UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MÓDULOS INJETIVOS E A DUALIDADE DE MATLIS

DANIEL FRANCISCO BUSTOS RÍOS

PORTO ALEGRE, AGOSTO DE 2015

Dissertação submetida por Daniel Francisco Bustos Ríos [1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador

Dr. Alveri Alves Sant'Ana (orientador, PPG-MAT/UFRGS)

Banca Examinadora

Dr. Antonio Paques (UFRGS)

Dr. Wagner de Oliveira Cortes (UFRGS)

Dr. Dirceu Bagio (UFSM)

Data de Defesa: 20/08/2015.

[1] Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico (CNPq).

Aos meus pais, minha irmã e minha namorada por tudo o que representam para mim.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, minha irmã e minha namorada por todo o amor com que me brindam todos os dias, porque, apesar da distância, sempre estão presentes em todos os acontecimentos de minha vida. Também agradeço a meus queridos avós e a toda minha família por sempre terem os braços abertos para mim.

Ao professor Alveri pelo valioso tempo dedicado a me orientar, pelo apoio e por sempre ter disposição para me ajudar tanto no âmbito pessoal como acadêmico.

Ao professor Jesus Ávila por ter me motivado a fazer o processo de seleção para o mestrado. À pós-graduação em matemática da UFRGS por ter me aceitado como um de seus alunos e me permitir realizar o sonho de fazer um mestrado em matemática. A todos os professores com quem tive o prazer de ter aula. Assim como ao CNPq pela bolsa de estudos.

A todos meus colegas e amigos da universidade, em especial ao Leonardo por ter lido esta dissertação e dado suas sugestões.

Agradeço também aos professores que aceitaram participar da minha banca: Antonio Paques, Wagner de Oliveira Cortes e Dirceu Bagio.

Por fim, agradeço a todas as demais pessoas que contribuíram até agora com minha formação, em especial àquelas que fazem meus dias mais felizes.

Resumo

Resumo:

O objetivo desta dissertação é estudar a caracterização dos módulos injetivos sobre anéis noetherianos e comutativos, dada por Eben Matlis em [16], como soma direta de módulos da forma $E(\frac{A}{P})$. Assim, discutimos algumas propriedades dos módulos injetivos indecomponíveis sobre esses tipos de anéis. Em particular, mostramos que o completamento do anel local A_p é isomorfo ao anel $Hom_A(E(\frac{A}{P}), E(\frac{A}{P}))$. A partir disso, mostramos que, quando o anel for comutativo, noetheriano, local e completo, então a categoria dos módulos noetherianos e a categoria dual dos módulos artinianos são equivalentes.

Palavras-chave: Módulos injetivos; Fechos injetivos; Anéis noetherianos; Dualidade de Matlis.

Abstract

Abstract:

The goal of this work is to study the characterization of injective modules over Noetherian and commutative rings, given by Eben Matlis in [16], as a direct sum of modules of the form $E(\frac{A}{P})$. Thus, we discuss some properties of injective indecomposable modules over these types of rings. In particular, we show that the completion of the local ring A_p is isomorphic to the ring $Hom_A(E(\frac{A}{P}), E(\frac{A}{P}))$. From this, we show that, when a ring is commutative, noetherian, local and complete, the category of the Noetherian modules and the dual category of Artinian modules are equivalent.

Keywords: Injective modules; Injective hulls; Noetherian rings; Matlis duality.

Sumário

Introdução

Em 1940, o matemático Alemão Reinhold Baer generalizou para um contexto de módulos [3] o teorema que diz que um grupo abeliano divisível é um somando direto de todo grupo abeliano que o contém, ou seja, ele definiu os módulos completos como os módulos que satisfazem o critério que leva seu nome (item 4 da Definição 1.3.27) e mostrou que um módulo é completo se e somente se ele é um somando direto de qualquer módulo no qual ele está contido. Desta forma, Baer introduz o conceito de módulo injetivo, muito embora não tenha usado esta nomenclatura.

Foi provavelmente 13 anos depois que Von B. Eckmann e A. Schopf em [8] usaram pela primeira vez o termo "módulo injetivo" (em alemão, *injektive moduln*) para fazer referência a este tipo de módulo. Em [3], Baer tinha mostrado que todo módulo pode ser imerso em algum módulo injetivo (Teorema 1.3.41). Nas palavras dele:

"*Every abelian group over the ring R is a subgroup of a complete abelian group over the ring R*".

Esse Fato era bem conhecido na sua época, no caso dos grupos abelianos (Proposição 1.3.40). A partir disto, Von B. Eckmann e A. Schopf mostraram que para todo módulo existe um módulo injetivo minimal que o contém (Teorema 1.3.47), isto é, demonstraram que todo módulo possui um fecho injetivo. Este conceito é central para o desenvolvimento do presente trabalho.

Em 1959, Eben Matlis em [16], caracterizou os módulos injetivos sobre anéis noetherianos comutativos mostrando que um módulo injetivo sobre um anel noetheriano é uma soma direta de módulos injetivos indecomponíveis, exibindo, surpreendentemente, uma correspondência bijetiva entre o conjunto das classes de isomorfismos de A-módulos injetivos indecomponíveis e o espectro do A, sempre que A é um anel noetheriano e comutativo. Estes resultados aparecem neste trabalho como Teorema 2.2.5 e Teorema 2.3.1, respectivamente. Nesse mesmo ano, Z. Papp provou a recíproca do primeiro destes teoremas, isto é, se todo A-módulo injetivo tem uma decomposição em soma direta de módulos injetivos indecomponíveis então A é um anel noetheriano.

Em 1966, Carl Faith introduz em [10] o conceito de módulo Σ-injetivo. Um A-módulo M é dito Σ-injetivo se $M^{(T)}$ é injetivo, para qualquer conjunto de índices T. Ele mostrou que M é Σ-injetivo se e somente se a classe de ideais de A que anulam subconjuntos de M satisfaz a condição de cadeia ascendente. Assim, mais uma vez se encontra a relação sobre condições de cadeia de ideais do anel e a injetividade dos módulos que são soma direta de módulos injetivos.

Em 1969, A. Cailleau generalizou em [6], para módulos Σ-injetivos, a caracterização feita por Matlis para módulos injetivos sobre anéis noetherianos. Isto é, Cailleau mostrou que se um A-módulo é Σ-injetivo então ele é soma direta de módulos Σ-injetivos indecomponíveis. Foi só 3 anos depois que István Beck mostrou, em [4], que um A-módulo (A comutativo) é Σ-injetivo se e somente se ele é uma soma direta de módulos que são o fecho injetivo do quociente $\frac{A}{P}$, onde P é um ideal primo tal que o anel localizado A_p é noetheriano, generalizando o correspondente resultado de Matlis.

Como fato importante no desenvolvimento do conceito de módulo injetivo destacamos que recentemente K. Beidar, S. Jain e A. Srivastava, em [5], apresentaram uma nova caracterização para módulos Σ-injetivos, ou seja, mostraram que um módulo M é Σ-injetivo se e somente se qualquer extensão essencial de $M^{(\mathbb{N})}$ é uma soma direta de módulos injetivos.

O objetivo principal deste trabalho é estudar detalhadamente as contribuições feitas por Matlis em [16]. Para tal fim, dividimos o trabalho em 3 capítulos. No Capítulo 1 apresentamos os pré-requisitos necessários para o bom entendimento dos capítulos posteriores. Do mesmo modo, o Capítulo 1 se subdivide em três seções. A primeira seção somente contém definições básicas da teoria de categorias. Na segunda seção estudamos algumas propriedades da decomposição primária de ideais, principalmente no caso de anéis noetherianos, depois introduzimos brevemente a noção de localização de um anel. Além disso, discutimos o completamento de um anel mediante topologias I-ádicas. Destacamos a independência do tratamento deste tópico em relação às abordagens da literatura em geral.

A última seção do Capítulo 1 trata da teoria de módulos e é dividida em 6 partes. Primeiro fixamos notações e apresentamos alguns resultados que em geral são bem conhecidos. Na segunda subseção nos dedicamos a demonstrar o Teorema de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya, o qual é útil para obter boas propriedades sobre somas diretas de módulos injetivos. As seguintes três subseções tratam de módulos injetivos onde, provamos somente os resultados que consideramos mais relevantes. Na última subseção construímos o limite direto de qualquer família de submódulos. Isto foi feito com a finalidade de dar uma caracterização mais categórica dos anéis noetherianos via módulos injetivos para, desta maneira, notar que as categorias de A-módulos contém uma informação valiosa sobre o anel base.

O Capítulo 2 está dividido em 3 seções, onde cada uma dessas corresponde ao estudo de cada uma das primeiras três seções de [16]. Na primeira parte tratamos alguns resultados iniciais sobre módulos injetivos, assim como de módulos que contém um módulo injetivo maximal. Aqui destacamos o Teorema 2.1.2 onde se nota, assim como no decorrer da segunda seção deste Capítulo, a importância de impor condições de noetherianidade sobre o anel para se estudar os módulos injetivos. Na segunda seção estudamos os módulos injetivos indecomponíveis, onde se evidencia que estes são fechos injetivos de certos tipos de módulos. Mostramos também que todo módulo injetivo sobre um anel noetheriano tem uma decomposição em soma direta de módulos injetivos indecomponíveis, o qual é fundamental para a abordagem da terceira subseção.

Na terceira parte do Capítulo 2, estudamos os módulos injetivos indecomponíveis sobre condições de noetherianidade e comutatividade do anel base. Começamos com um dos resultados mais destacáveis deste trabalho, isto é, mostramos que um módulo injetivo indecomponível se corresponde biunivocamente a menos isomorfismo de módulos, com um ideal primo, definido como o radical do anulador de qualquer elemento não nulo do módulo. Depois, no Teorema 2.3.6, se evidencia que algumas características particulares do p-grupo de Prüfer $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ são satisfeitas mais geralmente pelos módulos injetivos indecomponíveis. Destacamos também que, dado um A-módulo $E = E(\frac{A}{P})$, onde P é um ideal primo de A, podemos definir naturalmente estruturas de A_p e $\hat{A}_p$ módulo sobre E, de modo que o fecho injetivo destes anéis quocientado pelo seu respectivo ideal maximal é, a menos isomorfismo, igual a E, de onde obtemos que o anel de endomorfismos de E é isomorfo ao anel (comutativo!) $\hat{A}_p$.

Com base no que expusemos acima, no Capítulo 3, quando (A, P) é um anel local, comutativo, noetheriano e completo obtemos que o reticulado de submódulos de A^n e o reticulado dos submódulos de E^n são anti-isomorfos. A partir disto, obtemos um tipo de dualidade, atualmente chamada dualidade de Matlis, entre os conceitos de módulos noetherianos e módulos artinianos. Desta forma, mostramos que a correspondência dada por Matlis mediante o funtor contravariante $Hom_A(\_, E(\frac{A}{P}))$ entre os objetos das categorias $\mathfrak{Noether}(A)$ e $\mathfrak{Artin}(A)^{op}$ é também satisfeita pelos morfismos destas categorias e por conta disso as categorias são equivalentes.

Capítulo 1

Categorias, Anéis e Módulos

Dividimos este capítulo em três seções, a saber, introdução a teoria de categorias, anéis e módulos. Na introdução de cada seção, assim como em cada subseção, falamos um pouco dos temas que serão tratados, para que, desta forma, o leitor decida fazer, ou não, a leitura da mesma.

1.1 Introdução à Teoria de Categorias

A teoria de categorias fornece-nos um panorama global sobre uma grande variedade de conceitos que aparecem naturalmente em várias áreas da matemática. O propósito desta seção é citar algumas definições básicas da teoria de categorias, as quais serão úteis no desenvolvimento deste trabalho. Exemplos dos conceitos aqui referidos aparecerão no decorrer do texto. Para mais detalhes, recomendamos [15].

Definição 1.1.1. *Uma categoria $\mathfrak{C}$ consiste em:*

1. *Uma coleção $Ob(\mathfrak{C})$ de objetos.*

2. *Uma coleção de $\mathfrak{C}$-morfismos entre cada par de objetos. Assim, se $a, b \in Ob(\mathfrak{C})$, denotamos a coleção de $\mathfrak{C}$-morfismos entre a e b por $Hom_{\mathfrak{C}}(a, b)$. Escrevemos,*

$f : a \to b$ para significar que $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(a, b)$.

3. *Para cada objeto $a \in Ob(\mathfrak{C})$ existe um morfismo $1_a \in Hom_{\mathfrak{C}}(a, a)$, ao qual chamamos morfismo identidade de a.*

4. *Uma operação parcial de composição $\circ$ sobre a coleção dos morfismos entre os objetos de $\mathfrak{C}$, que satisfaz os seguintes axiomas:*

   a. *Se $f : b \to c$ e $g : a \to b$ então $f \circ g$ esta definida e pertence a $Hom_{\mathfrak{C}}(a, c)$.*

   b. *Para todo $a \in Ob(\mathfrak{C})$, todo morfismo $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(a, b)$ e todo morfismo $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(c, a)$, 1_a satisfaz $f \circ 1_a = f$ e $1_a \circ g = g$.*

   c. *Para todo $f : b \to c$, $g : a \to b$ e $h : c \to d$, $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$.*

Em geral, escrevemos fg para denotar $f \circ g$. Dizemos que um $\mathfrak{C}$-morfismo $f : a \to b$ é um isomorfismo se existe um $\mathfrak{C}$-morfismo $g : b \to a$ tal que $fg = 1_b$ e $gf = 1_a$.

Denotamos a categoria dos conjuntos por $\boldsymbol{\mathcal{S}et}$ e a categoria dos grupos abelianos por $\boldsymbol{\mathcal{A}b}$. Na primeira seus objetos são os conjuntos e seus morfismos são as funções entre conjuntos, na segunda seus objetos são os grupos abelianos e seus morfismos são os homomorfismos de grupos abelianos.

A noção de funtor fornece a possibilidade da comunicação entre duas categorias.

Definição 1.1.2. *Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ duas categorias. Um funtor covariante $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ consiste em:*

1. *Uma função de $Ob(\mathfrak{C})$ em $Ob(\mathfrak{D})$, isto é, para cada $c \in Ob(\mathfrak{C})$ denotamos sua imagem por $F(c) \in Ob(\mathfrak{D})$.*

2. *Uma função de* $Hom_{\mathfrak{C}}(a,b)$ *em* $Hom_{\mathfrak{D}}(F(a),F(b))$*, para todo par de* $\mathfrak{C}$*-objetos* a,b*, isto é, se* $f : a \to b$ *denotamos sua imagem por* $F(f) : F(a) \to F(b)$*.*

3. *Para todo* $c \in Ob(\mathfrak{C})$*, temos* $F(1_c) = 1_{F(c)}$*.*

4. *Se* $f \circ g$ *está definida em* $\mathfrak{C}$ *então,* $f \circ g \mapsto F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$*.*

Definição 1.1.3. *Sejam dois funtores covariantes* $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$*. Uma transformação natural* $\tau : F \to G$ *é uma função que corresponde, a cada objeto* $c \in Ob(\mathfrak{C})$*, um morfismo* $\tau_c : F(c) \to G(c)$ *tal que, para qualquer morfismo* $f : a \to b$ *em* $\mathfrak{C}$*, o diagrama a seguir é comutativo*

$$\begin{tikzcd} G(a) \arrow[r, "G(f)"] & G(b) \\ F(a) \arrow[u, "\tau_a"] \arrow[r, "F(f)"] & F(b) \arrow[u, "\tau_b"'] \end{tikzcd}$$

Neste caso dizemos que os morfismos τ_c são as componentes de τ. Além disso, se cada uma das componentes de τ é um isomorfismo então dizemos que τ é um isomorfismo natural e que os funtores são isomorfos. Notamos que se $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ e $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{F}$ são funtores covariantes então obtemos um novo funtor $GF : \mathfrak{C} \to \mathfrak{F}$, tal que cada objeto $c \in Ob(\mathfrak{C})$ se corresponde com $G(F(c)) \in Ob(\mathfrak{F})$ e cada morfismo $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(a,b)$ com $G(F(f)) \in Hom_{\mathfrak{F}}(G(F(a)), G(F(b)))$. Dada qualquer categoria $\mathfrak{C}$ denotamos por $1_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ ao funtor identidade, que esta definido por $1_{\mathfrak{C}}(c) = c$ e $1_{\mathfrak{C}}(f) = f$, para todo objeto c e todo morfismo f em $\mathfrak{C}$.

Definição 1.1.4. *Dizemos que duas categorias* $\mathfrak{C}$*,* $\mathfrak{D}$ *são equivalentes se existem dois funtores* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *e* $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ *tais que* FG *é isomorfo a* $1_{\mathfrak{D}}$*, e* GF *é isomorfo a* $1_{\mathfrak{C}}$*.*

Dada uma categoria qualquer $\mathfrak{C}$, podemos obter uma nova "revertendo" os morfismos, isto é, a categoria $\mathfrak{C}^{op}$ onde seus objetos são os mesmos de $\mathfrak{C}$ e os morfismos são da forma $f^{op} : b \to a$, onde $f : a \to b$. A composição em $\mathfrak{C}^{op}$ é denotada $\circ^{op}$ e esta definida pela seguinte relação: $(g \circ h)^{op} = h^{op} \circ^{op} g^{op}$, onde $g : b \to c$ e $h : a \to b$. Esta categoria é chamada a categoria oposta de $\mathfrak{C}$; Se F é um funtor covariante entre as categorias $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}^{op}$ então dizemos que F é um funtor contravariante entre $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$, e escrevemos $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$.

1.2 Anéis

Nesta seção tratamos os tópicos necessários da teoria de anéis, para a leitura do próximo capítulo, isto é, falamos de decomposição primária, localização e completamento de anéis. Em todo o trabalho, A sempre denotará um anel com um unidade. Como é usual, denotamos o produto de elementos do anel simplesmente pela concatenação destes.

Definição 1.2.1. ([17], Teorema 1.4) *Um anel A é chamado noetheriano (à esquerda) se satisfaz-se alguma das seguintes condições equivalentes:*

1. *Toda cadeia ascendente de ideais (à esquerda) de A é estacionária;*
2. *Todo ideal (à esquerda) de A é finitamente gerado;*
3. *Toda família não-vazia de ideais (à esquerda) de A, possui pelo menos um elemento maximal.*

Definição 1.2.2. *Um anel A é chamado artiniano (à esquerda) se toda cadeia descendente de ideais (à esquerda) de A é estacionária. Equivalentemente, se toda família não vazia de ideais (à esquerda) de A possui elemento minimal.*

Teorema 1.2.3. *Se A é um anel comutativo e artiniano então todo ideal primo de A é maximal.*

Demonstração. Seja P um ideal primo de A. Como A é artiniano, segue que $\frac{A}{P}$ é um domínio artiniano. Assim, para qualquer x não nulo em $\frac{A}{P}$ temos a sequência

$$(x) \supseteq (x^2) \supseteq (x^3) \supseteq ...$$

a qual deve estacionar, isto é, existe n tal que $(x^n) = (x^{n+1})$. Logo, existe $y \in \frac{A}{P}$ tal que $x^n = x^{n+1}y$. Como $\frac{A}{P}$ é um domínio temos que $1 = xy$. Logo, $\frac{A}{P}$ é um corpo, Portanto, P é um ideal maximal. $\square$

O conjunto das unidades do anel A será denotado por $\mathcal{U}(A)$.

Definição 1.2.4. *Um anel comutativo A é chamado local se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:*

1. $\mathcal{M} = A \setminus \mathcal{U}(A)$ *é um ideal de* A*;*

2. A *tem um único ideal maximal;*

3. *Se* $a + b \in \mathcal{U}(A)$ *então* $a \in \mathcal{U}(A)$ *ou* $b \in \mathcal{U}(A)$.

A prova destas equivalências, segue da observação que $\mathcal{M}$ é o único ideal maximal de A e que todo elemento não invertível de A está contido num ideal maximal de A. Escrevemos $(A, \mathcal{M})$ para denotar que A é um anel local cujo único ideal maximal é $\mathcal{M}$.

Proposição 1.2.5. ([14], Proposição 19.2) *Se $(A, \mathcal{M})$ é um anel local, então A não contém elementos idempotentes não triviais.*

Proposição 1.2.6. ([17], Proposição 4.2.1) *Sejam I e J ideais de um anel local $(A, \mathcal{M})$ tais que $I \subseteq J + I\mathcal{M}$. Então $I \subseteq J$.*

Sejam I_1 e I_2 dos ideais à esquerda de A. Definimos o quociente residual de I_1 e I_2 como sendo, $I_1 : I_2 = \{x \in A \mid xI_2 \subseteq I_1\}$.

Proposição 1.2.7. ([17], Proposição 1.1) *Sejam I_1, I_2, I_3 três ideais de A. Então:*

1. $I_1 \subseteq I_1 : I_2$.

2. $(I_1 : I_2) : I_3 = I_1 : (I_2 I_3)$.

3. $(\bigcap I_i) : I = \bigcap (I_i : I)$.

Sejam X um conjunto não vazio, $*$ uma operação associativa definida em X e $\{x_1, ..., x_n\}$ um conjunto finito de elementos de X. Usamos a notação $x_1 * x_2 * ... * \hat{x}_i * ... * x_n$ para denotar $x_1 * x_2 * ... * x_{i-1} * x_{i+1} * ... * x_n$.

1.2.1 Decomposição Primária de Ideais

O objetivo desta subseção é discutir algumas propriedades interessantes dos ideais de anéis noetherianos que nos serão úteis. Na primeira parte definimos conceitos básicos de ideais primários. Depois mostramos que todo ideal de um anel noetheriano tem uma decomposição primária e finalmente definimos a i-ésima potência prima de um ideal primo de um anel noetheriano. No decorrer desta subseção A denotará um anel comutativo.

Como é usual, definimos o espectro de A como o conjunto de todos os ideais primos de A, o qual denotamos por $Spec(A)$.

Definição 1.2.8. *Seja I um ideal de A. Definimos o ideal radical de I como $rad(I) = \{x \in A \mid \exists n > 0, x^n \in I\}$.*

Definição 1.2.9. *Um ideal $I \neq A$ é chamado primário se sempre que $a \cdot b \in I$ e $a \notin I$ então $b \in rad(I)$.*

Proposição 1.2.10. ([17], Proposição 1.5.3) *Se I é primário então $rad(I)$ é um ideal primo.*

Se I é um ideal primário com ideal radical P, então dizemos que I é um ideal P-primário. Neste caso, é útil notar que P é o menor ideal primo que contém I.

Definição 1.2.11. *Uma coleção finita $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, ..., I_n\}$ de ideais de A é uma decomposição de um ideal I se $I = \bigcap\limits_{I_i \in \mathcal{F}} I_i$. Se além disso, cada ideal I_i na decomposição é um ideal primário então dizemos que a decomposição é primária.*

Exemplo 1.2.12. ([1], Pag. 52) *Sejam K um corpo e $A = K[x, y]$. A coleção de ideais $\{\langle x \rangle, \langle x, y \rangle^2\}$ de A é uma decomposição primária do ideal $\langle x^2, xy \rangle$.*

Na definição anterior dizemos que os elementos de $\mathcal{F}$ são as componentes da decomposição. Além disso, dada uma decomposição primária de I, dizemos que I_i é a componente P_i-primária para denotar que $P_i = rad(I_i)$, com I_i na decomposição; No caso em que A não for comutativo, define-se analogamente uma decomposição de um ideal à esquerda.

Definição 1.2.13. *Uma decomposição $\{I_1, I_2, ..., I_n\}$ de um ideal I é dita irredundante se a interseção $I_1 \cap I_2 \cap ... \cap \hat{I_i} \cap ... \cap I_n$ não está contida em I_i, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Notamos que dada uma decomposição primária de um ideal sempre podemos refinar esta, até obter uma decomposição primária irredundante.

Teorema 1.2.14. ([17], Teorema 1.6.1) *Seja $\{I_1, ..., I_n\}$ uma decomposição primária de um ideal I, onde cada ideal I_i é P_i-primário. Se P é um ideal primo que contém I então ele deve conter pelo menos um dos P_i. Além disso, $rad(I) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} rad(I_i)$.*

Definição 1.2.15. *Uma decomposição* $\{I_1, ..., I_n\}$ *irredundante de um ideal* I *de* A *é dita normal se cada ideal* I_i *é* P_i*-primário e é tal que* $P_i \neq P_j$*, para todo* $i \neq j$.

Pelo Teorema 1.2.14 segue que toda decomposição primária e irredundante de um ideal I pode ser refinada até obter uma normal. Isto se faz juntando a interseção das componentes que tem o mesmo radical. Portanto, se temos uma decomposição primária de um ideal podemos obter uma decomposição normal do ideal.

Teorema 1.2.16. ([1], Teorema 4.5) *O número de componentes de qualquer decomposição normal de um ideal* I *está bem definido. Além disso, o conjunto dos radicais das componentes de qualquer decomposição normal de* I *é sempre o mesmo.*

A segunda parte do teorema diz que o conjunto $\{P_1, ..., P_n\}$ dos radicais das componentes de uma decomposição normal de um ideal I não depende da decomposição normal escolhida. Neste sentido dizemos que cada um dos P_i pertence ao ideal I. Dizemos que um subconjunto $\mathfrak{F}$ de $\{P_1, ..., P_n\}$ é um conjunto isolado de primos do ideal I, se ele só contém ideais primos minimais de I.

Agora nos propomos definir a i-ésima potência prima de um ideal primo P de A. Dizemos que um subconjunto $S \subseteq A$ é um conjunto multiplicativo de A, se ele é fechado para a multiplicação de A.

Definição 1.2.17. *Sejam* I *um ideal de* A *e* S *um conjunto multiplicativo de* A. *Chamamos de* S*-saturamento de* I *ao ideal* $IS^{-1} = \{a \in A \mid \text{existe } s \in S \text{ com } sa \in I\}$.

