

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Modelos elásticos não clássicos para
vibrações de micro e nanovigas**

por

Leticia Tonetto

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutora em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen
Orientador

Porto Alegre, 17 de dezembro de 2015.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Tonetto, Leticia

Modelos elásticos não clássicos para vibrações de micro e nanovigas / Leticia Tonetto.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2015.

176 p.: il.

Tese (doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2015.

Orientador: Ruiz Claeysen, Julio César

Tese: Matemática Aplicada

Viga de Timoshenko, micro e nanovigas, elasticidade não local, efeitos de escala, resposta impulso, método de Adomian.

Modelos elásticos não clássicos para vibrações de micro e nanovigas

por

Leticia Tonetto

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada
do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutora em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Vibrações, Controle, Sistemas e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Manoel Balthazar
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

Profa. Dra. Rosemaira Dalcin Copetti
Departamento de Matemática/UFSM

Prof. Dr. João Batista da Paz Carvalho
PPGMAp/UFRGS

Tese apresentada e aprovada em
17 de dezembro de 2015.

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus pela vida e saúde, aos familiares, amigos e colegas pelo incentivo e apoio. Ao professor orientador Julio Claeysen pela orientação, ensinamentos, e incentivo durante a realização de meu mestrado e doutorado.

Aos professores membros da banca, pelas contribuições e sugestões na realização deste trabalho. À UFRGS, PPGMap, CNPq e CAPES pela oportunidade e disponibilização de recursos.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE SÍMBOLOS	xii
RESUMO	xiv
ABSTRACT	xv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Revisão bibliográfica	1
1.2 Objetivos do trabalho	5
1.3 Contribuições da tese	6
1.4 Organização do trabalho	7
2 TEORIAS CONTÍNUAS DEPENDENTES DE ESCALA PARA MO- DELAGEM DE VIBRAÇÕES DE MICRO E NANOVIGAS	9
2.1 Teoria da elasticidade não local de Eringen	9
2.2 Teoria do gradiente de deformação	12
2.3 Teoria da tensão acoplada	16
2.4 Teoria da elasticidade de superfície	17
2.5 Modelos de ordem superior e com força força axial	20
3 FORMULAÇÃO MODAL MATRICIAL	24
4 BASE MATRICIAL FUNDAMENTAL	31
4.1 Modelo de Timoshenko não local de Eringen	32
4.1.1 Formulação adimensional	34
4.2 Modelo de Timoshenko Gradiente de deformação	37
4.2.1 Formulação adimensional	38

5	MÉTODO ESPECTRAL DE EULER	41
5.1	Cálculo dos autovetores	42
5.2	Vibrações em vigas simplesmente apoiadas	46
5.2.1	Modelo de Timoshenko clássico	46
5.2.2	Modelo de Timoshenko gradiente de deformação/tensão acoplada	50
5.3	Modelo de Timoshenko incluindo efeitos de superfície	56
5.3.1	Caracterização dos autovetores e modos de vibração	58
5.3.2	Equação de frequência	62
5.3.2.1	Viga apoiada-apoiada	63
5.3.2.2	Viga fixa-livre	65
6	MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN	67
6.1	Fórmulas para os polinômios de Adomian	71
6.2	Método da decomposição de Adomian considerando a resposta fundamental espacial	73
6.3	Método de Adomian no caso linear	89
6.4	Método de Adomian considerando não linearidade cúbica	99
7	RESULTADOS NUMÉRICOS PARA VIBRAÇÕES LIVRES	104
7.1	Análise de polinômios característicos	104
7.1.1	Não local de Eringen adimensional	104
7.1.2	Gradiente de deformação	110
7.2	Modos e frequências naturais de vibração relativas ao modelo de Timoshenko não local de Eringen	111
7.3	Vibrações em vigas simplesmente apoiadas segundo modelo de Timoshenko gradiente de deformação/tensão acoplada	116
7.4	Modos e frequências naturais de vibração relativas ao modelo de Timoshenko com efeitos de superfície	125

8	VIBRAÇÕES FORÇADAS E NÃO LINEARES DO MODELO DE TIMOSHENKO UTILIZANDO O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN	128
8.1	Respostas dinâmicas para problemas forçados	128
8.1.1	Aproximação espectral para a solução de Green dinâmica	130
8.1.2	Esquema recursivo padrão de Adomian	131
8.2	Respostas não lineares	133
8.3	Simulações	135
8.3.1	Caso linear homogêneo	136
8.3.2	Forçante harmônico	138
8.3.3	Não linearidade cúbica	140
9	CONCLUSÕES	145
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	149
APÊNDICE A	MODELOS CLÁSSICOS PARA VIBRAÇÃO TRANSVERSAL DE VIGAS	162
APÊNDICE B	MÉTODO DE FERRARI	171
APÊNDICE C	CONVERGÊNCIA DO ESQUEMA DE ADOMIAN	173
APÊNDICE D	FÓRMULA DA CONVOLUÇÃO DA EXPONENCIAL	175

Lista de Figuras

Figura 2.1	Representação esquemática da viga incluindo efeitos de superfície.	18
Figura 7.1	Representação gráfica do coeficiente $b_0(\Omega)$	105
Figura 7.2	Representação gráfica do coeficiente $b_2(\Omega)$	106
Figura 7.3	Representação gráfica do coeficiente $b_4(\Omega)$	106
Figura 7.4	Comportamento equação característica $\Delta(\beta, \Omega) = 0$ para diferentes valores de e_n	107
Figura 7.5	$\Delta(\beta, \Omega) = 0$ para valores paramétricos fixados.	111
Figura 7.6	Modos de vibração da viga simplesmente apoiada caso clássico (linha sólida) e incluindo efeitos não locais (linha tracejada).	114
Figura 7.7	Modos de vibração da viga fixa-livre, caso clássico (linha sólida) e incluindo efeitos não locais (linha tracejada).	115
Figura 7.8	Primeiras quatro frequências para vigas simplesmente apoiadas, com h variando de $17.6\mu m$ a $100\mu m$. TBSG: gradiente de deformação; TBCP: tensão acoplada; TBCP: clássico considerando Poisson.	120
Figura 7.9	Frequências naturais $\omega_n(rad/s)$ para vigas simplesmente apoiadas, casos $h = l$, $h = 4l$, $h = 8l$. TBSG: gradiente de deformação; TBCP: tensão acoplada; TBCP: clássico considerando Poisson.	121
Figura 7.10	Influência do coeficiente de Poisson.	121
Figura 7.11	Modos de vibração da viga simplesmente apoiada (primeira coluna) e para a viga fixa-livre (segunda coluna), caso clássico (linha sólida) e incluindo efeitos de superfície (linha tracejada). Viga de Silício.	127
Figura 8.1	$w(t, x)$ obtida pelo esquema recursivo de Adomian (linha verde pontilhada) e $w(t, x)$ obtida via formulação de Green de valor inicial, com variável t fixada.	138
Figura 8.2	Comparação das respostas forçadas, componente $w(t, x)$, relativas a $F(x)$ definido pela Configuração 1.	140
Figura 8.3	Comparação das respostas forçadas, componente $w(t, x)$, relativas a $F(x)$ definido pela Configuração 2.	140
Figura 8.4	$w(t, x)$ Adomian linear (linha verde) e Adomian não linear (linha vermelha). Condições iniciais: Configuração 1.	142

Figura 8.5	$w(t, x)$ Adomian linear (linha verde) e Adomian não linear (linha vermelha). Condições iniciais: Configuração 2.	143
Figura 8.6	$w(t, x)$ Adomian linear (linha verde) e Adomian não linear (linha vermelha). Condições iniciais: Configuração 3.	144
Figura A.1	Representação do deslocamento transversal da viga e seu sistema de coordenadas cartesianas.	163

Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Valores do parâmetro e_0 segundo a literatura.	11
Tabela 2.2	Parâmetros materiais e geométricos para modelo gradiente de deformação e modelo da tensão acoplada.	15
Tabela 2.3	Parâmetros materiais para o <i>bulk</i> e superfície, para vigas de Alumínio e de Silício.	18
Tabela 3.1	Descrição dos coeficientes da formulação unificada \mathbf{M} e \mathbf{K}	26
Tabela 5.1	Caracterização dos graus dos polinômios característicos e classificação dos problemas quanto a singularidade.	42
Tabela 6.1	Valores $U_k^{(j)}(0)$	80
Tabela 6.2	Valores de $V_j = U_k^{(j)}(0)$ em função da solução matricial $\mathbf{h}_j = \mathbf{h}^{(j)}(0)$	81
Tabela 6.3	Valores de $N_j = N_k^{(j)}(0)$ em função de $d_j = d^{(j)}(0)$	88
Tabela 6.4	Frequências naturais adimensionais lineares ($\alpha = 0$) e não lineares ($\alpha = 1$) da viga de Timoshenko fixa-livre com $\eta = 0.0004$, $\xi = 625$	102
Tabela 6.5	Frequências naturais adimensionais lineares ($\alpha = 0$) e não lineares ($\alpha = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1$) da viga de Timoshenko fixa-livre com $\eta = 0.0004$, $\xi = 625$, $N = 40$	103
Tabela 6.6	Frequências naturais adimensionais lineares ($\alpha = 0$) e não lineares ($\alpha = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$) da viga de Timoshenko biapoiada com $\eta = 0.01$, $\nu = 0.25$, $\kappa = 2/3$, $N = 40$	103
Tabela 7.1	Natureza de ϵ , δ e raízes β nos intervalos de definição dados pelas frequências críticas Ω_c , Ω_{b01} , Ω_{b2} e Ω_{b02} , parâmetros adimensionais fixados $e_n = 0.0005$, $\xi = 384$, $\eta = 0.0008$	109
Tabela 7.2	Natureza das raízes β nos intervalos definidos pelas frequências críticas Ω_{b4} e Ω_{b8}	110
Tabela 7.3	Frequências naturais adimensionais, modelo de Timoshenko não local de Eringen, analítico utilizando solução fundamental matricial e método de Adomian com $N = 41$, $\xi = 384$, $\eta = 0.0008$, condições de contorno do tipo viga apoiada-apoiada e fixa-livre.	113
Tabela 7.4	Frequências naturais para vigas simplesmente apoiadas Timoshenko (TB) e Euler-Bernoulli (EB), para os modelos SG: gradiente de deformação; CS: tensão acoplada; CP: clássico considerando Poisson; C: Clássico, $h = \ell$	117

Tabela 7.5	Frequências naturais para vigas simplesmente apoiadas Timoshenko (TB) e Euler-Bernoulli (EB), para os modelos SG: gradiente de deformação; CS: tensão acoplada; CP: clássico considerando Poisson; C: Clássico, $h = 4\ell$.	118
Tabela 7.6	Frequências naturais para vigas simplesmente apoiadas Timoshenko (TB) e Euler-Bernoulli (EB), para os modelos SG: gradiente de deformação; CS: tensão acoplada; CP: clássico considerando Poisson; C: Clássico, $h = 8\ell$.	119
Tabela 7.7	Frequências naturais adimensionais para viga biapoiada, modelo gradiente de deformação, variando espessura h , e modelo clássico de Timoshenko, $b = 2h$, $\kappa = 5/6$, $\nu = 0$.	123
Tabela 7.8	Frequências naturais adimensionais para viga biapoiada, modelo gradiente de deformação, variando espessura h , e modelo clássico de Timoshenko, $b = 2h$, $\kappa = 5/6$, $\nu = 0$, $L = 20h$.	124
Tabela 7.9	Comparativo entre as frequências naturais dos modelos de Timoshenko incluindo e não incluindo efeitos de superfície, considerando nano e micro escala, de uma viga de Silício. Parâmetros geométricos Nanoviga: $L = 50 \times 10^{-9}m$, $H = 2h = 6 \times 10^{-9}m$, $b = 3 \times 10^{-9}m$. Microviga: $L = 50 \times 10^{-6}m$, $H = 2h = 6 \times 10^{-6}m$, $b = 3 \times 10^{-6}m$.	125
Tabela 7.10	Comparativo entre as frequências naturais dos modelos de Timoshenko incluindo e não incluindo efeitos de superfície, considerando nano e micro escala, de uma viga de Alumínio. Parâmetros geométricos Nanoviga: $L = 50 \times 10^{-9}m$, $H = 2h = 6 \times 10^{-9}m$, $b = 3 \times 10^{-9}m$. Microviga: $L = 50 \times 10^{-6}m$, $H = 2h = 6 \times 10^{-6}m$, $b = 3 \times 10^{-6}m$.	126
Tabela 8.1	Cinco primeiras frequências naturais da viga biapoiada de Timoshenko.	135
Tabela A.1	Condições de contorno clássicas para a viga de Timoshenko.	168
Tabela A.2	Condições de contorno clássicas para a viga de Euler-Bernoulli.	170

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal
H	Espessura da viga
b	Largura da viga
L	Comprimento da viga
E	Módulo de Young
G	Módulo de cisalhamento
I	Momento de Inércia, Matriz identidade
λ, μ	Constantes de Lamé
k	Coefficiente volumétrico
κ	Fator de correção
ν	Coefficiente de Poisson
ρ	Densidade
$w(t, x)$	Deslocamento transversal
$\phi(t, x)$	Deslocamento angular
$\mathbf{w}(x)$	Amplitude espacial vetorial ou modo de vibração com componente transversal e angular
$f(t, x), p(t, x)$	Força transversal distribuída

σ_{ij}	Tensor tensão
ε_{ij}	Tensor deformação
$\mathbf{h}(x)$	Solução fundamental matricial
$\mathbf{h}(t, x, \xi)$	Função de Green matricial ou resposta impulso distribuída
M	Momento
S	Cisalhamento
T	Energia cinética
U	Energia potencial
W	Trabalho
ω_j	j-ésima frequência natural
Ω_j	j-ésima frequência natural adimensional
e_0	Coefficiente de ajuste
a	Comprimento característico interno
$\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell$	Parâmetros materiais de escala
λ_0, μ_0	Constantes de Lamé de superfície
τ_0	Tensão residual de superfície
ρ_0	Densidade material de superfície
i	Unidade imaginária
\mathbf{M}, \mathbb{M}	Matriz de massa
\mathbf{K}, \mathbb{K}	Matriz de rigidez
A_n	Polinômios de Adomian

RESUMO

É realizado um estudo da dinâmica de vigas em micro e nano escalas, baseado em modelos contínuos não clássicos de acordo com teorias que consideram a dependência de escala (parâmetros de comprimento característico interno, energia de deformação e tensão superficial): teoria não local de Eringen, teoria do gradiente de deformação e teoria da elasticidade de superfície. Esses modelos são formulados matricialmente a fim de visualizar e comparar as modificações geradas pela inclusão dos efeitos mencionados. A obtenção de soluções harmônicas no tempo resulta em problemas de autovalor regulares e singulares, e polinômios característicos de ordem superior. O comportamento das soluções é determinado pela introdução de frequências críticas não clássicas, as quais se reduzem a frequência crítica clássica quando os efeitos de escala são negligenciados. As abordagens utilizadas para determinação de modos e frequências naturais de vibração são o método espectral com uso da base gerada pela resposta fundamental e base de Euler, e modificações do método da decomposição de Adomian. Respostas forçadas e não lineares são obtidas utilizando aproximação espectral para a resposta impulso distribuída e o método de Adomian. É constatado que para o caso biapoiado os efeitos não locais influenciam as frequências naturais, preservando o comportamento qualitativo dos modos. Propriedades dinâmicas para vigas fixa-livre são mais influenciadas, apresentando modos degenerados. Quando a espessura da viga é comparável à medida de comprimento interno, o modelo gradiente de deformação sofre maior influência em relação aos resultados clássicos. Os efeitos de superfície tem influência apenas na nanoescala, na microescala os resultados tendem aos resultados clássicos.

ABSTRACT

It is worked out a study of micro and nano beam dynamics, based on non classical continuum theories, that consider the size dependence (internal characteristic length parameters, strain energy and surface stress): Eringen's non local theory, strain gradient and surface elasticity theory. These models were written within a matrix framework in order to visualize and compare the modifications due to the inclusion of the small scale effects. The finding of time-harmonic solutions leads to regular and singular eigenvalue problems that involve higher-order characteristic polynomials. The behavior of solutions was determined by the introduction of non-classical critical frequencies that reduced to the classical Timoshenko critical frequency when size effects are neglected. The approaches used for the obtention of mode shapes and natural frequencies were: the spectral method with the natural basis generated by fundamental response and the Euler's basis, and modifications of the Adomian decomposition method. Forced and non linear responses are obtained by using spectral approximation of the distributed impulse response and with the Adomian method. It is observed, in agreement with corresponding literature, that for simply supported beams, the non local effects change natural frequencies but somehow preserve the qualitative behavior of the modes. Dynamical properties of clamped free beams suffer more influence, showing the appearance of degenerated modes for some non local parameters. The strain gradient model exhibits more influence in relation to classical results when beam thickness is comparable to the material length scale parameter. The surface effects have influence only in the nanoscale, in microscale results tend to classical results.

1 INTRODUÇÃO

Impulsionado pela invenção dos microscópios de alta precisão STM (*Scanning Tunneling Microscope*) e AFM (*Atomic Force Microscope*), em meados dos anos 80, tem se intensificado o desenvolvimento científico e tecnológico no campo da nanotecnologia. Apesar de suas ideias já terem sido consideradas por Feynman[50], com sua proposta de fabricação de nanodispositivos, somente a partir da instrumentação, principalmente através da invenção dos mencionados microscópios de alta precisão, foi possível a visualização e manipulação nessa escala. Também de relevância nessa área, tem-se os primeiros trabalhos sobre nanotubos de carbono (CNTs) por Kroto, Curl, Smalley e Iijima no início dos anos 90 [77], [69], componentes esses que destacam-se por suas propriedades mecânicas, químicas e eletrônicas, os tornando amplamente utilizados em diferentes aplicações.

Dentro desse contexto, o interesse particular desta tese reside no estudo do comportamento vibratório de vigas miniaturizadas, ou seja, micro e nanovigas, utilizadas em diferentes aplicações com o papel de microatuadores, *microswitches*, biosensores, *nanowires*, *nanoprobes*, como parte em sistemas nano e microeletromecânicos (NEMS e MEMS) [70], transdutores microeletromecânicos como plataforma para sensores químicos e biológicos [84], [88], na modelagem de nanotubos [123], [87], [36], ou como componente central em microscópios de alta precisão, por exemplo, microscópios de força atômica [109], [38].

1.1 Revisão bibliográfica

Inicialmente muitos estudos relacionados a microvigas foram baseados nas teorias convencionais de mecânica do contínuo, das quais destacam-se a teoria elementar ou clássica de Euler-Bernoulli e clássica de Timoshenko [114], [115], [116], [63], [104], [92], [58]. Ou ainda, através de uma abordagem computacional, via dinâmica molecular, considerando cada molécula e suas interações mecânicas e químicas individualmente [82], [128], [130]. Uma vez que via dinâmica molecular é requerido intenso esforço computacional, o que acaba res-

tringindo o número de moléculas consideradas, tem-se dado preferência a abordagem contínua [82].

A questão que surge quando os comprimentos das escalas associadas são suficientemente pequenos, é a de que a aplicabilidade desses modelos contínuos clássicos pode não ser apropriada. Esse tópico tem sido discutido na literatura com a proposta de modelos que incluem diferentes efeitos, tais como efeitos não locais [87], [100], efeitos de deformação de ordem superior [70] e efeitos de superfície [3], [121], [84], considerados separadamente ou mais recentemente considerados simultaneamente [54], [65], modificando as teorias convencionais de vibração de vigas em micro e nanoescala, a fim de as tornarem dependentes de escala.

A principal diferença entre as teorias clássicas de Euler-Bernoulli e Timoshenko é o fato que a segunda, considera efeitos de cisalhamento e inércia rotatória. Ruge e Birk [107] salientam que a deformação por cisalhamento e a inércia rotatória devem ser consideradas nas respostas dinâmicas de vigas, particularmente para obtenção de frequências altas de vigas sob efeito de excitações transientes arbitrárias.

Ambas as teorias, de Euler-Bernoulli e Timoshenko clássicas, tem sido amplamente tratadas na literatura, em diferentes situações e problemáticas, considerando condições de contorno clássicas e não clássicas, presença de dispositivos intermediários arbitrariamente localizados, seção transversal com propriedades descontínuas, tais como aquelas oriundas da inclusão de materiais piezoelétricos, vigas compostas de *functionally graded materials* (FGM), efeitos termais. Quanto as problemáticas tem-se: vibrações livres e forçadas, deformação estática, *buckling*, detecção de fratura, propagação de ondas, problemas inversos, vibração de vigas infinitas, dentre outros.

