise do problema e da elaboração de táticas para a resolução da situação.

Nesse ponto, cabe o comentário de que o controle do aprendizado através de materiais potencialmente significativos se dará através de questões que exijam máxima transformação, não permitindo que passos mecanizados possam ser adotados, pois entende-se que isso simula a aprendizagem e impede o crescimento cognitivo do aluno.

6 OBJETIVOS E METODOLOGIA

A idéia de lançar mão de problemas para introduzir conteúdos em matemática não é nova. O uso de problemas foi utilizado inclusive no Ensino Superior, conforme relatado por Vera Clotilde Carneiro (1995), na Revista Zetetiké, sobre a experiência realizada com estudantes do 1º semestre do curso de Licenciatura em Matemática. No artigo, Carneiro relata que foram utilizados problemas de aplicação, chamados “disparadores de ensino”, que poderiam ser resolvidos pelos alunos com o conhecimento já acumulado e que serviriam para introduzir novos temas.

A proposta do trabalho a ser apresentado a seguir é justamente introduzir os tópicos de Matemática, particularmente do Ensino Médio, mas expansíveis ao Ensino Fundamental, de modo que os estudantes se deparem com questões que provoquem neles a necessidade de aumentar o conhecimento até então dominado. Desse modo, cada tópico de matemática seria iniciado com uma série de questões, chamadas de problemas geradores, que levariam o estudante a perceber a necessidade de desenvolver novos tópicos ou, pelo menos, aprofundar, e justificar de antemão o estudo de um conteúdo novo.

A proposta geral se divide em três objetivos específicos, que são: investigar se o uso de problemas é eficiente para proporcionar uma aprendizagem por descoberta, verificar se o aluno tem justificado para si mesmo o estudo de um tópico novo em matemática quando se depara com situações-problema em que seus conhecimentos não são suficientes para resolvê-las ou, pelo menos, que exigem outras formas de abordagem, e procurar evidências de uma aprendizagem significativa. Além disso, esse trabalho também tem como objetivo oferecer uma alternativa baseada nesses pressupostos para a abordagem de Análise Combinatória e Probabilidade em sala de aula.

A metodologia empregada no trabalho será a de estudo de caso, ou seja, serão utilizados problemas no desenvolvimento inicial de um conteúdo previsto na grade curricular da escola. Conforme Alves-Mazzotti (2002) indica, em trabalhos qualitativos dessa natureza pretende-se investigar a viabilidade de uma proposta desse tipo no que diz respeito ao tempo necessário para a aplicação, verificando se é possível adequá-lo ao tempo disponibilizado no currículo, além de analisar a receptividade dessa proposta pelos alunos, já que se pretende romper com a forma tradicional de apresentação do conteúdo, qual seja, o desenvolvimento antecipado da teoria algumas vezes precedido apenas de um exemplo de aplicação.

Cabe salientar a relevância da proposta, pois os estudantes antes de saberem o que vão estudar, deparar-se-ão com questões que buscarão investigar o nível de conhecimento pré-existente ante aquele tema, evoluindo (os problemas) em dificuldade até que não seja mais possível pelos alunos encontrar uma solução satisfatória para a questão formulada, ou que exigirão o uso de novas formas de abordagem e estratégia, seja pela incapacidade pura e simples de visualizar a resposta ou pelo modo dispendioso e pouco prático que foi encontrado. Nesse ponto, estaria sendo justificado para o aprendiz o estudo de um módulo novo que tem como objetivo capacitá-lo a resolver tais problemas.

Com resultados favoráveis alcançados, pode-se difundir tal método para um grupo maior de docentes a fim de que possam modificar a forma como encaminham as atividades, visando desenvolver com justificativa o currículo previsto na rede pública e particular de ensino. Além disso, conforme já foi anteriormente explicitado, a estratégia de resolução de problemas desenvolve capacidades importantes de autonomia, elaboração de estratégias e análise das soluções encontradas. É necessária uma mudança na forma atual de desenvolver a matemática na educação regular tendo em vista alguns resultados de provas e testes que apontam índices baixíssimos de compreensão da disciplina entre os estudantes brasileiros. O Brasil alcançou o último lugar quando da participação no *Project for International Student* (PISA), prova elaborada pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE) que avaliou o desempenho de estudantes na faixa de 15 anos em 32 países. Enquanto a média global de matemática alcançava 500 pontos, nossos alunos obtiveram 334. De acordo com os avaliadores do PISA, alunos com resultados de até 400 pontos conseguem elaborar apenas uma etapa simples do raciocínio matemático, associando fatos básicos – cerca de 75% dos nossos alunos ficaram abaixo disso, 95% ficaram aquém de 500 pontos e nenhum atingiu 600 pontos, índice que indica alunos que têm um raciocínio mais elaborado (VICTOR, 2002).

Além disso, os resultados divulgados recentemente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP) a respeito do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) mostram queda nos índices avaliados. Fazendo comparação com os resultados alcançados há 10 anos atrás, o quadro mostra rendimento inferior em todas as séries pesquisadas, a saber, 4ª série e 8ª série do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio. Para efeitos de análise, a nota tirada por alunos da 4ª série indica que além de dificuldades nas operações básicas, os alunos não sabem sequer ver as horas num relógio de ponteiros (ARANHA, 2007).

A figura 4, a seguir, mostra os resultados ao longo dos últimos 10 anos, com notas variando de 0 a 500 em todas as séries pesquisadas.

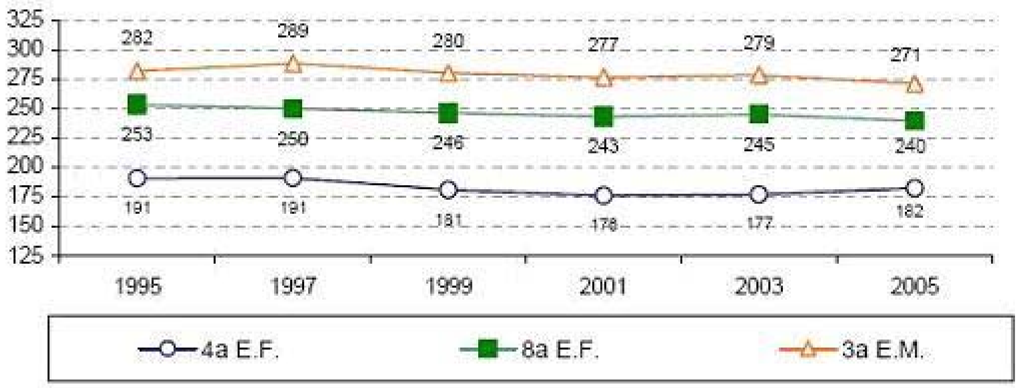


Figura 4[4]: Gráfico das médias de proficiência em Matemática – Brasil – 1995 a 2005

Não é intenção do trabalho procurar culpados, mas apresentar uma proposta que pode colaborar para a reversão do quadro apresentado. A utilização dos problemas geradores no ensino-aprendizagem de matemática deu-se em 5 turmas regulares de Ensino Médio. Os conteúdos que foram precedidos dessas atividades com análise dos resultados foram Trigonometria, Matemática Financeira, Seqüências e Probabilidade, na 2ª série do Ensino Médio, e Geometria Analítica, na 3ª série do Ensino Médio. Ainda cabe ressaltar que algumas atividades realizadas após a apresentação do conteúdo curricular serão apresentadas como problemas de aplicação, ou seja, atividades feitas após a obtenção de pré-requisitos imediatos. É importante a utilização de turmas regulares porque se acredita que essa proposta possa ser aplicada independente da grade curricular da escola.

Os alunos das turmas envolvidas na proposta realizavam as atividades em duplas ou individualmente. Os encontros foram realizados conforme o previsto no Plano de Estudo da escola, a saber, 4 períodos de 50 minutos a cada semana. As

[4] Fonte: http://www.inep.gov.br/download/saeb/2005/SAEB1995_2005.pdf

atividades foram concebidas de modo que os alunos pudessem interagir entre si, trocando impressões e estratégias.

A primeira seqüência de atividades diz respeito ao conteúdo de Trigonometria. Previamente, os alunos foram informados de como seria o desenvolvimento, em que ficou claro que qualquer estratégia seria válida, ou seja, não havia passos ou procedimentos a serem seguidos. Também ficou claro que não havia garantia de que os conhecimentos prévios seriam suficientes para resolver todos os problemas, além de ser dado como objetivo da atividade verificar a necessidade de desenvolver outros tópicos matemáticos.

A primeira etapa dessa seqüência constou de 9 atividades nas quais os alunos possuíam, ou pelo menos deviam possuir, conhecimentos prévios suficientes para resolvê-las com êxito.

A segunda etapa dessa seqüência constou de 2 problemas cuja resolução dependia de conteúdos ainda não vistos pelos alunos. Na verdade, somente o primeiro desses dois problemas não poderia ser resolvido. Investigou-se, a partir disso, como uma frustração influenciaria na continuação dos trabalhos. A frustração referida seria a não-capacidade de resolução de uma atividade. A partir de então, espera-se que esteja justificada para os alunos a necessidade de expandir os conhecimentos por eles dominados. Justamente nesse momento, uma das principais propostas do uso dos problemas geradores estaria ocorrendo, ou seja, a visualização pelo aprendiz de que os conhecimentos que ele domina não são suficientes para a resolução de algum problema ou, pelo menos, que o conhecimento precisará sofrer transformação significativa para que se alcance êxito na resolução. Espera-se que a pergunta “Para que serve isso?” esteja sendo respondida.

A terceira etapa dessa seqüência justamente é o desenvolvimento da teoria de suporte para que os alunos consigam resolver as atividades da segunda etapa. Além disso, outros capítulos previstos no conteúdo de trigonometria, como funções trigonométricas, serão vistos como continuação natural do desenvolvimento do conteúdo. Nesse último tópico, as atividades serão realizadas exclusivamente em duplas e terão como objetivo investigar conseqüências da mudança dos coeficientes a, b e c em funções do tipo $y = a + b \text{ sen } (cx)$

A segunda seqüência de atividades utilizada diz respeito à Matemática Financeira. Foram elaborados problemas de modo que se pudesse novamente verificar a necessidade do desenvolvimento de uma teoria de suporte. As atividades, com nível de dificuldade variado e crescente, foram distribuídas para que os alunos, em duplas ou individualmente, pudessem trabalhar e desenvolver estratégias a respeito. Houve novamente o cuidado de criar um problema que o aluno não pudesse resolver, ou que exigisse estratégias novas com significativa mudança em relação às anteriores, para que ficasse justificado o estudo de outros tópicos matemáticos, especificamente para justificar futuramente a necessidade de estabelecer uma expressão para a soma de termos de uma progressão geométrica.

Todas as atividades procuram favorecer a construção do conhecimento. A utilização de situações adidáticas como parte da estratégia de ensino-aprendizagem procura favorecer a autonomia e a liberdade para resolver problemas sem a intervenção do professor. Espera-se que a aprendizagem se dê pela descoberta, de modo que os aprendizes relacionem a atividade com sua estrutura cognitiva, objetivando gerar uma solução para a situação proposta. Espera-se também que os estudantes possam realizar esquemas de validação acerca das soluções encontradas.

A terceira seqüência de atividades diz respeito a Seqüências e visa estabelecer conclusões a respeito das diferentes leis de formação de uma progressão, dando-se destaque para as Aritméticas e Geométricas. É importante ressaltar que o estudo geral desse tópico já foi justificado pelos problemas geradores utilizados na seqüência anterior, quando houve necessidade de utilizar a expressão da soma de uma progressão geométrica finita.

Foram utilizados 8 problemas que estimulavam a criatividade e o estabelecimento de estratégias originais para a resolução das atividades. Novamente os alunos foram separados em duplas ou individualmente para refletir acerca dos problemas.

A quarta seqüência de atividades diz respeito à Probabilidade. Inicialmente foram apresentadas 5 atividades de introdução com o objetivo de investigar quais noções de probabilidade os alunos tinham. A segunda parte dizia respeito a problemas selecionados a partir de jogos de cartas, dados e loterias. Aproveitando a potencialidade que esses assuntos têm de gerar interesse e discussão, foram apresentadas aos alunos, divididos em grupos, atividades acerca do jogo de cartas Pôquer, do jogo de dados General e das loterias Mega-Sena, Quina, Loteca, Lotomania e Lotogol. O pôquer é um jogo atualmente muito difundido devido aos campeonatos que são retransmitidos via TV tanto fechada como aberta aqui no Brasil (SBT).

A quinta seqüência de atividades diz respeito à Geometria Analítica. A questão trazida tem a finalidade de produzir a desacomodação prevista, ou seja, espera-se que os alunos percebam que o conhecimento até então produzido não é suficiente e que esteja se justificando a necessidade do aprofundamento da teoria. O estudo de Geometria Analítica será complementado justamente com a finalização dessa atividade pelos alunos, em trabalhos em duplas com produção de material.

Por fim, será apresentado um plano de desenvolvimento de atividades voltadas para um trimestre letivo que inclui os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade. Esse material contém os tópicos relacionados ao desenvolvimento desses conteúdos previstos para uma turma regular, tendo sido utilizado no Colégio Sinodal, em São Leopoldo, na 2ª série do Ensino Médio.

7 ATIVIDADES PROPOSTAS E ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO

Nesse capítulo serão feitas a exposição dos problemas geradores utilizados e a análise dos resultados e procedimentos realizados pelos alunos. Cabe salientar que as atividades propostas foram concebidas à luz dos critérios utilizados por Pozo (1998) para transformar as tarefas escolares em problemas, já mencionadas na figura 2 (p. 16).

7. 1 SEQÜÊNCIA 1: TRIGONOMETRIA

Atividade 1:

Chama-se triângulo retângulo o triângulo em que um de seus ângulos mede 90º (ângulo reto). Os lados desse triângulo recebem nomes especiais: hipotenusa e catetos, em que hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto.

No papel milimetrado distribuído, construa um triângulo retângulo em que um dos ângulos seja de 24º, medindo e anotando o tamanho de cada um dos lados do triângulo.

Feito isso, determine o resultado das seguintes razões:

$$(1)\ \frac{\text{cateto oposto ao ângulo de } 24^{o}}{\text{hipotenusa}} =$$

$$(2)\ \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo de } 24^{o}}{\text{hipotenusa}} =$$

$$(3)\ \frac{\text{cateto oposto ao ângulo de } 24^{o}}{\text{cateto adjacente ao ângulo de } 24^{o}} =$$

$$(4)\ \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto ao ângulo de } 24^{o}} =$$

$$(5)\ \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente ao ângulo de } 24^{o}} =$$

$$(6)\ \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo de } 24^{o}}{\text{cateto oposto ao ângulo de } 24^{o}} =$$

Compare os resultados encontrados com os dos seus colegas e estabeleça suas conclusões.

Atividade 2:

As razões estabelecidas na atividade anterior receberam nomes especiais. Assim:

(1) seno (sen) é o nome atribuído à razão entre o cateto oposto e a hipotenusa;
(2) cosseno (cos) é o nome atribuído à razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa;
(3) tangente (tan) é o nome atribuído à razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente;
(4) cossecante (csc) é o nome atribuído à razão entre a hipotenusa e o cateto oposto;
(5) secante (sec) é o nome atribuído à razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente;
(6) cotangente (cot) é o nome atribuído à razão entre o cateto adjacente e o cateto oposto.

Você pôde ter notado que as razões calculadas dizem respeito a um ângulo determinado. Portanto, a notação atribuída à razão (1) será **sen 24º**, em (2) **cos 24º**, em (3) **tan 24º**, em (4) **csc 24º**, em (5) **sec 24º** e em (6) **cot 24º**.

Determine, agora, as razões trigonométricas em relação ao outro ângulo agudo no triângulo construído na atividade anterior.

Atividade 3:

Utilize o papel milimetrado e complete a tabela trigonométrica a seguir:

	30º	45º	60º
seno			
cosseno			
tangente			

Atividade 4:

Quando o Sol está 37º acima da linha do horizonte, num terreno plano, a sombra de uma árvore mede 5m. Determine a altura dessa árvore.

Atividade 5:

Uma escada “de abrir” tem um mecanismo que permite uma abertura máxima de 40º. Se cada pé da escada mede 3m, qual é a distância máxima entre esses pés?

Atividade 6:

No bloco de anotações do professor aparece escrito: $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$. Determine, a partir disso, **cos x** e **tan x**.

Atividade 7:

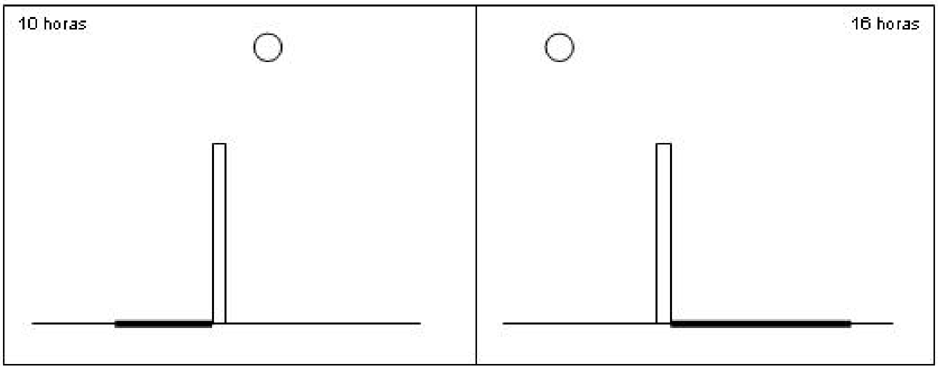
No pátio do colégio, numa região plana, Bóris, o Lâmina, observa o topo de uma árvore sob um ângulo de 30º. Ao avançar 12m em direção à árvore, passa a vê-lo sob um ângulo de 45º. Determine a altura dessa árvore, sabendo que Bóris mede 1,70m.

Atividade 8:

A Terra possui 2 movimentos importantes: o de **translação**, que é o movimento que o planeta faz em torno do Sol (dura aproximadamente 365 dias) e o de **rotação**, que é o movimento que o planeta faz em torno de si mesmo (dura 24 horas).

A expressão "sol a pino" representa o momento em que o Sol está exatamente "sobre nós" e, portanto, não há sombra. Considere que em nossa região isso ocorra exatamente ao meio-dia.

Às 10 horas da manhã, um poste produz uma sombra de 6m num terreno plano, conforme o desenho abaixo.



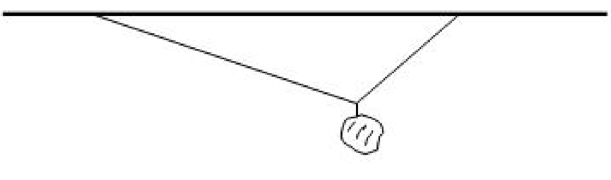
A partir do exposto, determine a altura do poste e a medida da sua sombra às 16h.

Atividade 9:

Determine a altura em função do lado x de um triângulo eqüilátero e em seguida calcule o valor de seno, cosseno e tangente do ângulo de 60º.

Atividade 10:

Dois cabos de aço mantêm um objeto suspenso ao teto, conforme o esquema da figura abaixo. Os cabos medem 3m e 5m e o ângulo formado entre eles mede 120º. Determine a distância entre os pontos de apoio no teto.



Atividade 11:

Um aluno mede os 3 ângulos internos de um triângulo e anota os valores 50º, 60º e 70º. Se o maior lado mede 10cm, qual é a medida do menor?

7.1.1 Expectativas e Análise dos Resultados

As primeiras duas aulas dessa unidade visam a introduzir/resgatar os conceitos das razões trigonométricas incluindo secante, cossecante e cotangente. Previamente foram estabelecidos os materiais necessários: régua, transferidor, calculadora com as cinco operações básicas e papel milimetrado. A primeira atividade visa a criar/recuperar os conceitos de hipotenusa e cateto, além de estimular nos alunos a percepção de que as razões trigonométricas independem das dimensões do triângulo retângulo. A segunda atividade visa a fazer com que o aluno relembre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. A terceira visa a estabelecer previamente as razões trigonométricas de ângulos notáveis para posterior comparação sem a utilização de transferidor e régua. A partir da quarta atividade, o que se espera é que os alunos desenvolvam autonomia para ler, entender e desenvolver uma estratégia eficiente para a resolução do problema.

