

**Universidade Federal do Rio Grande do Sul**

**Escola de Engenharia**

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil**

**MODELAGEM DA FRATURA DO CONCRETO ARMADO  
POR MEIO DE INTERFACES COESIVAS**

**Conrado Praxedes Silva Neto**

Porto Alegre  
2015



Conrado Praxedes Silva Neto

**MODELAGEM DA FRATURA DO CONCRETO ARMADO  
POR MEIO DE INTERFACES COESIVAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Porto Alegre

2015

### CIP - Catalogação na Publicação

Praxedes Silva Neto, Conrado  
Modelagem da fratura do concreto armado por meio  
de interfaces coesivas / Conrado Praxedes Silva  
Neto. -- 2015.  
107 f.

Orientador: Eduardo Bittencourt.  
Coorientadora: Virginia Maria Rosito d'Avila  
Bessa.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-  
RS, 2015.

1. Mecânica da Fratura. 2. Concreto Armado. 3.  
Elementos Finitos. 4. Modelo Discreto. 5. Interfaces  
Coesivas. I. Bittencourt, Eduardo, orient. II. Maria  
Rosito d'Avila Bessa, Virginia, coorient. III. Título.

**CONRADO PRAXEDES SILVA NETO**

**MODELAGEM DA FRATURA DO CONCRETO ARMADO  
POR MEIO DE INTERFACES COESIVAS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 15 de março de 2015

**Prof. Eduardo Bittencourt**

Dr. pela Univ. Federal do Rio Grande do Sul  
Orientador

**Prof.<sup>a</sup> Virgínia M. R. d'Á. Bessa**

Dr.<sup>a</sup> pela Univ. Federal do Rio Grande do Sul  
Coorientadora

**Prof. Dr. Armando M. Awruch**

Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Ignacio Iturrioz (PROMEC / UFRGS)**

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Inácio Benvegno Morsch (PPGEC / UFRGS)**

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Samir Maghous (PPGEC / UFRGS)**

Docteur pela Ecole Nationale des Ponts Et Chaussées



## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais e à minha irmã pelo apoio e amor incondicional.

Ao Prof. Eduardo Bittencourt pela dedicação na orientação deste trabalho e o apoio no desenvolvimento do mesmo.

À Prof. Virgínia Maria Rosito d'Ávila Bessa pelas importantes contribuições ao trabalho.

Aos demais professores, funcionários e colegas do PPGEC que colaboram na realização deste trabalho.

Aos meus amigos, Bruna Freitas, Alexandra Teixeira e Reinaldo Cantori, pela amizade sincera que foi de grande importância durante esse período.

Ao CNPQ e à Capes pelo auxílio financeiro.



## RESUMO

SILVA NETO, C.P. **Modelagem da Fratura do Concreto Armado por meio de Interfaces Coesivas**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O presente trabalho visa analisar o comportamento estrutural de vigas de concreto armado em flexão, por meio de uma modelagem discreta de fratura com o uso de interfaces coesivas. Avaliou-se, neste estudo, a influência da utilização de elementos de interface entre todos os elementos de concreto da malha de elementos finitos, representando o dano de forma generalizada. Desta forma, é possível analisar desde a alteração na resposta estrutural por meio do gráfico entre força aplicada e deslocamento no centro do vão das vigas, bem como o surgimento e propagação de fissuras ao longo de todo o comprimento das mesmas. Foram utilizadas também leis específicas para simular o comportamento de aderência entre o concreto e o aço através de elementos de aderência. O trabalho envolveu o estudo de diferentes situações, a partir da simulação de vigas com diversas configurações, sendo analisada também a sensibilidade do modelo às variações dos parâmetros de entrada, que abrangem as propriedades dos materiais e os parâmetros numéricos do modelo coesivo utilizado. Os resultados mostraram que metodologia utilizada é capaz de representar importantes fenômenos como a perda de rigidez associada a fissuração no concreto, além de reproduzir a fissuração de maneira adequada destes elementos estruturais.

**Palavras-chaves:** Mecânica da Fratura. Concreto Armado. Elementos Finitos. Modelo Discreto. Interfaces Coesivas.



## ABSTRACT

SILVA NETO, C.P. **Modelling of Fracture of Reinforced Concrete Beams using Cohesive Interfaces**. 2015. Dissertation (Master's degree in Engineering) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The aim of this work is to analyze the structural behavior of reinforced concrete beams in bending, by means of a discrete modeling using cohesive interfaces. It was evaluated the influence of using interface elements between all concrete elements of the finite element mesh, representing the damage in all the structural element. From that, it is possible to analyze the alteration on the structural behavior on the applied load versus midspan deflection of the beams, as well as the propagation of cracks along the beam length. It was also used specific laws to simulate the adherence between the concrete and steel bars. The work involved the study of the sensibility of the model to the variations of the input parameters, which included the material properties and the numeric parameters of the proposed model. The results showed that the methodology used is capable of representing important phenomena like the rigidity loss associated to the concrete cracking, as well as reproducing the cracking itself accordingly.

**Key-words:** Fracture Mechanics. Reinforced Concrete. Finite elements. Discrete Model. Cohesive Interfaces.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Relação entre tensão e deformação em tração uniaxial para os materiais: a) frágeis, b) quase-frágeis, c) dúcteis. (adaptado de Kumar e Barai, 2011) . . . . .	28
Figura 2 – Esquema da ZPF no concreto. . . . .	29
Figura 3 – Típica curva tensão-alongamento para o concreto em tração uniaxial. (adaptado de Kumar e Barai, 2011) . . . . .	29
Figura 4 – Modelos coesivos: (a) modelo de Dugdale, (b) modelo de Barrenblat. (adaptado de Shi, 2009) . . . . .	30
Figura 5 – Representação da ZPF como fissura fictícia. (adaptado de Shi, 2009) . . . . .	31
Figura 6 – Relação tensão-deformação linear para o concreto fora da ZPF e relação tensão-deslocamento linear na ZPF. (adaptado de Kumar e Barai, 2011) . . . . .	31
Figura 7 – Energia específica de fratura como a área entre a curva tensão-abertura. . . . .	32
Figura 8 – Representação do modelo de fissuras discretas. (adaptado de Kwak e Filippou, 1990) . . . . .	33
Figura 9 – Representação do modelo de fissuras distribuídas. (adaptado de Kwak e Filippou, 1990) . . . . .	34
Figura 10 – Fratura de uma viga de concreto armado subarmada. (Shah et al., 1995) . . . . .	36
Figura 11 – Fratura de uma viga de concreto armado superarmada (Shah et al., 1995) . . . . .	36
Figura 12 – Fratura de uma viga de concreto armado com taxa de armadura inferior ao mínimo (Shah et al., 1995) . . . . .	37
Figura 13 – Comportamento quase-frágil e dútil de vigas de concreto armado. (Shah et al., 1995) . . . . .	37
Figura 14 – Resposta de carga-deslocamento típica de um elemento de concreto armado. . . . .	38
Figura 15 – Esquema das duas primeiras regiões da relação carga-deslocamento de um elemento de concreto armado em flexão (adaptado de Jakubovskis et al., 2013) . . . . .	39
Figura 16 – Representação da fissuração primária e secundária no concreto armado. (adaptado de Ingraffea, 1984) . . . . .	40
Figura 17 – Peça de concreto armado com barra de aço submetida a tração. . . . .	40
Figura 18 – Formação de fissuras primárias. . . . .	41
Figura 19 – Representação do arrancamento no concreto armado. . . . .	42
Figura 20 – Representação do fendilhamento no concreto armado. . . . .	42
Figura 21 – Corpo em estudo. . . . .	45
Figura 22 – Representação elementos de interface e de aderência na malha original de elementos finitos. . . . .	47
Figura 23 – Elemento de interface. . . . .	47
Figura 24 – Sistema de coordenadas naturais no elemento de interface. . . . .	48
Figura 25 – Lei constitutiva pré-pico em modo I. . . . .	50

Figura 26 – Variação da abertura elástica com o tamanho dos elementos da malha. . . . .	51
Figura 27 – Comportamento $\sigma$ versus $w$ de uma barra em modo I. Comportamento quase-frágil (a), comportamentos frágeis em função da deformação elástica (b) e (c). . . . .	52
Figura 28 – Leis constitutivas pós-pico das superfícies coesivas em modo I. . . . .	53
Figura 29 – Lei constitutiva pré-pico em modo II. . . . .	56
Figura 30 – Leis constitutivas pós-pico das superfícies coesivas em modo II. . . . .	57
Figura 31 – Superfície de ruptura do modelo acoplado (Modelo de Coulomb com aderência modificada). . . . .	58
Figura 32 – Superfície de ruptura do modelo acoplado: potencial plástico ( $F^*$ ) e as direções dos deslocamentos inelásticos. . . . .	61
Figura 33 – Lei constitutiva utilizada para o material concreto. . . . .	62
Figura 34 – Lei Elástica-Perfeitamente Plástica. . . . .	62
Figura 35 – Lei de endurecimento não linear com saturação. . . . .	63
Figura 36 – Relação analítica entre tensão normal e abertura. . . . .	64
Figura 37 – Relação analítica entre tensão de aderência e deslizamento de Dörr (1980). . . . .	65
Figura 38 – Relação analítica entre tensão de aderência e deslizamento. . . . .	66
Figura 39 – Representação das vigas em elementos finitos. . . . .	69
Figura 40 – Representação do problema em Estado Plano de Deformações. . . . .	69
Figura 41 – Representação das vigas de Evangelho (2013) em elementos finitos. . . . .	71
Figura 42 – Geometria das vigas analisadas submetidas à flexão em 3 pontos. . . . .	71
Figura 43 – Malhas utilizadas na simulações numéricas das vigas J. . . . .	74
Figura 44 – Comparação dos resultados obtidos em diferentes análises sem interfaces e com interfaces. . . . .	75
Figura 45 – Curvas carga aplicada x deslocamento no meio do vão da viga J1. . . . .	76
Figura 46 – Distribuição das fissuras pelo modelo numérico da viga J1. . . . .	76
Figura 47 – Curvas carga aplicada x deslocamento no meio do vão da viga J10. . . . .	76
Figura 48 – Distribuição das fissuras pelo modelo numérico da viga J10. . . . .	77
Figura 49 – Curvas carga aplicada x deslocamento no meio do vão da viga J4. . . . .	77
Figura 50 – Distribuição das fissuras pelo modelo numérico da viga J4. . . . .	77
Figura 51 – Comparação dos gráficos carga aplicada x deslocamento das vigas série J. . . . .	78
Figura 52 – Representação das tensões na viga J1 em domínio 3. (a) Tensões de compressão no concreto (b) Tensões de tração no aço. . . . .	79
Figura 53 – Representação das tensões na viga J1 em domínio 4. (a) Tensões de compressão no concreto (b) Tensões de tração no aço. . . . .	79
Figura 54 – Fissuração da viga J1 no domínio 4. . . . .	80
Figura 55 – Geometria das vigas analisadas em flexão a 4 pontos. . . . .	81
Figura 56 – Malhas utilizadas na simulações numéricas das vigas S. . . . .	82
Figura 57 – Curvas carga aplicada x deslocamento no meio do vão da viga S1. . . . .	83
Figura 58 – Representação da fissuração da viga S1 por diferentes análises. . . . .	83

Figura 59 – Representação dos elementos amolecidos e rompidos da viga S1. . . . .	83
Figura 60 – Curvas carga aplicada x deslocamento no meio do vão da viga S2. . . . .	84
Figura 61 – Representação da fissuração da viga S2 por diferentes análises. . . . .	85
Figura 62 – Representação dos elementos amolecidos e rompidos da viga S2. . . . .	85
Figura 63 – Curvas carga aplicada x deslocamento no meio do vão da viga S3. . . . .	86
Figura 64 – Representação da fissuração da viga S3 por diferentes análises. . . . .	86
Figura 65 – Representação dos elementos amolecidos e rompidos da viga S3. . . . .	87
Figura 66 – Distribuição das tensões da viga S1 durante a análise. . . . .	87
Figura 67 – Distribuição das tensões da viga S3 durante a análise. . . . .	88
Figura 68 – Morfologia das fissuras e do amolecimento das vigas para a mesma tensão nominal. . . . .	89
Figura 69 – Influência da variação da energia de fratura da viga S3 no gráfico carga aplicada x deslocamento. . . . .	90
Figura 70 – Influência da variação da energia de fratura da viga S3 na fissuração. . . . .	91
Figura 71 – Influência da variação da lei pós-pico da viga S3 no gráfico carga aplicada x deslocamento. . . . .	92
Figura 72 – Influência da variação da lei pós pico da viga S3 na fissuração. . . . .	92
Figura 73 – Elementos que sofreram amolecimento de acordo com as três leis distintas. . .	93
Figura 74 – Influência da variação do parâmetro $\alpha$ da viga S3 no gráfico carga aplicada x deslocamento. . . . .	94
Figura 75 – Influência da variação do parâmetro $\alpha$ da viga S3 na fissuração. . . . .	95



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores base de energia de fratura. . . . .	55
Tabela 2 – Parâmetros da relação de aderência. . . . .	67
Tabela 3 – Geometria das vigas série J. . . . .	72
Tabela 4 – Propriedades do concreto das vigas série J. . . . .	73
Tabela 5 – Geometria das vigas série S. . . . .	81
Tabela 6 – Valores dos limites entre domínios. . . . .	105



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ZPF	Zona de Processo de Fratura
LN	Linha Neutra
NPG	Número de Pontos de Gauss
DEM	<i>Discrete Element Method</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma$	Tensão normal
$\sigma_{esc}$	Tensão de escoamento
$\sigma_{m\acute{a}x}$	Tensão normal máxima
$\sigma_s$	Valor intermediário de tensão normal
$F(\sigma_{ij})$	Superfície de ruptura em espaço de tensões
$G_F$	Energia coesiva de fratura
$\rho_{sc}$	Taxa de armadura
$A_s$	Área de aço
$A_c$	Área de concreto
$f_t$	Resistência à tração
$f_c$	Resistência à compressão
$\epsilon$	Deformação
$\epsilon_s$	Deformação do aço
$\epsilon_y$	Deformação de escoamento do aço
$\epsilon_{yd}$	Deformação de escoamento de cálculo do aço
$\epsilon_c$	Deformação do concreto
$\epsilon_{cu}$	Deformação última do concreto
$U$	Deslocamentos ao longo de um corpo
$F$	Forças aplicadas em um contorno
$B$	Forças de volume
$\rho$	Massa específica
$T$	Tensões coesivas nas interface da fissura
$\Gamma^T$	Superfície da fissura
$\Gamma^U$	Superfície onde são aplicados os deslocamentos prescritos

$\Gamma^F$	Superfície onde são aplicadas as forças
$\delta$	Variação arbitrária, virtual e compatível
$F_{int}$	Forças internas
$F_{ext}$	Forças externas
$w$	Abertura da fissura
$w_c$	Abertura crítica da fissura
$w_e$	Abertura elástica
$w_i$	Abertura inelástica
$w_{n,lim}$	Abertura final
$w_s$	Valor intermediário de abertura
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$\nu$	Coeficiente de poisson
$W^e$	Trabalho de abertura de um elemento de interface
$\Omega^{T,e}$	Superfície do elemento de interface
$T^e$	Vetor de tensões de cada elemento
$T_n$	Componente normal das tensões
$T_t$	Componente tangencial das tensões
$\Delta^e$	Vetor de deslocamentos de cada elemento
$\Delta_n$	Deslocamento normal
$\Delta_t$	Deslocamento tangencial
$\varphi$	Função de interpolação
$\xi$	Coordenada natural tangencial
$\eta$	Coordenada natural normal
$\Phi^N$	Matriz de funções de interpolação
$U^N$	Matriz de deslocamentos dos nós da interface
$U_n$	Deslocamento normal dos nós da interface

$U_t$	Deslocamento tangencial dos nós da interface
$\sigma_{\text{máx}}^0$	Resistência à tração média do material
$l_c$	Comprimento característico
$\alpha$	Parâmetro adimensional
$\sigma^{el}$	Tensão normal no domínio elástico
$K_n$	Rigidez elástica normal
$K_t$	Rigidez elástica tangencial
$G_{F0}$	Valor base de energia de fratura
$d_{\text{máx}}$	Diâmetro máximo dos agregados
$f_{ck}$	Resistência característica a compressão do concreto
$G_{Ic}$	Trabalho normal de separação da superfície coesiva
$G_{IIc}$	Trabalho tangencial de separação da superfície coesiva
$\tau$	Tensão tangencial
$\tau_{\text{máx}}$	Tensão tangencial máxima
$\mu$	Módulo de elasticidade transversal
$v$	Deslizamento da fissura
$v_c$	Deslizamento crítico da fissura
$v_e$	Deslizamento elástico
$v_i$	Deslizamento inelástico
$v_{n,lim}$	Deslizamento final
$v_s$	Valor intermediário de deslizamento
$\tau_s$	Valor intermediário de tensão tangencial
$\tau_{\text{máx}}^0$	Resistência ao cisalhamento média do material
$F$	Superfície de ruptura
$u_i^{ef}$	Deslocamento inelástico efetivo
$\phi$	Ângulo de atrito

$\beta$	Fator de acoplamento
$\lambda$	Módulo da taxa de deslocamentos inelásticos
$E_y$	Módulo de elasticidade do aço
$f_y$	Tensão de escoamento do aço
$f_y^\infty$	Limite assintótico da tensão após o escoamento
$k$	Parâmetro de ajuste da lei elasto-plástica do aço
$z$	Coeficiente da relação normal de aderência
$\chi$	Parâmetro da curva da lei CEB-FIP
$\theta$	Coeficiente da relação normal de aderência
$\alpha_E$	Parâmetro que depende da natureza dos agregados
$h$	Altura do elemento estrutural
$h_s$	Altura equivalente de aço
$e$	Espessura do elemento estrutural
$x_{23}$	Limite que divide os domínios 2 e 3
$x_{lim}$	Limite que divide os domínios 3 e 4
$x$	Posição da linha neutra
$d$	Posição do centro de gravidade das armaduras
$\alpha_c$	Parâmetro normativo para determinação da área de armadura

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>23</b>
<b>1.1</b>	<b>Considerações gerais</b>	<b>23</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>25</b>
<b>1.3</b>	<b>Contribuições esperadas</b>	<b>25</b>
<b>1.4</b>	<b>Organização do trabalho</b>	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>27</b>
<b>2.1</b>	<b>Materiais Frágeis e Dúcteis</b>	<b>27</b>
<b>2.2</b>	<b>Comportamento do Concreto em Tração Uniaxial</b>	<b>28</b>
<b>2.3</b>	<b>Modelos Coesivos de Fratura do Concreto</b>	<b>30</b>
2.3.1	Modelo de Fissuras Discretas	32
2.3.2	Modelo de Fissuras Distribuídas	33
2.3.3	Modelo de Fissuras Incorporadas	34
<b>2.4</b>	<b>Fratura em Estruturas de Concreto Armado</b>	<b>35</b>
2.4.1	Vigas Subarmadas e Superarmadas	35
2.4.2	Comportamento de Fratura em Vigas de Concreto Armado	35
2.4.3	Processos de Ruptura no Concreto Armado	39
2.4.4	Modelos de Fratura do Concreto Armado	43
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>45</b>
<b>3.1</b>	<b>Interfaces Coesivas no Método dos Elementos Finitos</b>	<b>45</b>
3.1.1	Formulação Básica das Interfaces Coesivas em Elementos Finitos	45
3.1.2	Elementos de Interfaces Coesivas	46
3.1.3	Elementos de Interface Aplicados ao MEF	48
<b>3.2</b>	<b>Modelo de Fratura do Concreto</b>	<b>50</b>
3.2.1	Fratura do Concreto em Modo I	50
3.2.1.1	Lei Constitutiva Pré-Pico	50
3.2.1.2	Lei Constitutiva Pós-Pico	53
3.2.2	Fratura do Concreto em Modo Misto	56
3.2.2.1	Leis Constitutivas Pré e Pós-Pico	56
3.2.2.2	Modelo Acoplado	57
<b>3.3</b>	<b>Modelos Constitutivos Volumétricos</b>	<b>61</b>
3.3.1	Modelo Constitutivo para o Concreto Intacto	61
3.3.2	Modelo Constitutivo para o Aço	62
3.3.2.1	Lei Elástica-Perfeitamente Plástica	62
3.3.2.2	Lei Elastoplástica com Endurecimento Não Linear	63

<b>3.4</b>	<b>Modelos de Aderência entre Aço e Concreto</b>	<b>63</b>
3.4.1	Lei de Aderência de Dörr (1980)	65
3.4.2	Lei de Aderência Código Modelo CEB-FIP (1993)	65
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÃO NUMÉRICA</b>	<b>69</b>
<b>4.1</b>	<b>Ensaio de Flexão em 3 pontos</b>	<b>70</b>
4.1.1	Descrição do problema	70
4.1.2	Resultados das simulações	74
<b>4.2</b>	<b>Ensaio de Flexão em 4 pontos</b>	<b>80</b>
4.2.1	Descrição do problema	80
4.2.2	Resultados das simulações	82
<b>4.3</b>	<b>Influência dos parâmetros do modelo nos resultados das análises</b>	<b>90</b>
4.3.1	Energia de Fratura	90
4.3.2	Lei Pós-Pico	91
4.3.3	Parâmetro $\alpha$	93
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>97</b>
<b>5.1</b>	<b>Conclusões</b>	<b>97</b>
<b>5.2</b>	<b>Sugestões para Trabalhos Futuros</b>	<b>98</b>
	<b>Referências</b>	<b>99</b>
	 <b>ANEXO</b>	 <b>103</b>
	<b>ANEXO A – ALTERAÇÃO DE DOMÍNIO DAS VIGAS</b>	<b>105</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Vigas de concreto armado são elementos estruturais de diversas aplicações em Engenharia Civil. Para determinação da resposta destes elementos, métodos analíticos e numéricos são utilizados. Métodos analíticos, quando aplicados ao cálculo estrutural, geralmente são utilizados para vigas homogêneas com geometria simples, devido a facilidade de resolução. Entretanto, nas vigas de concreto armado, para que o problema seja totalmente definido, deve-se considerar outros fenômenos, como a heterogeneidade da seção transversal devido a presença da armadura, as não linearidades dos materiais e o escorregamento relativo entre o concreto e as barras de aço. Nestas situações, o problema deixa de ser linear elástico, por conseguinte, o equilíbrio, as condições de compatibilidade, bem como as leis que definem o comportamento dos materiais devem ser abordados por uma análise não linear para determinação da resposta da viga. Desta forma, devido a complexidade do problema, utilizam-se os métodos numéricos.

Aliado às vantagens dos métodos numéricos, o desenvolvimento dos computadores e softwares sofisticados de análise numérica não-linear promoveram a implementação destes métodos para várias aplicações em engenharia. Entre eles, destaca-se o métodos dos elementos finitos, hoje em dia, o mais usado em procedimentos numéricos.

Atualmente, em relação a análise em elementos finitos, devido a necessidade de se representar o adequado comportamento dos materiais, os modelos mais recentes estão buscando representar um dos fenômenos de grande importância na Engenharia Civil, a fissuração das estruturas de concreto, ou, mais especificamente, de concreto armado, onde os efeitos locais de dano, aliados a outros fenômenos, como a aderência entre o concreto e a armadura, são as duas maiores não linearidades do problema.

A fissuração no concreto é acompanhada pela redução da rigidez, maiores deflexões, falta de homogeneidade da seção transversal, além de ser indesejável esteticamente. Além disso, fissuras grandes contribuem para o aumento da permeabilidade do elemento estrutural, que em condições ambientais extremas pode ocasionar a corrosão da armadura, desgaste da cobertura de concreto e deterioração local da aderência na interface entre os materiais. A fissuração em vigas de concreto armado, embora possa ser danosa, na grande maioria dos elementos estruturais, não pode ser evitada. Estas considerações destacam a importância do estudo para estimativa precisa do comportamento das fissuras na engenharia de estruturas.

Estas estruturas, em estado limite último, são dimensionadas permitindo certa

fissuração, admitindo-se que todas as forças de tração serão resistidas pelas barras de aço. O limite para este dano no dimensionamento da seção transversal é determinado pela deformação do concreto em compressão sendo impedido o esmagamento do mesmo quando ocorre o escoamento das armaduras. Assim sendo, o fenômeno de fissuração do concreto é previsto para cargas relativamente baixas, e as fissuras são esperadas mesmo para uma determinada parcela do carregamento último, ou seja, por exemplo, em estado limite de serviço. Aliadas às considerações para o estado limite último, é importante destacar que as fissuras em vigas de concreto armado devem ser controladas no que diz respeito a sua abertura e distribuição ao longo do comprimento do elemento estrutural. Em determinadas condições, as fissuras nas estruturas de concreto simples podem levar a desastres catastróficos, mesmo com carregamentos inferiores ao de serviço. Porém, ao contrário do concreto simples, no concreto armado, o aparecimento de fissuras visíveis, bem como o crescimento e até abertura significativa destas, podem ser aceitáveis.

Atualmente, ainda é difícil a adequada descrição dos fenômenos físicos relacionados a formação e fratura deste material. Devido a este fato, muitas vezes, é feita a aplicação de fórmulas empíricas às simulações numéricas.

O mesmo pode ser ilustrado na teoria sobre a resistência do concreto armado que ainda é baseada, também, em resultados empíricos. Ou seja, os métodos existentes são, em um todo, desenvolvidos para a solução de problemas particulares. Este é o principal desafio ao se estudar o assunto.

Neste contexto, a partir da modelagem discreta elaborada por Lens (2009), o presente trabalho envolve o estudo da fissuração de vigas de concreto armado em flexão, analisando a resposta dada pelo gráfico de carga aplicada x deslocamento destes elementos estruturais, com diferentes geometrias, bem como o surgimento e propagação de fissuras nestes.

A motivação principal para este trabalho se deu com o trabalho de Evangelho (2013), onde a ruptura na região de tração das estruturas de concreto armado subarmadas em flexão foi representada pela utilização de elementos de interface somente no centro do vão, desta forma, reproduz-se apenas a fissura principal central. Para que fosse obtida adequada resposta do elemento estrutural, esta simplificação teve de ser compensada pela redução no módulo de elasticidade real do concreto.

Assim, no presente trabalho, com a utilização de elementos de interface entre todos os elementos de concreto da malha de elementos finitos, busca-se uma representação mais realística do processo de fissuração. A partir desta abordagem, analisar-se-á a capacidade do proposto modelo discreto de representar o comportamento de fratura de vigas de concreto armado.

## 1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo geral aplicar o modelo de fratura discreta por meio de interfaces coesivas desenvolvido por Lens (2009) às estruturas de concreto armado, incluindo elementos de interface entre os elementos de concreto na malha de elementos finitos, bem como elementos de aderência entre os elementos de aço e os de concreto, simulando o comportamento em flexão de vigas.

Especificamente, os objetivos são:

- Avaliar a resposta de vigas de concreto armado em flexão considerando que a fissuração pode ocorrer de forma generalizada na viga.
- Estudar a influência dos parâmetros de entrada do modelo nos resultados obtidos, como a energia de fratura, e outros parâmetros puramente numéricos.
- Analisar a importância da aderência entre o concreto e a armadura nos resultados.

## 1.3 CONTRIBUIÇÕES ESPERADAS

Com este estudo busca-se explorar as potencialidades do programa na modelagem da fissuração do concreto armado. Além disso, determinou-se uma topologia de nós e elementos na zona da armadura capaz de permitir a passagem e comunicação de fissuras através da armadura.

A partir deste estudo, pretende-se ter uma ferramenta capaz de reproduzir o comportamento em termos de mecânica da fratura de vigas de concreto armado, sendo validado a partir da resposta dada tanto na forma de gráfico de força aplicada x deslocamento dos elementos estruturais quanto a partir da representação da fissuração destes elementos, avaliando a capacidade de modelos discretos de fratura em representar estes fenômenos. Além disso, visa-se ter uma melhor noção com respeito às variáveis numéricas do modelo.

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. O capítulo 2 trata da fundamentação teórica referente aos assuntos da dissertação. Nele são abordados o comportamento em tração uniaxial do concreto, a descrição dos modelos coesivos de concreto, além de considerações sobre as propriedades de fratura deste material, finalizando com a contextualização do assunto às estruturas de concreto armado.

O capítulo 3 contém a metodologia específica do modelo utilizado no trabalho, incluindo desde a implementação em elementos finitos das interfaces coesivas, passando pelas formulações do modelo de fratura do concreto, até o modelo de aderência entre as

barras de aço e o concreto, incluindo também os modelos constitutivos volumétricos dos materiais, aço e concreto.

No capítulo 4, são apresentados exemplos de aplicação do modelo proposto. Este capítulo está subdividido de acordo com os resultados numéricos e experimentais de diferentes ensaios utilizados para validar os resultados obtidos.

Por fim, no capítulo 5, discute-se os resultados obtidos, elencando-se as conclusões do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 MATERIAIS FRÁGEIS E DÚCTEIS

Os critérios de resistência estabelecem as condições nas quais um material rompe. Baseiam-se em experimentos conduzidos em situações específicas, em geral simples.

Segundo Gross e Seelig (2011), até certo limite a resposta da maioria dos materiais é essencialmente elástica. O comportamento dúctil é caracterizado por deformações plásticas que ocorrem quando as tensões excedem a tensão de escoamento. O processo de deformação em materiais deformáveis plasticamente após atingirem a tensão de escoamento pode ser descrito por uma lei de endurecimento. Neste caso, a tensão de ruptura será atingida somente após deformações inelásticas suficientemente grandes. Em contrapartida, materiais frágeis se caracterizam pelo fato de que pouca ou nenhuma deformação inelástica ocorre antes da ruptura do material.

Ainda de acordo com Gross e Seelig (2011), dependendo do problema em análise, a resistência do material é geralmente definida ou pela tensão de escoamento ( $\sigma_{esc}$ ) ou pela tensão máxima ( $\sigma_{m\acute{a}x}$ ) na ruptura. Um aspecto comum a ambos tipos de materiais é que o seu comportamento muda drasticamente nestes limites. Neste contexto, é importante enfatizar que o comportamento dúctil ou frágil não é puramente uma propriedade do material. O estado de tensões a que o material está submetido também possui uma influência essencial no comportamento dos materiais.

