

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE CONTROLE PARA SUSPENSÕES ATIVAS
DE ELEVADORES DE ALTO DESEMPENHO

por

Santiago Miguel Rivas López

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Novembro de 2007

DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE CONTROLE PARA SUSPENSÕES ATIVAS
DE ELEVADORES DE ALTO DESEMPENHO

por

Santiago Miguel Rivas López
Engenheiro Industrial Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Processos de Fabricação

Orientador: Prof. Dr. Eduardo André Perondi

Aprovada por:

Prof. Dr. Antônio Carlos Valdiero

Prof. Dr. Renato Ventura Bayan Henriques

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz

Prof. Dr. Flávio José Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 21 de Novembro de 2007.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe, Lylián, a meu pai, Luis e a meu irmão, José Luis, pelo carinho e apoio incondicional em todos os momentos da minha vida, tanto nos bons como nos difíceis.

Dedico-o, também, à minha noiva, Mariángeles, pelo apoio, compreensão e guia.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho não poderia ser realizado sem a ajuda de diversas pessoas e instituições às quais presto minha homenagem:

Ao Prof. Eduardo Perondi pela orientação, confiança e paciência.

Aos colegas e professores do PROMEC que, todos direta ou indiretamente, ajudaram na realização deste trabalho.

À ThyssenKrupp Elevadores Guaíba pelo apoio.

Ao IIMPI pela confiança.

Ao CNPq pelo financiamento.

RESUMO

O presente trabalho aborda o desenvolvimento de um algoritmo de controle para um sistema de suspensão ativa para elevadores de alto desempenho. Esses dispositivos são muito usados no caso de suspensões veículos automotivos, mas não tanto em elevadores. Visando compreender os fenômenos envolvidos e executar testes do controle proposto através de simulações, é realizado um estudo da modelagem matemática desse sistema. O elevador estudado é de cabine com duplo andar (*double-deck*) e será usado em uma guia de 200 [m] de curso em um edifício de aproximadamente 500 [m] de altura. A velocidade de estado estacionário do elevador é 40 km/h. Buscando situar este trabalho no campo de pesquisa proposto, é apresentada uma introdução aos critérios e técnicas de controle linear utilizadas. O desenvolvimento do controlador é baseado no uso de um modelo matemático linear em espaço de estados que representa a dinâmica do sistema em um dos planos ortogonais. A síntese do controlador por realimentação no espaço de estados foi feita usando o método da alocação de pólos, com ajuda do regulador quadrático linear, realimentando os estados com um observador de ordem total. Um modelo computacional foi construído e utilizado para a realização de simulações computacionais com o controlador proposto. Os resultados de simulações do sistema passivo e ativo são apresentados e discutidos.

Palavras chave: suspensão ativa, elevadores de alto desempenho, controle por alocação de pólos.

ABSTRACT

“DEVELOPMENT OF A CONTROLLER FOR AN ACTIVE SUSPENSION SYSTEM FOR HIGH PERFORMANCE ELEVATORS”

The present work proposes the development of an algorithm to control active suspension systems for high performance elevators. These devices are used in suspensions for automotive vehicles, but not in such a way in elevators. Aiming at the understanding of the involved phenomena and making tests of the controller considered through simulations, a mathematical model of this system is developed. The studied elevator is a double-deck one and will be used in a 200 [m] guide in an approximately 500 [m] height skyscraper. The steady state speed of the elevator is 40 km/h. Trying to contextualize this work, it is presented an introduction to the criteria and techniques of linear control applied in this work. The development of the controller is based on the use of a linear mathematical model in the states space that represents the dynamics of the system in one of the two orthogonal planes. The synthesis of the feedback controller in the states space was made using the pole placement method with the aid of the linear quadratic regulator, and the feedback of the states with a full order observer. A computational model was constructed. The results of passive and active simulations of the system are presented and discussed.

Keywords: active suspension, high performance elevators, pole placement control.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Contextualização do Tema	1
1.2 A Suspensão Ativa	1
1.3 Justificativa do Trabalho e Abordagem Adotada	2
1.4 Objetivos e Contribuições	5
1.5 Organização do Trabalho	5
1.6 Revisão Bibliográfica	6
1.6.1 Introdução.....	6
1.6.2 O Elevador e a Suspensão Ativa	9
1.7 Aspectos Relativos aos Componentes de Elevadores	11
1.7.1 Introdução.....	11
1.7.2 Principais Componentes de um Elevador.....	11
2. MODELAGEM DINÂMICA	15
2.1 Introdução.....	15
2.2 Definições Básicas	15
2.2.1 Definição dos Graus de Liberdade e Esquema do Elevador	16
2.3 Modelagem do Sistema no Plano YZ.....	17
2.4 Formulação das Equações de Movimento.....	21
2.4.1 Equação de Equilíbrio Dinâmico	21
2.4.2 Representação em variáveis de estado	23
3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE O PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS.....	26
3.1 Introdução.....	26
3.2 Estabilidade	27
3.3 Controlabilidade e Observabilidade	28
3.3.1 Controlabilidade	28
3.3.2 Observabilidade.....	29
3.4 Método de Alocação de Pólos	30
3.5 Sistema Regulador Ótimo Quadrático.....	32
3.6 Observadores de Estados.....	36

3.6.1 Observador de Estados de Ordem Total.....	37
3.6.2 Condição Necessária e Suficiente para a Observação de Estados.	39
3.6.3 Método de Transformação para Obter a Matriz de Ganhos K_e do Observador de Estados.	39
3.6.4 Discussões sobre a escolha da matriz K_{obs}	40
3.7 O Controle por Realimentação de Estados com Observador de Estados.....	41
4. PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE DA SUSPENSÃO	44
4.1 Método de Alocação de Pólos.....	44
4.1.1 Introdução.....	44
4.1.2 Considerações para a Aplicação do Método	44
4.2 Projeto do Observador.....	57
4.2.1 Cálculos dos Ganhos do Observador	57
5. SIMULAÇÕES E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS	61
5.1 Introdução.....	61
5.2 Resultados do Método de Alocação de Pólos	61
5.3. Resultados do Observador.....	64
5.4. Resultados do Sistema Completo.....	68
5.5 Comportamento da Resposta do Sistema Realimentado na Presença de Erros Paramétricos	69
6. CONCLUSÕES	78
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	82
ANEXO 1: PLANO XY	87
ANEXO 2: DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA $Y_I(s)/Y_{IR}(s)$	92
ANEXO 3: ESTABILIDADE, CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS.....	97
ANEXO 4: CONTROLE ÓTIMO	109
ANEXO 5: RESPOSTA NO DOMÍNIO TEMPO	114

LISTA DE SÍMBOLOS

Variáveis e parâmetros

a_i	coeficiente polinômio característico
\mathbf{A}	matriz do sistema
\mathbf{B}	matriz de entradas
B	constante de amortecimento dos braços [kg/s]
$B=2B_2$	coeficiente de amortecimento da suspensão passiva [kg/s]
\mathbf{C}	vetor de saída
C	constante de amortecimento da cabina [kg/s]
$C=2C_2$	coeficiente de amortecimento do elevador [kg/s]
\mathbf{D}	matriz constante $m \times r$
f_c	força de controle na função transferência
f_i	força dos atuadores ($i=1, 2, 3$ e 4) [N]
f_l	força lateral esquerda [N]
f_r	força lateral direita [N]
f_{yl}	força transferida pelo deslocamento da guia esquerda
F	força externa [N]
I	momento de inércia da cabina [kg.m ²]
\mathbf{I}	matriz identidade
\mathbf{J}	matriz diagonal para a determinação do polinômio característico
J_{ar}	momento de inércia do braço relacionado a seu centro de rotação [kg.m ²]
J_e	momento de inércia de elevador relacionado ao centro de rotação superior onde os cabos são conectados à estrutura [kg.m ²]
J_p	momento de inércia no meio corpo [kg.m ²]
J_t	momento de inércia da massa total [kg.m ²]
\mathbf{K}	matriz de ganhos de controle
$\hat{\mathbf{K}}$	vetor de diferenças entre coeficientes dos polinômios característicos
K_{ar}	constante de mola do braço [N/m]
K_{ari}	rigidezes das molas da suspensão passiva [N/m]
K_g	soma das molas K_{g0} e K_{ge} para ter uma condição simétrica que possa representar melhor a dinâmica do elevador real [N/m]
K_{geq}	mola equivalente considerando o efeito do deslocamento de pêndulo formado por a estrutura relacionada ao ponto de conexão dos cabos [N/m]

K_{g0}	constante equivalente da mola de deslocamento relacionada aos efeitos gravitacional da mola de torção causada por a gravidade [N/m]
K_i	constantes elásticas de mola ($i=1, 3, 5$ e 7) [N/m]
K_j	constantes de mola ($j=2, 4, 6$ e 8) [N/m]
K_{ieq}	constante de mola equivalente ($i=1,3,5$ e 7) [N/m]
K_{jeq}	constante de mola equivalente ($j=2,4,6$ e 8) [N/m]
\mathbf{K}_{lqr}	vetor de ganhos ótimos
\mathbf{K}_{obs}	matriz de ganhos do observador
K_s	constante de mola equivalente [N/m]
K_{tge}	mola de torção do movimento de rotação do elevador ao redor da conexão dos cabos no topo da cabina [N/m]
K_{tgo}	mola de torção do efeito de pêndulo da estrutura do elevador [N/m]
L	comprimento da cabina [m]
L_0	comprimento do cabo do elevador [m]
L_i	comprimento de meio corpo [m]
m_1	massa do rolete [kg]
m_2	massa do atuador linear [kg]
m_{areq}	massa equivalente do braço relacionada a seu centro de rotação [kg]
m_{ari}	massas dos braços [kg]
M	massa do elevador (capacidade + cabina) [kg]
\mathbf{M}	matriz de controlabilidade
M_{eq}	massa do elevador equivalente [kg]
M_p	sobrerresposta (%)
\mathbf{N}	matriz de observabilidade
p_i	pólos dominantes ($i=1$ e 2)
p_j	pólos não dominantes ($j=3, 4, 5$ e 6)
p_{obsi}	pólos do observador ($i=1, 2, 3, 4, 5$ e 6)
P_i	pólos do sistema original ($i=1, 2, 3, 4, 5$ e 6)
\mathbf{Q}	matriz hermítica positiva definida
\mathbf{R}	matriz hermítica positiva definida
s	operador de Laplace
t_p	tempo de pico [s]
t_s	tempo de assentamento [s]
T_{ci}	transferência de deslocamento da cabine esquerda e direita

T_{fi}	transferência de força esquerda e direita
T_{pi}	transferência entre f_i e Y_i
T_{xx}	função de transferência
T_{yi}	transferência de deslocamento das guias esquerda e direita para a cabine
\mathbf{T}	matriz de transformação
u	sinal de entrada do sistema
\mathbf{u}	vetor de entrada do sistema
\mathbf{W}	matriz auxiliar
\mathbf{x}	vetor de estados
x	deslocamento do centro de gravidade no meio corpo [m]
x_{ari}	deslocamentos passivos dos braços [m]
x_{bi}	deslocamentos do corpo (elevador) [m]
x_i	variáveis de estado do plano YZ ($i=1, 2, 3, 4, 5$ e 6)
x_j	variáveis de estado do plano XY ($j=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e 8)
x_{Ri}	deslocamentos das guias [m]
\tilde{x}	estados estimados
y	sinal de saída
Y	posição da cabine do elevador [m]
Y_i	deslocamento do braço ($i=1, 2, 3$ e 4) [m]
Y_{ieq}	deslocamentos da guia corrigida ao topo do braço ($i=1, 2, 3$ e 4) [m]
Y_l	posição do rolete esquerdo [m]
Y_{lo}	deslocamento do ponto inferior da cabine [m]
Y_{lR}	posição do braço esquerdo [m]
Y_r	posição do rolete direito [m]
Y_{rR}	posição do braço esquerdo [m]
Y_{up}	deslocamentos do ponto superior da cabine [m]
α_i	coeficientes polinômio característico desejado
Δy_l	posição relativa da massa esquerda [m]
Δy_r	posição relativa da massa direita [m]
ζ	coeficiente de amortecimento
ρ_1	braço do rolete [m]
ρ_2	braço da mola [m]
ρ_3	braço da massa móvel do atuador [m]
φ	ângulo do elevador relacionado ao centro de rotação dos cabos no topo da cabine [rad]

ω	velocidade angular no meio corpo [rad/s]
ω_n	frequência natural [rad/s]

Símbolos

(Δ)	diferença
($\hat{}$)	estimativa
($\dot{}$)	derivada primeira
($\ddot{}$)	derivada segunda

Índices

() _{ar}	sub-índice indicador de elemento do braço
() _b	sub-índice indicador de corpo
() _c	sub-índice indicador de parâmetros dos cabos do elevador
() ^{den}	superíndice indicador de denominador
() _e	sub-índice indicador de parâmetros do elevador
() _{eq}	sub-índice indicador de parâmetro equivalente
() _g	sub-índice indicador de parâmetro envolvendo a gravidade
() _i	sub-índice indicador de elemento individual
() _l	sub-índice indicador de elemento da esquerda
() _{lo}	sub-índice indicador elemento inferior
() _{lqr}	sub-índice indicador elemento de regulador quadrático linear
() ⁿ	superíndice indicador da enésima potencia
() ^{num}	superíndice indicador de numerador
() _p	sub-índice indicador planta
() _r	sub-índice indicador de elemento da direita
() _R	sub-índice indicador da guia
() _{res}	sub-índice indicador de elemento resultante
() _s	sub-índice indicador de elemento do rolete
() _t	sub-índice indicador de elemento de torção
() _{up}	sub-índice indicador de elemento superior
() _{obs}	sub-índice indicador de observador

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Desenho esquemático dos roletes laterais conforme Hitachi, Ltd. Mito Building Systems Div. Elevator Development Center.....	2
Figura 1.2: Esquema do sistema elevador+controlador+suspensão ativa.....	9
Figura 1.3: Vista suspensão ativa (a) lateral (b) superior.....	10
Figura 1.4: Desenho dos principais componentes do elevador (retirado do Manual de uso e conservação de elevadores em escolas, Governo do Estado de São Paulo).....	13
Figura 1.5: Sistema de suspensão (a) ativa (b) passiva.....	14
Figura 2.1: Representação esquemática do elevador.....	15
Figura 2.2: Sistema de suspensão ativa.....	16
Figura 2.3: Modelo esquemático do elevador no plano YZ.....	17
Figura 2.4: Modelo do elevador no plano YZ com movimento pendular.....	18
Figura 2.5: Modelo esquemático do elevador com constantes pendulares equivalentes.....	19
Figura 2.6: Modelo esquemático do elevador com a massa concentrada na base da cabine.....	20
Figura 2.7: Modelo simplificado do elevador.....	21
Figura 3.1: Observador de estados linear de ordem total.....	37
Figura 3.2: Regulador com controlador por realimentação de estados com observador completo.....	41
Figura 4.1: Pólos do sistema passivo.....	47
Figura 4.2: Resposta da posição da cabine para condições iniciais (sistema passivo).....	48
Figura 4.3: Pólos do sistema controlado com ganhos ótimos.....	54
Figura 4.4: Pólos do sistema controlado para a dinâmica desejada.....	55
Figura 4.5: Pólos do sistema passivo versus sistema ativo.....	55
Figura 4.6: Forças dos atuadores para condições iniciais, (a) pólos não dominantes alocados arbitrariamente; (b) pólos não dominantes ótimos.....	56
Figura 4.7: Força do atuador para condições iniciais ($Y=0,005[m]$).....	56
Figura 4.8: Pólos do sistema controlado+observado.....	59
Figura 5.1: Condições iniciais sistema passivo (a) posição (b) velocidade (c) aceleração.....	61
Figura 5.2: Resposta do sistema ativo ao problema de condições iniciais (a) posição (b) velocidade (c) aceleração.....	62
Figura 5.3: Resposta a condições iniciais sistema ativo.....	63
Figura 5.4: Resposta à função impulso sistema passivo.....	63
Figura 5.5: Resposta à função impulso do sistema ativo.....	64

Figura 5.6: Resposta à função impulso sistema ativo <i>versus</i> passivo	64
Figura 5.7: Posição da cabine observada <i>versus</i> real caso condições iniciais: (a) Sistema passivo, (b) Sistema ativo (<i>ideal</i>).....	65
Figura 5.8: Erro do observador em condições iniciais, (a) caso passivo, (b) caso ativo.....	65
Figura 5.9: Posição relativa do braço esquerdo.....	66
Figura 5.10: Velocidade relativa braço esquerdo.....	66
Figura 5.11: Velocidade da cabine.....	66
Figura 5.12: Posição relativa braço direito.....	66
Figura 5.13: Velocidade relativa braço direito.....	66
Figura 5.14: Posição da cabine para a função impulso, (a) caso passivo, (b) caso ativo (<i>ideal</i>). .	67
Figura 5.15: Erro do observador para a função impulso, (a) caso passivo, (b) caso ativo (<i>ideal</i>).	67
Figura 5.16: (a) Curva da posição da cabine para o problema de condições iniciais do sistema controlado realimentado com os estados observados (b) erro do observador.....	68
Figura 5.17: (a) Curva da posição da cabine para o problema de uma função impulso do sistema controlado realimentado com os estados observados (b) erro do observador.....	68
Figura 5.18: Sinal de entrada do controlador	69
Figura 5.19: Respostas em posição da cabine com uma variação da massa total do elevador (a) 50% da M_{eq} (b) 90% da M_{eq} utilizada no modelo.....	70
Figura 5.20: Resposta do observador com (a) 110% da M_{eq} do modelo, (b) 150% da M_{eq} do modelo.....	70
Figura 5.21: Resposta do observador com (a) 90% da m_{areq} do modelo, (b) 110% da m_{areq} do modelo.....	71
Figura 5.22: Resposta do observador com (a) 90% da K_s do modelo, (b) 110% da K_s do modelo.	71
Figura 5.23: Resposta do observador com (a) 90% da K_{ar} do modelo, (b) 110% da K_{ar} do modelo.	71
Figura 5.24: Resposta do observador com (a) 90% da C do modelo, (b) 110% da C do modelo.	72
Figura 5.25: Resposta do observador com (a) 90% da B do modelo, (b) 110% da B do modelo.	72
Figura 5.26: Resposta do observador com (a) 90% da K_g do modelo, (b) 110% da K_g do modelo.	72
Figura 5.27: Diferença da posição da cabine observada – posição do modelo para uma variação de 10% de K_s	73
Figura 5.28: Resposta do observador com (a) 90% da M_{eq} do modelo, (b) 110% da M_{eq} do modelo.....	74

Figura 5.29: Resposta do observador com (a) 90% da m_{areq} do modelo, (b) 90% da m_{areq} do modelo.....	74
Figura 5.30: Resposta do observador com (a) 90% da K_s do modelo, (b) 110% da K_s do modelo.	74
Figura 5.31: Resposta do observador com (a) 90% da K_{ar} do modelo, (b) 110% da K_{ar} do modelo.	75
Figura 5.32: Resposta do observador com (a) 90% da C do modelo, (b) 110% da C do modelo.	75
Figura 5.33: Resposta do observador com (a) 90% da B do modelo, (b) 110% da B do modelo.	75
Figura 5.34: Resposta do observador com (a) 90% da K_g do modelo, (b) 110% da K_g do modelo.	76
Figura 5.35: Diferença entre a posição estimada e a do modelo no caso do sistema realimentado pelo vetor de estados do modelo (azul) e pelo vetor de estados do observador (vermelho).....	76
Figura 5.36: Desvios do observador devido aos erros paramétricos (a) 40% do valor de K_s do modelo, (b) 160% do valor de K_s do modelo	77

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4.1: Parâmetros do sistema	45
Tabela 4.2: Raízes do polinômio característico	46
Tabela 4.3: Pólos de controle	52
Tabela 4.4: Ganhos do controle.....	52
Tabela 4.5: Ganhos do controle ótimo	53
Tabela 4.6: Pólos do controle ótimo.....	54
Tabela 4.7: Pólos do controle desejado	54
Tabela 4.8: Ganhos do controle desejado.....	55
Tabela 4.9: Ganhos do observador	59
Tabela 5.1: Parâmetros do sistema do elevador	69

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os objetivos e motivações do presente trabalho bem como as principais características do seu desenvolvimento, assim como possíveis contribuições. Também é realizada uma descrição geral de cada um dos capítulos que compõe a dissertação.

1.1 Contextualização do Tema

A sobrevivência das empresas no atual cenário internacional é dependente do grau de competitividade de seus produtos. Por isso é necessário que sejam incorporadas inovações constantes. Desta forma, o sucesso no desenvolvimento de novos produtos está relacionado com a utilização de novos conceitos e tecnologias, que venham a tornar a vida das pessoas mais confortável e mais segura.

Na área dos elevadores, o conceito de suspensão ativa não tem sido muito desenvolvido até o presente momento. Porém, no caso de elevadores de alto desempenho para prédios tipo *arranha-céu* ou “*skyscrapers*” é necessário um patamar de segurança e conforto que atinja os altos níveis esperados por seus usuários de forma a tornar o produto (o elevador, no caso) competitivo em um segmento de mercado muito exigente (o de fornecimento de peças, serviços e equipamentos para os gigantescos “*skyscrapers*” que estão-se popularizando em todo o mundo). É assim esperado que com a utilização de sistemas de suspensão ativa possam-se obter esses níveis desejados.

O modelo dinâmico utilizado no presente trabalho tem o objetivo de apoiar o desenvolvimento do sistema de controle da suspensão ativa do elevador. Este modelo é estruturado em espaço de estados aproveitando as vantagens desse tipo de representação (simplicidade, facilidades matemáticas, etc.). O modelo do sistema desenvolvido é linear e invariante no tempo. Normalmente para controlar os sistemas lineares e invariantes no tempo usam-se controladores clássicos tipo Proporcional-Integral-Derivativo (PID), Regulador Quadrático Linear (LQR), Regulador Quadrático Gaussiano (LQG), etc. que serão discutidos ao longo do trabalho.

1.2 A Suspensão Ativa

Um elevador normalmente apresenta quatro elementos de suspensão, como é representado na Fig. 1.1. Estes sistemas geralmente são constituídos por roletes que encostam nas guias, fixas ao prédio. Os roletes ligam-se com o elevador através de braços articulados molas. Estes sistemas são também utilizados para atenuar as oscilações no plano da base do

elevador (um esquema mais completo de um sistema de suspensão pode ser visualizado na Fig. 4.1).

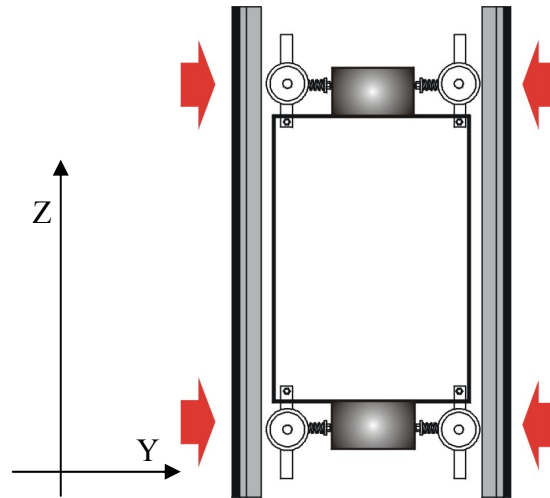


Figura 1.1: Desenho esquemático dos roletes laterais conforme Hitachi, Ltd. Mito Building Systems Div. Elevator Development Center.

No caso do sistema de suspensão ativa, além dos elementos apresentados, é incorporado ao braço do rolete um atuador baseado em um motor linear.

O elevador possui sensores potenciométricos em cada braço de cada sistema de suspensão que medem os deslocamentos relativos dos braços com respeito à cabine. Assim, o funcionamento do sistema de suspensão ativa baseia-se na medição das variáveis que indicam as perturbações que causam desconforto aos passageiros. Os sinais correspondentes são processados pelo algoritmo de controle, resultando nos sinais para os atuadores elétricos que visam atenuar as oscilações do movimento de corpo rígido do elevador.

Deve ser observado que os sistemas de suspensão são dispostos entre as guias com uma pré-tensão das molas suficiente (conforme experimentos realizados pela ThyssenKrupp Elevadores na sua torre de testes de Guaíba, RS, relatório “ACTIVE ROLLER GUIDE: Practical Transfer Function Test”, 2005) para que em operações normais não haja o “deslocamento” das bandas de rodagem das guias, mesmo na presença de perturbações (isto é de grande importância na modelagem, pois garante a linearidade do modelo).

1.3 Justificativa do Trabalho e Abordagem Adotada

No presente trabalho foi realizado o estudo sobre um sistema de suspensão ativa para um elevador de alto desempenho cujo objetivo é o de, através de um sistema físico moderno e compacto, fornecer um comportamento dinâmico adequado em termos de segurança e conforto aos passageiros. Assim, o principal objetivo deste trabalho é o de desenvolver um algoritmo para ser aplicado à suspensão ativa visando controlar o comportamento dinâmico da cabine.

Vale salientar que os conceitos e métodos empregados neste desenvolvimento são de ampla aplicação no projeto de sistemas de controle para suspensões ativas de veículos automotivos. No caso de elevadores, a bibliografia é muito restrita sendo que, especificamente, poucos artigos foram identificados sobre o controle de suspensão ativa, porém algumas patentes foram encontradas, o que indica um alto grau de competitividade na área.

Como o sistema real conta com atuadores apenas em algumas posições específicas (braços dos sistemas de suspensão), o controle de todos os seus graus de liberdade é inviável. Assim, a abordagem adotada para atingir os objetivos, levando em consideração a limitação mencionada, é a do controle da dinâmica a parâmetros concentrados da cabine. Com isso, espera-se possibilitar que o sistema real tenha um comportamento tal, que com a diminuição das suas oscilações de corpo rígido, os demais graus de liberdade da estrutura sejam excitados com amplitudes suficientemente pequenas, de forma que especificações de vibrações e ruídos normalizadas possam ser atingidas. Objetiva-se, assim, desenvolver teoricamente um algoritmo capaz de controlar o movimento a parâmetros concentrados da cabine de uma forma tal que o sistema de controle deverá produzir resultados de forma que seus componentes (portas, painéis, luminárias, cabos, etc.) e estrutura sejam pouco afetados, reduzindo o ruído e as vibrações a níveis adequados (normalizados) de conforto e segurança. O problema de controle a ser resolvido foi, portanto, identificado como um problema de regulação com relação à trajetória no tempo da cabine submetida a perturbações providas de fontes tais como: desalinhamento intrínseco das guias laterais de alinhamento vertical do elevador, forças aerodinâmicas devidas ao movimento vertical de alta velocidade do carro (40Km/h) e movimentos das cargas internas (passageiros).

É importante ressaltar que, apesar da impossibilidade de realizar os testes de campo necessários à validação dos resultados, foi possível concluir-se, como será demonstrado ao longo do texto do trabalho, que, teoricamente, o sistema real poderá ser controlado adequadamente, independentemente da dinâmica desejada (respeitando, evidentemente, os limites físicos dos atuadores e do sistema).

Assim, o trabalho realizado consiste no desenvolvimento de uma metodologia teórica para o projeto do algoritmo de controle que permita o controle efetivo da dinâmica da cabine e da sua validação através de simulações. Para tanto, foi realizado o desenvolvimento de um modelo simplificado para o sistema em um dos planos de trabalho (YZ, de acordo com o esquema da cabine apresentado na Fig. 4.1). A modelagem desenvolvida resultou em um sistema linear de 6ª ordem a parâmetros concentrados e invariante no tempo. Como já foi comentado, o principal objetivo específico consiste, portanto, no projeto de um algoritmo capaz de regular em

malha fechada a dinâmica de um sistema de 6^a ordem linear e invariante no tempo, quando submetido a perturbações.

O resultado esperado é um algoritmo de controle que possa ser aplicado em um sistema físico real considerando as restrições dos estados que podem ser efetivamente mensurados e levando em conta outras condições, tais como ruídos introduzidos nos sinais medidos, diferenças paramétricas do sistema real com relação ao modelo teórico e, principalmente, a saturação dos sinais de força dos atuadores.

Devido às características lineares do sistema na faixa de operação e à alta ordem do modelo teórico, optou-se pela aplicação da técnica de controle moderno baseada na alocação dos pólos do sistema em malha fechada a posições que correspondam à dinâmica desejada para o sistema (conhecida como *método da alocação de pólos*). Assim, para a aplicação desta metodologia, foi definida uma dinâmica desejada para o sistema em malha fechada, baseada em um desempenho dinâmico desejado arbitrário e foi projetado um controlador de estados, que consiste basicamente na composição de um sinal de controle para os atuadores baseado na soma dos sinais dos estados ponderados por constantes a serem definidas através das técnicas de projeto. Os resultados preliminares das simulações obtidos com essa metodologia foram satisfatórios em termos de desempenho dinâmico, mas com demanda excessiva de potência dos atuadores (muito acima da capacidade física do sistema real). Para resolver este problema utilizou-se um regulador quadrático linear para otimizar o posicionamento dos pólos não-dominantes em malha fechada, o que reduziu significativamente a demanda de potência para a realização do controle, levando os valores das forças necessárias dos atuadores para os níveis próximos ao do sistema real. Coincidentemente, no presente trabalho, os valores máximos exigidos pelo controlador para a dinâmica arbitrária desejada se aproximaram muito dos valores máximos que podem ser fornecidos pelos atuadores. Assim, se uma demanda mais exigente de comportamento dinâmico desejado for utilizada, os valores das forças desejadas podem ser superiores aos fornecidos pelos atuadores. Neste caso, porém, a solução passaria, possivelmente, pela substituição dos atuadores por outros mais potentes (supondo a correta aplicação da teoria de controle ótimo).

Além disso, como os estados escolhidos originalmente para a modelagem do sistema não coincidem completamente com as variáveis que podem ser medidas no sistema físico real (a determinação experimental da posição da cabine, por exemplo, é um problema difícil de ser resolvido) foi projetado e implementado um observador de estados de ordem total para estimar os estados que não podem ser medidos diretamente na planta. Finalmente, foram realizadas

simulações visando mostrar a viabilidade da metodologia proposta (controle por realimentação de estados).

1.4 Objetivos e Contribuições

Os principais objetivos deste trabalho são os seguintes:

- Realizar a modelagem matemática do sistema composto pelo elevador e sua suspensão;
- Realizar uma introdução ao método de controle por alocação de pólos assim como métodos de controle ótimo, em particular o Regulador Quadrático Linear, no apoio desta metodologia de realimentação de estados visando à aplicação ao problema proposto;
- Estudo da técnica de observação de estados de ordem total;
- Projeto de um algoritmo de controle linear para a suspensão ativa do elevador, baseado nas técnicas de controle apresentadas, de modo a fazer frente às perturbações ocasionadas na operação do sistema;
- Verificação do desempenho do sistema controlado frente a erros paramétricos do modelo.

1.5 Organização do Trabalho

Para permitir a visualização geral da estrutura deste trabalho, é feita a seguir uma descrição sucinta de cada capítulo.

O Capítulo 1 consiste da introdução (na qual esta incluída este item). Na Seção 1.5 é feita uma revisão bibliográfica dos principais artigos e livros que abordam os assuntos relacionados a este trabalho, como o desenvolvimento de modelos teóricos, o levantamento de propriedades experimentais e projetos de suspensões, dentre outros. A Seção 1.6 apresenta uma breve introdução aos componentes básicos que constituem um elevador. No Capítulo 2 é apresentado o desenvolvimento teórico dos modelos dinâmicos com três graus de liberdade. A partir da definição de variáveis básicas, graus de liberdade e movimentos relativos de componentes, como molas e amortecedores, determina-se o modelo dinâmico do elevador em dois planos de interesse. Os sistemas de equações diferenciais dos modelos teóricos são obtidos pela aplicação da equação de equilíbrio dinâmico de Newton. O modelo final do sistema é colocado na forma de variáveis de estado. O Capítulo 3 introduz a base teórica utilizada no projeto de controle da suspensão ativa do elevador. Os métodos utilizados são apresentados e justificados teoricamente. No Capítulo 4 é apresentado o projeto do sistema de controle da

suspensão ativa do elevador com a aplicação do método de alocação de pólos, apoiado pelo regulador quadrático linear e com um observador de estados de ordem total. O Capítulo 5 mostra os resultados obtidos através das simulações feitas com o modelo computacional. Estes resultados são comentados e discutidos. No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões, enfatizando os principais resultados, deficiências e observações do presente trabalho, também sendo propostas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

1.6 Revisão Bibliográfica

1.6.1 Introdução

O levantamento da base de conhecimento necessária ao desenvolvimento do presente trabalho foi feita através de uma revisão bibliográfica dos diversos temas que contribuem para a modelagem dinâmica do elevador, compreensão do sistema de suspensão, e, fundamentalmente, que contribuem com o desenvolvimento das metodologias de controle. A seguir é feita uma análise do conteúdo de alguns artigos e livros importantes dentro deste contexto.

Como já foi comentado, o presente trabalho trata sobre o desenvolvimento de um sistema ativo da suspensão para elevadores do alto desempenho visando reduzir as vibrações laterais na base da cabine do elevador. As oscilações são causadas principalmente pelas perturbações que vêm do contato dos roletes das suspensões com as guias de alinhamento fixas à estrutura do edifício durante o movimento do elevador (Fig. 1.1). As guias, apesar dos modernos processos de manufatura e instalação, apresentam sempre pequenos desalinhamentos que são causados, normalmente, por problemas nos processos de instalação, dilatações térmicas e efeitos de envelhecimento dos materiais, entre outros. Os movimentos causados por estes desajustes, fundamentalmente em elevadores de alta velocidade de grandes edifícios “*skyscrapers*”, podem comprometer as exigências de segurança e de conforto. Conseqüentemente, as companhias de alta tecnologia estão realizando grandes investimentos no desenvolvimento de sistemas modernos, como o controle ativo, para melhorar o desempenho das suspensões do elevador sem aumentar seu tamanho e peso, como ocorrem com os sistemas passivos tradicionais. Esta situação pode ser comprovada pelo número elevado de patentes que têm sido apresentadas nessa área desde meados da última década. Por exemplo, Oh *et al.*, 2006, usam um sistema de suspensão baseado no controle das forças repulsivas de eletroímãs para cancelar perturbações laterais. Utsunomiya *et al.*, 2004, 2006, patentearam um sistema ativo da suspensão que usa as acelerações medidas (com o uso de acelerômetros situados no centro do elevador) para comparar as vibrações da cabine com os valores desejados e assim aplicar forças laterais por meio de

atuadores eletromagnéticos. Husmann, 2005, descreve um sistema ativo de amortecimento da estrutura baseado na medida das deformações do marco do elevador. A aceleração é medida com sensores eletro-resistivos fixados à cabine no sentido perpendicular ao movimento. Motores elétricos lineares aplicam as forças solicitadas pelo sistema de controle.

Encontraram-se na bibliografia poucos artigos específicos sobre o controle ativo de suspensão de elevadores comerciais. Por exemplo, Istif *et al.*, 2002, usam representação por grafos (*Bond Graphs*) para construir um modelo em espaço de estados de um sistema ativo de uma suspensão. O projeto do controlador baseia-se em um esquema proporcional-derivativo (PD) aplicado para comandar um sistema hidráulico no sentido vertical do deslocamento do elevador. O sistema ativo é usado para controlar a aceleração e a desaceleração do elevador. Nai *et al.*, 1994, desenvolveram um modelo do elevador expresso por um conjunto de 20 equações de 2ª. ordem. A dinâmica é invariante no tempo e depende da posição, da quantidade de passageiros e do eixo que está sendo considerado. São usadas duas estratégias diferentes para o controle, uma baseada na variação da velocidade para controlar as vibrações dos cabos e dos isoladores do elevador (baixas frequências), e outra baseada no uso de atuadores no sistema de suspensão para controlar as ressonâncias nos cabos e nos isoladores com o uso do método da alocação de pólos. A exemplo do presente trabalho, Nai *et al.*, 1994, utilizam um observador de estados para estimar as variáveis do sistema necessárias. Já, Schneider *et al.*, 2001, modelam a dinâmica do sistema de um elevador e aplicam uma estratégia de controle baseada em redes neurais para controlar a aceleração e desaceleração da cabine do elevador, enquanto que Sha *et al.*, 2002, apresentam um modelo dinâmico de um elevador acionado por um sistema hidráulico usando as equações de Newton e leis da continuidade. Os diferentes mecanismos de atrito envolvidos no sistema também são levados em conta. Neste trabalho, o modelo é usado para executar simulações em Matlab/Simulink. A solução proposta para o controle é por modos deslizantes (Adaptive Sliding Mode Controller - ASMC) para sistemas discretos tipo SISO (Single Input – Single Output, ou seja, uma entrada uma saída). Esta estratégia do controle combina o controle realimentado não-linear baseado no método direto de Lyapunov com um esquema de controle por modos deslizantes adaptativo. A dinâmica de referência para o sistema é especificada com o uso do método de alocação de pólos. A estratégia de controle proposta é comparada com um PID (Proporcional, Integral e Derivativo) clássico e os resultados mostram melhor comportamento com a técnica de controle proposta. Skalski, 1984, apresenta e compara dois métodos usados atualmente para o controle da velocidade, aceleração e desaceleração de elevadores. Os métodos são o Silicon-Controlled Rectifier (SCR) Velocity Control e o Motor Generator (MG) Velocity Control. Ambos envolvem basicamente um controle PI (Proporcional e Integral) que age

diretamente no motor do elevador. Os resultados experimentais e das simulações mostram que ambos os sistemas conseguiram bons resultados, sendo que com o SCR-Driver obtém-se melhor desempenho.

No presente trabalho, visando o desenvolvimento de um algoritmo de controle para um sistema de suspensão ativa baseado no uso de atuadores eletromagnéticos lineares, foi desenvolvido um modelo simplificado para a dinâmica da suspensão do elevador utilizando métodos clássicos da dinâmica de corpos rígidos. O controlador foi desenvolvido baseado no método de alocação de pólos [Ogata, 2003; Friedland, 2005; Franklin *et al.*, 1994; Preumont, 2002]. Os conceitos e os métodos usados neste trabalho são de ampla aplicação no projeto de sistemas de controle de suspensões ativas de veículos automotivos (a bibliografia disponível nesta aplicação é muito mais extensa que no caso de elevadores). No desenvolvimento apresentado no Capítulo 2, pode-se observar que o modelo considerado para o elevador é similar ao modelo clássico de meio carro, já estudado extensamente e com ampla bibliografia disponível. Assim, as considerações teóricas encontradas em livros, patentes e artigos para estes sistemas podem ser extrapoladas para o caso da suspensão ativa de elevadores. No campo do desenvolvimento de suspensões automotivas, por exemplo, Kruczek e Stribrsky, 2004, discutem as vantagens e desvantagens dos sistemas passivos, semi-ativos e ativos, desenvolvendo uma modelagem para o caso de suspensão ativa em carros e mostrando diferenças entre a alocação dos atuadores em série ou paralelo com o sistema passivo (molas-amortecedores). Já Giua *et al.*, 2004, apresentam um sistema de suspensão que usa um atuador magneto-reológico que aumenta ou diminui a constante de amortecimento, de acordo com as perturbações da estrada. Chen *et al.*, 1999, desenvolveram um controlador baseado em uma unidade microcontrolada para uma suspensão ativa hidro-pneumática com 2 graus de liberdade. A estratégia de controle consiste em uma combinação de um controle com estrutura variável (VSC) com um esquema PID. Para o controle das vibrações verticais foi projetado um regulador quadrático linear (LQR). Os resultados apresentados foram considerados bons. Ikenaga *et al.*, 2000, e Campos *et al.*, 1999, usam uma estratégia de controle baseada no chamado Stability Augmentation System, usado classicamente no controle de aviões. Neste método, o problema é dividido em duas partes: uma isola o corpo do carro das vibrações da estrada e a outra parte controla as manobras do veículo. Além disso, em uma aproximação diferente da precedente, Ben Gaid *et al.*, 2004, apresentam um regulador quadrático linear (LQR) que isola a massa do veículo das perturbações externas e otimiza a dirigibilidade do carro. O modelo do carro é baseado no sistema de 7 graus de liberdade introduzido por Ikenaga *et al.*, 2000. Os resultados são obtidos através de simulação com Matlab/Simulink e comparados com os resultados de um modelo da suspensão passiva. Já,

Chantranuwathana e Peng, 1999, usam o modelo de um quarto de carro com um atuador em paralelo com o sistema passivo para o sistema da suspensão. O atuador utilizado na parte ativa do sistema é hidráulico. Primeiramente foi suposto que todos os estados estão disponíveis e que inclusive a força (sinal de entrada) é medida. Nesta situação foram simulados os casos passivos, ativo com controlador robusto adaptativo (ARC), ativo com um controlador PID e, finalmente, com um controlador ótimo quadrático linear (LQ). Posteriormente, foi suposto que a força não podia ser medida e se construiu um observador de estados. Nesta situação foram repetidas as simulações substituindo-se o controlador ARC por um controlador robusto adaptativo com realimentação da saída. As simulações mostram os melhores resultados para o controlador ARC com o observador para a força.

Finalmente, pode-se destacar, a partir da revisão bibliográfica realizada, que existem poucos artigos específicos sobre suspensões ativas para elevadores ([Istif *et al.*, 2002; Nai *et al.*, 1994; Schneider *et al.*, 2001; Sha *et al.*, 2002; Skalski, 1984], dentro outros). Além disso, trabalhos baseados na realimentação de estados com observador de estados para o controle da posição da cabine do elevador não foram encontrados. No entanto, como foi mencionado, o número de patentes é elevado. Portanto, conclui-se que o objetivo do presente trabalho é importante dentro do contexto da pesquisa industrial na área de suspensões ativas.

1.6.2 O Elevador e a Suspensão Ativa

A Fig. 1.2 apresenta, de maneira geral e esquemática, o sistema de controle completo com os estados medidos (sensores, perturbações), elemento de controle (algoritmo, $C(s)$), atuadores (sinal u) e o elevador ($G(s)$).

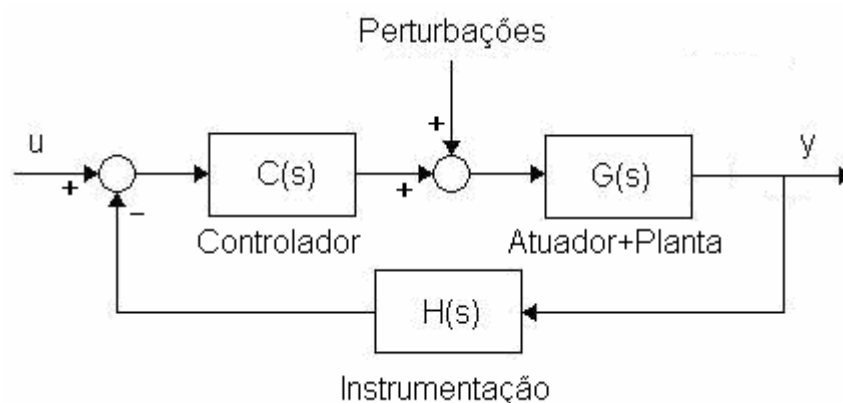


Figura 1.2: Esquema do sistema elevador+controlador+suspensão ativa

O funcionamento do sistema é apresentado a seguir:

- Quando o elevador encontra-se parado, o sistema de suspensão ativa é desligado, só usando os elementos passivos para a atenuação das vibrações que ocorrem sobre a cabine.
- Quando o elevador encontra-se deslocando pela corrediça, o sistema de suspensão ativa é ligado, assim, os sensores potenciométricos lêem as posições relativas dos braços com relação à cabine. Essa informação é enviada ao algoritmo de controle, o qual, após o seu processamento, envia o sinal de controle para os atuadores aplicarem as forças necessárias para atenuar as oscilações do elevador (de acordo com os parâmetros transientes definidos no Capítulo 4 deste trabalho). Se por acaso o elevador entrasse em um estado instável o sistema é desligado deixando só os elementos passivos atuando.