Em geral a abordagem matemática nessas situações pode ser dividida em três categorias [80]. A primeira delas a das soluções exatas obtidas por diferentes métodos, para um número restrito de casos, a segunda caracteriza-se pelo estudo de soluções semi-analíticas incluindo método da quadratura diferencial, polinômios característicos ortogonais [17], por exemplo, polinômios de Chebyshev e métodos espectrais. E finalmente, métodos de discretização, tais como, métodos de elementos finitos e diferenças finitas.

Uma abordagem que também se enquadra como método semi-analítico, faz uso do método da decomposição de Adomian [7] para a determinação de modos e frequências naturais de vibração no estudo de respostas livres [67]. O uso dos polinômios de Adomian também aparece no estudo das vibrações não lineares de vigas infinitas, considerando carregamentos móveis e vigas sobre fundação elástica. Além da decomposição de Adomian, nesse caso, são também utilizadas técnicas de transformada de Fourier e *wavelets* [127], [76].

No estudo de problemas associados com sistemas vibratórios amortecidos concentrados, Claeysen propôs o uso de uma base fundamental gerada por uma solução matricial com condições iniciais de natureza impulsiva para a obtenção de respostas dinâmicas. A qual foi determinada explicitamente em termos de uma solução de uma equação diferencial escalar acoplada com um número finito das derivadas da solução fundamental na origem [22], [34],[23]. Esta base foi utilizada com sistemas vibratórios distribuídos clássicos com condições de contorno clássicas e não clássicas e com sistemas vibratórios concentrados não clássicos [18, 53, 96, 39, 40, 42, 113, 57, 110, 112, 118], [28, 26].

A base fundamental foi utilizada no cálculo simbólico de modos de vigas e placas [24], bem como na decomposição de respostas forçadas [27], em modelos acoplados oceano-atmosfera [55], no estudo de estruturas *offshore* e nanotubos de carbono [42], no modelo de Timoshenko não linear para uma viga com força axial [106], no estudo do espectro e obtenção de modos em vigas biapoiadas de Timoshenko [73], [117] com ênfase no segundo espectro e vibrações livres.

Com o intuito de estudar problemas em nanotecnologia relacionados com a modelagem de nanotubos com múltiplas camadas, foram considerados o modelo de viga Euler-Bernoulli e o modelo de Timoshenko. Ambos consideraram métodos numéricos e semi-analíticos para resolução dos problemas quadráticos de autovalor resultantes, entre eles, método de Krylov, método da Potência [110] e método de Urabe com polinômios de Chebyshev [112].

Dentro do contexto das aplicações em nanotecnologia, e como continuidade dos trabalhos [119] e [41], em [118], vigas segmentadas livres e forçadas, descritas pelos modelos

de Euler-Bernoulli e Timoshenko com condições de contorno não clássicas devido ao uso de materiais piezoelétricos, foram consideradas na modelagem de microvigas com aplicações em microscopia de força atômica e envolvendo o uso da base dinâmica em vigas segmentadas [38], [37], [35], [31, 30].

Mais recentemente, o interesse pelas aplicações de vigas em nanoescala tem gerado uma expansão na literatura em termos da modelagem de modelos baseados em modificações dos modelos clássicos. Porém a maioria dos trabalhos restringe-se ao caso convencional de condição de contorno simplesmente apoiada. Além do que são priorizados os casos estáticos. Sendo assim, avanços no estudo dinâmico e considerando outras condições de contorno importantes nas aplicações, tais como o caso viga fixa-livre, podem contribuir no entendimento e aprimoramento de sistemas micro e nanoeletromecânicos, entre outros dispositivos em micro e nanoescala [38], [32].

Busca-se nesse trabalho analisar as modificações introduzidas nos modelos clássicos baseadas em teorias não clássicas e quais as implicações dessas inclusões nas equações governantes clássicas. Os efeitos dessas inclusões tem sido analisados comparativamente ao caso clássico. Em síntese os modelos não locais alteram a matriz de massa, e os modelos gradiente de deformação e tensão acoplada a matriz de rigidez, incluindo termos de ordem superior, o modelo que inclui efeitos de superfície aqui considerado altera ambas as matrizes e caracteriza-se matematicamente, assim como o modelo da tensão acoplada, por ser um problema singular. Tal análise não é feita dessa maneira na literatura, que em geral apresenta resultados quantitativos comparando casos modificados e casos clássicos.

Além disso, visto que o tema das vibrações forçadas ainda permanece menos discutido na literatura, propõe-se a busca de respostas dinâmicas com o uso do método da decomposição de Adomian [6], [125], comparativamente com os resultados semi-analíticos obtidos através da convolução do termo forçante com a função de Green dinâmica ou resposta impulso matricial distribuída, a qual é aproximada espectralmente, considerando propriedades ortonormais dos modos de vibração [38].

Nas seções a seguir são sintetizados os objetivos da tese, e é especificada a organização dos capítulos bem como contribuições do trabalho.

1.2 Objetivos do trabalho

Os objetivos desta tese estão sintetizados nos itens a seguir.

- Descrever os modelos teóricos propostos na literatura, baseados na teoria clássica de Timoshenko, porém incluindo efeitos não locais, efeitos de deformação de ordem superior e efeitos de superfície, mencionando os modelos de Euler-Bernoulli correspondentes.
- Estudar dinamicamente o comportamento de micro e nanovigas, de material homogêneo linear e isotrópico, baseadas nos modelos do item anterior, através de um estudo matricial, análise modal das equações, determinação de frequências naturais e modos de vibração.
- Apresentar resultados comparativos entre os modelos propostos e modelos clássicos, a fim de analisar a influência dos parâmetros incluídos pela teoria não local de Eringen, teoria do gradiente de deformação, teoria da tensão acoplada e teoria da elasticidade de superfície.
- Obter soluções espaciais ou modos de vibração baseadas em (i) método espectral de Euler, (ii) base matricial gerada pela resposta espacial fundamental, (iii) decomposição de Adomian.
- Apresentar soluções para o caso forçado e não linear, considerando o método da decomposição de Adomian e a função de Green dinâmica.

1.3 Contribuições da tese

Nos itens a seguir são enumeradas as principais contribuições deste trabalho.

- Os modelos matemáticos de Timoshenko dependentes de parâmetros de escala e forçantes são formuladas unificadamente permitindo uma comparação a nível matricial em relação ao caso clássico de Timoshenko. Essa formulação permite a incorporação de elementos considerados nos diversos modelos que tem sido propostos na literatura, tanto na modelagem de micro e nanovigas, bem como vigas segmentadas ou compostas, entre outras.
- A obtenção de modos e frequências naturais de vibração para o caso clássico de Timoshenko é estendida para os modelos de Timoshenko não local e modelo de Timoshenko gradiente de deformação, com resultados satisfatoriamente comparados aos da literatura através de outros métodos.
- O método da decomposição de Adomian é considerado conjuntamente com a solução fundamental matricial relativa ao modelo de Timoshenko, local e não local, gerando esquemas iterativos implementáveis para os casos não lineares e com testes satisfatoriamente realizados em comparação com resultados da literatura, para os casos lineares.
- A tese contribui na pesquisa da obtenção de respostas dinâmicas forçadas para as equações de Timoshenko [37], [118], [38] apresentando resultados comparativos com uso da solução fundamental distribuída, aproximada espectralmente, e método da decomposição de Adomian. Além disso, são obtidas respostas dinâmicas quando é considerado um termo não linear de natureza cúbica, fazendo uso de um esquema iterativo de Adomian.

1.4 Organização do trabalho

A fim de alcançar os objetivos descritos anteriormente, este trabalho tem a seguinte organização.

Capítulo 2: Refere-se a modelagem das vibrações transversais de vigas considerando teorias contínuas não clássicas, modificando os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

Capítulo 3: Formulam-se matricialmente, de maneira unificada, os modelos de Timoshenko não clássicos apresentados no capítulo anterior.

Capítulo 4: Apresenta-se a solução fundamental matricial que compõe a base para as soluções espaciais para os casos regulares. Faz-se o estudo dos polinômios característicos para os modelos de Timoshenko não local de Eringen e modelo de Timoshenko gradiente de deformação, comparativamente ao polinômio característico de quarta ordem correspondente ao modelo de Timoshenko clássico.

Capítulo 5: Formulam-se as soluções do problema espacial para os casos singulares considerando-se o método espectral com uso da base de Euler. Estudo do caso da viga biapoiada para o modelo de Timoshenko clássico e para o modelo de Timoshenko segundo a teoria do gradiente de deformação, o qual reduz-se ao modelo de Timoshenko da tensão acoplada quando certos parâmetros são negligenciados.

Capítulo 6: Descreve-se o método da decomposição de Adomian de maneira geral, apresentando-se as fórmulas que geram os polinômios de Adomian. São propostas modificações do método de Adomian considerando a solução fundamental matricial. Aplica-se o método na obtenção de modos e frequências naturais de vibração para o modelo clássico de Timoshenko, modelo de Timoshenko não local e modelo de Timoshenko gradiente de deformação. São comparadas frequências naturais obtidas considerando o modelo de Timoshenko clássico linear e clássico que inclui termo de não linearidade cúbica.

Capítulo 7: Apresentam-se resultados numéricos referentes aos modos e frequências naturais de vibração obtidos considerando as metodologias apresentados nos capítulos 4, 5 e 6.

Capítulo 8: O método da decomposição de Adomian é utilizado para determinação de respostas forçadas e para obtenção de respostas dinâmicas para os casos não lineares.

Capítulo 9: Considerações finais.

Capítulo 10: Referências bibliográficas.

Apêndices: A: Descrição básica dos modelos matemáticos clássicos de Euler-Bernoulli e Timoshenko; B: Descrição do Método de Ferrari aplicado ao polinômio característico de grau 8 referente ao modelo matemático de Timoshenko gradiente de deformação; C: Comentários sobre a convergência do esquema de Adomian; D: Cálculo de uma fórmula analítica para integral de uma convolução entre função do tipo exponencial e polinomial de grau k .

2 TEORIAS CONTÍNUAS DEPENDENTES DE ESCALA PARA MODELAGEM DE VIBRAÇÕES DE MICRO E NANOVIGAS

Observações experimentais e simulações atômicas têm indicado que as respostas e propriedades mecânicas são sensíveis ao tamanho das estruturas, quando essas se tornam muito pequenas. De modo que, sendo as teorias clássicas independentes de escala, não podem prever esse comportamento. Por outro lado, os modelos atômicos e moleculares são restritos às capacidades computacionais. Teorias não clássicas contínuas representam tentativas de estender a abordagem da mecânica do contínuo, a fim de capturar os efeitos da diminuição da escala. Assim, têm recebido atenção o desenvolvimento de teorias contínuas dependentes de escala para a modelagem de estruturas e dispositivos com dimensões menores [87].

Quatro abordagens principais da mecânica do contínuo não clássica têm sido desenvolvidas, modificadas e aplicadas para estudar o comportamento mecânico de micro e nanoestruturas:

- 1- Teoria da elasticidade não local de Eringen [48], [49].
- 2- Teoria do gradiente da deformação [94], [79].
- 3- Teoria da tensão acoplada [95], [74], [126].
- 4- Teoria da elasticidade de superfície [59], [60].

2.1 Teoria da elasticidade não local de Eringen

A teoria da mecânica do contínuo não local proposta por Eringen e co-autores [48] tem sido aplicada a muitos problemas, tais como, propagação de ondas, deslocamento e fraturas mecânicas, entre outros [87]. Sendo que as primeiras aplicações da teoria não local à nanotecnologia se devem a Peddieson [100].

As relações constitutivas da elasticidade clássica são relações algébricas entre tensões e deformações. De acordo com a teoria de elasticidade não local de Eringen as tensões em qualquer ponto de referência do corpo irão depender não somente das deformações nesse ponto, mas também das deformações em todos os pontos do corpo [9]. Essas teorias contêm informação sobre as forças entre os átomos, e a escala de comprimento interna é introduzida nas equações constitutivas como um parâmetro material.

A relação constitutiva não local é dada por [48]

$$[1 - (e_0a)^2 \nabla^2] \sigma_{kl} = \lambda \varepsilon_{rr} \delta_{kl} + 2\mu \varepsilon_{kl}, \quad (2.1)$$

onde σ_{kl} é o tensor tensão não local, ε_{kl} é o tensor deformação, λ e μ constantes materiais, a é um comprimento característico interno e e_0 é uma constante de ajuste do modelo.

As equações governantes para o modelo de Timoshenko, de acordo com essa teoria, são dadas por [87]

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[w - (e_0a)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \left[p - (e_0a)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right], \quad (2.2)$$

$$\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\phi - (e_0a)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] - EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = 0,$$

com momento fletor e cisalhamento definidos como

$$M = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} + (e_0a)^2 [\rho I \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p], \quad (2.3)$$

$$S = \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + (e_0a)^2 [\rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial p}{\partial x}],$$

sendo que p representa uma força transversal ao longo do eixo x .

Analogamente, o modelo não local de Euler-Bernoulli é descrito pela equação [87], [36]

$$\rho A \left(1 - (e_0a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w_{tt} + EI w_{xxxx} = p - (e_0a)^2 p_{xx}, \quad (2.4)$$

com momento fletor e cisalhamento definidos como

$$\begin{aligned} M &= -EI w_{xx} + (e_0a)^2 (\rho A w_{tt} - p), \\ S &= -EI w_{xxx} + (e_0a)^2 (\rho A w_{ttx} - p_x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

De acordo com Eringen [49], o valor numérico do parâmetro e_0 foi determinado por ajuste de curvas de dispersão baseado em modelos atômicos. Eringen utilizou $e_0 = 0.39$ e Peddieson [100] utilizou por conveniência $e_0 = 2/5$.

Quanto ao parâmetro de comprimento interno a , [100] define que a esteja na escala de angstroms, de modo que $1 \times 10^{-10}m < a < 1 \times 10^{-9}m$, e menciona os padrões de comprimento L para sistemas micro (MEMS) e nanoeletromecânicos (NEMS)

$$\text{MEMS: } 100 \times 10^{-6}m < L < 500 \times 10^{-6}m,$$

$$\text{NEMS: } 1 \times 10^{-9}m < L < 10 \times 10^{-9}m.$$

São reproduzidos na tabela a seguir, de acordo com [44], valores para o parâmetro e_0 , relativos ao material da viga, aplicação de interesse e método utilizado para a determinação, sendo LD sigla para *lattice dynamics* e MD *molecular dynamics*.

Referência	e_0	Material	Aplicação	Método
Eringen [48]	0.39	Alumínio	Propagação de ondas em sólidos	LD
Eringen [48]	0.31	KCI	Propagação de ondas em sólidos	LD
Zhang et al [129]	0.82	CNTs	<i>Buckling</i> de cascas	MD
Wang e Hu [122]	0.288	CNTs	Propagação de ondas em vigas	MD
Zhang [128]	8.79	Grafeno	Defeitos	MD
Duan 2[45]	0.0-19.0	CNTs	Vibração livre de vigas	MD
Hu [68]	0.2-0.6	CNTs	Propagação de ondas em cascas	MD
Zhang [130]	1.25	CNTs	Vibrações livres de vigas	MD
Arash e Ansari [14]	11.97-14.08	CNTs	Vibrações livres de shells	MD
Ansari [15]	6.13-9.93	Grafeno	Vibrações livres de placas	MD

Tabela 2.1: Valores do parâmetro e_0 segundo a literatura.

2.2 Teoria do gradiente de deformação

Midlin [94] propôs uma teoria de ordem superior de gradiente de deformação para materiais elásticos, considerando o primeiro e segundo gradientes do tensor deformação contribuindo na integral que descreve a densidade de energia de deformação. Fleck e Hutchinson [51] utilizaram as formulações de Mindlin e expressaram que a densidade de energia de deformação de materiais elásticos é uma função não somente do primeiro, mas também do segundo gradiente do campo de deslocamentos, ou seja, uma função da deformação e da sua primeira derivada. Essa teoria foi nomeada teoria do gradiente de deformação. Além disso, Lam et al. [79] introduziu uma teoria modificada do gradiente de deformação, utilizando a equação de equilíbrio dos momentos acoplados em adição as equações de equilíbrio de forças e momentos clássicas, essa tornou-se uma teoria não clássica popular na área de micro sistemas. Em geral, quando se mencionam modelos baseados na teoria do gradiente de deformação, o termo se refere a teoria modificada do gradiente de deformação proposta por Lam [79]. Essa nomenclatura é a adotada nos trabalhos de [120], [70] entre outros, a qual também será utilizada no presente trabalho.

A teoria do gradiente de deformação é aplicada para formular modelos de barras, vigas e placas [70], [120]. Três parâmetros extras relativos a escala, ℓ_0 , ℓ_1 , e ℓ_2 , aparecem nesta teoria em adição aos parâmetros clássicos módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, e são responsáveis por capturar os efeitos de escala. Sendo esses parâmetros adicionais estimados por experimentos, tais como testes de micro-flexão, micro-torção, micro/nano indentação [70].

A energia de deformação U em um material elástico linear isotrópico não deformado, ocupando uma região Ω de volume V é dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s) dV, \quad (2.6)$$

onde ε_{ij} é o tensor de deformação, γ_i é o tensor gradiente de dilatação, $\eta_{ijk}^{(1)}$ é a parte desviadora do tensor gradiente de *stretch*, χ_{ij}^s é o tensor gradiente de rotação simétrico. m_{ij}^s são os componentes do tensor tensão acoplada. p_i e $\tau_{ijk}^{(1)}$ são conhecidos como componentes de tensores tensão de ordem superior.

As componentes do tensor de deformação se relacionam com as componentes do campo de deslocamentos através das relações [79]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\
\gamma_i &= \varepsilon_{mm,i}, \\
\eta_{ijk}^{(1)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) - \frac{1}{15}\delta_{ij}(\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) \\
&\quad - \frac{1}{15}[\delta_{jk}(\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) + \delta_{ki}(\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m})], \\
\chi_{ij}^s &= \frac{1}{2}(E_{imn}\varepsilon_{nj,m} + E_{jmn}\varepsilon_{ni,m}),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde E_{ijk} refere-se ao símbolo de permutação. As medidas do tensor tensão clássico σ_{ij} e tensores de ordem superior p_i , $\tau_{ijk}^{(1)}$ e m_{ij}^s são descritas por meio das relações constitutivas

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \\
p_i &= 2\ell_0^2\gamma_i, \\
\tau_{ijk}^{(1)} &= 2\mu\ell_1^2\eta_{ijk}^{(1)}, \\
m_{ij}^s &= 2\mu\ell_2^2\chi_{ij}^s.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Pelo princípio de Hamilton, tem-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U + W) = 0, \tag{2.9}$$

onde U , T e W são dados por

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ k_1 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 + k_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_4 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \kappa \mu A \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right\} dx, \quad (2.10)$$

$$T = \int_0^L \rho I \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \rho A \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (2.11)$$

$$W = \int_0^L \left\{ \begin{array}{c} w \\ \phi \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} f(t, x) \\ -M(t, x) \end{array} \right\} dx, \quad (2.12)$$

omitindo os detalhes apresentados em [120], [70], obtém-se as equações governantes e condições de contorno do modelo de Timoshenko segundo a teoria do gradiente de deformação, descritas como

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{w} + (k_3 + k_4) w^{(iv)} + (k_3 - 2k_4) \phi''' - k_5 (w'' - \phi') &= f(t, x), \\ \rho I \ddot{\phi} + k_1 \phi^{(iv)} - (k_3 - 2k_4) w''' - (k_2 + k_3 + 4k_4) \phi'' - k_5 (w' - \phi) &= M(t, x), \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde [120]

$$k_1 = (2\mu \ell_0^2 + \frac{4}{5} \mu \ell_1^2) I, \quad k_2 = \frac{E(1-\nu)I}{(1+\nu)(1-2\nu)} + 2\mu A \ell_0^2, \quad (2.14)$$

$$k_3 = \frac{1}{4} \mu A \ell_2^2, \quad k_4 = \frac{8}{15} \mu A \ell_1^2, \quad k_5 = \kappa G A,$$

bem como condições de contorno prescritas em $x = 0$ e em $x = L$ segundo [97]

$$(k_3 + k_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{(t, x_0)} + (k_3 - 2k_4) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{(t, x_0)} - k_5 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \Big|_{(t, x_0)} = -F \quad \text{ou} \quad w \Big|_{(t, x_0)} = 0,$$

$$(k_3 + k_4) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{(t, x_0)} + (k_3 - 2k_4) \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{(t, x_0)} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{(t, x_0)} = 0,$$

(2.15)

$$-k_1 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_{(t, x_0)} + (k_3 - 2k_4) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{(t, x_0)} + (k_2 + k_3 + 4k_4) \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{(t, x_0)} = -M \quad \text{ou} \quad \phi \Big|_{(t, x_0)} = 0,$$

$$k_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{(t, x_0)} = M^h \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{(t, x_0)} = 0,$$

F é a força externa, M é o momento clássico e M^h é o momento de ordem superior.