Para ilustrar esse fato pode-se exemplificar com o estado de tensões hidrostático, que não provoca deformações inelásticas na maioria dos materiais, e pode mudar o comportamento de materiais dúcteis. Deste modo, sob determinados carregamentos estes materiais podem ter comportamento totalmente frágil.

Logo, para uma melhor caracterização da ruptura, o limite elástico para um material pode ser caracterizado pelo seu estado de tensões. Assim, a condição de ruptura pode ser descrita como:

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2.1)$$

A condição de ruptura  $F(\sigma_{ij}) = 0$  pode ser interpretada como uma superfície de ruptura em um espaço de tensões de seis dimensões ou alternativamente em um espaço de tensões principais de três dimensões.

## 2.2 COMPORTAMENTO DO CONCRETO EM TRAÇÃO UNIAXIAL

De acordo com van Mier (1996), o concreto se caracteriza por ser um material quase-frágil, logo a sua relação entre tensão e deformação se encontra em um patamar intermediário entre os materiais frágeis e dúcteis. O que diferencia o comportamento deste tipo de material para os demais é o ramo descendente, pós-pico, da relação entre tensão e deformação para ensaios de tração uniaxial, como mostra a Figura 1.

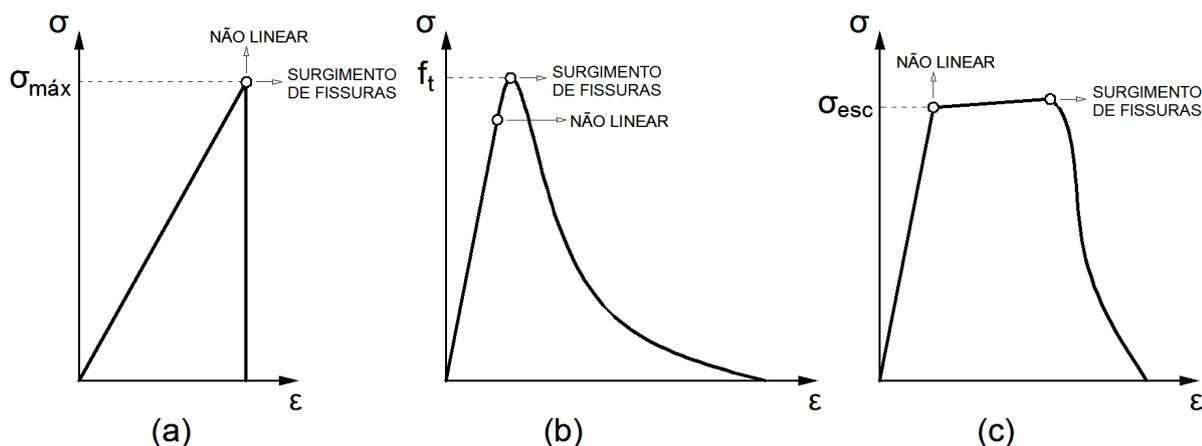


Figura 1 – Relação entre tensão e deformação em tração uniaxial para os materiais: a) frágeis, b) quase-frágeis, c) dúcteis. (adaptado de Kumar e Barai, 2011)

Segundo Kumar e Barai (2011), os materiais frágeis possuem comportamento elástico linear até o carregamento máximo, e o aparecimento de fissuras catastróficas se dá logo após este pico (Figura 1a). Já o comportamento dúctil (Figura 1c) é caracterizado por uma grande parcela de escoamento, havendo, antes da ruptura, o comportamento não linear. Enquanto que os materiais quase-frágeis (Figura 1b) se caracterizam pelo comportamento linear ocorrer até quase antes do carregamento máximo, no qual a propagação das fissuras tem início e a capacidade de transferência de tensões do material a partir deste ponto começa a reduzir.

Nos materiais quase-frágeis, a queda pós-pico não é abrupta devido a fenômenos que dissipam a energia na ponta da fissura. Esta zona é denominada Zona de Processo de Fratura (ZPF), ilustrada para o concreto na Figura 2.

O comportamento do concreto em tração por muito tempo foi considerado de pouca importância para análises de fratura. Isto se deve ao fato de o concreto ser um material bastante empregado para suportar tensões de compressão, todavia, com o surgimento dos conceitos da Mecânica da Fratura, ficou claro que as propriedades do concreto sob tração são fundamentais no estudo da fratura das estruturas de concreto, uma vez que na região da ponta da fissura o concreto está sob tração.

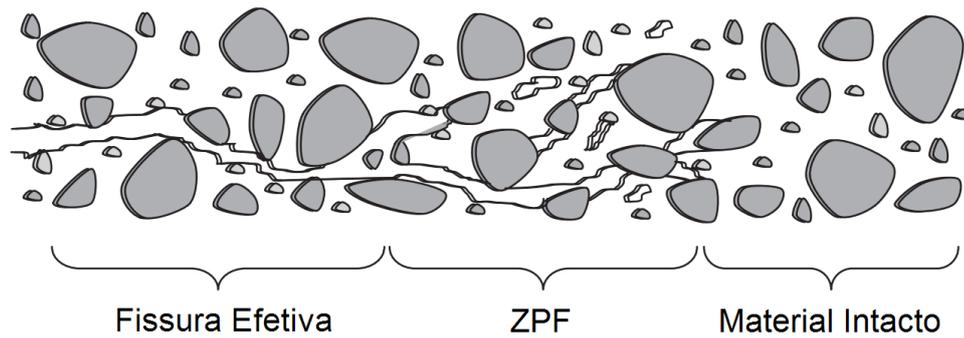


Figura 2 – Esquema da ZPF no concreto.

Na década de 1960, diversos pesquisadores (Hughes e Chapman (1966) e Evans e Marathe (1966)) obtiveram uma completa relação entre tensão e deformação para o concreto em tração uniaxial por meio de ensaios. Como já mostrada na Figura 1, curva típica resultante está detalhada na Figura 3.

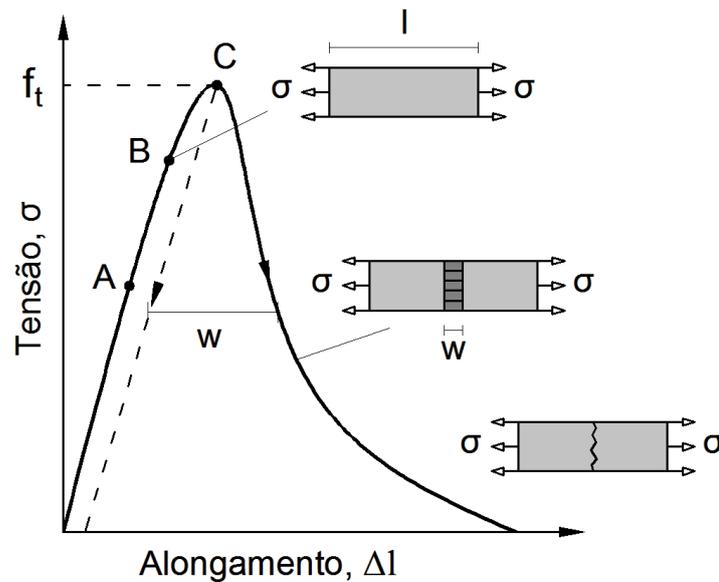


Figura 3 – Típica curva tensão-alongamento para o concreto em tração uniaxial. (adaptado de Kumar e Barai, 2011)

Destacam-se na curva três pontos importantes, segundo Shah et al. (1995). O ponto A corresponde a aproximadamente 30% da carga de pico, até a qual a propagação de micro-fissuras e vazios internos são desprezíveis. O ponto B corresponde a 80% da carga de pico, a partir do qual as micro-fissuras se propagam e estão isoladas e distribuídas aleatoriamente no volume do concreto. Nesta região, a tensão de tração está uniformemente distribuída na direção do carregamento ao longo do comprimento da amostra. Entre os pontos B e C, as micro-fissuras começam a se tornar macro-fissuras e a distribuição de tensões de tração na direção do carregamento não é mais uniforme. Até a carga de pico, no ponto C, ocorre a propagação estável de fissuras. Na carga de pico, o processo de dano

localizado se inicia formando a ZPF.

De acordo com Shah et al. (1995), no caso específico do concreto, o processo de formação da ZPF pode ser dividido em três etapas. A primeira se dá com a formação, desenvolvimento e coalescência de vazios; a segunda, a partir da constituição de pontes entre as faces das fissuras pelos grãos de agregados; e a terceira, pela formação de fissuras, a nível macroscópico, com possível engrenamento dos agregados.

A presença da ZPF na ponta da fissura traz diversos desafios no estudo da fratura do concreto, uma vez que, a nível macroscópico, esta zona não pode ser caracterizada totalmente como uma região contínua, nem como uma região de descontinuidade. Na realidade, é uma região parcialmente fraturada com alguma capacidade de transferência de tensões remanescentes por meio do intertravamento de agregados e diversas microfissuras, e funciona como uma zona de transição entre a fissura em si, que representa a completa descontinuidade, e o material intacto, um meio contínuo. Uma vez que a fratura do concreto se inicia nesta região, a análise da fratura deste material se inicia em como modelar a ZPF.

A ZPF pode ser considerada uma zona coesiva, segundo os conceitos de Barrenblat (1962) e Dugdale (1960), conforme será discutido a seguir.

## 2.3 MODELOS COESIVOS DE FRATURA DO CONCRETO

Os modelos coesivos surgiram a partir dos trabalhos de Dugdale (1960) e Barrenblat (1962). Enquanto Dugdale aplicou modelos coesivos para análise da fratura dúctil, Barrenblat o utilizou no estudo da fratura frágil. Neste tipo de modelo, a zona coesiva é modelada como uma fissura fictícia submetida a tensões de compressão ou coesão (Figura 4).

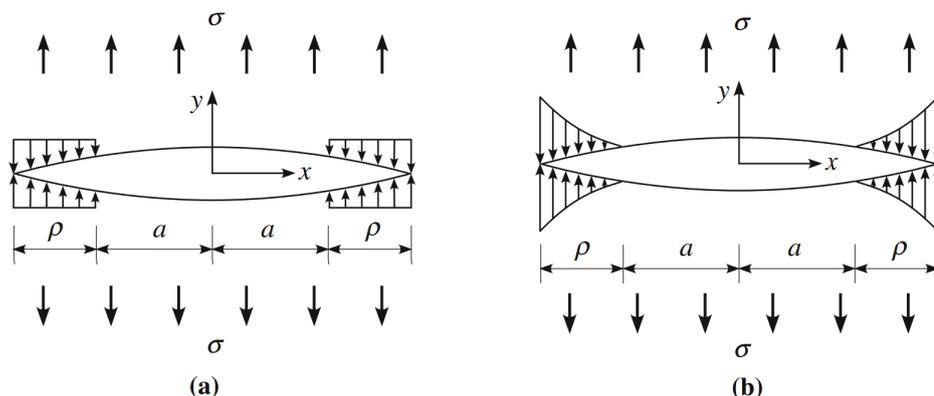


Figura 4 – Modelos coesivos: (a) modelo de Dugdale, (b) modelo de Barrenblat. (adaptado de Shi, 2009)

Com base nestes conceitos, Hillerborg (1976) aplicou a ideia de uma fissura fictícia em substituição da ZPF física para a simulação da fratura no concreto, como ilustra a Figura 5.

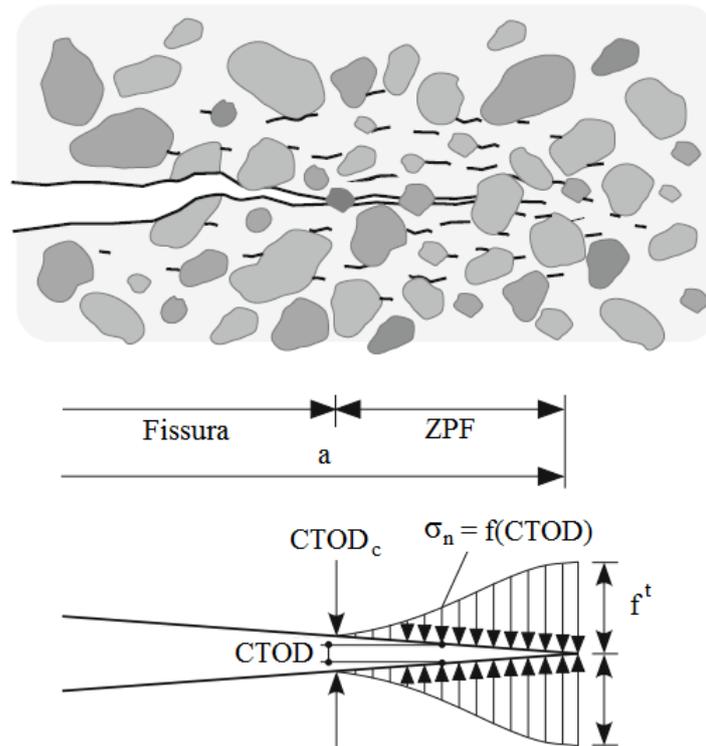


Figura 5 – Representação da ZPF como fissura fictícia. (adaptado de Shi, 2009)

Na aplicação de modelos coesivos, inicialmente considera-se que o material não possui discontinuidades, não há deformações causadas pela fissura e a resposta é apenas linear elástica. O aparecimento de fissuras fictícias se dá após as tensões atingirem a resistência à tração do material,  $f_t$ . Para isso, é necessária uma lei que determine o comportamento das tensões após o aparecimento destas fissuras.

Assim, o comportamento do concreto pode ser descrito segundo duas curvas características: a curva tensão-deformação até a carga de pico (tensão máxima) e a curva tensão-abertura das fissuras após a carga de pico (Figura 6), conforme proposto por Hillerborg (1976).

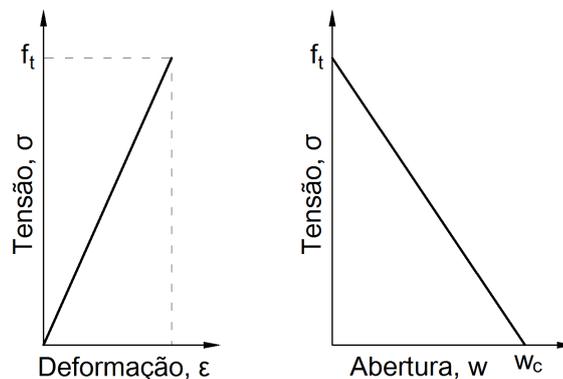


Figura 6 – Relação tensão-deformação linear para o concreto fora da ZPF e relação tensão-deslocamento linear na ZPF. (adaptado de Kumar e Barai, 2011)

Para garantir uma correta energia de dissipação, e evitar variações abruptas de tensões que não correspondem a realidade, é necessário descrever a perda de coesão como um processo gradual (Hillerborg, 1976). Fisicamente, isso se justifica pelo fato de que a formação de fissuras, a nível macroscópico, é, em um material heterogêneo, precedida pela iniciação, crescimento e coalescência de um conjunto de micro-fissuras. Para modelagem, esse sistema complexo formado por diversas micro-fissuras não contínuas é substituído por uma fissura coesiva equivalente que ainda é capaz de transmitir tensões.

A relação constitutiva pós-pico,  $\sigma = f(w)$ , é a principal característica do material na aplicação dos modelos coesivos. Esta função é uma propriedade do material e relaciona as tensões atuantes nas superfícies da fissura, denominadas tensões coesivas ( $\sigma$ ), e a abertura correspondente da fissura,  $w$ .

Para se definir esta relação, duas propriedades são essenciais: a resistência à tração,  $f_t$ , e a energia coesiva de fratura,  $G_F$ . A resistência à tração corresponde a tensão na qual o processo de fratura de concreto se inicia e as fissuras começam a se abrir, e a energia coesiva de fratura corresponde a área abaixo da curva da relação pós-pico, como ilustra a Figura 7.

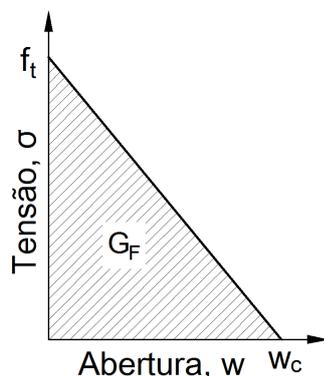


Figura 7 – Energia específica de fratura como a área entre a curva tensão-abertura.

O ponto terminal da curva  $\sigma - w$ ,  $w_c$ , é a abertura crítica da fissura e corresponde a abertura máxima da ZPF na qual ainda há transferência de tensões. As dificuldades em se aplicar os modelos coesivos para o concreto estão na determinação experimental dos valores de  $f_t$  e  $G_F$  ou  $w_c$ .

Normalmente os modelos coesivos de fratura do concreto podem ser classificados como: modelos de fissuras discretas, modelos de fissuras distribuídas e modelos de fissuras incorporadas.

### 2.3.1 Modelo de Fissuras Discretas

No modelo de fissuras discretas (Ngo e Scordelis (1967), Ingraffea e Gerstle (1984), Rots (1988), Lens et al. (2008), entre outros), as fissuras são modeladas explicitamente. No caso do método dos elementos finitos, a abertura consiste na separação dos pontos nodais da malha de elementos finitos. Logo, cada fissura é representada individualmente como uma descontinuidade real (Figura 8). Portanto, a ponta da fissura bem como todas as singularidades a ela associadas são representadas.

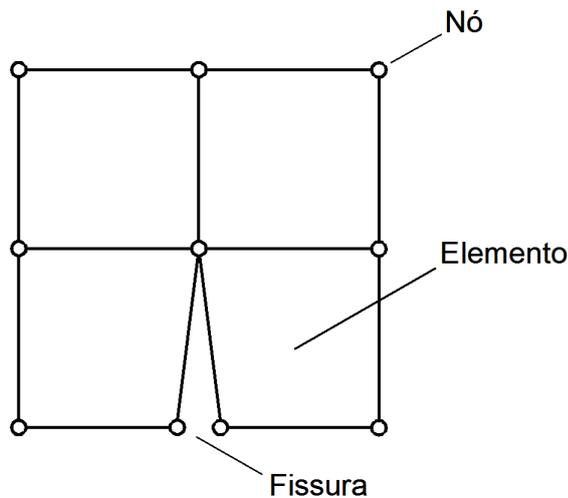


Figura 8 – Representação do modelo de fissuras discretas. (adaptado de Kwak e Filippou, 1990)

A dificuldade de aplicação deste tipo de modelagem em elementos finitos está ligada ao fato de que o caminho que será percorrido pela fissura é previamente definido pela malha. Entretanto, o fato de a fissura estar fisicamente representada é o principal aspecto que faz este tipo de modelo ser bastante utilizado, pois, por exemplo, nos casos em que há fissuras dominantes, resultados mais precisos são obtidos devido a abordagem mais realista das fissuras e de suas características.

Em princípio, não há limitações quanto às dimensões da malha, problema esse característico dos modelos de fissuras distribuídas que será visto a seguir.

### 2.3.2 Modelo de Fissuras Distribuídas

O modelo de fissuras distribuídas (Rashid (1968), Bazănt e Oh (1983), de Borst et al. (2004), Meschke e Dumstorff (2007), entre outros) representa a fratura do concreto sem alterar a topologia da malha de elementos finitos durante a análise, sendo necessário somente atualizar a relação entre tensão e deformação para considerar o dano devido a fratura do concreto, ou seja, por meio de alterações nas propriedades constitutivas do material. O material fraturado é tratado como contínuo, e a fissura é incluída ao longo do elemento (Figura 9). Devido a facilidade de aplicação, este tipo de modelagem se tornou

bastante popular em simulações de fratura de materiais cimentícios.

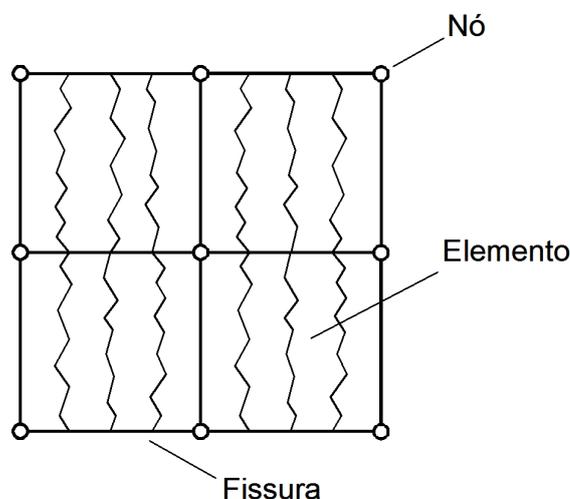


Figura 9 – Representação do modelo de fissuras distribuídas. (adaptado de Kwak e Filippou, 1990)

Portanto, esta representação não possui problemas com geração de malhas específicas, todavia uma das desvantagens da modelagem distribuída de fratura está relacionada com a objetividade da malha. A diminuição do comprimento dos elementos da malha de elementos finitos tende a fragilização do comportamento do material. Para solução deste problema, a relação constitutiva tensão x deformação empregada, como entrada de dados nos elementos finitos, deve ser função do tamanho da malha, para que a resposta estrutural não o seja e represente o comportamento físico. Além disso, existe um tamanho mínimo de elemento finito, associado ao tamanho da chamada banda de fissuração (Bazant e Oh, 1983).

### 2.3.3 Modelo de Fissuras Incorporadas

Os modelos incorporados (Grootenboer et al. (1981), Dvorkin et al. (1990), Oliver (1990), d'Ávila (2003), entre outros) se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrões e surgiram como uma alternativa para representar tanto o comportamento do concreto simples quanto o do concreto armado. Estes modelos basicamente podem ser divididos em dois grandes grupos: os que incorporam uma descontinuidade de deslocamentos e os que incorporam uma descontinuidade de deformações.

Nos modelos que incorporam uma descontinuidade de deslocamentos, a fissura é representada por meio de uma linha de descontinuidade de deslocamentos incorporada no domínio do elemento. Após o surgimento da fissura, existem duas equações constitutivas definindo o comportamento do material: uma relação tensão de superfície x deslocamento para a linha de descontinuidade e uma relação tensão x deformação para o resto do domínio. O equilíbrio entre a tensão transmitida por meio da linha de descontinuidade e a tensão no

volume do elemento é atingida através de um processo iterativo interno do elemento.

Já nos modelos que incorporam uma descontinuidade de deformação, a representação da fissura é feita através da incorporação de um modo de deformação adicional na interpolação do campo de deformações do elementos; ou seja, a fissura é simulada por meio de uma banda de localização. A largura desta banda pode ser considerada como um parâmetro do material e deve ser conhecida a priori.

O modelo incorporado se destaca também por reunir os aspectos favoráveis das duas representações anteriores, não havendo necessidade de redefinição da malha (desvantagem do modelo discreto) e os resultados obtidos são independentes da malha de elementos finitos utilizada (deficiência do modelo distribuído).

## 2.4 FRATURA EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

### 2.4.1 Vigas Subarmadas e Superarmadas

O comportamento de fratura de estruturas de concreto armado, de acordo com Shah et al. (1995) varia de acordo com a taxa de armadura do elemento estrutural. A norma brasileira NBR 6118 (2014) define a taxa de armadura ( $\rho_{sc}$ ) como sendo:

$$\rho_{sc} = \frac{A_s}{A_c} \quad (2.2)$$

Sendo:

$A_s$ : área de aço das armaduras na seção transversal;

$A_c$ : área de concreto na seção transversal.

Ainda de acordo com a referida norma, em função da taxa de armadura e das propriedades materiais e geométricas das vigas de concreto armado, é possível estabelecer os domínios de deformação em que determinada viga trabalha, e definido o domínio, podem-se classificar as vigas em subarmadas ou superarmadas.

Pela norma, são consideradas subarmadas as vigas dimensionadas no domínio de deformação 3, com ruptura à compressão do concreto ( $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$ ) e escoamento do aço ( $\epsilon_s \geq \epsilon_{yd}$ ), enquanto que, as vigas superarmadas são as que estão em domínio 4, onde há ruptura à compressão do concreto ( $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$ ) porém não há escoamento do aço ( $\epsilon_s < \epsilon_{yd}$ ).

### 2.4.2 Comportamento de Fratura em Vigas de Concreto Armado

Em estruturas de concreto, as fissuras geralmente surgem em regiões onde as tensões de tração principais excedem a resistência à tração do concreto e elas se orientam em direção perpendicular às direções das tensões de tração (van Mier, 1996).

A presença de armadura pode ter pequena influência direta no surgimento de fissuras, porém as armaduras garantem considerável resistência à propagação das fissuras bem como às suas aberturas. Por isso, como se pode imaginar, a resposta de estruturas de concreto armado, no que diz respeito a fratura, depende não só da geometria e do carregamento mas também da quantidade de aço (taxa de armadura), localização e orientação deste.

A influência da taxa de armadura na fratura de elementos estruturais pode ser analisada sob três diferentes perspectivas: em vigas de concreto armado subarmadas, superarmadas e com o mínimo de armaduras necessárias.

De acordo com Shah et al. (1995), em vigas de concreto armado subarmadas (Figura 10), quando submetidas a flexão, algumas fissuras surgirão e se propagarão na região inferior da viga. Até que, com o aumento do carregamento, o aço entrará em escoamento ainda antes de o concreto atingir sua resistência à compressão. Visto que as forças de tração na armadura permanecerão praticamente constantes com o aumento da carga aplicada, o aumento do carregamento resulta no aumento das tensões de compressão no concreto na região acima da zona fraturada, e assim que o concreto atinge sua máxima resistência à compressão, a viga rompe.

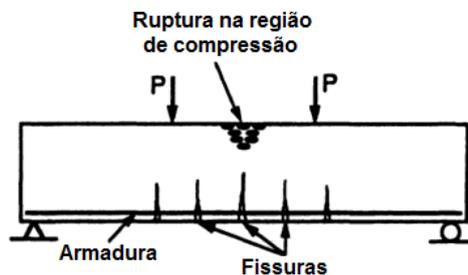


Figura 10 – Fratura de uma viga de concreto armado subarmada. (Shah et al., 1995)

Já em vigas de concreto superarmadas (Figura 11) devido ao aumento da quantidade de barras de aço, as armaduras geralmente não escoam quando ocorre o colapso da viga. Neste caso, embora o colapso também resulte da resistência à compressão do concreto, ainda que surjam fissuras na região de tração, o comprimento destas é inferior ao crítico, logo a ruptura da viga não é controlada pelo aparecimento e propagação de fissuras.

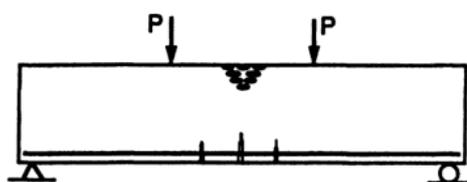


Figura 11 – Fratura de uma viga de concreto armado superarmada (Shah et al., 1995)

Por fim, vigas de concreto armado com taxa de armadura inferior ao mínimo (Figura 12) se caracterizam pelo aparecimento de uma fissura dominante no meio do vão da viga, sendo esta a responsável pelo colapso da estrutura. Este comportamento é coerente, uma vez que, devido as baixas taxas de armaduras, o comportamento da viga aproxima-se a resposta de elementos de concreto simples.

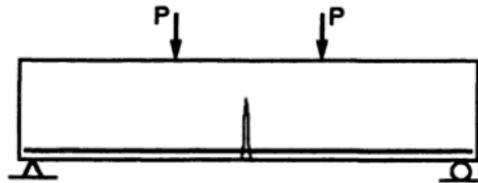


Figura 12 – Fratura de uma viga de concreto armado com taxa de armadura inferior ao mínimo (Shah et al., 1995)

No estudo da fratura de elementos estruturais de concreto, em especial vigas, comumente, verifica-se a resposta de modelos numéricos por meio da análise do diagrama carga aplicada pelo deslocamento no meio do vão. Em vigas de concreto armado, diversos autores (Burns e Siess (1966), van Mier (1996), Shah et al. (1995), entre outros) tratam na literatura a respeito do assunto, e dois tipos de comportamentos são destacados no que se referem as vigas de concreto armado: o comportamento quase-frágil e dútil (Figura 13).

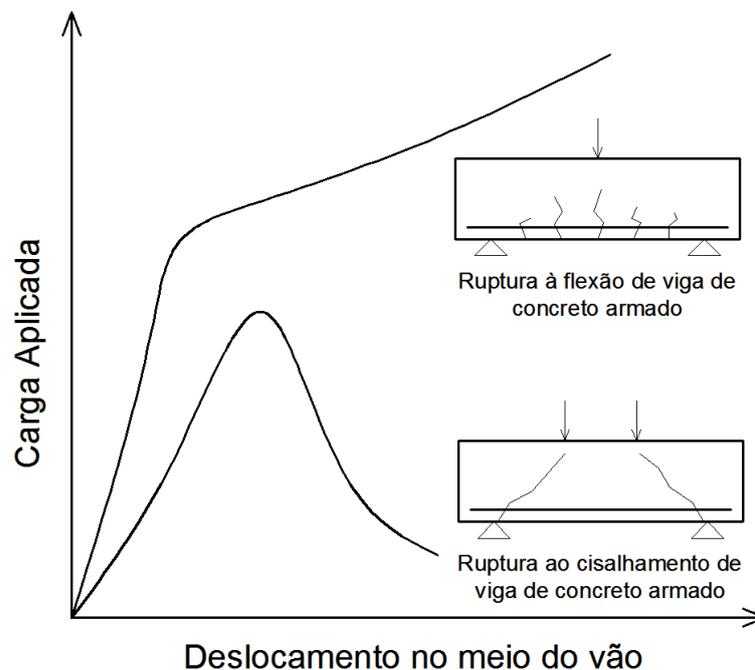


Figura 13 – Comportamento quase-frágil e dútil de vigas de concreto armado. (Shah et al., 1995)

Nota-se que, em ensaios de flexão a três pontos, nos quais existem ambos os esfor-

ços cisalhantes e de flexão em toda a viga, em geral, as vigas possuem comportamento predominantemente dúctil, com fissuras que se concentram na região central da viga, enquanto que, em ensaios em flexão a quatro pontos, os elementos possuem comportamento quase-frágil e as fissuras dominantes na ruptura se dão na região dos esforços cortantes.

