

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Sistemas Vibratórios: Um Enfoque através da
Solução Dinâmica e da Matriz de
Transferência**

por

Elisabeta D'Elia Gallicchio

Tese para a obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre

1999

Sistemas Vibratórios: Um Enfoque através da Solução Dinâmica e da Matriz de Transferência

por

Elisabeta D'Elia Gallicchio

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr. Alberto Tamagna, PROMEC-UFRGS

Prof. Dr. Haroldo Campos Velho, INPE

Prof. Dr. Vilmar Trevisan, IM-UFRGS

Prof. Dr. Sergio Viçosa Möller

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, setembro de 1999

À memória de meu irmão Bernardo
que, na minha infância, me despertou
o gosto pela matemática.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen, pelo exemplo de comportamento intelectual e pela experiência enriquecedora que é participar de seu grupo de pesquisa.

Ao Prof. Dr. Alberto Tamagna, pelos ensinamentos e acesso ao Laboratório de Vibrações, que oportunizou integrar os conhecimentos teóricos à prática.

Ao Prof. Dr. Marco Tulio Mena Barreto de Vilhena, pelo estímulo à realização do curso no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Ao Prof. Dr. Sergio Viçosa Möller, pelos ensinamentos e interesse com que acompanhou o meu trabalho.

Ao colega German Canahualpa Suazo, pelas interessantes discussões sobre o aspecto computacional do trabalho.

Aos funcionários Ivanise Sostisso e Paulo Kutter, pela dedicação, eficiência e presteza com que sempre colaboraram.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS	vi
ÍNDICE DE TABELAS	viii
RESUMO	x
ABSTRACT	xii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
INTRODUÇÃO	1
1 MODELOS E SISTEMAS VIBRATÓRIOS	4
1.1 Considerações Gerais sobre Vibrações	4
1.2 Modelos com 1 Grau de Liberdade	5
1.2.1 O Método Espectral	6
1.2.2 A Solução Dinâmica	9
1.2.3 O Método Operacional	12
1.2.4 A Resposta a um Impulso Unitário	14
1.2.5 Vibrações Forçadas	19
1.2.6 Excitação Harmônica	20
1.2.7 Excitação Periódica	27
1.2.8 Excitação Arbitrária	32

2	SISTEMAS COM N GRAUS DE LIBERDADE	46
2.1	Introdução	46
2.2	A Equação do Sistema Vibratório com n Graus de Liberdade	47
2.3	O Método Matricial Operacional	49
2.4	Fórmulas Fechadas para a Matriz de Transferência e a Resposta Impulso	53
2.5	O Caso de Raízes Simples	58
2.6	Exemplos Numéricos	59
3	ANÁLISE MODAL DE SISTEMAS NÃO-AMORTECIDOS	64
3.1	Introdução	64
3.2	Freqüências Naturais e Modos de Vibração	65
3.3	Ortogonalidade e Normalização	66
3.4	Modos Normais e a Resposta Impulso	71
3.5	Modos Normais e a Matriz de Transferência	74
4	ANÁLISE MODAL DE SISTEMAS AMORTECIDOS	76
4.1	Introdução	76
4.2	Autovetores e Modos Amortecidos	76
4.3	Amortecimento Proporcional de Rayleigh	78
4.3.1	A Resposta Impulso em Sistemas com Amortecimento Proporcional	80

4.3.2	Modos Normais e a Matriz de Transferência	82
4.3.3	Modos Normais e a Resposta Livre	84
4.3.4	A Curva da Razão de Amortecimento	85
4.3.5	Exemplo Numérico	87
4.4	Amortecimento Fracamente Aproximado	88
4.4.1	Exemplo Numérico	89
4.5	A Forma do Amortecimento Fraco	94
4.5.1	A Resposta Impulso com Amortecimento Fraco	95
4.5.2	Modos Normais e a Matriz de Transferência	97
4.5.3	Modos Normais e a Resposta Livre	98
4.6	Limitação da Expansão Modal de Deslocamentos	99
4.6.1	Exemplo Numérico	100
5	CARACTERIZAÇÃO SIMBÓLICA DOS MODOS GERAIS EM TERMOS DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA	106
5.1	Introdução	106
5.2	Uma Forma Simbólica para os Modos do Sistema	107
5.2.1	Exemplo Numérico	112
6	CONCLUSÃO	115
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	116

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Sistema com 1 grau de liberdade.	5
Figura 1.2	Gráficos do fator de amplificação $\times r = \frac{\omega}{\omega_n}$ e fase $\times r = \frac{\omega}{\omega_n}$ para $\xi = 0.1, 0.5, 0.707, 1, 2$	23
Figura 1.3	Gráficos dos fatores de amplificação, velocidade e aceleração para diversos valores de ξ	25
Figura 1.4	Gráficos de uma entrada periódica e de sua série de Fourier truncada em $n = 20$	27
Figura 1.5	Gráficos das saídas x_p, x_{hc} e $x_p + x_{hc}$ no caso não-amortecido correspondentes à entrada da fig. 1.4.	29
Figura 1.6	Gráficos das saídas x_p, x_{hc} e $x_p + x_{hc}$ no caso amortecido correspondentes à entrada da fig. 1.4.	31
Figura 1.7	Gráficos de x_{hc} correspondentes a uma entrada exponencial assintótica.	33
Figura 2.1	Respostas $q_1(t)$ e $q_2(t)$	61
Figura 2.2	Respostas $q_1(t), q_2(t)$ e $q_3(t)$	63
Figura 4.1	Variação da razão de amortecimento modal com a frequência natural: (a) amortecimento proporcional à massa ou proporcional à rigidez; (b) amortecimento de Rayleigh com $a_0 = \alpha, a_1 = \beta$	86
Figura 4.2	Sistema massa-mola-amortecedor com dois graus de liberdade.	90
Figura 4.3	Gráfico apresentado em [GIN99], p. 316.	93

Figura 4.4	Gráfico da solução obtida através da resposta impulso matricial. . .	94
Figura 4.5	Estrutura de dois andares.	101
Figura 4.6	Gráficos das coordenadas modais do sistema excitado com o primeiro modo, para $m = 1$, $k = 100$	103
Figura 4.7	Gráficos dos deslocamentos do sistema excitado com o primeiro modo, para $m = 1$, $k = 100$	104
Figura 4.8	Gráficos das coordenadas modais do sistema excitado com o segundo modo, para $m = 1$, $k = 100$	105
Figura 4.9	Gráficos dos deslocamentos do sistema excitado com o segundo modo, para $m = 1$, $k = 100$	105

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1.1	Resposta de um sistema livre dissipativo.	8
Tabela 1.2	Resposta de um sistema livre, em termos da resposta a um impulso unitário e de sua derivada.	11
Tabela 1.3	A função de transferência ou $\mathcal{L}[h(t)]$	19
Tabela 1.4	A função frequência, a resposta a uma excitação harmônica e os fatores resposta.	35
Tabela 1.5	Saídas $x_d(t)$ e $x_p(t)$ para o caso não-amortecido correspondentes a entradas descritas por funções elementares.	36
Tabela 1.6	Gráficos das saídas $x_d(t)$ e $x_p(t)$ para o caso não-amortecido correspondentes a entradas descritas por funções elementares.	37
Tabela 1.7	Saída $x_{hc}(t)$ para o caso não-amortecido correspondente a entradas descritas por funções elementares.	38
Tabela 1.8	Saída $x_{hc}(t)$ para o caso não-amortecido obtida em termos da resposta a um impulso unitário e de sua derivada.	39
Tabela 1.9	Saída $x_p(t)$ para o caso amortecido correspondente a entradas descritas por funções elementares.	40
Tabela 1.10	Gráficos das saídas $x_d(t)$ e $x_p(t)$ para o caso amortecido correspondentes a entradas descritas por funções elementares.	41
Tabela 1.11	Saída $x_{hc}(t)$ para o caso amortecido correspondente a entradas descritas por funções elementares.	42

Tabela 1.12 Saída $x_{hc}(t)$ para o caso amortecido obtida em termos da resposta a um impulso unitário e de sua derivada.	43
Tabela 1.13 Saída $x_p(t)$ para o caso amortecido correspondente a entradas descritas por funções seccionalmente contínuas.	44
Tabela 1.14 Saída $x_{hc}(t)$ para o caso amortecido correspondente a entradas descritas por funções seccionalmente contínuas.	45

RESUMO

Este trabalho se refere ao estudo de sistemas vibratórios lineares em geral, clássicos e não-clássicos, com o uso da resposta impulso como o gerador de uma base dinâmica.

Na literatura, livros e periódicos, o estudo apoia-se essencialmente no método espectral. Este último método consiste na procura de soluções do tipo exponencial multiplicadas por uma constante, que pode ser um simples número, para o caso de sistemas com 1 grau de liberdade, ou um vetor n -dimensional, para sistemas com n graus de liberdade.

Para sistemas vibratórios lineares, submetidos a cargas arbitrárias, os métodos operacionais têm sido empregados em vários trabalhos. Aqui, a resposta impulso tem sido identificada como o elemento fundamental para um embasamento matemático que, de algum modo, carrega as propriedades físicas do problema. Esta formulação é válida tanto para um sistema vibratório linear com 1 grau de liberdade, como para um sistema com múltiplos graus de liberdade. A resposta impulso matricial depende de três equações características: uma algébrica, uma diferencial e uma em diferenças.

A resposta livre de um sistema vibratório linear é uma convolução da resposta impulso com a força externa. É descrita como uma integral de Duhamel, tendo a resposta impulso como seu núcleo. Em geral, esta integral pode conter uma resposta transiente escondida, introduzida pelo sistema e ligada à parte permanente da resposta que, usualmente, segue a entrada. Nenhuma caracterização associada a estes dois tipos de resposta tem sido estabelecida explicitamente. Utilizando a resposta

impulso, como um elemento gerador de uma base dinâmica, é formulada uma relação entre as partes transiente e permanente. O cálculo da resposta livre de sistemas não-amortecidos e amortecidos, sujeitos a forças temporais elementares de duração finita e algumas de infinita duração no tempo, tem sido realizado com o uso de software simbólico.

A análise modal é uma das principais técnicas utilizadas nas aplicações práticas, tanto para medições, quanto para proporcionar um modelo adequado para encaixar dados disponíveis. Esta análise funciona com sistemas não-amortecidos. A limitação desta técnica, para sistemas amortecidos, se fundamenta no fato que o coeficiente de dissipação matricial, ou uma aproximação dele, esteja de alguma maneira relacionado com os coeficientes matriciais de massa e de rigidez. A teoria modal está bem desenvolvida para sistemas com amortecimento proporcional e, mais recentemente, para sistemas com uma aproximação de amortecimento fraco. Relações têm sido estabelecidas para a análise modal com a resposta impulso e a função de transferência para sistemas com tais classes de amortecimento.

TITLE: “VIBRATING SYSTEMS: AN APPROACH THROUGH THE IMPULSE RESPONSE AND THE TRANSFER MATRIX”

ABSTRACT

This work is concerned with the study of linear vibrating systems, classical and non-classical, by using the impulse response as the generator of a dynamical basis.

In the literature, books and journals, this study relies on the spectral method. This later method seeks a exponential type solution times a constant which can be a single number, for the case of systems with one degree of freedom, or a n -dimensional vector, for systems with n degrees of freedom.

For linear vibrating systems subject to arbitrary loads, operational methods have been employed in several works. Here, the impulse response has been identified as the basic element for a mathematical basis that somehow carries the physics of the problem. This formulation is valid for a one degree of freedom linear vibrating system as well as for systems with several degrees of freedom. The matrix impulse response depends on three characteristical equations: one algebraic, one differential and one differences.

The free response of a linear vibrating system is a convolution of the impulse response with the load. It is described by a Duhamel type integral, having the impulse response as its kernel. In general, this integral could carry a hidden transient response, introduced by the system, that is attached to its permanent response part which usually follows the input. No characterization among both type of responses has been ever exhibited explicitly. By using the impulse response, as a generating element of a dynamical basis, it is formulated a relationship among the transient and permanent

parts. The computation of the free response of undamped and damped systems subject to elementary, finite duration and some infinite duration time forces, has been done with the use of symbolic software.

Modal analysis is one of the main techniques employed in practical applications, either for measurements as well as for proposing adequate model to raw data. It works mainly for undamped systems. The limitation of this technique for damped systems is on the ground that the dissipation matrix coefficient or an approximation of it, be somehow related to the mass and stiffness matrix coefficients. The modal theory is well developed for systems with the proportional damping and more recently, for systems with an approximate weak damping. Relationships have been established for modal analysis with the impulse response and transfer function for systems with such kind of damping.

LISTA DE SÍMBOLOS

Capítulo 1:

m	massa, kg
c	coeficiente de amortecimento, Ns/m
k	coeficiente de rigidez, N/m
f	força externa aplicada, N
$x(t)$	resposta do sistema, m
\dot{x}_0	velocidade inicial, m/s
x_0	deslocamento inicial, m
i	número complexo
$p(\lambda)$	polinômio característico
λ	raiz do polinômio característico ou autovalor
c_{cr}	coeficiente crítico de amortecimento, Ns/m
ξ	razão de amortecimento
ω_n	freqüência natural circular do sistema, rad/s
T	período, s
ϕ	ângulo de fase, rad
ω_d	freqüência amortecida, rad/s
$h(t)$	resposta a um impulso unitário, solução dinâmica, m
$h_0(t)$	resposta a um deslocamento unitário, m
$\dot{h}(t)$	derivada de $h(t)$ em relação a t , m/s
E	razão entre o deslocamento e a resposta impulso defasada
A	amplitude do deslocamento, m
δ	decremento logarítmico
τ_d	período amortecido, s
\mathcal{L}	operador transformada de Laplace
\mathcal{L}^{-1}	operador transformada inversa de Laplace

$X(s)$	transformada de Laplace de $x(t)$
$F(s)$	transformada de Laplace de $f(t)$
$H(s)$	função de transferência ou admitância do sistema
$\delta(t)$	função delta de Dirac
$\delta_\epsilon(t)$	pulso retangular
F_o	amplitude da força externa, m
ω	freqüência da força externa, rad/s
$H(i\omega)$	função freqüência do sistema
$\mathcal{H}(t)$	função de Heaviside
r	fator relação de freqüências
M_d	fator de amplificação ou fator resposta de deslocamento, m
M_v	fator resposta de velocidade, m/s
M_a	fator resposta de aceleração m/s ²
$x_c(t)$	parte real de $x(t)$, m
$x_s(t)$	parte imaginária de $x(t)$, m
a_n, b_n	coeficientes da série de Fourier
ϕ_n	fase de $H(in\omega)$, rad
ψ_n	fase da força externa relativa a $n\omega$, rad
r_n	razão entre a n -ésima freqüência e a freqüência natural do sistema
$x_{hc}(t)$	resposta transiente associada à integral de Duhamel, m
$x_p(t)$	resposta permanente da integral de Duhamel, m
$x_d(t)$	resposta total da integral de Duhamel ou resposta livre, m
u, v	coordenadas de $x_{hc}(t)$ na base dinâmica

Capítulos 2, 3, 4 e 5 :

M	matriz de massa
C	matriz de amortecimento
K	matriz de rigidez
$f(t)$	vetor de forças externas
$x(t)$	vetor resposta do sistema
$x_d(t)$	resposta livre
\mathcal{L}	operador transformada de Laplace
\mathcal{L}^{-1}	operador transformada inversa de Laplace
$X(s)$	transformada de Laplace de $x(t)$
$F(s)$	transformada de Laplace de $f(t)$
$H(s)$	matriz de transferência ou admitância do sistema
$H(i\omega)$	matriz frequência do sistema
u, v	vetores
λ	escalar
α, β	constantes de proporcionalidade
u^t, v^t	transposta de u, v
\bar{u}	vetor conjugado de u
ξ	razão de amortecimento matricial
u^*	vetor transposto e conjugado de u
m, c, k	parâmetros de massa, amortecimento e rigidez
O	matriz nula
y	vetor de estado
T	energia cinética, Joule
U	energia potencial, Joule
D	energia dissipativa, Joule
L	função lagrangiana

F_j	forças externas generalizadas, N
q_j	coordenadas generalizadas
A, B	coeficientes matriciais
Ω	matriz freqüência
U	matriz modal
V	matriz modal
D	matriz de massa modal
E, F	matrizes diagonais
ϕ	coordenada modal
ξ_j	razão modal de amortecimento
ω_j	j -ésima freqüência natural
$\omega_{d,j}$	j -ésima freqüência amortecida
ω	freqüência da força externa
$\mathcal{D}(t)$	resposta impulso matricial
$h(t)$	resposta impulso escalar
$\mathcal{D}_\xi(t)$	resposta impulso do sistema desacoplado
Ω_d	matriz diagonal das freqüências amortecidas
C_F	amortecimento fraco matricial
y_i	vetores
$q_j(\lambda)$	polinômios
adj A	matriz adjugada (adjunta) de A

INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas vibratórios trata do comportamento oscilatório dos corpos. De um modo geral, trata de qualquer oscilação de uma grandeza em torno de sua posição de equilíbrio. As vibrações, na verdade, são de natureza não-linear, porém, em muitos casos podem ser aproximadas por descrições lineares. Assim, os sistemas vibratórios podem ser classificados em lineares e não-lineares. Neste trabalho, serão abordados os sistemas vibratórios lineares.

Geralmente, os problemas de engenharia são muito complexos. Então, a primeira dificuldade na análise do comportamento de um sistema vibratório consiste na escolha do modelo matemático que o represente na forma mais adequada e simplificada. Os elementos básicos que caracterizam um sistema são a massa, o amortecimento e a rigidez. As equações do movimento são obtidas através da segunda lei de Newton. Entretanto, para sistemas complexos, ou seja, que necessitam de várias coordenadas para especificar o movimento, tais equações também podem ser obtidas por meio das equações de Lagrange: este foi o caminho escolhido para o desenvolvimento deste trabalho.

Os sistemas submetidos à ação de forças externas, usualmente, têm sua resposta determinada através do método operacional (uso da transformada de Laplace). No entanto, aqui, este método também foi utilizado para estabelecer diretamente a resposta do sistema, em termos da resposta impulso e da função de transferência, para os casos escalar e matricial. Estas são as ferramentas básicas utilizadas neste texto.

A resposta impulso, ou seja, a resposta de um sistema a uma força impulsiva unitária, permite gerar uma nova base matemática, sobre a qual é estabelecida uma nova teoria para alcançar a solução de problemas vibratórios. A resposta livre do sistema pode ser descrita pela resposta impulso. Assim, é possível destacar duas componentes da resposta livre: uma parte transiente, que está relacionada com a resposta

do sistema livre; e uma parte estacionária (permanente), vinculada à força excitadora do sistema. As formulações das respostas, para determinadas entradas, são exibidas em tabelas, bem como os gráficos correspondentes.

Diante de sistemas complexos, tem-se os padrões preferenciais de vibração, os modos. O estudo destes sistemas é feito através da análise modal. Entretanto, com este enfoque surge uma outra classificação dos sistemas vibratórios, que se refere ao amortecimento e que limita esta análise. Ou seja, para sistemas não-amortecidos não há restrições, e a análise modal é perfeitamente aplicável. Porém, na presença de amortecimento, são feitas várias hipóteses para desacoplar o sistema. Tem-se, então, os sistemas desacopláveis, denominados sistemas vibratórios clássicos ou sistemas classicamente amortecidos e os sistemas vibratórios não-clássicos, onde a análise modal não é aplicável. Aqui está a maior dificuldade e, para contorná-la, são impostas condições especiais sobre o amortecimento: amortecimento de Rayleigh e amortecimento fraco (aproximação de Knowles), por exemplo. Com o objetivo de desacoplar o sistema, também é considerada uma transformação do espaço físico.

Assim, a teoria existente é fundamentada na expansão espectral e hipóteses de desacoplamento, bem como na aquisição de dados. Por outro lado, as dificuldades operacionais são a validade das hipóteses de desacoplamento, a obtenção dos modos e a proximidade das frequências.

Diante destas considerações, este trabalho tem como principais objetivos estabelecer fórmulas analíticas, que permitam obter a resposta livre e estender a aplicabilidade da análise modal com a utilização da resposta impulso matricial e da matriz de transferência, ambas relacionadas com o tipo de amortecimento considerado. Outro objetivo é estabelecer uma propriedade básica para a determinação simbólica dos modos, que permita estender a Teoria de Krylov a sistemas de segunda ordem.

Para ilustrar a teoria aqui desenvolvida, são exibidos alguns exemplos. Os cálculos, bem como os gráficos apresentados neste trabalho, foram realizados com software simbólico.

1 MODELOS E SISTEMAS VIBRATÓRIOS

1.1 Considerações Gerais sobre Vibrações

O estudo teórico das vibrações é efetuado em base de modelos. O *modelo físico*, que é a representação esquemática do sistema real, e o *modelo matemático*, isto é, a representação analítica, através de uma equação - ou de um sistema de equações - que descreve o comportamento dinâmico do modelo físico em questão. Os modelos físicos envolvem basicamente três elementos: *massa* (inercial), *mola* (elástico) e *amortecimento* (dissipativo). Tais modelos são classificados como de *parâmetros distribuídos* ou de *parâmetros concentrados*.

Nos modelos de parâmetros concentrados [TAM 98] (somente estes serão abordados neste trabalho), consideram-se: os corpos dotados de massa, que armazenam energia cinética, como sendo rígidos; as características elásticas do sistema, como concentradas nas molas (de massa desprezível) que, por sua vez, armazenam energia potencial mediante deformações elásticas. Considera-se também a dissipação da energia como um processo que acontece na presença de *amortecimento*. Estes modelos são descritos por equações diferenciais ordinárias lineares ou não-lineares. Quando n coordenadas independentes são requeridas para definir completamente a configuração de um sistema, este é denominado *sistema com n graus de liberdade*.

As vibrações são essencialmente de natureza não-linear. Entretanto, quando se desenvolvem na vizinhança de uma posição de *equilíbrio estável* - deslocamentos insignificantes diante de pequenas perturbações - podem ser aproximadas por descrições lineares.

Na prática, a análise das vibrações é feita através de medições experimentais [EWI 95], [WHE 96] e simulações computacionais dos referidos modelos . Estes

procedimentos requerem o uso de equipamentos e softwares específicos. A fundamentação matemática correspondente a estes métodos [PHI 95] é estabelecida em áreas específicas, denominadas *Análise de Sinais e Análise Modal*.

1.2 Modelos com 1 Grau de Liberdade

A representação analítica de um sistema linear com 1 grau de liberdade (fig. 1.1) é estabelecida pela equação

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1.1)$$

onde:

m = massa	(kg)
c = amortecimento	(N.s/m)
k = rigidez da mola	(N/m)
f = força externa aplicada	(N).

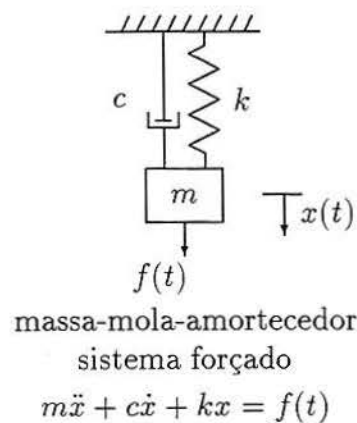


Figura 1.1 Sistema com 1 grau de liberdade.

A solução desta equação pode ser obtida pelo *método espectral* ou pelo *método operacional*. O método espectral envolve duas etapas: 1) a decomposição da vibração em duas partes, uma livre e outra forçada; 2) a obtenção da resposta à vibração livre, considerando-a como uma função do tipo exponencial.

O método operacional consiste em converter a equação diferencial, munida das *condições iniciais* (deslocamento e velocidade prescritos no tempo $t = 0$), com o uso da transformada de Laplace, numa *equação operacional* de resolução mais simples e em outra variável. Determina-se a solução desta equação e, através da transformada inversa, volta-se à variável original. Neste método, as condições iniciais apresentam-se incorporadas à equação resultante.

1.2.1 O Método Espectral

Tem-se que $x(t) = e^{\lambda t}$ é solução da equação homogênea

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad (1.2)$$

desde que λ seja raiz do *polinômio característico*

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + c\lambda + k, \quad (1.3)$$

isto é, solução da *equação característica*

$$p(\lambda) = 0. \quad (1.4)$$

Se λ_1 e λ_2 são as raízes, então, pela linearidade da equação (propriedades de aditividade e homogeneidade), decorre que

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (1.5)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, que dependem das condições iniciais do movimento.

A natureza das raízes,

$$\lambda_1 = \frac{-c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}, \quad \lambda_2 = \frac{-c}{2m} - \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}, \quad (1.6)$$

determina o tipo de movimento do sistema.

A equação (1.2) é convenientemente parametrizada com a introdução do *coeficiente de amortecimento crítico*:

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} \text{ N s/m} . \quad (1.7)$$

e da *razão ou índice de amortecimento*

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} . \quad (1.8)$$

A *forma paramétrica* da equação (1.2) é dada por

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0, \quad (1.9)$$

cuja solução geral é

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (c_1 e^{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t} + c_2 e^{-\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t}). \quad (1.10)$$

A forma compacta desta solução é

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi). \quad (1.11)$$

A análise das raízes da equação característica, em termos dos valores da razão de amortecimento, conduz à classificação do movimento amortecido em três casos, os quais estão resumidos na Tabela 1.1.

Deve-se ressaltar que, em todos os casos referidos na Tabela 1.1, a curva deslocamento depende das condições iniciais. Com o propósito de evidenciar esta dependência, é conveniente introduzir uma solução particular, que carrega toda a informação do sistema, chamada de *solução dinâmica ou resposta a um impulso unitário*. Esta é caracterizada como a resposta de um sistema não forçado, com deslocamento inicial zero e momento inicial unitário, e surge naturalmente com o método operacional. Neste trabalho, será referida também como a *resposta impulso* e definida a seguir.

VIBRAÇÕES AMORTECIDAS		
Caso Supercrítico	Caso Crítico	Caso Subcrítico
$\xi > 1$	$\xi = 1$	$0 < \xi < 1$
$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$	$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$	$\lambda_1 = -\xi\omega_n + i\omega_d = \bar{\lambda}_2$
$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (c_1 e^{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t} + c_2 e^{-\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t})$	$x(t) = e^{-\omega_n t} (c_1 + c_2 t)$	$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} A \text{sen}(\omega_d t + \phi)$
$c_1 = \frac{\dot{x}_o + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x_o}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}$ $c_2 = \frac{-\dot{x}_o + (-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x_o}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}$	$c_1 = x_o$ $c_2 = \dot{x}_o + x_o \omega_n$	$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{x_o \xi \omega_n + \dot{x}_o}{\omega_d}\right)^2}$ $\phi = \text{arc tg} \left(\frac{x_o \omega_d}{\dot{x}_o + \xi \omega_n x_o}\right)$

Tabela 1.1 Resposta de um sistema livre dissipativo.