As atividades se apresentam em níveis variados de dificuldade, mas sempre visando a máxima transformação do conhecimento produzido, conforme Ausubel (1980) sugere. Durante todo o processo o professor fez o papel de orientador, percorrendo os diferentes grupos e analisando as estratégias adotadas. A utilização do quadro verde foi prevista em dois casos: para esclarecer uma dúvida coletiva e para estabelecer conclusões finais a respeito de uma ou mais atividades.

O objetivo do professor é iniciar o estudo da trigonometria a partir do triângulo retângulo. Os problemas geradores, como já foi dito, estão sendo utilizados para verificar se os alunos têm justificado para si o estudo de um novo tópico em matemática, nesse caso a expansão do triângulo para o círculo trigonométrico, a partir de situações em que os conhecimentos dos aprendizes são insuficientes para resolvê-las. A expectativa é de que os conceitos iniciais fiquem claros e que as estratégias dos alunos em princípio dêem conta de resolver os problemas propostos. Espera-se que a intervenção necessária seja reduzida à mínima possível para que cada aluno possa desenvolver seus próprios métodos de resolução. Na primeira atividade, o objetivo é que os alunos percebam que as razões trigonométricas independem das medidas dos triângulos; na segunda, que lembrem que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º; na terceira, que percebam que se pode tabelar as razões para ângulos variados; da quarta em diante, o objetivo é analisar como se dá a transformação do conhecimento, procurando evidências de aprendizagem significativa a partir da observação de como uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo na abordagem de um problema novo. É objetivo igualmente importante analisar como os alunos se articulam para trabalhar em grupo, se as opiniões são respeitadas, se há espaço para discussão e debate.

Durante a atividade 1, notou-se que a maioria dos alunos conseguiu alcançar os objetivos propostos. Pôde-se verificar que o motivo pelo qual alguns não conseguiram foi o uso não-correto do transferidor. Na atividade 2, muitos alunos calcularam as razões trigonométricas do outro ângulo, sem no entanto se dar conta que ele podia ser descoberto sem o uso do transferidor, devido à propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180º. Após alguns questionamentos nesse sentido, todos lembraram dessa propriedade. Na atividade 3, muitos grupos construíram 3 triângulos para calcular as razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º; só lembraram que poderiam usar apenas 2 depois da intervenção do professor. Nos problemas propostos a partir da atividade 4, a percepção de que podiam valer-se das razões trigonométricas para atingir os resultados não foi imediata. Interessante foi observar que muitos grupos utilizaram desenhos em escala para resolver os problemas. A percepção das vantagens de utilizar as razões trigonométricas ficou evidente apenas no caso de se dispor de uma tabela em que as razões já estivessem anotadas. Cabe ressaltar que sempre foi estimulada a autonomia na resolução dos exercícios, mesmo quando o caminho utilizado parecia ser mais longo e trabalhoso. Somente no momento da síntese dos resultados é que, por comparação entre os métodos de resolução, as estratégias eram revistas de modo a torná-las mais eficientes.

A interpretação dos problemas foi a maior dificuldade enfrentada pelos alunos. A montagem de estratégias que levassem a solução não foi homogênea e, em alguns casos, só foi alcançada mediante intervenção do professor. A atividade 4 trouxe como dificuldade a correta localização do ângulo de 37º no desenho que simulava o acontecimento; na atividade 5, ocorreu a percepção que se podia valer do triângulo retângulo com ângulo de 20º, tal como era esperado, vindo a solução como conseqüência disso; na 6ª atividade, pôde-se verificar a utilização do Teorema de Pitágoras para resolver o problema, conhecido desde anos anteriores; a 7ª, 8ª e 9ª atividades foram resolvidas pela maioria dos grupos somente após auxílio do professor, o que evidenciou dificuldades de interpretação e de abordagem nas atividades.

Mesmo com dificuldades na resolução de algumas situações, os objetivos principais foram atingidos, pois houve análise profunda e o estabelecimento de muitas estratégias interessantes por parte dos alunos. Pôde-se perceber que o trabalho em duplas ou pequenos grupos tem a vantagem de propiciar maior reflexão e troca de idéias sobre cada atividade.

Foi possível observar durante a resolução dos problemas as diversas fases destacadas por Brousseau (apud PAIS, 2002): primeiramente a fase da ação, onde o professor propõe a atividade e os alunos trabalham em duplas ou individualmente, em seguida a fase de formulação em que o professor evita interferir sobre o conteúdo, mas estimula a perseguição dos objetivos, a busca de estratégias. Nesse momento observa-se também a troca entre os alunos, sendo justificada entre eles as táticas e resultados alcançados – é a fase da validação na resolução de problemas.

Com relação às duas últimas atividades, esperava-se que cumprissem com uma das propostas do uso de problemas geradores, ou seja, verificar se o estudante tem justificado para si a necessidade de aumentar o conhecimento matemático a partir da incapacidade de resolução de um problema com o qual ele se depara. Tal expectativa foi confirmada quando não houve estratégia eficiente para resolver a questão 10, a não ser pela utilização de desenho proporcional. Nesse instante, os próprios alunos começaram a aguardar a evolução do conteúdo para a resolução. Interessante é perceber que a incapacidade de solucionar o problema 10 criou a impressão que o problema 11 também não fosse possível de ser resolvido, o que não é verdade. Somente uma aluna o trouxe pronto na aula seguinte e quando questionados a respeito de tal fato (não-resolução), notou-se que foi uma conseqüência da ineficácia das estratégias para a situação anterior. Segundo relato de um dos alunos: “Sôr, se a 10 não deu, a 11, que era parecida, também não daria. Daí, nem tentei.”

Na abordagem do tópico de Trigonometria através dos problemas geradores pôde-se analisar se tais atividades iniciais são eficientes para proporcionar uma aprendizagem por descoberta, ou seja, se o conteúdo principal do que vai ser aprendido é descoberto pelo aluno antes de ser significativamente incorporado à sua estrutura cognitiva. Tal objetivo foi atingido pelo fato das conclusões estabelecidas pelos diversos grupos de trabalho mostrarem essa evolução – descoberta, mecanismos de verificação da adequação da resposta e incorporação como método eficiente de resolução. Em relação às evidências de aprendizagem significativa, também objetivo do trabalho, constantemente se notou relação entre informações novas (conclusões dos aprendizes) e aspectos da estrutura de conhecimento já existente, caracterizando esse tipo de aprendizagem.

Foram aplicados 2 questionários a respeito das atividades introdutórias para coletar impressões a respeito da metodologia empregada, tendo as respostas indicado que os alunos consideravam vantajoso a introdução do conteúdo via resolução de problemas para melhorar a compreensão do assunto a ser estudado.

A partir de então, os capítulos seguintes em Trigonometria, a saber, razões trigonométricas no círculo, razões trigonométricas no triângulo qualquer, equações trigonométricas e identidades trigonométricas, foram desenvolvidos durante as aulas, com previsão de um trimestre letivo para o desenvolvimento de todos os tópicos, incluindo as atividades iniciais. Durante esse estágio tiveram lugar as fases de institucionalização (Brosseau apud Vila, 2006), onde o professor homogeneíza os conhecimentos e identifica quais saberes construídos devem ser retidos e aprofundados e os alunos reestruturam seus conhecimentos, e a fase de exercícios seguida de avaliação, em que se destaca o caráter investigativo de verificação de aprendizagem significativa, em detrimento da mecânica, com problemas que exijam transformação do conhecimento (Ausubel, 1980).

Como atividade final, a ser considerada, está o trabalho de funções trigonométricas, que constou de 3 partes: estudo das características através do software *Graphmatica*, confecção de gráficos em papel milimetrado e apresentação dos trabalhos com comparação entre as funções. Abaixo são reproduzidas as etapas e as atividades passadas aos alunos, com todos os enunciados utilizados.

1ª parte – Estudo das características das funções via software *Graphmatica*

Desenvolvimento:

1. Clique duas vezes no ícone do *software Graphmatica*.
2. Agora vamos começar a fazer os gráficos de algumas funções trigonométricas.
   a) Faça o gráfico da função y = sen x (digite: y = sin x). Em seguida observe o período da função. Sempre antes de fazer a próxima etapa clique, na barra de ferramentas, em **Clear** para que a tela fique limpa dos gráficos anteriores.
   b) Faça o gráfico das funções **y = sen (2x)** e **y = sen (4x)** Após, responda:

- Qual é o período da função **y = sen (2x)**?
- Qual é o período da função **y = sen (4x)**?
- Qual será o período da função **y = sen (3x)**?
- Qual será o período da função **y = sen (6x)**?
- Qual será o período da função **y = sen (x/2)**?
- Qual será o período da função **y = sen (πx)**?
- Qual a amplitude dessas funções?

c) Faça o gráfico da função **y = 2 sen x** e **y = 3 sen (2x)**.

- Qual é o período dessas funções?
- Qual é a amplitude dessa função?
- O que se pode concluir a partir do que foi observado em (b) e em (c)?

d) Faça o gráfico da função **y = 1 + sen x** e analise amplitude e domínio. O que se observa nessa função?

e) Responda antes de fazer o gráfico. Qual será o período e a amplitude da função **y = 2 + 3 sen (5x)**?

f) Refaça as construções para a função **y = cos x**. Anote suas conclusões. Como se pode diferenciar a função **y = sen x** da função **y = cos x**?

g) Faça o gráfico da função $\mathbf{y = cos}\left(\mathbf{x} - \frac{\pi}{\mathbf{2}}\right)$ (digite **y = cos (x – pi/2)**). Alguma observação interessante?

h) Estabeleça conclusões a respeito do período da função **y = tan x**.

O objetivo desse trabalho foi familiarizar os alunos com funções periódicas. A utilização do software tem como função acelerar a compreensão das principais características das funções trigonométricas, como amplitude e período. Paralelamente inicia-se o estudo de movimentos de gráficos, principalmente deslocamentos, rotação e reflexão. É fundamental ao final da atividade que os alunos consigam, dado um gráfico, estabelecer sua lei e vice-versa. Além disso, dada a lei, que consigam rapidamente perceber as principais características da função.

Essa atividade foi desenvolvida em duplas no laboratório de informática da escola. O tempo previsto para essa atividade foi de 100 minutos (2 períodos de aula). Após, os alunos eram instruídos a procurar aprofundar, em casa, seus conhecimentos também através do *software*. A complementação da teoria, como veremos, dá-se pela manipulação concreta, com construção e comparação na sala de aula de gráficos de vários tipos.

2ª parte – Confecção de gráficos

Desenvolvimento:

Sua tarefa é fazer no papel milimetrado o gráfico das seguintes funções trigonométricas, no mesmo sistema de eixos.

y = sen x

y = csc x

Utilize no eixo das abscissas os valores dos ângulos em **radianos**. Serão disponibilizados 4 períodos para a realização do trabalho; o grupo deve prever, portanto, a necessidade de realizar encontros no contra-turno.

Além dos gráficos, as questões abaixo devem ser respondidas e entregues na data programada. Não é necessário dizer que a compreensão do que se faz é fundamental por parte de todo o grupo.

IMPORTANTE: O grupo pode utilizar o programa *graphmatica* para auxiliar no entendimento do trabalho.

Questões:

1. Determine o domínio e a imagem das funções acima.
2. Uma função é dita **periódica** quando os seus valores se repetem periodicamente, ou seja, f: IR → IR chama-se periódica quando existe um número T > 0 tal que f(t + T) = f(t) para todo t ∈ IR. Determine o período das funções acima.
3. Uma função é dita **ímpar** quando f(-x) = - f(x) e é dita **par** quando f(-x) = f(x). Verifique se as funções acima são pares, ímpares ou nenhuma das duas.
4. Determine as raízes das funções acima, quando existirem.
5. Compare as funções do teu grupo com todos os grupos que fizeram sobre **seno** e **cossecante** e observe como se comportam o período e a amplitude.

Cabe esclarecer que o trabalho foi realizado em duplas e que cada uma recebia um par de funções diferentes para desenhar no papel milimetrado. A saber, os pares de funções desenvolvidas foram:

a) $y = \text{sen}\,x$ e $y = \csc x$

b) $y = \cos x$ e $y = \sec x$

c) $y = \tan x$ e $y = \cot x$

d) $y = \text{sen}\,(2x)$ e $y = \csc\,(2x)$

e) $y = 2\,\text{sen}\,x$ e $y = 2\csc x$

f) $y = \cos\,(2x)$ e $y = \sec\,(2x)$

g) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e $y = \sec\left(\frac{x}{2}\right)$

h) $y = 1 + \cos x$ e $y = 1 + \sec x$

i) $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

j) $y = -\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e $y = -\sec\left(\frac{x}{2}\right)$

k) $y = -\text{sen}\,x$ e $y = -\csc x$

A previsão inicial de 4 aulas estendeu-se para 5 encontros. Os alunos realizaram todas as etapas de construção do gráfico nas aulas. Cada dupla recebeu duas folhas tamanho A3 de papel milimetrado com instruções para o tracejo dos eixos e utilização de escala. Ficou decidido que cada centímetro do papel milimetrado no eixo horizontal corresponderia a um ângulo equivalente a $\frac{\pi}{12}$ rad e cada 5 cm no eixo vertical corresponderia a uma unidade. Essa escala foi utilizada para posterior comparação dos vários gráficos traçados, onde as características importantes para os saberes que devem ser retidos e aprofundados são observadas mais facilmente pelos aprendizes.

Como primeira etapa do trabalho, os alunos foram estabelecendo uma correspondência entre o ângulo e o valor da função. Fazendo essa tabela, logo perceberam que os resultados repetiam-se a intervalos regulares, facilitando a construção do gráfico. Cada dupla recebeu um par de funções, de modo que se podia analisar bem o comportamento de cada uma e estabelecer conclusões mais facilmente a respeito de domínio, imagem, raízes, etc. A segunda etapa do trabalho era o traçado propriamente dito do gráfico. As folhas milimetradas foram coladas uma à outra e a união dos vários pontos obtidos resultou na curva característica de cada função. A maior dificuldade encontrada nessa etapa disse respeito à quantidade e ao espaçamento entre os pontos para que a curva saísse bem feita. Muito interessante foi verificar a fase de formulação e confirmação de hipóteses nessa altura da atividade, onde os alunos estabeleceram conclusões a respeito da periodicidade das funções, ou seja, após o traçado de alguns pontos perceberam que há uma repetição em intervalos regulares dos valores encontrados. Novamente, houve a institucionalização dos saberes por parte dos estudantes.

As figuras abaixo mostram a evolução das etapas iniciais no desenvolvimento do trabalho.

Figura 5: Marcação dos pontos e tracejo dos gráficos

Figura 6: Marcação dos pontos e tracejo dos gráficos

A terceira etapa foi a utilização de lã para dar forma final aos gráficos com a finalidade de posterior comparação entre as funções. Nessa etapa, algumas perguntas importantes foram sendo feitas aos alunos a respeito do comportamento das curvas. Por que algumas não passavam pelo eixo horizontal, por que ocorria o aparecimento de assíntotas em algumas funções, se havia alguma relação com a outra função traçada, enfim, questões que levavam os alunos a formularem hipóteses e verificar possíveis respostas. As figuras abaixo registram o momento.

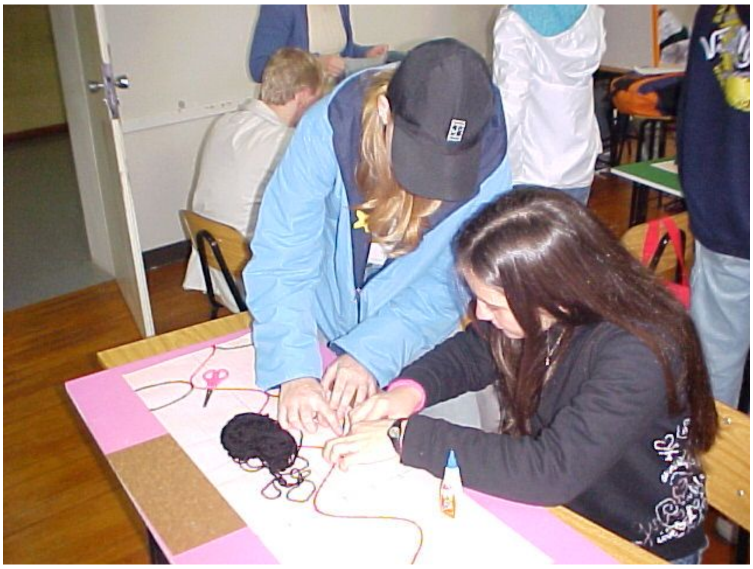


Figura 7: Trabalho de acabamento dos gráficos

Figura 8: Trabalho de acabamento dos gráficos

A quarta etapa do trabalho foi dedicada à pesquisa a respeito das questões que o acompanhavam. Nessa etapa os alunos mostraram pouca autonomia, sendo necessário constantemente o auxílio do professor. Apesar do objetivo inicial ser relembrar conceitos da série anterior, essa etapa serviu para evidenciar que os alunos precisavam aumentar seu conhecimento matemático seja porque não haviam aprendido ainda aquele conteúdo ou porque a aprendizagem foi incompleta, não sendo possível reestabelecê-la com apenas uma revisão. Reforça-se aí a necessidade de desenvolver um ensino que privilegie a constante verificação do aprendizado, com questões que exijam transformação do conhecimento dominado, para evitar a simulação de aprendizagem.

A parte final foi de comparação entre os trabalhos apresentados, onde o professor estimulava as conclusões fazendo perguntas aos grupos que expunham o trabalho para a classe. A dificuldade maior, já esperada, foi quanto ao deslocamento horizontal dos gráficos. Aí se verificou, por exemplo, que $y = \text{sen } x$ e $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ têm exatamente a mesma representação gráfica. Questões como “mas como eu vou saber qual é a lei da função então?” surgiram ao natural. Por fim, esse aspecto ficou claro, assim como as conseqüências que as modificações nos parâmetros das funções trigonométricas causam. A verificação de aprendizagem, que consistia em representar o esboço do gráfico a partir da função e determinar a lei da função a partir do gráfico, confirmou isso, com índice superior a 90% de acertos. Em provas futuras, entretanto, esse nível baixou, sendo necessária a retomada do conteúdo.