No estudo da flexão de vigas, segundo Burns e Siess (1966), a Figura 14 ilustra os estágios típicos no diagrama carga aplicada pelo deslocamento no meio do vão para uma viga de concreto armado biapoiada, e resultados similares são obtidos para outros tipos de elementos estruturais de concreto armado.

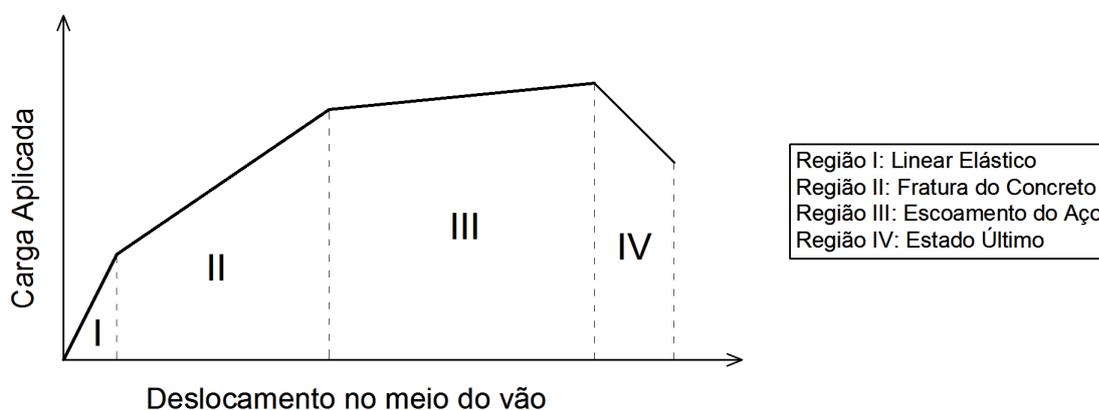


Figura 14 – Resposta de carga-deslocamento típica de um elemento de concreto armado.

A resposta, neste caso, pode ser dividida basicamente em quatro regiões, em função do comportamento dos materiais: a região elástica linear sem fratura (I), a região de propagação de fissuras no concreto (II) e a região plástica de escoamento do aço e de esmagamento do concreto (III) e a região limite última (IV).

Inicialmente, o comportamento das vigas de concreto armado é essencialmente elástico, porém apenas durante uma pequena parcela inicial da análise. Logo em seguida, há a primeira mudança no diagrama força x deslocamento com o surgimento das primeiras fissuras na região tracionada da viga. A partir desse ponto, a rigidez reduz-se aproximadamente de maneira linear, havendo uma pequena diminuição na curva em relação ao comportamento linear do início do ensaio.

A terceira região se caracteriza pelo escoamento das barras de aço da armadura longitudinal. Em vigas de concreto armado subarmadas, nesta região, o escoamento das armaduras acontece durante o esmagamento do concreto na região de compressão, enquanto que, em vigas de concreto superarmadas, o processo se altera, e primeiro há o esmagamento do concreto seguido do escoamento do aço.

A quarta região corresponde à capacidade limite última de carregamento da viga. Nessa região, o esmagamento do concreto atinge níveis críticos, levando a viga a ruína.

Ainda em relação a resposta de carga x deslocamento de vigas de concreto armado, segundo Jakubovskis et al. (2013), na Figura 15, tem-se destacada na curva 1 a primeira e a segunda regiões da resposta no gráfico carga aplicada versus deslocamento no meio do vão de uma viga de concreto armado em flexão, enquanto que a curva 2 representa a mesma resposta apenas para as barras de aço destas estruturas.

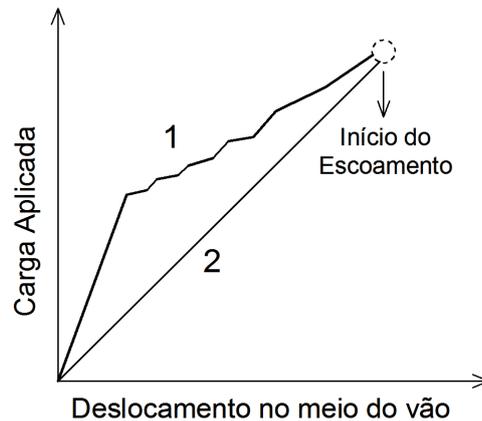


Figura 15 – Esquema das duas primeiras regiões da relação carga-deslocamento de um elemento de concreto armado em flexão (adaptado de Jakubovskis et al., 2013)

Pela Figura 15, percebe-se a notável diferença na resposta que existe quando se considera a resistência à tração do concreto em face da consideração de que apenas as barras de aço resistem aos esforços de tração. Quanto mais longe se está da região a partir da qual se inicia o escoamento das armaduras, maior é esta diferença. Uma vez que, em geral, a resistência à tração do concreto é negligenciada, utilizando-se para dimensionamentos apenas a resistência do aço, nota-se, portanto, que a capacidade de resistência destes elementos estruturais nesta região é subestimada (Jakubovskis et al., 2013).

Em síntese, pela análise das quatro regiões definidas, as respostas, nos trechos não lineares, são causadas por três efeitos importantes: a fratura do concreto em tração, o escoamento das armaduras e até mesmo o esmagamento do concreto na compressão.

Existem também não linearidades devido a constituintes do concreto armado, como a relação de aderência entre as armaduras de aço e o concreto e a interação das barras com as fissuras em propagação; estes fenômenos são discutidos na próxima seção. Além disso, há efeitos dependentes do tempo como relaxação, fluência e variação da temperatura que também contribuem para o comportamento não linear. Ademais, a relação tensão-deformação do concreto não só é não linear, mas também é diferente em tração e em compressão e suas propriedades mecânicas dependem da idade do concreto e das condições de carregamento e ambientais como umidade e temperatura.

### 2.4.3 Processos de Ruptura no Concreto Armado

No estudo de estruturas de concreto armado, o fenômeno da aderência é de essencial importância. A aderência é uma propriedade que possibilita a transferência de esforços entre os materiais e a compatibilidade de deformações entre eles e também influencia o escorregamento da armadura nos segmentos entre fissuras, limitando a abertura dessas.

De acordo com Brisotto et al. (2012), a ruptura de estruturas de concreto armado é caracterizada por uma série de processos específicos relacionados à aderência entre o concreto e as barras aço. Dentre eles destaca-se: a formação de fissuras primárias e secundárias e os fenômenos de arrancamento e fendilhamento.

As fissuras denominadas primárias (Figura 16) são as fissuras que surgem quando as tensões principais macroscópicas no concreto superam a resistência à tração do mesmo.

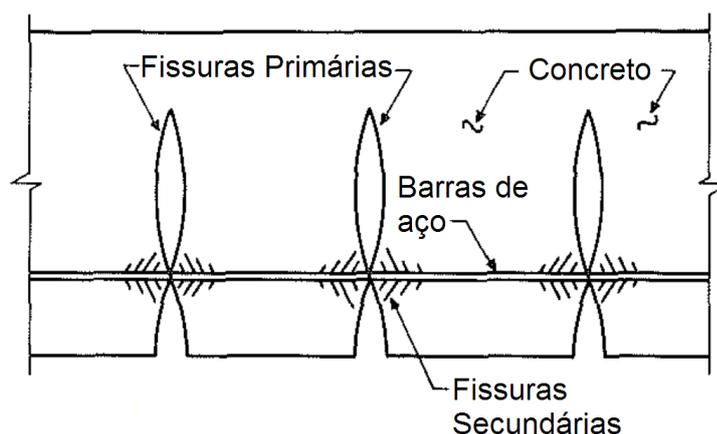


Figura 16 – Representação da fissuração primária e secundária no concreto armado. (adaptado de Ingraffea, 1984)

Para exemplificar, em um elemento de concreto armado curto cujas barras de aço estejam submetidas a tração (Figura 17), inicialmente a tensão máxima de tração no concreto estará localizada no meio do vão, uma vez que neste ponto há aderência perfeita, já que não há escorregamento relativo entre a armadura e o concreto, e com isso a transferência de esforços do material aço para o concreto é maior.

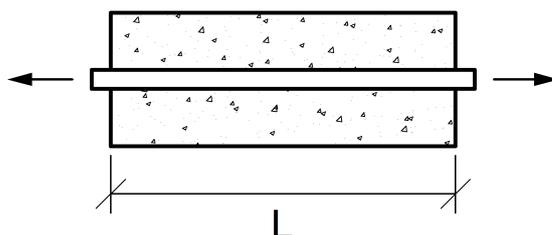


Figura 17 – Peça de concreto armado com barra de aço submetida a tração.

Nesta região, quando as tensões de tração no concreto atingem o valor da resistência à tração deste, o mesmo se fissa em direção perpendicular a da força aplicada dando origem a fissura primária.

Ao longo do processo, com o aumento da força aplicada, a formação de fissuras primárias é contínua, ou seja, nos diversos pontos onde a tensão de tração do concreto superar a sua resistência à tração de maneira análoga à descrita, surgirão fissuras primárias. Para o caso citado, a partir da fissuração primária central, pode-se analisar a peça rompida como dois novos elementos, e, portanto, novas fissuras surgirão no meio do comprimento destas novas peças, como ilustra a Figura 18, desde que o comprimento entre fissuras seja maior que o comprimento de ancoragem. No caso de peças maiores, pode-se ter múltiplas fissuras na primeira geração de fissuração.

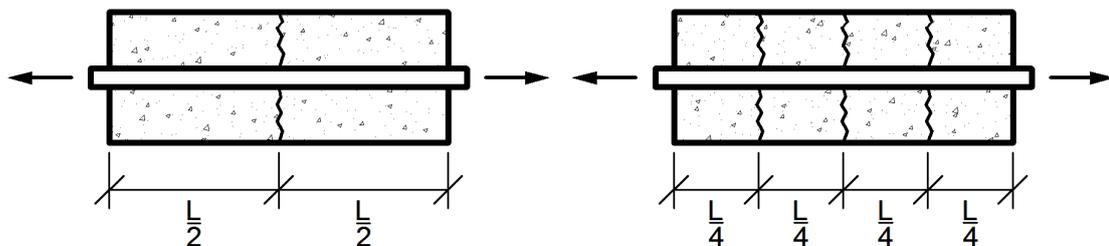


Figura 18 – Formação de fissuras primárias.

Nas proximidades das fissuras primárias, é comum o surgimento de fissuras secundárias (Figura 16). De acordo com Ingraffea (1984) estas fissuras, em geral, são radiais, possuem abertura, bem como comprimento, inferior em relação as fissuras primárias e podem surgir devido a efeitos como concentração de tensões nas nervuras das barras.

Os processos de ruptura citados anteriormente estão relacionados a transferência de esforços entre o aço e o concreto, definindo a ruptura do concreto quando a tensão de tração transferida pelo aço é superior a resistência do concreto. Todavia, existem também, fenômenos de ruptura relacionados a perda de aderência entre estes dois materiais, e estes podem ser divididos em dois grandes grupos: ruptura por arrancamento direto da barra e pelo fendilhamento do cobrimento de concreto.

Ocorre a ruptura por arrancamento da barra de aço (Figura 19) quando a resistência à compressão do concreto não é suficiente, permitindo seu cisalhamento entre as nervuras da barra. Nesse caso, a barra escorrega no interior do concreto, pois há um confinamento adequado promovido pelo cobrimento do concreto adjacente, evitando a ruptura por fendilhamento (Almeida Filho, 2006). Assim, quando o cobrimento é grande ou o comprimento de ancoragem é insuficiente, a tendência é a ruptura ocorrer por arrancamento da barra.

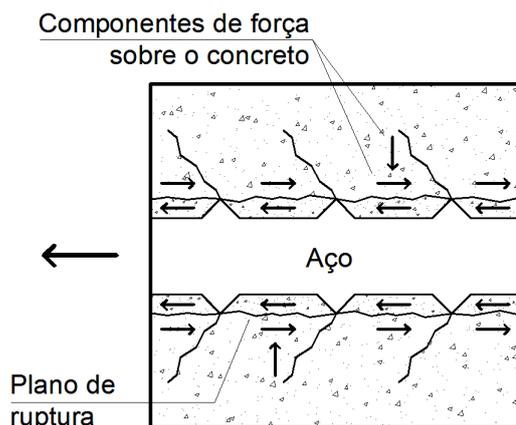


Figura 19 – Representação do arrancamento no concreto armado.

Por outro lado, a ruptura devido ao fendilhamento (Figura 20) ocorre quando a resistência à compressão do concreto é suficiente, ou seja, o concreto circunvizinho à barra de aço rompe-se graças à intensa fissuração.

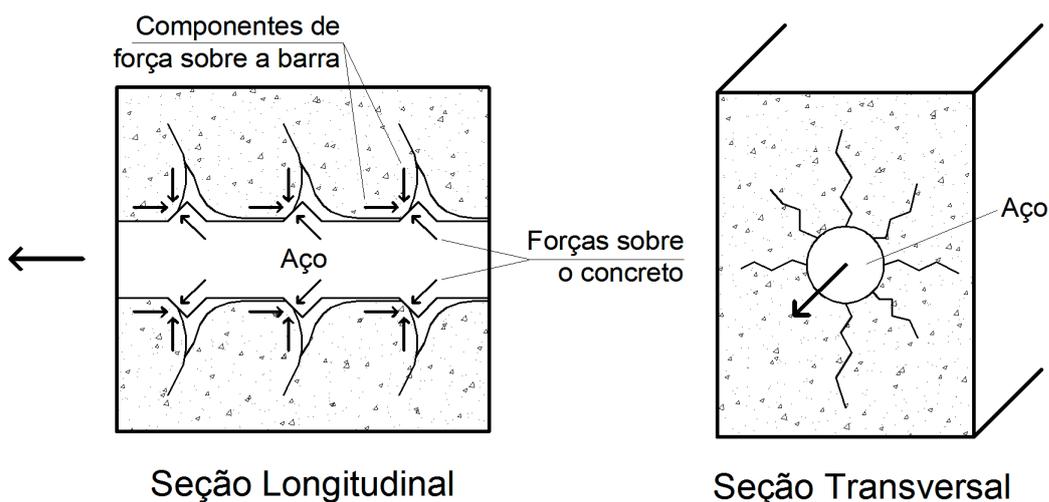


Figura 20 – Representação do fendilhamento no concreto armado.

Tais fissuras surgem devido à pressão aplicada ao concreto pelas nervuras, causando tensões de tração no concreto em volta da barra (Simplicio, 2008). Ocorre então uma modificação no comportamento da peça, que tem sua rigidez diminuída, e a transferência da tensão do aço para o concreto passa a ser feita por meio de forças de compressão inclinadas. Assim, no contato entre a nervura e o concreto, surge uma força com duas componentes. A componente paralela ao eixo da barra é proporcional à tensão de aderência, e a componente radial em relação à barra atua como pressão interna, podendo ocasionar fissuras de fendilhamento. Caso o concreto não apresente um confinamento adequado ou se a distância entre as barras e/ou o cobrimento do concreto for pequena, as áreas de influência de cada barra (cerca de três vezes a três vezes e meia o valor de seu diâmetro) ficam próximas ou se sobrepõem, e a ruptura tende a se dar por fendilhamento, já que

a propagação das fissuras até a borda do elemento ocasiona perda de aderência. Essa ruptura é do tipo frágil e costuma ocorrer sem aviso prévio (Silva, 2006).

#### 2.4.4 Modelos de Fratura do Concreto Armado

A modelagem de fratura do concreto armado, assim como do concreto simples, também pode ser analisada por meio de três tipos de modelos distintos: o modelo discreto, o modelo distribuído e o modelo incorporado.

Os modelos discretos são mais comumente aplicados em estruturas que possuem poucas fissuras, como nas estruturas com armadura insuficiente. A representação de múltiplas fissuras, como em geral se observa nas estruturas de concreto armado, requer um alto custo computacional, com a geração de malhas específicas e em alguns casos algoritmos de remalhamento destas malhas.

Todavia, a complexidade de aplicação deste modelo não restringiu a aplicação deste às estruturas de concreto armado, podendo-se citar diversas aplicações deste tipo de representação, como Ingraffea e Gerstle (1984) um dos precursores desta modelagem; Chen e Yang (2005), Kostas et al. (2015) (utilizaram o método denominado *Discrete Element Method* (DEM) para estudo de placas de concreto reforçado), Carpinteri (2009) e Brisotto et al. (2012).

Por outro lado, os modelos distribuídos, em um primeiro momento, podem ser considerados mais adequados às estruturas de concreto armado, uma vez que representam adequadamente as diversas fissuras que surgem em um padrão bem distribuído nestas estruturas. Esta característica, aliada a facilidade de aplicação deste tipo de modelagem, tornou esta representação a mais popular entre as estruturas de concreto armado. Dentre os trabalhos que aplicaram modelagem distribuída ao concreto armado, destacam-se: Gupta e Maestrini (1989), Feenstra e de Borst (1995), Weihe et al. (1998), Machado (2002), d'Ávila (2003), Machado et al. (2007) e Menin et al. (2009)

Os modelos incorporados, por sua vez, possuem diversas aplicações mais recentes devido às suas vantagens frente aos modelos discretos e distribuídos, e em relação às estruturas de concreto armado podem-se citar trabalhos como: Elwi e Hrudey (1989), Blaauwendraad e Grootenboer (1981), d'Ávila (2003) e Brisotto et al. (2008).



### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 INTERFACES COESIVAS NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste trabalho, utilizou-se um modelo discreto de fratura, considerando interfaces coesivas. Nesse caso, a representação da fratura é feita por meio de elementos de ligação entre as faces da malha de elementos finitos.

Estes elementos são denominados elementos de interface e são elementos virtuais que permitem controlar a abertura de eventuais fissuras que possam surgir durante a análise por meio de relações constitutivas entre o deslocamento e a tensão aplicada nos elementos. Logo, permite representar o comportamento da zona coesiva, e os esforços transmitidos diminuem de forma gradual até não haver mais transmissão de esforços entre as faces da zona coesiva, ponto onde há ruptura ou propagação da fissura.

##### 3.1.1 Formulação Básica das Interfaces Coesivas em Elementos Finitos

A implementação computacional, por meio do método dos elementos finitos, das interfaces coesivas é caracterizada pela inclusão de um termo de trabalho interno da interface no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Considerando-se o corpo da Figura 21.

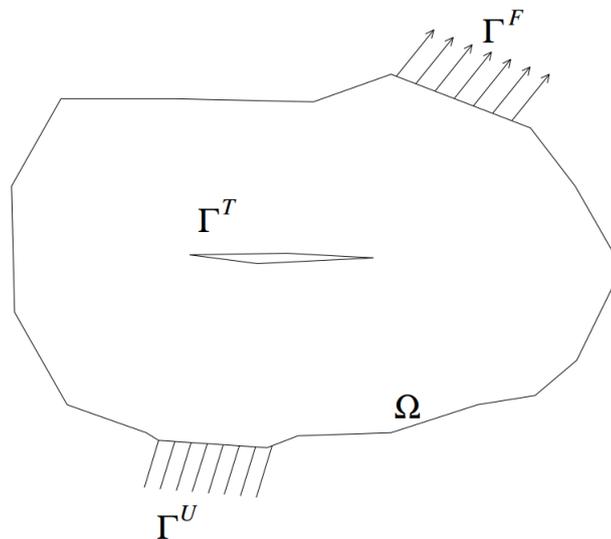


Figura 21 – Corpo em estudo.

A seguinte equação de equilíbrio descreve o problema:

$$\int_{\Omega} \sigma : \left( \frac{d\delta U}{dx} \right) dV + \int_{\Gamma^T} T \delta w dS = \int_{\Omega} B \delta U dV + \int_{\Gamma^F} F \delta U dS \quad (3.1)$$

Sendo:

$U$ : deslocamentos ao longo do corpo  $\Omega$ ;

$F$ : vetor de forças aplicadas no contorno  $\Gamma^F$ ;

$B$ : forças de volume;

$\sigma$ : tensões de Cauchy;

$\rho$ : massa específica do material;

$T$ : vetor de tensões coesivas nas interfaces da fissura;

$\Gamma^T$ : superfícies da fissura;

$w$ : abertura da fissura;

$\delta$ : variação arbitrária, virtual e compatível.

O contorno externo do corpo é formado por  $\Gamma = \Gamma^U + \Gamma^F$ , sendo que  $\Gamma^U$  é o contorno que se refere à superfície e no qual são aplicados os deslocamentos prescritos e restrições e  $\Gamma^F$  é o contorno no qual são aplicadas as forças.

Definido o modelo de elementos finitos para o corpo, eliminando-se os deslocamentos nodais virtuais, a equação de equilíbrio se transforma em uma equação não linear, como na equação seguinte:

$$F_{int} - F_{ext} = 0 \quad (3.2)$$

Sendo:

$F_{int}$ : forças internas;

$F_{ext}$ : forças externas.

Devido à implementação das interfaces coesivas, o vetor de forças internas será contribuído por uma parcela de forças correspondentes às forças coesivas.

Para a solução do sistema apresentado na equação 3.2 é empregado o Método de Newton-Raphson.

### 3.1.2 Elementos de Interfaces Coesivas

Os elementos de interfaces coesivas são formados por quatro nós e são criados entre as faces adjacentes de dois elementos finitos por meio do remalhamento da malha original. Para representação do concreto armado, na região da armadura, os elementos de interface e os elementos de aderência estão ilustrados na Figura 22.

A Figura 22a mostra a configuração inicial da malha, que em comparação com a Figura 22b, que ilustra os elementos de interface bem como seus respectivos nós, nota-se que, no início da análise, os elementos de interface e de aderência não possuem volume

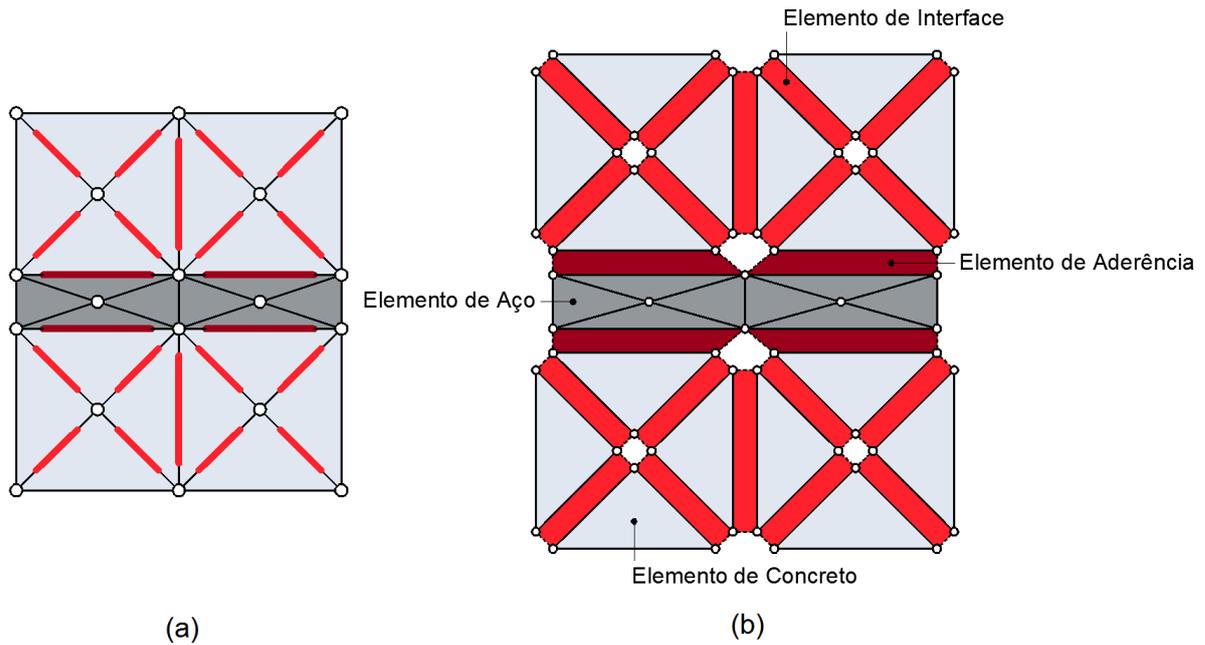


Figura 22 – Representação elementos de interface e de aderência na malha original de elementos finitos.

e que a malha é constituída por nós coincidentes. Além disso, destaca-se, nesta mesma figura, como é feita a transferência de esforços na região da armadura com base da posição dos nós da malha.

A Figura 23, ilustra um elemento de interface e as direções  $n$  e  $t$  representam respectivamente as direções normal e tangencial.

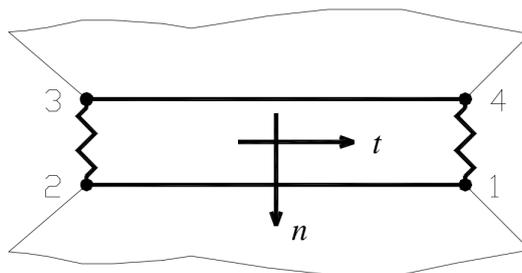


Figura 23 – Elemento de interface.

O trabalho de abertura de um elemento de interface é dado por:

$$W^e = \int_{\Omega^{T,e}} T^e \Delta^e dS \quad (3.3)$$

Em que:

$\Omega^{T,e}$ : superfície do elemento de interface;

$T^e = \left\{ T_n \quad T_t \right\}^e$ : vetor de tensões com as componentes normal e tangencial;

$$\Delta^e = \begin{Bmatrix} \Delta_n \\ \Delta_t \end{Bmatrix}^e : \text{vetor de deslocamentos normais e tangenciais.}$$

Nestes elementos as tensões atuantes são denominadas tensões coesivas que atuam em dois sentidos, quando os elementos volumétricos tendem a se separar, estas tensões dos elementos de interface tendem a reaproximá-los mantendo-os unidos, e quando, ao contrário, os elementos volumétricos estão submetidos a esforços que tendem a gerar a interpenetração entre eles, as tensões da interface visam impedir esse processo.

A determinação do equacionamento que define as tensões na interface é o principal objeto de estudo deste método discreto de análise de fratura, pois a partir disso será definido quando e como ocorrerá a variação das tensões da interface que determinarão o ponto em que haverá a perda de coesão entre os elementos da malha de finitos, simulando a fratura do material, bem como com o aparecimento real na malha de descontinuidades que correspondem ao aparecimento de fissuras.

### 3.1.3 Elementos de Interface Aplicados ao MEF

No sistema de coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$ , o elemento de interface coesiva pode ser representado pela Figura 24.

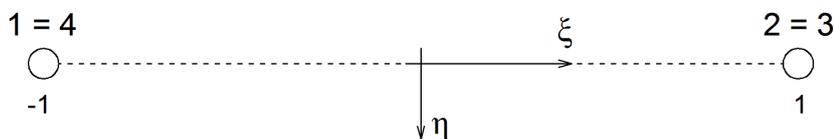


Figura 24 – Sistema de coordenadas naturais no elemento de interface.

O elemento de interface é considerado unidimensional e sua abertura é descrita por meio de funções de interpolação lineares:

$$\varphi^1 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

$$\varphi^2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$\varphi^3 = -\frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$\varphi^4 = -\frac{1}{2}(1 + \xi)$$

Como os pares de nós 1 e 4, bem como os nós 2 e 3, são coincidentes, têm-se:

$$\varphi^1 = -\varphi^4$$

$$\varphi^2 = -\varphi^3$$

O sinal de negativo presente nas relações é proveniente do sistema de coordenadas aplicado ao elemento de interface. Assim, uma vez definida a orientação dos eixos  $\xi$  e  $\eta$ ,

coincidentes com as direções tangencial e normal à interface, respectivamente, é possível expressar a abertura ou deslocamento da interface por meio dos valores dos deslocamentos relativos entre seus nós através da seguinte expressão:

$$\Delta^e = \sum_{N=1}^4 \phi^N U^N \quad (3.4)$$

Sendo:

N : número da conectividade do elemento de interface;

$\phi^N = \begin{bmatrix} \varphi^N & 0 \\ 0 & \varphi^N \end{bmatrix}$  : matriz de funções de interpolação;

$U^N = \begin{bmatrix} U_n^N \\ U_t^N \end{bmatrix}$  : vetor de deslocamentos dos nós da interface.

Desta forma, substituindo-se as funções de interpolação, a expressão de  $\Delta^e$  pode ser reescrita como:

$$\Delta^e = \begin{cases} \Delta_n^e = \varphi_1 U_n^1 + \varphi_2 U_n^2 + \varphi_3 U_n^3 + \varphi_4 U_n^4 \\ \Delta_t^e = \varphi_1 U_t^1 + \varphi_2 U_t^2 + \varphi_3 U_t^3 + \varphi_4 U_t^4 \end{cases}$$

A forma como os nós da interface se deslocam entre si define o comportamento da interface quando solicitada e, uma vez definidos os valores de  $\Delta_n^e$  e  $\Delta_t^e$ , determinam-se as tensões na interface, que corresponderão a forças nodais internas e podem ser integradas numericamente conforme a seguinte expressão:

$$F_{int}^e = \int_{\Gamma^{T,e}} T^e \phi^e dS = \sum_{PG=1}^{NPG} T^e(\xi_{PG}) \phi^e(\xi_{PG}) W_p(\xi_{PG}) J \quad (3.5)$$

Sendo:

$\phi^e = [\varphi^1 \ \varphi^2 \ \varphi^3 \ \varphi^4]$  : funções de interpolação das incógnitas da interface;

NPG: número de pontos de Gauss avaliados com o respectivo valor  $\xi_{PG}$  e o peso  $W_p$

$J = \frac{1}{2}l$  : jacobiano, sendo  $l$  o comprimento da interface.

Portanto, as forças nodais internas dos nós da interface podem ser escritas vetorialmente como:

$$F_{int}^e = \begin{bmatrix} F_{n,1}^e & F_{t,1}^e & F_{n,2}^e & F_{t,2}^e & F_{n,3}^e & F_{t,3}^e & F_{n,4}^e & F_{t,4}^e \end{bmatrix}$$

Que, devido à condição de coincidência entre os nós resulta em:

$$F_{n,1}^e = -F_{n,4}^e \text{ e } F_{t,1}^e = -F_{t,4}^e$$

$$F_{n,2}^e = -F_{n,3}^e \text{ e } F_{t,2}^e = -F_{t,3}^e$$

Estas forças são responsáveis pela compatibilidade nodal dos elementos, visto que não há nós comuns a mais de um elemento.