1.2.2 A Solução Dinâmica

A solução $h(t)$ do problema de valor inicial [INM 94]

$$m\ddot{h} + c\dot{h} + kh = 0, \quad m\dot{h}(0) = 1, \quad h(0) = 0, \quad (1.12)$$

é denominada a *solução dinâmica ou resposta a um impulso unitário*.

Como a derivada, em relação ao tempo, de uma solução de um sistema diferencial linear com coeficientes constantes também é solução deste sistema, decorre pela linearidade que

$$h_o(t) = \dot{h}(t)m + h(t)c \quad (1.13)$$

é solução do sistema descrito por $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$. Além disso, satisfaz as condições iniciais

$$h_o(0) = 1, \quad m\dot{h}_o(0) = 0.$$

Afirma-se que a solução do problema inicial,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_o, \quad x(0) = x_o, \quad (1.14)$$

é dada por

$$x(t) = h_o(t)x_o + h(t)m\dot{x}_o. \quad (1.15)$$

Da linearidade, decorre que $x(t)$ é solução. Para constatar a validade das condições iniciais, observe-se que

$$x(0) = h_o(0)x_o + h(0)m\dot{x}_o = x_o.$$

Por outro lado,

$$\dot{x}(t) = \dot{h}_o(t)x_o + \dot{h}(t)m\dot{x}_o$$

e, assim, verifica-se a segunda condição

$$\dot{x}(0) = \dot{h}_o(0)x_o + \dot{h}(0)m\dot{x}_o = \dot{x}_o.$$

Em termos das raízes da equação característica (1.4), a solução dinâmica é escrita como

$$h(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \quad (1.16)$$

e

$$h_o(t) = \dot{h}(t)m + h(t)c = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)}. \quad (1.17)$$

No caso em que $\lambda_1 = \lambda_2 = -\xi\omega_n$, utiliza-se a regra de L'Hospital, mais precisamente,

$$h(t) = \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{te^{\lambda_1 t}}{m} = \frac{te^{-\xi\omega_n t}}{m}. \quad (1.18)$$

E, para raízes complexas,

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n + i\omega_d, \quad \lambda_2 = -\xi\omega_n - i\omega_d,$$

com o auxílio das fórmulas de Euler, obtém-se

$$h(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t} \text{sen } \omega_d t}{m \omega_d}. \quad (1.19)$$

Problema de Valor Inicial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_o, \quad x(0) = x_o$$

Resposta

$$x(t) = h_o(t)x_o + h(t)m\dot{x}_o$$

Raízes da Equação Característica	$h(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{m(\lambda_1 - \lambda_2)}$	$h_o(t) = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)}$
$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad \xi > 1$	$\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m} \frac{\sinh \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t}{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}$	$e^{-\xi\omega_n t} \left[\cosh \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t + \frac{\xi \sinh \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right]$
$\lambda_1 = \lambda_2 = -\xi\omega_n, \quad \xi = 1$	$\frac{te^{-\xi\omega_n t}}{m}$	$e^{-\xi\omega_n t} (1 + \xi\omega_n t)$
$\lambda_1 = -\xi\omega_n + i\omega_d = \bar{\lambda}_2, \quad \xi < 1$ $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$	$\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m} \frac{\text{sen } \omega_d t}{\omega_d}$	$e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi\omega_n \text{sen } \omega_d t}{\omega_d} \right)$
$\lambda_1 = i\omega_n = \bar{\lambda}_2, \quad \xi = 0$	$\frac{\text{sen } \omega_n t}{m \omega_n}$	$\cos \omega_n t$

Tabela 1.2 Resposta de um sistema livre, em termos da resposta a um impulso unitário e de sua derivada.

Note-se que no caso não-amortecido, $c = 0$, $\omega_d = \omega_n$, então

$$h(t) = \frac{\text{sen } \omega_n t}{m \omega_n}, \tag{1.20}$$

de modo que $h_o(t)$ é, simplesmente, $\cos \omega_n t$. Em resumo, tem-se a Tabela 1.2. Observe-se que esta tabela inclui o caso $\xi < 0$, isto é, *amortecimento negativo*, no qual as soluções se afastam do equilíbrio quando t aumenta indefinidamente.

Deve-se ressaltar que, no caso subcrítico, a solução (1.11) pode ser escrita [CLA 95] numa forma compacta, a qual envolve a solução dinâmica,

$$x(t) = Eh(t + \phi_1), \tag{1.21}$$

onde $h(t)$ é dada por (1.19). Aqui, $\phi_1 = \frac{\phi}{\omega_d}$ e $E = Am\omega_d e^{\frac{\xi\omega_n\phi}{\omega_d}} = Am\omega_d e^{\frac{\xi\phi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$.
Com relação às unidades, ϕ_1 é uma "fase" no tempo.

1.2.3 O Método Operacional

Esta seção visa a resolução de sistemas livres ou forçados através da transformada de Laplace. Conhecida por sua particular propriedade operacional, ou seja, de facilitar o cálculo da saída de tais sistemas, pretende-se, aqui, explorar o seu aspecto teórico que, dentre outras vantagens, tais como em medições de vibrações via funções de transferência (veja-se Tab. 1.3), permite estabelecer diretamente [CLA 90a] a solução dinâmica.

Com o propósito de determinar a saída, considere-se inicialmente um sistema vibratório forçado amortecido

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t); \quad x(0) = x_o, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_o, \quad (1.22)$$

sendo $f(t)$ uma entrada casual arbitrária. Com a transformada de Laplace aplicada à esta equação diferencial, tem-se

$$m(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) + c(sX(s) - x(0)) + kX(s) = F(s).$$

Agrupando os termos semelhantes, decorre a *equação operacional*

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = (ms + c)x(0) + m\dot{x}(0) + F(s), \quad (1.23)$$

ou, de modo equivalente,

$$X(s) = \left(\frac{ms + c}{ms^2 + cs + k} \right) x_o + \left(\frac{1}{ms^2 + cs + k} \right) m\dot{x}_o + \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k}.$$

Por outro lado, com o uso da transformada de Laplace, em ambos os lados da equação que define a solução dinâmica (1.12)

$$m\ddot{h} + c\dot{h} + kh = 0; \quad h(0) = 0, \quad m\dot{h}(0) = 1,$$

segue que

$$m \left(s^2 H(s) - sh(0) - \dot{h}(0) \right) + c(sH(s) - h(0)) + kH(s) = 0.$$

Inserindo as condições iniciais de $h(t)$, obtém-se

$$(ms^2 + cs + k)H(s) = 1.$$

Deste modo,

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{p(s)}, \quad (1.24)$$

onde $H(s)$ é a transformada da solução dinâmica $h(t)$. Agora, substituindo $H(s)$ na equação operacional, segue que

$$X(s) = [sH(s)m + H(s)c]x_o + H(s)m\dot{x}_o + H(s)F(s). \quad (1.25)$$

Em particular, para um sistema em repouso, tem-se que a saída transformada é o produto da entrada transformada pela função $H(s)$, denominada a *função de transferência* ou a *admitância* do sistema. Ou seja,

$$X(s) = H(s)F(s). \quad (1.26)$$

Através da transformada inversa, aplicada à equação (1.25), decorre

$$x(t) = \left(\dot{h}(t)m + h(t)c \right) x_o + h(t)m\dot{x}_o + \mathcal{L}^{-1} [H(s)F(s)],$$

onde foi utilizado o fato que $\mathcal{L}[\dot{h}(t)] = sH(s)$. Finalmente, da propriedade da convolução, resulta

$$x(t) = \left(\dot{h}(t)m + h(t)c \right) x(0) + h(t)m\dot{x}(0) + \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (1.27)$$

Deve-se salientar que a resposta $x(t)$, no caso de vibrações livres ($f(t) = 0$), coincide com a fórmula (1.15), seção 1.2.2, estabelecida através do método espectral com o uso da solução dinâmica. Observe-se também que $x(t)$, acima, foi calculada como a resposta de um sistema com condições iniciais em $t = 0$. Entretanto, para $t_o > 0$, basta fazer uma translação no tempo. Assim, se

$$u(t + t_o) = x(t), \quad x(0) = u(t_o) = u_o, \quad \dot{x}(0) = \dot{u}(t_o) = \dot{u}_o,$$

obtém-se

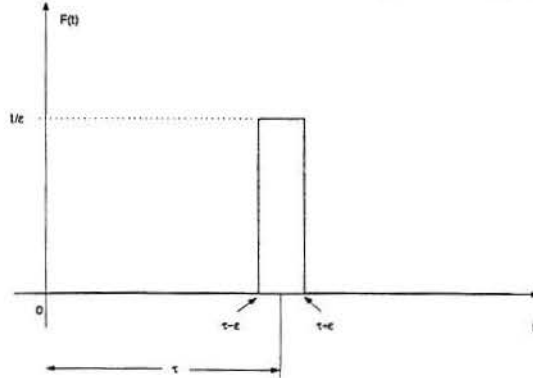
$$u(t) = \left(\dot{h}(t - t_o)m + h(t - t_o)c \right) u_o + h(t - t_o)m\dot{u}_o + \int_{t_o}^t h(t - \tau)f(\tau)d\tau. \quad (1.28)$$

1.2.4 A Resposta a um Impulso Unitário

Sob o ponto de vista físico, a solução dinâmica pode ser interpretada como a resposta de um sistema em repouso, ocasionada por uma carga impulsiva unitária. Um impulso, também conhecido como carga de impacto, é um exemplo de *excitação transiente*: força de curta duração, que se reduz a zero após um tempo finito, usualmente, muito pequeno.

Considere-se, portanto, uma entrada da forma $\delta_\epsilon(t) = 0$, para $t < 0$ e $t > \epsilon$, e $\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}$, para $0 < t < \epsilon$, a qual possui as seguintes propriedades:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt = 1$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) f(t) dt = \frac{\int_0^\epsilon f(t) dt}{\epsilon}$;
- $\mathcal{L}[\delta_\epsilon(t)] = \frac{e^{-s\epsilon} - 1}{s\epsilon}$.



Integrando, no intervalo $[-\epsilon, \epsilon]$, a equação

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta_\epsilon(t),$$

decorre

$$m\dot{x}(\epsilon) - m\dot{x}(-\epsilon) + c[x(\epsilon) - x(-\epsilon)] + k \int_{-\epsilon}^{\epsilon} x(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta_\epsilon(t) dt = 1.$$

Agora, suponha-se que a massa esteja em repouso no instante exatamente anterior à aplicação do impulso. Este instante é denotado por 0^- , de modo que $x(0^-) = x(0^+) = 0$, $\dot{x}(0^-) = 0$. Assim, no limite $\epsilon \rightarrow 0$, a mudança no momento, causada pelo impacto, é

$$m\dot{x}(0^+) - m\dot{x}(0^-) = 1,$$

enquanto o deslocamento inicial permanece em zero. Portanto, um *impulso unitário concentrado*,

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t), \tag{1.29}$$

o qual corresponde a idealização $\epsilon = 0$, produz a mesma resposta, para $t > 0$, que o sistema sujeito às condições iniciais $x(0) = 0$ e $m\dot{x}(0) = 1$. Mais precisamente, para

$t > 0$, tem-se que os problemas de valores iniciais

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad m\dot{x}(0) = 1, \quad x(0) = 0 \quad (1.30)$$

e

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \delta(t), \quad m\dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = 0 \quad (1.31)$$

possuem a mesma solução.

A solução dinâmica $h(t)$, introduzida na seção 1.2.2 para vibrações livres, coincide, para $t > 0$, com a resposta ocasionada por um impulso unitário concentrado, num sistema em repouso. Esta equivalência tornar-se-á ainda mais transparente com o uso do método operacional, exposto a seguir. No cálculo da saída de um sistema vibratório forçado, sujeito a uma entrada arbitrária, poder-se-á verificar que a solução dinâmica é da maior relevância. De fato, neste caso, esta é uma ferramenta útil, tanto para o cálculo da resposta do sistema, como para testes de medições.

A função Delta, definida acima em termos de limites, possui as seguintes propriedades:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) f(t) dt = f(a)$, f contínua em a ;
- $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$.

Diante disso, considere-se um sistema vibratório dissipativo, com condições iniciais nulas, submetido à ação de uma força impulsiva unitária, isto é, modelado pelo problema (1.31). Com a transformada de Laplace, aplicada em ambos os lados da

equação diferencial, segue da equação operacional, para condições iniciais nulas, e da transformada da função Delta, que

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = 1.$$

Por conseguinte, $X(s)$ coincide com (1.24), a função de transferência $H(s)$. Pela unicidade da transformada de Laplace, conclui-se que a solução dinâmica $h(t)$, $t > 0$, é a resposta ocasionada por um impulso unitário.

A seguir, a resposta a impulso unitário será obtida em todos os casos referidos na Tabela 1.2. Deste modo, o problema agora se restringe à obtenção da transformada inversa de $H(s)$, relacionada às raízes do polinômio característico.

Considere-se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, o caso de amortecimento supercrítico, então

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1/m}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} = \frac{1/m}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{1}{s - \lambda_1} - \frac{1}{s - \lambda_2} \right]. \quad (1.32)$$

Como a transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$, decorre que

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \frac{1}{m} \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right).$$

Portanto, a resposta a um impulso unitário, na forma exponencial, é dada por

$$h(t) = \frac{1}{m} \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(e^{\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} t} - e^{-\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} t} \right)$$

ou, equivalentemente,

$$h(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m} \frac{\sinh\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}t}{\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}},$$

isto é, como na equação (1.16) e primeira linha da Tabela 1.2.

Para o caso criticamente amortecido, $\lambda = -\omega_n$. A equação (1.32) torna-se

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1/m}{(s - \lambda)^2}$$

e, com o uso da tabela de transformadas inversas, segue que

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \frac{1}{m} t e^{\lambda t} = \frac{t e^{-\omega_n t}}{m},$$

como obtido anteriormente em (1.18) ou na segunda linha da Tabela 1.2.

Quando o movimento for oscilatório subamortecido, $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_d$, tem-se, da equação (1.32),

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1/m}{2i\omega_d} \left[\frac{1}{(s + \xi\omega_n) + i\omega_d} - \frac{1}{(s + \xi\omega_n) - i\omega_d} \right] \\ &= \frac{1/m}{\omega_d} \left[\frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right]. \end{aligned}$$

A transformada inversa correspondente é

$$\mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \frac{1/m}{\omega_d} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right].$$

E, com o uso das tabelas de transformadas, obtém-se a resposta impulso

$$h(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t} \text{sen } \omega_d t}{m \omega_d},$$

que coincide com a quarta linha da Tabela 1.2 ou equação (1.19), seção 1.2.2 anterior.

$$\text{A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA } H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{p(s)}$$

Caso Supercrítico	Caso Crítico	Caso Subcrítico
$\xi > 1$	$\xi = 1$	$0 < \xi < 1$
$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$	$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$	$\lambda_1 = -\xi\omega_n + i\omega_d = \bar{\lambda}_2$
$H(s) = \frac{1}{m\omega_n\sqrt{\xi^2-1}} \left[\frac{\omega_n\sqrt{\xi^2-1}}{(s+\xi\omega_n)^2 - \omega_n^2(\xi^2-1)} \right]$	$H(s) = \frac{1}{m(s+\omega_n)^2}$	$H(s) = \frac{1}{m\omega_d} \left[\frac{\omega_d}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right]$

Tabela 1.3 A função de transferência ou $\mathcal{L}[h(t)]$.

O caso não amortecido decorre deste último com $c = 0$, $\omega_d = \omega_n$, portanto, a equação (1.20)

$$h(t) = \frac{\text{sen } \omega_n t}{m \omega_n},$$

ou seja, a última linha da referida tabela.

Os diversos valores da transformada de Laplace de $h(t)$ são ilustrados na Tabela 1.3.

1.2.5 Vibrações Forçadas

A primeira consideração a ser feita, sobre a resposta de sistemas lineares forçados, é que, pelo princípio da superposição linear, esta saída é a superposição da resposta correspondente ao caso homogêneo e uma solução particular. Este fato será denotado por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad (1.33)$$

onde $x_h(t)$ é a resposta do caso homogêneo (função complementar) e $x_p(t)$ é a integral particular.

Há diversos caminhos para determinar $x_p(t)$, os quais estão relacionados ao tipo de função atuante sobre o sistema. Para entradas casuais (nulas para tempo negativo) do tipo geral, o método operacional fornece, em princípio, $x_p(t)$ como a convolução com a resposta a um impulso unitário (denotada nas tabelas como x_d)

$$x_p(t) = \int_0^t h(t - \tau)f(\tau)d\tau,$$

conhecida como a integral de Duhamel.

Contudo, para excitações harmônicas, por sua simplicidade, o método dos coeficientes a determinar, descrito a seguir, é o mais apropriado. O resultado deste método envolve a função de transferência.

1.2.6 Excitação Harmônica

Considere-se um sistema vibratório, sujeito a uma força externa do tipo harmônico, isto é,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_o e^{i\omega t}. \quad (1.34)$$

A resposta particular deste sistema, relativa a esta entrada, é supostamente harmônica

$$x(t) = Ae^{i\omega t}.$$

Assim,

$$[m(i\omega)^2 + c(i\omega) + k] Ae^{i\omega t} = F_o e^{i\omega t}$$

ou

$$p(i\omega)A = F_o.$$

Então, se $i\omega$ não for raiz do polinômio característico, $p(i\omega) \neq 0$, onde ω é a frequência da entrada, decorre

$$A = \frac{F_o}{m(i\omega)^2 + c(i\omega) + k} = \frac{F_o}{k - m\omega^2 + ci\omega} = H(i\omega) F_o$$

e, portanto, a saída será dada por

$$x(t) = H(i\omega)F_o e^{i\omega t}. \quad (1.35)$$

Conclui-se, a propósito, que o sistema transfere o valor $H(i\omega)$ para a saída. A função

$$H(i\omega) = \frac{1}{m(i\omega)^2 + ci\omega + k} = \frac{1}{p(i\omega)} \quad (1.36)$$

é denominada a *função frequência do sistema*.

Quando $i\omega$ for raiz de $p(i\omega)$, o método deverá ser modificado. A saída será suposta como

$$x(t) = tAe^{i\omega t}. \quad (1.37)$$

Substituindo-a, juntamente com suas derivadas, na equação (1.34) e identificando coeficientes, decorre $(2i\omega m + c)A = F_o$ ou, simplesmente,

$$A = \frac{F_o}{p'(i\omega)}$$

e a equação (1.37) torna-se

$$x(t) = \frac{tF_o}{p'(i\omega)} e^{i\omega t}.$$

Esta solução exibe um fenômeno de ressonância, isto é, a amplitude cresce indefinidamente com o transcorrer do tempo.

A seguir, voltando ao caso em que $i\omega$ não é raiz do polinômio característico $p(i\omega)$, considere-se a função freqüência na forma polar,

$$H(i\omega) = |H(i\omega)| e^{i\phi} = \frac{1}{\sqrt{c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} e^{i\phi},$$

onde

$$\text{tg}(\phi) = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}.$$

Então, em (1.35), a saída é escrita como

$$x(t) = \frac{F_o e^{i(\omega t + \phi)}}{\sqrt{c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$$

e, com o fator de relação de freqüências

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}, \tag{1.38}$$

decorre a resposta na forma paramétrica

$$x(t) = \frac{F_o}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} e^{i(\omega t + \phi)}, \quad \text{tg}(\phi) = \frac{2r\xi}{1 - r^2}. \tag{1.39}$$

Aqui, o termo $\frac{F_o}{k}$ é chamado de *amplitude à freqüência zero* e o quociente

$$M_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \tag{1.40}$$

é denominado *fator de amplificação* ou *fator resposta de deslocamento* (veja-se figura 1.2). Este fator corresponde à amplitude do deslocamento de um movimento forçado, a qual está relacionada com a amplitude do sistema, em resposta à aplicação estática da máxima força.

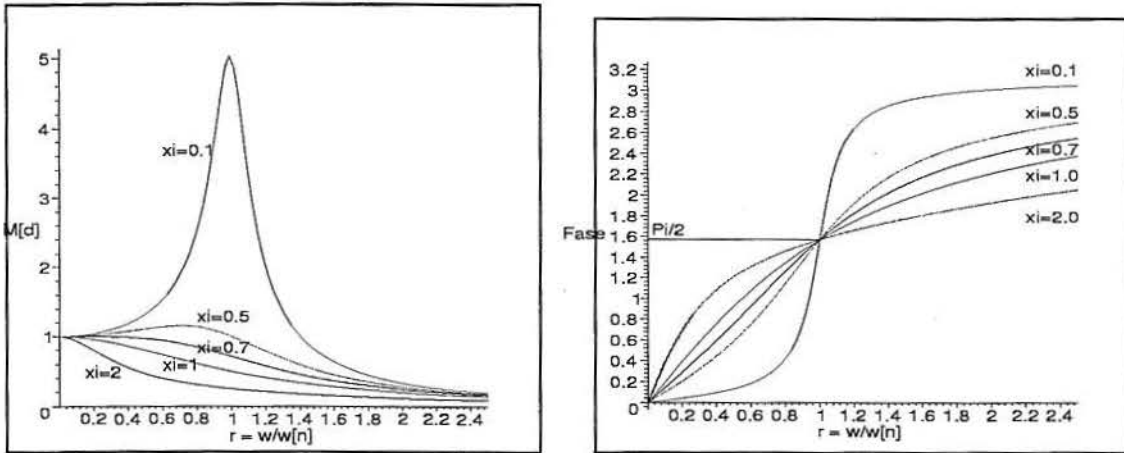


Figura 1.2 Gráficos do fator de amplificação $\times r = \frac{\omega}{\omega_n}$ e fase $\times r = \frac{\omega}{\omega_n}$ para $\xi = 0.1, 0.5, 0.707, 1, 2$.

Cabe salientar que o resultado obtido em (1.35) engloba os casos de entradas $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$. Mais precisamente, se

$$m\ddot{x}_c + c\dot{x}_c + kx_c = F_o \cos(\omega t)$$

e

$$m\ddot{x}_s + c\dot{x}_s + kx_s = F_o \sin(\omega t),$$

então, pela linearidade, $x = x_c + ix_s$ satisfaz

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_o [\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)] = F_o e^{i\omega t}.$$

Agora, como x_c é a parte real de $x(t)$, infere-se que

$$x_c(t) = F_o |H(i\omega)| \cos(\omega t + \phi).$$

Assim,

$$x_c(t) = \frac{F_o}{\sqrt{c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} \cos(\omega t + \phi) = \frac{F_o}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \cos(\omega t + \phi). \quad (1.41)$$

Analogamente, sendo x_s a parte imaginária de $x(t)$, obtém-se

$$x_s(t) = F_o |H(i\omega)| \text{sen}(\omega t + \phi).$$

Portanto,

$$x_s(t) = \frac{F_o}{\sqrt{c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} \text{sen}(\omega t + \phi) = \frac{F_o}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \text{sen}(\omega t + \phi). \quad (1.42)$$

Da derivada de $x_s(t)$, dada por

$$\dot{x}_s(t) = \frac{F_o\omega}{k\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \cos(\omega t + \phi),$$

obtém-se, para $\frac{\dot{x}_s(t)}{F_o/\sqrt{km}}$, o *fator resposta de velocidade*

$$M_v = \frac{\omega}{\omega_n} M_d = \frac{r}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}}. \quad (1.43)$$

De modo similar, tem-se, para a aceleração

$$\frac{\ddot{x}_s(t)}{F_o/m} = -M_a \text{sen}(\omega t + \phi),$$

o *fator resposta de aceleração*

$$M_a = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 M_d = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}}. \quad (1.44)$$

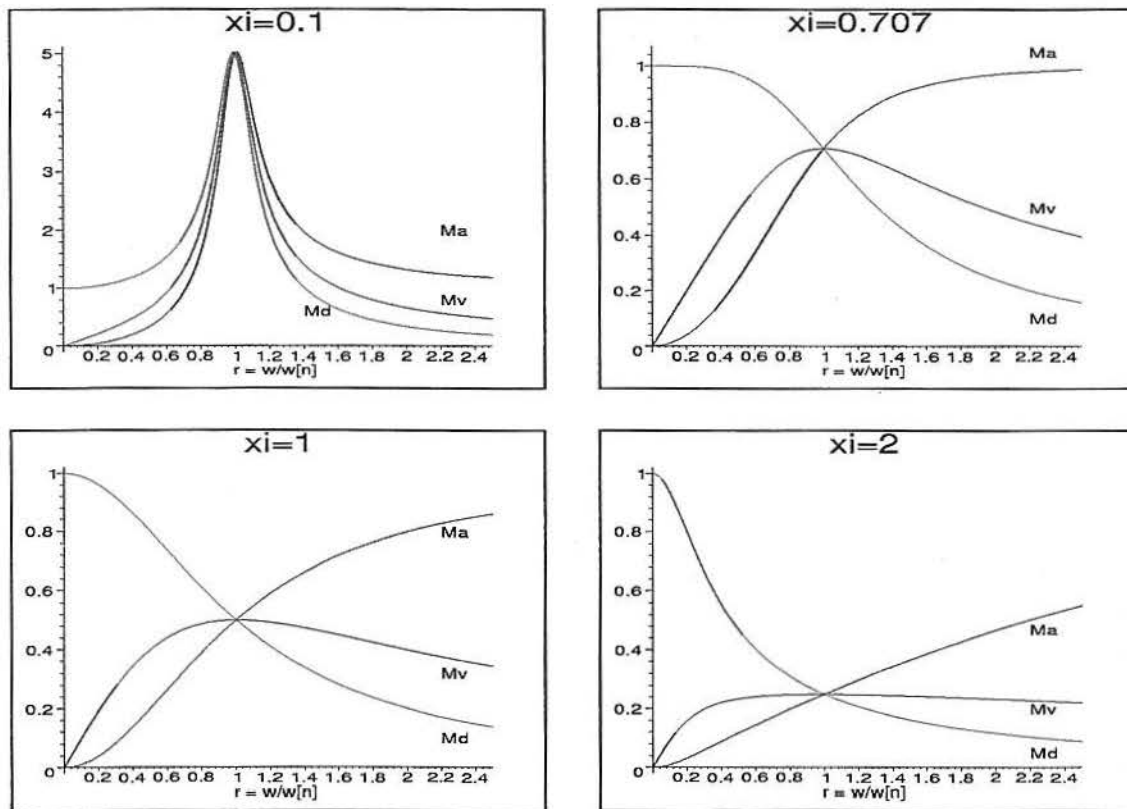


Figura 1.3 Gráficos dos fatores de amplificação, velocidade e aceleração para diversos valores de ξ .