Se os parâmetros não locais são negligenciados, o modelo se reduz ao modelo clássico de Timoshenko, incluindo efeitos de Poisson, que quando negligenciado, fazendo $\nu = 0$, deixa as equações na formulação clássica de Timoshenko. O modelo pode ainda ser reduzido ao modelo de Euler-Bernoulli se a deformação por cisalhamento for desprezada. Substituindo $\phi = \frac{\partial w}{\partial x}$ em (2.13), manipulando algebricamente e eliminando o termo de inércia rotatória $\rho I w_{ttxx}$, obtém-se o modelo equivalente, correspondente a teoria de Euler-Bernoulli

$$\rho A w_{tt} - k_1 w^{(vi)} + (k_2 + 4k_3 + k_4) w^{(iv)} = f(t, x), \quad (2.16)$$

com k_1, k_2, k_3, k_4 já definidos em (2.14). A equação é deduzida em [75] de acordo com a teoria de gradiente de deformação devido a Lam et al. [79], considerando comentário publicado em [10].

Momento, momento não clássico e cisalhamento são definidos respectivamente por

$$\begin{aligned} M &= (k_2 + 4k_3 + k_4) w'' - k_1 w^{(iv)}, & M^h &= k_1 w''', \\ S &= k_1 w^{(v)} - (k_2 + 4k_3 + k_4) w'''. \end{aligned} \quad (2.17)$$

As condições de contorno prescritas nas extremidades $x = 0$ e $x = L$ são

$$\begin{aligned} S &= 0 \text{ ou } w = 0, \\ M &= 0 \text{ ou } w' = 0, \\ M^h &= 0 \text{ ou } w''(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Na Tabela 2.2, a seguir, são apresentadas propriedades materiais e geométricas de uma viga de epoxy com seção transversal retangular, comumente utilizada para as simulações do modelo de Timoshenko gradiente de deformação [11], [89], [120].

Módulo de Young (E)	Coefficiente de Poisson (ν)	Densidade (ρ)	ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2	Largura (b)	κ
1.44GPa	0.38	1220Kg/m ³	17.6 μ m	$b = 2h$	$\frac{5+5\nu}{6+5\nu}$

Tabela 2.2: Parâmetros materiais e geométricos para modelo gradiente de deformação e modelo da tensão acoplada.

2.3 Teoria da tensão acoplada

Visto que a determinação de parâmetros adicionais referentes aos efeitos de escala pode gerar imprecisões devido a dificuldades experimentais ou computacionais, ao considerar modelos moleculares, (que são em geral os métodos utilizados para a estimativa desses parâmetros), pode ser desejável um modelo que contenha apenas um parâmetro adicional com o papel de capturar os efeitos de escala [89]. É o caso do modelo modificado da tensão acoplada [126], [89].

Fazendo $\ell_0 = \ell_1 = 0$ em (2.13) [70] são obtidas as equações do modelo de Timoshenko da tensão acoplada de acordo com [89]

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{w} + k_3(w^{(iv)} + \phi''') - k_5(w'' - \phi') &= F(t, x), \\ \rho I \ddot{\phi} - k_3(w''' + \phi'') - k_2 \phi'' - k_5(w' - \phi) &= M(t, x), \end{aligned} \quad (2.19)$$

sendo

$$k_2 = \frac{E(1 - \nu)I}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad k_3 = \frac{1}{4}\mu A \ell_2^2, \quad k_5 = \kappa G A. \quad (2.20)$$

As condições de contorno prescritas em $x = 0$ e $x = L$ de acordo com [89]

$$\begin{aligned} k_3 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{(t, x_0)} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{(t, x_0)} \right) - k_5 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \Big|_{(t, x_0)} &= -F \quad \text{ou} \quad w \Big|_{(t, x_0)} = 0, \\ k_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_{(t, x_0)} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{(t, x_0)} &= 0, \\ k_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{(t, x_0)} + (k_2 + k_3) \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{(t, x_0)} &= -M \quad \text{ou} \quad \phi \Big|_{(t, x_0)} = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Fazendo $\ell_2 = 0$ resulta o modelo de Timoshenko clássico incluindo efeitos de Poisson, e com $\nu = 0$ o modelo clássico de Timoshenko.

O modelo de Timoshenko baseado na teoria modificada da tensão acoplada pode ser reduzido ao modelo de Euler-Bernoulli da tensão acoplada, substituindo em (2.19)

$\phi(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x}$, manipulando algebricamente e desconsiderando efeitos de inércia rotatória $\rho I w_{ttxx}$ obtém-se

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\frac{E(1-\nu)I}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \ell_2^2 \mu A \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \quad (2.22)$$

Claramente se $\ell_2 = 0$ em (2.22) as equações se reduzem ao modelo de Euler-Bernoulli incluindo efeitos de Poisson, e se esse é também negligenciado resulta então a equação clássica de Euler-Bernoulli.

2.4 Teoria da elasticidade de superfície

A superfície de um sólido é uma região com um arranjo próprio de átomos, propriedades físicas e respostas mecânicas diferentes daquelas da parte principal (*bulk*), de modo que os efeitos dessa superfície podem desempenhar um papel importante na estrutura considerada como um todo [3], [121]. Em geral, a razão entre a área da superfície/interface e o volume cresce com o decréscimo das dimensões características da estrutura. Portanto, quando o tamanho do material decresce, uma maior porção dos átomos será encontrada na superfície em relação a porção do interior. Sendo assim, os efeitos de superfície podem influenciar o comportamento das estruturas baseadas em escalas menores, tais como micro e nanovigas, filmes finos, *nanowires*, placas finas, etc [84], [3].

O modelo do contínuo para elasticidade de superfície de Gurtin et.al [61] é baseado na extensão da equação de Laplace-Young para meios sólidos, visto que a equação foi proposta inicialmente para tensão residual de superfície de fluídos [121]. Segundo Gurtin e Murdoch a superfície é matematicamente considerada como uma camada de espessura nula completamente aderida a parte principal do material. As propriedades em tal superfície são diferentes daquelas no *bulk*, sendo caracterizadas pela tensão residual de superfície e constantes de Lamé de superfície (τ_0, λ_0, μ_0 , respectivamente), determinadas via simulações atômicas ou experimentos [93], e podendo ainda assumir valores negativos ou positivos, de-

pendendo da estrutura cristalográfica. Por exemplo, para vigas de Silício e Alumínio os valores dos parâmetros são dados na Tabela a seguir.

	E	ν	ρ	λ_0	μ_0	τ_0	ρ_0
Material	(GPa)		(Kg/m ²)	(N/m)	(N/m)	(N/m)	(Kg/m ³)
Al	90	0.23	2.7×10^3	3.4939	-5.4251	0.5689	5.46×10^{-7}
Si	107	0.33	2.33×10^3	-4.4939	-2.7779	0.6056	3.17×10^{-7}

Tabela 2.3: Parâmetros materiais para o *bulk* e superfície, para vigas de Alumínio e de Silício.

Nessa seção são apresentadas as equações governantes do modelo de Timoshenko que inclui efeitos de superfície, de acordo com [84], mas com modificações devido a convenção de sinais do campo de deslocamentos, e diagrama de forças de acordo com Ginsberg [58], [92].

Considera-se uma viga de material isotrópico, com seção transversal retangular, de comprimento L , largura b , altura $H = 2h$. O momento de inércia da área da seção transversal é $I = \frac{2bh^3}{3}$, sendo $A = 2bh$ a área da seção transversal, de acordo com a Figura 2.1.

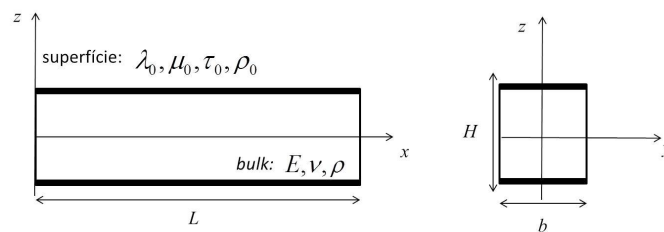


Figura 2.1: Representação esquemática da viga incluindo efeitos de superfície.

Efeitos de superfície são incorporados a essa viga considerando uma superfície elástica completamente aderida a parte principal (*bulk*) e com espessura nula, de acordo com teoria de Gurtin-Murdoch [59], [60]. A parte principal da viga é governada pelos mesmos parâmetros clássicos e equações oriundas da teoria da elasticidade e mecânica do contínuo, as modificações são feitas com a inclusão de novos parâmetros devido a superfície considerada.

Modelo de Timoshenko

As equações que governam a deflexão flexural e o ângulo de rotação da viga, $w(t, x)$ e $\phi(t, x)$, respectivamente, de acordo com [84], nas hipóteses de vigas de Timoshenko, são dadas por

$$\begin{aligned} (\rho A + \rho_0 s^*) w_{tt} - \kappa GA (w_{xx} - \phi_x) - \tau_0 s^* w_{xx} &= q(x), \\ (\rho I + \rho_0 I^*) \phi_{tt} - [EI + (2\mu_0 + \lambda_0) I^*] \phi_{xx} + \frac{2\nu I \tau_0}{H} w_{xxx} - \frac{2\nu I \rho_0}{H} w_{ttx} - \kappa GA (w_x - \phi) &= 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

Os parâmetros referentes a superfície da viga $\lambda_0, \mu_0, \tau_0, \rho_0$, representam, respectivamente, as constantes de Lamé de superfície, tensão residual de superfície e a densidade de massa da superfície. I^* é o momento de inércia relativo ao perímetro da superfície, e análogo ao momento de inércia I da parte principal da viga, juntamente com s^* são definidos por

$$I^* = \int_s z^2 ds = 2bh^2 + \frac{4h^3}{3}, \quad s^* = \int_s n_z^2 ds = 2b, \quad (2.24)$$

com n_z vetor direção $n_z = \cos \langle n, z \rangle$, κ é o coeficiente de correção de cisalhamento, relativo a seção transversal retangular.

O cisalhamento e o momento fletor da viga, incluindo as contribuições do momento e cisalhamento referentes a superfície da viga tornam-se

$$M^{TB} = [EI + (2\mu_0 + \lambda_0) I^*] \phi_x + \frac{2\nu I \tau_0}{H} w_{xx} - \frac{2\nu I \rho_0}{H} w_{tt}, \quad (2.25)$$

$$S^{TB} = \kappa GA (w_x - \phi) + \tau_0 s^* w_x.$$

Para a obtenção dessas equações, basicamente foram consideradas além das equações constitutivas clássicas para a parte principal da viga relações constitutivas próprias para a superfície, mais especificamente a inclusão de uma tensão de superfície σ_{zz} [84], [85].

Modelo de Euler-Bernoulli

Fazendo $\phi_{tt} = 0$ e usando que $\phi = \frac{\partial w}{\partial x}$ em (2.23), derivando (2.23)(b) em relação a x e somando as duas equações resulta

$$(\rho A + \rho_0 s^*) w_{tt} + \left[EI + (2\mu_0 + \lambda_0) I^* - \frac{2\nu I \tau_0}{H} \right] w_{xxxx} + \frac{2\nu I \rho_0}{H} w_{ttxx} - \tau_0 s^* w_{xx} = f(t, x). \quad (2.26)$$

O momento fletor e cisalhamento, incluindo as contribuições da superfície, são definidos por

$$M^E = (EI + (2\mu_0 + \lambda_0) I^* - \frac{2\nu I \tau_0}{H}) w_{xx} + \frac{2\nu I \rho_0}{H} w_{tt}, \quad (2.27)$$

$$S^E = - \left[EI + (2\mu_0 + \lambda_0) I^* - \frac{2\nu I \tau_0}{H} \right] w_{xxx} - \frac{2\nu I \rho_0}{H} w_{ttx} + \tau_0 s^* w_x.$$

2.5 Modelos de ordem superior e com força axial

A seguir são apresentados modelos matemáticos baseados simultaneamente na teoria do gradiente de deformação e teoria da elasticidade não local e elasticidade não local e elasticidade de superfície, respectivamente considerados nos trabalhos [83] e [65]. Também são apresentadas as equações da viga de Timoshenko, que descreve o deslocamento axial, transversal e angular, incluindo termo não linear devido a força axial e parâmetros materiais de escala .

De acordo com Lim et.al [83] a teoria da elasticidade não local e a teoria do gradiente de deformação descrevem duas características físicas totalmente diferentes dos materiais e estruturas em nanoescala. Assim [83] propõe um modelo baseado em uma teoria de gradiente de deformação não local de ordem superior, com a intenção de generalizar a teoria não local padrão introduzindo um tensor deformação de ordem superior [13].

A equação referente ao modelo de Euler-Bernoulli torna-se

$$\rho A \left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \left(1 - \ell^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad (2.28)$$

sendo alterada pela presença de parâmetros não locais e_0a e o parâmetro relativo a teoria do gradiente de deformação ℓ . As equações relativas ao modelo de Timoshenko tornam-se

$$\begin{aligned} \kappa GA \left(\frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \frac{d\phi}{dx} \right) &= \rho A \frac{d^2 w}{d\bar{s}^2}, \\ \kappa GA [1 - (e_0a)^2 \nabla^2] \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + EI (1 - \ell^2 \nabla^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \rho I [1 - (e_0a)^2 \nabla^2] \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde são definidos adimensionalmente $\bar{x} = x/L$, $\bar{w} = w/L$, $\bar{s} = s/T$.

Outra abordagem, proposta em [65], inclui elasticidade de superfície, tensão de superfície e densidade de superfície, representadas respectivamente por E^s (pode ser representada em termos das constante de Lamé de superfície λ_0 e μ_0), τ_0 e ρ_0 , na análise das vibrações livres de nanovigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko utilizando a teoria não local de elasticidade. As equações governantes não locais para nanovigas de Timoshenko na presença de efeitos de superfície são dadas por

$$\begin{aligned} (1 - (e_0a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \left[(\rho A + 2b\rho_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] &= \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + 2b\tau_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ (1 - (e_0a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \left[(\rho I + \rho_0 I^*) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] + \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) &= (EI + E^s I^*) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \\ + \frac{2\nu\tau_0 I}{H} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{2\nu\rho_0 I}{H} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

O caso correspondente a nanovigas de Euler-Bernoulli é descrito pela equação

$$\left(EI + E^s I^* - \frac{2\nu\tau_0 I}{H} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2b\tau_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2\nu\rho_0 I}{H} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = \left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left[-(\rho A + 2b\rho_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]. \quad (2.31)$$

Cita-se ainda o modelo proposto por Gao [54] que considera simultaneamente a teoria da tensão acoplada e teoria da elasticidade de superfície.

Para determinação do modelo não linear considera-se a chamada componente de deformação de von-Karman, de acordo com [13] e deslocamento axial $u(x, t)$ não nulo, de modo que a primeira componente do tensor deformação torna-se

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (2.32)$$

As equações governantes no caso de vigas de Timoshenko, omitindo os detalhes da dedução apresentados em [13] são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[N_0 + k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - k_5 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right] + g(t, x) &= \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[N_0 + k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - k_5 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + k_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \\ (k_6 - k_7) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (2k_6 + k_7) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + f(t, x) &= \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ k_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) - k_4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + (k_7 - 2k_6) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (k_7 + 4k_6) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

com

$$\begin{aligned} k_1 &= (\lambda + 2\mu)A, & k_2 &= (\lambda + 2\mu)I + 2\mu A \ell_0^2, & k_3 &= \kappa GA, & k_4 &= GI(2\ell_0^2 + \frac{4}{5}\ell_1^2), \\ k_5 &= GA(2\ell_0^2 + \frac{4}{5}\ell_1^2), & k_6 &= \frac{8}{15}GA\ell_1^2, & k_7 &= \frac{1}{4}GA\ell_2^2, \end{aligned} \quad (2.34)$$

e $N_0 = N_0(x)$ representa um carregamento axial inicial.

Com condições de contorno de uma viga simplesmente apoiada com extremidades axialmente imóveis, negligenciando o termo de inércia longitudinal $\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ e assumindo que N_0 independe de x

$$N(t) = N_0 + \frac{k_1}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (2.35)$$

que inserida em (2.36)(b), resulta, de acordo com [13] equações governantes do comportamento não linear de uma viga de Timoshenko dependente de escala com as duas extremidades imóveis, e modelada segundo a teoria do gradiente de deformação

$$\begin{aligned} N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + (k_6 - k_7) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (2k_6 + k_7) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + f(t, x) &= \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ k_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) - k_4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + (k_7 - 2k_6) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (k_7 + 4k_6) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Outros trabalhos que também consideram o caso não linear são [71], [72]. Além desses, essa não linearidade foi considerada na tese [106], de acordo com Reiss [105], no caso das equações clássicas de Timoshenko.

3 FORMULAÇÃO MODAL MATRICIAL

Todos os modelos matemáticos de Euler-Bernoulli e Timoshenko descritos no capítulo anterior por uma, duas ou três equações diferenciais parciais evolutivas podem ser formulados matricialmente, de uma maneira geral e compacta envolvendo operadores diferenciais com coeficientes constantes ou matriciais. Essa formulação é baseada na expressão geral

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (3.1)$$

onde \mathbf{M} é denotada coeficiente ou matriz de massa, \mathbf{C} coeficiente ou matriz de atrito, \mathbf{K} coeficiente ou matriz de rigidez e \mathbf{F} descreve forçantes externos em geral. Para o modelo de Euler-Bernoulli $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x) = w(t, x)$ e para o modelo de Timoshenko $\mathbf{v}(t, x) = \begin{pmatrix} w(t, x) \\ \phi(t, x) \end{pmatrix}$.

Nesta seção é feita uma análise das amplitudes espaciais ou modos de vibração $\mathbf{w}(x)$, relativa as soluções do tipo exponencial

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{w}(x), \quad \mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

para os modelos baseados nas teorias não local de Eringen, do gradiente de deformação, da tensão acoplada e da elasticidade de superfície referentes ao modelo de Timoshenko, representados pelas equações dadas em (2.2), (2.13), (2.19) e (2.23), respectivamente e escritos de acordo com a formulação matricial geral (3.1), quando é desconsiderada a atuação de termos forçantes externos, ou seja, $\mathbf{F} = 0$. Embora tenham sido apresentadas as equações relativas a vigas de Euler-Bernoulli, não são apresentados desenvolvimentos relativos à elas, apenas alguns resultados com fins de comparação com o caso de vigas de Timoshenko. Salienta-se também que as abordagens apresentadas nos capítulos posteriores podem ser facilmente adaptadas para o caso de vigas do tipo Euler-Bernoulli.

As equações dos modelos não locais que governam o movimento, desconsiderando forçantes e momentos externos, são escritas na formulação matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} w(t, x) \\ \phi(t, x) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Substituindo (3.2) em (3.3), resulta o problema quadrático de autovalor

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{w}(x) = 0. \quad (3.4)$$

A principal diferença entre os modelos de Timoshenko não local de Eringen, gradiente de deformação e da tensão acoplada, é que no primeiro a matriz \mathbf{K} é um operador diferencial de segunda ordem, e para os dois últimos \mathbf{K} é um operador diferencial de quarta ordem. Além disso, para o primeiro \mathbf{M} é a soma de uma matriz constante e um operador diferencial matricial de segunda ordem, e para os dois últimos \mathbf{M} é uma matriz constante.

Considera-se de maneira unificada, as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} escritas como

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix} - \alpha_M (e_0 a)^2 \begin{pmatrix} \rho A \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \rho I \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} + \beta_M \begin{pmatrix} \rho_0 s^* & 0 \\ -\frac{2\nu I \rho_0}{H} \frac{\partial}{\partial x} & \rho_0 I^* \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\kappa G A \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa G A \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa G A \frac{\partial}{\partial x} & -k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa G A \end{pmatrix} + \alpha_K \begin{pmatrix} (k_3 + k_4) \frac{\partial^4}{\partial x^4} & (k_3 - 2k_4) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \\ -(k_3 - 2k_4) \frac{\partial^3}{\partial x^3} & k_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - (k_3 + 4k_4) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

$$+ \beta_K \begin{pmatrix} -\tau_0 s^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ \frac{2\nu I \tau_0}{H} \frac{\partial^3}{\partial x^3} & -(2\mu_0 + \lambda_0) I^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix},$$

sendo os coeficientes α_M , β_M , α_K , β_K e k_2 definidos na Tabela 3.1 a seguir para cada caso.