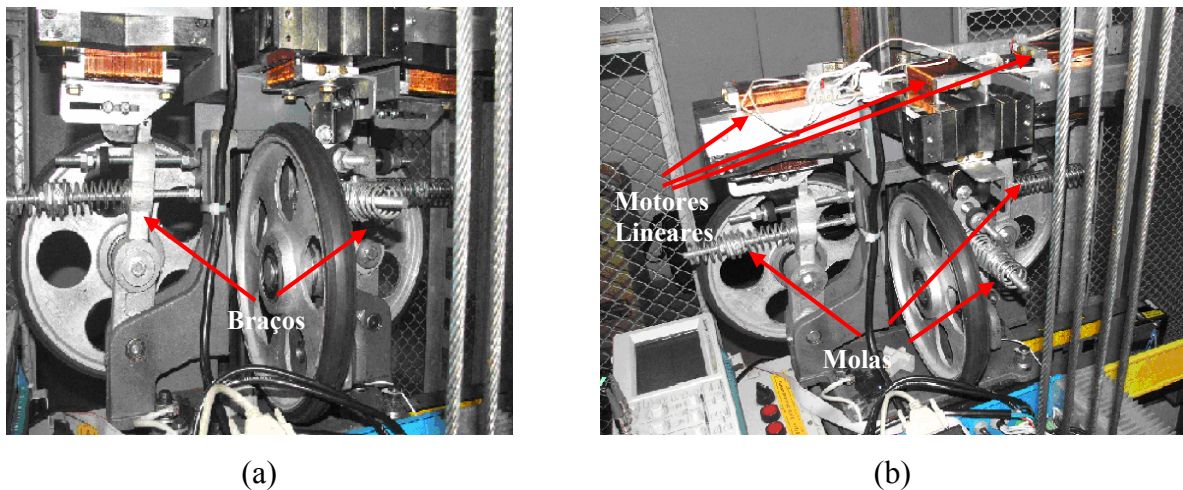


Figura 1.3: Vista suspensão ativa (a) lateral (b) superior

Nas Figuras 1.3 (a) e (b) observa-se o sistema de suspensão ativa real, com os seus três roletes, molas, braços, batentes e motores lineares. A Norma ISO 18738 estabelece que a qualidade no movimento de um elevador envolve aceleração e desaceleração da cabine, *Jerck* vertical (derivada terceira da posição), as vibrações (em $[m/s^2]$) produzidas durante o percurso do elevador em todos os eixos, a velocidade vertical e o som dentro da cabine. Neste caso, o elemento de qualidade de movimento do elevador estudado é a capacidade do sistema de suspensão na atenuação das oscilações que ele sofre devido às perturbações laterais (eixo Y, conforme a Fig. 4.1). Esta diminuição das vibrações deve ser avaliada com as metodologias estabelecidas na Norma ISO 18738 onde são estipulados os parâmetros a ser medidos e a maneira de registrá-los. A avaliação destes parâmetros deve ser realizada dentro dos seguintes limites de operação: a) entre 0,5 [s] antes de fechar a porta do elevador (ponto 0) e até 0,5 [m] de deslocamento (ponto 1), b) a partir dos 0,5 [m] antes do final do percurso (ponto 3) até 0,5 [s]

após a abertura da porta do elevador (ponto 4). Os picos das vibrações são medidas dentro da faixa da aceleração A95 (definida na Norma ISO 18738) a qual é calculada entre 5% e 95% da velocidade máxima dentro dos limites entre o ponto 0 e o ponto 3. A desaceleração A95 é calculada entre 95% e 5% da velocidade máxima dentro dos mesmos limites.

Um critério empírico adotado por empresas de elevadores para a definição do nível de vibrações máximo em um elevador na direção perpendicular à direção de deslocamento (eixo Y), embora não se encontre estabelecido por nenhuma norma, é 10 [mg] ($0,0981[m/s^2]$).

1.7 Aspectos Relativos aos Componentes de Elevadores

1.7.1 Introdução

Neste Capítulo é apresentada a estrutura de um elevador com seus dispositivos e componentes básicos e sua configuração geométrica (definições retiradas dos sites da ThyssenKrupp Elevadores, Otis Elevator Company e Elevadores Atlas Schindler, ver referências).

1.7.2 Principais Componentes de um Elevador

O elevador é definido como um conjunto com acionamento eletromecânico ou hidráulico destinado a realizar o transporte vertical de passageiros ou cargas entre os pavimentos de uma edificação. A Fig. 1.4 apresenta esquematicamente os principais elementos constituintes de um elevador comercial moderno.

Os seus principais componentes são descritos a seguir:

Casa de máquinas: Situada na parte superior do edifício, abriga todos os equipamentos que comandam e controlam o elevador. Os seus principais elementos são: *painel de controle*- controla todas as funções do elevador. *Painel de despacho*- tem a função de selecionar o elevador (para o caso de ter mais de um elevador), otimizando as chamadas, de acordo com a demanda do tráfego. *Máquina de tração*- realiza o movimento de tração através de uma polia, a qual recebe os cabos de aço que tracionam a cabina e o contrapeso. *Limitador de velocidade*- equipamento de segurança que proporciona a possibilidade de parada da cabina sempre que esta exceder a velocidade definida para seu funcionamento. *Transformadores de corrente (trafo)/indutores de potência*- são elementos de potência utilizados para eliminar ruídos de linhas e interferências na rede. *Chave para operação de emergência*- o comando do elevador é dotado de um dispositivo que, no caso de incêndio, fará com que o carro passe a operar em “sistema de emergência”. *Tacogenerador*- acoplado à máquina de tração, gera sinais para o regulador

eletrônico (controle de tensão e polaridade do motor) e para o controle, atuando no sistema de segurança e na unidade de monitoramento de velocidade. *Seletor eletrônico digital*- É um sistema microprocessado utilizando para substituir a fita seletora (fita metálica que informa o posicionamento do elevador). *Dispositivo automático para funcionamento com força de emergência*- permite funcionamento dos elevadores através da energia fornecida pelo gerador diesel, quando faltar energia elétrica da concessionária. *Sistema de monitoração e controle de tráfego*- equipamento microcomputadorizado que, interligado aos painéis dos elevadores, permite a visualização do estado de operação (status) do sistema (posição, sentido de deslocamento, chamadas registradas, situação das portas, serviço VIP, etc.) dos elevadores.

Caixa: É o local onde se movimentam a cabina e o contrapeso. Seus principais dispositivos e componentes são: *cabina*- estrutura utilizada para transportar pessoas ou cargas. É montada sobre uma plataforma, em uma armação de aço constituída por duas longarinas fixadas em cabeçotes (superior e inferior). No cabeçote inferior está instalado o freio de segurança. Conforme a Norma NBR 7192/98, é composta de painéis e porta tipo correr em aço inox, plataforma com isolamento de borracha, teto, teto-falso, iluminação fluorescente e saída de emergência. *Limitador de percurso*- garante o retardamento e a parada automática do elevador a uma distância predeterminada do pavimento extremo ou próximo a ele. *Freio de segurança*- paralisa o elevador quando o limitador de velocidade é acionado. *Contrapeso*- armação metálica, suspensa pelos mesmos cabos de aço que realizam o movimento da cabina. Está instalado ao fundo ou ao lado na caixa e tem por finalidade contrabalançar o peso da cabina. *Guias*- perfilados especiais instalados na caixa. Servem para manter o sentido de deslocamento da cabine e do contrapeso durante o percurso. *Cabos de comando*- cabos paralelos, usados para interligação flexível entre os componentes da cabina e o armário de comando. *Sensor*- conjunto composto por sensor ótico e dispositivos demarcadores de regiões de paradas.

Cabina: Os principais elementos associados às cabines são: *Sensor de proteção infravermelho*- recomendado para elevadores com portas simultâneas. *Luz de emergência*- mantém a cabina iluminada em caso de falta de energia elétrica. *Botoeira*- equipamento de comando que registra a chamada dos andares de acesso. *Sinalização de cabina*- display multiponto com setas indicativas de direção, contendo componentes eletrônicos de última geração.

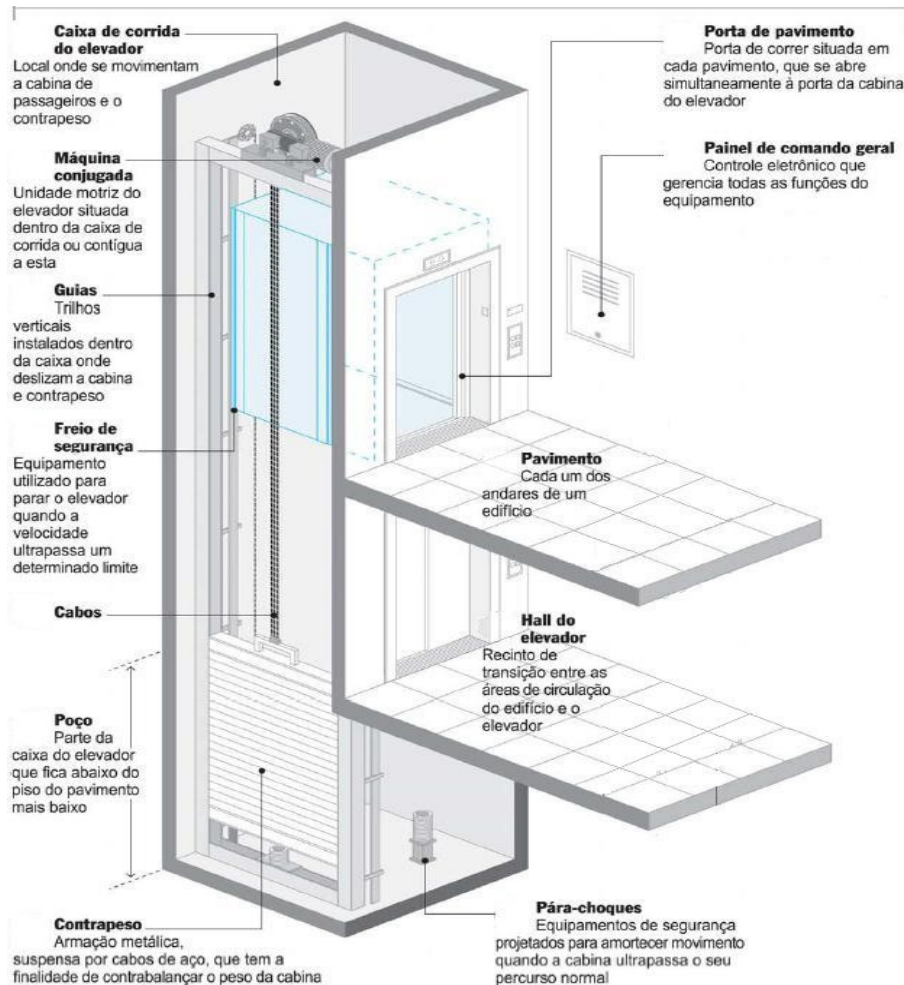


Figura 1.4: Desenho dos principais componentes do elevador (retirado do Manual de uso e conservação de elevadores em escolas, Governo do Estado de São Paulo)

Pavimentos: São os diversos andares onde a cabina pode efetuar paradas. *Trinco de porta-* o trinco trava as portas no momento da partida da cabina. *Botoeira de pavimento-* equipamento de comando que registra a chamada nos andares de acesso. *Sinalização de pavimento-* localizado acima das portas de pavimento, informa aos usuários a posição e/ou sentido de deslocamento da cabina. *Placas de andares-* conjuntos de placas demarcadoras de regiões de nivelamento e paradas para os pavimentos. *Sinalização do pavimento principal-* display multiponto com indicação de posicionamento da cabina e setas indicativas de direção.

Poço: Extremo inferior da caixa destinado a albergar os pára-choques de segurança e usado para operações de manutenção ou inspeção do elevador. Associado ao poço destaca-se o seguinte elemento: *pára-choques-* equipamentos de segurança projetados para desacelerar a cabina ou o contrapeso em movimento de descida com trajetória além de seu percurso normal.

Aterramento: O sistema deve estar aterrado à malha do Edifício para proteger contra descargas, conforme Norma de Instalações Elétricas Prediais e Residenciais de Baixa Tensão – NBR 5410.

Os elementos e componentes de elevadores que foram aqui apresentados são os mais comumente encontrados nos elevadores residenciais. Em alguns casos, os elevadores podem ter componentes a menos e em outros casos ter componentes ou elementos a mais, isto vai depender do tipo e uso do elevador. A Norma NBR13994 estabelece os requerimentos obrigatórios de todos os elevadores que sejam instalados no Brasil.

O componente que neste trabalho é estudado é a suspensão do elevador. Desta forma são apresentados na Figura 1.5 os sistemas de suspensão ativa e passiva. A suspensão passiva, geralmente utilizada, baseia sua capacidade de atenuação de vibrações nas molas acopladas nos braços que suportam os roletes. Estes roletes contactam-se as guias pelas quais se desloca o elevador e sofrem perturbações das mesmas. A rigidez das molas (ou seja, a constante de rigidez), determina como é a resposta da suspensão às perturbações. No caso da suspensão ativa, o funcionamento muda consideravelmente, pois a resposta do sistema não fica determinada unicamente pelas rigidezes das molas. Neste caso são incorporados no sistema atuadores cuja potência vem de motores lineares que os acionam. Estes atuadores incorporam energia no sistema procurando manter a cabine centrada, ou seja, com a sua posição constante no meio da correia.

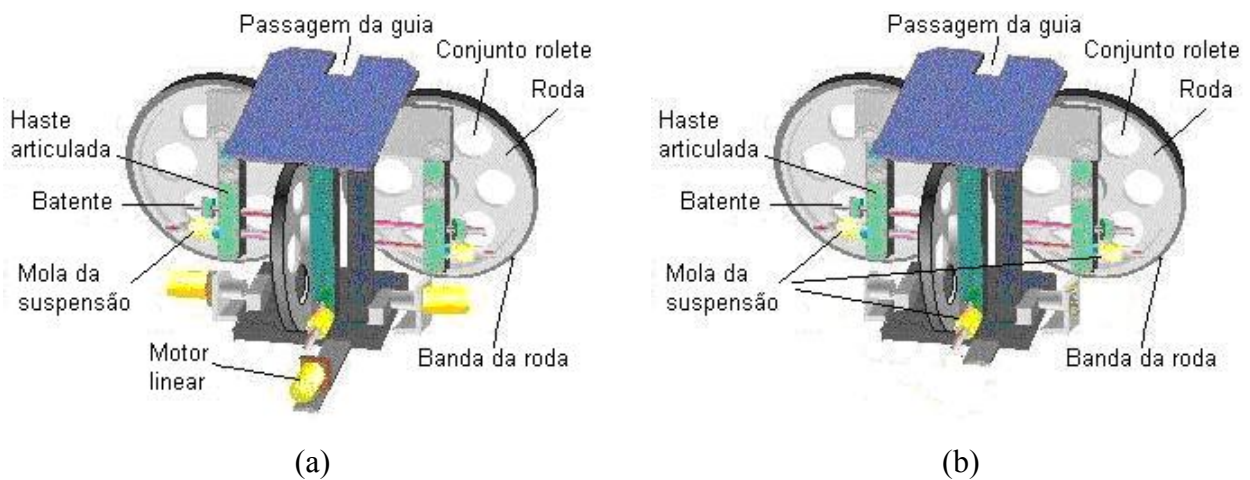


Figura 1.5: Sistema de suspensão (a) ativa (b) passiva

2. MODELAGEM DINÂMICA

2.1 Introdução

A modelagem dinâmica é uma ferramenta muito importante no apoio ao projeto de um sistema de controle. Portanto, esta deve representar o mais fielmente a resposta real do elevador. Porém, além da precisão do modelo é importante sua simplicidade, pois, além de permitir a simulação do comportamento do sistema, o modelo auxilia, muitas vezes, o projeto do sistema de controle, sendo em muitos casos utilizado diretamente na síntese do controlador (no caso dos controladores baseados em modelos). Por estes motivos a modelagem aqui apresentada procura, simultaneamente, precisão e simplicidade.

Neste capítulo é desenvolvido o modelo dinâmico do elevador. Diversas simplificações, descritas ao longo da modelagem matemática, são adotadas para obter um modelo relativamente simples e adequado para o projeto de controladores. Uma simplificação importante consiste na representação do elevador por um corpo rígido de forma de um paralelepípedo (ver Fig. 2.1).

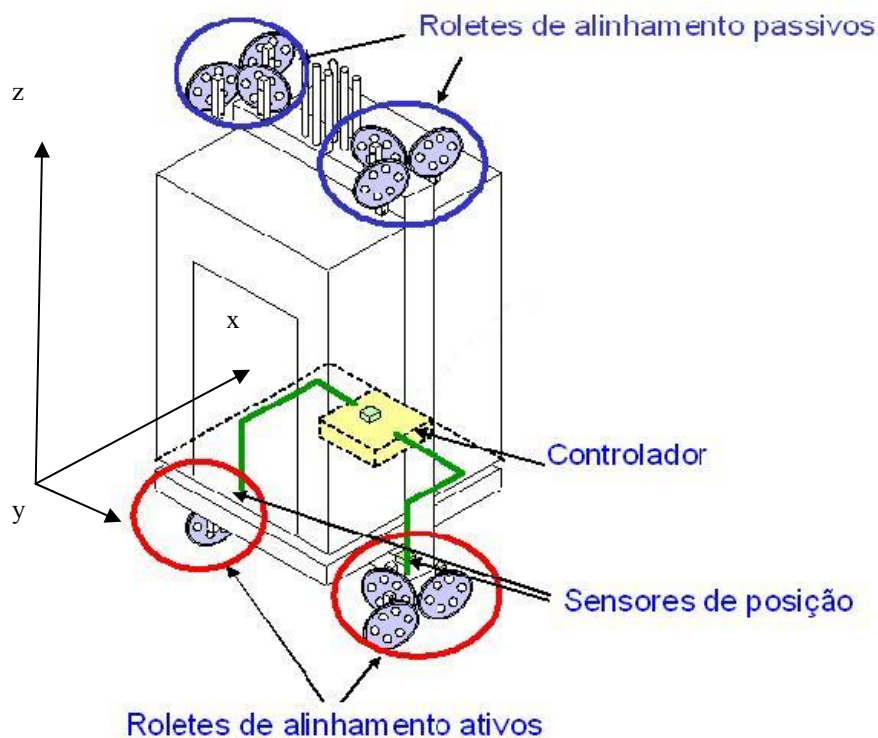


Figura 2.1: Representação esquemática do elevador

2.2 Definições Básicas

Nesta seção são definidos todos os parâmetros básicos dos elementos que compõem a suspensão do elevador que são utilizados para obter o sistema de equações representativas do comportamento dinâmico do sistema.

2.2.1 Definição dos Graus de Liberdade e Esquema do Elevador

Nas Figuras 2.1 e 2.2 são apresentados, respectivamente, a localização do sistema de suspensão no elevador e o sistema de suspensão ativa.

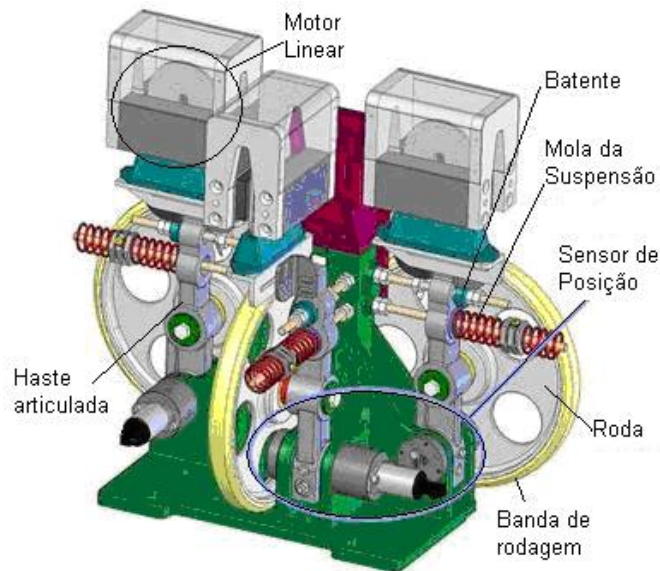


Figura 2.2: Sistema de suspensão ativa

Como já foi comentado, a cabine do elevador é modelada como um paralelepípedo sólido. Segundo os objetivos do sistema de controle ativo (diminuir os movimentos oscilatórios da base da cabine, onde se encontram os passageiros), é necessário levar em conta os deslocamentos em dois planos (XY e YZ, definidos de acordo com a Fig. 2.1).

Na Fig. 2.2 é apresentado o esquema de um conjunto suspensão. São utilizados quatro destes conjuntos para alinhar o elevador, conforme a Fig. 2.1. Cada conjunto suspensão é composto de três braços, cada um com uma suspensão independente (haste articulada, mola, rolete, motor linear, etc.). As guias verticais, vinculadas à construção civil, são dispostas verticalmente, alinhadas com o eixo Z. Os roletes (conjuntos eixo+roda+banda de rodagem) são alinhados ao plano YZ em número de quatro e tendem a impedir o movimento na direção do eixo Y e o giro em torno do eixo paralelo a X. Já, os roletes alinhados ao plano XZ são em número de oito e tendem a impedir o movimento na direção do eixo X e o giro em torno do eixo paralelo ao eixo Z.

2.3 Modelagem do Sistema no Plano YZ

No presente trabalho foi desenvolvido um algoritmo para controle ativo do movimento do elevador no plano YZ. Assim, a modelagem do sistema é apresentada em detalhes nesta seção. Quanto ao plano XY, sua modelagem é apresentada no Anexo 1 e envolve o desacoplamento dos movimentos torcional e translacional (por hipótese de simetria) o que permite a adaptação do controlador proposto para uso, por superposição de efeitos, nos dois graus de liberdade (rotação em torno ao eixo Z e translação na direção do eixo X).

A Fig. 2.3 apresenta um desenho esquemático do elevador e do sistema de suspensão ativa que permite visualizar o deslocamento tipo pêndulo do elevador no plano YZ, assim como, os principais parâmetros do conjunto elevador-suspensão ativa.

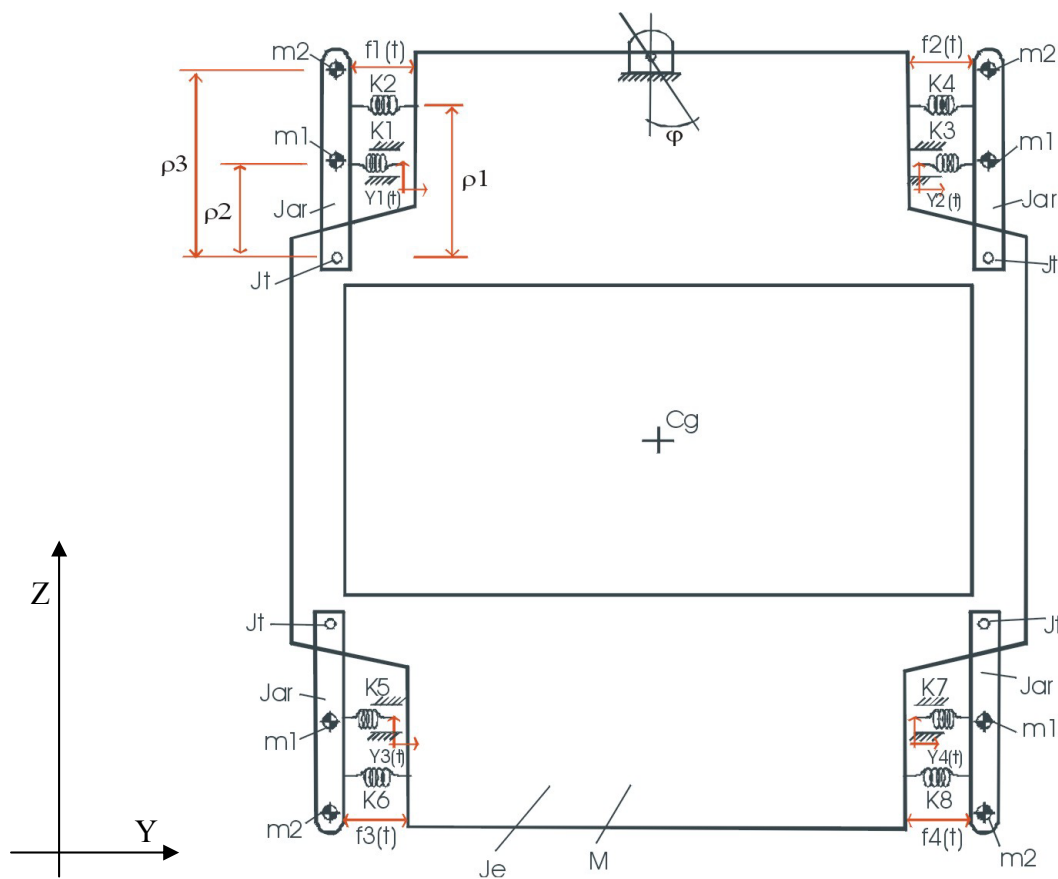


Figura 2.3: Modelo esquemático do elevador no plano YZ

No esquema apresentado na Fig. 2.3, as variáveis e parâmetros são definidos como segue: $f_i(t)$ ($i=1,2,3,4$) são as forças aplicadas pelos atuadores, $Y_i(t)$ são os deslocamentos dos roletes que contatam as guias. Os conjuntos das suspensões são considerados iguais, assim m_1 são as massas equivalentes de cada rolete e m_2 é a massa móvel de cada atuador linear. M é a massa total do elevador (carro + capacidade), ρ_1 , ρ_2 e ρ_3 são, respectivamente, o comprimento dos braços dos roletes, o raio de giração do ponto de conexão da mola com relação ao ponto de pivotamento do braço da suspensão e o raio de giração do ponto de fixação da massa móvel do

atuador. J_t é o momento de inércia total de cada conjunto suspensão com relação ao ponto de pivotamento ($J_t = m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_3^2 + J_{ar}$, onde J_{ar} é o momento de inércia da estrutura do braço da suspensão com relação ao ponto de pivotamento). $K_1 = K_3 = K_5 = K_7$ são as constantes de mola das bandas de rodagem dos roletes e $K_2 = K_4 = K_6 = K_8$ são as constantes de rigidez das molas helicoidais das suspensões. Finalmente, J_e é o momento de inércia do elevador relacionado ao centro de rotação superior onde os cabos são conectados à estrutura. Partindo do modelo esquemático apresentado na Fig. 2.3, são feitas diversas simplificações procurando obter um modelo mais simples. Estas simplificações serão apresentadas passo a passo visando demonstrar o mais claramente possível as considerações feitas em cada um deles.

Visando a simplificação do modelo a ser desenvolvido, parte-se da hipótese de que o conforto e segurança dos passageiros estão associados principalmente ao movimento pendular de corpo rígido da estrutura do elevador, conforme a Fig. 2.4. Assim, foi considerado o efeito das forças gravitacionais associadas ao movimento de rotação ao redor do ponto onde os cabos estão conectados, incorporando uma mola torcional equivalente ao efeito da gravidade. Portanto, o movimento na base da cabine, considerando as interações entre os componentes e efeitos gravitacionais, pode ser modelado pelo sistema representado na Fig. 2.4. Note-se que a hipótese de existência de pequenos deslocamentos (cinemática diferencial) foi adotada para a obtenção desta representação.

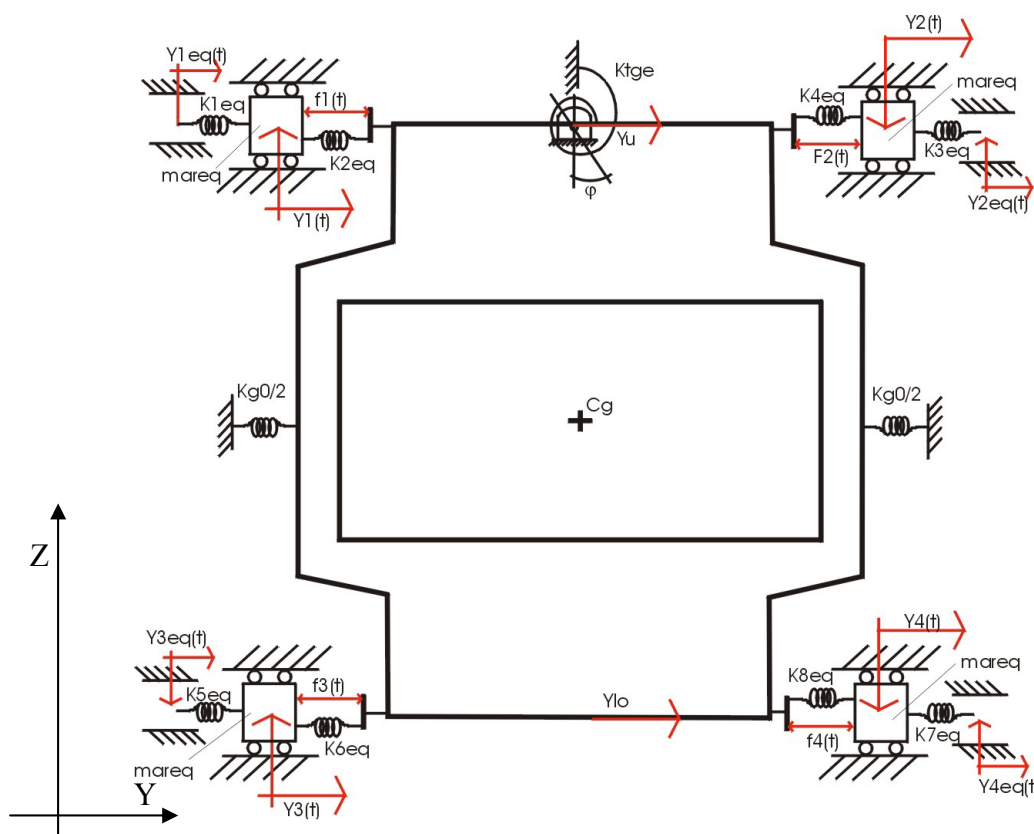


Figura 2.4: Modelo do elevador no plano YZ com movimento pendular

Y_u e Y_{lo} são, respectivamente, os deslocamentos do ponto superior e do ponto inferior da cabine, m_{areq} é a massa equivalente dos braços relacionada a seus centros de rotação ($m_{areq} = (m_2 \rho_3^2 + m_1 \rho_1^2 + J_{ar}) / (\rho_1^2) = J_t / \rho_1^2$), φ é o ângulo de giro do elevador com relação ao ponto de conexão dos cabos no topo da cabine (considerando pequenos deslocamentos φ não tem grandes variações, $\varphi \approx (Y_{lo} - Y_u) / L$ onde L é o comprimento da cabine. $K_{tg0} = MgL_0$ é a mola de torção do efeito de pêndulo da estrutura do elevador, onde L_0 é o comprimento do cabo do elevador que gera o pêndulo relacionado ao centro rotação superior, M é a massa total do elevador e g é a constante gravitacional, $K_{tg} = M_{eq}gL$ é a mola de torção do movimento de rotação do elevador ao redor da conexão dos cabos no topo da cabine, onde M_{eq} é a massa equivalente do carro ($M_{eq} = J_e / L^2$), Y_{ieq} são os deslocamentos da guia corrigida ao topo do braço, $K_{g0} = K_{tg0} / L_0^2$ é a constante equivalente de mola translacional relacionada aos efeitos gravitacionais. K_{ieq} são as constantes de deslocamento equivalentes ($K_{ieq} = K_i (\rho_1 / \rho_3)^2$, $i=1,3,5,7$ e $K_{ieq} = K_i (\rho_2 / \rho_3)^2$, $i=2,4,6,8$). Além disso, considerando o efeito do deslocamento de pêndulo formado pela estrutura relacionada ao ponto de conexão dos cabos, a mola equivalente é $K_{geq} = K_{tge} / L^2$.

Na seqüência serão incorporadas outras considerações para a continuidade do processo de simplificação do modelo a partir da Fig. 2.5.

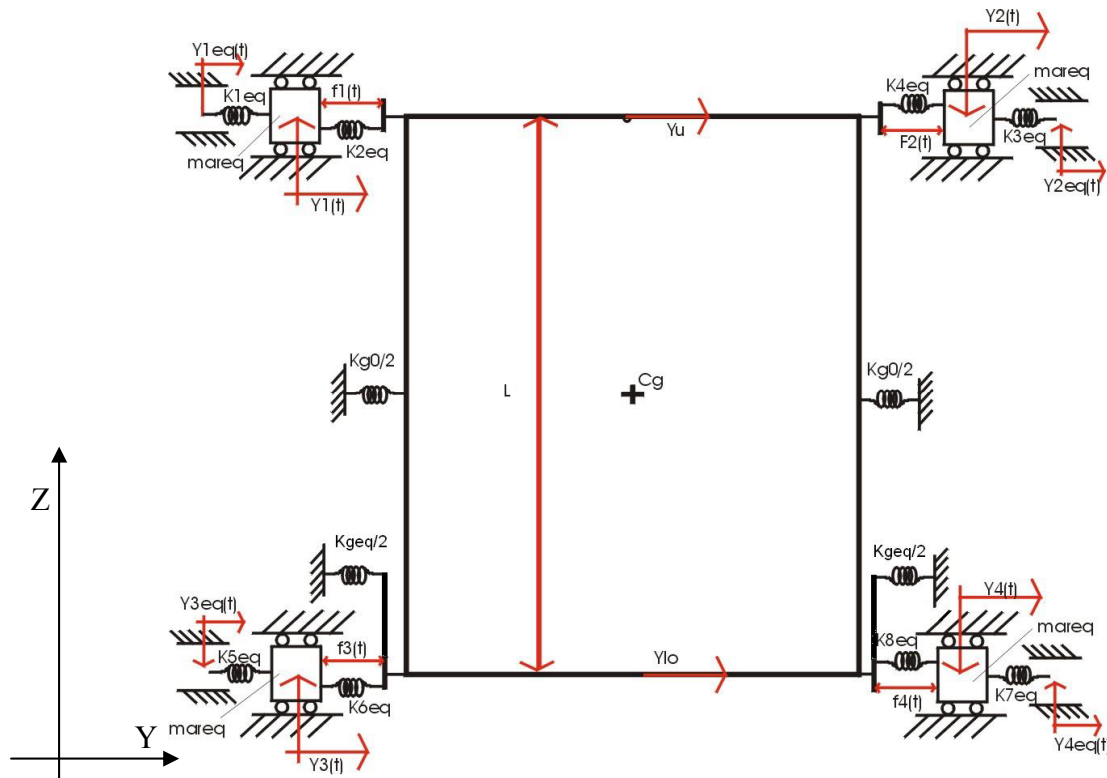


Figura 2.5: Modelo esquemático do elevador com constantes pendulares equivalentes

Na Fig. 2.5, o efeito da mola torcional do movimento tipo pendular com respeito ao ponto superior da cabine é deslocado para a base da cabine. Assim, a constante de mola torcional

é substituída por uma constante de mola translacional (K_{geq}). Além disso, o efeito de mola torcional por efeitos gravitacionais relativo ao movimento de rotação ao redor do ponto de pivotamento da cabine (onde os cabos estão conectados no topo do poço do elevador) foi considerado através da incorporação de uma mola torcional ao modelo K_{tg0} . Procurando manter a simetria do movimento pendular, esta constante de mola é dividida em duas constantes iguais em cada lado do elevador.

Supondo que a massa total do elevador encontra-se concentrada no centro da parte inferior da cabine, chega-se à configuração apresentada na Fig. 2.6. Esta configuração simplificada aproxima o sistema como uma massa translacional concentrada onde estão conectados dois sistemas de suspensão e atuam dois atuadores simetricamente posicionados na base da cabine. Esta simplificação foi feita considerando que os maiores deslocamentos do tipo pêndulo acontecem na base da cabine sendo suposto pequenos deslocamentos na parte superior dela. Outra consideração é que a massa do elevador encontra-se uniformemente distribuída e é várias vezes maior que a massa dos passageiros.

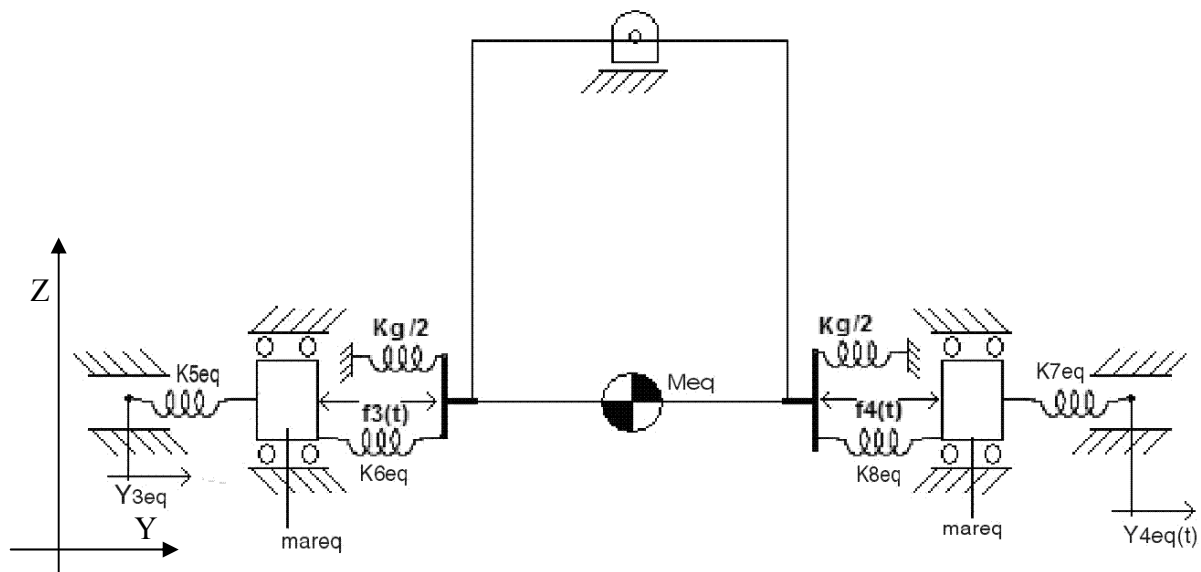


Figura 2.6: Modelo esquemático do elevador com a massa concentrada na base da cabine

Note-se que os efeitos gravitacionais foram compactados até obter-se a constante de mola translacional $K_g = K_{g0} + K_{ge}$.

O diagrama esquemático final do sistema simplificado é representado na Fig. 2.7, onde também foi considerado o efeito relativo às perdas energéticas do sistema mecânico através da consideração do amortecimento viscoso equivalente (amortecedores C e B).

Para simplificar as equações e usar as propriedades de simetria foi alterada a notação dos elementos de sistema. As forças dos atuadores $f_3(t)$ e $f_4(t)$ foram chamadas de $f_i(t)$ e $f_r(t)$. As molas K_{5eq} e K_{7eq} foram denominadas como K_s e as fontes K_{6eq} e K_{8eq} mudaram para K_{ar} . As molas

K_g e os fatores de amortecimento C e B não foram alterados. O deslocamento do braço esquerdo $Y_3(t)$ foi trocado por $Y_{IR}(t)$, enquanto que o do rolete direito $Y_4(t)$ foi mudado para $Y_{rR}(t)$. Assim: $f_3(t) \Rightarrow f_l(t), f_4(t) \Rightarrow f_r(t), Y_3(t) \Rightarrow Y_{IR}, Y_4(t) \Rightarrow Y_{rR}, K_{5eq} \Rightarrow K_s, K_{7eq} \Rightarrow K_s, K_{6eq} \Rightarrow K_{ar}, K_{8eq} \Rightarrow K_{ar}$.

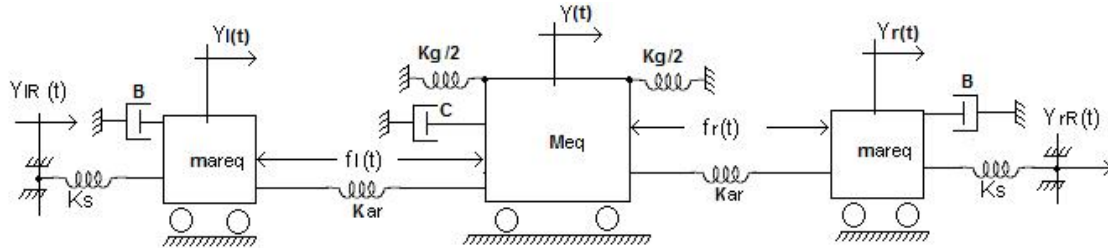


Figura 2.7: Modelo simplificado do elevador

É importante salientar que as variáveis Y_{IR} e Y_{rR} correspondem aos movimentos da parte externa da banda de rolagem dos roletes que podem ser utilizados para simular as perturbações nas guias.

2.4 Formulação das Equações de Movimento

A seguir, com o uso dos modelos simplificados apresentados na seção anterior, serão obtidas as equações de movimento que descrevem a dinâmica do sistema no plano YZ. Também é apresentado o modelo representado na forma de espaço de estados, a qual será usada no projeto do sistema de controle.

2.4.1 Equação de Equilíbrio Dinâmico

Nesta seção será feito o estudo analítico do modelo simplificado para o plano YZ. Este estudo visa à obtenção das equações do movimento do elevador. Os modelos são estudados com as propriedades de corpo rígido e as equações construídas a partir da 2ª Lei de Newton. Após a obtenção do equacionamento de movimento do elevador, este vai ser representado na forma de espaço de estados, visando preparar o equacionamento para o projeto do sistema de controle.

Para a formulação das equações de movimento do sistema apresentado na Fig. 2.7, é necessário ainda convencionar a direção das forças aplicadas pelos atuadores. Assim, nas situações de aplicação de sinal positivo de controle, convencionou-se o sentido de fechamento dos atuadores (ou seja, aplicam uma força de tração). Em contrapartida, para um sinal negativo de controle, convencionou-se a abertura dos atuadores (ou seja, aplicam uma força de compressão aos elementos ligados aos seus extremos). Através da 2ª Lei de Newton pode-se realizar o equacionamento do equilíbrio dinâmico do sistema, o que resulta:

$$m_{areq} \ddot{Y}_l + B\dot{Y}_l + K_s Y_l + K_{ar} Y_l - K_{ar} Y = K_s Y_{lR} + f_l \quad (2.1)$$

$$-K_{ar} Y_l + K_{ar} Y + M_{eq} \ddot{Y} + KgY + C\dot{Y} + K_{ar} Y - K_{ar} Y_r = f_l + f_r \quad (2.2)$$

$$-K_{ar} Y + K_{ar} Y_r + m_{areq} \ddot{Y}_r + B\dot{Y}_r + K_s Y_r = K_s Y_{rR} + f_r \quad (2.3)$$

O principal objetivo do controle é o de regular o comportamento dos estados de forma que as respostas dos graus de liberdade do sistema, principalmente a trajetória da cabine, convirjam rápida e suavemente para a posição de equilíbrio, de forma a proporcionar aos passageiros um deslocamento confortável e seguro.