As simples relações

$$\frac{M_a}{r} = M_v = r M_d$$

tornam possível apresentar os três fatores num único gráfico (veja-se figura 1.3).

Uma *resposta ressonante* é definida como a frequência da entrada, na qual ocorre a maior resposta de amplitude. Isto corresponde ao pico do fator resposta, ou seja, a frequência é um ponto de máximo do referido fator. Este ponto é um ponto crítico da derivada dos fatores resposta.

Para $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, tem-se as frequências ressonantes (veja-se figura 1.2) e os correspondentes valores máximos dos fatores:

$$\begin{aligned} \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} & \text{ para o deslocamento; } M_d = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}; \\ \omega_n & \text{ para a velocidade; } M_v = \frac{1}{2\xi}; \\ \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} & \text{ para a aceleração; } M_a = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}. \end{aligned}$$

Observe-se que, para $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, o máximo do fator resposta de deslocamento ocorre para $r = 0$. E, para sistemas não-amortecidos, as três frequências ressonantes são idênticas à frequência natural ω_n . Por outro lado, como a frequência amortecida é dada por $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, conclui-se que, para uma razão de amortecimento pequena, as frequências ressonante e amortecida estão muito próximas da frequência natural.

Finalmente, com o propósito de determinar as soluções real e complexa correspondentes ao caso em que $i\omega$ é raiz simples de $p(i\omega)$, considere-se $\frac{1}{p'(i\omega)}$ na forma polar $\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{(c^2 + 4\omega^2 m^2)}}$. Assim, para (1.37), por procedimento análogo ao anterior, resulta

$$x_c(t) = \frac{tF_o}{\sqrt{(c^2 + 4\omega^2 m^2)}} \cos(\omega t + \alpha) = \frac{tF_o \omega_n}{k \sqrt{(2\xi)^2 + (2r)^2}} \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.45)$$

e

$$x_s(t) = \frac{tF_o}{\sqrt{(c^2 + 4\omega^2 m^2)}} \text{sen}(\omega t + \alpha) = \frac{tF_o \omega_n}{k \sqrt{(2\xi)^2 + (2r)^2}} \text{sen}(\omega t + \alpha), \quad (1.46)$$

onde $\text{tg}(\alpha) = -\frac{c}{2m\omega} = -\xi r^{-1}$.

Estas soluções também exibem o fenômeno de ressonância.

Os principais resultados desta seção estão resumidos na Tabela 1.4

1.2.7 Excitação Periódica

Até aqui, a palavra harmônica foi utilizada num sentido muito restrito, ou seja, referente a uma força excitadora senoidal, que vibra com uma única frequência. Todavia, numa conotação mais ampla, este termo abrange forças excitadoras, que são a soma de duas ou mais forças senoidais de frequências diferentes, porém, comensuráveis: o quociente das frequências é um número racional.

A seguir, examinar-se-á a classe de forças periódicas, veja-se figura 1.4, isto é, forças que se repetem num tempo fixo T , propriedade denotada por $f(t) = f(t + T)$ para todos os valores tempo t , mas que podem não ser periódicas, se examinadas num tempo menor que T .

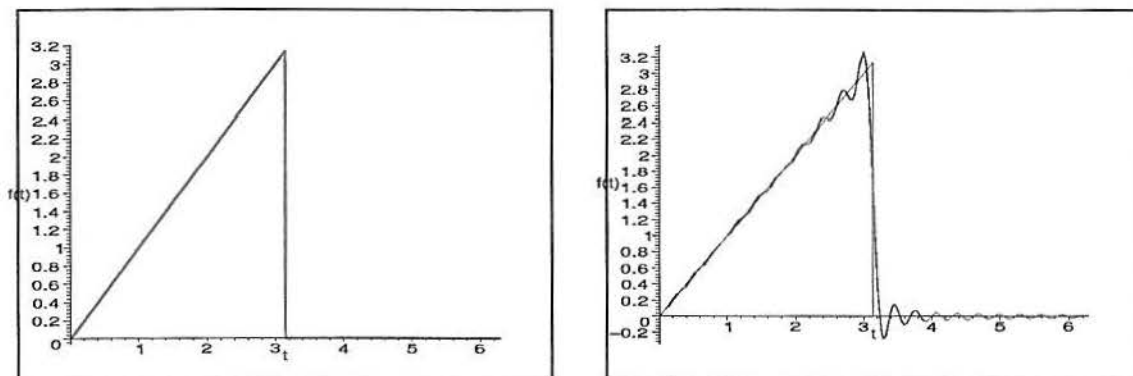


Figura 1.4 Gráficos de uma entrada periódica e de sua série de Fourier truncada em $n = 20$.

Para entradas periódicas $f(t)$, utiliza-se a decomposição espectral de Fourier em termos de entradas harmônicas:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}(n\omega t + \psi_n), \quad (1.47)$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Os coeficientes a_0 , a_n e b_n são calculados através das fórmulas

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, n = 1, 2, \dots$$

e

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{sen}(n\omega t) dt, n = 1, 2, \dots$$

Os valores

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \text{tg}(\psi_n) = \frac{a_n}{b_n} \quad (1.48)$$

configuram o *espectro* de $f(t)$, isto é, a amplitude e a fase correspondentes à frequência $n\omega$ da entrada $f(t)$.

Para o cálculo da saída, considere-se a equação

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t), \quad f(t+T) = f(t).$$

Pela superposição linear, tem-se

$$x(t) = x_{co}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [x_{cn}(t) + x_{sn}(t)],$$

onde $x_{cn}(t)$ e $x_{sn}(t)$ satisfazem, para $n > 0$,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_n \cos(n\omega t)$$

e

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b_n \text{sen}(n\omega t)$$

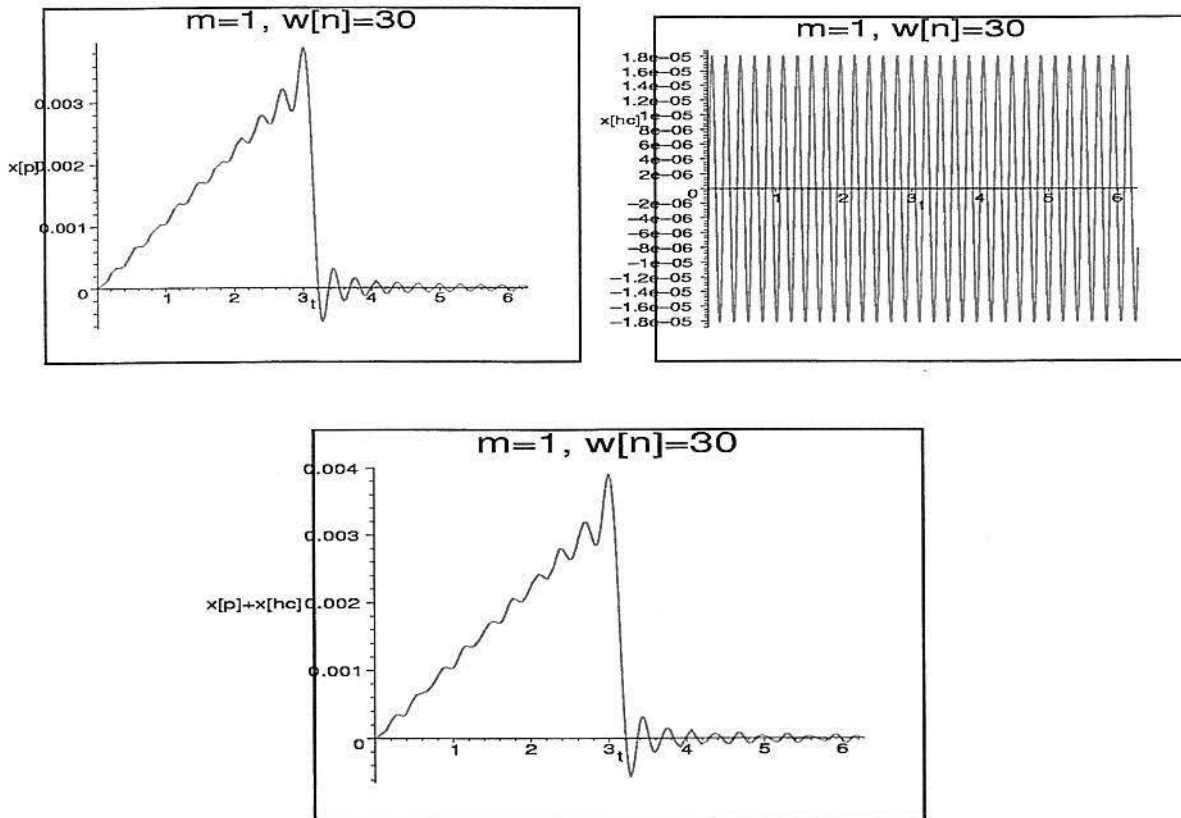


Figura 1.5 Gráficos das saídas x_p , x_{hc} e $x_p + x_{hc}$ no caso não-amortecido correspondentes à entrada da fig. 1.4.

respectivamente. E, para $n = 0$,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2}.$$

Do caso harmônico, equações (1.41 e 1.42), decorre para $n > 0$

$$x_{cn}(t) = a_n |H(in\omega)| \cos(n\omega t + \phi_n) = \frac{a_n}{\sqrt{c^2 n^2 \omega^2 + (k - mn^2 \omega^2)^2}} \cos(n\omega t + \phi_n) \quad (1.49)$$

e

$$x_{sn}(t) = b_n |H(in\omega)| \text{sen}(n\omega t + \phi_n) = \frac{b_n}{\sqrt{c^2 n^2 \omega^2 + (k - mn^2 \omega^2)^2}} \text{sen}(n\omega t + \phi_n), \quad (1.50)$$

sendo ϕ_n a fase correspondente à forma polar de $H(in\omega)$. Para $n = 0$,

$$x_{co}(t) = \frac{a_o}{2k}.$$

Assim, uma solução particular para a entrada periódica $f(t)$ é dada por

$$x_p(t) = \frac{a_o}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{c^2 n^2 \omega^2 + (k - mn^2 \omega^2)^2}} [a_n \cos(n\omega t + \phi_n) + b_n \text{sen}(n\omega t + \phi_n)]. \quad (1.51)$$

Finalmente, com a informação espectral (1.48) da entrada $f(t)$, é obtida a forma compacta da saída

$$x_p(t) = \frac{a_o}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{c^2 n^2 \omega^2 + (k - mn^2 \omega^2)^2}} \text{sen}(n\omega t + \phi_n + \psi_n), \quad (1.52)$$

onde A_n é a amplitude do espectro de $f(t)$, ϕ_n a fase de $H(in\omega)$ e ψ_n a fase de $f(t)$ relativa à frequência $n\omega$.

A forma paramétrica desta solução (veja-se figuras 1.5 e 1.6), correspondente à entrada periódica (figura 1.4)

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)] = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}(n\omega t + \psi_n),$$

com

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \text{tg}(\psi_n) = \frac{a_n}{b_n},$$

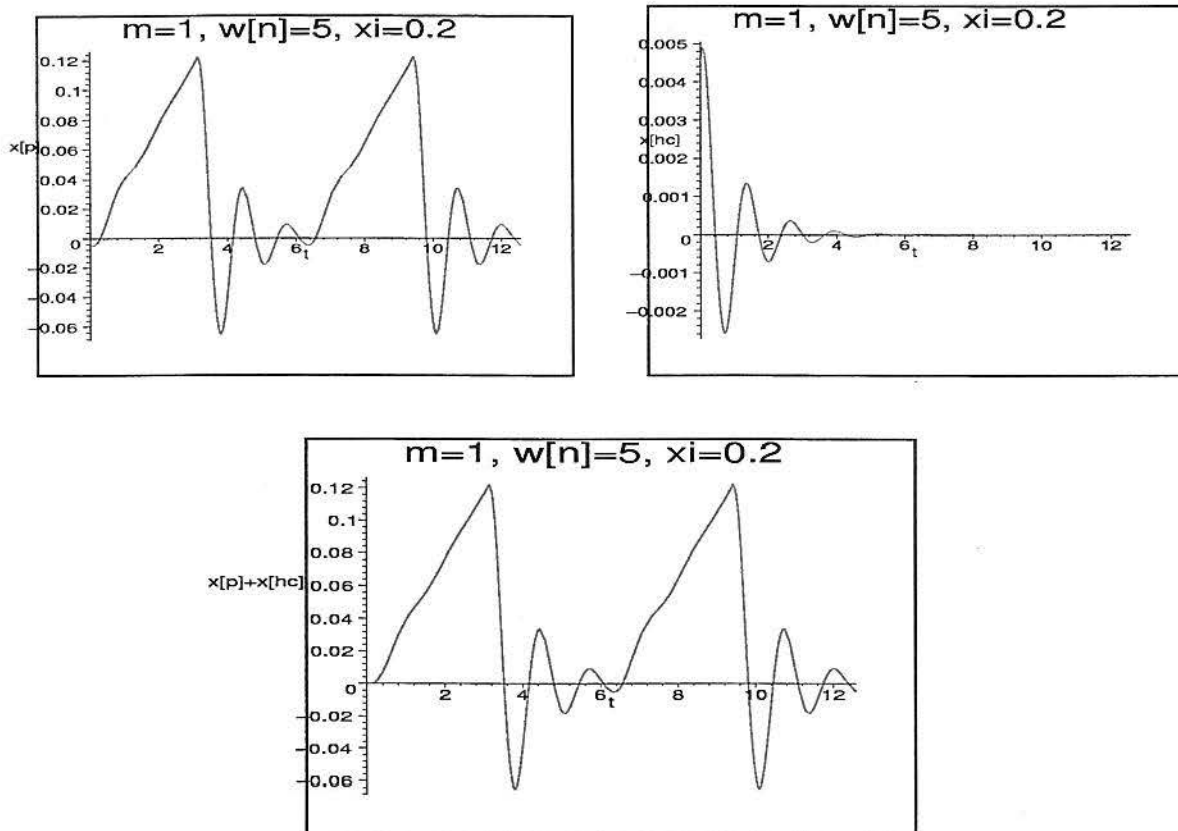


Figura 1.6 Gráficos das saídas x_p , x_{hc} e $x_p + x_{hc}$ no caso amortecido correspondentes à entrada da fig. 1.4.

é dada por

$$x_p(t) = \frac{a_o}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n M_d(r_n)}{k} \text{sen}(n\omega t + \phi_n + \psi_n) \quad (1.53)$$

onde

$$M_d(r_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\xi r_n)^2 + (1 - r_n^2)^2}}, \quad r_n = \frac{n\omega}{\omega_n}, \quad \text{tg}(\phi_n) = \frac{2\xi r_n}{1 - r_n^2}, \quad \text{tg}(\psi_n) = \frac{a_n}{b_n}$$

1.2.8 Excitação Arbitrária

Nesta seção, serão consideradas forças excitadoras que aparecem freqüentemente em vibrações. As respostas correspondentes são dadas pela integral de Duhamel, isto é, a convolução da resposta a um impulso unitário com a entrada. Esta integral pode ter como resultado a soma de duas vibrações: uma livre, chamada *vibração transiente*, e a outra forçada, dita *vibração permanente*, também conhecida como "estacionária". Por exemplo, para uma excitação harmônica $f(t) = F_o \text{sen}\omega t$, tem-se que

$$x_d(t) = \int_0^t \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \text{sen}\omega_d(t-\tau) F_o \text{sen}\omega\tau d\tau = x_p(t) + x_{hc}(t),$$

onde

$$x_{hc}(t) = \frac{F_o \omega e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_n^2} \left[\frac{2\xi \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t) + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \frac{-1+2\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t)}{(1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_n})^2} \right]$$

e

$$x_p(t) = \frac{F_o}{m\omega_n^2} \left[\frac{\frac{-2\xi\omega}{\omega_n} \cos\omega t + (1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2) \text{sen}\omega t}{(1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_n})^2} \right].$$

Ou, com a razão de freqüências $r = \frac{\omega}{\omega_n}$,

$$x_{hc}(t) = \frac{F_o \omega e^{-\xi\omega_n t}}{k} \left[\frac{2\xi \cos(\omega_d t) + \frac{(r^2-1+2\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_d t)}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \right]$$

e

$$x_p(t) = \frac{F_o}{k} \left[\frac{-2\xi r \cos(\omega t) + (1 - r^2) \text{sen}(\omega t)}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \right]$$

Observe-se que $x_{hc}(t)$ é uma vibração livre que desaparece conforme aumenta o tempo (*transiente*); $x_p(t)$ é uma vibração forçada que não desaparece com o tempo (*permanente*).

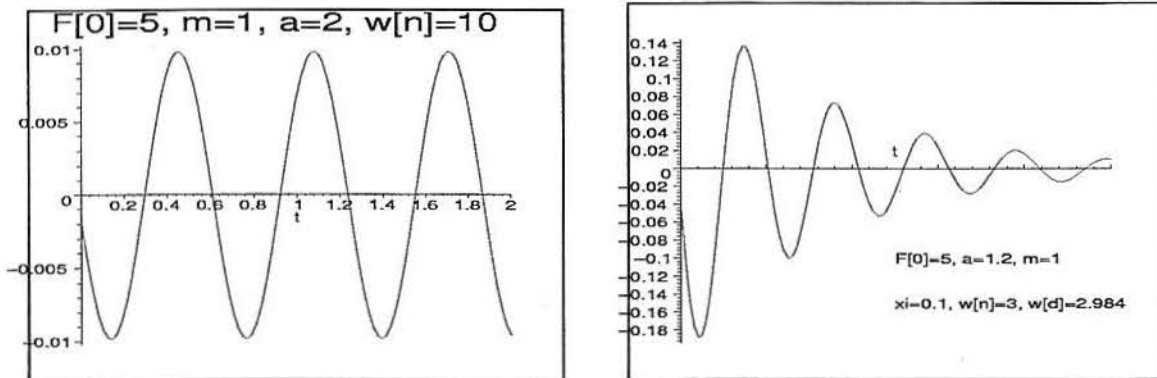


Figura 1.7 Gráficos de x_{hc} correspondentes a uma entrada exponencial assintótica.

Para forças excitadoras elementares, com o uso da base dinâmica $h(t)$, $\dot{h}(t)$, a solução complementar $x_{hc}(t)$ pode ser determinada de maneira única, em termos dos valores iniciais da solução $x_p(t)$. Mais precisamente,

$$x_{hc}(t) = h(t)\mathbf{u} + \dot{h}(t)\mathbf{v}, \quad \mathbf{u} = -\dot{x}_p(0)m - x_p(0)\mathbf{c}, \quad \mathbf{v} = -x_p(0)m. \quad (1.54)$$

De fato, de $x(0) = 0$, tem-se

$$0 = x_p(0) + h(0)\mathbf{u} + \dot{h}(0)\mathbf{v} = x_p(0) + \frac{1}{m}\mathbf{v}.$$

Similarmente, de $\dot{x}(0) = 0$, vem

$$0 = \dot{x}_p(0) + \dot{h}(0)\mathbf{u} + \ddot{h}(0)\mathbf{v} = \dot{x}_p(0) + \frac{1}{m}\mathbf{u} + \frac{-\dot{h}(0)\mathbf{c}}{m}\mathbf{v}$$

e, substituindo os valores de \mathbf{v} e de $\dot{h}(0)$, obtém-se o valor de \mathbf{u} , [CLA 99].

As Tabelas 1.5 e 1.7, a seguir, ilustram as respostas x_d , x_p e x_{hc} de sistemas não-amortecidos para entradas descritas por algumas funções elementares. A Tabela

1.6 exibe os gráficos de x_d e x_p para valores convenientes das constantes envolvidas. Porém, não foram tabelados os gráficos da solução x_{hc} . Estes últimos - veja-se figura 1.7, que mostra x_{hc} correspondente a entradas exponenciais assintóticas - são sempre do tipo harmônico (em sistemas não-amortecidos) ou do tipo senoidal amortecido (em sistemas dissipativos), pois a resposta x_{hc} está vinculada à resposta do caso homogêneo.

A Tabela 1.8 apresenta as soluções transientes x_{hc} de sistemas não-amortecidos, em termos da *base dinâmica* $h(t)$ e $\dot{h}(t)$, para entradas descritas por funções elementares e a Tabela 1.12 é a correspondente para sistemas amortecidos. As Tabelas 1.9 e 1.11 exibem as fórmulas de x_p e x_{hc} referentes aos sistemas amortecidos. A resposta livre, denotada por x_d , tem suas fórmulas tabeladas somente para o caso não-amortecido (Tabela 1.5). Nas tabelas gráficas 1.6 e 1.10, entretanto, foram considerados os sistemas forçados conservativos e dissipativos.

As figuras 1.5 e 1.6 exibem, à esquerda, a resposta a uma excitação periódica $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < \pi \\ 0, & -\pi < t < 0 \end{cases}$ obtida através da fórmula (1.51), a resposta x_{hc} , à direita, e $x_p + x_{hc}$, na parte inferior, obtidas com as duas últimas linhas das Tabelas 1.5 e 1.7 para o caso não-amortecido e Tabelas 1.9 e 1.11 para o caso amortecido respectivamente.

Para entradas poligonais lineares básicas: a Tabela 1.13 mostra a solução permanente x_p em termos de \mathcal{H} , a função de Heaviside, para abreviar a formulação, e a 1.14, por sua vez, exibe as vibrações livres associadas, x_{hc} , em termos de \mathcal{H} e da base dinâmica $h(t)$ e $\dot{h}(t)$.

A construção das tabelas foi realizada com auxílio do "software MapleV release 5".

A FUNÇÃO FREQUÊNCIA	
$H(i\omega) = \frac{1}{m(i\omega)^2 + ci\omega + k} = \frac{1}{p(i\omega)}$	
Forma Polar: $H(i\omega) = H(i\omega) e^{i\phi} = \frac{1}{\sqrt{c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} e^{i\phi}$, $\text{tg}(\phi) = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$	
Resposta a uma excitação harmônica ($f(t) = F_o e^{i\omega t}$): $x(t) = x_c(t) + i x_s(t)$	
Caso $p(i\omega) \neq 0$, $x(t) = \frac{1}{p(i\omega)} F_o e^{i(\omega t)}$	Caso $p(i\omega) = 0$, $x(t) = \frac{1}{p'(i\omega)} t F_o e^{i(\omega t)}$
Forma Polar, $\text{tg}(\phi) = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$	Forma Polar, $\text{tg}(\alpha) = -\frac{c}{2m\omega}$
$x_c(t) = \frac{F_o}{\sqrt{c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} \cos(\omega t + \phi)$	$x_c(t) = \frac{t F_o}{\sqrt{(c^2 + 4\omega^2 m^2)}} \cos(\omega t + \alpha)$
$x_s(t) = \frac{F_o}{\sqrt{c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} \text{sen}(\omega t + \phi)$	$x_s(t) = \frac{t F_o}{\sqrt{(c^2 + 4\omega^2 m^2)}} \text{sen}(\omega t + \alpha)$
Forma Paramétrica, $r = \frac{\omega}{\omega_n}$	Forma Paramétrica, $r = \frac{\omega}{\omega_n}$
$x_c(t) = \frac{F_o}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \cos(\omega t + \phi)$	$x_c(t) = \frac{t F_o \omega_n}{k \sqrt{(2\xi)^2 + (2r)^2}} \cos(\omega t + \alpha)$
$x_s(t) = \frac{F_o}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \text{sen}(\omega t + \phi)$	$x_s(t) = \frac{t F_o \omega_n}{k \sqrt{(2\xi)^2 + (2r)^2}} \text{sen}(\omega t + \alpha)$

Fator Resposta	
Deslocamento :	$M_d = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$
Velocidade :	$M_v = \frac{\omega}{\omega_n} M_d = r M_d$
Aceleração :	$M_a = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 M_d = r^2 M_d$

Tabela 1.4 A função frequência, a resposta a uma excitação harmônica e os fatores resposta.

$$x_d(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau = x_p(t) + x_{hc}(t)$$

ENTRADA $f(t)$	SAÍDA $x_d(t)$	SAÍDA FORÇADA $x_p(t)$
F_o	$-\frac{F_o(-1+\cos(\omega_n t))}{\omega_n^2 m}$	$\frac{F_o}{m\omega_n^2}$
$F_o t$	$\frac{F_o(\omega_n t - \text{sen}(\omega_n t))}{m\omega_n^3}$	$\frac{F_o t}{m\omega_n^2}$
$F_o e^{-at}$	$\frac{F_o(e^{-at}\omega_n - \cos(\omega_n t)\omega_n + a\text{sen}(\omega_n t))}{m\omega_n(a^2 + \omega_n^2)}$	$\frac{F_o e^{(-at)}}{m(a^2 + \omega_n^2)}$
$F_o(1 - e^{-at})$	$\frac{F_o(a^2(\cos(\omega_n t) - 1) + \omega_n^2(e^{-at} - 1) + \omega_n a\text{sen}(\omega_n t))}{m\omega_n^2(a^2 + \omega_n^2)}$	$\frac{F_o((-e^{(-at)} + 1)\omega_n^2 + a^2)}{m\omega_n^2(a^2 + \omega_n^2)}$
$F_o(e^{-bt} - e^{-at})$	$\frac{F_o}{m\omega_n} \left[\frac{\omega_n \cos(\omega_n t) - a \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n e^{-at}}{a^2 + \omega_n^2} + \frac{\text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \cos(\omega_n t) + \omega_n e^{-bt}}{b^2 + \omega_n^2} \right]$	$\frac{F_o}{m} \left(-\frac{e^{(-at)}}{a^2 + \omega_n^2} + \frac{e^{(-bt)}}{b^2 + \omega_n^2} \right)$
$F_o \text{sen}(\omega t)$	$\frac{F_o}{m\omega_n} \left(\frac{\omega \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen}(\omega t)}{\omega^2 - \omega_n^2} \right)$	$\frac{F_o \text{sen}(\omega t)}{m(\omega_n^2 - \omega^2)}$
$F_o \cos(\omega t)$	$\frac{F_o}{m} \left(\frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega^2} \right)$	$\frac{F_o \cos(\omega t)}{m(\omega_n^2 - \omega^2)}$

Tabela 1.5 Saídas $x_d(t)$ e $x_p(t)$ para o caso não-amortecido correspondentes a entradas descritas por funções elementares.