Proposição 1.2.18. *Sejam* S *um conjunto multiplicativo de* A *e* $\{I_1, ..., I_n\}$ *uma decomposição primária de um ideal* I *de* A*, tal que cada* I_i *é* P_i*-primário. Se* $m \leq n$ *é tal que* $P_j \cap S = \emptyset$ *e* $P_k \cap S \neq \emptyset$*, para todo* $j = 1, ..., m$ *e todo* $k = m + 1, ..., n$*, então* $IS^{-1} = I_1 \cap ... \cap I_m$.

Demonstração. Seja $x \in IS^{-1}$. Então existe $s \in S$ tal que $sx \in I$. Assim, $sx \in I_1 \cap ... \cap I_m$ e $s \notin P_1 \cup ... \cup P_m$. Desta maneira, como $I_1, ..., I_m$ são ideais primários temos que $x \in I_1 \cap ... \cap I_m$, ou seja, $IS^{-1} \subseteq I_1 \cap ... \cap I_m$. Por outro lado, sejam $x \in I_1 \cap ... \cap I_m$ e $c_k \in P_k \cap S$, para $k = m+1, ..., n$. Pela primalidade dos I_k, existe um N suficientemente grande tal que $(c_{m+1}...c_n)^N \in I_{m+1} \cap ... \cap I_n$, e consequentemente, $x(c_{m+1}...c_n)^N \in I$. Como $(c_{m+1}...c_n)^N \in S$ concluímos que $x \in IS^{-1}$. Portanto, $IS^{-1} = I_1 \cap ... \cap I_m$. □

Proposição 1.2.19. *Seja $\{Q_1, ..., Q_n\}$ uma decomposição primária irredundante de um ideal I e $\mathfrak{F} = \{P_{i_1}, ..., P_{i_r}\}$ um conjunto isolado de primos que pertencem a I. Então, $Q_{i_1} \cap ... \cap Q_{i_r}$ não depende da decomposição primária irreduntante tomada.*

Demonstração. Seja o conjunto multiplicativo $S = A \setminus \bigcup \mathfrak{F}$. Consideremos um primo $P_j = rad(Q_j)$ tal que $P_j \notin \mathfrak{F}$. Como $\mathfrak{F}$ é um conjunto isolado de primos segue que $P_j \nsubseteq \bigcup \mathfrak{F}$, isto é, $P_j \cap S \neq \emptyset$. Consequentemente, pela proposição anterior, $IS^{-1} = Q_{i_1} \cap ... \cap Q_{i_r}$. □

Corolário 1.2.20. *Sejam I um ideal que possui uma decomposição primária e P um primo minimal do ideal I. Então, a componente P-primária de I é a mesma para qualquer decomposição primária irredundante de I.*

Agora nos dispomos a mostrar que todo ideal de um anel noetheriano possui uma decomposição primária cujas componentes são ideais irredutíveis.

Definição 1.2.21. *Um ideal J (à esquerda) de A é dito irredutível se não existem ideais (à esquerda) K e L contendo propriamente J e tais que $K \cap L = J$.*

Lema 1.2.22. *Todo ideal de um anel noetheriano é interseção finita de ideais irredutíveis.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ a família de todos os ideais de A que não são interseção finita de ideais irredutíveis. Suponhamos que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Como A noetheriano, existe um ideal maximal $I \in \mathcal{C}$. Assim, I não é irredutível, pois ele não é interseção finita de ideais irredutíveis. Desta maneira, existem ideais S e T contendo propriamente I tais que $I = S \cap T$. Da maximalidade de I segue que S e T não pertencem à família $\mathcal{C}$, ou seja, S e T são interseção finita de ideais irredutíveis de A. Desta forma, $I = S \cap T$ também é uma interseção finita de ideais irredutíveis de A, o que contradiz a suposição inicial de A. □

Lema 1.2.23. *Todo ideal irredutível de um anel noetheriano é primário.*

Demonstração. Suponhamos que I é um ideal irredutível mas não primário de A. Assim, existem $a,\ b \in A$ tais que $ab \in I$, $a \notin I$ e $b \notin rad(I)$. Então, pela Proposição 1.2.7 obtemos que $I \subsetneq I : (b)$ e $I : (b^n) \subseteq (I : (b^n)) : (b) = I : (b^{n+1})$. Desta forma obtemos a cadeia

$$I \subsetneq I : (b) \subseteq I : (b^2) \subseteq \ldots ,$$

a qual é estacionária, pois A é noetheriano. Desta maneira, existe n tal que, para qualquer $m \geq n$, temos que $I : (b^n) = I : (b^m)$. Como nenhuma potência de b pertence a I, então $I : (b^n)$ e $I + (b^n)$ contém propriamente I. Logo, se provarmos que $I = (I : (b^n)) \cap (I + (b^n))$, teríamos uma contradição, pois I é irredutível. De fato, seja $x \in (I : (b^n)) \cap (I + (b^n))$. Então $x = i + cb^n$, onde $i \in I$ e $c \in A$, e temos que, $xb^n = ib^n + cb^{2n} \in I$, logo $cb^{2n} = xb^n - ib^n \in I$. Isto é $c \in I : (b^{2n}) = I : (b^n)$. Portanto $x = i + cb^n \in I$, ou seja, $(I : (b^n)) \cap (I + (b^n)) \subseteq I$. A outra contenção é evidente. Isto finaliza nossa demonstração. □

Teorema 1.2.24. *Todo ideal de um anel noetheriano possui pelo menos uma de-*

composição primária de ideais irredutíveis.

Demonstração. Segue imediatamente dos lemas 1.2.22 e 1.2.23. □

A seguinte definição faz sentido pelo corolário 1.2.20, pois se P é um ideal primo, então P é um primo minimal de P^i. Veremos, no Capítulo 2, que a i-ésima potência simbólica prima de um ideal primo é justamente o anulador de certos submódulos dos módulos injetivos indecomponíveis.

Definição 1.2.25. *Seja P um ideal primo de um anel noetheriano A. A i-ésima potência simbólica prima $P^{(i)}$ de P é a componente P-primária do ideal P^i em qualquer decomposição irredutível de P^i.*

Proposição 1.2.26. *Seja I um ideal de um anel noetheriano A. Então, existe uma potência do $rad(I)$ contida em I.*

Demonstração. Como A é um anel noetheriano segue que $rad(I) = (b_1, ..., b_n)$, com $b_i \in A$. Então existem naturais m_i tais que $b_i^{m_i} \in I$. Seja $m = m_1 + ... + m_n$, e notamos que $rad(I)^m$ é gerado pelos elementos da forma $b_1^{k_1}...b_n^{k_n}$ onde $k_1 + ... + k_n = m$. Segue facilmente, por um argumento indutivo, que existe pelo menos um $k_i \geq m_i$. Logo, os elementos da forma $b_1^{k_1}...b_n^{k_n} \in I$ e portanto, $rad(I)^m \subseteq I$. □

Corolário 1.2.27. *Se A é um anel noetheriano, então o ideal nulo é produto de ideais primos de A.*

Demonstração. Seja uma decomposição primária $\{I_1, ..., I_n\}$ do ideal nulo. Pela proposição anterior, temos que para cada i existe um natural k_i tal que $rad(I_i)^{k_i} \subset I_i$. Logo, existe k tal que $(rad(I_1)...rad(I_n))^k \subseteq I_1 \cap ... \cap I_n = 0$. □

1.2.2 Localização

Nesta seção A denota um anel comutativo. Dizemos que um subconjunto $S \subseteq A$ de um anel A é um sistema multiplicativo se ele é um conjunto multiplicativo tal que $1 \in S$ e $0 \notin S$. No conjunto $A \times S$ definimos a seguinte relação de equivalência:

$$(a, s) \equiv (b, t) \text{ se e somente se existe } u \in S \text{ tal que } (at - bs)u = 0.$$

No que segue, as classes de equivalência serão denotadas por $\frac{a}{b}$. O conjunto $S^{-1}A = (S \times A)/\equiv$ pode ser munido de uma estrutura de anel, basta definir, $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+sb}{st}$ e $\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$. É fácil verificar que estas operações estão bem definidas e que $(S^{-1}A, +, \cdot)$ é um anel. Dizemos que $S^{-1}A$ é a localização de A em S. Definimos o homomorfismo $i_{S^{-1}A} : A \to S^{-1}A$ por $x \mapsto \frac{x}{1}$.

Proposição 1.2.28. *Se A é noetheriano, então $S^{-1}A$ também é noetheriano.*

Demonstração. Seja I um ideal de $S^{-1}A$, vamos mostrar que I é finitamente gerado. De fato, como A é noetheriano temos que o ideal $i_{S^{-1}A}^{-1}(I)$ é gerado por um conjunto finito $\{x_1, ..., x_n\}$ de elementos de $i_{S^{-1}A}^{-1}(I)$. Notamos que I é gerado por $\{\frac{x_1}{1}, ..., \frac{x_n}{1}\}$ pois para cada $\frac{a}{s} \in I$ temos que $a = a_1x_1 + ... + a_nx_n$. Logo $\frac{a}{s} = \frac{a_1}{s}\frac{x_1}{1} + ... + \frac{a_1}{s}\frac{x_n}{1}$, onde $\frac{a_i}{s} \in S^{-1}A$. □

Exemplo 1.2.29. *Sejam P um ideal primo de A e o sistema multiplicativo $S = A \setminus P$. Neste caso denotamos por A_p o anel $S^{-1}A$, e dizemos que A_p é a localização de A em P. E fácil ver que $PA_p = \{\frac{p}{s} \in A_p \mid p \in P\}$ é o único ideal maximal de A_p. Assim (A_p, PA_p) é um anel local. Além disso, se A é noetheriano, então A_p é um anel comutativo, noetheriano e local.*

1.2.3 Completamento

Nesta subseção estudamos o completamento de um anel comutativo mediante sequências de Cauchy. Para mais detalhes, recomendamos [9] . Aqui A denotará um anel comutativo. Lembramos que a interseção de todos os ideais maximais de A é chamado o radical de Jacobson de A, o qual será denotado por $J(A)$.

Definição 1.2.30. *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de A. Uma sequência (a_n) de elementos do anel A é dita convergente em relação a topologia $\mathcal{I}$-ádica, se existe $a \in A$ tal que, para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $i(N) \in \mathbb{N}$, satisfazendo $a_n - a \in \mathcal{I}^N$, para todo $n \geq i(N)$.*

A partir de agora, usaremos a notação $i(N)$ para indicar um caso como na definição anterior. O seguinte resultado, que corresponde ao Teorema da intersecção de Krull no caso de Anéis, é essencial para mostrar a unicidade do limite de sequências de elementos de A. Uma prova simples deste, que só precisa do Teorema da base de Hilbert e o lema de Nakayama, se encontra em [19].

Teorema 1.2.31. ([19], Teorema 4.9) *Seja A um anel noetheriano e I um ideal contido em $J(A)$. Então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^n = 0$.*

Corolário 1.2.32. *Sejam A um anel noetheriano e I um ideal contido em $J(A)$. Então, o limite de uma sequência convergente em relação a topologia $\mathcal{I}$-ádica é único.*

Demonstração. Segue da Proposição 1.2.31. □

Definição 1.2.33. *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de A. Uma sequência (a_n) é chamada sequência de Cauchy em relação a topologia $\mathcal{I}$-ádica, se dado $N \in \mathbb{N}$, existe um natural $i(N)$, tal que $a_n - a_m \in \mathcal{I}^N$, para todo $n, m \geq i(N)$.*

No conjunto de todas as sequências de Cauchy de elementos de A, em relação a topologia $\mathcal{I}$-ádica, definimos a seguinte relação de equivalência: dizemos que duas sequências (x_n) e (y_n) estão relacionadas, ou que são equivalentes, se a sequência $(x_n - y_n)$ converge para 0. Denotamos o conjunto quociente por $\hat{A}$ e definimos em $\hat{A}$ uma estrutura de anel como segue: para todo par de classes de sequências $[(x_n)], [(y_n)] \in \hat{A}$,

1. $[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$.

2. $[(x_n)][(y_n)] = [(x_n y_n)]$.

É fácil verificar que estas operações estão bem definidas e que de fato $\hat{A}$ é um anel. Dizemos que o anel $(\hat{A}, +, \cdot)$ é o completamento do anel A em relação a topologia $\mathcal{I}$-ádica.

Exemplo 1.2.34. *Seja A um anel qualquer. Então o completamento do anel $A[x]$ em relação a topologia $\langle x \rangle$-ádica é isomorfo ao anel das séries formais $A[[x]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in A\}$. De fato, seja a aplicação $\phi : A[[x]] \to \widehat{A[x]}$ definida por $\phi(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i) = [(a_0, a_0 + a_1 x, a_0 + a_1 x + a_2 x^2, ...)]$, notamos que esta sequência é de Cauchy. Isto é, dado $0 \neq N \in \mathbb{N}$ temos que $\sum_{i=0}^{m} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \langle x^N \rangle$, para todo $m, n \geq N-1$. Notamos que também é fácil ver que ϕ é um homomorfismo de anéis. Agora vamos mostrar que ϕ é injetiva, consideremos as séries formais $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ e $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ tais que $\phi(f(x)) = \phi(g(x))$. Então, $(a_0 - b_0, a_0 + a_1 x - (b_0 + b_1 x), a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - (b_0 + b_1 x + b_2 x^2), ...)$ converge para zero. Assim, para todo $N \in \mathbb{N}$ existe um número natural $i(N)$ tal que $\sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) x^i \in \langle x^N \rangle$, para todo $n \geq i(N)$, e segue que, $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{N-1} x^{N-1} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_{N-1} x^{N-1}$, o qual quer dizer que $f(x) = g(x)$. Assim, ϕ é um monomorfismo. Seja agora uma sequência de Cauchy $(p_n(x))_n$, a partir desta tomamos a subsequência $(p_{i(n)}(x))_n$, que evidentemente é de Cauchy e é equivalente a sequência inicial. Definimos desta* *forma a série infinita* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, *onde os termos* c_i *são definidos como o coeficiente de* x^i *do polinômio* $p_{i(n)}(x)$. *Logo,* $\phi(\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i) = (c_0, c_0 + c_1 x, c_0 + c_1 x + c_2 x^2, \ldots)$ *que é equivalente a sequência* $(p_{i(n)}(x))_n$.

Definição 1.2.35. *Seja* $\hat{A}$ *o completamento de* A *em relação a topologia* $\mathcal{I}$*-ádica. Definimos o seguinte ideal de* $\hat{A}$

$$\hat{\mathcal{I}} = \{x \in \hat{A} \mid \textit{existe } (x_n) \in x \textit{ com } x_n \in \mathcal{I}, \textit{para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Da definição anterior, segue que para todo número natural k,

$$\hat{\mathcal{I}}^k = \{x \in \hat{A} \mid \text{existe } (x_n) \in x \text{ com } x_n \in \mathcal{I}^k, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Notamos que se $[(x'_n)] \in \hat{\mathcal{I}}^k$ então existe N tal que $x'_n \in \mathcal{I}^k$, para todo $n \geq N$. Assim, temos, consequentemente, o lema a seguir.

Lema 1.2.36. *Com as notações acima, se* $[(x_n)], [(y_n)] \in \hat{\mathcal{I}}^k$, *então, existe um número natural* M *tal que* $x_n - y_n \in \mathcal{I}^k$, *para todo* $n \geq M$.

Em uma linguagem mais geral, a proposição a seguir mostra que se a topologia $\mathcal{I}$-ádica de um anel A é Hausdorff então o completamento do anel mediante esta topologia também é Hausdorff.

Proposição 1.2.37. *Se* $\mathcal{I}$ *é um ideal de* A *tal que* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^n = 0$, *então o ideal* $\hat{\mathcal{I}}$ *do completamento do anel* A *em relação a topologia* $\mathcal{I}$*-ádica é tal que* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \hat{\mathcal{I}}^n = 0$.

A demonstração é imediata da definição 1.2.35. De acordo com a noção topológica, faremos a seguinte definição:

Definição 1.2.38. *Dizemos que um anel* A *é completo em relação a topologia* $\mathcal{I}$*-ádica, se todas as sequências de Cauchy são convergentes em* A.

Teorema 1.2.39. *O completamento de um anel A em relação a topologia $\mathcal{I}$-ádica é um anel completo em relação a topologia $\hat{\mathcal{I}}$-ádica.*

Demonstração. Seja $([\hat{a}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\hat{A}$. Então, cada termo desta sequência é uma classe de sequências de Cauchy em A. Para evitar confusão, adotamos as seguintes notações: se $([\hat{a}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\hat{A}$, escreveremos $\hat{a}_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, ...)$, onde $a_j^{(n)}$ significa a j-ésima entrada da sequência $\hat{a}_n$. Fixamos os representantes destas classes de modo que satisfaçam a seguinte propriedade:

$$\hat{a}_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, ...) \text{ é tal que } a_k^{(n)} - a_j^{(n)} \in \mathcal{I}^k, \text{ para todo } j \geq k.$$

Como $(\hat{a}_n)$ é de Cauchy, então dado $N \in \mathbb{N}$, existe $i(N)$ tal que

$$(\hat{a}_m) - (\hat{a}_n) \in \hat{\mathcal{I}}^N, \text{ para todo } m, n \geq i(N),$$

ou seja, para cada par $m, n \geq i(N)$ existe N_1 tal que $a_{N_2}^{(m)} - a_{N_2}^{(n)} \in \mathcal{I}^N$, para todo $N_2 \geq N_1$. Definimos então a sequência,

$$\hat{b} = (a_1^{(1)}, a_2^{(2)}, ..., a_l^{(l)}, ...)$$

Mostramos agora que $\hat{b}$ é uma sequência de Cauchy em relação a topologia $\mathcal{I}$-ádica. De fato, sejam $m, n \geq max\{i(N), N\}$, Então temos que

$$a_m^{(m)} - a_{l_1}^{(m)} \in \mathcal{I}^N, \text{ para todo } l_1 \geq N.$$

$$a_{l_2}^{(n)} - a_n^{(n)} \in \mathcal{I}^N, \text{ para todo } l_2 \geq N.$$

escolhamos $N_3 \geq max\{N_1, N\}$ e segue que, para todo $n, m \geq max\{i(N), N\}$,

$$a_m^{(m)} - a_n^{(n)} = (a_m^{(m)} - a_{N_3}^{(m)}) + (a_{N_3}^{(m)} - a_{N_3}^{(n)}) + (a_{N_3}^{(n)} - a_n^{(n)}) \in \mathcal{I}^N.$$

Assim, $\hat{b}$ é uma sequência de Cauchy em relação a topologia $\mathcal{I}$-ádica. Notamos que $(\hat{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\hat{b}$. Dado N' sabemos que $a_n^{(n)} - a_k^{(n)} \in \mathcal{I}^{N'}$, para todo $k, n \geq N'$. Desta maneira $\hat{b} - \hat{a}_n \in \hat{\mathcal{I}}^{N'}$, para todo $n \geq N'$. Logo, $(\hat{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\hat{b}$. □

Proposição 1.2.40. *Se $(A, \mathcal{P})$ é um anel local então, o completamento de A, em relação a topologia $\mathcal{P}$-ádica, também é um anel local.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\hat{\mathcal{P}}$ é o ideal maximal de $\hat{A}$. De fato, seja $[(x_n)] \notin \hat{\mathcal{P}}$. Como (x_n) é de Cauchy, temos que existe $i(1)$ tal que $x_n - x_m \in \mathcal{P}$, para todo $n, m \geq i(1)$. Se existe $m_1 \geq i(1)$ tal que $x_{m_1} \in \mathcal{P}$, então $x_n \in \mathcal{P}$, para todo $n \geq i(1)$, o que é um absurdo, pois $[(x_n)] \notin \hat{\mathcal{P}}$. Agora consideremos a sequência (y_n) definida como segue:

$$(y_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < i(1) \\ x_n^{-1} & \text{se } n \geq i(1). \end{cases}$$

Vejamos que esta sequência é de Cauchy. Notamos que esta sequência está bem definida pois para $n \geq i(1)$ temos que $x_n \notin \mathcal{P}$, e com x_n é invertível. Além disso, como (x_n) é uma sequência de Cauchy, então dado N, $x_n - x_m \in \mathcal{P}^N$, para todo $n, m \geq i(N)$. Multiplicando esta última expressão por $x_n^{-1}x_m^{-1}$ obtemos, temos que $x_m^{-1} - x_n^{-1} \in \mathcal{P}^N$, para todo $n, m \geq i(N)$. Assim, $(x_n)(y_n)$ é equivalente a sequência constante 1. Ou seja, para $[(x_n)] \notin \hat{\mathcal{P}}$, existe $[(y_n)] \in \hat{A}$ tal que $[(x_n)][(y_n)] = 1$. Portanto, $(\hat{A}, \hat{\mathcal{P}})$ é um anel local. □

Como consequência imediata desta subseção temos que se $(A, \mathcal{P})$ é um anel comutativo, noetheriano e local então o completamento de A em relação a topologia $\mathcal{P}$-ádica é um anel comutativo, local e completo.

1.3 Módulos

Nesta seção trataremos alguns tópicos da teoria dos módulos. Isto é, definimos e enunciamos propriedades elementares de noções como módulos livres, módulos projetivos, módulos planos, módulos injetivos, módulos noetherianos e artinianos e anéis hereditários. Além disso, demonstramos o teorema de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya, o teorema da imersão em um módulo injetivo, assim como as propriedades básicas dos fechos injetivos. Finalmente, na última subseção construímos o limite direto de qualquer família de módulos.

1.3.1 Noções Gerais

Em todo o trabalho diremos que M é um A-módulo, ou simplesmente escrevemos ${}_AM$, para significar que M é um A-módulo unitário à esquerda. A categoria dos A-módulos à esquerda se denota por ${}_A\mathscr{Mod}$. Similarmente denotamos a categoria dos A-módulos à direita por $\mathscr{Mod}_A$. Utilizamos a terminologia usual para denotar as projeções, as identidades e os homomorfismos inclusões, isto é, π, 1_M e i, respectivamente.

Dizemos que um funtor covariante $F : {}_A\mathscr{Mod} \to \mathfrak{C} \subseteq \boldsymbol{Set}$ é exato, se dada qualquer sequência exata curta na categoria ${}_A\mathscr{Mod}$,

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

então, a sequência

$$0 \to F(K) \to F(M) \to F(N) \to 0$$

é exata curta na categoria $\mathfrak{C}$. Define-se analogamente (dualizando o diagrama anterior) um funtor contravariante exato.

Definição 1.3.1. *Dizemos que uma coleção de A-módulos* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ *é uma decomposição de um A-módulo M, se* $M = \bigoplus_{\alpha\in\Omega} M_\alpha$. *Os módulos* M_α *são chamados as componentes desta decomposição. Além disso, dizemos que* $M \neq 0$ *é indecomponível se ele não possui nenhuma decomposição distinta da dada por* $\{M, 0\}$.

Exibimos agora um exemplo de um $\mathbb{Z}$-módulo relevante nesse trabalho, a saber, o p-grupo de Prüfer.

Exemplo 1.3.2. *Fixando um número primo* $p \in \mathbb{Z}$, *definimos o subgrupo aditivo* $P = \{\frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ *do conjunto dos números racionais* $\mathbb{Q}$, *no qual naturalmente* $\mathbb{Z}$ *esta imerso. Assim, dizemos que o grupo quociente*

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \frac{P}{\mathbb{Z}}$$

é o p-grupo de Prüfer. Notamos que neste grupo $\langle \frac{1}{p^n} \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^n}$. *Além disso, temos a seguinte cadeia de subgrupos*

$$\langle \tfrac{1}{p} \rangle \subseteq \langle \tfrac{1}{p^2} \rangle \subseteq \langle \tfrac{1}{p^3} \rangle \subseteq \cdots$$

Mais ainda, $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \langle \frac{1}{p^n} \rangle$.

Um fato notável é que poderíamos definir equivalentemente o conjunto $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ como o limite direto da cadeia

$$0 \subseteq \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Z}_{p^2} \subseteq ...,$$

ver a última seção deste capítulo.

Definição 1.3.3. *Seja S um subconjunto de um módulo* ${}_AM$. *Chamamos o anulador de S ao ideal à esquerda de A, definido por* $ann_l(S) = \{a \in A \mid a \cdot S = 0\}$.

Se $S = \{x\}$ escrevemos $ann_l(x)$. No caso comutativo denotarmos este conjunto simplesmente por $ann(S)$.

Definição 1.3.4. *Sejam R e S anéis. Um (R, S)-bimódulo é um grupo abeliano M que é um R-módulo à esquerda e um S-módulo à direita que satisfaz a seguinte relação $(r \cdot m) \cdot s = r \cdot (m \cdot s)$ para todo $r \in R$, $m \in M$ e $s \in S$.*

Definição 1.3.5. *Um A-módulo M é dito livre se é isomorfo a um A-módulo $\bigoplus_{i \in I} A_i$, onde cada A_i é uma cópia de A e I é algum conjunto índices. Escrevemos, para cada $i \in I$, e_i para denotar o elemento de $A^{(I)}$ que na coordenada i é 1, e nas outras é 0.*

Proposição 1.3.6. *Todo A-módulo M pode ser escrito como um quociente de algum módulo livre.*

Demonstração. Segue do teorema de homomorfismos para módulos aplicado no epimorfismo $f : A^{(M)} \to M$ definido por $f(e_m) = m$. $\square$

Definição 1.3.7. *Um A-módulo M é chamado noetheriano se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:*

1. *Toda cadeia ascendente de submódulos de M é estacionária;*

2. *Todo submódulo de M é finitamente gerado.*

Definição 1.3.8. *Um A-módulo M é chamado artiniano se toda cadeia descendente de submódulos de M é estacionária.*

Proposição 1.3.9. ([7], Proposição 11-3.2) *Seja N um submódulo de M. M é noetheriano (artiniano) se e somente se $\frac{M}{N}$ e N são noetherianos (artinianos).*

Proposição 1.3.10. *Se M é um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano à esquerda, então M é noetheriano.*

Definimos agora o produto tensorial entre módulos. Para mais detalhes a respeito deste conceito, motivamos o leitor interessado ver a seção 4 do Capítulo IV de [11].