O sistema real utiliza sensores potenciométricos para medir o deslocamento relativo entre os braços e a cabine. Na literatura, a grande maioria dos trabalhos operam com acelerômetros. O uso de potenciômetros visa a construção de um sistema mecânico mais simples e econômico. As motivações do uso de potenciômetros serão discutidas no Capítulo 4, onde o projeto e aplicação de observadores de estados são estudados. Para facilitar a aplicação do controlador proposto no sistema real é, portanto, adequado realizar uma alteração do conjunto de variáveis de estado, onde os deslocamentos relativos dos braços com relação à cabine aparecem explicitamente como variáveis do sistema. Segue a alteração do conjunto de variáveis de estados:

$$\Delta y_l = Y_l - Y \Rightarrow Y_l = \Delta y_l + Y \quad (2.4)$$

$$\Delta y_r = Y_r - Y \Rightarrow Y_r = \Delta y_r + Y \quad (2.5)$$

Assim, derivando duas vezes as equações (2.4) e (2.5) e substituindo-as nas equações

(2.1) até (2.3) resulta $\ddot{Y}_l = \frac{1}{m_{areq}} [K_s Y_{lR} + f_l - B\dot{Y}_l - K_s Y_l - K_{ar} Y_l + K_{ar} Y]$. Substituindo agora

este último resultado nas derivadas das equações (2.4) e (2.5) tem-se

$$\Delta \ddot{y}_l = \frac{1}{m_{areq}} [K_s Y_{lR} + f_l - B(\Delta \dot{y}_l + \dot{Y}) - K_s (\Delta y_l + Y) - K_{ar} (\Delta y_l + Y) + K_{ar} Y] - \ddot{Y} \text{ ou}$$

$$\Delta \ddot{y}_l = \frac{1}{m_{areq}} [K_s Y_{lR} + f_l - B\Delta \dot{y}_l - B\dot{Y} - K_s \Delta y_l - K_s Y - K_{ar} \Delta y_l] - \ddot{Y}.$$

Analogamente, como $\ddot{Y}_r = \frac{1}{m_{areq}} [K_s Y_{rR} + f_r + K_{ar} Y - K_{ar} Y_r - B\dot{Y}_r - K_s Y_r]$, tem-

se, $\Delta \ddot{y}_r = \frac{1}{m_{areq}} [K_s Y_{rR} + f_r + K_{ar} Y - K_{ar} (\Delta y_r + Y) - B(\Delta \dot{y}_r + \dot{Y}) - K_s (\Delta y_r + Y)] - \ddot{Y}$ ou

$$\Delta \ddot{y}_r = \frac{1}{m_{areq}} [K_s Y_{rR} + f_r - K_{ar} \Delta y_r - B\Delta \dot{y}_r - B\dot{Y} - K_s \Delta y_r - K_s Y] - \ddot{Y}.$$

E, ainda para a massa central (do elevador), tem-se também,

$$\ddot{Y} = \frac{1}{M_{eq}} [f_l + f_r + K_{ar} Y_l - K_{ar} Y - K_g Y - C\dot{Y} - K_{ar} Y + K_{ar} Y_r], \text{ ou}$$

$$\ddot{Y} = \frac{1}{M_{eq}} [f_l + f_r + K_{ar} (\Delta y_l + Y) - K_{ar} Y - K_g Y - C\dot{Y} - K_{ar} Y + K_{ar} (\Delta y_r + Y)] \text{ resultando,}$$

$$\ddot{Y} = \frac{1}{M_{eq}} [f_l + f_r + K_{ar} \Delta y_l - K_g Y - C\dot{Y} + K_{ar} \Delta y_r] \quad (2.6)$$

Substituindo agora \ddot{Y} nas expressões de $\Delta \ddot{y}_l$ e $\Delta \ddot{y}_r$, tem-se,

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{y}_l &= \frac{1}{m_{areq}} [K_s Y_{lR} + f_l - B\Delta \dot{y}_l - B\dot{Y} - K_s \Delta y_l - K_s Y - K_{ar} \Delta y_l] - \\ &- \frac{1}{M_{eq}} [f_l + f_r + K_{ar} \Delta y_l - K_g Y - C\dot{Y} + K_{ar} \Delta y_r] \end{aligned} \quad (2.7)$$

e,

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{y}_r &= \frac{1}{m_{areq}} [K_s Y_{rR} + f_r - K_{ar} \Delta y_r - B\Delta \dot{y}_r - B\dot{Y} - K_s \Delta y_r - K_s Y] - \\ &- \frac{1}{M_{eq}} [f_l + f_r + K_{ar} \Delta y_l - K_g Y - C\dot{Y} + K_{ar} \Delta y_r] \end{aligned} \quad (2.8)$$

O conjunto de equações (2.6), (2.7) e (2.8) consiste em uma representação alternativa do sistema no espaço de estados, onde o novo conjunto de variáveis de estado é definido como

$$\mathbf{x} = [\Delta y_l \quad \Delta \dot{y}_l \quad Y \quad \dot{Y} \quad \Delta y_r \quad \Delta \dot{y}_r]^T \text{ (x vetor de estados } 6 \times 1 \text{).}$$

2.4.2 Representação em variáveis de estado

Definindo as variáveis, como equações de espaço de estados:

$$\mathbf{x} = [Y_l \quad \dot{Y}_l \quad Y \quad \dot{Y} \quad Y_r \quad \dot{Y}_r]^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^T \text{ (6 x 1).}$$

Sua representação em equações de espaço de estados fica:

$$\dot{x}_2 = -\frac{(K_s + K_{ar})}{m_{areq}} x_1 - \frac{B}{m_{areq}} x_2 + \frac{K_{ar}}{m_{areq}} x_3 + \frac{K_s}{m_{areq}} Y_{lR} + \frac{f_l}{m_{areq}} \quad (2.9)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_{ar}}{M_{eq}} x_1 - \frac{(2K_{ar} + K_g)}{M_{eq}} x_3 + \frac{-C}{M_{eq}} x_4 + \frac{K_{ar}}{M_{eq}} x_5 + \frac{(f_l + f_r)}{M_{eq}} \quad (2.10)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{K_{ar}}{m_{areq}} x_3 + \frac{-(K_{ar} + K_s)}{m_{areq}} x_5 + \frac{-B}{m_{areq}} x_6 + \frac{K_s}{m_{areq}} Y_{rR} + \frac{f_r}{m_{areq}} \quad (2.11)$$

De (2.9), (2.10) e (2.11) a expressão matricial fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(K_s + K_{ar})}{m_{areq}} & -\frac{B}{m_{areq}} & \frac{K_{ar}}{m_{areq}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_{ar}}{M_{eq}} & 0 & -\frac{(2K_{ar} + K_g)}{M_{eq}} & -\frac{C}{M_{eq}} & \frac{K_{ar}}{M_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{K_{ar}}{m_{areq}} & 0 & -\frac{(K_s + K_{ar})}{m_{areq}} & -\frac{B}{m_{areq}} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}_{6 \times 1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{K_s}{m_{areq}} & 0 \\ m_{areq} & 0 & m_{areq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ M_{eq} & M_{eq} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{K_s}{m_{areq}} \end{bmatrix}_{6 \times 4} \begin{bmatrix} f_l \\ f_r \\ Y_{lR} \\ Y_{rR} \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

Usando agora a alteração das variáveis de estado de (2.4) e (2.5), as novas variáveis ficam: $\mathbf{x} = [\Delta y_l \quad \Delta \dot{y}_l \quad Y \quad \dot{Y} \quad \Delta y_r \quad \Delta \dot{y}_r]^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^T$ (6 x 1). Então, a representação em equações de espaço de estados para as novas variáveis é a seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_{areq}} [K_s Y_{lR} + f_l - Bx_2 - Bx_4 - K_s x_1 - K_s x_3 - K_{ar} x_1] - \frac{1}{M_{eq}} \begin{bmatrix} f_l + f_r + K_{ar} x_1 - K_g x_3 \\ -Cx_4 + K_{ar} x_5 \end{bmatrix} \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{M_{eq}} [f_l + f_r + K_{ar} x_1 - K_g x_3 - Cx_4 + K_{ar} x_5] \\ \dot{x}_6 &= \frac{1}{m_{areq}} [K_s Y_{rR} + f_r - K_{ar} x_5 - Bx_6 - Bx_4 - K_s x_5 - K_s x_3] - \frac{1}{M_{areq}} \begin{bmatrix} f_l + f_r + K_{ar} x_1 - K_g x_3 \\ -Cx_4 + K_{ar} x_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agrupando as equações segundo as variáveis de estado, resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \left[-\frac{(K_s + K_{ar})}{m_{areq}} - \frac{K_{ar}}{M_{eq}} \right] x_1 - \frac{B}{m_{areq}} x_2 + \left(\frac{K_g}{M_{eq}} - \frac{K_s}{m_{areq}} \right) x_3 \\ &+ \left(\frac{C}{M_{eq}} - \frac{B}{m_{areq}} \right) x_4 - \frac{K_{ar}}{M_{eq}} x_5 + \frac{K_s}{m_{areq}} Y_{lR} + \left(\frac{1}{m_{areq}} - \frac{1}{M_{eq}} \right) f_l - \frac{1}{M_{eq}} f_r \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{M_{eq}} [K_{ar}x_1 - K_g x_3 - Cx_4 + K_{ar}x_5 + f_l + f_r] \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6 = & -\frac{K_{ar}}{M_{eq}}x_1 + \left(\frac{K_g}{M_{eq}} - \frac{K_s}{m_{areq}}\right)x_3 + \left(\frac{C}{M_{eq}} - \frac{B}{m_{areq}}\right)x_4 \\ & - \left(\frac{K_{ar}}{M_{eq}} + \frac{K_{ar} + K_s}{m_{areq}}\right)x_5 - \frac{B}{m_{areq}}x_6 + \frac{K_s}{m_{areq}}Y_{rR} + -\frac{I}{M_{eq}}f_l + \left(\frac{I}{m_{areq}} - \frac{I}{M_{eq}}\right)f_r \end{aligned} \quad (2.14)$$

Reescrevendo o novo sistema no formato matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix}_{6 \times 1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(K_s + K_{ar})}{m_{areq}} - \frac{K_{ar}}{M_{eq}} - \frac{B}{m_{areq}} & \left(\frac{K_g}{M_{eq}} - \frac{K_s}{m_{areq}}\right) & \left(\frac{C}{M_{eq}} - \frac{B}{m_{areq}}\right) & -\frac{K_{ar}}{M_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{ar}}{M_{eq}} & 0 & -\frac{K_g}{M_{eq}} & -\frac{C}{M_{eq}} & \frac{K_{ar}}{M_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_{ar}}{M_{eq}} & 0 & \left(\frac{K_g}{M_{eq}} - \frac{K_s}{m_{areq}}\right) & \left(\frac{C}{M_{eq}} - \frac{B}{m_{areq}}\right) - \left(\frac{K_{ar}}{M_{eq}} + \frac{K_{ar} + K_s}{m_{areq}}\right) & -\frac{B}{m_{areq}} & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{m_{areq}} - \frac{1}{M_{eq}}\right) & -\frac{1}{M_{eq}} & \frac{K_s}{m_{areq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{M_{eq}} & \frac{1}{M_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{M_{eq}} & \left(\frac{1}{m_{areq}} - \frac{1}{M_{eq}}\right) & 0 & \frac{K_s}{m_{areq}} \end{bmatrix}_{6 \times 4} \begin{bmatrix} f_l \\ f_r \\ Y_{lR} \\ Y_{rR} \end{bmatrix}_{4 \times 1} \end{aligned} \quad (2.15)$$

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE O PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS

Os modernos recursos computacionais e as características do sistema físico (vários graus de liberdade, ordem relativamente alta e linear em toda a faixa de operação) aliado aos trabalhos de Nei *et al.*, 1994, e Sha *et al.*, 2002, dentre outros, que tratam de problemas semelhantes, levaram à escolha do método de alocação de pólos através da realimentação de estados para solução do problema de controle da suspensão ativa de elevadores sujeito a perturbações. Esta metodologia permite, teoricamente, a realocação dos pólos do sistema em malha fechada para qualquer posição arbitrária do plano complexo, o que implica na possibilidade de impor ao sistema qualquer dinâmica desejada. As condições para sua adequada aplicação são a linearidade do sistema a ser controlado na sua faixa operacional e a não-saturação do sinal de controle (o que significa que o controlador, evidentemente, somente pode impor ao sistema, dinâmicas que os atuadores têm capacidade (ou potência) para viabilizar). Cabe salientar que para tratar o problema de saturação do sinal de controle não foram estudadas metodologias tipo *anti-windup*, o que poderá ser feito em trabalhos futuros. Neste Capítulo, além da teoria de controle por realimentação de estados, são apresentadas as metodologias utilizadas para a escolha dos pólos desejados para a malha fechada (inclusive controle ótimo) e de estimação dos estados cuja aquisição não é possível através do sistema de medição implementado no sistema real (os *observadores de estados*).

3.1 Introdução

O desenvolvimento e uso de um método de controle depende do modelo dinâmico do sistema real que vai ser controlado, dos sinais a serem controlados, das características que se deseja incorporar ao sistema e a experiência do projetista. Essencialmente, os sistemas reais são não-lineares, porém, muitas vezes, os sistemas reais não-lineares podem ser aproximados por modelos dinâmicos lineares na faixa em estudo ou de trabalho do sistema. Estas aproximações podem ser feitas sem perda de generalidade e o sistema pode ficar bem representado e caracterizado, ou seja, com estas aproximações o sistema responde similarmente ao sistema real.

Evidentemente, um modelo linear geralmente irá implicar em um projeto do algoritmo de controle mais simples resultando, obviamente, em menores dificuldades que problemas que envolvem modelos não-lineares. O modelo dinâmico introduzido no Capítulo 2 consiste de um sistema de equações diferenciais lineares de 6ª ordem. Neste caso não é preciso introduzir nenhuma metodologia adicional de linearização.

Existem duas metodologias clássicas para o estudo e projeto de controladores de sistemas lineares: técnicas no domínio frequência ou no domínio tempo (espaço de estados). Este último é usado para a análise de sistemas através de equações de primeira ordem.

Possivelmente, a análise no domínio frequência é o método mais comumente usado no projeto de sistemas de controle lineares, fundamentalmente porque permite boas aproximações quando o sistema modelado é pouco conhecido. No caso do espaço de estados o modelo é usado para a análise de sistemas através de equações de primeira ordem.

Definem-se os estados de um sistema dinâmico como o mínimo conjunto de quantidades físicas cujas especificações determinam completamente a evolução do sistema ao longo do tempo. O uso da notação matricial simplifica muito a representação matemática e, portanto, os requisitos computacionais para o controle.

Outra alternativa para o projeto do sistema de controle consiste na aplicação das metodologias tradicionais baseadas nas ações de controle proporcional (P), integral (I) e derivativa (D). Estes controladores, cujo mais usado é o PID (proporcional+integral+derivativa), são largamente utilizados para o controle de sistemas lineares. Essa abordagem é, em muitos casos, suficiente e obtêm-se bons resultados e boas respostas dos sistemas. Embora o controle PID permita obter bons resultados para sistemas de diferentes ordens, Aström e Hägglund, 1995, recomendam o uso destes controladores em sistemas de até 2ª ordem, desincentivando sua aplicação no presente caso.

Antes de iniciar a apresentação do método de alocação de pólos propriamente dito, serão introduzidos alguns conceitos prévios importantes.

3.2 Estabilidade

Segundo Friedland, 2005, o principal requisito da dinâmica de sistemas em malha fechada é a estabilidade, ou seja, a habilidade do sistema para operar sob uma variedade de condições sem entrar em um processo que possa resultar em movimentos com amplitudes fora da faixa de operação segura da planta.

Duas categorias de estabilidade são de interesse no estudo de sistemas de controle. A primeira categoria relaciona-se com a habilidade do sistema de retornar para o equilíbrio depois de um deslocamento arbitrário que o afaste desta situação. A segunda categoria relaciona-se com a habilidade do sistema para produzir uma saída limitada a partir de uma entrada limitada. Para sistemas não-lineares ou variantes no tempo essas duas categorias são diferentes, ou seja, um sistema pode apresentar um tipo de estabilidade sem a outra.

Para sistemas lineares invariantes no tempo a análise de estabilidade é mais simples, pois as duas categorias são equivalentes. Além disso, o critério básico de estabilidade está diretamente determinado pela localização dos pólos, ou seja, as raízes do polinômio característico do sistema.

No Anexo 3 é apresentada, segundo a abordagem de Friedland, 2005, a metodologia de estudo do problema de estabilidade de sistemas representados em espaço de estados.

3.3 Controlabilidade e Observabilidade

A controlabilidade é um conceito associado à representação dos sistemas em espaço de estados. As idéias de controlabilidade e de observabilidade foram introduzidas por R. E. Kalman, 1960, apud Friedland, 2005, e Kalman *et al.*, 1963, apud Friedland, 2005, em meados da década de '50 como uma forma de explicar porque o projeto de controladores para sistemas instáveis cancelando os pólos instáveis com zeros estava condenado ao fracasso, embora o cancelamento fosse *perfeito* (na prática este método não é viável, pois o cancelamento perfeito de um sistema real não é possível). Kalman mostrou que um cancelamento perfeito zero-pólo poderia resultar em um sistema instável, apesar de a função de transferência resultante ser matematicamente estável. Isto ocorre, pois nesta situação a função de transferência fica de ordem menor que a do sistema real e, com isso, os modos instáveis não podem ser afetados pela entrada (caso de sistema não controlável) ou ficam invisíveis na saída (caso de sistema não observável).

Isto compromete a abordagem tradicional de controle linear, pois na análise no domínio frequência está tacitamente assumido que as propriedades dinâmicas do sistema são completamente determinadas pela função de transferência do sistema, o que nem sempre acontece.

Existem dois tipos de sistema não controláveis, aqueles cuja parte não controlável é estável e aqueles cuja parte não controlável é instável. Um sistema do primeiro tipo é chamado de *estabilizável*. Similarmente, existem sistemas não observáveis cuja parcela não observável é estável e sistemas cujas parcelas não observáveis são instáveis. Aqueles do primeiro tipo são definidos como *detectáveis*.

3.3.1 Controlabilidade

Diz-se que um sistema é controlável no tempo t_0 se é possível transferi-lo desde qualquer estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ até qualquer outro estado $\mathbf{x}(t)$, mediante um vetor de controle sem restrições em um intervalo de tempo finito.

Embora a maior parte dos sistemas físicos sejam controláveis, os modelos matemáticos correspondentes podem não apresentar a condição de controlabilidade, ou seja, não ser possível, teoricamente, controlar todos os estados do sistema através dos atuadores definidos nas equações do modelo.

Seja o sistema em tempo contínuo definido pela equação:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.2)$$

onde \mathbf{x} é o vetor de estados ($n \times 1$), \mathbf{y} é o sinal de saída ($n \times 1$), \mathbf{u} é o sinal de controle ($r \times 1$), \mathbf{A} é a matriz constante da dinâmica do sistema ($n \times n$), \mathbf{B} é a matriz constante de controle ($n \times r$), \mathbf{C} é a matriz constante de resposta ($m \times n$) e \mathbf{D} é a matriz constante ($m \times r$).

Para que um sistema descrito conforme a Eq. (3.1) seja controlável em $t = t_0$, deve ser possível construir um sinal de controle que transfira um estado inicial a outro estado final qualquer em um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Se todos os estados são controláveis é dito que o sistema é completamente controlável.

A chamada matriz de controlabilidade é definida como $\mathbf{M} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ ($n \times n$), onde \mathbf{A} e \mathbf{B} são definidas de acordo com a Eq. (3.1). Conforme o desenvolvimento apresentado no Anexo 3, para que um sistema seja completamente controlável é necessário que o posto da matriz $[\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]_{n \times n}$ seja n , o que implica que um sistema representado de acordo com a Eq. (3.1) é completamente controlável se e somente se os vetores \mathbf{B} , $\mathbf{A}\mathbf{B}$, ..., $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ são linearmente independentes (o que equivale à matriz $[\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]_{n \times n}$ ter posto completo igual a n).

3.3.2 Observabilidade

Nesta seção discute-se o conceito de observabilidade de sistemas lineares. Diz-se que um sistema é completamente observável se o vetor de estados $\mathbf{x}(t_0)$ pode ser determinado a partir da medição de $\mathbf{y}(t)$ durante um tempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$. Portanto, o sistema é completamente observável se todas as mudanças de estados afetam a todos os elementos do vetor de saída.

O conceito de observabilidade é útil para resolver o problema de estimar as variáveis de estado que não podem ser diretamente medidas no sistema real. Para sistemas lineares invariantes no tempo a consideração de $t_0 = 0$ pode ser feita sem perda de generalidade.

A observabilidade é muito importante, pois, na prática, uma dificuldade comum no controle por realimentação de estados consiste das situações em que algumas das variáveis de estado necessárias ao controle não são acessíveis para uma medição direta. Assim, é necessário estimá-las e, desta forma, calcular o sinal de controle.

Conforme o desenvolvimento apresentado no Anexo 3, para que o sistema definido pelas equações (3.1) e (3.2) seja completamente observável é necessário e suficiente que a matriz $\mathbf{N} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T]$ tenha posto n ou n vetores coluna linearmente independentes.

3.4 Método de Alocação de Pólos

O método de alocação de pólos realizado no espaço de estados é também chamado método moderno em contrapartida às técnicas clássicas no domínio frequência.

Vale salientar que a grande vantagem deste método é a possibilidade de escolher a posição em malha fechada tanto dos pólos dominantes como dos pólos não dominantes. Isto resulta em uma metodologia poderosa, pois permite obter respostas muito próximas das desejadas.

Em linhas gerais, a descrição do método de alocação de pólos aqui apresentada segue o mesmo desenvolvimento de Ogata, 1996. Assim, segundo este autor, pólos em malha fechada desejados podem ser determinados baseando-se nas exigências do regime transitório da resposta e/ou na resposta em frequência. Através da escolha de uma matriz de ganhos apropriada para a realimentação de estados, é possível forçar o sistema a ter pólos a malha fechada nas localizações desejadas. Existem, todavia, custos associados à alocação de todos os pólos na malha fechada, uma vez que tal realocação requer a possibilidade de conhecimento dos valores de todas as variáveis de estado ao longo do tempo ou, então, a inclusão de um observador de estados no sistema. Além disso, há necessidade que os atuadores imponham a dinâmica desejada operando na sua faixa linear, ou seja, não devem saturar e ainda que o sistema seja completamente controlável para que os pólos em malha fechada possam ser realocados arbitrariamente no plano complexo.

Na abordagem da alocação de pólos, o projetista deve propor uma dinâmica desejada para o sistema em malha fechada relacionada com as posições correspondentes dos pólos e determinar uma matriz de ganhos da retroação de estado. Evidentemente, para um mesmo problema pode-se, como sugere Ogata, 1996, testar várias possibilidades para a dinâmica desejada através de simulação computacional visando escolher a de melhor desempenho global (o qual depende do problema específico e pode, inclusive, levar em conta considerações econômicas).

Considere, por exemplo, o sistema de controle expresso pelas equações (3.1) e (3.2). Escolhe-se a lei de controle como sendo:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (3.3)$$

Onde \mathbf{K} ($1 \times n$) é a matriz de ganhos de realimentação ou de retroação de estados e \mathbf{u} é o sinal de controle realimentado que depende do vetor de estados \mathbf{x} . Assim, a Eq. (3.3) define um esquema de controle de realimentação de estados.

No presente trabalho, o objetivo do controle é o de manter a cabine do elevador imune, tanto quanto possível, aos efeitos de perturbações. Isto caracteriza um problema clássico de regulação, ou seja, as ações de controle devem ser tais que, a partir de um estado de equilíbrio, a saída de interesse deve ser mantida próxima a zero, mesmo que o sistema seja sujeito a perturbações que em determinados momentos desviem a saída do zero.

A substituição da Eq. (3.3) nas equações (3.1) e (3.2) resulta em: $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t)$ cuja solução é expressa por:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})t} \mathbf{x}(0) \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{x}(0)$ é o estado inicial (ou desvio do equilíbrio) gerado pelas perturbações externas. A estabilidade e as características transientes são determinadas mediante os autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$. Se os autovalores são adequados, a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ fica estável e, para qualquer valor de $\mathbf{x}(0)$ diferente de zero, é possível fazer com que $\mathbf{x}(t)$ tenda a zero com t tendendo a infinito. Os autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ são denominados pólos do sistema regulador.

Segundo Ogata, 2003, antes de tentar alocar os pólos em posições arbitrárias, é necessário estudar o sistema para verificar se ele é completamente controlável. Isto resulta do fato de que a condição necessária e suficiente para a alocação arbitrária dos pólos é que o sistema seja completamente controlável.

No Anexo 3 estão apresentadas as considerações que permitem avaliar o atendimento à condição necessária, onde é demonstrado que se o sistema não é completamente controlável, existirão autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ não controláveis que impedem a aplicação geral do método. A seguir, são apresentados os passos a serem seguidos para a obtenção da matriz \mathbf{K} necessária para alocar os pólos nos lugares desejados.

A metodologia aqui empregada para a determinação da matriz \mathbf{K} é baseada na utilização de uma matriz de transformação. Supondo novamente que o sistema está definido como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ e que o sinal de controle seja o seguinte $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx}$. A matriz de ganhos de realimentação de estados \mathbf{K} que faz com que os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ sejam $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ (pólos desejados), é determinada seguindo os seguintes passos:

Passo 1. Comprovar a condição de controlabilidade do sistema, (se for completamente controlável os demais passos devem ser seguidos).

Passo 2. A partir do polinômio característico da matriz \mathbf{A} , $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$ os valores dos coeficientes a_i devem ser determinados.

Passo 3. Determinar a matriz de transformação \mathbf{T} que converte a equação de estados do sistema para a sua forma canônica controlável (se não for necessário realizar esta transformação, $\mathbf{T} = \mathbf{I}$). A matriz de transformação \mathbf{T} é obtida por $\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W}$ onde as matrizes \mathbf{M} é a matriz de controlabilidade apresentada anteriormente e desenvolvida no Anexo 3, assim como a matriz

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

também é apresentada no Anexo 3.

Passo 4. Com o uso dos pólos a malha fechada desejados determina-se o polinômio característico desejado: $(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$

Passo 5. A matriz de ganhos de realimentação de estados \mathbf{K} é então determinada com o uso da seguinte equação:

$$\mathbf{K} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1} \quad (3.6)$$

onde a_1, a_2, \dots, a_n são os coeficientes da equação característica do sistema original (veja Anexo 3). Existem várias maneiras de escolher a posição desejada dos pólos em malha fechada. Nas situações em que é necessário, por exemplo, limitar os ganhos para evitar a saturação do sinal de controle (e dos atuadores, como consequência) pode-se aplicar técnicas de controle ótimo, que baseiam-se na otimização de um parâmetro (energético, no caso) para definir a posição dos pólos que definem a dinâmica em malha fechada. Uma das maneiras de aplicação do chamado *controle ótimo* é através das técnicas de regulagem ótima quadrática, que está apresentada a seguir.

3.5 Sistema Regulador Ótimo Quadrático

Nesta seção é apresentado o método de controle ótimo quadrático para um sistema regulador. Inicialmente apresentam-se os desenvolvimentos prévios para o entendimento do método.

Problema do mínimo esforço de controle

O problema é transferir o sistema desde um ponto inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ até um outro ponto especificado $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ em uma situação em que o esforço de controle é minimizado.

Dado o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ o problema de controle ótimo consiste então em calcular o sinal de controle $\mathbf{u}(t)$ que minimiza alguma função custo especificada, denominada por $J = J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$.

No presente caso, a função custo é expressa em termos de uma integral. O processo do projeto do controle ótimo consiste na escolha de uma função J expressa de maneira que reflita o desempenho desejado. O melhor sinal de controle \mathbf{u} (\mathbf{u} ótimo), denotado como \mathbf{u}^* , deve apresentar a propriedade $J(\mathbf{u}^*) < J(\mathbf{u})$ para quaisquer outras opções de \mathbf{u} . Resolver o problema de controle ótimo envolve estender o conceito de máximo ou mínimo do cálculo funcional J (veja Anexo 4). Além disso, projetar um sistema de controle ótimo envolve decidir sobre o índice de desempenho J .

Um problema de controle ótimo, o problema do regulador linear, tem aplicação particular na eliminação (supressão) de vibrações. Em particular, o objetivo do controle é o de garantir o retorno da resposta do vetor de estados $\mathbf{x}(t)$ a posições de equilíbrio do sistema (as quais geralmente são $\mathbf{x}(t_0) = 0$).

Para obter o mínimo esforço de controle para um processo descrito pelas equações (3.1) e (3.2) é necessário especificar uma função custo. Existem, porém, diversas funções custos que podem ser aplicadas para a solução do problema de controle ótimo [Kirk, 1970; DeRusso *et al.*, 1965; Friedland, 2005]. DeRusso *et al.*, 1965, por exemplo, apresenta a seguinte função custo como uma das mais aplicadas:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (3.7)$$

onde $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ e $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$.

No presente trabalho optou-se pelo uso do índice de desempenho da Eq. (3.8) (veja Anexo 4). Esta função custo consiste de uma representação da função da Eq. (3.7) na notação matricial para aplicação em problemas de regulação de sistemas lineares.

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (3.8)$$

Nesta equação \mathbf{Q} é uma matriz hermitiana positiva definida (ou positiva semidefinida) ou simétrica real, e \mathbf{R} é uma matriz hermitiana positiva definida ou simétrica real.

Denomina-se a matriz de realimentação de estados como \mathbf{K}_{lqr} . Tem-se:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_{lqr} \mathbf{x}(t) \quad (3.9)$$

Assim, o problema consiste em determinar a matriz \mathbf{K}_{lqr} segundo a teoria de controle ótimo, de acordo com a Eq. (3.9).

As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} determinam a importância relativa do erro e do custo da energia dos sinais de controle e são chamadas, respectivamente, de matriz de penalidade (associada aos estados do sistema) e matriz de ponderação (associada às entradas do sistema). Se os elementos do vetor \mathbf{K}_{lqr} da lei de controle linear da Eq. (3.9) são determinados de forma de minimizar a função custo da Eq. (3.8), então, $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_{lqr}\mathbf{x}(t)$ é ótima para qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

Substituindo a Eq. (3.9) na Eq. (3.1), obtém-se $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr})\mathbf{x}$. Nas deduções que seguem é considerado que a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr})$ é estável, ou seja, que os autovalores da matriz têm parte real negativa. Ao substituir a Eq. (3.9) na Eq. (3.8) tem-se

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}_{lqr}^T \mathbf{R} \mathbf{K}_{lqr} \mathbf{x}) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}_{lqr}^T \mathbf{R} \mathbf{K}_{lqr}) \mathbf{x} dt \quad (3.10)$$

O próximo passo consiste, portanto, em propor uma solução para a Eq. (3.10) que deverá resultar em uma matriz de realimentação \mathbf{K}_{lqr} que otimiza o esforço de controle no problema de regulação estudado. Segundo Ogata, 2003, isso é possível a partir da seguinte igualdade: $\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}_{lqr}^T \mathbf{R} \mathbf{K}_{lqr}) \mathbf{x} = -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x})$ onde \mathbf{P} é uma matriz hermitica (com autovalores reais) positiva definida. Assim, derivando-se a parcela da direita, obtém-se, conforme deduzido no Anexo 4,

$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}_{lqr}^T \mathbf{R} \mathbf{K}_{lqr}) \mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T [(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr})] \mathbf{x}$. Considerando que esta equação é válida para qualquer \mathbf{x} , tem-se

$$-(\mathbf{Q} + \mathbf{K}_{lqr}^T \mathbf{R} \mathbf{K}_{lqr}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr}) \quad (3.11)$$

se $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{lqr})$ é estável, irá existir uma matriz \mathbf{P} positiva definida que satisfaz a Eq. (3.11) (Anexo 4).

O procedimento apresentado em Ogata, 2003, baseia-se em determinar os elementos de \mathbf{P} a partir da Eq. (3.11). Se a equação obtida é positiva definida, o sistema é estável.

A função custo J pode ser integrada, resultando

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}_{lqr}^T \mathbf{R} \mathbf{K}_{lqr}) \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} = -\mathbf{x}^T(\infty) \mathbf{P} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$$

Como foi suposto que todos os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ têm parte real negativa, então $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow 0$, o que permite escrever:

$$J = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (3.12)$$

Assim, J fica determinado em termos da condição inicial $\mathbf{x}(0)$ e da matriz \mathbf{P} . Como foi suposto que \mathbf{R} é uma matriz hermítica positiva definida pode-se escrever $\mathbf{R} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ onde \mathbf{F} é uma matriz não singular. Assim, a Eq. (3.11) fica

$$(\mathbf{A}^T - \mathbf{K}_{lqr}^T \mathbf{B}^T) \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_{lqr}) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}_{lqr}^T \mathbf{F}^T \mathbf{T} \mathbf{K}_{lqr} = \mathbf{0}$$

a qual pode se reescrita como:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + [\mathbf{F} \mathbf{K}_{lqr} - (\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}]^T [\mathbf{F} \mathbf{K}_{lqr} - (\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

A minimização de J com respeito à \mathbf{K}_{lqr} requer a minimização de [Ogata, 2003].

$$\mathbf{x}^T [\mathbf{F} \mathbf{K}_{lqr} - (\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}]^T [\mathbf{F} \mathbf{K}_{lqr} - (\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \mathbf{x}$$

Esta última expressão é não negativa, então o mínimo acontece quando os estados são zero, o que resulta $\mathbf{F} \mathbf{K}_{lqr} = (\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$.

O vetor de ganhos pode ser então calculado através de:

$$\mathbf{K}_{lqr} = \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (3.13)$$

Assim, a lei de controle ótimo para o problema de controle ótimo quadrático pode ser expressa como

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_{lqr} \mathbf{x}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$$

Como apresentado por Friedland, 2005, a matriz \mathbf{P} na Eq. (3.13) deve satisfazer a Eq. (3.11) ou a seguinte equação:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

A Eq. (3.14) é chamada *equação matricial reduzida de Riccati*.

Através da Eq. (3.14), a metodologia para obter a matriz \mathbf{K}_{lqr} de ganhos de controle ótimo pode ser definida pelos seguintes passos:

1. Resolver a Eq. (3.14). Se existir uma matriz \mathbf{P} positiva definida o sistema é estável (ou seja, a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_{lqr})$ é estável).
2. Substituir a matriz \mathbf{P} na Eq. (3.13). A matriz \mathbf{K}_{lqr} resultante é a matriz ótima.

Assim, dado qualquer estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$, o problema de controle ótimo resulta em encontrar um vetor de controle $\mathbf{u}(t)$ que transfira o estado inicial ao desejado no espaço de estados e para o qual seja minimizado o índice de desempenho J . Para que exista esse vetor de

controle ótimo, o sistema deve ser completamente controlável. A matriz que minimiza o índice de desempenho escolhido é, por definição, ótima. Embora em muitas aplicações práticas o controlador não necessite de uma condição ótima, o projeto baseado no índice de desempenho quadrático é também aplicado pois garante sistema estável em malha fechada.

Uma característica da lei de controle ótimo baseada em índice de desempenho quadrático é tratar-se de uma função linear das variáveis de estado. Isto implica na necessidade de realimentar todas as variáveis de estado, o que requer que todas essas variáveis estejam disponíveis. Se isso não for possível, pode-se usar um observador de estados que deverá ser projetado para estimar as variáveis que não podem ser medidas diretamente e assim gerar o sinal de controle.

3.6 Observadores de Estados

No método de alocação de pólos apresentado para o projeto de sistemas de controle, foi suposto que todas as variáveis de estado estavam disponíveis para sua realimentação. Porém, na prática muitas vezes nem todas as variáveis de estado são acessíveis. Como está apresentado na Seção 2.2, no presente caso, existem transdutores potenciométricos que medem os movimentos relativos dos braços das suspensões, insuficientes, portanto, para a determinação direta de todos os estados. Assim, é necessário estimar as variáveis de estado que não estão disponíveis. A estimação de variáveis de estado denomina-se, normalmente, de *observação* e o sistema que estima ou observa as variáveis de estado é chamado *observador de estados*. Se o observador de estados consegue estimar todas as variáveis do sistema, sem importar se alguma delas pode ser medida diretamente, é chamado de *observador de estado de ordem total*. Em algumas situações, não é preciso estimar todas as variáveis, e sim apenas aquelas que não conseguem serem medidas diretamente. Um observador que estima um número menor que n variáveis de estado (onde n é a dimensão do vetor de estado) é chamado *observador de estado de ordem reduzida*. Se o observador de estados de ordem reduzida tem a ordem mínima possível ele é denominado de *observador de estado de ordem mínima*. Neste trabalho foi desenvolvido um observador de estados de ordem total.

Na seqüência apresentasse o desenvolvimento deste tipo de observadores visando o seu projeto.

Um observador de estados estima as variáveis de estado baseado na medição das variáveis de saída. Portanto, o conceito de observabilidade é muito importante neste contexto, pois um observador de estados pode ser projetado somente se a condição de observabilidade é satisfeita.

Seja o sistema representado pelas equações (3.1) e (3.2) com a matriz $\mathbf{D}=0$. O observador é um subsistema utilizado para reconstruir o vetor de estado da planta. O modelo matemático do observador é basicamente o mesmo que o modelo da planta, contendo, porém, um termo a mais. Este termo é o erro de estimativa para compensar as imprecisões nas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} e o erro de estimativa inicial. O erro de observação consiste da diferença entre a saída medida e a saída estimada. Portanto, o observador linear adotado neste trabalho é o apresentado por Ogata, 2003, que é definido por:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_{\text{obs}}(y - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) \quad (3.15)$$

onde $\tilde{\mathbf{x}}$ é o estado estimado e $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}$ é a saída estimada. As entradas do observador são a saída y e a entrada de controle u . A matriz \mathbf{K}_{obs} (às vezes também chamada de \mathbf{K}_e), a qual é chamada matriz de ganhos do observador, é uma matriz de ponderação do termo de correção que envolve a diferença entre a saída medida y e a saída estimada $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}$. Este termo corrige de maneira contínua a saída do modelo e determina o comportamento do observador. Na Fig. 3.1 está apresentado um diagrama de blocos que representa o observador de estados de ordem total.

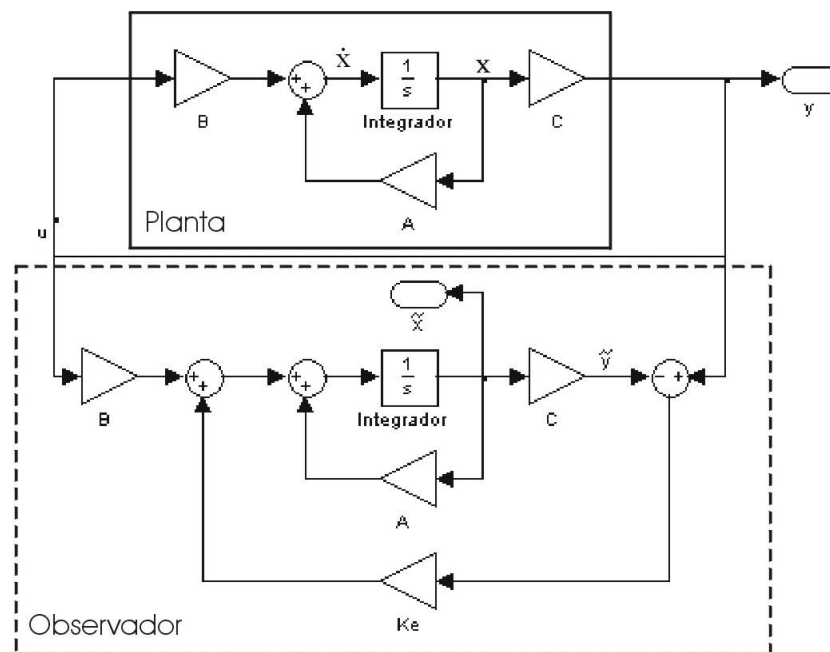


Figura 3.1: Observador de estados linear de ordem total

3.6.1 Observador de Estados de Ordem Total.

A ordem do observador de estados de ordem total adotado neste trabalho é a mesma que a do sistema que é observado. Supondo que o sistema é definido pelas equações (3.1) e (3.2) e que o modelo do observador fica definido pela Eq. (3.14), para obter a equação de erro do observador pode-se substituir a Eq. (3.15) nas Eqs. (3.1) e (3.2), o que resulta:

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_{\text{obs}}(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \quad (3.16)$$

Define-se a diferença entre \mathbf{x} e $\tilde{\mathbf{x}}$ como o vetor erro $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$. Assim, Eq. (3.16) fica

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C})\mathbf{e} \quad (3.17)$$

A partir da Eq. (3.17) é fácil verificar que o comportamento dinâmico do vetor de erros fica determinado pelos autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C})$. Se a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C})$ é estável, o vetor de erros converge para zero a partir de qualquer vetor de erros inicial $\mathbf{e}(0)$. Ou seja, $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ converge para $\mathbf{x}(t)$ independentemente dos valores de $\mathbf{x}(0)$ e $\tilde{\mathbf{x}}(0)$.

Se o sistema é completamente observável, é possível escolher uma matriz \mathbf{K}_{obs} tal que $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C})$ tenha autovalores arbitrários, ou seja, pode-se determinar a matriz de ganhos do observador \mathbf{K}_{obs} para obter a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C})$ desejada.

O projeto de um observador de ordem total consiste na determinação da matriz de ganhos do observador \mathbf{K}_{obs} , de maneira tal que a dinâmica do erro definida pela Eq. (3.17) seja assintoticamente estável com uma velocidade de resposta suficiente para executar o controle do sistema através da realimentação dos estados.

Portanto, o projeto do observador de ordem total consiste na determinação de um vetor \mathbf{K}_{obs} apropriado de forma que $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C})$ tenha autovalores desejados. Assim, o problema é o mesmo que o do caso de alocação de pólos estudado anteriormente. De fato, os dois problemas são matematicamente o mesmo.

Considera-se novamente o sistema definido pelas equações (3.1) e (3.2), com a matriz $\mathbf{D}=0$, ao projetar o observador de estados de ordem total. Como resultado obtém-se a solução do problema de alocação de pólos para o seguinte sistema $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^T\mathbf{z} + \mathbf{C}^T\mathbf{v}$ e $n = \mathbf{B}^T\mathbf{z}$ supondo que o sinal de controle \mathbf{v} é $\mathbf{v} = -\mathbf{K}\mathbf{z}$ e n é a saída do sistema.

Se o sistema é completamente controlável, a matriz de ganhos de realimentação de estado \mathbf{K} pode ser determinada de forma que a matriz $(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{K})$ produza o conjunto de autovalores desejados. Se $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ são os autovalores desejados da matriz do observador de estados eles são tomados como os autovalores desejados da matriz de ganhos de realimentação de estados, ou seja, $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{K})| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n)$.

Considerando que os valores característicos de $(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{K})$ e os de $(\mathbf{A} - \mathbf{K}^T\mathbf{C})$ são iguais, tem-se que $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{K})| = |s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}^T\mathbf{C})|$. Se forem comparados os polinômios

característicos de $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}^T\mathbf{C})|$ e de $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C})|$, verifica-se que \mathbf{K}_{obs} e \mathbf{K}^T estão relacionados por $\mathbf{K}_{\text{obs}} = \mathbf{K}^T$. Portanto, se é usada a matriz \mathbf{K} determinada pelo método de alocação de pólos no sistema, a matriz de ganhos do observador \mathbf{K}_{obs} para o sistema original fica determinada pela relação $\mathbf{K}_{\text{obs}} = \mathbf{K}^T$ (Princípio de dualidade, ver Anexo A.3.5).

3.6.2 Condição Necessária e Suficiente para a Observação de Estados.

Como já foi visto, uma condição necessária e suficiente para a determinação da matriz de ganhos do observador \mathbf{K}_{obs} para os autovalores desejados de $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C})$ é que $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^T\mathbf{z} + \mathbf{C}^T\mathbf{v}$ seja completamente controlável. A condição de controlabilidade completa para este sistema é que o posto de $[\mathbf{C}^T \ \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \ \dots \ (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T]$ seja pleno. Esta também é a condição para a observabilidade completa do sistema original $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ e $y = \mathbf{C}\mathbf{x}$. Isto significa que uma condição necessária e suficiente para a observação de estados do sistema original é que este sistema seja completamente observável, ou seja, deve ser verificada a sua condição de observabilidade. Assim, se esta condição for satisfeita, uma vez que tenham sido escolhidos os autovalores desejados, pode-se projetar o observador de estados de ordem total. Para um desempenho adequado, os autovalores desejados da equação característica devem ser escolhidos de maneira que o observador de estados responda sem interferir significativamente na dinâmica imposta pelos pólos do sistema ativo (conforme a literatura, devem ser de duas a cinco vezes mais rápido [Ogata, 2003] ou de duas a oito vezes mais rápido [Friedland, 2005] que o sistema em malha fechada estudado), ou seja, que os pólos dominantes continuem a ser os pólos do sistema ativo.

Um detalhe importante a ser salientado é que até agora foi suposto que as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} do observador são exatamente iguais às da planta física. Se houver discrepâncias nas matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} da planta e do observador, a dinâmica do erro do observador não fica expressa exatamente pela Eq. (3.17), ou seja, o erro pode não tender a zero tal como foi demonstrado. Portanto, é necessário escolher \mathbf{K}_{obs} de maneira que o observador seja estável e que o erro permaneça suficientemente pequeno quando existem erros limitados de modelagem.

3.6.3 Método de Transformação para Obter a Matriz de Ganhos \mathbf{K}_e do Observador de Estados.

Pela semelhança de abordagem do problema, para a obtenção de \mathbf{K}_{obs} pode-se utilizar o mesmo método aplicado para a obtenção da matriz de realimentação de estados \mathbf{K} . Assim, tem-se:

$$\mathbf{K}_{\text{obs}} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

onde \mathbf{K}_{obs} é uma matriz $n \times 1$, $\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^T)^{-1}$, $\mathbf{N} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T]$ e a Eq. (3.18) é obtida a partir da matriz de transformação \mathbf{T} , conforme o desenvolvimento apresentado no Anexo 3.

3.6.4 Discussões sobre a escolha da matriz \mathbf{K}_{obs} .

Na Fig. 3.1 pode-se observar que o sinal de realimentação através da matriz de ganhos do observador funciona como um sinal de correção para o modelo da planta dos seus erros paramétricos com relação no sistema físico real. A existência de parâmetros desconhecidos significativos implica em um sinal de realimentação (da matriz \mathbf{K}_{obs}) relativamente grande. Assim, se o sinal de saída medido é seriamente contaminado por perturbações e ruídos, a saída y distorce significativamente e o sinal de realimentação através da matriz \mathbf{K}_{obs} fica relativamente pequeno. Então, ao determinar a matriz \mathbf{K}_{obs} devem-se examinar cuidadosamente os efeitos das perturbações e ruídos da saída y .

A matriz de ganhos do observador \mathbf{K}_{obs} depende da equação característica desejada. A escolha de um conjunto de pólos $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ em muitos casos não é única. Viu-se já que os pólos do observador podem ser escolhidos de duas a oito vezes mais rápidos que os pólos do controlador para assegurar que o erro de observação (erro de estimação) convirja a zero rapidamente. Isto quer dizer que o erro de estimativa do observador diminui de duas a oito vezes mais rápido que o vetor de estados \mathbf{x} e que os pólos dominantes continuam sendo os do sistema ativo.

É importante salientar que se o ruído do sensor for considerável, podem-se escolher os pólos do observador de uma até duas vezes mais rápidos que os pólos do controlador, de maneira que a menor largura da banda do sistema aja como um filtro passa-baixa, atenuando o ruído. Neste caso, a resposta do sistema ficará significativamente influenciada pelos pólos do observador. Evidentemente, não é aconselhável que os pólos do observador fiquem à direita dos pólos do controlador, para que estes não dominem a dinâmica do sistema.

É recomendado por os diferentes autores ([Preumont, 2002; Friedland, 2005] dentre outros) que, no projeto de um observador de estados, sejam determinadas várias matrizes de ganhos do observador \mathbf{K}_{obs} baseadas em diferentes equações características desejadas. Para cada

uma das diferentes matrizes \mathbf{K}_{obs} devem ser realizados testes e simulações procurando avaliar o comportamento do sistema resultante (isto foi também já sugerido para a escolha da melhor matriz \mathbf{K} de controle por realimentação de estados). Na maioria dos casos, a escolha da melhor matriz \mathbf{K}_{obs} envolve um compromisso entre a velocidade da resposta e a sensibilidade frente a perturbações e ruídos.

3.7 O Controle por Realimentação de Estados com Observador de Estados

Até aqui foram desenvolvidos os métodos de obtenção de matrizes de ganhos \mathbf{K} para o controle do sistema e o método para a obtenção da matriz de ganhos \mathbf{K}_{obs} para o observador de estados. Ambos os métodos foram desenvolvidos separadamente, embora os pólos do observador tenham sido escolhidos a partir da localização dos pólos do controle. No projeto do controle por alocação de pólos foi suposto que o vetor $\mathbf{x}(t)$ encontrava-se disponível para a sua realimentação, porém, na prática isto não ocorre já que $\mathbf{x}(t)$ não está integralmente disponível. Portanto, nesta situação é necessário projetar um observador e usar o vetor de estados observado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ para a realimentação do sistema de controle (ver Fig. 3.2).