## 3.2 MODELO DE FRATURA DO CONCRETO

Uma vez que a ruptura da interface ocorre quando a energia especificada na lei constitutiva dos elementos de interfaces coesivas é consumida, é importante definir estas leis em situações de modo I puro e modo misto.

### 3.2.1 Fratura do Concreto em Modo I

De acordo com o que foi explicado anteriormente, a representação do comportamento das fissuras é estabelecido por meio de relações entre valores de tensões de tração ( $\sigma$ ) e de abertura normal da superfície ( $w$ ). Assim que as superfícies começam a se separar umas das outras, as tensões de tração aumentam até atingir um valor máximo ( $\sigma_{\text{máx}}$ ), após as tensões diminuem até atingir um valor nulo para a propagação da fissura, a partir deste ponto as superfícies são consideradas fraturadas, pois não há mais transferência de tensões entre uma face da fissura e a outra.

Em função da dimensão da peça ou do tipo de material a ser representando pela separação das superfícies, diferentes tensões máximas e aberturas máximas devem ser utilizadas. No caso do concreto, assunto deste trabalho, a lei constitutiva da superfície coesiva é dividida em duas partes: a pré-pico e a pós-pico.

#### 3.2.1.1 Lei Constitutiva Pré-Pico

Em modo I, a lei constitutiva pré-pico é graficamente representada pela Figura 25, sendo  $\sigma_{\text{máx}}^0$  corresponde a resistência à tração média do material e  $w_e$  a abertura elástica máxima.

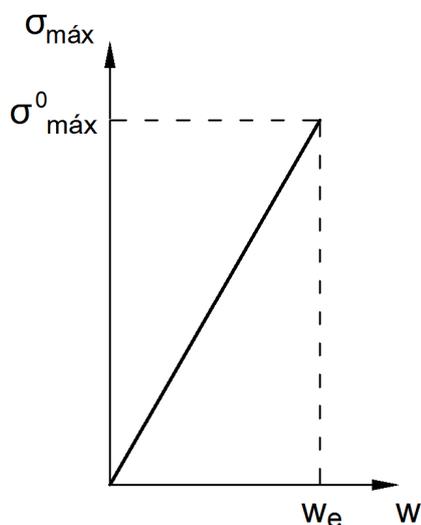


Figura 25 – Lei constitutiva pré-pico em modo I.

Esta lei corresponde a parcela elástica não dissipativa da superfície de abertura. Esta abertura deve possuir um valor suficientemente pequeno, de maneira que a deformação elástica da superfície coesiva seja insignificante em relação a deformação elástica do meio contínuo. Esta consideração deve ser feita porque, na realidade, esta região elástica é fictícia, entretanto deve estar presente para regularizar o campo de tensões na zona coesiva. A abertura elástica ( $w_e$ ), portanto, deve ter uma magnitude dependente do tamanho da malha, para evitar o efeito indesejável de tamanho, conforme ilustrado na Figura 26.

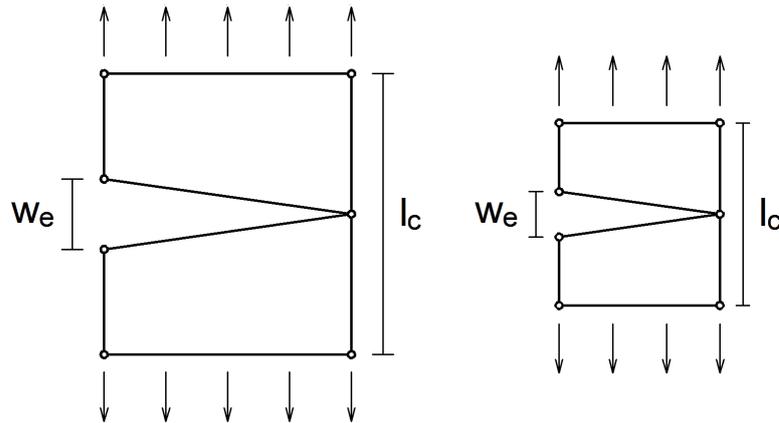


Figura 26 – Variação da abertura elástica com o tamanho dos elementos da malha.

Lens (2009) propôs que:

$$w_e = \frac{\sigma_{\max}^0}{\alpha E} l_c \quad (3.6)$$

Em que:

$E$ : módulo de elasticidade longitudinal;

$l_c$ : comprimento característico;

$\alpha$ : parâmetro adimensional;

No contexto de elementos finitos, o valor de  $l_c$  corresponde ao comprimento característico da malha de elementos finitos na zona de fratura e  $\alpha$  é um valor em geral na faixa entre  $1 < \alpha < 10$ , o qual deve ser analisado em cada situação e avaliado em relação aos resultados obtidos.

Empregar um valor constante de  $w_e$  introduz uma dependência indesejável da malha de elementos finitos nos resultados quando a superfície coesiva é utilizada entre todos os elementos finitos. Neste método, o uso de  $w_e$  constante, não importando se esse é um valor pequeno, é incoerente visto que em um determinado momento da análise a soma de todas as aberturas elásticas serão maiores que os deslocamentos elásticos volumétricos (Figura 27c). Outro efeito ainda mais prejudicial a análise é a indução de um falso comportamento frágil (Figura 27b).

O comportamento que possui significado físico está representado na (Figura 27a), que é garantido com a associação do valor de  $w_e$  com a deformação elástica e o tamanho da malha de elementos finitos da equação.

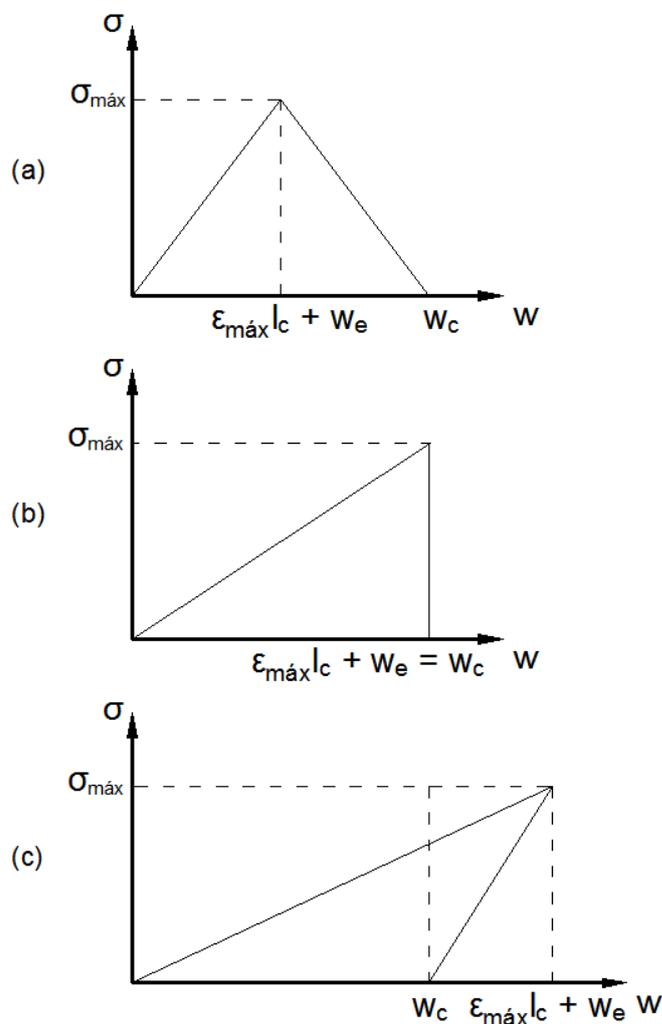


Figura 27 – Comportamento  $\sigma$  versus  $w$  de uma barra em modo I. Comportamento quase-frágil (a), comportamentos frágeis em função da deformação elástica (b) e (c).

A transição de amolecimento normal ou comportamento quase-frágil a frágil ocorre quando  $\epsilon_{\text{máx}} l_c$  é maior que  $w_c$ , que corresponde à abertura crítica da fissura, a partir da qual há surgimento ou propagação das mesmas. Assim, como no método das superfícies coesivas a parcela elástica, ainda que fictícia, deve existir, deve-se garantir que  $\epsilon_{\text{máx}} l_c + w_e$  não supere  $w_c$ .

Este fenômeno de transição, que ocorre devido ao aumento do comprimento característico ( $l_c$ ), representa o conhecido efeito de escala do concreto, todavia, se este é causado apenas pela abertura elástica, ele é consequência somente de um efeito numérico, e portanto não se trata e não pode ser confundido com a variação nos resultados obtida em função da sensibilidade da malha que ocorrem em abordagens de fratura distribuída.

Na análise, quando em regime elástico, a determinação das tensões é feita com base na seguinte equação:

$$\sigma^{el} = K_n w \quad (3.7)$$

Em que:

$$K_n = E \frac{\alpha}{l_c}$$

### 3.2.1.2 Lei Constitutiva Pós-Pico

A lei constitutiva pós-pico determina o comportamento dos elementos de interface após atingir-se a tensão máxima. Em modo I, a tensão máxima é a tensão máxima de tração ( $\sigma_{m\acute{a}x}^0$ ) e a abertura normal ( $w$ ) se dá em função da tensão normal de tração ( $\sigma_{m\acute{a}x}$ ).

No presente trabalho, três relações constitutivas pós pico são representadas: a lei linear de Hillerborg (1976), a lei bilinear apresentada pelo código modelo CEB-FIP (1993) e a lei exponencial de Xu (1999). (Figura 28)

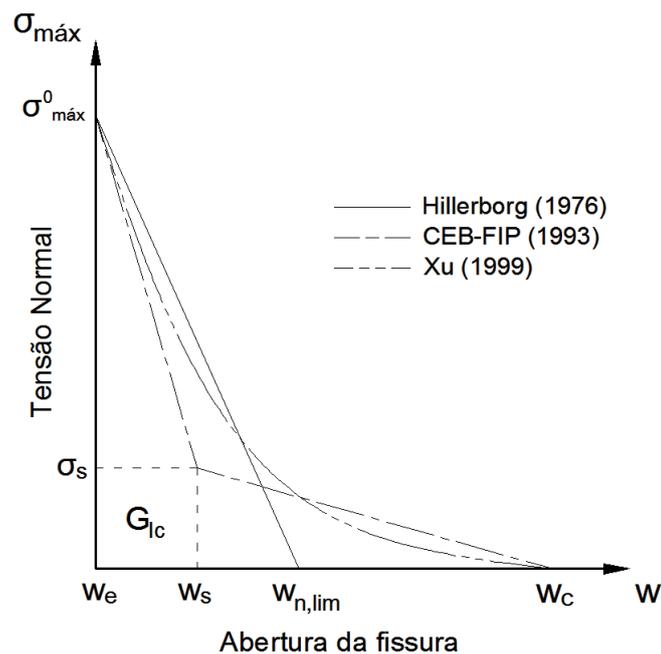


Figura 28 – Leis constitutivas pós-pico das superfícies coesivas em modo I.

A forma da relação pós-pico entre tensão e abertura das fissuras relaciona-se com o desenvolvimento da zona de processo, onde há predominância de efeitos complexos não lineares. A área sob a curva define a energia específica de fratura em modo I ( $G_{Ic}$ ) e o valor de  $\sigma_{m\acute{a}x}^0$  está relacionado a resistência à tração do concreto ( $f_t$ ). Segundo Lens (2009), a forma da relação pós-pico tem importante influência sobre os resultados, controlando não somente a região de amolecimento, mas também a carga máxima alcançada pelos elementos estruturais.

De acordo com a lei linear de Hillerborg (1976), a equação da tensão normal de tração ( $\sigma_{\text{máx}}$ ) na região pós-pico é dada por:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}}^0}{w_{n,\text{lim}} - w_e} (w_{n,\text{lim}} - w) \longrightarrow w_e < w < w_{n,\text{lim}} \quad (3.8)$$

Sendo:

$w$ : abertura normal;

$w_e$ : abertura elástica;

$w_{n,\text{lim}}$ : abertura final.

A abertura final corresponde ao que há quando ocorre a ruptura da interface e pode ser calculada pela seguinte equação:

$$w_{n,\text{lim}} = \left( \frac{2G_{Ic}}{\sigma_{\text{máx}}^0} + w_e \right) \quad (3.9)$$

No modelo proposto pelo código modelo CEB-FIP (1993) a relação pós-pico é bilinear e descrita da seguinte maneira:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{0,85\sigma_{\text{máx}}^0}{w_s - w_e} (w_s - w) + 0,15\sigma_{\text{máx}}^0 \longrightarrow w_e < w < w_s \quad (3.10)$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{\sigma_s}{w_c - w_s} (w_c - w) \longrightarrow w_s < w < w_c \quad (3.11)$$

Sendo que neste modelo os valores de  $w_s$  e  $\sigma_s$  são valores intermediários conforme ilustra a Figura 28, e a abertura final é representada por  $w_c$ . Os valores destes parâmetros podem ser obtidos pelas seguintes expressões:

$$w_c = \frac{7G_{Ic}}{\sigma_{\text{máx}}^0} \quad (3.12)$$

$$\sigma_s = 0,15\sigma_{\text{máx}}^0 \quad (3.13)$$

$$w_s = \frac{2G_{Ic}}{\sigma_{\text{máx}}^0} - 0,15w_c + w_e \quad (3.14)$$

De maneira geral, a energia de fratura do concreto pode ser estimada pela equação a seguir definida no código modelo CEB-FIP (1993):

$$G_F = G_{F0} \left( \frac{f_c}{10} \right)^{0,7} \quad (3.15)$$

Onde  $G_F$ , que corresponde a  $G_{Ic}$ , é dado em N/mm, e:

$G_{F0}$ : valor base de energia de fratura;

$f_c$ : resistência à compressão do concreto (MPa).

O valor base de energia de fratura segundo essas considerações depende do diâmetro do agregado do concreto ( $d_{m\acute{a}x}$ ) conforme a Tabela 1 a seguir:

Tabela 1 – Valores base de energia de fratura.

$d_{m\acute{a}x}$ (mm)	$G_{F0}$ (N/mm)
8	0,025
16	0,030
32	0,058

Neste trabalho, para valores de  $d_{m\acute{a}x}$  intermediários entre os valores citados na tabela, foi feita interpolação para obtenção do valor de  $G_{F0}$ .

Além disso, o código esclarece também que, a energia de fratura, como propriedade do material concreto, depende, até certo ponto, das dimensões dos elementos estruturais, bem como de outras propriedades do concreto que não são levadas em consideração na equação proposta e, portanto, podem haver variações nos valores da energia de fratura da ordem de  $\pm 30\%$ . E também, de acordo com Elfgren (1989), a energia de fratura do concreto, segundo resultados experimentais, varia entre valores de 40 N/mm e 200 N/mm.

Essas considerações são utilizadas posteriormente nas análises numéricas, na escolha deste parâmetro, que é um importante parâmetro de entrada na modelagem discreta de fratura do concreto.

Retomando-se os modelos, a relação exponencial de Xu (1999) pode ser representada pela equação:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_{m\acute{a}x}^0 \exp \left[ -\eta \left( \frac{w - w_e}{w_c} \right) \right] \rightarrow w_e < w < w_c \quad (3.16)$$

Em que:

$$\eta = \alpha_F [1 - \exp(-\alpha_F)] \quad (3.17)$$

$$\alpha_F = \lambda - \frac{d_{m\acute{a}x}^{0,9}}{8} \quad (3.18)$$

$$\lambda = 10 - \left( \frac{f_{ck}}{20} \right)^{0,7} \quad (3.19)$$

$$w_c = \alpha_F \frac{G_{Ic}}{\sigma_{m\acute{a}x}^0} \quad (3.20)$$

Sendo:

$d_{\text{máx}}$ : diâmetro máximo do agregado;

$f_{ck}$ : resistência característica a compressão do concreto.

### 3.2.2 Fratura do Concreto em Modo Misto

Conforme definido anteriormente, curvas de fratura para o modo II puro são muitos difíceis de serem obtidas experimentalmente, todavia, em simulações numéricas, estas propriedades podem e devem ser definidas para fins de análise. Em geral, informações específicas sobre o modo II de fratura não estão disponíveis na literatura. Segundo alguns autores (Shah et al., 1995) acredita-se que a tensão tangencial máxima é maior que a tensão normal máxima ( $\tau_{\text{máx}} > \sigma_{\text{máx}}$ ), e o mesmo sendo válido para a energia de fratura que em modo II seria superior em relação ao modo I ( $G_{IIc} > G_{Ic}$ ).

Uma vez que não existem dados experimentais para servir de referência neste assunto, adota-se, neste trabalho, a mesma relação para a relação tangencial utilizada para a relação normal, como em Lens (2009).

#### 3.2.2.1 Leis Constitutivas Pré e Pós-Pico

Uma vez que a mesma relação adotada para o modo I será utilizada para o modo II, todo o equacionamento desenvolvido para o modo I, pode ser estendido ao modo II, de maneira análoga. A Figura 29 mostra a relação pré-pico para este modo, sendo  $\tau_{\text{máx}}^0$  corresponde à resistência ao cisalhamento média do material e  $v_e$  ao deslizamento elástico máximo.

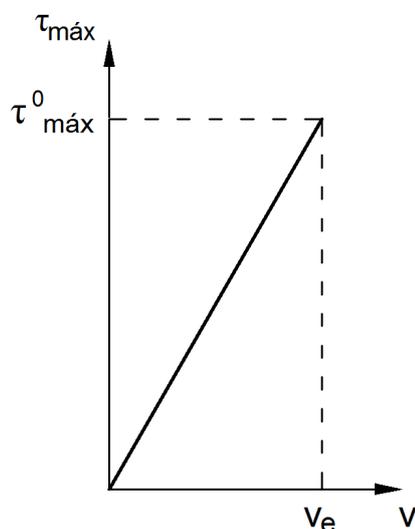


Figura 29 – Lei constitutiva pré-pico em modo II.

E da mesma forma como foi feita a determinação de  $w_e$ , Lens (2009) propôs a equação a seguir para calcular o deslizamento ( $v_e$ ):

$$v_e = \frac{\tau_{\text{máx}}^0}{\alpha\mu} l_c \quad (3.21)$$

Sendo:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} : \text{módulo de elasticidade transversal.}$$

No regime elástico, a determinação das tensões é feita com base na seguinte equação:

$$\tau^{el} = K_t v \quad (3.22)$$

Em que:

$$K_t = \mu \frac{\alpha}{l_c}$$

Também igualmente foram utilizadas as mesmas relações pós-pico adotadas para o modo de abertura (Figura 30).

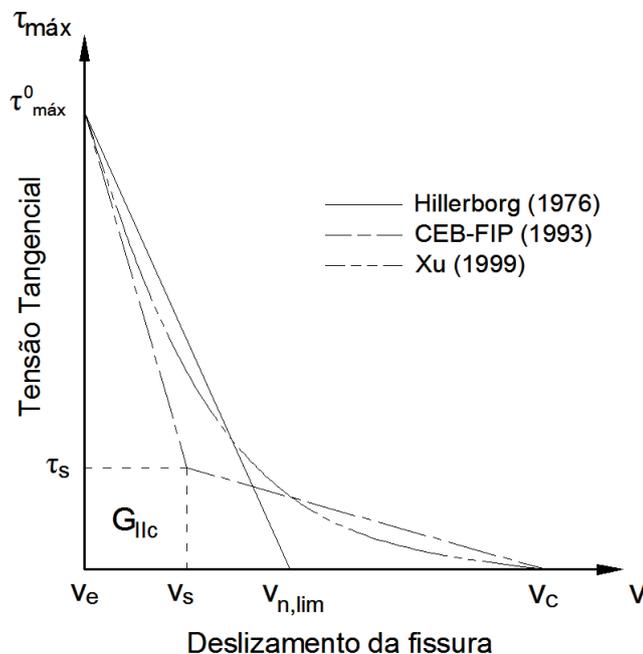


Figura 30 – Leis constitutivas pós-pico das superfícies coesivas em modo II.

A partir destas hipóteses, todas as outras considerações feitas para o modo I puro, são utilizadas para o modo II puro, como, por exemplo, a energia específica de fratura do modo II ( $G_{IIc}$ ) é também a área sob as curvas dos diferentes modelos de relações pós-pico.

### 3.2.2.2 Modelo Acoplado

Com essas considerações, a abertura ( $w$ ) e o deslizamento ( $v$ ) podem ser divididos em uma parte elástica ( $w_e, v_e$ ) e uma parte inelástica ( $w_i, v_i$ ), de acordo com as seguintes equações:

$$w = w_e + w_i \quad (3.23)$$

$$v = v_e + v_i \quad (3.24)$$

A decomposição das equações anteriores é feita visando regularizar as tensões coesivas. Conforme indicam as Figuras 28 e 30, os valores máximos de tensões ocorrem para  $w_e$  e  $v_e$ . A queda das tensões normais e tangenciais após o pico, em modo misto, pode ser uma combinação da abertura normal e tangencial, este modelo é denominado como um Modelo Acoplado.

Neste trabalho, é utilizado um modelo acoplado utilizado para tratar de casos mistos de fratura que possui acoplamento baseado na lei de Coulomb com aderência. Nele a aderência inicial ( $\sigma_{\text{máx}}$ ) é a tensão normal máxima inicial ( $\sigma_{\text{máx}}^0$ ). A Figura 31 ilustra a superfície de ruptura do modelo.

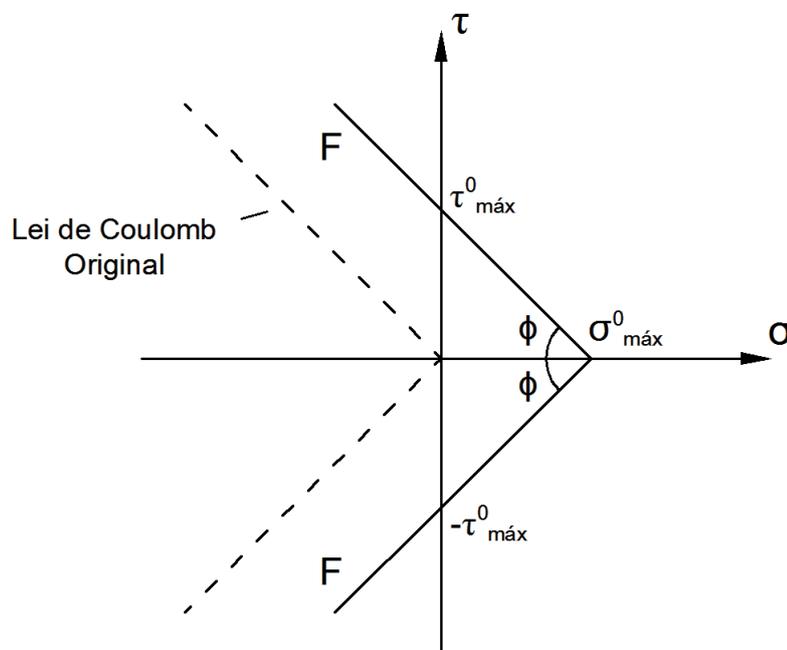


Figura 31 – Superfície de ruptura do modelo acoplado (Modelo de Coulomb com aderência modificada).

Esta superfície, quando o elemento fratura, se move para a esquerda, assim, quando ocorre a ruptura total do elemento, a lei de Coulomb original é recuperada, o que significa que a resistência ao cisalhamento só existe em compressão. Além disso, o ângulo de atrito

permite determinar  $\tau_{\text{máx}}$ , já que o valor de  $\sigma_{\text{máx}}$  é conhecido a partir das propriedades e equações das leis constitutivas.

A superfície de ruptura em questão pode ser considerada uma superfície de escoamento em analogia com a teoria da plasticidade, e conforme o Postulado da Convexidade de Drucker, a superfície de Coulomb também pode ser considerada um limite inferior do campo de tensões.

A superfície de ruptura ( $F$ ) é definida da seguinte maneira:

$$F = |\tau| + (\sigma - \sigma_{\text{máx}}) \tan \phi \quad (3.25)$$

Logo, nesta equação,  $\sigma_{\text{máx}}$  inicialmente equivale a  $\sigma_{\text{máx}}^0$ . Ao longo da solução do problema, o valor de  $\sigma_{\text{máx}}$  é modificado de acordo com as leis constitutivas pós-pico definidas anteriormente (Figura 28), porém, nesta etapa, empregando uma abertura efetiva ou deslocamento inelástico efetivo ( $u_i^{\text{ef}}$ ) no lugar de  $w_i$ . O deslocamento inelástico efetivo é definido como segue:

$$u_i^{\text{ef}} = \sqrt{w^2 + \beta v^2} \quad (3.26)$$

Sendo:

$\beta$ : fator de acoplamento entre a abertura normal e tangencial ( $0 < \beta < 1$ ).

Este modelo se caracteriza, portanto, por necessitar apenas de dois parâmetros: o ângulo de atrito ( $\phi$ ) e o fator de acoplamento ( $\beta$ ).

A partir da equação que define a superfície de ruptura (equação 3.25), sabe-se que quando  $F < 0$  as tensões são elásticas, porém quando  $F = 0$  começa a fratura do material, e para  $F > 0$  há o retorno das tensões para a superfície de fratura. Neste trabalho, é empregado um algoritmo tipo preditor elástico e corretor plástico para a integração das tensões, e o preditor elástico é definido pela equação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{\text{el}} \\ \tau^{\text{el}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_n & 0 \\ 0 & K_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Em que:

$K_n$ : rigidez elástica normal da superfície coesiva;

$K_t$ : rigidez elástica tangencial da superfície coesiva.

E os valores das rigidezes elásticas são definidos por:

$$K_n = E \frac{\alpha}{l_c} \quad (3.28)$$

$$K_t = \mu \frac{\alpha}{l_c} \quad (3.29)$$

Como dito anteriormente, a abertura e o deslizamento são divididos em partes elástica e plástica e são representados incrementalmente, ou seja, em taxas de variação no tempo, na forma:

$$\begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{w}_e \\ \dot{v}_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{w}_i \\ \dot{v}_i \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

O corretor plástico é expresso pela equação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma^{el} \\ \tau^{el} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} K_n \\ K_t \end{Bmatrix} \int_{\Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{w}_i \\ \dot{v}_i \end{Bmatrix} dt \quad (3.31)$$

Sendo  $t$  o tempo e  $\Delta t$  o passo de tempo da integração.

De acordo com Lens (2009), no modelo proposto, foi utilizada plasticidade não associada, por consequência dos deslocamentos inelásticos não serem normais à superfície de fratura  $F$ , mas sim a um potencial plástico  $F^*$ . Os deslocamentos inelásticos são determinados por:

$$\begin{Bmatrix} \dot{w}_i \\ \dot{v}_i \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \partial F^* / \partial \sigma \\ \partial F^* / \partial \tau \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Em que:

$\lambda$ : módulo da taxa de deslocamentos inelásticos;

$\partial F^* / \partial (\bullet)$ : define as direções dos deslocamentos.

A Figura 32 mostra a superfície  $F^*$  comparada com  $F$  e dividida em duas partes: a de compressão e a de tração.

De acordo com a superfície adotada, em compressão, consideram-se somente deslizamentos inelásticos ( $w_i = 0$ ), porém em tração, deslocamentos inelásticos podem ocorrer na direção da origem do espaço de tensões. Durante o processo de integração, a direção dos deslocamentos inelásticos é considerada constante, e as tensões calculadas pela equação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma^{el} \\ \tau^{el} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} K_n \\ K_t \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial F^* / \partial \sigma \\ \partial F^* / \partial \tau \end{Bmatrix} \Lambda \quad (3.33)$$

Sendo:

$\Lambda$ : tempo de integração de  $\lambda$  em passos de tempo  $\Delta t$

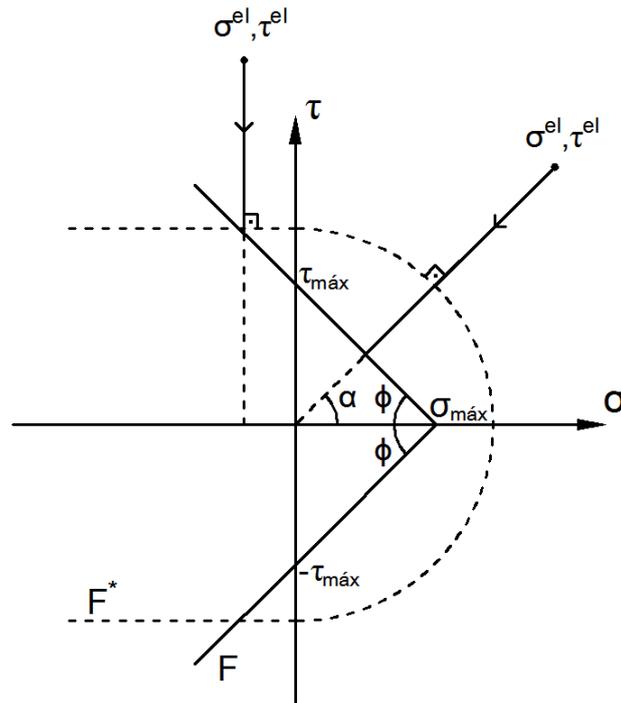


Figura 32 – Superfície de ruptura do modelo acoplado: potencial plástico ( $F^*$ ) e as direções dos deslocamentos inelásticos.

Por fim, os deslocamentos inelásticos são calculados por:

$$\begin{Bmatrix} \dot{w}_i \\ \dot{v}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial F^* / \partial \sigma \\ \partial F^* / \partial \tau \end{Bmatrix} \Lambda \quad (3.34)$$

Destaca-se que a energia de fratura em modo II ( $G_{IIc}$ ) não entra diretamente na formulação, porém é obtida indiretamente em função do parâmetro  $\beta$  e do ângulo de atrito  $\phi$ , uma vez que  $\phi = \arctan \tau_{máx} / \sigma_{máx}$ . Assim, se  $\beta = 1$  e  $\tan \phi = 1 \rightarrow G_{Ic} = G_{IIc}$ , todavia se  $\beta = 0 \rightarrow G_{IIc} = \infty$ .