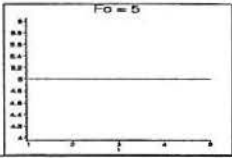
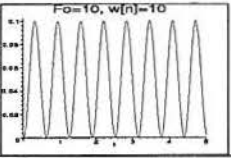
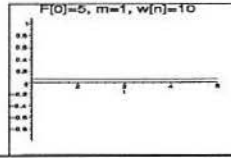
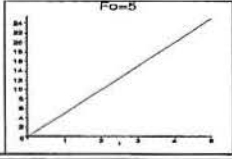
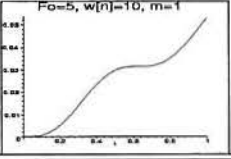
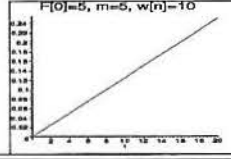
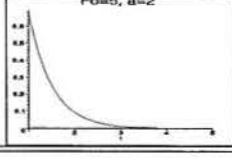
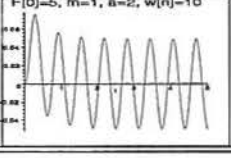
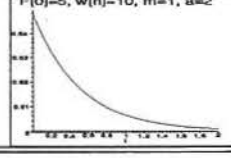
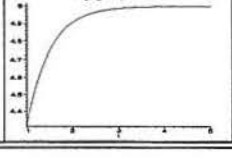
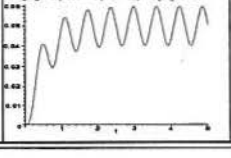
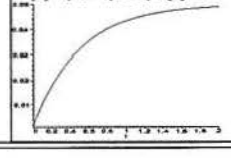
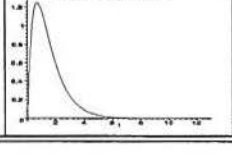
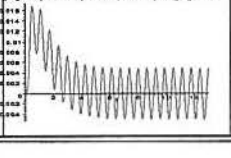
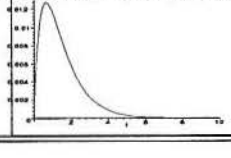
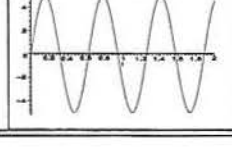
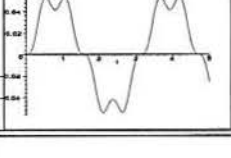
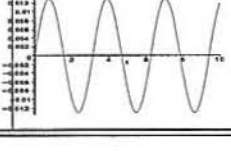
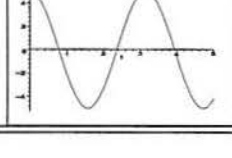
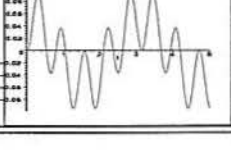
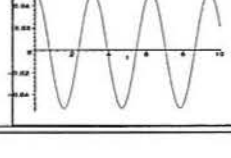
	ENTRADA $f(t)$	SAÍDA $x_d(t)$	SAÍDA FORÇADA $x_p(t)$
F_o			
$F_o t$			
$F_o e^{-at}$			
$F_o(1 - e^{-at})$			
$F_o(e^{-bt} - e^{-at})$			
$F_o \text{sen}(\omega t)$			
$F_o \text{cos}(\omega t)$			

Tabela 1.6 Gráficos das saídas $x_d(t)$ e $x_p(t)$ para o caso não-amortecido correspondentes a entradas descritas por funções elementares.

$$x_d(t) = \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau = x_p(t) + x_{hc}(t)$$

ENTRADA $f(t)$	SAÍDA $x_{hc}(t)$
F_0	$-\frac{F_0 \cos(\omega_n t)}{m \omega_n^2}$
$F_0 t$	$-\frac{F_0 \text{sen}(\omega_n t)}{m \omega_n^3}$
$F_0 e^{-at}$	$\frac{F_0(a \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \cos(\omega_n t))}{m \omega_n (a^2 + \omega_n^2)}$
$F_0(1 - e^{-at})$	$-\frac{F_0 a (a \cos(\omega_n t) + \omega_n \text{sen}(\omega_n t))}{m \omega_n^2 (a^2 + \omega_n^2)}$
$F_0 (e^{-bt} - e^{-at})$	$\frac{(b - a)F_0 ((\omega_n^2 - ab) \text{sen}(\omega_n t) + \omega_n (b + a) \cos(\omega_n t))}{m \omega_n (a^2 + \omega_n^2) (b^2 + \omega_n^2)}$
$F_0 \text{sen}(\omega t)$	$-\frac{F_0 \omega \text{sen}(\omega_n t)}{m \omega_n (\omega_n^2 - \omega^2)}$
$F_0 \cos(\omega t)$	$-\frac{F_0 \cos(\omega_n t)}{m (\omega_n^2 - \omega^2)}$

Tabela 1.7 Saída $x_{hc}(t)$ para o caso não-amortecido correspondente a entradas descritas por funções elementares.

$$x_{hc}(t) = h(t)u + \dot{h}(t)v$$

$$h(t) = \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{m\omega_n}, \quad \dot{h}(t) = \frac{\cos(\omega_n t)}{m}$$

ENTRADA $f(t)$	$u = -\dot{x}_p(0)m$	$v = -x_p(0)m$
F_o	0	$-\frac{F_o}{\omega_n^2}$
$F_o t$	$-\frac{F_o}{\omega_n^2}$	0
$F_o e^{-at}$	$\frac{F_o a}{a^2 + \omega_n^2}$	$-\frac{F_o}{a^2 + \omega_n^2}$
$F_o(1 - e^{-at})$	$-\frac{F_o a}{a^2 + \omega_n^2}$	$-\frac{F_o a^2}{\omega_n^2 (a^2 + \omega_n^2)}$
$F_o(e^{-bt} - e^{-at})$	$F_o \left(\frac{b}{b^2 + \omega_n^2} - \frac{a}{a^2 + \omega_n^2} \right)$	$F_o \left(\frac{1}{a^2 + \omega_n^2} - \frac{1}{b^2 + \omega_n^2} \right)$
$F_o \text{sen}(\omega t)$	$\frac{F_o \omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$	0
$F_o \cos(\omega t)$	0	$-\frac{F_o}{\omega_n^2 - \omega^2}$

Tabela 1.8 Saída $x_{hc}(t)$ para o caso não-amortecido obtida em termos da resposta a um impulso unitário e de sua derivada.

$$x_d(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau = x_p(t) + x_{hc}(t)$$

ENTRADA $f(t)$	SAÍDA PERMANENTE $x_p(t)$
F_o	$\frac{F_o}{m\omega_n^2}$
$F_o t$	$\frac{F_o}{m} \left[\frac{t\omega_n - 2\xi}{\omega_n^3} \right]$
$F_o e^{-at}$	$\frac{F_o}{m} \left[\frac{e^{-at}}{(\xi\omega_n - a)^2 + \omega_d^2} \right]$
$F_o(1 - e^{-at})$	$\frac{F_o}{m} \left[\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{e^{-at}}{(\xi\omega_n - a)^2 + \omega_d^2} \right]$
$F_o(e^{-bt} - e^{-at})$	$\frac{F_o}{m} \left[\frac{e^{-bt}}{(\xi\omega_n - b)^2 + \omega_d^2} - \frac{e^{-at}}{(\xi\omega_n - a)^2 + \omega_d^2} \right]$
$F_o \text{sen}(\omega t)$	$\frac{F_o}{m} \left[\frac{(\omega_n^2 - \omega^2)\text{sen}(\omega t) - 2\xi\omega\omega_n \text{cos}(\omega t)}{(\omega_n^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2\omega_d^2} \right]$
$F_o \text{cos}(\omega t)$	$\frac{F_o}{m} \left[\frac{(\omega_n^2 - \omega^2)\text{cos}(\omega t) + 2\xi\omega\omega_n \text{sen}(\omega t)}{(\omega_n^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2\omega_d^2} \right]$

Tabela 1.9 Saída $x_p(t)$ para o caso amortecido correspondente a entradas descritas por funções elementares.

	ENTRADA $f(t)$	SAÍDA $x_d(t)$	SAÍDA PERMANENTE $x_p(t)$
F_o			
$F_o t$			
$F_o e^{-at}$			
$F_o(1 - e^{-at})$			
$F_o(e^{-bt} - e^{-at})$			
$F_o \text{sen}(\omega t)$			
$F_o \text{cos}(\omega t)$			

Tabela 1.10 Gráficos das saídas $x_d(t)$ e $x_p(t)$ para o caso amortecido correspondentes a entradas descritas por funções elementares.

$$x_d(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau = x_p(t) + x_{hc}(t)$$

ENTRADA $f(t)$	SAÍDA TRANSIENTE $x_{hc}(t)$
F_o	$\frac{F_o e^{-\xi\omega_n t}}{m} \left[\frac{-\cos(\omega_d t)}{\omega_n^2} - \frac{\xi \text{sen}(\omega_d t)}{\omega_d \omega_n} \right]$
$F_o t$	$\frac{F_o e^{-\xi\omega_n t}}{m} \left[\frac{2\xi \cos(\omega_d t)}{\omega_n^3} + \frac{(2\xi^2 - 1)\text{sen}(\omega_d t)}{\omega_d \omega_n^2} \right]$
$F_o e^{-at}$	$\frac{F_o e^{-\xi\omega_n t}}{m} \left[\frac{-\cos(\omega_d t)}{(\xi\omega_n - a)^2 + \omega_d^2} + \frac{(-\xi\omega_n + a)\text{sen}(\omega_d t)}{\omega_d [(\xi\omega_n - a)^2 + \omega_d^2]} \right]$
$F_o(1 - e^{-at})$	$\frac{F_o a e^{-\xi\omega_n t}}{m} \left[\frac{(2\xi\omega_n - a)\cos(\omega_d t)}{\omega_n^2 [(\xi\omega_n - a)^2 + \omega_d^2]} + \frac{(\xi^2\omega_n^2 - \xi a\omega_n - \omega_d^2)\text{sen}(\omega_d t)}{\omega_d \omega_n^2 [(\xi\omega_n - a)^2 + \omega_d^2]} \right]$
$F_o(e^{-bt} - e^{-at})$	$\frac{F_o e^{-\xi\omega_n t}(a-b)}{m} \left[\frac{\omega_d(-a-b+2\xi\omega_n)\cos(\omega_d t) + (ab-\omega_n^2+\xi\omega_n(-a-b+2\xi\omega_n))\text{sen}(\omega_d t)}{\omega_d [(\xi\omega_n-b)^2 + \omega_d^2][(\xi\omega_n-a)^2 + \omega_d^2]} \right]$
$F_o \text{sen}(\omega t)$	$\frac{F_o e^{-\xi\omega_n t} \omega}{m} \left[\frac{2\xi\omega_n \cos(\omega_d t)}{(\omega_n^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2\omega_d^2} + \frac{[\omega_n^2(2\xi^2 - 1) + \omega^2]\text{sen}(\omega_d t)}{\omega_d [(\omega_n^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2\omega_d^2]} \right]$
$F_o \cos(\omega t)$	$\frac{F_o e^{-\xi\omega_n t}}{m} \left[\frac{-(\omega_n^2 - \omega^2)\cos(\omega_d t)}{(\omega_n^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2\omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n(\omega_n^2 + \omega^2)\text{sen}(\omega_d t)}{\omega_d [(\omega_n^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2\omega_d^2]} \right]$

Tabela 1.11 Saída $x_{hc}(t)$ para o caso amortecido correspondente a entradas descritas por funções elementares.

$$x_{hc}(t) = h(t)u + \dot{h}(t)v$$

ENTRADA $f(t)$	$u = -(\dot{x}_p(0)m + x_p(0)c)$	$v = -x_p(0)m$
F_o	$-2\frac{F_o\xi}{\omega_n}$	$-\frac{F_o}{\omega_n^2}$
$F_o t$	$-\frac{F_o}{\omega_n^2}(1 - 4\xi^2)$	$2\frac{F_o\xi}{\omega_n^3}$
$F_o e^{-at}$	$F_o m \left[\frac{a-2\xi\omega_n}{m(\xi\omega_n-a)^2+\omega_d^2} \right]$	$-\frac{F_o m}{m(\xi\omega_n-a)^2+\omega_d^2}$
$F_o(1 - e^{-at})$	$-F_o \left[\frac{(a+2\xi\omega_n)}{(\xi\omega_n-a)^2+\omega_d^2} - 2\frac{\xi}{\omega_n} \right]$	$-F_o \left[\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{(\xi\omega_n-a)^2+\omega_d^2} \right]$
$F_o(e^{-bt} - e^{-at})$	$-F_o \left[\frac{b-2\xi\omega_n}{(\xi\omega_n-b)^2+\omega_d^2} - \frac{a-2\xi\omega_n}{(\xi\omega_n-a)^2+\omega_d^2} \right]$	$-F_o \left[\frac{1}{(\xi\omega_n-b)^2+\omega_d^2} - \frac{1}{(\xi\omega_n-a)^2+\omega_d^2} \right]$
$F_o \text{sen}(\omega t)$	$-F_o \omega \left[\frac{\omega_n^2 - \omega^2 + 4\xi^2 \omega_n^2}{(\omega_n^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2 \omega_d^2} \right]$	$\frac{2F_o - \omega \xi \omega_n}{(\omega_n^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2 \omega_d^2}$
$F_o \text{cos}(\omega t)$	$-2F_o \xi \omega_n \left[\frac{\omega^2 - (\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2 \omega_d^2} \right]$	$-\frac{F_o(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2 \omega_d^2}$

Tabela 1.12 Saída $x_{hc}(t)$ para o caso amortecido obtida em termos da resposta a um impulso unitário e de sua derivada.

$$x_d(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau = x_p(t) + x_{hc}(t)$$

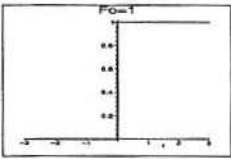
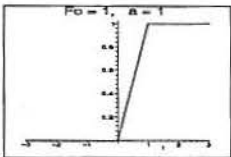
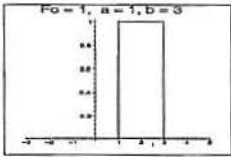
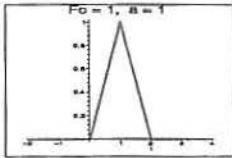
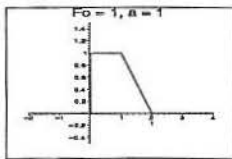
ENTRADA $f(t)$	SAÍDA PERMANENTE $x_p(t)$
$F_o \mathcal{H}(t)$ 	$\frac{F_o}{m\omega_n^2} \mathcal{H}(t)$
$\frac{F_o}{a} (t \mathcal{H}(t) - (t-a) \mathcal{H}(t-a))$ 	$\frac{F_o}{m\omega_n^2 a} \left[\left(t - \frac{2\xi}{\omega_n} \right) (\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t-a)) + a \mathcal{H}(t-a) \right]$
$F_o (\mathcal{H}(t-a) - \mathcal{H}(t-b))$ 	$\frac{F_o}{m\omega_n^2} (\mathcal{H}(t-a) - \mathcal{H}(t-b))$
$\frac{F_o}{a} (t \mathcal{H}(t) - 2(t-a) \mathcal{H}(t-a) + (t-2a) \mathcal{H}(t-2a))$ 	$\frac{F_o}{m\omega_n^2 a} \left[\left(t - \frac{2\xi}{\omega_n} \right) (\mathcal{H}(t) - 2\mathcal{H}(t-a) + \mathcal{H}(t-2a)) + 2a (\mathcal{H}(t-a) - \mathcal{H}(t-2a)) \right]$
$F_o \left[\mathcal{H}(t) - \frac{t-a}{b-a} \mathcal{H}(t-a) + \frac{t-b}{b-a} \mathcal{H}(t-b) \right]$ 	$\frac{F_o}{m\omega_n^2} \left\{ \mathcal{H}(t) - \frac{1}{b-a} \left[\left(t-a - \frac{2\xi}{\omega_n} \right) \mathcal{H}(t-a) + \left(t-b - \frac{2\xi}{\omega_n} \right) \mathcal{H}(t-b) \right] \right\}$

Tabela 1.13 Saída $x_p(t)$ para o caso amortecido correspondente a entradas descritas por funções seccionalmente contínuas.

$$x_d(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau = x_p(t) + x_{hc}(t)$$

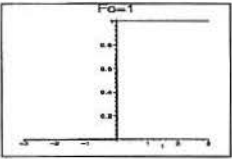
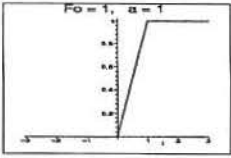
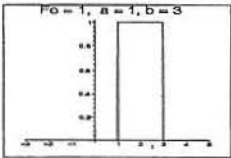
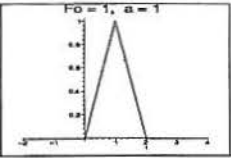
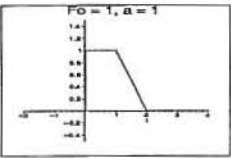
ENTRADA $f(t)$	SAÍDA TRANSIENTE $x_{hc}(t)$
$F_o \mathcal{H}(t)$ 	$-\frac{F_o}{\omega_n^2} (\dot{h}(t) + 2\xi\omega_n h(t)) \mathcal{H}(t)$
$\frac{F_o}{a} (t \mathcal{H}(t) - (t-a) \mathcal{H}(t-a))$ 	$\frac{F_o}{\omega_n^2} \left[\frac{2\xi}{\omega_n} (\dot{h}(t) \mathcal{H}(t) - \dot{h}(t-a) \mathcal{H}(t-a)) \right. \\ \left. + (4\xi^2 - 1)\omega_n (h(t) \mathcal{H}(t) - h(t-a) \mathcal{H}(t-a)) \right]$
$F_o (\mathcal{H}(t-a) - \mathcal{H}(t-b))$ 	$-\frac{F_o}{\omega_n^2} [\dot{h}(t-a) \mathcal{H}(t-a) - \dot{h}(t-b) \mathcal{H}(t-b)] \\ + 2\xi\omega_n (h(t-a) \mathcal{H}(t-a) - h(t-b) \mathcal{H}(t-b))]$
$\frac{F_o}{a} (t \mathcal{H}(t) - 2(t-a) \mathcal{H}(t-a) + (t-2a) \mathcal{H}(t-2a))$ 	$\frac{F_o}{\omega_n^2 a} \left\{ \frac{2\xi}{\omega_n} [\dot{h}(t) \mathcal{H}(t) - 2\dot{h}(t-a) \mathcal{H}(t-a) \right. \\ \left. + \dot{h}(t-2a) \mathcal{H}(t-2a)] + (4\xi^2 - 1)\omega_n [h(t) \mathcal{H}(t) \right. \\ \left. - 2h(t-a) \mathcal{H}(t-a) + h(t-2a) \mathcal{H}(t-2a)] \right\}$
$F_o \left[\mathcal{H}(t) - \frac{t-a}{b-a} \mathcal{H}(t-a) + \frac{t-b}{b-a} \mathcal{H}(t-b) \right]$ 	$-\frac{F_o}{\omega_n^2} \{ \dot{h}(t) \mathcal{H}(t) + 2\xi\omega_n h(t) \mathcal{H}(t) \\ - \frac{1}{b-a} \left[\frac{2\xi}{\omega_n} (\dot{h}(t-a) \mathcal{H}(t-a) - \dot{h}(t-b) \mathcal{H}(t-b)) \right. \\ \left. + (4\xi^2 - 1)\omega_n (h(t-a) \mathcal{H}(t-a) - h(t-b) \mathcal{H}(t-b)) \right] \}$

Tabela 1.14 Saída $x_{hc}(t)$ para o caso amortecido correspondente a entradas descritas por funções seccionalmente contínuas.

2 SISTEMAS COM N GRAUS DE LIBERDADE

2.1 Introdução

Um grande número de sistemas, utilizados na engenharia, são compostos de várias partes, que se movem independentemente e estão sujeitas a restrições cinemáticas impostas pelas suas interconexões. A fim de visualizar completamente o estado do movimento, relativo a estes sistemas, é necessário conhecer os valores instantâneos das várias coordenadas x_j e as correspondentes velocidades \dot{x}_j . Portanto, neste capítulo, tem-se como objetivo desenvolver ferramentas analíticas, que permitam prever a resposta de um sistema com vários graus de liberdade.

Conforme estabelecido anteriormente, um sistema com um grau de liberdade descreve muitos, porém não a totalidade dos fenômenos vibratórios fundamentais. Um novo conceito refere-se à identificação de padrões preferenciais de vibrações, chamados de *modos de vibração*. Este enfoque conduzirá à análise modal, a qual permitirá a representação da resposta para um determinado tipo de sistema com n graus de liberdade, em termos de um conjunto de n sistemas de um grau de liberdade. Tal processo, conhecido como desacoplamento, tem sua aplicabilidade limitada aos casos de sistemas não-amortecidos e sistemas com forte restrição quanto à natureza do atrito: amortecimento de Rayleigh e aproximação de Knowles, [GAL 87].

Diante da limitação da análise modal, é conveniente estender os conceitos introduzidos no capítulo anterior, em particular, os de *resposta impulso* e de *função de transferência* para o caso de sistemas com múltiplos graus de liberdade.

As equações do movimento, para os sistemas com n graus de liberdade, podem ser obtidas da segunda lei de Newton do movimento ou com o uso das equações

de Lagrange. No caso linear, as equações do movimento são dadas, na forma matricial, por

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t), \quad (2.1)$$

onde: M , C e K são matrizes $n \times n$, que representam a *matriz de massa*, a *matriz de amortecimento* e a *matriz de rigidez* do sistema respectivamente; x é um vetor, com componentes incógnitas, que dependem de t , de ordem $n \times 1$; \dot{x} e \ddot{x} denotam a primeira e a segunda derivada de x ; e $f(t)$ é um vetor dado, formado por funções na variável t , de ordem $n \times 1$.

O método operacional será utilizado para estabelecer propriedades gerais de um sistema com n graus de liberdade, em termos da resposta impulso matricial e da matriz de transferência. Para estas, será dada uma formulação não-modal. O método modal ou espectral, que requer o cálculo dos modos, será utilizado em sistemas com características particulares.

2.2 A Equação do Sistema Vibratório com n Graus de Liberdade

Quando são requeridas n coordenadas independentes para especificar as posições das partículas de um sistema, o sistema é dito com n *graus de liberdade*. O movimento de um sistema vibratório, com n graus de liberdade, é descrito por n equações diferenciais, as quais decorrem de critérios e de leis físicas. Neste trabalho, será utilizado o método das equações de Lagrange.

Para analisar um sistema com n graus de liberdade, ou seja, de um sistema MDFS, são consideradas simplificações, em termos de *massa, mola e amortecedor* que, por sua vez, representam o corpo, a elasticidade e o amortecimento do sistema. Em geral, os deslocamentos, x_i , $i = 1 : k$, das partículas do sistema, podem ser descritos como funções de um número de parâmetros, q_j , $j = 1 : n$, chamados *coordenadas generalizadas*. Uma coordenada generalizada é alguma grandeza física, tal como um comprimento ou um ângulo. O número de coordenadas generalizadas de um sistema é sempre igual ao número de graus de liberdade do mesmo.

Considere-se um sistema vibratório de k partículas com os deslocamentos

$$x_i = x_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1 : k, \quad (2.2)$$

onde os x_j , $j = 1 : n$, são as coordenadas generalizadas. As equações de Lagrange são dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} = F_j, \quad j = 1 : n, \quad (2.3)$$

onde $L = T - U$ é a função lagrangiana do sistema, T é a energia cinética, U é a energia potencial, D é a energia dissipativa, e F_j , $j = 1 : n$, representam as forças externas generalizadas. Sob hipóteses de linearidade, tem-se

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j = \frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x} \\ U &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2} x^T K x \\ D &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j = \frac{1}{2} \dot{x}^T C \dot{x}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde

$$M = [m_{ij}], \quad K = [k_{ij}], \quad C = [c_{ij}]. \quad (2.5)$$

Substituindo, as equações (2.4) em (2.3) decorre

$$\sum_{i=1}^n m_{ij} \ddot{x}_i + \sum_{i=1}^n k_{ij} x_i + \sum_{i=1}^n c_{ij} \dot{x}_i = F_j, \quad j = 1 : n$$

ou, na forma matricial,

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t). \quad (2.6)$$

Note-se que, neste trabalho, a matriz M será considerada não singular.

2.3 O Método Matricial Operacional

Considere-se a equação diferencial

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t), \quad (2.7)$$

onde M , C , K são matrizes arbitrárias $n \times n$. Aplicando a transformada de Laplace a esta equação, obtém-se

$$Ms^2X(s) - M\dot{x}(0) - Msx(0) + C[sX(s) - x(0)] + KX(s) = F(s).$$

Através de simplificações, decorre a equação operacional

$$\Delta(s)X(s) = M\dot{x}(0) + (sM + C)x(0) + F(s), \quad (2.8)$$

onde

$$\Delta(s) = s^2M + sC + K,$$

e $X(s)$, $F(s)$ são as transformadas de Laplace de $x(t)$ e de $f(t)$ respectivamente.

A *resposta impulso matricial*, ou a solução dinâmica, $\mathcal{D}(t)$ é introduzida como a solução do problema

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathcal{D}} + C\dot{\mathcal{D}} + K\mathcal{D} &= 0, \\ \mathcal{D}(0) &= 0, \quad M\dot{\mathcal{D}}(0) = I \end{aligned} \tag{2.9}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathcal{D}} + C\dot{\mathcal{D}} + K\mathcal{D} &= \delta(t)I, \\ \mathcal{D}(0) &= 0, \quad M\dot{\mathcal{D}}(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Da equação operacional para $\mathcal{D}(t)$, decorre

$$\Delta(s)H(s) = I, \tag{2.11}$$

ou seja, $H(s)$ é a transformada de Laplace de $\mathcal{D}(t)$ e será denominada a *matriz de transferência* do sistema (2.7).