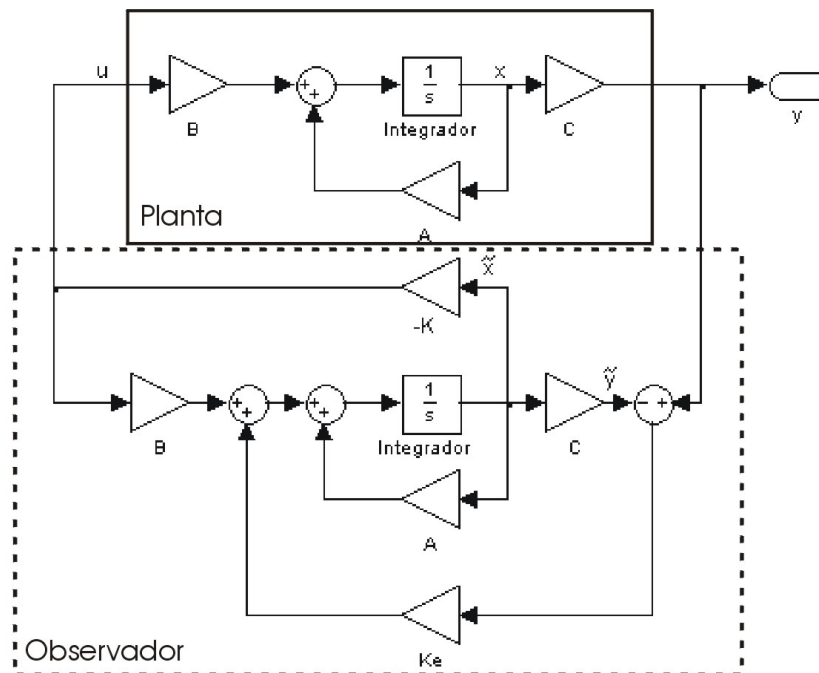


Figura 3.2: Regulador com controlador por realimentação de estados com observador completo

O projeto é assim um processo de duas etapas: a primeira consiste na determinação da matriz de ganhos de realimentação \mathbf{K} que corresponde à equação característica desejada; a segunda é a determinação da matriz de ganhos do observador \mathbf{K}_{obs} para obter a equação característica do observador desejada.

Vários autores ([Friedland, 2005; Preumont 2002], por exemplo) chamam este processo como *princípio de separação*, já que ambos os projetos podem ser estudados em separado embora envolvam o mesmo sistema. Segundo Friedland, 2005, o *princípio de separação* foi primeiramente desenvolvido para sistemas discretos sendo logo generalizado para sistemas contínuos. Luenberger, 1966, demonstra que, no caso de um sistema com um controlador e um observador assintoticamente estáveis, o sistema completo também é assintoticamente estável. Em Luenberger, 1971, além de se demonstrar que a estabilidade do sistema completo está assegurada pela estabilidade tanto do controlador como do observador, é demonstrado que os pólos de ambos podem ser escolhidos arbitrariamente.

No presente caso, utiliza-se o *princípio de separação* para o projeto tanto do controlador por realimentação de estados quanto do observador.

A seguir, serão examinados os efeitos do uso do vetor de estados observado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ (ao invés do estado real $\mathbf{x}(t)$) na equação característica do sistema em malha fechada.

Considere-se o sistema completamente controlável e observável, definido mediante as seguintes equações: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ e $y = \mathbf{C}\mathbf{x}$.

Para o controle por realimentação de estados baseado no vetor de estados observado de ordem total $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, a lei de controle fica $u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$. Nesta situação a equação de estado fica

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \quad (3.19)$$

A diferença entre o estado real $\mathbf{x}(t)$ e o estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ foi definida como o erro $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$. A substituição do vetor de erros $\mathbf{e}(t)$ na Eq. (3.19) resulta

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e} \quad (3.20)$$

Como já foi apresentado anteriormente (Eq. (3.17)), a equação do erro do observador pode ser expressa por $\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C})\mathbf{e}$. Combinando as equações (3.20) e (3.17), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

A Eq. (3.21) descreve a dinâmica do sistema de controle mediante realimentação dos estados observados. A equação característica para o sistema é $\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C} \end{vmatrix} = 0$

ou

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C}| = 0 \quad (3.22)$$

Esta equação indica claramente que os pólos do sistema em malha fechada mediante realimentação dos estados observados são os pólos do projeto por alocação de pólos composto com os pólos do projeto do observador. Isto mostra que o projeto por alocação de pólos e o projeto do observador são independentes entre eles. Tanto o controlador quanto o observador são projetados separadamente e combinados posteriormente para formar o sistema de controle por realimentação de estados com observador. Observe-se que, se a ordem da planta é n , então a ordem do observador também é n (supondo observador de ordem total), e a equação característica resultante para o sistema completo em malha fechada é de ordem $2n$.

No projeto de um sistema de controle deve ser especificado previamente os requisitos que o sistema deve atender por efeito das ações de controle. Os critérios utilizados para a definição dos requisitos podem depender de diversos fatores de desempenho relativos às aplicações específicas. Estes requisitos normalmente envolvem características associadas ao comportamento dinâmico desejado. Fatores tais como precisão e rapidez da resposta e do tempo de assentamento geralmente são utilizados na especificação de projeto.

O projeto de um controlador por realimentação de estados baseia-se na realocação dos pólos em malha fechada para posições do plano complexo associadas a comportamentos dinâmico adequados às características de projeto. Assim, para a correta seleção das posições dos pólos diante de requisitos de projeto baseados no desempenho do sistema no domínio tempo, é necessário conhecer profundamente a relação entre as respostas no tempo com a posição dos pólos. No Anexo 5, está apresentada uma revisão destes conceitos, visando melhor contextualizá-los no presente trabalho. Também, os principais aspectos relacionados à resposta no domínio tempo serão abordados.

4. PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE DA SUSPENSÃO

4.1 Método de Alocação de Pólos

4.1.1 Introdução

No presente capítulo são apresentados os procedimentos de síntese do controlador por realimentação de estados da teoria apresentada no Capítulo 3 para projetar o sistema de controle da suspensão ativa do elevador. A implementação foi realizada no plano YZ. Ressalta-se que, devido à natureza do problema, a metodologia pode ser adaptada sem dificuldade para aplicação nos dois graus de liberdade do plano XY.

Primeiramente serão estabelecidas as características desejadas para o sistema, ou seja, o comportamento necessário do sistema para que, mesmo na presença de perturbações, ele possa manter a segurança e conforto dos passageiros. Após a definição destas características, o método de alocação de pólos é desenvolvido visando colocar os pólos nas posições adequadas para que o sistema responda como desejado. Neste último passo, métodos de controle ótimo são usados e um observador de ordem total é também projetado.

4.1.2 Considerações para a Aplicação do Método

Será seguido o método de alocação de pólos passo a passo apresentado na Seção 3.4.

Considera o sistema de controle representado pelas equações seguintes:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{Kx} \quad (4.25)$$

De acordo com a Eq. (4.25) o sinal de controle é determinado pelo valor instantâneo do vetor de estados. Como já foi afirmado, tal esquema é chamado de retroação de estados. Na análise que segue, admite-se inicialmente a inexistência de restrições sobre o valor de \mathbf{u} .

Os passos adotados para a aplicação deste método são os seguintes:

- i. Especificação do sistema a ser usado (modelagem)
- ii. Determinação do polinômio característico do sistema
- iii. Determinação dos pólos do sistema passivo
- iv. Simulação do sistema não controlado
- v. Definição do desempenho desejado para o sistema controlado
- vi. Obtenção dos parâmetros ζ e ω_n associados aos parâmetros transitórios
- vii. Cálculo dos pólos dominantes do sistema desejado

- viii. Obtenção das matrizes **M**, **W** e **T**
- ix. Determinação dos ganhos do vetor de realimentação de estados
- x. Obtenção dos ganhos ótimos (**K_{lqr}**) e dos pólos correspondentes
- xi. Cálculo dos ganhos para o sistema controlado

Seguem os passos (com os seus respectivos desenvolvimentos de execução):

i- Especificação do sistema a ser usado

Partindo das equações de movimento do sistema de suspensão no plano YZ obtidas e apresentadas na Seção 2.4.2 (equações (2.12), (2.13) e (2.14)) e usando o vetor $\mathbf{x} = [\Delta y_l \quad \Delta \dot{y}_l \quad Y \quad \dot{Y} \quad \Delta y_r \quad \Delta \dot{y}_r]^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^T$ de variáveis de estado, o sistema no espaço de estados fica expresso pela Eq. (2.15).

Os valores dos parâmetros do modelo do elevador foram obtidos experimentalmente a partir de um protótipo do sistema de suspensão instalado em um elevador operado em uma torre de testes da empresa ThyssenKrupp, localizada na cidade de Guaíba-RS. Na Tab. 4.1 estão apresentados estes dados. O levantamento experimental foi realizado pelo pessoal da ThyssenKrupp Elevadores (relatório “ACTIVE ROLLER GUIDE: Practical Transfer Function Test, 2005) e as metodologias utilizadas encontram-se detalhadas em documentos internos da empresa.

Deve ser observado que, na aplicação final (em um elevador com cabine duplo andar – *double-deck*) em um curso de 250[m] de um prédio de 492[m] de altura, os dados da suspensão serão os mesmos, porém os parâmetros do elevador serão, evidentemente, outros.

Tabela 4.1: Parâmetros do sistema

ROc [kg/m]	14,44	$K_{ar}=K_{eq}*(\rho_2/\rho_1)^2$ [N/m]	$1,9027 \times 10^4$
Andar	9	L [m]	3
$M_c=(andar*3+4.35)*ROc$ [kg]	4,335	$J_e= M_{eq}/3*L^2$ [kg*m ²]	3360
$L_c=31.23-(andar*3)$ [m]	4,23	M_{eq} [kg]	1120
m_1 [kg]	2,59	L_o [m]	20
m_2 [kg]	0,626	$K_{go}=M_{eq}*g/(L_c+L)$ [N/m]	$1,5197 \times 10^3$
ρ_1 [m]	0,085	$K_{g1}=(M_{eq}+M_c)*g/L$ [N/m]	$5,1427 \times 10^3$
ρ_2 [m]	0,16	$K_g=K_{go}+K_{g1}$ [N/m]	$6,6624 \times 10^3$
ρ_3 [m]	0,362	zeta	0,15
J_{ar} [kg*m ²]	0,026	$I= M_{eq}*L_c^2$ [kg*m ²]	$2,004005 \times 10^4$
$J_t=m_2*\rho_3^2+m_1*\rho_1^2+J_{ar}$ [kg*m ²]	0,127	$K_{eq1}=(K_{ar}*K_s)/(K_{ar}+K_s)$ [N/m]	$1,7682 \times 10^4$
$m_{areq}=J_t/\rho_1^2$ [kg]	17,54	$W_n=\sqrt{((2*K_{eq1}+K_g)/M_{eq})}$ [rad/s]	6,1256
K_{eq} [N/m]	5370	$C=2*zeta*W_n*M_{eq}$ [kg/s]	$2,0582 \times 10^3$
K_s [N/m]	250000	$B=2*zeta*\sqrt{K_s*m_{areq}}$ [kg/s]	628,26

ii- Determinação do polinômio característico do sistema passivo

Colocando os parâmetros da Tab. 4.1 no sistema matricial apresentado na Seção 2.4.2, a equação característica ($\det(sI-A)$) resulta:

$$s^6 + 73,46398s^5 + 32125,1999s^4 + 1160007,7012s^3 + 238436053,2879s^2 + 474717373,73685s + 8824542640,72369 = 0$$

Os coeficientes da equação característica do sistema passivo serão utilizados na obtenção da matriz **W** e do vetor de ganhos **K**.

iii- Determinação dos pólos do sistema

As raízes do polinômio característico são:

Tabela 4.2: Raízes do polinômio característico

p ₁	-17,903865664437 + 122,544823798755i
p ₂	-17,903865664437 - 122,544823798755i
p ₃	-17,906576164178 + 122,535250981560i
p ₄	-17,906576164178 - 122,535250981560i
p ₅	-0,921547512670 + 4,974561911543i
p ₆	-0,921547512670 - 4,974561911543i

As raízes da equação característica ($\det(sI-A)$) são os pólos do sistema passivo (sem os efeitos do sistema realimentado). Como pode ser visualizado na Tab. 4.2, todos estes pólos têm sua parte real negativa. Assim, de acordo com o que foi apresentado no Capítulo 3 (Seção 3.2), pode-se afirmar que o sistema passivo é estável, isto é, que o sistema em malha aberta é estável. O objetivo passa a ser a obtenção de um sistema em malha fechada que seja estável e responda segundo o desejado para um desempenho adequado de conforto e segurança. Observa-se, da Tab. 4.2 também, que os pólos p₁, p₂, p₃ e p₄ encontram-se relacionados às massas dos braços. São diferentes somente por diferenças numéricas no cálculo deles. Os pólos p₅ e p₆ estão relacionados à massa da cabine.

Os seis pólos são complexos conjugados. Na Fig. 4.1 são apresentadas as localizações dos pólos em malha aberta no plano complexo. Note-se que existem dois pares em localizações muito próximas. Estes pares estão relacionados principalmente à dinâmica dos braços das suspensões, que são mais rápidas e amortecidas que a da cabine, que está representada pelo par mais próximo à origem. Através da análise da posição dos pólos, verifica-se que um problema, pode estar relacionado ao baixo amortecimento de todos os pólos do sistema, fundamentalmente

da cabine. Na próxima seção serão apresentadas simulações do comportamento deste sistema (passivo) e mais características deste sistema serão discutidas.

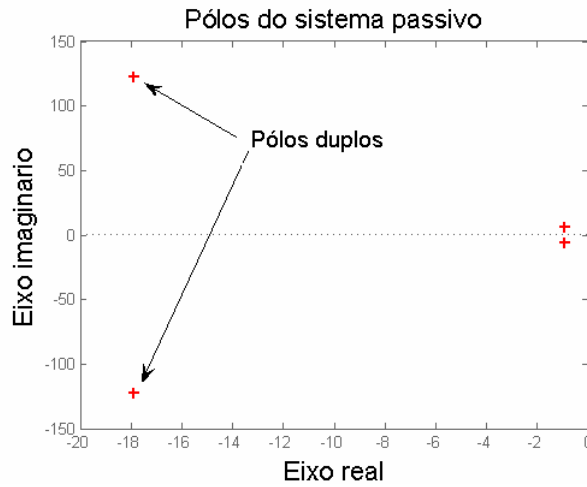


Figura 4.1: Pólos do sistema passivo

iv- Simulação do sistema não controlado

Nesta seção serão apresentadas simulações realizadas com o sistema passivo para, através das suas respostas, verificar suas deficiências e definir a maneira de escolher as características que deve ter o sistema ativo.

Devido ao fato de que o sistema de controle que está sendo projetado será aplicado para resolver um problema de regulação, as simulações apresentadas referem-se à solução de problemas com condições iniciais (em posição) do elevador. As condições iniciais adotadas para efeito de testes são: $\Delta y_l = -0,0046463692[m]$, $\Delta \dot{y}_l = 0[m/s^2]$, $Y = 0,005[m]$, $\dot{Y} = 0[m/s^2]$, $\Delta y_r = 0,0046463692[m]$ e $\Delta \dot{y}_r = 0[m/s^2]$, o que corresponde a uma perturbação em deslocamento de $0,005[m]$ da cabine e os correspondentes deslocamentos dos braços da suspensão. Foi criado um “script” para ser processado no software Matlab 7.0 para a realização das simulações. O gráfico da resposta no tempo da posição da cabine obtido para estas condições iniciais é o seguinte:

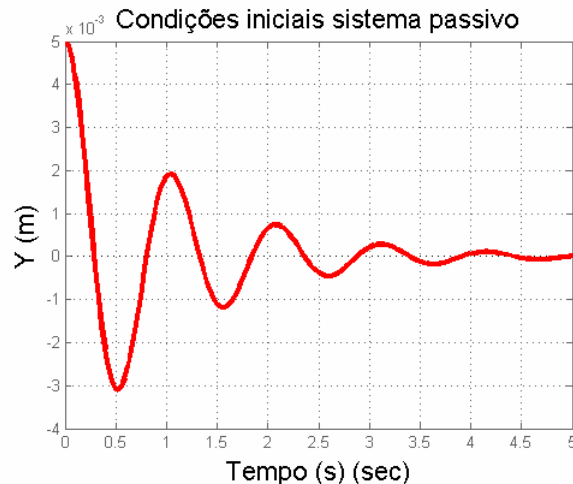


Figura 4.2: Resposta da posição da cabine para condições iniciais (sistema passivo)

Na Fig. 4.2 observa-se que o sistema passivo tem uma resposta considerada adequada.

v- Definição do desempenho desejado para o sistema controlado

O objetivo do controle realimentado é o de melhorar o comportamento dinâmico do sistema. Nota-se pela Fig. 4.2 que o sistema passivo é muito oscilatório, levando cerca de 4s para o assentamento. A frequência natural da dinâmica dominante é de $6,13[\text{rad/s}]$ e seu índice de amortecimento $0,15$.

É importante destacar que, na presente abordagem, o problema é tratado como o desenvolvimento e aplicação de uma metodologia que possa ser usada no controle do sistema real e que, somente com interações (não realizadas por falta de disponibilidade da bancada de testes) entre as simulações e os testes experimentais seria viabilizada uma boa definição do desempenho mais adequado. Assim, na medida em que o método de controle por realimentação de estados permite (ao menos teoricamente) impor ao sistema qualquer comportamento desejado, os critérios de desempenho aqui adotados são arbitrários, haja vista as dificuldades de relacionar o modelo teórico dentro do contexto e objetivos do trabalho atual, com as perturbações que ocorrem no sistema real e suas respectivas respostas. Isto ocorre diante da impossibilidade de implementação, por questões técnicas e operacionais, do sistema proposto no controle do sistema real, cujo objetivo é o de reduzir a amplitude do espectro medido de vibrações (em aceleração) na cabine em 50% na faixa $10\text{mg}(0,0981[\text{m/s}^2])$ a $-10\text{mg}(-0,0981[\text{m/s}^2])$ do A95. Outro ponto importante está associado às dinâmicas não modeladas (de peças móveis e estruturais) do sistema, pois, como o objetivo do controle proposto é o de atenuar o movimento de corpo rígido, e as respostas destes sistemas que influem no comportamento real não estão contempladas no modelo, enfatiza-se a necessidade de interação com o sistema real.

Assim, a título de teste da metodologia proposta, foram escolhidos os seguintes parâmetros (ver Anexo 5, para mais detalhes): $\begin{cases} M_p \leq 5\% \\ t_s(\text{critério}1\%) \cong 1,5[s] \end{cases}$

Ou seja, uma sobre-resposta de 5% do sistema passivo e um tempo de assentamento de 1,5[s] sob o critério do 1% (significa que a resposta deve demorar 1,5[s] para ficar definitivamente na faixa de 1% da amplitude da excitação).

vi- Obtenção dos parâmetros ζ e ω_n associados aos parâmetros transitórios

Baseado em Franklin *et al.*, 1994, que relaciona os parâmetros no domínio do tempo com ζ e ω_n (ver Anexo 5), obtém-se:

$$\begin{cases} M_p \leq 5\% \frac{1}{100} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \\ t_s(\text{critério}1\%) \cong 1,5[s] = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \zeta = 0,7 \\ \omega_n = 4,38 \\ p = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \end{cases} \Rightarrow p = s^2 + 6,132s + 19,18$$

Este é, então, o polinômio de segunda ordem dos pólos dominantes. Como o polinômio característico do sistema controlado deve ser de sexta ordem, ele deve possuir 6 pólos que contenham os 2 pólos do polinômio de segunda ordem calculado.

vii- Cálculo dos pólos dominantes do sistema desejado

As raízes do polinômio $p = s^2 + 6,132s + 19,18$ são os pólos dominantes ($p_1 = -3,07 + \sqrt{9,78}i$, $p_2 = -3,07 - \sqrt{9,78}i$). Assim, o polinômio característico desejado fica: $p_d = (s^2 + 6,132s + 19,18)(s - p_3)(s - p_4)(s - p_5)(s - p_6)$, sendo os p_i e p_j os pólos não dominantes do sistema controlado com $i = 3$ e 4 e $j = 5$ e 6 . A alocação destes pólos não dominantes é condição necessária do método.

viii- Obtenção das matrizes **M**, **W** e **T**

Para a obtenção das matrizes **M**, **W** e **T** é preciso levar em conta a teoria apresentada no Capítulo 3, Seção 3.4. De acordo com as equações (4.23) e (2.15), as matrizes **A** e **B** resultam:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(K_s + K_{ar})}{m_{areq}} - \frac{K_{ar}}{M_{eq}} & \frac{B}{m_{areq}} & \left(\frac{K_g}{M_{eq}} - \frac{K_s}{m_{areq}} \right) & \left(\frac{C}{M_{eq}} - \frac{B}{m_{areq}} \right) & -\frac{K_{ar}}{M_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_{ar}}{M_{eq}} & 0 & -\frac{K_g}{M_{eq}} & -\frac{C}{M_{eq}} & \frac{K_{ar}}{M_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_{ar}}{M_{eq}} & 0 & \left(\frac{K_g}{M_{eq}} - \frac{K_s}{m_{areq}} \right) & \left(\frac{C}{M_{eq}} - \frac{B}{m_{areq}} \right) & -\left(\frac{K_{ar}}{M_{eq}} + \frac{K_{ar} + K_s}{m_{areq}} \right) & -\frac{B}{m_{areq}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{m_{areq}} - \frac{1}{M_{eq}} \right) & -\frac{1}{M_{eq}} & \frac{K_s}{m_{areq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{M_{eq}} & \frac{1}{M_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{M_{eq}} & \left(\frac{1}{m_{areq}} - \frac{1}{M_{eq}} \right) & 0 & \frac{K_s}{m_{areq}} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

O método de alocação de pólos exige que a matriz \mathbf{B} seja $n \times 1$. Na modelagem do sistema (Seção 5.4) verifica-se que o vetor sinal $\mathbf{u} = [f_l \quad f_r \quad Y_{lR} \quad Y_{rR}]^T$, onde f_l e f_r são, respectivamente, as forças dos atuadores esquerdo e direito, Y_{lR} e Y_{rR} são, respectivamente, os deslocamentos das guias esquerda e direita. Como, para aplicar o método de alocação de pólos, \mathbf{u} deve ser escalar (pois \mathbf{K} é um vetor 1×6 , \mathbf{x} é um vetor 6×1 e \mathbf{u} está definido na Eq. (4.25)), optou-se por trabalhar com um sinal de entrada \mathbf{u} como sendo uma das forças manipuladas, ou

seja, $\mathbf{u} = f_l$. Desta maneira tem-se $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_{areq}} - \frac{1}{M_{eq}} & 0 & \frac{1}{M_{eq}} & 0 & -\frac{1}{M_{eq}} \end{bmatrix}^T$. Neste

trabalho, as perturbações são consideradas como agindo diretamente na cabine do elevador, ou seja, sempre são percebidas como forças atuando na cabine. Assim são levadas em conta as perturbações por irregularidades nas guias ou movimentos na carga dentro da cabine. Além disso, o uso de uma única força como sinal de controle implica que cada sistema de suspensão percebe o outro como uma perturbação.

O seguinte passo consiste na determinação da matriz de controlabilidade \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^4 \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^5 \cdot \mathbf{B}] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0,05611 & -2,03984 & -801,03673 & 59995,87821 & 10137196,22089 \\ 0,05611 & -2,03984 & -801,03673 & 59995,87821 & 10137196,22089 & -1283155116,66688 \\ 0 & 0,00089 & -0,00164 & 0,93578 & -36,33610 & -13546,75551 \\ 0,00089 & -0,00164 & 0,93578 & -36,33610 & -13546,75551 & 1044356,35748 \\ 0 & -0,00089 & 0,00164 & 0,03263 & -0,12548 & 1016,38792 \\ -0,00089 & 0,00164 & 0,03263 & -0,12548 & 1016,38792 & -75857,62648 \end{bmatrix}$$

cujo posto é 6. Portanto, o sistema é verificado como controlável.

A matriz \mathbf{W} , definida conforme a Eq. (3.5) fica:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 474717373,736851 & 238436053,287957 & 1160007,701200 & 32125,199898 & 73,463979 & 1 \\ 238436053,287957 & 1160007,701200 & 32125,199898 & 73,463979 & 1 & 0 \\ 1160007,701200 & 32125,199898 & 73,463979 & 1 & 0 & 0 \\ 32125,199898 & 73,463979 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 73,463979 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, a matriz de transformação $\mathbf{T} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}$ fica expressa por :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -176128,843119 & 707,228930 & 851,678648 & 2,082282 & 0,056111 & 0 \\ 0 & -176128,843119 & 707,228930 & 851,678648 & 2,082282 & 0,056111 \\ 224832,015383 & 1015,420855 & 29,498457 & 0,063952 & 0,000893 & 0 \\ -0,000000001 & 224832,015383 & 1015,420855 & 29,498457 & 0,063952 & 0,000893 \\ -208930,509499 & -980,738905 & -28,530043 & -0,063952 & -0,000893 & 0 \\ 0,000000000000003 & -208930,509499 & -980,738905 & -28,530043 & -0,063952 & -0,000892 \end{bmatrix}$$

ix- Determinação dos ganhos do vetor de realimentação de estados

Segundo a teoria do método de alocação de pólos desenvolvida na Seção 3.4, o próximo passo é o de obter os ganhos necessários para controlar o sistema em malha fechada. Assim, são calculados a partir da Eq. (3.6) onde os α são os coeficientes do polinômio característico desejado (controlado) e os a são os coeficientes do polinômio característico do sistema original (passivo).

Lembrando que, segundo as especificações de desempenho adotadas, os pólos dominantes são $p_1 = -3,07 + \sqrt{9,78}i$ e $p_2 = -3,07 - \sqrt{9,78}i$, falta ainda serem escolhidos os pólos não dominantes do sistema, de tal forma que a dinâmica desejada não seja significativamente afetada. Portanto, seguindo as recomendações de Ogata, 2003, os pólos não dominantes foram escolhidos para serem 10 vezes mais rápidos que os pólos dominantes. Assim, $p_i = -43,8$ com $i = 3,4,5,6$. O polinômio característico é:

$$s^6 + 181,34s^5 + 12605,5729s^4 + 410150,71608s^3 + 5965192,348s^2 + 29052702,0383s + 70681945,06.$$

Portanto, o conjunto de pólos desejados fica expresso na Tab. 4.3:

Tabela 4.3: Pólos de controle

p ₁	-0,03070 + 0,0313i x 10 ⁻²
p ₂	-43,8
p ₃	-43,8
p ₄	-43,8
p ₅	-43,8
p ₆	-43,8

Os ganhos de controle (ou vetor de realimentação de estados) são calculados de acordo com a Eq. (3.6) e estão expressos na Tab. 4.4.

Tabela 4.4: Ganhos do controle

K ₁	-0,00253917408782 x 10 ⁹
K ₂	0,00002667413059 x 10 ⁹
K ₃	-2,48456944292836 x 10 ⁹
K ₄	0,01470876967738 x 10 ⁹
K ₅	-2,67148527466957 x 10 ⁹
K ₆	0,01626425961806 x 10 ⁹

Pode-se observar na Tab. 4.4 que os ganhos de realimentação de estados calculados segundo este procedimento apresentam valores grandes, o que pode ocasionar um esforço de controle exagerado. Além disso, se ocorrer saturação do sinal de controle, a dinâmica desejada para o sistema controlado não pode ser obtida. Esta situação é mostrada na Fig. 4.6-(a) onde verifica-se que, com estes ganhos calculados, a força no atuador supera as possibilidades reais do equipamento.

Foram feitas diversas tentativas empíricas para obter ganhos de controle menores, de maneira que o sistema fosse solicitado dentro da faixa operacional dos atuadores, porém sem resultados efetivos. Durante estes testes verificou-se que os ganhos se comportavam com uma sensibilidade muito grande com relação à posição dos pólos não dominantes. Assim, investigou-se mais profundamente o problema de alocação de pólos.

Segundo Leonard, 1992, o posicionamento dos pólos não-dominantes não é trivial, pois podem ocorrer problemas associados ao mau condicionamento numérico da matriz do sistema.

Para reduzir a demanda de potência foi adotada uma estratégia baseada na alocação dos pólos com o uso do método do regulador ótimo quadrático (LQR) conforme o desenvolvimento apresentado na Seção 3.5. Esta aproximação forneceu resultados considerados adequados, pois a demanda dos atuadores para a posição desejada dos pólos calculados desta forma fica dentro da sua faixa operacional. Conseqüentemente, com o uso do controle LQR, o problema da saturação do sinal de controle foi resolvida. A hipótese que a saturação da força é originada pela posição dos pólos mais rápidos foi investigada através do seguinte teste: a posição original (desejada) dos pólos dominantes foi mantida (visando verificar se as condições do projeto poderiam ser atendidas), e os pólos não dominantes foram colocados nas posições obtidas com o uso do controle LQR. Esta solução mostrou resultados adequados em termos das exigências do projeto, assim como do nível de solicitação de força dos atuadores. Deve-se observar que a solução que usa apenas o controle LQR apresenta também resultados bons, no entanto, com parâmetros transientes distintos daqueles definidos originalmente pelo projeto realizado com os parâmetros do domínio de tempo (Seção 4.1.2, item 5).

Diversos trabalhos apresentam estratégias para o uso do controle LQR com alocação de todos os pólos [Misra, 1996; Sehitoglu, 1993; Shieh *et al.*, 1988; Shieh *et al.*, 1990] e alocação parcial dos pólos [Fujinaka e Omatu, 2001; Sugimoto, 1998].

x- Obtenção dos ganhos ótimos (K_{lqr}) e dos pólos correspondentes

Para se obter os ganhos ótimos do sistema através do método LQR foram aplicados os passos apresentados na Seção 3.5, com as seguintes matrizes Q e R : $Q = I$ e $R = \left[\frac{1}{c^2} \right]$ com $c=1000$. Os ganhos ótimos K_{lqr} obtidos são os seguintes (Tab. 4.5):

Tabela 4.5: Ganhos do controle ótimo

K_{lqr1}	$1,25622558330838 \times 10^3$
K_{lqr2}	$0,55384792772211 \times 10^3$
K_{lqr3}	$1,63323470135529 \times 10^3$
K_{lqr4}	$1,13101254786086 \times 10^3$
K_{lqr5}	$0,66459225801229 \times 10^3$
K_{lqr6}	$0,00112201864025 \times 10^3$

Com estes ganhos, os pólos do sistema são os apresentados na Tab. 4.6:

Tabela 4.6: Pólos do controle ótimo

p_{1qr1}	$-0,33653654966350 + 1,19391626143189i \times 10^2$
p_{1qr2}	$-0,33653654966350 - 1,19391626143189i \times 10^2$
p_{1qr3}	$-0,17905275307981 + 1,22540008804219i \times 10^2$
p_{1qr4}	$-0,17905275307981 - 1,22540008804219i \times 10^2$
p_{1qr5}	$-0,01215894635742 + 0,05995525167265i \times 10^2$
p_{1qr6}	$-0,01215894635742 - 0,05995525167265i \times 10^2$

Estes pólos encontram-se no plano complexo nas posições que podem ser vistas na Fig. 4.3.

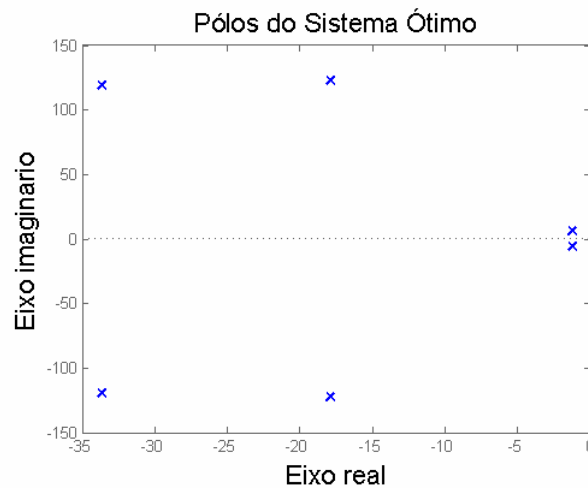


Figura 4.3: Pólos do sistema controlado com ganhos ótimos

De acordo com a estratégia exposta no passo 9 desta seção, estruturou-se o conjunto de pólos da dinâmica desejada tomando-se os quatro pólos não-dominantes calculados de acordo com o controle LQR e os dois pólos dominantes escolhidos calculados através dos requisitos no domínio tempo (ver Seção 4.1.2 item 6). Assim, o conjunto de pólos do sistema controlado passa a ser:

Tabela 4.7: Pólos do controle desejado

p_1	$-0,03070000000000 + 0,03127299154226i \times 10^2$
p_2	$-0,03070000000000 - 0,03127299154226i \times 10^2$
p_3	$-0,33653654966350 + 1,19391626143189i \times 10^2$
p_4	$-0,33653654966350 - 1,19391626143189i \times 10^2$
p_5	$-0,17905275307981 + 1,22540008804219i \times 10^2$
p_6	$-0,17905275307981 - 1,22540008804219i \times 10^2$

Os quais, no plano complexo resultam (ver Fig. 4.4):

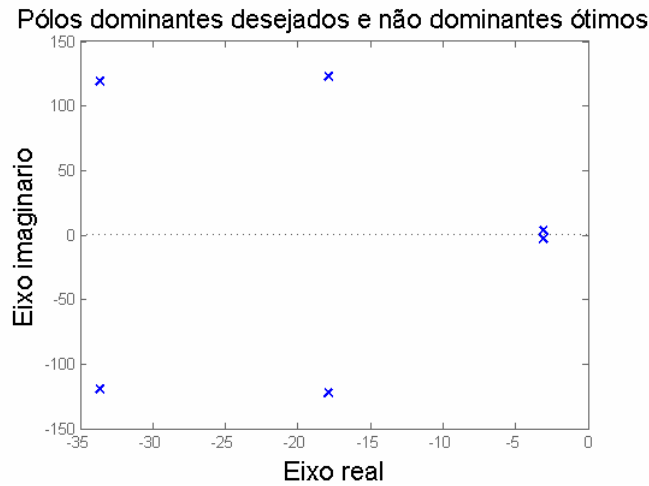


Figura 4.4: Pólos do sistema controlado para a dinâmica desejada

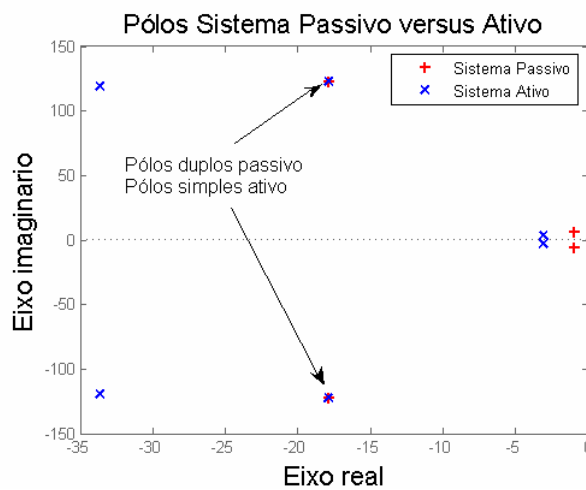


Figura 4.5: Pólos do sistema passivo versus sistema ativo

xi- Cálculo dos ganhos para o sistema controlado

Tomando os pólos apresentados no item anterior, e novamente aplicando a metodologia de alocação de pólos introduzida na Seção 4.4 e desenvolvida no percurso do presente Capítulo, os ganhos de controle para o sistema que tem a dinâmica desejada são os seguintes (Tab. 4.8):

Tabela 4.8: Ganhos do controle desejado

K_1	$3,4621581751487 \times 10^3$
K_2	$0,5588458896094 \times 10^3$
K_3	$-15,6481796237230 \times 10^3$
K_4	$4,9742817526991 \times 10^3$
K_5	$0,7873247408867 \times 10^3$
K_6	$0,0052875031717 \times 10^3$

Estes ganhos são bem menores que os calculados anteriormente e as simulações demonstraram que eles encontram-se dentro da faixa de operação do sistema de força da suspensão ativa. Na Fig. 4.6-(a) estão apresentados os resultados da força do atuador do problema de condição inicial de 0,005[m] da cabine, com os ganhos da Tab. 4.4, os quais foram obtidos com o método de alocação de pólos com a determinação dos pólos não dominantes realizada de maneira arbitrária. Como pode-se observar, as forças requeridas dos atuadores nesta situação excedem em muito o que eles podem entregar. Já, na Fig. 4.6-(b) que esta na mesma escala que a Fig. 4.5-(a) para permitir a comparação, foram usados os ganhos da Tab. 4.8 e as forças necessárias encontram-se dentro da faixa de operação dos atuadores (± 120 [N]).

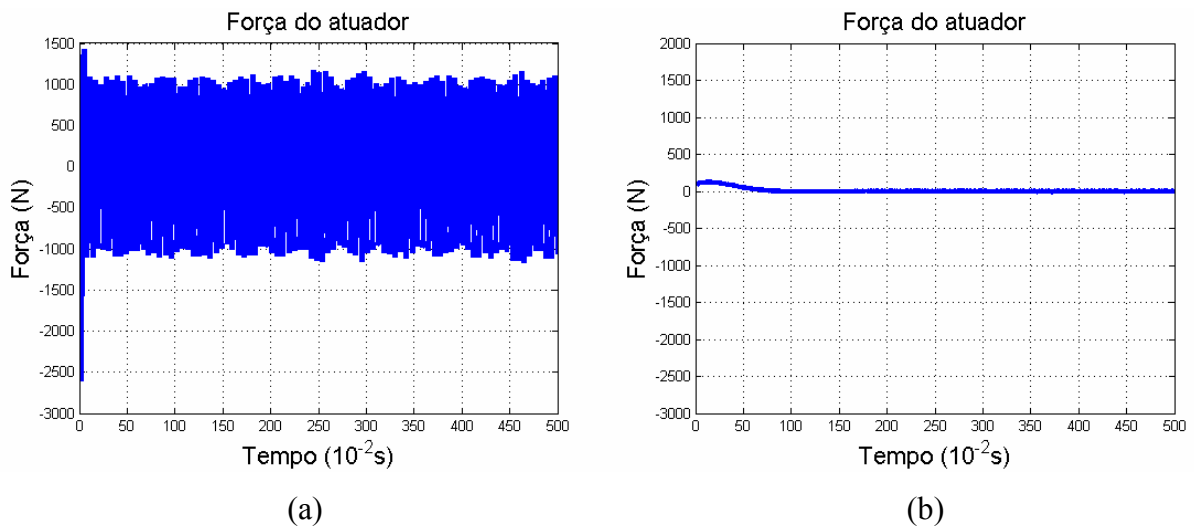


Figura 4.6: Forças dos atuadores para condições iniciais, (a) pólos não dominantes alocados arbitrariamente; (b) pólos não dominantes ótimos

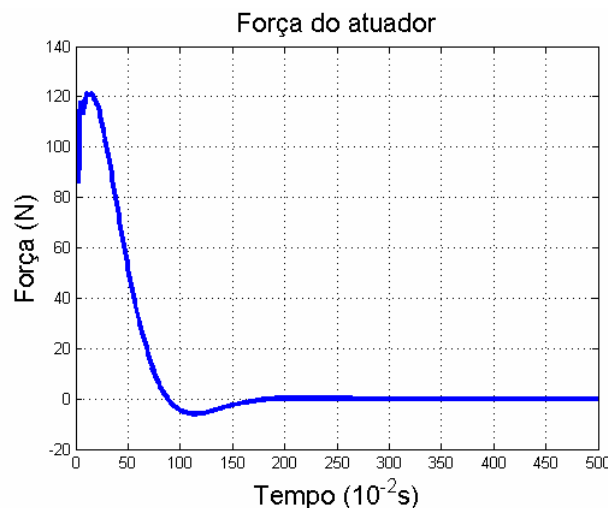


Figura 4.7: Força do atuador para condições iniciais ($Y=0,005$ [m])

Pode-se observar na Fig. 4.7, na qual foi modificada a escala para poder visualizar melhor o sinal, que a força do atuador chega muito próximo à do limite do motor elétrico linear

(120[N]). Para outras demandas da dinâmica desejadas, o valor da força necessária poderá ultrapassar o limite de saturação. Isto ocasionará uma deterioração da resposta obtida com relação à da dinâmica desejada. As alternativas são as de “relaxar” os requisitos dinâmicos do comportamento desejado ou de utilizar os resultados ótimos obtidos pelo LQR que, de certa forma, são da mesma natureza, ou, ainda, alterar os atuadores, substituindo-os por outros de maior potência.

No projeto até agora desenvolvido, considerou-se que todas as variáveis de estados estavam disponíveis para medição. Na prática, isto não ocorre. Assim, foi projetado um observador de ordem total para estimar as variáveis não disponíveis e necessárias ao controle. Este procedimento será apresentado na Seção 4.2 que segue.

4.2 Projeto do Observador

Usando a teoria desenvolvida no Capítulo 3, Seção 3.6, um observador de estados de ordem total para o controle da suspensão ativa do elevador é projetado nesta seção. O motivo deste projeto deve-se ao fato de que nem todas as variáveis necessárias ao controle estão acessíveis para a medição, ou seja, no caso real apenas as posições relativas dos braços da suspensão (Δy_l , Δy_r) são medidas, o que diferencia o presente projeto de todos os encontrados na bibliografia (geralmente os sistemas são baseados no uso de acelerômetros). Desta forma, a posição da cabine, a variável que está sendo controlada, não pode ser medida diretamente. A opção de usar só potenciômetros na medição visa diminuir custos do produto final. O observador tem o intuito de obter uma estimativa da posição da cabine e dos demais estados para realimentar o controle do sistema.

Seguindo os passos apresentados na Seção 3.6, serão calculados os ganhos para obter uma estimativa do vetor de estados que permita realizar o controle, de acordo com a metodologia apresentada na Seção 3.7.

4.2.1 Cálculos dos Ganhos do Observador

Conforme apresentado na Seção 3.6, o método de projeto do observador de estados de ordem total é similar ao método de alocação de pólos, ou seja, os passos a serem seguidos são análogos.

Primeiramente, determina-se a matriz de observabilidade para verificar se o sistema é completamente observável. Segundo foi apresentado na Seção 3.6.2 a matriz de observabilidade é a seguinte:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T & (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T & (\mathbf{A}^T)^3 \mathbf{C}^T & (\mathbf{A}^T)^4 \mathbf{C}^T & (\mathbf{A}^T)^5 \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -15352,5218 & 549245,0062 & 215789078,5117 & -16151066180,7316 \\ 0 & 1 & -35,8132 & -14069,94 & 1053133,9090 & 178073033,4061 \\ 0 & 0 & -14244,9612 & 510359,0711 & 200744878,9073 & -15016987955,4929 \\ 0 & 0 & -33,9755 & -129657,7564 & 1012796,0413 & 163081229,7150 \\ 0 & 0 & -16,9886 & 31,2196 & 279576,8913 & -10505310,5846 \\ 0 & 0 & 0 & -16,9886 & 639,6360 & 256669,5103 \end{bmatrix}$$

com $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Como a matriz \mathbf{N} tem posto 6, o sistema é completamente observável.

O vetor de estados apresentado na Seção 2.4.2 é $\mathbf{x} = [\Delta y_l \ \Delta \dot{y}_l \ Y \ \dot{Y} \ \Delta y_r \ \Delta \dot{y}_r]^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$, com x_1 e x_5 sendo os deslocamentos relativos dos braços esquerdo e direito, x_2 e x_6 suas respectivas derivadas, x_3 e x_4 a posição e a velocidade da cabine. O vetor \mathbf{C} foi escolhido desta forma pois as variáveis medidas são x_1 e x_5 (os deslocamentos relativos dos braços com respeito à cabine (Δy_l e Δy_r)). O uso destas duas variáveis simultaneamente faz com que a matriz \mathbf{N} fique de ordem menor que seis, tornando o sistema não-observável.

Usando a matriz \mathbf{N} calculada através da Eq. (4.2) e a matriz \mathbf{W} definida na Seção 3.4 e calculada no item 8 da Seção 4.1.2, obtém-se a matriz $\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^T)^{-1}$. A seguir é determinado o polinômio característico desejado para o observador. Este polinômio tem que responder às condições desejadas para o projeto.

Como está apresentado na Seção 3.6.2, o observador deve responder de duas a cinco vezes [Ogata, 2003] ou entre duas e oito vezes [Friedland, 2005] mais rápido que o sistema observado, pois o erro do observador deve tender a zero rapidamente.

No presente caso, realizou-se simulações (apresentadas na Seção 5.4) que mostraram os melhores resultados tomando-se as posições dos pólos dominantes do observador quinze vezes mais rápidos do que as dos pólos desejados para o controlador. Em uma situação real, na qual ocorrem ruídos inerentes aos processo de instrumentação e medição, possivelmente estes valores devam ser reduzidos para dentro das faixas sugeridas por Ogata, 2003, ou Friedland, 2005.

Os pólos não dominantes escolhidos são os mesmos que foram usados para o projeto do sistema de controle porque o método é análogo (veja Seção 3.6.1) e a posição destes pólos foi calculada via controle ótimo. Já, os pólos não dominantes do observador estão colocados em uma posição associada a uma frequência de aproximadamente 28 vezes as da dinâmica do controlador, permitindo que os pólos dominantes do observador sejam posicionados com frequências de até cerca de 15 vezes a frequência dominante do controlador.