Caso	Coeficientes				
	α_M	β_M	α_K	β_K	k_2
TBNL	1	0	0	0	EI
TBSG	0	0	1	0	$\frac{E(1-\nu)I}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
TBCS*	0	0	1	0	$\frac{E(1-\nu)I}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
TBSE	0	1	0	1	EI

* $k_1 = k_4 = 0$

Tabela 3.1: Descrição dos coeficientes da formulação unificada **M** e **K**.

Na Tabela 3.1 TBNL refere-se ao modelo de Timoshenko não local de Eringen (2.2), TBSG ao modelo de Timoshenko gradiente de deformação (2.13) e TBSE ao modelo de Timoshenko que inclui efeitos de superfície (2.23). O caso TBCS referente ao modelo de Timoshenko da tensão acoplada (2.19) é tratado como um caso particular do modelo TBSG.

O problema quadrático de autovalor (3.4) é equivalente a uma equação diferencial matricial na variável x , descrita a seguir para cada um dos casos considerados.

Não local de Eringen (TBNL)

Para o modelo de Timoshenko não local de Eringen, tem-se

$$\mathbb{M}(\lambda)\mathbf{w}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{w}'(x) + \mathbb{K}(\lambda)\mathbf{w}(x) = 0, \quad (3.5)$$

sendo

$$\mathbb{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} -(\kappa GA + \lambda^2 \rho A (e_0 a)^2) & 0 \\ 0 & -(EI + \lambda^2 \rho I (e_0 a)^2) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 \rho A & 0 \\ 0 & \lambda^2 \rho I + \kappa GA \end{pmatrix}.$$

Gradiente de deformação (TBSG)

Nesse caso a equação diferencial matricial será de ordem quatro, descrita por

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{w}^{(iv)}(x) + \mathbf{K}_1 \mathbf{w}'''(x) + \mathbf{K}_2 \mathbf{w}''(x) + \mathbf{K}_3 \mathbf{w}'(x) + \mathbf{K}_4(\lambda) \mathbf{w}(x) = 0, \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \begin{pmatrix} k_3 + k_4 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & k_3 - 2k_4 \\ -(k_3 - 2k_4) & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{pmatrix} -k_5 & 0 \\ 0 & -(k_2 + k_3 + 4k_4) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & k_5 \\ -k_5 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_4 &= \begin{pmatrix} \lambda^2 \rho A & 0 \\ 0 & \lambda^2 \rho I + k_5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tensão acoplada (TBCS)

O modelo de Timoshenko não local da tensão acoplada é uma simplificação do modelo de Timoshenko não local do gradiente de deformação com $k_1 = k_4 = 0$. Esta simplificação modifica a natureza do coeficiente matricial associado a derivada de maior ordem. Resulta que \mathbf{K}_0 é uma matriz singular, e definem-se a equação diferencial matricial e seus coeficientes como

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{w}^{(iv)}(x) + \mathbf{K}_1 \mathbf{w}'''(x) + \mathbf{K}_2 \mathbf{w}''(x) + \mathbf{K}_3 \mathbf{w}'(x) + \mathbf{K}_4(\lambda) \mathbf{w}(x) = 0, \quad (3.9)$$

sendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_0 &= \begin{pmatrix} k_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & k_3 \\ -k_3 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{pmatrix} -k_5 & 0 \\ 0 & -(k_2 + k_3) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & k_5 \\ -k_5 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{pmatrix} \lambda^2 \rho A & 0 \\ 0 & \lambda^2 \rho I + k_5 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Efeitos de superfície (TBSE)

Nesse caso, tem-se a equação diferencial matricial de terceira ordem dada por

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{w}'''(x) + \mathbf{K}_1 \mathbf{w}''(x) + \mathbf{K}_2(\lambda) \mathbf{w}'(x) + \mathbf{K}_3(\lambda) \mathbf{w}(x) = 0, \tag{3.11}$$

sendo os coeficientes matriciais descritos como

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} -a_m & 0 \\ 0 & -b_m \end{pmatrix}, \\
\mathbf{K}_2(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ -(\lambda^2 I^0 + a) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 c_m & 0 \\ 0 & \lambda^2 e_m + a \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $c_m = \rho A + \rho_0 s^*$, $a_m = \kappa GA + \tau_0 s^*$, $a = \kappa GA$, $e_m = \rho I + \rho_0 I^*$, $b_m = EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*$, $I^0 = \frac{2\nu I \rho_0}{H}$, $I^1 = \frac{2\nu I \tau_0}{H}$.

Observa-se que a matriz \mathbf{K}_0 é singular, logo, como no caso do modelo de Timoshenko da tensão acoplada, as soluções $\mathbf{w}(x)$ não podem ser escritas em função da solução fundamental $\mathbf{h}(x)$, o que será descrita no Capítulo 4.

Abordagens consideradas

De modo geral, as equações diferenciais matriciais descritas em (3.5), (3.7), (3.9) e (3.11) são da forma

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{w}^{(N)}(x) + \mathbf{K}_1 \mathbf{w}^{(N-1)}(x) + \dots + \mathbf{K}_{N-1} \mathbf{w}'(x) + \mathbf{K}_N \mathbf{w}(x) = 0, \quad (3.13)$$

$\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_N$ matrizes $n \times n$, e $\mathbf{w}(x)$ vetor $n \times 1$ com condições de contorno provenientes das condições de contorno originais do problema nas variáveis x e t

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}_0 \mathbf{w}(0) + \dots + \mathcal{A}_{N-1} \mathbf{w}^{(N-1)}(0) &= 0 \\ \mathcal{B}_0 \mathbf{w}(L) + \dots + \mathcal{B}_{N-1} \mathbf{w}^{(N-1)}(L) &= 0 \end{aligned} \right\} nN \text{ condições de contorno} \quad (3.14)$$

Nos capítulos 4, 5 e 6 serão consideradas as seguintes abordagens para propor soluções de (4.1)

- **Base matricial fundamental**

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}(x) \mathbf{c}_0 + \mathbf{h}'(x) \mathbf{c}_1 + \dots + \mathbf{h}^{(N-1)}(x) \mathbf{c}_{N-1}, \quad (3.15)$$

- **Método espectral de Euler**

$$\mathbf{w}(x) = e^{\beta x} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq 0, \quad (3.16)$$

- **Método da decomposição de Adomian**

$$\mathbf{w}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k x^k. \quad (3.17)$$

No caso dos modelos considerados tem-se que N é a ordem da equação diferencial e n a dimensão do vetor $\mathbf{w}(x)$ sendo

- $N = 2, n = 2$: Modelo de Timoshenko não local de Eringen,

- $N = 3, n = 2$: Modelo de Timoshenko incluindo efeitos de superfície,
- $N = 4, n = 2$: Modelo de Timoshenko gradiente de deformação/tensão acoplada.

A abordagem geral permite estender a formulação para outros casos, por exemplo, para vigas segmentadas [118], ou ainda modelos que consideram além das variáveis deslocamento transversal e angular, $w(t, x)$ e $\phi(t, x)$, respectivamente, a variável deslocamento axial $u(t, x)$ [71], [89].

Nos próximos capítulos as amplitudes espaciais ou modos de vibração $\mathbf{w}(t, x)$ são determinadas fazendo uso da base matricial fundamental para os casos regulares (TBNL e TBSG), método espectral de Euler tanto para os casos regulares e singulares, e método da decomposição de Adomian para os casos regulares. No Capítulo 6, além da formulação padrão do método da decomposição de Adomian considera-se o método formulado fazendo uso da resposta fundamental matricial para os casos de Timoshenko clássico e Timoshenko não local. No capítulo 7 são apresentados resultados comparativos dos modelos não clássicos em relação ao caso clássico, fazendo uso das abordagens apresentadas nos capítulos 4, 5 e 6 a seguir.

4 BASE MATRICIAL FUNDAMENTAL

Os modelos considerados no capítulo anterior envolvem a resolução de equações diferenciais matriciais de ordem superior. Neste capítulo, tais modelos são abordados com o uso da base gerada por uma solução fundamental matricial $\mathbf{h}(x)$ e suas derivadas, denotada base fundamental.

Tal abordagem também é utilizada na determinação de modos de vibração ou amplitudes espaciais $\mathbf{w}(x)$ para vigas segmentadas, ou seja, vigas com propriedades geométricas e, ou materiais diferentes no seu comprimento, bem como na determinação de respostas forçadas [118], [33], [38], [32].

De modo geral, dada uma equação diferencial matricial de ordem N

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{w}^{(N)}(x) + \mathbf{K}_1 \mathbf{w}^{(N-1)}(x) + \dots + \mathbf{K}_{N-1} \mathbf{w}'(x) + \mathbf{K}_N \mathbf{w}(x) = 0, \quad (4.1)$$

com coeficientes matriciais \mathbf{K}_j de ordem $n \times n$ e \mathbf{K}_0 não-singular, a solução geral pode ser escrita como

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}(x) \mathbf{c}_0 + \mathbf{h}'(x) \mathbf{c}_1 + \dots + \mathbf{h}^{(N-1)}(x) \mathbf{c}_{N-1}, \quad (4.2)$$

sendo $\mathbf{h}(x)$, denotada por resposta matricial fundamental ou por resposta impulso matricial, e definida como a solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 \mathbf{h}^{(N)}(x) + \mathbf{K}_1 \mathbf{h}^{(N-1)}(x) + \dots + \mathbf{K}_{N-1} \mathbf{h}'(x) + \mathbf{K}_N \mathbf{h}(x) &= 0, \\ \mathbf{h}(0) = 0, \quad \mathbf{h}'(0) = 0, \quad \dots, \quad \mathbf{h}^{(N-2)}(0) = 0, \quad \mathbf{K}_0 \mathbf{h}^{(N-1)}(0) &= I, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$ e 0 é uma matriz nula de mesma ordem. De (4.2), segue que a solução geral envolve exatamente (nN) constantes essenciais arbitrárias. Além disso, de acordo com Claeysen e co-autores [23], [29], [25], [26], $\mathbf{h}(x)$ pode ser expressa através da seguinte fórmula analítica fechada, obtida a partir da introdução de um polinômio característico, e a resolução de dois problemas de valor inicial, um para uma equação diferencial e outro para uma equação em diferenças

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^{nN} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i)}(x) \mathbf{h}_{nN-j}, \quad (4.4)$$

onde os b'_i s são os coeficientes do respectivo polinômio característico associado

$$\begin{aligned}\Delta(\beta, \lambda) &= \det(\beta^N \mathbf{K}_0 + \beta^{N-1} \mathbf{K}_1 + \dots + \beta \mathbf{K}_{N-1} + \mathbf{K}_N) \\ &= b_0 \beta^{(nN)} + b_1 \beta^{(nN-1)} + \dots + b_{nN-1} \beta + b_{nN}\end{aligned}$$

e $d(x)$ sendo a solução da equação diferencial escalar

$$b_0 d^{(nN)}(x) + b_1 d^{(nN-1)}(x) + \dots + b_{nN-1} d'(x) + b_{nN} d(x) = 0 \quad (4.5)$$

com condições iniciais

$$d(0) = 0, \quad d'(0) = 0, \dots, d^{(nN-2)}(0) = 0, \quad b_0 d^{(nN-1)}(0) = 1. \quad (4.6)$$

As matrizes $\mathbf{h}_i = \mathbf{h}^{(i)}(0)$ são geradas por recursão a partir do problema inicial em diferenças

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_0 \mathbf{h}_{k+N} + \mathbf{K}_1 \mathbf{h}_{k+(N-1)} + \dots + \mathbf{K}_{N-1} \mathbf{h}_{k+1} + \mathbf{K}_N \mathbf{h}_k &= 0, \\ \mathbf{h}_0 = 0, \mathbf{h}_1 = 0 \dots = \mathbf{h}_{N-2} = 0, \quad \mathbf{K}_0 \mathbf{h}_{N-1} &= I.\end{aligned} \quad (4.7)$$

Dos modelos abordados nesse trabalho, a metodologia apresentada nessa seção pode ser aplicada aos casos do modelo de Timoshenko não local de Eringen ($N = 2, n = 2$) e modelo de Timoshenko gradiente de deformação ($N = 4, n = 2$). Para os modelos de Timoshenko da tensão acoplada e incluindo efeitos de superfície não é possível a determinação da solução fundamental $\mathbf{h}(x)$, pois nesses casos \mathbf{K}_0 é singular.

4.1 Modelo de Timoshenko não local de Eringen

De acordo com a formulação geral (4.1), tem-se $n = 2$ e $N = 2$ para o modelo não local baseado na teoria de Eringen. Assim

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}(x) \mathbf{c}_0 + \mathbf{h}'(x) \mathbf{c}_1, \quad (4.8)$$

sendo que $\mathbf{h}(x)$ é a solução matricial de ordem 2×2 do problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\mathbb{M}(\lambda) \mathbf{h}''(x) + \mathbb{C} \mathbf{h}'(x) + \mathbb{K}(\lambda) \mathbf{h}(x) &= 0, \\ \mathbb{M} \mathbf{h}'(0) = I, \quad \mathbf{h}(0) &= 0.\end{aligned} \quad (4.9)$$

De acordo com a fórmula (4.4), $\mathbf{h}(x)$ pode ser calculada

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i)}(x) \mathbf{h}_{4-j}, \quad (4.10)$$

resultando nesse caso,

$$\mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} (\lambda^2 \rho I + \kappa GA) d(x) - (EI + \lambda^2 \rho I (e_0 a)^2) d''(x) & -\kappa GA d'(x) \\ \kappa GA d'(x) & \lambda^2 \rho A d(x) - (\kappa GA + \lambda^2 \rho A (e_0 a)^2) d''(x) \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Aqui $d(x)$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} b_0 d^{(iv)}(x) + b_2 d''(x) + b_4 d(x) &= 0 \\ d(0) = 0, d'(0) = 0, d''(0) = 0, b_0 d'''(0) &= 1, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde os b_i 's são os coeficientes do polinômio característico associado, escrito convenientemente como

$$P(\beta, \lambda) = \beta^4 + g^2(\lambda) \beta^2 - r^4(\lambda), \quad (4.13)$$

sendo

$$\begin{aligned} g^2(\lambda) &= \frac{b_2}{b_0} = \frac{-\lambda^2(\kappa GA \rho I + \rho AEI) - (e_0 a)^2 \lambda^2(\rho A \kappa GA + 2\lambda^2 \rho A \rho I)}{\lambda^2(e_0 a)^2(\lambda^2 \rho A \rho I (e_0 a)^2 + \kappa GA \rho I + \rho AEI) + \kappa GA EI}, \\ r^4(\lambda) &= -\frac{b_4}{b_0} = \frac{-\lambda^2 \rho A (\lambda^2 \rho I + \kappa GA)}{\lambda^2(e_0 a)^2(\lambda^2 \rho A \rho I (e_0 a)^2 + \kappa GA \rho I + \rho AEI) + \kappa GA EI}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para o caso de raízes β simples a solução $d(x)$ é dada por

$$d(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{b_0 \epsilon \delta (\delta^2 + \epsilon^2)}, \quad (4.15)$$

onde $\pm \epsilon, \pm i\delta$ são as raízes do polinômio $P(\beta, \lambda)$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{-g^2(\lambda)}{2} + \sqrt{\left(\frac{g^2(\lambda)}{2}\right)^2 + r^4(\lambda)}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{g^2(\lambda)}{2} + \sqrt{\left(\frac{g^2(\lambda)}{2}\right)^2 + r^4(\lambda)}}. \quad (4.16)$$

As matrizes \mathbf{h}_i são obtidas da resolução da equação em diferenças

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\mathbf{h}_{k+2} + \mathbb{C}\mathbf{h}_{k+1} + \mathbb{K}\mathbf{h}_k &= 0, \\ \mathbf{h}_0 = 0, \quad \mathbb{M}\mathbf{h}_1 &= I, \end{aligned} \quad (4.17)$$

ou seja,

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_1 = \mathbb{M}^{-1}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{h}_2 = -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}\mathbf{h}_1, \quad \mathbf{h}_3 = -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}\mathbf{h}_2 - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbf{h}_1.$$

4.1.1 Formulação adimensional

Assumindo frequências naturais $\lambda = i\omega$, tem-se que a equação diferencial matricial (3.5) pode ser escrita na seguinte formulação adimensional

$$\tilde{\mathbb{M}}\tilde{\mathbf{w}}''(X) + \tilde{\mathbb{C}}\tilde{\mathbf{w}}'(X) + \tilde{\mathbb{K}}\tilde{\mathbf{w}}(X) = 0, \quad (4.19)$$

com

$$\tilde{\mathbb{M}} = \begin{pmatrix} -\Omega^2 e_n + \xi & 0 \\ 0 & -\eta\Omega^2 e_n + 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\tilde{\mathbb{K}} = \begin{pmatrix} \Omega^2 & 0 \\ 0 & \eta\Omega^2 - \xi \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{w}}(X) = \begin{bmatrix} \tilde{w}(X) \\ \tilde{\phi}(X) \end{bmatrix},$$

e sendo os parâmetros adimensionais definidos como

$$X = \frac{x}{L}, \quad \tilde{w}(X) = \frac{w(x)}{L}, \quad \tilde{\phi}(X) = \phi(x), \quad (4.21)$$

$$\Omega^2 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}, \quad \xi = \frac{\kappa G A L^2}{EI}, \quad \eta = \frac{I}{A L^2}, \quad e_n = \frac{(e_0 a)^2}{L^2}.$$

O polinômio característico associado a (4.19) dado por

$$\Delta(\beta, \Omega) = \det(\beta^2 \tilde{\mathbb{M}} + \beta \tilde{\mathbb{C}} + \tilde{\mathbb{K}}) = b_0 \beta^4 + b_2(\Omega) \beta^2 + b_4(\Omega), \quad (4.22)$$

com

$$\begin{aligned} b_0 &= \xi + e_n \Omega^2 (\Omega^2 e_n \eta - \xi \eta - 1), \\ b_2 &= \Omega^2 (\xi \eta + 1 + e_n (\xi - 2\Omega^2 \eta)), \\ b_4 &= \Omega^2 (\Omega^2 \eta - \xi). \end{aligned} \quad (4.23)$$

As raízes da equação característica $\Delta(\beta, \Omega) = 0$ podem ser expressas como $\beta_{1,2} = \pm\epsilon$, $\beta_{3,4} = \pm\delta i$, sendo ϵ e δ

$$\epsilon = \sqrt{\frac{-b_2}{2b_0} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_0}\right)^2 - \frac{b_4}{b_0}}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{b_2}{2b_0} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_0}\right)^2 - \frac{b_4}{b_0}}}. \quad (4.24)$$

E a solução fundamental do problema adimensional $\mathbf{h}(X)$, calculada analogamente ao caso dimensional dado em (4.11), é dada por

$$\mathbf{h}(X) = \begin{pmatrix} (\eta\Omega^2 - \xi) d(X) + (1 - \eta\Omega^2 e_n) d''(X) & \xi d'(X) \\ -\xi d'(X) & \Omega^2 d(X) + (\xi - \Omega^2 e_n) d''(X) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

sendo

$$d(X) = \frac{\delta \sinh(\epsilon X) - \epsilon \sin(\delta X)}{b_0 \epsilon \delta (\delta^2 + \epsilon^2)}. \quad (4.26)$$

O polinômio característico relativo ao modelo de Timoshenko não local de Eringen adimensional foi expresso em (4.22)

$$P(\beta, \Omega) = b_0(\Omega)\beta^4 + b_2(\Omega)\beta^2 + b_4(\Omega), \quad (4.27)$$

com coeficientes definidos em (4.23) e raízes $\beta_{1,2} = \pm\epsilon$, $\beta_{3,4} = \pm\delta i$. Sendo que a natureza dessas raízes depende dos sinais dos coeficientes $b_0(\Omega)$, $b_2(\Omega)$ e $b_4(\Omega)$.

• **Coefficiente $b_0(\Omega)$**

$$b_0 = e_n^2 \eta \Omega^4 - e_n (\xi \eta + 1) \Omega^2 + \xi. \quad (4.28)$$

Tem-se que $b_0(\Omega)$ se anula para os seguintes valores

$$\Omega_{b01} = \pm \sqrt{\frac{\xi}{e_n}}, \quad \Omega_{b02} = \pm \sqrt{\frac{1}{\eta e_n}}. \quad (4.29)$$

Notas:

- No caso clássico b_0 se reduz a ξ .
- As raízes de b_0 coincidem com o caso em que \mathbb{M} é singular no problema (4.19).
- É possível mostrar que $\Omega_{b01} < \Omega_{b02}$, utilizando a forma dimensional e pré-fixando valores paramétricos.

