

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE MINAS,
METALÚRGICA E DE MATERIAIS

**MÉTODO DE SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS PARCIAIS EM UM DOMÍNIO
ARBITRÁRIO USANDO A TRANSFORMADA DE
FOURIER**

por

Gilnei Gonçalves Furtado

Tese para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia

Professor Orientador:
Dr. Marco Túlio M. B. de Vilhena

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE MINAS,
METALÚRGICA E DE MATERIAIS

**MÉTODO DE SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS PARCIAIS EM UM DOMÍNIO
ARBITRÁRIO USANDO A TRANSFORMADA DE
FOURIER**

por

Gilnei Gonçalves Furtado

Trabalho realizado no Departamento de Metalurgia da Escola de Engenharia da UFRGS, dentro do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais - PPGEM, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Área de concentração: Ciência dos Materiais.

Este trabalho foi julgado adequado para obtenção do título de Doutor em Engenharia, área de concentração Ciência dos Materiais e aprovado em sua forma final, pelo Orientador e pela Banca Examinadora do Curso de Pós-Graduação.

Orientador: Prof. Dr. Marco Túlio M. B. de Vilhena - PPGEM/UFRGS.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Renato Machado Cotta - COPPE/UFRJ.

Prof. Dr. Rubem Pazos - PUC/RS.

Prof^a. Dr^a. Cynthia Segatto - CGPMAP/UFRGS.

Prof. Dr. Telmo Roberto Strohaecker - PPGEM/UFRGS.

Prof. Dr. Telmo Roberto Strohaecker
Coordenador do PPGEM

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo investigar a obtenção da solução das equações diferenciais parciais em domínios arbitrários através do emprego da transformada de Fourier. As principais equações diferenciais parciais investigadas são aquelas relacionadas à elasticidade linear e à propagação de ondas. O emprego da transformada de Fourier na solução deste tipo de problema torna-se possível pela introdução em sua formulação de extensões com valores nulos em todo o domínio \mathfrak{R}^n para as funções envolvidas nas equações diferenciais parciais. O método é inicialmente desenvolvido para uma equação diferencial parcial com coeficientes constantes genérica e, em seguida, para um problema de condução de calor em duas dimensões, para um problema elástico estático em duas dimensões e para um problema de propagação de ondas em duas dimensões, sendo que, neste último caso, a transformada de Laplace é empregada em conjunto com a transformada de Fourier. Uma prova da validade da solução encontrada, desenvolvida através do emprego do teorema de Green, é apresentada. Um exemplo numérico para o problema elástico estático em duas dimensões também é apresentado. Finalmente, discute-se várias idéias para o desenvolvimento futuro desta linha de métodos.

Abstract

In this work, we develop a method to solve partial differential equations in arbitrary domains by applying Fourier transform technique. The main target of this work are the linear elastic problem and the wave propagation problem. For such, the Fourier transform technique is developed in arbitrary domains making the assumption that the unknown vanishes outside the domain. We also validate the encountered solution following results of complex variable. This approach establishes an alternative procedure to determine the integral formulation for the boundary element method. We report solutions for the two-dimensional heat transfer equation, two-dimensional linear elastic equation and homogeneous wave equation.

Agradecimentos

A todos que colaboraram profissionalmente, direta ou indiretamente, na elaboração deste trabalho, o meu reconhecimento:

- ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte a este trabalho;
- ao Prof. Dr. Marco Túllio de Vilhena pelo estímulo e pela valiosa troca de idéias;
- ao Prof. Dr. Telmo Roberto Strohaecker pelo apoio ao trabalho;
- à Mestra Eng^a. Rosa Irene Terra Pinto pela geração dos resultados obtidos por elementos finitos empregados neste trabalho;
- à Prof^a. Dr^a. Cynthia Segatto pelos estímulo e sugestões ao trabalho;
- ao Mestre Eng. Carlos Mitidieri pelos anos de trabalho com ultra-som e processamento e aquisição de sinais cujo desenvolvimento apontou para a necessidade de modelos matemáticos de propagação de ondas, o que motivou este trabalho;
- à Mestra Eng^a. Eliane Dias e ao Mestre Eng. Gabriel Pardo Migliaro pela colaboração na verificação dos resultados apresentados neste trabalho e troca de idéias;
- ao Mestre Eng. Paulo Rogério Tavares da Silva e ao Dr. Eng. Jorge Zabadal pela troca de idéias;
- ao Eng. Rubem Manoel Braga e à Mestra Eng^a. Liane Roldo pela boa convivência na sala 602 (Lamef) ao longo destes vários anos;
- a todo o pessoal do Lamef e das secretarias do PPGEM e do DEMET.

Aos meus familiares:

- a minha mãe Alzira e ao meu irmão Roberto por todo apoio prestado;
- aos demais familiares.

Sumário

Resumo	iii
Abstract	iv
Agradecimentos	v
Sumário.	vi
Lista de Símbolos.	viii
Lista de Figuras.	xi
Lista de Tabelas.	xiv
1 Introdução.	1
2 Revisão bibliográfica.	4
3 Descrição geral da solução de equações diferenciais parciais em domínios arbitrários através da transformada de Fourier.	17
4 Aplicação em um problema de condução de calor em duas dimensões.	21
4.1 Obtenção da integral de contorno.	21
4.2 Solução do problema através da integral de contorno.	25
4.3 Demonstração da validade da integral de contorno.	29
5 Aplicação em um problema de elasticidade e de ondas em duas dimensões.	32
5.1 Obtenção da integral de contorno.	32
5.2 Solução do problema através da integral de contorno.	38
5.3 Demonstração da validade da integral de contorno.	41
5.4 Aplicação a um problema de propagação de ondas em duas dimensões.	46
6 Obtenção das transformadas inversas das funções de Green transformadas dos problemas elástico e de ondas.	50

6.1	Transformação inversa das funções de Green transformadas do problema elástico.	50
6.1.1	Obtenção da transformada inversa de Fourier de $\overline{F_{1x}}$	50
6.1.2	Obtenção das transformadas inversas de Fourier de $\overline{F_{1y}}$, $\overline{F_{2x}}$ e $\overline{F_{2y}}$	58
6.1.3	Obtenção da transformada inversa de Fourier de $\overline{H_x}$	59
6.1.4	Obtenção da transformada inversa de Fourier de $\overline{H_y}$	64
6.1.5	Etapa final de obtenção de F_1 , F_2 e H	65
6.2	Transformação inversa da função de Green transformada do problema de ondas.	65
7	Exemplo numérico.	72
8	Conclusões.	95
	Referências Bibliográficas	97
A	Avaliação das expressões (4.14), (5.16) e (5.17) em coordenadas cilíndricas.	104
A.1	Avaliação da equação (4.14).	105
A.2	Avaliação das equações (5.16) e (5.17).	105
B	Equacionamento de um problema elástico em duas dimensões.	107
C	Transformada de Laplace.	110

Lista de Símbolos.

$x, y;$ x_a, y_a	— coordenadas retangulares em \mathfrak{R}^2 .
r, s	— variáveis independentes obtidas pela transformada de Fourier aplicadas a uma função do tipo $f(x, y) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$.
r, θ	— coordenadas cilíndricas em \mathfrak{R}^2 .
p	— Um ponto pertencente a \mathfrak{R}^n .
Ω	— Um domínio arbitrário contínuo e conexo definido em \mathfrak{R}^n .
Γ	— A fronteira de Ω .
u	— função definida em um subdomínio Ω de \mathfrak{R}^n ; função descrevendo a distribuição de temperatura.
u, v	— deslocamentos nas direções x e y respectivamente.
\bar{u}, \bar{v}	— transformadas de Fourier de u e v .
\hat{u}	— transformada de Laplace de u .
$\bar{\bar{u}}$	— transformada conjunta de Fourier e de Laplace de u .
u_x, u_y, u_t, v_x e v_y	— derivadas parciais de primeira ordem de u e v .
u_η, v_η, u_τ e v_τ	— derivadas parciais normais e tangenciais de primeira ordem de u e v .
$u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, v_{xx}, v_{xy}$ e v_{yy}	— derivadas parciais de segunda ordem de u e v .
F, F_1, F_2 e H	— funções de Green, funções definidas em \mathfrak{R}^2 ou \mathfrak{R}^3 .

$\overline{F}, \overline{F_1}, \overline{F_2}$ e \overline{H}	— transformadas de Fourier de F, F_1, F_2 e H .
\widehat{F}	— transformada de Laplace de F .
\widetilde{F}	— transformada conjunta de Fourier e de Laplace de F .
$F_x, F_y, F_t, F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}, H_x$ e H_y	— derivadas parciais de primeira ordem de F, F_1, F_2 e H .
$F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}, F_{1xx}, F_{1xy}, F_{1yy}, F_{2xx}, F_{2xy}, F_{2yy}, H_{xx}, H_{xy}$ e H_{yy}	— derivadas parciais de segunda ordem de F, F_1, F_2 e H .
$\text{sign}(x)$	— função definida por $\begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.
$\text{sen}(\theta)$	— função trigonométrica seno.
$\text{cos}(\theta)$	— função trigonométrica cosseno.
$\ln(x)$	— função logaritmo neperiano.
$\mathcal{F}\{f(x); x \rightarrow r\}$	— transformada de Fourier da função $f(x)$, onde $x \rightarrow r$.
$\mathcal{F}\{f(x, y); x \rightarrow r; y \rightarrow s\}$	— transformada de Fourier da função $f(x, y)$, onde $x \rightarrow r$ e $y \rightarrow s$.
$\mathcal{F}^{-1}\{\overline{f}(r); r \rightarrow x\}$	— transformada inversa de Fourier da função $\overline{f}(r)$, onde $r \rightarrow x$.
$\mathcal{F}^{-1}\{\overline{f}(r, s); r \rightarrow x; s \rightarrow y\}$	— transformada inversa de Fourier da função $\overline{f}(r, s)$, onde $r \rightarrow x$ e $s \rightarrow y$.
$\mathcal{L}\{f(x); x \rightarrow r\}$	— transformada de Laplace da função $f(x)$, onde $x \rightarrow r$.

$\mathcal{L}^{-1} \{ \hat{f}(r); r \rightarrow x \}$ — transformada inversa de Laplace da função $\hat{f}(r)$,
onde $r \rightarrow x$.

B, G — constantes elásticas.

Lista de Figuras

4.1	Domínio arbitrário contínuo e conexo em duas dimensões.	21
4.2	Domínio contínuo e conexo auxiliar com corte.	30
6.1	Contorno Γ_1 utilizado no emprego do teorema dos resíduos.	51
6.2	Contorno Γ_2 utilizado no emprego do teorema dos resíduos.	54
7.1	Domínio discretizado.	74
7.2	Nós da malha, método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 10mm, 112 nós.	77
7.3	Malha de elementos, método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 10mm, 216 nós e 185 elementos.	77
7.4	Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos u (mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 10mm.	78
7.5	Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos u (mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 10mm.	78
7.6	Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos v (mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 10mm.	79
7.7	Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos v (mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 10mm.	79
7.8	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xx} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 10mm.	80
7.9	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xx} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 10mm.	80
7.10	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{yy} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 10mm.	81
7.11	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{yy} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 10mm.	81
7.12	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xy} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 10mm.	82

7.13	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xy} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 10mm.	82
7.14	Nós da malha, método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 5mm, 228 nós.	83
7.15	Malha de elementos, método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 5mm, 757 nós e 697 elementos.	83
7.16	Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos u (mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 5mm.	84
7.17	Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos u (mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 5mm.	84
7.18	Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos v (mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 5mm.	85
7.19	Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos v (mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 5mm.	85
7.20	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xx} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 5mm. . . .	86
7.21	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xx} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 5mm.	86
7.22	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{yy} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 5mm. . . .	87
7.23	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{yy} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 5mm.	87
7.24	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xy} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 5mm. . . .	88
7.25	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xy} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 5mm.	88
7.26	Nós da malha, método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 2.5mm, 456 nós.	89
7.27	Malha de elementos, método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 2.5mm, 2737 nós e 2618 elementos.	89
7.28	Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos u (mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 2.5mm.	90
7.29	Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos u (mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 2.5mm.	90
7.30	Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos v (mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 2.5mm.	91

7.31	Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos v (mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 2.5mm.	91
7.32	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xx} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 2.5mm. . .	92
7.33	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xx} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 2.5mm.	92
7.34	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{yy} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 2.5mm. . .	93
7.35	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{yy} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 2.5mm.	93
7.36	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xy} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 2.5mm. . .	94
7.37	Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xy} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 2.5mm.	94
A.1	Caminho de integração em coordenadas cilíndricas.	104

Lista de Tabelas

7.1	Resultados numéricos para a tensão σ_{xx} comparando o método proposto com os resultados da resistência dos materiais.	74
7.2	Máximos e mínimos do deslocamento u	75
7.3	Máximos e mínimos do deslocamento v	75
7.4	Máximos e mínimos da tensão σ_{xx}	75
7.5	Máximos e mínimos da tensão σ_{yy}	75
7.6	Máximos e mínimos da tensão σ_{xy}	75
7.7	Pontos para verificação da convergência da tensão σ_{xx}	76
7.8	Pontos para verificação da convergência dos deslocamentos u e v	76

Capítulo 1

Introdução.

A solução de equações diferenciais parciais desempenha um papel importante na engenharia uma vez que os modelos que descrevem o comportamento de peças e de estruturas ou de processos físicos ou químicos de interesse da engenharia são formulados em termos dessa classe de modelos matemáticos. Entre os modelos físicos que podem ser formulados a partir de equações diferenciais parciais estão o da elasticidade linear e o da propagação de ondas. Uma demanda por estes modelos é gerada pelos métodos baseados na propagação de ondas elásticas como meio de obter informações sobre o interior de peças metálicas ou de estruturas de concreto. Nestes métodos as únicas variáveis controladas são a geração da onda e a posição em que esta é gerada e as únicas medições são as ondas recebidas em certos pontos da superfície da peça. Assim, necessita-se interpretar seus resultados a partir de um dado modelo que descreva o comportamento das ondas elásticas no meio em estudo e que permita relacionar o conjunto de sinais gerados e recebidos com determinadas características do interior da peça, sejam características de natureza geométrica, como vazios ou trincas, sejam características do material, como o tamanho dos contornos de grãos. A precisão deste modelo de propagação de ondas elásticas determina a precisão com que poderão ser interpretados os resultados do ensaio.

Existem várias alternativas de modelos para cada problema da engenharia. No caso de propagação de ondas elásticas, os modelos utilizados vão desde modelos baseados na ótica geométrica, passando por modelos de difração baseados no princípio de *Huygens* até modelos mais completos baseados nas equações diferenciais parciais da teoria da elasticidade. Os primeiros modelos podem ser empregados em situações que apresentam certas regularidades como, por exemplo, uma frente de onda aproximadamente plana, para a qual a ótica geométrica pode ser empregada. Nas situações mais gerais, são necessários modelos baseados na teoria da elasticidade. A teoria da elasticidade apresenta a dificuldade de possuir uma formulação não linear, porém uma linearização destas relações

pode ser obtida para problemas envolvendo somente pequenas deformações *Timoshenko and Goodier* 1934¹ e distâncias relativamente curtas para as ondas propagadas *Graff* 1975². A teoria da elasticidade linear conduz a um modelo de propagação de ondas elásticas suficientemente completo para permitir uma interpretação precisa dos dados de um ensaio ultrassônico típico.

A solução, em geral aproximada, das equações diferenciais parciais com as respectivas condições de contorno pode ser alcançada por diversos métodos entre os quais pode-se citar diferenças finitas, métodos dos elementos finitos (formulação variacional), método dos elementos de contorno (integrais de contorno), colocação e transformações integrais. Cada um destes métodos possui uma grande quantidade de variantes e formas híbridas muito discutidas e desenvolvidas na literatura, *Prenter* 1975³. Estes métodos apresentam uma série de vantagens e desvantagens e aparentemente na literatura não consta uma comparação global entre os mesmos. Assim, parece-nos que o desenvolvimento de um método alternativo de solução das equações diferenciais parciais pode começar por uma tentativa de generalização de um dado método que apresente uma boa solução para casos específicos. Um ponto de partida para tal investigação pode ser o método das transformações integrais que apresenta como restrição o fato do núcleo da transformada depender da forma do domínio e das condições de contorno *Duffy* 1994⁴ *Özışık* 1980⁵: para domínios $(-\infty, +\infty)$ pode-se empregar a transformada de Fourier; $(0, +\infty)$, empregase a transformada de Laplace; para um domínio qualquer deve-se construir o núcleo adequado, que por sua vez envolve a solução de uma equação diferencial parcial homogênea no domínio considerado semelhante a do problema. Uma alternativa com o objetivo de contornar a necessidade de construção de um núcleo para um dado domínio e condições de contorno é justamente investigar as conseqüências do emprego direto de uma transformação integral, preferencialmente com um núcleo bem conhecido e de forma simples, em problemas envolvendo domínios quaisquer.

O presente trabalho tem por objetivo investigar o emprego da transformada de Fourier na solução das equações diferenciais parciais, principalmente da elasticidade linear e da propagação de ondas, estabelecidas em um domínio qualquer e avaliar as conseqüências deste emprego. A escolha da transformada de Fourier recai no fato de apresentar um núcleo simples e bem conhecido e de possuir uma vasta aplicação na solução de equações diferenciais parciais em domínios infinitos. A investigação inicia com um problema de condução de calor em duas dimensões e segue com um problema elástico estático também em duas dimensões. Em seguida é apresentada a solução da equação homogênea da onda, também em duas dimensões. A conclusão do trabalho discute alternativas para o desenvolvimento futuro do método. Uma busca na literatura indica que este caminho de

investigação é inédito, podendo, em razão dos resultados finais, ser classificado como um novo meio de obtenção das equações integrais de contorno baseado na transformada de Fourier. O método desenvolvido neste trabalho também foi publicado em *Furtado et al.* 1998⁶.

Capítulo 2

Revisão bibliográfica.

A literatura apresenta uma série de estudos sobre a solução de problemas formulados por equações diferenciais, entre os quais os problemas dinâmicos e de propagação de ondas, e que são baseados nas mais diversas técnicas, que podem ser agrupadas nos seguintes itens:

1. Métodos gerais de solução de equações diferenciais parciais.
 - (a) **Método das diferenças finitas.** O método das diferenças finitas baseia-se na aproximação das derivadas parciais por razões de diferenças, o que permite aproximar a equação diferencial parcial do problema por um sistema de equações algébricas com o auxílio da discretização do domínio em uma malha de nós. Este método apresenta a limitação de necessitar de malhas regulares na discretização do domínio.
 - (b) **Método dos elementos finitos.** O método dos elementos finitos parte da formulação variacional do problema expressa por um funcional, que normalmente é obtida a partir do operador diferencial parcial, e, através da discretização do domínio em células (elementos) e da aproximação das funções envolvidas no problema por uma base de funções estabelecida de acordo com estas células, determina uma solução aproximada que minimize este funcional. Os fundamentos matemáticos desta técnica podem ser vistos em *Reddy* 1986⁷. Os trabalhos desenvolvidos nesta linha procuram obter uma melhor resposta a partir da escolha de uma base de funções que possa representar razoavelmente bem as soluções do problema sem a necessidade de um grande número de elementos. Esforços neste sentido podem ser vistos em *Han and Ichikawa* 1995⁸, *Bettess and Chadwick* 1995⁹, *Sern and Badal* 1986¹⁰ e *Amaratunga*

and *Willians* 1994¹¹. Outros trabalhos, empregando bases de funções convencionais, estudam os problemas relacionados com reflexões espúrias ocorridas nas zonas de transição de pequenos elementos para grandes elementos e uma melhor configuração da malha de elementos *Celep and Bazcaronant* 1983¹² e *Nemat-Nasser and Yamada* 1981¹³. No contexto do método dos elementos finitos, os problemas envolvendo domínios infinitos são desenvolvidos através de formulações híbridas, onde emprega-se elementos finitos nas regiões de interesse e outros tipos de soluções, como soluções analíticas ou baseadas em integrais de contorno, nas regiões distantes do domínio *Mei and Yue* 1979¹⁴, *Yeung and Bouger* 1979¹⁵, *Chen and Mei* 1978¹⁶ e *Bettess and Zienkiewicz* 1977¹⁷.

- (c) **Método dos elementos de contorno.** Os métodos baseados nas integrais de contorno obtidas a partir da formulação variacional do problema estão entre os mais amplamente investigados na solução do problema de propagação de ondas elásticas. De uma maneira geral, os principais esforços vão no sentido de modificar a integral de contorno com a finalidade de eliminar as singularidades apresentadas pelas mesmas quando avaliadas sobre o contorno *Dominguez* 1996¹⁸, *Liu and Rizzo* 1993¹⁹, *Bencheikh* 1993²⁰ e *Shippy and Rezayat* 1985²¹. Em outra direção, pode-se ver em *Huestis* 1995²² uma investigação do emprego da série de Fourier como base de funções para representar as grandezas sobre o contorno.
- (d) **Transformações Integrais.** Os métodos baseados nas transformações integrais são largamente empregados na solução de equações diferenciais parciais. Em problemas envolvendo domínios infinitos e semi-infinitos, as transformadas de Fourier e de Laplace são amplamente empregadas *Duffy* 1994⁴ e *Graff* 1975². Em casos mais gerais, é empregado o método das transformações integrais clássicas *Özişik* 1980⁵, que pode ser empregado em problemas definidos em domínio arbitrários, onde uma transformação integral especial, cujo núcleo é determinado pela solução de um problema auxiliar de auto-valores definido a partir do operador diferencial parcial do problema, é aplicada à equação diferencial parcial na forma usual (como nos casos das transformadas de Laplace e Fourier) obtendo-se a solução explícita do problema, nos problemas estáticos, ou um sistema de equações diferenciais ordinárias, nos problemas dinâmicos, cuja solução nos leva diretamente à solução do problema. Em *Cotta and Mikhailov* 1993²³, é apresentado o método das *transformações integrais generalizadas* (**generalized integral**

transform technique) que amplia o campo de emprego do método das transformações integrais permitindo obter a solução de problemas não lineares. O procedimento deste método envolve, da mesma forma que nas transformações integrais clássicas, o estabelecimento de um problema auxiliar definido a partir do problema principal cuja solução permite transformar o problema principal em um sistema de equação diferenciais ordinárias não lineares, sendo que a solução deste sistema nos leva diretamente a solução do problema.

- (e) **Transformada de Fourier.** A transformada de Fourier pode ser empregada na solução de equações diferenciais parciais com coeficientes constantes uma vez que as operações de integração no domínio direto são mapeadas para operações de multiplicação no domínio transformado. Isto significa que a equação diferencial é mapeada para uma equação algébrica no domínio transformado podendo, então, ser facilmente resolvida neste domínio. A solução no domínio direto é obtida pela transformada inversa de Fourier da solução no domínio transformado. Este método tem sido empregado até agora em problemas onde a equação diferencial é definida em domínios regulares como retângulos, círculos, espaços, semi-espaços, e outros. Para uma revisão completa veja *Duffy* 1994⁴. O presente trabalho apresenta um novo campo de emprego da transformada de Fourier que é justamente a solução de equações diferenciais parciais estabelecidas em domínios não regulares, que também foi publicado em *Furtado et al.* 1998⁶. Como ver-se-á adiante, o emprego da transformada de Fourier em uma equação diferencial parcial estabelecida em um domínio qualquer conduz a formulação baseada em integral de contorno idêntica à obtida no método dos elementos de contorno.
- (f) **Função de Green.** Esta linha de métodos apresentada em *Özşik* 1980⁵ inicia estabelecendo um problema auxiliar que consiste da mesma equação diferencial parcial do problema sem os termos independentes (termos fontes) e com condições de contorno do mesmo tipo das do problema sem os termos independentes. Se a solução do problema auxiliar for conhecida (função de Green) pode-se obter, após uma série de manipulações algébricas envolvendo as equações dos problemas principal e auxiliar e com o emprego do teorema de Green, a solução do problema principal.

2. Métodos dos elementos de contorno e transformações integrais .

Uma vez que o presente trabalho apresenta uma solução para problemas elásticos e de propagação de ondas cujas formulações finais, embora obtidas por um caminho

diferente, é semelhante àquela empregada no método dos elementos de contorno, serão mostrados, em seguida, as principais linhas de desenvolvimento das soluções de problemas dinâmicos através do método dos elementos de contorno, onde, em alguns casos, o método das transformações integrais é empregado conjuntamente.

- (a) **SGBEM** (“Symmetric Galerkin Boundary Element Method”). Esta linha de métodos emprega uma formulação baseada no método de *Galerkin* que conduz a uma equação integral dupla de contorno cuja discretização produz um sistema simétrico de equações algébricas, sendo esta a sua maior vantagem. A desvantagem desta formulação em relação àquelas envolvendo integrais de contorno simples consiste no maior esforço computacional necessário para avaliar a integral dupla de contorno. Um dos trabalhos nesta linha é *Sirtori et al.* 1992²⁴. Mais tarde, em *Frangi and Novati* 1998²⁵, é apresentada esta formulação (**SGBEM**) para problemas no domínio transformado de Laplace.
- (b) **DRBEM** (“Dual Reciprocity Boundary Element Method”). A idéia neste método consiste em aproximar o termo não homogêneo da equação diferencial parcial em termos de uma base de funções finita. A equação diferencial parcial resultante desta aproximação passa por uma manipulação matemática semelhante àquela empregada no método dos elementos de contorno conduzindo a uma equação baseada somente em integrais de contorno, porém com uma formulação um pouco mais complexa que envolve núcleos adicionais determinados a partir dos elementos da base de função. Esta equação apresenta como incógnitas as variáveis dependentes da equação diferencial parcial sobre o contorno e os coeficientes da expansão do termo não homogêneo. A solução desta equação integral de contorno é obtida através da discretização do contorno (como usualmente é feito no método dos elementos de contorno) e pelo estabelecimento de pontos de colocação no interior do domínio, sem a necessidade da divisão do domínio em células. A partir desta discretização, é estabelecido o sistema de equações algébricas cuja solução é uma aproximação da solução do problema inicial. Um trabalho desenvolvendo este método é apresentado em *Zhu et al.* 1994²⁶, que indica que o primeiro trabalho nesta linha apareceu em *Nardini and Brebbia* 1982²⁷.
- (c) **LTBEM** (“Laplace Transform Boundary Element Method”). Nesta linha de métodos, a transformada de Laplace é aplicada na equação diferencial parcial do problema resultando em uma equação sem dependência do tempo e contendo somente as derivadas parciais espaciais e o parâmetro de transformação,

digamos s . A partir desta equação, é estabelecida uma formulação variacional equivalente do problema. Após uma série de manipulações algébricas e da determinação da função de Green associada à equação transformada, chega-se à expressão da equação integral de contorno do problema no domínio transformado. Esta equação integral de contorno envolve o parâmetro de transformação s e a sua solução nos dá os valores das funções de contorno incógnitas no domínio transformado (em função de s). Após a obtenção destas soluções para um certo conjunto de valores de s , aplica-se sobre as mesmas algum dos algoritmos de inversão numérica da transformada de Laplace, obtendo-se a solução do problema no domínio tempo. Aparentemente, os primeiros trabalhos nesta linha apareceram em *Cruse and Rizzo* 1968²⁸, *Cruse* 1968²⁹ e em *Rizzo and Shippy* 1970³⁰, conforme *Ahmad and Manolis* 1987³¹ e *Zhu et al.* 1994²⁶.

Ao longo do tempo, vários trabalhos envolvendo este método foram desenvolvidos e se diferenciam principalmente pelo algoritmo de inversão numérica da transformada de Laplace empregado. Entre estes citamos: *Ahmad and Manolis* 1987³¹, que empregou o método de *Durbin* para inversão numérica e apresentou a solução para problemas de vibrações em vigas em meio infinito e em um semi-espaço; *Nishigaki et al.* 1996³², que calcula as ondas sonoras irradiadas por sólidos que sofreram impactos e compara com resultados experimentais (não descreve o método de inversão numérica); *Rui and Zhengyou* 1997³³, que apresenta a solução de problemas viscoelásticos em placas finas onde emprega o método de *Bellman* na inversão numérica da transformada de Laplace juntamente como uma forma aproximada da função de Green, no lugar da forma exata, para facilitar os cálculos; e *Pan et al.* 1997³⁴, que apresenta a solução de problemas viscoelásticos em três dimensões com gravidade empregando o método de *Piessens* na inversão numérica da transformada de Laplace e emprega uma variante da integral de contorno envolvendo as funções de Green de um problema puramente estático.

Conforme observa *Zhu* 1998³⁵, as equações integrais de contorno empregadas no método **LTBEM** e no método **domínio tempo** estão diretamente relacionadas: a equação integral de contorno empregada pelo método **LTBEM** corresponde a transformada de Laplace daquela empregada pelo método **domínio tempo**.

- (d) **LTDRBEM** (“Laplace Transform Dual Reciprocity Boundary Element Method”). Nesta linha são empregados, simultaneamente, os métodos

DRBEM e **LTBEM**. O pioneiro nesta linha foi *Zhu et al.* 1994²⁶, que apresenta a solução de um problema envolvendo a equação linear de difusão empregando o **DRBEM** e **LTBEM**, onde foi usado o método de *Stehfest* de inversão numérica da transformada de Laplace. Como resultado do **DRBEM**, além da discretização da fronteira, faz-se necessário o estabelecimento de pontos de colocação no interior do domínio (estes pontos são resultado do emprego do **DRBEM**, e não há a necessidade da divisão do domínio em células), sendo que a cada um destes pontos estão associadas incógnitas do sistema de equações algébricas resultante. Os exemplos envolveram domínios retangulares e cilíndricos que foram discretizados com malhas regulares (pontos de colocação uniformemente espaçados). Observa-se que nenhuma referência foi feita à influência da posição dos pontos de colocação dentro do domínio nos resultados.

- (e) **FDRBEM** (“Fourier Dual Reciprocity Boundary Element Method”). A idéia deste método consiste em transformar as integrais de domínio que aparecem na equação integral de contorno devidas ao termo fonte em integrais de contorno através da expansão deste termo fonte em série de Fourier e da aplicação do teorema de Green. Esta expansão é feita inicialmente estabelecendo-se um domínio auxiliar retangular contendo todo o domínio do problema; em seguida, são arbitrados valores para o termo fonte nos pontos do domínio auxiliar não contidos no domínio do problema, procurando manter a continuidade desta função da melhor maneira possível; finalmente calcula-se os coeficientes da série de Fourier para esta extensão do termo fonte (considerando o domínio auxiliar), sendo que, neste cálculo, são realizadas as únicas integrações de domínio. Aparentemente, este método foi desenvolvido pela primeira vez em *Tang* 1989³⁶ conforme *Kassab and Nordlund* 1993³⁷, sendo que este último apresenta uma melhoria deste método onde o cálculo dos coeficientes da série de Fourier são realizados por uma FFT que necessita somente amostrar a extensão do termo fonte em uma grade de pontos igualmente espaçados estabelecida sobre todo o domínio auxiliar. Isto elimina a necessidade de calcular as integrais de domínio para determinar os coeficientes da série de Fourier. Ainda é apresentado um algoritmo novo de FFT para funções de duas variáveis. Também são mostrados exemplos que indicam a validade deste método.
- (f) **Série de Fourier e FFT(fast Fourier transform) em domínio axissimétrico**. Em *Kuijpers et al.* 1997³⁸ é apresentada uma formulação do método dos elementos de contorno para um problema de radiação acústica em domínios tridimensionais axissimétricos, onde uma melhoria no método de

solução é obtida pela expansão da função de Green do problema e das funções do contorno em séries de Fourier no ângulo θ . Isto resulta em um sistema independente de integrais de contorno, sendo que cada integral relaciona os coeficientes correspondentes (associados aos termos equivalentes) da expansão em série de Fourier das funções de contorno e da função de Green. No cálculo destes coeficientes, ao invés de avaliar as integrais em θ conforme estabelece a formulação da série de Fourier, é empregada a FFT fazendo-se uma amostragem das funções de contorno e da função de Green em pontos igualmente espaçados no intervalo $(0, 2\pi)$, o que resulta em uma redução do esforço computacional, isto comparando resultados de igual precisão. Também são feitas considerações sobre o número mínimo de pontos amostrado para o cálculo da FFT, sendo indicadas algumas relações para a determinação deste número mínimo. Seguindo a mesma linha, em *Provatidis 1998*³⁹, para problemas de potenciais (equação de Laplace), e em *Provatidis 1999*⁴⁰, para problemas da elasticidade linear, pode-se ver uma comparação entre as seguintes soluções: solução obtida com o emprego da FFT no cálculo dos coeficientes da série de Fourier; soluções obtidas com o emprego de métodos baseados em quadraturas no cálculo destes mesmos coeficientes; e uma solução tridimensional. Estas comparações mostram que, para um número maior de termos da expansão em série de Fourier, o método baseado na FFT apresenta um melhor desempenho computacional.

- (g) **Spectral BEM.** Em *Peirce et al. 1992*⁴¹ é apresentada uma proposta de solução de um problema elástico de trincas envolvendo geometria (domínio) regular, que pode ser periodicamente repetida no espaço, na qual a formulação integral envolve apenas integrais definidos (ao invés de integrais de contorno) e que podem ser consideradas como operações de convolução. Estas convoluções são avaliadas pela propriedade da FFT (transformada rápida de Fourier) $f * g = \mathbf{FFT}^{-1}\{\mathbf{FFT}\{f\}\mathbf{FFT}\{g\}\}$, obtendo-se uma redução no número de cálculos a serem efetuados. Isto sugere que os núcleos das integrais sejam dados no espaço transformado de Fourier. Este trabalho também estabelece que a aproximação das funções de contorno por uma dada base de funções no espaço direto corresponde a um determinado filtro aplicado à transformada de Fourier das funções de contorno no espaço de Fourier. Além disto, apresenta outras propostas de filtros com melhores resultados do que aqueles associados às bases de funções no espaço direto. Também são apresentados dois algoritmos iterativos de solução do sistema de equações algébricas resultante da

discretização das integrais de contorno, “Enhanced Jacobi” e “preconditioned conjugate gradient”, e que são auxiliados pelo emprego da FFT.

Outra variante deste método pode ser vista em *Hill and Farris* 1995⁴², onde resolve-se problemas dinâmicos de transferência de calor, cujas condições iniciais possam ser desconsideradas da solução (alguns casos especiais), aproximando-se a função incógnita por uma série de Fourier truncada, o que determina um certo espectro de frequências, e que é substituída na equação diferencial parcial do problema produzindo um conjunto de equações diferenciais parciais não dependentes do tempo e associadas a cada frequência do espectro. A solução destas equações diferenciais parciais é realizada pelo método do elementos de contorno obtendo-se a solução do problema no espectro de frequências. Fazendo-se a transformada inversa discreta de Fourier desta solução obtém-se a solução no tempo. Este espectro discreto de frequências é determinado pelo intervalo de tempo e pelo passo no tempo (resolução) nos quais deve-se observar a solução do problema. Com o fim de reduzir o volume de cálculos necessários, propõe-se a exclusão das frequências do espectros que não apresentam grandes contribuições para solução do problema, sendo isto determinado pelo perfil do espectro de frequências das condições de contorno do problema: as frequências sem importância no espectro das condições de contorno são eliminadas do espectro da solução. Com estas características, este método torna-se apropriado para processamento paralelo, da mesma forma que **LTBEM**. Finalmente, são apresentados exemplos numéricos indicando a validade da proposta.

- (h) **Equação integral de contorno no domínio transformado.** Em *Vatul'yan and Sadchikov* 1998⁴³ é apresentada uma nova proposta para solução da equação de *Helmholtz* através de uma equação integral de contorno obtida pelo emprego da transformada de Fourier. Esta idéia consiste em aplicar a transformada de Fourier para domínio finito na equação diferencial parcial do problema e, com o auxílio do teorema da divergência, obter uma equação integral de contorno no domínio transformado. Esta equação é então simplificada após a introdução de algumas restrições nas variáveis independentes do domínio transformado. A equação integral de contorno resultante contém as mesmas funções incógnitas da equação integral no domínio direto que é tradicionalmente usada no método dos elementos de contorno, sendo que ambas são equivalentes. Após a discretização do contorno, obtém-se um sistema de equações algébricas semelhante àquele obtido tradicionalmente

no método dos elementos de contorno, porém mal condicionado, pois os núcleos da integral de contorno no domínio transformado são suaves e infinitamente diferenciáveis em qualquer ponto. Para resolver este sistema de equações algébricas mal condicionado foi usado o método de projeção-iteração. Também é mostrado como esta equação integral de contorno no domínio transformado pode ser usada na determinação dos autovalores da equação diferencial parcial do problema. Finalmente foram obtidas as soluções de alguns problemas indicando a validade da proposta. Em *Vatul'yan and Shamshin* 1998⁴⁴ foi desenvolvida a mesma idéia para obter a solução de problemas da elasticidade linear. Além disto, também procurou-se demonstrar explicitamente a equivalência (mesma solução) entre a equação integral de contorno no domínio transformado e a equação diferencial parcial do problema.