### 3.3 MODELOS CONSTITUTIVOS VOLUMÉTRICOS

#### 3.3.1 Modelo Constitutivo para o Concreto Intacto

O modelo constitutivo utilizado para os elementos volumétricos de concreto é linear elástico, tanto em tração quanto em compressão, conforme ilustra a Figura 33 e descreve a equação 3.35

$$\sigma = E_c \epsilon \quad (3.35)$$

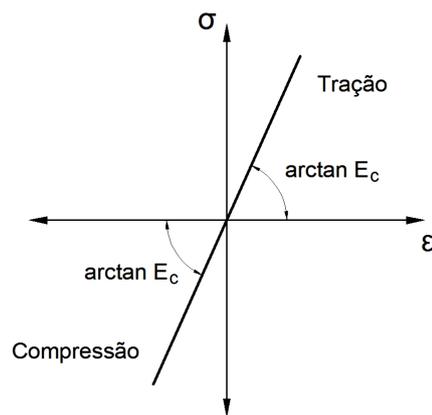


Figura 33 – Lei constitutiva utilizada para o material concreto.

### 3.3.2 Modelo Constitutivo para o Aço

No presente trabalho, empregam-se duas relações constitutivas para o aço das armaduras, de acordo com o modelo adotado pelas análises experimentais e numéricas que são utilizadas para validar o modelo proposto.

#### 3.3.2.1 Lei Elástica-Perfeitamente Plástica

A lei elástica-perfeitamente plástica para o aço está representada na Figura 34.

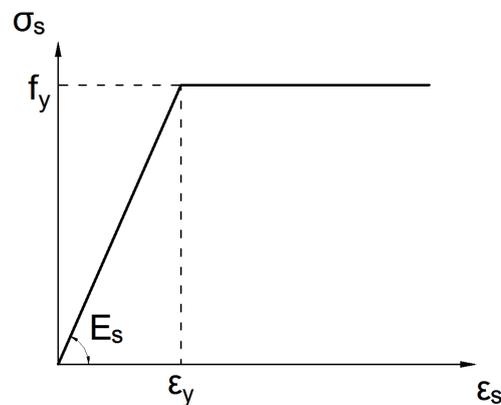


Figura 34 – Lei Elástica-Perfeitamente Plástica.

Esta lei pode ser dividida em dois trechos com os seguintes parâmetros:

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s \longrightarrow 0 < \epsilon_s < \epsilon_y \quad (3.36)$$

$$\sigma_s = f_y \longrightarrow \epsilon_s > \epsilon_y \quad (3.37)$$

Sendo:

$E_s$ : módulo de elasticidade do aço;

$f_y$ : tensão de escoamento do aço;

$\epsilon_y$ : deformação longitudinal do aço que separa os dois trechos.

### 3.3.2.2 Lei Elastoplástica com Endurecimento Não Linear

Em algumas análises, o aço das armaduras é considerado um material isótropo com plasticidade associada de von Mises e endurecimento não linear, logo a relação entre tensão no aço ( $\sigma_s$ ) e a correspondente deformação ( $\epsilon_s$ ) pode ser representada pela Figura 35:

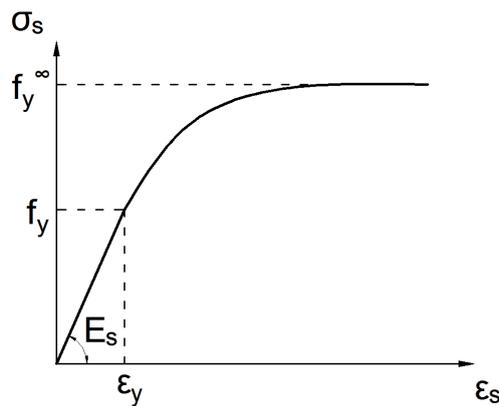


Figura 35 – Lei de endurecimento não linear com saturação.

Neste caso, a relação também pode ser dividida em dois trechos, como segue:

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s \longrightarrow 0 < \epsilon_s < \epsilon_y \quad (3.38)$$

$$\sigma_s = f_y + (f_y^\infty - f_y) (1 - e^{-k\epsilon_s}) \longrightarrow \epsilon_s > \epsilon_y \quad (3.39)$$

Sendo:

$f_y^\infty$ : limite assintótico da tensão após o escoamento;

$k$ : parâmetro de ajuste.

O parâmetro de ajuste ( $k$ ) varia de acordo com que se queira que as tensões normais se aproximem da assíntota horizontal com menores ou maiores valores de deformações.

## 3.4 MODELOS DE ADERÊNCIA ENTRE AÇO E CONCRETO

Em geral, em análises de estruturas de concreto armado, considera-se aderência perfeita entre o concreto e o aço, ou seja, não há escorregamento e nem abertura entre os dois materiais. Esse tipo de análise é um limite inferior de carga limite do concreto, pois mais tensão é transferida para o mesmo do que a realidade.

De modo a se ter uma melhor representação do concreto armado, a questão da aderência possui maior importância. Desta forma, duas leis de aderência são utilizadas no trabalho, a primeira proposta por Dörr (1980) e a segunda a do código modelo CEB-FIP (1993).

Não existe uma lei universal que defina o comportamento de tensão de aderência e deslizamento para o concreto armado uma vez que esta depende de diversas condições de contorno do problema.

Para simular este fenômeno, a partir das leis que são utilizadas, também são utilizados elementos de interface, ou também chamados de elementos de aderência, adotando-se as relações entre tensões e deslocamentos adequadas às estruturas de concreto de armado, de acordo com a seguinte configuração:

$$\sigma = zW \quad (3.40)$$

$$\tau = g(v) \quad (3.41)$$

Em relação a abertura entre os elementos de concreto e aço, é adotada uma relação entre tensão normal ( $\sigma$ ) e abertura ( $w$ ) linear com coeficiente  $z$  (Figura 36). Este coeficiente, nas simulações é determinado de maneira a garantir que, ao final da análise, as tensões normais entre os elementos de aço e concreto não permitam que ocorram aberturas ou superposições visíveis entre os elementos de concreto e aço na malha de elementos finitos. Logo, em geral, o valor do coeficiente  $z$  é elevado.

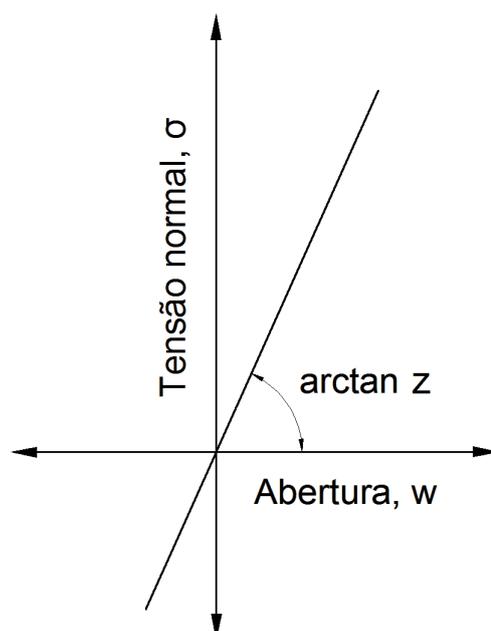


Figura 36 – Relação analítica entre tensão normal e abertura.

Com relação ao escorregamento, a equação  $g(v)$  é definida para cada modelo de aderência utilizado, relacionando as tensões tangenciais, e o deslizamento, ou deslocamento tangencial.

Os elementos de aderência entre elementos de aço e concreto possuem as mesmas formulações básicas em elementos finitos.

### 3.4.1 Lei de Aderência de Dörr (1980)

Esta é uma das mais simples leis propostas por Dörr (1980), e é dada pela relação da Figura 37.

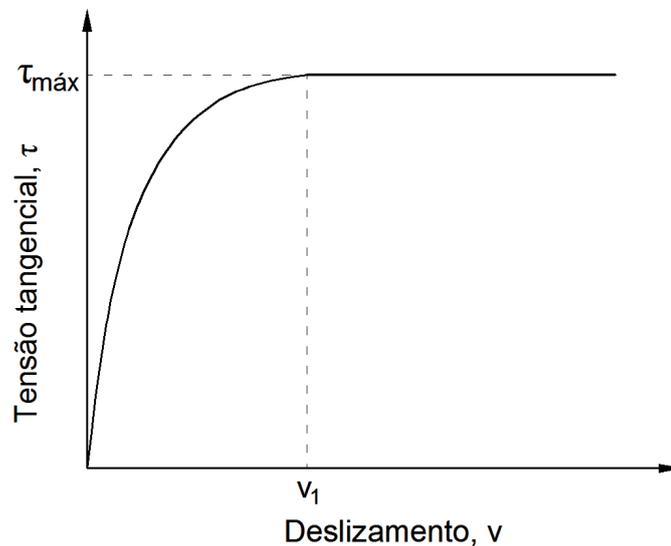


Figura 37 – Relação analítica entre tensão de aderência e deslizamento de Dörr (1980).

Sendo:

$$\tau = f_t \left[ 5 \left( \frac{v}{v_1} \right) - 4.5 \left( \frac{v}{v_1} \right)^2 + 1.4 \left( \frac{v}{v_1} \right)^3 \right] \rightarrow 0 < v \leq v_1 \quad (3.42)$$

$$\tau = \tau_{\text{máx}} = 1.9f_t \rightarrow v > v_1 \quad (3.43)$$

Nestas equações,  $\tau$  denota a tensão de aderência,  $\tau_{\text{máx}}$  é a máxima tensão aderente e  $v_1$  é o deslocamento transversal, ou deslizamento, a partir do qual há o escorregamento perfeito ( $v_1 = 0.6 \text{ mm}$ ).

### 3.4.2 Lei de Aderência Código Modelo CEB-FIP (1993)

A relação deste modelo relaciona a tensão tangencial ( $\tau$ ) e o deslizamento ( $v$ ) conforme mostra a Figura 38

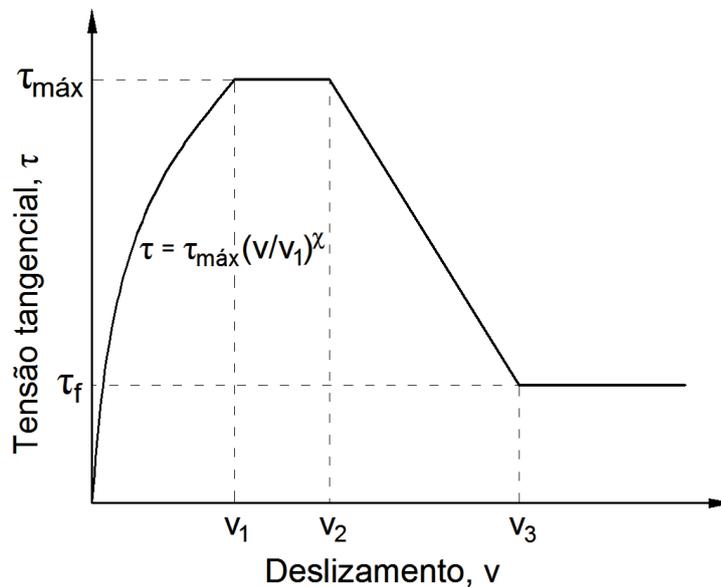


Figura 38 – Relação analítica entre tensão de aderência e deslizamento.

Sendo:

$$\tau = \tau_{m\acute{a}x} \left( \frac{v}{v_1} \right)^x \longrightarrow 0 \leq v \leq v_1 \quad (3.44)$$

$$\tau = \tau_{m\acute{a}x} \longrightarrow v_1 \leq v \leq v_2 \quad (3.45)$$

$$\tau = \tau_{m\acute{a}x} (\tau_{m\acute{a}x} - \tau_f) \left( \frac{v - v_2}{v_3 - v_2} \right) \longrightarrow v_2 \leq v \leq v_3 \quad (3.46)$$

$$\tau = \tau_f \longrightarrow v_3 < v \quad (3.47)$$

Na Figura 38, o trecho crescente corresponde a componente adesiva da aderência, a região abaixo do trecho linear decrescente define a energia de fratura interfacial e a tensão final corresponde a componente friccional da relação de aderência.

Os parâmetros indicados na relação citada possuem valores propostos pelo código CEB-FIP (1993), estes valores estão representados na Tabela 2 a seguir:

Tabela 2 – Parâmetros da relação de aderência.

	<b>Concreto Não-Confinado*</b>		<b>Concreto Confinado**</b>	
	<b>Boas condições de aderência</b>	<b>Outras condições de aderência</b>	<b>Boas condições de aderência</b>	<b>Outras condições de aderência</b>
$v_1$	0,6 mm	0,6 mm	1,0 mm	1,0 mm
$v_2$	0,6 mm	0,6 mm	3,0 mm	3,0 mm
$v_3$	1,0 mm	2,5 mm	Espaçamento entre nervuras	Espaçamento entre nervuras
$\chi$	0,4	0,4	0,4	0,4
$\tau_{m\acute{a}x}$	$2\sqrt{f_{ck}}$	$\sqrt{f_{ck}}$	$2,5\sqrt{f_{ck}}$	$1,25\sqrt{f_{ck}}$
$\tau_f$	$0,15\tau_{m\acute{a}x}$	$0,15\tau_{m\acute{a}x}$	$0,40\tau_{m\acute{a}x}$	$0,40\tau_{m\acute{a}x}$

\*Ruptura por arrancamento do concreto.

\*\*Ruptura por fendilhamento do concreto entre as barras.



## 4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

As simulações são constituídas de ensaios de vigas em flexão a 3 e 4 pontos. Em geral, todas as vigas têm a configuração ilustrada na Figura 39. Os elementos de interface estão presentes entre todos os elementos volumétricos de concreto, desta forma, por se tratar se uma modelagem discreta de fratura, a propagação das fissuras poderá ocorrer em qualquer direção, seguindo o contorno das faces dos elementos volumétricos de concreto. Visando facilitar a propagação em qualquer direção é utilizada uma malha composta de macro elementos quadriláteros formados por 4 elementos triangulares constantes.

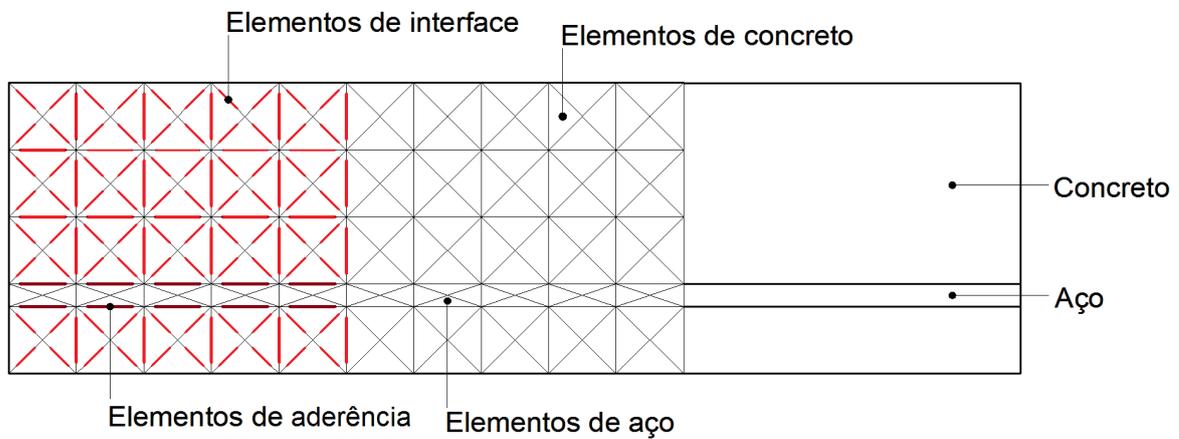


Figura 39 – Representação das vigas em elementos finitos.

Outra característica, comum a todas as simulações, é a aplicação de deslocamento imposto na parte superior das vigas, obtendo-se como resultado da análise o gráfico de força aplicada x deslocamento do vão da viga.

Além disso, cabe destacar também que as simulações numéricas foram realizadas em estado plano de deformações (2D), logo, as barras tiveram de ser representadas por elementos retangulares, conforme a Figura 40.

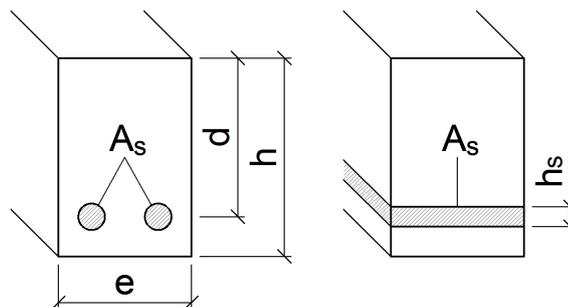


Figura 40 – Representação do problema em Estado Plano de Deformações.

A equivalência entre as situações foi feita de maneira a manter a mesma área de aço e concreto na seção transversal, portanto, a partir do diâmetro das barras calculou-se a área de aço ( $A_s$ ) e, dada a espessura da viga ( $e$ ), foi possível obter uma altura equivalente de aço ( $h_s$ ), conforme a equação:

$$h_s = \frac{A_s}{e} \quad (4.1)$$

Ao se obter o valor de altura equivalente, as barras eram mantidas na mesma posição, ou seja a distância entre o centro de gravidade das barras até a fibra mais comprimida de concreto ( $d$ ) não se alterou com a representação do problema em estado plano de deformações. Todavia, uma deficiência desta representação é a incompatibilidade entre a área aderente do modelo e a real, porém, os resultados obtidos mostram não haver uma substancial importância da aderência na análise.

## 4.1 ENSAIO DE FLEXÃO EM 3 PONTOS

### 4.1.1 Descrição do problema

O trabalho experimental desenvolvido por Burns e Siess (1966) constituiu-se do estudo de vigas de concreto subarmadas submetidas à flexão em 3 pontos, e o principal objetivo da pesquisa consistiu em avaliar a capacidade de suporte destes elementos estruturais após o comportamento elástico do concreto, ou seja, com a fissuração do concreto em tração, escoamento das armaduras de aço, esmagamento do concreto em compressão, até o colapso da estrutura. A pesquisa objetivou também analisar a influência da altura das vigas na resposta de fratura destas.

Evangelho (2013) desenvolveu estudos com base em formulações de fratura e comparou os resultados obtidos com os de Burns e Siess. O presente trabalho, nesta etapa, trata de uma modificação nas simulações deste autor visando alterar alguns aspectos não abordados em suas análises.

No trabalho de Evangelho (2013), as vigas de concreto armado também foram simuladas por meio de uma abordagem discreta de fratura utilizando elementos de interface entre elementos de concreto e elementos de aderência entre elementos de concreto e de aço, todavia, os elementos de interface entre elementos de concreto foram empregados somente entre os elementos do centro da viga, onde há a fissura principal, dominante, em se tratando da fratura de vigas de concreto armado submetidas à flexão em três pontos (Figura 41). Como discutido na Fundamentação Teórica, este comportamento é comum a vigas de concreto armado em flexão com taxa de armadura inferior ao mínimo, visto que, desta forma a resposta de fratura do elemento se aproxima à do concreto simples, com fissuras maiores dominantes nas regiões de maiores solicitações em tração. O trabalho de Burns e Siess (1966) envolveu a análise de vigas subarmadas que se caracterizam

pelo aparecimento de múltiplas gerações de fissuras primárias que surgem e se propagam atingindo dimensões consideráveis.

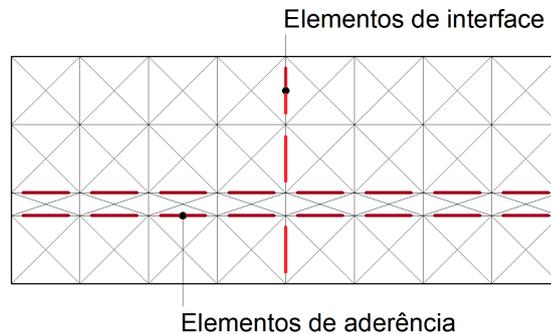


Figura 41 – Representação das vigas de Evangelho (2013) em elementos finitos.

Em consequência disso, no trabalho de Evangelho (2013), a diminuição de rigidez ocasionada pelo aparecimento de múltipla fissuração era considerada empregando módulos de elasticidade do concreto bem menores que o real. Assim, o presente trabalho visa analisar o comportamento das vigas com representação de fissuração generalizada, analisando o aparecimento e direção de propagação, e avaliando a influência da representação destas nos modelos.

As vigas do trabalho de Burns e Siess (1966) têm a geometria representada na Figura 42:

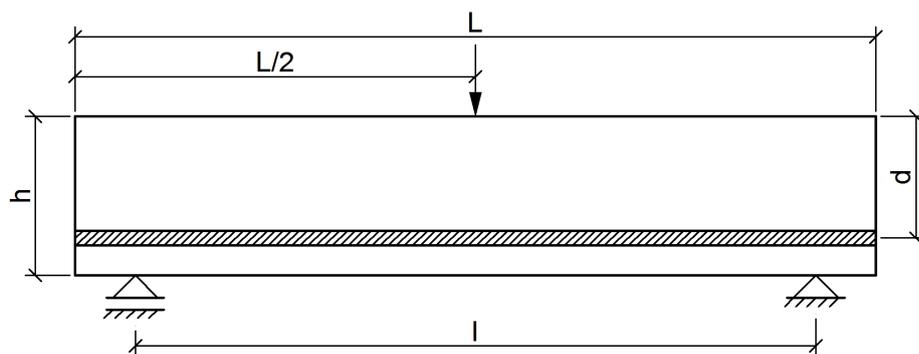


Figura 42 – Geometria das vigas analisadas submetidas à flexão em 3 pontos.

As vigas "série J" constituíram-se de elementos de concreto armado com as seguintes propriedades geométricas:

Comprimento total ( $L$ ): 3950 mm;

Distância entre apoios ( $l$ ): 3650 mm;

Espessura ( $e$ ): 200 mm.

A altura ( $h$ ) das vigas era diferente em cada experimento. As vigas possuíam

armadura positiva e estribos. A armadura positiva consistia de duas barras posicionadas em diferentes alturas em relação a fibra mais comprimida de concreto ( $d$ ), e dada a variação da altura, com o conseqüente aumento de concreto na seção transversal, a taxa de armadura ( $\rho_{sc}$ ) também variava em cada viga; já os estribos, constituíram-se de barras espaçadas de 150 mm ao longo do comprimento das vigas. A Tabela 3 resume as diferentes características geométricas e as armaduras das vigas.

Tabela 3 – Geometria das vigas série J.

Viga	h (mm)	d (mm)	Armadura positiva	Estribos	$\rho_{sc}$
J1	305	255	2 – #8*	#3** a 150 mm	1,6%
J10	405	355	2 – #8	#3 a 150 mm	1,2%
J4	508	458	2 – #8	#3 a 150 mm	1,0%

\* Barras #8 possuem diâmetro de 25,4 mm

\*\* Barras #3 possuem diâmetro de 9,3 mm

O concreto utilizado, em cada viga, possuía diferentes valores de resistência à compressão ( $f_c$ ), estes valores foram obtidos experimentalmente e, como se verá em seguida, são responsáveis por diversas variações nos parâmetros de entrada do modelo numérico de fratura.

O módulo de elasticidade ( $E_c$ ) utilizado nas simulações, foi o recomendado pela NBR 6118 (2014) e determinado pela seguinte expressão para concretos com  $f_{ck}$  entre 20 MPa e 50 MPa:

$$E_c = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (4.2)$$

Sendo:

$\alpha_E$ : parâmetro que depende da natureza dos agregados;

$f_{ck}$ : resistência característica a compressão do concreto em MPa.

Uma vez que em cada viga o valor de resistência à compressão era diferente, diferentes valores para o módulo de elasticidade foram utilizados. O valor de  $\alpha_E$  utilizado foi de 0,9, que corresponde ao calcário no que se refere a natureza dos agregados, característica essa citada nos trabalhos de Burns e Siess (1966). Destaca-se aqui que Evangelho (2013) em suas simulações utilizou um valor de módulo de elasticidade de 14 GPa, que é bastante inferior em relação a faixa de valores obtidas pela equação 4.2, que gira em torno de 30 GPa, e corresponde ao valor usual para o concreto.

Como citado, na modelagem discreta de fratura, dois parâmetros de entrada são fundamentais: a resistência à tração ( $f_t$ ), e a energia de fratura ( $G_F$ ), que em modo I correspondem respectivamente aos parâmetros  $\sigma_{m\acute{a}x}^0$  e  $G_{Ic}$ . A resistência à tração do concreto também pode ser obtida por meio de textos normativos. Novamente, a NBR 6118 (2014) estabelece a seguinte equação para determinação da resistência à tração do concreto a

partir do valor de resistência à compressão, para concretos com  $f_{ck}$  entre 20 MPa e 50 MPa:

$$f_t = 0,3(f_{ck})^{2/3} \quad (4.3)$$

A energia de fratura é obtida por meio da equação 3.15, cabendo destacar que, uma vez que o diâmetro máximo dos agregados era de 25,4 mm, o valor de  $G_{F0}$  utilizado foi de 0,0465 N/mm.

Assim, os parâmetros do concreto de cada experimento, bem como as propriedades de fratura calculadas estão listadas na Tabela 4 seguinte:

Tabela 4 – Propriedades do concreto das vigas série J.

Viga	$f_c$ (MPa)	$E_c$ (GPa)	$f_t$ (MPa)	$G_F$ (N/mm)
J1	34	29,4	3,15	110
J10	25	25,2	2,60	90
J4	33	29,0	3,10	110

O coeficiente de poisson utilizado para o concreto foi de 0,2. As propriedades do material aço, por sua vez, foram as mesmas em todos os experimentos, constituindo-se de um material elastoplástico com endurecimento não linear. Segundo os testes realizados pelos próprios autores, o aço possuía as seguintes propriedades (ver equações 3.38 e 3.39):

Módulo de elasticidade ( $E_s$ ): 205 GPa;

Coeficiente de poisson ( $\nu$ ): 0,3

Tensão de escoamento ( $f_y$ ): 330 MPa;

Limite assintótico da tensão após o escoamento ( $f_y^\infty$ ): 500 MPa;

Parâmetro de ajuste ( $k$ ): 2,5.

Com relação a lei de aderência, foi utilizada a lei proposta pelo CEB-FIP (1993), considerando-se o concreto confinado em boas condições de aderência, em função da utilização de estribos nas vigas ensaiadas. Além disso, foram utilizadas as seguintes propriedades (ver equações 3.44 a 3.47):

$v_1$  e  $v_2$ : 1 e 3 mm, respectivamente;

$v_3$  (espaçamento entre nervuras): 10 mm;

Parâmetro  $\chi$ : 0,4;

$\tau_{m\acute{a}x}$ :  $2,5\sqrt{f_{ck}}$ ;

$\tau_f$ :  $0,4\tau_{m\acute{a}x}$ .

Destaca-se, por fim, que inicialmente foi utilizada somente a lei linear pós-pico

(equação 3.8) tanto para a relação entre tensão normal e abertura quanto entre tensão tangencial e deslizamento. Com esses parâmetros definidos, foram realizadas as simulações para validação do modelo proposto.

#### 4.1.2 Resultados das simulações

A partir dos gráficos de carga aplicada x deslocamento no centro do vão obtidos experimentalmente no trabalho de Burns e Siess (1966), foram obtidos numericamente os mesmos gráficos para comparação.

Com base nas formulações propostas, além das propriedades dos materiais já estabelecidas, outros parâmetros numéricos devem ser definidos para aplicação dos modelos definidos. Nesta análise, os seguintes valores foram utilizados (ver equações 3.26, 3.28 e 3.29):

Fator de acoplamento ( $\beta$ ): 1

Parâmetro  $\alpha$ : 4

Comprimento característico ( $l_c$ ): 20 mm

Além disso, estabeleceu-se que a resistência ao cisalhamento ( $\tau_{m\acute{a}x}^0$ ) era superior a resistência à tração ( $\sigma_{m\acute{a}x}^0$  ou  $f_t$ ) variando esse valor em cada análise de acordo com os resultados obtidos. Este é um resultado esperado, considerando-se as relações clássicas entre  $f_t$ ,  $f_c$  e o ângulo de atrito ( $\phi$ ) nos modelos de Coulomb (Figura 31). Foram obtidos bons resultados admitindo-se a resistência ao cisalhamento da ordem de 10 a 20% maior que a resistência à tração.

A Figura 43 ilustra as malhas que foram utilizadas para as vigas J1, J10 e J4. As malhas possuem 9350 elementos, sendo deste total 3960 elementos volumétricos, ou seja, elementos de aço e de concreto, e 5390 elementos de interface, incluindo os elementos de interface entre elementos de concreto e elementos de aderência entre aço e concreto para representação dos modelos de aderência.

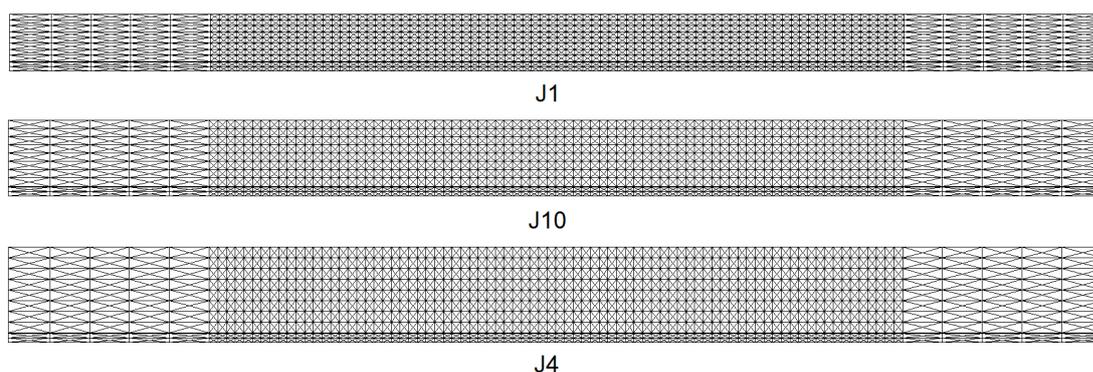


Figura 43 – Malhas utilizadas na simulações numéricas das vigas J.

Inicialmente, comparou-se três situações, a resposta obtida pelo modelo sem elementos de interface e com módulo de elasticidade do concreto de acordo com a Tabela 4, a obtida ainda sem elementos de interface e com módulo de elasticidade adotado por Evangelho (2013), e a resposta numérica obtida no modelo utilizado neste trabalho, com elementos de interface entre elementos de concreto e elementos de aderência entre elementos de aço e de concreto. Os resultados obtidos estão representados na Figura 44.