Definição 1.3.11. *Sejam M um A-módulo à direita e N um A-módulo à esquerda. Consideramos o grupo abeliano livre $F = A^{(M\times N)}$ e K o subgrupo de F gerado por todos os elementos das seguintes formas: $e_{(m_1+m_2,n_1)} - e_{(m_1,n_1)} - e_{(m_2,n_1)}$, $e_{(m_1,n_1+n_2)} - e_{(m_1,n_1)} - e_{(m_1,n_2)}$, $e_{(m_1a,n_1)} - e_{(m_1,an_1)}$, para todos $m_1, m_2 \in M$, todos $n_1, n_2 \in N$ e todo $a \in A$. Chamamos de produto tensorial entre M e N ao grupo quociente $\frac{F}{K}$, e o denotamos por $M \otimes_A N$. Além disso, denotamos por $m \otimes_A n$ à classe de $e_{(m,n)}$ em $M \otimes_A N$.*

Proposição 1.3.12. ([11], Corolário 5.3) *Sejam os módulos M_A, M'_A, ${}_AN$ e ${}_AN'$, $f : M \to M'$ e $g : N \to N'$ dois homomorfismos de módulos. Então existe um único homomorfismo de grupos $M \otimes_A N \mapsto M' \otimes_A N'$ tal que $m \otimes_A n \mapsto f(m) \otimes_A g(n)$, para todo $m \in M$ e todo $n \in N$.*

O homomorfismo definido na proposição acima é denotado por $f \otimes_A g$. Assim, temos que se N é um A-módulo à direita, então o produto tensorial define um funtor covariante $N \otimes_A \_ : {}_A\mathscr{Mod} \to \boldsymbol{\mathcal{A}b}$.

Teorema 1.3.13. ([11], Teorema 5.5) *Sejam R e A anéis com unidade tais que M é um (R, A)-bimódulo e N um A-módulo à esquerda. Então $M \otimes_A N$ é um R-módulo à esquerda com a ação dada por $r(m \otimes_A n) = rm \otimes_A n$, para todo $r \in R$, $m \in M$ e $n \in N$.*

Notamos que no caso em que A é um anel comutativo, então o grupo abeliano $M \otimes_A N$ é um A-módulo.

Definição 1.3.14. *Um A-módulo à direita P é dito plano se o funtor covariante $P \otimes_A \_$ é exato.*

Definimos agora uma classe especial de módulos planos.

Definição 1.3.15. *Um A-módulo P é chamado projetivo se para qualquer A-epimorfismo $f : N \to M$ e qualquer A-homomorfismo $g : P \to M$ existe um A-homomorfismo $h : P \to N$ que faz o diagrama a seguir comutar*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[ld, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Definição 1.3.16. *Um anel A é dito hereditário à esquerda se seus ideais à esquerda são projetivos.*

Enunciamos agora o próximo resultado sobre anéis nesta seção, pois sua demonstração contém noções de teoria de módulos.

Teorema 1.3.17. *Se A é um anel noetheriano tal que todo ideal primo é maximal, então A é artiniano.*

Demonstração. Pelo Corolário 1.2.27 temos que $0 = M_1...M_n$, onde cada M_i é um ideal maximal de A. Como A é noetheriano então $\frac{M_1...M_{i-1}}{M_1...M_i}$ é um A-módulo noetheriano (com a ação natural), e como $M_i \subseteq Ann\left(\frac{M_1...M_{i-1}}{M_1...M_i}\right)$ então $\frac{M_1...M_{i-1}}{M_1...M_i}$ é um $\frac{A}{M_i}$-espaço vetorial noetheriano, e com isto, $\frac{M_1...M_{i-1}}{M_1...M_i}$ é $\frac{A}{M_i}$-espaço vetorial artiniano. Assim, $\frac{M_1...M_{i-1}}{M_1...M_i}$ é um A-módulo artiniano. Desta forma temos que $M_1...M_{n-1}$ e $\frac{M_1...M_{n-2}}{M_1...M_{n-1}}$ são A-módulos artinianos, decorre então da Proposição 1.3.9que $M_1...M_{n-2}$ e $\frac{M_1...M_{n-3}}{M_1...M_{n-2}}$ são A-módulos artinianos. Consecutivamente, temos que M_1 é um A-módulo artiniano. Analogamente, $\frac{A}{M_1}$ é noetheriano e assim $\frac{A}{M_1}$ é um A-módulo artiniano. Portanto, A é artiniano. $\square$

1.3.2 Teorema de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya

O Teorema de *Krull-Remak-Schmidt-Azumaya* é uma extensão do Teorema de *Krull-Remak-Schmidt*, o qual foi estendido, por Azumaya em [2]. Uma prova curta do Teorema *Krull-Remak-Schmidt* é feito em [14]. Nesta subseção daremos uma prova do Teorema de *Krull-Remak-Schmidt-Azumaya* segundo [7]. A importância deste teorema no trabalho se deve ao fato que sobre anéis noetherianos comutativos saberemos quais são os módulos injetivos indecomponíveis e que todo módulo injetivo pode ser escrito como uma soma direta de módulo injetivos indecomponíveis. Mais explicitamente, por exemplo, se $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Theta}$ e $\{N_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$ são duas coleções diferentes de módulos injetivos indecomponíveis sobre um anel qualquer tais que $card(\Theta) \neq card(\Lambda)$ então a soma direta destas duas coleções são módulos injetivos não isomorfos.

Definição 1.3.18. *Uma decomposição em módulos indecomponíveis de um módulo é dita local se o anel de endomorfismos de cada uma de suas componentes é local.*

Lema 1.3.19. *Se $f : P \to M$ e $g : M \to Q$ são dois A-homomorfismos tais que gf é um isomorfismo, então, $M = im(f) \oplus ker(g)$.*

Demonstração. Seja $y \in im(f) \cap ker(g)$. Então existe $x \in P$ tal que $f(x) = y$ e $0 = g(y) = g(f(x))$. Como gf é um monomorfismo temos que $x = 0$, e segue que $y = 0$. Logo, para cada $m \in M$ temos que $m = f((gf)^{-1}(g(m))) + [m - f((gf)^{-1}(g(m)))]$, onde $m - f((gf)^{-1}(g(m))) \in ker(g)$. □

Lema 1.3.20. *Sejam $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Theta}$ uma decomposição local do A-módulo M e $E = \{h_1, ..., h_m\} \subseteq End_A(M)$ um subconjunto finito tal que $1_M = h_1 + ... + h_m$. Então para qualquer conjunto finito $F = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subseteq \Theta$ tal que $\alpha_i \neq \alpha_j$, sempre que $i \neq j$, existem $f_1, ..., f_n \in E$, onde pode acontecer que $f_i = f_j$ para $i \neq j$, tais que*

$$M = f_1(M_{\alpha_1}) \oplus ... \oplus f_n(M_{\alpha_n}) \oplus [\bigoplus_{\alpha \in \Theta \backslash F} M_\alpha]$$

onde $f_i|_{M_{\alpha_i}}$ *é um isomorfismo sobre sua imagem.*

Demonstração. Seja 1_{α_1} a identidade de M_{α_1}. Então, $1_{\alpha_1} = \pi_{\alpha_1} 1_M i_{\alpha_1} = \pi_{\alpha_1}(h_1 + h_2 + ... + h_m) i_{\alpha_1} = \pi_{\alpha_1} h_1 i_{\alpha_1} + \pi_{\alpha_1} h_2 i_{\alpha_1} + ... + \pi_{\alpha_1} h_m i_{\alpha_1}$. Como $End_A(M_{\alpha_1})$ é um anel local então pelo menos um dos somandos da última igualdade é uma unidade de $End_A(M_{\alpha_1})$. Seja então $f_1 \in E$, tal que $\pi_{\alpha_1} f_1 i_{\alpha_1}$ é um automorfismo de M_{α_1}. Assim, pelo Lema 1.3.19 temos que $M = f_1 i_{\alpha_1}(M_{\alpha_1}) \oplus ker(\pi_{\alpha_1}) = f_1(M_{\alpha_1}) \oplus [\bigoplus_{\alpha \in \Theta \backslash \{\alpha_1\}} M_\alpha]$. Além disso, $f_1 i_{\alpha_1}$ é um monomorfismo, pois $\pi_{\alpha_1} f_1 i_{\alpha_1}$ é um isomorfismo. Portanto, $f_1|_{M_{\alpha_1}} : M_{\alpha_1} \to f_1(M_{\alpha_1})$ é um isomorfismo. Consequentemente $End_A(M_{\alpha_1}) \cong End_A(f_1(M_{\alpha_1}))$. Logo, $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Theta \backslash \{\alpha_1\}} \cup \{f_1(M_{\alpha_1})\}$ é uma nova decomposição local de M. De forma análoga ao que foi feito para α_1 obtemos $M = f_1(M_{\alpha_1}) \oplus f_2(M_{\alpha_2}) \oplus [\bigoplus_{\alpha \in \Theta \backslash \{\alpha_1, \alpha_2\}} M_\alpha]$. Repetindo este argumento tantas vezes quanto for necessário, obtemos $M = f_1(M_{\alpha_1}) \oplus ... \oplus f_n(M_{\alpha_n}) \oplus [\bigoplus_{\alpha \in \Theta \backslash F} M_\alpha]$, onde $f_i|_{M_{\alpha_i}}$ é um isomorfismo sobre sua imagem. □

Lema 1.3.21. *Sejam* $M = C \oplus B$ *e* D *um submódulo de* M*, então*

1. $\pi_c D = C \cap (D + B)$.

2. $M = D \oplus B$ *se e somente se* $\pi_c|_D : D \to C$ *é um isomorfismo.*

Demonstração.

1. Pela lei modular temos que $\pi_c(D) = \pi_c(D) + \{0\} = \pi_c(D) + \pi_c(B) = \pi_c((D+B) \cap M) = \pi_c((D+B) \cap (C \oplus B)) = \pi_c(((D+B) \cap C) \oplus B) = (D + B) \cap C$.

2. Notamos que $\pi_c|_D$ é um monomorfismo se e somente se $D \cap B = 0$. Por outro lado, pelo item 1 segue que $\pi_c|_D$ é um epimorfismo se e somente se

$C \cap (D + B) = C$ se e somente se $C \subseteq D + B$ se e somente se $M = D + B$.

Portanto, $\pi_c|_D$ é um isomorfismo se e somente se $M = D \oplus B$.

$\square$

O resultado a seguir mostra que se um módulo M possui uma decomposição local, então as componentes desta decomposição são os únicos somandos diretos indecomponíveis de M, a menos de isomorfismo.

Lema 1.3.22. *Seja $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Theta}$ uma decomposição local de M. Se $M = C \oplus B$, onde C é indecomponível, então existe $\alpha \in \Theta$ para o qual:*

1. *$M = M_\alpha \oplus B$.*

2. *$\pi_c i_\alpha : M_\alpha \to C$ é um isomorfismo.*

3. *O conjunto dos $\alpha \in \Theta$ tais que $\pi_\alpha i_c : C \to M_\alpha$ é um isomorfismo é finito.*

Demonstração. 1. Seja $0 \neq x \in C$. Então $x = x_{\alpha_1} + ... + x_{\alpha_n}$, onde cada $x_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$ é não nulo. consideramos $F = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ e $E = \{i_c\pi_c, 1_M - i_c\pi_c\}$. Como $1_M = i_c\pi_c + (1_M - i_c\pi_c)$ segue, do Lema 1.3.20, que

$$M = f_{\alpha_1}(M_{\alpha_1}) \oplus f_{\alpha_2}(M_{\alpha_2}) \oplus ... \oplus f_{\alpha_n}(M_{\alpha_n}) \oplus [\bigoplus_{\alpha \in \Theta \setminus F} M_\alpha]$$

onde cada $f_{\alpha_i} \in E$, para todo $i = 1, ..., n$ e $f_i = f_{\alpha_i}|_{M_{\alpha_i}} : M_{\alpha_i} \to f(M_{\alpha_i})$ é um isomorfismo. Seja o automorfismo $g = f_1 \oplus ... \oplus f_n \oplus 1_D$ de M, onde

$D = \bigoplus_{\alpha \in \Theta \setminus F} M_\alpha$. Por outro lado, se todos os f_{α_i} são iguais a $1_M - i_c\pi_c$ então,

$$\begin{aligned} g(x) &= (f_1 \oplus ... \oplus f_n \oplus 1_D)(x_{\alpha_1} + ... + x_{\alpha_n} + 0) \\ &= f_1(x_{\alpha_1}) + ... + f_n(x_{\alpha_n}) \\ &= (1_M - i_c\pi_c)(x_{\alpha_1}) + ... + (1_M - i_c\pi_c)(x_{\alpha_n}) \\ &= (1_M - i_c\pi_c)(x_{\alpha_1} + ... + x_{\alpha_n}) \\ &= (1_M - i_c\pi_c)(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois $x \neq 0$. Assim, existe k tal que $f_k = i_c\pi_c$. Desta maneira,

$$M = i_c\pi_c(M_{\alpha_k}) \oplus G = \pi_c(M_{\alpha_k}) \oplus G, \text{ onde } G = \bigoplus_{i \neq k} f_i(M_{\alpha_i}) \oplus D.$$

Portanto, pela lei modular, temos $C = C \cap M = C \cap (\pi_c(M_{\alpha_k}) \oplus G) = \pi_c(M_{\alpha_k}) \oplus (C \cap G)$. Mas como C é indecomponível e $\pi_c(M_{\alpha_k}) \neq 0$ devemos ter que $C \cap G = 0$, ou seja, $C = \pi_c(M_{\alpha_k})$. Consequentemente, $\pi_c|_{M_{\alpha_k}} : M_{\alpha_k} \to C$ é um isomorfismo e do item 2 do Lema 1.3.21 temos que $M = M_{\alpha_k} \oplus B$.

2. Só temos que notar na demonstração do item anterior que $\pi_c|_{M_{\alpha_k}} = \pi_c i_{M_{\alpha_k}}$.

3. Sejam $\alpha \in \Theta$ tal que $\pi_\alpha i_c$ é um isomorfismo e $x \in C$ como no item 1, Então $0 \neq \pi_\alpha i_c(x) = \pi_\alpha(x_{\alpha_1} + ... + x_{\alpha_n})$. Assim, $\alpha = \alpha_j$, para algum $j = 1, ..., n$.

□

Como uma consequência imediata do lema anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.3.23. *Se um A-módulo M possui uma decomposição local, então o anel de endomorfismos de qualquer outro somando direto indecomponível de M é local.*

Como extensão natural do lema 1.3.22 segue claramente o seguinte resultado.

Corolário 1.3.24. *Seja* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Theta}$ *uma decomposição local de* M. *Se* $M = C_1 \oplus C_2 \oplus ... \oplus C_n \oplus B$, *onde cada* C_i *é um módulo indecomponível, então, existem índices distintos* $\alpha_1, ...\alpha_n \in \Theta$ *tais que* $M = M_{\alpha_1} \oplus ... \oplus M_{\alpha_n} \oplus D$ *e* $C_i \cong M_{\alpha_i}$, *para todo* i.

Lema 1.3.25. *Sejam* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Theta}$ *e* $\{N_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$ *duas decomposições locais de* M. *Se* $M = C \oplus B$, *onde* C *é um módulo indecomponível então os conjuntos*

$$X = \{\alpha \in \Theta \mid M_\alpha \cong C\} \text{ e } Y = \{\beta \in \Lambda \mid N_\beta \cong C\}$$

têm o mesmo cardinal.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que X é um conjunto finito. Seja qualquer subconjunto finito $F = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ de Y. Então, pelo Corolário 1.3.24, segue que $M = M_{\alpha_1} \oplus ... \oplus M_{\alpha_n} \oplus [\bigoplus_{\beta\in\Lambda\setminus F} N_\beta]$ com $N_{\beta_i} \cong M_{\alpha_i}$. Como os índices $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são distintos e $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subseteq X$ devemos ter que Y é finito, pois do contrario X teria que ser infinito. Desta maneira, o cardinal de Y é menor ou igual do que o cardinal de X. Simetricamente, como Y é finito, temos que o cardinal de X é menor ou igual do que o cardinal de Y. Suponhamos agora que X é um conjunto infinito. Consideremos a projeção $\pi_\beta : M \to N_\beta$. Definamos para cada $\alpha \in X$ o conjunto

$$F(\alpha) = \{\beta \in Y \mid \pi_\beta|_{M_\alpha} \text{é um isormorfismo}\}.$$

Do item 2 do Lema 1.3.22, temos que, se $M = N_\beta \oplus K$ então existe $\alpha \in X$ tal que $\pi_\beta i_\alpha$ é um isomorfismo. Assim, cada $\beta \in Y$ pertence a algum $F(\alpha)$. Desta maneira, $Y = \bigcup_{\alpha\in X} F(\alpha)$. Pelo item 3, do Lema 1.3.22 temos que $F(\alpha)$ é um conjunto finito. Como X é infinito temos que $card(Y) = card(\bigcup_{\alpha\in X} F(\alpha)) \leq \aleph_0 card(X) = card(X)$. Simetricamente obtemos, $card(X) \leq card(Y)$. $\square$

Após os lemas acima, caminhamos na direção da demonstração do Teorema de *Krull-Remak-Schmidt-Azumaya.* A prova consiste simplesmente em particionar os conjuntos de índices dados e mostrar que os conjuntos quocientes resultantes se correspondem biunivocamente, onde qualquer par de classes que estejam em correspondência têm o mesmo cardinal e, portanto, existe uma bijeção entre os conjuntos de índices iniciais.

Teorema 1.3.26. *Seja $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Theta}$ uma decomposição local de M. Se $\{N_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$ é outra decomposição de M em módulos indecomponíveis, então existe uma bijeção $\rho : \Theta \to \Lambda$ tal que $M_\alpha \cong N_{\rho(\alpha)}$, para todo $\alpha \in \Theta$.*

Demonstração. Notamos primeiro que, pelo Corolário 1.3.23, a decomposição $\{N_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$ de M também é local. Definamos em Θ a seguinte relação de equivalência, $\alpha_1 \sim \alpha_2$ se $M_{\alpha_1} \cong M_{\alpha_2}$. Analogamente, definimos uma relação de equivalência em Λ. Chamemos $\bar{\Theta}$ e $\bar{\Lambda}$ aos conjuntos das classes de equivalências definidas sobre Θ e Λ, respectivamente. Definamos agora a aplicação $h : \bar{\Theta} \to \bar{\Lambda}$, por $h(\overline{M_\alpha}) = \overline{N_\beta}$, onde $M_\alpha \cong N_\beta$. Pelo Lema 1.3.22, temos que h é uma aplicação sobrejetora. Se $h(\overline{M_{\alpha_1}}) = h(\overline{M_{\alpha_2}})$, então evidentemente $M_{\alpha_1} \cong M_{\alpha_2}$, ou seja, $\overline{M_{\alpha_1}} = \overline{M_{\alpha_2}}$. Assim, h é uma bijeção. Além disso, pelo lema 1.3.25, temos que $card(\overline{M_\alpha}) = card(h(\overline{M_\alpha}))$. Logo, para cada classe $X \in \bar{\Theta}$ existe uma bijeção $\rho_X : X \to h(X)$. Assim, a aplicação $\rho : \Theta \to \Lambda$, definida por $\alpha \mapsto \rho_{\bar{\alpha}}(\alpha)$ é uma bijeção tal que $M_\alpha \cong N_{\rho(\alpha)}$, para todo $\alpha \in \Theta$. □

1.3.3 Módulos Injetivos

Apresentamos nesta subseção alguns resultados básicos concernentes a módulos injetivos.

Definição 1.3.27. ([13], Cap. 3) *Um A-módulo I é chamado injetivo se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:*

1. *Para qualquer A-monomorfismo $f : L \to N$ e qualquer A-homomorfismo $g : L \to I$, existe um A-homomorfismo $h : N \to I$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

comuta;

2. *O funtor contravariante $Hom_A(\_, I) : \mathscr{Mod}_A \to \boldsymbol{\mathcal{Ab}}$ é exato;*

3. *Para qualquer A-monomorfimo $f : I \to M$ existe um A-homomorfismo $g : M \to I$ tal que $fg = id_I$;*

4. *(Critério de Baer) Todo A-homomorfismo $f : \mathcal{U} \to I$, onde $\mathcal{U}$ é um ideal à esquerda de A, pode ser estendido a um A-homomorfismo de A em I.*

Como consequência das propriedades do funtor contravariante $Hom_A(\_, I)$ temos a seguinte proposição.

Proposição 1.3.28. ([13], Proposição 3.4) *O produto direto de uma família A-módulos é injetivo se e somente se cada módulo da família é injetivo.*

Proposição 1.3.29. *Seja I um módulo injetivo sobre um anel hereditário A e $f : I \to M$ um epimorfismo de A-módulos. Então M é um A-módulo injetivo.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{U}$ um ideal à esquerda de A e $f : I \to M$ um epimorfismo. Então pelo critério de Baer iremos mostrar que M é injetivo . De fato, seja um homomorfismo qualquer $g : \mathcal{U} \to M$. Então pela projetividade de $\mathcal{U}$, existe um homomorfismo $h : \mathcal{U} \to I$ tal que $fh = g$. Agora pela injetividade de I temos um homomorfismo $\hat{h} : A \to I$ que estende h. Desta maneira, $f\hat{h}$ estende g a A. □

Teorema 1.3.30. ([7], Teorema 13-2.3) *Um anel A é hereditário à esquerda se e somente se para qualquer A-módulo injetivo M e qualquer submódulo N de M, o quociente $\frac{M}{N}$ é também injetivo.*

1.3.4 Imersão Injetiva

O objetivo desta subseção é mostrar que qualquer A-módulo M pode ser imerso em algum A-módulo injetivo.

Seja P um (R, A)-bimódulo tal que P_A é um módulo plano. Então, dado um módulo ${}_RM$, definimos no grupo abeliano $\tilde{M} = Hom_R({}_RP, {}_RM)$ a ação $(a \cdot f)(p) = f(p \cdot a)$, com $a \in A$ e $f \in \tilde{M}$. Assim temos que $\tilde{M}$ e um A-módulo à esquerda.

Proposição 1.3.31. ([13], Proposição 3.5) *Se ${}_RM$ um R-módulo injetivo. Então $\tilde{M}$ é um A-módulo injetivo à esquerda.*

Definição 1.3.32. *Um A-módulo M é dito divisível se para qualquer $m \in M$ e $a \in A$ tal que $ann_l(a) \subseteq ann_l(m)$ então a divide m, ou seja, existe $n \in M$ tal que $m = a \cdot n$.*

Proposição 1.3.33. ([13], Proposição 3.17) *Para qualquer A-módulo M as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *M é divisível;*

2. *Para qualquer $a \in A$, $ann_M(ann_l(a)) = aM$;*

3. *Para qualquer $a \in A$, é possível estender qualquer homomorfismo $f : Aa \to M$ a um homomorfismo de A em M.*

Da proposição anterior e do critério de Baer segue que todo A-módulo injetivo é divisível. Além disso, a recíproca é verdadeira sempre que A seja um anel de ideais principais à esquerda (AIPE).

Corolário 1.3.34. *Seja A um domínio. Então um A-módulo M é divisível se e somente se $M = aM$, para todo $a \in A \setminus \{0\}$.*

Exemplo 1.3.35. *$\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo. Em geral, se D é um domínio de ideais principais e K é seu corpo de frações, então K é um D-módulo injetivo.*

Exemplo 1.3.36. *O p-grupo de Prüfer $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo. De fato, seja $\frac{k}{p^i} \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ e $n \in \mathbb{Z}^+$. Se $mdc(n,p) = 1$ então $mdc(n, p^i) = 1$, e assim existem inteiros a, b tais que $an + bp^i = 1$. Desta maneira,*

$$n\tfrac{ak}{p^i} = k\tfrac{an}{p^i} = k\tfrac{1-bp^i}{p^i} = \tfrac{k}{p^i}$$

Se $mdc(n,p) \neq 1$ então $n = mp^t$, com $mdc(m,p) = 1$, e segue que $mdc(m, p^{i+t}) = 1$. Assim existem números inteiros a, b tais que $am + bp^{i+t} = 1$. Desta maneira,

$$n\tfrac{ak}{p^{i+t}} = mp^t\tfrac{ak}{p^{i+t}} = p^tk\tfrac{am}{p^{i+t}} = p^tk\tfrac{1-bp^{i+t}}{p^{i+t}} = p^tk\tfrac{1}{p^{i+t}} = \tfrac{k}{p^i}$$

Em resumo, $n\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, para todo inteiro positivo n, isto é, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo.

Exemplo 1.3.37. *Seja $n > 0$, $\mathbb{Z}_n$ é um $\mathbb{Z}_n$-módulo injetivo. De fato, Seja $\frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}$ um ideal de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$. Assim, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $n = ak$. Se $f : \frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}} \to \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ é um homomorfismo de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$-módulos então desejamos estender ele a um homomorfismo $h : \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \to \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, o qual consiste, pela linearidade dos homomorfismos, em definir $h(1 + n\mathbb{Z})$ tal que $f(k + n\mathbb{Z}) = (k + n\mathbb{Z})h(1 + n\mathbb{Z})$. Das seguintes igualdades,*

$$0 = f(n + n\mathbb{Z}) = f(ak + n\mathbb{Z}) = (a + n\mathbb{Z})f(k + n\mathbb{Z}) = (a + n\mathbb{Z})(s + n\mathbb{Z})$$

para algum $s \in \mathbb{Z}$, temos que $as \in n\mathbb{Z}$, ou seja, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $as = nt$. Logo, $as = (ak)t$, donde segue que $s = kt$. Portanto, $f(k + n\mathbb{Z}) = s + n\mathbb{Z} = kt + n\mathbb{Z} = (t + n\mathbb{Z})(k + n\mathbb{Z})$. Portanto, definindo $h(1 + n\mathbb{Z}) = t + n\mathbb{Z}$ temos o que queríamos provar.