- (i) **Emprego de funções peso em problemas de fratura.** São técnicas para calcular os fatores K_I , K_{II} e K_{III} de problemas da elasticidade envolvendo trincas cuja solução basicamente segue a idéia do método dos elementos de contorno. Exemplos desta técnica no domínio transformado de Laplace para problemas dinâmicos podem ser vistos em *Wen et al.* 1996⁴⁵, *Wen et al.* 1996⁴⁶ e *Wen et al.* 1998⁴⁷.
- (j) **Formulação no Domínio Tempo.** A integral de contorno envolvendo somente funções do tempo e do espaço (pontos na fronteira e no domínio) foi formulada pela primeira vez em *Mansur and Brebbia* 1982⁴⁸ para a equação homogênea da onda. Neste trabalho parte-se da equação homogênea da onda e das condições de contorno obtendo-se uma formulação variacional do problema. Em seguida, a partir de algumas manipulações algébricas, chamada de procedimento de regularização do núcleo, e da obtenção da função de Green do problema chega-se à integral de contorno. Algumas transformações são realizadas nesta integral de contorno visando simplificá-la quanto às singularidades e facilitar a sua solução numérica. Em *Mansur and Brebbia* 1982⁴⁹ é desenvolvida a solução numérica destas integrais. Nesta solução, é estabelecida uma base de funções (lineares ou constantes) no espaço e no tempo, juntamente com um esquema de cálculo que avança passo a passo no tempo, onde um novo passo é calculado com os dados obtidos a partir de todos os passos anteriores. A validade destas formulações foi verificada através da solução de problemas de propagação de ondas em eixos e placas e das comparações com as respectivas soluções exatas.

Em *Demirel and Wang* 1987⁵⁰ é apresentada a idéia de truncamento do tempo

na avaliação numérica da integral de contorno, com objetivo de obter uma diminuição do esforço computacional e do espaço de armazenagem de dados. Esta idéia consiste em desprezar do cálculo da integral de contorno aquelas contribuições relativas a um tempo anterior a um dado limite. Conforme dados apresentados neste trabalho, o truncamento no tempo reduz consideravelmente o tempo de processamento e a área de armazenagem de dados, embora introduza um pequeno erro nos resultados, que foram obtidos em problemas envolvendo domínios infinitos. O trabalho também apresenta um meio de estimar o limite de truncamento no tempo em função de um parâmetro relacionado ao erro admitido, porém não é apresentada uma formulação rigorosa do erro introduzido pelo truncamento. Seguindo na mesma direção e observando que o método de truncamento descrito acima não funciona bem em domínios finitos, *Mansur and de Lima-Silva* 1992⁵¹ apresenta um outro método de truncamento no tempo, chamado truncamento parcial, que, em vez de desprezar as contribuições ocorridas antes de um certo tempo, introduz simplificações no cálculo destas contribuições. Embora a redução do esforço computacional e da área de armazenamento de dados não seja tão acentuada como a obtida em *Demirel and Wang* 1987⁵⁰, o erro introduzido é muito menor em problemas envolvendo domínios finitos.

Em *Mansur and Carrer* 1993⁵² é apresentada uma comparação entre duas alternativas de simplificação de singularidades: o procedimento de regularização do núcleo *Mansur and Brebbia* 1982⁴⁸ e o procedimento baseado no conceito da parte finita de uma integral, proposto por *Hadamard* *Hadamard* 1952⁵³; onde fica demonstrado que ambas formulações conduzem às integrais de contorno equivalentes. Também foi realizada a integração analítica no tempo das integrais de contorno obtidas pelos dois procedimentos, empregando bases de funções lineares e quadráticas. Ainda foi destacado que as integrais de contorno obtidas pelo procedimento de regularização do núcleo podem ser avaliadas numericamente por quadraturas ordinárias (quadratura de Gauss, por exemplo) enquanto que as integrais obtidas pelo princípio de *Hadamard* necessitam quadraturas especiais. Seguindo a mesma linha, em *Carrer and Mansur* 1994⁵⁴ são desenvolvidas as expressões para os núcleos analiticamente integrados no tempo das derivadas espaciais da integral de contorno desprezando as condições iniciais, sendo que foram obtidas através do procedimento baseado no princípio de *Hadamard*. Complementando o trabalho anterior e usando o mesmo princípio, em *Carrer and Mansur* 1996⁵⁵

desenvolve-se as expressões para os núcleos analiticamente integrados no tempo das derivadas espaciais e temporais da integral de contorno, considerando as condições iniciais, além de desenvolver analiticamente as integrais de domínio (condições iniciais), tanto para as derivadas espaciais como temporais, através do estabelecimento de uma base linear de funções para o interior do domínio com a respectiva discretização do mesmo em células triangulares.

Uma outra melhoria pode ser observada em *Schanz and Antes* 1997⁵⁶ onde a operação de convolução no tempo contida na integral de contorno discretizada (após a escolha da base de funções e da representação aproximada das funções no contorno) é aproximada por uma operação de quadratura (chamada método da quadratura operacional) sobre as funções de contorno, sendo que esta quadratura é baseada na escolha de um método multi-passo de solução de equações diferenciais ordinárias. Esta quadratura emprega pesos que são calculados a partir de uma integral de contorno envolvendo a transformada de Laplace das funções de Green no domínio tempo e elementos da base de funções escolhida para representar as funções no contorno. Assim, o cálculo dos coeficientes do sistema de equações algébricas envolve somente a transformada de Laplace das funções de Green ao invés das próprias funções de Green como nos métodos anteriores, o que significa singularidades que podem ser trabalhadas com mais facilidade. A operação de quadratura é determinada pela escolha de um método multi-passo de solução de equações diferenciais ordinárias, sendo que a solução numérica obtida depende desta escolha. Em relação aos métodos anteriores, nos exemplos numéricos observou-se uma diminuição dos problemas de instabilidade e amortecimento numérico para passos no tempo muito pequenos e muito grandes, respectivamente.

(k) **Solução variacional no tempo.** Em *Guoyou et al.* 1998⁵⁷ pode-se ver um exemplo da idéia básica desta linha de métodos, onde a equação integral de contorno da formulação no **domínio tempo** é discretizada na forma usual e o sistema de equações algébricas resultante é resolvido por um método variacional, que, neste último trabalho, envolve somente funções peso no tempo. As funções peso escolhidas neste trabalho são na forma de degraus. Objetivo desta linha é melhorar a estabilidade numérica da formulação **domínio tempo**. Segundo este último trabalho, o primeiro trabalho nesta linha é *Maier et al.* 1991⁵⁸, onde são apresentados os aspectos teóricos deste método.

(l) **Emprego de transformações integrais.** Em *Wang and Achenbach* 1992⁵⁹ a função de Green de um problema da elasticidade linear dinâmica

(casos isotrópico e anisotrópico) é obtida através do emprego conjunto da transformada cosseno de Fourier para a variável temporal e da transformada de Fourier (um pouco modificada) para as variáveis espaciais na equação diferencial da função de Green. A função de Green é, então, obtida no domínio transformado por manipulações algébricas. A transformada inversa de Fourier correspondendo às variáveis espaciais é aplicada a esta expressão da função de Green no domínio transformado. Após uma troca de variáveis e algumas manipulações algébricas, a função de Green no domínio espaço-tempo é obtida por inspeção, tomando-se como base a expressão da transformada cosseno de Fourier. Esta expressão da função de Green no domínio espaço-tempo ainda contém uma operação de integração cuja solução geral, a menos da obtenção das raízes de um polinômio de sexto grau, é obtida pelo teorema dos resíduos. Também é obtida uma relação entre as derivadas temporais e espaciais da função de Green. Esta relação permite transformar os termos da integral de contorno contendo derivadas espaciais da função de Green em termos contendo somente a função de Green, o que facilita a avaliação da integral de contorno. Uma desvantagem deste método é que exige a determinação das raízes de um polinômio de sexto grau para avaliar a função de Green para cada ponto no espaço-tempo.

Em *Elzafrany et al. 1994*⁶⁰ é apresentada uma solução do problema de placas linearmente elásticas e estáticas baseada no método dos elementos de contorno onde as funções de Green são obtidas pelo emprego direto da transformada de *Hankel* na forma usual.

(m) **Cantos: contornos com pontos de descontinuidade da direção normal.**

Os problemas envolvendo domínios com cantos, ou seja, cuja fronteira muda de direção de maneira não suave, também podem ser abordados pelo método dos elementos de contorno através da técnica do nó duplo, onde duas incógnitas relativas aos fluxos são associada a cada nó de canto, ao invés de uma única incógnita como no caso dos nós comuns. Esta incógnita extra adicionada a cada nó de canto exige o estabelecimento de uma equação extra para cada canto relacionando as incógnitas deste nó. Em *Kassab and Nordlund 1994*⁶¹, para o problema de condução de calor, uma equação algébrica linear entre as incógnitas associadas ao nó de canto é obtida através do emprego da álgebra vetorial. Em *Elzafrany et al. 1994*⁶⁰ também é empregado este método.

(n) **Massas concentradas.** Neste método, o termo relativo às forças de inércia (segunda derivada no tempo) da equação homogênea da onda é aproximado

(substituído) por uma série finita onde cada termo está associado um dado ponto no interior do domínio, sendo que cada um destes pontos corresponde ao centro de cada célula nas quais é discretizado o domínio, e envolve a função δ de *Dirac* multiplicada por um coeficiente que representa a concentração de massa no ponto (representando a massa de toda a célula) e pela segunda derivada no tempo da função incógnita do problema no ponto. Este método resolve o problema no domínio tempo e necessita da discretização do interior do volume em células. Em *Provatidis and Kanarachos 1993*⁶², este método é apresentado pela primeira vez juntamente com resultados numéricos que indicam sua validade, ainda que estes resultados sejam obtidos em problemas com domínios regulares.

- (o) Em *Besskos 1987*⁶³ é apresentada uma revisão do emprego do método dos elementos de contorno na elastodinâmica onde outras variantes do BEM são revisadas, além das mencionadas no texto acima. Também são revisadas várias aplicações do BEM em problemas de engenharia.

A busca de soluções para o problema da propagação de ondas elásticas passa pelos métodos de soluções de equações diferenciais parciais, como no caso dos métodos descritos acima. Além destes, pode-se citar outros métodos que, embora não tenham sido empregados especificamente neste problema, apresentam uma certa possibilidade de virem a ser utilizados neste escopo. Nesta classe de trabalho pode-se citar *Mengi and Tanrikulu 1990*⁶⁴, onde é empregada transformada de Fourier para reduzir a ordem da equação diferencial parcial, sendo que a equação resultante é resolvida pelo método das características.

Capítulo 3

Descrição geral da solução de equações diferenciais parciais em domínios arbitrários através da transformada de Fourier.

Neste capítulo descreve-se, em termos gerais, o método proposto de solução de equações diferenciais em domínios arbitrários através da transformada de Fourier.

O método baseia-se no emprego da transformada de Fourier em um operador diferencial parcial linear estabelecido em um domínio qualquer contínuo com uma fronteira suficientemente regular (suave, que apresenta variação contínua da sua derivada normal exceto em um número finito de pontos de descontinuidades). Em razão da transformada de Fourier pressupor funções definidas no intervalo $(-\infty, +\infty)$ em todas as suas variáveis dependentes, estabelece-se a condição da função (ou funções) incógnita da equação diferencial parcial serem nulas fora do domínio considerado. Em linhas gerais, isto pode ser descrito da seguinte forma. Dada a equação diferencial parcial

$$L(u) = 0, u \in \Omega \tag{3.1}$$

com sua respectiva condição de contorno

$$H(u) = 0, u \in \Gamma, \tag{3.2}$$

onde:

- L representa um operador diferencial linear qualquer $L : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, cuja forma geral

é dada por

$$\begin{aligned}
L = & a_0 + \sum_{i_1=1}^n a_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{i_1 n + i_2} \frac{\partial^2}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \\
& + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n a_{i_1 n^2 + i_2 n + i_3} \frac{\partial^3}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}} + \dots;
\end{aligned} \tag{3.3}$$

- H representa uma condição de contorno para a qual $L(u) = 0$ apresenta solução única;
- u uma função definida em Ω ;
- Ω um domínio arbitrário contínuo e conexo, $\Omega \in \mathfrak{R}^n$;
- Γ a fronteira do domínio Ω .

O emprego da transformada de Fourier exige que funções com n variáveis independentes sejam definidas em todo \mathfrak{R}^n . Portanto, para emprego da transformada de Fourier faz-se necessário estender a função u para $\mathfrak{R}^n - \Omega$. Por razões de simplicidade, escolhe-se uma extensão nula para u em $\mathfrak{R}^n - \Omega$, conforme

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathfrak{R}^n - \Omega). \tag{3.4}$$

A transformada de Fourier da função u expandida e a respectiva transformada inversa são dadas por

$$\bar{u}(\mathbf{s}) = \mathcal{F}\{u; \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s}\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} u(\mathbf{x}) e^{i(x_1 s_1 + \dots + x_n s_n)} d\mathbf{x} \tag{3.5}$$

e

$$u(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(\mathbf{s}) e^{-i(x_1 s_1 + \dots + x_n s_n)} d\mathbf{s}, \tag{3.6}$$

onde $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathfrak{R}^n$

Uma vez que a extensão da função u é nula em $\mathfrak{R}^n - \Omega$, a expressão (3.5) pode ser reescrita conforme

$$\bar{u}(\mathbf{s}) = \mathcal{F}\{u; \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s}\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) e^{i(x_1 s_1 + \dots + x_n s_n)} d\mathbf{x}. \tag{3.7}$$

A expressão apresentada em (3.7) constitui uma redefinição da transformada de Fourier para funções nulas em $\mathfrak{R}^n - \Omega$ cuja transformada inversa é dada por (3.6).

A partir da redefinição da transformada de Fourier apresentada em (3.7), as expressões para as transformadas das derivadas parciais da função u podem ser escritas como

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i}; \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s} \right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} e^{i(x_1 s_1 + \dots + x_n s_n)} d\mathbf{x}. \quad (3.8)$$

Integrando por partes a equação (3.8), pode-se obter uma nova expressão para a transformada de Fourier das derivadas parciais de u com um termo envolvendo uma integral de superfície mais um segundo termo contendo a própria definição da transformada de Fourier de u , conforme

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i}; \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s} \right\} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \oint_{\Gamma} u(\boldsymbol{\gamma}) e^{i(\gamma_1 s_1 + \dots + \gamma_n s_n)} \cos(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}_i) d\Gamma \\ &\quad - i s_i \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) e^{i(x_1 s_1 + \dots + x_n s_n)} d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \Gamma$, $\boldsymbol{\eta}$ é um vetor unitário normal à fronteira Γ , e $\cos(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}_i)$ é o cosseno do ângulo entre o vetor $\boldsymbol{\eta}$ e o eixo coordenado associado à $\boldsymbol{\gamma}_i$, seguindo a notação empregada em *Piskounov* 1984⁶⁵.

A expressão (3.9), considerando-se (3.7), pode ser ainda ser reescrita resultando em

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i}; \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s} \right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \oint_{\Gamma} u(\boldsymbol{\gamma}) e^{i(\gamma_1 s_1 + \dots + \gamma_n s_n)} \cos(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}_i) d\Gamma - i s_i \bar{u}(\mathbf{s}). \quad (3.10)$$

As expressões para as derivadas parciais de ordem mais elevadas podem ser obtidas a partir do emprego recursivo da expressão (3.10). Desta forma, a expressão da transformada de Fourier para as derivadas parciais de u de qualquer ordem resultam sempre em expressões contendo termos com integrais de fronteira envolvendo derivadas parciais de u e o fator $e^{i(\gamma_1 s_1 + \dots + \gamma_n s_n)}$ mais um termo constituído do produto dos parâmetros s_i e \bar{u} . Uma vez que o operador diferencial parcial linear L é uma combinação linear da função u e de suas derivadas, conforme (3.3), pode-se aplicar a transformada de Fourier em $L(u) = 0$ obtendo-se uma expressão contendo \bar{u} e uma integral de superfície em Γ envolvendo a função u e suas derivadas até uma ordem menor que a ordem de L , conforme

$$\bar{u}(\mathbf{s}) = \oint_{\Gamma} \left(u(\boldsymbol{\gamma}) G_0(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}) + \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{\gamma}) G_{i_1}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(\boldsymbol{\gamma}) G_{i_1 n + i_2}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}) + \\
& + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \frac{\partial^3 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}}(\boldsymbol{\gamma}) G_{i_1 n^2 + i_2 n + i_3}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}) + \dots \Big) d\Gamma, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

onde a função \bar{u} já está isolada no membro esquerdo e as funções G_i , introduzidas por facilidade de notação, representam expressões resultantes destas manipulações algébricas, mais especificamente constituem-se em frações de polinômios envolvendo as variáveis s_i , os coeficientes a_i de (3.3) multiplicadas por $e^{i(\gamma_1 s_1 + \dots + \gamma_n s_n)}$ e os termos $\cos(\eta, \gamma_i)$.

A função u pode ser obtida normalmente pela aplicação da transformada inversa de Fourier na expressão (3.11) obtendo-se

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) = & \oint_{\Gamma} \left(u(\boldsymbol{\gamma}) g_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) + \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{\gamma}) g_{i_1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) + \right. \\
& + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(\boldsymbol{\gamma}) g_{i_1 n + i_2}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) + \\
& \left. + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \frac{\partial^3 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}}(\boldsymbol{\gamma}) g_{i_1 n^2 + i_2 n + i_3}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) + \dots \right) d\Gamma, \quad (3.12)
\end{aligned}$$

onde as funções $g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma})$ são as transformadas inversas das funções $G_i(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma})$ respectivamente, $g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{F}^{-1} \{G_i(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}); \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{x}\}$, e $\mathbf{x} \in R^n$.

A equação (3.12) expressa a função u em termos dos valores da própria u de suas derivadas até ordem $(n - 1)$. Esta equação possui uma forma semelhante às integrais de contornos obtidas a partir de outros métodos *Brebbia* 1984⁶⁶ *Lai* 1987⁶⁷ *Muskhelishvili* 1953 1949⁶⁸, sendo que integrais deste tipo, obtidas a partir de uma formulação variacional do problema, são encontradas na literatura e empregadas no método dos elementos de contorno. Pode-se observar que para avaliar esta expressão são necessárias mais informações que as fornecidas pelas condições de contorno do problema (equação (3.2)) o que conduz a fase final de solução do problema que é justamente a determinação das funções que não são dadas pelas condições de contorno. Existem vários métodos para a determinação destas funções entre os quais o método dos elementos de contorno e emprego da série de Fourier, *Huestis* 1995²².

A seqüência do trabalho apresenta a aplicação deste método a um problema de condução de calor e a um problema de elasticidade linear em 2D estático para estado plano de tensões. Neste trabalho, optou-se por uma solução da equação de contorno baseada na idéia do método dos elementos de contorno.

Capítulo 4

Aplicação em um problema de condução de calor em duas dimensões.

Neste capítulo, como ilustração, apresenta-se a solução da equação diferencial parcial de um problema de condução de calor em duas dimensões (equação de Laplace) através do emprego da transformada de Fourier.

4.1 Obtenção da integral de contorno.

A solução do problema de condução de calor em duas dimensões sem geração de calor e com condições de contorno de temperatura, de fluxo de calor e de convecção prescritos na fronteira será obtida, em seguida, através do emprego da transformada de Fourier conforme o método de solução apresentado no presente trabalho.

Uma dada função u é definida em Ω , um conjunto contínuo e conexo conforme figura

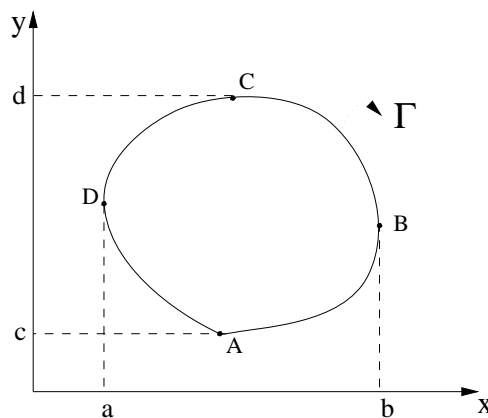


Figura 4.1: Domínio arbitrário contínuo e conexo em duas dimensões.

(4.1). Para possibilitar a obtenção da transformada de Fourier de u deve-se expandi-la com valor nulo para $(\pm\infty, \pm\infty)$. A expressão da transformada de Fourier para esta situação é

$$\mathcal{F}\{u; x \rightarrow r; y \rightarrow s\} = \bar{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{i(rx+sy)} dy dx \quad (4.1)$$

cuja inversa é dada por

$$u = \mathcal{F}^{-1}\{\bar{u}; r \rightarrow x; s \rightarrow y\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u} e^{-i(rx+sy)} dr ds. \quad (4.2)$$

A operação de integração apresentada em (4.1) fica restrita somente ao domínio Ω uma vez que $u(p) \equiv 0, p \notin \Omega$, por definição. Assim, obtém-se uma redefinição da transformada de Fourier expressa por

$$\mathcal{F}\{u; x \rightarrow r; y \rightarrow s\} = \bar{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} u(x, y) e^{i(rx+sy)} dy dx \quad (4.3)$$

com a transformada inversa dada por (4.2).

As expressões para as transformadas de Fourier das primeiras derivadas parciais de u são apresentadas em

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}; x \rightarrow r; y \rightarrow s\right\} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dy - ir \mathcal{F}\{u; x \rightarrow r; y \rightarrow s\} \quad (4.4)$$

e

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial y}; x \rightarrow r; y \rightarrow s\right\} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dx - is \mathcal{F}\{u; x \rightarrow r; y \rightarrow s\} \quad (4.5)$$

e resultam do emprego da expressão (4.1) com as devidas integrações por partes.

As expressões das transformadas de Fourier para as segundas derivadas parciais de u podem ser obtidas pelo emprego recursivo das expressões para as primeiras derivadas ((4.4) e (4.5)) e são dadas por

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; x \rightarrow r; y \rightarrow s\right\} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i(rx+sy)} dy - \frac{ir}{2\pi} \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dy - r^2 \bar{u}, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; x \rightarrow r; y \rightarrow s\right\} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dx + \frac{is}{2\pi} \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dx - s^2 \bar{u} \quad (4.7)$$

e

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; x \rightarrow r; y \rightarrow s\right\} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dy + \frac{ir}{2\pi} \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dx - rs \bar{u} \quad (4.8)$$

ou

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; x \rightarrow r; y \rightarrow s \right\} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i(rx+sy)} dx - \frac{is}{2\pi} \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dy - rs \bar{u}. \quad (4.9)$$

O problema de condução de calor 2D pode ser expresso pela equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.10)$$

para o caso sem geração de calor.

As respectivas condições de contorno serão comentadas adiante no texto.

O desenvolvimento proposto consiste em aplicar a transformada de Fourier na equação diferencial parcial (4.10) conforme a expressão (4.1). Assim, após algumas manipulações algébricas, obtém-se a expressão

$$\begin{aligned} \bar{u} = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{e^{i(rx+sy)}}{r^2 + s^2} dx - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{e^{i(rx+sy)}}{r^2 + s^2} dy \right\} \\ & + \frac{1}{2\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} u \frac{ise^{i(rx+sy)}}{r^2 + s^2} dx - \oint_{\Gamma} u \frac{ire^{i(rx+sy)}}{r^2 + s^2} dy \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

A transformada inversa de Fourier, conforme equação (4.2), pode ser aplicada em (4.11) para a obtenção de u resultando em

$$\begin{aligned} u(x_a, y_a) = & \frac{1}{2\pi} \left\{ - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{i(rx+sy)}}{r^2 + s^2}; r \rightarrow x_a; s \rightarrow y_a \right\} dx \right. \\ & + \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{i(rx+sy)}}{r^2 + s^2}; r \rightarrow x_a; s \rightarrow y_a \right\} dy \\ & + \oint_{\Gamma} u \mathcal{F}^{-1} \left\{ -is \frac{e^{i(rx+sy)}}{r^2 + s^2}; r \rightarrow x_a; s \rightarrow y_a \right\} dx \\ & \left. - \oint_{\Gamma} u \mathcal{F}^{-1} \left\{ -ir \frac{e^{i(rx+sy)}}{r^2 + s^2}; r \rightarrow x_a; s \rightarrow y_a \right\} dy \right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Realizando as transformadas inversas de Fourier contidas em (4.12), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{i(rx+sy)}}{r^2 + s^2}; r \rightarrow x_a; s \rightarrow y_a \right\} &= -\frac{1}{2} \mathbf{ln}((x_a - x)^2 + (y_a - y)^2), \\ \mathcal{F}^{-1} \left\{ -ir \frac{e^{i(rx+sy)}}{r^2 + s^2}; r \rightarrow x_a; s \rightarrow y_a \right\} &= -\frac{(x_a - x)}{(x_a - x)^2 + (y_a - y)^2} \quad e \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ -is \frac{e^{i(rx+sy)}}{r^2 + s^2}; r \rightarrow x_a; s \rightarrow y_a \right\} = -\frac{(y_a - y)}{(x_a - x)^2 + (y_a - y)^2}. \quad (4.13)$$

Para futura facilidade de notação, define-se a função \mathbf{F} e suas derivadas na seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y) &\equiv -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \\ \mathbf{F}_x(x, y) &\equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \\ \mathbf{F}_y(x, y) &\equiv \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

com o que pode-se escrever a expressão para u conforme

$$\begin{aligned} u(x_a, y_a) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ -\oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \mathbf{F}(x_a - x, y_a - y) dx + \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \mathbf{F}(x_a - x, y_a - y) dy \right. \\ &\quad \left. + \oint_{\Gamma} u(x, y) \mathbf{F}_y(x_a - x, y_a - y) dx - \oint_{\Gamma} u(x, y) \mathbf{F}_x(x_a - x, y_a - y) dy \right\}. \quad (4.14) \end{aligned}$$

A expressão acima pode ser reescrita através do uso da mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= x(\gamma) \quad \text{e} \\ y &= y(\gamma), \end{aligned}$$

onde γ é o comprimento do arco sobre a fronteira Γ partindo um dado ponto $p_0 \in \Gamma$. Também podemos dizer que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\gamma} &= -\eta_y \quad \text{e} \\ \frac{dy}{d\gamma} &= +\eta_x, \end{aligned}$$

sendo η_x e η_y os cossenos diretores da direção normal à superfície. Assim, a equação (4.14) pode ser reescrita conforme

$$u^*(x_a, y_a) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \frac{dx}{d\gamma} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{d\gamma} \right) \mathbf{F} d\gamma + \oint_{\Gamma} u \left(\frac{dx}{d\gamma} \mathbf{F}_y - \frac{dy}{d\gamma} \mathbf{F}_x \right) d\gamma \right\} \quad (4.15)$$

ou, introduzindo-se os cossenos diretores da direção normal à superfície,

$$u^*(x_a, y_a) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} \mathbf{F} d\gamma - \oint_{\Gamma} u \mathbf{F}_\eta d\gamma \right\}, \quad (4.16)$$

onde $\frac{\partial}{\partial \eta}$ é derivada normal à fronteira do domínio e a função \mathbf{F}_η é definida por $\mathbf{F}_\eta = \eta_x \mathbf{F}_x + \eta_y \mathbf{F}_y$.

A equação (4.16) é similar àquelas normalmente obtidas pelo método dos elementos de contorno.

4.2 Solução do problema através da integral de contorno.

A equação (4.14) permite calcular o valor da função u em qualquer ponto do plano xy uma vez conhecidos os valores da função e de suas primeiras derivadas parciais em Γ . Conforme a hipótese inicialmente feita, u deve satisfazer a condição (4.10) em Ω e ser nula na parte externa de Ω , o que será demonstrado mais adiante. As condições de contorno do problema expresso por (4.10) podem ser dos seguintes tipos:

1. Primeiro tipo: u prescrito na fronteira: $u = u_0(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$;
2. Segundo tipo: a quantidade $\frac{\partial u}{\partial \eta} \equiv \eta_x \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial y}$, onde η_x e η_y são os cossenos diretores da normal a superfície Γ em (x, y) , prescrita na fronteira: $\frac{\partial u}{\partial \eta} = u_\eta(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$;
3. Terceiro tipo: uma expressão que relaciona u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ a um valor prescrito na fronteira: $hu + \eta_x \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial y} = hu_\infty(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$, onde h é uma constante e η_x e η_y são os cossenos diretores da normal a superfície Γ em (x, y) ;
4. Combinações das condições acima: aplicação de cada uma a um dado segmento de Γ .

Estas condições mostram que a equação (4.14) necessita mais informação do que a fornecida pelas condições de contorno. Para determinar a informação que falta, pode-se recorrer ao seguinte método aproximado. Elege-se uma base de funções $\{\phi_i : p \Rightarrow \Re, p \in \Gamma, i = 1, \dots, N\}$ de tal forma que se possa aproximar u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ para uma combinação linear das funções ϕ_i , conforme a equação

$$\begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} c_{u,i} \\ c_{u_x,i} \\ c_{u_y,i} \end{pmatrix} \phi_i, \quad (4.17)$$

onde:

1. $c_{u,i}, c_{u_x,i}, c_{u_y,i}$ são reais.

A equação (4.17) pode ser substituída nas condições de contorno resultando no seguinte conjunto de relações:

1. Para u prescrito na fronteira, considerando que em razão disto a derivada tangencial de u , definida por $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv -\eta_y \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial y}$, também seja conhecida, tem-se:

$$\sum_{i=1}^N c_{u,i} \phi_i = u(p) \quad (4.18)$$

e

$$\sum_{i=1}^N (-\eta_y c_{u_x,i} + \eta_x c_{u_y,i}) \phi_i = \frac{\partial u}{\partial t} u(p); \quad (4.19)$$

2. Para $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ prescrito na fronteira:

$$\sum_{i=1}^N (\eta_x c_{u_x,i} + \eta_y c_{u_y,i}) \phi_i = \frac{\partial u}{\partial \eta} (p); \quad (4.20)$$

3. Para uma condição do tipo $hu + \frac{\partial u}{\partial \eta} = hu_\infty(p)$:

$$\sum_{i=1}^N (h c_{u,i} + \eta_x c_{u_x,i} + \eta_y c_{u_y,i}) \phi_i = u_\infty(p). \quad (4.21)$$

4. Quando tipos diferentes de condições de contorno são empregadas em segmentos distintos de Γ pode-se ter cada uma das expressões acima aplicadas nos respectivos segmentos.

Na seqüência, obtém-se expressões para $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ aplicando-se as derivadas parciais nas variáveis x e y na equação (4.14), obtendo-se as equações

$$\frac{\partial}{\partial x_a} u(x_a, y_a) = \frac{1}{2\pi} \left\{ - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_a} dx + \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_a} dy - \oint_{\Gamma} u \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y_a \partial x_a} dx + \oint_{\Gamma} u \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x_a^2} dy \right\} \quad (4.22)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y_a} u(x_a, y_a) = \frac{1}{2\pi} \left\{ - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y_a} dx + \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y_a} \mathbf{F} dy - \oint_{\Gamma} u \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y_a^2} dx + \oint_{\Gamma} u \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x_a \partial y_a} dy \right\}, \quad (4.23)$$

onde empregaram-se as relações

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}(x_a - x, y_a - y)}{\partial x_a} &= \mathbf{F}_x(x_a - x, y_a - y) \quad \text{e} \\ \frac{\partial \mathbf{F}(x_a - x, y_a - y)}{\partial y_a} &= \mathbf{F}_y(x_a - x, y_a - y) \end{aligned}$$

As equações (4.14), (4.22) e (4.23) podem então ser avaliadas para pontos sobre a fronteira Γ , mediante o limite destas expressões quando $x_a \rightarrow x_p$ e $y_a \rightarrow y_p$, onde $\mathbf{x}(x_p, y_p) \in \Gamma$. Por simplicidade, pode-se optar por avaliar as equações (4.14), (4.22) e (4.23) para pontos muito próximos de Γ , ao invés de pontos sobre Γ , desprezando-se o erro cometido. Substituindo-se as expressões aproximadas para u e suas derivadas, dadas em (4.17), nas equações (4.14), (4.22) e (4.23) para pontos (x_a, y_a) “sobre” Γ obtém-se

$$\sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} c_{u,i} \\ c_{u_x,i} \\ c_{u_y,i} \end{Bmatrix} \phi_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} - \oint_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial F}{\partial y_a} dx + \oint_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial F}{\partial x_a} dy & + \oint_{\Gamma} \phi_i F dy & - \oint_{\Gamma} \phi_i F dx \\ - \oint_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_a \partial y_a} dx + \oint_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_a^2} dy & + \oint_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial F}{\partial x_a} dy & - \oint_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial F}{\partial x_a} dx \\ - \oint_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial^2 F}{\partial y_a^2} dx + \oint_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_a \partial y_a} dy & + \oint_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial F}{\partial y_a} dy & - \oint_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial F}{\partial y_a} dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{u,i} \\ c_{u_x,i} \\ c_{u_y,i} \end{Bmatrix}. \quad (4.24)$$

A expressão (4.24) pode ser estabelecida em um número de pontos sobre a fronteira igual ao número de componentes da base de funções, o que resulta, juntamente com as equações (4.18), (4.19), (4.20) e (4.21), em um sistema de equações algébricas cujas incógnitas são as variáveis $c_{u,i}, \dots, c_{u_y,i}$. Este sistema de equações pode ser resolvido conforme descreve-se a seguir. O maior número possível das incógnitas c deste sistema devem ser determinadas a partir das condições de contorno empregando-se as equações (4.18), (4.19), (4.20) e (4.21) nos respectivos segmentos de Γ para um número total de pontos igual ao número de incógnitas e escolhidas em posições que dependem de como são definidas as funções ϕ_i . Um sistema de equações algébricas contendo as incógnitas $c_{u,i}, c_{u_x,i}, c_{u_y,i}$ que não puderam ser determinadas pelas condições de contorno é então obtido pela eliminação de um número adequado de equações do sistema de equações obtidas pela aplicação de (4.24) nos pontos sobre Γ . O sistema também pode ser gerado com o estabelecimento de um número de equações maior que o número de incógnitas e ser resolvido pela técnica dos mínimos quadrados. A solução deste sistema nos permite então obter, aproximadamente, a função u e suas derivadas para qualquer ponto do domínio Ω

com o emprego das equações (4.17) e (4.14) (ou (4.22), ou (4.23)).

A escolha da base de funções ϕ_i pode ser feita seguindo a idéia dos método dos elementos de contorno *Brebbia* 1984⁶⁶ *Lai* 1987⁶⁷ ou baseadas em uma série de Fourier *Huestis* 1995²². No presente trabalho, empregou-se para fins de testes da formulação apresentada uma base de funções lineares por partes com continuidade C^0 e com aproximação da fronteira Γ por uma poligonal, base esta tipicamente usada no método dos elementos de contorno. A inversão do sistema de equações algébricas foi feita pelo método de *Jacobi* e as equações algébricas foram geradas para os nós da poligonal a partir das equações (4.14) ou (4.22) e (4.23) conforme a condição de contorno no nó prescrevesse $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ ou u , respectivamente. Os resultados obtidos foram razoáveis ocorrendo uma rápida convergência no processo iterativo de solução do sistema de equações algébricas.

Similarmente, para obter $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ na equação (4.16), expande-se u e $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ em termos de uma base de funções conhecida ϕ_i ($i = 1 : N$), ou seja

$$\begin{Bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} c_{u,i} \\ c_{u_\eta,i} \end{Bmatrix}, \quad (4.25)$$

onde $c_{u,i}, c_{u_\eta,i}$ são coeficientes reais, sendo que os coeficientes $c_{u,i}$ são determinados pelas condições de contorno.

Para determinar estes N coeficientes $c_{u_\eta,i}$, substitui-se a expressão (4.25) na equação (4.16) e avalia-se a equação resultante em um conjunto de N pontos, o que resulta em

$$\sum_{i=1}^N c_{u,i} \phi_i(p_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \left\{ - \oint \phi_i \frac{\partial F}{\partial \eta} dt + \oint_{\Gamma} \phi_i F dt \right\} \begin{Bmatrix} c_{u,i} \\ c_{u_\eta,i} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

para pontos p_k na fronteira Γ e

$$0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \left\{ - \oint \phi_i \frac{\partial F}{\partial \eta} dt + \oint_{\Gamma} \phi_i F dt \right\} \begin{Bmatrix} c_{n,i} \\ c_{u_\eta,i} \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

para pontos fora do domínio.

O sistema de equações algébricas (4.26) ou (4.27) são resolvidas para os coeficientes $c_{u_\eta,i}$.

A base de funções ϕ_i é normalmente escolhida como polinômios ou funções senos e cossenos.

É importante notar que as duas soluções acima são equivalentes. Entretanto, a última é mais apropriada do ponto de vista numérico porque envolve um menor número de variáveis a ser determinado.