Observe-se que uma matriz não-singular comuta com sua inversa. Então, a rigor, tem-se que a matriz de transferência comuta com o polinômio matricial $\Delta(s)$, isto é,

$$\Delta(s)H(s) = H(s)\Delta(s) = I.$$

Assim, pré-multiplicando (2.8) por

$$\Delta^{-1}(s) = H(s),$$

decorre

$$X(s) = H(s)M\dot{x}(0) + (sH(s)M + H(s)C)x(0) + H(s)F(s).$$

Agora, com a transformada inversa de Laplace, obtém-se uma fórmula para as soluções de (2.7), em termos da resposta impulso,

$$x(t) = \mathcal{D}(t)M\dot{x}(0) + \left(\dot{\mathcal{D}}(t)M + \mathcal{D}(t)C\right)x(0) + \int_0^t \mathcal{D}(t-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (2.12)$$

Esta equação (2.12) mostra que, para conhecer a *solução* do sistema (2.7), é suficiente determinar a resposta impulso associada ao mesmo.

A resposta impulso pode, em princípio, ser descrita por uma série de Taylor e aproximada de maneira polinomial. Isto é, escrevendo

$$\mathcal{D}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{D}_j \frac{t^j}{j!}, \quad (2.13)$$

onde $\mathcal{D}_j = \mathcal{D}^{(j)}(0)$, e substituindo em (2.9), obtém-se a equação recursiva

$$\begin{aligned} M\mathcal{D}_{j+2} + C\mathcal{D}_{j+1} + K\mathcal{D}_j &= 0, \\ M\mathcal{D}_1 &= I, \quad \mathcal{D}_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Porém, sob o ponto de vista numérico, o truncamento da série pode acarretar erros numéricos, como foi discutido por Moler e Van Loan [MOL 78], para o caso da res-

posta impulso associada a um sistema de primeira ordem (exponencial de uma matriz).

Por outro lado, o método espectral, isto é, a determinação de soluções do tipo exponencial $x(t) = e^{\lambda t}v$ para o sistema não forçado

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0,$$

conduz à resolução do problema de autovalor

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)v = 0, \quad v \neq 0. \quad (2.15)$$

Este procedimento equivale a determinar as raízes (autovalores de (2.15)) do *polinômio característico*

$$p(\lambda) = \det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = \sum_{i=0}^{2n} b_i \lambda^{2n-i} \quad (2.16)$$

e, posteriormente, achar os autovetores ou modos v .

Como

$$H(s) = \Delta^{-1}(s) = \frac{\text{adj } \Delta(s)}{p(s)},$$

os pólos de $H(s)$ são os autovalores de (2.15), portanto, em número finito. Segue-se que a integral de Bromwich [GAL 87], para a transformada inversa de Laplace, pode ser reduzida a uma integral de contorno limitado

$$\mathcal{D}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} H(s)e^{st} ds, \quad (2.17)$$

onde Γ é uma circunferência que encerra os autovalores de (2.15).

Entretanto, as fórmulas (2.17) e (2.14) não são muito adequadas para a obtenção das propriedades analíticas da resposta impulso; tampouco são apropriadas

numericamente. Pois, o caso da aplicação de (2.17) requer o conhecimento da matriz de transferência $H(s)$, e, para o caso de (2.14), a dificuldade consiste em gerar as matrizes \mathcal{D}_j para j muito grande.

Na próxima seção, será considerado um método para o cálculo analítico da resposta impulso e da matriz de transferência [CLA 95], que fornece fórmulas explícitas para as mesmas. Estas fórmulas serão utilizadas na obtenção de propriedades analíticas. A implementação prática destes resultados é adequada aos sistemas de pequeno porte.

2.4 Fórmulas Fechadas para a Matriz de Transferência e a Resposta Impulso

Cabe lembrar que $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}^{(k)}(0)$ satisfaz o problema matricial em diferenças

$$\begin{cases} M\mathcal{D}_{j+2} + C\mathcal{D}_{j+1} + K\mathcal{D}_j = 0, \\ M\mathcal{D}_1 = I, \quad \mathcal{D}_0 = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Deve-se observar, também, que $B(s) = \text{adj}(\Delta(s))$ é um polinômio matricial em λ de ordem menor que $2n - 1$. Então, para $B_k = B^{(k)}(0)$, tem-se

$$B_{2n-1} = B_{2n} = 0. \quad (2.19)$$

Considere-se

$$p(s) = \det(\Delta(s)) = \sum_{k=0}^{2n} b_k s^{2n-k}, \quad (2.20)$$

o polinômio característico do problema (2.15).

Tem-se

$$B(s)\Delta(s) = \Delta(s)B(s) = \det(\Delta(s))I = p(s)I. \quad (2.21)$$

Como $B(s)$ e $\Delta(s)$ comutam, bem como suas derivadas, é possível escrever

$$\frac{d^j}{ds^j} [\Delta(s)B(s)] = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \Delta^{(i)}(s)B^{(j-i)}(s) = p^{(j)}(s)I. \quad (2.22)$$

Substituindo

$$\Delta^{(i)}(0) = \begin{cases} K, & i = 0, \\ C, & i = 1, \\ 2M, & i = 2, \\ 0, & i > 2, \end{cases} \quad (2.23)$$

e

$$p^{(j)}(0) = \begin{cases} j! b_{2n-j}, & j = 0 : 2n, \\ 0, & j > 2n. \end{cases} \quad (2.24)$$

em (2.22), para $s = 0$, e utilizando as condições (2.19), obtém-se

$$\begin{cases} KB_j + jCB_{j-1} + j(j-1)MB_{j-2} = j!b_{2n-j}I, & j = 2 : 2n, \\ B_{2n-1} = B_{2n} = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Fazendo uma substituição de variável,

$$A_j = \frac{B_{2n-j}}{(2n-j)!}, \quad (2.26)$$

tem-se que $B_j = j! A_{2n-j}$. Substituindo este resultado em (2.25), decorre o problema matricial em diferenças

$$\begin{cases} MA_{j+2} + CA_{j+1} + KA_j = b_j I, & j = 0 : 2n - 2, \\ A_0 = A_1 = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

A seguir, definindo

$$A_j = \sum_{i=0}^{j-1} b_i \mathcal{D}_{j-i-1}, \quad (2.28)$$

onde $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}^{(k)}(0)$, de (2.27), obtém-se

$$KA_j + CA_{j+1} + MA_{j+2} = b_j I.$$

Portanto, A_j definido em (2.28) é solução de (2.27).

Agora, como $B^{(k)}(0) = 0$, para $k \geq 2n$, a série de Taylor de $B(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} B(s) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{B_{2n-k}}{(2n-k)!} s^{2n-k} = \sum_{k=1}^{2n} A_k s^{2n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \sum_{i=0}^{k-1} b_i s^{2n-k} \mathcal{D}_{k-i-1} = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i s^{j-i-1} \mathcal{D}_{2n-j}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Deste modo, a matriz de transferência é caracterizada como

$$H(s) = \frac{B(s)}{p(s)} = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \frac{s^{j-1-i}}{p(s)} \mathcal{D}_{2n-j} \quad (2.30)$$

A resposta impulso $\mathcal{D}(t)$ é obtida, a seguir, com a utilização da integral de Bromwich para determinar a transformada inversa de Laplace de $H(s)$. Mais pre-

cisamente,

$$\mathcal{D}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{B(s)}{p(s)} e^{st} ds = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} s^{j-i-1} \frac{e^{st}}{p(s)} ds \right) \mathcal{D}_{2n-j}. \quad (2.31)$$

A expressão

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} s^j \frac{e^{st}}{p(s)} ds$$

corresponde a j -ésima derivada da função

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{e^{st}}{p(s)} ds,$$

que é a solução do problema de valor inicial

$$b_0 h^{(2n)}(t) + b_1 h^{(2n-1)}(t) + \dots + b_{2n-1} \dot{h}(t) + b_{2n} h(t) = 0, \quad (2.32)$$

$$h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = 0, \dots, h^{(2n-2)}(0) = 0, \quad b_0 h^{(2n-1)}(0) = 1.$$

Assim,

$$\boxed{\mathcal{D}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i h^{(j-i-1)}(t) \mathcal{D}_{2n-j}} \quad (2.33)$$

onde:

b_i são os coeficientes do polinômio característico (2.16);

$h(t)$ é a função que satisfaz o problema de valor inicial (2.32);

\mathcal{D}_k satisfaz o problema matricial em diferenças (2.18).

Conclui-se que, para o cálculo da resposta impulso matricial, é necessário considerar três equações características: uma algébrica (polinômio característico), uma analítica (equação diferencial para $h(t)$) e uma discreta (equação em diferenças para \mathcal{D}_k , que corresponde a k -ésima derivada de $\mathcal{D}(t)$ na origem).

Sob o ponto de vista físico, a resposta a um impulso unitário pode ser interpretada da seguinte maneira. Suponha-se um sistema com n graus de liberdade

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0, \quad (2.34)$$

onde C e K são matrizes arbitrárias. Seja $x(t)$ a resposta diante das condições iniciais

$$M\dot{x}(0) = e_j, \quad x(0) = 0,$$

onde

$$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

é o j -ésimo vetor canônico. De acordo com (2.12), a solução de (2.34) é dada por

$$x(t) = \mathcal{D}(t)e_j \quad (2.35)$$

e, assim, a k -ésima componente de $x(t)$ é

$$x_k(t) = e_k^T x(t) = e_k^T \mathcal{D}(t)e_j = \mathcal{D}_{kj}(t). \quad (2.36)$$

De (2.36), pode-se afirmar que o elemento $\mathcal{D}_{kj}(t)$ da resposta impulso $\mathcal{D}(t)$ é a resposta da k -ésima componente do sistema, relativa a uma força unitária concentrada na j -ésima componente, e com forças nulas nas outras componentes do sistema. Por conseguinte, $H_{kj}(i\omega)$ é a resposta frequência para a k -ésima componente, que corresponde a uma força concentrada no j -ésimo elemento do sistema.

2.5 O Caso de Raízes Simples

Quando todas as raízes s_k de $p(s)$ forem distintas, a fórmula para $\mathcal{D}(t)$ pode ser simplificada. Aqui, $\mathcal{D}(t)$ é obtida de

$$h(t) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{e^{s_k t}}{p'(s_k)}$$

e, com a introdução dos polinômios

$$q_j(s) = \sum_{i=0}^{j-1} b_i s^{j-1-i}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n, \quad (2.37)$$

decorre

$$\mathcal{D}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \sum_{k=0}^{2n} \frac{s_k^{j-1-i} e^{s_k t} \mathcal{D}_{2n-j}}{p'(s_k)}.$$

Deste modo,

$$\mathcal{D}(t) = \sum_{k=0}^{2n} E_k e^{s_k t}, \quad H(s) = \sum_{k=0}^n \frac{E_k}{s - s_k}, \quad (2.38)$$

onde

$$E_k = \frac{1}{p'(s_k)} \sum_{j=1}^{2n} q_j(s_k) \mathcal{D}_{2n-j}. \quad (2.39)$$

Para o caso de raízes simples, a derivada de $\mathcal{D}(t)$ em $t = 0$ conduz à resposta impulso discreta

$$\mathcal{D}_j = \sum_{k=0}^{2n} E_k s_k^j. \quad (2.40)$$

2.6 Exemplos Numéricos

As fórmulas, acima, para $D(t)$ e $H(s)$ são obtidas facilmente, na implementação de sistemas de pequeno porte, com o uso de "softwares" simbólicos ou numéricos, tais como o MapleV ou o Matlab.

Exemplo 1

Determinar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cos 2t \\ 3t \end{bmatrix}$$
$$q(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solução

Tem-se o polinômio característico

$$p(s) = \det(s^2 M + sC + K) = s^4 + 6s^3 + 19s^2 + 37s + 26.$$

A solução da equação diferencial característica

$$h^{(4)}(t) + 6h^{(3)}(t) + 19\ddot{h}(t) + 37\dot{h}(t) + 26h(t) = 0,$$

com os valores iniciais

$$h(0) = \dot{h}(0) = \ddot{h}(0) = 0, \quad h^{(3)}(0) = 1,$$

é dada, de modo aproximado, por

$$h(t) = -0.072239 e^{(-2.7255 t)} + 0.10396 e^{(-1.2665 t)} - 0.031716 e^{(-1.0040 t)} \cos(2.5543 t) - 0.038004 e^{(-1.0040 t)} \operatorname{sen}(2.5543 t).$$

Para a equação característica em diferenças

$$M\mathcal{D}_{k+2} + C\mathcal{D}_{k+1} + K\mathcal{D}_k = 0, \mathcal{D}_0 = 0, M\mathcal{D}_1 = I, k = 0 : 1,$$

tem-se

$$\mathcal{D}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_3 = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores obtidos acima em

$$\mathcal{D}(t) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} b_i h^{(j-1-i)}(t) \mathcal{D}_{4-j}$$

e com o cálculo da integral

$$q(t) = \int_0^t \mathcal{D}(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

obtem-se

$$q_1(t) = 0.982 \cos 2t + 1.13 \operatorname{sen} 2t + 0.345 t - 0.0307 + 0.0182 e^{-2.73 t} - 0.0979 e^{-1.27 t} - 0.872 e^{-t} \cos 2.55 t - 1.39 e^{-t} \operatorname{sen} 2.55 t$$

$$q_2(t) = 0.528 \cos 2t + 0.536 \operatorname{sen} 2t + 0.577 t - 0.475 - 0.156 e^{-2.73 t} + 0.590 e^{-1.27 t} - 0.486 e^{-t} \cos 2.55 t - 0.712 e^{-t} \operatorname{sen} 2.55 t$$

Observe-se que a solução $q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$ é a superposição da solução permanente $x_p(t)$, a qual corresponde ao termo forçante dado, e a solução do sistema homogêneo, a solução transiente $x_{hc}(t)$.

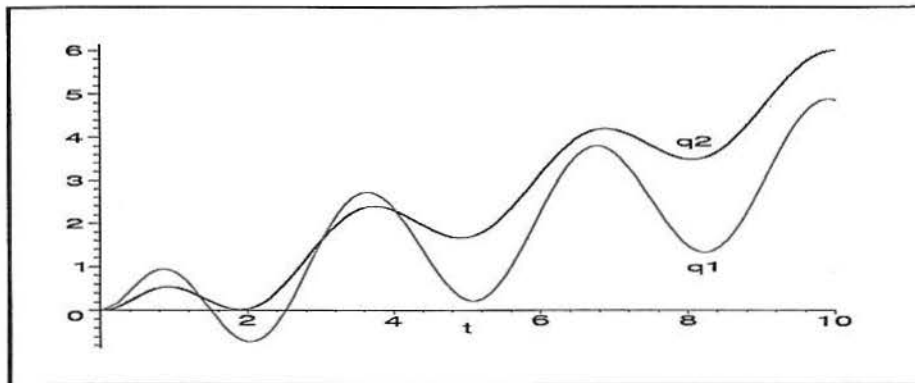


Figura 2.1 Respostas $q_1(t)$ e $q_2(t)$

Exemplo 2

Determinar a solução do sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sujeito às condições iniciais

$$q(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \dot{q}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solução

Tem-se o polinômio característico

$$p(s) = \det[s^2M + sC + K] = 2s^6 + 4s^5 + 4s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 4s + 2.$$

A solução de

$$2h^{(6)}(t) + 4h^{(5)}(t) + 4h^{(4)}(t) + 4h^{(3)}(t) + 4\ddot{h}(t) + 4\dot{h}(t) + 2h(t) = 0,$$

com os valores iniciais

$$h(0) = \dot{h}(0) = \ddot{h}(0) = h^{(3)}(0) = h^{(iv)}(0) = 0, \quad 2h^{(5)}(0) = 1,$$

é dada por

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{12}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{12}e^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{36}e^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Os valores de \mathcal{D}_j , para $j = 2 : 5$, são obtidos por recursão, através da equação matricial em diferenças

$$M\mathcal{D}_{k+2} + C\mathcal{D}_{k+1} + K\mathcal{D}_k = 0, \quad \mathcal{D}_0 = 0, \quad M\mathcal{D}_1 = I.$$

Assim, com $\mathcal{D}_0 = 0$, a matriz nula é obtida, e as demais são dadas por

$$\mathcal{D}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_4 = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Agora, serão calculadas $\mathcal{D}(t)$ e sua derivada, $\dot{\mathcal{D}}(t)$, através da fórmula fechada. Substituindo os valores em

$$q(t) = [\dot{\mathcal{D}}(t)M + \mathcal{D}(t)C]q(0) + \mathcal{D}(t)M\dot{q}(0),$$

obtem-se

$$q_1(t) = \frac{15t - 9}{9}e^{-t} + 2e^{t/2}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2}{3\sqrt{3}}\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right];$$

$$q_2(t) = \frac{5t - 14}{6}e^{-t} - e^{t/2}\left[\frac{5}{12}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{7}{12\sqrt{3}}\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right] + e^{-t/2}\left[\frac{19}{4}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{9}{4\sqrt{3}}\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right];$$

$$q_3(t) = \frac{10}{3}e^{-t} + e^{t/2}\left[\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right] - e^{-t/2}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{4}{\sqrt{3}}\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right].$$

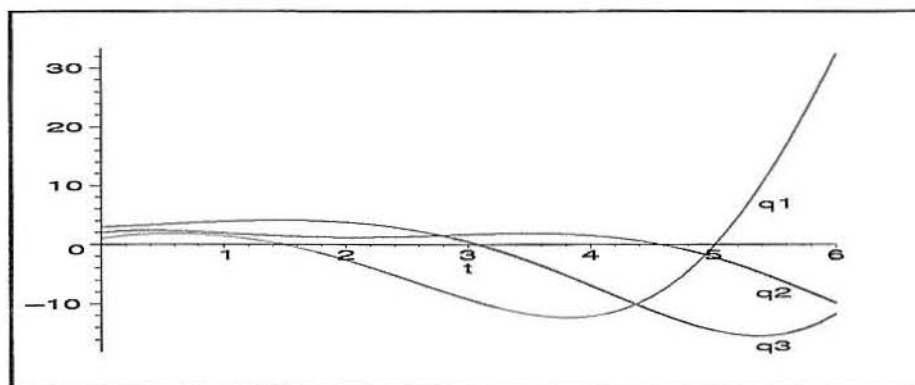


Figura 2.2 Respostas $q_1(t)$, $q_2(t)$ e $q_3(t)$

3 ANÁLISE MODAL DE SISTEMAS NÃO-AMORTECIDOS

3.1 Introdução

A equação do movimento na forma matricial (2.6), obtida no capítulo anterior, representa um sistema de equações independentes somente se as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez forem diagonais. Caso contrário, o sistema possuirá termos que tornam as equações dependentes entre si, [MEI 75] e [CHO 95]. Portanto, o mesmo acontecerá com as massas em relação ao movimento. Os termos que causam esta dependência entre as equações, denominados acoplados, são os termos velocidade e deslocamento, cujas matrizes coeficientes são a matriz de amortecimento e a matriz de rigidez do sistema respectivamente.

Por outro lado, na *ausência de amortecimento e de forças externas*, o sistema é dito *conservativo*: não há mecanismo para a dissipação, nem para a adição de energia.

Na análise de um sistema conservativo acoplado, é de interesse um tipo especial de solução, em que as coordenadas generalizadas executem o mesmo tipo de movimento no tempo, isto é, um movimento sincronizado. Ou seja, um movimento em que a razão entre dois deslocamentos seja constante durante o movimento, mas que a amplitude mude em relação à frequência.

Diante disso, neste capítulo, serão analisados os modos de vibração de sistemas conservativos, com soluções representadas no tempo (em analogia ao caso escalar) por uma função harmônica e multiplicadas por uma constante, um vetor \mathbf{v} , que representa as amplitudes associadas às diferentes frequências, *os modos de vibração*.

Note-se que a procura de soluções oscilatórias no tempo [MEI 75] conduz à função exponencial $e^{\lambda t}$, onde λ poderia ser qualquer constante. Entretanto, como o sistema é conservativo, se $Re(\lambda) > 0$, a energia mecânica total $T+U$ crescerá, enquanto que $Re(\lambda) < 0$ produzirá uma resposta decrescente no tempo. Ambos os casos contradizem o princípio de conservação de energia. Assim, considere-se "a priori" $\lambda = i\omega$.

3.2 Freqüências Naturais e Modos de Vibração

Se uma das matrizes M , C ou K for não-diagonal, então haverá *acoplamento* das coordenadas generalizadas. No caso de sistemas não-amortecidos, a equação do movimento a ser resolvida é

$$M\ddot{x} + Kx = 0. \quad (3.1)$$

Como introduzido acima, o primeiro passo, na análise modal, consiste em procurar soluções oscilatórias no tempo, isto é, do tipo $x(t) = e^{i\omega t}v$, onde v é um vetor não nulo. Substituindo a suposta solução, na equação diferencial anterior, decorre o problema de autovalor generalizado

$$[\lambda^2 M + K]v = 0, \quad (3.2)$$

onde

$$\lambda = i\omega.$$

Tem-se duas alternativas a considerar: suponha-se que o valor de ω seja arbitrário. Então, o sistema algébrico

$$[K - \omega^2 M]v = 0 \quad (3.3)$$

deverá ser inversível. Segue-se que $v=0$, o que levará à solução trivial; portanto, deve-se procurar os valores de ω , tais que este sistema algébrico homogêneo seja singular. Em outras palavras, este sistema possuirá soluções não nulas somente se o seu determinante for nulo. Assim, λ deverá ser raiz da equação característica

$$\det(\lambda^2 M + K) = \sum_{k=0}^n b_k (\lambda^2)^{n-k} = 0, \quad (3.4)$$

ou

$$\det(-\omega^2 M + K) = \sum_{k=0}^n a_k (\omega^2)^{n-k} = 0, \quad a_k = b_k (-1)^{n-k}, \quad (3.5)$$

a qual tem n raízes para ω^2 . Para cada um destes valores, haverá um correspondente vetor não nulo, que deverá satisfazer a equação (3.3). Os valores $\lambda = i\omega$ são chamados de autovalores do sistema e, os vetores v , de autovetores. Quando ω tem um valor real, é referido como *freqüência* do sistema e o correspondente autovetor v , como *modo associado à freqüência* ω ou, simplesmente, *modo* do sistema. Em geral, os valores ω^2 podem ser reais ou complexos conjugados. Entretanto, condições não muito restritivas sobre as matrizes M e K - por exemplo, M positiva definida e K não-negativa definida - garantem que as raízes ω^2 são não-negativas. E, se for considerado o sinal positivo para a raiz quadrada, as raízes poderão ser ordenadas como $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$.

3.3 Ortogonalidade e Normalização

O fato de um sistema possuir freqüências naturais e modos vibratórios é de suma relevância para a determinação das vibrações livres de um sistema não-amortecido. Pois, através da propriedade de ortogonalidade dos modos, focalizada a seguir, é possível desacoplar o sistema em n sistemas de um grau de liberdade. Esta propriedade também é importante para o estudo das vibrações forçadas.

Suponha-se que v_i e v_j sejam os modos associados às frequências ω_i e ω_j respectivamente. Isto é,

$$Kv_i = \omega_i^2 Mv_i, \quad Kv_j = \omega_j^2 Mv_j.$$

Pré-multiplicando por v_j^t a primeira relação, a segunda, por v_i^t e utilizando a simetria das matrizes envolvidas, decorre

$$0 = v_j^t Kv_i - v_i^t Kv_j = (\omega_i^2 - \omega_j^2)v_i^t Mv_j.$$

Se as frequências forem diferentes, então

$$v_i^t Mv_j = 0.$$

Também,

$$v_i^t Kv_j = 0.$$

Com estas considerações, conclui-se que *modos correspondentes a frequências diferentes, relativos à matriz de massa M e à matriz de rigidez K , são ortogonais.*

Para um mesmo modo, tem-se que

$$v_i^t Mv_i = \mu_i, \quad v_i^t Kv_i = \mu_i \omega_i^2.$$

O parâmetro μ_i é denominado *massa modal*.

Resumindo: *para M simétrica positiva definida e K simétrica, tem-se*

$$\boxed{V^t M V = D, \quad V^t K V = D \Omega^2}, \quad (3.6)$$

onde V é a *matriz modal*

$$V = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n], \quad (3.7)$$

Ω^2 é a *matriz espectral diagonal*

$$\Omega^2 = \text{diag}[\omega_1^2 \ \omega_2^2 \ \cdots \ \omega_n^2], \quad (3.8)$$

e D é a *matriz diagonal de massa modal*

$$D = \text{diag}[\mu_1 \ \mu_2 \ \cdots \ \mu_n]. \quad (3.9)$$

Os modos podem ser normalizados de forma que a matriz de massa modal seja a matriz identidade. Isto é, definindo

$$u_i = \frac{v_i}{\sqrt{v_i^t M v_i}}$$

ou, equivalentemente,

$$U = \frac{V}{\sqrt{D}}, \quad (3.10)$$

decorrem as relações dos modos normais

$$\boxed{U^t M U = I, \quad U^t K U = \Omega^2, \quad K U = M U \Omega^2,} \quad (3.11)$$

Portanto, as matrizes M e K podem ser simultaneamente diagonalizadas por uma mesma matriz modal U .

Supondo que M e K sejam matrizes simétricas e positivas definidas, tem-se as soluções complexas

$$e^{i\omega_k t} u_k, \quad e^{-i\omega_k t} u_k, \quad k = 1 : n,$$

as quais podem ser substituídas pelas soluções reais

$$\text{sen}(\omega_k t)u_k, \quad \text{cos}(\omega_k t)u_k.$$

Assim, a solução da equação 3.1 pode ser escrita

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \left[a_k \frac{\text{sen}(\omega_k t)}{\omega_k} + b_k \text{cos}(\omega_k t) \right] u_k.$$

Ou, na forma compacta,

$$x(t) = U \frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega} a + U(\text{cos}\Omega t)b, \quad (3.12)$$

onde U é a matriz modal, $\frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega}$, $\text{cos}\Omega t$ são, respectivamente, as matrizes diagonais

$$\frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}(\omega_1 t)}{\omega_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\text{sen}(\omega_2 t)}{\omega_2} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\text{cos}\Omega t = \begin{bmatrix} \text{cos}(\omega_1 t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos}(\omega_2 t) & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \text{cos}(\omega_n t) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

e $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^t$, $b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^t$.