Corolário 1.3.38. *Seja A um domínio. Se $f : M \to N$ é um A-homomorfismo com M injetivo, então $Im(f)$ também é injetivo.*

Corolário 1.3.39. *Seja A um domínio. Então, A soma direta e o produto direto de A-módulos injetivos também é injetivo.*

Proposição 1.3.40. *Seja M um $\mathbb{Z}$-módulo. Então existe um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo N tal que M é submódulo de N.*

Demonstração. Seja um $\mathbb{Z}$-epimorfismo $f : \bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{Z}_i \to M$, onde $\mathbb{Z}_i$ é uma cópia de $\mathbb{Z}$. Além disso, temos que $\bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{Z}_i$ é um submódulo de $\bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{Q}_i$, e segue que $\frac{\bigoplus \mathbb{Z}_i}{ker(f)} \cong M$ é um $\mathbb{Z}$-submódulo de $\frac{\bigoplus \mathbb{Q}_i}{ker(f)}$. Pelos corolários 1.3.38 e 1.3.39 o $\mathbb{Z}$-módulo $\frac{\bigoplus \mathbb{Q}_i}{ker(f)}$ é injetivo. $\square$

Teorema 1.3.41. *Todo A-módulo pode ser imerso em um A-módulo injetivo.*

Demonstração. Seja M um A-módulo à esquerda, então ele é, particularmente, pela estrutura de grupo abeliano, um $\mathbb{Z}$-módulo à esquerda. Assim, o $\mathbb{Z}$-módulo M esta imerso em um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo N. Além disso, A é um $(\mathbb{Z}, A)$-bimódulo e, ao mesmo tempo, um A-módulo plano. Então, pela Proposição 1.3.31 o A-módulo à esquerda $\tilde{N} = Hom_{\mathbb{Z}}(A, N)$ é injetivo. Vamos mostrar que M é um A-submódulo de $\tilde{N}$. De fato, Consideramos a aplicação $\epsilon : M \to \tilde{N}$ definida por $\epsilon(m)(a) = am$ e sejam $a_1, a_2 \in A$ e $m \in M$. Notamos $a_1\epsilon(m) = \epsilon(a_1 m)$, pois, $(a_1\epsilon(m))(a_2) = \epsilon(m)(a_2 a_1) = (a_2 a_1)m = a_2(a_1 m) = \epsilon(a_1 m)(a_2)$. Logo, ϵ é um A-homomorfismo.

Seja agora m tal que $\epsilon(m) = 0$. Em particular, devemos ter $0 = \epsilon(m)(1) = 1m = m$ e, portanto, ϵ é um monomorfismo. $\square$

1.3.5 Fecho Injetivo

Nesta seção, mostrarmos que todo módulo possui um fecho injetivo, o qual é dado pela maior extensão essencial que o contém, ou equivalentemente pelo menor módulo injetivo que o contém.

Definição 1.3.42. *Um A-módulo à esquerda $E \supseteq M$ é chamado uma extensão essencial de ${}_AM$, se para todo submódulo não nulo N de E temos $M \cap N \neq 0$.*

Se E é uma extensão essencial de M então escreveremos $M \subseteq_e E$. Uma extensão essencial $E \supseteq M$ é dita maximal se nenhuma extensão essencial de M contém propriamente E. Por outro lado, uma caracterização imediata, mas muito útil, das extensões essenciais é a seguinte: $M \subseteq_e E$ se e somente se dado qualquer $b \in E$, existe $a \in A \setminus \{0\}$ tal que $a \cdot b \in M$. Além disso, destacamos que a relação "ser extensão essencial de" é transitiva.

Exemplo 1.3.43. *O $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$ é uma extensão essencial de $\mathbb{Z}$.*

Exemplo 1.3.44. *A extensão $\mathbb{Z}_{p^n} \subseteq \mathbb{Z}_{p^\infty}$ é essencial (ver Exemplo 1.3.2). Notamos primeiro que os únicos subgrupos não triviais de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ são os subgrupos da forma $\langle \frac{1}{p^n} \rangle$. Pois, se G é um subgrupo finito de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, então deve estar contido em $\langle \frac{1}{p^n} \rangle$, para algum natural n. Pelo teorema de Lagrange segue que G deve ser um subgrupo de ordem p^k, com $k \leq n$. Assim, $G = \langle \frac{1}{p^k} \rangle$. Para o caso em que G é infinito, suponhamos que existe $\frac{k}{p^n} \notin G$. Desta maneira, existe $m > n$ tal que $\frac{r}{p^m} \in G$, onde $mdc(r, p) = 1$, consequentemente $mdc(r, p^m) = 1$ e $\frac{1}{p^n} \in \langle \frac{1}{p^m} \rangle = \langle \frac{r}{p^m} \rangle$. Assim, $\frac{k}{p^n} \in \langle \frac{r}{p^m} \rangle$. Ou seja, $\frac{k}{p^n} \in G$, o que é um absurdo. Logo, $G = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Do anterior e da cadeia dada na*

Definição 1.3.2, temos, evidentemente, que a extensão $\mathbb{Z}_{p^n} \subseteq \mathbb{Z}_{p^\infty}$ é essencial, para todo inteiro positivo n.

O lema a seguir nos dá mais uma caracterização de módulos injetivos e exibe uma relação entre extensões essenciais e injetividade.

Lema 1.3.45. *${}_AM$ é injetivo se e somente se M não possui extensões essenciais próprias.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $M \subseteq_e E$ uma extensão essencial. Como M é injetivo segue que existe um submódulo N de E tal que $E = M \oplus N$. Como $M \subseteq_e E$ é uma extensão essencial, segue que $N = 0$. Portanto, $M = E$.

$\Leftarrow$) Consideramos I um módulo injetivo que contém M. Se $I = M$, então não há nada para mostrar. Suponhamos que $I \neq M$. Consideramos a família dos módulos contidos em I cuja interseção com M é o módulo zero. Aplicando o Lema de Zorn nesta família, obtemos um elemento S maximal da família. Afirmamos que $I = M \oplus S$. De fato, notamos que $\frac{I}{S}$ é uma extensão essencial de $\frac{M+S}{S} \cong M$. Assim, $\frac{I}{S} = \frac{M+S}{S} \cong M$, ou seja, $I = M \oplus S$. Como I é injetivo segue que M também é injetivo. $\square$

Lema 1.3.46. *Todo A-módulo M possui uma extensão essencial maximal.*

Demonstração. Seja I um módulo injetivo que contém M. Consideramos a família $\mathfrak{F}$ das extensões essenciais de M contidas em I. Notamos que $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, pois $M \subseteq_e M$. Como a união de uma cadeia de extensões essenciais de um módulo é também uma extensão essencial então, aplicando o Lema de Zorn, $\mathfrak{F}$ tem um elemento maximal E. Além disso, E é uma extensão essencial maximal de M, pois, para cada extensão essencial E' de M tal que $E \subseteq E'$ temos pela injetividade do módulo I que existe um morfismo $g : E' \to I$ que faz comutar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & E' \arrow[dl, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Assim, temos que $ker(g) \cap M = 0$ e como $M \subseteq_e E'$ então $ker(g) = 0$. Logo, $Im(g) \cong E'$. Consequentemente, $Im(g) \in \mathfrak{F}$ e $i_2(E) = E \subseteq Im(g) \subseteq I$, e pelo fato que E é maximal em $\mathfrak{F}$, concluímos que $E = Im(g)$. $\square$

Teorema 1.3.47. *Sejam M e I dois A-módulos tais que $M \subseteq I$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *I é uma extensão essencial maximal de M;*

2. *I é uma extensão essencial de M e I é injetivo;*

3. *I é um módulo injetivo minimal com respeito a relação de conter M.*

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$. Segue da transitividade das extensões essenciais e pelo Lema 1.3.45.

$2 \Rightarrow 3$. Suponhamos que existe um módulo injetivo I' tal que $M \subseteq I' \subseteq I$. Então para algum submódulo N de I temos que $I = I' \oplus N$. Pela essencialidade da extensão $M \subseteq I$ segue que $N = 0$. Logo, I é um módulo injetivo minimal.

$3 \Rightarrow 1$. Seja E uma extensão essencial maximal de M contida em I. Então, pelo mesmo argumento feito na prova do Lema 1.3.46, segue que E é uma extensão essencial maximal de M. Logo, por $1 \Rightarrow 2$, E é um módulo injetivo. Pela minimalidade de I, segue que $I = E$. Isto é, I é uma extensão essencial maximal de M. $\square$

O Lema 1.3.46 mostra para que para todo módulo, existe um módulo I que satisfaz uma (e portanto todas) das afirmações do teorema anterior. Neste caso dizemos que I é um fecho injetivo de M. O corolário a seguir mostra que o fecho injetivo de um módulo é único a menos isomorfismo.

Corolário 1.3.48. *Se I e I' são dois fechos injetivos de M, então existe um isomorfismo $f : I \to I'$ tal que f restrito a M é a identidade de M.*

Demonstração. Sejam i e i' as inclusões de M em I e I', respectivamente. Como I é injetivo então existe g que faz o diagrama a seguir comutar

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i"'] & I' \arrow[dl, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Além disso, g restrito a M é a identidade. Assim, como foi mostrado na prova do Lema 1.3.46 temos que g é um monomorfismo. Logo, temos que $g(I')$ é um submódulo injetivo de I contendo M. Usando a caracterização 3 do Teorema 1.3.47 temos que $g(I') = I$. Portanto, g é um isomorfismo. □

Notação: Durante a dissertação usaremos as seguintes notações:

1. $E({}_AM)$ denota o fecho injetivo do A-módulo M. Porém, quando for claro que o fecho injetivo de M é sobre o anel A escrevemos simplesmente $E(M)$.

2. Seja C um A-módulo injetivo que contém M. Escrevemos, $E_C(M)$ para denotar o fecho injetivo de M contido em C, quanto for necessário evidenciar este fato.

Exemplo 1.3.49. *Como $\mathbb{Z}$-módulos, $E(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$. A prova segue dos exemplos 1.3.35, 1.3.43 e o Teorema 1.3.47.*

Exemplo 1.3.50. *Como $\mathbb{Z}$-módulos, para todo natural n, temos que $E(\mathbb{Z}_{p^n}) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. A prova segue dos exemplos 1.3.2, 1.3.36, 1.3.44 e o Teorema 1.3.47.*

1.3.6 Limites Diretos

Nesta seção construímos o limite direto de qualquer família de módulos sobre um anel A, segundo o roteiro dado em ([1], Página 32). No Capítulo 2, se mostra uma surpreendente relação entre a noção de limite direto de módulos e o conceito de anel noetheriano. Mais precisamente, o Teorema 2.1.2 mostra que uma categoria de módulos injetivos, sobre um anel fixo, possui limites diretos se e somente se este anel é noetheriano.

Nesta seção denotamos D como um conjunto dirigido, ou seja, um conjunto ordenado tal que para cada $i, j \in D$, existe um $k \in D$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$. Destacamos que o fato de D ser um conjunto dirigido somente é necessário na prova dos corolários 1.3.55 e 1.3.56. Em outras palavras, a Proposição 1.3.54 mostra que a categoria ${}_A\mathscr{Mod}$ possui co-limites ([15], Seção III.3) de qualquer tipo.

Definição 1.3.51. *Um sistema direto é uma família de A-módulos* $(M_i)_{i\in D}$ *junto com um conjunto de A-homomorfismos* $\{\mu_{ij} : M_i \to M_j \mid se\ i \leq j\}$ *que satisfazem as seguintes condições:*

1. $\mu_{ii} = id_{M_i}$.
2. $\mu_{ij} = \mu_{kj}\mu_{ik}$, *sempre que* $i \leq k \leq j$.

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\mu_{ik}"] \arrow[dr, "\mu_{ij}"'] & M_k \arrow[d, "\mu_{kj}"] \\ & M_j \end{tikzcd}$$

Definição 1.3.52. *Um co-cone para o sistema direto* $((M_i)_{i\in D}, \mu_{ij})$ *é um A-módulo* N *junto com uma família* $\{\alpha_i : M_i \to N\}_{i\in D}$ *de A-homomorfismos tal que o seguinte diagrama comuta para todo* $i \leq j$,

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "\mu_{ij}"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & M_j \arrow[dl, "\alpha_j"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Definição 1.3.53. *Um limite direto para o sistema* $((M_i)_{i\in D}, \mu_{ij})$ *é um co-cone* $(N, (\alpha_i)_{i\in D})$ *que satisfaz a seguinte propriedade universal: se* $(N', (\alpha_i')_{i\in D})$ *é outro co-cone desse sistema, então existe um único A-homomorfismo* $\alpha : N \to N'$ *tal que, para todo* $i \in D$ *o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha_i'"] & \\ N \arrow[rr, "\alpha"] & & N' \end{tikzcd}$$

isto é, $\alpha_i' = \alpha\alpha_i$*, para todo* $i \in D$.

Escrevemos $M = \varinjlim M_i$ ao limite direto do sistema $((M_i)_{i\in D}, \mu_{ij})$. Pela propriedade universal que define "o" limite direto de um sistema, segue que este se encontra univocamente definido a menos isomorfismo.

Proposição 1.3.54. *O limite direto de qualquer sistema direto sempre existe.*

Demonstração. Seja o sistema direto $\mathbb{M} = ((M_i)_{i\in D}, \mu_{ij})$. Consideramos o A-módulo $C = \bigoplus\limits_{i\in D} M_i$ e chamamos de F o submódulo de C gerado pelos elementos da forma $x_i - \mu_{ij}(x_i)$, sempre que $i \leq j$ e $x_i \in M_i$. Afirmamos que $M = \frac{C}{F}$, junto com os A-homomorfismos $\alpha_i : M_i \to M$ definidos pela composição dos morfismos

$$M_i \xrightarrow{i_{M_i}} C \xrightarrow{\pi} \frac{C}{F},$$

é o limite direto do sistema $\mathbb{M}$. De fato, se $i \leq j$ e $x_i \in M_i$ então $x_i - \mu_{ij}(x_i) \in F$, e segue que $\alpha_i(x_i) = x_i + F = \mu_{ij}(x_i) + F = \alpha_j(\mu_{ij}(x_i))$, ou seja, $\alpha_i = \alpha_j\mu_{ij}$ sempre que $i \leq j$. desta maneira, $(M,\ \alpha_i)$ é um co-cone do sistema direto $\mathbb{M}$. Se (N, α_i') é outro co-cone desse sistema direto então definimos o A-homomorfismo $\phi : C \to N$ por $\phi((x_i)) = \sum \alpha_i'(x_i)$. Notamos que para $i \leq j$ temos $\phi(x_i - \mu_{ij}(x_i)) = \alpha_i'(x_i) - \alpha_j'(\mu_{ij}(x_i)) = 0$. Assim, $F \subseteq ker(\phi)$ e obtemos que um A-homomorfismo $\bar{\phi} : M \to N$, o qual, por construção, satisfaz $\alpha_i' = \bar{\phi}\alpha_i$. Além disso, é fácil de ver que $\bar{\phi}$ é o único A-homomorfismo que satisfaz essa propriedade. Portanto $M = \varinjlim M_i$. $\square$

Corolário 1.3.55. *Com as mesmas hipóteses da proposição da acima. Cada elemento do limite direto* M *é da forma* $\alpha_i(x_i)$*, para algum* $i \in D$ *e* $x_i \in M_i$*.*

Corolário 1.3.56. *Se* $\alpha_i(x_i) = 0$ *então existe* $j \geq i$ *tal que* $\mu_{ij}(x_i) = 0$*.*

Exemplo 1.3.57. *Seja* $\{M_i\}_{i\in D}$ *uma família de módulos injetivos . Consideramos a família*

$$\mathcal{F} = \{N_k \mid N_k \text{ é uma soma direta finita de elementos de } \{M_i\}\}$$

A relação $k \leq l$ *se* $N_k \subseteq N_l$*, para todo* $k, l \in D$*, define um ordem no conjunto* D*. Desta forma,* D *é um conjunto dirigido. Temos, que* $(\mathcal{F}, \mu_{kl})$ *é um sistema direto onde os homomorfismos* $\mu_{kl} : N_k \to N_l$ *são as inclusões. Logo o limite direto deste sistema é* $\bigoplus M_i$*.*

Capítulo 2

Módulos Injetivos sobre Anéis Noetherianos

O objetivo deste capítulo é estudar com profundidade os módulos injetivos sobre certos tipos de anéis. A princípio o anel base não tem nenhuma condição adicional além de ter unidade. Nas primeiras duas seções estudaremos de modo geral algumas propriedades dos módulos injetivos indecomponíveis, onde evidencia-se a necessidade de condições de noetherianidade sobre o anel base. Na terceira seção estudamos os módulos injetivos indecomponíveis sobre um anel noetheriano e comutativo, onde evidencia-se que cada ideal primo P se corresponde biunivocamente com o módulo $E(\frac{A}{P})$. Assim, estudando os A-módulos da forma $E(\frac{A}{P})$ definiremos naturalmente uma ação de A_p sobre $E(\frac{A}{P})$, e também uma ação do anel completo $\hat{A}_p$, obtido da topologia P-ádica sobre A_p, donde obteremos surprendentemente que $E(\frac{A}{P}) = E(\frac{A_p}{PA_p})$ e que $E(\frac{A}{P}) = E(\frac{\hat{A}_p}{\widehat{PA_p}})$, como A_p e $\hat{A}_p$ módulos, respectivamente. Com isto, no Capítulo 3, mostramos que com condições de comutatividade, noetherianidade, localidade e completude sobre o anel base, a categoria dos módulos artinianos e o categoria oposta dos módulos noetherianos são equivalentes.

2.1 Submódulos Injetivos Maximais

Nesta seção estudamos algumas propriedades de módulos que contém um módulo injetivo maximal. Além disso, no Teorema 2.1.2 mostramos uma propriedade categórica que define um anel noetheriano.

Sejam S, T dois A-módulos, D um submódulo injetivo de $S \oplus T$ e $E = E_D(D \cap S)$. Pela injetividade de E, e o item 3 da definição de módulo injetivo, existe um submódulo F de D tal que $D = E \oplus F$. Nestes termos, temos o seguinte resultado.

Lema 2.1.1. *Com as mesmas notações acima, E e F se projetam injetivamente em S e T, respectivamente.*

Demonstração. Sejam $\hat{f}_1 : S \oplus T \to S$ e $\hat{f}_2 : S \oplus T \to T$ as projeções de $S \oplus T$ em S e T, respectivamente. Definamos f_2 como a restrição de $\hat{f}_2$ a F. Assim, $ker(f_2) = \{x \in F \mid x = s + 0,\ s \in S\} \subseteq D \cap S \subseteq E_D(D \cap S) = E$. Como $E \cap F = 0$, temos que $ker(f_2) = 0$. Desta maneira, F se projeta injetivamente em T. Analogamente, seja $f_1 : E \to S$ a restrição de $\hat{f}_1$ a E. Então, temos que $ker(f_1) \subseteq T$, e com isto, $ker(f_1) \cap (D \cap S) = 0$. Mas $D \cap S \subseteq_e E$, de onde segue que $ker(f_1) = 0$. Consequentemente, E também se projeta injetivamente em S. □

O seguinte teorema mostra como uma propriedade satisfeita pelos módulos injetivos nos dá uma notável caracterização dos anéis noetherianos.

Teorema 2.1.2. *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *A é um anel noetheriano à esquerda;*

2. *O limite direto de A-módulos injetivos é injetivo;*

3. A soma direta de A-módulos injetivos é um módulo injetivo.

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$. Seja $(M, (\alpha_i)_{i \in D})$ o limite direto do sistema $((M_i)_{i\in D}, \mu_{ij})$, onde M_i é injetivo, para todo $i \in D$. Vamos mostrar que M é injetivo mediante o critério de Baer. De fato, seja $f \in Hom_A(\mathcal{U}, M)$, onde $\mathcal{U}$ é um ideal de A. Como A é noetheriano temos que $\mathcal{U} = Aa_1 + ... + Aa_n$. Pelo Corolário 1.3.55 temos que cada $f(a_i) = \alpha_{k_i}(x_i)$. Seja $m \in D$ tal que $m \geq k_i$ para todo $i = 1, ..., n$, então temos que $\alpha_{k_i} = \alpha_m \mu_{k_i m}$ e $f(\mathcal{U}) = Af(a_1) + ... + Af(a_n) = A\alpha_{k_1}(x_1) + ... + A\alpha_{k_n}(x_n) = A\alpha_m(\mu_{k_1 m}(x_1)) + ... + A\alpha_m(\mu_{k_n m}(x_n)) = \alpha_m(A\mu_{k_1 m}(x_1) + ... + A\mu_{k_n m}(x_m))$, ou seja, $f(\mathcal{U}) \subseteq Im(\alpha_m)$. Seja N o submódulo de M_m gerado por $\mu_{k_1 m}(x_1)$,...,$\mu_{k_n m}(x_n)$, desta forma $\alpha_m(N) = f(\mathcal{U})$. Seja agora a sequência exata

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\alpha_m|_N} f(\mathcal{U}) \longrightarrow 0$$

onde $L = ker(\alpha_m)$ e i_L é a inclusão de L em N. Como N é finitamente gerado e temos da Proposição 1.3.10 que N é um módulo noetheriano, em particular, L é finitamente gerado, isto é, $L = Ay_1 + ... + Ay_l$, onde $y_1, ..., y_l \in L$. Como cada $\alpha_m(y_i) = 0$, então segue pelo Corolário 1.3.56 que existe um $s_i \geq m$ tal que $\mu_{ms_i}(y_i) = 0$. Desta forma, seja $s \geq s_i$ para todo $i = 1, ..., l$ temos $\mu_{ms}(L) = A\mu_{ms}(y_1) + ... + A\mu_{ms}(y_l) = A\mu_{s_1 s}(\mu_{ms_1}(y_1)) + ... + A\mu_{s_l s}(\mu_{ms_l}(y_l)) = A\mu_{s_1 s}(0) + ... + A\mu_{s_l s}(0) = 0$. Notamos que $h = \alpha_s|_{\mu_{ms}(N)} : \mu_{ms}(N) \to f(\mathcal{U})$ é um isomorfismo. Pois, a sobrejetividade segue imediatamente do fato que $\alpha_s(\mu_{ms}(N)) = \alpha_m(N) = f(\mathcal{U})$. Seja $x \in N$ tal que $0 = \alpha_s(\mu_{ms}(x)) = \alpha_m(x)$, ou seja, $x \in L$ e portanto, $\mu_{ms}(x) = 0$, isto é, o núcleo de $\alpha_s|_{\mu_{ms}(N)}$ é o módulo nulo.

Desta maneira podemos escrever $f = \alpha_s(h^{-1}f)$, e pela injetividade de M_i o homomorfismo $h^{-1}f : \mathcal{U} \to M_s$ pode se estender a um homomorfismo $g : A \to M_s$ tal que $g|_{\mathcal{U}} = h^{-1}f$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[rr, "i_1"] \arrow[d, "f"] & & A \arrow[d, dashed, "g"] \\
f(\mathcal{U}) \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[d, "i_2"] & \mu_{ms}(N) \arrow[r, "i_3"] & M_s \arrow[dll, "\alpha_s"] \\
M & &
\end{tikzcd}
$$

Assim, $\alpha_s g$ estende f a um homomorfismo de A em M. De fato, $\alpha_s g|_{\mathcal{U}} = \alpha_s h^{-1} f = \alpha_s \alpha_s|_{\mu_{ms}(N)}^{-1} f = f$.

$2 \Rightarrow 3$. Segue do Exemplo 1.3.57.

$3 \Rightarrow 1$. Seja uma cadeia ascendente

$$\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \subseteq ...$$

de ideais à esquerda de A. Consideremos o ideal à esquerda $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$ de A e o A-homomorfismo $f : \mathcal{U} \to \oplus E(\frac{A}{\mathcal{U}_i})$, definido por $f(a) = (a + \mathcal{U}_n)_n$. Notamos que f está bem definido pois para todo $a \in U$ existe um índice k tal que, para todo $n \geq k$, $a \in \mathcal{U}_n$. Da injetividade de $\oplus E(\frac{A}{\mathcal{U}_i})$ existe um A-homomorfismo $h : A \to \oplus E(\frac{A}{\mathcal{U}_i})$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{U} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[dl, "h"] \\
& \oplus E(\frac{A}{\mathcal{U}_i}) &
\end{tikzcd}
$$

Temos então que $h(1)$ é uma sequência quase-nula. Seja m o maior índice cuja componente em $h(1)$ é um elemento não nulo. Consequentemente todo elemento $a \in \mathcal{U}$ pertence a $\mathcal{U}_{m+1}$ pois $f(a) = h(a) = ah(1)$. Isto significa que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{m+1} = \mathcal{U}_{m+2} = \ldots$. Portanto, A é noetheriano. $\square$

Um fato notável, na demonstração de 3 implica 1 é que em um anel qualquer, se a sequência de ideais

$$\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \subseteq ...$$

é não estacionaria, então o módulo $\oplus E(\frac{A}{\mathcal{U}_i})$ não é injetivo.

Embora não precisemos de todas as equivalências dadas neste teorema, consideramos relevante destacar este belo resultado da teoria dos módulos. Em particular, do teorema anterior temos como consequência imediata o corolário a seguir. Antes, porém, observamos que nesta seção, quando dizemos que um submódulo injetivo N de M é maximal queremos dizer que não existe nenhum submódulo injetivo de M contendo propriamente N.

Corolário 2.1.3. *Se M é um módulo sobre um anel noetheriano A, então M contém um submódulo injetivo maximal.*

Demonstração. Consideremos a família $\mathcal{F} = \{\bigoplus N_i \mid N_i$ é submódulo injetivo de $M\}$, ordenada por inclusão, a qual é não vazia, pois 0 é injetivo. Como toda cadeia de $\mathcal{F}$ tem um elemento máximo, segue pelo Lema de Zorn que existe um submódulo maximal N em $\mathcal{F}$ o qual é injetivo, pois A é noetheriano. Seja agora N_1' um submódulo injetivo de M contendo N, então $N_1' = N \oplus N_2'$, onde N_2' injetivo. Segue que $N_1' \in \mathcal{F}$ e pela maximalidade de N temos que $N_2' = 0$, isto é, $N_1' = N$. □

O resultado acima nos diz que existem módulos que contém um submódulo injetivo maximal. Para esta família temos o seguinte resultado interessante.