4.3 Demonstração da validade da integral de contorno.

A solução apresentada na seção (4.1) pode ser comprovada pelo emprego do Teorema de Green juntamente com algumas construções auxiliares. Esta demonstração tem importância na medida em que comprova o desenvolvimento tomado a partir da redefinição da transformada de Fourier em (4.3).

O primeiro passo na demonstração da validade da expressão (4.14) é provar que a mesma é nula para os pontos $(x_a, y_a) \notin \Omega$. Isto pode ser obtido através do emprego do Teorema de Green *Özşik* 1980⁵ *Spiegel* 1964⁶⁹ que estabelece uma relação entre integrais de superfície e volume conforme

$$\oint_{\Gamma} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) \right) dx dy, \quad (4.28)$$

onde Ω é um subdomínio contínuo do plano coordenado xy , Γ é a fronteira de Ω , $Q(x, y) : \Omega \rightarrow \Re$ e $P(x, y) : \Omega \rightarrow \Re$ são funções.

Empregando o Teorema de Green na expressão (4.14) para $(x_a, y_a) \notin \Omega$, pode-se transformar as integrais de superfície em integrais de volume obtendo-se a expressão

$$u(x_a, y_a) = \frac{1}{2\pi} \left\{ - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \mathbf{F} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y_a} \right) dx dy - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathbf{F} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_a} \right) dx dy \right. \\ \left. - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y_a} - u \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y_a^2} \right) dx dy - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_a} - u \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x_a^2} \right) dx dy \right\}, \quad (4.29)$$

onde empregaram-se as relações

$$\frac{\partial \mathbf{F}(x_a - x, y_a - y)}{\partial x_a} = \mathbf{F}_x(x_a - x, y_a - y) \quad \text{e} \\ \frac{\partial \mathbf{F}(x_a - x, y_a - y)}{\partial y_a} = \mathbf{F}_y(x_a - x, y_a - y).$$

Reagrupando-se a expressão (4.29) e fazendo-se as devidas simplificações obtém-se

$$u(x_a, y_a) = \frac{1}{2\pi} \left\{ - \int_{\Omega} \mathbf{F} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy + \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x_a^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y_a^2} \right) dx dy \right\}. \quad (4.30)$$

O primeiro termo entre chaves em (4.30) é igual a zero devido a própria formulação do problema (equação (4.10)). O segundo termo entre chaves da mesma expressão também

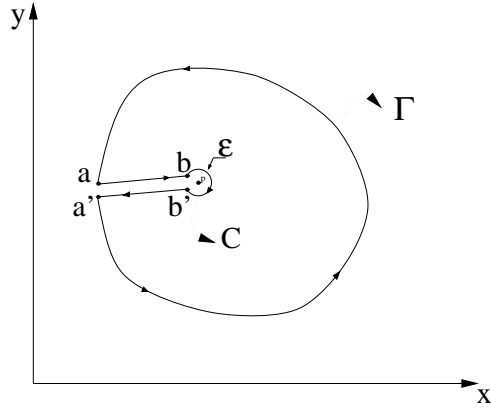


Figura 4.2: Domínio contínuo e conexo auxiliar com corte.

é nulo para $(x_a, y_a) \notin \Omega$, o que pode ser verificado a partir das expressões (4.13). Deve-se observar que este termo não pode ser avaliado para $(x_a, y_a) \in \Omega$. Assim demonstra-se que a expressão (4.14) implica em $u(x_a, y_a) = 0$ para $(x_a, y_a) \notin \Omega$.

O segundo passo na demonstração da validade da expressão (4.14) consiste em demonstrar que a mesma corresponde ao valor da função u , solução de (4.10), em $(x_a, y_a) \in \Omega$. Neste passo utilizar-se-á um domínio auxiliar Ω' contínuo e conexo construído a partir de Ω , conforme apresentado na figura (4.2). Este domínio auxiliar é obtido estabelecendo-se próximos entre si dois pontos, a e a' , sobre a fronteira Γ . O arco menor $\widehat{aa'}$ é retirado de Γ e fechando o contorno são adicionados os segmentos \overline{ab} , a circunferência C com raio ϵ , centro em p e subtraída do arco menor $\widehat{bb'}$, e o segmento $\overline{b'a'}$.

A avaliação da expressão (4.14) para o ponto p em relação ao domínio Ω' é igual a zero, uma vez que $p \notin \Omega'$, conforme demonstração apresentada anteriormente envolvendo o emprego do Teorema de Green. Assim, pode-se reescrever de forma abreviada a equação (4.14) conforme expressão

$$0 = \oint_{\Gamma - \widehat{aa'}} + \oint_{\overline{ab}} + \oint_{C - \widehat{bb'}} + \oint_{\overline{b'a'}}. \quad (4.31)$$

A expressão (4.31) pode ser avaliada para os pontos a e a' , b e b' estabelecidos estabelecidos próximos entre si. No caso limite, quando as distâncias entre os pontos a e a' , b e b' tende a zero, as integrais sobre os segmentos \overline{ab} e $\overline{b'a'}$ tendem a anularem-se, uma vez que são avaliadas sobre *praticamente* o mesmo segmento, mas em sentidos opostos, e a equação (4.31) pode ser reescrita conforme

$$\oint_{\Gamma} = - \oint_C. \quad (4.32)$$

A expressão (4.32) mostra que a avaliação da expressão (4.14) sobre o caminho Γ no

sentido anti-horário é igual ao valor negativo da avaliação da mesma expressão sobre a circunferência C no sentido horário. A avaliação de (4.14) em C pode ser obtida empregando-se um sistema de coordenadas cilíndricas $r \times \theta$ com centro no ponto p . Partindo dos resultados obtidos no apêndice (A), equação (A.4), e considerando que para a circunferência do problema tem-se $r(\theta) = \epsilon$, $r'(\theta) = 0$, obtém-se a equação

$$\oint_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\epsilon \ln(\epsilon) \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta + \int_0^{2\pi} u d\theta \right\}, \quad (4.33)$$

lembrando que a integração no sentido horário é igual ao valor negativo da integração no sentido anti-horário.

A expressão (4.33) pode ser avaliada para uma circunferência C construída com um raio tão pequeno quanto se queira, sendo que no limite, quando o raio ϵ tende para zero, o primeiro termo entre chaves desta equação tende a zero, pois o integrando é finito e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln(\epsilon) = 0$; o segundo termo entre chaves apresenta um integrando que tende a não apresentar variações ao longo da circunferência de integração na medida em que seu raio tende a zero, já que a função u é contínua, o que leva um limite igual a $2\pi u(x_a, y_a)$. Assim, no limite, quando $\epsilon \rightarrow 0$, a expressão (4.33) resulta na equação

$$\oint_{\Gamma} = u(x_a, y_a), \quad (4.34)$$

o que prova finalmente a validade da equação (4.14).

Capítulo 5

Aplicação em um problema de elasticidade e de ondas em duas dimensões.

Neste capítulo apresentam-se as soluções do sistema equações diferenciais parciais de um problema de elasticidade em duas dimensões e da equação diferencial parcial do problema de propagação de ondas em duas dimensões (equação homogênea da onda) através do emprego da transformada de Fourier. Sendo que na equação homogênea da onda é empregada a transformada de Laplace em conjunto com a transformada de Fourier.

5.1 Obtenção da integral de contorno.

O problema de elasticidade para pequenas deformações em duas dimensões, admitindo-se estado plano de tensões é apresentado no apêndice (B), que foi escrito conforme *Timoshenko and Goodier* 1934¹. Sendo B e G constantes dependentes das propriedades dos materiais ($G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $B = \frac{E}{1-\nu^2}$, E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson), $x \times y$ um sistema de coordenadas cartesianas, $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$ um domínio contínuo e conexo contido em \mathfrak{R}^2 (ver figura 4.1), $u : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ função descrevendo os deslocamentos na direção x , $v : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ função descrevendo os deslocamentos na direção y , pode-se equacionar em termos de deslocamentos um problema elástico 2D, desprezando-se o peso do material, para um domínio Ω pelo seguinte sistema de equações

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B - G) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad (5.1)$$

$$G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (B - G) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (5.2)$$

A solução deste problema segue os mesmos passos descritos na seção (4.1) para o problema envolvendo a equação de Laplace. Estabelece-se uma extensão nula para as funções u e v em $\mathfrak{R}^2 - \Omega$. Assim pode-se ter a transformada de Fourier redefinida conforme apresentado em (4.1) e respectiva transformada inversa em (4.2). Inicialmente aplica-se a transformada de Fourier nas equações (5.1) e (5.2) fazendo-se uso das formulações da transformada de Fourier das derivadas parciais de segunda ordem dadas pelas equações (4.6)-(4.9), obtendo-se as seguintes equações

$$\begin{aligned} -(Br^2 +Gs^2)\bar{u} - (B-G)rs\bar{v} &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ B \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i(rx+sy)} dy - G \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dx \right. \\ &\quad -irB \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dy + isG \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dx \\ &\quad \left. + (B-G) \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dy + ir(B-G) \oint_{\Gamma} v e^{i(rx+sy)} dx \right\}, \quad (5.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(B-G)rs\bar{u} - (Gr^2 +Bs^2)\bar{v} &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ (B-G) \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dy + ir(B-G) \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dx \right. \\ &\quad -B \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dx + G \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} e^{i(rx+sy)} dy \\ &\quad \left. + isB \oint_{\Gamma} v e^{i(rx+sy)} dx - irG \oint_{\Gamma} v e^{i(rx+sy)} dy \right\}. \quad (5.4) \end{aligned}$$

As equações (5.3) e (5.4) podem ser resolvidas para \bar{u} e \bar{v} resultando nas equações

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{BG(r^2 + s^2)^2} \left\{ -(Gr^2 + Bs^2) \left[B \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i(rx+sy)} dy - G \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dx \right. \right. \\ &\quad -irB \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dy + isG \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dx + (B-G) \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dy \\ &\quad \left. + ir(B-G) \oint_{\Gamma} v e^{i(rx+sy)} dx \right] + (B-G)rs \left[(B-G) \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dy \right. \\ &\quad \left. + ir(B-G) \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dx - B \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dx + G \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} e^{i(rx+sy)} dy \right. \\ &\quad \left. \left. + isB \oint_{\Gamma} v e^{i(rx+sy)} dx - irG \oint_{\Gamma} v e^{i(rx+sy)} dy \right] \right\} \quad e \quad (5.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{BG(r^2 + s^2)^2} \left\{ (B-G)rs \left[B \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i(rx+sy)} dy - G \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dx \right. \right. \\ &\quad \left. -irB \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dy + isG \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dx + (B-G) \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dy \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +ir(B - G) \oint_{\Gamma} v e^{i(rx+sy)} dx \Big] - (Br^2 + Gs^2) \left[(B - G) \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dy \right. \\
& +ir(B - G) \oint_{\Gamma} u e^{i(rx+sy)} dx - B \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} e^{i(rx+sy)} dx + G \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} e^{i(rx+sy)} dy \\
& \left. +isB \oint_{\Gamma} v e^{i(rx+sy)} dx - irG \oint_{\Gamma} v e^{i(rx+sy)} dy \right] \Big\}. \tag{5.6}
\end{aligned}$$

Define-se as funções \overline{F}_1 , \overline{F}_2 e \overline{H} e suas respectivas transformadas inversas de Fourier conforme mostrado nas seguintes equações

$$\overline{F}_1(r, s) \equiv \frac{Gr^2 + Bs^2}{BG(r^2 + s^2)^2} \longleftrightarrow F_1(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \overline{F}_1(r, s); r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\}, \tag{5.7}$$

$$\overline{F}_2(r, s) \equiv \frac{Br^2 + Gs^2}{BG(r^2 + s^2)^2} \longleftrightarrow F_2(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \overline{F}_2(r, s); r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\} \quad \text{e] } \tag{5.8}$$

$$\overline{H}(r, s) \equiv \frac{(B - G)rs}{BG(r^2 + s^2)^2} \longleftrightarrow H(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \overline{H}(r, s); r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\}. \tag{5.9}$$

A partir das equações (5.7) a (5.9), pode-se também definir as seguintes funções

$$F_{1_x}(x, y) \equiv \frac{\partial F_1}{\partial x} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -ir \overline{F}_1(r, s); r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\}, \tag{5.10}$$

$$F_{1_y}(x, y) \equiv \frac{\partial F_1}{\partial y} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -is \overline{F}_1(r, s); r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\}, \tag{5.11}$$

$$F_{2_x}(x, y) \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -ir \overline{F}_2(r, s); r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\}, \tag{5.12}$$

$$F_{2_y}(x, y) \equiv \frac{\partial F_2}{\partial y} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -is \overline{F}_2(r, s); r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\}, \tag{5.13}$$

$$H_x(x, y) \equiv \frac{\partial H}{\partial x} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -ir \overline{H}(r, s); r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\} \quad \text{e} \tag{5.14}$$

$$H_y(x, y) \equiv \frac{\partial H}{\partial y} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -is \overline{H}(r, s); r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\}. \tag{5.15}$$

As definições das funções F_1 , F_2 e H permitem que a aplicação da transformada inversa de Fourier nas expressões (5.5) e (5.6) seja escrita conforme

$$\begin{aligned}
u(x_a, y_a) = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ -B \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} F_1(x_a - x, y_a - y) dy + G \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} F_1(x_a - x, y_a - y) dx \right. \\
& \left. -B \oint_{\Gamma} u F_{1_x}(x_a - x, y_a - y) dy + G \oint_{\Gamma} u F_{1_y}(x_a - x, y_a - y) dx \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(B-G) \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} F_1(x_a - x, y_a - y) dy + (B-G) \oint_{\Gamma} v F_{1_x}(x_a - x, y_a - y) dx \\
& +(B-G) \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} H(x_a - x, y_a - y) dy - (B-G) \oint_{\Gamma} u H_x(x_a - x, y_a - y) dx \\
& -B \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} H(x_a - x, y_a - y) dx + G \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} H(x_a - x, y_a - y) dy \\
& -B \oint_{\Gamma} v H_y(x_a - x, y_a - y) dx + G \oint_{\Gamma} v H_x(x_a - x, y_a - y) dy \} \quad (5.16)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
v(x_a, y_a) = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ B \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} H(x_a - x, y_a - y) dy - G \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} H(x_a - x, y_a - y) dx \right. \\
& +B \oint_{\Gamma} u H_x(x_a - x, y_a - y) dy - G \oint_{\Gamma} u H_y(x_a - x, y_a - y) dx \\
& +(B-G) \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} H(x_a - x, y_a - y) dy - (B-G) \oint_{\Gamma} v H_x(x_a - x, y_a - y) dx \\
& -(B-G) \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} F_2(x_a - x, y_a - y) dy + (B-G) \oint_{\Gamma} u F_{2_x}(x_a - x, y_a - y) dx \\
& +B \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} F_2(x_a - x, y_a - y) dx - G \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} F_2(x_a - x, y_a - y) dy \\
& \left. +B \oint_{\Gamma} v F_{2_y}(x_a - x, y_a - y) dx - G \oint_{\Gamma} v F_{2_x}(x_a - x, y_a - y) dy \right\} \quad (5.17)
\end{aligned}$$

As funções F_1 , F_2 e H são dadas pelas expressões

$$F_1(x, y) = \frac{1}{2GB} \left[-\frac{G+B}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{B-G}{2} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right], \quad (5.18)$$

$$F_2(x, y) = \frac{1}{2GB} \left[-\frac{G+B}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{B-G}{2} \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \right] \quad \text{e} \quad (5.19)$$

$$H(x, y) = -\frac{B-G}{2BG} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (5.20)$$

cuja obtenção através da aplicação da transformada inversa de Fourier nas respectivas funções $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ e \overline{H} está descrita no capítulo (6).

As expressões para as derivadas parciais de primeira ordem das funções F_1 , F_2 e H são

$$F_{1_x}(x, y) = \frac{1}{2GB} ((B-3G)y^2 - (G+B)x^2) \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (5.21)$$

$$F_{1y}(x, y) = \frac{1}{2GB}((G - 3B)x^2 - (B + G)y^2)\frac{y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (5.22)$$

$$F_{2x}(x, y) = \frac{1}{2GB}((G - 3B)y^2 - (B + G)x^2)\frac{x}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (5.23)$$

$$F_{2y}(x, y) = \frac{1}{2GB}((B - 3G)x^2 - (G + B)y^2)\frac{y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (5.24)$$

$$H_x(x, y) = \frac{B - G}{2BG} \frac{x^2y - y^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad e \quad (5.25)$$

$$H_y(x, y) = \frac{B - G}{2BG} \frac{-x^3 + xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (5.26)$$

Reformulando o equacionamento acima na forma matricial, obtém-se

$$\mathbf{U}^* = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \mathbf{U} d\gamma + \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \partial \mathbf{U} d\gamma, \quad (5.27)$$

onde \mathbf{U}^* , \mathbf{U} e $\partial \mathbf{U}$ são os vetores

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{col}(u^*(x_a, y_a), v^*(x_a, y_a)), \quad (5.28)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{col}(u(x, y), v(x, y)) \quad (5.29)$$

e

$$\partial \mathbf{U} = \mathbf{col}\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x, y), \frac{\partial}{\partial y}u(x, y), \frac{\partial}{\partial x}v(x, y), \frac{\partial}{\partial y}v(x, y)\right) \quad (5.30)$$

e as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -B F_{1x}\eta_x - G F_{1y}\eta_y + (B - G)H_x\eta_y & -(B - G)F_{1x}\eta_y + B H_y\eta_y + G H_x\eta_x \\ +B H_x\eta_x + G H_y\eta_y - (B - G)F_{2x}\eta_y & +(B - G)H_x\eta_y - B F_{2y}\eta_y - G F_{2x}\eta_x \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -B F_1\eta_x & -G F_1\eta_y + (B - G)H\eta_x & +G H\eta_x & -(B - G)F_1\eta_x + B H\eta_y \\ +B H\eta_x & +G H\eta_y - (B - G)F_2\eta_x & -G F_2\eta_x & +(B - G)H\eta_x - B F_2\eta_y \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

avaliados em $x_a - x$ e $y_a - y$. Aqui $d\gamma$ é dado por

$$-\eta_y d\gamma = dx \quad e$$

$$+\eta_x d\gamma = dy, \quad (5.33)$$

onde η_x, η_y são os cossenos diretores da normal à fronteira do domínio.

Observando que as condições de contorno são prescritas para a intensidade de força na fronteira, considera-se que as relações entre $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial \gamma}, \frac{\partial v}{\partial \gamma}, f_x, f_y$ onde f_x, f_y são intensidades de força na fronteira nas direções x e y e $\frac{\partial u}{\partial \gamma}, \frac{\partial v}{\partial \gamma}$ são as derivadas tangenciais de u e v . Escrevendo estas relações na notação matricial obtém-se

$$\mathbf{W} = \mathbf{C} \partial \mathbf{U}, \quad (5.34)$$

onde a matriz \mathbf{C} é dada por

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\eta_y & +\eta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta_y & +\eta_x \\ +B \eta_x & +G \eta_y & +G \eta_y & +(B - 2G) \eta_x \\ +(B - 2G) \eta_y & +G \eta_x & +G \eta_x & +B \eta_y \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

e o vetor \mathbf{W} por

$$\mathbf{W} = \mathbf{col}(\mathbf{U}_\gamma, \mathbf{F}), \quad (5.36)$$

sendo os vetores \mathbf{U}_γ e \mathbf{F} definidos como

$$\mathbf{U}_\gamma = \mathbf{col}\left(\frac{\partial u}{\partial \gamma}, \frac{\partial v}{\partial \gamma}\right) \quad (5.37)$$

e

$$\mathbf{F} = \mathbf{col}(f_x, f_y) \quad (5.38)$$

Substituindo a equação (5.34) na equação (5.27) obtém-se

$$\mathbf{U}^* = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \mathbf{U} d\gamma + \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{W} d\gamma. \quad (5.39)$$

Em seguida, define-se

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \quad (5.40)$$

e reescreve-se \mathbf{D} como uma matriz de blocos

$$\mathbf{D} = (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2), \quad (5.41)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz 2×4 e \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 são matrizes 2×2 . Com estas definições, a equação (5.39) passa a ter a forma

$$\mathbf{U}^* = \oint_{\Gamma} [\mathbf{A} \mathbf{U} + \mathbf{D}_1 \mathbf{U}_{,\gamma}] d\gamma + \oint_{\Gamma} \mathbf{D}_2 \mathbf{F} d\gamma \quad (5.42)$$

a qual é uma integral de contorno apropriada para a solução de problemas que apresentam deslocamentos e forças prescritos na fronteira como condições de contorno.

Pode-se ainda simplificar a equação (5.42). Para isto, usa-se o resultado

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{D}_1 \mathbf{U}_{,\gamma} d\gamma = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{D}_1 \mathbf{U} d\gamma \quad (5.43)$$

que, combinado com a definição

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{D}_1, \quad (5.44)$$

resulta em

$$\mathbf{U}^* = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \mathbf{U} d\gamma + \oint_{\Gamma} \mathbf{D}_2 \mathbf{F} d\gamma. \quad (5.45)$$

Finalmente é importante lembrar que u^* e v^* coincidem com u e v no interior do domínio Ω e são nulos fora do domínio Ω .

5.2 Solução do problema através da integral de contorno.

As equações (5.16) e (5.17), da mesma forma que a equação (4.14) obtida para o problema de condução de calor apresentado na seção (4.1), necessitam mais informações do que as que são fornecidas pelas condições de contorno das equações diferenciais parciais (5.1) e (5.2), o que torna necessário calcular as informações adicionais. O mesmo caminho desenvolvido na seção (4.2) pode ser empregado para solucionar este problema:

1. Estabelece-se uma base de funções que possa expressar as funções u , v , $u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$, $v_x \equiv \frac{\partial v}{\partial x}$ e $v_y \equiv \frac{\partial v}{\partial y}$ na forma de uma combinação linear de suas funções integrantes.

2. Em seguida, obtém-se expressões para u_x , u_y , v_x e v_y derivando-se as equações (5.16) e (5.17) em x e y , cujo resultado, juntamente com um reagrupamento destas equações, está apresentado nas expressões

$$\begin{aligned}
u = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} u \left[-B F_{1_x} dy + G F_{1_y} dx - (B - G) H_x dx \right] \right. \\
& + \oint_{\Gamma} v \left[(B - G) F_{1_x} dx - B H_y dx + G H_x dy \right] \\
& + \oint_{\Gamma} u_x \left[-B F_1 dy \right] + \oint_{\Gamma} u_y \left[G F_1 dx + (B - G) H dy \right] \\
& \left. + \oint_{\Gamma} v_x \left[G H dy \right] + \oint_{\Gamma} v_y \left[-(B - G) F_1 dy - B H dx \right] \right\}, \quad (5.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} u \left[B H_x dy - G H_y dx + (B - G) F_{2_x} dx \right] \right. \\
& + \oint_{\Gamma} v \left[-(B - G) H_x dx + B F_{2_y} dx - G F_{2_x} dy \right] \\
& + \oint_{\Gamma} u_x \left[B H dy \right] + \oint_{\Gamma} u_y \left[-G H dx - (B - G) F_2 dy \right] \\
& \left. + \oint_{\Gamma} v_x \left[-G F_2 dy \right] + \oint_{\Gamma} v_y \left[(B - G) H dy + B F_2 dx \right] \right\}, \quad (5.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_x = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} u \left[-B F_{1_{xx}} dy + G F_{1_{xy}} dx - (B - G) H_{xx} dx \right] \right. \\
& + \oint_{\Gamma} v \left[(B - G) F_{1_{xx}} dx - B H_{xy} dx + G H_{xx} dy \right] \\
& + \oint_{\Gamma} u_x \left[-B F_{1_x} dy \right] + \oint_{\Gamma} u_y \left[G F_{1_x} dx + (B - G) H_x dy \right] \\
& \left. + \oint_{\Gamma} v_x \left[G H_x dy \right] + \oint_{\Gamma} v_y \left[-(B - G) F_{1_x} dy - B H_x dx \right] \right\}, \quad (5.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_y = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} u \left[-B F_{1_{xy}} dy + G F_{1_{yy}} dx - (B - G) H_{xy} dx \right] \right. \\
& + \oint_{\Gamma} v \left[(B - G) F_{1_{xy}} dx - B H_{yy} dx + G H_{xy} dy \right] \\
& + \oint_{\Gamma} u_x \left[-B F_{1_y} dy \right] + \oint_{\Gamma} u_y \left[G F_{1_y} dx + (B - G) H_y dy \right] \\
& \left. + \oint_{\Gamma} v_x \left[G H_y dy \right] + \oint_{\Gamma} v_y \left[-(B - G) F_{1_y} dy - B H_y dx \right] \right\}, \quad (5.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_x = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} u [B H_{xx} dy - G H_{xy} dx + (B - G) F_{2_{xx}} dx] \right. \\
& + \oint_{\Gamma} v [-(B - G) H_{xx} dx + B F_{2_{xy}} dx - G F_{2_{xx}} dy] \\
& + \oint_{\Gamma} u_x [B H_x dy] + \oint_{\Gamma} u_y [-G H_x dx - (B - G) F_{2_x} dy] \\
& \left. + \oint_{\Gamma} v_x [-G F_{2_x} dy] + \oint_{\Gamma} v_y [(B - G) H_x dy + B F_{2_x} dx] \right\} \quad (5.50)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
v_y = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} u [B H_{xy} dy - G H_{yy} dx + (B - G) F_{2_{xy}} dx] \right. \\
& + \oint_{\Gamma} v [-(B - G) H_{xy} dx + B F_{2_{yy}} dx - G F_{2_{xy}} dy] \\
& + \oint_{\Gamma} u_x [B H_y dy] + \oint_{\Gamma} u_y [-G H_y dx - (B - G) F_{2_y} dy] \\
& \left. + \oint_{\Gamma} v_x [-G F_{2_y} dy] + \oint_{\Gamma} v_y [(B - G) H_y dy + B F_{2_y} dx] \right\}, \quad (5.51)
\end{aligned}$$

onde, por facilidade de notação, omitiu-se os parâmetros das funções u , v , F_1 , F_2 , H e de suas derivadas parciais u_x , u_y , v_x , v_y , F_{1_x} , F_{1_y} , F_{2_x} , F_{2_y} , H_x e H_y , e definiu-se

$$\begin{aligned}
F_{1_{xx}} & \equiv \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} (x_a - x, y_a - y), \\
F_{1_{xy}} & \equiv \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} (x_a - x, y_a - y), \\
F_{1_{yy}} & \equiv \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} (x_a - x, y_a - y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2_{xx}} & \equiv \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} (x_a - x, y_a - y), \\
F_{2_{xy}} & \equiv \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} (x_a - x, y_a - y), \\
F_{2_{yy}} & \equiv \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} (x_a - x, y_a - y),
\end{aligned}$$

$$H_{xx} \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} (x_a - x, y_a - y),$$

$$H_{xy} \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} (x_a - x, y_a - y) \quad \text{e}$$

$$H_{yy} \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} (x_a - x, y_a - y);$$

3. Os passos seguintes com o objetivo de obter um sistema de equações algébricas lineares podem ser feitos conforme apresentado na seção (4.2).

Os resultados, para a formulação descrita acima, foram obtidos para um problema envolvendo deslocamento prescrito na fronteira como condição de contorno. Vários domínios foram testados, sendo que as soluções apresentaram bons resultados com uma convergência rápida no processo iterativo de solução do sistema de equações algébricas.

Para a integral de contorno dada por (5.45), o seguinte procedimento é adotado. Para calcular as condições de contorno incógnitas das componentes u e v do deslocamento \mathbf{U} e para as componentes f_x e f_y da força \mathbf{F} emprega-se os mesmos procedimentos contidos no método dos elementos de contorno. Na seqüência, resumidamente apresentar-se-á este procedimento:

1. Inicialmente expande-se as componentes de \mathbf{U} e \mathbf{F} em termos de alguma base de funções conhecidas;
2. Elege-se um conjunto de N pontos de colocação (posicionados dentro ou fora do domínio), onde N é o número de coeficientes incógnitos da expansão dos componentes \mathbf{U} e \mathbf{F} . Para mais detalhes veja *Furtado et al.* 1998⁶;
3. Finalmente, obtém-se um sistema linear de equações algébricas para determinar os coeficientes incógnitos, substituindo a expansão em bases de funções na equação (5.45) (ou (5.42)) e avaliando esta equação nos N pontos de colocação .

Exemplos de problemas resolvidos utilizando a formulação desenvolvida a partir da equação (5.45) são apresentados no capítulo 7.

5.3 Demonstração da validade da integral de contorno.

A demonstração da validade das integrais de contorno (5.16) e (5.17) segue o mesmo procedimento apresentado na seção (4.3). Inicialmente procura-se demonstrar que as integrais de contorno são nulas para um ponto (x_a, y_a) fora de Ω pelo emprego de teorema de Green nas equações (5.16) e (5.17), o que nos conduz as equações

$$\begin{aligned}
u = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ -B \int_{\Omega} (u_{xx}F_1 - u_x F_{1x}) dx dy - G \int_{\Omega} (u_{yy}F_1 - u_y F_{1y}) dx dy \right. \\
& -B \int_{\Omega} (u_x F_{1x} - u F_{1xx}) dx dy - G \int_{\Omega} (u_y F_{1y} - u F_{1yy}) dx dy \\
& -(B-G) \int_{\Omega} (v_{xy}F_1 - v_y F_{1x}) dx dy - (B-G) \int_{\Omega} (v_y F_{1x} - v F_{1xy}) dx dy \\
& +(B-G) \int_{\Omega} (u_{xy}H - u_y H_x) dx dy + (B-G) \int_{\Omega} (u_y H_x - u H_{xy}) dx dy \\
& +B \int_{\Omega} (v_{yy}H - v_y H_y) dx dy + G \int_{\Omega} (v_{xx}H - v_x H_x) dx dy \\
& \left. +B \int_{\Omega} (v_y H_y - v H_{yy}) dx dy + G \int_{\Omega} (v_x H_x - v H_{xx}) dx dy \right\} \quad (5.52)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
v = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ B \int_{\Omega} (u_{xx}H - u_x H_x) dx dy + G \int_{\Omega} (u_{yy}H - u_y H_y) dx dy \right. \\
& +B \int_{\Omega} (u_x H_x - u H_{xx}) dx dy + G \int_{\Omega} (u_y H_y - u H_{yy}) dx dy \\
& +(B-G) \int_{\Omega} (v_{xy}H - v_y H_x) dx dy + (B-G) \int_{\Omega} (v_y H_x - v H_{xy}) dx dy \\
& -(B-G) \int_{\Omega} (u_{xy}F_2 - u_y F_{2x}) dx dy - (B-G) \int_{\Omega} (u_y F_{2x} - u F_{2xy}) dx dy \\
& -B \int_{\Omega} (v_{yy}F_2 - v_y F_{2y}) dx dy - G \int_{\Omega} (v_{xx}F_2 - v_x F_{2x}) dx dy \\
& \left. -B \int_{\Omega} (v_y F_{2y} - v F_{2yy}) dx dy - G \int_{\Omega} (v_x F_{2x} - v F_{2xx}) dx dy \right\}. \quad (5.53)
\end{aligned}$$

As expressões (5.52) e (5.53) podem ser simplificadas e reagrupadas resultando nas equações

$$\begin{aligned}
u = & -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \left\{ -F_1 [B u_{xx} + (B-G)v_{xy} + G u_{yy}] + H [G v_{xx} + (B-G)u_{xy} + B v_{yy}] \right. \\
& \left. u [B F_{1xx} - (B-G)H_{xy} + G F_{1yy}] - v [G H_{xx} - (B-G)F_{1xy} + B H_{yy}] \right\} dx dy \quad (5.54)
\end{aligned}$$

e

$$v = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \{ H [B u_{xx} + (B-G)v_{xy} + G u_{yy}] - F_2 [G v_{xx} + (B-G)u_{xy} + B v_{yy}] \}$$

$$-u \left[B H_{xx} - (B - G)F_{2_{xy}} + G H_{yy} \right] + v \left[G F_{2_{xx}} - (B - G)H_{xy} + B F_{2_{yy}} \right] dx dy, \quad (5.55)$$

sendo que

$$u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u_{xy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad u_{yy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$v_{xx} \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \quad v_{xy} \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad v_{yy} \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Os primeiros dois termos entre colchetes nas equações (5.54) e (5.55) são nulos pois correspondem aos membros esquerdos das equações diferenciais parciais (5.1) e (5.2) respectivamente. Também pode-se facilmente verificar que:

- $B F_{1_{xx}} - (B - G)H_{xy} + G F_{1_{yy}} = 0;$
- $G H_{xx} - (B - G)F_{1_{xy}} + B H_{yy} = 0;$
- $B H_{xx} - (B - G)F_{2_{xy}} + G H_{yy} = 0;$
- $G F_{2_{xx}} - (B - G)H_{xy} + B F_{2_{yy}} = 0,$

o que demonstra que as equações (5.16) e (5.17) são nulas para pontos $(x_a, y_a) \notin \Omega$.

O segundo passo na demonstração da validade da expressões (5.16) e (5.17) consiste em demonstrar que as mesmas correspondem aos valores das funções u e v , em $(x_a, y_a) \in \Omega$. Neste passo utilizar-se-á um domínio auxiliar Ω' contínuo e conexo construído a partir de Ω , conforme apresentado na figura (4.2). Este domínio auxiliar é obtido estabelecendo-se próximos entre si dois pontos, a e a' , sobre a fronteira Γ . O arco menor $\widehat{aa'}$ é retirado de Γ e fechando o contorno são adicionados os segmentos \overline{ab} , a circunferência C com raio ϵ , centro em p e subtraída do arco menor $\widehat{bb'}$, e ainda o segmento $\overline{b'a'}$.