Assim, a matriz para obter o polinômio característico desejado é:

$$\mathbf{J}_{\text{obs}} = \begin{pmatrix} -65,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -65,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -33,65+119,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -33,65-119,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17,91+122,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17,91-122,5 \end{pmatrix}$$

Aqui o polinômio característico desejado correspondente do observador fica:

$$p_{\text{obs}_d} = (s^2 + 131,4s + 4316,49)(s + (33,65 + 119,4i))(s + (33,65 - 119,4i)) \\ (s + (17,91 + 122,5i))(s + (17,91 - 122,5i)) \quad (4.3)$$

Assim, aplicando o desenvolvimento apresentado na Seção 3.6, os ganhos do observador \mathbf{K}_{obs} ficam (Tab. 4.9):

Tabela 4.9: Ganhos do observador

K_{obs_1}	1161,05388186609
K_{obs_2}	7043,21139020156
K_{obs_3}	-148,15676356701
K_{obs_4}	-4342,73472867149
K_{obs_5}	138,04255244276
K_{obs_6}	4053,93927079439

Como visto na Seção 3.6, o estado do observador é denominado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ e é utilizado no lugar do vetor de estados medido. Portanto, a lei de controle fica $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$. Lembrando que $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{x}(t)$, tem-se $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C} - \mathbf{BK})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{y}$.

O sistema completo é de duodécima ordem e seu polinômio característico é: $|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}||s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{obs}}\mathbf{C}|$. Os pólos do sistema completo ficam (Fig. 4.8):

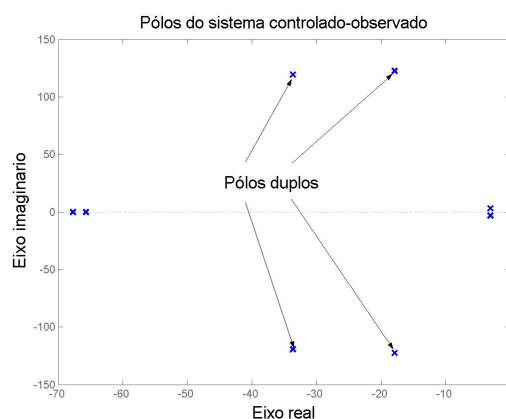


Figura 4.8: Pólos do sistema controlado+observado

O sistema controlado+observado foi implementado no Simulink para obter as simulações necessárias para comparar os resultados e verificar a concordância com as especificações feitas. Isto está apresentado no Capítulo 5, que segue.

5. SIMULAÇÕES E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

5.1 Introdução

No presente Capítulo são apresentados os resultados das simulações do sistema com a aplicação do controlador por realimentação de estados com observador completo projetado no Capítulo 4. São apresentadas as respostas no tempo do sistema passivo e ativo a uma função impulso e a condições iniciais para o problema de regulação.

Também são apresentados e discutidos separadamente os resultados do observador de estados.

5.2 Resultados do Método de Alocação de Pólos

Como foi apresentado na Fig. 4.2, a resposta às condições iniciais $\Delta y_l = -0,0046463692[m]$, $\Delta \dot{y}_l = 0[m/s^2]$, $Y = 0,005[m]$, $\dot{Y} = 0[m/s^2]$, $\Delta y_r = -0,0046463692[m]$ e $\Delta \dot{y}_r = 0[m/s^2]$ do sistema passivo é (Fig. 5.1):

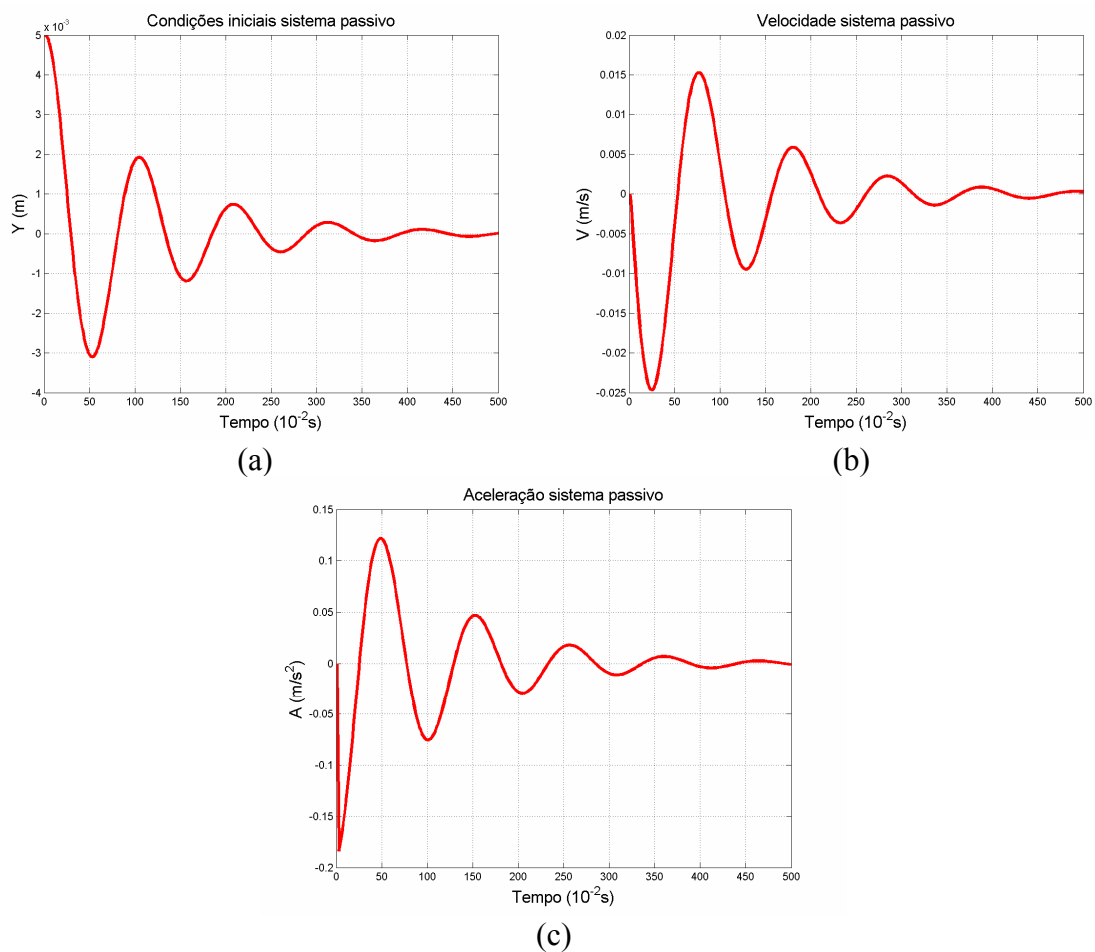


Figura 5.1: Condições iniciais sistema passivo (a) posição (b) velocidade (c) aceleração

Através do controlador por realimentação de estados cujo projeto está apresentado no Cap. 4 (veja vetor de ganhos da Tab. 4.8), obteve-se para o mesmo problema de condições iniciais as seguintes respostas de posição, velocidade e aceleração: (Fig. 5.2)

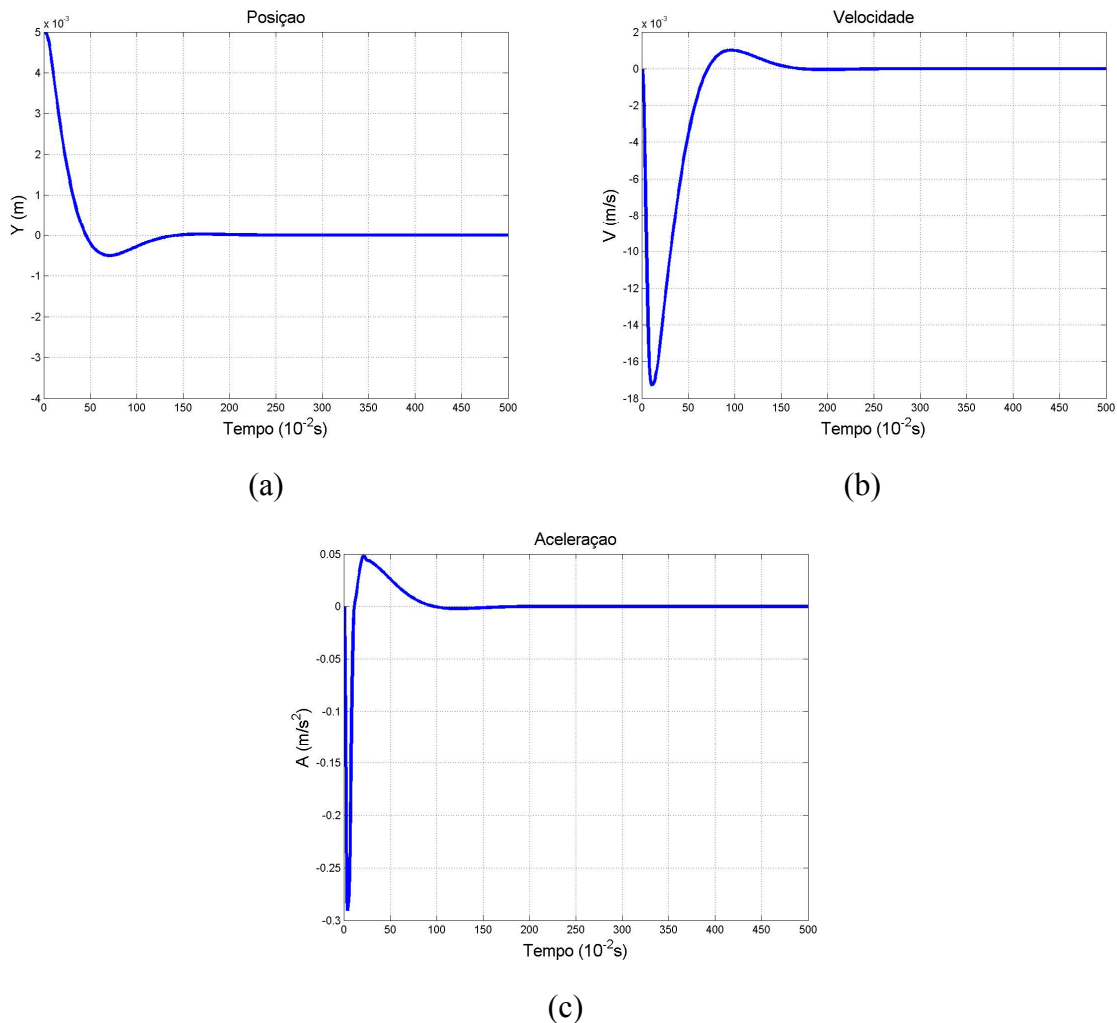


Figura 5.2: Resposta do sistema ativo ao problema de condições iniciais (a) posição (b) velocidade (c) aceleração

O pico de aceleração observado na Fig. 5.2-(c) encontra-se fora do estabelecido pelos critérios de algumas empresas de elevadores que é de $\pm 0,01[g]$ o que equivale a $\pm 0,0981[m/s^2]$, porém segundo a norma Automated People Mover Standards-Part 2 ASCE 21-98 o nível aceitável para deslocamentos laterais é de $\pm 0,10[g]$ o que equivale a $\pm 0,981[m/s^2]$. Na Fig. 5.3 estão apresentadas superpostas as curvas da trajetória da cabine para ambos os casos (passivo e ativo). Nessa figura pode-se observar que a resposta do sistema controlado atinge as características desejadas as que foram estabelecidas no item 5 da Seção 4.1.2. A sobrerresposta é de aproximadamente 4,58% e o tempo de assentamento (t_s) de 1,5[s] com o critério do 1% foi atingido na faixa de 0,92%.

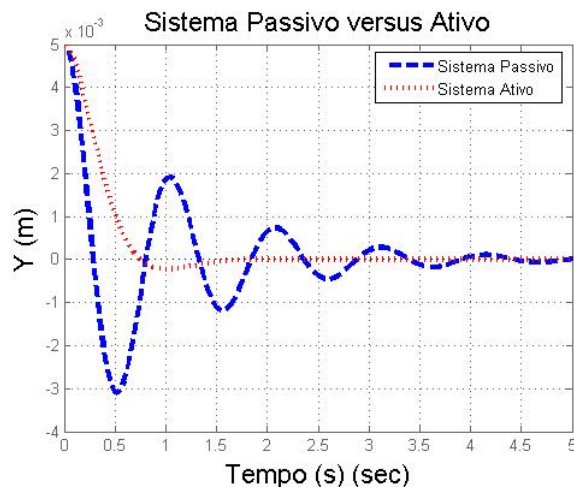


Figura 5.3: Resposta a condições iniciais sistema ativo

Também foi simulado o caso da função impulso no sistema passivo. Considera-se um pulso de força com amplitude de $40,5\text{[N]}$ e duração de $0,25\text{[s]}$ aplicado diretamente sobre a cabine na direção horizontal e com sentido direito. A resposta é apresentada na Fig. 5.4.

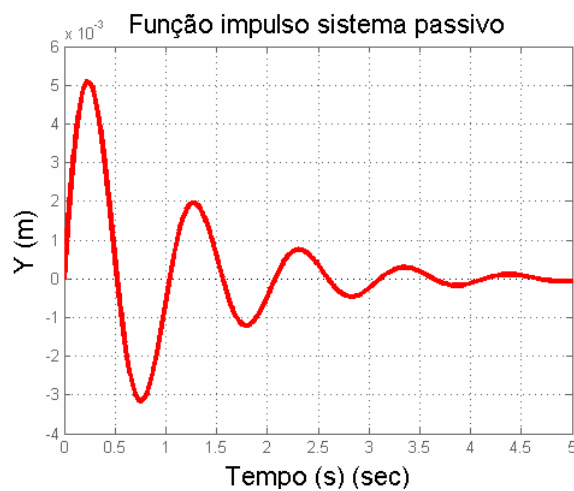


Figura 5.4: Resposta à função impulso sistema passivo

Para o caso do sistema ativo, pode-se observar na Fig. 5.5 que as características especificadas na Seção 4.1.2 foram alcançadas. Ou seja, a resposta apresenta uma sobre-resposta aproximada de $4,56\%$ e um tempo de assentamento (t_s) de $1,5\text{[s]}$ que é atingido na faixa dos $0,88\%$ (sendo que foi usado o critério do 1%).

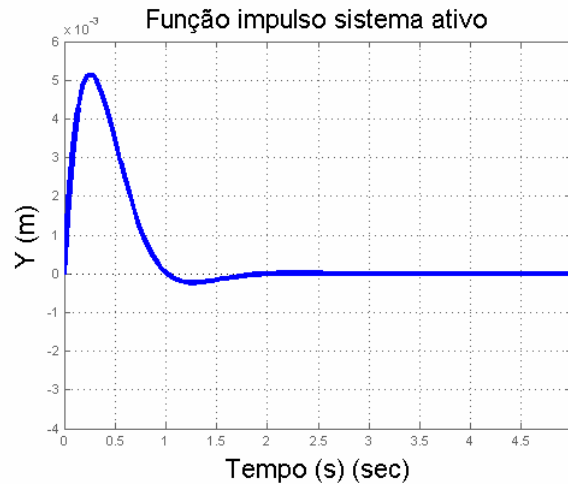


Figura 5.5: Resposta à função impulso do sistema ativo

O gráfico com as respostas à função impulso superpostos dos sistemas ativo e passivo está apresentado na Fig. 5.6.

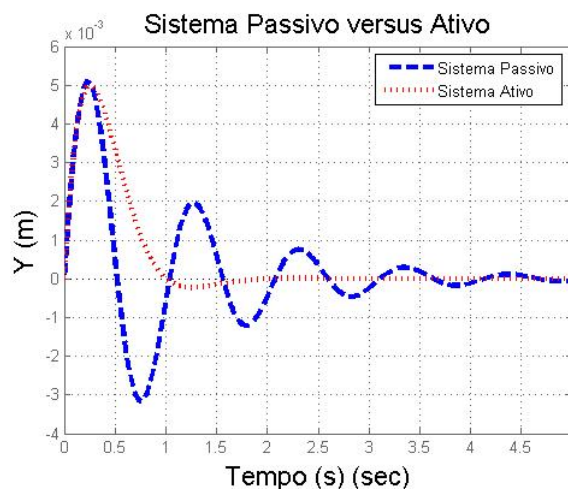


Figura 5.6: Resposta à função impulso sistema ativo *versus* passivo

Na Fig. 5.6 pode-se observar as respostas do sistema ativo e passivo para a função pulso. Como foi anteriormente mencionado, o sistema ativo atinge todos os requisitos estabelecidos no projeto definido no Capítulo 4.

5.3. Resultados do Observador

Visando testar a capacidade do observador em estimar os valores do modelo, foram realizadas simulações do problema de condições iniciais apresentado na Seção 5.2. Para isolar o desempenho do observador e do controlador com o observador, simulou-se a situação em malha aberta e em malha fechada, sendo que, neste segundo caso, as variáveis utilizadas para a

realimentação de estados foram tomadas diretamente do modelo (ou seja, não utilizando neste caso o vetor de estados estimado). Assim, na Fig. 5.7(a) estão apresentadas as respostas do sistema passivo e na Fig. 5.7(b) estão apresentadas as respostas do sistema ativo *ideal*, ou seja, com a realimentação dos estados calculados diretamente pelo modelo.

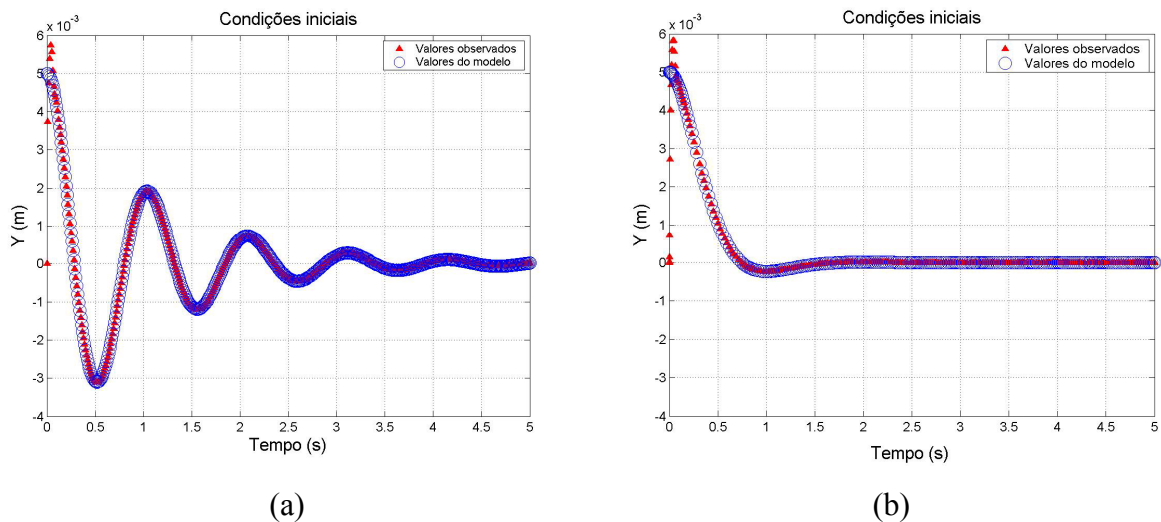


Figura 5.7: Posição da cabine observada versus real caso condições iniciais: (a) Sistema passivo, (b) Sistema ativo (*ideal*)

Na Fig. 5.8 são apresentados os erros de estimativa para os dois casos simulados. Pode-se observar devido à posição dos pólos do observador de 15 vezes a distância da origem dos pólos do sistema controlado, embora apresente uma diferença significativa até os 5×10^{-2} [s], que o erro tende rapidamente a zero e o Y_{estim} se aproxima dos valores de Y na medida em que o tempo avança. A diferença na origem acontece, pois o observador começa com todas variáveis zeradas.

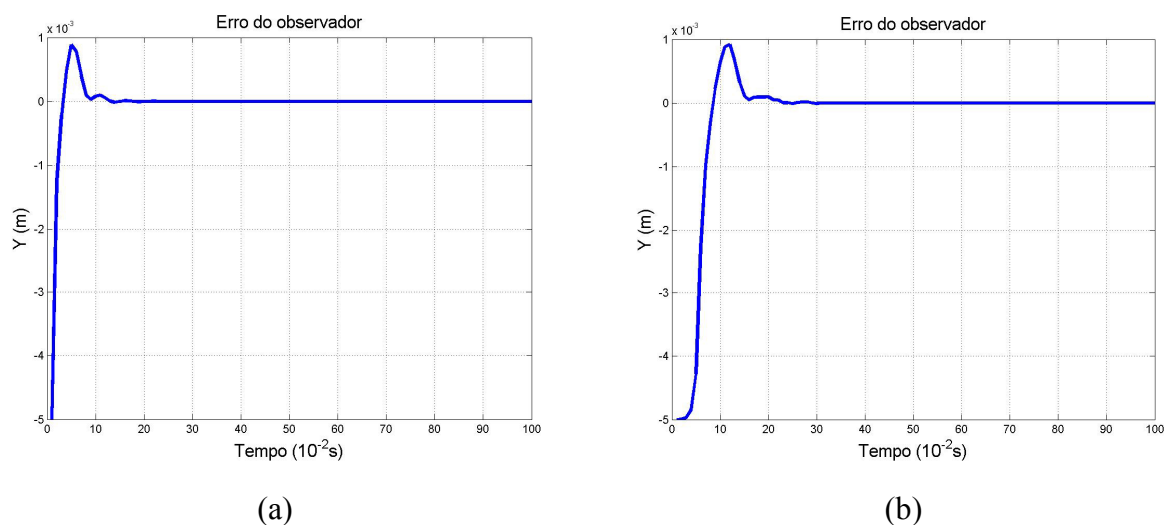


Figura 5.8: Erro do observador em condições iniciais, (a) caso passivo, (b) caso ativo.

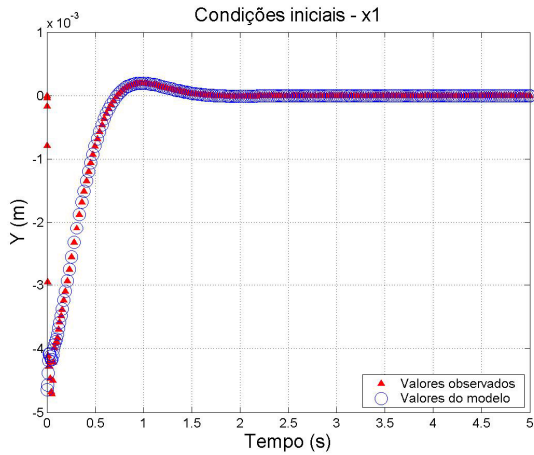


Figura 5.9: Posição relativa do braço esquerdo

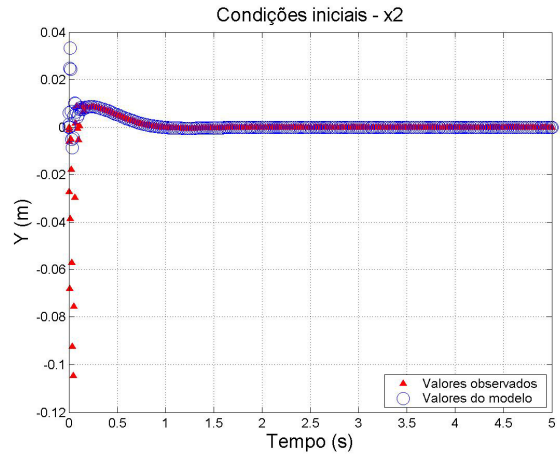


Figura 5.10: Velocidade relativa braço esquerdo

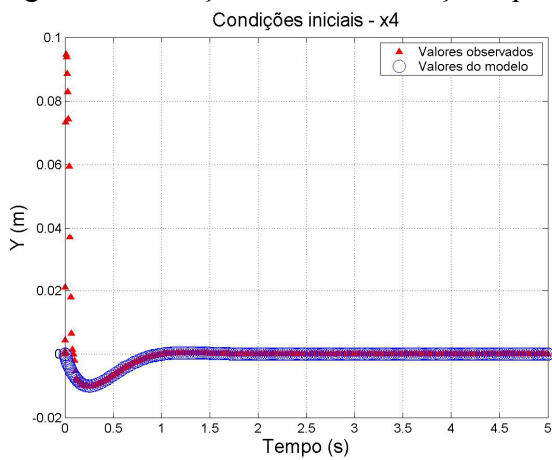


Figura 5.11: Velocidade da cabine

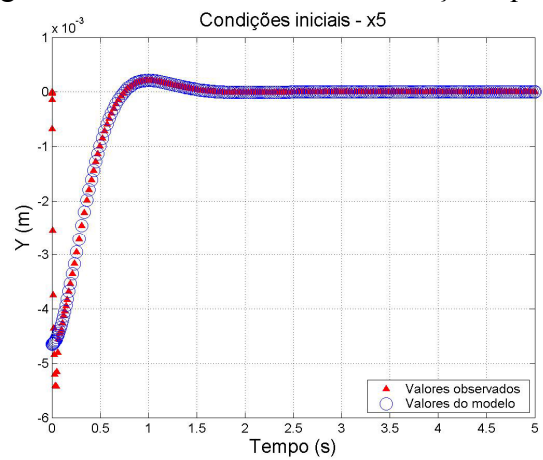


Figura 5.12: Posição relativa braço direito

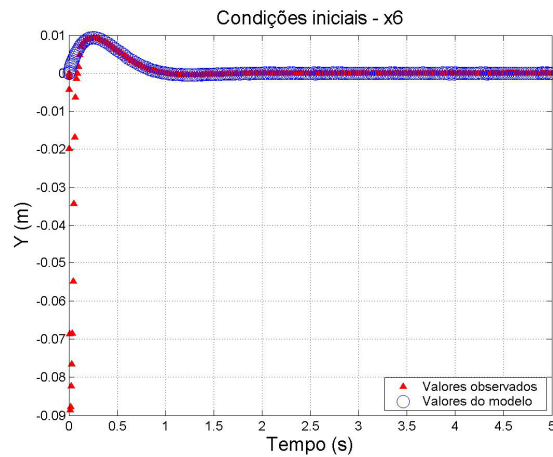


Figura 5.13: Velocidade relativa braço direito

Conclui-se, através da observação das figuras 5.9 a 5.13, que o observador de estados consegue estimar com bom desempenho os estados do sistema (na situação passiva e ativa *ideal*).

Foram também realizados testes para verificação do desempenho para o caso da função impulso. É importante salientar novamente que estas simulações foram realizadas supondo que o

vetor de estados é completamente conhecido, ou seja, sem realimentar o sistema com os valores fornecidos pelo observador.

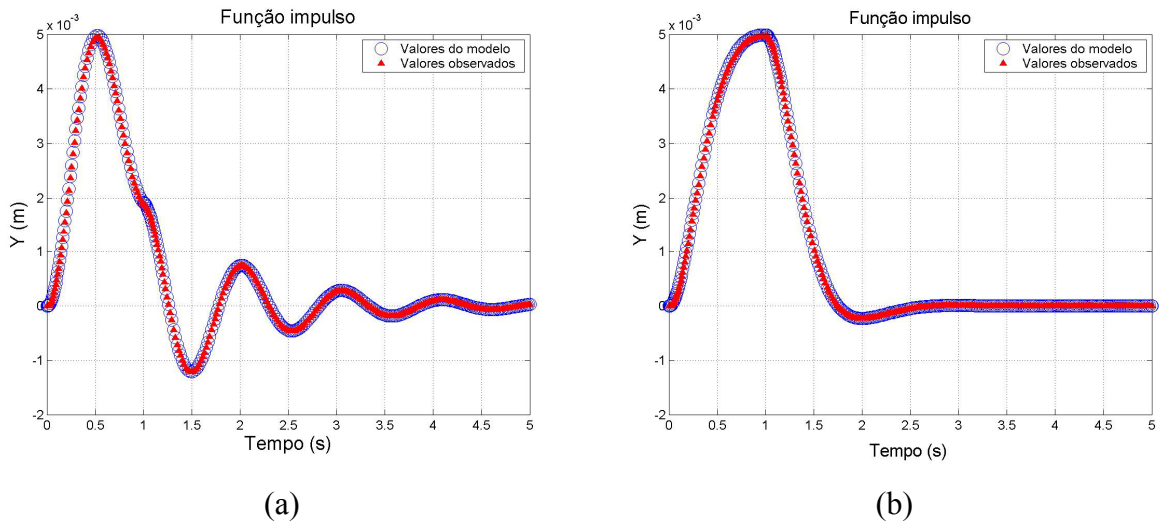


Figura 5.14: Posição da cabine para a função impulso, (a) caso passivo, (b) caso ativo (*ideal*).

A diferença entre os valores estimados (Y_{estim}) e os calculados (Y) estão apresentados na Fig. 5.15. Verifica-se que a resposta do observador tende rapidamente à resposta do modelo, obtendo assim resultados também satisfatórios.

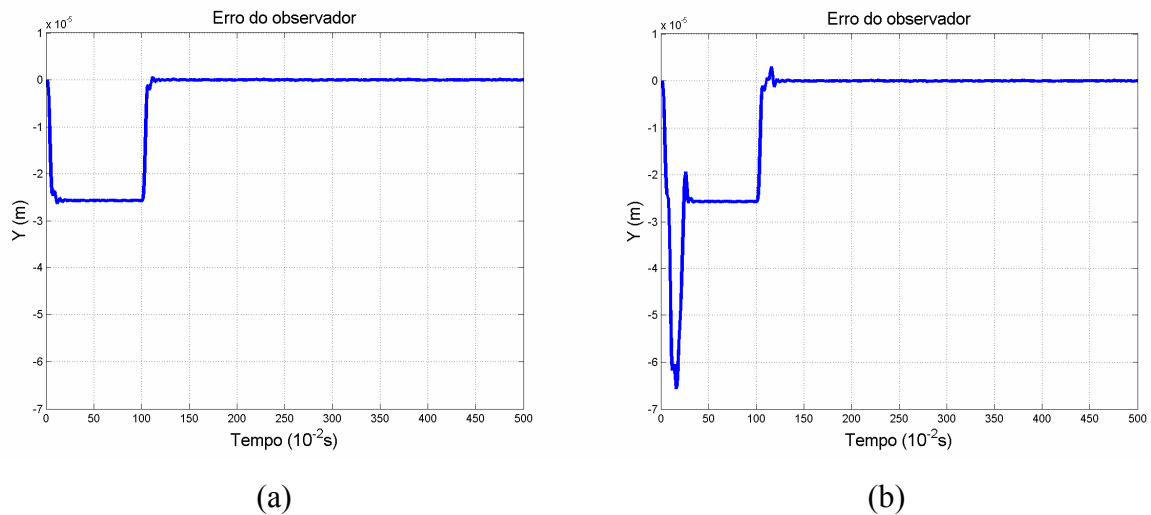


Figura 5.15: Erro do observador para a função impulso, (a) caso passivo, (b) caso ativo (*ideal*).

Na Fig. 5.15 a escala de amplitude do deslocamento da cabine foi modificada. Ao invés de usar valores da ordem 10^{-3} [m] foram utilizados valores da ordem de 10^{-5} [m]. Isto foi feito para proporcionar uma melhor visualização da diferença entre os valores estimados e os calculados.

5.4. Resultados do Sistema Completo

Nesta seção são apresentados os resultados das simulações do sistema controlado (ativo) realimentado pelo vetor de estados fornecido pelo observador, ou seja, o sinal de entrada do sistema controlado é $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$. As respostas deste sistema para condições iniciais e função impulso são apresentadas. A Fig. 5.16 apresenta os resultados obtidos para o problema de condições iniciais para o movimento da cabine.

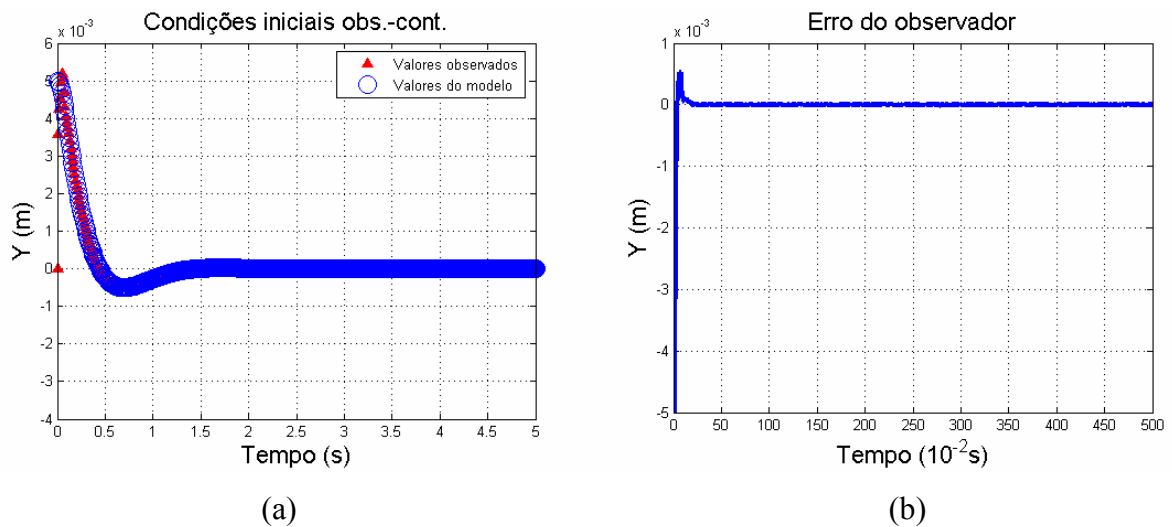


Figura 5.16: (a) Curva da posição da cabine para o problema de condições iniciais do sistema controlado realimentado com os estados observados (b) erro do observador

Nota-se pela curva da resposta controlada com o observador (apresentada na Fig. 5.16), que os resultados do sistema completo são compatíveis com os do sistema ideal, ou seja, o observador apresenta desempenho adequado também quando os estados observados são utilizados para a geração do sinal de controle.

A resposta para a função impulso é apresentada na Fig. 5.17.

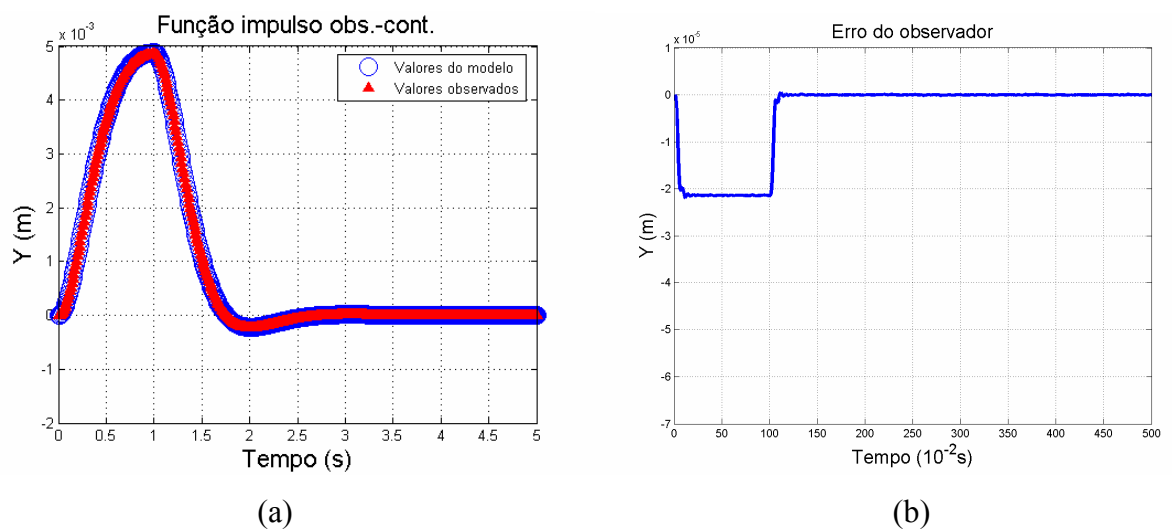


Figura 5.17: (a) Curva da posição da cabine para o problema de uma função impulso do sistema controlado realimentado com os estados observados (b) erro do observador

Na Fig. 5.18 é mostrado o sinal de atuação sobre o sistema de suspensão, ou seja, a força é aplicada pelo atuador de um dos braços (neste caso, o braço esquerdo).

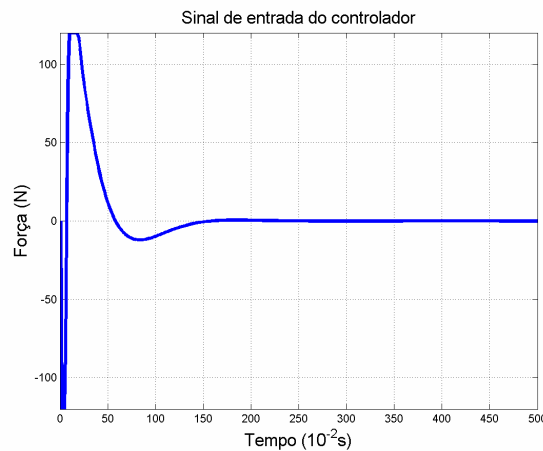


Figura 5.18: Sinal de entrada do controlador

Note-se, na Fig. 5.18, que ocorre uma saturação em 120[N] no início do processo, quando o sinal observado ainda não convergiu suficientemente. Apesar disso, as respostas do sistema controlado são, conforme apresentado nas Figs. 5.16 e 5.17, adequadas.

5.5 Comportamento da Resposta do Sistema Realimentado na Presença de Erros Paramétricos

O controlador foi projetado a partir de um conjunto de dados que foram obtidos com levantamentos experimentais e cálculos. Evidentemente, esses parâmetros, apesar de poderem se aproximar muito dos valores reais, sempre apresentam erros paramétricos com relação ao sistema real, intrínsecos à natureza dos sistemas de medição, incertezas, não-linearidades do sistema e simplificações nos cálculos. Esta seção visa o estudo, através de simulações, do comportamento da resposta do controlador na presença de possíveis erros no levantamento dos parâmetros do sistema real. Os parâmetros considerados mais suscetíveis a erros paramétricos são os seguintes (Tab. 5.1):

Tabela 5.1: Parâmetros do sistema do elevador

Parâmetro	Descrição
M_{eq}	massa total do elevador (carro + capacidade) [kg]
m_{areq}	massa equivalente dos braços [kg]
K_s	constantes de rigidez correspondente às molas das bandas das rodas [N/m]
K_{ar}	constantes de rigidez elásticas das molas helicoidais da suspensão [N/m]
C	constante de amortecimento viscoso equivalente da cabine [kg/s]
B	constante de amortecimento viscoso equivalente das suspensões [kg/s]
K_g	constante de rigidez elástica equivalente referido aos efeitos gravitacionais [N/m]

O procedimento utilizado é o seguinte: na primeira série de análises, o modelo do sistema físico controlado foi considerado com os parâmetros constantes, e, para verificar o comportamento do observador de estados isoladamente, utilizou-se para a realimentação do controlador os valores tidos como *exatos* dos estados, calculados pelo modelo. No observador, visando-se simular os efeitos dos erros paramétricos, os seus valores foram modificados um a um, ou seja, em cada teste foram mantidos constantes 6 dos 7 parâmetros da Tabela 5.1, sendo um deles modificado até que fosse percebido um afastamento significativo da resposta observada com respeito à calculada pelo modelo. Na prática, este procedimento resultou em simulações realizadas com variações entre 10% e 50%, tanto para cima como para baixo, dos parâmetros supostos como exatos. Vale salientar que, tanto os ganhos de controle como os ganhos do observador, são modificados por causa das variações nos parâmetros. Seguem os gráficos obtidos através da execução dos testes anteriormente descritos e respectivas análises. Note-se que os valores do observador saem da origem, simulando o desconhecimento completo dos estados (inclusive no início do processo).

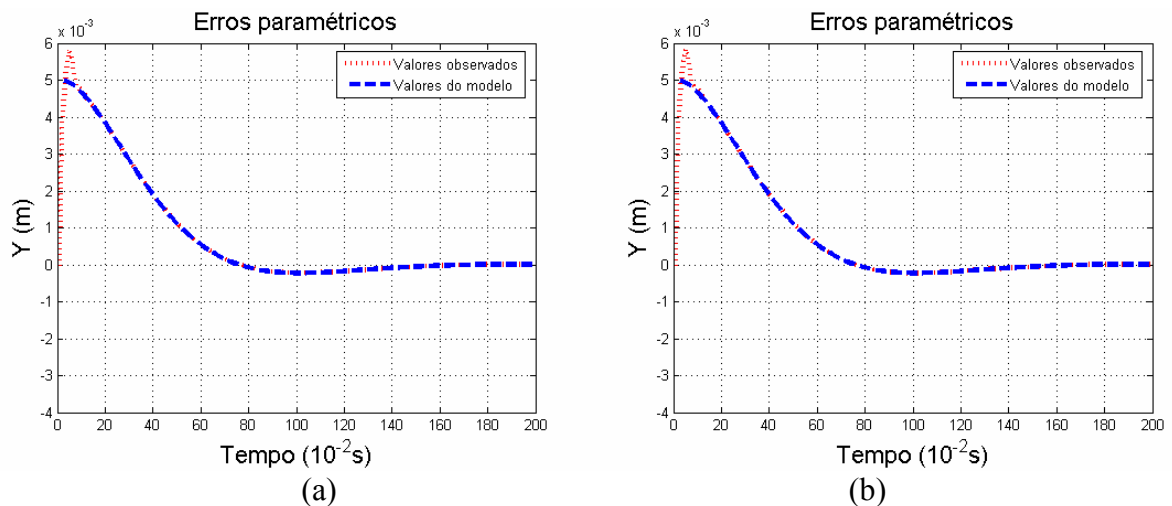


Figura 5.19: Respostas em posição da cabine com uma variação da massa total do elevador (a) 50% da M_{eq} (b) 90% da M_{eq} utilizada no modelo.

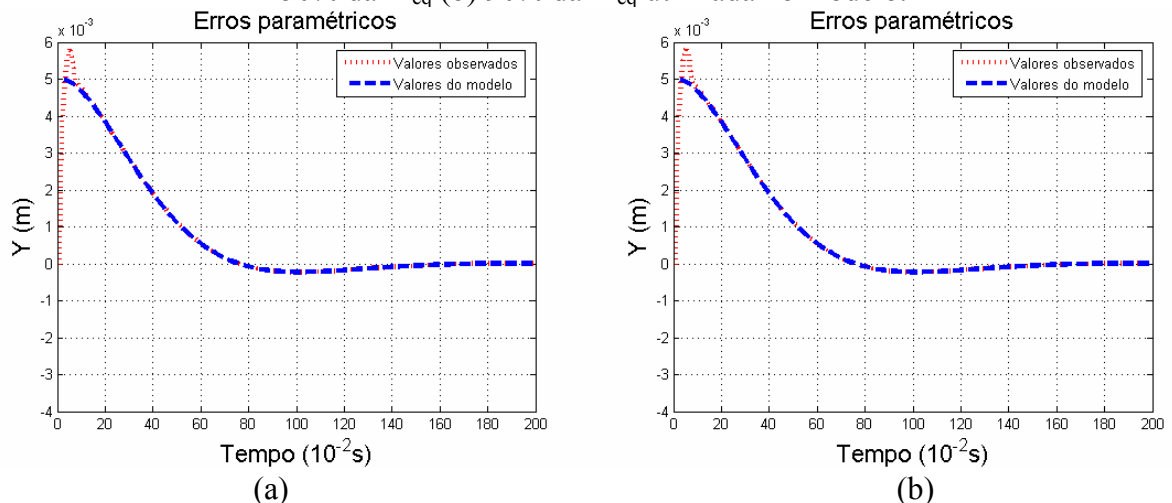
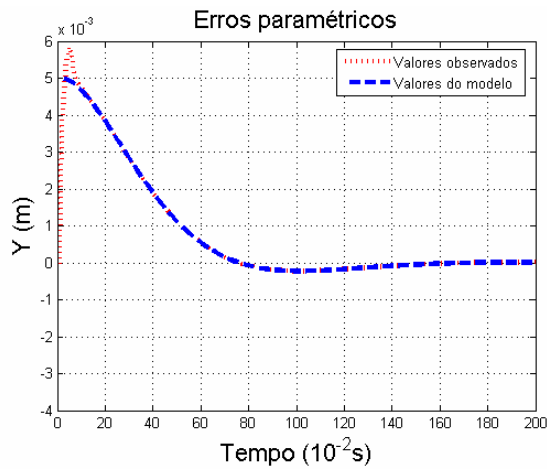
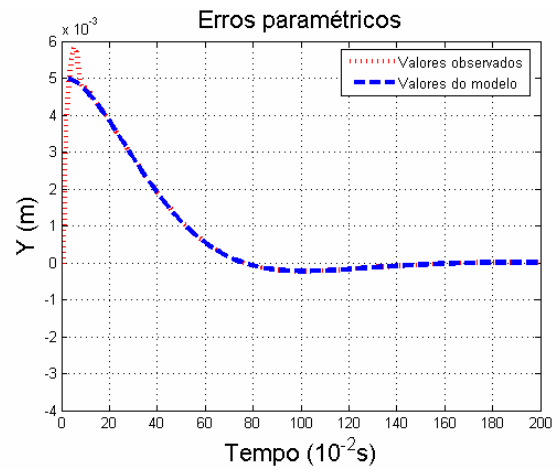


Figura 5.20: Resposta do observador (a) 110% da M_{eq} do modelo, (b) 150% da M_{eq} do modelo.