Teorema 2.1.4. *Seja M um A-módulo que contém um submódulo injetivo maximal C. Então,*

1. *O único submódulo injetivo do quociente $\frac{M}{C}$ é o módulo nulo.*

2. *Se F é um submódulo injetivo de M, então, a projeção de M em C restrita a F, $\pi_c|_F : F \to C$ é um monomorfismo tal que $\pi_c(F) = E_C(F \cap C)$.*

3. *Se D é qualquer outro submódulo injetivo maximal de M, então existe um automorfismo de M que leva C sobre D e é a identidade sobre o complemento de C em M.*

Demonstração. 1. Pela injetividade de C e o item 3 da definição de módulo injetivo existe algum submódulo N de M tal que $M = C \oplus N$ com $N \cong \frac{M}{C}$ e segue da maximalidade de C que o único submódulo injetivo de $\frac{M}{C}$ é o módulo nulo.

2. Vamos mostrar primeiramente que $E_F(F \cap C) = F$ (o fecho injetivo de $F \cap C$ em F). De fato, pela injetividade de $E_F(F \cap C)$ segue que $F = E_F(F \cap C) \oplus F_1$, para um certo submódulo F_1. Assim, F_1 é um submódulo injetivo de M tal que $C \cap F_1 = 0$. Assim, $C \oplus F_1$ é um módulo injetivo que contém C e consequentemente, pela maximalidade de C, temos que $F_1 = 0$, isto é, $F = E_F(F \cap C)$. Pelo Lema 2.1.1 segue que $\pi_c|_F$ é um monomorfismo tal que $\pi_c(F)$ é um fecho injetivo de $F \cap C$ em C, ou seja, $\pi_c(F) = E_C(F \cap C)$.

3. Seja $f_1 = \pi_c|_D : D \to C$ a projeção de D sobre C, então pelo item 2 temos que $f_1(D) = E_C(D \cap C)$. Assim, pelo item 3 da definição de módulo injetivo, existe um módulo C_1 tal que $C = f_1(D) \oplus C_1$. Por outro lado, como $D \cap C \subseteq E_C(D \cap C) = f_1(D)$, segue que $D \cap C_1 = 0$. Além disso, como C_1 é injetivo segue que $D \oplus C_1$ é um módulo injetivo que contém o submódulo D. Agora, pela maximalidade de D, segue que $C_1 = 0$. Assim, $C = f_1(D)$ e pelo item 2, f_1 é um monomorfismo, Desta maneira, f_1 é um isomorfismo. Por último, basta definir $f = f_1^{-1} \oplus id_N$, onde N é o complemento de C em M, para obtermos um automorfismo de M que leva C sobre D e é a identidade sobre N.

$\square$

O seguinte resultado é uma consequência direta do teorema anterior.

Corolário 2.1.5. *Se C é um submódulo injetivo maximal contido em M, então C contém uma cópia de cada submódulo injetivo contido em M.*

Notamos que se a soma dos submódulos injetivos de um módulo M é um submódulo injetivo, então M tem um único submódulo injetivo maximal.

Teorema 2.1.6. *A soma de dois submódulos injetivos de ${}_AM$ é sempre um submódulo injetivo se e somente se A é hereditário à esquerda.*

Demonstração. $\Leftarrow$) Suponhamos que A é um anel hereditário à esquerda. Sejam N_1 e N_2 dois submódulos injetivos de um A-módulo M. Notamos que $N_1 + N_2$ é a imagem de $N_1 \times N_2$, mediante o homomorfismo $f : N_1 \times N_2 \to N_1 + N_2$ definido por $f(n_1, n_2) = n_1 + n_2$. Pela injetividade de $N_1 \times N_2$ e pela Proposição 1.3.29 segue que $N_1 + N_2$ é um submódulo injetivo de M.

$\Rightarrow$) Seja H um submódulo do módulo injetivo M. Vamos provar que $\frac{M}{H}$ é injetivo e, pelo Teorema 1.3.30, seguirá que A é hereditário à esquerda. De fato, sejam M_1 e M_2 duas cópias de M, $N = M_1 \times M_2$ e D o submódulo gerado pelos elementos de N da forma (h, h), onde $h \in H$. É fácil ver que o homomorfismo canônico $N \to \frac{N}{D}$ leva bijetivamente M_1 e M_2 em $\bar{M}_1$ e $\bar{M}_2$, respectivamente, onde $\bar{M}_i = M_i + D$. Notamos que $\bar{M}_1 + \bar{M}_2 = \{((m_1, 0) + (0, m_2)) + D\} = \frac{N}{D}$ é um módulo injetivo por hipótese. Por outro lado, pela injetividade de $\bar{M}_1$ segue que $\frac{N}{D}/\bar{M}_1$ é injetivo. Consideremos agora a seguinte sequência exata

$$M \longrightarrow M_2 \longrightarrow \bar{M}_2 \xrightarrow{\phi} \tfrac{N}{D}/\bar{M}_1.$$

onde ϕ está definido por:

$$((0,m_2)+D) \mapsto ((0,m_2)+D)+\bar{M}_1 = ((0,m_2)+D)+((M_1,0)+D)$$

Observamos que,

$$\begin{aligned}
Ker(\phi) &= \{(0,m_2)+D \in \bar{M}_2 \mid (0,m_2)+D \in \bar{M}_1\} \\
&= \{(0,m_2)+D \in \bar{M}_2 \mid (0,m_2)+D = (m_1,0)+D, \text{ para algum } m_1 \in M_1\} \\
&= \{(0,m_2)+D \in \bar{M}_2 \mid (m_1,m_2) \in D, \text{ para algum } m_1 \in M_1\} \\
&= \{(0,h)+D \in \bar{M}_2 \mid h \in H\} \\
&= (0,H)+D
\end{aligned}$$

Consequentemente, a composição desses morfismos é um epimomorfismo cujo núcleo é dado por H. Ou seja, $\frac{M}{H} \cong \frac{N}{D}/\bar{M}_1$ é um módulo injetivo. $\square$

Do Teorema 2.1.6 e do Corolário 2.1.3 segue que se A é um anel noetheriano e hereditário (à esquerda) então todo A-módulo M tem um módulo injetivo máximo.

2.2 Módulos Injetivos Indecomponíveis

Nesta seção vamos mostrar que todo módulo injetivo indecomponível é o fecho injetivo de algum A-módulo da forma $\frac{A}{I}$, onde I é um ideal à esquerda irredutível de A. Disto decorre que fixando um anel A, podemos exibir todos os módulos injetivos indecomponíveis da categoria ${}_A\mathscr{Mod}$. Estes módulos serão a base para estudar os módulos injetivos sobre um anel noetheriano na próxima seção.

Proposição 2.2.1. *Seja $\{M_i\}$ uma família finita de A-módulos. Então $E(\bigoplus M_i) \cong \bigoplus E(M_i)$. Se além disso, A é noetheriano à esquerda então pode se retirar a condição de finitude da família.*

Demonstração. A Proposição 1.3.28 mostra que $\bigoplus E(M_i)$ é um módulo injetivo, sempre que a família $\{M_i\}$ é finita. Se a família $\{M_i\}$ é infinita e A é noetheriano o Teorema 2.1.2 mostra que $\bigoplus E(M_i)$ é um módulo injetivo. Assim, pelo Teorema 1.3.47 só resta provar que $\bigoplus E(M_i)$ é uma extensão essencial de $\bigoplus M_i$. De fato, seja $0 \neq x$ em $\bigoplus E(M_i)$ e suponhamos que $\{x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_n}\}$ são as coordenadas não nulas de x. Então, pelo fato de $M_{k_1} \subseteq E(M_{k_1})$ ser uma extensão essencial, existe um $a_1 \in A$ tal que $a_1 x_{k_1} \in M_{k_1} \setminus \{0\}$. De maneira análoga, se $a_1 x_{k_2} \neq 0$ então existe $a_2 \in A$ tal que $a_2 \cdot (a_1 \cdot x_{k_2}) \in M_{k_2} \setminus \{0\}$. Continuando com este procedimento em todas as coordenadas não nulas obtemos elementos $a_1, ..., a_m \in A$ tais que $a = a_m ... a_2 a_1$ satisfaz a propriedade de que $a \cdot x \in \bigoplus M_i \setminus \{0\}$. Isto é, $\bigoplus M_i \subseteq \bigoplus E(M_i)$ é uma extensão essencial. $\square$

O próximo resultado caracteriza módulos cujo fecho injetivo é indecomponível.

Proposição 2.2.2. *Seja um A-módulo M. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$E(M)$ é o fecho injetivo de qualquer um de seus submódulos não nulos;*

2. *Para quaisquer submódulos não nulos S e T de M temos que $S \cap T \neq 0$;*

3. *$E(M)$ é indecomponível.*

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$. Sejam S e T submódulos não nulos de M. Então, por hipótese, $E(M)$ é o fecho injetivo de S e, consequentemente, $S \cap T \neq 0$, pois T também é um submódulo não nulo de $E(M)$.

$2 \Rightarrow 3$. Se $E(M) = N \oplus F$, então $N \cap M$ e $F \cap M$ são submódulos de M tais que $(N \cap M) \cap (F \cap M) = 0$. Desta maneira, $N \cap M = 0$ ou $F \cap M = 0$. Em outras palavras, $N = 0$ ou $F = 0$.

$3 \Rightarrow 1$. Sejam $E = E(M)$ e N um submódulo não nulo de E. Pelo item 3 da Definição

1.3.27, para algum módulo K, temos $E = E_E(N) \oplus K$. Como E é indecomponível segue $E = E_E(N)$. $\square$

Os ideais à esquerda do anel A tem um papel indispensável quando se deseja estudar os módulos indecomponíveis sobre A. Neste sentido, o Teorema 2.2.4, adiante, mostra que todos os submódulos indecomponíveis sobre A são da forma $E(\frac{A}{J})$, onde J é um ideal irredutível. Antes porém, precisamos de mais um resultado.

Teorema 2.2.3. *Seja $\{J_1, J_2, ..., J_n\}$ uma decomposição irredundante de um ideal à esquerda J de A, tal que $E(\frac{A}{J_i})$ é indecomponível, para todo $i = 1, ..., n$. Então $E(\frac{A}{J}) \cong E(\frac{A}{J_1}) \oplus E(\frac{A}{J_2}) \oplus ... \oplus E(\frac{A}{J_n})$.*

Demonstração. Notamos primeiro que $C = E(\frac{A}{J_1}) \oplus E(\frac{A}{J_2}) \oplus ... \oplus E(\frac{A}{J_n})$ contém uma cópia de $\frac{A}{J}$. De fato, o homomorfismo $f : \frac{A}{J} \to C$ definido pela correspondência $a + J \mapsto (a + J_1, ..., a + J_n)$ é um monomorfismo, pois se $0 = f(\bar{a}) = (a + J_1, ..., a + J_n)$ então $a \in J_1 \cap ... \cap J_n = J$, ou seja, $\bar{a} = 0$. Por outro lado, como a decomposição é irredundante, existe $0 \neq x \in J_1 \cap ... \cap \hat{J_i} \cap ... \cap J_n$ tal que $x \notin J_i$, e com isto, $0 \neq (x + J_1, ..., x + J_i, ..., x + J_n) = (0 + J_1, ..., x + J_i, ..., 0 + J_n) \in \frac{A}{J} \cap \frac{A}{J_i}$. Assim, $\frac{A}{J} \cap \frac{A}{J_i} \neq 0$, para todo $1 \leq i \leq n$. Desta maneira pela Proposição 2.2.2 temos que $E(\frac{A}{J_i}) = E(\frac{A}{J} \cap \frac{A}{J_i})$. Seja $0 \neq y = (y_i) \in C$ tal que y_{k_1} é a primeira coordenada não nula de y. Então, pela essencialidade da extensão $\frac{A}{J} \cap \frac{A}{J_{k_1}} \subseteq E(\frac{A}{J} \cap \frac{A}{J_{k_1}})$, existe $s_1 \in A$ tal que $0 \neq s_1 y_{k_1} \in \frac{A}{J} \cap \frac{A}{J_1}$. Novamente, seja k_2 a segunda coordenada não nula de $s_1 y$ então existe s_2 tal que $s_2(s_1 y_{k_2}) \in \frac{A}{J} \cap \frac{A}{J_{k_2}}$. Repetindo este argumento sucessivamente, no máximo no numero de coordenadas não nulas de y, podemos definir o elemento $s = s_l ... s_1$ de modo que $sy \neq 0$ e cada coordenada pertence a $\frac{A}{J} \cap \frac{A}{J_i}$, e assim $sy \in \frac{A}{J}$. Isto quer dizer que C é uma extensão essencial de $\frac{A}{J}$. Como C é um módulo injetivo segue da Proposição 1.3.47 que $C \cong E(\frac{A}{J})$. $\square$

No teorema anterior precisamos exigir que os módulos $E(\frac{A}{J_i})$ fossem indecomponíveis. O resultado a seguir mostra exatamente quando isto ocorre.

Teorema 2.2.4. *${}_AE$ é um módulo injetivo e indecomponível se e somente se $E \cong E(\frac{A}{J})$, onde J é um ideal à esquerda irredutível de A. Além disso, se $0 \neq x \in E$ então $E \cong E(\frac{A}{ann_l(x)})$.*

Demonstração. $\Leftarrow$) Consideremos o módulo $\frac{A}{J}$, onde J é um ideal à esquerda irredutível de A. Desta maneira, não existem ideais à esquerda K e L de A contendo propriamente J e tais que $K \cap L = J$, isto é, não existem submódulos não nulos de $\frac{A}{J}$ cuja interseção seja o módulo trivial. Assim, pela Proposição 2.2.2 concluímos que $E(\frac{A}{J})$ é um módulo indecomponível.

$\Rightarrow$) Como E é o fecho injetivo de qualquer um de seus submódulos, então temos $E \cong E(\frac{A}{ann_l(x)})$ para qualquer elemento não nulo $x \in E$, pois $Ax \cong \frac{A}{ann_l(x)}$. Só resta mostrar que $ann_l(x)$ é um ideal irredutível. Suponhamos que $ann_l(x)$ tem uma decomposição irreduntante $\{K, L\}$. Podemos identificar $\frac{A}{ann_l(x)}$, da mesma forma como foi feito na prova do Teorema 2.2.3, com um submódulo de $C = E(\frac{A}{K}) \oplus E(\frac{A}{L})$. Notamos primeiramente que $\frac{A}{K} \cap \frac{A}{ann_l(x)} \neq 0$, pois, como $\{K, L\}$ é uma decomposição irredundante de $ann_l(x)$ temos que $0 \neq [L]_{ann_l(x)} \cong ([L]_K, [L]_L) = ([L]_K, [0]_L)$, onde $[L]_K$ (respectivamente, $[L]_{ann_l(x)}$) é simplesmente a imagem de $L \subseteq A$ mediante a projeção $A \to \frac{A}{K}$ (respectivamente, $A \to \frac{A}{ann_l(x)}$). Seja D o módulo indecomponível $E_C(\frac{A}{ann_l(x)})$. Assim da indecomponibilidade de D e do fato que $0 \neq \frac{A}{K} \cap \frac{A}{ann_l(x)} \subseteq E_C(\frac{A}{K}) \cap D$, temos que $D = E_D(E(\frac{A}{K}) \cap D)$. Logo, pelo Lema 2.1.1, segue que a projeção de D em $E(\frac{A}{K})$ é um monomorfismo. Por outro lado, seja $a \notin K$ então $0 \neq [a]_{ann_l(x)} \cong ([a]_K, [a]_L) \in D$, com isto evidencia-se que a projeção de D em $E(\frac{A}{K})$ contém $\frac{A}{K}$. Ou seja, que a imagem de D mediante a projeção em $E(\frac{A}{K})$ é um módulo injetivo que contém $\frac{A}{K}$. Pela condição de minimalidade do fecho temos $E(\frac{A}{K}) \cong D$ e portanto $E(\frac{A}{K})$ é indecomponível. Da mesma forma, prova-se que $E(\frac{A}{L})$ também é indecomponível. Com isto e o Teorema 2.2.3 temos $E(\frac{A}{ann_l(x)}) \cong E(\frac{A}{K}) \oplus E(\frac{A}{L})$, o que contradiz o fato que E é indecomponível. Portanto, $ann_l(x)$ é irredutível. $\square$

É fácil ver que os ideais irredutíveis de $\mathbb{Z}$ são exatamente os ideais primos de $\mathbb{Z}$. Logo um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo indecomponível é, a menos isormorfismo, $\mathbb{Q}$ ou é da forma $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, com p primo. Pois, como 0 é um ideal primo segue do Exemplo 1.3.49 que $\mathbb{Q} = E(\mathbb{Z}) = E(\frac{\mathbb{Z}}{0})$ é um módulo injetivo indecomponível. Se $E \neq \mathbb{Q}$ é injetivo indecomponível então segue do teorema anterior e do Exemplo 1.3.50 que $E \cong E(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}) \cong E(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$, onde p é um número primo. Isto também é consequência do Teorema 2.3.1 da próxima seção.

Sabemos que aplicando o Lema de Zorn à família dos ideais próprios de um anel A obtemos pelo menos um ideal maximal J em A, visto que estamos assumindo que os anéis são unitários, o qual também é irredutível. Logo $E(\frac{A}{J})$ é um A-módulo injetivo indecomponível. Em outras palavras, na categoria dos A-módulos o conjunto de módulos injetivos indecomponíveis é não vazio.

Teorema 2.2.5. *Seja A um anel noetheriano à esquerda. Então, todo A-módulo injetivo tem uma decomposição como soma direta de submódulos injetivos indecomponíveis.*

Demonstração. Seja ${}_AM$ um módulo injetivo. Aplicaremos o Lema de Zorn à família $\mathfrak{F}$ dos submódulos injetivos de M que são somas diretas de submódulos injetivos indecomponíveis. Primeiro notaremos que M possui um submódulo injetivo indecomponível, e assim $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. De fato, para $x \neq 0$ o submódulo $A \cdot x \cong \frac{A}{ann_l(x)}$ não pode conter uma soma direta infinita pois $\frac{A}{ann_l(x)}$ é um módulo noetheriano (ver Proposição 1.3.9). Por isto e pelo fato de $Ax \subseteq E(Ax)$ ser uma extensão essencial temos que $E(Ax)$ pode se decompor no máximo em um numero finito de somandos diretos não nulos. Consequentemente, deve existir um somando direto indecomponível de $E(A \cdot x)$, ou seja, $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Além disso, como toda cadeia na família tem um elemento máximo (a saber, a união da cadeia). Portanto, pelo Lema de Zorn, $\mathfrak{F}$ tem um elemento maximal $\bigoplus M_i$, o qual é um módulo injetivo pois A é noetheriano. Logo $M = E \oplus (\bigoplus M_i)$, onde E é algum submódulo injetivo de M. Analogamente ao que foi feito acima, se $E \neq 0$ então ele contém um submódulo injetivo indecomponível. Mas pela maximalidade de $\bigoplus M_i$ isto não pode acontecer. Portanto, $M = \bigoplus M_i$. $\square$

Como consequência temos o sugestivo resultado que caracteriza os $\mathbb{Z}$-módulos injetivos. isto é, caracteriza todos os grupos abelianos divisíveis.

Corolário 2.2.6. *Um $\mathbb{Z}$-módulo é injetivo se e somente se decompõe-se como uma soma direta de elementos da coleção $\{\mathbb{Z}_{p^\infty} \mid p \text{ primo em } \mathbb{Z}\} \cup \{\mathbb{Q}\}$.*

Demonstração. Segue do teorema anterior e dos comentários feitos após a demonstração do Teorema 2.2.4. $\square$

Exemplo 2.2.7. *Seja $n > 1$ um natural e $n = p_1^{\lambda_1}...p_k^{\lambda_k}$ sua decomposição em números primos. Assim, temos que $\mathbb{Z}_n \cong \prod_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{{p_i}^{\lambda_i}}$ é uma decomposição em $\mathbb{Z}_n$-módulos injetivos indecomponíveis.*

Proposição 2.2.8. *Sejam ${}_AE$ um módulo injetivo e $H = Hom_A(E, E)$. Então H é um anel local se e somente se E é um módulo indecomponível.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Se E fosse um módulo decomponível, então H teria um elemento idempotente não trivial, mas pela Proposição 1.2.5 isto não pode acontecer.

$\Leftarrow$) Primeiro mostrarmos que $f : E \to E$ é uma unidade de H se e somente se $ker(f) = 0$. De fato, se $ker(f) = 0$ então $f(E)$ é um submódulo injetivo de E, e com isto, $f(E)$ é um somando direto de E. Mas, como E é indecomponível então $f(E) = E$. Isto é, f é uma unidade de H. A recíproca é trivial. Suponhamos agora que f e g não são unidades de H. Do anterior e da Proposição 2.2.2 segue que $ker(f) \neq 0$, $ker(g) \neq 0$ e $ker(f) \cap ker(g) \neq 0$. Assim $ker(f+g) \supseteq ker(f) \cap ker(g) \neq 0$. Portanto, pela Definição 1.2.4 temos que H é um anel local. $\square$

Em particular, a proposição anterior mostra que qualquer decomposição de módulos injetivos indecomponíveis de um módulo M é uma decomposição local de M. Como consequência disto e do Teorema 1.3.26 temos o seguinte resultado.

Corolário 2.2.9. *Seja $\{E_i\}_{i \in I}$ uma decomposição de módulos injetivos indecomponíveis de M. Se $\{F_j\}_{j \in J}$ é outra decomposição de M de módulos indecomponíveis, então existe uma bijeção $\sigma : I \to J$ tal que $E_i \cong F_{\sigma(i)}$, para todo $i \in I$.*

2.3 Módulos Injetivos sobre Anéis Noetherianos Comutativos

O Teorema 2.2.5 nos diz que todo módulo injetivo sobre um anel noetheriano pode ser escrito como uma soma direta de módulos injetivos indecomponíveis. Assim, nesta seção estudamos mais detalhadamente os módulos injetivos indecomponíveis sobre anéis noetherianos comutativos. Neste sentido, no decorrer desta seção, A sempre denotará um anel noetheriano e comutativo.

Na proposição a seguir pensaremos um módulo injetivo indecomponível como a classe dos módulos injetivos indecomponíveis isomorfos a este.

Teorema 2.3.1. *A correspondência $P \mapsto E(\frac{A}{P})$ define uma bijeção entre $Spec(A)$ e o conjunto das classes de A-módulos injetivos indecomponíveis. Se Q é um ideal irredutível P-primário então $E(\frac{A}{P}) \cong E(\frac{A}{Q})$.*

Demonstração. Notamos que um ideal primo P de A também é irredutível. Logo, pelo Teorema 2.2.4 o módulo injetivo $E(\frac{A}{P})$ é indecomponível. Desta maneira, a correspondência está bem definida.

Sejam dois ideais primos P_1 e P_2 tais que $E(\frac{A}{P_1}) \cong E(\frac{A}{P_2})$. Da definição de ideal primo segue que $P_1 = ann(x)$ e $P_2 = ann(y)$, para todos os elementos x, y não nulos em $\frac{A}{P_1}$ e $\frac{A}{P_2}$, respectivamente. Por outro lado, pelo isomorfismo assumido por hipótese, obtemos que $\frac{A}{P_2}$ esta imerso em $E(\frac{A}{P_1})$ e então, da essencialidade da extensão $\frac{A}{P_1} \subseteq_e E(\frac{A}{P_1})$, segue que $\frac{A}{P_1} \cap \frac{A}{P_2} \neq 0$. Consequentemente, para $0 \neq z \in \frac{A}{P_1} \cap \frac{A}{P_1}$, temos que $P_1 = ann(z) = P_2$, o que prova a injetividade da correspondência.

Seja E um módulo indecomponível. Iremos mostrar que existe um ideal primo P tal que $E \cong E(\frac{A}{P})$. De fato, pelo Teorema 2.2.4, existe um ideal irredutível Q de A tal que $E \cong E(\frac{A}{Q})$. Como A é noetheriano segue que Q é um ideal primário, e temos que $P = rad(Q)$ é um ideal primo. Se $P = Q$, não temos nada a mostrar. Suponhamos então que $Q \subsetneq P$. Assim, pela Proposição 1.2.26, existe um $n > 1$ tal que $P^n \subseteq Q$. Escolhamos n mínimo com esta propriedade. Seja $b \in P^{n-1}$ e $b \notin Q$, logo $\bar{b} = b + Q \in \frac{A}{Q}$ é tal que $P \subseteq ann(\bar{b})$. Reciprocamente, se $a \in ann(\bar{b})$ então $ab \in Q$ e $b \notin Q$. Pela primalidade de Q segue que $a \in P$. Logo, $P = ann(\bar{b})$. Do anterior segue que existe $\bar{b} \in E(\frac{A}{Q})$ com anulador P, portanto, pelo Teorema 2.2.4 concluímos que $E(\frac{A}{Q}) \cong E(\frac{A}{P})$. □

Exemplo 2.3.2. *Seja $n > 1$ um natural e $n = p_1^{\lambda_1}...p_k^{\lambda_k}$ sua decomposição em núme-*

ros primos. O conjunto das classes de $\mathbb{Z}_n$-módulos injetivos é $\{[\mathbb{Z}_{p_1{}^{\lambda_1}}], ..., [\mathbb{Z}_{p_k{}^{\lambda_k}}]\}$, ver Exemplo 2.2.7. Mais ainda, um $\mathbb{Z}_n$-módulo é injetivo se e somente se é soma direta de elementos destas classes.

Lema 2.3.3. *Seja P um ideal primo de A e $E = E(\frac{A}{P})$. Então, as seguintes afirmações são validas:*

1. *Para todo $0 \neq x \in E$, tem-se que $rad(ann(x)) = P$.*

2. *Se Q é um ideal irredutível P-primário de A, então existe $0 \neq x \in E$ tal que $ann(x) = Q$.*

3. *Se $a \in A \setminus P$ então a correspondência $x \mapsto ax$ define um automorfismo de E. Além disso, $ann(x) = ann(ax)$.*

Demonstração.