A avaliação das expressões (5.16) e (5.17) para o ponto p em relação ao domínio Ω' é igual a zero, uma vez que $p \notin \Omega'$, conforme demonstração apresentada anteriormente envolvendo o emprego do teorema de Green. Assim, pode-se reescrever de forma abreviada a equação (5.16), tanto quanto a equação (5.17), conforme a seguinte expressão

$$0 = \oint_{\Gamma - \widehat{aa'}} + \oint_{\overline{ab}} + \oint_{C - \widehat{bb'}} + \oint_{\overline{b'a'}}. \quad (5.56)$$

A expressão (5.56) pode ser avaliada para os pontos a e a' , b e b' estabelecidos próximos entre si. No caso limite, quando as distâncias entre os pontos a e a' , b e b' tende a zero, as integrais sobre os segmentos \overline{ab} e $\overline{b'a'}$ tendem a anularem-se, uma vez que são avaliadas

sobre praticamente o mesmo segmento, mas em sentidos opostos, e a equação (5.56) pode ser reescrita conforme

$$\oint_{\Gamma} = - \oint_C. \quad (5.57)$$

A expressão (5.57) mostra que a avaliação das expressões (5.16) e (5.17) sobre o caminho Γ no sentido anti-horário é igual ao valor negativo da avaliação da mesma expressão sobre a circunferência C no sentido horário. As avaliações de (5.16) e (5.17) em C podem ser obtidas empregando-se um sistema de coordenadas cilíndricas $r \times \theta$ com centro no ponto p . Partindo dos resultados obtidos no apêndice (A), equações (A.5) a (A.11), e considerando que para a circunferência do problema tem-se $r(\theta) = \epsilon$, $r'(\theta) = 0$, obtém-se as equações

$$\oint_C u_y F_1 dx = \frac{(G+B)}{2GB} \epsilon \ln(\epsilon) \int_0^{2\pi} u_y \text{sen}(\theta) d\theta - \frac{(B-G)}{2BG} \epsilon \int_0^{2\pi} u_y \cos^2(\theta) \text{sen}(\theta) d\theta, \quad (5.58)$$

$$\oint_C u_x F_1 dy = -\frac{G+B}{2GB} \epsilon \ln(\epsilon) \int_0^{2\pi} u_x \cos(\theta) d\theta + \frac{B-G}{2GB} \epsilon \int_0^{2\pi} u_x \cos^3(\theta) d\theta, \quad (5.59)$$

$$\oint_C u F_{1x} dy = -\frac{(B-3G)}{2GB} \int_0^{2\pi} u \cos^2(\theta) \text{sen}^2(\theta) d\theta - \frac{(G+B)}{2GB} \int_0^{2\pi} u \cos^4(\theta) d\theta, \quad (5.60)$$

$$\oint_C u F_{1y} dx = \frac{(G-3B)}{2GB} \int_0^{2\pi} u \cos^2(\theta) \text{sen}^2(\theta) d\theta - \frac{(G+B)}{2GB} \int_0^{2\pi} u \text{sen}^4(\theta) d\theta, \quad (5.61)$$

$$\oint_C v_y F_1 dy = -\frac{(G+B)}{2GB} \epsilon \ln(\epsilon) \int_0^{2\pi} v_y \cos(\theta) d\theta + \frac{(B-G)}{2GB} \epsilon \int_0^{2\pi} v_y \cos^3(\theta) d\theta, \quad (5.62)$$

$$\oint_C v F_{1x} dx = -\frac{B-3G}{2GB} \int_0^{2\pi} v \cos(\theta) \text{sen}^3(\theta) d\theta + \frac{G+B}{2GB} \int_0^{2\pi} v \text{sen}(\theta) \cos^3(\theta) d\theta, \quad (5.63)$$

$$\oint_C u_y H dy = -\frac{B-G}{GB} \epsilon \int_0^{2\pi} u_y \cos^2(\theta) \text{sen}(\theta) d\theta, \quad (5.64)$$

$$\oint_C u H_x dx = \frac{B-G}{2BG} \int_0^{2\pi} u (\cos^2(\theta) \text{sen}^2(\theta) - \text{sen}^4(\theta)) d\theta, \quad (5.65)$$

$$\oint_C v_y H dx = \frac{B-G}{BG} \epsilon \int_0^{2\pi} v_y \cos(\theta) \text{sen}^2(\theta) d\theta, \quad (5.66)$$

$$\oint_C v_x H dy = -\frac{B-G}{BG} \epsilon \int_0^{2\pi} v_x \cos^2(\theta) \text{sen}(\theta) d\theta, \quad (5.67)$$

$$\oint_C v H_y dx = \frac{B-G}{2BG} \int_0^{2\pi} v (\cos(\theta) \text{sen}^3(\theta) - \text{sen}(\theta) \cos^3(\theta)) d\theta \quad e \quad (5.68)$$

$$\oint_C v H_x dy = -\frac{B-G}{2BG} \int_0^{2\pi} v (\cos^3(\theta) \text{sen}(\theta) - \cos(\theta) \text{sen}^3(\theta)) d\theta \quad (5.69)$$

para os termos de (5.16) e

$$\oint_C v_y F_2 dx = \frac{(G+B)}{2GB} \epsilon \ln(\epsilon) \int_0^{2\pi} v_y \text{sen}(\theta) d\theta + \frac{(B-G)}{2BG} \epsilon \int_0^{2\pi} v_y \cos^2(\theta) \text{sen}(\theta) d\theta, \quad (5.70)$$

$$\oint_C u_y F_2 dy = -\frac{G+B}{2GB} \epsilon \ln(\epsilon) \int_0^{2\pi} u_y \cos(\theta) d\theta - \frac{B-G}{2GB} \epsilon \int_0^{2\pi} u_y \cos^3(\theta) d\theta, \quad (5.71)$$

$$\oint_C v F_{2_x} dy = -\frac{(G-3B)}{2GB} \int_0^{2\pi} v \cos^2(\theta) \text{sen}^2(\theta) d\theta - \frac{(G+B)}{2GB} \int_0^{2\pi} v \cos^4(\theta) d\theta, \quad (5.72)$$

$$\oint_C v F_{2_y} dx = \frac{(B-3G)}{2GB} \int_0^{2\pi} v \cos^2(\theta) \text{sen}^2(\theta) - \frac{(G+B)}{2GB} \int_0^{2\pi} v \text{sen}^4(\theta) d\theta, \quad (5.73)$$

$$\oint_C v_x F_2 dy = -\frac{(G+B)}{2GB} \epsilon \ln(\epsilon) \int_0^{2\pi} v_x \cos(\theta) d\theta - \frac{(B-G)}{2GB} \epsilon \int_0^{2\pi} v_x \cos^3(\theta) d\theta, \quad (5.74)$$

$$\oint_C u F_{2_x} dx = -\frac{G-3B}{2GB} \int_0^{2\pi} u \cos(\theta) \text{sen}^3(\theta) d\theta + \frac{G+B}{2GB} \int_0^{2\pi} u \text{sen}(\theta) \cos^3(\theta) d\theta, \quad (5.75)$$

$$\oint_C v_y H dy = -\frac{B-G}{GB} \epsilon \int_0^{2\pi} v_y \cos^2(\theta) \text{sen}(\theta) d\theta, \quad (5.76)$$

$$\oint_C v H_x dx = \frac{B-G}{2BG} \int_0^{2\pi} v (\cos^2(\theta) \text{sen}^2(\theta) - \text{sen}^4(\theta)) d\theta, \quad (5.77)$$

$$\oint_C u_y H dx = \frac{B-G}{BG} \epsilon \int_0^{2\pi} u_y \cos(\theta) \text{sen}^2(\theta) d\theta, \quad (5.78)$$

$$\oint_C u_x H dy = -\frac{B-G}{BG} \epsilon \int_0^{2\pi} u_x \cos^2(\theta) \text{sen}(\theta) d\theta, \quad (5.79)$$

$$\oint_C u H_y dx = \frac{B-G}{2BG} \int_0^{2\pi} u (\cos(\theta) \text{sen}^3(\theta) - \text{sen}(\theta) \cos^3(\theta)) d\theta \quad e \quad (5.80)$$

$$\oint_C u H_x dy = -\frac{B-G}{2BG} \int_0^{2\pi} u (\cos^3(\theta) \text{sen}(\theta) - \cos(\theta) \text{sen}^3(\theta)) d\theta \quad (5.81)$$

para os termos de (5.17).

As expressões (5.58) a (5.69) e (5.70) a (5.81) podem ser avaliadas para uma circunferência C construída com um raio tão pequeno quanto se queira. No limite, quando $\epsilon \rightarrow 0$, as avaliações das expressões (5.16) e (5.17) sobre a circunferência C resultam em $u(x_a, y_a)$ e $v(x_a, y_a)$ respectivamente, o que facilmente pode ser verificado fazendo-se o limite $\epsilon \rightarrow 0$ nas expressões (5.58) a (5.69) e (5.70) a (5.81) e substituindo-as em (5.16) e (5.17). Assim, o membro da direita na expressão (5.57) resulta na equação

$$\oint_{\Gamma} = \begin{cases} u(x_a, y_a) \\ v(x_a, y_a) \end{cases} \quad (5.82)$$

(forma abreviada), o que prova finalmente a validade da equação (5.16) e (5.17).

5.4 Aplicação a um problema de propagação de ondas em duas dimensões.

Os problemas de propagação de ondas em meios elásticos lineares, em fluidos e em campos eletromagnéticos são formulados em termos de equações diferenciais parciais que apresentam uma forma igual ou semelhante à equação homogênea da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.83)$$

cujas condições de contorno e iniciais são

- $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ prescrito em um ou mais segmentos da fronteira;
- u prescrito nos demais segmentos da fronteira;
- uma combinação linear de $u(x, y, 0)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0)$ prescritos no domínio Ω ,

onde u é uma função $u : \Omega \rightarrow \Re$ e $\Omega \subset \Re^2$ um domínio contínuo conforme mostrado na figura (4.1).

A solução da equação (5.83) será obtida pelo emprego das transformadas de Fourier e Laplace. Tendo em vista as equações (C.3)—(C.4), a aplicação da transformada de Laplace em (5.83) resulta em

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = q^2 \hat{u} - q u(x, y, 0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0), \quad (5.84)$$

onde \hat{u} é a transformada de Laplace de u : $\hat{u}(x, y, q) = \mathcal{L}\{u(x, y, t); t \rightarrow q\}$.

Agora, tendo em vista as equações (4.6)—(4.9), a aplicação da transformada de Fourier em (5.84) resulta em

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \hat{u}_x e^{i(rx+sy)} dy - \frac{ir}{2\pi} \oint_{\Gamma} \hat{u} e^{i(rx+sy)} dy - r^2 \bar{\bar{u}} \\ & - \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \hat{u}_y e^{i(rx+sy)} dx + \frac{is}{2\pi} \oint_{\Gamma} \hat{u} e^{i(rx+sy)} dx - s^2 \bar{\bar{u}} \\ & = q^2 \bar{\bar{u}} - q \bar{u}(r, s, 0) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(r, s, 0), \end{aligned} \quad (5.85)$$

onde \bar{u} é a transformada de Fourier de u dada por $\bar{u}(s, r, t) = \mathcal{F}\{u(x, y, t); x \rightarrow r; y \rightarrow s\}$ e $\bar{\bar{u}}$ é a transformada combinada de Fourier e de Laplace de u dada por $\bar{\bar{u}}(s, r, q) = \mathcal{L}\{\mathcal{F}\{u(x, y, t); x \rightarrow r; y \rightarrow s\}; t \rightarrow q\}$.

Isolando \widehat{u} e aplicando a transformada inversa de Fourier na equação acima, e lembrando da propriedade $\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(s) \exp(as)\} = f(x - a)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(x_p, y_p, q) &= +\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \widehat{u}(x, y, q) \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{is}{q^2 + r^2 + s^2}; r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\} (x_p - x, y_p - y, q) dx \\
&\quad -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \widehat{u}(x, y, q) \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{ir}{q^2 + r^2 + s^2}; r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\} (x_p - x, y_p - y, q) dy \\
&\quad +\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \widehat{u}_x(x, y, q) \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{q^2 + r^2 + s^2}; r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\} (x_p - x, y_p - y, q) dy \\
&\quad -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \widehat{u}_y(x, y, q) \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{q^2 + r^2 + s^2}; r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\} (x_p - x, y_p - y, q) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} u(x, y, 0) \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{q}{q^2 + r^2 + s^2}; r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\} (x_p - x, y_p - y, q) dx dy \\
&\quad + \int_{\Omega} u_t(x, y, 0) \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{q^2 + r^2 + s^2}; r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\} (x_p - x, y_p - y, q) dx dy.
\end{aligned} \tag{5.86}$$

A equação acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(x_p, y_p, q) &= -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \widehat{u}(x, y, q) \widehat{F}_y(x_p - x, y_p - y, q) dx \\
&\quad +\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \widehat{u}(x, y, q) \widehat{F}_x(x_p - x, y_p - y, q) dy \\
&\quad +\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \widehat{u}_x(x, y, q) \widehat{F}(x_p - x, y_p - y, q) dy \\
&\quad -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \widehat{u}_y(x, y, q) \widehat{F}(x_p - x, y_p - y, q) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} u(x, y, 0) q \widehat{F}(x_p - x, y_p - y, q) dx dy \\
&\quad + \int_{\Omega} u_t(x, y, 0) \widehat{F}(x_p - x, y_p - y, q) dx dy,
\end{aligned} \tag{5.87}$$

onde

$$\widehat{F}(x, y, q) \equiv \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{q^2 + r^2 + s^2}; r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\}, \tag{5.88}$$

$$\widehat{F}_x(x, y, q) \equiv \frac{\partial \widehat{F}}{\partial x} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{-ir}{q^2 + r^2 + s^2}; r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\} \quad e \tag{5.89}$$

$$\widehat{F}_y(x, y, q) \equiv \frac{\partial \widehat{F}}{\partial y} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{-is}{q^2 + r^2 + s^2}; r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\}. \tag{5.90}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na equação (5.87) e tendo em vista o teorema da convolução dado em (C.5), tem-se

$$\begin{aligned}
u(x_p, y_p, t_p) &= -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \int_0^{t_p} u(x, y, t) F_y(x_p - x, y_p - y, t_p - t) dt dx \\
&+ \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \int_0^{t_p} u(x, y, t) F_x(x_p - x, y_p - y, t_p - t) dt dy \\
&+ \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \int_0^{t_p} u_x(x, y, t) F(x_p - x, y_p - y, t_p - t) dt dy \\
&- \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \int_0^{t_p} u_y(x, y, t) F(x_p - x, y_p - y, t_p - t) dt dx \\
&+ \int_{\Omega} u(x, y, 0) F_t(x_p - x, y_p - y, t_p) dx dy \\
&+ \int_{\Omega} u_t(x, y, 0) F(x_p - x, y_p - y, t_p) dx dy,
\end{aligned} \tag{5.91}$$

onde

$$F(x, y, t) \equiv \mathcal{L}^{-1} \{ \widehat{F}(x, y, q); q \rightarrow t \} \quad \text{e} \tag{5.92}$$

$$F_t(x, y, t) \equiv \frac{\partial F}{\partial t} = \mathcal{L}^{-1} \{ q \widehat{F}(x, y, q); q \rightarrow t \}, \tag{5.93}$$

sendo que nesta última equação foi usado o resultado $F(x, y, 0) = 0$, que pode ser facilmente verificado na expressão para a função F , que é obtida na seção (6.2), cujo valor, conforme equação (6.125), é

$$F(x, y, t) = \frac{\mathbf{H}(t - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}. \tag{5.94}$$

Usando as relações

$$\begin{aligned}
dx &= -\eta_y d\gamma \quad \text{e} \\
dy &= +\eta_x d\gamma,
\end{aligned} \tag{5.95}$$

onde η_x e η_y são as componentes do vetor normal à fronteira Γ e a variável γ é uma ordenada sobre a fronteira Γ tal que $x = x(\gamma)$, $y = y(\gamma)$, $(x, y) \in \Gamma$, pode-se reescrever a equação (5.91) como

$$\begin{aligned}
u(x_p, y_p, t_p) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_p} dt \left\{ - \oint_{\Gamma} u(x(\gamma), y(\gamma), t) F_n(x_p - x(\gamma), y_p - y(\gamma), t_p - t) d\gamma \right. \\
&\left. + \oint_{\Gamma} u_{\eta}(x(\gamma), y(\gamma), t) F(x_p - x(\gamma), y_p - y(\gamma), t_p - t) d\gamma \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} u(x, y, 0) F_t(x_p - x, y_p - y, t_p) dx dy \\
& + \int_{\Omega} u_t(x, y, 0) F(x_p - x, y_p - y, t_p) dx dy,
\end{aligned} \tag{5.96}$$

sendo

$$\begin{aligned}
F_{\eta}(x_p - x, y_p - y, t_p - t) &= \eta_x \frac{\partial}{\partial x} F(x_p - x, y_p - y, t_p - t) + \eta_y \frac{\partial}{\partial y} F(x_p - x, y_p - y, t_p - t) \quad \text{e} \\
u_{\eta}(x, y, t) &= \eta_x u_x(x, y, t) + \eta_y u_y(x, y, t)
\end{aligned} \tag{5.97}$$

e lembrando que $\frac{\partial}{\partial x} F(x_p - x, y_p - y, t_p - t) = -F_x(x_p - x, y_p - y, t_p - t)$ e $\frac{\partial}{\partial y} F(x_p - x, y_p - y, t_p - t) = -F_y(x_p - x, y_p - y, t_p - t)$.

A equação (5.96), assim como nos casos anteriores, também é igual à equação integral de contorno *Mansur and Brebbia* 1982⁴⁸ obtida pelo método variacional e empregada normalmente no método dos elementos de contorno. Assim, equação (5.96) pode ser resolvida numericamente pelos métodos no domínio tempo descritos no capítulo (2).

Capítulo 6

Obtenção das transformadas inversas das funções de Green transformadas dos problemas elástico e de ondas.

6.1 Transformação inversa das funções de Green transformadas do problema elástico.

As funções F_1 , F_2 e H são obtidas pela aplicação da transformada inversa de Fourier respectivamente nas funções $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ e \overline{H} definidas pelas equações (5.7) a (5.9). Em razão das dificuldades em obter tais inversões, optou-se pela obtenção das transformadas inversas de Fourier das transformadas de Fourier das derivadas parciais de F_1 , F_2 e H , justamente as inversas das funções $\overline{F_{1_x}}$, $\overline{F_{1_y}}$, $\overline{F_{2_x}}$, $\overline{F_{2_y}}$, $\overline{H_x}$ e $\overline{H_y}$ dadas pelas expressões (5.10) a (5.15), cuja integração conduz as funções F_1 , F_2 e H .

6.1.1 Obtenção da transformada inversa de Fourier de $\overline{F_{1_x}}$.

A função $\overline{F_{1_x}}$, a partir das expressões (5.7) e (5.10), pode ser escrita conforme

$$\overline{F_{1_x}} = -ir \frac{Gr^2 + Bs^2}{BG(r^2 + s^2)^2}. \quad (6.1)$$

A transformada inversa de Fourier de $\overline{F_{1_x}}$ é dada em

$$F_{1_x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-ir(Gr^2 + Bs^2)}{BG(r^2 + s^2)^2} e^{-irx} dr \right) e^{-isy} ds. \quad (6.2)$$

A solução da primeira integral da expressão (6.2) pode ser alcançada com o auxílio do

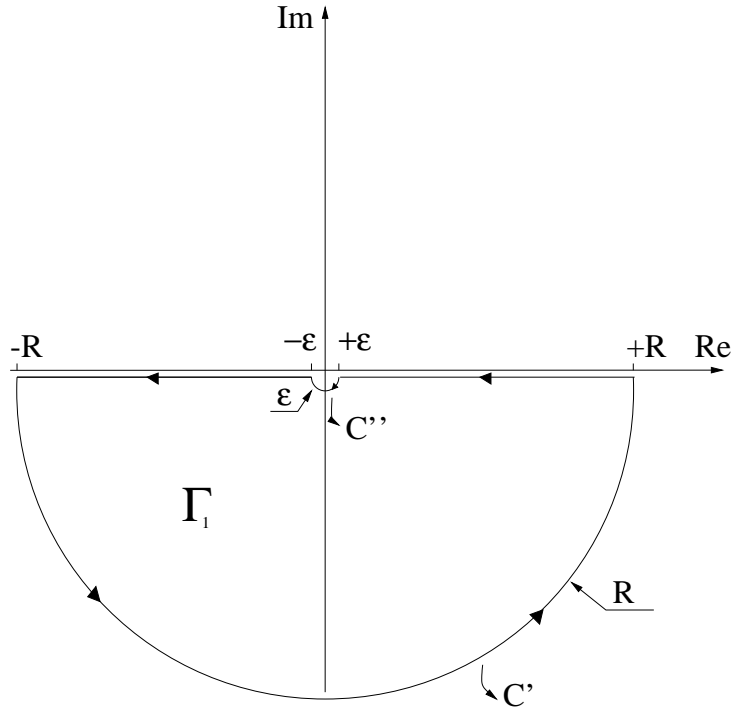


Figura 6.1: Contorno Γ_1 utilizado no emprego do teorema dos resíduos.

teorema dos resíduos *Spiegel* 1964⁶⁹. Efetuar-se-á a integração da expressão

$$I = \frac{z(Gz^2 + Bs^2)}{BG(z^2 + s^2)^2} e^{-izx}, \quad z \in \mathbf{C} \quad (6.3)$$

sobre um dado contorno (uma curva de *Jordan*) estabelecido no plano complexo que contenha o eixo real quando as suas dimensões tendem para um dado limite.

A figura (6.1) apresenta o contorno Γ_1 para o para o qual será avaliada a expressão $\oint_{\Gamma_1} I dz$ com o emprego do teorema dos resíduos.

A integração de I (equação (6.3)) ao longo de Γ_1 pode ser igualada, conforme o teorema dos resíduos *Spiegel* 1964⁶⁹, a $2\pi i \sum(\text{Resíduos})$, o que é apresentado na equação

$$\oint_{\Gamma_1} I dz = 2\pi i \sum \text{Res}. \quad (6.4)$$

A integral sobre o contorno Γ_1 pode ser parcelada conforme os segmentos que compõem este contorno, tal que a expressão (6.4) pode ser reescrita conforme

$$-\int_{-R}^{-\epsilon} I dz + \oint_{C''} I dz - \int_{+\epsilon}^{+R} I dz + \oint_{C'} I dz = 2\pi i \sum \text{Res}. \quad (6.5)$$

A expressão (6.5) pode ser avaliada no limite quando $R \rightarrow +\infty$, $\epsilon \rightarrow 0$. Inicialmente, fazendo-se $R \rightarrow +\infty$, pode-se obter a integral sobre a semicircunferência C' reescrevendo-a

conforme

$$\oint_{C'} I dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^0 \frac{Re^{i\theta}(GR^2e^{i2\theta} + Bs^2)}{BG(R^2e^{i2\theta} + s^2)^2} e^{-iRe^{i\theta}x} iRe^{i\theta} d\theta, \quad (6.6)$$

onde foi realizada a troca da variável z pela variável θ segundo

$$z = Re^{i\theta} \quad \text{e} \quad (6.7)$$

$$dz = iRe^{i\theta} d\theta. \quad (6.8)$$

Uma simplificação da expressão (6.6) conduz a expressão

$$\oint_{C'} I dz = \int_{-\pi}^0 \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{i}{B} e^{Rx \operatorname{sen}(\theta) - iRx \operatorname{cos}(\theta)} \right) d\theta = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \frac{i\pi}{B} & x = 0, \end{cases} \quad (6.9)$$

cujo limite quando R tende para $+\infty$ é igual a *zero* **se** $x > 0$, uma vez que $\sin \theta \leq 0$ para $-\pi \leq \theta \leq 0$.

A integral sobre a semicircunferência C'' , avaliada para o limite $\epsilon \rightarrow 0$, quando $s \neq 0$, pode ser escrita conforme

$$\oint_{C''} I dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{-\pi} \frac{\epsilon e^{i\theta}(G\epsilon^2 e^{i2\theta} + Bs^2)}{BG(\epsilon^2 e^{i2\theta} + s^2)^2} e^{-i\epsilon e^{i\theta}x} i\epsilon e^{i\theta} d\theta, \quad (6.10)$$

onde foi feita a troca da variável z por θ , cujas relações são dadas por

$$z = \epsilon e^{i\theta} \quad \text{e} \quad (6.11)$$

$$dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta. \quad (6.12)$$

A expressão (6.10) pode ser simplificada resultando em

$$\oint_{C''} I dz = \int_0^{-\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(i\epsilon^2 \frac{e^{i\theta}}{BGs^4} \right) d\theta = 0 \quad \text{para} \quad s \neq 0, \quad (6.13)$$

onde pode-se facilmente verificar que o limite para $\epsilon \rightarrow 0$ é igual a *zero*.

A integral sobre a semicircunferência C'' , avaliada para o limite $\epsilon \rightarrow 0$, quando $s = 0$,

pode ser escrita conforme

$$\oint_{C''} I dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{-\pi} \frac{\epsilon e^{i\theta} (G\epsilon^2 e^{i2\theta})}{BG(\epsilon^2 e^{i2\theta})^2} e^{-i\epsilon e^{i\theta} x} i\epsilon e^{i\theta} d\theta, \quad (6.14)$$

onde novamente foi feita a troca da variável z por θ , cujas relações são dadas por (6.11) e (6.12).

A expressão (6.14) pode ser simplificada resultando em

$$\oint_{C''} I dz = \frac{i}{B} \int_0^{-\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (e^{-i\epsilon e^{i\theta} x}) d\theta = -\frac{i\pi}{B} \quad \text{para } s = 0, \quad (6.15)$$

onde pode-se facilmente verificar o limite para $\epsilon \rightarrow 0$.

Os resultados de (6.9), (6.13) e (6.15) permitem que a expressão (6.5) seja reescrita conforme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(Gr^2 + Bs^2)}{BG(r^2 + s^2)^2} e^{-irx} dr = \begin{cases} \begin{cases} -2\pi i \sum Res & s \neq 0 \\ -\frac{i\pi}{B} - 2\pi i \sum Res & s = 0 \end{cases} & x > 0 \\ \begin{cases} -2\pi i \sum Res + \frac{i\pi}{B} & s \neq 0 \\ -2\pi i \sum Res & s = 0 \end{cases} & x = 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

para caso limite quando $R \rightarrow +\infty$, $\epsilon \rightarrow 0$, onde a variável z passou ser chamada de r , por questão de notação, devido ao fato da integração estar estabelecida sobre o eixo do reais.

Os resíduos de I correspondem aos valores de z que anulam o denominador de I e estão contidos no interior de Γ_1 . O único valor de z que satisfaz esta condição é $-is$, para $s > 0$, ou $+is$, para $s < 0$, sendo que não há resíduos para $s = 0$. A expressão para o resíduo relativo a $-is$ é dado por

$$Res(-is) = \lim_{r \rightarrow -is} \frac{d}{dr} \left((r + is)^2 r \frac{(Gr^2 + Bs^2)}{(r - is)^2 (r + is)^2} \frac{e^{-irx}}{BG} \right). \quad (6.17)$$

A expressão (6.17) pode ser desenvolvida resultando em

$$Res(-is) = (xs(B - G) + 2G) \frac{e^{-sx}}{4GB}, \quad s > 0. \quad (6.18)$$

A expressão para o resíduo relativo a $+is$ pode ser obtida da mesma forma, resultando na seguinte expressão

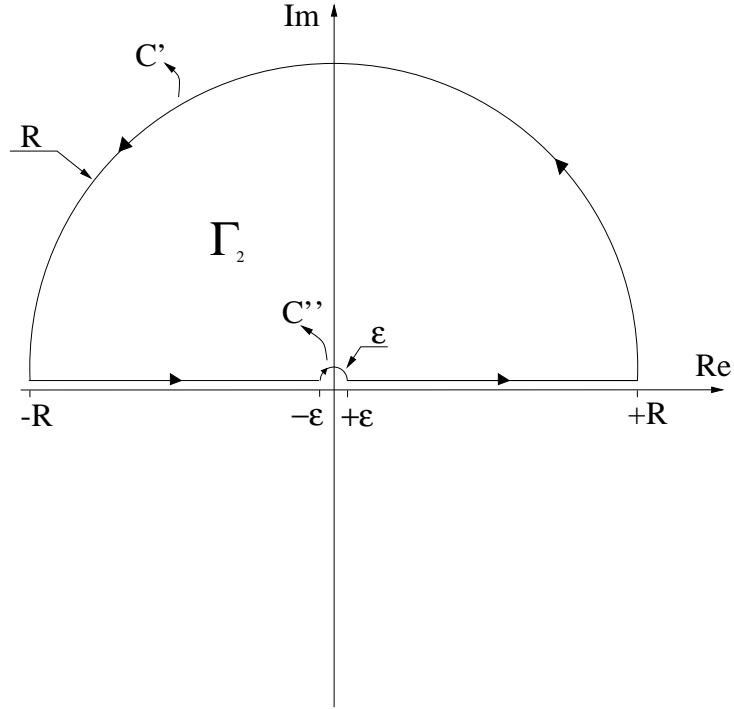


Figura 6.2: Contorno Γ_2 utilizado no emprego do teorema dos resíduos.

$$Res(+is) = (-xs(B - G) + 2G) \frac{e^{+sx}}{4GB}, \quad s < 0. \quad (6.19)$$

A expressão para $\sum Res$ válida para $-\infty < s < +\infty$ pode ser obtida juntando-se (6.18), (6.19) e o fato de não haver resíduos para $s = 0$, o que resulta em

$$\sum Res = \begin{cases} (x|s|(B - G) + 2G) \frac{e^{-|s|x}}{4GB} & s \neq 0 \\ 0 & s = 0. \end{cases} \quad (6.20)$$

Substituindo-se a equação (6.20) no membro direito de (6.16) chegamos a equação (6.21) que é a expressão desejada, porém com a restrição $x \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(Gr^2 + Bs^2)}{BG(r^2 + s^2)^2} e^{-irx} dr = \begin{cases} -2\pi i (x|s|(B - G) + 2G) \frac{e^{-|s|x}}{4GB} & x > 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases} \quad (6.21)$$

A solução da primeira integral de (6.2) para $x < 0$ pode ser alcançada através do emprego do teorema dos resíduos juntamente com a escolha do contorno Γ_2 apresentado na figura (6.2) e seguindo-se os mesmos passos apresentados acima.

A integração de I (equação (6.3)) ao longo de Γ_2 pode ser igualada, conforme o teorema dos resíduos, a $2\pi i \sum(Resíduos)$ o que é apresentado na equação

$$\oint_{\Gamma_2} I dz = 2\pi i \sum Res. \quad (6.22)$$

A integral sobre o contorno Γ_2 pode ser parcelada conforme os segmentos que compõem este contorno, tal que a expressão (6.22) pode ser reescrita conforme

$$+ \int_{-R}^{-\epsilon} I dz + \oint_{C''} I dz + \int_{+\epsilon}^{+R} I dz + \oint_{C'} I dz = 2\pi i \sum Res. \quad (6.23)$$

A expressão (6.23) pode ser avaliada no limite quando $R \rightarrow +\infty$, $\epsilon \rightarrow 0$. Inicialmente, fazendo-se $R \rightarrow +\infty$, pode-se obter a integral sobre a semicircunferência C' reescrevendo-a conforme

$$\oint_{C'} I dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}(GR^2e^{i2\theta} + Bs^2)}{BG(R^2e^{i2\theta} + s^2)^2} e^{-iRe^{i\theta}x} iRe^{i\theta} d\theta, \quad (6.24)$$

onde foi realizada a troca da variável z pela variável θ segundo (6.7) e (6.8).

Uma simplificação da expressão (6.24) conduz a expressão

$$\oint_{C'} I dz = \int_0^\pi \frac{1}{BG} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(e^{Rx \operatorname{sen}(\theta) - iRx \operatorname{cos}(\theta)} \right) d\theta = 0 \quad \text{para } x < 0, \quad (6.25)$$

cujos limites quando R tende para $+\infty$ é igual a *zero* se $x < 0$, uma vez que $\operatorname{sen}\theta \geq 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi$.

A integral sobre a semicircunferência C'' , avaliada para o limite $\epsilon \rightarrow 0$, quando $s \neq 0$, pode ser escrita conforme

$$\oint_{C''} I dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{\epsilon e^{i\theta}(G\epsilon^2e^{i2\theta} + Bs^2)}{BG(\epsilon^2e^{i2\theta} + s^2)^2} e^{-i\epsilon e^{i\theta}x} i\epsilon e^{i\theta} d\theta, \quad (6.26)$$

onde foi feita a troca da variável z por θ , cujas relações são dadas por (6.11) e (6.12).

A expressão (6.26) pode ser simplificada resultando em

$$\oint_{C''} I dz = \int_\pi^0 \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} i\epsilon^2 \right) \frac{e^{i\theta}}{BGs^4} d\theta = 0 \quad \text{para } s \neq 0, \quad (6.27)$$

onde pode-se facilmente verificar que o limite para $\epsilon \rightarrow 0$ é igual a *zero*.

A integral sobre a semicircunferência C'' , avaliada para o limite $\epsilon \rightarrow 0$, quando $s = 0$, pode ser escrita conforme

$$\oint_{C''} I dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{\epsilon e^{i\theta} (G\epsilon^2 e^{i2\theta})}{BG(\epsilon^2 e^{i2\theta})^2} e^{-i\epsilon e^{i\theta} x} i\epsilon e^{i\theta} d\theta, \quad (6.28)$$

onde novamente foi feita a troca da variável z por θ , cujas relações são dadas por (6.11) e (6.12).

A expressão (6.28) pode ser simplificada resultando em

$$\oint_{C''} I dz = \frac{i}{B} \int_{\pi}^0 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (e^{-i\epsilon e^{i\theta} x}) d\theta = -\frac{i\pi}{B} \quad \text{para } s = 0, \quad (6.29)$$

onde também pode-se facilmente verificar o limite para $\epsilon \rightarrow 0$.

Os resultados de (6.25), (6.27) e (6.29) permitem que a expressão (6.23) seja reescrita conforme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(Gr^2 + Bs^2)}{BG(r^2 + s^2)^2} e^{-irx} dr = \begin{cases} 2\pi i \sum Res & s \neq 0 \\ \frac{i\pi}{B} + 2\pi i \sum Res & s = 0 \end{cases} \quad \text{para } x < 0 \quad (6.30)$$

no caso limite quando $R \rightarrow +\infty$, $\epsilon \rightarrow 0$, onde a variável z passou a ser chamada de r devido ao fato da integração estar estabelecida sobre o eixo do reais (por questão de notação).

Os resíduos de I correspondem aos valores de z que anulam o denominador de I e estão contidos no interior de Γ_2 . O único valor de z que satisfaz esta condição é $+is$, para $s > 0$, ou $-is$, para $s < 0$, cujos valores são dados por (6.19) e (6.18), respectivamente, e transcritos em

$$Res(-is) = (xs(B - G) + 2G) \frac{e^{-sx}}{4GB} \quad \text{para } s < 0 \quad (6.31)$$

e

$$Res(+is) = (-xs(B - G) + 2G) \frac{e^{+sx}}{4GB} \quad \text{para } s > 0 \quad (6.32)$$

com os respectivos intervalos de s . Não há resíduos para $s = 0$.

A expressão para $\sum Res$ válida para $-\infty < s < +\infty$ pode ser obtida juntando-se (6.31) e (6.32), o que resulta em

$$\sum Res = \begin{cases} (-x|s|(B - G) + 2G) \frac{e^{+|s|x}}{4GB} & s \neq 0 \\ 0 & s = 0. \end{cases} \quad (6.33)$$

Substituindo-se a equação (6.33) no membro direito de (6.30), chegamos a equação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(Gr^2 + Bs^2)}{BG(r^2 + s^2)^2} e^{-irx} dr = 2\pi i (-x|s|(B - G) + 2G) \frac{e^{+|s|x}}{4GB} \quad \text{para } x < 0, \quad (6.34)$$

que é a expressão desejada, porém com a restrição $x < 0$.

A expressão para a primeira integral de (6.2) pode, finalmente, ser obtida para $-\infty < x < +\infty$ juntando-se as expressões (6.21) e (6.34), o que resulta em

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-ir(Gr^2 + Bs^2)}{BG(r^2 + s^2)^2} e^{-irx} dr = 2\pi i (-x|s|(B - G) - \mathbf{sign}(x)2G) \frac{e^{-|s||x|}}{4GB}. \quad (6.35)$$

A expressão (6.35) pode ser substituída em (6.2), onde obtém-se a equação

$$F_{1_x} = \frac{1}{4GB} \int_{-\infty}^{+\infty} (-x|s|(B - G) - \mathbf{sign}(x)2G) e^{-|s||x|} e^{-isy} ds \quad (6.36)$$

com o fator 2π simplificado.

A expressão (6.36) pode ser reescrita conforme

$$F_{1_x} = \frac{1}{4GB} \left\{ (B - G)x \int_{-\infty}^0 se^{s|x|} e^{-isy} ds - 2G \mathbf{sign}(x) \int_{-\infty}^0 e^{s|x|} e^{-isy} ds \right. \\ \left. - (B - G)x \int_0^{+\infty} se^{-s|x|} e^{-isy} ds - 2G \mathbf{sign}(x) \int_0^{+\infty} e^{-s|x|} e^{-isy} ds \right\}. \quad (6.37)$$

A solução dos integrais de (6.37) são apresentadas nas seguintes equações

$$\int_{-\infty}^0 se^{s|x|} e^{-isy} ds = -\frac{1}{(|x| - iy)^2}, \quad (6.38)$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{s|x|} e^{-isy} ds = +\frac{1}{|x| - iy}, \quad (6.39)$$

$$\int_0^{+\infty} se^{-s|x|} e^{-isy} ds = +\frac{1}{(|x| + iy)^2} \quad e \quad (6.40)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-s|x|} e^{-isy} ds = +\frac{1}{|x| + iy}. \quad (6.41)$$

A substituição de (6.38) a (6.41) em (6.37) resulta em

$$F_{1_x} = \frac{1}{4GB} \left\{ -\frac{(B-G)x}{(|x|-iy)^2} - \frac{2G \operatorname{sign}(x)}{|x|-iy} - \frac{(B-G)x}{(|x|+iy)^2} - \frac{2G \operatorname{sign}(x)}{|x|+iy} \right\}. \quad (6.42)$$

A equação (6.42) pode ser simplificada resultando em

$$F_{1_x} = F^{-1} \begin{matrix} r \rightarrow x \\ s \rightarrow y \end{matrix} \left\{ -ir \frac{Gr^2 + Bs^2}{BG(r^2 + s^2)^2} \right\} = \frac{1}{2GB} \left((B-3G)y^2 - (G+B)x^2 \right) \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (6.43)$$

que é a expressão final da transformada inversa de Fourier de $\overline{F_{1_x}}$.

6.1.2 Obtenção das transformadas inversas de Fourier de $\overline{F_{1_y}}$, $\overline{F_{2_x}}$ e $\overline{F_{2_y}}$.