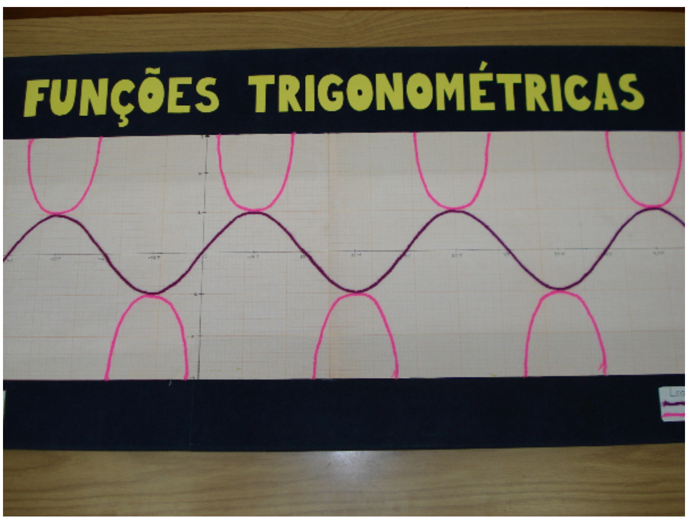


Figura 9: Trabalho acabado das funções $y = \text{sen } x$ e $y = \csc x$

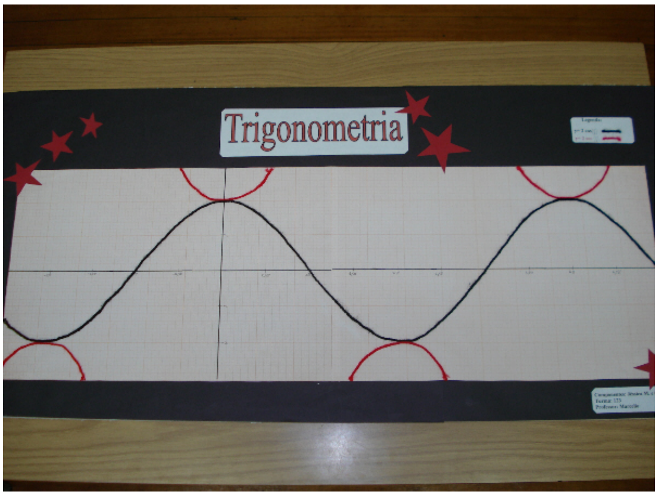


Figura 10: Trabalho acabado das funções $y = 2\cos x$ e $y = 2\sec x$

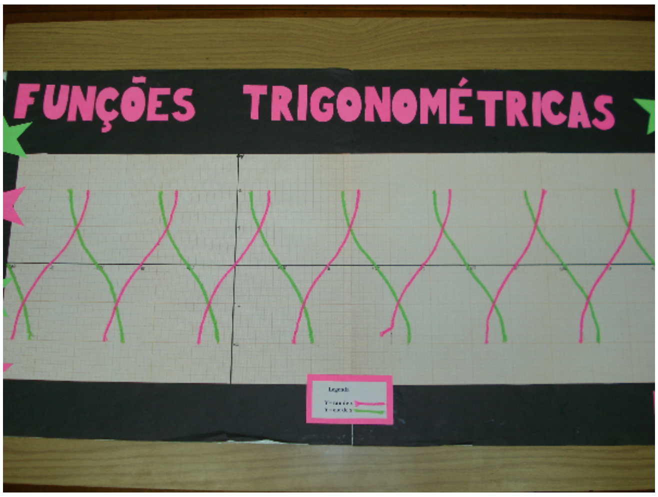


Figura 11: Trabalho acabado das funções $y = \tan x$ e $y = \cot x$

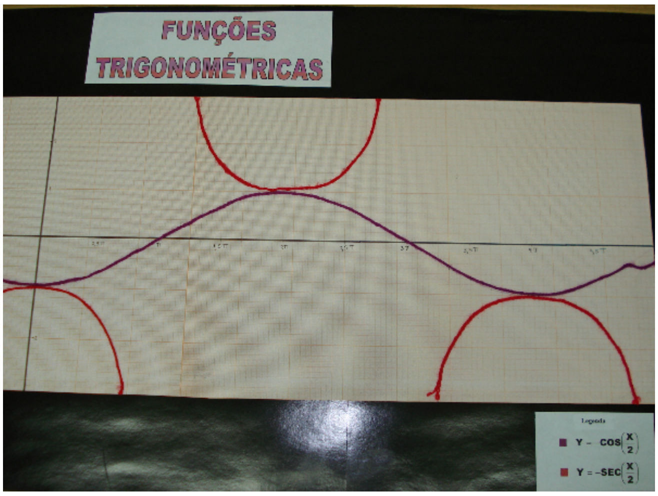


Figura 12: Trabalho acabado das funções $y = -\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e $y = -\sec\left(\frac{x}{2}\right)$

7.2 SEQÜÊNCIA 2: MATEMÁTICA FINANCEIRA

Atividade 1:

Um investidor aplica R$ 5.000,00 num banco cuja taxa de rendimento é de 1% ao mês. Qual será o total acumulado ao final de 1 mês? E ao final de 3 meses? E ao final de 1 ano? E ao final de **n** meses?

Atividade 2:

André recebe uma herança e a investe numa aplicação financeira cuja taxa de rendimento é de 0,8% ao mês. Após 1 ano, decide comprar um carro e resgata todo o dinheiro acumulado – R$ 25.550,37. Qual foi o valor da herança recebida por André?

Atividade 3:

Paulo decide investir suas economias à taxa de rendimento anual de 10%. Ao final de quantos anos o capital investido terá dobrado?

Atividade 4:

Após 12 meses, um capital de R$ 3.000,00 rende juros de R$ 544,68. Qual a taxa de rendimento dessa aplicação financeira?

Atividade 5:

Pedro vendeu seu carro por R$ 50.000,00 porque precisava de dinheiro para ficar 1 ano em outro país. Separou R$ 30.000,00 que gastaria na viagem e decidiu investir os R$ 20.000,00 restantes pelo tempo que permaneceria no exterior. Em um banco encontrou uma taxa de rendimento anual de 12% e em outro uma taxa de rendimento mensal de 1%. Há diferença de rendimento entre as duas aplicações? Se sim, qual delas é mais vantajosa?

Atividade 6:

Determine a taxa mensal equivalente a uma taxa anual de 12%.

Atividade 7:

Malu aproveita uma promoção e compra um televisor pagando R$ 300,00 após um mês e mais duas prestações mensais de R$ 400,00. Se é sabido que a taxa de juros cobrada pela loja é de 2,5% ao mês, quanto custaria o televisor à vista?

Atividade 8:

Um carro custa à vista R$ 10.000,00, mas pode ser financiado em 24 prestações fixas, incluindo aí taxa de juros de 1,99% ao mês. Se Carlos dispõe de R$ 2.000,00 para dar de entrada no carro e quer financiar o restante, com a 1ª parcela vencendo em 30 dias, qual será o valor da prestação a ser paga?

Atividade 9:

Marcelo e sua esposa tiveram seu primeiro filho e decidiram todo o mês, desde o nascimento, fazer um depósito de R$ 100,00 numa caderneta de poupança. Admitindo como rendimento médio, 0,7% ao mês, ao final de 18 anos, qual será o total que menino terá à sua disposição?

7.2.1 Expectativas e Análise dos Resultados

Cabe ressaltar que os alunos haviam tido contato com esse conteúdo no ano anterior como aplicação das funções exponenciais e logarítmicas. A expressão que calcula o montante acumulado de um capital C aplicado após n meses a uma taxa i constante ($M = C\,(1+i)^n$) era conhecida dos alunos e desde a apresentação das atividades norteou os trabalhos. Como as situações-problema podiam ser feitas em duplas ou grupos pequenos, logo todos os alunos estavam a par dessa expressão. Por isso, as atividades 1 e 2 foram resolvidas sem dificuldades e com bastante desenvoltura pelos alunos.

Na atividade 3, ocorreu o primeiro problema. Muitos alunos atribuíram um valor ao capital inicial, considerando-o dobrado para o cálculo pretendido, outros utilizaram C e 2C. O fato é que muitos chegaram à expressão $2 = 1{,}1^n$. A partir disso, a maioria não chegou a nenhuma conclusão, outros conseguiram estabelecer que o tempo necessário era algo entre 7 e 8 anos, visto que concluíram isso com o auxílio da calculadora, apenas fazendo testes, e uma minoria chegou na resposta fazendo uso de logaritmos. É interessante que os alunos haviam tido contato com exercícios semelhantes no ano anterior e, mesmo sabendo que a utilização de logaritmos forneceria subsídios para uma boa estratégia, não conseguiam lembrar-se do procedimento. De qualquer forma, durante os comentários, ressaltou-se a obtenção da resposta via tentativa, uma vez que isso resolvia o problema, mas também se questionou a praticidade do processo, quando ficou claro que uma revisão de logaritmos era necessária.

Nesse ponto ficou muito evidente que um dos objetivos do uso de problemas geradores estava sendo plenamente atingido: fica completamente justificado perante os alunos o estudo de conteúdos em matemática que lhes permitam resolver situações para as quais não encontram meios de obter um modo de resolução eficiente. Igualmente importante foi verificar a ocorrência de aprendizagem por descoberta uma vez que ficou claro que os alunos realizavam mecanismos de testes (fase de validação) para determinar se o valor atribuído à incógnita se aproximava do valor correto.

Na atividade 4, novamente houve divisão nos resultados obtidos. Muitos chegaram na expressão $1,18156 = (1 + i)^{12}$, mas não conseguiram estratégias que gerassem o valor da taxa i, apesar do necessário ser simplesmente obter a raiz 12-ésima de 1,18156 e, em seguida, subtrair 1 unidade. Outros, porém, chegaram ao resultado correto fazendo uso exatamente desse procedimento. É erro relativamente comum nesse tipo de exercício a conclusão de que $(1 + i)^{12} = 1 + i^{12}$, que gera um resultado totalmente incorreto. Isso foi verificado durante a síntese de estratégias adotadas.

A atividade 5, que buscava investigar qual tipo de investimento era mais vantajoso, 1% ao mês ou 12% ao ano, foi resolvida pela grande maioria dos alunos, com conclusões acertadas e explicações bem fundamentadas. Entretanto, a atividade 6, que era praticamente uma continuação da anterior e que podia ser resolvida a partir de estratégias estabelecidas na atividade 4, teve um percentual de acertos baixo.

A atividade 7, embora pudesse ser solucionada a partir de conhecimentos prévios, não foi resolvida com êxito. Muitos relatavam o procedimento, mas não o sistematizavam adequadamente, achando-o muito trabalhoso e esperando a resolução do professor. O entendimento, entretanto, foi relativamente fácil. Quanto às duas últimas atividades, cumpriam o papel importante de mostrar ao aluno que o conhecimento dominado até então não era suficiente para produzir uma resposta satisfatória. Na explanação oral, ficava claro que os próprios alunos encontravam falhas nas técnicas que pensavam em adotar, mas não viam modo de solucioná-las. Estas situações não foram resolvidas na aula naquele momento, mas discutiu-se a respeito do motivo da ineficiência das estratégias adotadas. Mais tarde, a partir do conteúdo de Progressão Geométrica é que foram novamente abordadas e resolvidas. A intenção do professor ao apresentar os conteúdos dessa maneira foi compreendida pelos alunos, assim como estava sendo justificado o estudo de um tema novo.

A metodologia utilizada encontrava respaldo nos referenciais teóricos já referidos. Os problemas contemplavam plenamente as propostas indicadas quando da utilização desse procedimento, ou seja, os alunos tinham autonomia para estabelecer seus próprios métodos de abordagem. Além disso, foram formulados de modo que os alunos os relacionassem com situações reais e cotidianas e a ênfase maior dada sempre foi em relação ao processo e não à resposta final – os porquês foram mais importantes que o resultado em si. Finalmente, a troca de idéias entre os alunos e o estabelecimento de um prazo flexível para a obtenção das conclusões foram importantes para o processo como um todo, favorecendo a compreensão dos procedimentos adotados. O mais significativo, entretanto, foi a necessidade que o educando encontrou de expandir seus conhecimentos para resolver a atividade, tal qual Vila (2006) já havia sinalizado como objetivo da educação. Muitas vezes as situações didáticas planejadas pelo professor evoluíram para situações adidáticas, pois os alunos relacionavam as atividades com situações vividas por eles ou seus pais. Assim, transpunham a investigação da sala de aula para outros ambientes.

Havia grande disposição para a continuação do conteúdo, tanto que questionamentos extras foram feitos e a discussão ampliada. Um deles disse respeito à desvalorização do dinheiro ao longo do tempo, pois argumentava-se que daqui a 18 anos, por exemplo, também a inflação seria componente importante do problema. Ora, se era previsto que em algum tempo haveria um montante, evidentemente esse total não poderia ser comparado com valores atuais – surgiu aí interesse em aprofundar o tema, com a aquisição de conceitos como juro real, correção monetária, desvalorização, processo inflacionário, etc. Como no colégio há um projeto paralelo de Educação Financeira que permeia o ensino regular, desde o

Ensino Fundamental até o Médio, desenvolveram-se um pouco mais esses termos nessas atividades.

Essa seqüência foi particularmente interessante pelo fato de ter sido fácil perceber evidências de aprendizagem significativa já que as novas informações relacionavam-se com aspectos relevantes da estrutura de conhecimento dos alunos.

7.3 SEQÜÊNCIA 3: PROGRESSÕES

Atividade 1:

Abaixo aparecem algumas seqüências numéricas que seguem determinado padrão. Complete com o próximo termo cada uma dessas seqüências.

a) (1, 2, 4, 7, 11, 16, _____)
b) (1, 4, 9, 16, 25, 36, _____)
c) (1, 2, 4, 8, 16, 32, _____)
d) (1, 2, 6, 24, 120, _____)
e) (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ______)
f) (3, 7, 11, 15, 19, 23, _____)
g) (0, 3, 8, 15, 24, 35, ______)
h) (3, 6, 12, 24, 48, 96, ______)

Atividade 2:

De acordo com a disposição dos números abaixo,

	Coluna 1	**Coluna 2**	**Coluna 3**	**Coluna 4**	**Coluna 5**	**Coluna 6**	
1ª linha	0	8	16	24	32	40	...
2ª linha	2	10	18	26	34	42	...
3ª linha	4	12	20	28	36	44	...
4ª linha	6	14	22	30	38	46	...

determine em qual linha e qual coluna o número 1002 aparecerá.

Atividade 3:

De acordo com a disposição dos números abaixo,

0	3	6	9	12	...
1	4	7	10	13	...
2	5	8	11	14	...

em qual linha e coluna da tabela se encontra o número 319?

Atividade 4:

De acordo com a disposição dos números abaixo,

1				
4	5			
9	10	11		
16	17	18	19	
25	26	27	28	29
...	...	...	...	...

qual é a soma dos elementos da 10ª linha?

Atividade 5:

Determine a quantidade de números de 4 dígitos que são múltiplos de 3.

Atividade 6:

Uma turma de Ensino Médio organizou uma rifa onde concorrem números de 1 a 1000. O comprador adquire o cartão, raspa o número que concorrerá ao sorteio e paga, em centavos, o valor do número retirado. Por exemplo, se raspar o número 005, pagará 5 centavos, caso retire o número 432, pagará 432 centavos (R$ 4,32). Se todos os números forem vendidos, qual será o total arrecadado?

Atividade 7:

Determine a soma dos 70 primeiros múltiplos de 3 maiores que 2000.

Atividade 8:

Considere a seqüência (1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^{20}). Qual será o valor encontrado se multiplicarmos todos os seus termos?

7.3.1 Expectativas e Análise dos Resultados

Apesar dos problemas utilizados em Matemática Financeira já serem suficientes para justificar o estudo de seqüências, pois houve necessidade da expressão que fornece a soma dos termos de uma progressão geométrica, achou-se conveniente ampliar o foco para outros tipos de seqüências, incluindo aí progressões aritméticas.

Em todas as situações realizadas pelos alunos as estratégias e conclusões acerca do resultado foram estabelecidas com justificativa por parte de cada grupo, caracterizando uma aprendizagem por descoberta, objetivo do trabalho. Conforme já salientado por Brousseau (1996), na resolução de problemas os estudantes devem agir, falar, refletir e evoluir, e uma atividade não-individual favorece esse caminho. Ainda assim, os resultados poderiam ter sido melhores caso todos os problemas tivessem sido investigados pelos alunos, como veremos a seguir.

As atividades de 1 a 4 favoreciam amplamente a criatividade dos educandos, razão pela qual foram feitas com entusiasmo. Era comum no decorrer do trabalho os alunos trocarem impressões entre si, justificando um resultado ou uma estratégia adotada – novamente via-se as fases descritas por Brousseau (1996). A potencialidade significativa do material apresentado era verificada pelo grau de envolvimento da turma.

Em relação às questões 5 a 8, foi feita a experiência de deixá-las para serem resolvidas em casa, o que acabou se revelando um erro. Justamente é na troca de impressões em sala de aula que havia evolução e produção de resultados potencialmente significativos. Tal qual a dificuldade em relação à cobrança de temas – os alunos tem o péssimo hábito de não fazê-los – também essas atividades muitos deles não fizeram. Para não romper o contrato didático estabelecido, não foi disponibilizado tempo em sala de aula para a continuação das tarefas. Desse modo, houve investigação somente a partir das dúvidas e estratégias geradas por aqueles que as desenvolveram. De qualquer maneira, previa-se que justamente nessas últimas atividades se desenvolvesse a necessidade de expandir o rol de conhecimentos, por isso, apesar de alguns acertos iniciais, a maioria não conseguiu estabelecer resultados corretos.

O decorrer, entretanto, da teoria transcorreu de maneira satisfatória, mantendo a característica que norteia sempre os trabalhos, ou seja, muita participação dos alunos, deixando com que as respostas sejam produzidas por eles ao invés de serem dadas ao surgimento da primeira dificuldade. Considerou-se atingidos os objetivos, ou seja, foram notadas evidências de aprendizagem significativa, o uso dos problemas foi eficiente para proporcionar aprendizagem por descoberta além de justificar para o estudante a necessidade do desenvolvimento de uma teoria de suporte.

7.4 SEQÜÊNCIA 4: PROBABILIDADE

Atividade 1:

Qual é a probabilidade de tirar o número 5 no lançamento de um dado comum?

Atividade 2:

Qual é a probabilidade de tirar 2 caras no lançamento de duas moedas?

Atividade 3:

Um casal possui três filhos. Qual a probabilidade de que todos sejam do mesmo sexo?

Atividade 4:

Qual é a probabilidade de lançar 5 vezes um dado comum e obter exatamente duas faces 4?

Atividade 5:

Qual é a probabilidade de num grupo de 30 pessoas haver coincidência de pelo menos dois aniversários num mesmo dia (dia e mês)?

Atividade 6:

Considere o lançamento de 2 dados. Complete a tabela abaixo calculando o percentual da probabilidade da soma das faces.

Soma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Percentual											

Arremesse dois dados 20 vezes. Anote, na tabela a seguir, a quantidade de vezes que apareceu cada soma das duas faces voltadas para cima.

Soma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade											

Preencha a tabela abaixo com os resultados obtidos por todos os colegas.

Soma	**Quantidade de vezes**														
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															

Soma	**Quantidade de vezes**														**TOTAL**
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															

Determine o percentual de cada soma obtida em relação ao total de lançamentos. Houve muita discrepância em relação às probabilidades teóricas? Considerando apenas os seus 20 lançamentos, a discrepância foi maior ou menor? Você consegue estabelecer alguma conclusão a respeito desse fato?

Soma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Percentual											

Atividade 7:

A Mega-Sena é uma loteria administrada pela Caixa Econômica Federal, em que num volante com 60 números são sorteadas seis dezenas. Você pode jogar de 6 a 15 números e ganha quem acertar seis (SENA), cinco (QUINA) ou quatro (QUADRA). A partir disso:

a) Qual é o total de resultados possíveis no sorteio dos seis números?
b) Qual é a probabilidade de você realizar uma aposta simples e ser premiado com a Sena? E a Quina? E a Quadra?
c) A tabela abaixo mostra os valores cobrados em função da quantidade de números apostada. A partir dela, estabeleça uma expressão matemática que relacione o preço da aposta em função da quantidade de números jogados.

Aposta	6 números	7 números	8 números	9 números	10 números
Valor	R$ 1,50	R$ 10,50	R$ 42,00	R$ 126,00	R$ 315,00

d) Se um apostador joga 10 números e acerta quatro deles, ele não tem direito a apenas 1 quadra. O sistema de apostas considera que ele fez todos os jogos possíveis combinando os 10 números de 6 em 6. Desse modo, qual é o número de quadras a que ele tem direito?

Atividade 8:

A Loteca é uma loteria administrada pela Caixa Econômica Federal em que o apostador tenta acertar o resultado de 13 jogos de futebol. Ganha quem acertar 13 ou 12 resultados. Pode-se, para aumentar as chances, fazer apostas duplas ou triplas, isto é, num mesmo jogo apostar simultaneamente em três prognósticos (vitória, empate e derrota - aposta tripla) ou em dois (aposta dupla). A partir disso:

a) Qual é o total de resultados possíveis na Loteca?
b) Qual a probabilidade de um jogador fazer uma aposta simples e acertar 12 jogos? E acertar 13 jogos? Atenção: A aposta simples inclui um palpite duplo.
c) Qual a chance de acertar 13 jogos se um jogador faz uma aposta de **3 triplos e 3 duplos**?
d) Qual é a probabilidade de um jogador fazer uma aposta simples e ERRAR todos os jogos?