As constantes a_k e b_k podem ser obtidas das condições iniciais

$$x(0) = x_o, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_o.$$

Mais precisamente,

$$\sum_{k=1}^n b_k u_k = x_o$$

e

$$\sum_{k=1}^n a_k u_k = \dot{x}_o,$$

ou

$$[u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n] \begin{bmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_n & a_n \end{bmatrix} = [x_o \ \dot{x}_o].$$

Como a matriz à esquerda é a matriz modal U (equação 3.10), que é não-singular, o sistema pode ser resolvido para a_k e b_k , isto é,

$$Ub = x_o, \quad b = U^t M x_o$$

e

$$Ua = \dot{x}_o, \quad a = U^t M \dot{x}_o.$$

Portanto, em (3.12) tem-se a solução

$$x(t) = U \frac{\text{sen} \Omega t}{\Omega} U^t M \dot{x}(0) + U(\cos \Omega t) U^t M x(0).$$

Decorre que, para um sistema livre não-amortecido, a solução é dada por

$$\boxed{x(t) = \mathcal{D}(t) M \dot{x}(0) + \dot{\mathcal{D}}(t) M x(0)} \quad (3.15)$$

onde

$$\boxed{\mathcal{D}(t) = U \frac{\text{sen} \Omega t}{\Omega} U^t, \quad \dot{\mathcal{D}}(t) = U(\cos \Omega t) U^t} \quad (3.16)$$

$$\boxed{KU = MU\Omega^2}$$

como em (3.11), U a matriz modal (3.7) e Ω^2 a matriz espectral (3.8).

Se K for somente simétrica, observe-se que poderá haver frequências nulas. Neste caso, o valor de $\frac{\text{sen}\omega t}{\omega}$ deverá ser substituído pela unidade, na expansão modal para a solução $x(t)$. O procedimento para a determinação das constantes a_k e b_k permanecerá como acima.

3.4 Modos Normais e a Resposta Impulso

Nesta seção, será estabelecida uma fórmula matricial para a resposta impulso de um sistema não-amortecido, bem como sua relação com a fórmula anterior, obtida através da análise modal. Também será determinada a saída de um sistema forçado, de acordo com a seguinte afirmação:

O sistema

$$M\ddot{x} + Kx = f(t) \tag{3.17}$$

possui a resposta geral

$$x(t) = \dot{\mathcal{D}}(t)Mx(0) + \mathcal{D}(t)M\dot{x}(0) + \int_0^t \mathcal{D}(t-\tau)f(\tau)d\tau, \tag{3.18}$$

onde a resposta impulso matricial, $\mathcal{D}(t)$, satisfaz

$$M\ddot{\mathcal{D}} + K\mathcal{D} = 0, \quad M\dot{\mathcal{D}}(0) = I, \quad \mathcal{D}(0) = 0. \tag{3.19}$$

Utilizando o método de Cauchy das séries de potências, isto é, substituindo

$$\mathcal{D}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathcal{D}_k,$$

decorre que os coeficientes, $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}^{(k)}(0)$, satisfazem a equação em diferenças

$$M\mathcal{D}_{k+2} + K\mathcal{D}_k = 0, \quad M\mathcal{D}_1 = I, \quad \mathcal{D}_0 = 0.$$

Por recursão, segue que

$$\mathcal{D}_{2k} = 0 \quad e \quad \mathcal{D}_{2k+1} = (-1)^k (M^{-1}K)^k M^{-1}.$$

Assim,

$$\mathcal{D}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (M^{-1}K)^k M^{-1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\text{sen}\sqrt{M^{-1}K}t}{\sqrt{M^{-1}K}} M^{-1}.$$

Deste modo, obtém-se a vibração livre

$$x(t) = \dot{\mathcal{D}}(t)Mx(0) + \mathcal{D}(t)M\dot{x}(0) = \cos\sqrt{M^{-1}K}t x(0) + \frac{\text{sen}\sqrt{M^{-1}K}t}{\sqrt{M^{-1}K}} \dot{x}(0),$$

em analogia matricial ao caso de um grau de liberdade.

Se as condições dos modos normais (3.11) forem satisfeitas por M e K , ou seja,

$$U^t M U = I, \quad U^t K U = \Omega^2,$$

decorre desta primeira relação e, após, multiplicando por K , que

$$M^{-1} = U U^t, \quad M^{-1}K = U U^t K.$$

Então,

$$\mathcal{D}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (M^{-1}K)^k M^{-1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} (UU^t K)^k UU^t.$$

A seguir, por indução e com o uso da segunda relação, acima, obtém-se

$$(UU^t K)^k = U\Omega^{2k-2}U^t K$$

e

$$(UU^t K)^k UU^t = U\Omega^{2k-2}U^t K UU^t = U\Omega^{2k}U^t.$$

Portanto,

$$\mathcal{D}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} U\Omega^{2k}U^t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} U \frac{\Omega^{2k+1}}{\Omega} U^t = U \frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega} U^t.$$

Desta maneira, a resposta matricial a um impulso unitário é dada (como na equação (3.16)), por

$$\boxed{\mathcal{D}(t) = \frac{\text{sen}\sqrt{M^{-1}K}t}{\sqrt{M^{-1}K}} M^{-1} = U \frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega} U^t, \quad KU = MU\Omega^2} \quad (3.20)$$

ou, expandida em modos,

$$\boxed{\mathcal{D}(t) = U \frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega} U^t = \sum_{k=0}^n \frac{\text{sen}(\omega_k t)}{\omega_k} u_k u_k^t} \quad (3.21)$$

Para a resposta livre

$$x_d(t) = \int_0^t \mathcal{D}(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

tem-se, na forma modal,

$$x_d(t) = \int_0^t U^t \frac{\text{sen}\Omega(t-\tau)}{\Omega} U f(\tau) d\tau \quad (3.22)$$

ou

$$x_d(t) = U^t \begin{bmatrix} \int_0^t \frac{\text{sen}\omega_1(t-\tau)}{\omega_1} f_1(\tau) d\tau \\ \int_0^t \frac{\text{sen}\omega_2(t-\tau)}{\omega_2} f_2(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t \frac{\text{sen}\omega_n(t-\tau)}{\omega_n} f_n(\tau) d\tau \end{bmatrix},$$

onde $f_k(t)$ é a k -ésima componente do vetor $U^t f(t)$.

3.5 Modos Normais e a Matriz de Transferência

A matriz de transferência do sistema não-amortecido

$$M\ddot{x} + Kx = f(t)$$

é dada por (Cap. 2 equação (2.11))

$$H(s) = [s^2 M + K]^{-1}.$$

Se as relações de modos normais (equação (3.11)) forem satisfeitas pelas matrizes M e K , isto é,

$$U^t M U = I, \quad U^t K U = \Omega^2$$

e, como $H(s)$ é a transformada de Laplace da resposta impulso (2), tem-se

$$H(s) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(t)) = \mathcal{L}\left(U \frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega} U^t\right) = U [s^2 I + \Omega^2]^{-1} U^t.$$

Também, sendo Ω^2 uma matriz diagonal (3.8), segue que

$$(s^2 I + \Omega^2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \omega_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + \omega_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \end{bmatrix}.$$

Conclui-se que a matriz de transferência é dada por

$$H(s) = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_n] \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \omega_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + \omega_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ u_3^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{bmatrix}.$$

ou, em forma equivalente,

$$H(s) = [s^2 M + K]^{-1} = U[s^2 I + \Omega^2]^{-1} U^t = \sum_{k=1}^n \frac{u_k u_k^t}{s^2 + \omega_k^2} \quad (3.23)$$

Em particular, tem-se a função frequência matricial

$$H(i\omega) = [(i\omega)^2 M + K]^{-1} = U[(i\omega)^2 I + \Omega^2]^{-1} U^t = \sum_{k=1}^n \frac{u_k u_k^t}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (3.24)$$

4 ANÁLISE MODAL DE SISTEMAS AMORTECIDOS

4.1 Introdução

A análise modal tem sido desenvolvida para sistemas não-amortecidos. Porém, quando restrita a este tipo de sistema, sua utilização é muito limitada. Com o objetivo de ampliar a sua aplicabilidade, neste capítulo, será estendida a casos especiais de sistemas amortecidos.

Como referido no capítulo 3, procurar-se-á determinar soluções oscilatórias no tempo. Entretanto, para sistemas dissipativos, não se conhece uma matriz modal U que desacople simultaneamente as matrizes coeficientes. Em conseqüência, serão impostas condições específicas para o amortecimento e realizada uma transformação do espaço físico, a fim de desacoplar o sistema. A resposta impulso matricial e a matriz de transferência estarão relacionadas ao tipo de amortecimento considerado.

4.2 Autovetores e Modos Amortecidos

Para a análise modal de sistemas dissipativos, serão determinados, inicialmente, os autovalores e os autovetores associados, bem como a forma em que ocorrem. Em seguida, serão estudadas as propriedades de ortogonalidade. Com este objetivo, considere-se o sistema

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t), \quad (4.1)$$

onde M , C e K são matrizes simétricas.

Vibrações livres do tipo exponencial, $x(t) = e^{\lambda t}u$, existem, quando o sistema algébrico homogêneo

$$[\lambda^2 M + \lambda C + K]u = 0 \quad (4.2)$$

possui solução u não nula, para algum escalar λ .

Os valores λ são chamados de *autovalores* e os vetores correspondentes u , de *autovetores* ou *modos amortecidos*. Os modos estão definidos para escalares que verificam

$$p(\lambda) = \det[\lambda^2 M + \lambda C + K] = 0. \quad (4.3)$$

Os autovetores possuem propriedades de ortogonalidade, porém estas são um tanto diferentes das relacionadas a sistemas não-amortecidos. Para α e β autovalores, e u e v os correspondentes autovetores, tem-se as relações:

$$\boxed{(\alpha + \beta)v^t M u + v^t C u = 0, \quad \alpha \neq \beta} \quad (4.4)$$

$$\boxed{\alpha \beta v^t M u - v^t K u = 0} \quad (4.5)$$

Estas relações de ortogonalidade são, certamente, bem menos simples que as descritas para sistemas não-amortecidos.

Quando o coeficiente matricial do amortecimento C é tal que $U^t C U$ é uma matriz diagonal, o sistema é desacoplável, e denominado *classicamente amortecido* ou, simplesmente, *sistema clássico*. O termo *não-clássico* se refere ao caso em que a análise modal não é aplicável (veja-se [UDW 93], [UDW 94a] e [UDW 94b]).

Para contornar o problema acima mencionado, na prática, têm sido consideradas (conforme [CAU 65], [CHE 71] e [LIA 91]) uma transformação do espaço físico e variadas aproximações para o amortecimento.

4.3 Amortecimento Proporcional de Rayleigh

A denominação de *amortecimento proporcional* refere-se às situações, nas quais a matriz de amortecimento C é exatamente proporcional à inércia ou à rigidez, ou é a combinação linear destas matrizes. Considerando-se os coeficientes de proporcionalidade α e β , tais que

$$C = \alpha M + \beta K, \quad (4.6)$$

o amortecimento C é denominado *amortecimento de Rayleigh*, [RAY 45].

Embora alguma interpretação física possa ser atribuída ao amortecimento proporcional, esta hipótese é uma conveniente simplificação matemática. Exemplificando, se C for proporcional à matriz K , então cada uma das molas deverá ser acompanhada de um amortecedor em paralelo. Além disso, o quociente, entre a constante de amortecimento do amortecedor e a rigidez da correspondente mola em paralelo, deve ser o mesmo para todos os pares amortecedor-mola. Entretanto, quando C for proporcional à matriz de massa M , os amortecedores deverão ser conectados entre cada um dos elementos de massa e terra, [EWI 95], [GIN 99].

Considere-se o sistema amortecido

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t)$$

e, suponha-se, que as matrizes M e K satisfaçam as relações de modos normais $U^t M U = I$, $U^t K U = \Omega^2$.

Pré-multiplicando a equação acima por U^t e fazendo $x(t) = U\phi(t)$, onde ϕ é, usualmente, referida como a *coordenada modal*, decorre da equação (4.6)

$$\ddot{\phi} + (\alpha I + \beta \Omega^2)\dot{\phi} + \Omega^2\phi = U^t f(t). \quad (4.7)$$

Como as matrizes coeficientes neste último sistema são diagonais, o sistema está desacoplado para a coordenada modal ϕ , isto é, equivale a n sistemas de 1 grau de liberdade - um para cada componente ϕ_k da coordenada modal.

Agora, introduzindo o amortecimento matricial crítico ξ , através da relação

$$2\xi\Omega = \alpha I + \beta\Omega^2, \quad (4.8)$$

tem-se as *razões modais de amortecimento*

$$\xi_j = \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta}{2}\omega_j, \quad (4.9)$$

os elementos da matriz diagonal ξ .

Matricialmente, tem-se o sistema desacoplado

$$\ddot{\phi} + 2\xi\Omega\dot{\phi} + \Omega^2\phi = U^t f(t). \quad (4.10)$$

Uma vez calculadas as razões modais de amortecimento, a resposta do sistema desacoplado ϕ pode ser obtida através dos métodos usuais e a solução do sistema original $x(t)$ é imediata.

Não é provável que, para um sistema real, a matriz de amortecimento C seja do tipo proporcional. Também, como há uma grande variedade de fenômenos que dissipam energia (veja-se [DUN 79], [HAL 89], [SES 93], [MAU 88] e [TIM 74]), torna-se difícil idealizar uma representação precisa do amortecimento.

Conseqüentemente, o amortecimento proporcional é considerado como uma aproximação da realidade, com os coeficientes α , β determinados de forma empírica. Isto conduz a um dilema: dependendo dos valores relativos de α e β , os quocientes modais de amortecimento (equação (4.9)) aumentam ou diminuem com o aumento da frequência modal? Medições experimentais com numerosas máquinas e estruturas levam, em geral, à conclusão que os quocientes modais de amortecimento são essencialmente constantes entre os modos (veja-se [CHO 95], [EWI 95] e [GIN 99]).

4.3.1 *A Resposta Impulso em Sistemas com Amortecimento Proporcional*

A resposta impulso matricial do sistema com amortecimento proporcional,

$$M\ddot{x} + (\alpha M + \beta K)\dot{x} + Kx = f(t),$$

pode ser obtida com a resolução de

$$\ddot{D} + (\alpha I + \beta M^{-1}K)\dot{D} + M^{-1}KD = 0, \quad D(0) = 0, \quad M\dot{D}(0) = I.$$

Como os coeficientes matriciais comutam, em analogia ao caso de 1 grau de liberdade, decorre

$$\mathcal{D}(t) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha I + \beta M^{-1}K)t} \frac{\text{sen} \sqrt{M^{-1}K - \frac{1}{4}(\alpha I + \beta M^{-1}K)^2} t}{\sqrt{M^{-1}K - \frac{1}{4}(\alpha I + \beta M^{-1}K)^2}} M^{-1}.$$

Com a mudança de variável

$$\mathcal{D}(t) = U\phi(t),$$

decorre o sistema desacoplado para ϕ

$$\ddot{\phi} + 2\xi\Omega\dot{\phi} + \Omega^2\phi = 0, \quad (4.11)$$

com as condições iniciais $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = U^{-1}M^{-1} = U^t$.

Assim,

$$\mathcal{D}(t) = U\phi(t) = U\mathcal{D}_\xi(t)U^t$$

com $\mathcal{D}_\xi(t)$ a resposta impulso matricial do sistema desacoplado, análoga ao caso escalar, isto é,

$$\mathcal{D}_\xi(t) = e^{-\xi\Omega t} \frac{\text{sen}\Omega_d t}{\Omega_d},$$

onde

$$\Omega_d = \Omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

é a matriz diagonal das frequências amortecidas

$$\omega_{d,j} = \omega_j\sqrt{1 - \xi_j^2}, \quad j = 1 : 2n.$$

Sendo, $\mathcal{D}(t) = U\mathcal{D}_\xi(t)U^t$, obtém-se a relação matricial

$$\mathcal{D}(t) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha I + \beta M^{-1}K)t} \frac{\text{sen} \sqrt{M^{-1}K - \frac{1}{4}(\alpha I + \beta M^{-1}K)^2} t}{\sqrt{M^{-1}K - \frac{1}{4}(\alpha I + \beta M^{-1}K)^2}} M^{-1} = U e^{-\xi \Omega t} \frac{\text{sen} \Omega_d t}{\Omega_d} U^t$$

onde

$$2\xi\Omega = \alpha I + \beta\Omega^2$$

$$\Omega_d = \Omega\sqrt{I - \xi^2}$$

para

$$U^t M U = I, U^t K U = \Omega^2$$

4.3.2 Modos Normais e a Matriz de Transferência

A matriz de transferência do sistema amortecido com amortecimento de Rayleigh,

$$M\ddot{x} + (\alpha M + \beta K)\dot{x} + Kx = f(t),$$

é dada por

$$H(s) = [Ms^2 + (\alpha M + \beta K)s + K]^{-1}.$$

Se M , K satisfizerem as relações dos modos normais $U^t M U = I$, $U^t K U = \Omega^2$, como $H(s)$ é a transformada de Laplace da resposta impulso, decorre

$$H(s) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(t)) = \mathcal{L}\left[U e^{-\xi \Omega t} \frac{\text{sen} \Omega_d t}{\Omega_d} U^t\right] = U [s^2 I + 2s\xi\Omega + \Omega^2]^{-1} U^t.$$

Sendo ξ e Ω^2 matrizes diagonais, tem-se

$$(s^2 I + 2\xi\Omega s + \Omega^2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2s\xi_1\omega_1 + \omega_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + 2s\xi_2\omega_2 + \omega_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s^2 + 2s\xi_n\omega_n + \omega_n^2} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$H(s) = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_n] \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2s\xi_1\omega_1 + \omega_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + 2s\xi_2\omega_2 + \omega_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s^2 + 2s\xi_n\omega_n + \omega_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ u_3^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{bmatrix}.$$

Deste modo,

$$H(s) = [s^2 M + (\alpha M + \beta K)s + K]^{-1} = U[I s^2 + 2s\xi\Omega + \Omega^2]^{-1} U^t = \sum_{k=1}^n \frac{u_k u_k^t}{s^2 + 2s\xi_k\omega_k + \omega_k^2}$$

para a hipótese inicial de desacoplamento

$$2\xi\Omega = \alpha I + \beta\Omega^2, \quad U^t M U = I, \quad U^t K U = \Omega^2$$

Em particular, obtém-se para a função frequência matricial de sistemas com amortecimento proporcional

$$H(i\omega) = [(i\omega)^2 M + i\omega(\alpha M + \beta K) + K]^{-1} = U[I(i\omega)^2 + 2i\omega\xi\Omega + \Omega^2]^{-1} U^t \quad (4.12)$$

ou, na forma modal,

$$H(i\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{u_k u_k^t}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\omega \xi_k \omega_k} \quad (4.13)$$

4.3.3 Modos Normais e a Resposta Livre

A resposta livre

$$x_d(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

é escrita, sob a forma modal,

$$x_d(t) = \int_0^t U e^{-\xi \Omega(t-\tau)} \frac{\text{sen} \Omega_d(t-\tau)}{\Omega_d} U^t f(\tau) d\tau$$

ou

$$x_d(t) = U \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-\xi_1 \omega_1(t-\tau)} \frac{\text{sen} \omega_{d1}(t-\tau)}{\omega_{d1}} f_1(\tau) d\tau \\ \int_0^t e^{-\xi_2 \omega_2(t-\tau)} \frac{\text{sen} \omega_{d2}(t-\tau)}{\omega_{d2}} f_2(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t e^{-\xi_n \omega_n(t-\tau)} \frac{\text{sen} \omega_{dn}(t-\tau)}{\omega_{dn}} f_n(\tau) d\tau \end{bmatrix},$$

onde $f_j(t) = u_j^t f(t)$ é a j -ésima componente do vetor $U^t f(t)$.

Assim, a resposta livre é dada por

$$x_d(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^n \int_0^t e^{-\xi_j \omega_j(t-\tau)} \frac{\text{sen} \omega_{dj}(t-\tau)}{\omega_{dj}} u_j u_j^t f(t) d\tau$$

onde

$$2\xi_j \omega_j = \alpha + \beta \omega_j^2$$

$$\omega_{dj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}$$

para

$$U^t M U = I, \quad U^t K U = \Omega^2$$

4.3.4 A Curva da Razão de Amortecimento

Na figura 4.1, são apresentadas as curvas padrões, sobre as quais variam as razões de amortecimento

$$\xi_j = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\omega_j} + \frac{\beta}{2} \omega_j$$

nos casos em que a razão de amortecimento é proporcional à massa ou proporcional à rigidez do sistema.

Para o caso de uma combinação linear de ambos, os coeficientes α e β do amortecimento de Rayleigh podem ser calculados a partir de uma especificação das razões de amortecimento ξ_j e ξ_r para os j -ésimo e r -ésimo modos respectivamente. Por exemplo, o sistema

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \\ \frac{1}{\omega_r} & \omega_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_j \\ \xi_r \end{bmatrix},$$

com $\xi_j = \xi_r = \xi$, possui a solução

$$\alpha = \xi \frac{2\omega_j\omega_r}{\omega_j + \omega_r}, \quad \beta = \xi \frac{2}{\omega_j + \omega_r}.$$

Para utilizar este procedimento num problema prático, os modos u_j e u_r , com razões de amortecimento específicas, deveriam ser escolhidos de maneira tal que assegurasse valores razoáveis para as razões de amortecimento correspondentes aos modos que con-

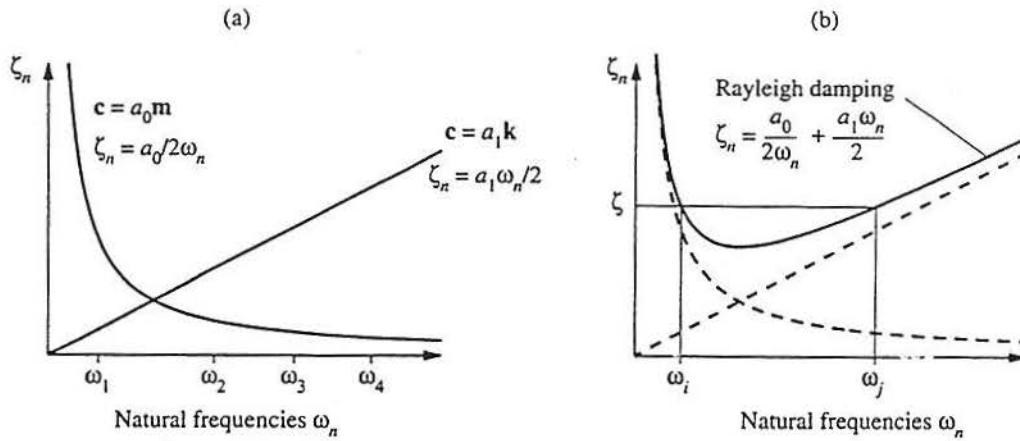


Figura 4.1 Variação da razão de amortecimento modal com a frequência natural: (a) amortecimento proporcional à massa ou proporcional à rigidez; (b) amortecimento de Rayleigh com $a_0 = \alpha$ e $a_1 = \beta$.

tribuem significativamente na resposta. Exemplificando, considere-se que cinco modos devam ser incluídos na análise da resposta e que, grosseiramente, a mesma razão de amortecimento ξ fosse desejável para todos os modos (o que estaria de acordo com dados experimentais). Se esta razão fosse especificada para o primeiro e quarto modo, então a figura b) sugere que as razões de amortecimento para o segundo e terceiro modo sejam menores que ξ e para o quinto modo seja um pouco maior que ξ . As razões de amortecimento para modos maiores que o quinto aumentariam monotonicamente com a frequência e as correspondentes respostas modais seriam essencialmente eliminadas, devido a seu alto amortecimento.

4.3.5 Exemplo Numérico

Como ilustração desse procedimento, considere-se um sistema com matriz de massa e de rigidez

$$M = \frac{1}{386} \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}, \quad K = 610 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

As frequências naturais são $\omega_n = 12.57, 34.33$ e 46.89 rad/s.

Para determinar os coeficientes do amortecimento de Rayleigh, suponha-se que as razões de amortecimento são de 5% para o primeiro e o segundo modo. A razão de amortecimento para o terceiro modo é dada por

$$\xi_3 = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{46.89} + \frac{\beta}{2} (46.89),$$

onde os coeficientes α e β são obtidos com a resolução do sistema

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{12.57} & 12.57 \\ \frac{1}{34.33} & 34.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}.$$

Decorre que os valores dos coeficientes de amortecimento são

$$\alpha = 0.9198, \quad \beta = 0.0021$$

Assim, obtém-se para a razão de amortecimento do terceiro modo

$$\xi_3 = 0.0593.$$

4.4 Amortecimento Fracamente Aproximado

Os valores das razões modais do amortecimento, em geral, são selecionados através de medições experimentais ou, simplesmente, por inferência. Entretanto, é possível obter estimativas de valores apropriados diretamente da equação do movimento. A única restrição, neste processo, é que o nível total de amortecimento seja fraco. Isto significa, que os valores estimados para as razões de amortecimento devem ser pequenos. Quão pequenos não pode ser especificado de maneira definitiva (veja-se [CHO 95] e [GIN 99]).

Uma boa aproximação pode ser esperada, se todos os valores ξ_j forem menores que 0.1; contudo, em algumas situações, a aproximação pode dar bons resultados, ainda que os valores ξ_j sejam substancialmente maiores do que 0.1

Para visualizar este problema, considere-se o sistema amortecido

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t)$$

e, suponha-se, que M e K satisfaçam as propriedades dos modos normais.

Para um novo espaço de estado, introduz-se a substituição $x = U\phi$, de maneira semelhante à equação (4.7), obtendo-se com a pré-multiplicação pela transposta da matriz modal U

$$\ddot{\phi} + U^t C U \dot{\phi} + \Omega^2 \phi = U^t f(t).$$

Aqui, C é arbitrário. Portanto, não é de se esperar que $U^t C U$ seja uma matriz diagonal, como no caso do amortecimento de Rayleigh; deduz-se que há acoplamento, devido ao termo de amortecimento.