- **Coefficiente $b_2(\Omega)$**

$$b_2 = \Omega^2(\xi\eta + 1 + e_n(\xi - 2\Omega^2\eta)). \quad (4.30)$$

As raízes de b_2 são

$$\Omega = 0, \quad \Omega_{b2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \xi\eta + e_n\xi}{2e_n\eta}}. \quad (4.31)$$

Nota

- No caso clássico b_2 é sempre positivo.
- A raiz Ω_{b2} é menos influenciada pela variação do parâmetro e_n em relação a Ω_{b01} e Ω_{b02} .

- **Coefficiente $b_4(\Omega)$**

$$b_4 = \Omega^2(\Omega^2\eta - \xi). \quad (4.32)$$

As raízes de b_4 são

$$\Omega_c = \pm \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}. \quad (4.33)$$

Nota

- A frequência crítica Ω_c não clássica coincide com a frequência do caso clássico na sua forma dimensional definida por $\omega_c = \sqrt{\frac{\kappa GA}{\rho I}}$. Com a diferença que no caso não local não será a única frequência a influenciar a natureza das raízes do polinômio característico (4.22).

Exemplos da variação dos coeficientes $b_0(\Omega)$, $b_2(\Omega)$ e $b_4(\Omega)$, e relação entre as frequências críticas $\Omega_{b_{01}}$, $\Omega_{b_{02}}$, Ω_{b_2} e Ω_{b_4} para diferentes valores de e_n são apresentados na seção 7.1 do Capítulo 7. Além disso, verifica-se que a natureza das raízes $\beta = \varepsilon$, $\beta = i\delta$ pode ser determinada pelos intervalos definidos por essas frequências críticas.

4.2 Modelo de Timoshenko Gradiente de deformação

Para o caso de Timoshenko não local gradiente de deformação, $n = 2$ e $N = 4$, a equação diferencial (4.5) possui solução geral

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}_0 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}''(x)\mathbf{c}_2 + \mathbf{h}'''(x)\mathbf{c}_3, \quad (4.34)$$

com $\mathbf{h}(x)$ satisfazendo o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0\mathbf{h}^{(iv)}(x) + \mathbf{K}_1\mathbf{h}'''(x) + \mathbf{K}_2\mathbf{h}''(x) + \mathbf{K}_3\mathbf{h}'(x) + \mathbf{K}_4\mathbf{h}(x) &= 0, \\ \mathbf{h}(0) = 0, \mathbf{h}'(0) = 0, \mathbf{h}''(0) = 0, \mathbf{K}_4\mathbf{h}'''(0) &= I, \end{aligned} \quad (4.35)$$

e calculada pela fórmula

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{k=1}^8 \sum_{i=0}^{k-1} b_i d^{(k-1-i)}(x) \mathbf{h}_{8-k}, \quad (4.36)$$

sendo $d(x)$ solução do PVI de oitava ordem

$$\begin{aligned} b_0 d^{(viii)}(x) + b_2 d^{(vi)}(x) + b_4 d^{(iv)}(x) + b_6 d''(x) + b_8 d(x) &= 0 \\ d(0) = d'(0) = d''(0) = d'''(0) = d^{(iv)}(0) = d^{(v)}(0) = d^{(vi)}(0) &= 0, \\ b_0 d^{(vii)}(0) &= 1, \end{aligned} \quad (4.37)$$

associado ao polinômio característico

$$\begin{aligned} P(\beta, \lambda) &= \det(\beta^4 \mathbf{K}_0 + \beta^3 \mathbf{K}_1 + \beta^2 \mathbf{K}_2 + \beta \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \\ &= \sum_{j=0}^8 b_{8-j} \beta^j = b_0 \beta^8 + b_2 \beta^6 + b_4(\lambda) \beta^4 + b_6(\lambda) \beta^2 + b_8(\lambda), \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} b_0 &= k_1(k_3 + k_4), \\ b_2 &= -(k_3 k_2 + k_5 k_1 + k_4 k_2 + 9k_3 k_4), \\ b_4 &= (\rho A k_1 + \rho I(k_3 + k_4)) \lambda^2 + k_5(k_2 + 4k_3 + k_4), \\ b_6 &= -(\rho A(k_2 + k_3 + 4k_4) + \rho I k_5) \lambda^2, \\ b_8 &= \rho A(k_5 + \lambda^2 \rho I) \lambda^2, \end{aligned} \quad (4.39)$$

No caso de raízes β distintas $d(x)$ é dada por

$$d(x) = \sum_{k=1}^8 \frac{e^{\beta_k x}}{P'(\beta_k)}. \quad (4.40)$$

As matrizes \mathbf{h}'_i s são obtidas resolvendo a equação em diferenças

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 \mathbf{h}_{k+4} + \mathbf{K}_1 \mathbf{h}_{k+3} + \mathbf{K}_2 \mathbf{h}_{k+2} + \mathbf{K}_3 \mathbf{h}_{k+1} + \mathbf{K}_4 \mathbf{h}_k &= 0, \\ \mathbf{h}_0 = \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2 &= 0, \quad \mathbf{K}_0 \mathbf{h}_3 = I, \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_3 &= (\mathbf{K}_0)^{-1}, \\ \mathbf{h}_{k+4} &= -(\mathbf{K}_0)^{-1}(\mathbf{K}_1 \mathbf{h}_{k+3} + \mathbf{K}_2 \mathbf{h}_{k+2} + \mathbf{K}_3 \mathbf{h}_{k+1} + \mathbf{K}_4 \mathbf{h}_k), \quad k = 0 \dots 4. \end{aligned} \quad (4.42)$$

As raízes do polinômio característico de oitava ordem podem ser analiticamente determinadas reduzindo o polinômio para ordem quatro e então utilizando o Método de Ferrari para polinômios de ordem quatro (Apêndice A).

4.2.1 Formulação adimensional

A formulação adimensional das equações do problema espacial dadas em (3.7) é escrita como

$$\begin{aligned} -\xi_2 W^{(iv)}(X) - \xi_3 \Phi'''(X) + \xi_1 (W'''(X) - \Phi'(X)) + \Omega^2 W(X) &= 0, \\ -\xi_5 \Phi^{(iv)}(X) + \xi_3 W'''(X) + \xi_4 \Phi''(X) + \xi_1 (W'(X) - \Phi(X)) + \Omega^2 \eta \phi(X) &= 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

sendo que as condições de contorno dadas em (2.21), na forma adimensional, prescritas em $X = 0$ e $X = 1$, tornam-se

$$\begin{aligned} \xi_2 W''' + \xi_3 \Phi'' - \xi_1 (W' - \Phi) &= 0 \quad \text{ou} \quad W = 0, \\ \xi_2 W'' + \xi_3 \Phi' &= 0 \quad \text{ou} \quad W' = 0, \\ -\xi_5 \Phi''' + \xi_3 W'' + \xi_4 \Phi' &= 0 \quad \text{ou} \quad \Phi = 0, \\ \xi_5 \Phi'' &= 0 \quad \text{ou} \quad \Phi' = 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

E os parâmetros adimensionais definidos como

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{L}, \quad W(X) = \frac{w(x)}{L}, \quad \Phi(X) = \phi(x), \\ \Omega^2 &= \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}, \quad \eta = \frac{I}{AL^2}, \quad \xi_1 = \frac{\kappa GAL^2}{EI}, \\ \xi_2 &= \frac{k_3 + k_4}{EI}, \quad \xi_3 = \frac{k_3 - 2k_4}{EI}, \quad \xi_4 = \frac{k_2 + k_3 + 4k_4}{EI}, \quad \xi_5 = \frac{k_1}{L^2 EI}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Tem-se então a equação matricial, assumindo x adimensional, $0 \leq x \leq 1$,

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{w}^{(iv)}(x) + \mathbf{K}_1 \mathbf{w}'''(x) + \mathbf{K}_2 \mathbf{w}''(x) + \mathbf{K}_3 \mathbf{w}'(x) + \mathbf{K}_4 \mathbf{w}(x) = 0, \quad (4.46)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \begin{bmatrix} -\xi_2 & 0 \\ 0 & -\xi_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 \\ \xi_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_4 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -\xi_1 \\ \xi_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 \\ 0 & \eta \Omega^2 - \xi_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

O polinômio característico nesse caso foi definido em (4.38), sendo escrito como

$$P(\beta, \Omega) = b_0 \beta^8 + b_2 \beta^6 + b_4(\Omega) \beta^4 + b_6(\Omega) \beta^2 + b_8(\Omega). \quad (4.48)$$

com coeficientes b_0 , b_2 , $b_4(\Omega)$, $b_6(\Omega)$ e $b_8(\Omega)$ definidos em (4.39).

Sinais dos coeficientes

Da definição dos parâmetros adimensionais ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , ξ_4 , ξ_5 e η , com k_1, k_2, k_3, k_4 definidos em (2.14), e da positividade dos parâmetros materiais e geométricos tem-se a seguir a determinação dos sinais dos coeficientes b_0 , b_2 , $b_4(\Omega)$, $b_6(\Omega)$ e $b_8(\Omega)$.

- $b_0 = \xi_2 \xi_5 > 0$
- $b_2 = -\xi_1 \xi_5 - \xi_2 \xi_4 + \xi_3^2 < 0$

- $b_4(\Omega) = -(\xi_2\eta + \xi_5)\Omega^2 + \xi_1(\xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4) = -A\Omega^2 + C$, $A > 0, C > 0$. Então

$$b_4(\Omega) > 0 \text{ para } \Omega^2 < \Omega_{b_4}^2,$$

$$b_4(\Omega) = 0 \text{ para } \Omega^2 = \Omega_{b_4}^2,$$

$$b_4(\Omega) < 0 \text{ para } \Omega^2 > \Omega_{b_4}^2.$$

$$\Omega_{b_4}^2 = \frac{C}{A} = \frac{\xi_1(\xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4)}{(\xi_2\eta + \xi_5)}.$$

- $b_6(\Omega) = (\xi_4 + \xi_1\eta)\Omega^2 > 0$.

- $b_8(\Omega) = \Omega^2(\eta\Omega^2 - \xi_1)$

$$b_8(\Omega) < 0 \text{ para } \Omega^2 < \Omega_{b_8}^2,$$

$$b_8(\Omega) = 0 \text{ para } \Omega^2 = \Omega_{b_8}^2,$$

$$b_8(\Omega) > 0 \text{ para } \Omega^2 > \Omega_{b_8}^2,$$

onde $\Omega_{b_8}^2 = \frac{\xi_1}{\eta}$. Observa-se que Ω_{b_8} corresponde a Ω_c do caso clássico.

Um exemplo numérico da natureza das raízes β é apresentado na primeira seção do capítulo 7, subseção 7.1.2. Observa-se que a análise para o modelo da tensão acoplada segue diretamente como um caso particular do modelo gradiente de deformação, aqui apresentado, com $\xi_5 = 0$, e resultando um polinômio característico de ordem seis.

5 MÉTODO ESPECTRAL DE EULER

Neste capítulo as soluções de (3.4) são determinadas, tanto para os casos regulares como singulares com a utilização do método espectral, que consiste basicamente em expandir a solução $\mathbf{w}(x)$ utilizando uma base de soluções composta de soluções exponenciais, também conhecida base de Euler.

De maneira geral, pelo método espectral, a resolução da equação

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{w}^{(N)}(x) + \mathbf{K}_1 \mathbf{w}^{(N-1)}(x) + \dots + \mathbf{K}_{N-1} \mathbf{w}'(x) + \mathbf{K}_N \mathbf{w}(x) = 0, \quad (5.1)$$

com coeficientes matriciais \mathbf{K}_j de ordem $n \times n$, consiste em determinar soluções da forma

$$\mathbf{w}(x) = e^{\beta x} v, \quad (5.2)$$

onde β é raiz do polinômio característico

$$P(\beta) = \det (\mathbf{K}_0 \beta^N + \mathbf{K}_1 \beta^{N-1} + \dots + \mathbf{K}_{N-1} \beta + \mathbf{K}_N), \quad (5.3)$$

e v é um vetor $n \times 1$, não nulo, que satisfaz o sistema

$$\Gamma v = 0, \quad (5.4)$$

onde

$$\Gamma = \mathbf{K}_0 \beta^N + \mathbf{K}_1 \beta^{N-1} + \dots + \mathbf{K}_{N-1} \beta + \mathbf{K}_N. \quad (5.5)$$

De acordo com *Teorema de Chrystal* [46], a solução geral de (5.1), cujo polinômio característico associado é de grau $m \leq nN$ pode ser escrita na seguinte forma,

$$\mathbf{w}(x) = \sum_{j=1}^m c_j e^{\beta_j x} v_j, \quad (5.6)$$

onde c_1, \dots, c_m são constantes arbitrárias e v_1, \dots, v_m são funções vetoriais linearmente independentes.

Os casos regulares caracterizam-se por

$$\begin{aligned} P(\beta) &= \det(\mathbf{K}_0\beta^N + \mathbf{K}_1\beta^{N-1} + \dots + \mathbf{K}_{N-1}\beta + \mathbf{K}_N) \\ &= \sum_{j=0}^m b_j\beta^{nN-j}, \quad m = nN, \quad \det(\mathbf{K}_0) \neq 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

e para os casos singulares tem-se

$$\begin{aligned} P(\beta) &= \det(\mathbf{K}_0\beta^N + \mathbf{K}_1\beta^{N-1} + \dots + \mathbf{K}_{N-1}\beta + \mathbf{K}_N) \\ &= \sum_{j=0}^m b_j\beta^{m-j}, \quad m < nN, \quad \det(\mathbf{K}_0) = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Para o caso defeituoso, onde pelo menos uma raiz β repetida tem multiplicidade algébrica maior que sua multiplicidade geométrica, na superposição de soluções passam a ser consideradas soluções do tipo

$$\mathbf{w}_j(x) = \mathbf{p}_j(x)e^{\beta_j x}, \quad (5.9)$$

com $\mathbf{p}_j(x)$ polinômio vetorial.

Para os casos considerados tem-se os seguintes valores de N (ordem), n (dimensão) e m (grau do polinômio característico), descritos na Tabela 5.1 a seguir

Modelo	N	n	m	Natureza
Não local de Eringen (TBNL)	2	2	4	Regular
Gradiente de deformação (TBSG)	4	2	8	Regular
Tensão acoplada (TBCS)	4	2	6	Singular
Efeitos de superfície (TBSE)	3	2	4	Singular

Tabela 5.1: Caracterização dos graus dos polinômios característicos e classificação dos problemas quanto a singularidade.

5.1 Cálculo dos autovetores

Para cada raiz β_j seu correspondente autovetor v_j pode ser determinado a partir do escalonamento da matriz

$$\Gamma = (\mathbf{K}_0\beta^N + \mathbf{K}_1\beta^{N-1} + \dots + \mathbf{K}_{N-1}\beta + \mathbf{K}_N). \quad (5.10)$$

No caso do modelo de Timoshenko **não local de Eringen**, segue o sistema $\Gamma(\beta_j, \lambda)v_j = 0$,

$$\begin{pmatrix} \beta_j^2(-\kappa GA - \lambda^2 \rho A (e_0 a)^2) + \lambda^2 \rho A & \beta_j \kappa GA \\ -\beta_j \kappa GA & \beta_j^2(-EI - \lambda^2 \rho I (e_0 a)^2) + \lambda^2 \rho I + \kappa GA \end{pmatrix} v_j = 0, \quad (5.11)$$

que após escalonamento com troca de linhas, resulta

$$\begin{pmatrix} -\beta_j \kappa GA & -\beta_j^2(EI + \lambda^2 \rho I (e_0 a)^2) + \lambda^2 \rho I + \kappa GA \\ 0 & \frac{P(\beta_j, \lambda)}{\beta_j \kappa GA} \end{pmatrix} v_j = 0, \quad (5.12)$$

e então

$$v_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ -\frac{\beta_j \kappa GA}{\beta_j^2(EI + \rho I \lambda^2 (e_0 a)^2) - \lambda^2 \rho I - \kappa GA} v_{1j} \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

No caso do modelo de Timoshenko **gradiente de deformação**, segue o sistema $\Gamma(\beta_j, \lambda)v_j = 0$,

$$\begin{pmatrix} \beta_j^4(k_3 + k_4) - \beta_j^2 k_5 + \lambda^2 \rho A & \beta_j^3(k_3 - 2k_4) + \beta_j k_5 \\ \beta_j^3(-k_3 + 2k_4) - \beta_j k_5 & \beta_j^4 k_1 - \beta_j^2(k_2 + k_3 + 4k_4) + \lambda^2 \rho I + k_5 \end{pmatrix} v_j = 0, \quad (5.14)$$

e obtém-se

$$v_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ -\frac{\beta_j^3(2k_4 - k_3) - \beta_j k_5}{\beta_j^4 k_1 - \beta_j^2(k_2 + k_3 + 4k_4) + \lambda^2 \rho I + k_5} v_{1j} \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Embora caracterizados como singulares, ou autovetores dos casos dos modelos da tensão acoplada e efeitos de superfície tem seus autovetores calculados de maneira análoga aos casos regulares, supondo autovalores β não defeituosos. Tem-se os autovetores para o caso do modelo de Timoshenko da **tensão acoplada**

$$v_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ \frac{\beta_j^3 k_3 + \beta_j k_5}{-\beta_j^2(k_2 + k_3) + \lambda^2 \rho I + k_5} v_{1j} \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Para o modelo de Timoshenko que inclui **efeitos de superfície** tem-se o sistema

$$\begin{pmatrix} -\beta_j^2 a_m + \lambda^2 c_m & \beta_j a \\ \beta^3 I^1 - \beta_j (I^0 \lambda^2 + a) & -\beta_j^2 b_m + e_m \lambda^2 + a \end{pmatrix} v_j = 0 \quad (5.17)$$

cujas soluções v_j , quando supõe-se β_j raízes simples, são

$$v_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ \frac{\beta_j^2 a_m - \lambda^2 c_m}{\beta_j a} v_{1j} \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

onde v_{1j} é uma constante arbitrária.

Para os casos não-defeituosos as constantes c'_j s, da expansão (5.6) podem ser determinadas utilizando os dados iniciais, por exemplo no caso do modelo de Timoshenko gradiente de deformação, $w(x_0)$, $\phi(x_0)$, $w'(x_0)$, $\phi'(x_0)$, $w''(x_0)$, $\phi''(x_0)$, $w'''(x_0)$, $\phi'''(x_0)$, resol-

vendo o sistema

$$\begin{pmatrix} e^{\beta_1 x_0} v_1 & \dots & e^{\beta_8 x_0} v_8 \\ \beta_1 e^{\beta_1 x_0} v_1 & \dots & \beta_8 e^{\beta_8 x_0} v_8 \\ \beta_1^2 e^{\beta_1 x_0} v_1 & \dots & \beta_8^2 e^{\beta_8 x_0} v_8 \\ \beta_1^3 e^{\beta_1 x_0} v_1 & \dots & \beta_8^3 e^{\beta_8 x_0} v_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(x_0) \\ \phi(x_0) \\ w'(x_0) \\ \phi'(x_0) \\ w''(x_0) \\ \phi''(x_0) \\ w'''(x_0) \\ \phi'''(x_0) \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

O sistema do tipo $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{u}$, tem 8 equações e 8 variáveis e, como as colunas de \mathbf{A} formam um conjunto LI , $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, o sistema homogêneo será compatível e determinado.

Para o modelo de Timoshenko da tensão acoplada e modelo que inclui efeitos de superfície a matriz \mathbf{K}_0 é singular. Isso significa que o número de constantes arbitrárias envolvidas em uma solução $\mathbf{w}(x)$ de (4.1) com \mathbf{K}_0 matriz singular, é menor que nN . Assim, por exemplo, no caso do modelo de Timoshenko da tensão acoplada o fornecimento de 8 condições iniciais resulta em um problema sobredeterminado. Escrevendo uma solução $\mathbf{w}(x)$ de (3.7) na forma espectral

$$\mathbf{w}(x) = \sum_{j=1}^6 c_j e^{\beta_j x} v_j, \quad (5.20)$$

as constantes c_j deveriam poder ser determinadas utilizando seus dados iniciais $w(x_0)$, $\phi(x_0)$, $w'(x_0)$, $\phi'(x_0)$, $w''(x_0)$, $\phi''(x_0)$, $w'''(x_0)$, $\phi'''(x_0)$, ou seja, resolvendo o sistema sobredeterminado

$$\begin{pmatrix} e^{\beta_1 x_0} v_1 & \dots & e^{\beta_6 x_0} v_6 \\ \beta_1 e^{\beta_1 x_0} v_1 & \dots & \beta_6 e^{\beta_6 x_0} v_6 \\ \beta_1^2 e^{\beta_1 x_0} v_1 & \dots & \beta_6^2 e^{\beta_6 x_0} v_6 \\ \beta_1^3 e^{\beta_1 x_0} v_1 & \dots & \beta_6^3 e^{\beta_6 x_0} v_6 \end{pmatrix}_{8 \times 6} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}_{6 \times 1} = \begin{pmatrix} w(x_0) \\ \phi(x_0) \\ w'(x_0) \\ \phi'(x_0) \\ w''(x_0) \\ \phi''(x_0) \\ w'''(x_0) \\ \phi'''(x_0) \end{pmatrix}_{8 \times 1}. \quad (5.21)$$

Esse sistema do tipo $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{u}$ tem mais equações do que variáveis. Somente com condições especiais, chamadas de consistentes se obtém \mathbf{c} , ou seja, condições que garantam que \mathbf{u} pertença ao espaço-coluna da matriz \mathbf{A} (o espaço coluna de \mathbf{A} não gera todo espaço ao qual \mathbf{u} pertence pois, embora composto por vetores LI, esse espaço tem dimensão menor que a dimensão do espaço ao qual \mathbf{u} pertence). Para raízes β distintas a matriz \mathbf{A} tem posto 6. Então \mathbf{c} pode ser determinada de maneira única com restrições adequadas nos dados iniciais ou resolvendo a equação normal $\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{b} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}$.