1. Como E é um módulo injetivo indecomponível, então para todo x não nulo em E, temos que $E(\frac{A}{ann(x)}) \cong E$, onde $ann(x)$ é irredutível. Por outro lado, como A é noetheriano, segue que o ideal $ann(x)$ é primário. Assim, pela argumentação usada na demonstração da proposição anterior segue que $E(\frac{A}{ann(x)}) \cong E(\frac{A}{rad(ann(x))})$. Logo, o módulo E tem como associado os ideais primos P e $rad(ann(x))$. Portanto, pelo Teorema 2.3.1 segue que $P = rad(ann(x))$.

2. Pelo teorema anterior $E \cong E(\frac{A}{Q})$. Seja $0 \neq \bar{x} \in \frac{A}{Q}$ com $x \in A \setminus P$. Então, temos que $Qx \subseteq Q$, isto é, $Q \subseteq ann(\bar{x})$. Seja agora $b \in ann(\bar{x})$, ou seja, $bx \in Q$ e $x \notin P$. Então, $b \in Q$, pois Q é P-primário. Logo, $Q = ann(\bar{x})$.

3. Seja $0 \neq x \in E$. Segue do item 1 que $P = rad(ann(x)) \supseteq ann(x)$. Assim, P contém todos os anuladores de elementos não nulos de E e, portanto, para

$a \notin P$, a correspondência $x \mapsto ax$ é injetiva, pela Proposição 2.2.8, esta define um automorfismo de E. Do anterior segue particularmente que $ann(x) = ann(ax)$.

$\square$

Para deixar mais clara a correspondência entre os ideais primos e as classes de isomorfismos dos módulos injetivos indecomponíveis, notamos que o item 1 do lema anterior diz que para qualquer $0 \neq x \in E$, onde E é um módulo injetivo indecomponível, o ideal primo que se corresponde com ele é do radical de $ann(x)$.

Definição 2.3.4. *Sejam M um A-módulo injetivo com uma decomposição de módulos indecomponíveis $\{E_i\}_{i\in I}$ e P um ideal primo fixo. Definimos os conjuntos*

$$M_P = \{x \in M \mid P \subseteq rad(ann(x))\}$$

$$N_P = \{x \in M \mid P \subsetneq rad(ann(x))\}$$

Além disso, definimos a P-componente de M como o submódulo

$$H_P = \bigoplus\{E_k \mid rad(ann(x)){=}P,\ \text{para todo } 0 \neq x \in E_k\}.$$

Na Proposição 2.2.5 mostramos que um módulo injetivo sobre um anel noetheriano pode se decompor como uma soma direta de módulos injetivos indecomponíveis. Além disso, do Corolário 2.2.9 segue que as P-componentes estão isomorficamente definidas, para qualquer decomposição de módulos injetivos indecomponíveis de M.

Teorema 2.3.5. *Seja M um A-módulo injetivo com uma decomposição de módulos indecomponíveis $\mathcal{F} = \{E_i\}$. Então as seguintes condições são válidas.*

1. *M_P é uma soma direta dos $E_{i_k} \in \mathcal{F}$ tais que $P \subseteq rad(ann(x))$, para algum $0 \neq x \in E_{i_k}$.*

2. *N_P é uma soma direta dos $E_{i_k} \in \mathcal{F}$ tais que $P \subsetneq rad(ann(x))$, para algum $0 \neq x \in E_{i_k}$.*

3. *M é a soma direta das componentes H_P. Além disso, $H_P \cong \frac{M_P}{N_P}$.*

4. *Se P é um ideal maximal, então $M_P = H_P$.*

Demonstração. 1. Seja $x \in M$ tal que $x = x_1 + ... + x_n$ e $0 \neq x_i \in E_{j_i}$. Como $ann(x) = \bigcap ann(x_i)$ temos, pelo Teorema 1.2.14, que $rad(ann(x)) = \bigcap rad(ann(x_i))$. Logo, $x \in M_P$ se e somente se $P \subseteq rad(ann(x_i))$, para todo x_i.

2. A prova é análoga à feita no item anterior.

3. Por um lado é evidente que as componentes H_P são somandos diretos de M. Se $x \in M$ então $x = x_1 + ... + x_n$ onde cada $0 \neq x_i \in E_{j_i} \in \mathcal{F}$, e pelo item 1 do Lema 2.3.3 segue que cada $x_i \in H_P$, para algum primo P. Em outras palavras, M é soma direta das componentes H_P. Como consequência imediata dos itens 1 e 2, temos que $H_P \cong \frac{M_P}{N_P}$.

4. Decorre dos itens anteriores.

□

No que segue, escreveremos E_i para denotar os submódulos de E definidos no enunciado do próximo resultado.

Teorema 2.3.6. *Sejam P um ideal primo de A, $E = E(\frac{A}{P})$ e $E_i = \{x \in E \mid P^i x = 0\}$. Então:*

1. *E_i é um submódulo de E, $E_i \subseteq E_{i+1}$ e $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.*

2. *$\bigcap_{x \in E_i} ann(x) = P^{(i)}$.*

3. *Os elementos não nulos de $\frac{E_{i+1}}{E_i}$ têm como anulador o ideal primo P. Reciprocamente, os elementos de $\frac{E}{E_i}$ cujo anulador é o ideal primo P, pertencem ao módulo $\frac{E_{i+1}}{E_i}$.*

4. *Seja K o corpo de frações do domínio $\frac{A}{P}$. Então, $\frac{E_{i+1}}{E_i}$ é um espaço vetorial sobre o corpo K.*

5. *Os K-espaços vetoriais E_1 e K são isomorfos.*

Demonstração. 1. É fácil ver que E_i é um submódulo de E e que $E_i \subseteq E_{i+1}$. Seja $x \in E$. Então, pelo Lema 2.3.3, temos que $rad(ann(x)) = P$. Da Proposição 1.2.26 segue que existe uma potência i de P tal que $P^i \subseteq ann(x)$, ou seja, $P^i x = 0$. Em outras palavras, $x \in E_i$, para algum natural i.

2. Seja $\{Q_1, ..., Q_n, P^{(i)}\}$ uma decomposição primária irredundante de P^i. Então pela definição de E_i temos que $P^i \subseteq \bigcap_{x \in E_i} ann(x)$. Do Lema 2.3.3 segue que cada $ann(x)$ é P-primário e que $\bigcap_{x \in E_i} ann(x)$ é P-primário. Desta maneira, $P^i = Q_1 \cap ... \cap Q_n \cap (P^{(i)} \cap \bigcap_{x \in E_i} ann(x))$, pela indecomponibilidade da decomposição dada temos que $Q_1 \cap ... \cap Q_n \nsubseteq P^{(i)}$ e portanto, $Q_1 \cap ... \cap Q_n \nsubseteq P^{(i)} \cap \bigcap_{x \in E_i} ann(x)$, ou seja, da decomposição $\{Q_1, ..., Q_n, P^{(i)} \cap \bigcap_{x \in E_i} ann(x)\}$ de P^i, podemos obter uma irredundante que contenha $P^{(i)} \cap \bigcap_{x \in E_i} ann(x)$. Logo, pela unicidade da componente P-primária de P^i, concluímos que $P^{(i)} = P^{(i)} \cap \bigcap_{x \in E_i} ann(x)$, ou seja, $P^{(i)} \subseteq \bigcap_{x \in E_i} ann(x)$. Como P^i possui uma decomposição primária de ideais irredutíveis onde sua componente P-primária é o ideal irredutível $P^{(i)}$, segue então, do Lema 2.3.3 que existe um $x \in E_i$ tal que $ann(x) = P^{(i)}$. Logo, $\bigcap_{x \in E_i} ann(x) \subseteq P^{(i)}$.

3. Seja $x \in E_{i+1} \setminus E_i$. Então $Px \subseteq E_i$, ou seja, $P \subseteq ann(\bar{x})$, onde $\bar{x} \in \frac{E_{i+1}}{E_i}$. Por outro lado, suponhamos que existe $a \in ann(\bar{x}) \setminus P$, isto é, $ax \in E_i$. Pelo item 3 do Lema 2.3.3 temos que $ann(x) = ann(ax)$. Assim, $P^i(ax) = 0$ o que implica $P^i x = 0$. Mas isto é contraditório, pois $x \in E_{i+1} \setminus E_i$. Portanto, $P = ann(\bar{x})$. A reciproca é evidente, os elementos de $\frac{E}{E_i}$, cujo anulador é o ideal P, são exatamente os elementos de $\frac{E_{i+1}}{E_i}$.

4. Primeiro definamos a ação de K sobre $\frac{E_{i+1}}{E_i}$. Seja $\frac{\bar{a}}{\bar{s}} \in K$ e $x \in \frac{E_{i+1}}{E_i}$. Pelo item 3 do Lema 2.3.3, existe um único $y \in E$ tal que $x = sy$. Definimos $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\bar{x} = \bar{a}\bar{y}$ (notamos que $\bar{a}\bar{y}$ está bem definida pois $PE_{i+1} \subseteq E_i$, ou seja, E_{i+1} é um $\frac{A}{P}$-módulo). Agora, vamos mostrar que esta operação está bem definida:

   (a) Vejamos que se $x_1, x_2 \in E_{i+1}$ tais que $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, então $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\bar{x}_1 = \frac{\bar{a}}{\bar{s}}\bar{x}_2$. De fato, sejam $x_1 = sy_1$ e $x_2 = sy_2$ então $s(ay_1 - ay_2) = ax_1 - ax_2 \in E_i$, como $s \notin P$ temos que $ay_1 - ay_2 \in E_i$, isto é, $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\bar{x}_1 = \frac{\bar{a}}{\bar{s}}\bar{x}_2$.

   (b) Se $\frac{\bar{a}}{\bar{s}} = \frac{\bar{a}_1}{\bar{s}_1}$ então $as_1 - a_1 s \in P$. Seja $\bar{x} \in \frac{E_{i+1}}{E_i}$, com $x \in E_{i+1}$; Temos que mostrar que $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\bar{x} = \frac{\bar{a}_1}{\bar{s}_1}\bar{x}$. Sejam $x = sy$ e $x = s_1 y_1$ então $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\bar{x} = \bar{a}\bar{y}$ e $\frac{\bar{a}_1}{\bar{s}_1}\bar{x} = \bar{a}_1\bar{y}_1$. Como $as_1 - a_1 s \in P$ temos que $(as_1 - a_1 s)x \in E_i$, e $(as_1 - a_1 s)x = as_1 x - a_1 sx = ass_1 y - a_1 ss_1 y_1 = ss_1(ay - a_1 y_1)$, onde $ss_1 \notin P$. Assim pelo item 3 do Lema 2.3.3 segue que $(ay - a_1 y_1) \in E_i$. Logo, $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\bar{x} = \bar{a}\bar{y} = \bar{a}_1\bar{y}_1 = \frac{\bar{a}_1}{\bar{s}_1}\bar{x}$.

   Os demais axiomas de espaço vetorial se provam rotineiramente segundo as ideias da boa definição. Portanto, $\frac{E_{i+1}}{E_i}$ é um espaço vetorial sobre K.

5. Como $E_0 = 0$, então pelo item anterior temos que E_1 é um K-espaço vetorial. Fixando x não nulo em E_1, definimos o K-homomorfismo $f_x : K \to E_1$, por $f_x(\frac{a+P}{b+P}) = \frac{a+P}{b+P}x$. Pela essencialidade de $E_1 \subseteq E$ temos, para todo elemento

não nulo $z \in E_1$, que existem $t, w \in A \setminus P$ tais que $tz = wx$, logo, $f_x(\frac{w+P}{t+P}) = \frac{w+P}{t+P}x = z$, isto é, f_x é um epimorfismo e portanto, f_x é um isomorfismo.

$\square$

O teorema anterior evidencia que em geral os A-módulos injetivos indecomponíveis tem uma caracterização semelhante a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Mais precisamente, neste caso temos que $E_i = \mathbb{Z}_{p^i}$. Além disso, $\frac{\mathbb{Z}_{p^{i+1}}}{\mathbb{Z}_{p^i}}$ é um $\mathbb{Z}_p$-espaço vetorial. No teorema anterior não consegue-se falar da dimensão do espaço vetorial de $\frac{E_{i+1}}{E_i}$. O Teorema 2.3.20 especificará a dimensão deste espaço vetorial. Algum trabalho para tanto será necessário. No caso particular de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, é fácil ver que $\frac{\mathbb{Z}_{p^{i+1}}}{\mathbb{Z}_{p^i}}$ tem dimensão 1, com base $\{\frac{1}{p^{i+1}} + \mathbb{Z}_{p^i}\}$.

Proposição 2.3.7. *Sejam P um ideal primo do anel A, K o corpo de frações de $\frac{A}{P}$ e P' o ideal maximal de A_p. Então,*

1. *K e $\frac{A_p}{P'}$ são isomorfos como corpos.*

2. *$\frac{P'^i}{P'^{i+1}}$ é um K-espaço vetorial.*

3. *Os K-espaços vetoriais $\frac{P^i}{P^{i+1}} \otimes_{\frac{A}{P}} K$ e $\frac{P'^i}{P'^{i+1}}$ são K-isomorfos.*

Demonstração. 1. Consideramos a aplicação $f : K \to \frac{A_p}{P'}$, definida por $f(\frac{a+P}{s+P}) = \frac{a}{s} + P'$. Sejam $a_1, a_2 \in A$; $s_1, s_2 \notin P$. Então temos

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + P}{s_1 + P} = \frac{a_2 + P}{s_2 + P} &\Leftrightarrow a_1 s_2 - a_2 s_1 \in P \\
&\Leftrightarrow \frac{a_1 s_2 - a_2 s_1}{s_1 s_2} \in P' \\
&\Leftrightarrow \frac{a_1}{s_1} - \frac{a_2}{s_2} \in P' \\
&\Leftrightarrow \frac{a_1}{s_1} + P' = \frac{a_2}{s_2} + P' \\
&\Leftrightarrow f\left(\frac{a_1 + P}{s_1 + P}\right) = f\left(\frac{a_2 + P}{s_2 + P}\right)
\end{aligned}$$

e segue que f está bem definida e é injetiva. A sobrejetividade desta aplicação é evidente, logo f é um isomorfismo de corpos.

2. Como $\frac{P'^i}{P'^{i+1}}$ é um $\frac{A_p}{P'}$-espaço vetorial. Pelo item anterior, segue que $\frac{P'^i}{P'^{i+1}}$ é um K-espaço vetorial.

3. Os quocientes $\frac{P^i}{P^{i+1}}$ e $\frac{P'^i}{P'^{i+1}}$ têm estruturas naturais de $\frac{A}{P}$-módulo. Além disso, $\frac{P^i}{P^{i+1}} \otimes_{\frac{A}{P}} K$ é um K-espaço vetorial com a ação definida pelo produto na componente à direita K, isto é, $(a \otimes b)k = a \otimes (kb)$. Consideremos agora a aplicação $\hat{h} : \frac{P^i}{P^{i+1}} \times K \to \frac{P'^i}{P'^{i+1}}$, definida por, $(a + P^{i+1}, \frac{r+P}{s+P}) \mapsto \frac{ar}{s} + P'^{i+1}$.

   Sejam a_j, b_j, s_j $(j = 1, 2)$ elementos tais que $a_j \in P^i$, $b_j \in A$, $s_j \in A \setminus P$, $a_1 - a_2 \in P^{i+1}$ e $\frac{b_1+P}{s_1+P} = \frac{b_2+P}{s_2+P}$. Então, $b_1 s_2 - b_2 s_1 \in P$, logo $(a_1 - a_2) b_1 s_2 \in P^{i+1}$ e $a_2(b_1 s_2 - b_2 s_1) \in P^{i+1}$. Como P^{i+1} é um ideal, segue que $(a_1 - a_2) b_1 s_2 + a_2(b_1 s_2 - b_2 s_1) = a_1 b_1 s_2 - a_2 b_2 s_1 \in P^{i+1}$ e, portanto, $\frac{a_1 b_1 s_2 - a_2 b_2 s_1}{s_1 s_2} = \frac{a_1 b_1}{s_1} - \frac{a_2 b_2}{s_2} \in P'^{i+1}$. Consequentemente $\hat{h}$ está bem definida e é um homomorfismo $\frac{A}{P}$-bilinear.

   Do anterior temos um $\frac{A}{P}$-homomorfismo $h : \frac{P^i}{P^{i+1}} \otimes K \to \frac{P'^i}{P'^{i+1}}$ tal que $h(a \otimes b) = \hat{h}(a, b)$. Notamos que h é um K-homomorfismo pois $h(a \otimes (kb)) = a(kb) + P'^{i+1} = k(ab + P'^{i+1}) = kh(a \otimes b)$.

   Suponhamos agora que $h(\sum_{j=1}^{n} (\bar{a}_j \otimes \frac{r_j+P}{s_j+P})) = 0$. Então,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} h(\bar{a}_j \otimes \frac{r_j+P}{s_j+P}) = \sum_{j=1}^{n} (\frac{a_j r_j}{s_j} + P'^{i+1})$$

   Ou seja, $\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j r_j}{s_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j r_j s_1 ... \hat{s}_j ... s_n}{s_1 ... s_n} \in P'^{i+1}$. Assim, $\sum_{j=1}^{n} a_j r_j s_1 ... \hat{s}_j ... s_n \in P^{i+1}$.

Consequentemente temos as seguintes igualdades,

$$
\begin{aligned}
0 &= (\sum_{j=1}^{n} a_j r_j s_1 ... \hat{s}_j ... s_n + P^{i+1}) \otimes \frac{1+P}{s_1 ... s_n + P} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(a_j r_j s_1 ... \hat{s}_j ... s_n + P^{i+1} \otimes \frac{1+P}{s_1 ... s_n + P} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (r_j s_1 ... \hat{s}_j ... s_n + P) \left(a_j + P^{i+1} \otimes \frac{1+P}{s_1 ... s_n + P} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(a_j + P^{i+1} \otimes \frac{r_j s_1 ... \hat{s}_j ... s_n + P}{s_1 ... s_n + P} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(a_j + P^{i+1} \otimes \frac{r_j + P}{s_j + P} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\bar{a}_j \otimes \frac{r_j + P}{s_j + P} \right)
\end{aligned}
$$

Portanto, h é injetivo. A sobrejetividade é evidente, pois, se $\frac{a}{s} + P'^{i+1} \in \frac{P'^{i}}{P'^{i+1}}$ então $h\left(a + P^{i+1} \otimes \frac{1+P}{s+P}\right) = \frac{a}{s} + P'^{i+1}$.

□

O resultado a seguir mostra que as propriedades de injetividade e indecomponibilidade são preservadas pela localização do anel.

Proposição 2.3.8. *Sejam P um ideal primo de A e $E = E(\frac{A}{P})$. Então E é um A_p-módulo injetivo indecomponível.*

Demonstração. Notamos, pelo item 3 do Lema 2.3.3, que dados $x \in E$ e $s \notin P$ existe um único $y \in E$ tal que $x = sy$. Usando este fato definimos a ação de A_p em E. Isto é, dados $\frac{r}{s} \in A_p$ e $x \in E$, definimos $\frac{r}{s}x := ry$, onde $y \in E$ é tal que $x = sy$. Sejam $\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2} \in A_p$ tais que $\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2}$. Então existe $u \in A \backslash P$ tal que $u(r_1 s_2 - r_2 s_1) = 0$, ou seja, $r_1 s_2 u = r_2 s_1 u$. Se $\frac{r_1}{s_1}x = r_1 y_1$ e $\frac{r_2}{s_2}x = r_2 y_2$, onde $s_1 y_1 = x = s_2 y_2$, segue que $(s_1 s_2 u)(r_2 y_2) = (r_2 s_1 u)(s_2 y_2) = (r_1 s_2 u)(s_1 y_1) = (s_1 s_2 u)(r_1 y_1)$. Como $s_1 s_2 u \in A \setminus P$

segue pelo item 3 do Lema 2.3.3 que $r_1y_1 = r_2y_2$. Assim, $\frac{r_1}{s_1}x = \frac{r_2}{s_2}x$ e segue que esta ação está bem definida. Além disso, se mostra facilmente que E é um A_p-módulo. Dados I um ideal de A_p e $f : I \to E$ um A_p-homomorfismo, iremos mostrar que é possível estender f a A_p e, pelo critério de Baer, obtemos que E é um A_p-módulo injetivo. De fato, consideramos o ideal $\hat{I} = \{a \in A \mid \frac{a}{1} \in I\}$ de A e o A-homomorfismo $\hat{f} : \hat{I} \to E$ definido por $\hat{f}(a) = f(\frac{a}{1})$, para todo $a \in \hat{I}$. Como E é A-injetivo então existe um homomorfismo $\hat{h}$ que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \hat{I} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\hat{f}"] & A \arrow[dl, "\hat{h}"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Seja a aplicação $h : A_p \to E$ definida por $h(\frac{a}{s}) = \frac{1}{s}\hat{h}(a)$. Notamos que h esta bem definida, pois, se $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$, então existe $u \in A \setminus P$ tal que $u(at - bs) = 0$ e com isto, $u(t\hat{h}(a) - s\hat{h}(b)) = 0$. Assim, pelo item 3 do Lema 2.3.3 temos que $t\hat{h}(a) = s\hat{h}(b)$. Dessa maneira, $h(\frac{a}{s}) = \frac{1}{s}\hat{h}(a) = \frac{1}{t}\hat{h}(b) = h(\frac{b}{t})$. É fácil ver que h é um A_p-homomorfismo. Além disso, h estende f a A_p. De fato, seja $\frac{a}{s} \in I$ então $h(\frac{a}{s}) = \frac{1}{s}\hat{h}(a) = \frac{1}{s}\hat{f}(a) = \frac{1}{s}f(\frac{a}{1}) = f(\frac{a}{s})$ e com isto, E é A_p-injetivo.

Suponhamos agora que $E = M_1 \oplus M_2$, onde M_1 e M_2 são A_p-submódulos de E. Em particular, M_1 e M_2 são A-módulos. Devido a E ser indecomponível como A-módulo, segue que $E = M_1$ ou $E = M_2$. □

Lema 2.3.9. *Nos mesmos termos da proposição anterior, $ann_{A_p}(x) = A_p ann_A(x)$, para todo $x \in E$.*

Demonstração. Notamos que pelo item 3 do Lema 2.3.3, $\frac{a}{s}x = 0$ se e somente se $ax = 0$. □

O resultado a seguir mostra que se o A-módulo injetivo indecomponível E se corresponde com o ideal primo P, então E, como A_p-módulo, se corresponde com o ideal P' (lembramos que $P' = PA_p$).

Corolário 2.3.10. *Nos termos da proposição anterior, $E = E(\frac{A_p}{P'})$, isto é, o fecho injetivo do A_p-módulo $\frac{A_p}{P'}$ é o fecho injetivo do A-módulo $\frac{A}{P}$.*

Demonstração. Pelo item 3 do Lema 2.3.3 e o Lema 2.3.9 temos que existe $x \in E$ tal que $P' = ann_{A_p}(x)$. Portanto, pelo Lema 2.3.3 temos que $E = E(\frac{A_p}{P'})$. □

Os conjuntos definidos em E dados pelo Teorema 2.3.6, como A-módulos e como $\hat{A}_p$-módulos são os mesmos. Mais precisamente,

Corolário 2.3.11. *Sejam $E_i = \{x \in E \mid P^i x = 0\}$ e $E'_i = \{x \in E \mid P'^i x = 0\}$. Então $E_i = E'_i$.*

Demonstração. Segue do Lema 2.3.9. □

O lema a seguir mostra que em E podemos definir uma estrutura de $\hat{A}_p$-módulo.

Lema 2.3.12. *E é um $\hat{A}_p$-módulo.*

Demonstração. Sejam $x \in E$ e $[(x_n)] \in \hat{A}_p$. Então, pelo item 1 do Teorema 2.3.6, existe um natural i tal que $P^i x = 0$. Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in P'^i$, para todo $n, m \geq N$. Desta forma definimos $(x_n)x$ como $x_N x$.

Para ver que esta ação está bem definida, consideramos (y_n) uma sequência de Cauchy tal que $(y_n)x = y_{N_1}x$. Se $(x_n) \equiv (y_n)$. Iremos mostrar que $x_N x = y_{N_1}x$. De fato, sejam N_2 tal que $x_n - y_n \in P'^i$, para todo $n \geq N_2$, e $M = max\{N, N_1, N_2\}$. Do anterior temos que, $(x_M - x_N) - (y_M - y_{N_1}) - (x_M - y_M) = y_{N_1} - x_N \in P'^i$.

Logo, do Corolário 2.3.11, segue que $(y_{N_1} - x_N)x = 0$, ou seja, $x_N x = y_{N_1} x$. Com esta ação verifica-se facilmente que E é um $\hat{A}_p$-módulo. $\square$

O resultado a seguir mostra que os processos de localização em P e completamento mediante a topologia P-ádica preserva a propriedade de ser um módulo injetivo indecomponível em $E(\frac{A}{P})$. Além disso, se E se corresponde com o ideal primo P como A-módulo, então E se corresponde com $\widehat{PA_p}$ como $\hat{A}_p$-módulo. É notável que os resultados da Proposição 2.3.8 e o Corolário 2.3.10 poderiam ser obtidos mediante argumentos análogos aos que são feitos no teorema a seguir, mas o apresentamos desta forma para exibir duas formas alternativas de abordar esses Teoremas.

Teorema 2.3.13. *Seja $\bar{E}$ o fecho injetivo de E sobre $\hat{A}_p$. Então,*

1. *$\bar{E}$ é um $\hat{A}_p$-módulo injetivo indecomponível.*

2. *$\bar{E} = E(\frac{\hat{A}_p}{\hat{P}'})$.*

3. *$\bar{E} = E$.*

Demonstração. Notamos que $\bar{E}$ pode ser visto como um A_p-módulo, identificando-se cada $x \in A_p$ com a sequência constante definida por x.