Uma ferramenta para atacar este problema é a aproximação introduzida por Knowles, que consiste em descartar os elementos da matriz U^tCU situados fora da diagonal. Em outras palavras, somente os termos de amortecimento $(U^tCU)_{ii}$ são retidos. Deste modo, tem-se

$$2\xi\Omega = [U^tCU]_{ii}. \quad (4.14)$$

Assim, a aproximação resume-se aos sistemas de 1 grau de liberdade

$$\ddot{\phi}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{\phi}_j + \omega_j^2\phi = u_j^t f(t),$$

onde

$$\xi_j = \frac{1}{\omega_j} [U^tCU]_{ii}$$

é a *aproximação fraca do amortecimento*.

Foi mencionado, acima, que esta é uma boa aproximação para valores de ξ_j substancialmente menores que um. Porém, ainda não foi estabelecido que esta aproximação é sempre razoável. De fato, alguns autores- dentre eles, [MEI 75] - argumentam a não validade. De qualquer modo, esta aproximação tem sido amplamente utilizada e com sucesso.

4.4.1 Exemplo Numérico

A fim de ilustrar o procedimento acima, considere-se um sistema amortecido com dois graus de liberdade, segundo a figura 4.2.

Os parâmetros deste sistema são $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k_1 = 100$ N/m, $k_2 = 50$ N/m, $k_3 = 250$ N/m, $c_1 = 0.8$ N.s/m, $c_2 = 0.4$ N.s/m, $c_3 = 0.6$ N.s/m,

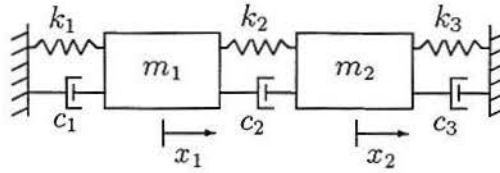


Figura 4.2 Sistema massa-mola-amortecedor com dois graus de liberdade.

e condições iniciais: deslocamentos $x_1(0) = 10$ mm, $x_2(0) = 0$ mm e velocidades $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ m/s.

A equação modal $Ku = \omega^2 Mu$, é dada por

$$\begin{bmatrix} 150 & -50 \\ -50 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \end{bmatrix}.$$

As frequências naturais e modos são

$$\omega_1 = 10.707 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 13.615 \text{ rad/s}$$

e

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7071 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.7071 \end{bmatrix}.$$

Com os modos normalizados em relação à matriz M , decorre a matriz modal

$$U = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

O valor obtido para a matriz modal, acima, é exato até quatro casas significativas. A rigor, $U^t M U$ deve ser uma matriz muito próxima da matriz identidade e $U^t K U$ deve estar perto da matriz Ω^2 .

Agora, utiliza-se a matriz modal U para calcular

$$U^t C U = \begin{bmatrix} 0.5671 & 0.34998849 \\ 0.3499849 & 1.1328285 \end{bmatrix}.$$

De acordo com a aproximação fraca do amortecimento, os elementos da diagonal são desprezados. E as razões modais de amortecimento são determinadas através das relações

$$2\xi_1\omega_1 = 0.5671, \quad 2\xi_2\omega_2 = 1.132885.$$

Assim,

$$\xi_1 = 0.02648, \quad \xi_2 = 0.04161.$$

Ambas as razões de amortecimento são pequenas, quando comparadas com a unidade. Portanto, é de se esperar que a resposta prevista pela aproximação fraca esteja perto da resposta real.

Tem-se, então, a aproximação do amortecimento fraco

$$2\xi\Omega = 2 \begin{bmatrix} 0.02648 & 0 \\ 0 & 0.04161 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.707 & 0 \\ 0 & 13.615 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5671 & 0 \\ 0 & 1.1330 \end{bmatrix}.$$

Para resolver a equação modal aproximada

$$\ddot{\phi} + 2\xi\Omega\dot{\phi} + \Omega^2\phi = 0,$$

são consideradas como condições iniciais

$$\phi(0) = U^{-1}x(0), \quad \dot{\phi}(0) = U^{-1}\dot{x}(0).$$

Deste modo,

$$\phi(0) = \begin{bmatrix} 0.007071 \\ 0.007071 \end{bmatrix}, \quad \dot{\phi}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e decorre que, em termos da resposta impulso matricial,

$$\phi(t) = [\dot{\mathcal{D}}(t) + \mathcal{D}(t)2\xi\Omega]\phi(0),$$

onde

$$\mathcal{D}(t) = e^{-\xi\Omega t} \frac{\text{sen}\Omega_d t}{\Omega_d},$$

com Ω_d a matriz diagonal de freqüências amortecidas

$$\Omega_d = \Omega\sqrt{I - \xi^2} = \begin{bmatrix} 10.703 & 0 \\ 0 & 13.603 \end{bmatrix}.$$

Assim, a resposta do sistema com amortecimento fraco é

$$x(t) = U\phi(t) = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} e^{-\xi\Omega t} [\cos(\Omega_d t) + 2\xi\Omega \text{sen}(\Omega_d t)]\phi(0)$$

A figura 4.3 apresenta os resultados obtidos através da integração numérica da equação original, [GIN 99], com a utilização da aproximação fraca para o amortecimento. O passo de tempo é de $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_d} = 0.046$ s, que corresponde à amostragem relativa a maior freqüência amortecida (ω_2).

Observe-se que os dois tipos de solução apresentam extraordinária concordância. Em geral, a aproximação fraca é boa para quocientes ξ_j menores que 0.2. Para este exemplo, no entanto, a aproximação fraca funciona para valores maiores das constantes do amortecimento por um fator de 10 ou superior. De modo que a máxima razão modal é, aproximadamente, 42 % do crítico. As discrepâncias, entre a solução aproximada e a numérica, são bastante aceitáveis para variadas aplicações. Uma razão para isto é que, ainda que exista um erro no início, este é de natureza transiente. Pois,

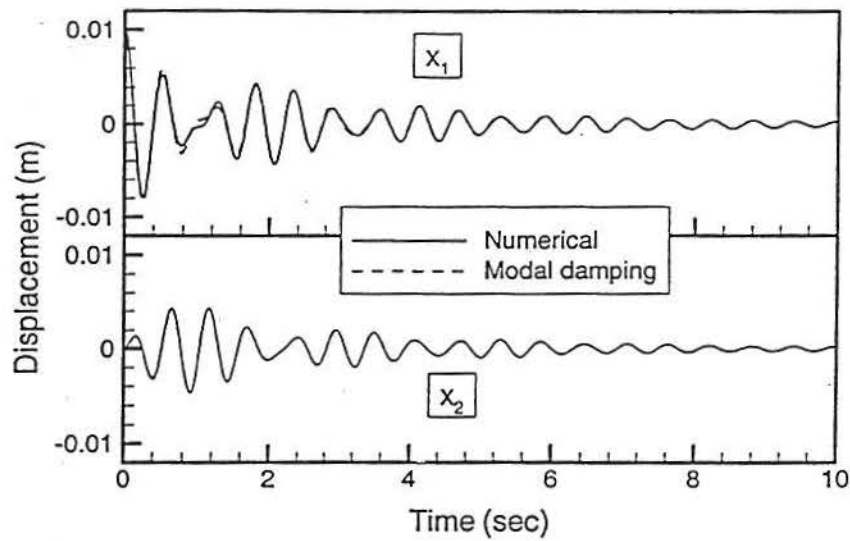


Figura 4.3 Gráfico apresentado em [GIN99], p. 316.

quanto maior o amortecimento, mais rápido é o decaimento, sem ocasionar acumulação de erro.

Entretanto, aqui, a determinação da resposta do sistema foi realizada através da fórmula analítica da solução em termos da resposta impulso matricial. Como valor da solução obteve-se

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= e^{(-.5667t)} [.0049 \cos(13.5909 t) + .0010 \text{sen}(13.5909 t)] \\
 &\quad + e^{(-.2833t)} [.0051 \cos(10.7128 t) - .0009 \text{sen}(10.7128 t)], \\
 x_2(t) &= -e^{(-.5667t)} [.0036 \cos(13.5909 t) + .0001 \text{sen}(13.5909 t)] \\
 &\quad + e^{(-.2833t)} [.0036 \cos(10.7128 t) - .00002 \text{sen}(10.7128 t)]
 \end{aligned}$$

Note-se que este resultado apresenta perfeita concordância com os obtidos em [GIN 99]. Os gráficos desta solução são exibidos na figura (4.4).

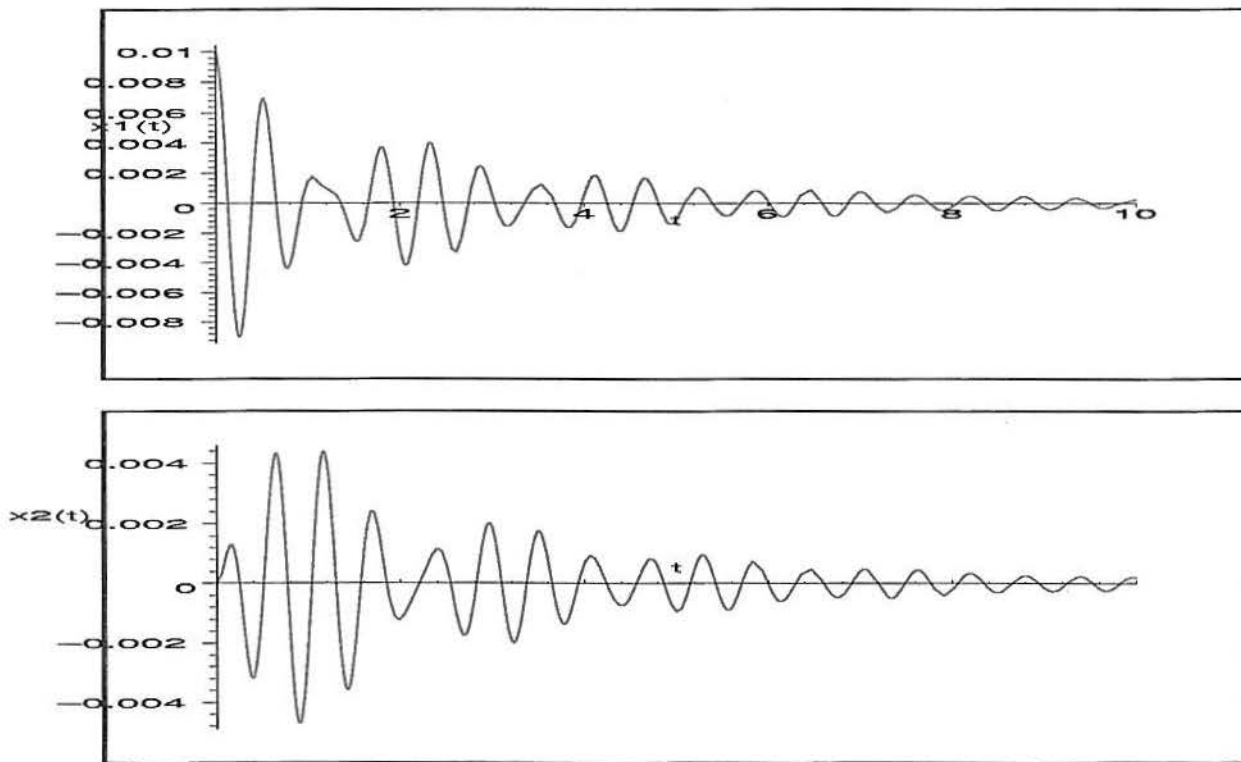


Figura 4.4 Gráfico da solução obtida através da resposta impulso matricial.

4.5 A Forma do Amortecimento Fraco

Suponha-se ξ uma matriz diagonal, construída a partir de $U^t C U$ descartando-se os elementos situados fora de sua diagonal principal. Então, da relação

$$2\xi\Omega = U^t C_F U$$

observa-se que a matriz C_F pode ser considerada uma aproximação do amortecimento original C .

Mais precisamente, se o sistema

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t)$$

for substituído por

$$M\ddot{x} + C_F\dot{x} + Kx = f(t),$$

onde

$$C_F = (U^t)^{-1}2\xi\Omega U^{-1}$$

denota a forma matricial da aproximação do amortecimento fraco.

Deste modo, a substituição do amortecimento C , pelo amortecimento fraco C_F , permite o desacoplamento do sistema pelos modos normais de M , K .

4.5.1 A Resposta Impulso com Amortecimento Fraco

A resposta impulso de um sistema com amortecimento fraco

$$M\ddot{x} + C_F\dot{x} + Kx = f(t)$$

pode ser obtida com o desacoplamento deste sistema através de modos normais. Ou seja, com o cálculo da resposta impulso $\mathcal{D}_\xi(t)$ do sistema desacoplado

$$\ddot{\phi} + 2\xi\Omega\dot{\phi} + \Omega^2\phi = U^t f(t). \quad (4.15)$$

Mais precisamente, com a resolução do sistema não-forçado correspondente, sujeito às condições iniciais $\mathcal{D}_\xi(0) = 0$, $\dot{\mathcal{D}}_\xi(0) = U^{-1}\dot{\mathcal{D}}(0) = U^{-1}M^{-1} = U^t$. Diante disso, decorre que a resposta impulso matricial é dada por seu análogo escalar, isto é,

$$\mathcal{D}_\xi(t) = e^{-\xi\Omega t} \frac{\text{sen}\Omega_d t}{\Omega_d},$$

onde

$$\Omega_d = \Omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

é a matriz diagonal das frequências amortecidas

$$\omega_{dj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}, \quad j = 1 : 2n.$$

Sendo, $\mathcal{D}(t) = U\mathcal{D}_\xi(t)U^t$, obtém-se a relação matricial

$$\mathcal{D}(t) = U e^{-\xi\Omega t} \frac{\text{sen}\Omega_d t}{\Omega_d} U^t$$

ou, na forma expandida em modos normais,

$$\mathcal{D}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{e^{-\xi_j \omega_j t} \text{sen} \omega_{dj} t}{\omega_{dj}} u_j u_j^t$$

onde

$$\Omega_d = \Omega \sqrt{I - \xi^2}$$

para

$$2\xi\Omega = \text{diag}[(U^t C U)_{jj}]$$

$$U^t M U = I, U^t K U = \Omega^2$$

Cabe salientar que os coeficientes $M^{-1}C_F$, $M^{-1}K$ comutam, pois

$$M^{-1}C_F = U U^t C_F = U 2\xi\Omega U^{-1}, \quad M^{-1}K = U U^t K = U U^t K U U^{-1} = U \Omega^2 U^{-1}.$$

Então,

$$M^{-1}C_F M^{-1}K = M^{-1}K M^{-1}C_F = U 2\xi\Omega^3 U^{-1}.$$

Portanto, $\mathcal{D}(t)$ também pode ser escrita como uma função matricial análoga ao caso do amortecimento de Rayleigh.

4.5.2 Modos Normais e a Matriz de Transferência

A matriz de transferência do sistema amortecido com amortecimento fraco

$$M\ddot{x} + C_F\dot{x} + Kx = f(t)$$

é dada por

$$H(s) = [Ms^2 + C_Fs + K]^{-1}.$$

Quando M e K satisfazem as relações dos modos normais $U^tMU = I$, $U^tKU = \Omega^2$, sendo $H(s)$ a transformada de Laplace da resposta impulso, decorre

$$(s^2I + 2s\xi\Omega + \Omega^2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2s\xi_1\omega_1 + \omega_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + 2s\xi_2\omega_2 + \omega_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s^2 + 2s\xi_n\omega_n + \omega_n^2} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$H(s) = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_n] \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2s\xi_1\omega_1 + \omega_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + 2s\xi_2\omega_2 + \omega_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s^2 + 2s\xi_n\omega_n + \omega_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ u_3^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{bmatrix}$$

Deste modo,

$$H_F(s) = [s^2M + sC_F + K]^{-1} = U[Is^2 + 2\xi\Omega s + \Omega^2]^{-1}U^t = \sum_{k=1}^n \frac{u_k u_k^t}{s^2 + 2s\xi_k\omega_k + \omega_k^2}$$

Porém, aqui,

$$2\xi_k\omega_k = (U^t C U)_{kk}$$

para

$$\boxed{U^t M U = I, \quad U^t K U = \Omega^2}$$

Em particular, obtém-se que a função frequência relacionada a sistemas com amortecimento fraco

$$\boxed{H_F(i\omega) = [(i\omega)^2 M + i\omega C_F + K]^{-1} = U[I(i\omega)^2 + 2i\omega\xi\Omega + \Omega^2]^{-1}U^t} \quad (4.16)$$

é dada, na forma modal, por

$$\boxed{H(i\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{u_k u_k^t}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\omega\xi_k\omega_k}} \quad (4.17)$$

4.5.3 Modos Normais e a Resposta Livre

Como resposta livre

$$x_d(t) = \int_0^t \mathcal{D}(t - \tau) f(\tau) d\tau$$

correspondente à forma modal, tem-se

$$x_d(t) = \int_0^t U e^{-\xi\Omega(t-\tau)} \frac{\text{sen}\Omega_d(t-\tau)}{\Omega_d} U^t f(\tau) d\tau$$

ou

$$x_d(t) = U \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-\xi_1\omega_1(t-\tau)} \frac{\text{sen}\omega_{d1}(t-\tau)}{\omega_{d1}} f_1(\tau) d\tau \\ \int_0^t e^{-\xi_2\omega_2(t-\tau)} \frac{\text{sen}\omega_{d2}(t-\tau)}{\omega_{d2}} f_2(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t e^{-\xi_n\omega_n(t-\tau)} \frac{\text{sen}\omega_{dn}(t-\tau)}{\omega_{dn}} f_n(\tau) d\tau \end{bmatrix},$$

onde $f_j(t) = u_j^t f(t)$ é a j -ésima componente do vetor $U^t f(t)$. Assim,

$$x_d(t) = \int_0^t \mathcal{D}(t-\tau) f(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^n \int_0^t e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \frac{\text{sen} \omega_{dj} (t-\tau)}{\omega_{dj}} u_j u_j^t f(\tau) d\tau$$

onde

$$2\xi_j \omega_j = (U^t C U)_{jj}$$

$$\omega_{dj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}$$

para

$$U^t M U = I, \quad U^t K U = \Omega^2$$

4.6 Limitação da Expansão Modal de Deslocamentos

Qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes pode ser utilizado como base para descrever um vetor arbitrário x de ordem n . Quando as matrizes M e K satisfazem as relações dos modos normais, as colunas v_k de uma matriz modal V podem ser utilizadas como base. Assim,

$$x = V \phi = \sum_{k=1}^n \phi_k v_k,$$

onde os escalares ϕ_k são denominados *coordenadas modais* ou *coordenadas normais*. Estas coordenadas modais, podem ser escritas como

$$\phi_k = \frac{v_k^t M x}{v_k^t M v_k}.$$

No caso de sistemas não-forçados e classicamente amortecidos, as coordenadas modais são obtidas através da resolução do sistema com 1 grau de liberdade

$$\ddot{\phi}_k + 2\xi_k\omega_k\dot{\phi}_k + \omega_k^2\phi_k = 0.$$

Suponha-se que o sistema seja deslocado do equilíbrio para a posição modal v_k . Então as coordenadas modais e velocidades iniciais para os outros modos v_j , $j \neq k$, são identicamente nulas. Entretanto, para o modo v_k , tem-se que $\phi_k(0) = 1$ e $\dot{\phi}_k(0) = 0$. Assim, a resposta do sistema é dada por

$$x(t) = \phi_k(t)v_k = e^{-\xi_k\omega_k t} \frac{\text{sen}(\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}t)}{\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}} u_k.$$

Devem ser observados os seguintes aspectos:

- não há resposta do sistema correspondente aos outros modos;
- a forma do deslocamento inicial é mantida durante o movimento;
- o movimento de cada massa é similar ao de um sistema não amortecido, exceto pela amplitude, que diminui para cada ciclo de vibração;
- o movimento de cada massa é harmônico amortecido com uma única frequência $\omega_d = \omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}$.

Quando se trata de de um sistema não-forçado e não-clássico, estas observações não são válidas.

4.6.1 Exemplo Numérico

Como exemplo, considere-se o sistema livre amortecido representado pela figura 4.5 e modelado através da equação

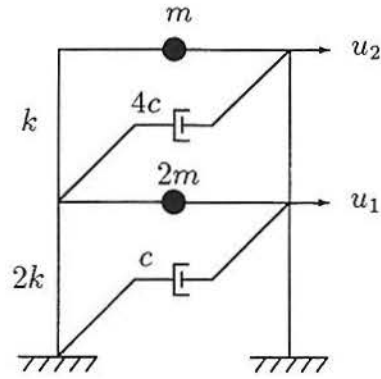


Figura 4.5 Estrutura de dois andares.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$$

com

$$M = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = k \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = c \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix},$$

onde m, c, k são constantes.

Os modos ortogonais, não normalizados, são

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$V^t M V \ddot{\phi} + V^t C V \dot{\phi} + V^t K V \phi = 0$$

é dada numericamente por

$$m \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 3.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1.25 & 3.50 \\ 3.50 & 17.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 6.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com as condições iniciais modais $\phi(0) = V^{-1}x(0) = V^{-1}v_1$, $\dot{\phi}(0) = 0$, tem-se a solução

$$\phi(t) = [\dot{\mathcal{D}}(t)M_1 + \mathcal{D}(t)C_1]\phi(0) = [\dot{\mathcal{D}}(t)M_1 + \mathcal{D}(t)C_1]V^{-1}v_1.$$

Aqui as matrizes $M_1 = V^tMV$, $K_1 = V^tKV$ são diagonais. Entretanto, $C_1 = V^tCV$ é uma matriz simétrica "cheia":

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1.25 & 3.50 \\ 3.50 & 17.00 \end{bmatrix}.$$

Com o valor de $c = \sqrt{\frac{km}{200}}$, $m = 1$, $k = 100$, decorre

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= -0.0240 e^{-2.0060t} \cos(13.9348t) - 0.0849 e^{-0.2921t} \text{sen}(7.0970t) \\ &\quad + 1.0240 e^{-0.2921t} \cos(7.0970t) + 0.0613 e^{-2.0060t} \text{sen}(13.9348t); \\ \phi_2(t) &= 0.0064 e^{-2.0060t} \cos(13.9348t) + 0.0385 e^{-0.2921t} \text{sen}(7.0970t) \\ &\quad - 0.0064 e^{-0.2921t} \cos(7.0970t) - 0.0188 e^{-2.0060t} \text{sen}(13.9348t). \end{aligned}$$

Observe-se que $\phi_2(t)$ é não nulo, isto é, o segundo modo v_2 está ativo nesta resposta.

No espaço físico, tem-se

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -0.0184 e^{-2.0060t} \cos(13.9348t) - 0.0810 e^{-0.2921t} \text{sen}(7.0970t) \\ &\quad + 0.5184 e^{-0.2921t} \cos(7.0970t) + 0.0495 e^{-2.0060t} \text{sen}(13.9348t); \\ x_2(t) &= -0.0176 e^{-2.0060t} \cos(13.9348t) - 0.0464 e^{-0.2921t} \text{sen}(7.0970t) \\ &\quad + 1.0176 e^{-0.2921t} \cos(7.0970t) + 0.0424 e^{-2.0060t} \text{sen}(13.9348t). \end{aligned}$$

As componentes da resposta obtida pelo método analítico, utilizando a resposta impulso matricial, são exibidas na figura 4.7

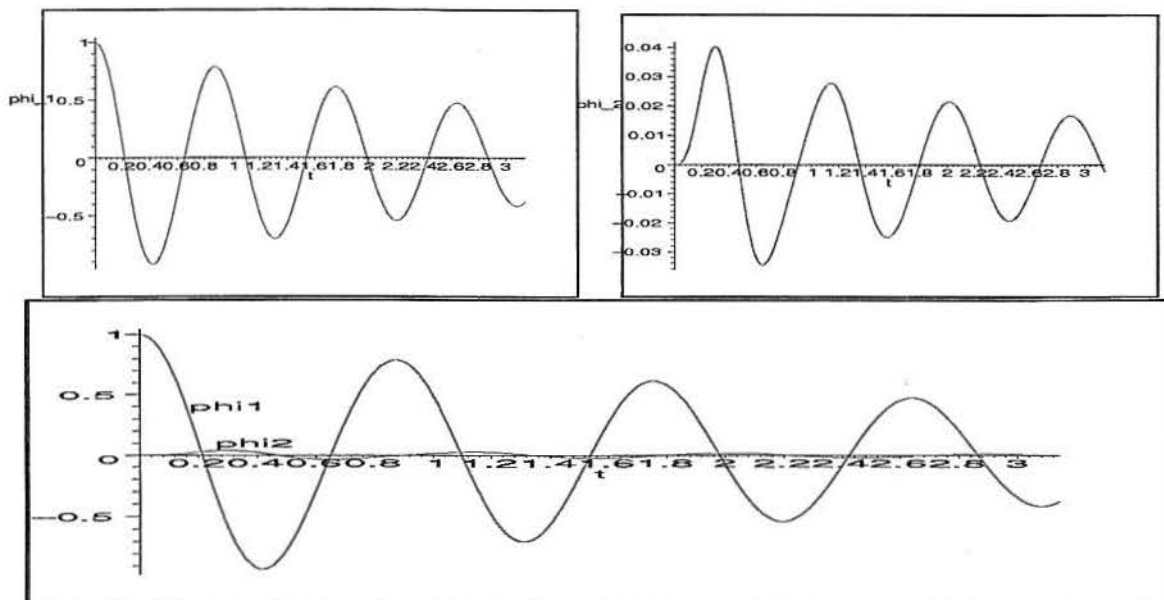


Figura 4.6 Gráficos das coordenadas modais do sistema excitado com o primeiro modo, para $m = 1$, $k = 100$.

A resposta $x_1(t)$ mantém aproximadamente a forma da coordenada $\phi_1(t)$, mas o movimento não possui uma única frequência de oscilação amortecida, pois o segundo modo v_2 está ativo.

De maneira similar, para o segundo modo, com a condição inicial modal $\phi(0) = V^{-1}x(0) = V^{-1}v_2$, $\dot{\phi}(0) = 0$, tem-se a solução

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= -0.0511 e^{-0.2921 t} \cos(7.0970 t) + 0.0511 e^{-2.0060 t} \cos(13.9348 t) \\ &\quad - 0.1508 e^{-2.0060 t} \text{sen}(13.9348 t) - 0.3084 e^{-0.2921 t} \text{sen}(7.0970 t); \\ \phi_2(t) &= -0.0740 e^{-0.2921 t} \cos(7.0970 t) + 1.0740 e^{-2.0060 t} \cos(13.9348 t) \\ &\quad - 0.0365 e^{-2.0060 t} \text{sen}(13.9348 t) + 0.3723 e^{-0.2921 t} \text{sen}(7.0970 t).\end{aligned}$$

A figura 4.8 mostra as respostas (coordenadas modais) relacionadas ao segundo modo v_2 .