5.2 Vibrações em vigas simplesmente apoiadas

5.2.1 Modelo de Timoshenko clássico

Nesse caso, assumindo x adimensional, tal que, $0 \leq x \leq 1$,

$$\mathbb{M}\mathbf{w}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{w}'(x) + \mathbb{K}\mathbf{w}(x) = 0, \quad (5.22)$$

e os coeficientes matriciais, também na forma adimensional, definidos como

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K} = \begin{pmatrix} \Omega^2 & 0 \\ 0 & \eta\Omega^2 - \xi \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

De acordo com o Capítulo 4, a solução de (5.22) pode ser escrita considerando a base fundamental $\{\mathbf{h}(x), \mathbf{h}'(x)\}$

$$\begin{pmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{pmatrix} = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{c}_2, \quad (5.24)$$

com $\mathbf{c}_1 = [c_{11} \ c_{21}]^T$, $\mathbf{c}_2 = [c_{12} \ c_{22}]^T$, e $\mathbf{h}(x)$ dada por

$$\mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} (\eta\Omega^2 - \xi) d(x) + d''(x) & \xi d'(x) \\ -\xi d'(x) & \Omega^2 d(x) + \xi d''(x) \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

sendo

$$d(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{b_0 \epsilon \delta (\delta^2 + \epsilon^2)}, \quad (5.26)$$

onde ϵ , δ e b_0 são determinados a partir do polinômio característico

$$P(\beta, \Omega) = \det(\beta^2 \mathbb{M} + \beta \mathbb{C} + \mathbb{K}) = b_0 \beta^4 + b_2(\Omega) \beta^2 + b_4(\Omega), \quad (5.27)$$

com

$$\begin{aligned} b_0 &= \xi, \\ b_2 &= \Omega^2(\xi\eta + 1), \\ b_4 &= \Omega^2(\Omega^2\eta - \xi). \end{aligned} \quad (5.28)$$

As raízes do polinômio característico são definidas $\beta_{1,2} = \pm\epsilon$, $\beta_{3,4} = \pm\delta i$, sendo ϵ e δ

$$\epsilon = \sqrt{\frac{-b_2}{2b_0} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_0}\right)^2 - \frac{b_4}{b_0}}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{b_2}{2b_0} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_0}\right)^2 - \frac{b_4}{b_0}}}. \quad (5.29)$$

Voltando para a determinação das constantes \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 em (5.24) e utilizando a condição de contorno do tipo apoiada em $x = 0$, $w(0) = \phi'(0) = 0$, da qual resultam $c_{21} = c_{12} = 0$, e então

$$\begin{pmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\eta\Omega^2 - \xi)d(x) + d''(x) & \xi d''(x) \\ -\xi d'(x) & \Omega^2 d'(x) + \xi d'''(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Aplicando a condição de contorno em $x = 1$, também do tipo apoiada, $w(1) = \phi'(1) = 0$, resulta

$$\begin{pmatrix} (\eta\Omega^2 - \xi)d(1) + d''(1) & \xi d''(1) \\ -\xi d''(1) & \Omega^2 d''(1) + \xi d^{(iv)}(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

e tem-se um sistema do tipo $\mathcal{U}\mathbf{c} = 0$, com

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} (\eta\Omega^2 - \xi)d(1) + d''(1) & \xi d''(1) \\ -\xi d''(1) & \Omega^2 d''(1) + \xi d^{(iv)}(1) \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

A equação de frequência é obtida calculando $\det(\mathcal{U}) = 0$

$$\Delta(\Omega) = \xi (\xi - \eta\Omega^2) ((d''(1))^2 - d(1)d^{(iv)}(1)), \quad (5.33)$$

que em termos trigonométricos torna-se

$$\Delta(\Omega) = \left(1 - \frac{\eta}{\xi}\Omega^2\right) \frac{\sinh \epsilon \sin \delta}{\epsilon \delta}. \quad (5.34)$$

Tem-se que $\Omega = \Omega_c = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}$, satisfaz a equação de frequência, entretanto esse caso corresponde ao caso em que o polinômio característico tem raiz $\beta = 0$ dupla. De fato, $\Omega = \Omega_c$ implica $b_4 = 0$ em $P(\beta, \Omega)$, logo $\epsilon = 0$.

Nota

O caso em que $\delta = 0$ configura raiz $\beta = 0$ de grau quatro, todavia esse caso só ocorre se $b_2 = 0$, que por sua vez só é possível para $\Omega = 0$. Logo raiz de grau quatro $\beta = 0$, para $\Omega = \Omega_c$ implicaria $\Omega = \Omega_c = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} = 0$, entretanto isso é parametricamente impossível, devido a positividade dos parâmetros.

Da mesma maneira, pelo método espectral supõe-se que as soluções de (5.22) são da forma $\mathbf{w}(x) = e^{\beta x}v$, resultando

$$\Gamma v = 0, \quad \Gamma = \beta^2 \mathbf{M} + \beta \mathbf{C} + \mathbf{K}, \quad (5.35)$$

ou

$$\Gamma(\beta_j, \lambda)v_j = \begin{pmatrix} \beta_j^2 \xi + \Omega^2 & -\beta_j \xi \\ \beta_j \xi & \beta_j^2 - \xi + \eta \Omega^2 \end{pmatrix} v_j = 0. \quad (5.36)$$

Se $\beta \neq 0$

$$v_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\beta_j^2 \xi + \Omega^2}{\beta_j \xi} \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Se $\beta = 0$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

O polinômio característico associado a equação (5.22) foi definido em (5.27). Tem-se que $\beta = 0$ é raiz repetida de grau dois do polinômio característico, logo é um autovalor

de multiplicidade dois, mas com apenas o autovetor (5.38) associado. Então, procura-se um autovetor generalizado da forma $v_2 = v_1x + b$,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \xi/\Omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Logo o modo de vibração no caso $\Omega = \Omega_c$ tem a forma

$$\mathbf{w}(x) = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3e^{i\delta x}v_3 + c_4e^{-i\delta x}v_4, \quad (5.40)$$

com $\delta = \delta_c$ e

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ IK_b \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -IK_b \end{pmatrix}, \quad (5.41)$$

com $K_b = \frac{\delta^2\eta-1}{\delta\eta}$. Na forma trigonométrica real

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \alpha C_2 & 0 & C_3 & C_4 \\ C_1 & C_2 & C_4K_b & -C_3K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \cos(\delta x) \\ \sin(\delta x) \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

com $\alpha = \xi/\Omega^2$. Aplicando as condições $w(0) = 0$ e $\phi'(0) = 0$ resulta $C_2 = C_3 = 0$. E com as condições de contorno em $x = 1$ tem-se as equações

$$\begin{aligned} C_4 \sin(\delta) &= 0, \\ -C_4K_b \sin(\delta) &= 0, \end{aligned} \quad (5.43)$$

sendo satisfeitas para C_4 não nulo se, e somente se $\delta = n\pi$, gerando a restrição

$$\delta_C = \sqrt{\frac{1 + \eta\xi}{\eta}} = n\pi. \quad (5.44)$$

Satisfazendo essa condição, tem-se que $\Omega = \Omega_c$ configura uma frequência natural de vibração, para o caso biapoioado, com modo de vibração associado dado por

$$\mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} C_4 \sin(\delta x) \\ C_1 + C_4K_b \cos(\delta x) \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

com C_1, C_4 quaisquer.

5.2.2 Modelo de Timoshenko gradiente de deformação/tensão acoplada

Considerando os modelos de Timoshenko gradiente de deformação e tensão acoplada, formulados matricialmente, no capítulo 3, pela equação

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = 0, \quad (5.46)$$

tem-se que a busca de soluções na forma de ondas planas

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{w}(x) = e^{\lambda t + \beta x} v, \quad (5.47)$$

leva ao problema de autovalor

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) e^{\beta x} v = 0. \quad (5.48)$$

Este problema corresponde a determinar soluções do tipo exponencial

$$\mathbf{w}(x) = e^{\beta x} v \quad (5.49)$$

para o sistema diferencial

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{w}^{(iv)}(x) + \mathbf{K}_1 \mathbf{w}'''(x) + \mathbf{K}_2 \mathbf{w}''(x) + \mathbf{K}_3 \mathbf{w}'(x) + \mathbf{K}_4 \mathbf{w}(x) = 0, \quad (5.50)$$

com os coeficientes matriciais definidos em (3.8) (modelo do gradiente de deformação) e (3.10) (modelo da tensão acoplada). Substituindo (5.49) em (5.50) obtém-se

$$\Gamma(\lambda, \beta) v = 0,$$

onde $\Gamma(\lambda, \beta) = \beta^4 \mathbf{K}_0 + \beta^3 \mathbf{K}_1 + \beta^2 \mathbf{K}_2 + \beta \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4$

$$\Gamma(\lambda, \beta) = \begin{pmatrix} \beta^4(k_3 + k_4) - \beta^2 k_5 + \lambda^2 \rho A & \beta^3(k_3 - 2k_4) + \beta k_5 \\ \beta^3(-k_3 + 2k_4) - \beta k_5 & \beta^4 k_1 - \beta^2(k_2 + k_3 + 4k_4) + \lambda^2 \rho I + k_5 \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

A fim de determinar v não nulo decorre a seguinte equação característica

$$\Delta(\lambda, \beta) = \det(\Gamma(\lambda, \beta)) = 0 \Rightarrow b_0 \beta^8 + b_2 \beta^6 + b_4(\lambda) \beta^4 + b_6(\lambda) \beta^2 + b_8(\lambda) = 0, \quad (5.52)$$

com os coeficientes b_0, b_2, b_4, b_6 e b_8 definidos por ¹

$$\begin{aligned}
b_0 &= k_1(k_3 + k_4), \\
b_2 &= -(k_1k_5 + k_2(k_3 + k_4) + 9k_3k_4), \\
b_4(\lambda) &= (m_0k_1 - m_2(k_3 + k_4))\lambda^2 + k_5(k_2 + 4k_3 + k_4), \\
b_6(\lambda) &= -(m_0(k_2 + k_3 + 4k_4) + m_2k_5)\lambda^2, \\
b_8(\lambda) &= m_0(k_5 + \lambda^2\rho I)\lambda^2, \\
m_0 &= \rho A, \quad m_2 = \rho I.
\end{aligned} \tag{5.53}$$

O estudo da natureza das raízes da equação característica (5.52), que depende do parâmetro λ , é um problema complexo. Para sua simplificação, são introduzidas as seguintes restrições:

- Procura de soluções oscilatórias no tempo, assumindo que

$$\lambda = i\omega, \quad \omega \text{ real.}$$

- Procura de ondas do tipo harmônico em que é assumido

$$\beta = i\gamma, \quad \gamma \text{ real.}$$

Sendo que γ é referido como número de onda.

- Considerar condições de contorno do tipo simplesmente apoiada.

A primeira hipótese implica que os coeficientes b_j 's serão reais, disso segue que para cada raiz complexa β , $\bar{\beta}$ também será raiz. Além disso, (5.52) é um polinômio com somente potências pares de β , portanto de um total de 8 raízes, o problema reduz-se a 4 pares de raízes $\pm\beta$.

Considerando as raízes $\pm\beta$, tais que $\Gamma(\omega, \beta)v^+ = 0$ e $\Gamma(\omega, -\beta)v^- = 0$, $v^+ \neq 0, v^- \neq 0$, então

$$\mathbf{w}(x) = e^{\beta x}v^+, \quad \mathbf{w}(x) = e^{-\beta x}v^- \tag{5.54}$$

são soluções de (5.50), com os vetores v calculados em (5.15) e agora escritos como

$$v^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad v^- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \tag{5.55}$$

¹No caso do modelo da tensão acoplada, $k_1 = k_3 = 0$, k_2 simplificado, $b_0 = 0$.

sendo

$$\alpha = -\frac{\beta^3(2k_4 - k_3) - \beta k_5}{\beta^4 k_1 - \beta^2(k_2 + k_3 + 4k_4) - \omega^2 \rho I + k_5}. \quad (5.56)$$

Por outro lado, para cada raiz β de (5.52), substituindo os coeficientes (5.53) em (5.52), e utilizando a hipótese $\lambda = i\omega$, segue que ω deve ser raiz real do polinômio de quarta ordem

$$C_0\omega^4 + C_2(\beta)\omega^2 + C_4(\beta) = 0, \quad (5.57)$$

com coeficientes

$$\begin{aligned} C_0 &= m_0 m_2, \\ C_2(\beta) &= -[m_0(k_5 - \beta^2(k_2 + k_3 + 4k_4) + \beta^4 k_1) + m_2(-\beta^2 k_5 + \beta^4(k_3 + k_4))], \\ C_4(\beta) &= \beta^8(k_3 k_1 + k_4 k_1) - \beta^6(9k_3 k_4 + k_5 k_1 + k_4 k_2 + k_3 k_2) + \beta^4(k_2 + k_4 + 4k_3)k_5. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Já que (5.57) é constituído de potências pares, suas raízes ω também ocorrem aos pares $\pm\omega$. As soluções $\mathbf{v}(t, x) = e^{i\omega t} e^{\beta x} v$ podem então ser consideradas como a sobreposição das soluções

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\pm i\omega t} e^{\beta x} v^+, \quad \mathbf{v}(t, x) = e^{\pm i\omega t} e^{-\beta x} v^-. \quad (5.59)$$

A componente espacial $\mathbf{w}(x)$ é dada como a combinação

$$\mathbf{w}(x) = a e^{\beta x} v^+ + b e^{-\beta x} v^-, \quad (5.60)$$

ou escrita na forma hiperbólica

$$\mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} (a+b) \cosh \beta x + (a-b) \sinh \beta x \\ (a-b)\alpha \cosh \beta x + (a+b)\alpha \sinh \beta x \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

Escolhendo $b = a$ ou $b = -a$, tem-se respectivamente

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\pm i\omega t} \begin{pmatrix} 2a \cosh \beta x \\ 2a\alpha \sinh \beta x \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{v}(t, x) = e^{\pm i\omega t} \begin{pmatrix} 2a \sinh \beta x \\ 2a\alpha \cosh \beta x \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

Para uma viga biapoiada os deslocamentos $\mathbf{v}(t, x) = \begin{pmatrix} w(t, x) \\ \phi(t, x) \end{pmatrix}$ devem satisfazer as condições de contorno

$$\begin{aligned} w(t, 0) = w(t, L) = 0, \quad \phi'(t, 0) = \phi'(t, L) = 0, \\ w''(t, 0) = w''(t, L) = 0, \quad \phi'''(t, 0) = \phi'''(t, L) = 0. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Das condições de contorno em $x = 0$ decorre que somente o segundo tipo de solução em (5.62) é admissível.

A condição $w(t, L) = 0$, implica em (5.62)(b)

$$\sinh \beta L = 0, \quad (5.64)$$

observando que esse caso não é admissível para β real.

Entretanto se são admitidas soluções complexas $\beta = i\gamma$ em (5.62)(b), e utilizando $\sinh(i\gamma x) = i \sin(\gamma x)$, $\cosh(i\gamma x) = \cos(\gamma x)$, segue que

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\pm i\omega_n t} \begin{pmatrix} 2a \sinh i\gamma x \\ 2a\alpha \cosh i\gamma x \end{pmatrix} = e^{\pm i\omega_n t} \begin{pmatrix} 2ai \sin(\gamma x) \\ 2a\alpha \cos(\gamma x) \end{pmatrix}, \quad (5.65)$$

que por sua vez satisfaz $w(t, L) = 0$ se

$$\sin \gamma L = 0, \quad (5.66)$$

cujas soluções são

$$\gamma = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.67)$$

Logo

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\pm i\omega_n t} \begin{pmatrix} 2ai \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ 2a\alpha \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

satisfaz as demais condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$ e é solução de (5.46).

Substituindo $\beta = i\frac{n\pi}{L}$ em (5.57), para cada n há dois valores de frequências naturais $\omega_l^2(n)$ associados, $l = 1, 2$. O valor menor $\omega_1^2(n)$ corresponde a um modo de deformação por flexão e o valor maior $\omega_2^2(n)$ corresponde a um modo devido a deformação por cisalhamento [104], [81] e serão dados por

$$\begin{aligned} \omega_1^2(n) &= \frac{-C_2(\beta(n)) - \sqrt{C_2^2(\beta(n)) - 4C_4(\beta(n))C_0}}{2C_0} \quad (\text{frequências mais baixas}), \\ \omega_2^2(n) &= \frac{-C_2(\beta(n)) + \sqrt{C_2^2(\beta(n)) - 4C_4(\beta(n))C_0}}{2C_0} \quad (\text{frequências mais altas}). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Tem-se então, para $m = 1, 2$

$$\mathbf{v}_m(t, x) = e^{\pm\omega_m t} A_{nm} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \alpha_{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{pmatrix}. \quad (5.70)$$

É conhecido na literatura que as frequências naturais mais altas $\omega_2(n)$ compõe o denotado segundo espectro de frequências de vigas simplesmente apoiadas de Timoshenko [81]. Essas usualmente são desconsideradas na expansão de $\mathbf{v}(t, x)$, sendo consideradas apenas as frequências mais baixas ω_1^2 , que correspondem as obtidas pelo modelo de Euler-Bernoulli. Fazendo $\omega_1 = \omega_1(n) = \omega_n$ e $\omega_2 = \omega_2(n) = 0$, e desconsiderando as frequências negativas, a solução $\mathbf{v}(t, x)$ é dada pelo somatório usualmente considerado na literatura [120], [89]

$$\mathbf{v}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega_n t} \begin{pmatrix} W_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \phi_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

onde os coeficientes W_n e ϕ_n são obtidos para cada n , através da resolução do sistema decorrente da substituição de (5.73) em (5.46)

$$\begin{bmatrix} (k_3 + k_4)\alpha^4 + k_5\alpha^2 - \rho A\omega_n^2 & (k_3 - 2k_4)\alpha^3 - k_5\alpha \\ (k_3 - 2k_4)\alpha^3 - k_5\alpha & k_1\alpha^4 + (k_2 + k_3 + 4k_4)\alpha^2 + k_5 - \rho I\omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_n \\ \phi_n \end{Bmatrix} = 0, \quad (5.72)$$

com $\alpha = i\frac{n\pi}{L}$ e ω_n determinada a partir da equação dada em (5.69)(a), com $\beta = \frac{i n \pi}{L}$.