Atividade 9:

O Pôquer é descendente direto de outros jogos antigos praticados no Oriente Médio. Entretanto, o jogo de Pôquer, como hoje ele é conhecido, tem sua origem por volta de 1800, nos Estados Unidos. Na modalidade mais praticada no Brasil, para até cinco jogadores, as cartas distribuídas são 7, 8, 9, 10, J, Q, K e A, nos quatro naipes, paus(♣), ouro(♦), copa(♥) e espada(♠). Após o embaralhamento das cartas, são distribuídas cinco a cada jogador. Nessa etapa, nos interessa prever a probabilidade de cada um sair com um determinado tipo de jogo na mão. A partir disso:

a) Considere os jogos **par**, **trinca**, ***straigth***, ***full house***, ***flush*** e **quadra**. A seguir, determine a probabilidade de fazer cada um na primeira mão e conclua qual a ordem crescente de valor.

b) Qual é a probabilidade de fazer na primeira mão um ***Royal straigth flush***?

7.4.1 Expectativas e Análise dos Resultados

As atividades utilizadas para desenvolver o tópico de Probabilidade evoluíram de uma situação simples para situações mais complexas, as quais tinham como objetivo despertar a curiosidade acerca dos fatos estudados, uma vez que se aproveitou a ampla cobertura que a imprensa faz tanto nas loterias brasileiras, em especial a Mega Sena, como também a crescente divulgação dos campeonatos de pôquer, tendo inclusive a transmissão de um canal de televisão, o SBT.

Alguns vícios iniciais eram previstos, principalmente nos resultados obtidos em dados e moedas. Os alunos consideram, inicialmente, em geral, que os resultados cara-coroa ou coroa-cara, no lançamento de 2 moedas são iguais, assim como nos dados 3-2 ou 2-3. É o primeiro ponto que precisou ser esclarecido e que ficou, de fato, claro após alguns questionamentos por parte do professor que levaram os estudantes a estabelecer por si próprios essa conclusão.

As atividades foram estabelecidas de modo a apresentar naturalmente os conceitos de probabilidade e espaço amostral, assim como fazer com que os alunos tivessem contato e compreendessem intuitivamente a lei dos grandes números. Na atividade 3 ocorreu o erro esperado quando os alunos não perceberam que a ordem em que os filhos nascem é importante, ou seja, que nascer primeiro uma menina é diferente de nascer primeiro um menino.

A atividade 5 teve a finalidade de promover o desenvolvimento da habilidade de obter a probabilidade complementar, e, através disso, chegar à resposta correta.

É muito interessante que esse resultado não é nada óbvio, ou seja, a probabilidade de ocorrer pelo menos 2 aniversários num mesmo dia num grupo de 30 pessoas é muito superior ao que intuitivamente poderia se esperar. Não raro, e ocorreu isso na experiência de sala de aula, há dúvidas por parte dos alunos em relação à correção. Ficaram convencidos após uma explicação minuciosa e principalmente após experiências realizadas na própria turma. Para isso, pediu-se que cada um escrevesse uma data qualquer num papel e após verificou-se se houve coincidência, simulando a situação-problema. É desaconselhável utilizar as datas de aniversário dos alunos pelo fato deles conhecerem de antemão se há coincidência ou não.

Quanto à atividade 6, esta teve o objetivo de trazer à discussão a lei dos grandes números. Como há um grande número de lançamentos dos dois dados, verifica-se que as probabilidades teóricas e práticas se aproximam, convencendo os alunos intuitivamente da validade da lei.

As atividades seguintes aproveitam a potencialidade oferecida por jogos e loterias para desenvolver eficazmente o conteúdo. Houve dificuldade a partir da segunda questão da atividade 7, mas o interesse aumentou. Com a percepção de que os seus conhecimentos eram insuficientes para responder adequadamente as perguntas, estava justificado perante os alunos a necessidade de desenvolver mais teoria de suporte, com estratégias mais eficientes para a abordagem dos problemas. Houve disposição natural para o prosseguimento da matéria, tendo em vista o interesse que, em geral, os estudantes têm a respeito de loterias e jogos de azar.

A abordagem ultrapassou os limites da sala de aula e se estendeu em forma de pesquisa onde os alunos foram divididos em pequenos grupos. O professor oferecia uma variedade de assuntos que podiam ser utilizados, dentre os quais, Pôquer, General (pôquer de dados), Mega-Sena, Loteca, Lotomania, Quina, Lotogol e Lotofácil, e ficava a cargo dos grupos a escolha do tema. Nessa atividade eram pedidos, além dos cálculos inerentes à pesquisa, o histórico/evolução da probabilidade e o histórico do jogo ou loteria pesquisada, assim como regras de funcionamento e curiosidades. Houve inclusive montagem de um estande na Multifeira do colégio – mostra de trabalhos desenvolvidos ao longo do ano letivo – em que um grupo de alunos apresentou o jogo de Pôquer com as regras e variações mais comuns no Brasil. A seguir podem ser vistas figuras que mostram diversos trabalhos realizados pelos estudantes:

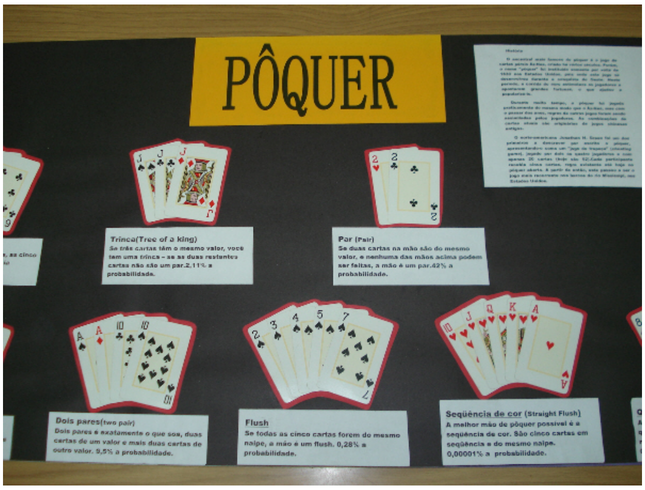


Figura 13: Trabalho sobre loterias e jogos de azar – Pôquer

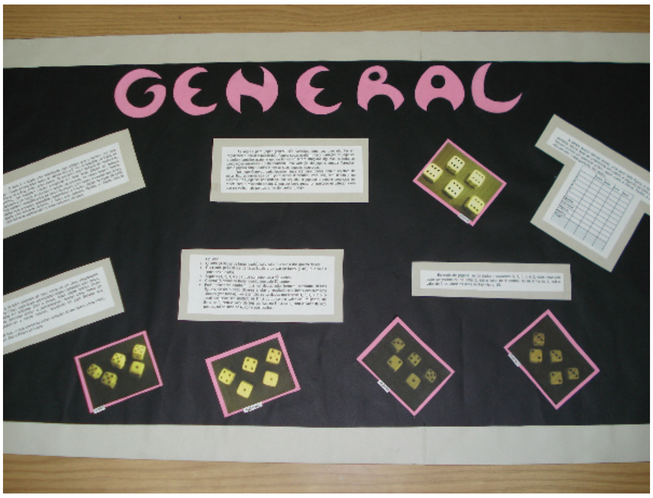


Figura 14: Trabalho sobre loterias e jogos de azar – General

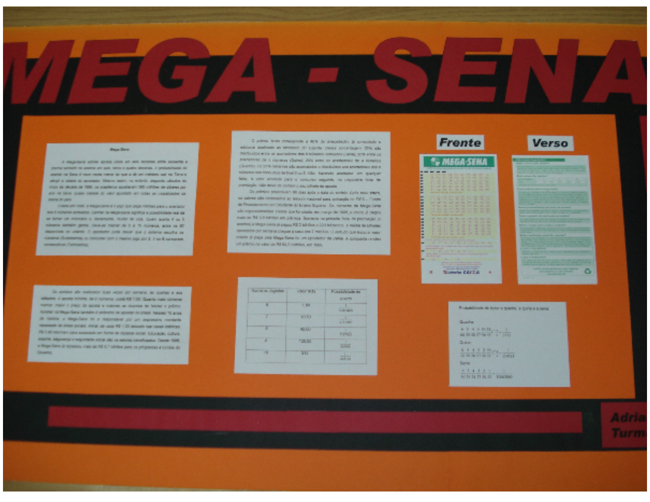


Figura 15: Trabalho sobre loterias e jogos de azar – Mega-Sena

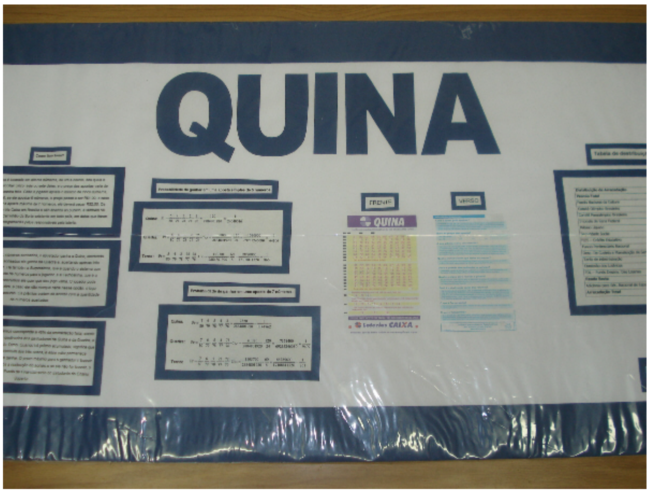


Figura 16: Trabalho sobre loterias e jogos de azar – Quina

Como forma de verificar o envolvimento de todos os componentes do grupo e evitar a simulação de aprendizagem, tal qual a teoria de David Ausubel (1980) estabelece como fundamental, ao final dos trabalhos, cada grupo respondia a algumas questões peculiares ao seu tema de pesquisa. Finalmente, para que todos os alunos tivessem contato com os diversos assuntos, as questões dos problemas geradores e outras eram feitas ou corrigidas na sala de aula.

A pesquisa sobre loterias acabou motivando um outro ponto que foi devidamente explorado na forma de um trabalho complementar: o desenvolvimento pelos alunos de uma loteria própria, isto é, uma loteria fictícia que deveria ser apresentada com regras, probabilidades de ganho por parte do apostador, formas de premiação e destinação social dos recursos arrecadados. Ficou estabelecido que seriam apresentados o *layout*, as explicações básicas no verso do volante que representava a loteria e os cálculos justificando as probabilidades apresentadas.

Surge aqui, por isso, outro ponto que pode ser explorado na apresentação de problemas: a situação didática dá lugar a uma situação adidática, conforme citava Brousseau (1996), uma vez que o interesse veio de fora, com os alunos estabelecendo comparações e gerando aprofundamento do estudo iniciado. Permeia isso, a determinação em se buscar algo que inicialmente não fora proposto, mas que pôde ser desenvolvido a partir de questões levantadas pelos estudantes. A seguir, podemos visualizar algumas das loterias criadas:

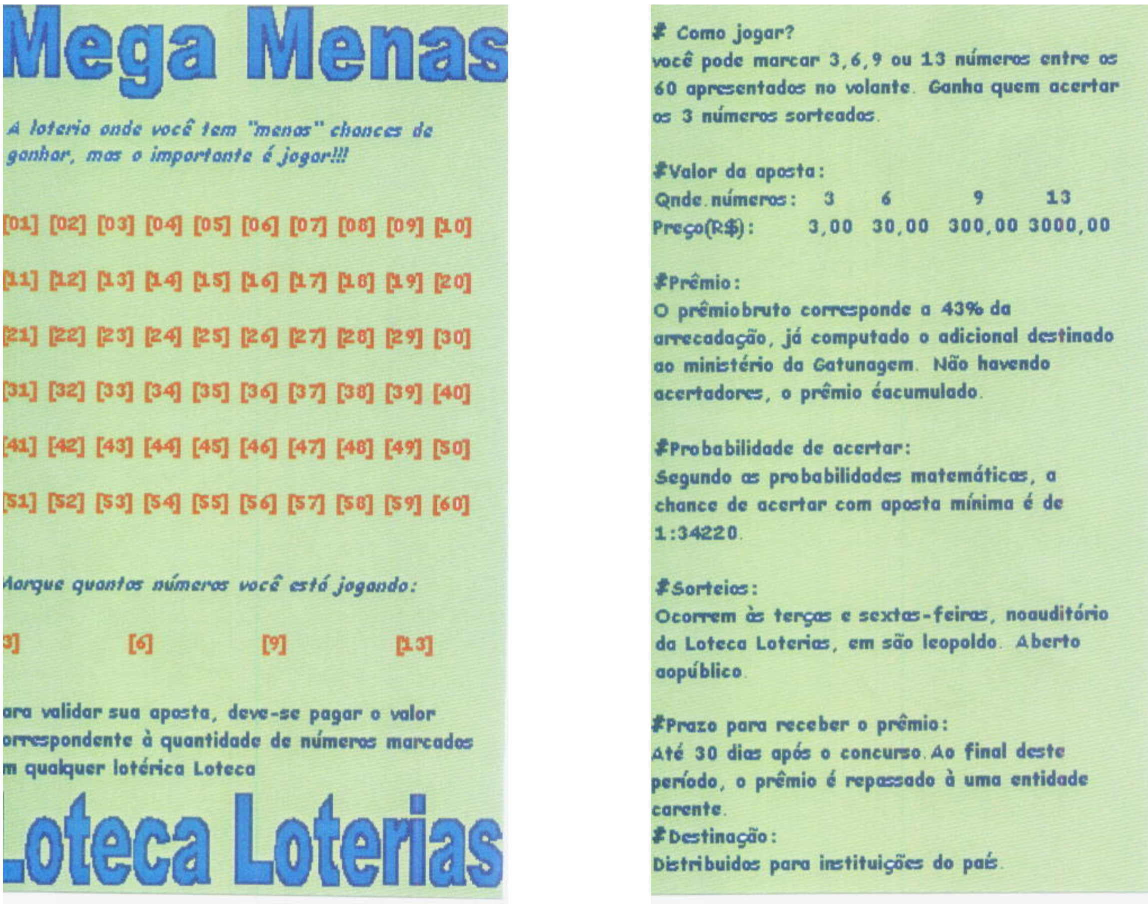


Figura 17: Loteria criada pelos alunos – Mega Menas

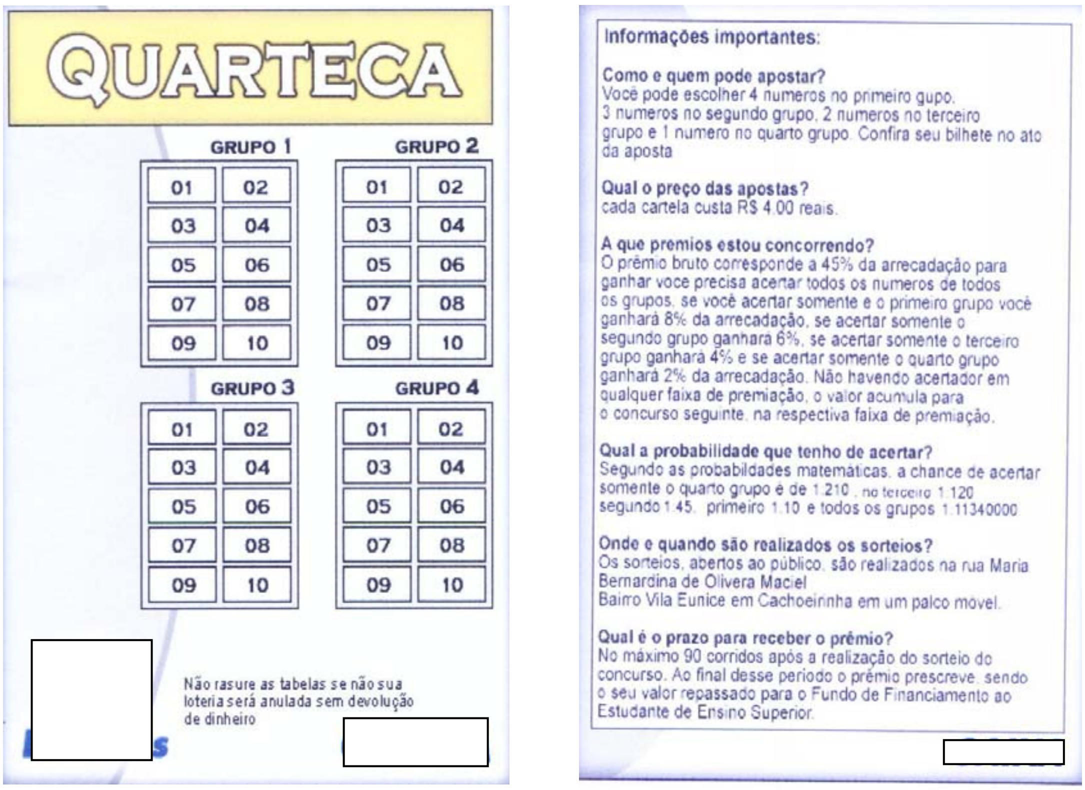


Figura 18: Loteria criada pelos alunos – Quarteca

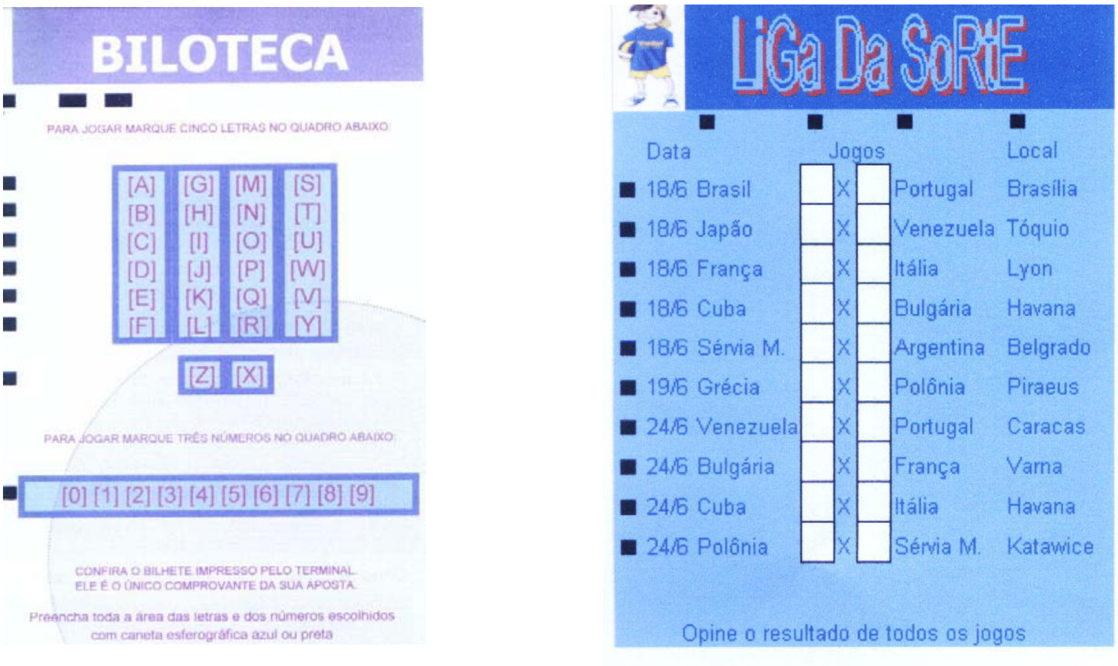


Figura 19: Loterias criadas pelos alunos

7.5 SEQÜÊNCIA 5: GEOMETRIA ANALÍTICA

Atividade:

Abaixo, pode-se visualizar uma obra do pintor Wassily Kandinsky (figura 20). Note que a pintura basicamente traz elementos geométricos e um sistema de inequações poderia representar não só uma das figuras como também reproduzir toda a obra do artista.

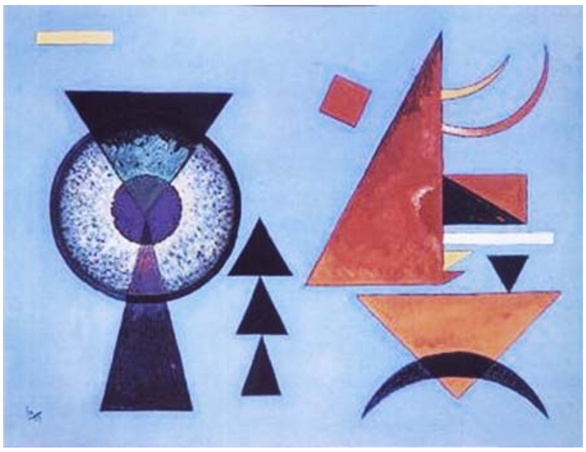


Figura 20[5]: A cura del Dott

[5] Fonte: http://www.oftal.it/virtuale_file/kandinski10b.JPG

Trace eixos coordenados na figura acima e crie um sistema de inequações que represente pelo menos três das figuras geométricas existentes na obra.