As funções $\overline{F_{1_y}}$, $\overline{F_{2_x}}$ e $\overline{F_{2_y}}$, conforme equações (5.7) a (5.8) e (5.11) a (5.13), podem ser escritas como visto nas seguintes equações

$$\overline{F_{1_y}} = -is \frac{Gr^2 + Bs^2}{BG(r^2 + s^2)^2}, \quad (6.44)$$

$$\overline{F_{2_x}} = -ir \frac{Br^2 +Gs^2}{BG(r^2 + s^2)^2} \quad \text{e} \quad (6.45)$$

$$\overline{F_{2_y}} = -is \frac{Br^2 +Gs^2}{BG(r^2 + s^2)^2}. \quad (6.46)$$

As transformadas inversas de Fourier de $\overline{F_{1_y}}$, $\overline{F_{2_x}}$ e $\overline{F_{2_y}}$ podem ser obtidas a partir da equação (6.43) devido às formas similares das expressões destas funções com a expressão de $\overline{F_{1_x}}$ (equação (6.1)), o que leva a:

$$F_{1_y} = F^{-1} \left\{ -is \frac{Gr^2 + Bs^2}{BG(r^2 + s^2)^2} \right\} = \frac{1}{2GB} \left((G-3B)x^2 - (G+B)y^2 \right) \frac{y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (6.47)$$

$$F_{2_x} = F^{-1} \left\{ -ir \frac{Br^2 +Gs^2}{BG(r^2 + s^2)^2} \right\} = \frac{1}{2GB} \left((G-3B)y^2 - (G+B)x^2 \right) \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \quad (6.48)$$

e

$$F_{2y} = F^{-1} \left\{ -is \frac{Br^2 + Gs^2}{BG(r^2 + s^2)^2} \right\} = \frac{1}{2GB} \left((B - 3G)x^2 - (G + B)y^2 \right) \frac{y}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (6.49)$$

6.1.3 Obtenção da transformada inversa de Fourier de \overline{H}_x .

A função \overline{H}_x , a partir das expressões (5.9) e (5.14), pode ser escrita conforme

$$\overline{H}_x = -ir \frac{(B - G)rs}{BG(r^2 + s^2)^2}. \quad (6.50)$$

A transformada inversa de Fourier de \overline{H}_x é dada em

$$H_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i(B - G)r^2s}{BG(r^2 + s^2)^2} e^{-irx} dr \right) e^{-isy} ds. \quad (6.51)$$

A solução da primeira integral da expressão (6.51) pode ser alcançada com o auxílio do teorema dos resíduos *Spiegel* 1964⁶⁹. Efetuar-se-á a integração da expressão

$$I = \frac{z^2s}{(z^2 + s^2)^2} e^{-izx}, \quad z \in \mathbf{C} \quad (6.52)$$

sobre um dado contorno (uma curva de *Jordan*) estabelecido no plano complexo que contenha o eixo real quando as suas dimensões tendem para um dado limite.

A figura (6.1) apresenta o contorno Γ_1 para o qual será avaliada a expressão $\oint_{\Gamma_1} I dz$ com o emprego do teorema dos resíduos.

A integração de I (equação (6.52)) ao longo de Γ_1 pode ser igualada, conforme o teorema dos resíduos, a $2\pi i \sum(\text{Resíduos})$ o que é apresentado na equação

$$\oint_{\Gamma_1} I dz = 2\pi i \sum \text{Res}. \quad (6.53)$$

A integral sobre o contorno Γ_1 pode ser parcelada conforme os segmentos que compõem este contorno, tal que a expressão (6.53) pode ser reescrita conforme

$$- \int_{-R}^{-\epsilon} I dz + \oint_{C''} I dz - \int_{+\epsilon}^{+R} I dz + \oint_{C'} I dz = 2\pi i \sum \text{Res}. \quad (6.54)$$

A expressão (6.54) pode ser avaliada no limite quando $R \rightarrow +\infty$, $\epsilon \rightarrow 0$. Inicialmente, fazendo-se $R \rightarrow +\infty$, pode-se obter a integral sobre a semicircunferência C' reescrevendo-a conforme

$$\oint_{C'} I dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} s \int_{-\pi}^0 \frac{R^2 e^{i2\theta}}{(R^2 e^{i2\theta} + s^2)^2} e^{-iRe^{i\theta}x} iRe^{i\theta} d\theta, \quad (6.55)$$

onde foi realizada a troca da variável z pela variável θ segundo

$$z = Re^{i\theta} \quad \text{e} \quad (6.56)$$

$$dz = iRe^{i\theta} d\theta. \quad (6.57)$$

Uma simplificação da expressão (6.55) conduz a expressão

$$\oint_{C'} I dz = is \int_{-\pi}^0 \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{Re^{i\theta}} e^{Rx \operatorname{sen}(\theta) - iRx \operatorname{cos}(\theta)} \right) d\theta = 0 \quad \text{para } x \geq 0 \quad (6.58)$$

cujo limite quando R tende para $+\infty$ é igual a *zero* *se* $x \geq 0$, uma vez que $\operatorname{sen}\theta \leq 0$ para $-\pi \leq \theta \leq 0$.

A integral sobre a semicircunferência C'' sempre é nula para $s = 0$. Quando avaliada para o limite $\epsilon \rightarrow 0$, sendo $s \neq 0$, pode ser escrita conforme

$$\oint_{C''} I dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s \int_0^{-\pi} \frac{\epsilon^2 e^{i2\theta}}{(\epsilon^2 e^{i2\theta} + s^2)^2} e^{-i\epsilon e^{i\theta}x} i\epsilon e^{i\theta} d\theta, \quad (6.59)$$

onde foi feita a troca da variável z por θ , cujas relações são dadas por

$$z = \epsilon e^{i\theta} \quad \text{e} \quad (6.60)$$

$$dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta. \quad (6.61)$$

A expressão (6.59) pode ser simplificada resultando em

$$\oint_{C''} I dz = s \int_0^{-\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(i\epsilon^3 \frac{e^{i3\theta}}{s^4} \right) d\theta = 0, \quad (6.62)$$

onde pode-se facilmente verificar que o limite para $\epsilon \rightarrow 0$ é igual a *zero*, para $s \neq 0$, e onde também considera-se que a integral sobre C'' é sempre nula para $s = 0$.

Os resultados de (6.58) e (6.62) permitem que a expressão (6.53) seja reescrita conforme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^2 s}{(r^2 + s^2)^2} e^{-irx} dr = -2\pi i \sum Res \quad \text{para } x \geq 0 \quad (6.63)$$

para caso limite quando $R \rightarrow +\infty$, $\epsilon \rightarrow 0$, onde a variável z passou ser chamada de r , por questão de notação, devido ao fato da integração estar estabelecida sobre o eixo dos reais.

Os resíduos de I correspondem aos valores de z que anulam o denominador de I e estão contidos no interior de Γ_1 . O único valor de z que satisfaz esta condição é $-is$, para $s > 0$, ou $+is$, para $s < 0$, sendo que para $s = 0$ não há resíduos. A expressão para o resíduo relativo a $-is$ é dado por

$$Res(-is) = \lim_{r \rightarrow -is} \frac{d}{dr} \left((r + is)^2 \frac{r^2 s}{(r - is)^2 (r + is)^2} e^{-irx} \right). \quad (6.64)$$

A expressão (6.64) pode ser desenvolvida resultando na expressão

$$Res(-is) = (-xs + 1) i \frac{e^{-sx}}{4}, \quad s > 0. \quad (6.65)$$

A expressão para o resíduo relativo a $+is$ pode ser obtida da mesma forma, resultando em

$$Res(+is) = (-xs - 1) i \frac{e^{+sx}}{4}, \quad s < 0. \quad (6.66)$$

A expressão para $\sum Res$ válida para $-\infty < s < +\infty$ pode ser obtida juntando-se (6.65), (6.66) e o fato de não haver resíduos para $s = 0$, o que resulta em

$$\sum Res = (-xs + \mathbf{sign}(s)) i \frac{e^{-|s|x}}{4}. \quad (6.67)$$

Substituindo-se a equação (6.67) no membro direito de (6.63), chegamos a equação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^2 s}{(r^2 + s^2)^2} e^{-irx} dr = \pi (-xs + \mathbf{sign}(s)) \frac{e^{-|s|x}}{2} \quad \text{para } x \geq 0, \quad (6.68)$$

que é a expressão desejada, porém com a restrição $x \geq 0$.

A solução da primeira integral de (6.51) para $x < 0$ pode ser alcançada através do emprego do teorema dos resíduos juntamente com a escolha do contorno Γ_2 apresentado na figura (6.2) e seguindo-se os mesmos passos apresentados acima.

A integração de I (equação (6.52)) ao longo de Γ_2 pode ser igualada, conforme o teorema dos resíduos, a $2\pi i \sum(Residuos)$ o que é apresentado na equação

$$\oint_{\Gamma_2} I dz = 2\pi i \sum Res. \quad (6.69)$$

A integral sobre o contorno Γ_2 pode ser parcelada conforme os segmentos que compõem este contorno, tal que a expressão (6.69) pode ser reescrita conforme

$$+ \int_{-R}^{-\epsilon} I dz + \oint_{C''} I dz + \int_{+\epsilon}^{+R} I dz + \oint_{C'} I dz = 2\pi i \sum Res. \quad (6.70)$$

A expressão (6.70) pode ser avaliada no limite quando $R \rightarrow +\infty$, $\epsilon \rightarrow 0$. Inicialmente, fazendo-se $R \rightarrow +\infty$, pode-se obter a integral sobre a semicircunferência C' reescrevendo-a conforme

$$\oint_{C'} I dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} s \int_0^\pi \frac{R^2 e^{i2\theta}}{(R^2 e^{i2\theta} + s^2)^2} e^{-iRe^{i\theta}x} iRe^{i\theta} d\theta, \quad (6.71)$$

onde foi realizada a troca da variável z pela variável θ segundo (6.56) e (6.57).

Uma simplificação da expressão (6.71) conduz a expressão

$$\oint_{C'} I dz = is \int_0^\pi \frac{1}{e^{i\theta}} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{R} e^{Rx \operatorname{sen}(\theta) - iRx \operatorname{cos}(\theta)} \right) d\theta = 0 \quad \text{para } x < 0, \quad (6.72)$$

cujo limite quando R tende para $+\infty$ é igual a *zero* se $x < 0$, uma vez que $\operatorname{sen}\theta \geq 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi$.

A integral sobre a semicircunferência C'' , avaliada para o limite $\epsilon \rightarrow 0$, quando $s \neq 0$, pode ser escrita conforme

$$\oint_{C''} I dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s \int_\pi^0 \frac{\epsilon^2 e^{i2\theta}}{(\epsilon^2 e^{i2\theta} + s^2)^2} e^{-i\epsilon e^{i\theta}x} i\epsilon e^{i\theta} d\theta, \quad (6.73)$$

onde foi feita a troca da variável z por θ , cujas relações são dadas por (6.60) e (6.61).

A expressão (6.73) pode ser simplificada resultando em

$$\oint_{C''} I dz = is \int_\pi^0 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon^3) \frac{e^{i3\theta}}{s^4} d\theta = 0, \quad (6.74)$$

onde pode-se facilmente verificar que o limite para $\epsilon \rightarrow 0$, $s \neq 0$, é igual a *zero*, e também onde juntou-se o fato de que esta integral é sempre nula para $s = 0$.

Os resultados de (6.72) e (6.74) permitem que a expressão (6.69) seja reescrita conforme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^2 s}{(r^2 + s^2)^2} e^{-irx} dr = 2\pi i \sum Res, \quad x < 0, \quad (6.75)$$

para caso limite quando $R \rightarrow +\infty$, $\epsilon \rightarrow 0$, onde a variável z passou ser chamada de r , por questão de notação, devido ao fato da integração estar estabelecida sobre o eixo do reais.

Os resíduos de I correspondem aos valores de z que anulam o denominador de I e estão contidos no interior de Γ_2 . O único valor de z que satisfaz esta condição é $+is$, para $s > 0$, ou $-is$, para $s < 0$, cujos valores são dados por (6.66) e (6.65), respectivamente, e transcritos em

$$Res(-is) = (-xs + 1) i \frac{e^{-sx}}{4} \quad \text{para } s < 0 \quad (6.76)$$

e

$$Res(+is) = (-xs - 1) i \frac{e^{+sx}}{4} \quad \text{para } s > 0 \quad (6.77)$$

com os respectivos intervalos de s . Não há resíduos para $s = 0$.

A expressão para $\sum Res$ válida para $-\infty < s < +\infty$ pode ser obtida juntando-se as expressões (6.76) e (6.77) ao fato de que não há resíduos para $s = 0$, o que resulta em

$$\sum Res = (-xs - \mathbf{sign}(s)) i \frac{e^{+|s|x}}{4}. \quad (6.78)$$

Substituindo-se a equação (6.78) no membro direito de (6.75), chegamos a equação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^2 s}{(r^2 + s^2)^2} e^{-irx} dr = \pi (xs + \mathbf{sign}(s)) \frac{e^{+|s|x}}{2} \quad \text{para } x < 0, \quad (6.79)$$

que é a expressão desejada, porém com a restrição $x < 0$.

A expressão para a primeira integral de (6.51) pode, finalmente, ser obtida para $-\infty < x < +\infty$ juntando-se as expressões (6.68) e (6.79), o que resulta em

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^2 s}{(r^2 + s^2)^2} e^{-irx} dr = \pi (-|x|s + \mathbf{sign}(s)) \frac{e^{-|s||x|}}{2}. \quad (6.80)$$

A expressão (6.80) pode ser substituída em (6.51), onde obtém-se a equação

$$H_x = -i \frac{B - G}{4GB} \int_{-\infty}^{+\infty} (-|x|s + \mathbf{sign}(s)) e^{-|s||x|} e^{-isy} ds \quad (6.81)$$

com o fator 2π simplificado.

A expressão (6.81) pode ser reescrita conforme

$$H_x = -i \frac{B-G}{4GB} \left\{ -|x| \int_{-\infty}^0 s e^{s|x|} e^{-isy} ds - \int_{-\infty}^0 e^{s|x|} e^{-isy} ds - |x| \int_0^{+\infty} s e^{-s|x|} e^{-isy} ds + \int_0^{+\infty} e^{-s|x|} e^{-isy} ds \right\}. \quad (6.82)$$

A solução dos integrais de (6.82) são apresentadas nas seguintes equações:

$$\int_{-\infty}^0 s e^{s|x|} e^{-isy} ds = -\frac{1}{(|x| - iy)^2}, \quad (6.83)$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{s|x|} e^{-isy} ds = +\frac{1}{|x| - iy}, \quad (6.84)$$

$$\int_0^{+\infty} s e^{-s|x|} e^{-isy} ds = +\frac{1}{(|x| + iy)^2} \quad e \quad (6.85)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-s|x|} e^{-isy} ds = +\frac{1}{|x| + iy}. \quad (6.86)$$

A substituição de (6.83) a (6.86) em (6.82) resulta em

$$H_x = -i \frac{B-G}{4GB} \left\{ -|x| \left(\frac{1}{(|x| + iy)^2} - \frac{1}{(|x| - iy)^2} \right) + \left(\frac{1}{|x| + iy} - \frac{1}{|x| - iy} \right) \right\}. \quad (6.87)$$

A equação (6.87) pode ser simplificada resultando em

$$H_x = F^{-1} \left\{ -ir \frac{(B-G)rs}{BG(r^2 + s^2)^2} \right\} = \frac{B-G}{2GB} \frac{x^2 y - y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (6.88)$$

que é a expressão final da transformada inversa de Fourier de $\overline{H_x}$.

6.1.4 Obtenção da transformada inversa de Fourier de $\overline{H_y}$.

A função $\overline{H_y}$, conforme equações (5.9) e (5.15), pode ser escrita como visto em

$$\overline{H_y} = -is \frac{(B-G)rs}{BG(r^2 + s^2)^2}. \quad (6.89)$$

A transformada inversa de Fourier de $\overline{H_y}$ pode ser obtida a partir da equação (6.88) devido a forma similar da expressão desta função com a expressão de $\overline{H_x}$, o que leva à expressão

$$H_y = F^{-1} \left\{ -is \frac{(B-G)rs}{BG(r^2+s^2)^2} \right\} = \frac{B-G}{2GB} \frac{-x^3 + xy^2}{(x^2+y^2)^2}. \quad (6.90)$$

6.1.5 Etapa final de obtenção de F_1 , F_2 e H .

A função F_1 pode ser obtida pela integração na variável x da expressão (6.43), isto devido a (5.10), ou pela integração na variável y da expressão (6.47), o que se deve à equação (5.11), resultando em

$$F_1 \equiv F^{-1} \left\{ \frac{Gr^2 + Bs^2}{BG(r^2+s^2)^2} \right\} = \frac{1}{2GB} \left[-\frac{G+B}{2} \ln(x^2+y^2) + \frac{B-G}{2} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right]. \quad (6.91)$$

O mesmo caminho pode ser seguido para a função F_2 e esta ser obtida pela integração na variável x da expressão (6.48), isto devido a (5.12), ou pela integração na variável y da expressão (6.49), o que deve-se a (5.13), resultando em

$$F_2 \equiv F^{-1} \left\{ \frac{Br^2 +Gs^2}{BG(r^2+s^2)^2} \right\} = \frac{1}{2GB} \left[-\frac{G+B}{2} \ln(x^2+y^2) + \frac{B-G}{2} \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} \right]. \quad (6.92)$$

O procedimento pode ser novamente aplicado obtendo-se a função H pela integração na variável x da expressão (6.88), isto devido a (5.14), ou pela integração na variável y da expressão (6.90), o que deve-se a (5.15), resultando em

$$H \equiv F^{-1} \left\{ \frac{(B-G)rs}{BG(r^2+s^2)^2} \right\} = -\frac{B-G}{2GB} \frac{xy}{x^2+y^2}. \quad (6.93)$$

6.2 Transformação inversa da função de Green transformada do problema de ondas.

A obtenção de $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{r^2+s^2+q^2}; r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\}; q \rightarrow t \right\}$ pode ser alcançada nos seguintes passos:

1. Inicialmente, segundo referência *HbT* 1975⁷⁰, tem-se

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{r^2+s^2+q^2}; q \rightarrow t \right\} = \frac{\sin(t\sqrt{r^2+s^2})}{\sqrt{r^2+s^2}}. \quad (6.94)$$

2. Define-se a integral definida I_1 como

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t\sqrt{r^2 + s^2})}{\sqrt{r^2 + s^2}} e^{-i(rx+sy)} dr ds \quad (6.95)$$

tal que possamos escrever

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\sin(t\sqrt{r^2 + s^2})}{\sqrt{r^2 + s^2}}; r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\} = \frac{1}{2\pi} I_1. \quad (6.96)$$

3. Para obter a integral I_1 , faz-se a troca de variáveis para coordenadas polares segundo as seguintes relações

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\theta) \\ y &= \rho \sin(\theta) \end{aligned} \quad (6.97)$$

e

$$\begin{aligned} r &= k \cos(\phi) \\ s &= k \sin(\phi). \end{aligned} \quad (6.98)$$

4. Assim, I_1 pode ser reescrita como

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tk)}{k} e^{-i\rho k \cos(\phi-\theta)} k dk d\phi, \quad (6.99)$$

onde pode ainda ser feita a troca de variáveis $\gamma = \phi - \theta$ juntamente com mais algumas simplificações, o que conduz a

$$I_1 = \int_{\theta}^{2\pi-\theta} \int_0^{+\infty} \sin(tk) e^{-i\rho k \cos(\gamma)} dk d\gamma. \quad (6.100)$$

5. Define-se a integral I_2 como

$$I_2(\gamma) = \int_0^{+\infty} \sin(tk) e^{-i\rho k \cos(\gamma)} dk \quad (6.101)$$

tal que a equação (6.100) possa ser reescrita conforme

$$I_1 = \int_{\theta}^{2\pi-\theta} I_2(\gamma) d\gamma. \quad (6.102)$$

6. Define-se a integral I'_2 , uma forma simplificada de I_2 , como

$$I'_2 = \int_0^{+\infty} \sin(ax) e^{-ibx} dx \quad (6.103)$$

cuja solução pode ser obtida da seguinte forma:

(a) Sendo $\sin(ax) = \frac{e^{+iax} - e^{-iax}}{2i}$, I'_2 pode ser reescrito como

$$I'_2 = \frac{1}{2i} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{i(-b+a)x} dx - \int_0^{+\infty} e^{i(-b-a)x} dx \right\}. \quad (6.104)$$

(b) Pode-se obter integrais na forma $\int_0^{+\infty} e^{icx} dx$ fazendo-se

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{+icx} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-\epsilon x} e^{+icx} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{e^{(-\epsilon+ic)x}}{-\epsilon+ic} \right]_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{ic}. \end{aligned} \quad (6.105)$$

(c) Com o resultado acima e com a expressão (6.104), pode-se dizer que

$$\begin{aligned} I'_2 &= \frac{1}{2i} \left\{ -\frac{1}{i(-b+a)} + \frac{1}{i(-b-a)} \right\} \\ &= \frac{a}{a^2 - b^2}. \end{aligned} \quad (6.106)$$

Isto, juntamente com a equação (6.103), leva-se a expressão

$$\int_0^{+\infty} \sin(ax) e^{-ibx} dx = \frac{a}{a^2 - b^2}. \quad (6.107)$$

7. Usando a equação acima na expressão (6.101), pode-se dizer que

$$I_2(\gamma) = \frac{t}{t^2 - \rho^2 \cos^2(\gamma)}, \quad (6.108)$$

o que, substituído em (6.102), nos dá a seguinte expressão para I_1 :

$$I_1 = \int_{\theta}^{2\pi-\theta} \frac{t}{t^2 - \rho^2 \cos^2(\gamma)} d\gamma. \quad (6.109)$$

Sendo $\frac{t}{t^2 - \rho^2 \cos^2(\gamma)}$ uma função periódica de período π , pode-se ainda reescrever I_1

como

$$I_1 = t \int_0^{2\pi} \frac{1}{t^2 - \rho^2 \cos^2(\gamma)} d\gamma. \quad (6.110)$$

8. Para resolver I_1 , desenvolve-se a solução de um integral indefinido na forma:

$$\int \frac{1}{a^2 - b^2 \cos^2(x)} dx. \quad (6.111)$$

cuja solução pode ser obtida pelos dois caminhos:

(a) Segundo *HbT* 1975⁷⁰, página 573, a solução é

$$\int \frac{1}{a^2 - b^2 \cos^2(x)} dx = \begin{cases} \frac{1}{ac\sqrt{a^2-b^2}} \arctan\left(\frac{a \tan(cx)}{\sqrt{a^2-b^2}}\right), & a^2 > b^2 \\ \frac{1}{2ac\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left(\frac{a \tan(cx) - \sqrt{b^2-a^2}}{a \tan(cx) + \sqrt{b^2-a^2}}\right), & b^2 > a^2. \end{cases} \quad (6.112)$$

(b) Obtenção direta da solução:

i. Na expressão

$$\int \frac{1}{a^2 - b^2 \cos^2(x)} dx \quad (6.113)$$

faz-se a troca de variáveis x para t conforme

$$\tan(x) = t \quad (6.114)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{e} \\ \cos^2(x) &= \frac{1}{1+t^2}, \end{aligned} \quad (6.115)$$

sendo que esta é uma transformação bijetiva dentro de cada intervalo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, $x \in \left(+\frac{\pi}{2}, +\frac{3}{2}\pi\right)$, $x \in \left(+\frac{3}{2}\pi, +\frac{5}{2}\pi\right)$, Com esta troca tem-se

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a^2 - b^2 \cos^2(x)} dx &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)} \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)}. \end{aligned} \quad (6.116)$$

ii. A solução das integrais no lado direito da equação acima pode ser obtida

em *HbT* 1975⁷⁰, o que produz

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + m'^2} &= \frac{1}{m'} \arctan\left(\frac{x}{m'}\right), \quad a^2 > b^2 \quad \text{e} \\ \int \frac{dx}{x^2 - m''^2} &= \frac{1}{2m''} \ln \left| \frac{m'' - x}{m'' + x} \right|, \quad b^2 > a^2,\end{aligned}\tag{6.117}$$

onde $m' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ e $m'' = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}}$.

iii. Assim, pode-se escrever a solução:

$$\int \frac{1}{a^2 - b^2 \cos^2(x)} dx = \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\frac{a \tan(x)}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) & a^2 > b^2 \\ \frac{1}{2a\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{a \tan(x) - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \tan(x) + \sqrt{b^2 - a^2}} \right| & b^2 > a^2 \end{cases}\tag{6.118}$$

para $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, $n = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$

9. Usando os resultados acima (equação (6.118)), pode-se obter a quantidade I_1 , dada pela equação (6.110), da seguinte forma:

(a) para o primeiro caso onde $t^2 > \rho^2$ tem-se:

$$\begin{aligned}I_1 &= \left[t \left(\frac{1}{t\sqrt{t^2 - \rho^2}} \arctan\left(\frac{t \tan(\gamma)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}\right) \right) \right]_0^{+\frac{\pi}{2}} \\ &+ \left[t \left(\frac{1}{t\sqrt{t^2 - \rho^2}} \arctan\left(\frac{t \tan(\gamma)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}\right) \right) \right]_{+\frac{\pi}{2}}^{+\frac{3}{2}\pi} \\ &+ \left[t \left(\frac{1}{t\sqrt{t^2 - \rho^2}} \arctan\left(\frac{t \tan(\gamma)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}\right) \right) \right]_{+\frac{3}{2}\pi}^{+2\pi}.\end{aligned}\tag{6.119}$$

Calculando os limites

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{t \tan(\gamma)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}\right) &= 0, \\ \lim_{\gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \arctan\left(\frac{t \tan(\gamma)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}\right) &= +\frac{\pi}{2}, \\ \lim_{\gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \arctan\left(\frac{t \tan(\gamma)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}\right) &= -\frac{\pi}{2}, \\ \lim_{\gamma \rightarrow \frac{3}{2}\pi^-} \arctan\left(\frac{t \tan(\gamma)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}\right) &= +\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \frac{3}{2}\pi^+} \arctan \left(\frac{t \tan(\gamma)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

e

$$\lim_{\gamma \rightarrow 2\pi^-} \arctan \left(\frac{t \tan(\gamma)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right) = 0$$

chegamos a

$$I_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}, \quad t^2 > \rho^2. \quad (6.120)$$

(b) para o segundo caso onde $t^2 < \rho^2$, tem-se:

$$\begin{aligned} I_1 = & \left[\frac{t}{2t\sqrt{\rho^2 - t^2}} \ln \left| \frac{t \tan(\gamma) - \sqrt{\rho^2 - t^2}}{t \tan(\gamma) + \sqrt{\rho^2 - t^2}} \right| \right]_0^{+\frac{\pi}{2}} \\ & + \left[\frac{t}{2t\sqrt{\rho^2 - t^2}} \ln \left| \frac{t \tan(\gamma) - \sqrt{\rho^2 - t^2}}{t \tan(\gamma) + \sqrt{\rho^2 - t^2}} \right| \right]_{+\frac{\pi}{2}}^{+\frac{3}{2}\pi} \\ & + \left[\frac{t}{2t\sqrt{\rho^2 - t^2}} \ln \left| \frac{t \tan(\gamma) - \sqrt{\rho^2 - t^2}}{t \tan(\gamma) + \sqrt{\rho^2 - t^2}} \right| \right]_{+\frac{3}{2}\pi}^{+2\pi}. \end{aligned} \quad (6.121)$$

Uma vez que a expressão acima é contínua nos pontos $\gamma = \frac{\pi}{2}$ e $\gamma = \frac{3}{2}\pi$, basta calcular os limites

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{t \tan(\gamma) - \sqrt{\rho^2 - t^2}}{t \tan(\gamma) + \sqrt{\rho^2 - t^2}} \right| = 0$$

e

$$\lim_{\gamma \rightarrow 2\pi^-} \ln \left| \frac{t \tan(\gamma) - \sqrt{\rho^2 - t^2}}{t \tan(\gamma) + \sqrt{\rho^2 - t^2}} \right| = 0$$

O que nos leva a

$$I_1 = 0, \quad t^2 < \rho^2. \quad (6.122)$$

10. Os resultados do ítem anterior (equações (6.120) e (6.122)) podem ser reescritos em uma forma mais compacta conforme

$$I_1 = 2\pi \frac{\mathbf{H}(t - \rho)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}, \quad (6.123)$$

onde \mathbf{H} é a função de *Heaviside*. Com o valor de I_1 introduzido na equação (6.96), e lembrado as relações (6.97), tem-se

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\sin(t\sqrt{r^2 + s^2})}{\sqrt{r^2 + s^2}}; r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\} = \frac{\mathbf{H}(t - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}. \quad (6.124)$$

Juntando a equação acima com (6.94) finalmente obtém-se:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{q^2 + r^2 + s^2}; q \rightarrow t \right\}; r \rightarrow x; s \rightarrow y \right\} = \frac{\mathbf{H}(t - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}. \quad (6.125)$$

Capítulo 7

Exemplo numérico.

Uma vez que, conforme apresentado no presente trabalho, o emprego da transformada de Fourier conduz às mesmas integrais de contorno obtidas tradicionalmente no método dos elementos de contorno, as mesmas técnicas do método dos elementos de contorno podem ser usadas para resolver estas integrais.

Para ilustrar a capacidade do método proposto (identificado por método dos elementos de contorno ou BEM nas figuras e tabelas deste capítulo) para resolver um problema linear elástico em duas dimensões e com tensões planas comum na engenharia, considera-se o seguinte problema cujas condições de contorno, sistema de coordenadas, domínio, pontos de discretização da fronteira do domínio e pontos de colocação estão mostrados de forma esquemática na figura (7.1). As propriedades do material são $E = 21000 \text{ Kgf/mm}^2$, para o módulo de elasticidade e $\nu = 0.3$, para o coeficiente de *Poisson*. Além disto, emprega-se como base de funções, polinômios do primeiro grau e avalia-se as funções incógnitas u , v , f_x e f_y na fronteira usando a equação (5.45). Os pontos de colocação estão posicionados fora do domínio, distante dos nós da fronteira a uma distância de 20% do comprimento do passo de discretização (parâmetro de malha).

Para demonstrar a validade e a convergência do esquema proposto foram obtidos resultados para parâmetros de malha (distância média entre os nós) de 10mm, 5mm e 2.5mm e que foram comparados com os respectivos resultados obtidos por elementos finitos (identificado por método dos elementos finitos ou FEM nas figuras e tabelas deste capítulo) com configuração de nós sobre o contorno semelhante. A solução por elementos finitos foi obtida utilizando-se o programa ABAQUS, versão 5.8-1. Nesta solução, tirou-se vantagem da simetria do problema, enquanto na solução pelo método proposto não utilizou-se esta vantagem porque necessitaria utilizar nós nos cantos (não seria possível utilizar cantos arredondados nos extremos do segmento onde estariam as condições de simetria), o que não foi implementado. As malhas empregadas na discretização pelo método proposto

podem ser vistas na figuras (7.2), (7.14) e (7.26) e as malhas empregadas na discretização pelo método dos elementos finitos podem ser vistas nas figuras (7.3), (7.15) e (7.27), para os parâmetros de malha de 10mm, 5mm e 2.5mm respectivamente. Os resultados para os valores máximos e mínimos dos deslocamentos u e v e das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy} para ordenadas $x \geq 0$ obtidos com os parâmetros de malha de 10mm, 5mm e 2.5mm podem ser vistos nas tabelas (7.2) a (7.6), tanto para método proposto como para o método dos elementos finitos. Os valores para a tensão σ_{xx} nos pontos $(0, -25)$ e $(0, -100)$ obtidos com os parâmetros de malha de 10mm, 5mm e 2.5mm para o método proposto, método dos elementos finitos e resistência dos materiais são mostrados na tabela (7.7) e os valores para os deslocamentos u e v no ponto $(+62.5, +120)$ obtidos com os parâmetros de malha de 10mm, 5mm e 2.5mm são mostrados na tabela (7.8) para o método proposto e método dos elementos finitos. Nesta última tabela, nos casos em que nenhum dos nós da solução apresentava coordenadas $(+62.5, +120)$, os valores foram obtidos por interpolação linear entre os dois nós sobre o contorno que enquadravam a posição $(+62.5, +120)$. Estas tabelas permitem verificar a convergência do método proposto na medida em que o passo de discretização (parâmetro de malha) diminui. Os mapas de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos u e v e das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy} podem ser vistos nas figuras (7.4) a (7.13), (7.16) a (7.25) e (7.28) a (7.37) para o método proposto e para método dos elementos finitos. Nestes mapas, no caso das soluções relativas ao método proposto, as soluções foram obtidas para pontos dentro e fora do domínio (o conjunto destes pontos constitui uma área retangular que enquadra todo domínio) utilizando-se a equação (5.45), sendo que a cor verde foi empregada para indicar os valores em um intervalo $(-e, +e)$, onde $e = (\text{máximo valor} - \text{mínimo valor})/256$ (significando valores relativamente próximos de *zero*); e também pode-se observar que todos os pontos fora do domínio possuem valores relativamente próximos de *zero*, o que está de acordo com a idéia do método proposto. Finalmente, para demonstrar que os resultados obtidos também estão de acordo com a teoria de vigas curvas da resistência dos materiais *Feodosiev* 1985⁷¹, na tabela (7.1) apresentam-se os resultados para a tensão σ_{xx} nas posições A e B mostradas na figura (7.1).

Considerando a pequena diferença relativa entre os resultados obtidos pelo método proposto com aqueles obtidos pelo método dos elementos finitos, a convergência dos valores de deslocamentos e tensões, e a relativa concordância com a resistência dos materiais, pode-se afirmar, sob o ponto de vista da engenharia, que atingiu-se um resultado razoável. Ainda pode-se destacar que a utilização de pontos de colocação no exterior do domínio não é conhecida na literatura constituindo-se, assim, em um novo desenvolvimento da técnica de solução das equações integrais de contorno.

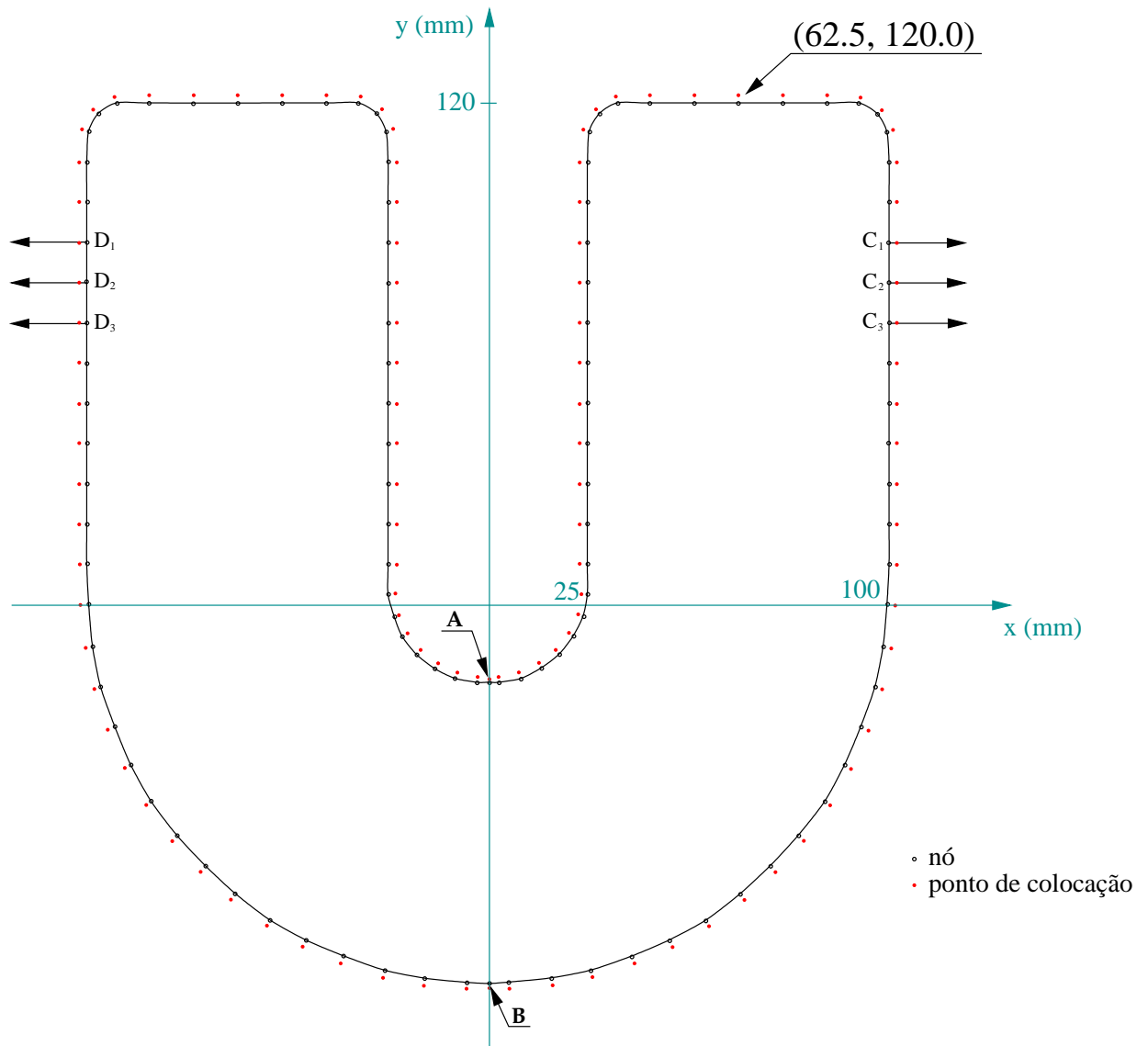


Figura 7.1: Domínio discretizado.