Tem-se os modos definidos, de acordo com os autovetores já calculados em (5.15), nesse caso como

$$\mathbf{w}_n(x) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ K_b \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

$$K_b = -\frac{\beta_j^3(2k_4 - k_3) - \beta_j k_5}{\beta_j^4 k_1 - \beta_j^2(k_2 + k_3 + 4k_4) + \lambda^2 \rho I + k_5}.$$

Para o modelo de Euler-Bernoulli do gradiente de deformação, descrito por

$$-k_1 w^{(vi)}(t, x) + (k_2 + 4k_3)w^{(iv)}(t, x) + m_0 w_{tt}(t, x) = 0, \quad (5.74)$$

as soluções para o caso de vigas biapoiadas também podem ser expandidas em termos de coeficientes W_n

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{i\omega_n t}, \quad (5.75)$$

satisfazendo as condições de contorno

$$w(0) = w''(0) = 0, \quad w(L) = w''(L) = 0. \quad (5.76)$$

Substituindo (5.75) em (5.74) resulta

$$[m_0 \omega_n^2 - k_1 \alpha^6 - (k_2 + 4k_3) \alpha^4] W_n = 0. \quad (5.77)$$

Então, a fim de determinar W_n coeficientes não nulos tem-se

$$\omega_n^2 = \frac{k_1 \alpha^6 + (k_2 + 4k_3 + k_4) \alpha^4}{m_0}. \quad (5.78)$$

Para o caso do modelo de Euler-Bernoulli da tensão acoplada $\ell_0 = \ell_1 = 0$, implicando $k_1 = k_4 = 0$ e $k_2 = \frac{E(1-\nu)I}{(1+\nu)(1+2\nu)}$, e então

$$\omega_n^2 = \frac{(k_2 + 4k_3) \alpha^4}{m_0}. \quad (5.79)$$

Se os efeitos não locais são desconsiderados fazendo $\ell_2 = 0$, então $k_3 = 0$ e resultam as frequências naturais, para vigas simplesmente apoiadas, relativas ao modelo clássico de Euler-Bernoulli com efeitos de Poisson

$$\omega_n^2 = \frac{E(1-\nu)I}{m_0(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4. \quad (5.80)$$

Negligenciando o coeficiente de Poisson, decorrem as frequências naturais clássicas para viga simplesmente apoiada de Euler-Bernoulli convencional [104]

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{\rho A} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4. \quad (5.81)$$

Resultados comparativos entre as frequências naturais de vigas biapoiadas, para os casos dos modelos de Timoshenko gradiente de deformação com efeito de Poisson (TBSG), Timoshenko tensão acoplada com efeito de Poisson (TBCS), Timoshenko clássico com efeito de Poisson (TBP) e Timoshenko clássico sem efeito de Poisson (TB), e os respectivos casos correspondentes ao modelo de Euler-Bernoulli com iniciais EB, são apresentados na seção 7.4 do capítulo 7.

5.3 Modelo de Timoshenko incluindo efeitos de superfície

As equações do modelo de Timoshenko incluindo efeitos de superfície, foram dadas em (2.23) e escritas matricialmente como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} w(t, x) \\ \phi(t, x) \end{pmatrix}, \quad (5.82)$$

com

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} c_m & 0 \\ -I^0 \frac{\partial}{\partial x} & e_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -a_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} & a \frac{\partial}{\partial x} \\ I^1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} - a \frac{\partial}{\partial x} & -b_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a \end{pmatrix}. \quad (5.83)$$

sendo $c_m = \rho A + \rho_0 s^*$, $a_m = \kappa GA + \tau_0 s^*$, $a = \kappa GA$, $e_m = \rho I + \rho_0 I^*$, $b_m = EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*$, $I^0 = \frac{2\nu I \rho_0}{H}$, $I^1 = \frac{2\nu I \tau_0}{H}$.

Supondo soluções exponenciais da forma

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{w}(x), \quad \mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} W(x) \\ \Psi(x) \end{pmatrix}, \quad (5.84)$$

em (5.82) resulta o problema de autovalor

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{w}(x) = 0, \quad (5.85)$$

equivalente a uma equação diferencial de ordem 3, dada por

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{w}'''(x) + \mathbf{K}_1 \mathbf{w}''(x) + \mathbf{K}_2(\lambda) \mathbf{w}'(x) + \mathbf{K}_3(\lambda) \mathbf{w}(x) = 0, \quad (5.86)$$

com

$$\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} -a_m & 0 \\ 0 & -b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -(\lambda^2 I^0 + a) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 c_m & 0 \\ 0 & \lambda^2 e_m + a \end{pmatrix}.$$
(5.87)

Pelo método espectral de Euler procuram-se soluções da forma $\mathbf{w}(x) = e^{\beta x} v$, onde v satisfaz o sistema

$$\Gamma(\beta, \lambda)v = (\beta^3 \mathbf{K}_0 + \beta^2 \mathbf{K}_1 + \beta \mathbf{K}_2(\lambda) + \mathbf{K}_3(\lambda))v = 0, \quad (5.88)$$

com

$$\Gamma(\beta, \lambda) = \begin{pmatrix} -\beta^2 a_m + \lambda^2 c_m & \beta a \\ \beta^3 I^1 - \beta(I^0 \lambda^2 + a) & -\beta^2 b_m + e_m \lambda^2 + a \end{pmatrix}. \quad (5.89)$$

Soluções v não-nulas podem ser obtidas através do cálculo das raízes β e λ da equação característica

$$\Delta(\beta, \lambda) = \det(\Gamma(\beta, \lambda)) = \det(\beta^3 \mathbf{K}_0 + \beta^2 \mathbf{K}_1 + \beta \mathbf{K}_2(\lambda) + \mathbf{K}_3(\lambda)) = 0, \quad (5.90)$$

que pode ser escrita como

$$\Delta(\beta, \lambda) = b_0 \beta^6 + b_2 \beta^4 + b_4 \beta^2 + b_6 = \beta^4 + g^2(\lambda) \beta^2 - r^4(\lambda) = 0^2, \quad (5.91)$$

²Devido a singularidade de \mathbf{K}_0 temos que $\mathbf{b}_0 = 0$.

com

$$g^2(\lambda) = \frac{b_4}{b_2} = \frac{(I^0 a - b_m c_m - a_m e_m) \lambda^2 + a^2 - a a_m}{(a_m b_m - a I^1)} = \frac{-\lambda^2 \left(\frac{(EI + (2\mu_0 + \lambda_0) I^*) M_1^*}{\kappa G A} + \left(1 + \frac{\tau_0 s^*}{\kappa G A}\right) M_2^* - I^0 \right) - \tau_0 s^*}{K_s},$$

$$r^4(\lambda) = -\frac{b_6}{b_2} = -\frac{\lambda^2 (a c_m + c_m e_m \lambda^2)}{(a_m b_m - a I^1)} = \frac{-\lambda^2 \left(1 + \frac{M_2^*}{\kappa G A}\right) M_1^*}{K_s},$$

$$K_s = (EI + (2\mu_0 + \lambda_0) I^*) \left(1 + \frac{\tau_0 s^*}{\kappa G A}\right) - I^1, \quad (5.92)$$

$$M_1^* = \rho A + \rho_0 s^*,$$

$$M_2^* = \rho I + \rho_0 I^*.$$

Ou ainda,

$$\Delta(\beta, \lambda) = C_0 \lambda^4 + C_2(\beta) \lambda^2 + C_4(\beta), \quad (5.93)$$

com

$$C_0 = c_m e_m,$$

$$C_2 = (a I^0 - b_m c_m - a_m e_m) \beta^2 + a c_m, \quad (5.94)$$

$$C_4 = (a^2 - a a_m) \beta^2 + (a_m b_m - a I^1) \beta^4.$$

As soluções de (5.91) podem ser escritas como $\beta_{1,2} = \pm \epsilon$ e $\beta_{3,4} = \pm \delta i$ com

$$\epsilon = \sqrt{\frac{-g^2(\lambda) + \sqrt{(g^2(\lambda))^2 + 4r^4(\lambda)}}{2}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{g^2(\lambda) + \sqrt{(g^2(\lambda))^2 + 4r^4(\lambda)}}{2}}. \quad (5.95)$$

5.3.1 Caracterização dos autovetores e modos de vibração

No caso em que β são raízes simples da equação característica $P(\beta, \lambda) = 0$, os autovetores v_j são as soluções do sistema

$$\begin{pmatrix} -\beta_j^2 a_m + c_m \lambda^2 & \beta_j a \\ 0 & \frac{P(\beta, \lambda)}{-\beta_j^2 a_m + \lambda^2 c_m} \end{pmatrix} v_j = 0, \quad (5.96)$$

e foram dados em (5.18)

$$v_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ \left(\frac{\beta_j^2 a_m - \lambda^2 c_m}{\beta_j a} \right) v_{1j} \end{pmatrix}, \quad (5.97)$$

onde v_{1j} é uma constante arbitrária.

Para garantir raízes β simples exige-se que $P(\beta, \lambda) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial \beta} P(\beta, \lambda) \neq 0$, disso decorre que β é uma raiz simples de $P(\beta, \lambda)$ se, e somente se, $\beta \neq 0$ e $\beta^2 \neq \frac{-g^2(\lambda)}{2}$. Nesse caso, pelo princípio da superposição escreve-se a solução $\mathbf{w}(x)$ como

$$\mathbf{w}(x) = \sum_{j=1}^4 c_j e^{\beta_j x} v_j. \quad (5.98)$$

Observa-se que o somário tem $m = 4$ parcelas, correspondentes aos 4 autovetores LI associados aos respectivos 4 autovetores β_j do caso não-defeituoso. Além disso, $m < nN = 2 \cdot 3$, pois o problema é singular, sendo m o grau do polinômio característico $P(\Gamma(\beta, \lambda)) = \det(\beta^3 \mathbf{K}_0 + \dots + \mathbf{K}_N)$.

De maneira equivalente escreve-se

$$\mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1 \left(\frac{\epsilon^2 a_m - \lambda^2 c_m}{a\epsilon} \right) & c_2 \left(\frac{\epsilon^2 a_m - \lambda^2 c_m}{-a\epsilon} \right) & \frac{c_3}{i} \left(\frac{-\delta^2 a_m - \lambda^2 c_m}{a\delta} \right) & \frac{c_4}{i} \left(\frac{-\delta^2 a_m - \lambda^2 c_m}{-a\delta} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\epsilon x} \\ e^{-\epsilon x} \\ e^{\delta i x} \\ e^{-\delta i x} \end{pmatrix}, \quad (5.99)$$

que em sua forma trigonométrica torna-se

$$\mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_2 K_a & C_1 K_a & C_4 K_b & -C_3 K_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\epsilon x) \\ \sinh(\epsilon x) \\ \cos(\delta x) \\ \sin(\delta x) \end{pmatrix}, \quad (5.100)$$

onde $C_1 = c_1 + c_2$, $C_2 = c_1 - c_2$, $C_3 = c_3 + c_4$, $C_4 = (c_3 - c_4)i$ e

$$K_a = \frac{a_m \epsilon^2 - \lambda^2 c_m}{a\epsilon}, \quad K_b = \frac{a_m \delta^2 + \lambda^2 c_m}{a\delta}. \quad (5.101)$$

O caso defeituoso é contemplado para as únicas possíveis raízes repetidas $\beta = 0$ e $\beta = \pm \sqrt{\frac{-g^2(\lambda)}{2}}$. Considerando $\lambda = i\omega$ tem-se que

• $\beta = 0$ é uma raiz de $P(\beta, \omega)$ se e, somente se, $r^4(\omega) = 0$. Ou seja, $r^4(\omega) = 0$ para $\omega = 0$ ou $\omega = \omega_c$, com $\omega_c = \sqrt{\frac{a}{em}} = \sqrt{\frac{\kappa GA}{\rho I + \rho_0 I^*}}$. ω_c é denotada frequência crítica.

Observando-se que se $\beta = 0$ é uma raiz de $P(\beta, \omega)$, então será uma raiz dupla se $g^2(\omega) \neq 0$, ou de grau quatro se $g^2(\omega) = 0$.

• $\beta = \pm \sqrt{\frac{-g^2(\omega)}{2}}$, $g^2(\omega) \neq 0$, é uma raiz de $P(\beta, \omega)$ se e, somente se $(g^2(i\omega))^2 + 4r^4(\omega) = 0$, com $r^4(\omega) \neq 0$. Temos que $g^2(\omega) = 0$ quando

$$\omega = \omega_g = \sqrt{\frac{(a^2 - aa_m)}{(b_m c_m + a_m e_m - I^0 a)}} = \sqrt{\frac{-\kappa GA \tau_0 s^*}{(EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*)M_2^* + (\kappa GA + \tau_0 s^*)M_2^* - I^0 \kappa GA}}. \quad (5.102)$$

Observação

Considerando-se $\lambda = \omega i$ e parâmetros reais fixos é possível obter que $(g^2(\omega))^2 + r^4(\omega) > 0$ para todo ω , de modo que a única possibilidade de autovalor repetido é $\beta = 0$ quando $\omega = 0$ ou $\omega = \omega_c$.

Supondo que $\beta = 0$ é raiz de $P(\beta, \lambda)$ e substituindo-se em $\Gamma(\beta, \lambda)v = 0$ resulta o sistema

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 c_m & 0 \\ 0 & \lambda^2 e_m + a \end{pmatrix} v = 0. \quad (5.103)$$

Mas $\beta = 0$ ocorre para

$$\lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 = \lambda_c^2 = \frac{-a}{e_m} = \frac{-\kappa GA}{\rho I + \rho_0 I^*}. \quad (5.104)$$

Se $\lambda = 0$ ou $\lambda = \lambda_c$, então tem-se respectivamente

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{21} \end{pmatrix}. \quad (5.105)$$

Quando $\beta = 0$ tem multiplicidade dois, e visto que tem apenas um autovetor v_1 associado a ele, é necessário determinar uma outra solução linearmente independente a v_1 .

Tal solução será da forma [46]

$$v_2 = (v_1 x + b_1) \quad (5.106)$$

com b_1 vetor constante, $b_1 = \begin{pmatrix} \frac{e_m}{c_m} \\ 0 \end{pmatrix}$, no caso em que $\lambda = \lambda_c$. Nesse caso, tem-se $r^4(\lambda) = 0$ e $\Delta(\beta, \lambda)$ pode ser reescrito como

$$\Delta(\beta, \gamma) = \beta^2(\beta^2 + g^2(\gamma)) = 0. \quad (5.107)$$

$\beta_1 = 0$ é uma solução de multiplicidade dois e $\beta_{3,4} = \pm\sqrt{-g^2(\lambda)}$ são raízes distintas de multiplicidade um, quando $g^2(\lambda) \neq 0$. Para $\beta_{3,4}$ não-nulos, os autovetores correspondentes já foram calculados em (5.18), serão dados por

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-g^2(\lambda)a_m - \lambda^2 c_m}{\sqrt{-g^2(\lambda)}a} \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-g^2(\lambda)a_m - \lambda^2 c_m}{-\sqrt{-g^2(\lambda)}a} \end{pmatrix}. \quad (5.108)$$

Logo tem-se que $\beta = 0$ tem multiplicidade 2, quando $\lambda = \lambda_c$ e $\lambda \neq \lambda_g$. E a solução de (5.86) é dada por

$$\mathbf{w}(x) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 e^{\sqrt{-g^2(\lambda)}x} v_3 + c_4 e^{-\sqrt{-g^2(\lambda)}x} v_4, \quad (5.109)$$

onde

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{e_m}{c_m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.110)$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-g^2(\lambda)a_m - \lambda^2 c_m}{\sqrt{-g^2(\lambda)}a} \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-g^2(\lambda)a_m - \lambda^2 c_m}{-\sqrt{-g^2(\lambda)}a} \end{pmatrix}.$$

Se $\beta = 0$ é autovalor quádruplo então a base de soluções será composta por v_1 e outras três soluções linearmente independentes. Tais soluções são da forma [46]

$$\begin{aligned} v_2 &= (v_1 x + b_1), \\ v_3 &= \left(v_1 \frac{x^2}{2!} + b_1 x + b_2\right), \\ v_4 &= \left(v_1 \frac{x^3}{3!} + b_1 \frac{x^2}{2!} + b_2 x + b_3\right), \end{aligned} \quad (5.111)$$

sendo b_1 , b_2 e b_3 vetores constantes a serem determinados, de forma análoga ao caso anterior para b_1 . E a solução $\mathbf{w}(x)$ é dada pela combinação linear

$$\mathbf{w}(x) = c_1 v_1 + c_2 (v_1 x + b_1) + c_3 \left(v_1 \frac{x^2}{2!} + b_1 x + b_2\right) + c_4 \left(v_1 \frac{x^3}{3!} + b_1 \frac{x^2}{2!} + b_2 x + b_3\right). \quad (5.112)$$

Notas

- O caso $\lambda = 0$ que caracteriza raízes β repetidas representa o caso estático, ou seja, ausência de um processo vibratório na resposta $\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{w}(x)$.
- O caso em que $\beta = 0$ é autovalor duplo, o que ocorre para $\lambda = \lambda_c \neq \lambda_g$, representa fisicamente modos com parte rígida.
- O caso em que $\beta = 0$ é autovalor de multiplicidade quatro, o que ocorre para $\lambda = \lambda_c = \lambda_g$, caracteriza modos puramente rígidos, sem parte oscilatória.

5.3.2 Equação de frequência

Considerando o caso dos autovalores distintos $\beta_{1,2} = \pm\epsilon$ e $\beta_{3,4} = \pm i\delta$, da seção anterior viu-se que a solução $\mathbf{w}(x)$ pode ser escrita como

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_2 K_a & C_1 K_a & C_4 K_b & -C_3 K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(\epsilon x) \\ \sinh(\epsilon x) \\ \cos(\delta x) \\ \sin(\delta x) \end{bmatrix}, \quad (5.113)$$

ou

$$w(x) = C_1 \cosh \epsilon x + C_2 \sinh \epsilon x + C_3 \cos \delta x + C_4 \sin \delta x, \quad (5.114)$$

$$\phi(x) = C_2 K_a \cosh(\epsilon x) + C_1 K_a \sinh \epsilon x + C_4 K_b \cos \delta x - C_3 K_b \sin \delta x,$$

com

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{a_m \epsilon^2 - \lambda^2 c_m}{a \epsilon} = \left(1 + \frac{\tau_0 s^*}{\kappa G A}\right) \epsilon - \frac{\lambda^2 M_1^*}{\kappa G A} \frac{1}{\epsilon}, \\ K_b &= \frac{a_m \delta^2 + \lambda^2 c_m}{a \delta} = \left(1 + \frac{\tau_0 s^*}{\kappa G A}\right) \delta + \frac{\lambda^2 M_1^*}{\kappa G A} \frac{1}{\delta}. \end{aligned} \quad (5.115)$$

5.3.2.1 Viga apoiada-apoiada

Nesse caso tem-se as seguintes condições de contorno, em $x = 0$

$$w(0) = 0, \quad b_m \phi'(0) + I^1 w''(0) - \lambda^2 I^0 w(0) = 0. \quad (5.116)$$

E em $x = L$

$$w(L) = 0, \quad b_m \phi'(L) + I^1 w''(L) - \lambda^2 I^0 w(L) = 0. \quad (5.117)$$

Utilizando a primeira condição de contorno em $x = 0$, resulta $C_1 + C_3 = 0$, então $C_3 = -C_1$. Da segunda condição de contorno resulta

$$b_m \phi'(0) + I^1 w''(0) = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{a} (a_m b_m + I^1 a) (\epsilon^2 + \delta^2) = 0.$$

Assumindo que $a_m b_m + I^1 a > 0$, e $\epsilon^2 + \delta^2 \neq 0$, decorre $C_1 = C_3 = 0$.

E das condições de contorno para $x = L$ segue o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 I^0 & I^1 & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(L) \\ w''(L) \\ \phi'(L) \end{pmatrix} = 0. \quad (5.118)$$

Um sistema do tipo $\mathcal{U}\mathbf{c} = \mathbf{0}$, quando $W(x)$ e $\phi(x)$ são expandidas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 I^0 & I^1 & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh(\epsilon L) & \sin(\delta L) \\ \epsilon^2 \sinh(\epsilon L) & -\delta^2 \sin(\delta L) \\ \epsilon K_a \sinh(\epsilon L) & -\delta K_b \cos(\delta L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (5.119)$$

$$\begin{pmatrix} \sinh(\epsilon L) & \sin(\delta L) \\ (-I^0\lambda^2 + I^1\epsilon^2 + b_m K_a \epsilon) \sinh(\epsilon L) & (-I^0\lambda^2 - I^1\delta^2 - b_m K_b \delta) \sin(\delta L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (5.120)$$

Resulta a equação de frequência $\Delta(\lambda) = \det(\mathcal{U}) = 0$

$$-\frac{(I^1 a + a_m b_m)(\epsilon^2 + \delta^2)}{a} \sinh(\epsilon L) \sin(\delta L) = 0, \quad (5.121)$$

já que $(I^1 a + a_m b_m) > 0$ e $\epsilon^2 + \delta^2 \neq 0$ então a equação de frequência é

$$\sinh(\epsilon L) \sin(\delta L) = 0, \quad (5.122)$$

com ϵ e δ já definidos em (5.95). A solução de (5.122) é conhecida, e em geral considera-se que ϵ é real, portanto as soluções da equação de frequência serão $\delta = \frac{n\pi}{L}$, mas para $\omega > \omega_c$ é possível verificar que ϵ é puramente imaginário, definindo assim um segundo espectro de frequências caracterizado pelas soluções de $\sinh(\epsilon L) = 0$, ou seja, $\epsilon = \frac{im\pi}{L}$.