7.5.1 Expectativas e Análise dos Resultados

A questão inicial apenas foi a motivação para desenvolver estudos mais aprofundados em Geometria Analítica. Apesar dos alunos terem visto a representação gráfica da reta quando estudaram função polinomial do 1º grau, na 1ª série do Ensino Médio, a maioria não lembrava como descobrir a função a partir de pontos determinados. Nenhum deles havia tido contato com gráficos de inequações, razão pela qual não havia possibilidade do problema ser respondido. Dessa forma, a intenção única nessa atividade era dar a motivação inicial para que o tópico de Geometria Analítica fosse estudado, ou seja, fazer com que houvesse um objetivo a ser atingido após o avanço da teoria. Portanto, essa finalidade do uso dos problemas geradores foi plenamente atingida. Para mobilizar mais os alunos, foram apresentados trabalhos desenvolvidos na disciplina Educação Matemática e Tecnologia Informática, na UFRGS, em 2002, sob a orientação da professora Maria Alice Gravina. A figura 21, que fora criada a partir da obra original por Daniela Oliveira, aluna da graduação em Matemática, pela UFRGS, foi utilizada para demonstrar que havia, de fato, possibilidade de reproduzir uma obra a partir de linguagem matemática.

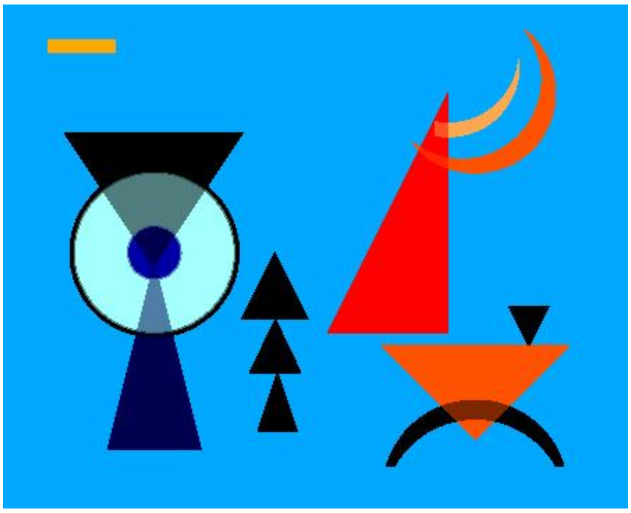


Figura 21[6]: Reprodução da obra de Wassily Kandinsky

[6] Fonte: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_galeria_trabalhos/ativ_grapheq_2002/grapheq3/q3.htm

Não nos interessa agora descrever a condução dos tópicos em Geometria Analítica utilizados para embasar os alunos a fim de resolver o problema gerador proposto, os quais seguiram a ordem normal, ou seja, estudo do ponto, da reta e da circunferência. O que parece importante é que, após a teoria, sendo possível a resolução do problema inicial, relatar os resultados obtidos e a forma com que o trabalho foi encaminhado e feito pelos alunos. Inicialmente foi necessário o estudo do *software* que se utilizaria para gerar as regiões a partir das equações e inequações. Para tanto, tal qual a disciplina da graduação da UFRGS, foi utilizado o *GraphEquation*. A proposta então foi apresentada aos alunos para dar início ao desenvolvimento:

Projeto: Semana da MateArte Moderna

Justificativa: Possibilitar ao aluno complementação da teoria desenvolvida em sala de aula no conteúdo de Geometria Analítica.

Objetivo: Utilizar o conhecimento de Geometria Analítica para gerar regiões e curvas no plano de modo a reproduzir o mais fielmente possível uma obra de arte. Objetiva-se assim fazer o aluno dominar a manipulação de equações e o comportamento das curvas, além de fazê-lo criativamente desenvolver alternativas para encontrar uma equação que modele uma figura. O software utilizado para a geração de regiões e curvas é o *GraphEquation*.

Etapas: O projeto é composto de 3 etapas: A primeira é o estudo e manipulação do *software*, indispensável para que o aluno domine os comandos básicos. A segunda diz respeito à escolha da obra abstrata para a reprodução, a qual deve ser de um artista do qual se possa apresentar um breve resumo de sua carreira. A terceira, finalmente, é o trabalho de reprodução que o aluno deverá fazer em dupla ou individualmente.

Manipulação do software: Acesse www.sinodal.com.br e faça o download do *software*. Para acessar e abrir a obra que será imitada, vá em Médio / Áreas / Matemática / Downloads. Deixe esse arquivo aberto para a visualização do objeto a ser reproduzido (figura 22).

Figura 22: Obra modelo para a manipulação do *software*

1. Como fazer o círculo em vermelho?

É necessário primeiramente ter em mãos a obra impressa para traçar os eixos, fazer uma escala adequada (limite de 10 unidades para cada direção). Para fazer o círculo vermelho, determinam-se as coordenadas do centro e o tamanho do raio e utiliza-se uma inequação conforme visto em aula. Digite (x-1.6)^2+(y-4.7)^2<1.6^2 (lembre-se que a vírgula é representada pelo ponto e o “elevado” é representado por ^). Tecle ENTER, escolha CARTESIANO para as coordenadas e escolha uma cor de fundo parecida com a da obra. Volte à janela da *relación #1*, clique em *color* e escolha a cor vermelha para o círculo. Proceda dessa forma em todas as etapas abaixo, sempre escolhendo a cor que mais se aproxima do original a ser reproduzido.

2. Como fazer o arco amarelo da parte superior do círculo?

Primeiramente vá até a barra de ferramentas do *GraphEq* e clique em *Gráficos*, em seguida *Nueva Relación* (faça isso sempre que necessário). Digite (x-1.6)^2+(y-4.7)^2<1.9^2. No fim desse comando tecle TAB e digite na janela que abriu (x-1.6)^2+(y-4.7)^2>1.6^2. Tecle TAB novamente e digite por fim y>4.9. Tecle ENTER e observe o que você fez, procurando entender todos os passos. Selecione a cor mais adequada.

3. Como realizar as outras partes?

A partir de agora vá apenas digitando o que é pedido e analisando sempre o que é formado da obra original. Lembre que é necessário obter essas curvas a partir do original impresso e que isso implica em rascunhar, descobrir pontos nas retas, medir raios, determinar intervalos de x e y válidos. Procure estar atento ao que é gerado com cada entrada de dados.

-8.5<y<-8.3 TAB 4.6<x<7.7 ENTER

3.4<x<5.9 TAB -7.8<y<-7.7 ENTER

Para fazer as retas do desenho vamos analisar duas situações:

1º) Vamos fazê-las sem nos preocupar com os detalhes de parte mais grossa e mais fina. Lembre-se de antes de cada entrada, solicitar uma *nueva relación*.

3x/4+3<y<3x/4+3.2 TAB x∈[-5,7.2] ENTER

93x/38-9.3<y<93x/38-9.1 TAB x∈[4.5,7.2] ENTER

(8x-12)/15<y<(8x-12)/15+0.1 TAB x∈[4.5,6] ENTER

8.2x/4.6-37.7/4.6<y<(8.2x/4.6-37.7/4.6)+0.2 TAB x∈[2.5,5.9] ENTER

5x/5.2-32/5.2<y<(5x/5.2-32/5.2)+0.2 TAB x∈[-4.5,2.5] ENTER

2º) Vamos fazê-las nos preocupando com os detalhes. Isso torna o processo mais difícil, pois temos que trabalhar com um sistema de inequações com duas retas de leis completamente diferentes. Para que você não perca o que já fez, abra outro arquivo do *GraphEq* e digite: (lembre-se de antes de cada entrada solicitar uma *nueva relación*)

2.6x/4.2+2.6<y<2.9x/5+2.9 ENTER

1.91(x+0.7)-8>y>7(x+0.7)/4-7.3 TAB 1.7<y<2.9x/5+2.9 ENTER

Voltemos agora ao primeiro arquivo para dar continuidade ao trabalho. Digite:

2.5^2>(x-0.5)^2+(y-6)^2>2.2^2 TAB y∈[5.2,9] TAB x∈[-3,0] ENTER

2.2^2>(x+0.8)^2+(y-10.2)^2>1.9^2 TAB x∈[0,2] ENTER

2.6^2>(x-0.1)^2+(y-6)^2>2.2^2 TAB x∈[-4,-1.2] TAB y>5.3 ENTER

2.25^2>(x+1.2)^2+(y-10.2)^2>1.9^2 TAB x∈[-1.3,1] ENTER y>-3x/5-3.85 TAB x∈[-7.6,-7] TAB y<0.7 ENTER

y>-3x/5-1.85 TAB x∈ [-7.6,-7] TAB y<2.7 ENTER

y<2x/5+6 TAB x∈[-8.5,-7] TAB y>2.72 ENTER

y<2x/5+4 TAB x∈[-8.7,-7] TAB y>0.75 ENTER

y<-1.77x+0.4 TAB x∈[3.13,3.44] TAB y>-5.8 ENTER

y<2x/1.1-10.7 TAB x∈[2.7,3.1] TAB y>-5.8 ENTER

y<13x/7.5-12.2 TAB x∈[2.5,3.1] TAB y>-8 ENTER

x=3.1 TAB y∈[-8,-5.8] ENTER

As entradas de dados acima geram as regiões mostradas na figura 23.

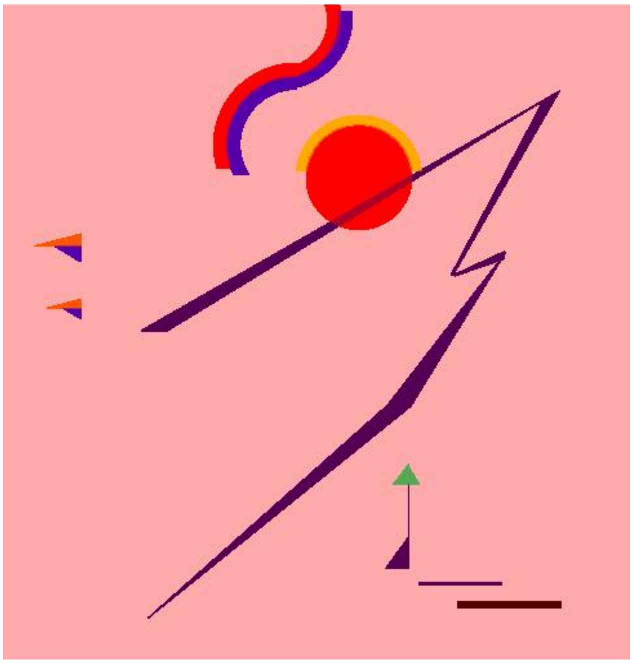


Figura 23: Reprodução da obra modelo

Escolha da obra de arte: Acesse www.google.com.br e procure por alguns artistas (Kandinsky, Miró, Delaunay, …). Pesquise várias obras de diversos artistas e escolha aquela que considerar adequada para a reprodução. O *software GraphEquation* trabalha em 2 dimensões, portanto tenha cuidado ao escolher quadros que apresentem pinturas em 3 dimensões, pois será mais difícil a replicagem.

Condições de entrega: Você deve apresentar a obra original e a reproduzida impressas em estilo fotografia para exposição. Junto deve constar um pequeno resumo da vida e carreira do pintor e as equações e inequações que foram utilizadas para a geração do quadro. Apresente também o rascunho utilizado para a obtenção das equações das curvas.

Conforme a proposta previa, para realizá-la era imprescindível o domínio do software pelos alunos. Assim, foram feitas 2 aulas no laboratório de informática para manipulação do programa. Além disso, foram disponibilizadas monitorias à tarde para atender necessidades mais individualizadas. Nessa etapa, o professor pôde acompanhar os procedimentos adotados, a criação dos eixos coordenados, a obtenção de pontos via medição com régua para o estabelecimento das equações e inequações das curvas, a verificação experimental do centro e raio de uma circunferência e a adoção de estratégias para gerar adequadamente as regiões necessárias para a concretização do trabalho.

A manipulação do *software* não se tornou empecilho e o prazo dado de um mês foi suficiente para a concretização do projeto. Pelas características da atividade, os alunos podiam verificar o andamento dos trabalhos, pois tão logo era obtida uma equação para determinado tipo de curva, a utilização do software indicava a correção ou não do resultado. Essa dinamização agradava os alunos, acostumados à velocidade de obtenção de respostas nessa era tecnológica, além de motivá-los uma vez que viam a obra ser reproduzida a cada equação ou inequação bem sucedida.

Foi dada liberdade aos estudantes de se organizarem individualmente ou em duplas para a realização da atividade. Imprescindível, no entanto, foi a verificação da aprendizagem através de um teste ao fim do projeto que consistia de uma figura geométrica entregue para obtenção das equações e inequações das regiões do desenho. Essa verificação de aprendizagem foi realizada no contra-turno, onde o grupo realizava a tarefa individualmente. Tal procedimento ajuda a evitar a simulação da aprendizagem, prevista na teoria de Ausubel (1980). Os resultados atingidos pelos alunos podem ser conferidos nas figuras a seguir, as quais mostram as obras originais e reproduzidas para comparação. Cabe ressaltar que a obra da esquerda é a original.

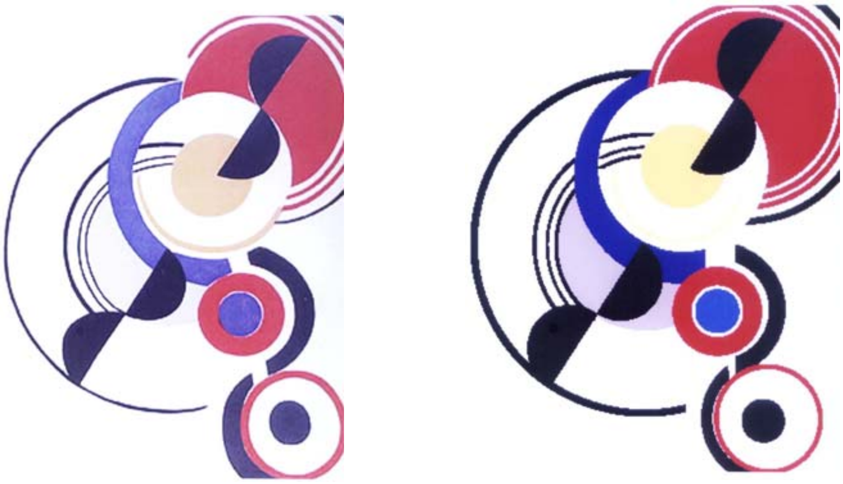


Figura 24: Reprodução de obras – Artista: Delaunay

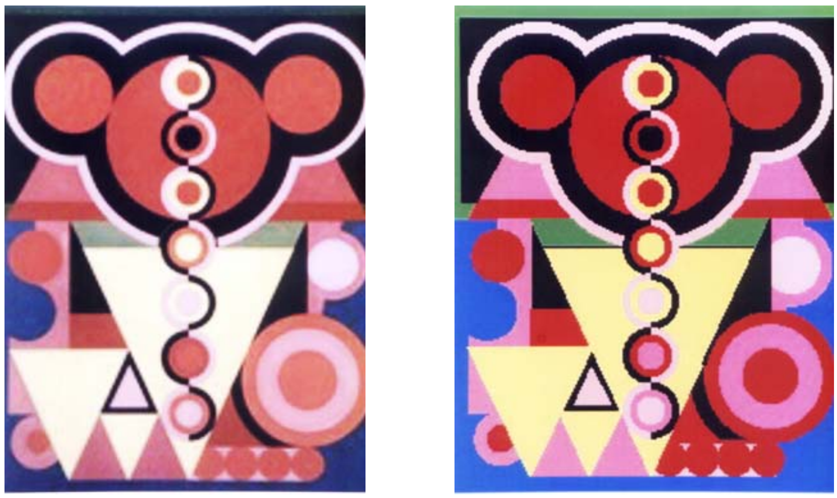


Figura 25: Reprodução de obras – Artista: Herbin

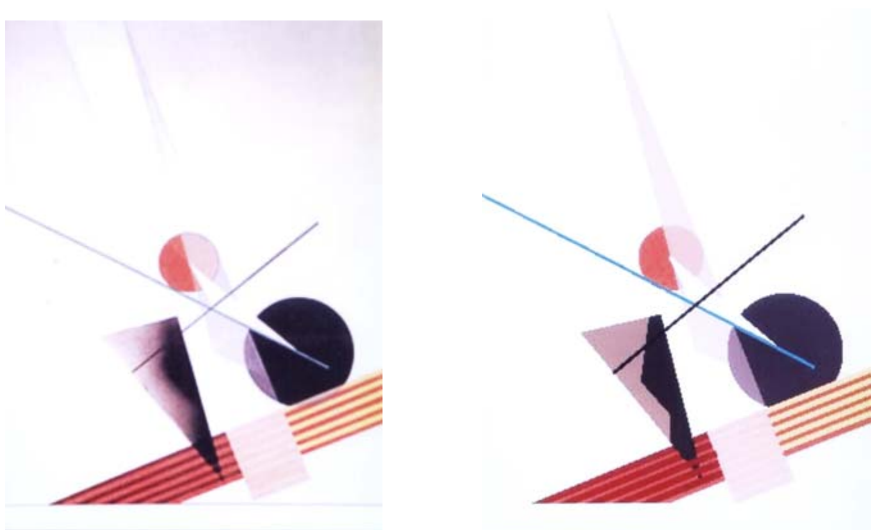


Figura 26: Reprodução de obras – Artista: Laszlo

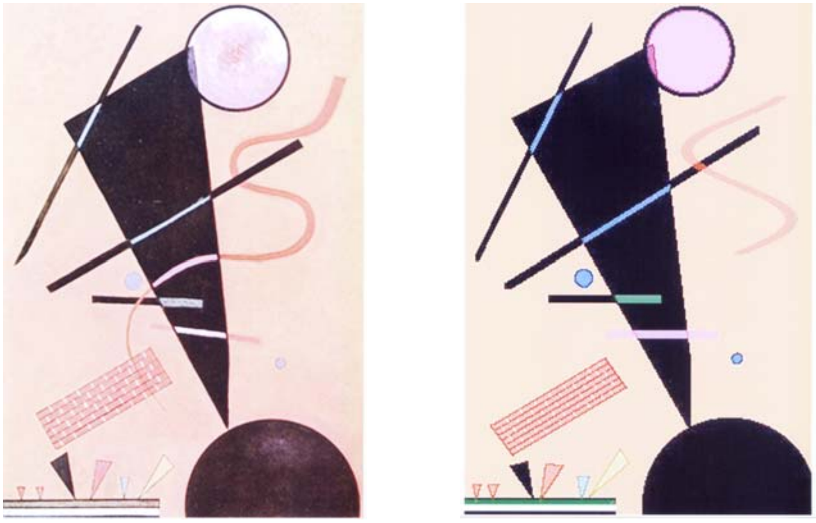


Figura 27: Reprodução de obras – Artista: Kandinsky

Figura 28: Reprodução de obras – Artista: Kandinsky

Figura 29: Reprodução de obras – Artista: Delaunay

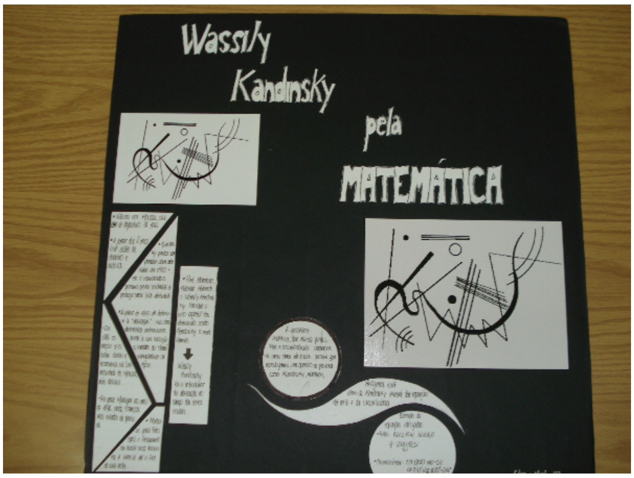


Figura 30: Reprodução de obras – Artista: Kandinsky

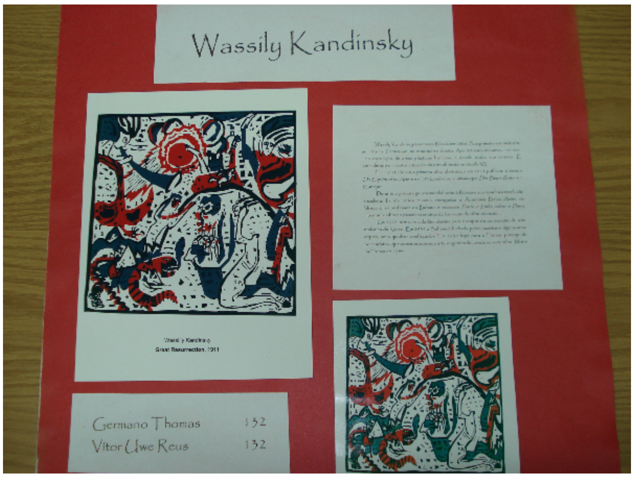


Figura 31: Reprodução de obras – Artista: Kandinsky

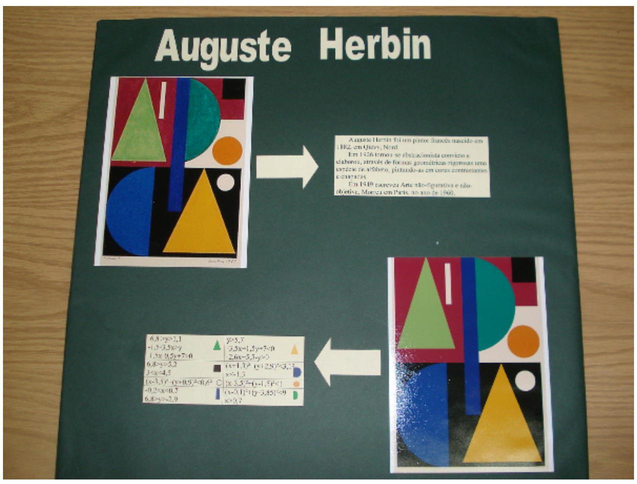


Figura 32: Reprodução de obras – Artista: Herbin

Ao final de 2005, a TV Unisinos fez uma matéria sobre esse projeto de reprodução de obras de arte com emprego da matemática na qual puderam ficar comprovadas algumas das etapas do desenvolvimento citadas anteriormente. Os alunos puderam explicitar o modo de organização do trabalho em diversas fases, desde a escolha da obra a ser reproduzida, passando pela transformação das curvas e regiões em equações e inequações, a utilização do programa *GraphEquation* no laboratório de informática e a exposição da obra pronta numa exposição organizada no Colégio Sinodal.