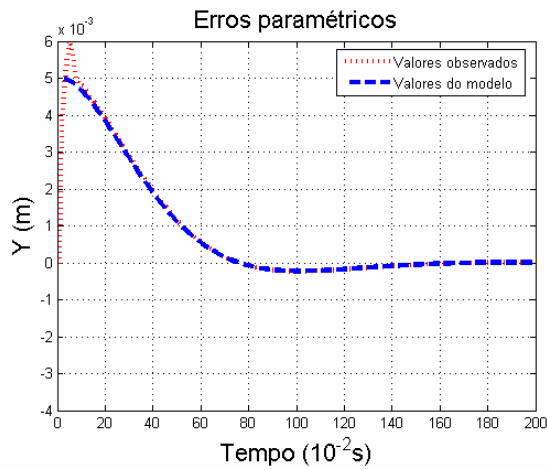


(a)

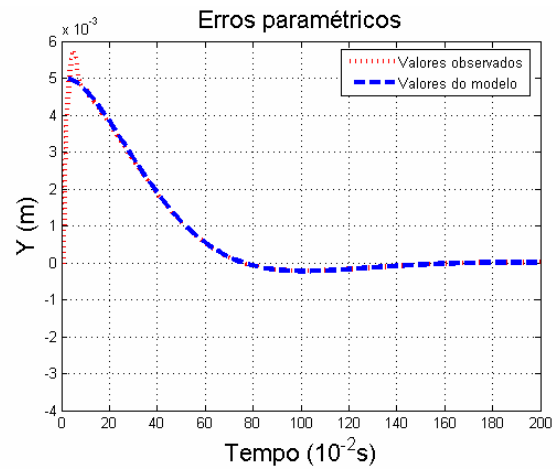


(b)

Figura 5.21: Resposta do observador com (a) 90% da m_{areq} do modelo, (b) 110% da m_{areq} do modelo.

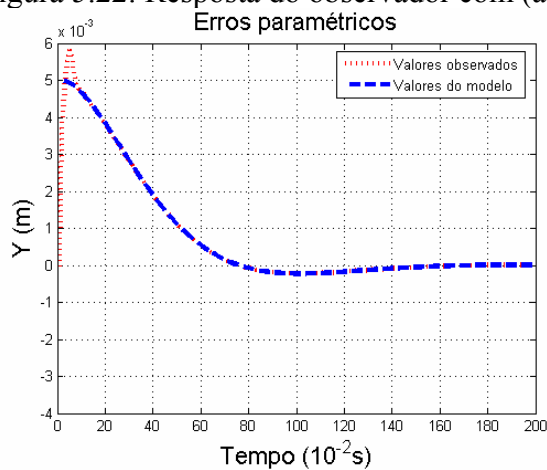


(a)

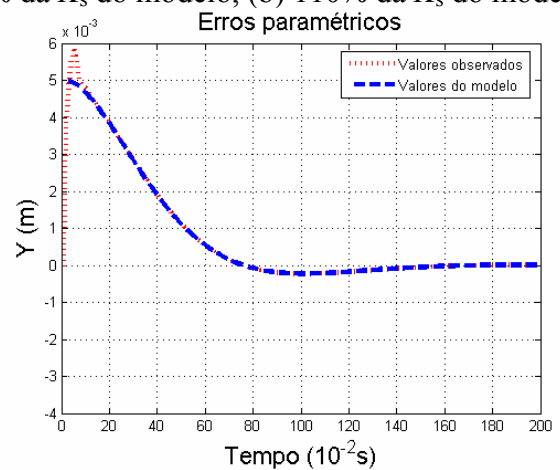


(b)

Figura 5.22: Resposta do observador com (a) 90% da K_s do modelo, (b) 110% da K_s do modelo.



(a)



(b)

Figura 5.23: Resposta do observador com (a) 90% da K_{ar} do modelo, (b) 110% da K_{ar} do modelo.

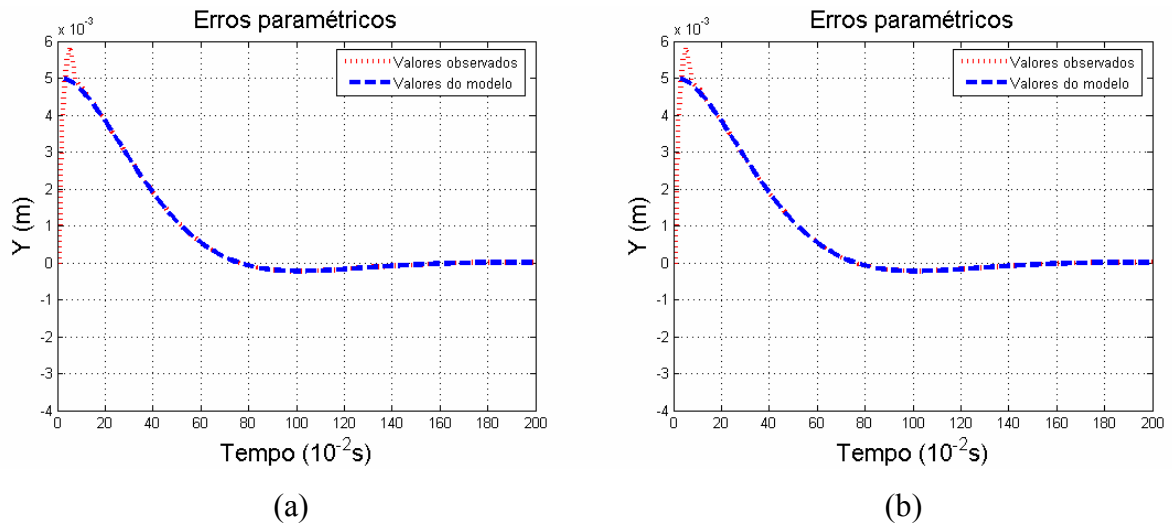


Figura 5.24: Resposta do observador com (a) 90% da C do modelo, (b) 110% da C do modelo.

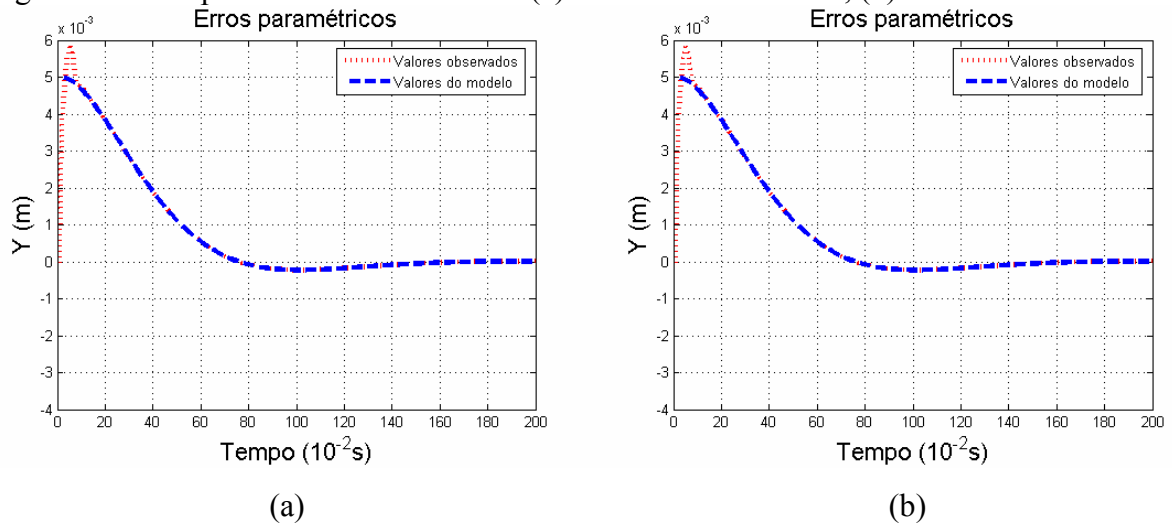


Figura 5.25: Resposta do observador com (a) 90% da B do modelo, (b) 110% da B do modelo.

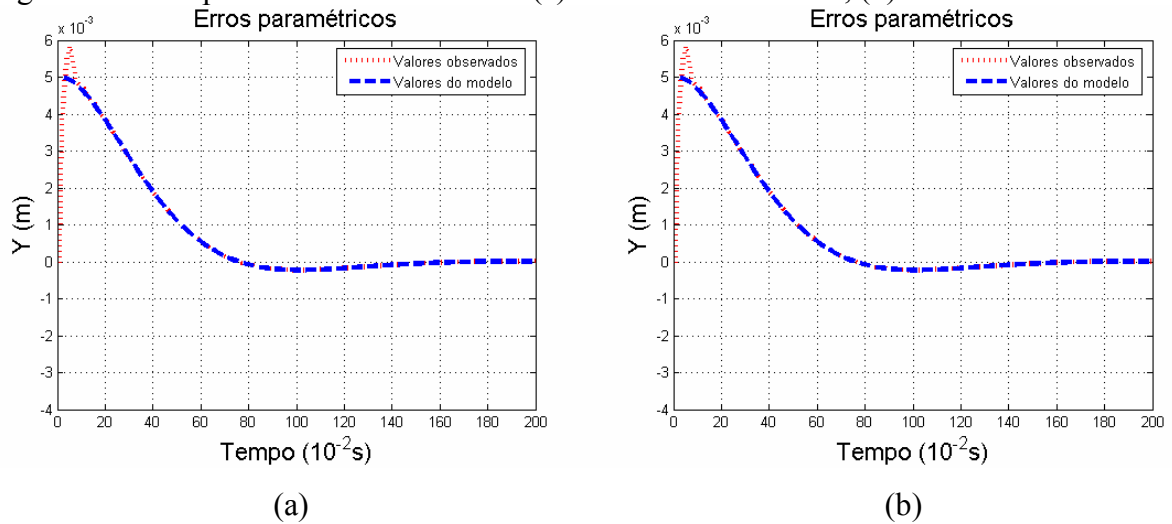


Figura 5.26: Resposta do observador com (a) 90% da K_g do modelo, (b) 110% da K_g do modelo.

Observando-se as Figs. (5.19) a (5.26) pode-se concluir que o sistema apresenta pouca sensibilidade a erros paramétricos, pois, na maioria dos casos simulados, as variáveis observadas

convergir para os valores do modelo aproximadamente entre 12 e 14×10^{-2} [s]. Isto é, a partir deste tempo o observador conseguiu, de modo geral, estimar adequadamente a resposta do sistema (suposto *real*).

O parâmetro que mostrou ter mais influência na dinâmica do observador foi a constante de rigidez correspondente às molas das bandas das rodas K_s . Isto pode ser observado através da Fig. 5.22. Nela percebe-se que com uma variação de 10% do valor real, o observador demora aproximadamente 0,9[s] para se aproximar do valor calculado pelo modelo. Ressalta-se, porém, que desde 0,11[s], a diferença com respeito ao valor do modelo é menor que $1,8 \times 10^{-4}$ [m] (ver Fig. 5.27).

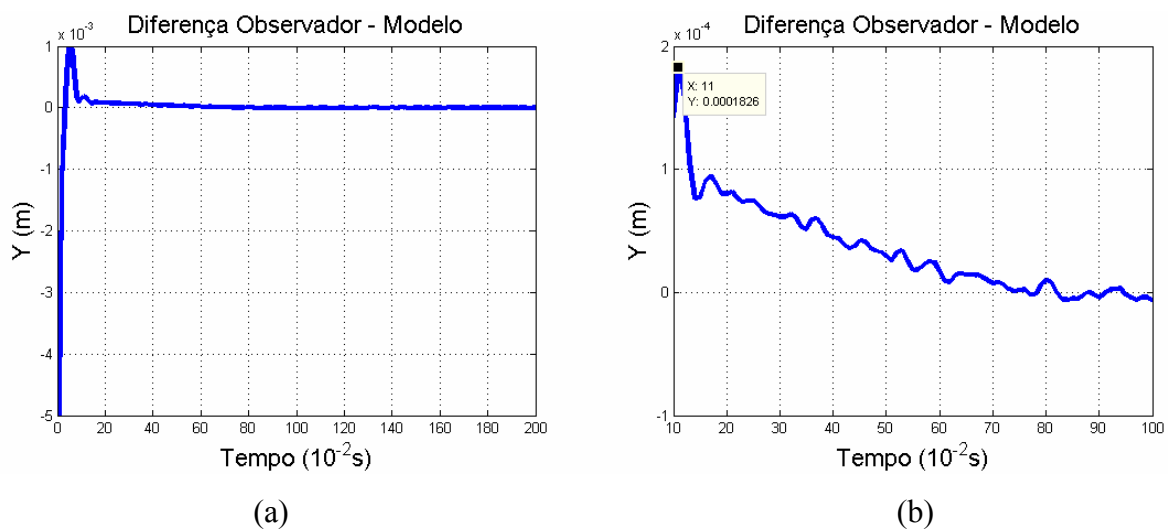


Figura 5.27: Diferença da posição da cabine observada – posição do modelo para uma variação de 10% de K_s .

São agora apresentados os resultados dos testes do comportamento do sistema ativo da suspensão do elevador para o caso em que o sinal de controle é $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$, ou seja, realimentado com o vetor de estados estimado pelo observador. Neste caso foi utilizado o mesmo procedimento que no caso anterior, ou seja, o modelo do sistema físico controlado foi considerado com os parâmetros constantes. No observador, visando-se simular os efeitos dos erros paramétricos, os valores foram modificados um a um, ou seja, em cada teste foram mantidos constantes 6 dos 7 parâmetros da Tabela 5.1. Os resultados dos testes realizados com este modelo são apresentados a seguir.

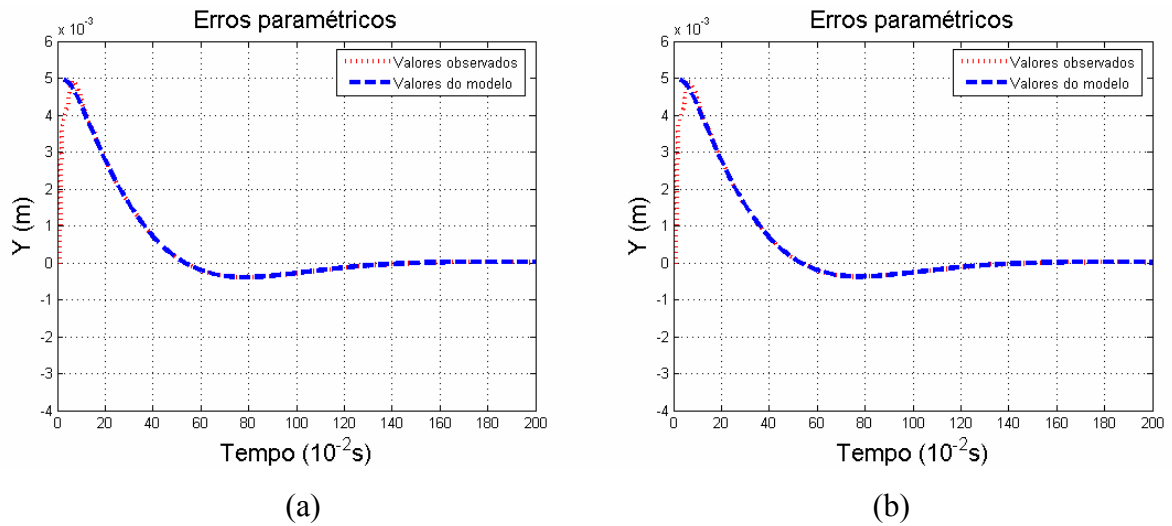


Figura 5.28: Resposta do observador com (a) 90% da M_{eq} do modelo, (b) 110% da M_{eq} do modelo.

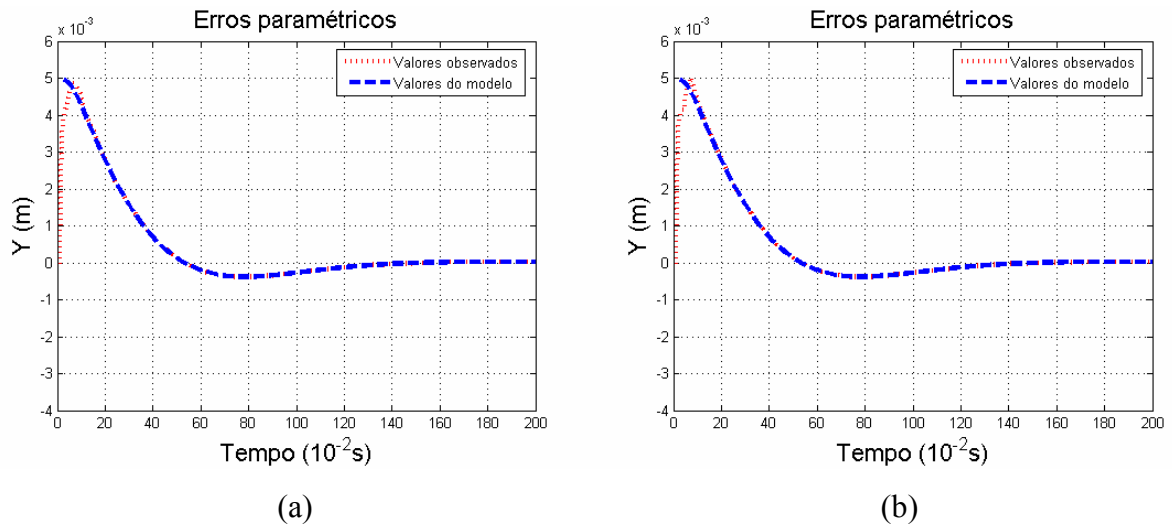


Figura 5.29: Resposta do observador com (a) 90% da m_{areq} do modelo, (b) 90% da m_{areq} do modelo.

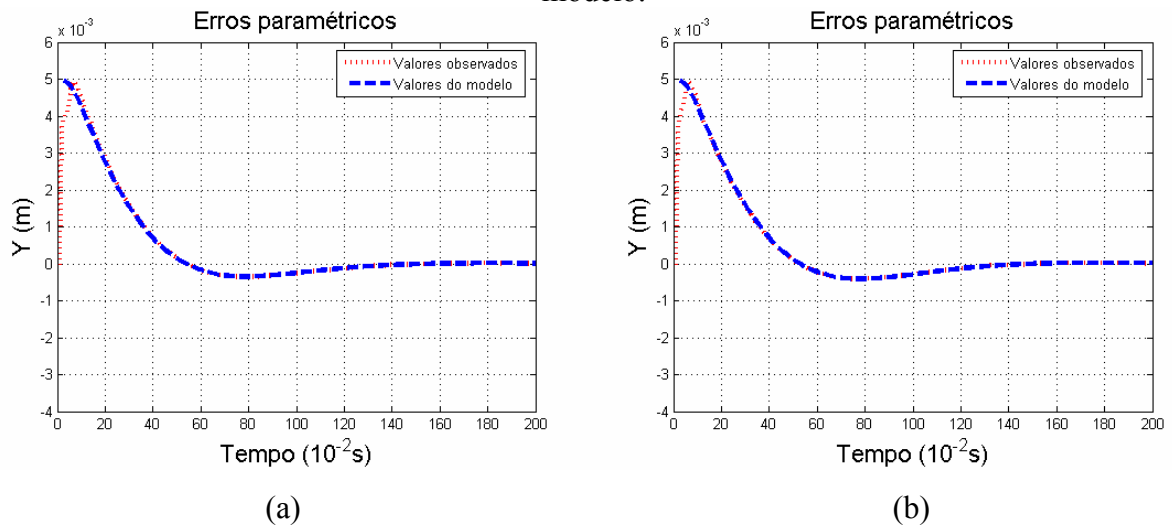
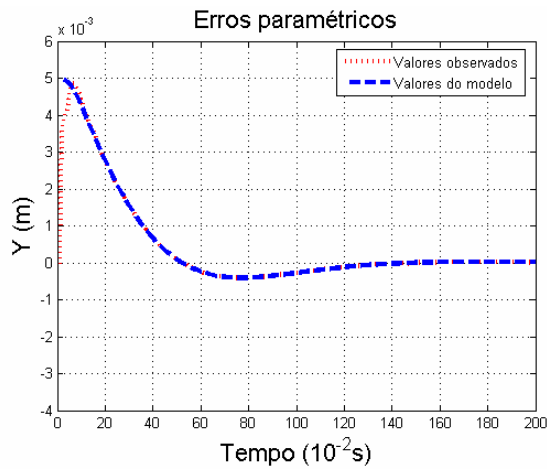
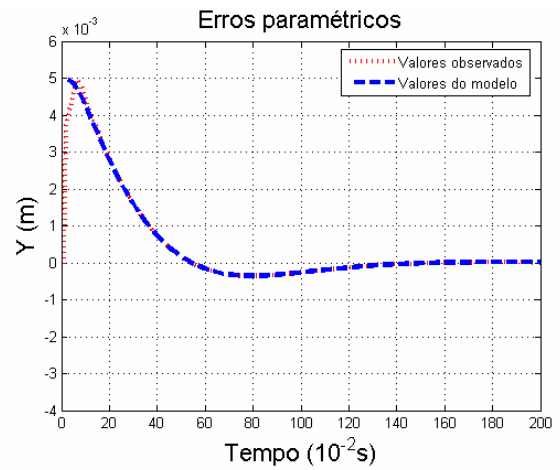


Figura 5.30: Resposta do observador com (a) 90% da K_s do modelo, (b) 110% da K_s do modelo.

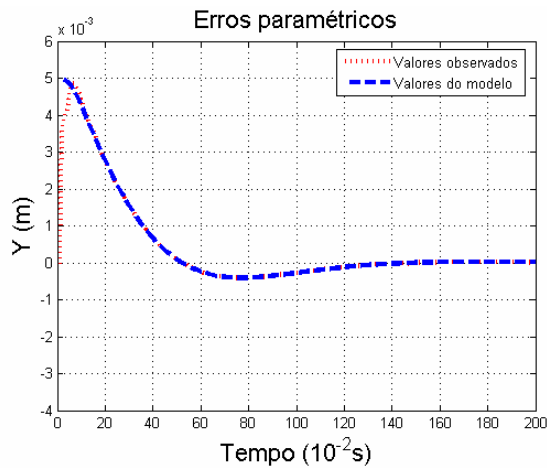


(a)

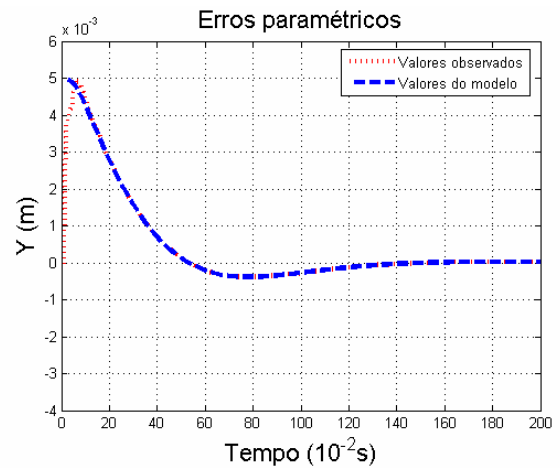


(b)

Figura 5.31: Resposta do observador com (a) 90% da K_{ar} do modelo, (b) 110% da K_{ar} do modelo.

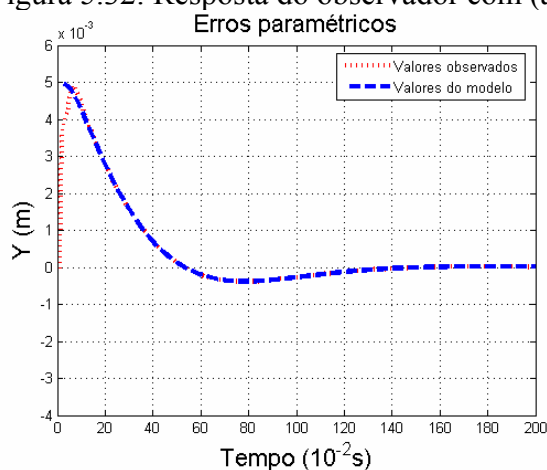


(a)

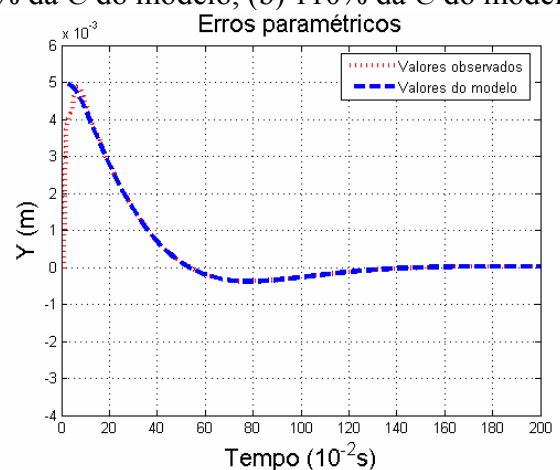


(b)

Figura 5.32: Resposta do observador com (a) 90% da C do modelo, (b) 110% da C do modelo.



(a)



(b)

Figura 5.33: Resposta do observador com (a) 90% da B do modelo, (b) 110% da B do modelo.

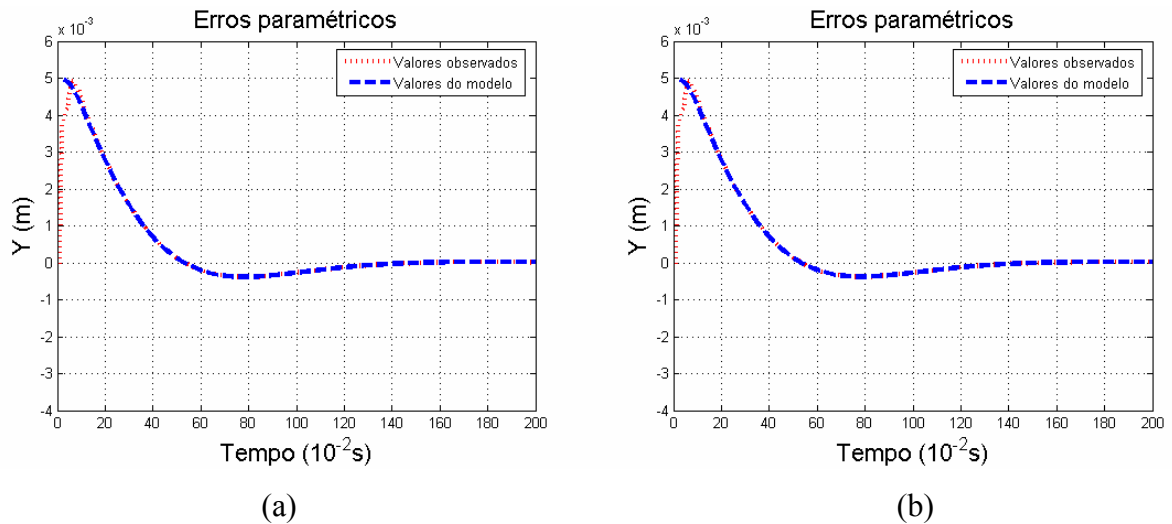


Figura 5.34: Resposta do observador com (a) 90% da K_g do modelo, (b) 110% da K_g do modelo.

Novamente, as maiores diferenças são apresentadas quando a constante de rigidez correspondente às molas das bandas das rodas K_s do observador é diferente da do sistema real. Assim, para comparar o erro do observador para a posição da cabine no caso de realimentação do sistema com o suposto $\mathbf{x}(t)$ real contra o caso de realimentação do sistema com o $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ estimado, é apresentada a Fig. 5.35. Nessa figura aparece a diferença entre o observador e o valor do modelo para o caso de realimentação com os vetor de estados do modelo (azul) e, para o caso de realimentação com o vetor de estados estimados pelo observador (vermelho).

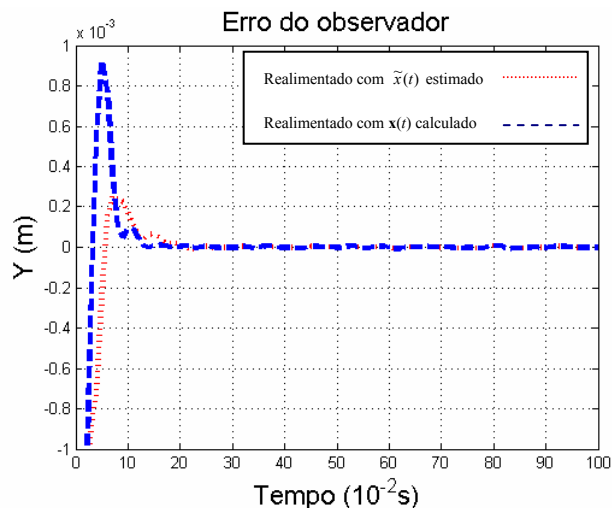


Figura 5.35: Diferença entre a posição estimada e a do modelo no caso do sistema realimentado pelo vetor de estados do modelo (azul) e pelo vetor de estados do observador (vermelho)

Pode-se verificar na Fig. 5.35 que a resposta do sistema realimentado pelo vetor de estados do observador apresenta uma resposta com menor diferença entre os valores estimados e os do modelo para a posição da cabine.

Na Fig. 5.36, a constante de rigidez correspondente às molas das bandas das rodas K_s , é estudada supondo os casos extremos de possíveis erros paramétricos: de 40% a 160% do valor nominal.

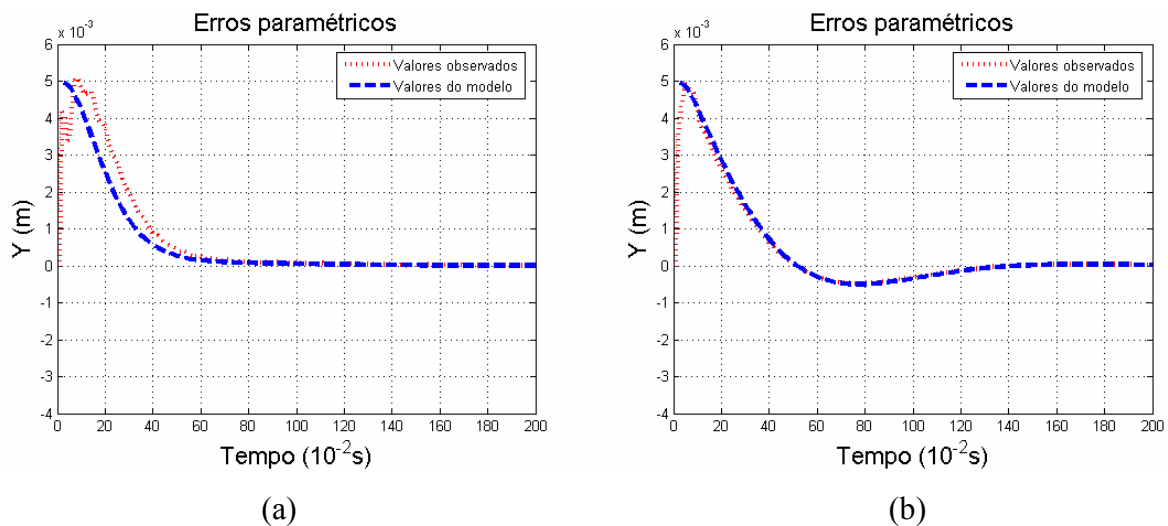


Figura 5.36: Desvios do observador devido aos erros paramétricos (a) 40% do valor de K_s do modelo, (b) 160% do valor de K_s do modelo

Da observação das figuras apresentadas nesta seção pode-se afirmar que o observador consegue reproduzir a dinâmica do sistema com uma boa aproximação. Além disso, pode-se também afirmar que as respostas do sistema são melhores quando realimentado com o vetor estimado do que com os valores calculados diretamente no modelo e que o parâmetro cuja variação mais influi no comportamento do observador é a constante de rigidez correspondente à rigidez das bandas das rodas K_s .

Finalmente, segundo as simulações feitas e apresentadas nesta seção, é possível afirmar que o observador tem uma boa resposta a erros paramétricos, ou seja, não apresenta grande sensibilidade a variações dos valores dos parâmetros do observador com respeito aos valores do modelo.

6. CONCLUSÕES

O presente trabalho abordou uma proposta de algoritmo de controle para ser aplicado a suspensões ativas de elevadores. Baseando-se em estudos bibliográficos e nas características de um modelo matemático linear invariante de 6ª ordem desenvolvido para o sistema, optou-se pela aplicação da metodologia de alocação de pólos baseada no controle por realimentação de estados. Para o posicionamento desejado para os pólos em malha fechada utilizou-se uma metodologia mista. Para os pólos dominantes, as posições foram definidas a partir de requisitos de desempenho transitório da resposta domínio tempo e para os pólos não dominantes utilizou-se uma metodologia de controle ótimo (LQR)

No projeto segundo a metodologia sugerida por Ogata, 1993, verificou-se que a controlabilidade, necessária ao projeto do controlador por realimentação de estados, não é obedecida em todas as condições estudadas. Por exemplo, nas situações em que os dois atuadores são considerados conjuntamente, a controlabilidade é perdida. Assim optou-se pelo desenvolvimento do controlador considerando os atuadores de forma independente.

O modelo matemático foi implementado computacionalmente através do sistema Matlab/Simulink, que se mostrou adequado para a realização das tarefas propostas. Através deste sistema foram realizadas simulações para verificar a validade do modelo desenvolvido. Os resultados das simulações do sistema passivo submetido a perturbações tipo impulso e a condições iniciais de posição, foram condizentes com os comportamentos esperados do sistema, apresentando movimentos oscilatório pouco amortecido (deve ser mencionado que foram também compatíveis com dados experimentais realizados pela empresa na sua torre de testes de Guaíba-RS).

Propôs-se inicialmente um posicionamento para os pólos com uma dinâmica dominante calculada a partir de um desempenho baseado no comportamento transitório desejado e com os pólos não dominantes posicionados arbitrariamente em posições associadas a respostas suficientemente rápidas de forma a não interferir significativamente na dinâmica para o sistema realimentado. Mesmo com o relaxamento desta condição, ou seja, com pólos não dominantes mais próximos à origem, os resultados das simulações do sistema com o controlador projetado através desta metodologia inicialmente proposta mostraram uma demanda de energia dos atuadores muito acima da sua capacidade real.

Isto se mostrou de acordo com uma conhecida deficiência da metodologia de alocação de pólos, pois, apesar de os mesmos poderem ser teoricamente realocados para qualquer posição arbitrária do plano complexo, as limitações físicas devidas às saturações dos sinais dos atuadores

impossibilitam esta situação na prática, o que foi comprovado pelo alto nível da amplitude do sinal de controle obtido nas simulações.

Para solucionar este problema, optou-se pela aplicação do controle ótimo para a realocação dos pólos em malha fechada. Através desta técnica, o sinal de controle foi otimizado, os requerimentos de energia do sistema diminuíram e as simulações dos sinais de controle passaram a fornecer valores adequados à operação do sistema real, porém com uma dinâmica dominante diferente da desejada inicialmente. Para verificar a possibilidade de obter respostas condizentes com a dinâmica desejada calculada a partir dos parâmetros transitórios, testou-se a aplicação de uma técnica mista: com pólos dominantes desejados definidos a partir dos parâmetros transitórios e com os pólos não dominantes desejados foram tomados os pólos (não dominantes) calculados através do controle ótimo. Esta combinação de técnicas resultou em um comportamento adequado, conforme pôde ser verificado através dos resultados das simulações apresentados no Capítulo 5. Vale salientar que o uso do LQR não é trivial, já que para cada par de matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} existe uma solução ótima. Assim, a escolha dessas matrizes depende dos resultados obtidos em simulações. No presente trabalho usaram-se as recomendações da literatura e resultados de simulações para auxiliar a decisão de qual era o melhor par de matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} para obter os ganhos mais adequados.

Além disso, como a técnica proposta necessita dos sinais de todos os estados (em número de 6, portanto) e na situação prática apenas os deslocamentos relativos entre os braços das suspensões e a cabine são medidos, desenvolveu-se, para a estimativa dos estados necessários ao controle, um observador total de estados. Para tanto, foram estudadas as características de observabilidade do sistema. Para o caso da medição somente do deslocamento relativo do braço esquerdo, por exemplo, a observabilidade foi verificada, porém, o caso real, com as duas posições relativas dos braços resultou em um sistema não-observável. Optou-se assim pelo uso de apenas um sinal medido, com, conseqüentemente, os demais (5) estados observados. As simulações realizadas com os sistemas passivo e ativo, visando verificar a efetividade do observador, mostraram resultados muito bons, com a convergência dos sinais estimados para os sinais calculados ocorrendo rapidamente e com baixo erro de seguimento.

Além disso, foram realizados estudos sobre os erros paramétricos da massa total do elevador [kg], da massa equivalente dos braços, das constantes de rigidez correspondente às molas das bandas das rodas [N/m], das constantes de rigidez elásticas das molas helicoidais da suspensão [N/m]), da constante de amortecimento viscoso equivalente da cabine [kg/s], da constante de amortecimento viscoso equivalente das suspensões [kg/s] e da constante de rigidez elástica equivalente referida aos efeitos gravitacionais [N/m]. Para tanto, considerou-se os

parâmetros do modelo constantes e os do observador, visando se simular os efeitos dos erros paramétricos, com valores modificados um a um. Em um primeiro caso, utilizou-se na realimentação os valores calculados diretamente pelo modelo (não observados). Este procedimento resultou em simulações cujos resultados apresentaram variações muito pequenas das respostas com relação aos do sistema com os parâmetros supostos exatos (Figs. 5.19 a 5.26).

Posteriormente, foram testados os erros paramétricos para o caso em que os estados realimentados são os estimados pelo observador. Neste caso foi utilizado o mesmo procedimento que no caso anterior, o modelo do sistema físico controlado foi considerado com os parâmetros constantes e no observador os valores foram modificados um a um, repetindo o processo anteriormente utilizado. Destes testes observou-se que o sistema responde adequadamente a erros paramétricos convergindo rapidamente aos estados do modelo embora sejam introduzidos erros significativos nos parâmetros. Assim, a partir dos estudos sobre os erros paramétricos concluiu-se que o sistema apresenta pouca sensibilidade a diferenças nos parâmetros, pois, na maioria dos casos simulados, tanto com os valores dos estados calculados pelo modelo (supostos reais) quanto com os estados estimados, as variáveis observadas convergiram para os valores do modelo aproximadamente entre 12 e 14×10^{-2} [s]. O parâmetro que mostrou ter mais influência na dinâmica do observador foi a constante de rigidez correspondente às molas das bandas das rodas sendo que com uma variação de 10% do valor real, o observador demora aproximadamente 0,9[s] para se aproximar do valor calculado pelo modelo. O estudo de erros paramétricos mostra que o observador pode funcionar adequadamente embora o levantamento experimental tenha erros ou pelas incertezas inerentes dos equipamentos e dos métodos experimentais, assim como no caso de degradação das molas (por exemplo) durante a vida do elevador.

Conclui-se, finalmente, que a metodologia de projeto de controlador de estados para suspensões ativas de elevadores (alocação de pólos via parâmetros transitórios e LQR+observador de estados) é **viável de ser aplicada a sistemas reais**, sendo necessário para tanto, a realização da adequação da modelagem (se necessário) e da identificação dos (novos) parâmetros físicos do sistema real (também, se necessário).

As principais conclusões deste trabalho são:

- As simulações mostraram que o modelo físico do tipo massa-mola-amortecedor representa adequadamente a dinâmica do elevador nos graus de liberdade importantes à segurança e conforto dos passageiros;
- A alocação de pólos com matrizes mal condicionadas não foi possível;
- Métodos de controle ótimo são muito úteis para auxiliar o projeto de controle por alocação de pólos;

- O observador de estados de ordem total convergiu corretamente para todos os estados;
- Mostrou-se que os requisitos de projeto estabelecidos foram alcançados adequadamente;
- O método de alocação de pólos com o regulador quadrático linear e um observador de estados de ordem total aplicado para a realimentação dos estados demonstrou sua capacidade de controlar o sistema de suspensão ativa do elevador;
- Somente um atuador e um sensor são necessários para o controle do elevador no plano YZ.

Trabalhos futuros poderão abordar os seguintes tópicos

- Simplificação do modelo massa-mola-amortecedor até 2 graus de liberdade e validação desse modelo;
- Implementação do algoritmo de controle proposto neste trabalho em um sistema experimental;
- Avaliação e teste do sistema com um atuador e um sensor no modelo com 3 graus de liberdade e com o modelo de 2 graus de liberdade;
- Desenvolvimento de um algoritmo de controle que trabalhe nos dois planos ortogonais apresentados nos modelos matemáticos (XY e YZ);
- Aprofundamento nas técnicas de controle por alocação de pólos utilizando técnicas de controle ótimo para realocação parcial de pólos (somente os pólos não-dominantes);
- Estudo mais aprofundado das características de conforto e segurança adequadas às exigências comerciais visando a definição de uma dinâmica desejada mais eficiente;
- Estudos mais completos sobre os atuadores e suas limitações;
- Comparação com outras técnicas de controle;
- Estudo da transmissibilidade e imunidade a perturbações nas guias, assim como assimetrias causadas por degradação das molas ou outros elementos do sistema de suspensão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aldeen M., Crusca F., 1992, “**Quadratic Cost Function Design For Linear Optimal Control Systems**” IEEE Region 10 Conference, Melbourne. Aushalia.

Ang K. K., Wang S. Y., Quek S. T., 2002, “**Weighted energy linear quadratic regulator vibration control of piezoelectric composite plates**”, Institute of Physics Publishing, Smart Mater. Struct. 11 pp. 98–106.

Aström K., Häggglund T., 1995, “**PID Controllers: Theory, Design and Tuning**” 2nd. Edition, Instrument Society of America, USA.

Alexandridis A. T., Galanos G. D., 1987, “**Optimal Pole-Placement for Linear Multi-Input Controllable Systems**”, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. Cas-34, N°12, December 1987.

Ben Gaid M., Cela A., Kocik R., 2004, “**Distributed Control of a Car Suspension System**”, In Proceedings of the 5th EUROSIM Congress on Modeling and Simulation. Paris, France, September 2004.

Campos J., Davis L., Lewis F. L., Ikenaga S., Scully S., Evans M., 1999, “**Active Suspension Control of Ground Vehicle Heave and Pitch Motions**”, 7th IEEE Mediterranean Control Conference on Control and Automation, Haifa, Israel.

Chantranuwathana S., Peng H., 1999, “**Adaptive Robust Control for Active Suspensions**”, Proceedings of the American Control Conference.

Chen Z., Jin D., Huang X., Zhao L., Ma G., 1999, “**Design and development of an electronic controller for active hydro-pneumatic suspension system**” Vehicle Electronics Conference, Proceedings of the IEEE International, pp 52 - 57 vol.1.

Chi, T. C., 1999, “**Linear System Theory and Design**”, 3rd. Edition, Oxford University Press Inc., pp 231 – 255.

Claeyssen J. C. R., 2006, “**Métodos Matriciais**”, apostila do curso, PROMEC, UFRGS.

da Silveira M. A., 2003, “**Estudo de um atuador planar**”, tese de doutorado, PPGEM – UFRGS.

DeRusso P. M., Roy R. J., Close Ch. M., 1965, “**State Variables for Engineers**”, John Wiley & Sons, Inc..

Fujinaka, T., Omatu, S., 2001, “**Pole Placement Using Optimal Regulators**”, T.IEE Japan, Vol. 121-C, N°1.

Franklin G. F., Powell J. D., Emami-Naeini A., 1994, “**Feedback Control of Dynamic Systems**”, Addison-Wesley Publishing Company, pp 118 – 138 e pp 469 - 540.

Friedland, B., 2005, “**Control System Design, An Introduction to State-Space Methods**”, Dover Publications, Inc., pp 222 – 254, pp 259 – 267 e 290 - 298.

Giua A., Melas M., Seatzu C., 2004, “**Design of a Control Law for a Magneto-Rheological Suspension**”, Control Applications. Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Volume 2, Issue , 2-4 Sept. 2004 pp 1467 - 1472 Vol.2.

Hitachi Inspire the Next, 7 February 2006, “**Development of active roller guide**”. Hitachi, Ltd. Mito Building Systems Div. Elevator Development Center <http://www.hitachi-elev.com.hk/eng/elevators.html>.

Husmann J., 2005, “**Elevator car frame vibration damping device**”, Inventio AG, patente US6,959,787B2.

Ikenaga S., Lewis F. L., Campos J., Davis L., 2000, “**Active Suspension Control of Ground Vehicle based on a Full-Vehicle Model**”, American Control Conference, Proceedings of the 2000 pp 4019 - 4024 vol.6.

Istif I., Sagirli A., Kutlu K., 2002, “**Bond graph modeling and position control of an electrohydraulic elevator**”, Proceedings of ESDA2002: 6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, Istanbul, Turkey.

Kirk D. E., 1970, "**Optimal Control Theory**", Prentice-Hall, Inc., pp 29 – 42, 107 - 112.

Kruczek A., Stribrsky A., 2004, "**A Full-Car Active Suspension – Some Practical Aspects**", Mechatronics, ICM '04. Proceedings of the IEEE International Conference on, pp 41 – 45.

Leonard N. E., Levine, W. S., 1992, "**Using MATLAB to analyze and design Control Systems**", The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., pp 14 - 15.

Luenberger D. G., 1966, "**Observers for Multivariable Systems**", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-11, N°2.

Luenberger D. G., 1971, "**An Introduction to Observers**", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-16, N°6.

Misra, P., 1996, "**LQR Design with Prescribed Damping and Degree of Stability**", Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design.

Molinari B. P., 1971, "**Redundancy in Linear Optimum Regulator Problem**", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 16, Issue 1, pp. 83-85.

Molinari B. P., 1973, "**The Stable Regulator Problem and Its Inverse**", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-18, N° 5, October 1973.

Nai K., Forsythe W., Goodall R. M., 1994, "**Vibration Reduction Technics for High Speed Passenger Elevators**", Proceedings of the Third IEEE Conference on Control Applications, Page(s):965 - 970 vol.2.

Nori F., Frezza R., 2004, "**Linear Optimal Control Problems and Quadratic Cost Functions Estimation**", 12th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'04. Kusadasi, Aydin, Turkey.

Ogata, K., 1987, “**Dinámica de Sistemas**”, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A..