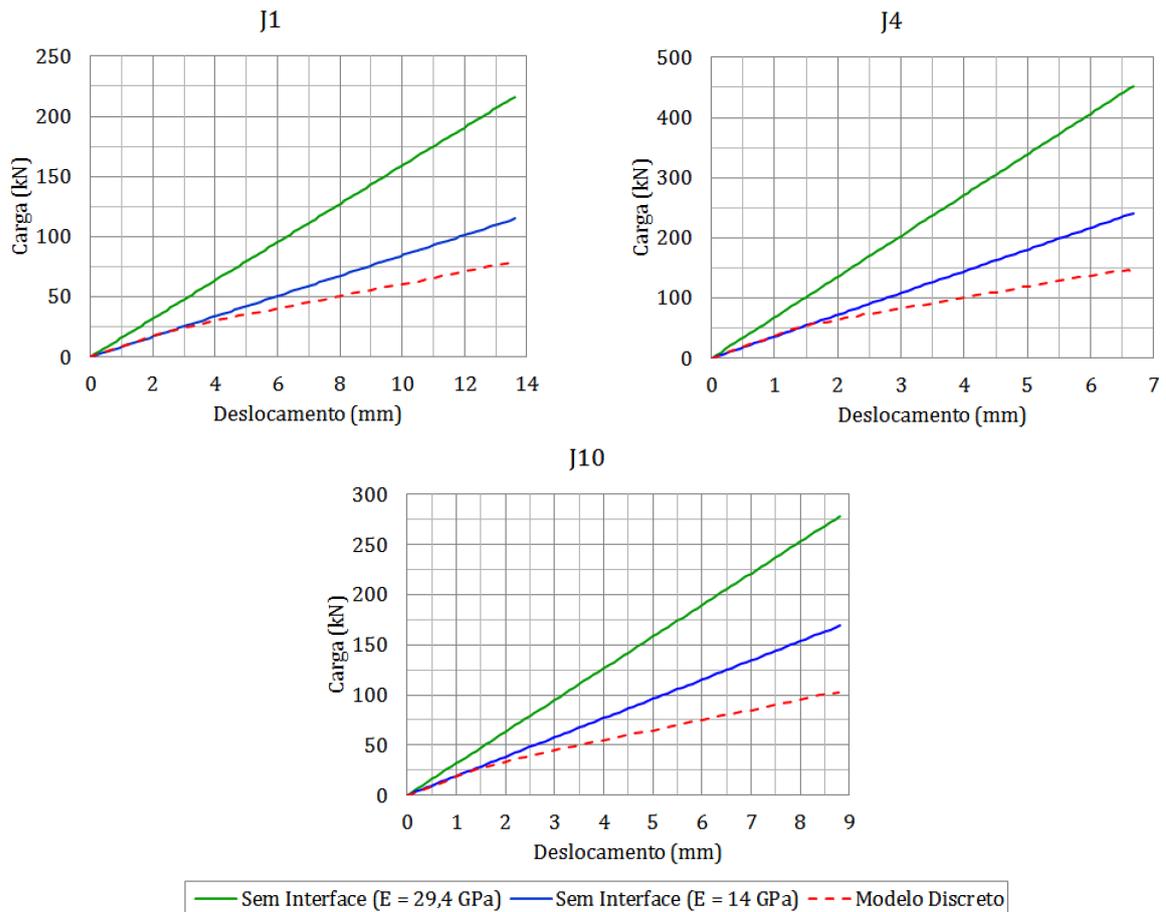


Figura 44 – Comparação dos resultados obtidos em diferentes análises sem interfaces e com interfaces.

Nota-se que com o uso do presente modelo, foi possível representar a perda de rigidez do elemento, na região linear, idêntica a obtida por Evangelho (2013) com módulo de elasticidade menor que o real, no início do carregamento apenas. A partir de um deslocamento de aproximadamente 2 mm a resposta do modelo com interfaces passa a ser não linear. Portanto, o simples uso de um módulo de elasticidade corrigido não é capaz de capturar o efeito da perda de rigidez oriundo da fissuração.

A seguir têm-se a comparação entre os resultados numéricos e experimentais. A Figura 45 mostra a curva dos resultados experimentais e a obtida numericamente pelo modelo com interfaces utilizado para a viga J1.

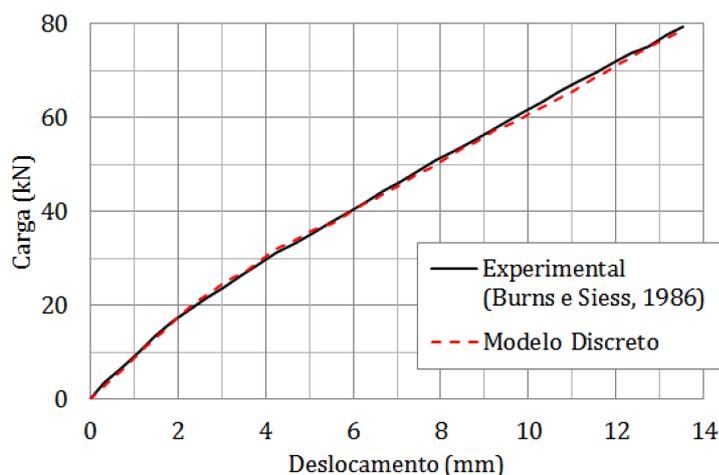


Figura 45 – Curvas carga aplicada x deslocamento no meio do vão da viga J1.

A viga J1 caracteriza-se por possuir menor altura em relação as demais, e nota-se pelo resultado obtido que os resultados numéricos tiveram boa concordância com os resultados experimentais. Além disso, mostra-se na Figura 46 a configuração das fissuras que surgiram e se propagaram na viga ao longo da simulação numérica.

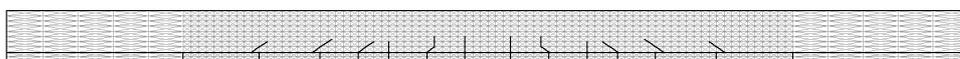


Figura 46 – Distribuição das fissuras pelo modelo numérico da viga J1.

Já na Figura 47, têm-se as curvas experimentais e numéricas da viga J10. Esta viga tem altura intermediária entre as vigas J1 e J4 e, além disso, possui também propriedades do material concreto, como módulo de elasticidade, resistência à compressão e à tração, bem como conseqüentemente, energia de fratura, menores em relação às demais vigas. Notou-se, nesta análise, uma pequena discrepância no comportamento linear da viga, ainda antes do início da fratura.

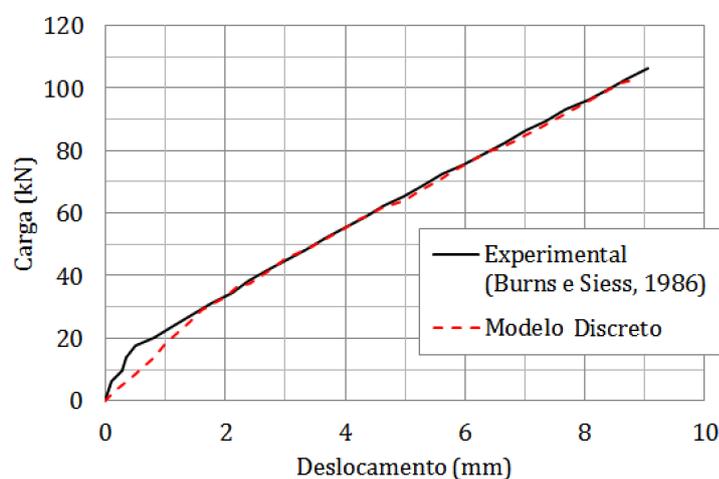


Figura 47 – Curvas carga aplicada x deslocamento no meio do vão da viga J10.

A distribuição das fissuras para a viga J10 está ilustrada na Figura 48, onde percebe-se que as fissuras atingem maiores alturas da viga em relação a viga J1.

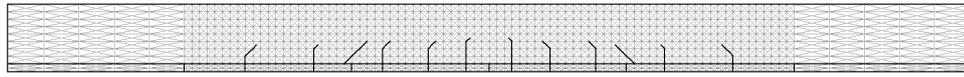


Figura 48 – Distribuição das fissuras pelo modelo numérico da viga J10.

Por fim, tem-se a curva de carga aplicada x deslocamento no centro do vão da viga J4 (Figura 49). Esta viga possui a maior altura dentre as vigas, e as propriedades do material concreto desta estão bastante próximas as da viga J1, de menor altura. A viga J4, em comparação às demais, foi a que possuiu maior divergência com os resultados experimentais, como se nota pelo gráfico, e essa diferença se deu tanto no trecho linear quanto após o início da fratura do elemento.

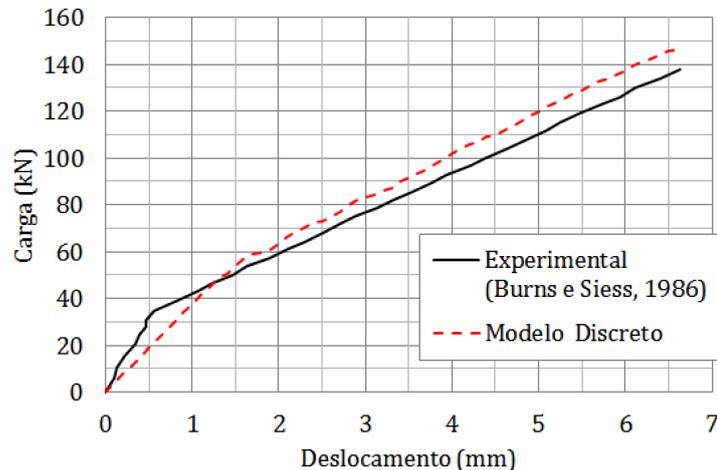


Figura 49 – Curvas carga aplicada x deslocamento no meio do vão da viga J4.

A Figura 50 ilustra a configuração obtida para a viga J4 no final da análise, onde se percebe que em relação as vigas anteriores, as fissuras atingem alturas ainda maiores.

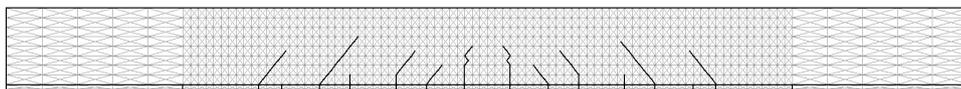


Figura 50 – Distribuição das fissuras pelo modelo numérico da viga J4.

Deve-se ressaltar aqui que as análises se detiveram, por razões numéricas, no início do escoamento do aço. Assim, a carga final mostrada nos gráficos é uma representação do início do processo de ruína das vigas. Logo, a fragilização das vigas com o aumento da altura (Carpinteri et al., 2010) é notória, ou seja, quanto maior a altura, menor a deflexão até a carga última (Figura 51). Além disso, nas vigas mais altas, as fissuras também assumiram um maior comprimento relativo que nas vigas menores.

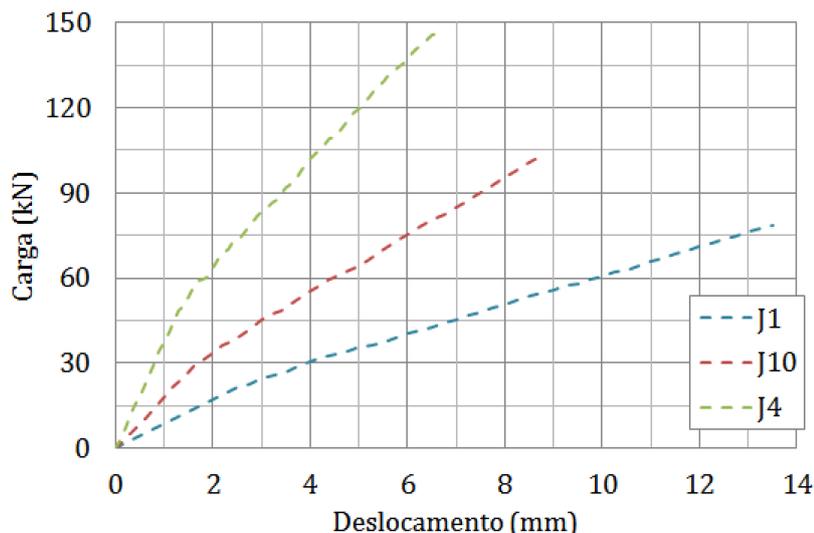


Figura 51 – Comparação dos gráficos carga aplicada x deslocamento das vigas série J.

Um segundo estudo foi feito com a viga J1, buscando-se analisar a influência da alteração da taxa de armadura na resposta desta, avaliando o efeito da mudança de configuração da viga de subarmada para superarmada. Conforme as recomendações da NBR 6118 (2014) viu-se que para mudança de domínio desta viga é necessário aproximadamente o dobro da quantidade de taxa de armadura utilizada, que passou de 1,6% para 3,2% (Anexo A).

Na Figura 52a, têm-se as tensões no concreto, e na Figura 52b, as tensões no aço, ambas em domínio 3, onde se observa que na região superior da viga, as tensões de compressão atingiram a resistência à compressão do mesmo (34 MPa) enquanto que as tensões no aço estão próximas a tensão de escoamento (330 MPa).

Já nas Figuras 53a e 53b, têm-se, respectivamente, as tensões no concreto e na armadura em domínio 4. Neste domínio, nota-se que as tensões de compressão ultrapassaram o valor da resistência à compressão do concreto, caracterizando o início do esmagamento do mesmo. E na região da armadura, a redução das tensões indica que ainda não ocorreu o escoamento no aço.

Cabe salientar aqui portanto, que mesmo empregando um modelo constitutivo elástico linear para representar o comportamento do concreto comprimido, o modelo foi capaz de capturar os principais aspectos inerentes à mudança do domínio 3 para o 4, como mostram as distribuições de tensões no aço e concreto da Figura 52 e da Figura 53. Na Figura 52, em domínio 3, mais próximo ao escoamento do aço com esmagamento do concreto na zona comprimida e, na Figura 53, domínio 4, esmagamento do concreto sem escoamento do aço. Todavia é importante ressaltar que o dimensionamento de vigas no domínio 4 não é admitido pela referida norma, para evitar uma possível ruptura frágil destes elementos.

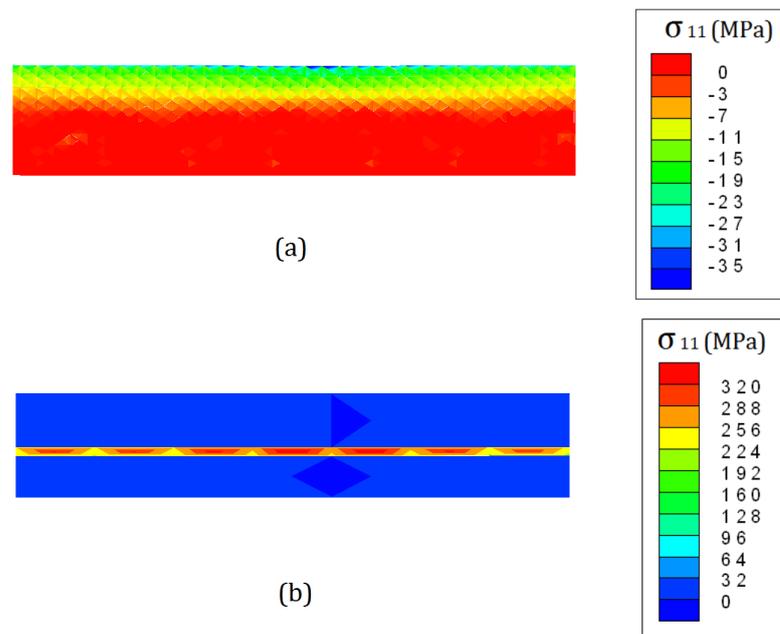


Figura 52 – Representação das tensões na viga J1 em domínio 3. (a) Tensões de compressão no concreto (b) Tensões de tração no aço.

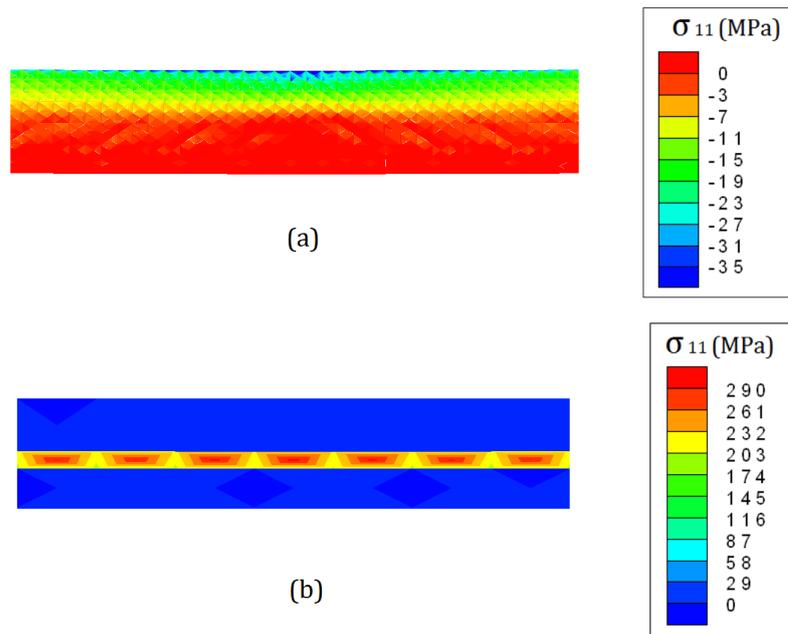


Figura 53 – Representação das tensões na viga J1 em domínio 4. (a) Tensões de compressão no concreto (b) Tensões de tração no aço.

A Figura 54 ilustra a morfologia das fissuras obtida em domínio 4 para a viga J1. Com a alteração de domínio, e conseqüente alteração de configuração subarmada para superarmada, as fissuras da viga em domínio 4 se encontram em menor quantidade, possuem comprimento menor e se concentram na região central da viga, contrariamente as vigas em domínio 3 (Figura 46), onde as fissuras se encontram em maior quantidade, mais bem distribuídas ao longo da viga, e possuem comprimento também maior, tendência de

comportamento essa evidenciada por Shah et al. (1995) e representada na Figura 11, para as vigas superarmadas.

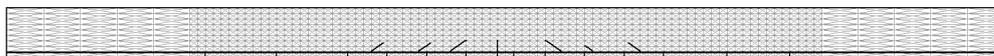


Figura 54 – Fissuração da viga J1 no domínio 4.

Foram testadas também diferentes situações de aderência da lei CEB-FIP, entre elas: concreto confinado e não-confinado, boa e má condições de aderência. A alteração desses parâmetros não se mostrou um fator determinante nos resultados analisados, não havendo alteração significativa na curva carga aplicada x deslocamento e pequenas alterações dos elementos que sofreram ruptura nas regiões próximas a interface entre aço e concreto, para os níveis de cargas atingidos nas simulações.

Embora não se tenha a distribuição da fissuração dos experimentos, pode-se observar uma tendência das fissuras no centro serem mais verticais e mais desenvolvidas, devido a predominância das tensões normais e do modo I de ruptura. A medida que se afasta do centro em direção às bordas as fissuras têm a tendência de se desenvolverem a 45° em função da maior influência das tensões de corte. Uma análise mais aprofundada da morfologia das fissuras é realizada no item a seguir.

## 4.2 ENSAIO DE FLEXÃO EM 4 PONTOS

### 4.2.1 Descrição do problema

Nesta seção analisa-se principalmente a capacidade do modelo em capturar o surgimento e propagação de fissuras nas vigas de concreto armado em comparação com a modelagem distribuída desenvolvida por Marzec (2007) e com os resultados experimentais obtidos por Walraven (1978).

Os ensaios constituem-se de vigas analisadas em flexão a 4 pontos, que possuem portanto, no centro do vão, uma região onde somente atua o momento fletor, sem esforço cortante e, na região entre as cargas aplicadas e os apoios, há tanto o momento fletor quanto a ação do cisalhamento, diferentemente do caso das vigas em flexão a 3 pontos, onde em todo o comprimento da viga se tem a ação tanto de momentos fletores quanto de esforços cortantes.

A fissuração dominante, que leva ao colapso, na configuração de ensaio em flexão em 4 pontos, se dá por meio das fissuras na seção crítica, ou seja, nos pontos de aplicação das cargas. Portanto, estas fissuras são responsáveis pelo colapso caracterizado como frágil nesta configuração, como ilustra a Figura 13.

A geometria das vigas simuladas está representada na Figura 55.

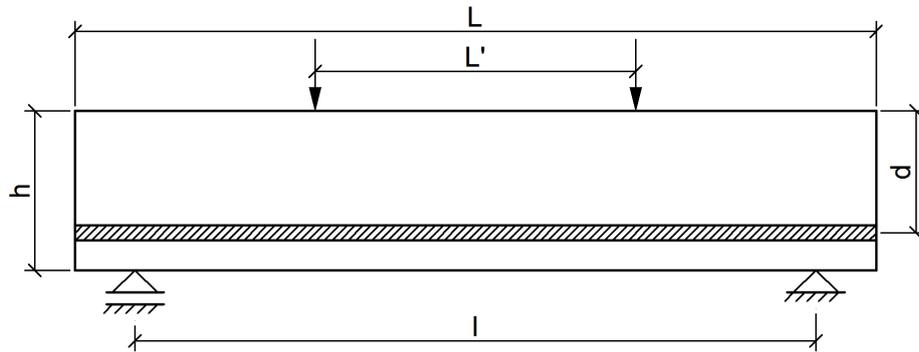


Figura 55 – Geometria das vigas analisadas em flexão a 4 pontos.

A Tabela 5 mostra as dimensões de cada viga dos experimentos bem como a quantidade de armadura utilizada.

Tabela 5 – Geometria das vigas série S.

Viga	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$L$ (mm)	$L'$ (mm)	$l$ (mm)	Armadura positiva	$\rho_{sc}$
S1	150	125	2300	1000	1750	1 – $\phi 8$ e 2 – $\phi 10$	0,7%
S2	450	420	4000	1000	3400	1 – $\phi 20$ e 2 – $\phi 14$	0,7%
S3	750	720	6400	1000	5300	3 – $\phi 23$	0,8%

Todas as vigas possuíam espessura  $e = 200$  mm, e como pode-se observar apesar de as dimensões das vigas variarem consideravelmente, o espaçamento entre as forças aplicadas na parte superior da viga é constante.

Além das propriedades geométricas, os seguintes parâmetros para o concreto foram utilizados:

Módulo de elasticidade ( $E_c$ ): 28,9 GPa

Coefficiente de poisson ( $\nu$ ): 0,20

Resistência à compressão ( $f_c$ ): 34,2 MPa

Resistência à tração ( $f_t$ ): 2,49 MPa

$d_{m\acute{a}x} = 16$  mm

Energia de fratura ( $G_F$ ): 70 N/mm

Enquanto que para o aço, adotando-se ainda as mesmas propriedades das análises numéricas de Marzec (2007), utilizou-se um modelo elástico-perfeitamente plástico com os seguintes parâmetros (ver equações 3.36 e 3.37):

Módulo de elasticidade ( $E_s$ ): 205 GPa

Coefficiente de poisson ( $\nu$ ): 0,30

Tensão de escoamento ( $f_y$ ): 440 MPa

Com relação a aderência, neste exemplo, utilizou-se a lei estabelecida por Dörr (1980), sendo o valor do parâmetro  $\nu_1$  foi 0,6 mm (ver equações 3.42 e 3.43).

#### 4.2.2 Resultados das simulações

Nestas simulações, os seguintes valores dos parâmetros do modelo foram utilizados:

Fator de acoplamento ( $\beta$ ): 1

Destaca-se que, nestas análises, os valores da relação  $l_c/\alpha$  utilizada para as vigas S1, S2 e S3 foram respectivamente 5, 8,75 e 12,5 mm. Uma vez que, o valor de  $\alpha$  utilizado em todos os exemplos foi 4, e o comprimento característico ( $l_c$ ) da malha de elementos finitos variou, sendo 20 mm para a viga S1, 35 mm para a viga S2 e 50 mm para a S3.

Assim como no exemplo anterior, as malhas se caracterizam por serem mais densas na região central, onde ocorrerá a concentração das fissuras, para maior precisão na representação do fenômeno da fissuração. A Figura 56 mostra as malhas usadas nestas simulações.

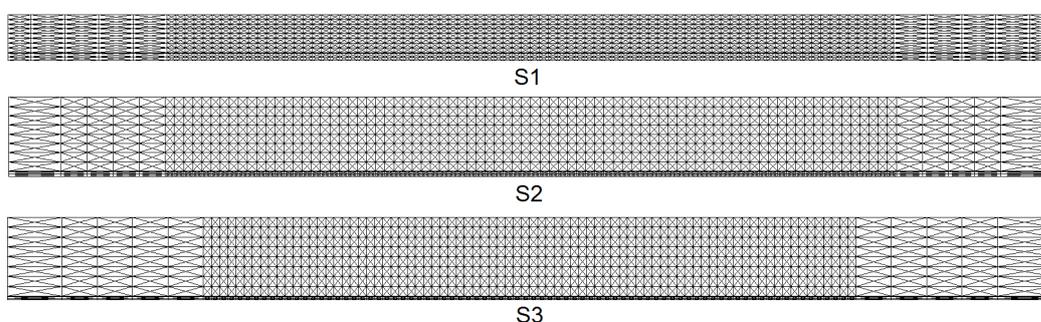


Figura 56 – Malhas utilizadas na simulações numéricas das vigas S.

Para a viga S1, foi obtido o gráfico carga aplicada x deslocamento no centro do vão da Figura 57. Já neste primeiro exemplo, nota-se que a abordagem discreta de fratura encontrou-se em um patamar mais próximo dos resultados experimentais em relação a modelagem distribuída.

A segunda resposta obtida foi a distribuição das fissuras pelas três diferentes análises, ainda para a viga S1, este resultado está representado na Figura 58. Percebe-se relativa proximidade entre os resultados dos modelos distribuídos e discreto em relação a fissuração. Uma maneira de se comparar os resultados do modelo utilizado ao resultado experimental é por meio da quantidade de fissuras de maiores dimensões. Enquanto que experimentalmente existem 18 fissuras dominantes, no modelo foram obtidas 16, portanto,

boa concordância sob essa perspectiva. Interessante observar que experimentalmente, à esquerda, existe uma fissura que tem uma trajetória inclinada mais acentuada, em direção à carga aplicada; esta fissura também foi capturada pelo modelo.

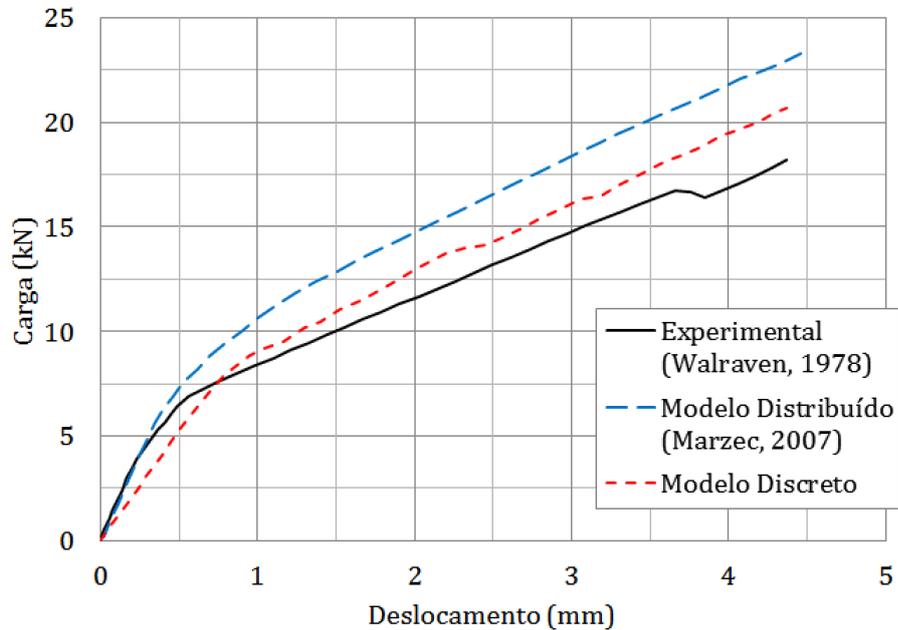


Figura 57 – Curvas carga aplicada x deslocamento no meio do vão da viga S1.

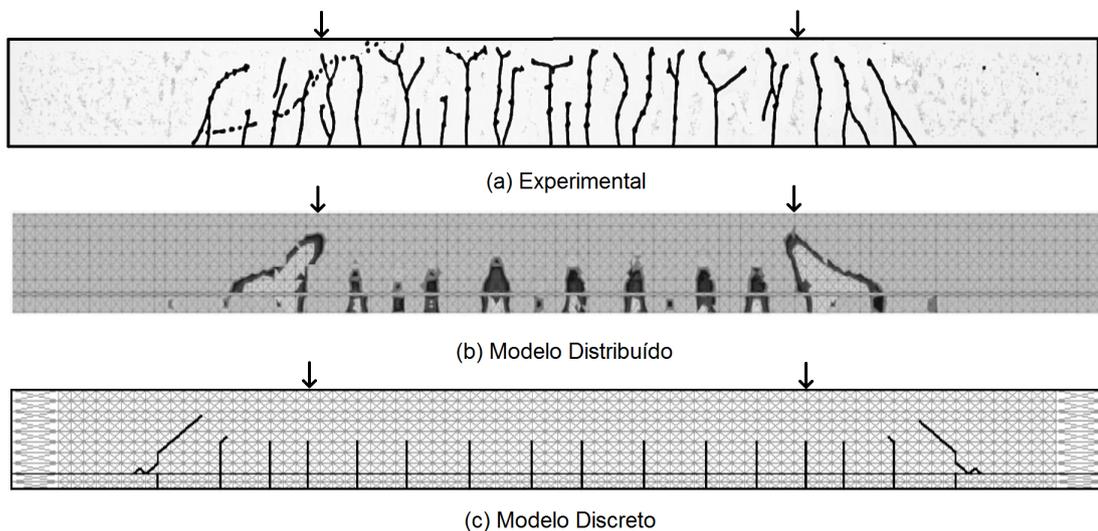


Figura 58 – Representação da fissuração da viga S1 por diferentes análises.