Em 2006, durante o IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática, ocorrido em Caxias do Sul, foi exposto em forma de painel a metodologia utilizada e as obras reproduzidas.

Com essa atividade, ficam encerrados os tópicos que foram objeto de análise por serem introduzidos através dos problemas geradores e foram utilizados para a produção dessa dissertação. Apesar disso, de maneira alguma ficam esgotados os conteúdos matemáticos do ensino regular que podem ser introduzidos a partir dessa abordagem.

Cabe acrescentar ainda que o tempo despendido para desenvolver o conteúdo dessa forma não comprometeu o planejamento anual. Fez-se questão de utilizar turmas regulares para apresentar a proposta justamente para termos noção da sua aplicabilidade. Se por um lado é necessário um período maior na abertura do novo tópico de matemática, em seguida isso é compensado pelo maior envolvimento dos alunos com o conteúdo, razão pela qual a preocupação com o tempo disponível para desenvolver todos os capítulos da matéria não é motivo para relegar a utilização dos problemas geradores.

7.6 PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO

O item avaliação tem papel destacado nessa proposta, pois é nela que se pode verificar se os objetivos têm sido atingidos. Conforme Ausubel (1980) insiste, nos processos avaliativos deve ser evitada a simulação da aprendizagem, oferecendo aos aprendizes atividades que exijam transformação do conhecimento a fim de evitar a mecanização e a mera reprodução de passos e procedimentos vistos em aula. Nesse contexto, a avaliação também fornece subsídios aos próprios estudantes para que façam sua análise a respeito do desenvolvimento atingido.

O processo de avaliação do colégio em questão é global e cumulativo, sendo a recuperação dos objetivos não atingidos um processo contínuo e paralelo. Não se adotam menções numéricas, mas conceitos que traduzem o desempenho do aluno. São cinco os conceitos possíveis:

- Insuficiente: o aluno não atinge os objetivos mínimos necessários.
- Suficiente: o aluno atinge os objetivos mínimos previstos.
- Regular: o aluno atinge os objetivos básicos.
- Bom: o aluno atinge plenamente os objetivos previstos.
- Muito Bom: o aluno atinge com destaque todos os objetivos previstos.

Assim, com foco no tipo de avaliação defendido por Ausubel e de acordo com os critérios adotados no Plano Político e Pedagógico do Colégio Sinodal, a avaliação foi composta de testes, provas e trabalhos em que se mesclaram exercícios e problemas. Os exercícios tinham como finalidade a verificação da fixação de pontos importantes da teoria enquanto que os problemas visavam a avaliar de que modo os alunos estabeleciam conexões e transformações a partir do estudo desenvolvido em sala de aula.

No caso de trabalhos, como os apresentados nessa dissertação – funções trigonométricas, desenvolvimento de loterias, reprodução de obras de arte – eram realizadas atividades que permitiam ao professor investigar de que modo o grupo havia conduzido sua tarefa. Tais atividades consistiam de perguntas orais na apresentação dos alunos ou aplicação de perguntas escritas que buscavam verificar a participação de cada componente no processo de obtenção de conhecimento.

O desempenho dos alunos se mostrava dentro dos padrões esperados, ou seja, a utilização de problemas no desenvolvimento da teoria não produzia em curto prazo modificações significativas nas habilidades dos alunos, acostumados a outro tipo de abordagem inicial, com desenvolvimento de teoria seguido de aplicações e cobrança em avaliações principalmente de exercícios. A grande vantagem verificada com a utilização da abordagem por problemas geradores se dá em médio e longo prazo, com a estruturação mais sólida de conceitos importantes que são rearranjados para dar conta de outros tipos de problemas. Tal afirmação é amparada pelo autor mediante observação dos resultados alcançados nos processos avaliativos de alunos da 3ª série do Ensino Médio, que já tiveram esse tipo de experiência na série anterior.

8 ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS

Com o objetivo de avaliar e verificar de que forma os alunos percebem e interagem com um plano de aula voltado para a resolução de problemas, foram aplicados questionários numa das turmas de forma que sua devolução era voluntária. Foram utilizados três ao todo, sendo dois deles com objetivos bem específicos, a respeito de um conteúdo dado, aplicados logo após seu término, que não serão objetos de análise aqui. Os modelos estão disponíveis nos anexos.

O terceiro questionário, aplicado no final do ano letivo, procura verificar as impressões dos alunos a respeito do seu aprendizado, da utilização dos Problemas Geradores e do retorno que tal prática recebia dos alunos. Abaixo, são reproduzidas as perguntas e as respectivas respostas:

Pergunta 1: Como você avalia do ponto de vista do aprendizado a Matemática desenvolvida nesse ano?
Pergunta 2: Na medida do possível, as atividades a serem desenvolvidas sempre foram iniciadas através de um Problema Gerador, isto é, um problema que procurasse fazer com que o aluno visse a finalidade do estudo a ser desenvolvido. Você notou tal característica? Como você avalia essa prática?
Pergunta 3: Dê uma nota de 1 (pior) a 5 (melhor) para a forma como os conteúdos foram abordados através de problemas. Faça um comentário se também desejar.

Aluno 1:
1) Foi muito bom! Mesmo eu tendo uma dificuldade maior neste ano do que nos outros, o professor realmente se empenhou para que toda a turma aprendesse a matéria.
2) Notei, e achei boa, pois além de mostrar a finalidade, também dá uma amostra do básico da matéria, e o aluno não entra tão perdido.
3) Nota 5. Todos os assuntos forma abordados e houve empenho do professor para que fossem entendidos.

Aluno 2:
1) Muito bom. Achei o método de aplicação da matéria muito interessante e para mim muito mais proveitoso.

2) Sim, muito boa. Facilita o aprendizado e simplifica na hora de estudar.
3) Nota 5. Dinâmicas e muito boas as aulas, deixando sempre muito clara a matéria estudada.

Aluno 3:

1) Apesar de não ter me saído muito bem, reconheço o método usado nesse ano para o aprendizado. É muito bom, mas se a pessoa não tem uma “boa lógica”, não irá bem, como eu.
2) Acho muito interessante, mas é como eu falei anteriormente, se você não tem um bom raciocínio matemático, não irá bem durante um ano inteiro, independente das horas de estudo.
3) Nota 3. Até hoje tenho dificuldades com conteúdos do início do ano. E estudo não faltou, muito menos disposição para melhorar.

Aluno 4:

1) Neste ano as aulas de Matemática se demonstraram bem importantes e dinâmicas. Houve uma mudança em relação aos anos anteriores, exigindo mais dos alunos.
2) Sim, esta prática desperta a atenção e o pensamento próprio, fazendo com que a pessoa se interesse com vigor pelo assunto e a necessidade de sabê-lo.
3) Nota 4.

Aluno 5:

1) Acho que todos os conteúdos foram dados com o máximo do professor, auxiliando quando eu tinha dúvidas.
2) Isso era bom para estimular os alunos a fazerem através de tentativas, o que, na minha opinião, era bom. Mas às vezes por não ter sido dada uma instrução antes, o aluno podia desistir mais facilmente.
3) Nota 3.

Aluno 6:

1) Bom. Foram conteúdos interessantes, alguns mais difíceis e que eu tinha dificuldades, mas aprendi com isso.

2) Notei. Gosto desse sistema, porque assim sabemos onde e como utilizar problemas parecidos, sem a utilização de fórmulas.
3) Nota 4.

Aluno 7:

1) Com o passar do ano fui adquirindo mais facilidade. Com certeza meu conhecimento na Matemática cresceu muito.
2) Sim, porque são cálculos que usamos para resolver questões interessantes, que estão ligadas a nós. Por exemplo, a matemática financeira.
3) Nota 4. Achei realmente interessante.

Aluno 8:

1) De maneira geral, tive minhas melhores aulas de Matemática no Sinodal. Se alguém deixou a desejar, fui eu.
2) Acho interessante. Se tu estás querendo dizer das explicações que têm antes para explicar a origem das coisas, acho muito interessante sim.
3) Nota 4. As coisas também não foram perfeitas. Esse "perfeitas" eu digo não em forma negativa, mas juntando em um todo as aulas de Matemática. Mas falando somente da sala de aula, do jeito que está, está bom. As aulas são divertidas, tu és um bom professor também, faz a aula render.

Aluno 9:

1) Muito bom.
2) Claro. Assim podemos criar métodos próprios para resolução.
3) Nota 5.

Aluno 10:

1) Muito bom.
2) Notei. É uma prática boa, pois ajuda na compreensão.
3) Nota 5.

Aluno 11:

1) O aprendizado neste ano foi muito bom. Todos os conteúdos foram bem explicados. Foi o melhor ano de Matemática no colégio.

2) Essa prática é boa na medida que o aluno participa junto da resolução do problema.
3) Nota 5. Continuar com o bom nível das questões e provas. Continuar “puxando” os alunos.

Aluno 12

1) Estou satisfeita. Aprendemos tudo da melhor maneira possível. Foram conteúdos interessantes. Admito que certa parte não dominei muito bem, mas tenho uma boa idéia do que seja.
2) Notei. É muito útil. Já aprendemos a matéria antes de ela ser explicada, de uma maneira fácil e prática, através desses problemas.
3) Nota 4.

Aluno 13:

1) Da forma que foi ensinada e apresentada a matéria, consegui aprender plenamente o conteúdo.
2) Sim, e é bem legal.
3) Nota 4,5.

Aluno 14:

1) Com certeza este ano aprendi muito mais, pois a matéria foi abordada de forma interessante, relacionando as situações do dia-a-dia.
2) Acho bom, pois assim o aluno nota como é importante aquela matéria e assim presta mais atenção.
3) Nota 4.

Aluno 15:

1) O aprendizado foi ótimo, pois o aluno tinha de rever a matéria não somente na aula, dando um maior preparo para as provas e o futuro.
2) Sim, pois após dado o problema, o aluno tinha de alguma forma arranjar um meio de solucioná-lo. A forma com que estes foram iniciados foi bastante interessante, fazendo com que os alunos exercitassem seu pensamento cada vez mais, descobrindo novas idéias e maneiras de solucionar o mesmo.

3) Nota 5, pois a forma com que os conteúdos foram trazidos até os alunos foi muito boa, dando-nos um grande preparo para as provas. O polígrafo desenvolvido com o conteúdo também estava bom, facilitando o estudo não só na aula como em casa.

Aluno 16:

1) O aprendizado foi muito bom, pois a forma como ocorriam as avaliações faziam com que o aluno revisasse todo o conteúdo do ano, facilitando assim a absorção de mais informações a cada prova ou teste.
2) Sim, pois primeiramente era dado o problema como tarefa, para fazer o aluno desenvolver um meio que o solucionasse. Achei interessante a forma como os conteúdos foram iniciados, pois fazia com que os alunos procurassem soluções para problemas não vistos antes.
3) Nota 5, pois as aulas eram bem desenvolvidas.

Aluno 17:

1) O ano foi muito bom, aprendi a pensar matematicamente de um modo diferente e com isso a Matemática se tornou muito mais simples e útil no meu dia-dia.
2) Adorei a técnica de ensino. Antigamente quando aprendia algo diferente em Matemática, pensava que nunca iria utilizar isso em minha vida, mas com este novo modo de aprendizado estou vendo que tudo que aprendemos pode ser útil.
3) Nota 5, pois com este método de aprendizagem aprendi a gostar de Matemática e vi que ela é muito útil em meu dia-dia.

Aluno 18:

1) Para mim, o ano de 2006 foi um dos melhores anos, se não o melhor no aprendizado da Matemática. Têm muitas partes da matéria que eu vejo utilidade no dia-a-dia, e por essa razão eu acabo me lembrando bem da matéria.
2) Notei essa característica presente nas atividades. E a considero um ótimo método de trabalhar o raciocínio matemático, de forma que o aluno começa a procurar soluções de problemas para os quais ainda não foi “treinado”, a partir de conhecimentos anteriores.

3) Nota 5, além de tudo que já foi mencionado acima, eu acho que o fato de cada vez mais aparecer problemas mais elaborados ajudou muito a desenvolver o raciocínio matemático.

Aluno 19:

1) Eu considero que o aprendizado da matemática em 2006 foi muito bom. O método acumulativo fez com que aprendêssemos todas as matérias e firmá-las para o vestibular.
2) Sim. O método faz com que os alunos entendam a matéria sem formas de apenas memorização. Ele faz com que os alunos busquem soluções alternativas, o que resulta num maior aprendizado e incentiva a criatividade e o raciocínio lógico dos mesmos. Com o problema gerador, o professor consegue acompanhar claramente a evolução do seu grupo e consegue perceber as dificuldades. Considero um método de ensino muito eficiente, pois faz com que todos aprendam e não decorem a matéria.
3) Nota 5. Considero que a forma como o professor demonstrou as matérias foi muito boa, pois fez com que o grupo entendesse gradativamente os assuntos abordados, procurando eliminar aos poucos as dúvidas. Procurou em cada exercício abrir uma nova linha de raciocínio.

Aluno 20:

1) Muito bom o aprendizado deste ano. Pude desenvolver meu raciocínio matemático muito bem, pois a forma que foi apresentado o conteúdo sempre gerando uma dúvida que logo mais era resolvida.
2) O conteúdo foi apresentado de um modo muito eficiente.
3) Nota 5, pois gostei das aulas. Realmente aprendi, pois me lembro de tudo que foi passado no ano.

Após as devoluções, com uma leitura atenta, pôde-se verificar que, no geral, a aceitação do método de introdução dos conteúdos foi muito boa. As próprias expectativas dos alunos foram atendidas, conforme é verificado em suas respostas. Esse retorno, a partir de um questionário sem identificação e de devolução voluntária, permite concluir que há plena possibilidade de desenvolver o trabalho em sala de aula a partir do uso de problemas.

CONCLUSÃO

Durante a realização desse trabalho, a idéia pessoal de que se podia modificar a forma como a Matemática era abordada em sala de aula, sem privar o aluno do conhecimento ao qual ele tem direito, cresceu pelos resultados que estavam sendo atingidos e pela forma que o grupo de alunos, turmas regulares de Ensino Médio, se portava diante das atividades apresentadas.

Tínhamos quatro objetivos quando da realização dessa proposta. O primeiro deles, investigar se o uso de problemas geradores antes da introdução de um novo conteúdo possibilita a aprendizagem por descoberta. Este objetivo foi atingido, pois a utilização de problemas geradores no desenvolvimento do conteúdo permitiu que aspectos importantes relacionados aos conteúdos que foram desenvolvidos fossem descobertos pelo aluno antes de serem significativamente incorporados à sua estrutura cognitiva, tal qual Ausubel sugere. Dessa forma, o que vai ser aprendido pelo aluno não é apresentado sob forma final, sendo o aprendiz sujeito de seu desenvolvimento.

Quanto ao segundo objetivo, investigar se o uso de problemas geradores antes da introdução de um novo conteúdo contribui para que o aluno percebesse que seus conhecimentos não são suficientes para resolver situações-problema relacionadas ao conteúdo, justificando seu estudo, conforme Vila indica, igualmente foi atingido. Ora, sabemos que não é difícil criar atividades onde o aprendiz não tem a visualização de respostas sobre tópicos ainda não vistos. De qualquer forma, a finalidade fundamental de justificar perante o estudante a abordagem de um dado conteúdo, fazendo com que ele responda previamente questões como “Por que estamos estudando isso?” foi plenamente atingida. Nitidamente os alunos ficavam satisfeitos com esse modo de apresentação de um tópico novo, conforme é possível verificar nas respostas do questionário que investigava esse quesito.

O terceiro objetivo, verificar evidências de aprendizagem significativa, também foi alcançado, pois a possibilidade de realizar os problemas geradores em duplas ou pequenos grupos permitiu a troca de idéias e estratégias e auxiliavam os alunos a produzirem avanços, podendo ser verificado que a nova informação se relacionava com aspectos da estrutura de conhecimento já existente no aprendiz, tal como Ausubel estabelece.

Pôde-se verificar, igualmente, de forma nítida, o surgimento das diversas fases previstas por Brousseau na solução de um problema. Os estudantes passaram pela situação de ação quando alcançavam uma solução de forma mais intuitiva e experimental e, em seguida, passavam à fase de formulação, quando sistematizavam o modo de resolução e procuravam encontrar um padrão que pudesse ser aplicado em outros problemas. Via-se a fase de validação quando desenvolviam a certeza de que a resposta estava correta, seja na comparação com os resultados encontrados pelos colegas, seja na verificação do problema pelo professor. A partir daí institucionalizava-se um modo eficaz para resolver problemas daquele tipo.

Finalmente, o quarto objetivo também foi alcançado, uma vez que a estruturação com o uso de problemas geradores antecedendo o conteúdo a ser apresentado, bem como a utilização de problemas que exigem transformação do conhecimento, evitando a simulação da aprendizagem, permitiu oferecer uma alternativa para a apresentação do tópico de Análise Combinatória e Probabilidade, conforme se verifica no anexo.

Após a análise dos questionários respondidos pelos alunos (modelo disponível no apêndice), ficou evidenciado que o modo de abordagem através dos problemas geradores mostrou-se eficiente para introduzir um novo tópico de matemática. A nota solicitada para avaliar o procedimento alcançou uma média de 4,25 de 5 pontos ou 85%. Os estudantes argumentaram, entre outras coisas, que consideraram o uso de problemas geradores eficaz porque permite uma visão antecipada do que poderá ser alcançado com o novo estudo que está sendo desenvolvido.