Ogata, K., 1996, “**Projeto de Sistemas Lineares de Controle com MATLAB**”, Prentice-Hall do Brasil LTDA, pp 21 - 74.

Ogata, K., 2003, “**Ingeniería de Control Moderna**”, 4ta. Ed., Prentice Hall, pp 779 – 871 e 882 – 897.

Oh J., Peng P., Winston H., Finn A., 2006, “**Elevator active suspension utilizing repulsive magnetic force**”, patente US2006/0175150A1.

Otis Elevator Company, Março 2007, <www.otis.com>.

Perkins W. R., Cruz J. B. JR, 1971, “**Feedback Properties of Linear Regulators**”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-16, N° 6, December 1971.

Preumont, A., 2002, “**Vibration Control of Active Structures, An Introduction**”, 2dn Edition, Kluwer Academic Publishers, pp 137 - 163.

Rinaldi, Vagner, 2004, “**Estudo de um motor linear tubular de relutância chaveado de fluxo transversal**”, dissertação de mestrado, PPGEE – UFRGS.

Sehitoglu, H., 1993, “**Optimal Eigenvalue Placement using Linear Quadratic Performance Index**”, The First IEEE Regional Conference Proceedings Aerospace Control Systems. Page(s):638 – 640.

Sha D., Bajic V. B., Yang H., 2002, “**New model and sliding mode control of hydraulic elevator velocity tracking system**”, Simulation Practice and Theory 9 pp 365–385, 2002 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

Shieh, L. S., Dib, H. M., Yates, R. E., 1988, “**Sequential design of linear quadratic state regulators via the optimal root-locus techniques**”, IEE Proceedings, Vol. 135, Pt. D, N°4.

Shieh, L. S., Zhang, J. L., Ganesan, S., 1990, “**Pseudo-continuous-time quadratic regulators with pole placement in a specific region**”, IEE Proceedings, Vol. 137, Pt. D, N°5.

Schneider P., Huck E., Schwarz P., 2001, “**A Modeling Approach for Mechatronic Systems -Modeling and Simulation of an Elevator System**”, XI. Intern. Symposium in Theoretical Electrical Engineering, Linz, Aug. 19. - 22, 2001.

Schindler, Elevadores Atlas, Março 2007, <www.atlas.schindler.com>.

Skalski C. A., 1984, “**High-Performance elevator control system**”, Elevator World, Nov. 1984.

Sugimoto, K., 1998, “**Partial Pole Placement by LQ Regulators: An Inverse Problem Approach**”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, N°5.

ThyssenKrupp Elevadores, Março 2007, <www.thyssenkruppelevadores.com.br>.

ThyssenKrupp Elevadores, 10 de novembro de 2005, “**ACTIVE ROLLER GUIDE: Practical Transfer Function Test**”, Guaíba, RS, Brasil.

Utsunomiya K., Okanamoto K., Yumura T., 2004, “**Guide for elevator**”, Mitsubishi, patente US6,786,304B2.

Utsunomiya K., Okanamoto K., Yumura T., 2006, “**Active horizontal vibration reducing device for elevator**”, Mitsubishi, patente US7,007,774B2

ANEXO 1: PLANO XY

No plano XY, o sistema tem similaridades com o modelo no plano YZ, mas sem o movimento de pêndulo e com um movimento de rotação sobre o eixo Z. Levando em conta estas considerações, o movimento no plano XY pode ser representado através do esquema apresentado na Fig. A.1.1:

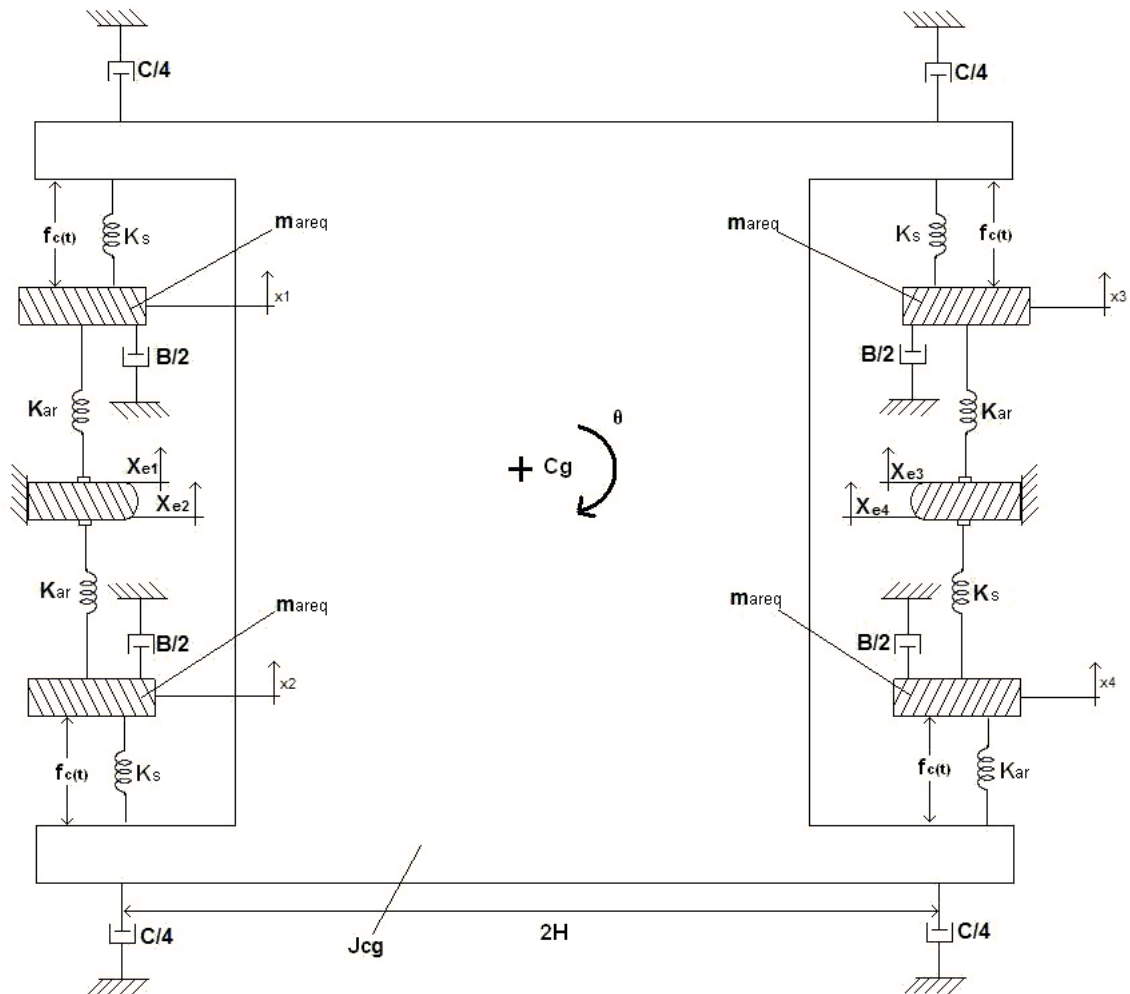


Figura A.1.1: Modelo do elevador no plano XY

Neste plano aparecem quatro mecanismos de suspensão acoplados. O sistema resultante apresenta seis graus de liberdade (quatro deslocamentos, x_1, x_2, x_3 e x_4 , relacionadas aos braços, uma rotação θ com relação ao centro de inércia Cg e um deslocamento x relacionado à massa do elevador). Para simplificar a análise, propõe-se compôr as suspensões esquerdas e direitas como sendo equivalentes, como pode ser visualizado no esquema apresentado na Fig. A.1.2.

Para o caso do plano XY, partindo da Fig. A.1.1, foi considerado que o modelo conta com dos sistemas de amortecimento idênticos e simétricos, cujas constantes de mola e forças dos atuadores valem o dobro do que no desenho original.

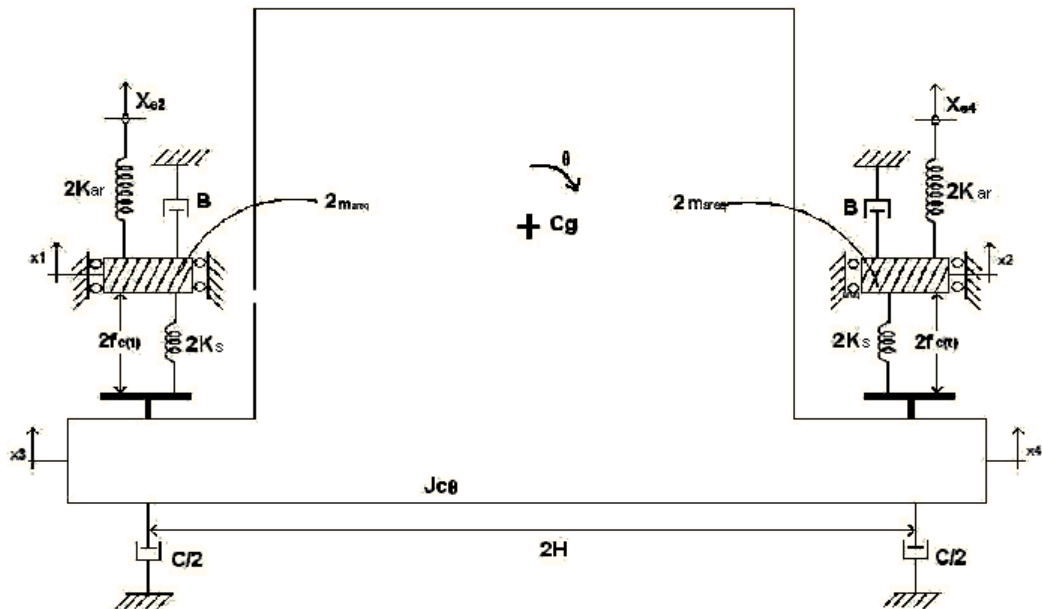


Figura A.1.2: Modelo simplificado do elevador no plano XY

Então, o sistema pode ser interpretado como o modelo clássico de meio-corpo ligado aos mecanismos direitos e esquerdos das suspensões. Este modelo simplificado apresenta quatro graus da liberdade: dois deslocamentos x_1 e x_2 dos braços, a rotação θ e o deslocamento y relacionado à massa principal do elevador. O estudo do modelo no plano XY feito como sendo o clássico modelo meio-corpo é apresentado na Seção 2.3.3.1 (ver Fig. A.1.3).

O sistema do elevador é determinado por sua massa m (sendo a metade da massa total do corpo), o comprimento L ($L = L_1 + L_2$), o centro de gravidade (dada por L_1 e por L_2) e o momento da inércia Jp .

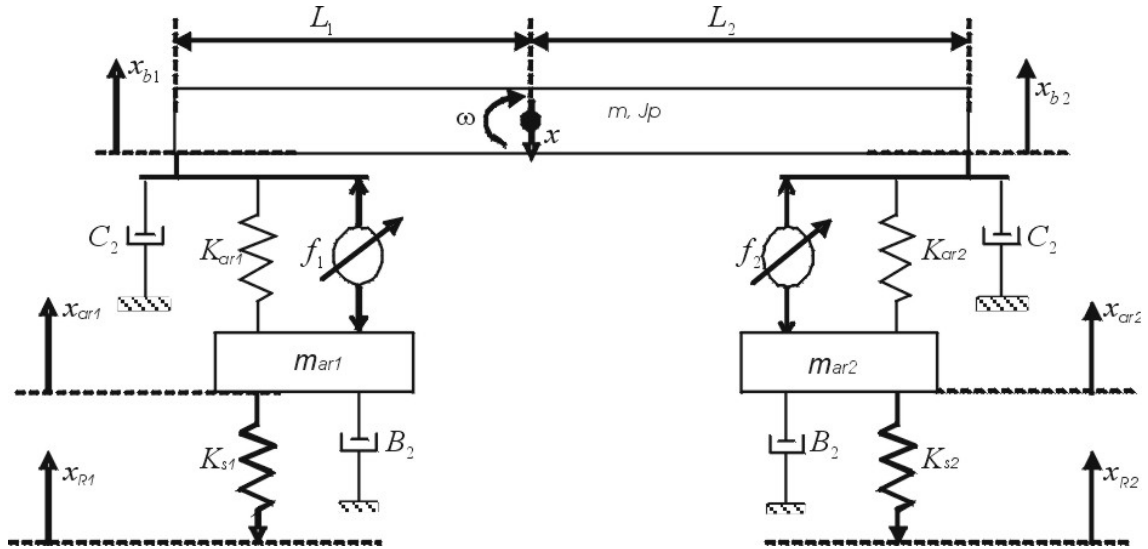


Figura A.1.3: Representação do modelo meio corpo

As equações dinâmicas de equilíbrio para os braços ficam:

$$m_{ar1}\ddot{x}_{ar1} = -f_1 - K_{ar1}(x_{ar1} - x_{b1}) - K_{s1}(x_{ar1} - x_{r1}) - B_2\dot{x}_{ar1} \quad (\text{A.1.1})$$

$$m_{ar2}\ddot{x}_{ar2} = -f_2 - K_{ar2}(x_{ar2} - x_{b2}) + K_{s2}(x_{ar2} - x_{r2}) - B_2\dot{x}_{ar2} \quad (\text{A.1.2})$$

Onde: m_{ar1}, m_{ar2} são as massas dos braços, K_{ar1}, K_{ar2} são as rigidezes das molas da suspensão passiva, K_{s1}, K_{s2} são as rigidezes das constantes de mola das borrachas dos roletes, $B = 2B_2$ é o coeficiente de amortecimento da suspensão passiva, f_1, f_2 são as forças ativas, x_{r1}, x_{r2} são os deslocamentos das guias, x_{b1}, x_{b2} são os deslocamentos do corpo (elevador), x_{ar1}, x_{ar2} são os deslocamentos passivos dos braços, $C = 2C_2$ é o coeficiente de amortecimento do elevador.

As forças atuantes na estrutura do elevador podem ser descritas como

$$F_1 = f_1 - K_{ar1}(x_{b1} - x_{ar1}) - C_2\dot{x}_{b1} \quad (\text{A.1.3})$$

$$F_2 = f_2 - K_{ar2}(x_{b2} - x_{ar2}) - C_2\dot{x}_{b2} \quad (\text{A.1.4})$$

A seguir, a equação rotacional é expressa como $F_1L_1 - F_2L_2 - J_p\dot{\omega} = 0$ e o movimento do centro de gravidade como $F_1 + F_2 - m\ddot{x} = 0$, onde \ddot{x} é a aceleração do centro de gravidade e $\omega = \dot{\theta}$ é a velocidade angular do corpo rígido. Adicionalmente, $x_{b1} = x + \theta L_1$ e $x_{b2} = x - \theta L_2$ são as relações de acoplamento entre as coordenadas da estrutura de elevador x_{b1}, x_{b2}, x e θ . Ao

substituir $x_{b1} = x + \theta L_1$ e $x_{b2} = x - \theta L_2$ na equação das forças que agem na estrutura do elevador e para os braços (equações (A.1.1), (A.1.2), (A.1.3) e (A.1.4)) obtém-se:

$$F_1 = f_1 - K_{b1}(x + \theta L_1 - x_{ar1}) - C_2 \dot{x} - C_2 \dot{\theta} L_1 \quad (\text{A.1.5})$$

$$F_2 = f_2 - K_{b2}(x - \theta L_2 - x_{ar2}) - C_2 \dot{x} + C_2 \dot{\theta} L_2 \quad (\text{A.1.6})$$

$$m_{w1} \ddot{x}_{w1} = -f_1 - K_{b1}(x_{ar1} - x - \theta L_1) - K_{ar1}(x_{ar1} - x_{r1}) - B_2 \dot{x}_{ar1} \quad (\text{A.1.7})$$

$$m_{w2} \ddot{x}_{w2} = -f_2 - K_{b2}(x_{ar2} - x + \theta L_2) + K_{ar2}(x_{ar2} - x_{r2}) - B_2 \dot{x}_{ar2} \quad (\text{A.1.8})$$

Reescrevendo os resultados dos movimentos de rotação e do centro de gravidade no sistema acoplado seguinte:

$$m_{w1} \ddot{x}_{w1} = (-K_{w1} - K_{b1})x_{w1} - f_1 + K_{w1}x_{r1} + K_{b1}x + K_{b1}L_1\theta - B_2 \dot{x}_{w1} \quad (\text{A.1.9})$$

$$m_{w2} \ddot{x}_{w2} = (-K_{w2} - K_{b2})x_{w2} - f_2 + K_{w2}x_{r2} + K_{b2}x - K_{b2}L_2\theta - B_2 \dot{x}_{w2} \quad (\text{A.1.10})$$

$$J_p \ddot{\theta} = C_2(L_2 - L_1)\dot{x} - (K_{b1}L_1^2 + K_{b2}L_2^2)\theta - C_2(L_1^2 + L_2^2)\dot{\theta} + (K_{b2}L_2 - K_{b1}L_1)x + L_1f_1 - L_2K_{b2}x_{w2} - L_2f_2 + L_1K_{b1}x_{w1} \quad (\text{A.1.11})$$

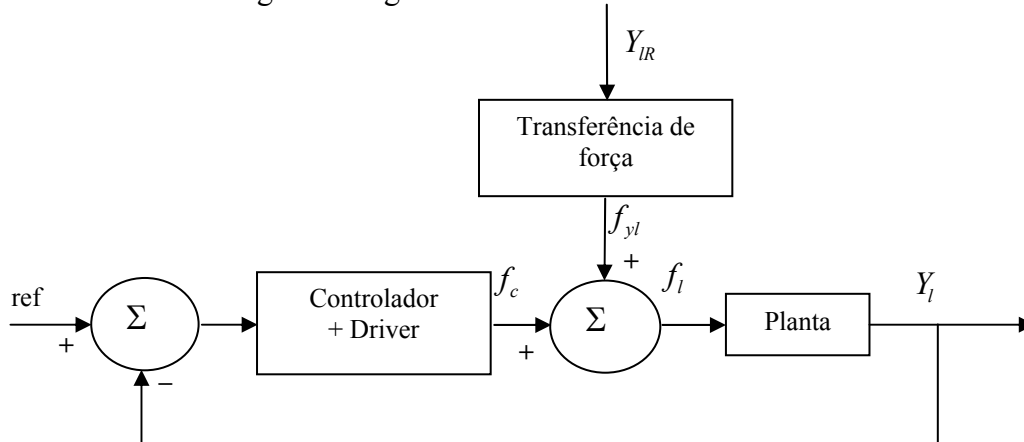
$$m\ddot{x} = (-K_{b1}L_1 + K_{b2}L_2)\theta + C_2(L_2 - L_1)\dot{\theta} - (K_{b1} + K_{b2})x + f_1 + f_2 + K_{b2}x_{w2} + K_{b1}x_{w1} - 2C_2\dot{x} \quad (\text{A.1.12})$$

É importante salientar que as equações para a rotação θ e para o deslocamento y são acopladas. Definindo as seguintes variáveis de estado $\mathbf{x} = [x_{w1} \ \dot{x}_{w1} \ x \ \dot{x} \ x_{w2} \ \dot{x}_{w2} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$ e os vetores de entradas $\mathbf{u} = [f_1 \ f_2]^T$ e $\mathbf{x}_r = [x_{r1} \ x_{r2}]^T$. Assim, o sistema representado em espaço de estados no plano XY é o seguinte:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{w1} + K_{b1}}{m_{w1}} & \frac{1}{m_{w1}} & \frac{K_{b1}}{m_{w1}} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{b1}L_1}{m_{w1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{b1}}{m} & 0 & -\frac{K_{b1} + K_{b2}}{m} & -\frac{2C_2}{m} & \frac{K_{b2}}{m} & 0 & \frac{-L_1K_{b1} + L_2K_{b2}}{m} & \frac{C_2(L_2 - L_1)}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{b2}}{m_{w2}} & 0 & -\frac{K_{w2} + K_{b2}}{m_{w2}} & -\frac{1}{m_{w2}} & \frac{K_{b2}L_2}{m_{w2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{b1}L_1}{J_p} & 0 & \frac{-L_1K_{b1} + L_2K_{b2}}{J_p} & \frac{C_2(L_2 - L_1)}{J_p} & -\frac{K_{b2}L_2}{J_p} & 0 & \frac{-L_1^2K_{b1} + L_2^2K_{b2}}{J_p} & -\frac{C_2(L_1^2 - L_2^2)}{J_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_{w1}} & 0 & \frac{K_{w1}}{m_{w1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_{w2}} & 0 & \frac{K_{w2}}{m_{w2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_1}{J_p} & \frac{L_2}{J_p} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ x_{r1} \\ x_{r2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ANEXO 2: DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA $Y_l(s)/Y_{lR}(s)$

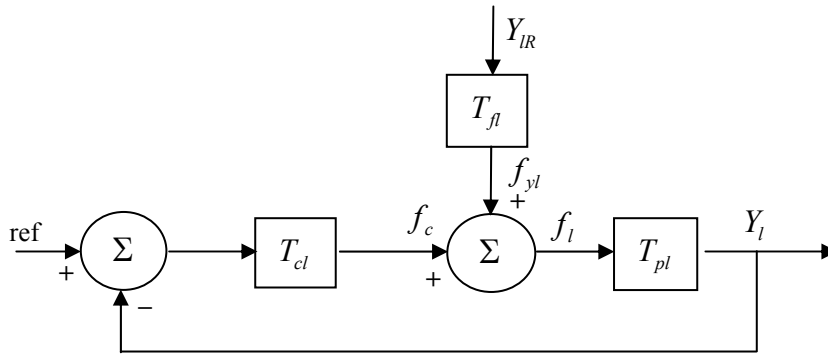
O sistema em malha fechada, com as forças f_l e f_r que são independentes, podem ser representado por um diagrama de blocos onde os sinais de referência e os deslocamentos das guias das grades são as entradas e o deslocamento da massa do elevador é a saída ($Y(t)$). A dinâmica da planta é representada como uma função de transferência onde a força de controle é somada às forças causadas por os deslocamentos das guias e suas entradas. Então, considerando somente a entrada em deslocamento da guia esquerda Y_{lR} , o sistema em malha fechada pode ser representado através do seguinte diagrama de bloco:



As funções de transferência definidas abaixo podem ser obtidas diretamente da representação do sistema em espaços de estados:



Usando estas representações e definindo a transferência de força como $T_{fl} = f_{yl}/Y_{lR}$, o diagrama de blocos pode ser definido como:

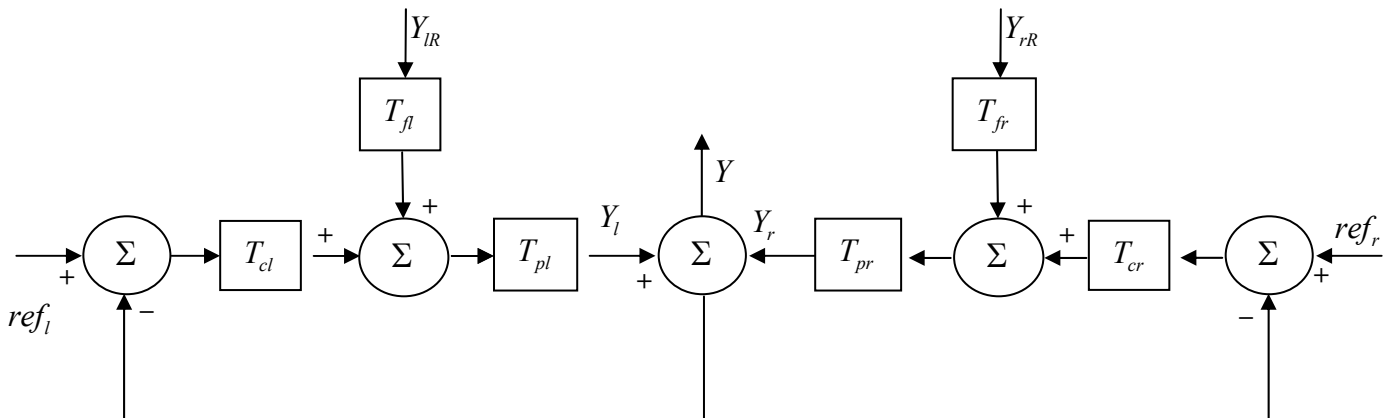


É necessário definir T_{fl} . Isto pode ser feito como o uso do diagrama de blocos anterior, considerando $T_{cl} = 0$. É obtido $Y_{IR} T_{fl} T_{pl} = Y_l = Y_{IR} T_{yl}$, e o resultado é $T_{fl} T_{pl} = T_{yl}$.

Usando a notação $T_{xx} = \frac{T_{xx}^{num}}{T_{xx}^{den}}$ para os numeradores e denominadores da função de transferência, obtém-se:

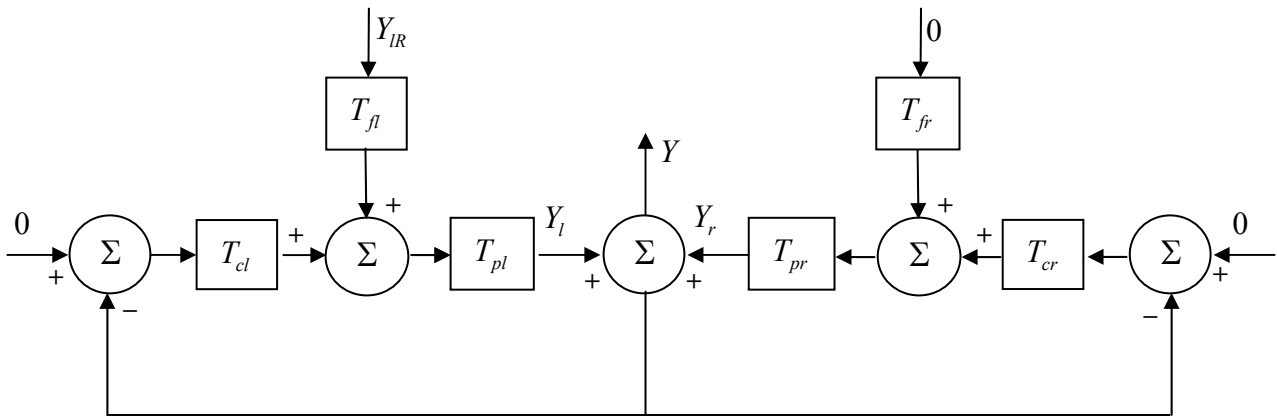
$$T_{fl} = \frac{T_{fl}^{num}}{T_{fl}^{den}} = \frac{T_{yl}^{num}}{T_{yl}^{den}} \frac{T_{pl}^{den}}{T_{pl}^{num}} = \frac{T_{yl}^{num}}{T_{pl}^{num}} \quad (\text{A.2.1})$$

Como o polinômio característico é único, $T_{pl}^{den} = T_{yl}^{den}$, para completar o sistema, pode ser usado o seguinte diagrama de bloco em malha fechada com os controladores:

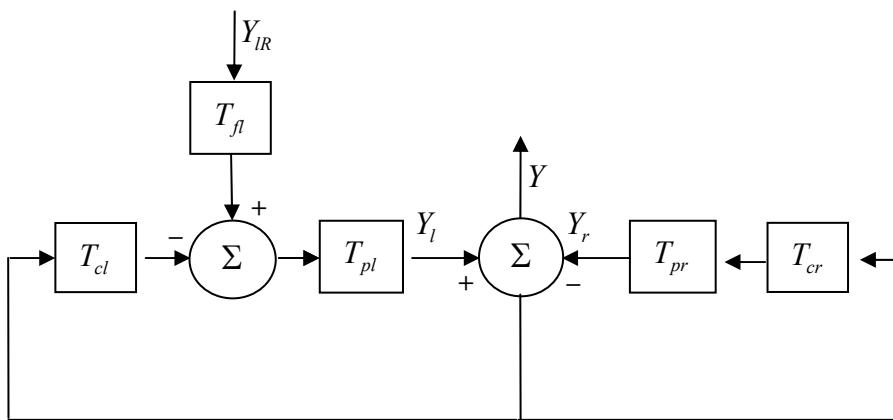


Para calcular a função de transferência global $T(s) = \frac{Y(s)}{Y_{IR}(s)}$ com o problema de ajuste

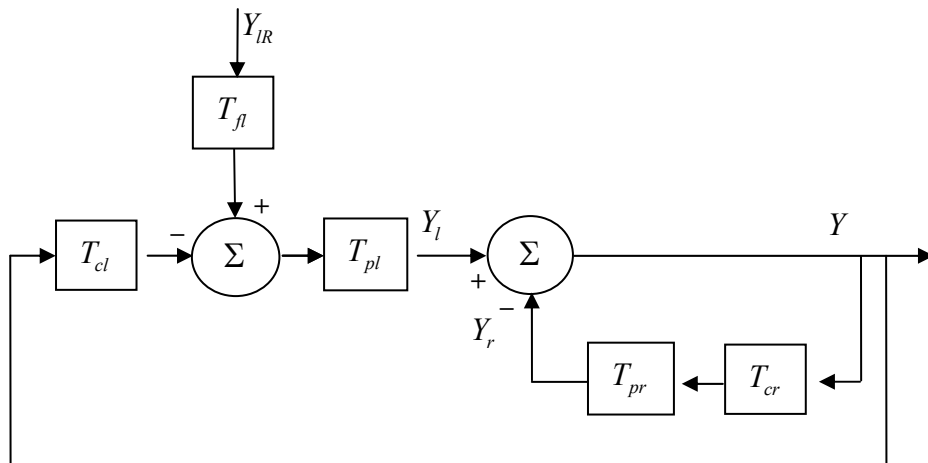
de referências nulas (ponto de equilíbrio do sistema de estados em malha fechada localizado na origem), é obtido o seguinte diagrama de blocos:



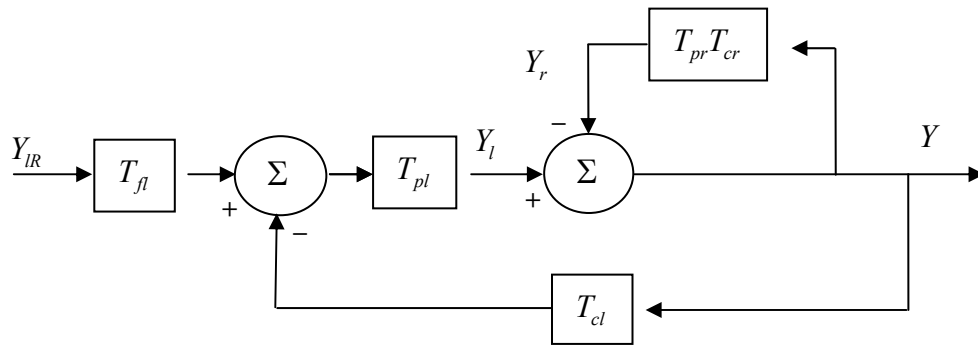
O diagrama de blocos pode ser simplificado e fica:



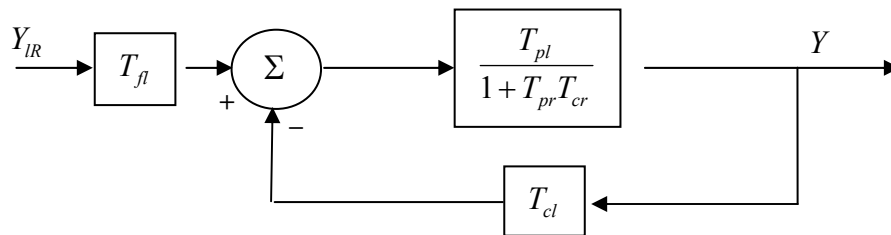
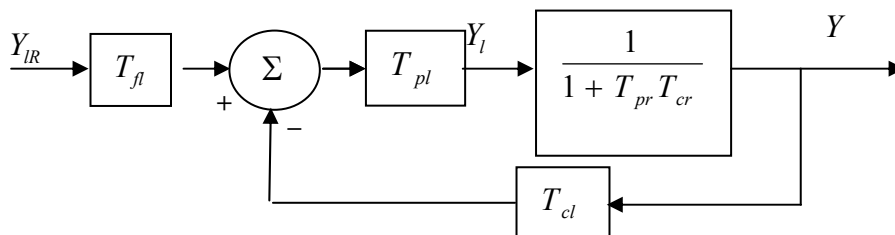
E também pode ser escrito como:



E, simplificando novamente,



E também as seguintes operações podem ser feitas:



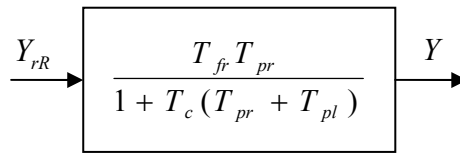
Resultando na seguinte função de transferência:

$$Y_{IR} \rightarrow \left[\frac{T_{fl} T_{pl}}{1 + T_{pr} T_{cr} + T_{pl} T_{cl}} \right] Y$$

Usando só a estrutura e os mesmos ganhos para os controladores nos dois atuadores, é obtido $T_{cr} = T_{cl} = T_c$ e a função de transferência é:

$$Y_{IR} \rightarrow \left[\frac{T_{fl} T_{pl}}{1 + T_c (T_{pr} + T_{pr})} \right] Y$$

Por simetria:



Usando a notação

$$T_{xx} = \frac{T_{xx}^{num}}{T_{xx}^{den}} \quad (\text{A.2.2})$$

para numeradores e denominadores da função de transferência, é obtido:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{Y_{rR}} &= \frac{\frac{T_{fl}^{num} T_{pl}^{num}}{T_{fl}^{den} T_{pl}^{den}}}{1 + \frac{T_c^{num}}{T_c^{den}} \left(\frac{T_{pr}^{num}}{T_{pr}^{den}} + \frac{T_{pl}^{num}}{T_{pl}^{den}} \right)} = \frac{T_{fl}^{num} T_{pl}^{num}}{T_{fl}^{den} T_{pl}^{den} + \frac{T_{fl}^{den} T_{pl}^{den} T_c^{num}}{T_c^{den} T_{pr}^{den} T_{pl}^{den}} (T_{pr}^{num} T_{pl}^{den} + T_{pl}^{num} T_{pr}^{den})} \\ \frac{Y}{Y_{rR}} &= \frac{T_{fl}^{num} T_{pl}^{num} T_c^{den} T_{pr}^{den} T_{pl}^{den}}{T_{fl}^{den} T_{pl}^{den} T_c^{den} T_{pr}^{den} T_{pl}^{den} + T_{fl}^{den} T_{pl}^{den} T_c^{num} T_{pr}^{den} T_{pl}^{den} + T_{fl}^{den} T_{pl}^{den} T_c^{num} T_{pr}^{den} T_{pl}^{den}} \\ \frac{Y}{Y_{rR}} &= \frac{T_{fl}^{num} T_{pl}^{num} T_c^{den} T_{pr}^{den} T_{pl}^{den}}{T_{fl}^{den} T_{pl}^{den} (T_c^{den} T_{pr}^{den} T_{pl}^{den} + T_c^{num} T_{pr}^{den} T_{pl}^{den} + T_c^{num} T_{pr}^{den} T_{pl}^{den})} \\ \frac{Y}{Y_{rR}} &= \frac{T_{fl}^{num} T_{pl}^{num} T_c^{den} T_{pr}^{den}}{T_{fl}^{den} (T_c^{den} T_{pr}^{den} T_{pl}^{den} + T_c^{num} T_{pr}^{den} T_{pl}^{den} + T_c^{num} T_{pr}^{den} T_{pl}^{den})} \\ \frac{Y}{Y_{rR}} &= \frac{T_{fl}^{num} T_{pl}^{num} T_c^{den} T_{pr}^{den}}{T_{fl}^{den} (T_{pr}^{den} (T_c^{den} T_{pl}^{den} + T_c^{num} T_{pl}^{den}) + T_c^{num} T_{pr}^{den} T_{pl}^{den})} \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

Também, por simetria:

$$\frac{Y}{Y_{rR}} = \frac{T_{fr}^{num} T_{pr}^{num} T_c^{den} T_{pl}^{den}}{T_{fr}^{den} (T_{pl}^{den} (T_c^{den} T_{pr}^{den} + T_c^{num} T_{pr}^{den}) + T_c^{num} T_{pl}^{den} T_{pr}^{den})} \quad (\text{A.2.4})$$

Numericamente a função de transferência é:

$$\frac{-5,684 \times 10^{-14} s^5 + 4,366 \times 10^{-11} s^4 - 67,278 s^3 + 229676,054 s^2 + 14919500,43 s + 3596069716,87}{s^6 + 109,258 s^5 + 33786,242 s^4 + 1788705,7 s^3 + 246341675,67 s^2 + 1479348455,013 s + 4532048805,5}$$

ANEXO 3: ESTABILIDADE, CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS

A.3.1 Estabilidade Segundo os Pólos

Neste anexo é apresentada a estabilidade de sistemas relacionada com a alocação dos pólos no plano complexo. Para mostrar isto é seguida a explicação apresentada por Friedland, 2005.

Quando o sistema em estudo encontra-se expresso na forma de espaço de estados $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$ (cada elemento deste sistema foi apresentado na Seção 3.3.1) a função de transferência é $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}(\mathbf{E}_1 s^{k-1} + \mathbf{E}_2 s^{k-2} + \dots + \mathbf{E}_k)}{s^k + a_1 s^{k-1} + \dots + a_k} + \mathbf{D}$ onde o denominador de $\mathbf{H}(s)$ é o polinômio característico $\mathbf{D}(s) = |\mathbf{sI} - \mathbf{A}| = s^k + a_1 s^{k-1} + \dots + a_k$ e $\mathbf{E}^1 = \mathbf{I}$, $\mathbf{E}^2, \dots, \mathbf{E}^k$ são as matrizes coeficientes da matriz adjunta para $(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}$. As raízes da equação característica $|\mathbf{sI} - \mathbf{A}| = 0$ são chamadas as *raízes características* ou *autovalores* do sistema.

A função de transferência $\mathbf{H}(s)$ pode ser expandida em frações parciais

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_1(s) + \mathbf{H}_2(s) + \dots + \mathbf{H}_{\bar{k}}(s) \quad (\text{A.3.1})$$

onde $\mathbf{H}_i(s) = \frac{\mathbf{R}_{1i}}{s - p_i} + \frac{\mathbf{R}_{2i}}{(s - p_i)^2} + \dots + \frac{\mathbf{R}_{v_i i}}{(s - p_i)^{v_i}}$. Os p_i ($i = 1, 2, \dots, \bar{k} < k$) são as raízes do denominador da Eq. (A.3.1) e os v_i são as multiplicidades correspondentes dessas raízes. Essas raízes do denominador são chamadas *pólos* da função de transferência.

A resposta impulsiva $\mathbf{H}(t)$ do sistema é obtida pela transformada inversa de Laplace da Eq. (A.3.1), sendo $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_1(t) + \mathbf{H}_2(t) + \dots + \mathbf{H}_{\bar{k}}(t)$, onde

$$\mathbf{H}_i(t) = \left(\frac{\mathbf{R}_{1i} + \mathbf{R}_{2i}t + \dots + \mathbf{R}_{v_i i}t^{v_i-1}}{(v_i - 1)!} \right) e^{p_i t} \quad (\text{A.3.2})$$

Então, a resposta impulso de um sistema linear invariante no tempo resulta na soma de exponenciais ponderadas da forma da Eq. (A.3.2).

A habilidade de um sistema para voltar ao equilíbrio esta relacionado com o sistema em resposta livre expressa por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \quad (\text{A.3.3})$$

Para o estado inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, a solução da Eq. (A.3.3) é $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$ onde $e^{\mathbf{A}t}$ é a matriz de transição de estados, dada por

$$e^{At} = \ell^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\sum_{j=1}^{v_i} \mathbf{R}_{ji} t^{j-1}}{(j-1)!} \right) e^{p_i t} \quad (\text{A.3.5})$$

As seguintes propriedades podem ser diretamente inferidas da Eq. (A.3.5):

1. Se as partes reais de todos os pólos são estritamente negativas (<0), então e^{At} tende assintoticamente a zero. Portanto, não importa o quão grande seja o estado inicial \mathbf{x}_0 , $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$. O sistema é dito *assintoticamente estável*.
2. Se algum pólo tem a parte real estritamente positiva, a matriz de transição de estados (Eq. (A.3.5)) vai ter pelo menos um termo que tenderá a infinito quando $t \rightarrow \infty$. Nesse caso sempre é possível achar algum estado inicial que produza $\mathbf{x}(t)$ infinito. O sistema é dito *instável*.
3. Se todos os pólos têm parte real não positiva, mas um ou mais deles têm um zero na parte real, a situação é mais complexa: se todos os pólos que têm parte real zero têm multiplicidade 1, então os termos da matriz de transição de estados são da forma $\mathbf{R}_i e^{j\omega_i t}$. Como $|e^{j\omega_i t}| = 1$, fica claro que esses termos na matriz de transição de estados estão limitados. Portanto, o estado $\mathbf{x}(t)$ que evolui desde qualquer estado inicial \mathbf{x}_0 será também limitado. Mas podem existir alguns estados iniciais desde os quais a solução não tenda a zero assintoticamente. Sistemas desse tipo são chamados de *estáveis* mas não *assintoticamente estáveis*. Se algum dos pólos que têm parte real igual a zero tem multiplicidade diferente de um, então, devido ao polinômio em t que multiplica $e^{j\omega_i t}$, vai existir pelo menos um termo de e^{At} que tenda a infinito quando $t \rightarrow \infty$, portanto o sistema é *instável*.

Estas diferentes situações são resumidas na Tab. A.3.1

Tabela A.3.1: Condições de estabilidade para sistemas lineares

Condição		Conseqüência
1. $\text{Re}(p_i) < 0$	para todo i	Sistema assintoticamente estável
2. $\text{Re}(p_i) > 0$	para algum i	Sistema instável
3. $\text{Re}(p_i) = 0$ (a) p_i tem multiplicidade 1 (b) p_j tem multiplicidade k	para algum $i = j$, e	Sistema estável, mas não assintoticamente estável Sistema instável

A.3.2 Controlabilidade

Pode-se demonstrar [Friedland, 2005] que qualquer sistema da forma da Eq. (A.3.5) pode ser transformado em quatro subsistemas como é apresentado na Fig. A.3.1:

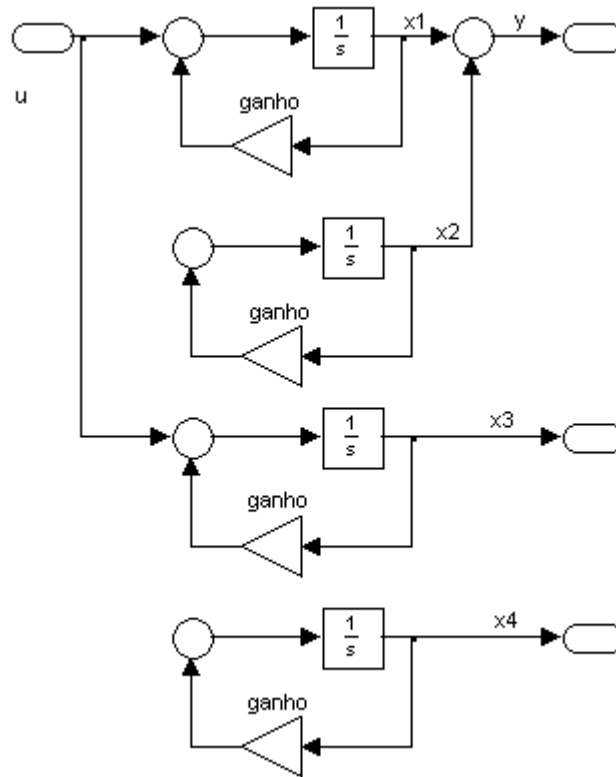


Figura A.3.1: Representação por diagrama de blocos dos possíveis subsistemas da Eq. (A.3.5)

Na Fig. A.3.1 se tem um primeiro subsistema que é controlável e observável; o segundo é não controlável e observável; o terceiro é controlável e não é observável e o quarto é tanto não controlável como não observável. Assim, como a função de transferência do sistema relaciona a entrada e a saída do sistema observa-se na Fig. A.3.1 que esta fica determinada unicamente pelas condições de controlabilidade e observabilidade pelo fato de existir um subsistema controlável e observável. Portanto, se a função de transferência de um sistema SISO (uma entrada e uma saída – Single Input, Single Output) ficar de ordem menor que o sistema original, então o sistema deve conter algum subsistema não controlável ou não observável, ou os dois. Por convenção, se um sistema tem um subsistema não controlável é dito *não controlável*, da mesma maneira, se contém um subsistema não observável o sistema é dito *não observável*.

Teorema de controlabilidade: Um sistema é controlável se e somente se a matriz

$$\mathbf{P}(T, t) = \int_t^T \mathbf{\Phi}(T, \lambda) \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{B}^T(\lambda) \mathbf{\Phi}^T(T, \lambda) d\lambda$$

é não singular para algum $T > t$, onde $\mathbf{\Phi}(T, t)$ é a matriz de transição de estados do sistema.

A demonstração deste teorema é apresentada por Friedland, 2005, e foi primeiramente desenvolvida por Kalman. Neste trabalho é usado o enfoque algébrico do teorema, o qual é apresentado a seguir e baseado em Ogata, 2003.

Na seqüência obtém-se a condição para a controlabilidade completa do sistema. Sem perda de generalidade, é suposto que o estado final é a origem do espaço de estados e o tempo inicial é zero, ou seja, $t_0=0$.