Outro resultado que se destaca são os elementos da viga que sofreram amolecimento, ou seja, que estão em dano, possuindo relação constitutiva coesiva no ramo de descarga. A representação da morfologia destes elementos evidencia o conceito de dano generalizado nos casos do concreto armado. Para um deslocamento de 2,5 mm no centro da viga, a Figura 59 ilustra esse fenômeno.

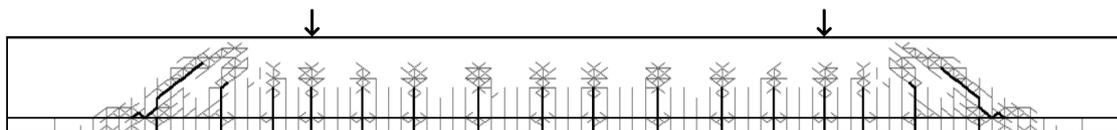


Figura 59 – Representação dos elementos amolecidos e rompidos da viga S1.

É notório que a distribuição dos elementos amolecidos acompanha os elementos fissurados, com ramificações que indicam o caminho de propagação das fissuras. Além disso, nota-se também que outras ramificações de elementos amolecidos entre os elementos fissurados existem, aproximando o resultado do modelo ao experimental. A Figura 59 também mostra que o processo de ruptura é, de fato, controlado pelas fissuras em que há influência do corte. Além das fissuras serem maiores, estão associadas a uma maior zona de dano na frente da fissura.

A Figura 60 ilustra os resultados de carga aplicada x deslocamento da viga S2, que possui maiores dimensões em relação a viga S1, e na malha de elementos finitos foi utilizado um comprimento característico maior. Com base nesta figura, vê-se que a modelagem discreta manteve-se ainda mais próxima dos resultados experimentais em relação a viga S1, e, novamente, o modelo distribuído deu resultado mais rígido em relação aos outros dois resultados.

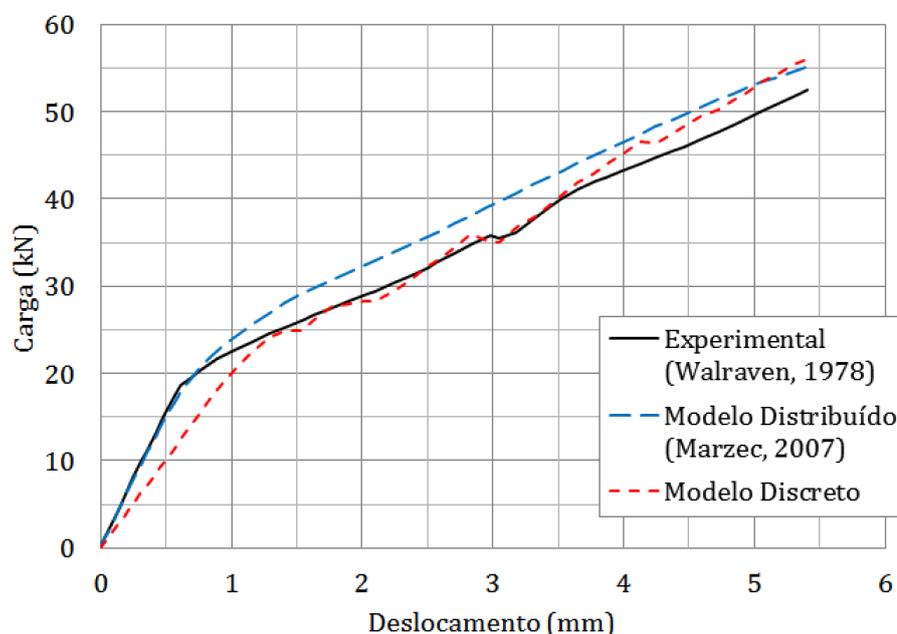


Figura 60 – Curvas carga aplicada x deslocamento no meio do vão da viga S2.

Na Figura 61 tem-se, para a viga S2, pelas três abordagens, a fissuração desta viga. Primeiramente a distribuição das fissuras pela análise experimental, seguida dos elementos que fissuraram pela análise distribuída e por último os elementos de interface que romperam na análise discreta do presente trabalho.

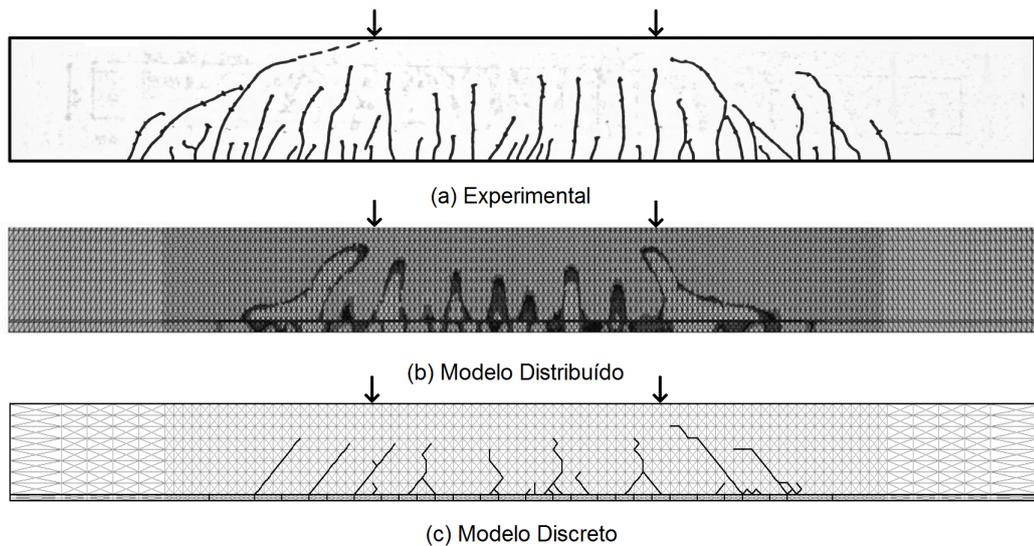


Figura 61 – Representação da fissuração da viga S2 por diferentes análises.

Fazendo-se aqui também a comparação entre a quantidade de fissuras, experimentalmente existem 14 fissuras mais desenvolvidas. Em comparação com a viga S1, no entanto, há mais fissuras menores. Nos resultados numéricos obtiveram-se 10 fissuras dominantes. Mais uma vez, os modelos distribuído e discreto possuem boa concordância em relação a região de concentração das fissuras, bem como a forma destas.

A Figura 62 mostra os elementos amolecidos desta viga para um deslocamento de 3 mm. Percebe-se um dano mais intenso na zona central, em comparação com a viga S1. Esta distribuição do dano pode explicar a formação mais intensa de fissuras menores obtida experimentalmente.

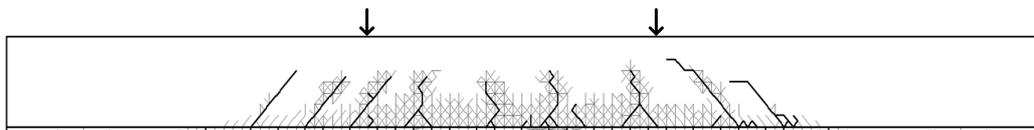


Figura 62 – Representação dos elementos amolecidos e rompidos da viga S2.

Outro aspecto interessante capturado numericamente é a tendência de fissuras menores sofrerem um processo de aglutinamento, junto as zonas de alta tensão no concreto, para então formarem uma única fissura dominante.

A Figura 63 mostra as curvas experimental e numéricas da viga S3. Embora a resposta do trecho linear inicial do modelo discreto utilizado tenha se afastado um pouco da experimental, boa concordância foi obtida a partir da fissuração da concreto, principalmente em relação aos resultados da modelagem distribuída.

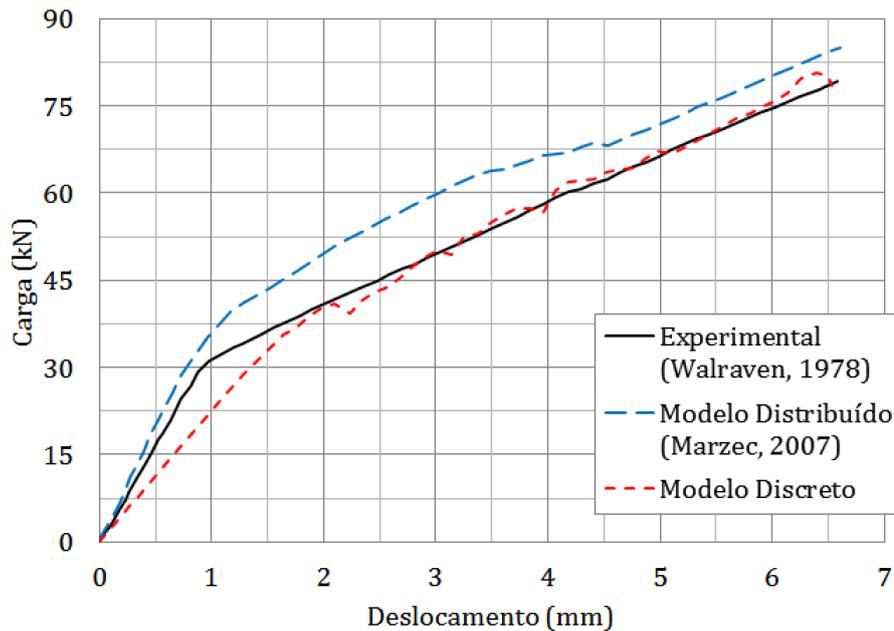


Figura 63 – Curvas carga aplicada x deslocamento no meio do vão da viga S3.

A Figura 64 ilustra a fissuração da viga S3 obtida nas situações em análise. Nota-se aqui que experimentalmente obtiveram-se 10 fissuras dominantes enquanto que pela modelagem discreta existem 13 fissuras, portanto, nesta viga, o modelo superou a quantidade de fissuras obtidas pelos experimentos, embora experimentalmente ainda existam muito mais fissuras menores. Todavia, manteve-se ainda a tendência de boa concordância entre os resultados da morfologia da fissuração entre os modelos distribuído e discreto. Percebe-se novamente uma predominância das fissuras influenciadas pelo corte numericamente. As fissuras mais desenvolvidas coincidem com a posição da seção crítica. Novamente, houve a coalescência de fissuras menores em fissuras dominantes.

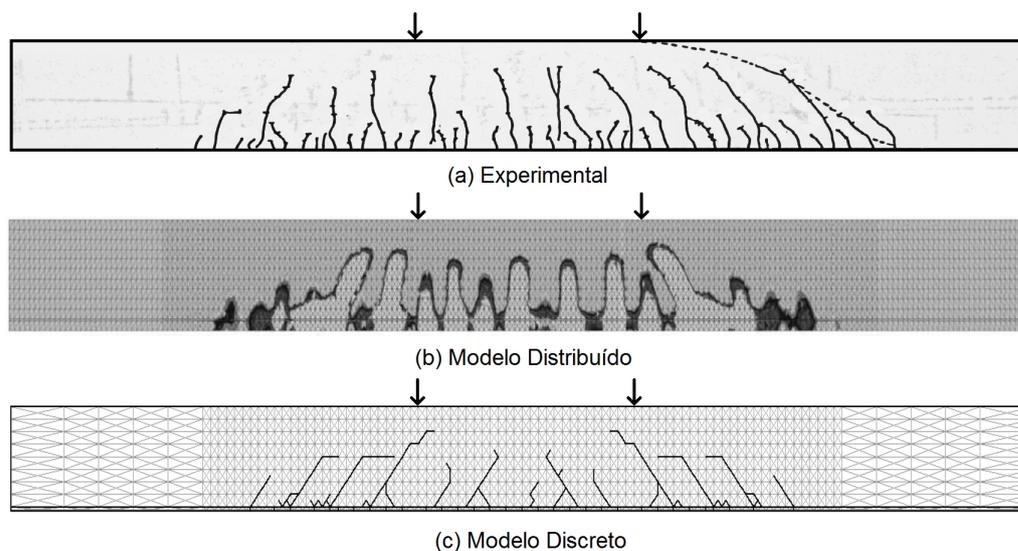


Figura 64 – Representação da fissuração da viga S3 por diferentes análises.

Por fim, têm-se a distribuição dos elementos amolecidos da viga na Figura 65 para um deslocamento de 3,5 mm no meio do vão da viga. Neste caso, a morfologia destes elementos manteve-se em concordância em relação a viga S2, ou seja, concentraram-se no meio do vão, entre as fissuras, o que mostra a existência do dano nesta região e pode ser relacionado, novamente, à existência das fissuras menores experimentalmente.



Figura 65 – Representação dos elementos amolecidos e rompidos da viga S3.

Uma análise qualitativa da fissuração também pode ser feita com base na distribuição de tensões nas vigas. A Figura 66 e Figura 67 ilustram as tensões ao longo da análise das vigas S1 e S3.

Pelas figuras, percebe-se que, de começo, a distribuição das tensões é, como esperado, linear elástica. Em seguida, nota-se o surgimento das primeiras gerações de fissuras na região em que atua somente o momento fletor, e devido a existência de apenas esforços de tração, essas fissuras se propagam de maneira retilínea, perpendicular ao comprimento da viga.

Inicialmente, na viga S1, as fissuras se concentram ainda abaixo das barras de aço, e posteriormente, novas gerações de fissuras aparecem e as fissuras atravessam as armaduras, atingindo alturas maiores. Em última instância, em ambas as vigas, fica claro o aparecimento de fissuras inclinadas nas regiões em que há o efeito do cisalhamento.

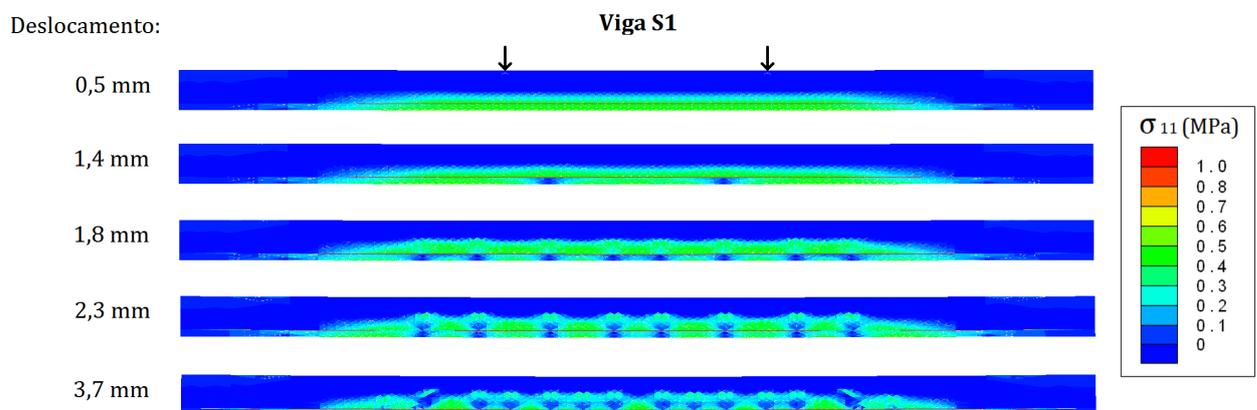


Figura 66 – Distribuição das tensões da viga S1 durante a análise.

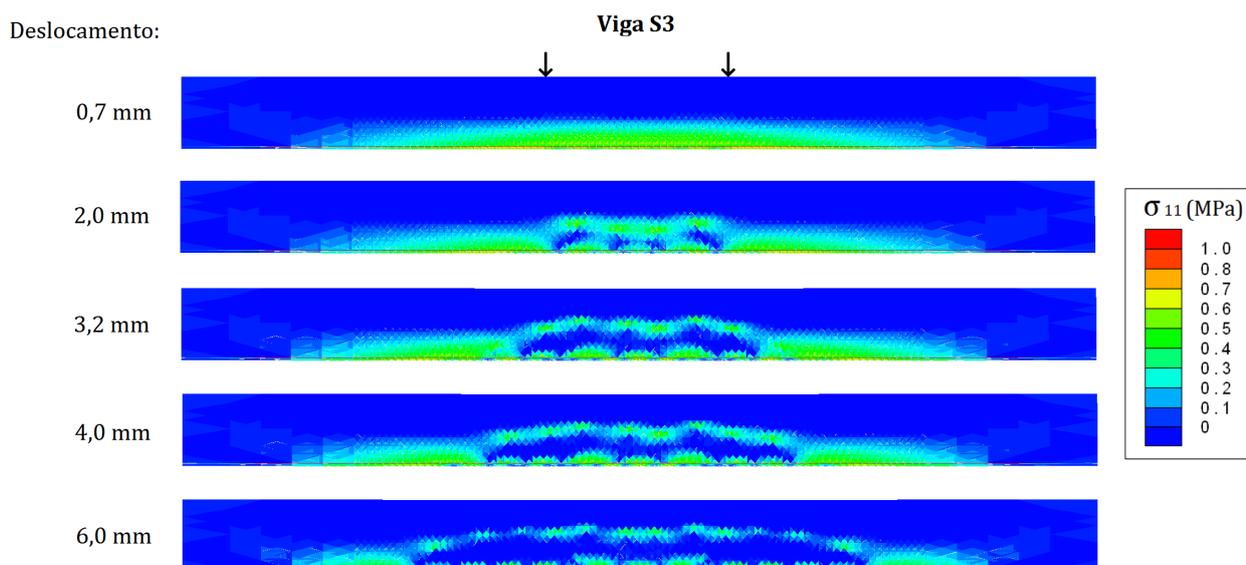


Figura 67 – Distribuição das tensões da viga S3 durante a análise.

É perceptível também, com base na distribuição de tensões, que na viga de maior dimensão, S3, as fissuras se propagaram mais rapidamente ao longo da simulação em comparação a viga menor, S1. Enquanto que na viga S1, para um deslocamento de 1,4 mm, correspondente a 30% do deslocamento máximo obtido na análise (Figura 57), as fissuras ainda estão em suas primeiras gerações e ainda não ultrapassaram a barra de aço; na viga S3, com um deslocamento de 2 mm, também correspondente a 30% do máximo obtido (Figura 63), existem mais fissuras e estas já ultrapassaram a armadura. O mesmo pode ser observado ao longo da análise e ser relacionado com o surgimento das fissuras inclinadas nas regiões de corte, que determinam o colapso das vigas em ensaio de 4 pontos. Para viga S1, as fissuras inclinadas nestas regiões surgem já no final da análise, a partir de deslocamentos superiores a 80% do máximo analisado. Já para a viga de maior altura, S3, observa-se que fissuras inclinadas na região de corte surgem para deslocamentos superiores a 60% do máximo analisado.

Esse fenômeno, no qual as vigas mais altas têm a tendência de produzir fissuras de corte que se desenvolvem mais rapidamente, também foi observado por Walraven (1978). Todavia, em suas análises, estudou-se a fissuração nas diferentes vigas em relação a uma mesma carga de cisalhamento nominal. Com base nisso, para uma mesma tensão de cisalhamento nominal ( $Q = P/h.e = 0,6$  MPa, sendo que  $P$  corresponde a carga aplicada), a Figura 68 ilustra a morfologia das fissuras para as três vigas analisadas, onde se vê tendência descrita.

Percebe-se pela Figura 68, que o dano, representado pelos elementos que sofreram amolecimento, é maior em vigas de alturas maiores para a mesma tensão de cisalhamento nominal. Assim, vigas de altura maior tendem a sofrer maior dano e, conseqüentemente,

possuir maior fissuração em relação as vigas de menores alturas, mantendo-se constante a carga de cisalhamento nominal, nas regiões onde atua de corte.

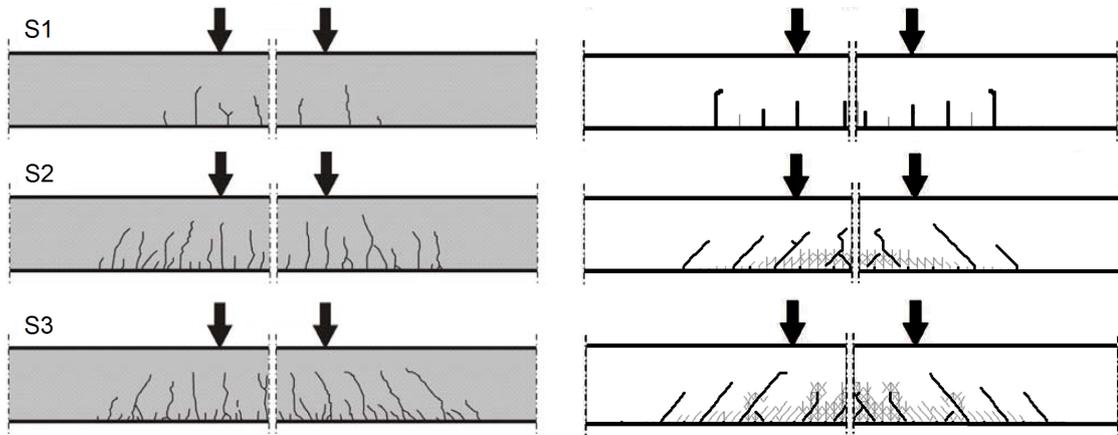


Figura 68 – Morfologia das fissuras e do amolecimento das vigas para a mesma tensão nominal.

Pela análise geral dos resultados, observa-se a tendência dos resultados numéricos, em sua maioria, subestimarem o número de fissuras dos experimentos, especialmente em relação às fissuras menores. Isso pode ser justificado pelo fato de que a configuração da viga do resultado experimental é a obtida após colapso total da estrutura, ou seja, após o escoamento do aço e esmagamento do concreto, enquanto que, as análises numéricas representam a fissuração da viga ainda antes do escoamento do aço. Observou-se também que o uso de uma relação  $l_c/\alpha$  maior nos casos de maiores alturas provavelmente explica a maior discrepância dos resultados no início do carregamento nestes. Este efeito será melhor investigado no item seguinte.

Além disso, outra característica interessante é que, embora o problema seja simétrico, a morfologia das fissuras não é, esse fenômeno acontece devido a arredondamentos numéricos. Todavia, as análises numéricas realizadas conseguem capturar fenômenos interessantes como a mudança de trajetória nas fissuras (como se observa nas vigas S2 e S3) com a evolução do processo de ruptura; bem como a coalescência de pequenas fissuras em fissuras maiores.

Finalmente, em relação aos ensaios de flexão em 3 e 4 pontos, pode-se destacar também que o modelo foi capaz de representar a tendência representada na Figura 13, descrita por Shah et al. (1995). As fissuras dominantes em ensaios de 3 pontos se concentram no centro da viga, de forma bem distribuída enquanto que em ensaios de flexão em 4 pontos, as fissuras dominantes são as inclinadas que se concentram nas regiões onde atua o cisalhamento.

### 4.3 INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DO MODELO NOS RESULTADOS DAS ANÁLISES

Esta parte do trabalho visa estudar os principais parâmetros de entrada do modelo, avaliando a influência destes nos resultados obtidos. Foram analisados três parâmetros, o parâmetro  $\alpha$ , que constitui um parâmetro adimensional, geralmente na faixa entre 1 e 100, e relaciona-se à abertura e deslizamento elástico do modelo, a lei pós-pico, que relaciona a tensão e abertura ou deslizamento do elemento de interface após sua ruptura, e a energia de fratura.

#### 4.3.1 Energia de Fratura

Conforme discutido na fundamentação teórica, os valores de energia de fratura em modo I para vigas de concreto estão normalmente entre 40 N/mm e 200 N/mm, de acordo com os valores fornecidos pelo código CEB-FIP (1993) e por Elfgren (1989). Embora determinante no comportamento do concreto simples, costuma-se atribuir pouca importância a este parâmetro no concreto armado. Resolveu-se então investigar a influência do mesmo no contexto da fratura discreta. Na Figura 69, têm-se as curvas obtidas para energias de 50, 100, 150 e 200 N/mm.

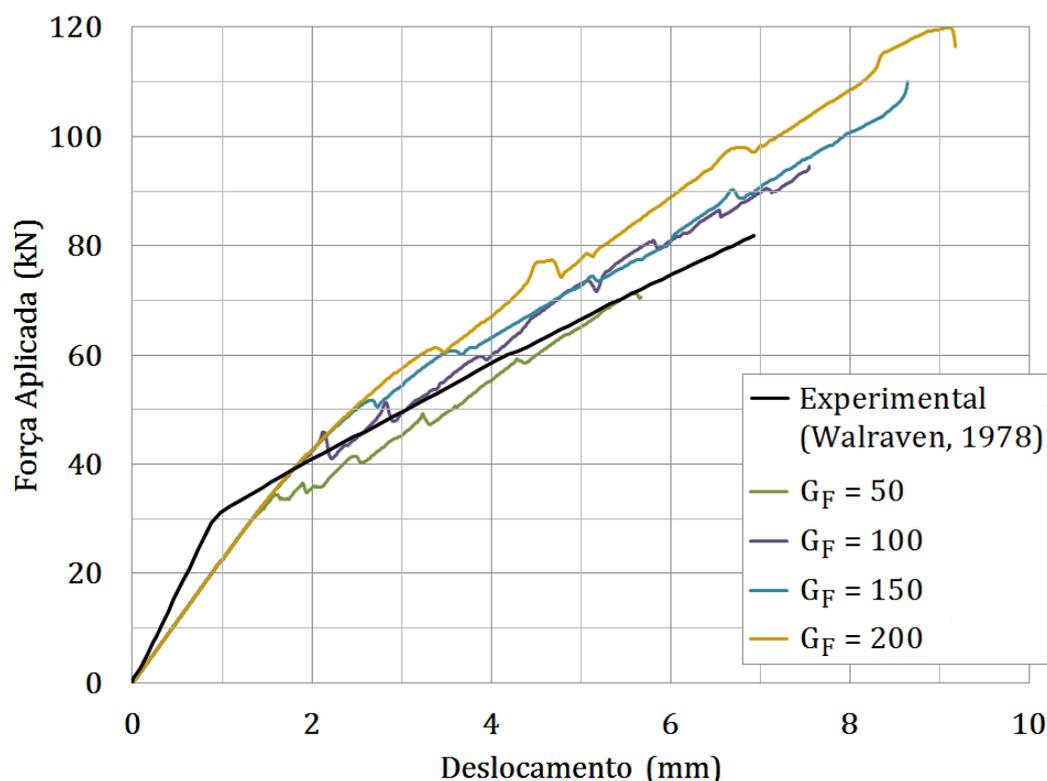


Figura 69 – Influência da variação da energia de fratura da viga S3 no gráfico carga aplicada x deslocamento.

A primeira característica que se nota pela Figura 69 é que, para valores maiores de energia de fratura, a curva possui maior inclinação ou maiores valores de carga, como esperado. A modelagem diverge após maior número de passos e, portanto, atinge deslocamentos maiores em relação às energias de fratura menores. Para um deslocamento de 4 mm, alterando-se a energia de fratura de 50 N/mm para 200 N/mm a força aplicada aumenta de 55 kN para 67 kN, logo, para uma energia de fratura quatro vezes maior, a carga tem um acréscimo de aproximadamente 20%,

Além disso, pela análise da Figura 70, percebe-se que maiores valores de energia reduzem bastante a quantidade de fissuras da viga, bem como aumenta o espaçamento entre elas, enquanto que, para vigas com menor energia de fratura, há maior quantidade de fissuras e menor espaçamento entre as mesmas, como também era de se esperar.

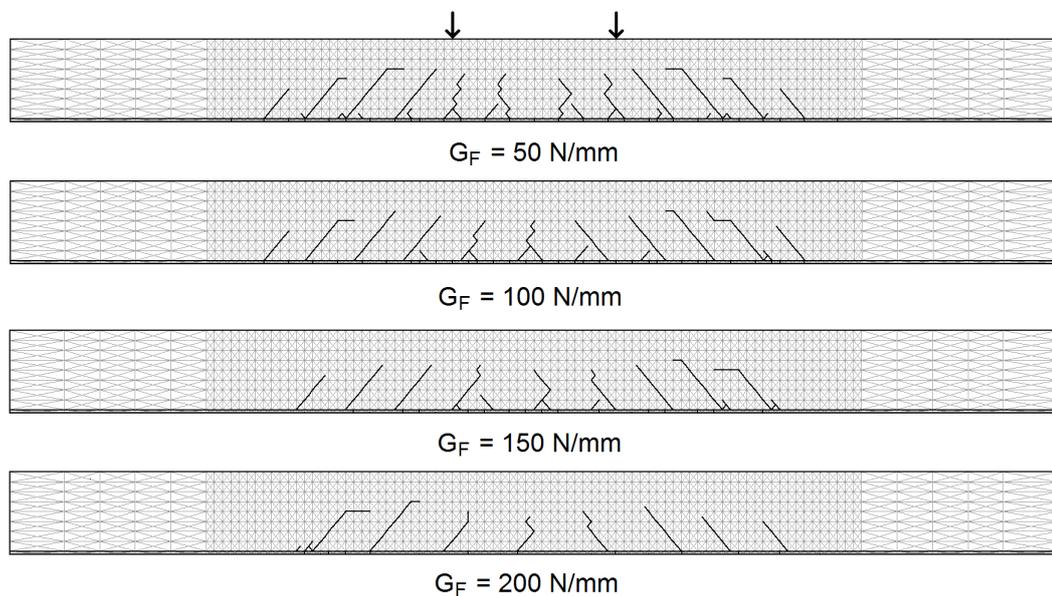


Figura 70 – Influência da variação da energia de fratura da viga S3 na fissuração.

#### 4.3.2 Lei Pós-Pico

Foram estabelecidas três leis pós-pico distintas para análise: a lei linear, a lei bilinear e a lei exponencial, conforme ilustrado na Figura 28. Na Figura 71 tem-se a influência da variação desta lei no diagrama carga aplicada x deslocamento da viga

Pela análise do gráfico, nota-se que não há significativa mudança nos resultados das análises, uma vez que, como esperado, o trecho linear manteve-se idêntico e o início da fissuração se deu praticamente no mesmo ponto para as três situações, bem como, durante a fissuração, pequenas variações foram obtidas.

Já a distribuição das fissuras em cada lei utilizada sofreu alteração. De acordo com a Figura 72, a utilização das leis bilinear e exponencial reduziu bastante a quantidade de

fissuras presentes. A lei bilinear caracterizou-se por fissuras menores, enquanto que, na lei exponencial, destaca-se a presença de duas fissuras dominantes que se propagam em direção aos pontos de aplicação das cargas da viga.