Condições de contorno nos nós: $\mathbf{A}(u = 0, f_y = 0)$, $\mathbf{B}(u = 0, v = 0)$, $\mathbf{C}_{1,2,3}(f_x = +10 \text{ Kg/mm}^2, f_y = 0)$, $\mathbf{D}_{1,2,3}(f_x = -10 \text{ Kg/mm}^2, f_y = 0)$ e nos demais nós ($f_x = 0, f_y = 0$). Escala 58 : 100.

Posição	Coordenadas		Método proposto	Resistência dos materiais
	$x \text{ (mm)}$	$y \text{ (mm)}$	$\sigma_{xx} \text{ (Kg/mm}^2\text{)}$	$\sigma_{xx} \text{ (Kg/mm}^2\text{)}$
A	0	-25	+86.27	+75.57
B	0	-100	-26.46	-24.22

Tabela 7.1: Resultados numéricos para a tensão σ_{xx} comparando o método proposto com os resultados da resistência dos materiais.

Parâmetros da malha (mm)	Deslocamento u (mm)			
	Valores Máximos		Valores Mínimos	
	BEM	FEM	BEM	FEM
10.0	$+8.9315e - 1$	$+8.64e - 1$	$-4.8537e - 2$	$-4.69e - 2$
5.0	$+8.9502e - 1$	$+8.87e - 1$	$-4.8327e - 2$	$-4.79e - 2$
2.5	$+8.9450e - 1$	$+8.94e - 1$	$-4.8341e - 2$	$-4.83e - 2$

Tabela 7.2: Máximos e mínimos do deslocamento u .

Parâmetros da malha	Deslocamento v (mm)			
	Valores Máximos		Valores Mínimos	
	BEM	FEM	BEM	FEM
10.0mm	$+8.3219e - 2$	$+8.14e - 2$	$-3.4855e - 1$	$-3.37e - 1$
5.0mm	$+8.3467e - 2$	$+8.32e - 2$	$-3.4889e - 1$	$-3.46e - 1$
2.5mm	$+8.3390e - 2$	$+8.35e - 2$	$-3.4860e - 1$	$-3.48e - 1$

Tabela 7.3: Máximos e mínimos do deslocamento v .

Parâmetros da malha	Tensão σ_{xx} (Kgf/mm)			
	Valores Máximos		Valores Mínimos	
	BEM	FEM	BEM	FEM
10.0mm	$+8.7720e + 1$	$+8.63e + 1$	$-2.7212e + 1$	$-2.65e + 1$
5.0mm	$+8.5678e + 1$	$+8.63e + 1$	$-2.7549e + 1$	$-2.73e + 1$
2.5mm	$+8.4592e + 1$	$+8.54e + 1$	$-2.7657e + 1$	$-2.76e + 1$

Tabela 7.4: Máximos e mínimos da tensão σ_{xx} .

Parâmetros da malha	Tensão σ_{yy} (Kgf/mm)			
	Valores Máximos		Valores Mínimos	
	BEM	FEM	BEM	FEM
10.0mm	$+4.8501e + 1$	$+4.69e + 1$	$-2.1027e + 1$	$-1.98e + 1$
5.0mm	$+4.8456e + 1$	$+4.59e + 1$	$-2.0908e + 1$	$-2.06e + 1$
2.5mm	$+4.8421e + 1$	$+4.80e + 1$	$-2.0841e + 1$	$-2.09e + 1$

Tabela 7.5: Máximos e mínimos da tensão σ_{yy} .

Parâmetros da malha	Tensão σ_{xy} (Kgf/mm)			
	Valores Máximos		Valores Mínimos	
	BEM	FEM	BEM	FEM
10.0mm	$+3.5722e + 1$	$+2.17e + 1$	$-1.2273e + 1$	$-1.21e + 1$
5.0mm	$+3.6345e + 1$	$+3.14e + 1$	$-1.2393e + 1$	$-1.24e + 1$
2.5mm	$+3.6303e + 1$	$+3.36e + 1$	$-1.2410e + 1$	$-1.24e + 1$

Tabela 7.6: Máximos e mínimos da tensão σ_{xy} .

Ponto		Parâmetro de malha	$\sigma_{xx} (Kg/m)$		
x	y		BEM	FEM	Resistência do Materiais
0.0mm	-25.0mm	10.0mm	+8.7720e + 1	+8.627e + 1	+7.557e + 1
		5.0mm	+8.5678e + 1	+8.625e + 1	
		2.5mm	+8.4592e + 1	+8.539e + 1	
0.0mm	-100.0mm	10.0mm	-2.7021e + 1	-2.646e + 1	-2.422e + 1
		5.0mm	-2.7377e + 1	-2.727e + 1	
		2.5mm	-2.7521e + 1	-2.760e + 1	

Tabela 7.7: Pontos para verificação da convergência da tensão σ_{xx} .

Ponto		Parâmetro de malha	$u (mm)$		$v (mm)$	
x	y		BEM	FEM	BEM	FEM
62.5mm	120.0mm	10.0mm	+8.9281e - 1	+8.640e - 1	-1.3459e - 1	-1.302e - 1
		5.0mm	+8.9465e - 1	+8.864e - 1	-1.3469e - 1	-1.618e - 1
		2.5mm	+8.9411e - 1	+8.932e - 1	-1.3459e - 1	-1.344e - 1

Tabela 7.8: Pontos para verificação da convergência dos deslocamentos u e v .

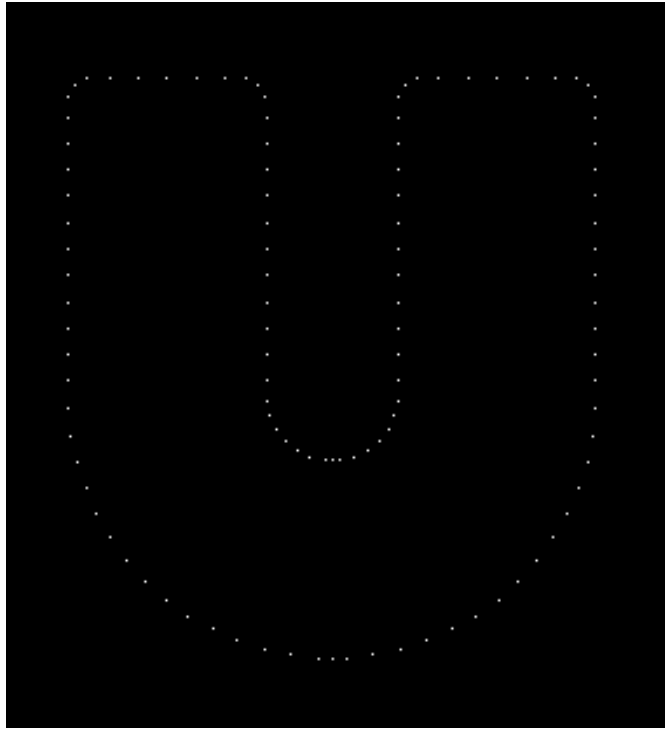


Figura 7.2: Nós da malha, método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 10mm, 112 nós.

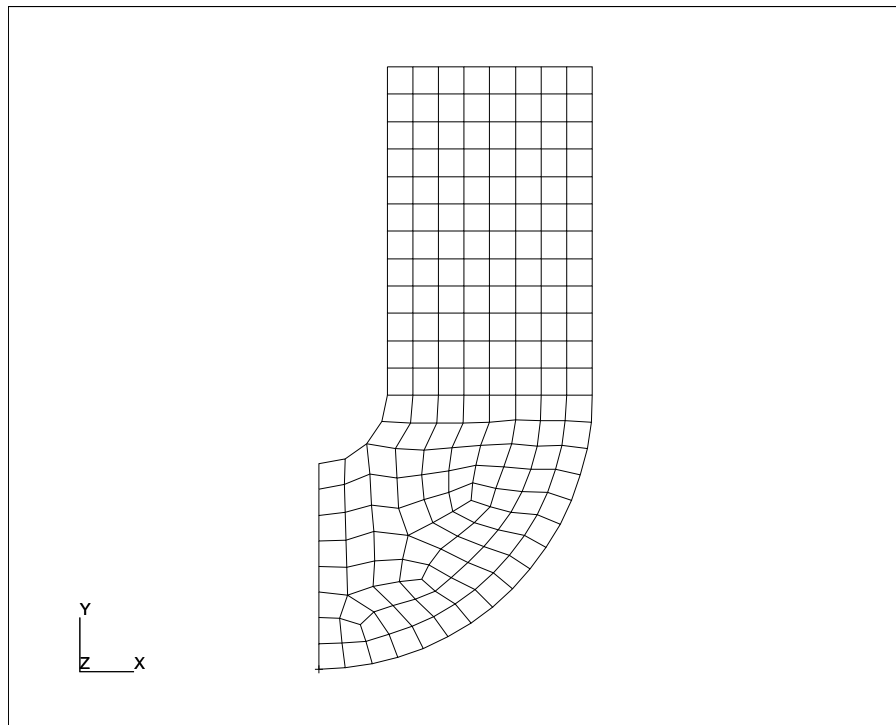


Figura 7.3: Malha de elementos, método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 10mm, 216 nós e 185 elementos.

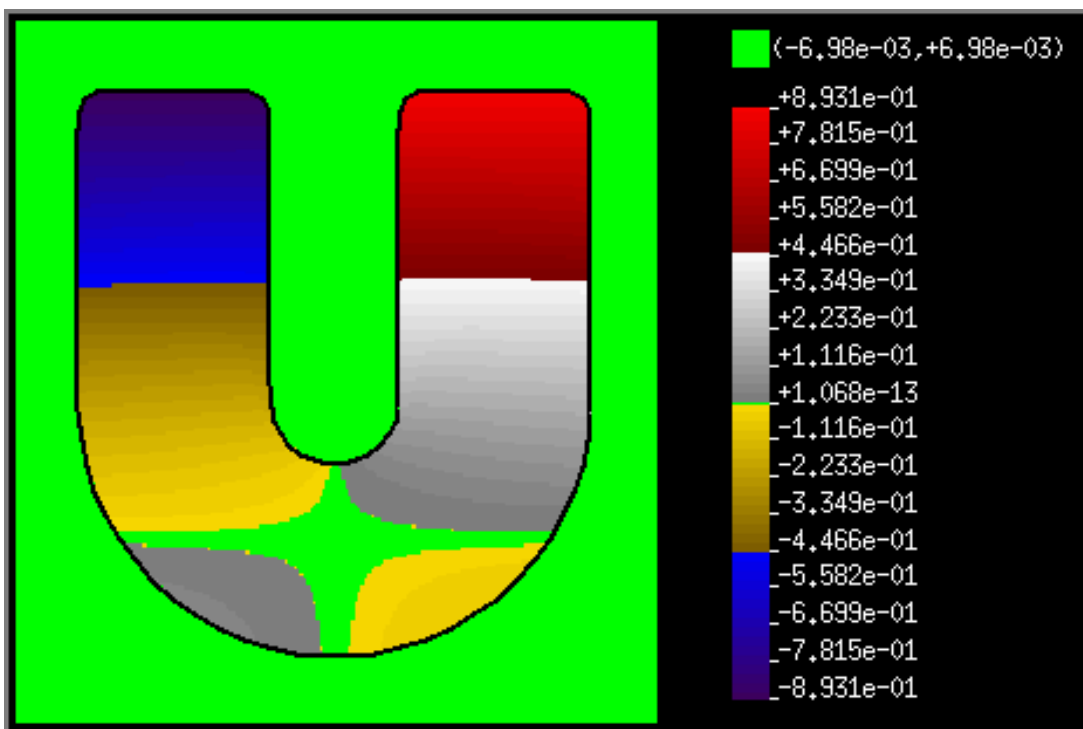


Figura 7.4: Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos u (mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 10mm.

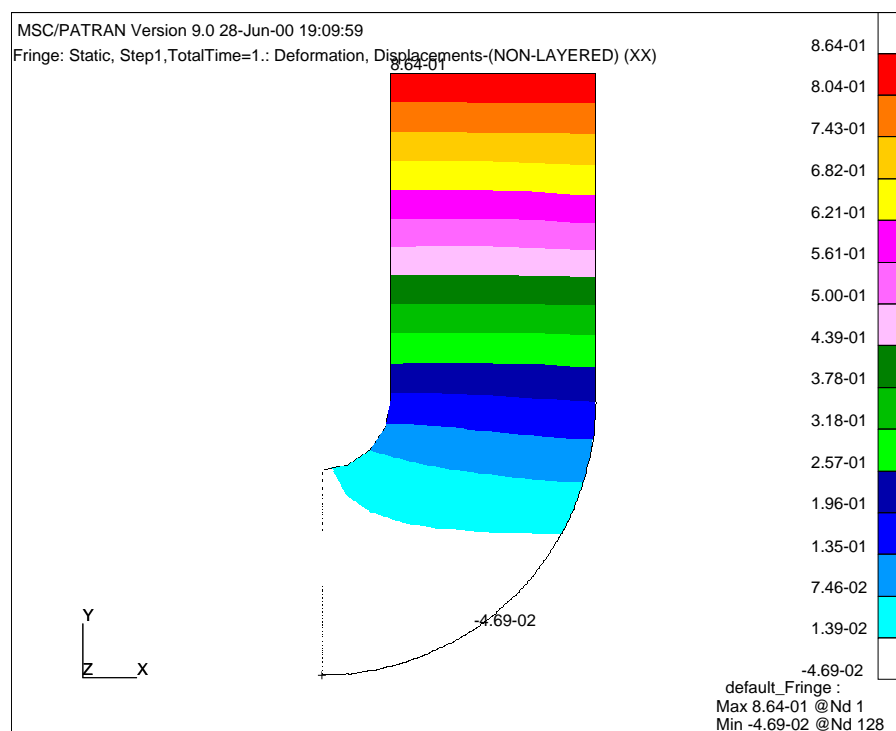


Figura 7.5: Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos u (mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 10mm.

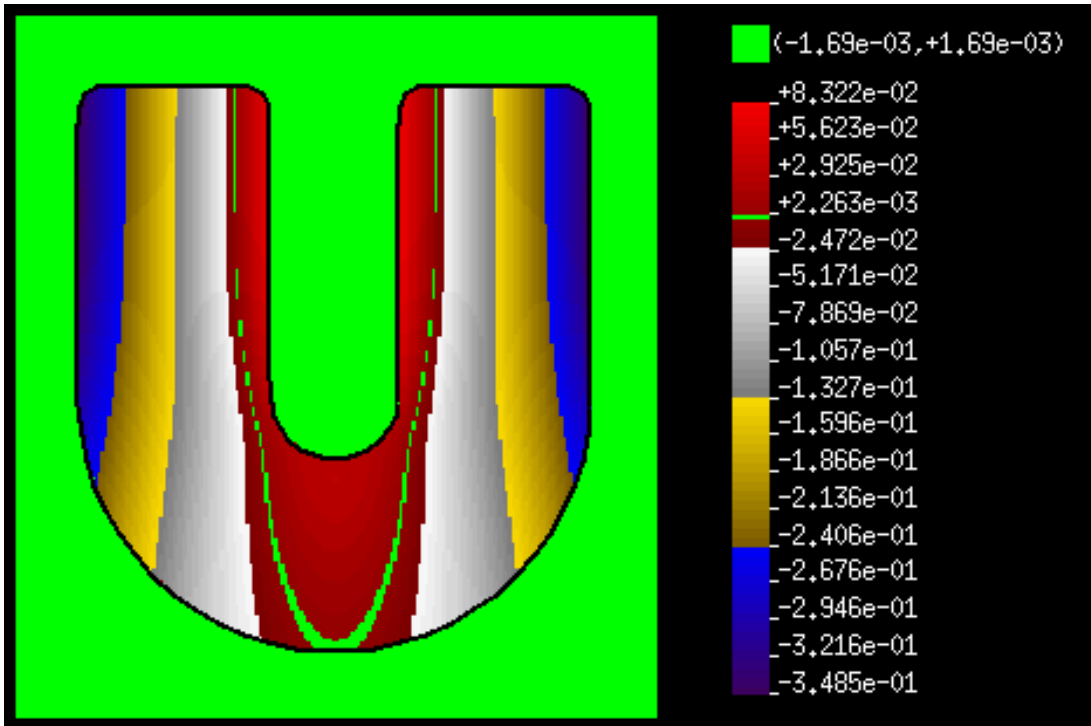


Figura 7.6: Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos v (mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 10mm.

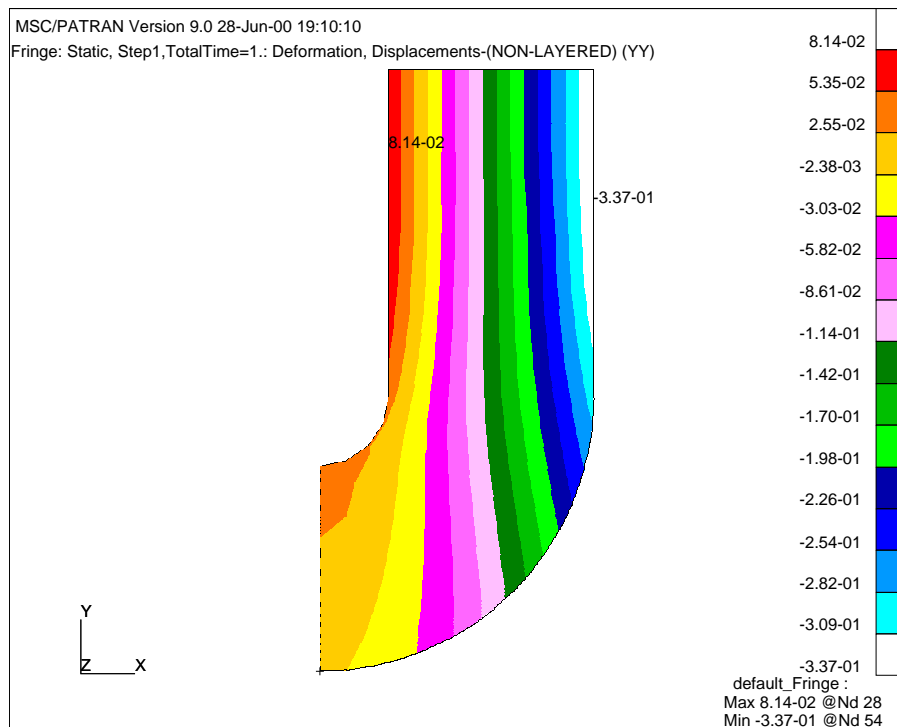


Figura 7.7: Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos v (mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 10mm.

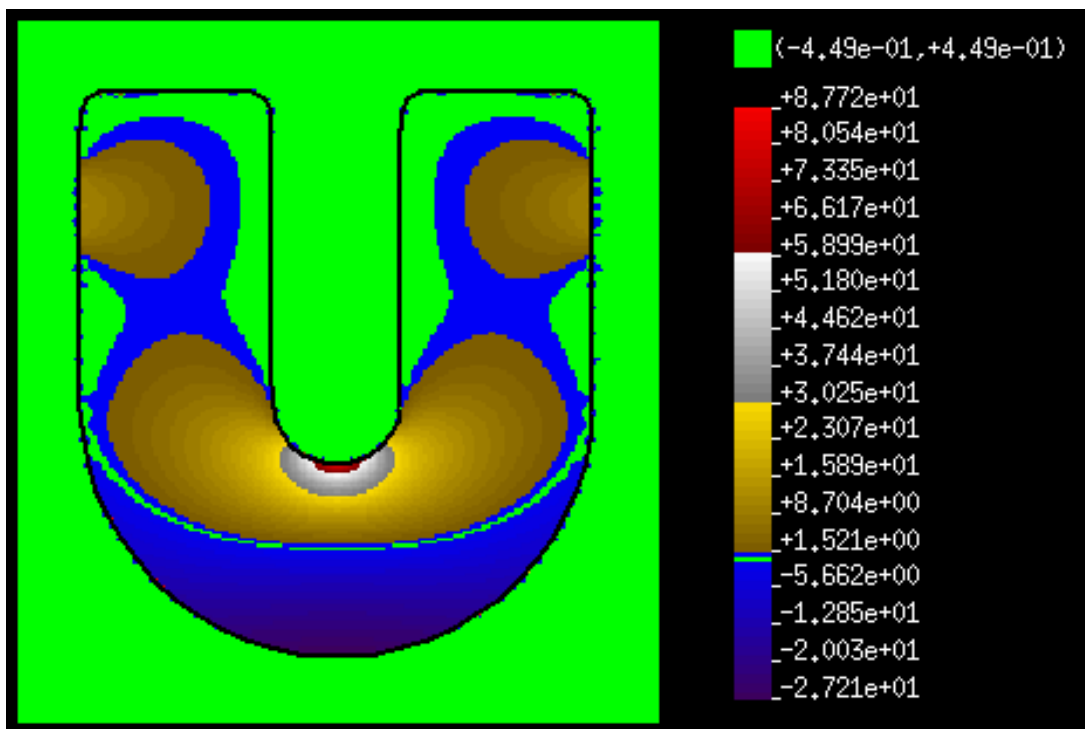


Figura 7.8: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xx} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 10mm.

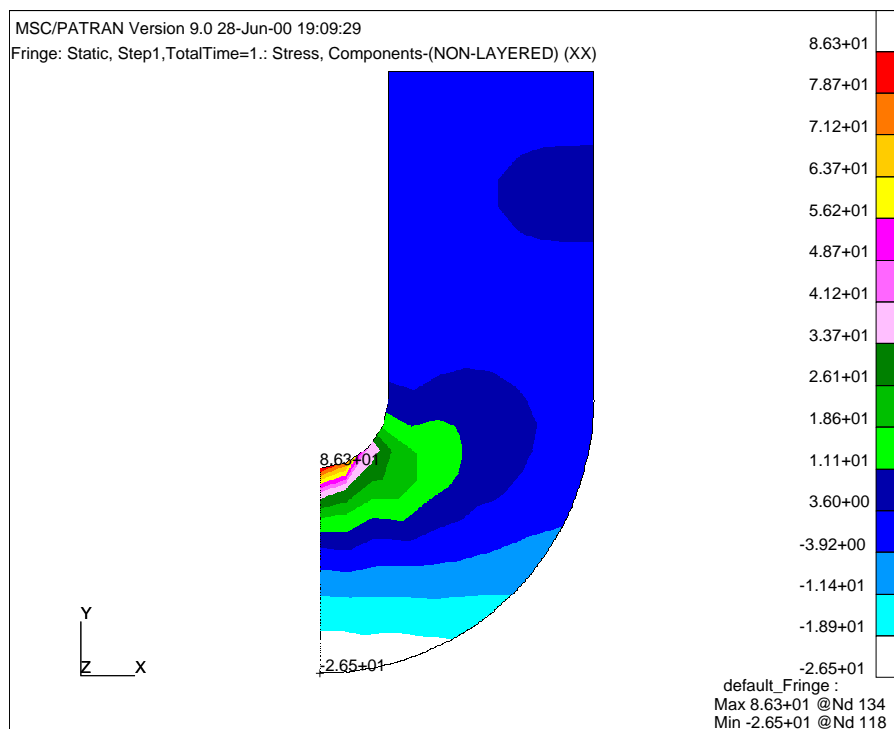


Figura 7.9: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xx} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 10mm.

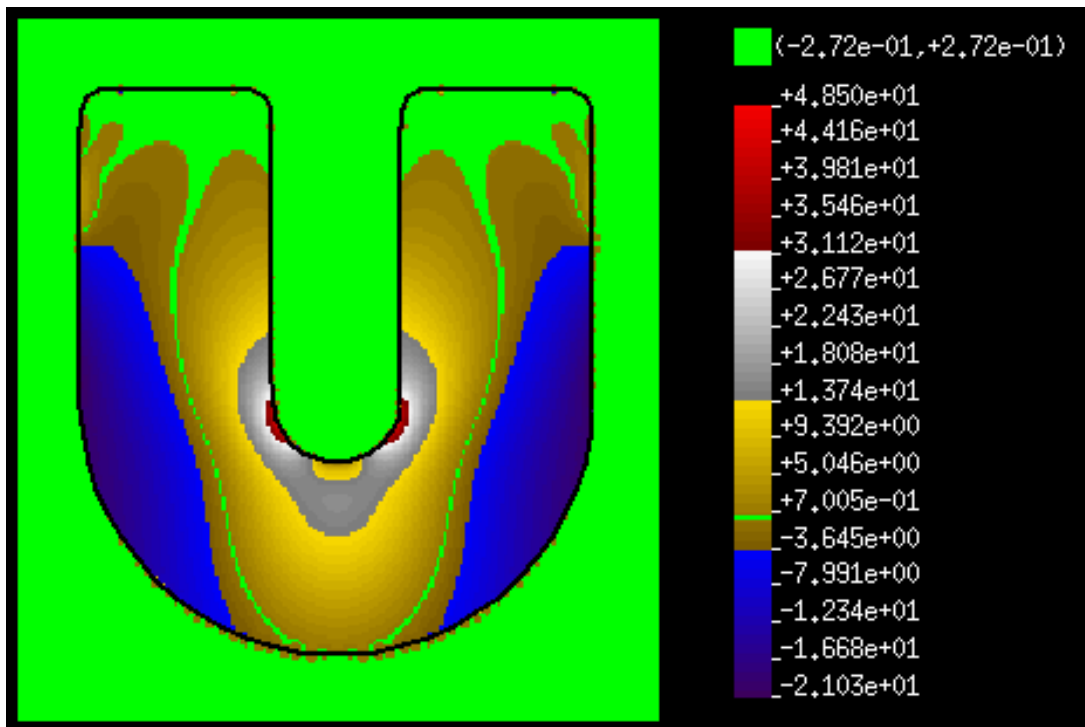


Figura 7.10: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{yy} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 10mm.

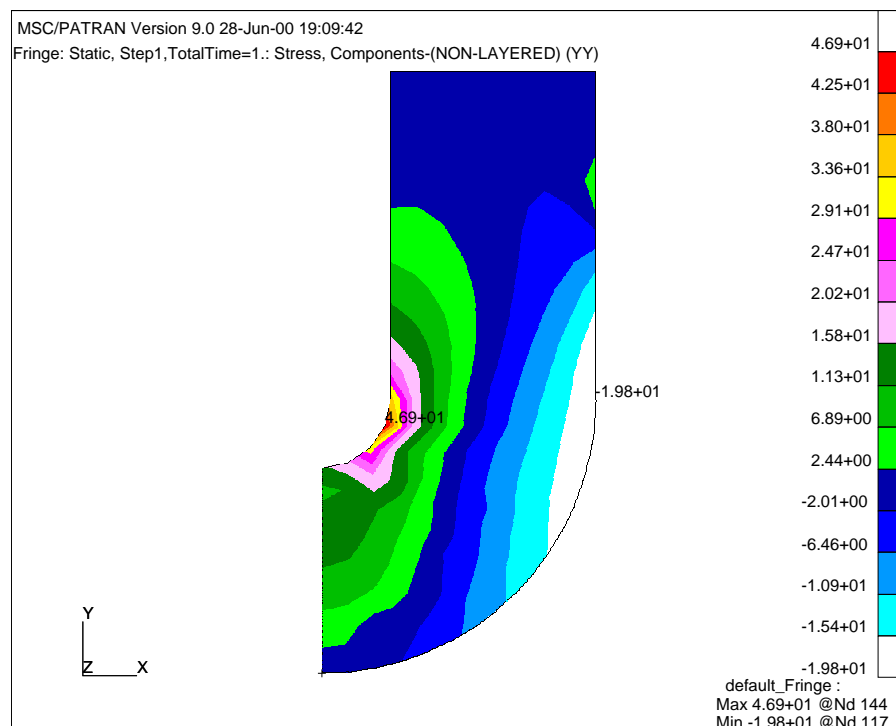


Figura 7.11: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{yy} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 10mm.

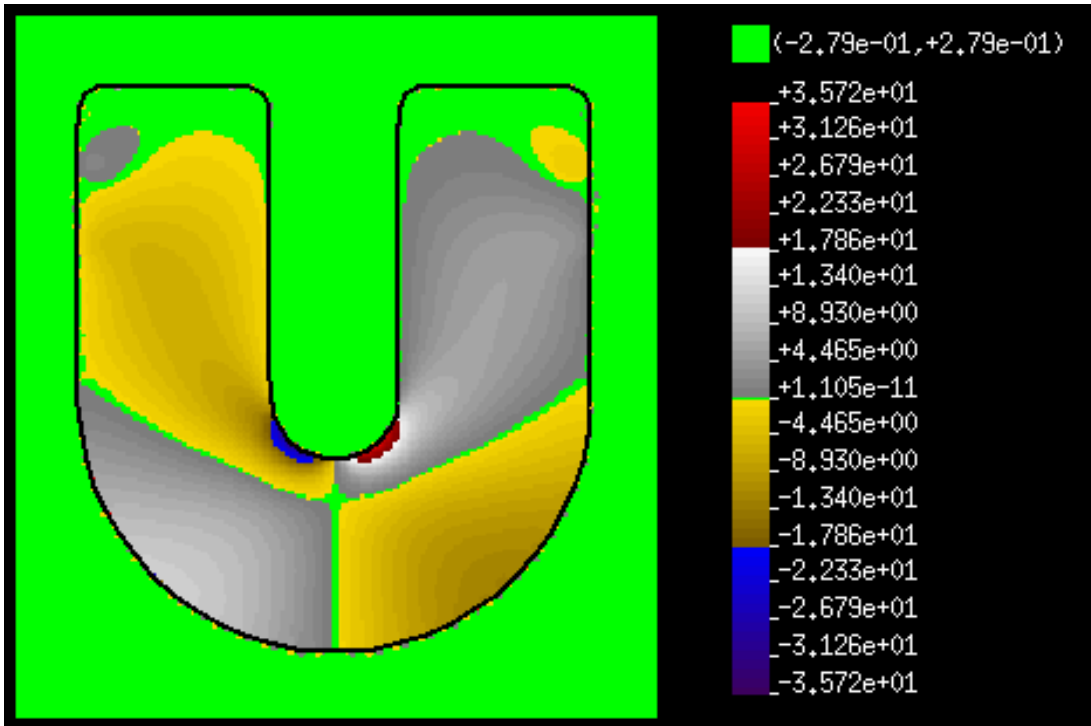


Figura 7.12: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xy} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 10mm.

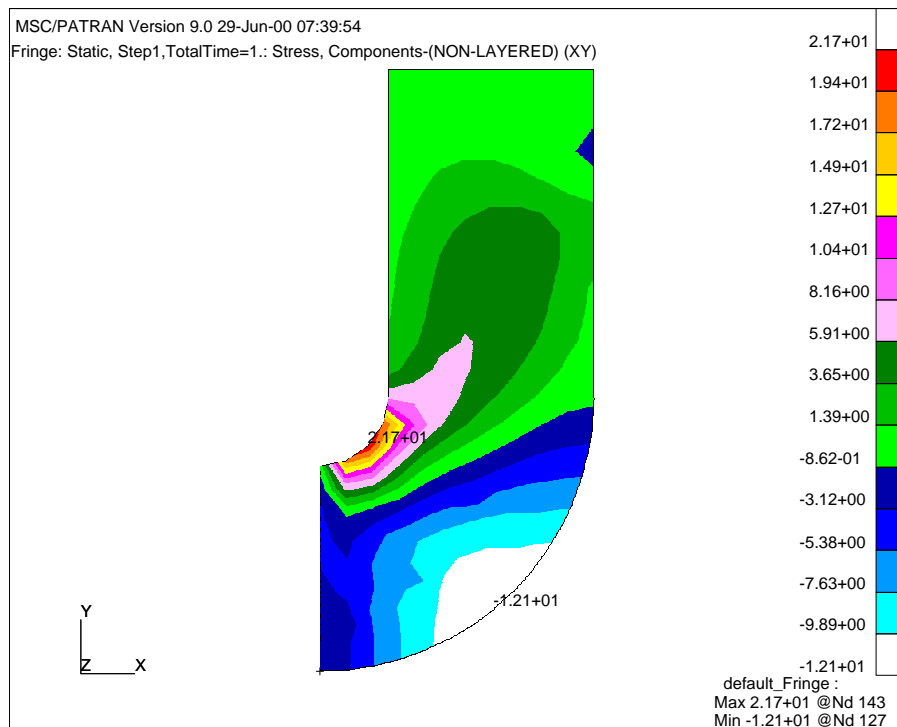


Figura 7.13: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xy} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 10mm.

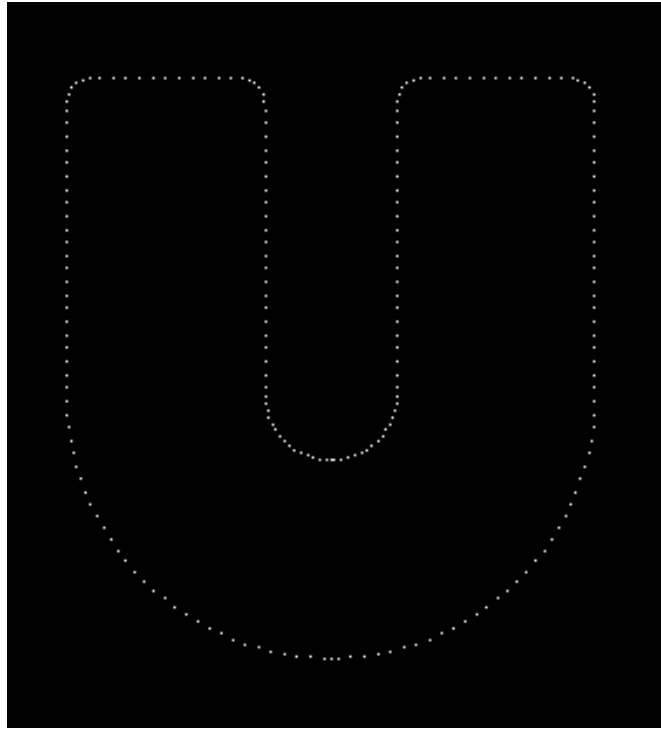


Figura 7.14: Nós da malha, método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 5mm, 228 nós.

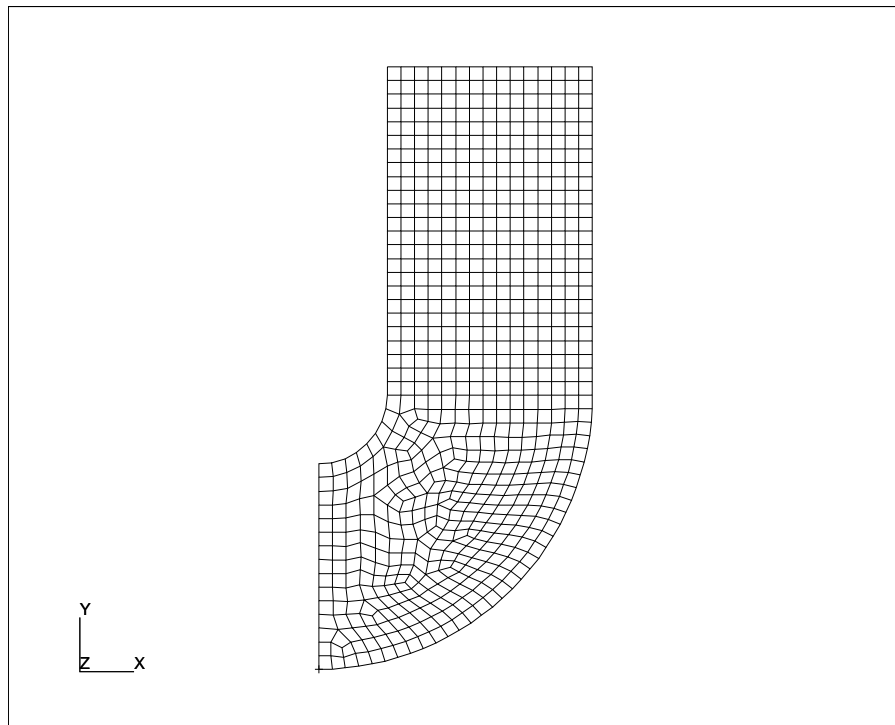


Figura 7.15: Malha de elementos, método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 5mm, 757 nós e 697 elementos.