A solução da Eq. (4.23) é $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau$. Com o uso da definição de controlabilidade completa do estado que foi estabelecida, tem-se $\mathbf{x}(t_1) = 0 = e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau$ ou

$$\mathbf{x}(0) = -\int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (\text{A.3.5})$$

Das propriedades das matrizes é sabido que

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\mathbf{A}^{m-1} \quad (\text{A.3.6})$$

Com o uso das equações (A.3.5) e (A.3.6), tem-se

$$e^{-\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) \mathbf{A}^k \quad (\text{A.3.7})$$

Ao substituir a Eq. (A.3.7) na Eq. (A.3.5) obtém-se

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau \quad (\text{A.3.8})$$

Definindo $\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k$ então a Eq. (A.3.8) é

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \beta_k = -[\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]_{n \times n} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (\text{A.3.9})$$

Se o sistema é de estado completamente controlável, então, dado qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$, a Eq. (A.3.9) deve ser satisfeita.

O resultado obtido pode ser usado também para o caso no qual o vetor u seja de dimensão r . Se o sistema é descrito por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ onde u é um vetor de dimensão r , demonstra-se que a condição para a controlabilidade completa de estado é que a matriz

$[\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] (n \times nr)$ tenha posto n , ou seu vetores coluna sejam linearmente independentes. A matriz $[\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] (n \times nr)$ é a *matriz de controlabilidade*.

No projeto prático de um sistema de controle, pode ser necessário controlar a saída ao invés de controlar os estados do sistema. A controlabilidade completa de estados não é condição necessária nem suficiente para controlar a saída do sistema. Por este motivo, é conveniente definir de forma independente a controlabilidade completa da saída. Seja o sistema definido pelas equações (4.23) e (4.24), ele é de saída completamente controlável se for possível montar um vetor de controle sem restrições $\mathbf{u}(t)$ que transfira qualquer saída inicial $\mathbf{y}(t_0)$ até qualquer saída final $\mathbf{y}(t_1)$ em um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

Resulta possível demonstrar que a condição de controlabilidade completa na saída é a seguinte: a matriz $[\mathbf{CB} \ \mathbf{CAB} \ \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \ \mathbf{D}] (m \times (n+1)r)$ tem posto m .

A condição de controlabilidade completa de estado pode ser descrita em termos das funções de transferência ou matrizes de transferência. Pode-se demonstrar que uma condição necessária e suficiente de controlabilidade completa de estado é que não aconteça um cancelamento na função transferência ou na matriz de transferência. Se isto acontecer, o sistema não pode ser controlado na direção do modo (subsistema) cancelado.

Para um sistema parcialmente controlável, se os modos não controláveis são estáveis e os modos instáveis são controláveis, o sistema é dito *estabilizável*.

A.3.3 Observabilidade

Ao analisar as condições de observabilidade, o sistema é considerado sem excitação, o, pois se o sistema fosse o determinado pelas equações (4.23) e (4.24), teria solução $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$ e $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}$.

Como as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} e $\mathbf{u}(t)$ são conhecidos, os dois últimos termos do segundo membro desta equação são quantidades conhecidas que podem ser diminuídas do valor observado de $\mathbf{y}(t)$. Na seqüência vai ser portanto considerado o sistema livre (não forçado).

Seja o seguinte sistema livre (não forçado):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (\text{A.3.10})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (\text{A.3.11})$$

Onde \mathbf{x} é o vetor de estado ($n \times 1$), \mathbf{y} é o sinal de saída ($m \times 1$), \mathbf{A} é a matriz constante ($n \times n$) e \mathbf{C} é a matriz constante ($m \times n$). Apresenta-se o seguinte teorema:

Teorema de observabilidade:

Um sistema é observável se e somente se a matriz

$$\mathbf{M}(T, t) = \int_t^T \Phi^T(\lambda, t) \mathbf{C}^T(\lambda) \mathbf{C}(\lambda) \Phi(\lambda, t) d\lambda$$

é não singular para algum $T > t$, onde $\Phi(T, t)$ é a matriz de transição de estados do sistema. A matriz $\mathbf{M}(T, t)$ para o teste de observabilidade é usualmente chamada o *grammian de observabilidade*. A demonstração deste teorema é apresentada por Friedland, 2005. Neste trabalho vai se usar o enfoque algébrico do teorema, o qual é apresentado a seguir e baseado em Ogata, 2003.

O vetor de saída é $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{At} \mathbf{x}(0)$. Usando a Eq. (A.3.7), obtém-se

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \mathbf{A}^k. \text{ Assim, } \mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) \text{ ou}$$

$$\mathbf{y}(t) = \alpha_0(t) \mathbf{C} \mathbf{x}(0) + \alpha_1(t) \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t) \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}(0) \quad (\text{A.3.12})$$

Portanto, se o sistema é completamente observável, a saída $\mathbf{y}(t)$ durante um intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_1$, $\mathbf{x}(0)$ pode ser determinada a partir da Eq. (A.3.12). Isto requer que o posto da

matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$ ($nm \times n$) seja n , ou seja, o sistema definido pelas equações (A.3.10) e (A.3.11) é

completamente observável se, e somente se, a matriz $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$ ($nm \times n$) tem posto n .

Vai-se agora obter a condição necessária: supondo que posto de $\mathbf{E} < n$, então existe um

$$\mathbf{x}(0) \text{ (} n \times 1 \text{) tal que } \mathbf{N} \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{N} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}_{nm \times n} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{x}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}(0) \end{bmatrix}_{nm \times 1} = \mathbf{0}.$$

Portanto, para um determinado $\mathbf{x}(0)$, obtém-se $\mathbf{C} \mathbf{A}^i \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Com o uso da Eq. (A.3.7) obtém-se $e^{At} = \alpha_0(t) \mathbf{I} + \alpha_1(t) \mathbf{A} + \alpha_2(t) \mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t) \mathbf{A}^{m-1}$ onde m ($m \leq n$) é o grau do polinômio mínimo para \mathbf{A} . Então, para certo $\mathbf{x}(0)$, tem-se que $\mathbf{C} e^{At} \mathbf{x}(0) = \mathbf{C} [\alpha_0(t) \mathbf{I} + \alpha_1(t) \mathbf{A} + \alpha_2(t) \mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t) \mathbf{A}^{m-1}] \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Conseqüentemente,

$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = 0$, o que implica que, para um determinado $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(0)$ não pode ser determinado a partir de $\mathbf{y}(t)$. Assim, o posto da matriz \mathbf{E} deve ser igual a n .

A seguir, obtém-se a condição suficiente: supondo que o posto de $\mathbf{E} = n$, como $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$, pré-multiplicando ambos os membros da equação por $e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T$, obtém-se $e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$. Integrando agora a equação,

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{y}(t)dt = \int_0^t e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)dt \quad (\text{A.3.13})$$

O primeiro termo da Eq. (A.3.13) é uma quantidade conhecida. Define-se

$$\mathbf{Q}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{y}(t)dt, \quad (\text{A.3.14})$$

Então, a partir das equações (A.3.13) e (A.3.14), tem-se

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{x}(0) \quad (\text{A.3.15})$$

onde $\mathbf{W}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}dt$. É suposto que $\mathbf{W}(t)$ é uma matriz singular ($n \times n$), ou seja, se $|\mathbf{W}(t)|$ for igual a zero, então $\mathbf{x}^T\mathbf{W}(t_1)\mathbf{x} = \int_0^{t_1} \|\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}\|^2 dt = 0$, que significa que $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} = 0$ para $0 \leq t \leq t_1$. Isto implica que o posto de $\mathbf{E} < n$. Portanto, $|\mathbf{W}(t)| \neq 0$, ou seja, que é não singular. Dessa maneira, a partir da Eq. (A.3.15), obtém-se

$$\mathbf{x}(0) = [\mathbf{W}(t)]^{-1}\mathbf{Q}(t) \quad (\text{A.3.16})$$

Assim, $\mathbf{x}(0)$ é determinado a partir da Eq. (A.3.16).

Foi demonstrado que $\mathbf{x}(0)$ é determinado a partir de $\mathbf{y}(t)$ se, e somente se, o posto de \mathbf{P} é n . Então, a partir dessa análise, pode se expressar a condição para a observabilidade completa da seguinte maneira. O sistema descrito pelas equações (A.3.10) e (A.3.11) é completamente observável se, e somente se, a matriz $[\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T]$ ($n \times nm$) tem posto n , ou tem n vetores coluna linearmente independentes. Esta matriz é denominada *matriz de observabilidade*.

As condições para observabilidade completa também podem-ser expressas em termos de funções de transferência ou matrizes de transferência. A condição necessária e suficiente para observabilidade completa é que não ocorra um cancelamento na função de transferência ou na matriz de transferência. Se ocorrer um cancelamento, o modo (subsistema) cancelado não pode ser observado na saída.

A.3.4 Princípio de Dualidade.

A seguir analisa-se a relação entre controlabilidade e observabilidade. É introduzido o princípio de dualidade para esclarecer as analogias evidentes entre controlabilidade e observabilidade.

Seja o sistema S_1 , representado pelas equações (4.23) e (4.24), com a matriz $\mathbf{D} = 0$, e o sistema dual S_2 seguinte

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^T \mathbf{z} + \mathbf{C}^T \mathbf{v} \quad (\text{A.3.17})$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{B}^T \mathbf{z} \quad (\text{A.3.18})$$

Onde \mathbf{z} é o vetor de estados $n \times 1$, \mathbf{v} é o sinal de saída $m \times 1$, \mathbf{n} é sinal de controle $r \times 1$, \mathbf{A}^T é a matriz transposta de \mathbf{A} , \mathbf{B}^T é a matriz transposta de \mathbf{B} , \mathbf{C}^T é a matriz transposta de \mathbf{C} .

O princípio de dualidade expressa que o sistema S_1 é de estado completamente controlável (observável) se, e somente se, S_2 é de estado completamente observável (controlável).

Para verificar este princípio, escrevem-se as condições necessárias e suficientes para controlabilidade e observabilidade completa dos sistemas S_1 e S_2 .

Para o sistema S_1 :

1. Uma condição necessária e suficiente para a controlabilidade completa é que o posto da matriz $[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] (n \times nr)$ seja n .
2. Uma condição necessária e suficiente para a observabilidade completa é que o posto da matriz $[\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T] (n \times nm)$ seja n .

Para o sistema S_2 :

1. Uma condição necessária e suficiente para a controlabilidade completa de estado é que o posto da matriz $[\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T] (n \times nm)$ seja n .
2. Uma condição necessária e suficiente para a observabilidade completa é que o posto da matriz $[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] (n \times nr)$ seja n .

A demonstração deste princípio é evidente. A partir dele, a observabilidade de um determinado sistema fica verificada, provando a controlabilidade de seu dual.

Para um sistema parcialmente observável, se os modos não observáveis são estáveis e os modos observáveis são instáveis, ele é dito de detectável. Observe-se que o conceito de detectabilidade é dual ao conceito de estabilizabilidade.

A.3.5 Obtenção da Matriz \mathbf{K}_e partindo do Problema Dual

A Eq. (3.18) é obtida da seguinte maneira: O sistema original fica definido pelas equações (4.23) e (4.24), e o dual pelas equações $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^T \mathbf{z} + \mathbf{C}^T \mathbf{v}$ e $n = \mathbf{B}^T \mathbf{z}$, supondo que o sinal de controle é $\mathbf{v} = -\mathbf{K}\mathbf{z}$. Assim, o sistema é $\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{K})\mathbf{z}$. Na Seção A.3.5 é apresentada a equação $\mathbf{K} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1}$ onde $\mathbf{T} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad \cdots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T] \mathbf{W}$.

Para o sistema original a matriz de observabilidade é $\mathbf{N} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad \cdots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T]$. Portanto, a matriz \mathbf{T} pode ser também escrita como $\mathbf{T} = \mathbf{N}\mathbf{W}$.

Como $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$, tem-se que $\mathbf{T}^T = \mathbf{W}^T \mathbf{N}^T = \mathbf{W}\mathbf{N}^T$ e $(\mathbf{T}^T)^{-1} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^T)^{-1}$. Tomando a transposta de ambos os membros da Eq. (A.3.23), fica

$$\mathbf{K}^T = (\mathbf{T}^{-1})^T \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{T}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^T$, obtém-se a Eq. (3.18), partindo da consideração do problema como dual.

A.3.6 Determinação dos Ganhos por Alocação de Pólos

Supondo que o sistema das equações (A.3.10) e (A.3.11) não é completamente controlável, assim, o posto da matriz de controlabilidade tem que ser menor que n , ou seja *posto* $[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = q < n$. Isto implica na existência de q vetores coluna linearmente independentes na matriz de controlabilidade. Sejam esses q vetores definidos por $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_q$. Também irão existir $n-q$ vetores adicionais $\mathbf{v}_{q+1}, \mathbf{v}_{q+2}, \dots, \mathbf{v}_n$, tais que a matriz $\mathbf{P} = [\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{f}_q \quad \mathbf{v}_{q+1} \quad \mathbf{v}_{q+2} \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$ apresenta posto n . Pode-se demonstrar que

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \vdots & \mathbf{A}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \text{ e } \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Define-se } \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \mathbf{P} = [\mathbf{k}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{k}_2]. \text{ Portanto,}$$

se tem

$$\begin{aligned}
|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| &= |\mathbf{P}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{P}| \\
&= |s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{P}| \\
&= |s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}| \\
&= \left| s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \vdots & \mathbf{A}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \cdots & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{array}{cc} s\mathbf{I}_q - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_1 & -\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_2 \\ 0 & s\mathbf{I}_{n-q} - \mathbf{A}_{22} \end{array} \right| \\
&= |s\mathbf{I}_q - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_1| \cdot |s\mathbf{I}_{n-q} - \mathbf{A}_{22}| = 0
\end{aligned}$$

onde \mathbf{I}_q é a matriz identidade com dimensão q e \mathbf{I}_{n-q} é a matriz identidade com dimensão $(n - q)$. Pode-se verificar que os autovalores de \mathbf{A}_{22} não são dependentes de \mathbf{K} . Portanto, se o sistema não é completamente controlável, existem autovalores da matriz \mathbf{A} que não podem ser alocados de maneira arbitrária. Assim, a condição necessária para situar arbitrariamente os autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ é que o sistema seja completamente controlável.

Na seqüência, é demonstrada a condição suficiente, ou seja, se o sistema é completamente controlável os autovalores da matriz \mathbf{A} podem ser alocadas arbitrariamente. Para demonstrar a condição suficiente é conveniente transformar as equações (4.23) e (4.24) para suas formas canônicas controláveis. Define-se uma matriz de transformação $\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W}$ onde

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \text{ é a matriz de controlabilidade e } \mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ com as } a_i$$

sendo os coeficientes do polinômio característico $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$.

Define-se um novo vetor de estado $\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$. Se a matriz de controlabilidade \mathbf{M} tem posto n (o que significa que o sistema é completamente controlável), então a inversa da matriz \mathbf{T} existe e a Eq. (4.23) pode ser modificada como segue

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u \tag{A.3.17}$$

onde

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.18})$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.19})$$

A Eq. (A.3.17) encontra-se na forma canônica controlável. Portanto, a Eq. (4.23) pode se transformada à sua forma canônica controlável se o sistema é completamente controlável e se o vetor de estado \mathbf{x} é transformado no vetor de estado $\hat{\mathbf{x}}$ com o uso da matriz de transformação \mathbf{T} .

Agora é escolhido o conjunto de autovalores desejados $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Assim, a equação característica desejada é

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \quad (\text{A.3.20})$$

Denota-se

$$\mathbf{K}\mathbf{T} = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1] \quad (\text{A.3.21})$$

Quando é usado $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$ para controlar o sistema da Eq. (A.3.17), a equação do sistema é $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$. Portanto, a equação característica fica $|s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{T}| = 0$. Esta equação característica é igual à equação característica para o sistema definido por a Eq. (A.3.20), quando é usado o sinal de controle $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Isto pode ser visto melhor da seguinte maneira: seja $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$, a equação característica para este sistema é $|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = |\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{T}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{T}| = 0$.

Simplifica-se agora a equação característica do sistema a sua forma canônica controlável. Levando em conta as equações (A.3.18), (A.3.19) e (A.3.21), obtém-se

$$\begin{aligned}
|s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{T}| &= \\
&= \left| s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} \right| \quad (\text{A.3.22}) \\
&= \begin{vmatrix} s & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \cdots & s + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix} \\
&= s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) = 0
\end{aligned}$$

Esta é a equação característica para o sistema com realimentação de estados. Portanto, a mesma deve ser igual a Eq. (A.3.20), que é a equação característica desejada. Então, igualando os coeficientes das potências de s , obtém-se

$$\begin{aligned}
a_1 + \delta_1 &= \alpha_1 \\
a_2 + \delta_2 &= \alpha_2 \\
&\vdots \\
a_n + \delta_n &= \alpha_n
\end{aligned}$$

Substituindo estas equações na Eq. (A.3.21), fica

$$\mathbf{K} = [\delta_n \ \delta_{n-1} \ \cdots \ \delta_1] \mathbf{T}^{-1} = [\alpha_n - a_n \ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \ \cdots \ \alpha_2 - a_2 \ \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1} \quad (\text{A.3.23})$$

Portanto, se o sistema é completamente controlável, todos os autovalores podem ser alocados arbitrariamente escolhendo a matriz \mathbf{K} de acordo com a Eq. (A.3.23) (condição suficiente). Foi demonstrado que uma condição necessária e suficiente para a alocação arbitrária dos pólos sistema é que o sistema seja completamente controlável. Deduz-se também que se o sistema não é completamente controlável, porém estabilizável, é possível fazer com que o sistema completo seja estável ao alocar os pólos em malha fechada nas posições desejadas para os q modos controláveis. Os outros $n-q$ modos não controláveis são estáveis. Então, o sistema completo é estabilizável.

ANEXO 4: CONTROLE ÓTIMO

O controle ótimo é atribuído originalmente à formulação do problema do braquistocrono, proposto pelo matemático suíço Johann Bernoulli em 1696. O problema consistia em determinar qual, entre todas as trajetórias possíveis, era a que levava uma partícula (sem atrito) no menor tempo possível, desde o ponto A até um ponto B no mesmo plano vertical, sujeita somente à ação da gravidade.

Uma formulação matemática moderna do problema do braquistocrono é a seguinte:

Achar o sinal de controle $\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ que leve o sistema $\dot{x}(t) = u(t)\sqrt{y(t)}$, $\dot{y}(t) = v(t)\sqrt{y(t)}$ desde o ponto $\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ ao ponto $\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ no tempo mínimo, sujeito à restrição $u^2 + v^2 = 1$. Esse problema tem a forma de um típico problema de controle ótimo.

A solução deste problema é atribuída a Johann e Jacob Bernoulli, Newton e L'Hopital. Métodos, como o cálculo variacional podem ser usados na resolução de problemas de controle ótimo como o apresentado por Kirk, 1970.

Nos problemas de controle ótimo, o intuito é determinar uma trajetória que minimize um *funcional* (índice de desempenho ou função custo) sujeito a restrições (as equações do sistema). O problema análogo do cálculo é determinar um ponto que atinja o mínimo valor de uma função.

Definição de funcionais: um funcional J é uma regra de correspondência que atribui a cada função g pertencente à certa classe Ω um único número real, onde Ω é chamado de domínio do funcional, e o conjunto de números reais associados com a função em Ω é chamado “range” do funcional.

Função custo (ou índice de desempenho): o problema do controle ótimo é achar um sinal de controle $\mathbf{u}^* \in U$ que leve o sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ a seguir a trajetória $\mathbf{x}^* \in X$ que minimiza a função custo

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (\text{A.4.1})$$

Princípio de óptimalidade: para entender a idéia do critério de otimização em variáveis de estados, será introduzida com o uso de sistemas de tempo discreto que são mais simples e permitem visualizar melhor o método. O estado de um sistema discreto descreve uma trajetória que realiza transições discretas de um estado a outro sob o efeito de uma entrada. Quando um

critério de otimização é associado ao sistema, cada transição de estado tem associado um custo ou penalidade. Por exemplo, podem penalizar-se as transições de estados que se afastam muito do estado final desejado, ou as ações de controle de valores demasiado elevados. Na medida em que o sistema evolui de estado para estado, os custos vão se somando até acumular um custo total associado à trajetória. No grafo da Fig. A.4.1 é representado um sistema utilizado para entender melhor a idéia.

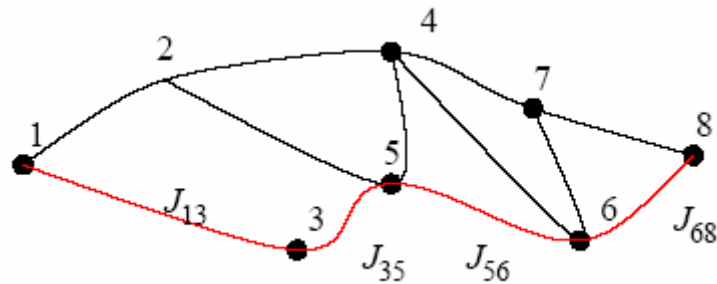


Figura A.4.1: Grafo de caminhos ótimos

Na Fig. A.4.1 aparecem 8 estados de um sistema discreto com suas transições possíveis. O sistema passa de um estado a outro a cada valor de tempo k determinado pela entrada $\mathbf{u}(k)$ e as equações $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$. As transições possíveis são representadas pelos arcos que unem o estado inicial ao estado final através dos estados intermediários. O custo associado a cada transição é representado com a letra J ; por exemplo, o custo de mover-se do estado 3 ao estado 5 é J_{35} .

Assumindo que os custos se acumulam de forma aditiva, pode-se verificar que a trajetória 1-3-5-6-8 (marcada em vermelho), por exemplo, tem um custo total $J_T = J_{13} + J_{35} + J_{56} + J_{68}$. Existem várias rotas alternativas do estado 1 ao 8. O custo total dependerá da trajetória escolhida. Mas pode-se provar que a soma dos caminhos ótimos é o caminho ótimo total.

O que foi descrito é o princípio introduzido por Bellman como o Princípio de Óptimalidade. “Em qualquer ponto intermediário \mathbf{x}_i em uma trajetória ótima entre \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_f , a trajetória desde \mathbf{x}_i ao ponto final \mathbf{x}_f deve ser em si uma trajetória ótima.”

O sinal de controle $\mathbf{u}(k)$ que determina a trajetória de menor custo é a estratégia ótima. Isto foi desenvolvido para o caso discreto, em sistemas de tempo contínuo, a acumulação de custos é representada mediante a integração invés da soma.

Seguindo um extenso desenvolvimento baseado em cálculo variacional, o Hamiltoniano e os multiplicadores de Lagrange, conclui-se a que para a otimização de problemas lineares com

a Eq. (4.23) se obtém $H^0 = \frac{1}{2} \left[\langle \mathbf{x}^d - \mathbf{x}^0, \mathbf{Q}(\mathbf{x}^d - \mathbf{x}^0) \rangle + \langle \mathbf{u}^0, \mathbf{R}\mathbf{u}^0 \rangle \right] + \langle \mathbf{p}^0, \mathbf{A}\mathbf{x}^0 + \mathbf{B}\mathbf{u}^0 \rangle$ que é a energia total do sistema e tem que ser minimizada. \mathbf{Q} e \mathbf{R} são matrizes simétricas, \mathbf{x}^d é o comportamento desejado do sistema e \mathbf{p} é o vetor que indica a direção da trajetória ótima. E a função custo a se minimizar é $J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$ com $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \frac{1}{2} \left[\langle (\mathbf{x}^d - \mathbf{x}), \mathbf{Q}(\mathbf{x}^d - \mathbf{x}) \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{R}\mathbf{u} \rangle \right]$.

Uma outra forma de chegar a este resultado é com o uso do desenvolvimento apresentado por Kirk, 1970. Para minimizar o desvio de um estado final de um sistema de seu valor desejado uma função custo aplicável é:

$$J = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i(t_f) - \mathbf{r}_i(t_f))^2 \quad (\text{A.4.2})$$

Como tanto desvios positivos como negativos são igualmente indesejados, o erro é elevado ao quadrado. Valores absolutos podem também ser usados, mas a forma quadrática da Eq. (A.4.2) é fácil de trabalhar matematicamente. Usando notação matricial tem-se $J = (\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f))^T (\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)) = \|\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)\|^2$. Tentado generalizar o problema, pode-se inserir uma matriz \mathbf{H} simétrica real positiva semidefinida, chamada matriz dos pesos.

$$J = (\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f))^T \mathbf{H} (\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)) = \|\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)\|_{\mathbf{H}}^2 \quad (\text{A.4.3})$$

No problema de mínimo esforço de controle, o assunto é transferir o sistema desde um estado qualquer inicial até um estado especificado final, com um mínimo consumo no esforço de controle. Para isto uma possível função custo é

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt = \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{R}}^2 dt \quad (\text{A.4.4})$$

onde \mathbf{R} é uma matriz simétrica real positiva definida.

No problema de levar o estado $\mathbf{x}(t)$ do sistema o mais perto possível ao estado desejado $\mathbf{r}(t)$ no intervalo de tempo $[t_0, t_f]$, escolhe-se o seguinte índice de desempenho:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)\|_{\mathbf{Q}}^2 dt = \int_{t_0}^{t_f} [(\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t))^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t))] dt \quad (\text{A.4.5})$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz simétrica real (positiva semidefinida) para todo o intervalo de tempo. Os elementos de \mathbf{Q} são escolhidos para ponderar a importância relativa dos diferentes componentes do vetor de estados e para normalizar os valores numéricos dos desvios. Se o conjunto de sinais de controle está limitado, a Eq. (A.4.5) é uma função custo razoável, porém, se os sinais de

controle não estão limitados, minimizar a Eq. (A.4.5) vai resultar em função impulsos e suas derivadas. Para evitar pôr condições de contorno nos controles admissíveis, ou se o controle da energia tem que ser conservado, usa-se uma função custo modificada

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{R}}^2 \right] dt = \int_{t_0}^{t_f} [(\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t))^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)) + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt \quad (\text{A.4.6})$$

Pode ser especialmente importante que os estados estejam perto de seus valores desejados no tempo final. Nesse caso, a função custo pode ser $J = \|\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{R}}^2 \right] dt$. O problema do *regulador* é um caso especial do problema de seguir uma referencia no qual o objetivo é atingido quando os valores desejados dos estados são zero ($\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$ para todo o intervalo de tempo).

Então, no problema mais geral do caso que esta sendo estudado, a função custo pode ser uma combinação de vários problemas como foi apresentado, ou seja, $J = \|\mathbf{x}(t_f)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{R}}^2 \right] dt$. Colocando esta função custo na notação matricial para *reguladores lineares* com uma constante positiva fica:

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}(t_f)^T \mathbf{H} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt \quad (\text{A.4.7})$$

A minimização de J também otimiza ρJ , onde ρ é qualquer constante positiva. Assim, o problema não é alterado se J for multiplicado por qualquer constante positiva. De esta forma, a constante $\frac{1}{2}$ pode ser eliminada. Olhando os limites da integral pode-se afirmar que, o limite inferior é definido como o tempo presente e o limite superior é o tempo final. A diferença $t_f - t_0$ é o intervalo de controle. Os casos mais comuns, (nos quais insere-se o caso presente), é quando o tempo final é infinito. Neste caso, o interesse é no comportamento do sistema partindo de agora em diante, incluindo o caso estacionário, que, precisamente, é o caso do método de alocação de pólos que está sendo estudado.

Para demonstrar isto, vai-se proceder da seguinte maneira: seja o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$, onde \mathbf{x} é um vetor de estados ($n \times 1$) e \mathbf{A} é uma matriz de coeficientes constantes $n \times n$. Supondo que \mathbf{A} é não singular, vai-se demonstrar que se o estado de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema é assintoticamente estável (ou seja, que \mathbf{A} seja uma matriz estável), então existe uma matriz \mathbf{P} hermitiana positiva definida tal que $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ com \mathbf{Q} matriz hermitiana positiva definida.

A equação diferencial matricial $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}$, $\mathbf{X}(0) = \mathbf{Q}$ tem a solução $\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t}$. Integrando ambos os lados da equação diferencial matricial obtém-se $\mathbf{X}(\infty) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}^T \left(\int_0^\infty \mathbf{X} dt \right) + \left(\int_0^\infty \mathbf{X} dt \right) \mathbf{A}$. Levando em conta que \mathbf{A} é uma matriz estável e, portanto, $\mathbf{X}(\infty) = 0$, fica $-\mathbf{X}(0) = -\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \left(\int_0^\infty \mathbf{X} dt \right) + \left(\int_0^\infty \mathbf{X} dt \right) \mathbf{A}$, tomando $\mathbf{P} = \int_0^\infty \mathbf{X} dt = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} dt$. Observe-se que os elementos de $e^{\mathbf{A} t}$ são somas finitas de termos como $e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \dots, t^{m_i-1} e^{\lambda_i t}$, onde os λ_i são os autovalores da matriz \mathbf{A} e m_i é a multiplicidade de λ_i . Como λ_i tem parte real negativa então $\int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} dt$ existe.

Observa-se que $\mathbf{P}^T = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} dt = \mathbf{P}$, portanto, \mathbf{P} é hermítica (ou simétrica se \mathbf{P} for matriz real). Assim fica demonstrado que, para uma matriz \mathbf{A} estável e para uma matriz \mathbf{Q} hermítica positiva definida, existe uma matriz \mathbf{P} hermítica tal que $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$. Falta apenas demonstrar que \mathbf{P} é positiva definida. Então, considera-se a seguinte forma hermítica:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} dt \mathbf{x} \\ &= \int_0^\infty (e^{\mathbf{A} t} \mathbf{x})^T \mathbf{Q} (e^{\mathbf{A} t} \mathbf{x}) dt \begin{cases} > 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ = 0, \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, \mathbf{P} é positiva definida.

ANEXO 5: RESPOSTA NO DOMINIO TEMPO

A.5.1 Resposta com Respeito às Posições dos Pólos

Uma vez que a função transferência foi determinada pode-se introduzir inicialmente a análise da resposta do sistema. Quando as equações do sistema são equações diferenciais ordinárias, a função transferência resultante vai ser uma relação de polinômios $H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$.

Assumindo que b e a não têm fatores em comum, então os valores de s que fazem $a(s) = 0$ vão representar os pólos do sistema (como já foi explicado na Seção 4.2) e os valores de s que fazem $b(s) = 0$ serão os zeros do sistema. Estes pólos e zeros descrevem completamente o sistema exceto pela constante de multiplicação. Devido ao fato de que a resposta à função impulso é dada pela função tempo correspondente à função de transferência, é chamada a *resposta natural* do sistema. É possível usar os pólos e zeros para computar a resposta no tempo correspondente e, portanto, identificar as respostas no tempo com a alocação dos pólos no plano s . Por exemplo, os pólos identificam as classes dos sinais contidos na resposta impulso, como deve ser visto na expansão em frações parciais de $H(s)$. Para um sistema de primeira ordem, $H(s) = \frac{1}{s + \sigma}$ a transformada inversa de Laplace fica $h(t) = e^{-\sigma} 1(t)$. Quando $\sigma > 0$, o pólo está alocado em $s < 0$, a expressão exponencial decai, e a resposta impulso é *estável*. Se $\sigma < 0$, o pólo está à direita da origem. Devido a isso a expressão exponencial cresce com o tempo, a resposta impulso é dita de *instável*. A Fig. (A.5.1) mostra uma resposta típica e define a *constante de tempo*

$$\tau = \frac{1}{\sigma} \quad (\text{A.5.1})$$

e a resposta decai $\frac{1}{e^{t/\tau}}$ vezes o valor inicial. Supondo a constante de tempo $\tau = 1$, tomando o tempo $t = 1$, o valor da resposta é $h(t) = 1/e$.

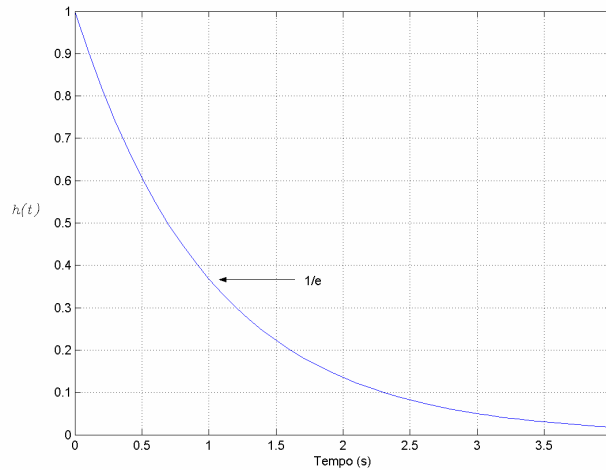


Figura A.5.1: Resposta de um sistema de primeira ordem.

Os pólos complexos podem ser definidos nos termos de suas partes reais e imaginárias, geralmente escrito $p = -\sigma \pm j\omega_d$. Isto significa que um pólo tem uma parte real negativa se σ é positivo. Como os pólos complexos sempre estão em pares de complexos conjugados, o denominador correspondente é:

$$a(s) = (s + \sigma - j\omega_d)(s + \sigma + j\omega_d) = (s + \sigma)^2 + \omega_d^2 \quad (\text{A.5.2})$$

A função transferência é escrita geralmente na forma polinomial

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.5.3})$$

Comparando as equações (A.5.2) e (A.5.3) obtêm-se as seguintes correspondências entre os parâmetros

$$\begin{aligned} \sigma &= \zeta\omega_n \\ \omega_d &= \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \end{aligned} \quad (\text{A.5.4})$$

onde o parâmetro ζ é o *coeficiente de amortecimento* e ω_n é a *freqüência natural não amortecida*. Os pólos dessa função transferência estão localizados a uma distância à origem ω_n no plano complexo e com um ângulo $\theta = \sin^{-1} \zeta$, como pode ser visto na Fig. (A.5.2).

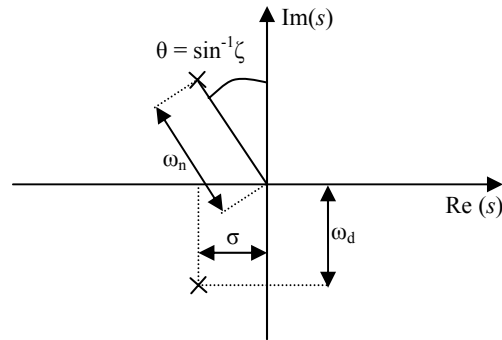


Figura A.5.2: Parâmetros da função transferência no plano complexo

Portanto, o coeficiente de amortecimento reflete o nível de amortecimento como uma fração do valor de amortecimento crítico (que corresponde ao amortecimento na situação limite entre pólos reais e complexos). Quando $\zeta = 0$, não existe amortecimento, $\theta = 0$, e a frequência natural amortecida é igual à frequência natural não amortecida ($\omega_d = \omega_n$).

A Eq. (A.5.3) pode ser reescrita como $H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)}$. Assim, com o uso da Eq. (A.5.4), a transformada inversa de Laplace para a resposta impulso de $H(s)$ é

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\sigma t} (\sin \omega_d t) \mathbb{1}(t).$$

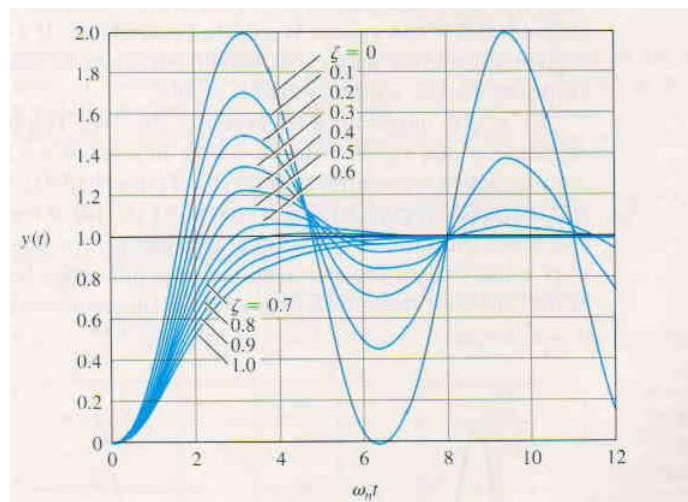


Figura A.5.3: Resposta do sistema de segunda ordem a um degrau com diferentes valores de ζ
Franklin *et al.*, 1994.

A Fig. (A.5.3) apresenta o gráfico de $h(t)$ para vários valores de ζ diferentes e normalizado para ω_n . Note-se que a frequência ω_d decai aos poucos enquanto o *coeficiente de amortecimento* aumenta. Também, pode se notar que para amortecimentos muito pequenos a

resposta é oscilatória, enquanto que para grandes amortecimentos a resposta não apresenta oscilação. Algumas destas respostas estão esquematicamente apresentadas na Fig. (A.5.4) para mostrar como as diferentes alocações dos pólos afetam a dinâmica do sistema.

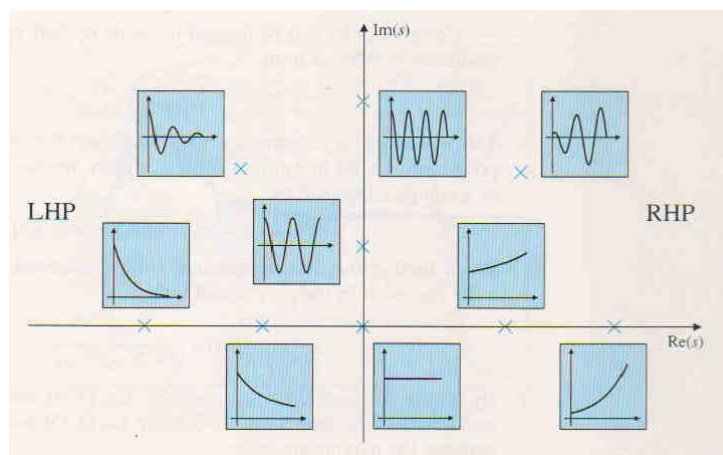


Figura A.5.4: Funções do tempo associadas com os pólos no plano s , conforme Franklin *et al.*, 1994.

A.5.2 Resposta no Domínio do Tempo

As especificações para o projeto de um sistema de controle habitualmente envolvem requerimentos associados com a resposta no tempo do sistema. Os requerimentos para uma resposta degrau são expressos em termos de características típicas (Fig. A.5.5).

O *tempo de subida* t_r , é o tempo que leva o sistema para atingir certa região próxima do seu novo ponto de referencia.

O *tempo de assentamento* t_s , é o tempo que leva o transiente do sistema cair até um ponto predeterminado.

A *sobre-resposta (ou sobrepasso)* M_p , é o valor máximo que o sistema ultrapassa seu valor final dividido pelo valor final (normalmente expressado em porcentagem).

O *tempo de pico* t_p , é o tempo que leva o sistema para atingir seu valor máximo.

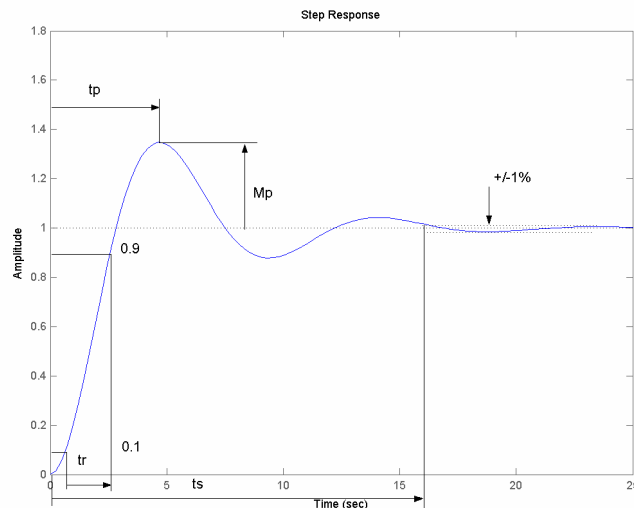


Figura A.5.5: Parâmetros transientes no domínio tempo

Examinando a Fig. A.5.3 e comparando com a Fig. A.5.5 pode-se relacionar as curvas com os parâmetros ζ e ω_n . Por exemplo, todas as curvas sobem mais ou menos no mesmo tempo, então, considerando $\zeta = 0$ como um valor médio, o tempo de subida desde $y = 0.1$ até 0.9 é aproximadamente $\omega_n t_r = 1.8$. Portanto,

$$t_r \cong \frac{1.8}{\omega_n} \quad (\text{A.5.5})$$

Esta equação é somente correta para sistemas de segunda ordem sem zeros; para os outros sistemas é apenas uma aproximação da relação entre t_r e ω_n . Para a sobre-resposta M_p , a dedução da relação é mais analítica. Este valor é obtido quando a derivada é zero. A resposta no domínio do tempo para uma entrada degrau é

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (\text{A.5.6})$$

onde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ e $\sigma = \zeta \omega_n$. A derivada dessa função deve ser igualada a zero, assim,

$$\dot{y}(t) = e^{-\sigma t} \left(\frac{\sigma^2}{\omega_d} \sin \omega_d t + \omega_d \sin \omega_d t \right) = 0. \text{ Isto acontece quando } \sin \omega_d t = 0, \text{ então,}$$

$$\omega_d t_p = \pi \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (\text{A.5.7})$$

Substituindo a Eq. (A.5.7) na Eq. (A.5.6) obtém-se

$$y(t_p) = 1 + M_p = 1 - e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}} \left(\cos\pi + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin\pi \right) = 1 + e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}}.$$

sobre-resposta

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, 0 \leq \zeta < 1 \quad (\text{A.5.8})$$

Esta relação é apresentada na Fig. A.5.6.

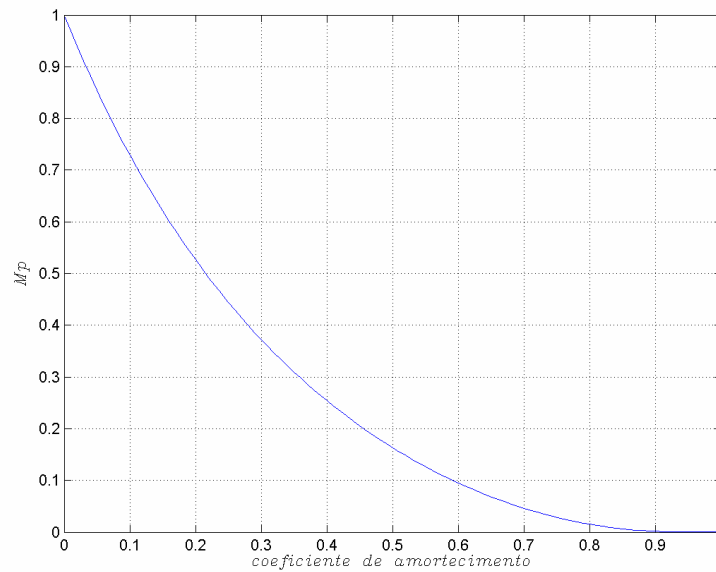


Figura A.5.6: Sobre-resposta *versus* coeficiente de amortecimento para um sistema de segunda ordem

O último parâmetro de interesse para a resposta transiente é o tempo de assentamento t_s . Este é o tempo necessário para que a resposta transiente diminua até um valor tão pequeno que $y(t)$ seja quase estacionário. Várias medidas podem ser usadas para avaliar se a função $y(t)$ está perto do valor estacionário (1%, 2% ou 5%). Neste caso vai ser usado 1% para apresentar o método.

Da Eq. (A.5.6) pode-se verificar que o afastamento da função $y(t)$ com respeito a 1 é a multiplicação entre uma exponencial que tende a zero ($e^{-\sigma t}$) e as funções seno e cosseno. A duração deste erro depende diretamente da exponencial, portanto, é possível definir o tempo de assentamento como o tempo que leva a exponencial para atingir o valor 1%, ou seja, $e^{-\zeta\omega_n t_s} = 0.01 \Rightarrow \zeta\omega_n t_s = 4.6$, assim,

$$t_s = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} = \frac{4.6}{\sigma} \quad (\text{A.5.9})$$

onde σ é a parte real negativa do pólo. As equações (A.5.6), (A.5.8) e (A.5.9) caracterizam a resposta transiente do sistema sem zeros e com dois pólos complexos, com uma frequência natural não amortecida ω_n , coeficiente de amortecimento ζ e parte real negativa σ .

Em projetos sempre se procura especificar t_r , M_p e t_s e averiguar onde é necessário que estejam os pólos para que a resposta seja próxima à desejada. Para valores especificados de t_r , M_p e t_s a forma de síntese das equações é

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r} \quad (\text{A.5.10})$$

$$\zeta \geq \zeta M_p \quad (\text{A.5.11})$$

$$\sigma \geq \frac{4.6}{t_s} \quad (\text{A.5.12})$$

Estas equações podem ser analisadas em um gráfico como o da Fig. (A.5.7) no plano s e assim guiar a escolha da alocação dos pólos para obter as especificações da dinâmica do sistema de controle.

É importante lembrar que estas equações (equações (A.5.10), (A.5.11) e (A.5.12)) são qualitativas mas não são fórmulas para projeto precisas. São úteis para iniciar as iterações de procura de uma configuração que permita obter uma resposta o mais perto possível do desejado. Com o uso de simulações, os resultados corretos podem ser obtidos.

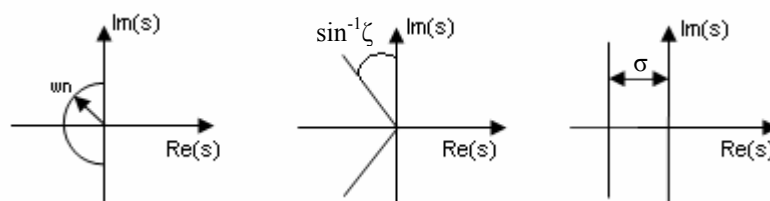


Figura A.5.7: Gráficos no plano s : a) tempo de subida b) sobre-resposta c) tempo de assentamento