1. Sejam M_1 e M_2 $\hat{A}_p$- submódulos não nulos de E. Então, podemos ver M_1 e M_2 como A_p-submódulos de E. Assim pela Proposição 2.3.8 temos que E é um A_p-módulo injetivo indecomponível e, consequentemente, $M_1 \cap M_2 \neq 0$. Portanto, pela Proposição 2.2.2, segue que $\bar{E}$ é um $\hat{A}_p$-módulo injetivo indecomponível.

2. Seja $x \in \frac{A}{P} \subseteq E \subseteq \bar{E}$. Iremos mostrar que $\hat{P}' = ann_{\hat{A}_p}(x)$. De fato, seja $(x_n) \in \hat{P}'$. Então, $(x_n)x = x_N x = \frac{p_N}{s_N}x = 0$, pois $\frac{p_N}{s_N} \in P'$, ou seja, $p_N \in P$.

Portanto, $\hat{P'} \subseteq ann_{\hat{A}_p}(x)$. Como $\hat{P'}$ é maximal temos que $\hat{P'} = ann_{\hat{A}_p}(x)$. Portanto, pelo Teorema 2.2.4 obtemos que $\bar{E} = E(\frac{\hat{A}_p}{\hat{P'}})$.

3. Pela Proposição 2.3.8 temos que E é A_p-injetivo. Desta forma, para algum A_p-submódulo C de $\bar{E}$, segue que $\bar{E} = E \oplus C$. Devido ao fato que $\bar{E}$ é $\hat{A}_p$-módulo injetivo indecomponível, para cada $c \in C$, existe um natural i tal que $\hat{P'^i} c = 0$.

   Seja $(x_n) \in \hat{A}_p$. Então existe N tal que $x_k - x_m \in P'^i$, para todo $k, m \geq N$. Em particular, $x_k - x_N \in P'^i$, para $k \geq N$. Segue então que a sequência $(x_n - x_N) \in \hat{P'^i}$. Assim, $0 = (x_n - x_N)x = (x_n)x - (x_N)x$ e, temos que, $(x_n)x = (x_N)x = x_N x \in C$. O anterior mostra que C é um $\hat{A}_p$-módulo e consequentemente, $\bar{E} = E \oplus C$ como $\hat{A}_p$-módulo. Mas como $\bar{E}$ é $\hat{A}_p$-indecomponível obtemos $\bar{E} = E$.

$\square$

De mesma forma que no processo de localização temos que os conjuntos definidos em E dados pelo Teorema 2.3.6 como A-módulos e como $\hat{A}_p$-módulos são os mesmos.

Corolário 2.3.14. *Sejam* $E_i = \{x \in E \mid P^i x = 0\}$ *e* $\hat{E}_i = \{x \in E \mid \hat{P'^i} x = 0\}$. *Então* $E_i = \hat{E}_i$.

Demonstração. Sejam $x \in E_i$ e $(x_n) \in \hat{P'^i}$. Então, $(x_n)x = x_{N_1}x$, onde N_1 é tal que $x_{N_1}x = x_n x$, para todo $n \geq N_1$. Assim, escolhendo k suficientemente grande para que $x_k \in P'^i$ temos, pelo Corolário 2.3.11, que $x_k x = 0$. Logo, $(x_n)x = x_{N_1}x = x_k x = 0$, ou seja, $x \in \hat{E}_i$. Por outro lado, seja $x \in \hat{E}_i$. Então para toda sequência $(x_n) \in \hat{P'^i}$, temos que $(x_n)x = 0$. Em particular, para cada $b \in P'^i$ temos que a sequência constante $(\frac{b}{1})$ anula x, isto é, $bx = (\frac{b}{1})x = 0$. Portanto, pelo Corolário 2.3.11, $x \in E_i$. $\square$

Lema 2.3.15. *Sejam B um A-módulo, C um A-módulo injetivo, $x_1, ..., x_n \in B$ e $y \in C$. Então, $\bigcap ann(x_i) \subseteq ann(y)$ se e somente se existem $f_1, ..., f_n \in Hom_A(B, C)$ tais que $y = f_1(x_1) + ... + f_n(x_n)$.*

Demonstração. $\Leftarrow$) Se existem homomorfismos $f_1, ..., f_n \in Hom_A(B, C)$ tais que $y = f_1(x_1) + ... + f(x_n)$ então $\bigcap\limits_{i=1}^{n} ann(f_i(x_i)) \subseteq ann(y)$. Além disso, para cada i, $ann(x_i) \subseteq ann(f_i(x_i))$, logo $\bigcap ann(x_i) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} ann(f_i(x_i)) \subseteq ann(y)$.

$\Rightarrow$) Suponhamos que $\bigcap ann(x_i) \subseteq ann(y)$. Então $z = 1 + ann(y)$ gera o módulo $\frac{A}{ann(y)}$ e é tal que $ann(z) = ann(y)$. Assim a aplicação $z \mapsto y$ define um homomorfismo $h : Az \to Ay$. Similarmente, a correspondência $z \mapsto (x_1, ..., x_n)$ define um monomorfismo $g : Az \to \bigoplus Ax_i$. Assim, pela injetividade de C, existe um homomorfismo $f : \bigoplus Ax_i \to C$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Az \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & \bigoplus Ax_i \arrow[ddl, "f"] \\ & Ay \arrow[d, "i"'] & \\ & C & \end{tikzcd}$$

onde i é a inclusão de Ay em C. Consequentemente, $y = ih(z) = fg(z) = f(x_1, ..., x_n)$. Definamos $\hat{f}_i$ como a restrição de f a Ax_i. Novamente pela injetividade de C, para cada i, existe um homomorfismo f_i que faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ax_i \arrow[r] \arrow[d, "\hat{f}_i"'] & B \arrow[dl, "f_i"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Logo, $f_1(x_1) + ... + f_n(x_n) = \hat{f}_1(x_1) + ... + \hat{f}_n(x_n) = f(x_1, ..., x_n) = y$. $\square$

Lema 2.3.16. *Se (A, P) é um anel local, então $E_1 \subseteq E(\frac{A}{P})$ é A-isomorfo a $\frac{A}{P}$.*

Demonstração. Seja $0 \neq x \in E_1$. Definimos o A-homomorfismo $f_x : \frac{A}{P} \to E_1$ por $a + P \mapsto ax$. Dados $r, s \in A$ temos que $rx = sx$ se e somente se $(r - s)x = 0$, se e somente se $r - s \in P$, (pois $P^{(1)} = P$), ou seja, f_x é uma aplicação bem definida e injetiva. Seja $y \in E_1$, como E é um módulo injetivo indecomponível temos que $Ax \cap Ay \neq 0$, e segue que existem $r, s \in A \setminus P$ tais que $rx = sy$. Pelo fato que P é maximal, temos que existe s' tal que $(s + P)(s' + P) = 1 + P$, ou seja, $ss' - 1 \in P$. Em particular, temos que $ss'y = y$. Logo, $f_x(s'r) = s'rx = s'sy = y$. Portanto f_x é um A-isomorfismo. $\square$

Teorema 2.3.17. *Seja $E = E(\frac{A}{P})$. Então, os anéis $H = Hom_A(E, E)$ e $\hat{A}_p$ são isomorfos.*

Demonstração. Faremos a demonstração em 4 etapas. Na primeira, reduzimos nossa argumentação para o caso em que A é um anel local e completo. Nas etapas 2 e 3, construímos um A-monomorfismo de A em H e na última, mostramos que este monomorfismo é também sobrejetor.

Etapa 1. Iremos mostrar que $H = Hom_{A_p}(E, E) = Hom_{\hat{A}_p}(E, E)$. Pela forma que foram definidas as ações de A_p e $\hat{A}_p$ sobre E temos $H \supseteq Hom_{A_p}(E, E) \supseteq Hom_{\hat{A}_p}(E, E)$. Sejam $f \in H$ e $\frac{a}{s} \in A_p$. Então, para qualquer $x \in E$, temos que $f(\frac{a}{s}x) = f(ay) = af(y)$, onde $x = sy$. Aplicando f a esta igualdade temos $f(x) = sf(y)$, ou seja, $\frac{a}{s}f(x) = af(y)$ e assim $f(\frac{a}{s}x) = \frac{a}{s}f(x)$. Portanto, f é um A_p-homomorfismo. Isto significa que $H = Hom_{A_p}(E, E)$. Seja agora $g \in Hom_{A_p}(E, E)$. Para $x \in E$, existe i tal que $x \in E_i$ e então, $P^i g(x) = g(P^i x) = 0$, ou seja, $g(x) \in A_i$. Logo para $(x_n) \in \hat{A}_p$, existe um índice

N apropriado tal que $g((x_n)x) = g(x_N x) = x_N g(x) = (x_n)g(x)$. Portanto, $Hom_{A_p}(E, E) = Hom_{\hat{A}_p}(E, E)$. Assim, usando o Teorema 2.3.13, podemos supor, sem perda de generalidade, que (A, P) é um anel local e completo.

Etapa 2. Pela localidade de A temos que $P^i = P^{(i)}$. Além disso, E é um módulo fiel, isto é, $ann(E) = 0$, pois, seja $0 \neq r \in P$. Então, pela Proposição 1.2.31, existe i tal que $r \notin P^i$, de onde segue que $rE_i \neq 0$.

Etapa 3. O anel A está imerso em H. De fato, Para cada $a \in A$, definamos $f_a : E \to E$ por $f_a(x) = ax$. Evidentemente, $f_a f_b = f_{ab}$ e $f_a + f_b = f_{a+b}$. Se $f_a = f_b$ então para todo $x \in E$, $(a - b)x = 0$ e segue da fidelidade de E que $a = b$.

Etapa 4. Seja $H_i = \{h \in H \mid h(E_i) = 0\}$. Então, para todo $g \in H$ temos que $P^i g(E_i) = g(P^i E_i) = g(0) = 0$, então H_i é um ideal à esquerda e à direita de H. Iremos Mostrare, por indução, que para todo $f \in H$ e todo natural i existe $p_i \in A$ tal que $f \equiv p_i (mod\ H_i)$.

Suponhamos que $i = 1$. Como $A(1+P) = \frac{A}{P}$, segue do lema anterior que existe $y \in E_1$ tal que $E_1 = Ay$. Seja $f \in H$, então existe $p_1 \in A$ tal que $f(y) = p_1 y$. Assim, se $x = p_1' y \in E_1$, então $f(x) = f(p_1' y) = p_1' f(y) = p_1' p_1 y = p_1 x$. Desta maneira, $f \equiv p_1 (mod\ H_1)$.

Suponhamos que a afirmação seja válida para $i \geq 1$. Seja $\{Q_1, ..., Q_n\}$ uma decomposição primária irredundante de P^{i+1} de ideais irredutíveis. Notamos que P é um ideal primo minimal que contém P^{i+1} e, então pela localidade de A, temos que cada um dos Q_i é um ideal P-primário. Pelo item 3 do Lema 2.3.3, existem elementos $x_1, ..., x_n \in E_{i+1}$ tais que $Q_i = ann(x_i)$. Pela irredundância da decomposição segue que existe um $q_j \in Q_1 \cap ... \cap \hat{Q}_j \cap ... \cap Q_n$, para cada $j = 1, ..., n$, tal que $q_j \notin Q_j$. Assim, $q_j x_j \neq 0$ e $q_j x_k = 0$, com $j \neq k$.

Pela hipótese de indução temos que $g = f - p_i \in H_i$. Como $Px_j \in E_i$, então $Pg(x_j) = g(Px_j) = 0$ e segue que $g(x_j) \in E_1$, para todo $j = 1, ..., n$. Como E é um módulo injetivo indecomponível, segue que $Ag(x_j) \cap Aq_jx_j \neq 0$. Desta maneira, existem $a_j \in A \setminus P$ e $b_j \in A$ tais que $a_jg(x_j) = b_j(q_jx_j)$. Mais ainda, como $g(x_j) \in E_1$ e existe $a'_j \in A \setminus P$ tal que $a_ja'_j - 1 \in P$, então $g(x_j) = a_ja'_jg(x_j) = a'_jb_j(q_jx_j) = r_j(q_jx_j)$, onde $r_j = a'_jb_j$. Consideremos agora $q = r_1q_1 + ... + r_nq_n$. Então, $qx_j = r_jq_jx_j = g(x_j)$. Para cada $x \in E_{i+1}$, temos $ann(x) \supseteq P^{i+1} = ann(x_1) \cap ... \cap ann(x_n)$. Pelo lema anterior, existem $f_1, ..., f_n \in H$ tais que $x = f_1(x_1) + ... + f_n(x_n)$, pela hipótese de indução, onde $f_j = s_j + h_j$, com $h_j \in H_i$ e $s_j \in A$, para todo $j = 1, ..., n$. Assim temos:

$$\begin{aligned}
g(x) &= g(f_1(x_1) + ... + f_n(x_n)) \\
&= g(s_1x_1 + h_1(x_1)) + ... + g(s_nx_n + h_n(x_n)) \\
&= s_1g(x_1) + g(h_1(x_1)) + ... + s_ng(x_n) + g(h_n(x_n)) \\
&= s_1g(x_1) + ... + s_ng(x_n);\ pois\ h_j(x_j) \in E_1\ e\ g \in H_i. \\
&= s_1qx_1 + ... + s_nqx_n \\
&= q(s_1x_1 + ... + s_nx_n) + h_1(qx_1) + ... + h_n(qx_n);\ pois\ qx_j = g(x_j) \in E_1. \\
&= q(s_1x_1 + ... + s_nx_n + h_1(x_1) + ... + h_n(x_n)) \\
&= qx
\end{aligned}$$

Logo, $g - q \in H_{i+1}$. Definindo $p_{i+1} = p_i + q$, obtemos que $f - p_{i+1} = f - p_i - q = g - q \in H_{i+1}$. Logo $f \equiv p_{i+1}(mod\ (H_{i+1}))$ Mostraremos agora que $f \in H$ se corresponde com um elemento de A. De fatom notamos que a sequência (p_i) construída na argumentação acima é de Cauchy. Pois, se $n \leq m$ temos que $p_n - p_m = (p_n - f) - (p_m - f) \in H_n - H_m = H_n$. Logo, $(p_n - p_m)E_n = 0$ e $p_n - p_m \in P^n$, para todo $m \geq n$. Portanto, (p_n) é de Cauchy. Da completude de A temos que (p_n) converge para um elemento $p \in A$. Notamos que em H temos a cadeia $H_1 \supseteq H_2 \supseteq ...$ onde $\bigcap H_i = 0$, pois $E = \bigcup E_i$ e E é fiel. Logo, as sequências de Cauchy com respeito a topologia H_i-ádica convergentes em H tem um único limite. Como, temos que $P^i \subseteq H_i$, segue que então (p_i) converge para p em H. Além disso, por construção (p_i) converge para f em H. Portanto, $f = p \in A$.

□

Como consequência imediata do teorema anterior podemos ressaltar que o anel de endomorfismos de um A-módulo injetivo indecomponível é comutativo.

Corolário 2.3.18. *1. Sejam $y, x_1, ...x_n \in E$. Então, $ann(x_1) \cap ... \cap ann(x_n) \subseteq ann(y)$ se e somente se existem $r_1, ..., r_n \in A_p$, tal que $y = r_1x_1 + ... + r_nx_n$.*

2. Cada A-homomorfismo de um submódulo de E em outro submódulo de E é equivalente a multiplicação por um elemento de $\hat{A}_p$.

Demonstração. 1. Segue diretamente do Lema 2.3.15, do teorema anterior e da definição de $\hat{A}_p$-módulo de E.

2. Segue do teorema anterior e da injetividade do A-módulo E.

□

Definição 2.3.19. *Sejam P um ideal primo de A, $\{Q_1, ..., Q_t, Q_{t+1}, ..., Q_n\}$ uma decomposição irredundante de $P^{(i)}$, cujas componentes são ideais irredutíveis tais que $Q_m \not\supseteq P^{(i-1)}$, para todo $m = 1, ..., t$, e $Q_m \supseteq P^{(i-1)}$, para todo $m = t+1, ..., n$. Dizemos que esta é uma decomposição minimal de $P^{(i)}$ e que $P^{(i)}$ pertence a t, se t é o menor inteiro para o qual temos uma decomposição deste tipo.*

Com o trabalho desenvolvido até aqui, podemos obter a dimensão de $\frac{E_{i+1}}{E_i}$ como espaço vetorial sobre o corpo de frações de $\frac{A}{P}$. Como $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \cdots$ e $ann(E_i) = P^{(i)}$, temos $P^{(1)} \supseteq P^{(2)} \supseteq P^{(3)} \supseteq \cdots$. Logo se $P^{(i-1)} \supsetneq P^{(i)}$ devemos ter que $P^{(i)}$ pertence a $t > 0$. Em outras palavras, $P^{(i)}$ pertence a $t > 0$ se e somente se $P^{(i-1)} \supsetneq P^{(i)}$.

Teorema 2.3.20. *Sejam P um ideal primo de A e $E = E(\frac{A}{P})$, tal que $P^{(i+1)}$ pertence a t. Então a dimensão de $\frac{E_{i+1}}{E_i}$ sobre o corpo de frações de $\frac{A}{P}$ é t.*

Demonstração. Pelo Lema 2.3.9, Corolário 2.3.11 e o item 1 da Proposição 2.3.7 podemos supor, sem perda de generalidade, que (A, P) é um anel local e segue que $P^{(i)} = P^i$, para todo número natural i. Consideremos uma decomposição irredundante $\{Q_1, ..., Q_t, Q_{t+1}, ..., Q_n\}$ de ideais irredutíveis de P^{i+1}, de modo que P^{i+1} pertence a t. Pelo item 2 do Lema 2.3.3, existem elementos $x_1, ..., x_n \in E_{i+1}$ tais que $Q_i = ann(x_i)$, $i = 1, ..., n$. Mostraremos agora que $\{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_t\}$ é uma base de $\frac{E_{i+1}}{E_i}$, onde $\bar{x}_i = x_i + E_i$, para todo $i = 1, ..., t$.

Suponhamos por absurdo que este conjunto é linearmente dependente. Assim, sem perda de generalidade podemos supor (onde os índices do conjunto são renomeados, se for o caso) que $\bar{r}_1\bar{x}_1 + ... + \bar{r}_s\bar{x}_s = 0$, onde $s \leq t$ e $0 \neq \bar{r}_j \in \frac{A}{P}$, para todo $j = 1, ..., s$. Desta maneira, $r_1x_1 + ... + r_sx_s = y \in E_i$, de onde segue que $r_1x_1 = -r_2x_2 - ... - r_sx_s + y$. Como $r_j \notin P$, para $j = 1, ..., s$, segue do item 3 do Lema 2.3.3 que $ann(x_1) \supseteq ann(x_2) \cap ... \cap ann(x_s) \cap ann(y)$. Pelo fato que $ann(y)$ é um ideal irredutível tal que $ann(y) \supseteq P^i$, obtemos que $\{ann(x_2), ..., ann(x_n), ann(y)\}$ é uma decomposição de P^{i+1}, o que contradiz a minimalidade de t, pois $ann(x_j) \not\supseteq P^i$, para todo $j = 2, ..., t$, e as outras componentes desta decomposição contem P^i. Assim, $\{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_t\}$ é um conjunto linearmente independente.

Provamos agora que $\{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_t\}$ gera $\frac{E_{i+1}}{E_i}$. De fato, seja $x \in E_{i+1}$. Então $ann(x) \supseteq P^{i+1} = \bigcap_{j=1}^{n} ann(x_j)$. Desta maneira, pelo item 1 do Corolário 2.3.18, existem $r_1, ..., r_n \in A$ tais que $x = r_1x_1 + ... + r_nx_n$. Assim, $x + E_i = (r_1x_1 + ... + r_nx_n) + E_i = (r_1x_1 + E_i) + ... + (r_nx_n + E_i) = (r_1x_1 + E_i) + ... + (r_tx_t + E_i)$. Esta última igualdade segue do fato que $x_j \in E_i$ e, consequentemente, $r_jx_j \in E_i$, para todo $j = t + 1, ..., n$. Logo, $\bar{x} = \bar{r}_1\bar{x}_1 + ... + \bar{r}_t\bar{x}_t$ e portanto, $\{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_t\}$ gera $\frac{E_{i+1}}{E_i}$ sobre $\frac{A}{P}$. $\square$

Teorema 2.3.21. *Seja K o corpo de frações do domínio $\frac{A}{P}$. Então, os K-espaços vetoriais $\frac{E_{i+1}}{E_i}$ e $Hom_K(\frac{P^i}{P^{i+1}} \otimes_{\frac{A}{P}} K, K)$ são isomorfos.*

Demonstração. Assim como na prova do Teorema 2.3.20, podemos supor, sem perda de generalidade, que (A, P) é um anel local. Como $\frac{P^i}{P^{i+1}} \otimes_K K \cong \frac{P^i}{P^{i+1}}$, então o teorema estará demonstrado se provarmos que os espaços vetoriais $\frac{E_{i+1}}{E_i}$ e $Hom_K(\frac{P^i}{P^{i+1}}, K)$ são isomorfomos. Devido ao fato que $P^{i+1} \subseteq P^i$, segue que a aplicação $h : \frac{A}{P^{i+1}} \to \frac{A}{P^i}$, definida por $x + P^{i+1} \mapsto x + P^i$, está bem definida e é um A-homomorfismo. Desta maneira, temos a sequência exata curta

$$0 \to \frac{P^i}{P^{i+1}} \to \frac{A}{P^{i+1}} \to \frac{A}{P^i} \to 0$$

e como E é um A-módulo injetivo, obtemos a sequência exata curta

$$0 \to Hom_A(\frac{A}{P^i}, E) \to Hom_A(\frac{A}{P^{i+1}}, E) \to Hom_A(\frac{P^i}{P^{i+1}}, E) \to 0$$

ou seja, $Hom_A(\frac{P^i}{P^{i+1}}, E) \cong \frac{Hom_A(\frac{A}{P^{i+1}}, E)}{Hom_A(\frac{A}{P^i}, E)}$. Além disso, é fácil ver que

$$Hom_A(\frac{P^i}{P^{i+1}}, E) = Hom_A(\frac{P^i}{P^{i+1}}, E_1) = Hom_{\frac{A}{P}}(\frac{P^i}{P^{i+1}}, E_1) \cong Hom_K(\frac{P^i}{P^{i+1}}, K).$$

O teorema estará demonstrado se mostrarmos que $Hom_A(\frac{A}{P^n}, E) \cong E_n$. De fato, seja $h : E_n \to Hom_A(\frac{A}{P^n}, E)$, definida por $h(x) = h_x : \frac{A}{P^n} \to E$, com $h_x(a + P^n) = ax$.

Evidentemente h é um A-monomorfismo, pois $h_x = h_y$ se e somente se $x = y$. Se $g \in Hom_A(\frac{A}{P^n}, E)$ então $g(\bar{1}) = y \in E_n$, pois $P^n y = P^n g(\bar{1}) = g(0) = 0$. Assim, $h_y = g$. Logo, h é um A-isomorfismo. $\square$

Resumindo os resultados anteriores, temos as equivalências a seguir. Seja $E = E(\frac{A}{P})$, então:

1. $P^{(i+1)}$ pertence a t.

2. $\frac{E_{i+1}}{E_i}$ tem dimensão t sobre o corpo de frações de $\frac{A}{P}$.

3. $Hom_K(\frac{P^i}{P^{i+1}} \otimes_{\frac{A}{P}} K, K)$ tem dimensão t sobre o corpo de frações de $\frac{A}{P}$.

Teorema 2.3.22. *1. Se P é um ideal maximal de A, então $E_i \subseteq E(\frac{A}{P})$ é um A-módulo finitamente gerado para todo natural i. Além disso, $E(\frac{A}{P})$ é gerado por um conjunto numerável de E.*

2. A é um anel artiniano se e somente se todo A-módulo injetivo indecomponível é finitamente gerado.

Demonstração. 1. A demonstração será feita por indução sobre i. Para $i = 0$ é evidente pois $E_0 = 0$. Suponhamos por indução que E_{i-1} é gerado por um subconjunto finito F e seja $\{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\}$ uma base de $\frac{E_i}{E_{i-1}}$ sobre $\frac{A}{P}$. Então para qualquer $x \in E_i$ temos que $x + E_{i-1} = (a_1 + P)(x_1 + E_{i-1}) + ... + (a_n + P)(x_n + E_{i-1})$, ou seja, $x - a_1x_1 - ... - a_nx_n \in E_{i-1}$. Logo, todo elemento $x \in E_i$ é gerado por $\{x_1, ..., x_n\} \cup F$.

2. $\Rightarrow$) Seja E um A-módulo injetivo indecomponível. Então existe um ideal primo P de A tal que $E \cong E(\frac{A}{P})$. Como A é artiniano, a sequência $P^{(1)} \supseteq P^{(2)} \supseteq ...$ tem um mínimo. Logo a sequência $E_1 \subseteq E_2 \subseteq ...$ tem um máximo e desta

maneira, $E(\frac{A}{P}) = \bigcup E_j = E_j$, para algum j. Além disso, pelo Teorema 1.2.3, P é um ideal maximal, e temos, pelo item anterior, que $E(\frac{A}{P}) = E_j$ é finitamente gerado.

$\Leftarrow$) Seja P um ideal primo de A. Então o módulo injetivo indecomponível $E(\frac{A}{P})$ é finitamente gerado sobre o anel noetheriano A e, pela Definição 1.3.7, $E(\frac{A}{P})$ é noetheriano e $E_1 \subseteq E(\frac{A}{P})$ é finitamente gerado sobre A. Como $PE_1 = 0$, temos que E_1 é um $\frac{A}{P}$-módulo finitamente gerado. Por outro lado, do item 5 do Teorema 2.3.6, segue que $cf(\frac{A}{P})$ (o corpo de frações de $\frac{A}{P}$) e E_1 são $cf(\frac{A}{P})$-espaços vetoriais isomorfos. Como E_1 é finitamente gerado sobre $\frac{A}{P}$, então $cf(\frac{A}{P})$ é finitamente gerado sobre $\frac{A}{P}$. Agora, seja $\{\frac{a_1}{b_1}, ..., \frac{a_n}{b_n}\}$ um conjunto de geradores de $cf(\frac{A}{P})$. Em particular, existem elementos $\beta_1, ..., \beta_n \in \frac{A}{P}$ tais que $\frac{1}{(b_1...b_n)^2} = \beta_1\frac{a_1}{b_1} + ... + \beta_n\frac{a_n}{b_n}$. Pelo fato que, $\frac{A}{P}$ é um domínio temos que $1 = (\beta_1 a_1 b_2...b_n + ... + \beta_n a_n b_1...b_{n-1})(b_1...b_n)$, isto é, o elemento $b_1...b_n$ é invertível e segue que b_i também é invertível em $\frac{A}{P}$, com inverso $(b_1...\hat{b}_i...b_n)(b_1...b_n)^{-1}$. Logo, $\frac{A}{P} = cf(\frac{A}{P})$, ou seja, $\frac{A}{P}$ é corpo. Portanto, pelo Teorema 1.3.17 concluímos que A é artiniano.