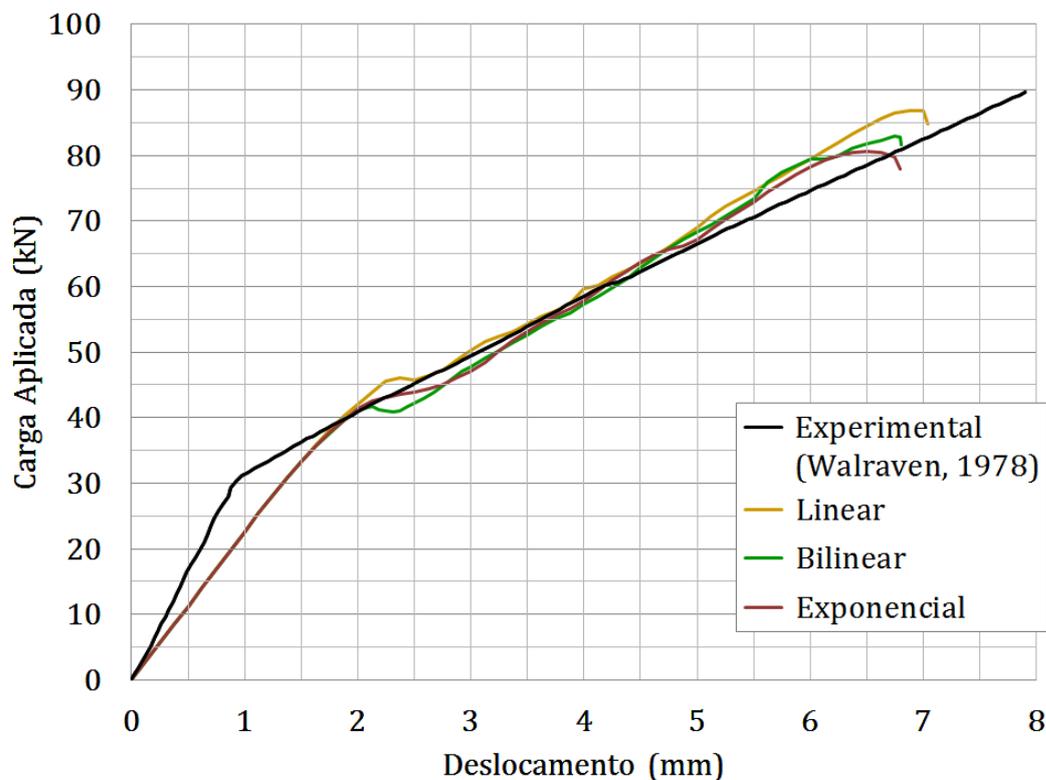


Figura 71 – Influência da variação da lei pós-pico da viga S3 no gráfico carga aplicada x deslocamento.

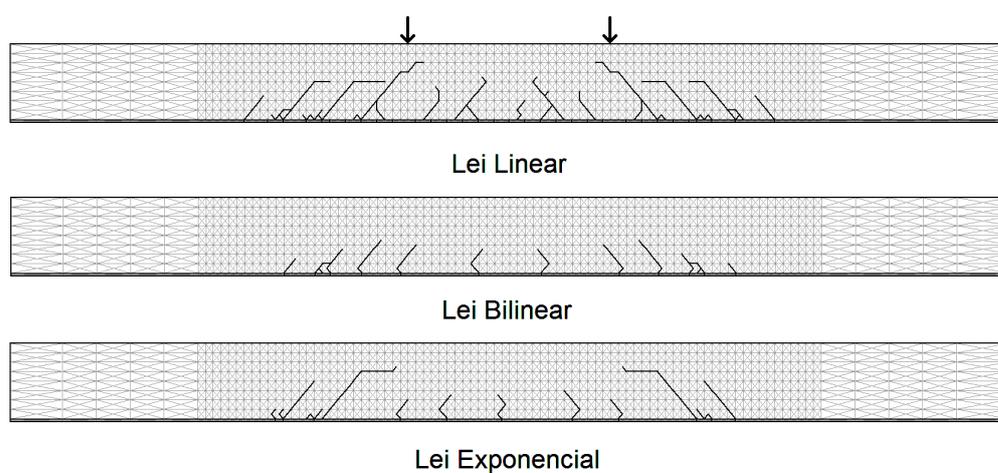


Figura 72 – Influência da variação da lei pós pico da viga S3 na fissuração.

Comparando-se com o item 4.3.1, observa-se que a utilização das leis bilineares e exponenciais tem um efeito similar a utilização de uma maior energia de fratura, no que

se refere a morfologia das fissuras. Uma explicação para isso, é o fato de que, para uma mesma área, estas leis levam a uma abertura de ruptura bem maior que a lei linear. Logo, o engrenamento associado a estas duas leis é maior. Para se verificar isso, na Figura 73 mostra-se também a zona de dano de fratura para as diferentes leis.

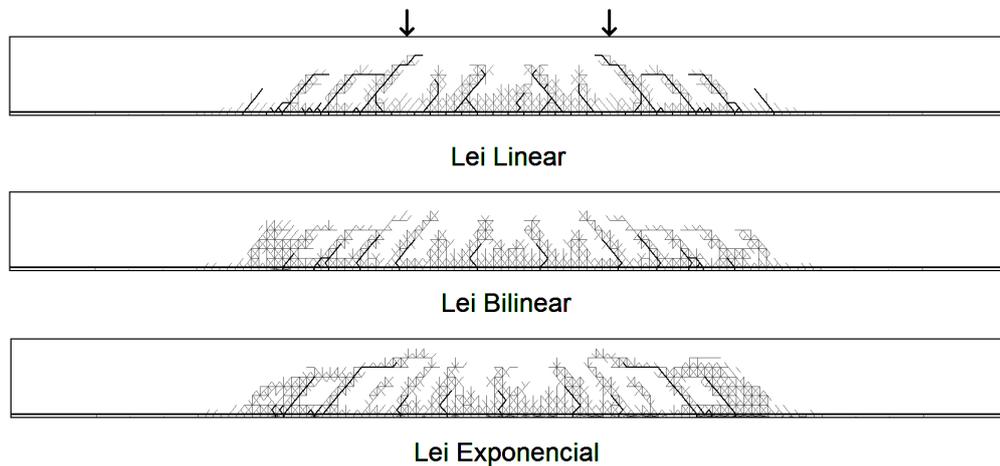


Figura 73 – Elementos que sofreram amolecimento de acordo com as três leis distintas.

#### 4.3.3 Parâmetro $\alpha$

Foram testados diferentes valores do parâmetro adimensional  $\alpha$ . Estabeleceu-se uma faixa de valores entre 1 e 50 para se estudar a influência deste parâmetro nos resultados. A Figura 74 mostra os resultados de carga aplicada x deslocamento obtido.

Conforme ilustra a Figura 74, em geral, o aumento do valor de  $\alpha$  resulta no aumento da rigidez do elemento estrutural. Porém, para valores baixos de  $\alpha$  entre 1 e 3, significativas variações nos resultados podem ser notadas. Enquanto que, para valores maiores de  $\alpha$ , variações na carga menores foram obtidas. Portanto, a variação deste parâmetro é mais significativa para valores menores deste e, com o seu aumento, a mudança do mesmo possui menor influência nos resultados. Para exemplificar este fato, para um deslocamento de 5 mm, com o uso de  $\alpha = 1$ , se tem uma carga de 52 kN, e para  $\alpha = 3$  a carga é de 66 kN, logo há uma variação de aproximadamente 25% no valor desta, enquanto que, se compararmos a carga de 69 kN obtida para  $\alpha = 4$  nas análises numéricas, com os valores de carga entre 66 e 76 kN obtidas para  $\alpha$  entre 5 e 50, a variação nos resultados é de no máximo 10%.

Observa-se também que em relação aos resultados experimentais, o aumento do valor deste parâmetro tende a uma melhor correspondência no gráfico carga aplicada x deslocamento na região inicial, linear. Enquanto que após esse trecho, valores maiores de  $\alpha$  distanciam a resposta do modelo comparado a experimental.

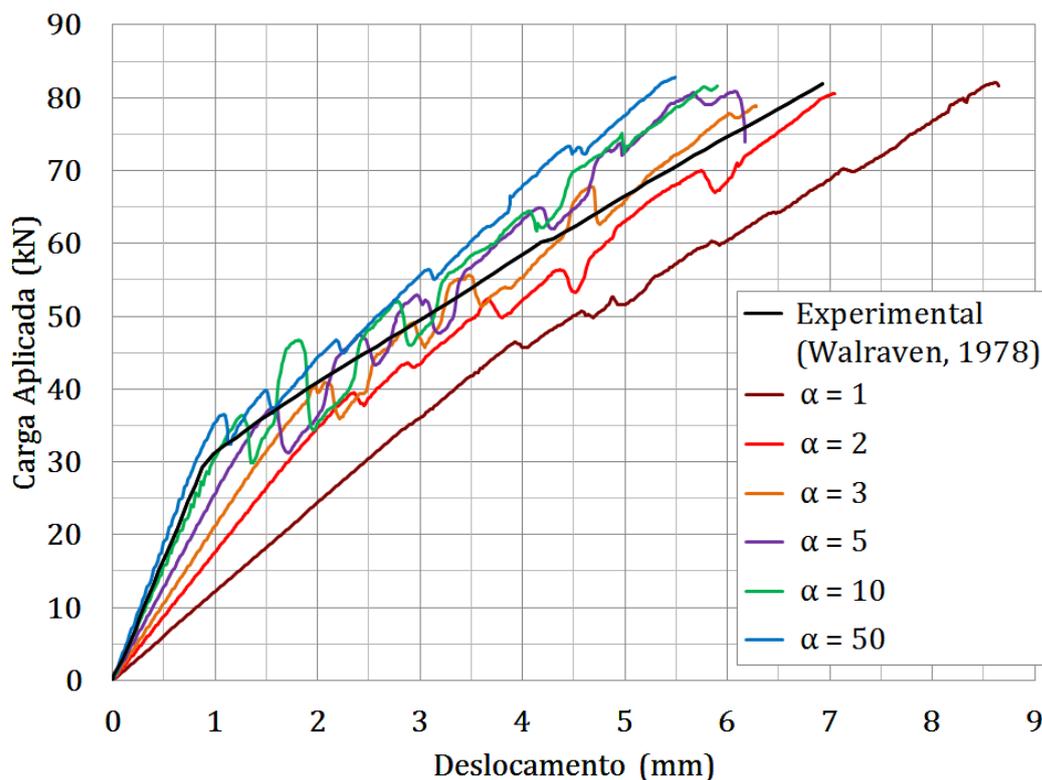


Figura 74 – Influência da variação do parâmetro  $\alpha$  da viga S3 no gráfico carga aplicada x deslocamento.

Avaliou-se, também, nesta etapa, a influência deste parâmetro na distribuição das fissuras da viga conforme mostra a Figura 75. De maneira geral, nota-se que para valores menores de  $\alpha$  as fissuras tendem a se concentrar mais na região central da viga e se propagar de maneira a atingir alturas menores em relação a valores superiores de  $\alpha$ , onde evidencia-se a propagação de fissuras até as regiões superiores da viga.

Portanto, apesar de ser um parâmetro puramente numérico, este pode ter uma influência importante nos resultados, sendo portanto uma dificuldade associada ao método.

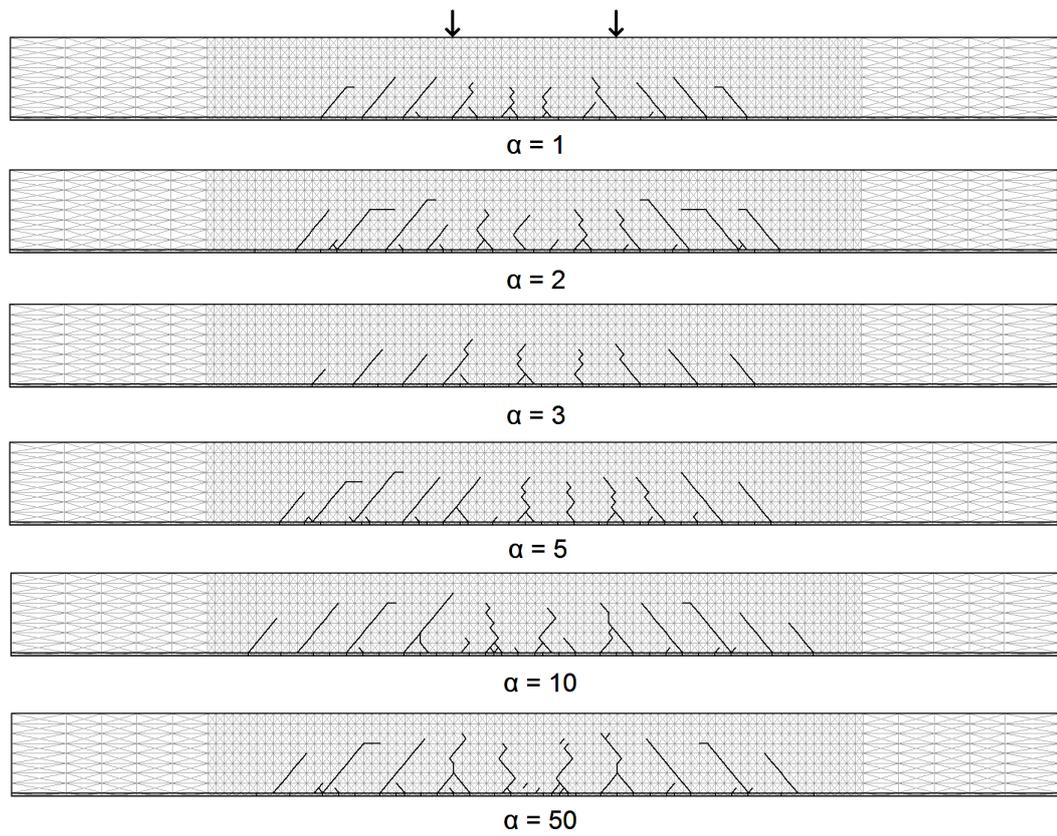


Figura 75 – Influência da variação do parâmetro  $\alpha$  da viga S3 na fissuração.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1 CONCLUSÕES

No presente trabalho, buscou-se representar o comportamento de vigas de concreto armado em flexão empregando um modelo discreto de fissuração. A validação do modelo utilizado foi feita utilizando resultados experimentais de diferentes autores, comparando-se o diagrama de carga aplicada x deslocamento para diversas situações. Além disso, visou-se também, representar a distribuição adequada das fissuras nestes elementos estruturais e explorar a capacidade do modelo em retratar este fenômeno.

Nos ensaios de flexão em 3 pontos, a partir da análise dos resultados de Burns e Siess (1966), concluiu-se que o modelo é bastante satisfatório e representa com coerência o comportamento de vigas subarmadas e foi capaz de representar:

- A perda de rigidez associada à fissuração no concreto;
- A maior fragilização de vigas de maior altura.

Além disso, notou-se que o modelo é capaz de simular também o comportamento de vigas superarmadas e obter resultados em conformidade com a literatura. Concluiu-se também que a variação dos parâmetros da lei de aderência utilizada possui pequena importância nos resultados da análise.

Já nos ensaios de flexão em 4 pontos, em relação aos resultados experimentais de Walraven (1978), pode-se concluir que o modelo conseguiu capturar:

- A relativa maior fissuração em corte nas vigas de maior altura (para mesma tensão nominal);
- A dominância das fissuras de corte no processo de colapso, pois tendem a se desenvolver mais rapidamente do que as fissuras de modo I puro;
- Uma boa correlação da morfologia com a fissuração experimental, se for considerado também as zonas danificadas.

Com base nos resultados gerais obtidos, algumas conclusões importantes podem ser destacadas:

- Com o modelo discreto é possível a representação da fissuração no concreto armado mesmo considerando o aspecto generalizado desta fissuração;

- O gerenciamento de nós e elementos de interface na zona da armadura se mostrou adequado (ver Figura 22), havendo a propagação ou comunicação das fissuras através da armadura;
- Detalhes do processo de fissuração como o aglutinamento de fissuras menores em uma fissura maior, foi capturado;
- Em termos práticos, a relação  $l_c/\alpha$  é determinante nos resultados. Uma relação  $l_c/\alpha \leq 5$  mm demonstrou ser a mais conveniente.

## 5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A partir das considerações feitas, podem-se estabelecer alguns aspectos para futuros estudos:

- A influência da malha de elementos finitos é um aspecto que deve ser avaliado com maior precisão. Em se tratando de mecânica da fratura aplicada ao concreto, as malhas utilizadas podem ser consideradas até certo ponto ainda grosseiras, e o seu refinamento pode levar a resultados melhores.
- Os parâmetros de fratura em modo II, como discutido na Fundamentação teórica, ainda são estimados com base na calibragem do modelo em si e, devido as dificuldades do estabelecimentos da ordem de grandeza destes experimentalmente, os valores utilizados podem não corresponder a realidade e incorrer a certas variações dos resultados. A medida que novos estudos dessas propriedades surjam, estes devem ser aplicados ao modelo para verificar sua validade.
- A utilização de um modelo mais realístico (comportamento não linear) para o concreto em compressão.
- A aplicação de modelos elastoplásticos para se representar, com maior fidelidade, a lei de aderência entre o aço e o concreto também pode ser um fator de alteração significativa nos resultados, levando a melhoria destes.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA FILHO, F. M. *Contribuição ao Estudo da Aderência entre Barras de Aço e Concretos Auto-Adensáveis*. 310 p. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2006. Citado na página 41.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto — procedimento*. Rio de Janeiro, 2014. 238 p. Citado 4 vezes nas páginas 35, 72, 78 e 105.
- BARREBLAT, G. I. The mathematical theory of equilibrium of crack in brittle fracture. In: . [S.l.]: Advances in Applied Mechanics, 1962. v. 7, p. 55–129. Citado na página 30.
- BAZĄNT, Z. P.; OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. In: . [S.l.]: Mater. Struct. 16, 1983. v. 93, p. 155–177. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- BLAAUWENDRAAD, J.; GROOTENBOER, H. Essentials for discrete crack analysis. In: . Delft, Holanda: IABSE Colloquium Delft - Advanced Mechanics of Reinforced Concrete, 1981. v. 34, p. 263–272. Citado na página 43.
- BRISOTTO, D. de S.; BESSA, V. M. R. d.; BITTENCOURT, E. Numerical simulation of cracking in reinforced concrete members by an embedded model. *Engineering Computations*, v. 25, n. 8, p. 739–763, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1108/02644400810909599>>. Citado na página 43.
- BRISOTTO, D. S.; BITTENCOURT, E.; BESSA, V. M. R. d. Um modelo elasto-plástico para a aderência da interface entre concreto e barras de fibras de polímeros (frp). *Computer and Structures*, Porto Alegre, v. 31, p. 1505–1518, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 43.
- BURNS, N. H.; SIESS, C. P. Plastic hinging in reinforced concrete. In: . [S.l.]: Journal of Structural Division, ASCE, 1966. v. 92, p. 111–121. Citado 6 vezes nas páginas 37, 70, 71, 72, 74 e 97.
- CARPINTERI, A. The overlapping crack model for uniaxial and eccentric compression tests. *Magazine of Concrete Research*, v. 9, p. 745–757, 2009. Citado na página 43.
- CARPINTERI, A.; CORRADO, M.; PAGGI, M. An integrated cohesive/overlapping crack model for the analysis of flexural cracking and crushing in rc beams. *International Journal of Fracture*, Springer Netherlands, v. 161, n. 2, p. 161–173, 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10704-010-9450-4>>. Citado na página 77.
- CEB-FIP. Model code 1990. In: . Lausanne, Suíça: Comité Euro-International du Béton, 1993. v. 92. Citado 7 vezes nas páginas 53, 54, 64, 65, 66, 73 e 90.
- CHEN, J.; YANG, Z. Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 72, 2005. Citado na página 43.
- D'ÁVILA, V. M. R. *Estudo sobre Modelos de Fissuração de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finitos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 43.

de BORST, R.; REMMERS, J. J. C.; ABELLAN, M. A. Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: Bridging the gap. In: . [S.I.]: Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 2004. v. 28, p. 583–607. Citado na página 33.

DÖRR, K. *Ein Beitrag zur Berechnung von Stahlbetonscheiben unter Berücksichtigung des Verbundverhaltens*. Tese (Doutorado) — Darmstadt University, 1980. Citado 3 vezes nas páginas 64, 65 e 81.

DUGDALE, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. In: . [S.I.]: Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1960. v. 8, p. 100–108. Citado na página 30.

DVORKIN, E. N.; o, A. M. C.; GIOLA, G. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh and distortions. In: . [S.I.]: Int. J. Num. Meth. Eng., John Wiley & Sons, 1990. v. 30, p. 541–564. Citado na página 34.

ELFGREN, L. Fracture mechanics of concrete structures. In: . [S.I.]: Report of the Technical Committee 90-FMA fracture Mechanics to Concrete-Applications (RILEM) - Chapman and Hall, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 90.

ELWI, A. E.; HRUDEY, M. Finite element model for curved embedded reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, v. 115 No. 4, 1989. Citado na página 43.

EVANGELHO, T. B. *Consideração do esmagamento do concreto através do modelo de trincas sobrepostas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Agosto 2013. Citado 5 vezes nas páginas 24, 70, 71, 72 e 75.

EVANS, R. H.; MARATHE, M. S. Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension. In: . [S.I.]: Material Structures, 1966. v. 1, p. 61–64. Citado na página 28.

FEENSTRA, P.; de BORST, R. Constitutive Model for Reinforced Concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 121, p. 587–595, 1995. Citado na página 43.

GROOTENBOER, H. J.; LEIJTEN, S. F. C. H.; BLAAUWENDRAD, J. Numerical models for reinforced concrete structures in plane stress. In: . [S.I.]: HERON, Delft, 1981. v. 26. Citado na página 34.

GROSS, D.; SEELIG, T. *Fracture Mechanics With an Introduction to Micromechanics*. Alemanha: Springer, 2011. Citado na página 27.

GUPTA, A. K.; MAESTRINI, S. R. Post-cracking behavior of membrane reinforced concrete elements including tension stiffening. *Journal of Structural Engineering*, v. 115, p. 957–976, 1989. Citado na página 43.

HILLERBORG, A. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. In: . [S.I.]: Cement and Concrete Research, 1976. v. 6, p. 773–782. Citado 5 vezes nas páginas 30, 31, 32, 53 e 54.

HUGHES, B. P.; CHAPMAN, G. P. The complete stress-strain curve for concrete in direct tension. In: . [S.I.]: RILEM, 1966. v. 30, p. 95–97. Citado na página 28.

INGRAFFEA, A. R. Fracture mechanics of bond in reinforced concrete. In: . [S.I.]: Journal of Structural Engineering, 1984. v. 110, p. 871–890. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

- INGRAFFEA, A. R.; GERSTLE, W. H. Nonlinear fracture models for discrete crack propagation. In: . Hingham, MA, Estados Unidos: Proceedings of the NATO Advanced Workshop on Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites, 1984. p. 171–209. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 43.
- JAKUBOVSKIS, R.; KAKLAUSKAS, G.; JUKNYS, M.; GRIBNIAK, V. Serviceability analysis of reinforced concrete members based on stress transfer approach. *Procedia Engineering*, v. 57, p. 450 – 455, 2013. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705813007911>>. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.
- KOSTESKI, L. E.; RIERA, J. D.; ITURRIOZ, I.; SINGH, R. K.; KANT, T. Analysis of reinforced concrete plates subjected to impact employing the truss-like discrete element method. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, v. 38, n. 3, p. 276–289, 2015. ISSN 1460-2695. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/ffe.12227>>. Citado na página 43.
- KUMAR, S.; BARAI, S. V. *Concrete fracture Models and Applications*. Nova Iorque, NY, Estados Unidos: Springer, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 31.
- KWAK, H.-G.; FILIPPOU, F. C. *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads*. Berkeley, CA, Estados Unidos, 1990. Disponível em: <[http://www.inti.gov.ar/cirsoc/pdf/estructuras\\_hormigon/sem9014.pdf](http://www.inti.gov.ar/cirsoc/pdf/estructuras_hormigon/sem9014.pdf)>. Acesso em: 27 out. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- LENS, L. N. *Modelos para Análise de Fratura do Concreto Simples Empregando Interfaces Coesivas*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 24, 25, 51, 53, 56 e 60.
- LENS, L. N.; BITTENCOURT, E.; BESSA, V. M. R. d. Mixed mode fracture modeling of concrete using a modified coulomb's law. *Computer and Structures*, v. 27, p. 1325–1338, 2008. Citado na página 32.
- MACHADO, M. A. da S. *Aplicação do método dos elementos finitos para a análise elasto-viscoplástica de peças de concreto armado e protendido, submetidas a estados planos de tensão*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Março 2002. Citado na página 43.
- MACHADO, M. A. S.; TRAUTWEIN, L. M.; CAMPOS FILHO, A.; BITTENCOURT, T. N. Modelos de fissuração em estruturas de concreto armado. *XXVIII CILAMCE - Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia; CMNE 2007 - Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia*, v. 1, p. 1 – 16, 2007. Citado na página 43.
- MARZEC, I. Simulations of crack spacing in reinforced concrete beams using elastic-plasticity and damage with non-local softening. In: . [S.I.]: Computers and Concrete 4(5), 2007. p. 377–403. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 81.
- MENIN, R.; TRAUTWEIN, L.; BITTENCOURT, T. Smearred crack models for reinforced concrete beams by finite element method. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, scielo, v. 2, p. 166 – 200, 06 2009. ISSN 1983-4195. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1983-41952009000200004&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1983-41952009000200004&nrm=iso)>. Citado na página 43.

MESCHKE, G.; DUMSTORFF, P. Energy-based modelling of cohesive and cohesionless cracks via x-fem. In: . [S.l.]: Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 2007. v. 196, p. 2338–2357. Citado na página 33.

NGO, D.; SCORDELIS, A. C. Finite elements analysis of reinforced concrete beams. In: . Farmington Hills: ACI journal, 1967. v. 64, p. 152–163. Citado na página 32.

OLIVER, J. Modelado de la fissuración in estructuras de hormigón. In: . [S.l.]: Centro Internacional de Métodos Numéricos em Engenharia, 1990. Citado na página 34.

RASHID, Y. R. *Ultimate Strength Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels*. São Diego, CA, Estados Unidos: Gulf General Atomic Incorporated, 1968. Citado na página 33.

ROTS, J. G. *Computational Modeling of Concrete Fracture*. Tese (Doutorado) — Delft University, 1988. Citado na página 32.

SHAH, S. P.; SWARTZ, S. E.; OUYANG, C. *Fracture Mechanics of Concrete*. Nova Iorque, NY, Estados Unidos: John Wiley & Sons, 1995. Citado 8 vezes nas páginas 29, 30, 35, 36, 37, 56, 79 e 89.

SHI, Z. *Crack Analysis in Structural Concrete*. Estados Unidos: Elsevier, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

SILVA, R. D. *Estudo da Aderência Aço-Concreto em Pilares Mistos Preenchidos*. 152 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2006. Citado na página 43.

SIMPLICIO, M. A. S. *Estudo sobre a Aderência entre Barras de Aço e Concreto Reforçado com Fibras*. 263 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Pernambuco, 2008. Citado na página 42.

van MIER, J. G. M. *Fracture Processes of Concrete*. [S.l.]: CRC Press, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 28, 35 e 37.

WALRAVEN, J. C. The influence of depth on the shear of lightweight concrete beams without shear reinforcement. In: . [S.l.]: TU-Delft Report 5-78-4. Delft University, 1978. Citado 3 vezes nas páginas 80, 88 e 97.

WEIHE, S.; KROPLIN, B.; de BORST, R. Classification of Smeared Crack Models Based on Material and Structural Properties. *International Journal of Solids and Structures*, v. 35, p. 1289–1308, 1998. Citado na página 43.

XU, X. P. Determination of parameters in the bilinear, Reinhardt's non-linear and exponentially non-linear softening curves and their physical meanings. In: . Hamburg, Alemanha: Werkstoffe und Werkstoffprüfung in Bauwesen, 1999. p. 410–424. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 55.

## **Anexo**



## ANEXO A – ALTERAÇÃO DE DOMÍNIO DAS VIGAS

De acordo com a NBR 6118 (2014), vigas subarmadas são as que se encontram em domínio 3, ou seja, as que a posição da linha neutra na seção transversal da viga está entre os limites  $x_{23}$  (que divide os domínios 2 e 3) e  $x_{lim}$  (que divide os domínios 3 e 4). Para concretos com  $f_{ck}$  inferior a 50 MPa, o valor de  $x_{23}$  é dado por:

$$x_{23} = 0,259.d \quad (A.1)$$

E o valor de  $x_{lim}$  é dado pela expressão:

$$x_{lim} = \frac{\epsilon_{cu} E_s}{f_y + \epsilon_{cu} E_s} d \quad (A.2)$$

Onde, também para concretos com  $f_{ck}$  inferior a 50 MPa,  $\epsilon_{cu}$  vale 0,0035. A partir da seguinte equação:

$$A_s = \frac{\alpha_c e f_c x}{f_y} \quad (A.3)$$

Sendo  $\alpha_c = 0,85$  para concretos de  $f_{ck}$  menor que 50 MPa. Com o valor da quantidade de armadura utilizada, pode-se determinar a atual posição da linha neutra ( $x$ ) das vigas e estimar a quantidade necessária de armadura para se mudar do domínio 3 para o 4. A Tabela 6 resume os valores de  $x$ ,  $x_{23}$  e  $x_{lim}$  das vigas J1 e J10.

Tabela 6 – Valores dos limites entre domínios.

Viga	$x$ (mm)	$x_{23}$ (mm)	$x_{lim}$ (mm)
J1	88	66	150

Logo, com base a equação A.3 e na tabela 6, nota-se que para que o valor de  $x$  seja superior ao valor de  $x_{lim}$  e, portanto, a viga J1 passe para o domínio 4 (viga superarmada), pode-se utilizar o dobro da quantidade de aço ( $A_s$ ) utilizada inicialmente. Assim, a taxa de armadura passa de 1,6% para 3,2%.