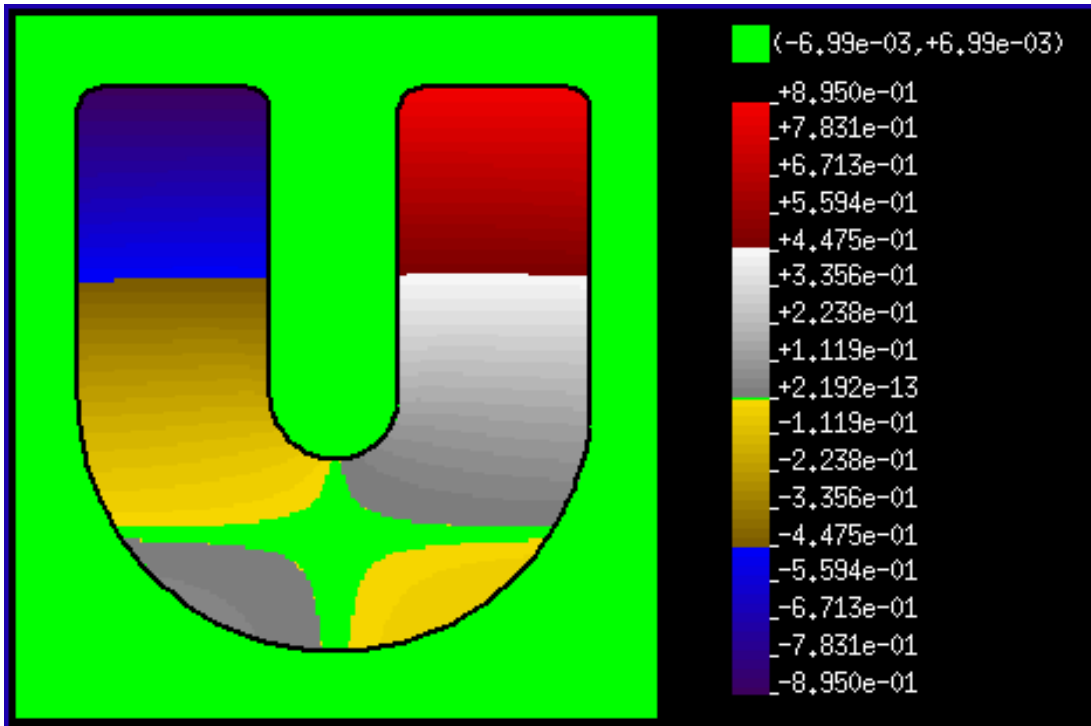


Figura 7.16: Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos u (mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 5mm.

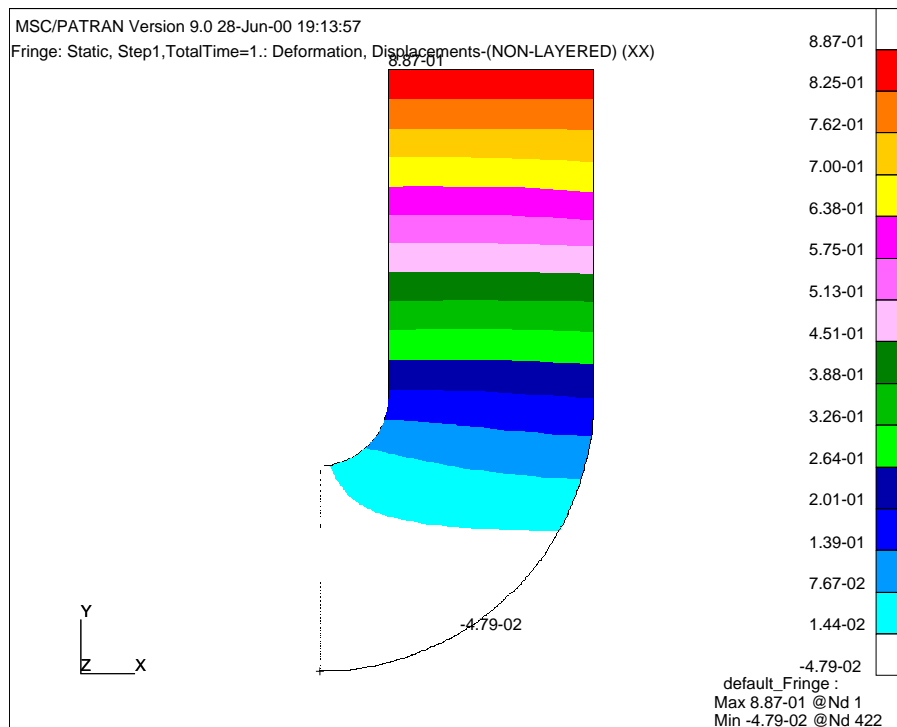


Figura 7.17: Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos u (mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 5mm.

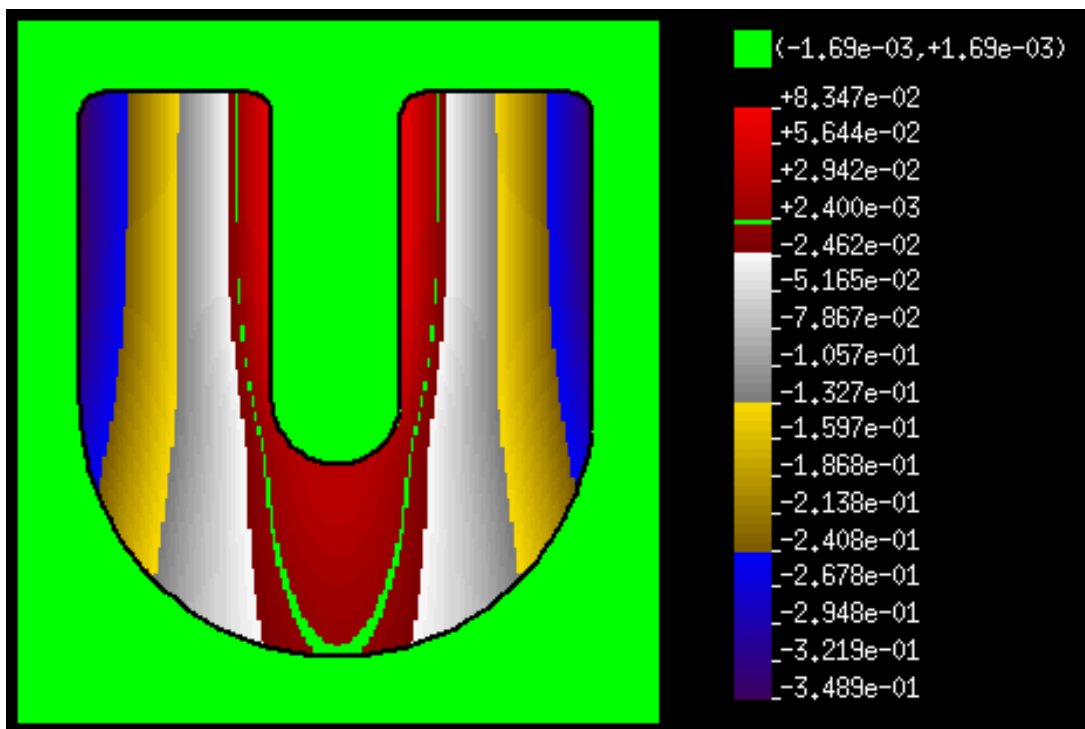


Figura 7.18: Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos v (mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 5mm.

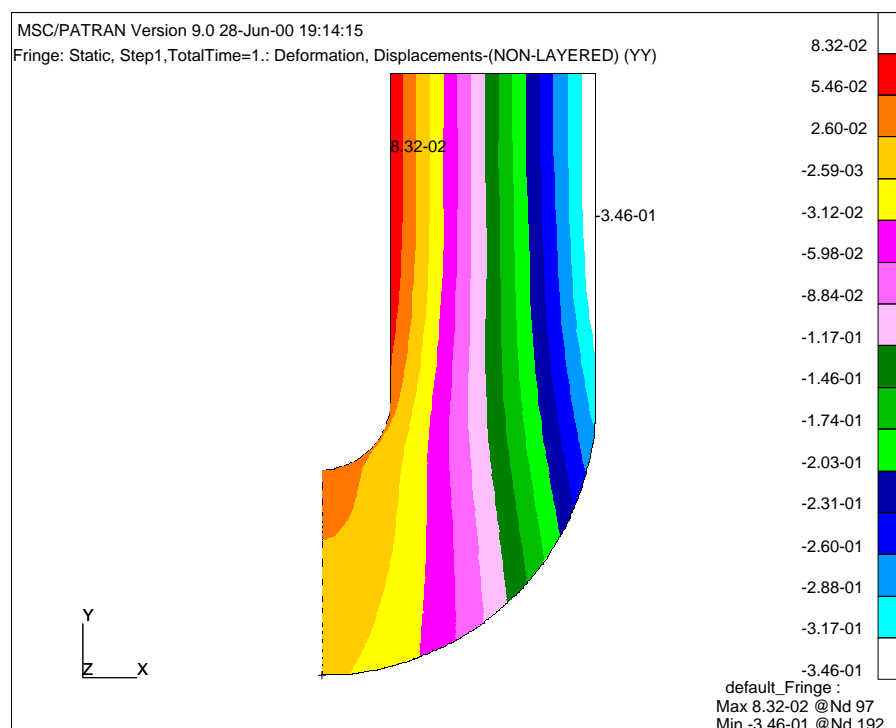


Figura 7.19: Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos v (mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 5mm.

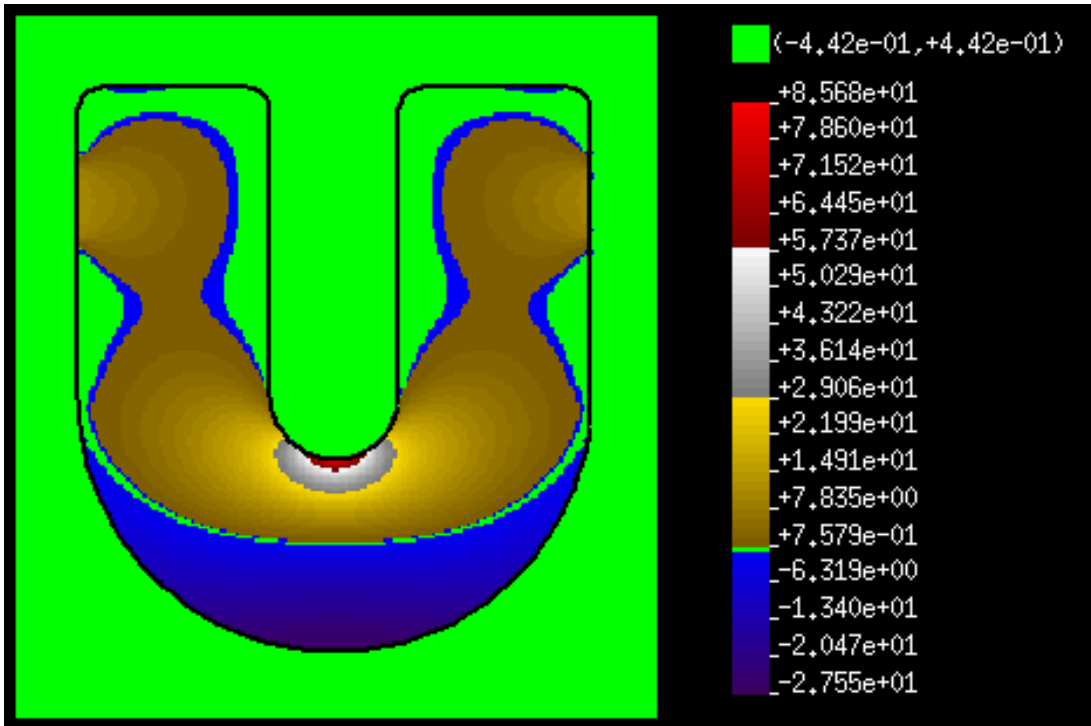


Figura 7.20: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xx} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 5mm.

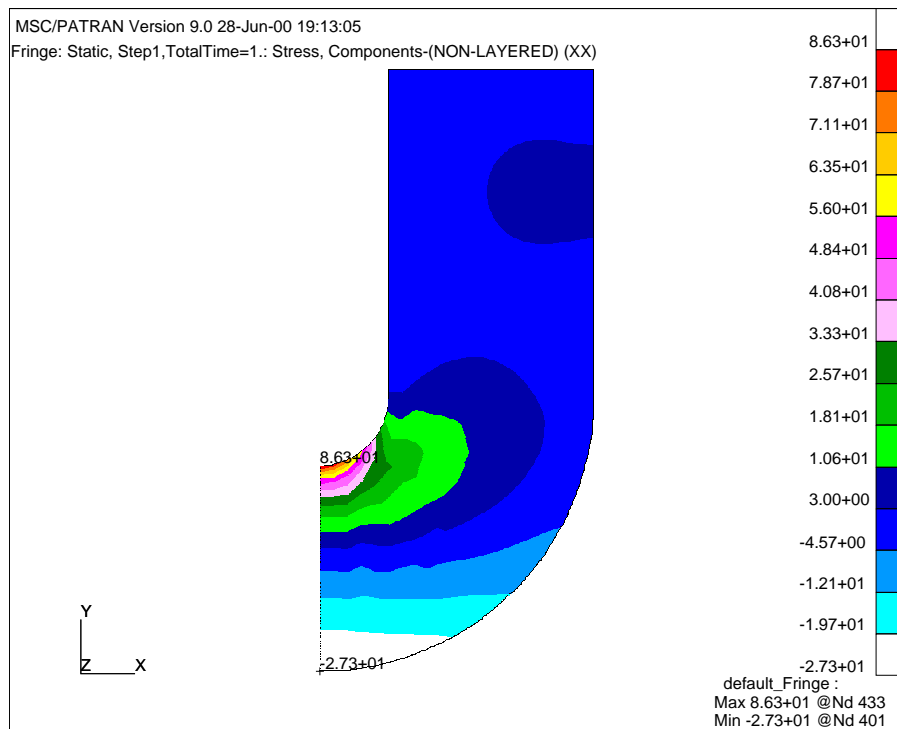


Figura 7.21: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xx} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 5mm.

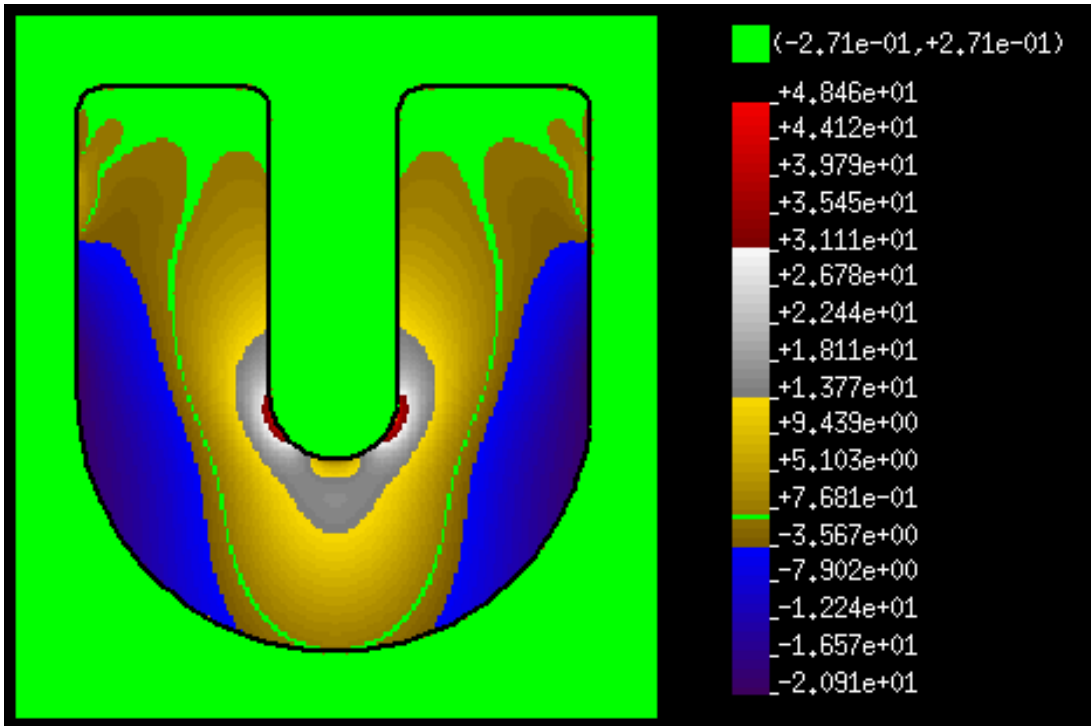


Figura 7.22: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{yy} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 5mm.

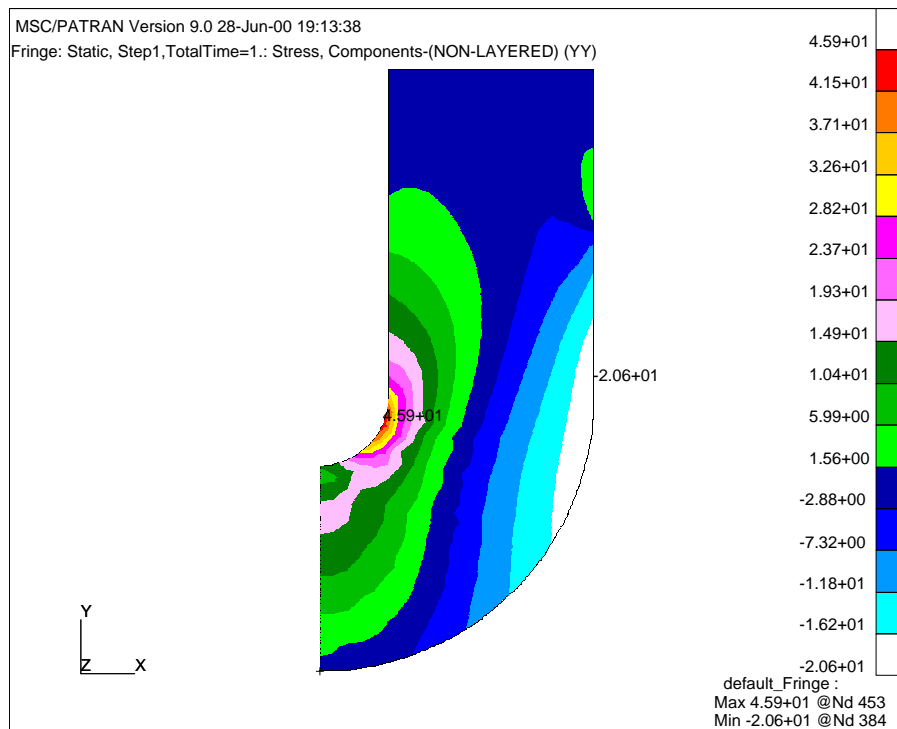


Figura 7.23: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{yy} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 5mm.

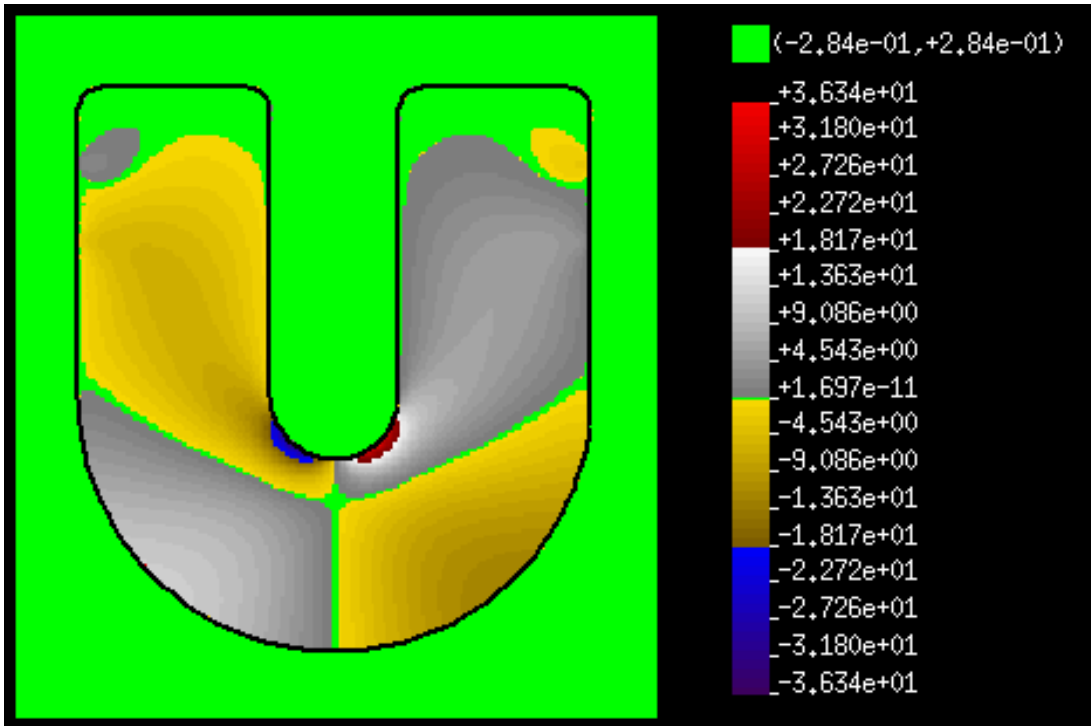


Figura 7.24: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xy} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 5mm.

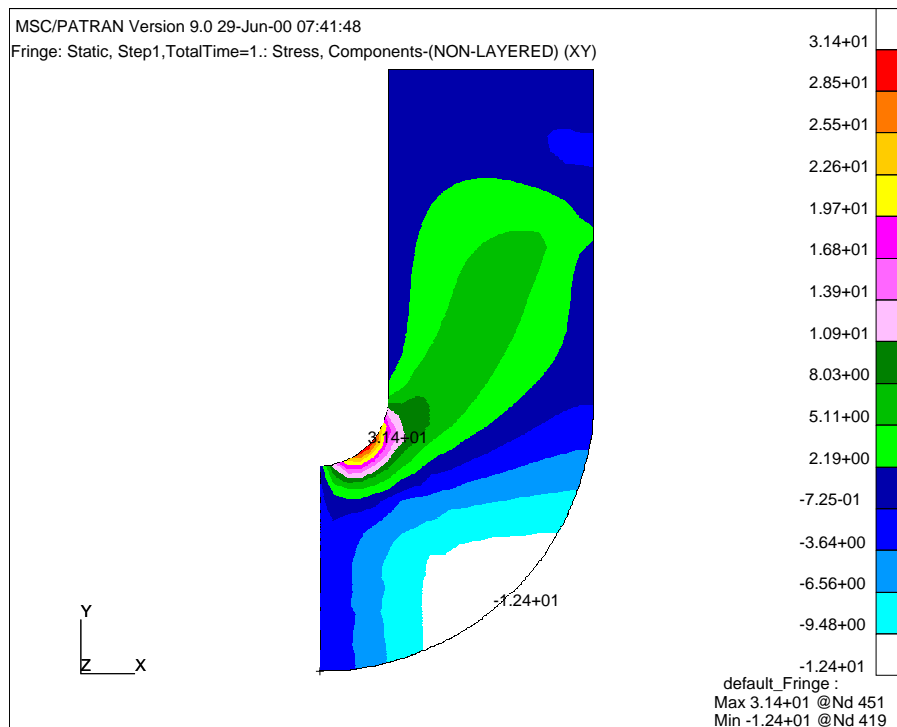


Figura 7.25: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xy} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 5mm.

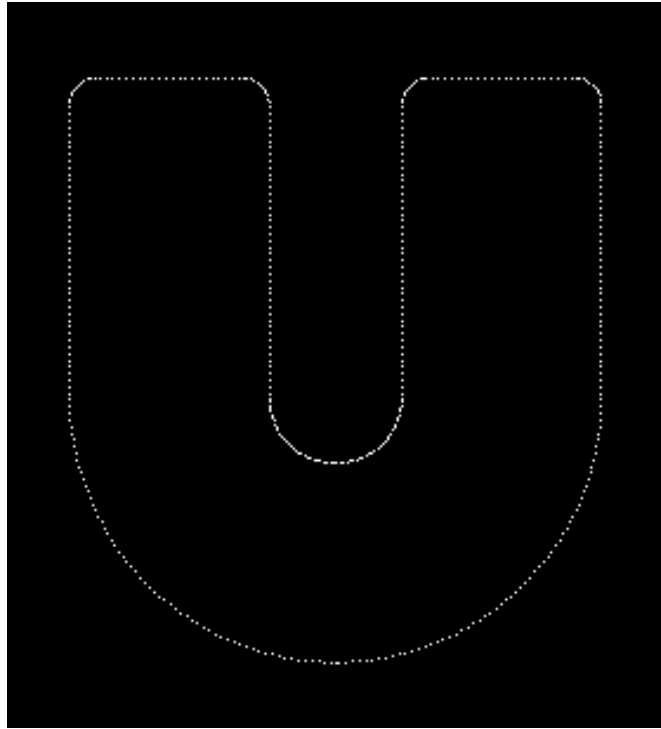


Figura 7.26: Nós da malha, método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 2.5mm, 456 nós.

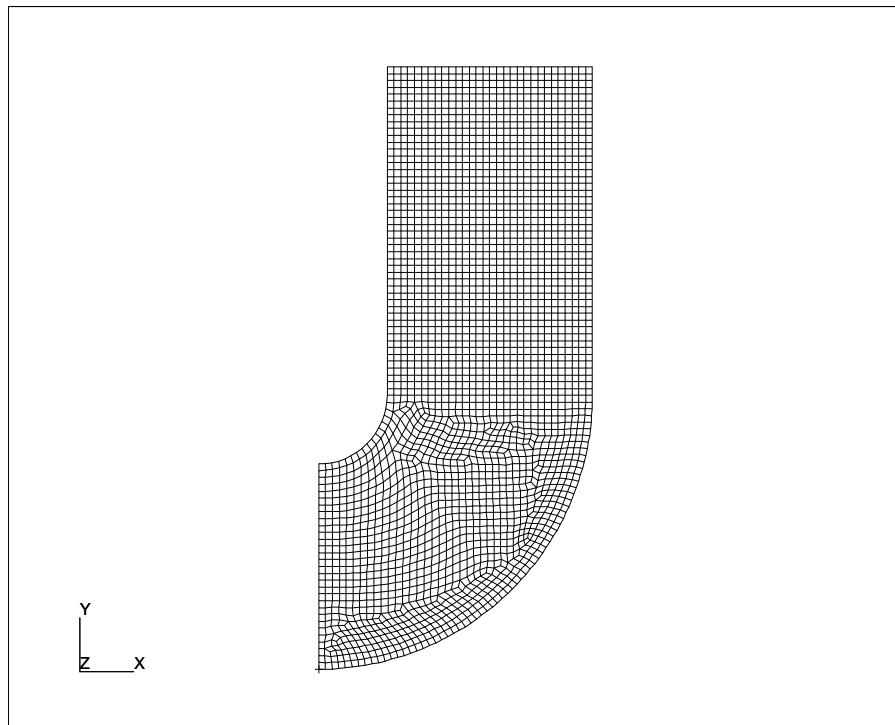


Figura 7.27: Malha de elementos, método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 2.5mm, 2737 nós e 2618 elementos.

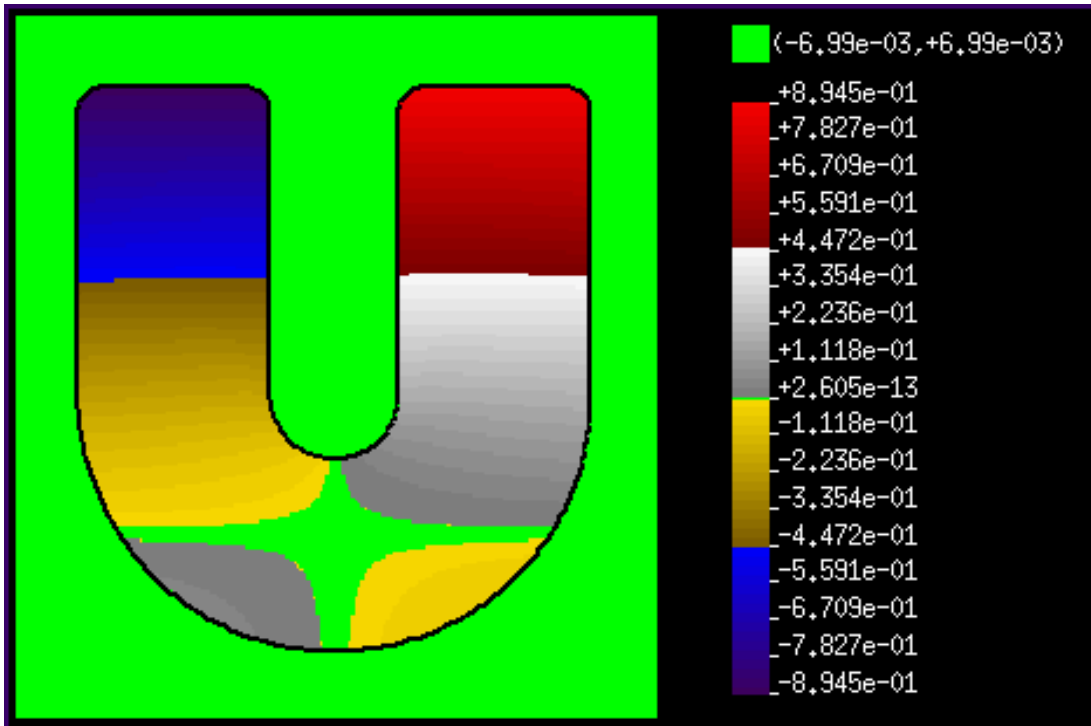


Figura 7.28: Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos u (mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 2.5mm.

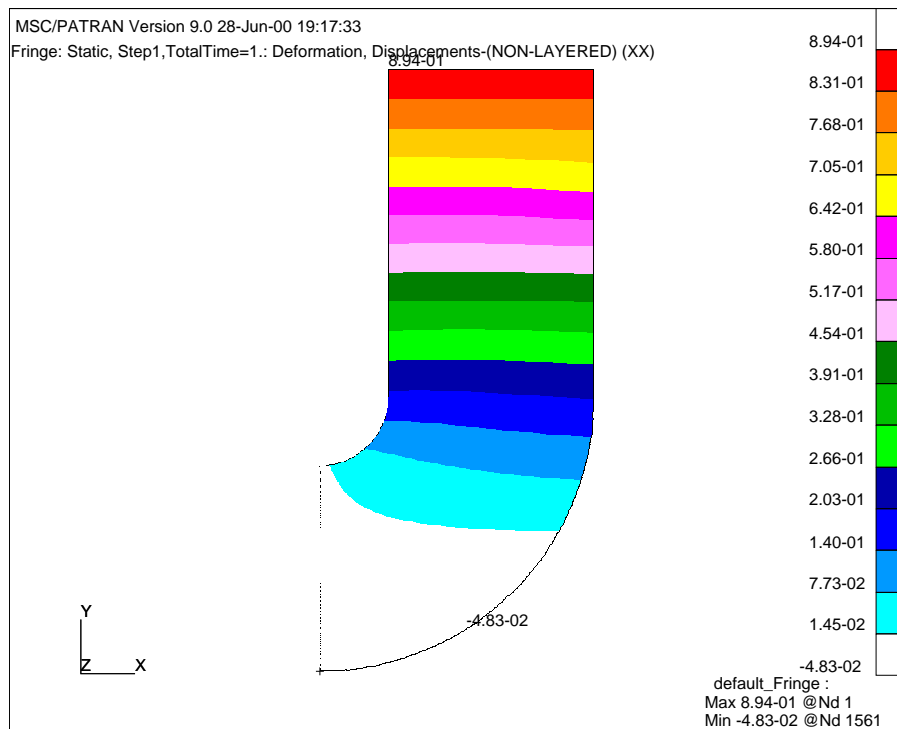


Figura 7.29: Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos u (mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 2.5mm.

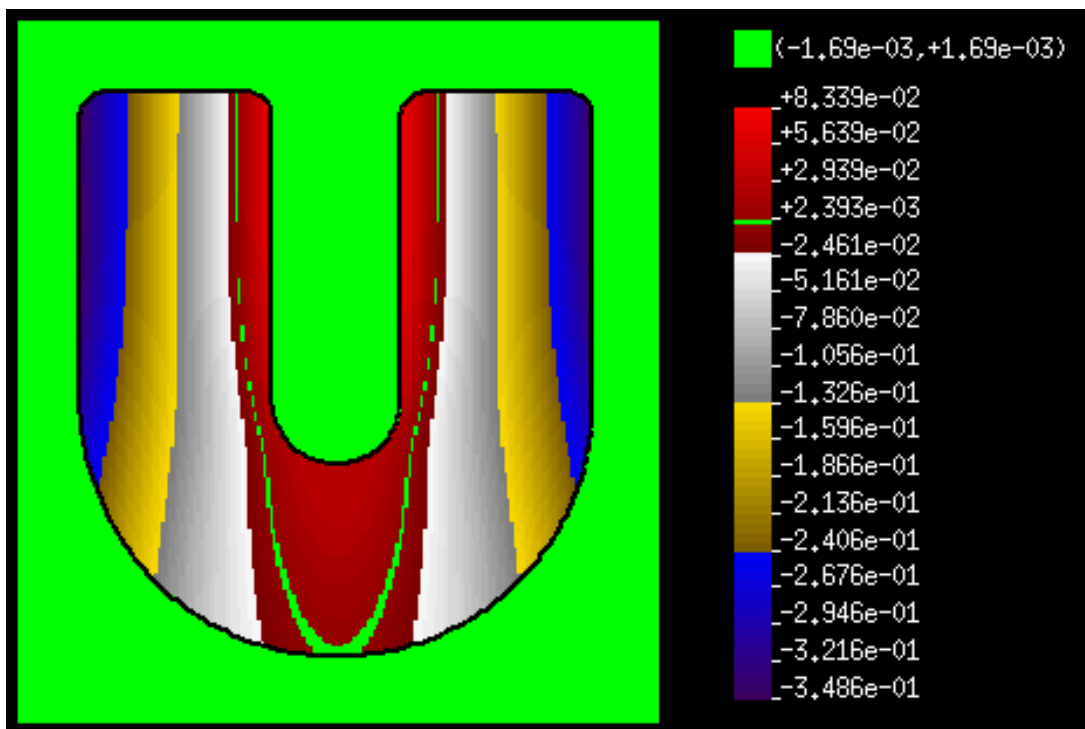


Figura 7.30: Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos v (mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 2.5mm.

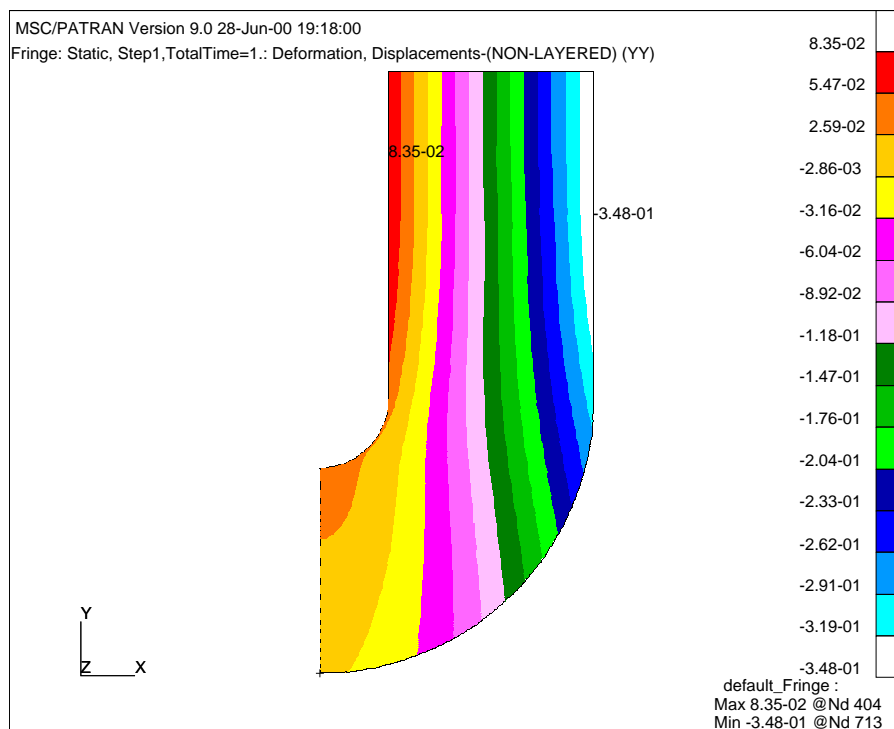


Figura 7.31: Mapa de cores mostrando a distribuição dos deslocamentos v (mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 2.5mm.