Durante as aulas regulares, a participação dos alunos aumentou. Após a socialização da solução do problema, os estudantes procuravam saber se uma outra estratégia (sua) que alcançava a resposta também era válida. Havia aí um sentimento de recompensa pela dedicação na resolução de um problema. Além disso, na situação de validação, os aprendizes questionavam-se a respeito da resposta encontrada, ou seja, entre eles ocorria a primeira discussão a respeito da correção da solução. Por isso, a interferência do professor também foi reduzida, ficando sua ação mais restrita à orientação; somente no final do processo havia sua ação no sentido da validação oficial.

Finalmente, os resultados práticos verificados nos trabalhos produzidos e expostos pelos alunos, mencionados aqui também, nos fazem crer que a estratégia para o início de cada tópico foi eficaz e produtiva, podendo inclusive ser ampliada ou testada em outras áreas do conhecimento e em outras séries.

OBRAS CONSULTADAS

ALVES, Érica Valéria. **Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio**.Campinas: UNICAMP, 1999. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1999.

ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDSZNAJDER, Fernando. **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

ARANHA, Ana. COTES, Paloma. AZEVEDO, Solange. Reprovado!. **Época**, São Paulo, n. 470, p.38-40, fev. 2007.

AUSUBEL, David P.; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BEZERRA, Manoel Jairo. **Matemática para o Ensino Médio**. São Paulo: Scipione, 2001.

BIEMBERGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília: 1997.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget,1996.

BROUSSEAU, Guy. **Theory of didactical situations in mathematics**: Didactique des mathematiques, 1970-1990. Dordrecht: Kluwer, 1997.

CARNEIRO, Vera Clotilde. Reconstrução de conceitos: o uso de disparadores no estudo de funções. **Revista Zetetiké**, São Paulo, ano 3, n. 3, p.105-112, 1995.

FALZETTA, Ricardo. Quebre cinco tabus da resolução de problemas. **Nova Escola On Line**. São Paulo, n. 160. mar. 2003. Disponível em: <http://novaescola.abril.com.br/index.htm?ed/160_mar03/html/matematica> Acesso em: 02 fev. 2006.

COELHO, Maria Aparecida Vilela Mendonça Pinto. **A resolução de problemas**: da dimensão técnica a uma dimensão problematizadora. Campinas: UNICAMP, 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 1999.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. et al. **Educação Matemática***:* uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002.

FURASTÉ, Pedro Augusto. **Normas técnicas para o trabalho científico**: elaboração e formatação. 14. ed. Porto Alegre: 2006.

GIOVANE, José Rui; BONJORNO, José Roberto. **Matemática**: uma nova abordagem. São Paulo: FTD, 2000.

IEZZI, Gelson. et al. **Matemática: Ciência e Aplicações**. São Paulo: Saraiva, 2001.

MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra. **Concepções teórico-metodológicas baseadas em Logo e em resolução de problemas para o processo ensino/aprendizagem da geometria**. Campinas: UNICAMP, 1994. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1994.

MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem significativa***:* A teoria de david ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

MORGADO, Augusto César de Oliveira. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

MOTTA FILHO, Irineu. **Atitudes e procedimentos de alunos da educação de jovens e adultos frente à resolução de problemas**. São Paulo: PUC, 2006. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica, 2006.

MUNICIO, Juan Ignacio Pozo; CRESPO, Miguel Angel Gomez. **Aprender y ensenar ciencia**: del conocimiento cotidiano al conocimiento cientifico. Madrid: Morata, 1998.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática***:* uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PATAKI, Irene. **Geometria esférica para a formação de professores**: uma proposta interdisciplinar. São Paulo: PUC, 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, 2003.

PIROLA, Nelson Antonio. **Solução de problemas geométricos**: dificuldades e perspectivas. Campinas: UNICAMP, 2000. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas***:* um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POZO**,** Juan Ignacio. **Teorias cognitivas da aprendizagem**. 3.ed. Porto Alegre: Artmed, 1994.

POZO, Juan Ignacio (org); ECHEVERRÍA, María del Puy Pérez. **A solução de problemas***:* aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

PRESTES, Irene da Conceição Rodrigues. **Geometria Esférica**: uma conexão com a Geografia. São Paulo: PUC, 2006. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica, 2006.

SILVÉRIO, Lucio Ely Ribeiro. **A resolução de probçemas em genética mendeliana**. Florianópolis: UFSC, 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica), Universidade Federal de Santa Catarina, 2005.

VIKTOR, Mariana. Abaixo de zero. **Educação**, São Paulo, ano 6, n. 65, p.28-32, set. 2002.

VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

APÊNDICE A – Plano de aplicação dos conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade sob o enfoque dos Problemas Geradores

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Problemas geradores

1) Você dispõe de 4 camisas (branca, azul, vermelha e preta) e 3 calças (branca, amarela e verde). De quantas maneiras distintas, usando calça e camisa, você poderá se arrumar para ir a uma festa?

2) Ao arremessar dois dados, simultaneamente, um verde e o outro azul, quantos são os resultados possíveis? E se fossem dois dados brancos, quantos seriam os resultados possíveis?

3) Quantos números naturais de 4 dígitos podemos formar usando algarismos distintos?

4) De quantos modos 5 rapazes e 5 garotas podem se sentar em uma escadaria de modo que em cada degrau fique um casal?

5) De um grupo de 10 alunos, quantas são as maneiras de formar uma comissão de 3 alunos?

6) Somente com os algarismos 7 e 8, quantos números naturais de 5 dígitos podemos formar de modo que apareçam três vezes o 7 e duas vezes o 8?

7) De quantos modos podemos comprar 3 refrigerantes numa mercearia que oferece 5 tipos diferentes?

8) De quantos modos podemos colocar 5 miçangas diferentes numa pulseira?

A análise combinatória trata de problemas como esses. Após o estudo, espera-se que o aluno adquira capacidade para interpretar e aplicar o melhor método de resolução para cada tipo de situação.

Basicamente a análise combinatória, em nível de Ensino Médio, aborda os problemas de contagem, os arranjos simples, as permutações simples, circulares e com repetição e as combinações simples. Abordaremos tais tópicos, acrescentando informações que se mostrem relevantes na resolução dos problemas propostos.

Iniciaremos o estudo, após as atividades iniciais, com o estabelecimento de dois enunciados utilizados anteriormente que basicamente traduzem as estratégias a serem utilizadas.

Princípio multiplicativo:

Princípio aditivo:

Exemplos de aprendizagem:

1) O ano de 1998 foi o último ano em que os veículos podiam circular com placas antigas, de cor amarela e formadas por 2 letras e 4 algarismos, pois através de uma resolução, o Conselho Nacional de Trânsito (CONTRAN) instituiu o padrão atual, com 3 letras e 4 algarismos, aumentando significativamente a quantidade de veículos que podem receber emplacamento. Num futuro distante, talvez seja

necessária outra alteração. O que é melhor do ponto de vista quantitativo, adicionar um quinto algarismo ou uma quarta letra? Justifique.

2) A parte numérica das placas de carro representa a quantidade de veículos com o determinado prefixo alfabético, ou seja, se um carro tem a placa ABC 0347, então esse é o 347º veículo a circular com o prefixo ABC. Por isso, não são admitidas placas com terminação 0000. Sendo assim, quantos carros podem ser emplacados no Brasil?

3) (a) Quantos são os divisores naturais de 600? (b) E de 600.000?

4) Usando todos os algarismos disponíveis, responda:
   b) Quantos números naturais de 3 algarismos distintos podemos formar?
   c) Quantos números naturais pares de 3 algarismos distintos podemos formar?

Exercícios de fixação:

1. Quantas palavras de 6 letras distintas, do alfabeto português, podem ser formadas de modo que vogais e consoantes estejam intercaladas?

2. Quantos são os gabaritos possíveis de uma prova composta por 20 questões de múltipla escolha e cinco alternativas por questão?

3. Quantos números naturais pares ou múltiplos de 5 de quatro algarismos distintos existem?

4. Quantos números naturais de quatro dígitos são menores do que 3600 e têm todos os dígitos diferentes?

5. (a) Quantos divisores naturais possui o número 420? (b) Quantos são pares? (c) Quantos são múltiplos de 3?

6. Quantos são os números naturais de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?

7. Quantos números naturais de 3 dígitos distintos são ímpares?

8. (a) Um grupo de 5 amigos vai tirar uma foto e dois deles não podem ficar um ao lado do outro. De quantos modos pode-se dispor essa turma para a foto? (b) E se fossem 10 amigos, nas mesmas condições, quantas seriam as possibilidades?

1. Permutações

1.1 Simples

- Situação-problema: Quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3 e 4?

- Situação-problema: Quantos são os anagramas (diferentes posições das letras de uma palavra) da palavra LUGAR?

- Situação-problema: Qual é o número de permutações que podem ser feitas com n elementos distintos?

1.1.1 Fatorial

Para tornar mais prática a representação e a execução dos cálculos relativos aos problemas de contagem, vamos introduzir um novo conceito: o produto $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ é chamado **n fatorial** ou **fatorial de n**, e é representado por **n!**.

Assim, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ou $n! = n(n-1)!$

Exemplos:

a) 3! = 3.2.1 = 6
b) 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720

Mais exemplos:

1) Simplifique as expressões:

a) $\frac{98!+99!}{100!}=$

c) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=$

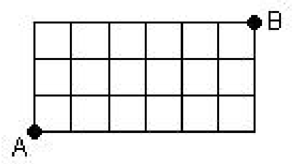
b) $\frac{4\cdot 5!}{5\cdot 6!}=$

d) $\frac{(n+1)(n-1)!}{n(n+1)!}=$

1.2 Com repetição

- Situação-problema: Quantos são os anagramas da palavra CASA? E da palavra BATATA? E da palavra NAMORADO?

- Situação-problema: A figura abaixo mostra um local da cidade dividido em quadras, em que as linhas representam as ruas.



Utilizando C, para cada quadra que andar para cima e D para cada quadra que andar para a direita, crie três trajetos, os menores possíveis, que saiam de A e cheguem em B.

Quantas são as possibilidades de sair de A e chegar em B usando sempre os menores trajetos?

- Situação-problema: Qual é o número de permutações que podem ser feitas com n elementos de modo que α deles são de um tipo, β deles de outro e χ deles de outro?

1.3 Circulares

- Situação-problema: De quantos modos podemos dispor 3 crianças numa roda de ciranda? E 4 crianças? E 5 crianças?

- Situação-problema: Qual é o número de permutações circulares que podem ser feitas com n elementos distintos?

Exemplos de aprendizagem:

5) Responda:
   a) Quantos são os anagramas da palavra VESTIBULAR que iniciam com V e terminam com R?
   b) (i) Quantos são os anagramas da palavra VESTIBULAR em que as letras A, E e I aparecem juntas e nessa ordem? (ii) E em qualquer ordem?
   c) Quantos são os anagramas da palavra VESTIBULAR em que nenhuma vogal aparece entre as consoantes?

6) Formados e dispostos em ordem crescente todos os números que se obtêm permutando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, qual é a posição ocupada pelo número 42513?

7) Quantos são os anagramas da palavra ARARAQUARA que:
   a) podem ser formados?
   b) começam e terminam por A?
   c) mantém as vogais juntas e as consoantes juntas?

8) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra CAPACIDADE que comecem com vogal?

9) De quantos modos podemos pintar um mapa com 6 países se temos disponíveis as cores azul, verde e amarelo e temos que usar cada uma delas duas vezes?

10) De quantos modos uma família de 6 pessoas pode sentar-se numa mesa circular se o pai tem seu lugar fixo?

2. Arranjos simples

- Situação-problema: Quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3 e 4? Liste todas as possibilidades.

- Situação-problema: Para uma platéia de 10 pessoas, cada uma com uma ficha para concorrer, serão sorteados uma TV, um DVD Player e um MP3 Player. De quantos modos podemos sortear os ganhadores?

No 1º exemplo, arranjamos 4 elementos 2 a 2 e no 2º, arranjamos 10 elementos 3 a 3, os quais representamos:

A_4^2 ou $A_{4,2}$: arranjos de 4 elementos tomados 2 a 2

A_{10}^3 ou $A_{10,3}$: arranjos de 10 elementos tomados 3 a 3

Agora complete:

a) $A_7^3 =$

b) $A_9^4 =$

c) $A_{12}^5 =$

d) $A_n^3 =$

Exemplos de aprendizagem:

11) De quantas maneiras 5 meninos podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares?

12) De quantas maneiras 3 meninos podem sentar-se num banco que tem 5 lugares?

13) Quatro crianças e um adulto vão ocupar um banco que tem 5 lugares. De quantas maneiras diferentes eles podem sentar se o adulto não ficar em pé?

14) Quantas frações diferentes (e não iguais a 1) podemos escrever usando os números 2, 3, 5, 7, 11 e 13?

15) Com os algarismos 3, 4, 5 e 6 foram formados todos os números naturais possíveis de 3 algarismos e colocados em ordem crescente. Qual a posição do número 536?

3. Combinações simples

- Situação-problema: Cinco alunos, Adão, Bia, Carlo, Daniel e Eva formam uma equipe e dois deles precisam representá-la em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?

- Situação-problema: Considere um conjunto com 5 elementos, *a, b, c, d, e*. Calcule o número de subconjuntos de 3 elementos que podemos formar.

- Situação-problema: Considere que uma lancheria tem cinco frutas disponíveis para fazer sucos. Quantos tipos diferentes podemos oferecer utilizando 4 dessas frutas?

No 1º exemplo, combinamos 5 elementos 2 a 2; no 2º, combinamos 5 elementos 3 a 3 e no 3º, combinamos 5 elementos 4 a 4, os quais representamos:

C_5^2 ou $C_{5,2}$ ou $\binom{5}{2}$: combinação de 5 elementos tomados 2 a 2

C_5^3 ou $C_{5,3}$ ou $\binom{5}{3}$: combinação de 5 elementos tomados 3 a 3

C_5^4 ou $C_{5,4}$ ou $\binom{5}{4}$: combinação de 5 elementos tomados 4 a 4

Agora complete:

a) $C_7^3 =$

b) $C_9^4 =$

c) $C_{11}^2 =$

d) $C_{12}^5 =$

e) $C_n^3 =$

Em resumo:

Arranjos simples de **n** elementos tomados **p** a **p** ($p \leq n$) são os agrupamentos ordenados que diferem pela <u>ordem ou natureza</u> de seus elementos que podemos formar com **p** dos **n** elementos dados.

Indica-se por $A_{n,p}$ ou A_n^p o total desses agrupamentos.

Combinações simples de **n** elementos tomados **p** a **p** ($p \leq n$) são os agrupamentos ordenados que diferem somente pela <u>natureza</u> (**NÃO IMPORTANDO A ORDEM**) de seus elementos que podemos formar com **p** dos **n** elementos dados .

Indica-se por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$ o total desses agrupamentos.

3.1 Igualdade de combinações

Calcule, usando a definição:

a) $C_{7,\,3} =$

b) $C_{10,\,2} =$

c) $C_{7,\,4} =$

d) $C_{8,\,3} =$

e) $C_{100,\,2} =$

f) $C_{10,\,8} =$

g) $C_{8,\,5} =$

h) $C_{100,\,98} =$

Você percebe alguma característica ou padrão nas combinações acima?

Exemplos de aprendizagem:

16) Entre 10 deputados, devem ser escolhidos um presidente, um vice-presidente e 1 relator para dar andamento a uma CPI (Comissão Parlamentar de Inquérito) . De quantas maneiras podem ser feitas essas escolhas?

17) Entre 20 alunos de uma turma devem ser escolhidos um monitor e quatro conselheiros. De quantas maneiras podem ser escolhidas esta comissão?

18) Num plano são marcados 9 pontos, dos quais 4 estão alinhados. Calcule o número de:
    a) quadriláteros que podemos desenhar com vértices nesses pontos.
    b) triângulos que podemos formar com vértices nesses pontos.
    c) retas que podemos formar passando por pelo menos dois desses pontos.

19) (a) Quantas diagonais têm um octógono convexo? (b) Determine uma expressão que indica o número de diagonais de um polígono de n lados?

Exercícios de fixação:

9. Quantos são os anagramas da palavra METALÚRGICO que:
   a) começam por consoante e terminam por vogal?
   b) (i) têm as letras M, E, T juntas nessa ordem? (ii) e em qualquer ordem?
   c) têm as vogais e as consoantes intercaladas?
   d) têm a letra M no 1º lugar ou a letra E no 2º lugar?

10. Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e escrevem-se os números assim obtidos em ordem crescente.
    a) Que lugar ocupa o número 42130?
    b) Qual o número que ocupa o 71º lugar?

11. Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?

12. (a) De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos de 4 pessoas cada? (b) E 9 pessoas em três grupos de 3 pessoas cada?

13. Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?

14. No campeonato brasileiro de futebol com 20 times, cada equipe enfrenta todas as demais em turno e returno. Sendo assim, quantas partidas são disputadas?

15. No 1º campeonato brasileiro em que cada time enfrentava todos os demais em turno e returno foram disputadas 650 partidas. Quantos foram os participantes?

16. De quantos modos podemos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de 7 homens e 4 mulheres?

17. (a) Quantos são os anagramas da palavra PEDRA em que as vogais aparecem em ordem alfabética? (b) E da palavra PERNAMBUCO?

18. Quantas soluções inteiras e positivas tem a equação $x + y + z = 10$?

19. Generalize uma expressão para o número de soluções inteiras e positivas de uma equação do tipo $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = b$.

20. Quantas soluções inteiras e não-negativas têm a equação $x + y + z + w = 12$.

21. (UFU-MG) De quantas maneiras três mães e três filhos podem ocupar uma fila com seis cadeiras, de modo que cada mãe sente junto de seu filho?
    (A) 6
    (B) 18
    (C) 12
    (D) 36
    (E) 48

22. (FESP) Numa classe existem 10 alunas, das quais uma se chama Maria, e 6 alunos, sendo João o nome de um deles. Formaram-se comissões constituídas por 4 alunas e 3 alunos. Quantas são as comissões das quais participaram simultaneamente, João e Maria?
(A) 840
(B) 1800
(C) 4200
(D) 2100
(E) 10080

23. (Unifor-CE) Observe o código abaixo:

• o o • • • o o • o

Trata-se de uma seqüência de 10 sinais que podem ser de 2 tipos: o ou • . O número de códigos distintos que podem ser formados com 10 sinais, o ou •, é:
(A) 10^{10}
(B) 10!
(C) 4096
(D) 1024
(E) 100

24. (Fatec-SP) Sabendo que o segredo de um cofre é uma seqüência de quatro algarismos distintos e o primeiro é igual ao triplo do segundo, o maior número de tentativas diferentes que devemos fazer para conseguir abri-lo é igual a:
(A) 56
(B) 84
(C) 168
(D) 253
(E) 1054

25. (PUCC-SP) Com os elementos do conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} são formados números de 3 algarismos distintos. A quantidade de números formados cuja soma dos algarismos é um número par é:
(A) 30

(B) 36

(C) 52

(D) 60

(E) 72

26. (Unifor-CE) O número natural **n** que é solução da equação $\binom{n-1}{2}+\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}=31$ é:

(A) primo

(B) divisível por 2

(C) múltiplo de 3

(D) quadrado perfeito

(E) maior que 20

27. (Fuvest) Quantos são os números inteiros positivos de cinco algarismos que não têm algarismos iguais em posições adjacentes?