$\square$

Capítulo 3

Dualidade de Matlis

O objetivo deste capítulo é exibir uma dualidade entre os módulos noetherianos e os módulos artinianos sobre um anel comutativo, noetheriano, completo e local. Mais especificamente, se E é um A-módulo injetivo indecomponível então o reticulado de submódulos do módulo artiniano E^n é anti-isomorfo ao reticulado de submódulos do A-módulo noetheriano A^n. Como consequência disto, temos uma correspondência entre a categoria dos A-módulos noetherianos e a categoria dos A-módulos artinianos.

3.1 Dualidade

Na proposição a seguir A é um anel qualquer, mas no resto desta seção, A é um anel comutativo, noetheriano, local e completo.

Proposição 3.1.1. *Seja M um A-módulo artiniano. Se $\{E_b\}_{b\in B}$ é uma decomposição de módulos injetivos indecomponíveis de $E(M)$, então B é finito.*

Demonstração. Seja $E(M) = \bigoplus_{b\in B} E_b$, onde E_b é um A-módulo injetivo indecomponível. Suponhamos por absurdo que B é infinito. Então, tomemos qualquer cadeia infinita descendente $B \supsetneq B_1 \supsetneq B_2 \supsetneq ...$ de subconjuntos de B e consideramos $C_j = \bigoplus_{b \in B_j} E_b$. Como $M \subseteq_e E(M)$, segue que $E_b \cap M \neq 0$, para todo $b \in B$. Em vista disso, temos a cadeia infinita $C_1 \cap M \supsetneq C_2 \cap M \supsetneq ...$ de submódulos de M, o que contradiz o fato de M ser artiniano. Portanto, B é finito. $\square$

Como consequência imediata da proposição anterior e do Teorema 2.2.5 temos que se M é um A-módulo artiniano e A um anel noetheriano, então $E(M)$ é uma soma direta finita de A-módulos injetivos indecomponíveis.

Notação: Sejam S e B dois submódulos fixos de A^n e E^n, respectivamente, $a = (a_1, ..., a_n) \in A^n$ e $x = (x_1, ..., x_n) \in E^n$. Escrevemos $a \cdot x$ para denotar $a_1x_1 + ... + a_nx_n$. Definimos $S' = \{x \in E^n \mid s \cdot x = 0, \text{ para todo } s \in S\}$ e $B' = \{a \in A^n \mid a \cdot x = 0, \text{ para todo } x \in B\}$. É fácil ver que S' e B' são submódulos de E^n e A^n, respectivamente. Nestes termos, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1.2. *Sejam A um anel comutativo, noetheriano, completo e local com ideal maximal P e $E = E(\frac{A}{P})$. Então:*

1. a. $S' \cong Hom_A(\frac{A^n}{S}, E)$. b. $\frac{E^n}{S'} \cong Hom_A(S, E)$. c. $S'' = S$.

2. a. $B' \cong Hom_A(\frac{E^n}{B}, E)$. b. $\frac{A^n}{B'} \cong Hom_A(B, E)$. c. $B'' = B$.

Demonstração. 1. a. Sejam $\{e_i\}$ a base canônica de A^n e $\phi : Hom_A(\frac{A^n}{S}, E) \to S'$ uma aplicação definida por $f \mapsto (f(\bar{e}_1), ..., f(\bar{e}_n))$, onde $\bar{e}_i = e_i + S \in \frac{A^n}{S}$. Vejamos primeiro que $(f(\bar{e}_1), ..., f(\bar{e}_n)) \in S'$. Com efeito, seja $(s_1, ..., s_n) \in S$. Então temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}(s_1, ..., s_n) \cdot (f(\bar{e}_1), ..., f(\bar{e}_n)) &= s_1 f(\bar{e}_1) + ... + s_n f(\bar{e}_n) \\ &= f(s_1\bar{e}_1 + ... + s_n\bar{e}_n)\end{aligned}$$

$$= f((s_1e_1 + ... + s_ne_n) + S)$$

$$= f(0)$$

$$= 0$$

Pela definição de ϕ segue que este é um A-homomorfismo. Se $\phi(f) = 0$, então $f(\bar{e}_1) = ... = f(\bar{e}_n) = 0$ e como $\{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\}$ gera $\frac{A^n}{S}$, segue que $f = 0$, ou seja, ϕ é um monomorfismo. Para cada $(x_1, ..., x_n) \in S'$, definimos o A-homomorfismo $f_1 : A^n \to S'$, por $f_1(e_i) = x_i$. Além disso, temos $S \subseteq ker(f_1)$. De fato, seja $s = (s_1, ..., s_n) \in S$, então

$$f_1(s) = f_1(s_1e_1 + ... + s_ne_n) = s_1x_1 + ... + s_nx_n = s \cdot (x_1, ..., x_n) = 0$$

Desta forma temos um homomorfismo $f_1' : \frac{A^n}{S} \to E$ tal que $f(\bar{e}_i) = x_i$. Portanto, $\phi(f) = (x_1, ..., x_n)$ e segue que ϕ é um A-isomorfismo.

b. Consideremos a sequência exata curta

$$0 \to S \to A^n \to \frac{A^n}{S} \to 0$$

Como $Hom_A(\_, E)$ é um funtor contravariante exato temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_A(\frac{A^n}{S}, E) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1"] & Hom_A(A^n, E) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_2"] & Hom_A(S, E) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S' \arrow[r] & E^n \arrow[r] & \frac{E^n}{S'} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde ϕ_1, ϕ_2 são os isomorfismos dados pelo item a. Decorre disto o isomorfismo $\frac{E^n}{S'} \cong Hom_A(S, E)$.

c. Evidentemente $S \subseteq S'' \subseteq A^n$. Suponhamos que existe $(s_1'', ..., s_n'') \in S'' \setminus S$ e definimos $y = (s_1'', ..., s_n'') + S \in \frac{A^n}{S}$. Como A é local e $ann(y)$ é um ideal de A, temos que $ann(y) \subseteq P$. Por outro lado, pelo item 2 do Lema 2.3.3, existe $0 \neq x \in E$ tal que $ann(x) = P$. Assim, pelo Lema 2.3.15, existe $f : \frac{A^n}{S} \to E$ tal que $f(y) = x \neq 0$. Agora, observamos que $(f(\bar{e}_1), ..., f(\bar{e}_n)) \in S'$, pois para qualquer $(s_1, ..., s_n) \in S$, temos $(s_1, ..., s_n) \cdot (f(\bar{e}_1), ..., f(\bar{e}_n)) = f(s_1\bar{e}_1 + ... + s_n\bar{e}_n) = f((s_1, ..., s_n) + S) = f(0) = 0$. Assim, $f(y) = f(s''_1\bar{e}_1 + ... + s''_n\bar{e}_n) = s''_1 f(\bar{e}_1) + ... + s''_n f(\bar{e}_n) = 0$. O que não pode acontecer. Logo, $S = S''$.

2. a. Seja $\varphi : B' \to Hom_A(\frac{E^n}{B}, E)$ definida por $(b_1, ..., b_n) \mapsto \varphi(b_1, ..., b_n)$, onde a aplicação $\varphi(b_1, ..., b_n) : \frac{E^n}{B} \to E$ está definida por $\varphi(b_1, ..., b_n)((y_1, ..., y_n) + B) = b_1y_1 + ... + b_ny_n$. Observemos neste momento que se $(y_1, ..., y_n) - (x_1, ..., x_n) \in B$, então $(b_1, ..., b_n)((y_1, ..., y_n) - (x_1, ..., x_n)) = 0$, de onde segue a boa definição de $\phi(b_1, ..., b_n)$. Da mesma forma, se vê trivialmente que $\varphi(b_1, ..., b_n)$ é um A-homomorfismo. Agora, se $\varphi(b_1, ...b_n) = 0$, então $b_1y_1 + ... + b_ny_n = 0$, para todo $(y_1, ..., y_n) \in E^n$. Em particular, para $(0, ..., y_i, ...0)$ temos $b_iy_i = 0$. Como E é um A-módulo fiel, segue que $b_i = 0$, para todo i, ou seja, φ é um monomorfismo. Consideramos agora $f \in Hom_A(\frac{E^n}{B}, E)$. Para cada componente $i = 1, ..., n$, temos um endomorfismo correspondente à composição dos seguintes homomorfismos

$$E \cong E_i \xrightarrow{i} E^n \xrightarrow{\pi} \frac{E^n}{B} \xrightarrow{f} E$$

Assim, pelo Teorema 2.3.18 segue que, para cada i, existe $r_i \in A$ tal que $f|_{\bar{E}_i} \equiv r_i \in A$. Consideramos a n-upla $(r_1, ..., r_n) \in A^n$. Notamos inicialmente que $(r_1, ..., r_n) \in B'$, pois, se $(x_1, ..., x_n) \in B$, então

$$\begin{aligned} r_1x_1 + ... + r_nx_n &= f|_{\bar{E}_1}(x_1e_1 + B) + ... + f|_{\bar{E}_n}(x_ne_n + B) \\ &= f(x_1e_1 + B) + ... + f(x_ne_n + B) \\ &= f((x_1, ..., x_n) + B) \\ &= f(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por último, vejamos que $\varphi((r_1, ..., r_n)) = f$. De fato, pois $\varphi(r_1, ..., r_n)((y_1, ..., y_n) + B) = r_1y_1 + ... + r_ny_n = f((y_1, ..., y_n) + B)$ e isto mostra que φ é um epimorfismo. Logo, φ é um A-isomorfismo.

b. A prova é análoga a do item b acima tomando a sequência exata curta

$$0 \to B \to E^n \to \tfrac{E^n}{B} \to 0$$

c. Análogo ao feito na prova do item c de 1. $\square$

Como consequência imediata do teorema anterior temos que se F é um submódulo de E^n, então

$$Hom_A(Hom_A(F, E), E) \cong Hom_A(\tfrac{E^n}{F'}, E) \cong F'' = F.$$

Analogamente, se A_1 é um submódulo de A^n, então

$$Hom_A(Hom_A(A_1, E), E) \cong Hom_A(\tfrac{E^n}{A_1'}, E) \cong A_1'' = A_1.$$

Corolário 3.1.3. *Nos mesmos termos do teorema anterior, os reticulados dos submódulos de A^n e E^n são anti-isomorfos.*

Demonstração. Sejam A_1 e A_2 (F_1 e F_2) dois submódulos de A^n (respectivamente, E^n). É evidente que se $A_1 \subseteq A_2$ (respectivamente, $F_1 \subseteq F_2$) então $A_2' \subseteq A_1'$ (respectivamente, $F_2' \subseteq F_1'$). Além disso, temos as seguintes propriedades:

1. $(A_1 \cap A_2)' = A_1' + A_2'$. $\quad$ 1'. $(F_1 \cap F_2)' = F_1' + F_2'$.

2. $(A_1 + A_2)' = A_1' \cap A_2'$. $\quad$ 2'. $(F_1 + F_2)' = F_1' \cap F_2'$.

De fato, como $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ e $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$ então $A_1' \subseteq (A_1 \cap A_2)'$ e $A_2' \subseteq (A_1 \cap A_2)'$, e segue que $A_1' + A_2' \subseteq (A_1 \cap A_2)'$. Simetricamente, obtemos que $(F_1 + F_2)' \subseteq$

$F_1' \cap F_2'$. Destas contenções obtemos que $A_1 \cap A_2 = (A_1 \cap A_2)'' \subseteq (A_1' + A_2')' \subseteq A_1'' \cap A_2'' = A_1 \cap A_2$, ou seja, $A_1 \cap A_2 = (A_1' + A_2')'$. Assim, $(A_1 \cap A_2)' = A_1' + A_2'$. As outras propriedades seguem de forma análoga. Sendo assim, que a correspondência definida por $A \mapsto A'$ é um anti-isomorfismo dos reticulados dos submódulos de A^n e de E^n. □

Dos resultados anteriores temos que se A é um anel comutativo, noetheriano, completo e local então o módulo E^n é artiniano. Com efeito, como A^n é finitamente gerado sobre o anel noetheriano A então A^n é noetheriano, assim pelo corolário anterior E^n é artiniano.

No corolário a seguir denotamos por $\mathfrak{Noether}(A)$ e $\mathfrak{Artin}(A)$ as categorias das classes (dadas por isomorfismos e que denotamos por colchetes) dos A-módulos noetherianos e dos A-módulos artinianos, respectivamente.

Corolário 3.1.4. *Sejam (A,P) um anel comutativo, noetheriano, completo e local e $E = E(\frac{A}{P})$. Então:*

1. *Um A-módulo M é noetheriano se e somente se M é a imagem de A^n, para algum natural n.*

2. *Um A-módulo M é artiniano se e somente se M é um submódulo de E^n, para algum natural n.*

3. *O funtor contravariante $Hom_A(\_, E) : \mathfrak{Noether}(A) \to \mathfrak{Artin}(A)$ define uma correspondência biunívoca entre os objetos destas categorias.*

Demonstração. 1. $\Rightarrow$) Consideramos um conjunto finito $x_1, ..., x_n$ de geradores de M sobre o anel A. Definamos o A-homomorfismo $h : A^n \to M$ sobre sua base canônica, assim $h(e_i) = x_i$. Evidentemente, $h(A^n) = M$.

$\Leftarrow$) Se M é a imagem de A^n, então M é finitamente gerado sobre o anel noetheriano A. Assim, pela Proposição 1.3.10, segue que M é noetheriano.

2. $\Rightarrow$) Seja M um A-módulo artiniano. Então, pelo Teorema 2.2.5 e a Proposição 3.1.1, segue que $E(M) = C_1 \oplus ... \oplus C_n$, onde cada C_i é um módulo injetivo indecomponível. Seja $0 \neq x \in M \cap C_i$, para qualquer i, $i \leq n$. Consideramos agora a cadeia de submódulos de M

$$Px \supseteq P^2x \supseteq P^3x \supseteq ...$$

Assim, pela artinianidade de M, existe j tal que $P^jx = P^{j+1}x$ e segue que $P^j - P^{j+1} \subseteq ann(x)$. Desta maneira, $P^j \subseteq ann(x) + P^{j+1}$. Da Proposição 1.2.6 temos $P^j \subseteq ann(x)$. Como P é o menor primo que contem P^j, segue que P é o menor primo que contem $ann(x)$ e com isto, $ann(x)$ é um ideal P-primário. Pelo Teorema 2.2.4, $C_i \cong E(\frac{A}{ann(x)}) \cong E(\frac{A}{P}) = E$. Portanto, $E(M) \cong E^n$ e temos que M é um submódulo de E^n.

$\Leftarrow$) É evidente pois todo submódulo de um módulo artiniano é artiniano.

3. Seja M um A-módulo noetheriano. Então pelo item 1, segue que $M \cong \frac{A^n}{L}$, para algum inteiro n e um submódulo L de A^n. Assim, do item 1.a do Teorema 3.1.2 temos que $[Hom_A(M, E)] = [Hom_A(\frac{A^n}{L}, E)] = [L']$. Notamos que L' é um submódulo de E^n, e pelo item 2 deste teorema temos que, L' é artiniano. Sejam $\frac{A^m}{L_1}$ e $\frac{A^n}{L_2}$ dois módulos noetherianos tais que $Hom_A(\frac{A^m}{L_1}, E) \cong L_1' \cong L_2' \cong Hom(\frac{A^n}{L_2}, E)$ então pelo item 2.b do Teorema 3.1.2 temos $\frac{A^m}{L_1} = \frac{A^m}{L_1''} \cong Hom_A(L_1', E) \cong Hom_A(L_2', E) \cong \frac{A^n}{L_2''} \cong \frac{A^n}{L_2}$. Portanto, a correspondência dada por $Hom_A(\_, E)$ é injetora. Vejamos agora a sobrejeção. De fato, seja M um A-módulo artiniano. Então, pelo item 2 deste teorema, M é um submódulo de

E^n, para algum natural n. Consideramos então o A-módulo $\frac{A^n}{M'}$. Logo, pelos itens 1.a e 2.c do Teorema 3.1.2 que $[Hom_A(\frac{A^n}{M'}, E)] = [M''] = [M]$.

$\square$

Notamos que no item 3 do corolário anterior temos que $[Hom_A(Hom_A(M, E), E)]$ $=[M]$, isto é, $Hom_A(Hom_A(M, E), E) \cong M$, para qualquer A-módulo noetheriano ou artiniano. Ou seja, o item 3 faz referência à equivalência entre os objetos destas categorias.

Para efeitos práticos, vamos explicitar o isomorfismo do parágrafo anterior. Seja $N = \frac{A^n}{L_N}$ um A-módulo noetheriano, onde L_N é um submódulo de A^n. Desejamos definir os seguintes isomorfismos:

$$\frac{A^n}{L_N} \xrightarrow{\varphi_N} Hom(L'_N, E) \xrightarrow{\phi_N \cdot (\_)} Hom(Hom(\frac{A^n}{L_N}, E), E)$$

Seja o isomorfismo $\phi_N : Hom(\frac{A^n}{L_N}, E) \to L'_N$, definido da mesma forma como foi feito na prova do item 1.a do Teorema 3.1.2. Assim, para cada $h \in Hom(L'_N, E)$ definimos $\phi_N \cdot (h)$ mediante o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Hom(\frac{A^n}{L_N}, E) \arrow[r, "\phi_N"] \arrow[dr, "\phi_N \cdot (h)"'] & L'_N \arrow[d, "h"] \\ & E \end{tikzcd}$$

ou seja, $\phi_N \cdot (h) = h \circ \phi_N$. O argumento anterior estabelece o isomorfismo

$$\phi_N \cdot (\_) : Hom(L'_N, E) \to Hom(Hom(\frac{A^n}{L_N}, E), E).$$

Por outro lado, temos que $\varphi : A^n \to Hom(E^n, E)$ é um isomorfismo, onde $(\varphi(a))(x) = a \cdot x$, com $a \in A^n$ e $x \in E^n$. Desta forma, o isomorfismo, dado pelo item 2.b do Teorema 3.1.2, $\varphi_N : \frac{A^n}{L_N} \to Hom(L'_N, E)$ está definido por $\varphi_N(a + L_N) = \varphi(a)|_{L'_N}$.

Teorema 3.1.5. *As categorias* $\mathfrak{Noether}(A)$ *e* $\mathfrak{Artin}(A)^{op}$ *são equivalentes.*

Demonstração. Exibiremos um isomorfismo natural τ do funtor identidade $1_{\mathfrak{Noether}(A)}$ ao funtor covariante $Hom(Hom(\_,E),E) : \mathfrak{Noether}(A) \to \mathfrak{Noether}(A)$. Analogamente, pode se mostrar que o funtor identidade $1_{\mathfrak{Artin}(A)}$ e o funtor covariante $Hom(Hom(\_,E),E) : \mathfrak{Artin}(A) \to \mathfrak{Artin}(A)$ são isomorfos. Seja o objeto $N = \frac{A^n}{L_N}$ em $\mathfrak{Noether}(A)$. Definimos a componente $\tau_N : \frac{A^n}{L_N} \to Hom(Hom(\frac{A^n}{L_N},E),E)$, por $\tau_N = \phi_N \cdot (\_) \circ \varphi_N$, onde os homomorfismos $\phi_N \cdot (\_)$ e φ_N estão definidos como na observação anterior a desse teorema. Portanto, temos que cada componente $\tau_N : \frac{A^n}{L_N} \to Hom(Hom(\frac{A^n}{L_N},E),E)$ é um isomorfismo. Seja $f : \frac{A^n}{L_N} \to \frac{A^m}{L_M}$ um homomorfismo entre A-módulos noetherianos. Mostremos agora que o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{tikzcd}
Hom(Hom(\frac{A^n}{L_N},E),E) \arrow[r, "f^{**}"] & Hom(Hom(\frac{A^m}{L_M},E),E) \\
\frac{A^n}{L_N} \arrow[u, "\tau_N"] \arrow[r, "f"] & \frac{A^m}{L_M} \arrow[u, "\tau_M"']
\end{tikzcd}$$

onde $f^{**} = Hom(Hom(f,E),E)$. Notamos que $Hom(f,E)$ é um morfismo entre $Hom(\frac{A^m}{L_M},E)$ e $Hom(\frac{A^n}{L_N},E)$ na categoria $\mathfrak{Artin}(A)$. Seja $\bar{a} \in \frac{A^n}{L_N}$, então $\bar{a} = \overline{a_1e_1 + ... + a_ne_n} = a_1\bar{e}_1 + ... + a_n\bar{e}_n$. Além disso, $\tau_N(\bar{a}) = (\phi_N \cdot (\_)\varphi_N)(\bar{a}) = \phi_N \cdot (\varphi_N(\bar{a})) = \phi_N \cdot (\varphi(a)|_{L'_N}) = \varphi(a)|_{L'_N} \circ \phi_N$. Desta maneira, $f^{**}(\tau_N(\bar{a})) = \tau_N(\bar{a})f^*$ e para $h \in Hom(\frac{A^m}{L_M},E)$ temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
(f^{**}(\tau_N(\bar{a})))(h) &= ((\tau_N(\bar{a}))f^*)(h) \\
&= \tau_N(\bar{a})(f^*(h)) \\
&= \tau_N(\bar{a})(hf) \\
&= (\varphi(a)|_{L'_N} \circ \phi_N)(hf) \\
&= \varphi(a)|_{L'_N}(\phi_N(hf))
\end{aligned}$$

$$= \varphi(a)|_{L'_N}(hf(\bar{e}_1), ..., hf(\bar{e}_n))$$

$$= a \cdot (hf(\bar{e}_1), ..., hf(\bar{e}_n))$$

$$= (a_1, ..., a_n) \cdot (hf(\bar{e}_1), ..., hf(\bar{e}_n))$$

$$= a_1hf(\bar{e}_1) + ... + a_nhf(\bar{e}_n)$$

$$= hf(a_1\bar{e}_1 + ... + a_n\bar{e}_n)$$

$$= h(f(\bar{a}))$$

Por outro lado, vejamos agora o resultado da composição de f e τ_M. Escrevendo $f(\bar{a}) = \overline{(x_1, ..., x_m)}$, obtemos $\tau_M(f(\bar{a})) = \tau_M(\overline{(x_1, ..., x_m)}) = \varphi(x_1, ..., x_m)|_{L'_M} \circ \phi_M$ e com isto, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
(\varphi(x_1, ..., x_m)|_{L'_M} \circ \phi_M)(h) &= \varphi(x_1, ..., x_m)|_{L'_M}\phi_M(h) \\
&= \varphi(x_1, ..., x_m)|_{L'_M}(h(\bar{e}_1), ..., h(\bar{e}_m)) \\
&= x_1h(\bar{e}_1) + ... + x_nh(\bar{e}_m) \\
&= h(x_1\bar{e}_1 + ... + x_m\bar{e}_m) \\
&= h(\overline{(x_1, ..., x_m)}) \\
&= h(f(\bar{a}))
\end{aligned}$$

Do anterior, temos que $f^{**}\tau_N = \tau_M f$, para qualquer morfismo $f \in \mathfrak{Noether}(A)$ e portanto, $\tau : 1_{\mathfrak{Noether}(A)} \to Hom(Hom(\_, E), E)$ é um isomorfismo natural.

$\square$

Bibliografia

[1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald; Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, 1969.

[2] G. Azumaya; *Corrections and Supplementaries to my Paper Concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem.* Nagoya Math. J. 1 (1950), 117-124.

[3] R. Baer; *Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group*, Bulletin of the American Mathematical Society 46, N. 10, 800-806.

[4] I. Beck; *Σ-injective modules.* J. Algebra 21 (1972), 232-249.

[5] K. I. Beidar, S. K. Jain, e A. K. Srivastava; *New Characterization of Σ-Injective modules.* American Mathematical Society, vol 136, N. 10, 1958.

[6] A. Cailleau; *Une caractérisation des modules Σ-injectifs.* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 269 (1969), A997-999.

[7] J. Dauns; Modules and Rings, Cambridge University Press, 1994.

[8] B. Eckmann, A. Schopf; *Über injektive Moduln*, Archiv der Mathematik, 4 (1953), 75-78.

[9] D. Eisenbud; Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.

[10] C. Faith; *Rings with ascending condition on annihilators.* Nagoya Math. J. 27 (1966), N. 1, 179-191.

[11] T. W. Hungerford; Algebra. Springer, 1974.

[12] I. Kaplansky; Infinite Abelian Groups, University of Michigan Press, 1954.

[13] T. Y. Lam; Lectures on Modules and Rings. Springer, 1998.

[14] T. Y. Lam; A First Course in Noncommutative Rings. Springer-Verlag New York, 2^a ed, 2001.

[15] S. Mac Lane; Categories for the Working Mathematician. Graduate Texts in Mathematics 5. Springer-Verlag, New York, 1971.

[16] E. Matlis; *Injective Modules over Noetherian Rings.* Pacific Journal of Mathematics, vol 8, N. 3, 1958.

[17] D. G. Northcot; Ideal Theory. Cambridge University Press, 1972.

[18] A. Rosenberg, D. Zelinsky; *Finiteness of the Injective Hull.* 1958. Math. Z. 70 (1959), 372-380.

[19] F. Zaldívar; Introducción al Álgebra conmutativa. 2011.