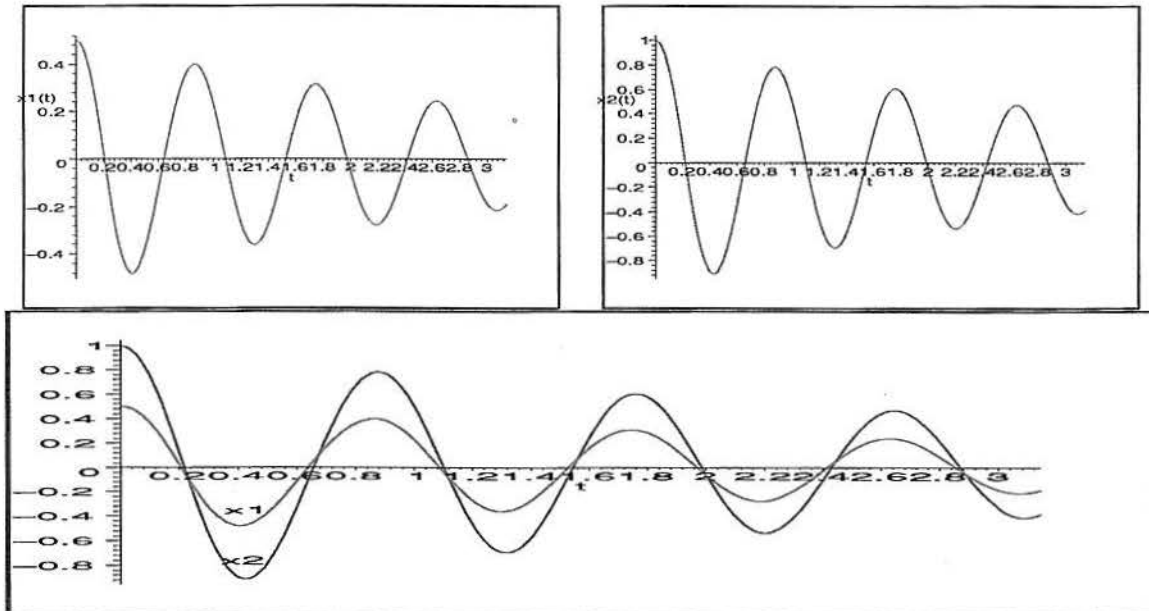


Figura 4.7 Gráficos dos deslocamentos do sistema excitado com o primeiro modo, para $m = 1$, $k = 100$.

Observe-se que $\phi_1(t)$ é não nulo, isto é, o primeiro modo v_1 está ativo na resposta.

No espaço físico, tem-se

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 0.0484 e^{-0.2921 t} \cos(7.0970 t) - 1.0484 e^{-2.0060 t} \cos(13.9348 t) \\
 &\quad - 0.0388 e^{-2.0060 t} \sin(13.9348 t) - 0.2181 e^{-0.2921 t} \sin(7.0970 t); \\
 x_2(t) &= -0.1251 e^{-0.2921 t} \cos(7.0970 t) + 1.1251 e^{-2.0060 t} \cos(13.9348 t) \\
 &\quad - 0.1873 e^{-2.0060 t} \sin(13.9348 t) + 0.6806 e^{-0.2921 t} \sin(7.0970 t).
 \end{aligned}$$

Os gráficos das componentes da solução no espaço físico são ilustrados na figura 4.9.

A resposta não mantém a forma do modo v_2 e o movimento não possui uma única frequência de oscilação amortecida.

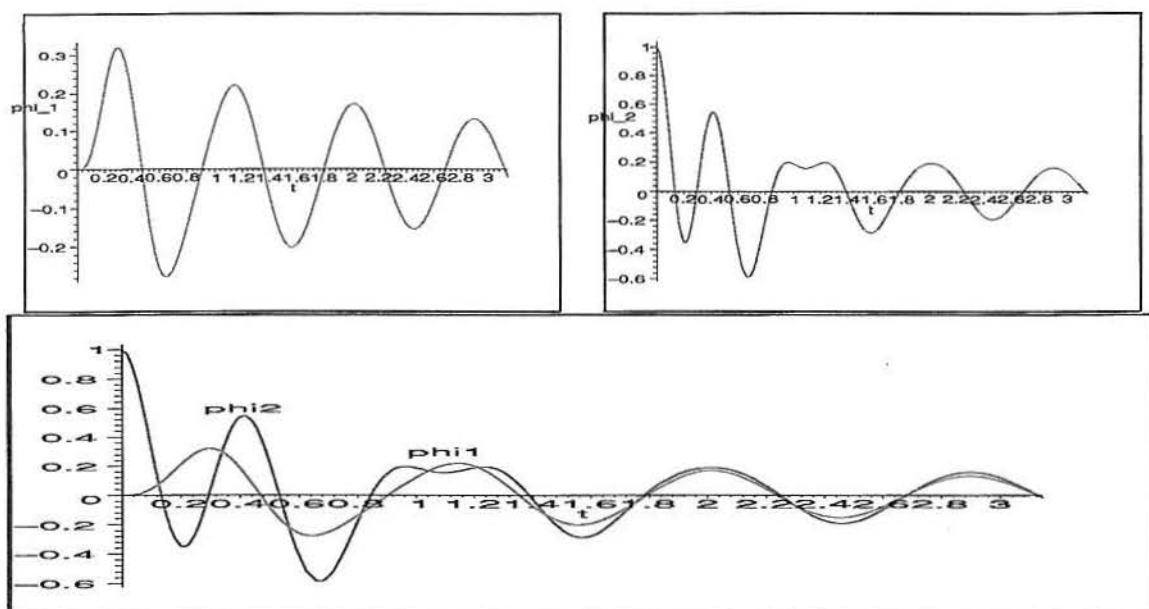


Figura 4.8 Gráficos das coordenadas modais do sistema excitado com o segundo modo, para $m = 1$, $k = 100$.

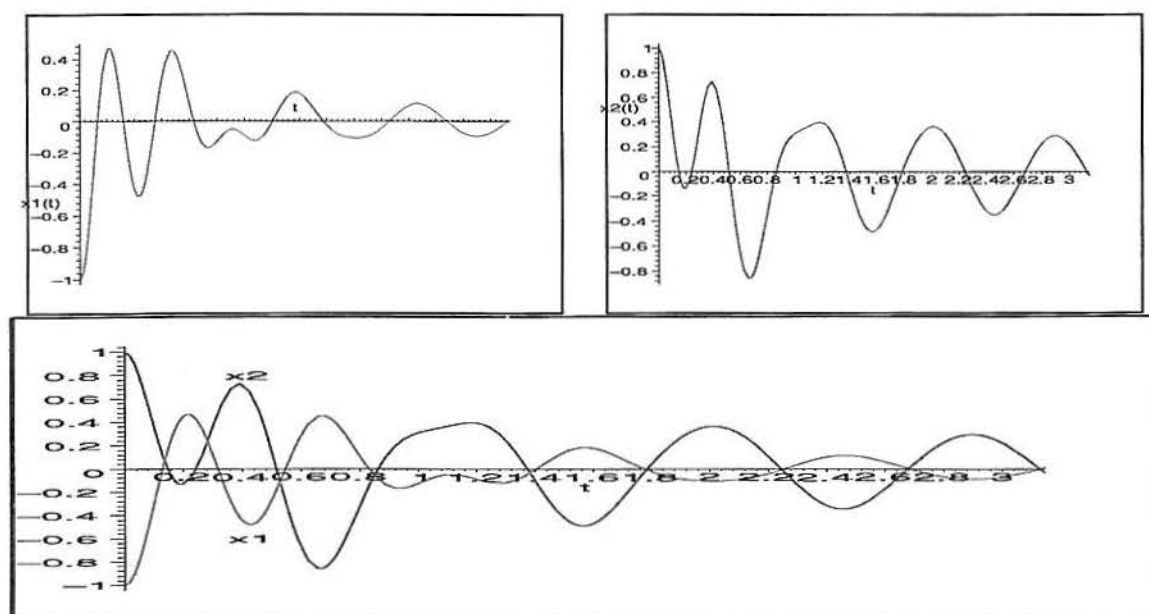


Figura 4.9 Gráficos dos deslocamentos do sistema excitado com o segundo modo, para $m = 1$, $k = 100$.

5 CARACTERIZAÇÃO SIMBÓLICA DOS MODOS GERAIS EM TERMOS DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

5.1 Introdução

Neste capítulo, será considerado o problema de autovalor

$$[\lambda^2 M + \lambda C + K]v = 0 \quad (5.1)$$

como *não-defeituoso*: condicionado a ter exatamente $2n$ autovalores diferentes. Não há outras restrições impostas às matrizes M , C e K , portanto, podem ser arbitrárias.

Os conceitos de autovalor e autovetor serão relacionados com a resposta impulso e a matriz de transferência. Também serão consideradas excitações harmônicas, cujo vetor amplitude propiciará a obtenção dos modos de vibração do sistema.

Inicialmente, será enunciada e, após, demonstrada uma propriedade básica para a determinação simbólica dos modos. Tal propriedade permitirá estender de maneira direta a teoria de Krylov, para o problema de autovalor de primeira ordem (veja-se [FAD 63], [GOL 96]) aos de segunda ordem provenientes de sistemas vibratórios.

5.2 Uma Forma Simbólica para os Modos do Sistema

Os autovalores do sistema algébrico matricial

$$[\lambda^2 M + \lambda C + K]v = 0$$

verificam a relação

$$\boxed{[\mathcal{D}_{k+1}M + \mathcal{D}_k C]v + \lambda \mathcal{D}_k M v = \lambda^k v, k = 0, 1, \dots} \quad (5.2)$$

que será obtida a seguir.

Conforme estabelecido no capítulo 3, o problema de autovalor decorre da procura de soluções do tipo exponencial $x(t) = e^{\lambda t}v$. Neste caso, $x(0) = v$ e $\dot{x}(0) = \lambda v$.

A solução do sistema vibratório, escrita em termos da resposta impulso matricial, é dada por

$$e^{\lambda t}v = [\dot{\mathcal{D}}(t)M + \mathcal{D}(t)C]Mv + \mathcal{D}(t)M\lambda v.$$

Derivando k vezes esta expressão e avaliando o resultado em $t = 0$, segue que

$$\lambda^k v = [\mathcal{D}^{(k+1)}(0)M + \mathcal{D}^{(k)}(0)C]Mv + \lambda \mathcal{D}^{(k)}(0)Mv.$$

Como $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}^{(k)}(0)$, (Cap. 2), resulta a propriedade.

A seguir, suponha-se que v_1, v_2, \dots, v_n são os autovetores correspondentes aos $2n$ autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$ do sistema algébrico não-defeituoso. Tem-se como ob-

jetivo relacionar estes autovetores à resposta impulso e à matriz de transferência.

Dados os vetores y_0 e y_1 , existem constantes c_k , tais que

$$y_0 = \sum_{k=1}^{2n} c_k v_k, \quad y_1 = \sum_{k=1}^{2n} c_k \lambda_k v_k,$$

pois, os $2n$ vetores

$$\begin{bmatrix} v_k \\ \lambda_k v_k \end{bmatrix}_{2n \times 1},$$

para autovalores todos distintos, são linearmente independentes.

Da equação

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = 0,$$

quando derivada k vezes e avaliada em $t = 0$, obtém-se a equação em diferenças

$$My_{k+2} + Cy_{k+1} + Ky_k = 0,$$

onde $y_k = y^{(k)}(0)$.

Se considerados y_0 e y_1 como valores iniciais, esta última equação possuirá a solução [CLA 90b]

$$y_k = [D_{k+1}M + D_kC]My_0 + D_kMy_1.$$

Com a substituição dos valores y_0 e y_1 , expandidos em relação aos autovetores v_k , e da propriedade (equação (5.2)), segue que

$$y_k = \sum_{j=1}^{2n} c_j [D_{2n-k+1}M + D_{2n-k}C]v_j + \lambda_j D_k M v_j.$$

Assim,

$$y_k = \sum_{j=1}^{2n} c_j \lambda_j^k v_j. \quad (5.3)$$

Tendo em vista a obtenção dos autovetores v_k , em termos dos vetores y_k gerados recursivamente, são definidos os polinômios:

$$\phi_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{2n} q_{j-1,i} \lambda^{2n-j}, \quad i = 1 : 2n, \quad (5.4)$$

cujos coeficientes $q_{j-1,i}$ serão determinados de maneira adequada.

Deve-se notar que, para cada $i = 1 : 2n$, com o uso das equações (5.4) e (5.3), obtém-se

$$q_{0,i} y_{2n-1} + q_{1,i} y_{2n-2} + \cdots + q_{2n-1,i} y_0 = c_1 \phi_i(\lambda_1) v_1 + c_2 \phi_i(\lambda_2) v_2 + \cdots + c_{2n} \phi_i(\lambda_{2n}) v_{2n}. \quad (5.5)$$

A escolha adequada de $\phi_i(\lambda)$ como

$$\phi_i(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} \quad (5.6)$$

permite estabelecer:

- $\phi_i(\lambda_j) = 0$,
- $\phi_i(\lambda_i) = p'(\lambda_i) \neq 0$.

Da utilização destas propriedades em (5.5), segue que

$$c_i \phi_i(\lambda_i) v_i = \sum_{j=1}^{2n} q_{j-1,i} y_{2n-j}, \quad i = 1 : 2n. \quad (5.7)$$

Se $c_i \neq 0$, pode-se escolher como autovetor v_k

$$v_k = \sum_{j=1}^{2n} q_{j-1,i} y_{2n-j}, \quad i = 1 : 2n. \quad (5.8)$$

Agora, os coeficientes $q_{j,i}$ podem ser calculados pela recursão

$$\begin{aligned} q_{0,i} &= 1, \\ q_{j,i} &= \lambda_i q_{j-1,i} + b_j, \quad j = 1 : 2n - 1, \end{aligned} \quad (5.9)$$

cuja solução é

$$q_{j,i} = \sum_{k=0}^j b_k \lambda_i^{j-k}. \quad (5.10)$$

Através da definição (capítulo 2, equação (2.37)) dos polinômios

$$q_j(\lambda) = \sum_{i=1}^{j-1} b_i \lambda^{j-i-1}, \quad (5.11)$$

decorre

$$q_{j,i} = q_{j+1}(\lambda_i).$$

E com a substituição em (5.8), conclui-se que os autovetores v_k são dados por

$$\boxed{v_k = \sum_{j=1}^{2n} q_j(\lambda_k) y_{2n-j} \quad k = 1 : 2n} \quad (5.12)$$

onde os y_k , $k = 2 : 2n$, são obtidos com a fórmula de recursão

$$\boxed{My_{k+2} + Cy_{k+1} + Ky_k = 0}$$

com y_0, y_1 arbitrários (não simultaneamente nulos) e

$$\boxed{q_j(\lambda) = \sum_{i=0}^{j-1} b_i \lambda^{j-i-1}}$$

Em particular, para $y_0 = 0$, tem-se que $y_k = \mathcal{D}_k My_1$. Assim, os modos são dados por

$$\boxed{v_k = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \lambda_k^{j-i-1} \mathcal{D}_{2n-j} My_1} \quad (5.13)$$

Para determinar os autovetores de maneira simbólica, será utilizada a fórmula da matriz de transferência:

$$p(\lambda)H(\lambda) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \lambda^{j-i-1} \mathcal{D}_{2n-j}.$$

Então,

$$v_k = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k} \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \lambda^{j-i-1} \mathcal{D}_{2n-j} My_1.$$

Portanto, os autovetores são escritos *simbolicamente* como

$$\boxed{v_k = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k} p(\lambda)H(\lambda)My_1}$$

ou, de maneira equivalente, em termos da matriz adjugada (citada, muitas vezes, na literatura como matriz “adjunta”) da matriz de transferência, por

$$\boxed{v_k = \text{adj}([\lambda_k^2 M + \lambda_k C + K])My_1} \quad (5.14)$$

onde y_1 é um vetor arbitrário não nulo.

Estas relações, que verificam por substituição direta o problema de autovalor original, podem ser calculadas através da fórmula (5.13), como alternativa ao uso da matriz adjunta.

5.2.1 Exemplo Numérico

Considere-se, a seguir, as matrizes

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Estas matrizes dão origem ao problema de autovalores

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)v = 0, \quad v \neq 0. \quad (5.15)$$

O polinômio característico $p(\lambda)$ é

$$p(\lambda) = \det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda,$$

cujas raízes são

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1 + \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \lambda_4 = 1 - \sqrt{2},$$

que constituem os autovalores do problema (5.15).

De acordo com a teoria exposta anteriormente, para determinar os autovetores é suficiente o cálculo da $\text{adj}(\lambda^2 M + \lambda C + K)$. Como y_1 é um vetor arbitrário, na equação (5.14) pode ser considerado como sendo um dos vetores canônicos. Is-

to torna possível escolher uma das colunas não nulas da adjugada como o autovetor correspondente. Neste caso,

$$\text{adj}(\lambda^2 M + \lambda C + K) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 - \lambda - 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, para $\lambda_1 = -1$, tem-se que

$$\text{adj}(\lambda_1^2 M + \lambda_1 C + K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e escolhe-se como autovetor a segunda coluna da matriz anterior,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Similarmente, para $\lambda_2 = 0$, tem-se que

$$\text{adj}(\lambda_2^2 M + \lambda_2 C + K) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

e escolhe-se

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

para $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$, tem-se que

$$\text{adj}(\lambda_3^2 M + \lambda_3 C + K) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} + 2 & 2 + \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

e escolhe-se

$$v_3 = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} = (2 + \sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

e, para $\lambda_4 = 1 - \sqrt{2}$, tem-se que

$$\text{adj}(\lambda_4^2 M + \lambda_4 C + K) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} + 2 & 2 - \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

e escolhe-se

$$v_4 = \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} = (2 - \sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Deve-se observar que os mesmos resultados foram obtidos com a redução de Hamilton à primeira ordem no problema de autovalores definido pela equação (5.15).

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi desenvolvido um estudo de sistemas vibratórios clássicos e não-clássicos do ponto de vista da resposta a um impulso unitário, também denominada solução dinâmica ou, simplesmente, a resposta impulso.

Para sistemas vibratórios com um grau de liberdade, foram obtidas tabelas das respostas livres de funções elementares de interesse, funções de duração finita com sua decomposição harmônica e algumas funções de duração infinita. Isto foi possível devido à caracterização da solução transiente com a solução permanente em termos da resposta impulso, e da disponibilidade do "software" simbólico "MapleV". Estas tabelas foram obtidas tanto para o caso não-amortecido, quanto para o amortecido.

Os sistemas vibratórios com múltiplos graus de liberdade foram considerados em termos da resposta impulso matricial e da matriz de transferência. Para tanto, foi utilizado o método operacional. A resposta impulso foi caracterizada em termos dos coeficientes do polinômio característico, de uma solução escalar de uma equação diferencial característica e de uma equação recursiva de segunda ordem. A análise modal também foi considerada com a resposta impulso.

No futuro, novos estudos poderão ser realizados, com o objetivo de relacionar a resposta impulso com o Método de Matrizes de Transferência, o MMT. Este último tem sido utilizado em trabalhos de pesquisa [SIL 97] de análise dinâmica, pelo grupo de mecânica aplicada (GPMA) da Escola de Engenharia-PROMEC- Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [BEL 70] BELLMAN, R., *Introduction to Matrix Analysis*. 2nd. ed., McGraw-Hill, New York, 1970.
- [BEN 71] BENDAT, J. & PIERSOL, A., *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. John Willey-Interscience, 1971.
- [BUH 88] BUHARIWALA, K. J. & HANSEN, J. S., Construction of a Consisting Damping Matrix. *J. App. Mech. Trans., ASME*, Vol. 55, N^o 2, p. 443-447, 1988.
- [CAN 97] CANAHUALPA, G. R., GALLICCHIO, E. & CLAEYSSEN, J. R., A Matriz de Transição de Sistemas de Segunda Ordem para Métodos Modais Projetivos. XX CNMAC, Gramado, RS, Brasil, p. 242, 1997.
- [CAU 65] CAUGHEY, T.K., O'KELLEY, M.E., Classical Modes in Damped Linear Dynamic Systems. *ASME Journal of Applied Mechanics.*, Vol. 32, p. 583-588, 1965.
- [CHE 71] CHEN, F., On Modeling and Direct Solution of Certain Free Vibration Systems. *J. Sound & Vibration*, Vol 14, N^o 1, p. 57-79, 1971.
- [CHO 95] CHOPRA, A.K., *Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1995.
- [CLA 90a] CLAEYSSEN, J.C.R., On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 140(1): 73-84, 1990.
- [CLA 90b] CLAEYSSEN, J.C.R., GALLICCHIO, E., VILHENA, M.T., Inversion of Higher Matrix Difference and Differential Equations through

their Dynamical Solutions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 149(2): 369-376, July 1990.

[CLA 95] CLAEYSSSEN, J.C.R., Time and Frequency Response. *ICIAM 95*, Hamburgo, p. 128, 1995.

[CLA 99] CLAEYSSSEN, J.C.R., *The Matrix Impulse Response in Vibrating Systems*. Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences, Ed. J. Balthazar, T. Gonçalves, J. Claeysen, Vol 2, p. 122-135.

[DUN 79] DUNCAN, T. E. & TAYLOR, R. E., A Note on the Dynamic Analysis of Non-Proportional Damped Systems. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol 7, p. 99-105, 1979.

[EWI 95] EWINS, D. J., *Modal Testing: Theory and Practice*. 5th. ed., Research Studies Press Ltd and John Wiley and Sons Ltd., Taunton, Somerset, England, 1995.

[FAD 63] FADDEEV, D.K., FADDEEVA, V.N., *Computational Methods of Linear Algebra*. W. H. Freeman & Company, San Francisco, 1963.

[GAL 87] GALLICCHIO, E., Soluções Dinâmicas, Desacoplamento e Aproximação em Equações Diferenciais Matriciais de Ordem Superior. *Dissertação de Mestrado*, UFRGS/CPGM, Porto Alegre, 1987.

[GIN 99] GINSBERG, J. H., *Mechanical and Structural Vibration: Theory and Applications*. Georgia Technological Institute, Atlanta, Georgia, USA, 1999.

[GOL 80] GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*. 2nd. ed., Reading, Addison-Wesley, Mass., 1980.

- [GOL 96] GOLUB, G.H., VAN LOAN, C.F., *Matrix Computations*. 3rd. ed., John Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
- [HAL 91] HALE, J., *Ordinary Differential Equations*, John Wiley, 1991.
- [HAL 89] HALLAUER, W. L. & LAMBERSON, S. E., Experimental Active Vibration Damping of a Plane Truss using Hybrid Actuation. *Proc. 30th. AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structural Dynamics and Materials Conf.*, 1979.
- [INM 89] INMAN, D., *Vibration, with Control, Measurement, and Stability*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [INM 94] INMAN, D., *Engineering Vibration*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [KAN 74] KANDIANS, F., Novel Laplace Transform Technique in Structural Dynamics Analysis. *J. Sound & Vibration*, Vol 36, N^o 2, p. 225-252, 1974.
- [KNO 85] KNOWLES, J. K., Linear Dynamical Systems and an Approximation Problem for Linear Transformations. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, Vol. 16, N^o 4, p. 489-492, 1985.
- [LIA 91] LIANG, Z. & LEE, G. C., Representation of Damping Matrix. *J. Engineering Mechanics*, Vol 117, N^o 5, p. 1005-1020, 1991.
- [LUT 90] LUTES, L. & SINGHAI, A., Existence of Uncoupled Modes in Subsystem Analysis. *J. Engineering Mechanics*, Vol 116, N^o 4, p. 966-972, 1990.
- [MAU 88] MAU, S. T., A Subspace Modal Superposition Method for Non-classically Damped Systems. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol 16 N^o 6, p. 931-942, 1988.

- [MEI 75] MEIROVITCH, L., *Elements of Vibration Analysis*. Mc Graw - Hill, Inc., 1975.
- [MOL 78] MOLER, C. & VAN LOAN, C., Nineteen dubious ways of computing the exponential of a matrix. *SIAM Review*, p. 801-836, 1978.
- [NEW 89] NEWLAND, D.E., *Mechanical Vibration Analysis and Computation*. Longman Scientific & Technical, London, 1989.
- [PHI 95] PHILLIPS, C.L. & PARR, J. M., *Signals, Systems and Transforms*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [RAY 45] RAYLEIGH, Lord, *Theory of Sound. Vol. 1*, Dover, New York, 1945.
- [SES 90] SESTIERI, A., Dispense del corso di Meccanica delle Vibrazioni, *Università di Roma, "La Sapienza", Dipartimento di Meccanica e Aeronautica*, Roma, Itália, 1990.
- [SES 93] SESTIERI, A., IBRAHIM S., Analysis of Errors and Approximations in the Use of Modal Coordinates. *Università di Roma, "La Sapienza", Dipartimento di Meccanica e Aeronautica*, Roma, Itália, 1993.
- [SHA 91] SHABANA, A. A., *Theory of Vibration, Vol 2*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [SIL 97] SILVEIRA MATOS, D. F., Matriz de Transferência na Análise Dinâmica de Eixos Elásticos considerando o Efeito Giroscópico. *Dissertação de Mestrado*, PROMEC-UFRGS, Porto Alegre, 1997.
- [TAM 98] TAMAGNA, A., *Vibrações Notas de Curso*, UFRGS, Porto Alegre, 1998.
- [TIM 74] TIMOSHENKO, S. P. & WEAVER. W. Jr., *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley, New York, 1974.

- [UDW 93] UDWADIA, F. E., Further Results on the Iterative Solution of Non-classically Damped Linear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 60, No. 1, p. 235-239, 1993.
- [UDW 94a] UDWADIA, F. E. & KUMAR, R., Convergence of Iterative Methods for Nonclassically Damped Dynamic Systems. *Applied Mathematics and Computation*, 61, No 1, p. 61-97, 1994.
- [UDW 94b] UDWADIA, F. E. & KUMAR, R., New Iterative Schemes for Non-classically Damped Dynamic Systems. *Int. J. of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 23, No 2, p. 137-152, 1994.
- [WHE 96] WHEELER, A. J. & GANJI, A. R., *Introduction to Engineering Experimentation*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1996.