(A) 5^9

(B) $9 . 8^4$

(C) $8 . 9^4$

(D) 8^5

(E) 9^5

28. (FEI-SP) Sejam duas retas paralelas **r** e **s**. Tomam-se 5 pontos distintos em **r** e 4 em **s**. A razão entre o número total de quadriláteros convexos e o número total de triângulos que podem ser formados com vértices nesses pontos é:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{6}{7}$

(E) $\frac{4}{5}$

29. (PUC-MG) Simplificando a expressão $\frac{(n-2)!(n+1)!}{n!(n-1)!}$, obtém-se:

(A) $n^2 - n - 2$

(B) $\frac{n+1}{n}$

(C) $\frac{n-2}{n-1}$

(D) $\frac{n+1}{n-2}$

(E) $\frac{n+1}{n-1}$

30. Qual o número de anagramas da palavra MURALHA que apresentam a letra L antes da letra H?

31. (PUC-SP) O novo sistema de placas de veículos utiliza um grupo de 3 letras (dentre 26 possíveis) e um grupo de 4 algarismos (por exemplo: ABC-1023). Uma placa dessas será "palíndroma" se os dois grupos que a constituem forem "palíndromos". O grupo ABA é "palíndromo" pois as leituras da esquerda para a direita e da direita para a esquerda são iguais; da mesma forma, o grupo 1331 é "palíndromo". Quantas placas "palíndromas" distintas poderão ser constituídas?

32. De quantos modos podem-se arrumar 4 livros de Física, 3 de Química e 2 de Biologia numa estante, de modo que os livros do mesmo assunto fiquem juntos?

33. (Fatec) Dispomos de 4 cores diferentes entre si, todas elas devem ser usadas para pintar as 5 letras da palavra FATEC, cada letra de uma só cor, e de modo que as vogais sejam as únicas letras pintadas com a mesma cor. De quantos modos pode ser feito isso?

34. Pretende-se formar uma comissão de 5 membros a partir de um grupo de 10 operários e 5 empresários, de modo que nessa comissão haja pelo menos dois representantes de cada uma das 2 classes. Qual é o número total de comissões formadas?

35. (UFRGS) Para colocar preço em seus produtos, uma empresa desenvolveu um sistema simplificado de código de barras formado por cinco linhas separadas por quatro espaços. Podem ser usadas linhas de três larguras possíveis e espaços de duas larguras possíveis.

O número total de preços que podem ser representados por esse código é:

(A) 1440.

(B) 2880.

(C) 3125.

(D) 3888.

(E) 4320.

PROBABILIDADE

Problemas geradores:

1) Qual é a probabilidade de tirar o número 5 no lançamento de um dado comum?

2) Qual é a probabilidade de tirar 2 caras no lançamento de duas moedas?

3) Qual é a probabilidade de um casal ter 3 filhos do mesmo sexo?

4) Qual é a probabilidade de obter soma 7 no lançamento de dois dados comuns?

5) Qual é a probabilidade de lançar 5 vezes um dado comum e obter exatamente duas faces 4?

6) Qual é a probabilidade de num grupo de 30 pessoas haver coincidência de pelo menos dois aniversário num mesmo dia?

7) André e Pedro fazem uma aposta enquanto um juiz designado lança o dado. Cada um deles aposta 4 reais, e será ganhador aquele que obtiver 8 vezes um determinado número. Pedro escolhe 3 e André 1. Quando o placar aponta 7 a 5 para Pedro, o jogo tem que ser interrompido. Como deve ser repartido o dinheiro?

1. Espaço amostral

Chamamos de espaço amostral (Ω) o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Assim:

- No nascimento de uma criança: Ω = {menino, menina}
- No lançamento de um dado: Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de evento. No lançamento de duas moedas cujo espaço amostral, considerando cara (C) e coroa (K), é Ω = {CC, CK, KC, KK} podemos ter os eventos:

- pelo menos uma cara: {CC, CK, KC}
- nenhuma coroa: {CC}
- coroa no segundo lançamento: {CK, KK}

2. Definição:

Quando num dado experimento aleatório, com espaço amostral finito, consideramos que todo evento elementar tem a mesma "chance" de ocorrer (o espaço é equiprovável), a probabilidade de ocorrer um evento **A**, indicada por p(A), é um número que mede essa chance e é dado por:

$$\boxed{p(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}}}$$

3. Cálculo de probabilidades

Atividade 1: Dados

1. Considere o lançamento de 2 dados. Complete a tabela abaixo calculando o percentual da probabilidade da soma das faces.

Soma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Percentual											

2. Obtenha dois dados e arremesse-os 30 vezes. A seguir, anote na tabela abaixo a quantidade de vezes que apareceu cada soma das duas faces voltadas para cima.

Soma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade											

3. Preencha a tabela abaixo com os resultados obtidos por todos os colegas.

Soma	**Quantidade de vezes**														
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															

Soma	**Quantidade de vezes**														**TOTAL**
2															
3															
4															
5															
6															
7															

8															
9															
10															
11															
12															

4. Determine o percentual de cada soma obtida em relação ao total de lançamentos. Houve muita discrepância em relação às probabilidades teóricas? Considerando apenas os seus 30 lançamentos, a discrepância foi maior ou menor? Você consegue estabelecer alguma conclusão a respeito desse fato?

Soma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Percentual											

Atividade 2: Mega-Sena

A Mega-Sena é uma loteria administrada pela Caixa Econômica Federal, em que num volante com 60 números são sorteadas seis dezenas. Você pode jogar de 6 a 15 números e ganha quem acertar seis (SENA), cinco (QUINA) ou quatro (QUADRA). A partir disso:

a) Qual é o total de resultados possíveis no sorteio dos seis números?
b) Qual é a probabilidade de você realizar uma aposta simples e ser premiado com a Sena? E a Quina? E a Quadra?
c) A tabela abaixo mostra os valores cobrados pelas apostas em função da quantidade de números apostada.

Aposta	6 números	7 números	8 números	9 números	10 números
Valor	R$ 1,50	R$ 10,50	R$ 42,00	R$ 126,00	R$ 315,00

Estabeleça uma expressão matemática que relacione o preço da aposta em função da quantidade de números jogados.

d) Se um apostador joga 10 números e acerta quatro deles, ele não tem direito a apenas 1 quadra. O sistema de apostas considera que ele fez todos os jogos possíveis combinando os 10 números jogados em apostas simples. Desse modo, qual é o número de quadras a que ele tem direito?

Atividade 3: Loteca

A Loteca é uma loteria administrada pela Caixa Econômica Federal em que o apostador tenta acertar o resultado de 13 jogos de futebol. Ganha quem acertar 13 ou 12 resultados. Pode-se, para aumentar as chances, fazer apostas duplas ou triplas, isto é, num mesmo jogo apostar simultaneamente em três prognósticos (vitória, empate e derrota - aposta tripla) ou em dois (aposta dupla). A partir disso:

a) Qual é o total de resultados possíveis na Loteca?
b) Qual a probabilidade de um jogador fazer uma aposta simples e acertar 12 jogos? E acertar 13 jogos? Atenção: A aposta simples inclui um palpite duplo.
c) Qual a chance de acertar 13 jogos se um jogador faz uma aposta de **3 triplos e 3 duplos**?
d) Qual é a probabilidade de um jogador fazer uma aposta simples e ERRAR todos os jogos?

Atividade 4: Pôquer

O Pôquer é descendente direto de outros jogos antigos praticados no Oriente Médio. Entretanto, o jogo de Pôquer, como hoje ele é conhecido, tem sua origem por volta de 1800, nos Estados Unidos. Na modalidade mais praticada no Brasil, para até cinco jogadores, as cartas distribuídas são 7, 8, 9, 10, J, Q, K e A, nos quatro naipes, paus(♣), ouro(♦), copa(♥) e espada(♠). Após o embaralhamento das cartas, são distribuídas cinco a cada jogador. Nessa etapa, nos interessa prever a probabilidade de cada um sair com um determinado tipo de jogo na mão. A partir disso:

a) Considere os jogos **par**, **trinca**, ***straigth***, ***full house***, ***flush*** e **quadra**. A seguir, determine a probabilidade de fazer cada um na primeira mão e conclua qual a ordem crescente de valor.
b) Qual é a probabilidade de fazer na primeira mão um ***straigth flush****?*
c) Qual é a probabilidade de fazer na primeira mão um ***Royal straigth flush***?

Exemplos de aprendizagem:

19) Três moedas são jogadas simultaneamente. A partir disso, responda:
   a) Qual é a probabilidade de obter exatamente 2 caras?
   b) Qual é a probabilidade de obter pelo menos 2 coroas?

20) Num grupo de 75 jovens, 44 gostam de música, 39 gostam de esportes e 41 gostam de leitura; 30 gostam de música e leitura, 24 gostam de esporte e música e 22 gostam de leitura e esporte; 16 gostam das três atividades. A partir disso, responda:
   a) Qual é a probabilidade de, ao apontar, ao acaso, um desses jovens, ele **não** gostar de nenhuma das três atividades?
   b) Qual é a probabilidade de, ao apontar, ao acaso, um desses jovens, ele gostar de **apenas uma** das três atividades?

21) De um baralho com 52 cartas tiram-se, sem reposição, quatro cartas. A partir disso, responda:
   a) Qual é a probabilidade de as quatro cartas serem do mesmo valor?
   b) Qual a probabilidade de as quatro cartas serem de espadas?

22) Considere um conjunto de 12 frutas em que 4 estão estragadas. Escolhendo aleatoriamente 2 frutas, determine a probabilidade de:
   a) ambas **não** estarem estragadas.
   b) pelo menos uma estar estragada.

Exercícios de fixação:

36. Um dado honesto é lançado e observa-se que o número da face voltada para cima não é 4. Qual a probabilidade desse número ser 6?

37. Uma moeda é lançada duas vezes, sucessivamente. Qual a probabilidade de observarmos, respectivamente, cara e coroa?

38. Um dado é lançado 2 vezes sucessivamente. Qual a probabilidade de: (a) o primeiro número obtido ser 4? (b) os dois números obtidos serem iguais a 4? (c) o número 4 não ser obtido em nenhum lançamento?

39. Formando todos os números pares de 4 algarismos, qual a probabilidade de que um número escolhido ao acaso seja formado por todos os algarismos diferentes?

40. Cinco homens e cinco mulheres são dispostos em fila indiana. Qual a probabilidade de que a primeira e a última pessoa sejam homens?

41. Dois dados são jogados simultaneamente. Sabendo que em ambas as faces saiu número par, qual a chance de a soma das duas faces ser menor do que 3?

42. Uma máquina produziu 30 parafusos dos quais 4 eram defeituosos. Ao pegar, ao acaso, 3 parafusos, qual é a probabilidade de que:
    a) os três sejam perfeitos?
    b) os três sejam defeituosos?
    c) pelo menos um seja defeituoso?

43. Numa pesquisa feita com 1000 famílias para se verificar a audiência dos programas de televisão, os seguintes resultados foram encontrados: 510 famílias assistem ao programa A, 305 assistem ao programa B e 386 assistem ao programa C. Sabe-se ainda que 180 famílias assistem aos programas A e B, 60 assistem aos programas B e C, 25 assistem a A e C, e 10 famílias assistem aos três programas.
    a) Escolhendo, ao acaso, uma família, qual é a probabilidade de ela assistir somente ao programa A?
    b) Escolhendo, ao acaso, uma família, qual é a probabilidade de ela assistir ao programa A **ou** ao programa B?

44. Vitor e Bruno lançam um dado comum 3 vezes. Vitor apostou que o número 5 sairá pelo menos uma vez e Bruno que o número 5 não sairá em nenhum dos três lançamentos. Qual deles tem mais chance de ganhar a aposta? Justifique.

45. Uma moeda é lançada 4 vezes. Qual é a probabilidade de sair pelo menos uma cara?

46. No jogo de General, cinco dados são arremessados com o objetivo de obter certas combinações de números? Após o primeiro lançamento ainda é possível escolher quais dados se quer reter para lançar os demais na tentativa de um bom jogo. Ao lançar os dados, um jogador obteve os seguintes resultados: 3, 4, 5, 5 e 6. Decida-se: qual(is) o(s) dado(s) que você reteria e qual seria a probabilidade de obter o jogo desejado no próximo lançamento?

5. Probabilidade Condicional

Observe o exemplo:

Numa urna são colocadas esferas numeradas de 1 a 100. No momento do sorteio, o responsável, ao retirar uma esfera, diz que o número sorteado é múltiplo de 5. Qual é a probabilidade de o número sorteado também ser múltiplo de 3?

Note que a condição *"o número sorteado é múltiplo de 5"* reduz o espaço amostral. Dizemos que a ocorrência do evento, que chamaremos de A, *número sorteado é múltiplo de 3*, está condicionado à ocorrência do evento, que chamaremos de B, *número sorteado é múltiplo de 5*.

Outro exemplo:

Ao lançar dois dados, um jogador informa que a soma obtida não foi 7. Qual é a probabilidade de a soma dos dados ser igual a 5?

Exercícios de fixação:

47. Trinta por cento (30%) de uma população tem deficiência de uma certa vitamina devido a uma alimentação não equilibrada. Dez por cento (10%) das pessoas com essa deficiência de vitamina têm uma certa doença. Qual é a probabilidade de que uma pessoa selecionada ao acaso tenha a doença e a deficiência de vitamina?

48. Num conjunto de 100 parafusos, 90 deles estão em boas condições. Dois deles são retirados, sucessivamente, ao acaso, sem reposição. Qual é a probabilidade de que o primeiro parafuso defeituoso seja encontrado na 2ª retirada?

49. (UFRGS) As máquinas A e B produzem o mesmo tipo de parafuso. A porcentagem de parafusos defeituosos produzidos, respectivamente, pelas máquinas A e B é de 15% e de 5%. Foram misturados, numa caixa, 100 parafusos produzidos por A e 100 produzidos por B. Se tirarmos um parafuso ao acaso e ele for defeituoso, qual é a probabilidade de que tenha sido produzido pela máquina A?

50. (UFRGS) Em uma gaveta, cinco pares diferentes de meias estão misturados. Retirando-se ao acaso duas meias, qual é a probabilidade de que elas sejam do mesmo par?

51. (UFRGS) Uma parteira prevê, com 50% de chance de acerto, o sexo de cada criança que vai nascer. Num conjunto de três crianças, qual é a probabilidade de ela acertar pelo menos duas previsões?

52. (FGV-SP) Num certo país, 10% das declarações de imposto de renda são suspeitas e submetidas a uma análise detalhada; entre estas, verificou-se que 20% são fraudulentas. Entre as não suspeitas, 2% são fraudulentas.
    a) Se uma declaração é escolhida ao acaso, qual a probabilidade de ela ser suspeita e fraudulenta?
    b) Se uma declaração é fraudulenta, qual é a probabilidade de ela ter sido suspeita?

53. (FGV-SP) Uma moeda é viciada de tal forma que os resultados possíveis, cara e coroa, são tais, que a probabilidade de sair cara num lançamento é o triplo de sair coroa. Lançando três vezes a moeda, qual é a probabilidade de sair exatamente uma cara?

6. Distribuição binomial

Passaremos a estudar alguns tipos de fenômenos que tem apenas dois resultados: o **sucesso** ou o **fracasso** (não-sucesso). Por exemplo:

a) Jogamos uma moeda não-viciada e pomos sucesso = cara, fracasso = coroa.
b) Jogamos um dado não-viciado e pomos sucesso = o resultado é 1 ou 2, fracasso = o resultado é 3, 4, 5 ou 6.
c) Sacamos uma bola de uma urna que contém 5 bolas verdes e 3 bolas pretas, pomos sucesso = a bola é verde, fracasso = a bola é preta.

As probabilidades de sucesso e de fracasso permanecerão constantes. O que se deseja é determinar a probabilidade de se obter p sucessos em n tentativas, todas feitas nas mesmas condições.

Exemplo:

Lançando um dado 10 vezes, qual é a probabilidade de se obter o número 3 em dois lançamentos?

Fazemos sucesso (p) = o número é múltiplo de 3, e fracasso (q) = o número não é múltiplo de 3. Daí que a probabilidade de p é $^1/_6$ e a probabilidade de q é $^5/_6$. Um resultado que serve na situação acima, ou seja, na qual o número 3 ocorra somente 2 vezes, é:

3	Não 3	Não 3	Não 3	3	Não 3	Não 3	Não 3	Não 3	Não 3

Como os eventos são independentes, a probabilidade do resultado acima é:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\text{, isto é, }\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^8$$

Temos que considerar ainda o fato de que o objetivo é obter dois resultados iguais a 3, não importando em quais lançamentos ele seja obtido. Daí vem que temos C_{10}^2 possibilidades que satisfazem o problema.

Logo, a probabilidade procurada é:

$$P = C_{10}^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^8 \Rightarrow 45\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{390625}{1679616} = \frac{17578125}{60466176} \cong 0{,}2907$$

Exemplos de aprendizagem:

23) Jogamos uma moeda não-viciada 10 vezes. Qual é a probabilidade de obtermos exatamente 5 caras?

24) Uma prova objetiva tem 10 questões, todas com mesmo peso, com 5 possibilidades de resposta em cada uma. Se a média para aprovação é 5,0, qual é a probabilidade de um aluno "chutar" todas as respostas e conseguir aprovação?

Exercícios de fixação:

54. Um casal pretende ter 5 filhos e deseja saber qual é a probabilidade de ter:
    a) 2 meninos e 3 meninas.
    b) 5 meninas.

55. A probabilidade de um saltador atingir seu objetivo é de 40% em cada salto. Calcule a probabilidade de, em 8 saltos, ele conseguir seu objetivo em 6 deles.

56. Uma prova objetiva do tipo múltipla escolha contém 10 testes, com 5 alternativas cada um. Somente uma alternativa é correta para cada teste. Qual é a probabilidade de um estudante "chutar" as respostas e **errar** todas?

57. Uma moeda honesta é lançada 8 vezes. Qual é a probabilidade de se obter pelo menos duas caras nesses 8 lançamentos?

58. (Vunesp-SP) Tomando-se, ao acaso, uma das retas determinadas pelos vértices de um pentágono regular, qual é a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos?

59. (FEI-SP) A probabilidade de Hélio ganhar uma partida de xadrez contra Álvaro é $^1/_3$. Qual é a probabilidade de Hélio ganhar ao menos uma partida em três disputas?

60. Um lojista observou que, em média, de cada 20 compras efetuadas, 1 era devolvida. Se forem realizadas 8 compras num dia, qual é a probabilidade de que não haja devolução alguma?

61. Numa sala existem 12 pessoas, seis homens e seis mulheres. Entre elas, duas são selecionadas ao acaso.
    a) Qual a probabilidade de selecionarmos um casal?
    b) Qual a probabilidade de selecionarmos dois homens?

62. A probabilidade de um inseticida matar uma barata é de 95%, e a probabilidade de matar um pernilongo é de 80%. Um dia, ao chegar a sua casa, uma pessoa encontra uma barata e um pernilongo e aplica o inseticida. Qual é a probabilidade de que:
    a) ambos morram?
    b) apenas a barata morra?
    c) nenhum morra?
    d) pelo menos um deles morra?

ANEXO A – Questionários aplicados

Questionário 1:

1. Você conseguiu resolver a maioria das atividades propostas?
2. A expansão das razões trigonométricas para ângulos maiores do que 90º, e conseqüentemente, para além do triângulo retângulo foi compreendida? Comente suas impressões.
3. Você considera vantajoso o desenvolvimento da teoria dessa forma, ou seja, onde as principais conclusões são estabelecidas pelo aluno (ele chega nas definições a partir da instigação do professor?) Ou é melhor uma definição pronta com exercícios de fixação a partir dos novos conceitos?
4. Algum procedimento não ficou claro ou não foi entendido por você? O desenvolvimento da nova teoria está sendo compreendido? Comente.

Questionário 2:

1. Seu grupo conseguiu uma estratégia de resolução para as atividades 10 e 11? Descreva-a.
2. Qual é o impedimento para adotar a mesma estratégia adotada nas atividades 1 a 9?
3. Qual é a desvantagem de se utilizar semelhança de figuras na resolução das atividades propostas (nº 1 a 11)?
4. Na sua opinião, o estudo da matemática se justifica mais quando ele auxilia na resolução de problemas práticos? O que é para você um problema desse tipo?

Questionário 3:

1. Como você avalia do ponto de vista do aprendizado a Matemática desenvolvida nesse ano?
2. Na medida do possível, as atividades a serem desenvolvidas sempre foram iniciadas através de um Problema Gerador, isto é, um problema que procurasse fazer com que o aluno visse a finalidade do estudo a ser desenvolvido. Você notou tal característica?
3. Dê uma nota de 1 (pior) a 5 (melhor) para a forma como os conteúdos foram abordados através de problemas. Comente.