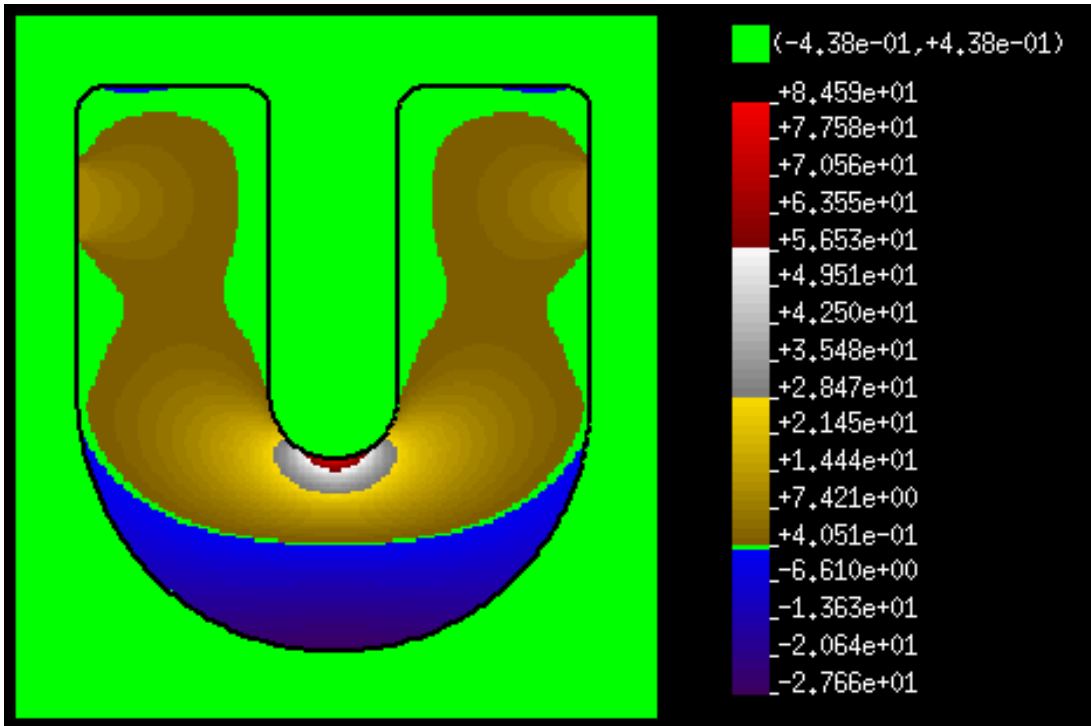


Figura 7.32: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xx} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 2.5mm.

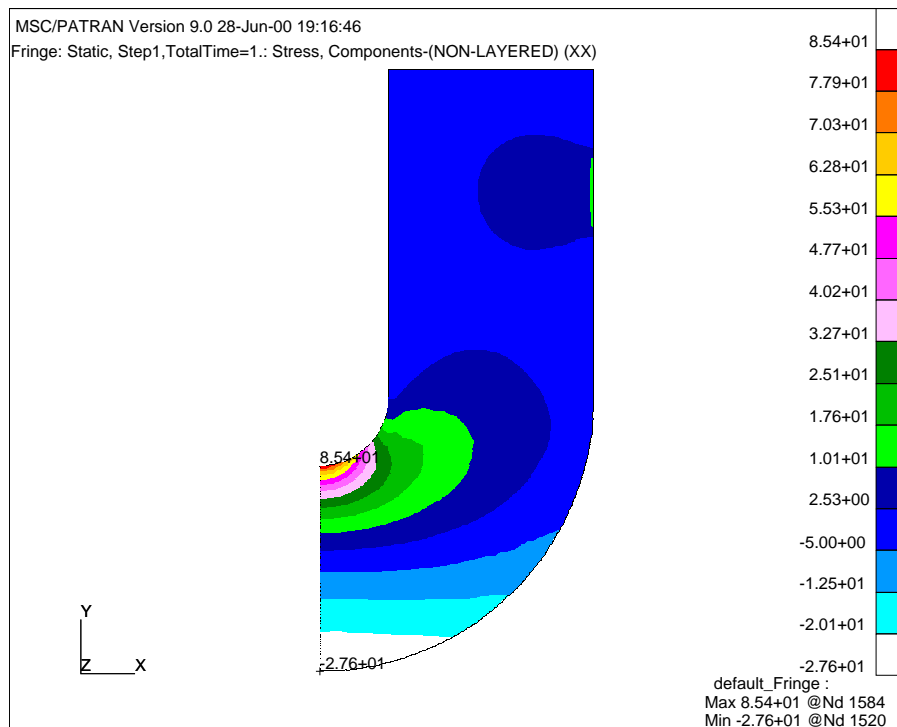


Figura 7.33: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xx} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 2.5mm.

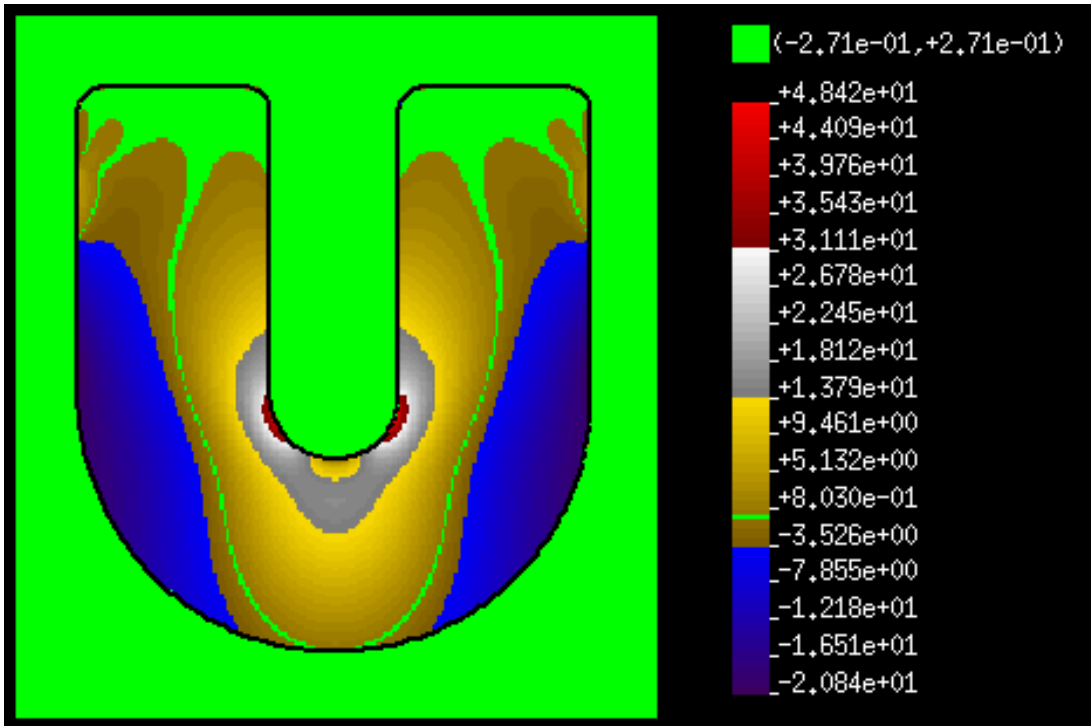


Figura 7.34: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{yy} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 2.5mm.

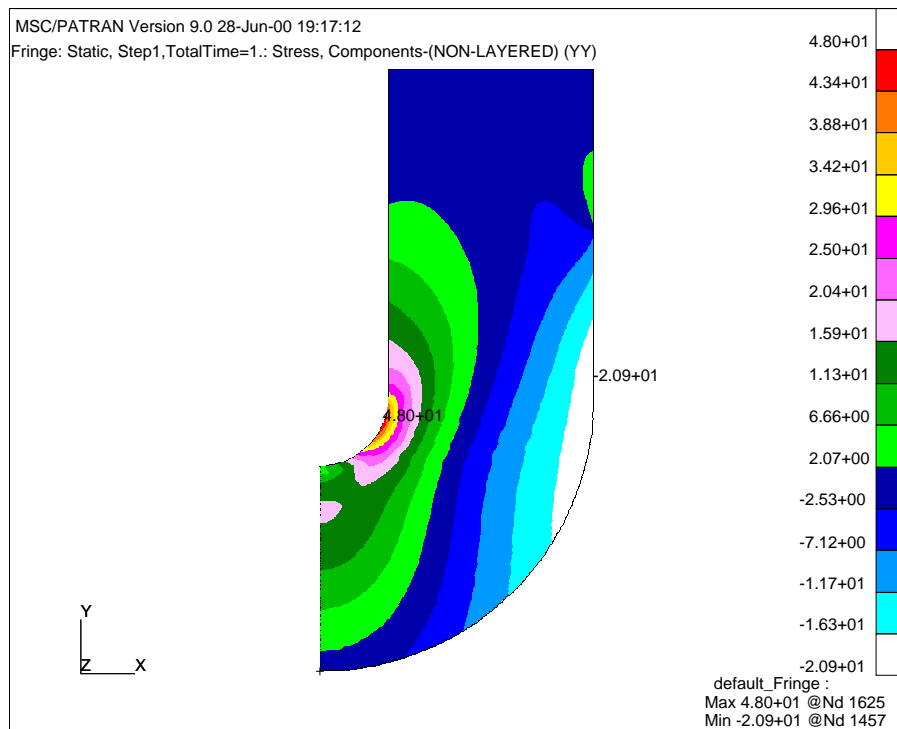


Figura 7.35: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{yy} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 2.5mm.

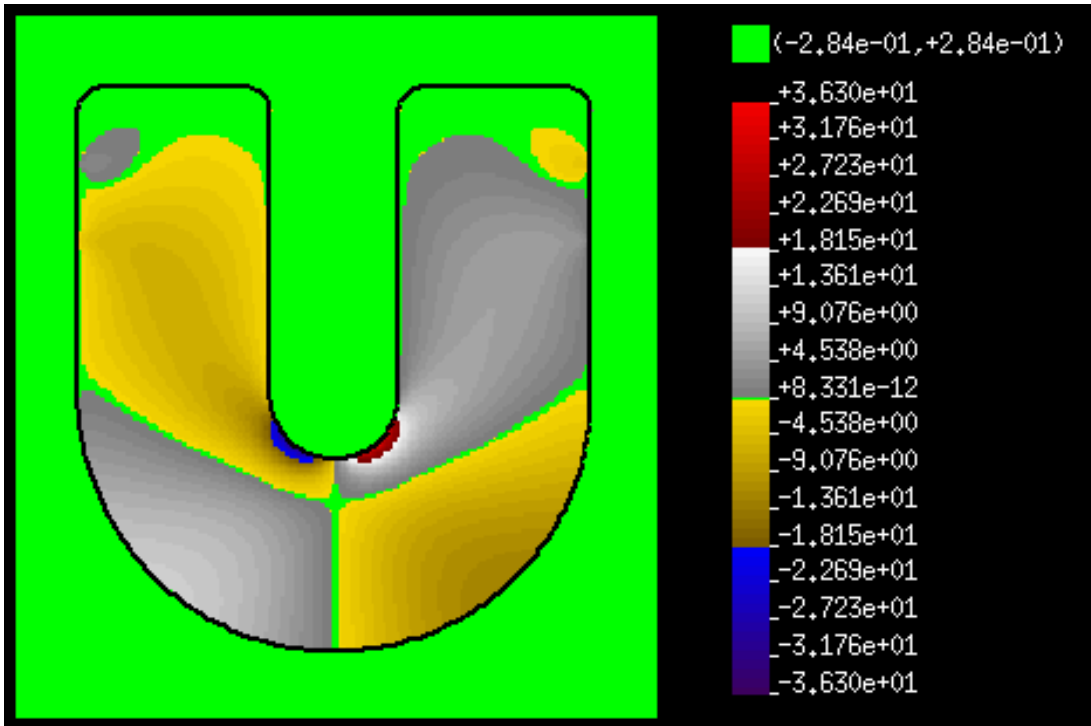


Figura 7.36: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xy} (Kgf/mm), método dos elementos de contorno, parâmetro de malha igual a 2.5mm.

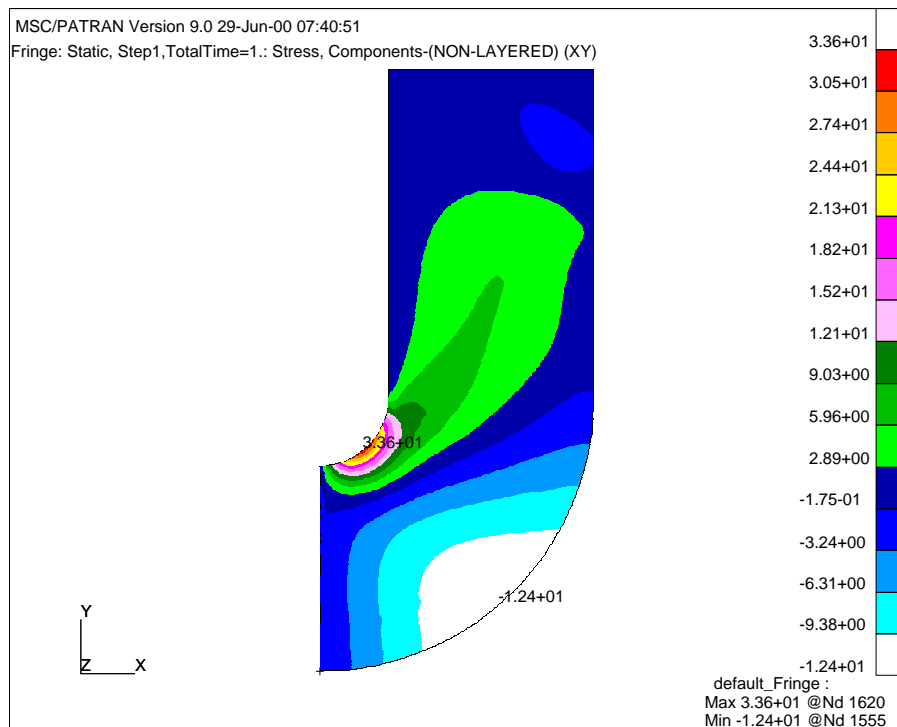


Figura 7.37: Mapa de cores mostrando a distribuição das tensões σ_{xy} (Kgf/mm), método dos elementos finitos, parâmetro de malha igual a 2.5mm.

Capítulo 8

Conclusões.

Do presente trabalho, conclui-se, inicialmente, que a definição da transformada de Fourier para um domínio arbitrário é uma ferramenta matemática importante na solução de equações diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes. Ainda, a solução encontrada por esta técnica, nos problemas estudados, coincide com a encontrada pelo método variacional, o que mostra que a solução fraca (obtida pelo método variacional) coincide com a solução do problema. A vantagem desta técnica em relação à formulação tradicionalmente empregada no método dos elementos de contorno é a seguinte: o processo de obtenção da equação integral de contorno a partir da equação diferencial parcial do problema através da transformada de Fourier é mais direto (envolve passos mais simples) do que através da formulação variacional do problema e pode ser aplicado a qualquer equação diferencial parcial com coeficientes constantes de qualquer ordem.

A dificuldade do método está na execução das transformadas inversas de Fourier das funções de Green do problema no espaço transformado. Porém, caso ocorra muita dificuldade na inversão, estas funções de Green podem ser obtidas numericamente a partir da formulação da transformada inversa de Fourier.

Na solução numérica das equações integrais de contorno, este trabalho contribuiu com a idéia de empregar pontos no exteriores ao domínio como pontos de colocação, o que elimina a desvantagem de ter que avaliar as integrais de contorno sobre o próprio contorno onde os núcleos destas integrais (funções de Green) apresentam singularidades, conforme normalmente é feito no método dos elementos de contorno.

A partir do que foi apresentado, algumas vias para o desenvolvimento subsequente podem ser formuladas:

1. Estudar as integrais de fronteira obtidas a partir do processo empregado na sua verificação e estabelecer condições a serem satisfeitas pelas funções de Green contidas

nestas integrais. Assim, determina-se uma família de funções de Green para um dado problema, o que permite a investigação das melhores funções, do ponto de vista numérico, a serem empregadas. Como exemplo, no problema de condução de calor em duas dimensões, pode-se observar que a função F relacionada em (4.14) necessita satisfazer a condição expressa em (8.1) para que a equação (4.14) seja verdadeira conforme pode ser visto na equação (4.30).

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0. \quad (8.1)$$

Isto sugere que qualquer outra função que satisfaça esta condição talvez também possa ser empregada na integral de contorno.

2. Estudar o mesmo processo para outras transformações integrais e para uma transformada genérica de núcleo $k(s, x)$, visando determinar o melhor tipo de transformação integral a ser empregado neste processo.
3. Estudar a solução de um problema com derivadas de terceira ordem cuja formulação integral de contorno não possa ser obtida pela formulação variacional. Além disto, caracterizar os problemas cuja equação integral de contorno não possa ser obtida pela formulação variacional e mostrar a possibilidade de solução via transformada de Fourier.

Referências Bibliográficas

- [1] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier. *The Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company, third edition, 1934.
- [2] Karl F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Oxford University Press, Dover Publications Inc., 1975.
- [3] P. M. Prenter. *Splines and Variational Method*. John Wiley & Sons Inc., 1975.
- [4] Dean G. Duffy. *Solving Partial Differential Equations*. CRC Press Inc., Boca Raton, 1994.
- [5] M. Necati Özişik. *Heat Conduction*. John Wiley & Sons, 1980.
- [6] G. G. Furtado, M. T. de Vilhena, and T. R. Strohaecker. An approach to boundary integral element via fourier transforms. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 22(3):215–220, 1998.
- [7] J. N. Reddy. *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.
- [8] S. Han and Y. Ichikawa. Numerical modelling for scattering of waves in three-dimensional cracked material. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 38(24):4081–4100, 1995.
- [9] P. Bettess and E. Chadwick. Wave envelope examples for progressive waves. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 38(15):2487–2508, 1995.
- [10] F. J. Sern and J. Badal. A weak variational formulation for the propagation of love waves. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 23(9):1601–1613, 1986.

- [11] K. Amaratunga and J. R. Willians. Wavelet-galerkin solutions for one-dimensional partial differential equations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 37(16):2703–2716, 1994.
- [12] Z. Celep and Z. P. Bazcaronant. Spurious reflection of elastic waves due to gradually changing finite element size. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 19(5):631–646, 1983.
- [13] S. Minagawa, S. Nemat-Nasser and M. Yamada. Finite element analysis of harmonic waves in layered and fibre-reinforced composites. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 17(9):1335–1353, 1981.
- [14] J. A. Aranha, C. C. Mei and D. K. P. Yue. Some properties of a hybrid element method for water waves. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 14(11):1627–1641, 1979.
- [15] R. W. Yeung and Y. C. Bouger. A hybrid integral-equation method for steady two-dimensional ship waves. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 14(3):317–336, 1979.
- [16] D. K. P. Yue, H. S. Chen and C. C. Mei. A hybrid element method for diffraction of water waves by three-dimensional bodies. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 11(8):245–266, 1978.
- [17] P. Bettess and O. C. Zienkiewicz. Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 11(8):1271–1290, 1977.
- [18] Rafael Gallego, Jose Dominguez. Hypersingular bem for transient elastodynamics. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 39(10):1681–1705, 1996.
- [19] Yijun Liu and F. J. Rizzo. Hypersingular boundary integral equations for radiation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 107:131–144, 1993.
- [20] L. Bencheikh. Modified fundamental solutions for the scattering of elastic waves by a cavity: Numerical results. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 36(19):3283–3302, 1993.
- [21] F. J. Rizzo, D. J. Shippy and M. Rezayat. A boundary integral equation method for radiation and scattering of elastic waves in three dimensions. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 21(1):115–129, 1985.

- [22] S. P. Huestis. A fourier boundary integral method for solving laplace's equations in two dimensions. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11(7): 575–584, 1995.
- [23] R. M. Cotta and M. D. Mikhailov. Integral transform method. *Appl. Math. Model.*, 17(3):156–161, 1993.
- [24] S. Sirtori, G. Maier, Novati G., and Miccoli S. A Galerkin symmetric boundary element method in elasticity: Formulation and implementation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 35:255–282, 1992.
- [25] A. Frangi and G. Novati. Regularized symmetric Galerkin BIE formulations in the Laplace transform for 2D problems. *Comp. Mech.*, 22:50–60, 1998.
- [26] S. P. Zhu, P. Satravaha, and X. P. Lu. Solving linear diffusion-equations with the dual reciprocity method in laplace space. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 13(1):1–10, 1994.
- [27] D. Nardini and C. A. Brebbia. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Bound. Elem. Meth. Eng.*, 1982.
- [28] T. A. Cruse and F. J. Rizzo. A direct formulation and numerical solution of the general elastodynamic problem I. *J. Math. Anal. and Appl.*, 22:244–259, 1968.
- [29] T. A. Cruse. A direct formulation and numerical solution of the general elastodynamic problem II. *J. Math. Anal. and Appl.*, 22:341–355, 1968.
- [30] F. Rizzo and D. J. Shippy. A method of solution for certain problems of transient heat conduction. *AIAA J.*, 8:2004–2009, 1970.
- [31] S. Ahmad and G. D. Manolis. Dynamic analysis of 3-d structures by a transformed boundary element method. *Comput. Mech.*, 2:185–196, 1987.
- [32] T. Nishigaki, T. Ohyama, and M. Endo. A study of the transient sound radiated by impacted solid bodies based on the boundary element method. *JSME Int. J. Ser. C-Dyn. Control Robot. Des. Manuf.*, 39(2):218–224, 1996.
- [33] D. Rui and Z. Zhengyou. Boundary element method for solving dynamical response of viscoelastic thin plate. *Appl. Math. Mech.*, 18(3):229–235, 1997.
- [34] E. Pan, C. Sassolas, B. Amadei, and W. T. Pfeffer. A 3-d boundary element formulation of viscoelastic media with gravity. *Comput. Mech.*, 19(4):308–316, 1997.

- [35] S. P. Zhu. Solving transient diffusion problems: time-dependent fundamental solution approaches versus LTDRM approaches. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 21(1):87–90, 1998.
- [36] W. Tang. *Transforming Domain into Boundary Integrals in BEM*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [37] A. J. Kassab and R. S. Nordlund. Efficient implementation of the fourier dual reciprocity boundary-element method using 2-dimensional fast fourier- transforms. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 12(2):93–102, 1993.
- [38] A. H. W. M. Kuijpers, G. Verbeek, and J. W. Verheij. An improved acoustic fourier boundary element method formulation using fast fourier transform integration. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(3):1394–1401, 1997.
- [39] C. Provatidis. A boundary element method for axisymmetric potential problems with non-axisymmetric boundary conditions using fast fourier transform. *Eng. Comput.*, 15(4):428–449, 1998.
- [40] C. Provatidis. A fast fourier-boundary element method for axisymmetric potential and elasticity problems with arbitrary boundary conditions. *Comput. Mech.*, 23(3): 258–270, 1999.
- [41] A. P. Peirce, S. Spottiswoode, and J. A. L. Napier. The spectral boundary element method - a new window on boundary elements in rock mechanics. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 29(4):379–400, 1992.
- [42] L. R. Hill and T. N. Farris. Fast fourier-transform of spectral boundary elements for transient heat-conduction. *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, 5(9):813–827, 1995.
- [43] A. O. Vatul’yan and E. V. Sadchikov. A new formulation of boundary integral equations for the helmholtz equation. *Acoust. Phys.*, 44(3):271–274, 1998.
- [44] A. O. Vatul’yan and V. M. Shamshin. A new version of boundary integral equations and their application to dynamic three-dimensional problems of the theory of elasticity. *Pmm-J. Appl. Math. Mech.*, 62(3):427–434, 1998.
- [45] P. H. Wen, M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke. Application of the weight function method to two-dimensional elastodynamic fracture mechanics. *Int. J. Fract.*, 76(3): 193–206, 1996.

- [46] P. H. Wen, M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke. A weight function technique in three-dimensional fracture mechanics: Static and dynamic. *Int. J. Fract.*, 78(2):101–115, 1996.
- [47] P. H. Wen, M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke. Mixed-mode weight functions in three-dimensional fracture mechanics: Dynamic. *Eng. Fract. Mech.*, 59(5):577–587, 1998.
- [48] W. J. Mansur and C. A. Brebbia. Formulation of the boundary element method for transient problems governed by the scalar wave-equation. *Appl. Math. Model.*, 6(4):307–311, 1982.
- [49] W. J. Mansur and C. A. Brebbia. Numerical implementation of the boundary element method for two dimensional transient scalar wave propagation problems. *Appl. Math. Model.*, 6(4):299–306, 1982.
- [50] V. Demirel and S. Wang. An efficient boundary element method for two-dimensional transient wave propagation problems. *Appl. Math. Modelling*, 11:411–416, 1987.
- [51] W. J. Mansur and W. de Lima-Silva. Efficient time truncation in two-dimensional BEM analysis of transient wave propagation problems. *Earthquake eng. struct. dyn.*, 21:51–63, 1992.
- [52] W. J. Mansur and J. A. M. Carrer. Two-dimensional transient BEM analysis for the scalar wave equation: Kernels. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 12(4):283–288, 1993.
- [53] J. Hadamard. *Lecture on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equation*. Dover Publications, New York, 1952.
- [54] J. A. M. Carrer and W. J. Mansur. Space derivatives in the time-domain BEM analysis for the scalar wave-equation. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 13(1):67–74, 1994.
- [55] J. A. M. Carrer and W. J. Mansur. Time-domain BEM analysis for the 2D scalar wave equation: initial conditions contributions to space and time derivatives. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39:2169–2188, 1996.
- [56] M. Schanz and H. Antes. A new visco- and elastodynamic time domain boundary element formulation. *Comput. Mech.*, 20(5):452–459, 1997.
- [57] Yu Guoyou, W. J. de Mansur, J. A. M. Carrer, and L. Gong. Time weighting in time domain BEM. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 22(3):175–181, 1998.

- [58] G. Maier, M. Diligenti, and A. Carini. A variational approach to boundary element elastodynamic analysis and extension to multidomain problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 92:193–213, 1991.
- [59] C. Y. Wang and J. D. Achenbach. A new look at 2-d time-domain elastodynamic green-functions for general anisotropic solids. *Wave Motion*, 16(4):389–405, 1992.
- [60] A. Elzafrany, M. Debbih, and S. Fadhil. Boundary-element analysis of thick reissner plates in bending. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 14(2):159–169, 1994.
- [61] Alain J. Kassab and R. S. Nordlund. Addressing the corner problem in BEM solution of heat conduction problems. *Comm. Num. Meth. Eng.*, 10:385–392, 1994.
- [62] C. Provatidis and A. Kanarachos. On the BEM lumped mass formulations of wave-equation problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 11(4):319–325, 1993.
- [63] Dimitri E. Besskos. Boundary element methods in dynamic analysis. *Appl. Mech. Rev.*, 40(1):1–23, 1987.
- [64] Yalcin Mengi and A. Kamil Tanrikulu. Numerical technique for two-dimensional transient wave propagation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 6(8):623–632, 1990.
- [65] N. Piskounov. *Cálculo Diferencial e Integral*, volume II. Livraria Lopes da Silva, Porto, seventh edition, 1984.
- [66] C. A. Brebbia. *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press, 1984.
- [67] Theodore V. Hromadka II, Chintu Lai. *The Complex Variable Boundary Element Method in Engineerig Analysis*. Spring-Verlag New York Inc., 1987.
- [68] N. I. Muskhelishvili. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. P. Noordhoff Ltd, Gronigen-Holland, third edition, 1953 1949.
- [69] Murray R. Spiegel. *Complex Variables with a Introduction to Conformal Mapping and its Applications*. McGraw-Hill Inc., 1964.
- [70] *HandBook of tables for Mathematics*. CRC Press Inc., fourth edition, 1975.
- [71] V. I. Feodosiev. *Resistencia de Materiales*. Editorial Mir, Moscu, third edition, 1985.

Apêndices

Apêndice A

Avaliação das expressões (4.14), (5.16) e (5.17) em coordenadas cilíndricas.

Neste apêndice, apresenta-se a avaliação das expressões (4.14), (5.16) e (5.17) em coordenadas cilíndricas $r \times \theta$ para um ponto no interior da região encerrada no caminho de integração Γ , caminho este estabelecido de tal maneira que ocorra um mapeamento *um a um* entre cada um de seus pontos e sua respectiva coordenada angular; e, conseqüentemente, possa-se definir uma função, chamada r , da seguinte forma: $\exists r : \theta \rightarrow r, (r(\theta), \theta) \in \Gamma$. Uma ilustração de tal caminho de integração pode ser vista na figura (A.1). Segundo estas definições, são válidas as expressões exibidas em

$$\begin{aligned}x - x_a &= r(\theta) \cos(\theta), \\y - y_a &= r(\theta) \text{sen}(\theta) \quad \text{e} \\(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 &= r(\theta)^2.\end{aligned}\tag{A.1}$$

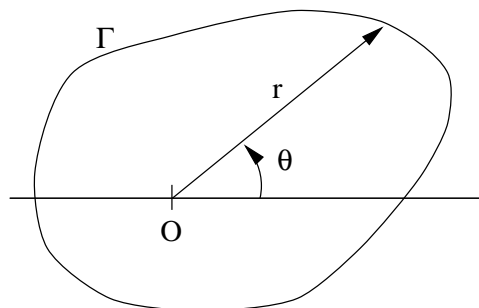


Figura A.1: Caminho de integração em coordenadas cilíndricas.

A partir de (A.1), pode-se deduzir as expressões

$$\begin{aligned} dx &= (-r(\theta) \mathbf{sen}(\theta) + r'(\theta) \mathbf{cos}(\theta)) d\theta \quad \text{e} \\ dy &= (r(\theta) \mathbf{cos}(\theta) + r'(\theta) \mathbf{sen}(\theta)) d\theta, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde: $r'(\theta) = \frac{d}{d\theta}r(\theta)$.

A.1 Avaliação da equação (4.14).

Substituindo-se as equações (A.1) e (A.2) em (4.14) passa-se a ter θ como única variável independente no integrando variando no intervalo $[0, 2\pi)$. Assim, a equação (4.14) pode ser reescrita conforme mostrado na expressão

$$\begin{aligned} u(0,0) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \ln(r(\theta)) (u_y (-r(\theta) \mathbf{sen}(\theta) + r'(\theta) \mathbf{cos}(\theta)) - u_x (r(\theta) \mathbf{cos}(\theta) + r'(\theta) \mathbf{sen}(\theta))) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \frac{r(\theta)u}{r(\theta)^2} (-\mathbf{sen}(\theta)(-r(\theta) \mathbf{sen}(\theta) + r'(\theta) \mathbf{cos}(\theta)) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{cos}(\theta)(r(\theta) \mathbf{cos}(\theta) + r'(\theta) \mathbf{sen}(\theta))) d\theta \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} u_x &\equiv \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \\ u_y &\equiv \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

A expressão (A.3) pode ser simplificada obtendo-se a expressão

$$\begin{aligned} u(0,0) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \ln(r(\theta)) \left(\frac{r'(\theta)}{r(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \theta} - r(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} \right) d\theta + \int_0^{2\pi} u d\theta \right\}, \quad (\text{A.4}) \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= u_x \mathbf{cos}(\theta) + u_y \mathbf{sen}(\theta) \quad \text{e} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -u_x \mathbf{sen}(\theta) + u_y \mathbf{cos}(\theta). \end{aligned}$$

A.2 Avaliação das equações (5.16) e (5.17).

Inicialmente, obtém-se as expressões em coordenadas cilíndricas para as funções F_1 , F_2 , H e suas derivadas de primeira ordem em x e em y , conforme apresentado em

$$F_1(r, \theta) = \frac{-(G+B)\ln(r) + (B-G)(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)}{2GB}, \quad (\text{A.5})$$

$$F_2(r, \theta) = \frac{-(B+G)\ln(r) + (B-G)(\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta)}{2GB}, \quad (\text{A.6})$$

$$H(r, \theta) = -\frac{(B-G)}{BG}\cos\theta \text{sen}\theta, \quad (\text{A.7})$$

$$F_{1_x}(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{(B-3G)\cos\theta \text{sen}^2\theta - (G+B)\cos^3\theta}{2GB}, \quad (\text{A.8})$$

$$F_{1_y}(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{(G-3B)\cos^2\theta \text{sen}\theta - (G+B)\text{sen}^3\theta}{2GB}, \quad (\text{A.9})$$

$$F_{2_x}(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{(G-3B)\cos\theta \text{sen}^2\theta - (G+B)\cos^3\theta}{2GB} \quad \text{e} \quad (\text{A.10})$$

$$F_{2_y}(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{(B-3G)\cos^2\theta \text{sen}\theta - (G+B)\text{sen}^3\theta}{2GB}, \quad (\text{A.11})$$

onde empregaram-se as expressões (A.1) e (A.2).

A substituição das expressões (A.1),(A.2) e (A.5)-(A.11) em (5.16) e (5.17) conduz às equações de contorno para u e v em coordenadas cilíndricas.

Apêndice B

Equacionamento de um problema elástico em duas dimensões.

Um problema elástico em 2D, onde considera-se um estado plano de tensões, conforme referência *Timoshenko and Goodier* 1934¹ possui o conjunto de definições e relações apresentados na seqüência:

1. O deslocamento de um ponto possui as seguintes componentes:
 - (a) u — componente do deslocamento na direção x ;
 - (b) v — componente do deslocamento na direção y .

2. O estado de tensões é definido pelo seguinte conjunto de grandezas:
 - (a) σ_{xx} — tensão normal na direção x ;
 - (b) σ_{yy} — tensão normal na direção y ;
 - (c) σ_{xy} — tensão tangencial no plano normal a y na direção x ;
 - (d) σ_{yx} — tensão tangencial no plano normal a x na direção y .

3. O estado de deformações é definido pelo seguinte conjunto de grandezas:
 - (a) ϵ_{xx} — deformação linear na direção x ;
 - (b) ϵ_{yy} — deformação linear na direção y ;
 - (c) ϵ_{xy} — deformação angular tomada entre as direções x e y ;
 - (d) ϵ_{yx} — o mesmo que ϵ_{xy} .

4. A grandezas relativas ao comportamento de um material isotrópico são:

(a) E — módulo de elasticidade;

(b) ν — coeficiente de *Poisson*;

(c) G — módulo de cisalhamento, definido por $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$;

(d) λ — constante de *Lamé*, definida por $\lambda = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$;

(e) B — constante definida por $B = \lambda + 2G = \frac{E}{1-\nu^2}$.

5. A relações entre deslocamentos e deformações são dadas por:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\text{B.1})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad (\text{B.2})$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{B.3})$$

6. A relações entre tensões e deformações, segundo a lei de *Hooke*, são dadas por:

$$\sigma_{xx} = B\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy}, \quad (\text{B.4})$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\epsilon_{xx} + B\epsilon_{yy} \quad \text{e} \quad (\text{B.5})$$

$$\sigma_{xy} = G\epsilon_{xy}. \quad (\text{B.6})$$

7. A condição de equilíbrio estático de forças e momentos no corpo, onde não são consideradas as forças volumétricas, conduz às relações

(a) Equilíbrio de forças na direção x :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0. \quad (\text{B.7})$$

(b) Equilíbrio de forças na direção y :

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (\text{B.8})$$

(c) Equilíbrio dos momentos (plano xy):

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}. \quad (\text{B.9})$$

A substituição das equações (B.1) a (B.3) em (B.4) a (B.6) e por sua vez em (B.7) e (B.8), e ainda considerando (B.9), resulta nas equações

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B - G) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad (\text{B.10})$$

$$G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (B - G) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{B.11})$$

$$(\text{B.12})$$

que são as condições a serem satisfeitas pelas funções u e v no interior de um dado domínio (corpo elástico ou peça).

As condições de contorno para um problema elástico podem ser as seguintes:

1. Deslocamentos u e v prescritos na fronteira;
2. Tensões prescritas na fronteira:

$$f_x = BC_x \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda C_x \frac{\partial v}{\partial y} + GC_y \frac{\partial u}{\partial y} + GC_y \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{B.13})$$

e

$$f_y = \lambda C_y \frac{\partial u}{\partial x} + BC_y \frac{\partial v}{\partial y} + GC_x \frac{\partial u}{\partial y} + GC_x \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (\text{B.14})$$

onde f_x e f_y são as tensões atuantes na fronteira, C_x e C_y são os cossenos diretores da normal à superfície;

3. Combinações das duas condições acima.

Apêndice C

Transformada de Laplace.

Seja u uma função $u : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, pode-se definir a transformada de Laplace como

$$\bar{u}(q) = \mathcal{L}\{u(t); t \rightarrow q\} = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-qt} dt, \quad t > 0 \quad (\text{C.1})$$

cujas inversa é dada por

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \bar{u}(q) e^{+qt} dq, \quad (\text{C.2})$$

onde a é um valor real maior que a maior parte real entre os resíduos de \bar{u} ($a > \max\{\text{Re}(\text{Res}(\bar{u}))\}$).

A transformada de Laplace apresenta, entre outras, as seguintes propriedades:

1. A transformada da derivada

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}; t \rightarrow q\right\} = qL\{u\} - u(0). \quad (\text{C.3})$$

2. Da mesma forma

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; t \rightarrow q\right\} = q^2 L\{u\} - q u(0) - \frac{\partial u}{\partial t}(0). \quad (\text{C.4})$$

3. O teorema da convolução

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(q)\hat{g}(q); q \rightarrow t\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad (\text{C.5})$$

onde $\hat{f} = \mathcal{L}\{f; t \rightarrow q\}$ e $\hat{g} = \mathcal{L}\{g; t \rightarrow q\}$.

4. O teorema do valor inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{q \rightarrow \infty} q \hat{f}(q), \quad (\text{C.6})$$

onde $\hat{f} = \mathcal{L}\{f; t \rightarrow q\}$.