As componentes dos modos de vibração $\mathbf{w}(x)$ são dadas por

$$\begin{aligned} w(x) &= C_2 \sinh(\epsilon x) + C_4 \sin(\delta x), \\ \phi(x) &= C_2 K_a \cosh(\epsilon x) + C_4 K_b \cos(\delta x). \end{aligned} \quad (5.123)$$

com C_2 e C_4 determinadas quando o sistema (5.120) é resolvido. A frequência crítica ω_c , por sua vez, define a natureza das raízes ϵ e δ , de modo que

$$\begin{aligned} \omega < \omega_c & \begin{cases} \epsilon \text{ é real} \\ \delta \text{ é real} \rightarrow \delta = \frac{n\pi}{L} \end{cases} \\ \omega = \omega_c & \begin{cases} \epsilon = 0 \\ \delta \text{ é real} \rightarrow \delta = \frac{n\pi}{L} \end{cases} \\ \omega > \omega_c & \begin{cases} \epsilon \text{ é puramente imaginário} \rightarrow \epsilon = \frac{im\pi}{L} \\ \delta \text{ é real} \rightarrow \delta = \frac{n\pi}{L} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.124)$$

É conhecido na literatura que a frequência crítica define dois espectros de frequência, o primeiro abaixo e o segundo acima da frequência crítica [81], [117], [90]. Conforme esses espectros os modos de vibração são caracterizados como

- 1º Espectro $C_2 = 0$, C_4 qualquer

$$\begin{aligned} w(x) &= \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \\ \phi(x) &= K_b \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \end{aligned} \quad (5.125)$$

- 2º Espectro C_2, C_4 quaisquer

$$\begin{aligned} w(x) &= C_2 \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) + C_4 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \\ \phi(x) &= C_2 K_a \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) + C_4 K_b \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \end{aligned} \quad (5.126)$$

5.3.2.2 Viga fixa-livre

As condições de contorno nesse caso são escritas como

$$\begin{aligned} w(0) &= 0, \quad \psi(0) = 0 \\ b_m \psi'(L) + I^1 w''(L) - I_0 \lambda^2 w(L) &= 0, \quad a_m w'(L) - a \psi(L) = 0. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Das condições de contorno em $x = 0$ resulta

$$\begin{aligned} w(x) &= C_1 (\cosh(\epsilon x) - \cos(\delta x)) + \frac{C_2}{K_b} (K_b \sinh(\epsilon x) - K_a \sin(\delta x)), \\ \phi(x) &= C_2 K_a (\cosh(\epsilon x) - \cos(\delta x)) + C_1 (K_a \sinh(\epsilon x) + K_b \sin(\delta x)). \end{aligned} \quad (5.128)$$

E das condições de contorno em $x = L$ tem-se

$$\begin{pmatrix} 0 & a_m & 0 & -a & 0 \\ -\lambda^2 I^0 & 0 & I^1 & 0 & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(L) \\ w'(L) \\ w''(L) \\ \phi(L) \\ \phi'(L) \end{pmatrix} = 0, \quad (5.129)$$

e conseqüentemente um sistema do tipo $\mathcal{U}\mathbf{c} = 0$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \sin(\delta L) + \mathcal{A}_2 \sinh(\epsilon L) & -\mathcal{A}_1 \frac{k_a}{k_b} \cos(\delta L) + \mathcal{A}_2 \cosh(\epsilon L) \\ \mathcal{A}_4 \cos(\delta L) + \mathcal{A}_6 \cosh(\epsilon L) & \mathcal{A}_5 \frac{k_a}{k_b} \sin(\delta L) + \mathcal{A}_6 \sinh(\epsilon L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.130)$$

com

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= a_m \delta - a K_b, \quad \mathcal{A}_2 = a_m \epsilon - a K_a, \\ \mathcal{A}_5 &= \lambda^2 I^0 + I^1 \delta^2 + b_m K_b \delta, \quad \mathcal{A}_6 = -\lambda^2 I^0 + I^1 \epsilon^2 + b_m K_a \epsilon.\end{aligned}\tag{5.131}$$

E obtém-se a equação de frequência $\Delta(\lambda) = \det(\mathcal{U}) = 0$

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_6 K_a - \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_5 K_b) \cosh(\epsilon L) \cos(\delta L) + (\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_6 K_b + \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_5 K_a) \sinh(\epsilon L) \sin(\delta L) \\ + \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_5 K_a - \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_6 K_b = 0.\end{aligned}\tag{5.132}$$

As componentes dos modos de vibração foram dadas em (5.128), com C_1 e C_2 sendo determinados da resolução do sistema (5.130), para cada λ solução da equação de frequência.

6 MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN

O método da decomposição de Adomian (ADM) [6], [8], [103], [7] é um método analítico para resolver de maneira aproximada uma variedade de equações do tipo

$$\mathbf{P}u = g, \quad (6.1)$$

onde \mathbf{P} representa um operador diferencial geral, linear ou não linear.

O método consiste basicamente em decompor $\mathbf{P} = \mathbf{L} + \mathbf{N}$, onde \mathbf{L} é um operador diferencial linear e \mathbf{N} é não linear. Assim

$$\mathbf{L}u = g - \mathbf{N}u. \quad (6.2)$$

Por conveniência, \mathbf{L} tem sido considerado na forma $\mathbf{L} = L + R$, onde $L = \frac{d^N}{dx^N}$ é a derivada de maior ordem em \mathbf{L} e R são os termos remanescentes.

Considera-se a expansão da variável u e do termo não linear

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (6.3)$$

na equação

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (6.4)$$

sendo $Nu = f(u)$, e A_n os denotados polinômios de Adomian, calculados através de fórmulas específicas que são definidas na seção 6.1 .

Aplicando o operador inverso L^{-1}

$$\begin{aligned} L^{-1}Lu &= L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \\ u &= \Phi + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \end{aligned} \quad (6.5)$$

com $L\Phi = 0$, sendo Φ relativa a constantes de integração ou solução homogênea.

Utilizando a expansão da variável u e do termo não linear tem-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \Phi + L^{-1}g - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (6.6)$$

e considera-se que os termos da expansão da série de u são definidos como

$$\begin{aligned} u_0 &= \Phi + L^{-1}g, \\ u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ é convergente então a N -ésima soma parcial $\varphi_N = \sum_{n=0}^N u_n$ será uma solução aproximada e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u. \quad (6.8)$$

No Apêndice B são feitas outras observações e comentários sobre a convergência do esquema de Adomian.

Em particular, na formulação relativa ao modelo de Timoshenko

$$\mathbb{M}\mathbf{w}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{w}'(x) + \mathbb{K}\mathbf{w}(x) = \mathbf{g}(x) + \mathbf{N}\mathbf{w}(x), \quad (6.9)$$

escrita tal que

$$\mathbf{w}''(x) + \mathbf{K}_0\mathbf{w}' + \mathbf{K}_1\mathbf{w}(x) = [\mathcal{G}(x) + \mathcal{N}\mathbf{w}(x)], \quad (6.10)$$

com $\mathbf{K}_0 = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}$ e $\mathbf{K}_1 = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}$, $\mathcal{G}(x) = \mathbb{M}^{-1}g(x)$ e $\mathcal{N} = \mathbb{M}^{-1}\mathbf{N}$.

Nesse caso $L = \frac{d^2}{dx^2}$ e $\Phi = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1x = \mathbf{w}(0) + \mathbf{w}'(0)x$. Resolvendo (6.10) em termos do operador L^{-1}

$$\mathbf{w}(x) = \Phi(x) + L^{-1}[\mathcal{G}(x) - \mathbf{R}\mathbf{w}(x) + \mathcal{N}\mathbf{w}(x)]. \quad (6.11)$$

com $\mathbf{R} = \mathbf{K}_0 \frac{d}{dx} + \mathbf{K}_1$.

Considera-se que as componentes da variável $\mathbf{w}(x)$ são escritas em série de funções

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{w}_k, \quad (6.12)$$

e o termo não linear $\mathcal{N}\mathbf{w}$ é expandido em termos dos polinômios de Adomian [8]

$$\mathcal{N}\mathbf{w}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k), \quad \mathbf{A}_k(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) = \begin{bmatrix} A_{1,k} \\ A_{2,k} \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

onde $A_{1,k}$ e $A_{2,k}$ são os polinômios de Adomian.

E considera-se o esquema

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 &= \Phi + \mathbf{L}^{-1}\mathcal{G}(x), \\ \mathbf{w}_1 &= -L^{-1}\mathbf{R}\mathbf{w}_0 + L^{-1}\mathbf{A}_0, \\ \mathbf{w}_{k+1} &= -L^{-1}\mathbf{R}\mathbf{w}_k + L^{-1}\mathbf{A}_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.14)$$

Agora, são introduzidas as ideias que motivam o método da decomposição de Adomian com uso da base fundamental, cujos detalhes são apresentados na seção 6.2.

Considerando novamente o problema de ordem geral

$$Lu = g - Ru - \mathbf{N}u. \quad (6.15)$$

com $L = \frac{d^N}{dx^N}$. Primeiramente é observado que a solução homogênea Φ , ou seja, solução tal que $L\Phi = 0$, pode ser escrita em termos da solução fundamental

$$u_h = hc_1 + h'c_2 + \dots + h^{N-1}c_N, \quad (6.16)$$

onde h é solução do problema $Lh = 0$ com condições iniciais impulsivas: todas derivadas de h em zero são nulas até ordem $N - 2$, onde N é a ordem do operador L , e a $(N - 1)$ -ésima derivada em zero é $\frac{1}{a_0}$, onde

$$p(\gamma) = a_0\gamma^N + a_1\gamma^{N-1} + \dots + a_N, \quad (6.17)$$

é o polinômio característico associado ao operador L . Nesse caso,

$$u_h = c_0 + xc_1 + \dots + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}c_{N-1}. \quad (6.18)$$

Em segundo lugar é observado que a operação L^{-1} , correspondente a n-upla integração equivale a uma única integral de convolução, ou seja,

$$\int_0^x \frac{(x-\xi)^{N-1}}{(N-1)!} F(\xi) d\xi = \int_0^x \int_0^{\xi_N} \dots \int_0^{\xi_2} F(\xi_1) d\xi_1 \dots d\xi_{N-1} d\xi_N. \quad (6.19)$$

Salienta-se que a fórmula (6.19), devido a Liouville, tem sido utilizada no cálculo de derivadas fracionárias [99], [52].

Então a solução do problema (6.15) é dada por

$$u = u_h + L^{-1}F = c_0 + xc_1 + \dots + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}c_{N-1} + \int_0^x \frac{(x-\xi)^{N-1}}{(N-1)!} F d\xi \quad (6.20)$$

com $F = g - Ru - \mathbf{N}u$. Nesse caso, $h = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ é a solução fundamental de $\frac{d^N u}{dx^N} = F$, e observa-se que $\int_0^x \frac{(x-\xi)^{N-1}}{(N-1)!} F d\xi$ corresponde a convolução $h * F$.

Partindo disso, a ideia é não mais considerar o operador linear de maior ordem, mas sim toda a parte linear de modo que o esquema iterativo de Adomian parta da solução escrita na forma

$$u = hc_1 + h'c_2 + \dots + h^{N-1}c_N + h * g - h * \mathbf{N}u. \quad (6.21)$$

Os detalhes dessas modificações do método de Adomian fazendo uso da resposta fundamental são apresentados na seção 6.2. Na seção 6.3 é desenvolvido o método convencional da decomposição de Adomian para casos lineares relativos aos casos do modelo clássico de Timoshenko, modelo de Timoshenko não local de Eringen e modelo de Timoshenko gradiente de deformação. E finalmente na seção 6.4 é apresentado um exemplo numérico do modelo clássico de Timoshenko considerando um termo de não linearidade cúbica.

6.1 Fórmulas para os polinômios de Adomian

O termo não linear $Nu = f(u)$ é expandido como uma série de funções

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n). \quad (6.22)$$

Aqui $u \in \mathbb{R}^d$, com $d = 1$, mas é possível generalizar para $d \geq 2$ [21].

As funções A_n são polinômios em (u_1, \dots, u_n) chamados polinômios de Adomian, cuja fórmula para determinação é dada por [8]

$$A_n = A_n(u_0, \dots, u_n) = \sum_{\nu=1}^n c(\nu, n) f^{(\nu)}(u_0), \quad (6.23)$$

sendo que os coeficientes $c(\nu, n)$ são produtos, ou soma de produtos, de ν componentes de u , cuja a soma dos subíndices é n dividido pelo fatorial do número de subíndices repetidos

$$\begin{aligned} A_0 &= f(u_0); \\ A_1 &= u_1 f'(u_0); \\ A_2 &= u_2 f'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 f''(u_0); \\ A_3 &= u_3 f'(u_0) + u_1 u_2 f''(u_0) + \frac{1}{6} u_1^3 f'''(u_0); \\ A_4 &= u_4 f'(u_0) + (u_1 u_3 + \frac{u_2^2}{2!}) f''(u_0) + \frac{u_1^2 u_2}{2!} f'''(u_0) + \frac{u_1^4}{4!} f^{(4)}(u_0); \\ A_5 &= u_5 f'(u_0) + (u_1 u_4 + u_2 u_3) f''(u_0) + (\frac{u_1 u_2^2}{2!} + \frac{u_1^2 u_3}{2!}) f'''(u_0) + \frac{u_1^3 u_2}{3!} f^{(4)}(u_0) + \frac{u_1^5}{5!} f^{(5)}(u_0); \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.24)$$

os índices superiores (linhas e números entre parênteses) representam derivação da função f com relação a variável u .

Os polinômios de Adomian não são únicos [47], eles podem ser gerados através da expansão da série de Taylor de $f(u)$ em torno da função u_0 , sendo $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, e

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u - u_0)^n}{n!} f^{(n)}(u_0). \quad (6.25)$$

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} A_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u-u_0)^n}{n!} f^{(n)}(u_0) \\
&= f(u_0) + (u_1 + u_2 + \dots) f^{(1)}(u_0) + (u_1 + u_2 + \dots)^2 \frac{f^{(2)}(u_0)}{2!} + (u_1 + u_2 + \dots)^3 \frac{f^{(3)}(u_0)}{3!} + \dots \\
&= f(u_0) + \\
&\quad + u_1 f^{(1)}(u_0) + u_2 f^{(1)}(u_0) + u_3 f^{(1)}(u_0) + u_4 f^{(1)}(u_0) + u_5 f^{(1)}(u_0) + \dots \\
&\quad + \frac{u_1^2}{2!} f^{(2)}(u_0) + \frac{u_1 u_2}{2!} f^{(2)}(u_0) + (u_1 u_3 + \frac{u_2^2}{2!}) f^{(2)}(u_0) + (u_1 u_4 + u_2 u_3) f^{(2)}(u_0) + \dots \\
&\quad + \frac{u_1^3}{3!} f^{(3)}(u_0) + \frac{u_1^2 u_2}{2!} f^{(3)}(u_0) + (\frac{u_1 u_2^2}{2!} + \frac{u_1^2 u_3}{2!}) f^{(3)}(u_0) + \dots \\
&\quad + \frac{u_1^4}{4!} f^{(4)}(u_0) + \frac{u_1^3 u_2}{3!} f^{(4)}(u_0) + \dots \\
&\quad + \frac{u_1^5}{5!} f^{(5)}(u_0) + \dots
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Na expansão anterior observa-se que cada polinômio A_n é construído considerando os termos a partir da n -ésima derivada vezes a n -ésima potência sobre $n!$ em diagonal ascendente, e de modo que a soma dos sub-índices seja n , conforme (6.24).

Os termos A_n podem ser determinados pela fórmula [1], [2], [4]

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\varepsilon^n} f \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i \right) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{6.27}$$

onde ε é um parâmetro formal.

Nos trabalhos de Abbaoui e Cherruault [2], [21] são apresentadas formulações alternativas para os polinômios

$$\begin{aligned}
A_n(u_0, \dots, u_n) &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i\right) \Big|_{\lambda=0} = \sum_{|nk|=n} f^{(|k|)}(u_0) \frac{u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!}, \\
&= \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n} f^{(\alpha_1)}(u_0) \frac{u_1^{\alpha_1 - \alpha_2}}{(\alpha_1 - \alpha_2)!} \dots \frac{u_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n}}{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)!} \cdot \frac{u_n^{\alpha_n}}{(\alpha_n)!} \quad (6.28) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(u_0) \left(\sum_{p_1 + \dots + p_k = n} u_{p_1} \dots u_{p_k} \right), \quad n \geq 1,
\end{aligned}$$

onde $|k| = k_1 + \dots + k_n$ e $|nk| = k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n$, e sendo $(\alpha_i)_{i=1, \dots, n}$ sequência decrescente de inteiros.

Em [20], [111] é apresentada a generalização das fórmulas de Adomian para casos multidimensionais, por exemplo no caso bidimensional tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(u_0, v_0) = f(u_0, v_0), \\ A_n(u_0, \dots, u_n; v_0, \dots, v_n) \\ = \sum_{p_1 + \dots + np_n + q_1 + \dots + nq_n = n} \frac{u_1^{p_1}}{p_1!} \dots \frac{u_n^{p_n}}{p_n!} \frac{v_1^{q_1}}{q_1!} \dots \frac{v_n^{q_n}}{q_n!} \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n + q_1 + \dots + q_n}}{\partial u^{p_1 + \dots + p_n} \partial v^{q_1 + \dots + q_n}} f(u_0, v_0). \end{array} \right. \quad (6.29)$$

6.2 Método da decomposição de Adomian considerando a resposta fundamental espacial

Considera-se o problema espacial de contorno, com formulação compatível ao caso de Timoshenko clássico e Timoshenko não local de Eringen, com a presença de termo não linear $\mathbf{Nw}(x)$

$$\mathbb{M}\mathbf{w}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{w}'(x) + \mathbb{K}\mathbf{w}(x) = \mathbf{Nw}(x). \quad (6.30)$$

Os coeficientes matriciais são aqueles da formulação adimensional, com parâmetros adimensionais descritos em (4.21)

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} -\Omega^2 e_n + \xi & 0 \\ 0 & -\eta\Omega^2 e_n + 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.31)$$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} \Omega^2 & 0 \\ 0 & \eta\Omega^2 - \xi \end{pmatrix},$$

sendo que para o modelo clássico de Timoshenko tem-se $e_n = 0$.

Diferente do método de Adomian introduzido na seção 6.1, aqui é considerada a alteração que as componentes da variável $\mathbf{w}(x)$ passam a ser expressas em série de potências infinitas convergentes [8], [67], [12]

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k} x^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_{2,k} x^k \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} c_{1,k} \\ c_{2,k} \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k x^k, \quad (6.32)$$

e o termo não linear \mathbf{Nw} expandido em termos dos polinômios de Adomian

$$\begin{aligned} \mathbf{Nw}(x) &= \begin{pmatrix} N_1(w(x), \phi(x)) \\ N_2(w(x), \phi(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k} x^k, \sum_{k=0}^{\infty} c_{2,k} x^k\right) \\ N_2\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k} x^k, \sum_{k=0}^{\infty} c_{2,k} x^k\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} x^k A_{1,k}(c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,k}; c_{2,0}, c_{2,1}, \dots, c_{2,k}) \\ \sum_{k=0}^{\infty} x^k A_{2,k}(c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,k}; c_{2,0}, c_{2,1}, \dots, c_{2,k}) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k), \end{aligned} \quad (6.33)$$

sendo

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) = \begin{bmatrix} A_{1,k} \\ A_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,k}(c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,k}; c_{2,0}, c_{2,1}, \dots, c_{2,k}) \\ A_{2,k}(c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,k}; c_{2,0}, c_{2,1}, \dots, c_{2,k}) \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Então

$$\mathbb{M}\mathbf{w}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{w}'(x) + \mathbb{K}\mathbf{w}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k). \quad (6.35)$$

Quando considera-se a metodologia padrão de Adomian

$$\mathbf{w}'' + \mathbf{K}_1\mathbf{w}'(x) + \mathbf{K}_2\mathbf{w}(x) = \mathbf{K}_3 \sum_{k=0}^{\infty} x^k \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k), \quad (6.36)$$

com $\mathbf{K}_1 = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}$, $\mathbf{K}_2 = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}$, $\mathbf{K}_3 = \mathbb{M}^{-1}$, resolve-se (6.36) para $\mathbf{w}(x)$, considerando o operador $L^{-1} = \int_0^x \int_0^x [\] dx dx$

$$\mathbf{w}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k x^k = \Psi(x) + L^{-1}[\mathbf{K}_1\mathbf{w}'(x) + \mathbf{K}_2\mathbf{w}(x) - \mathbf{K}_3 \sum_{k=0}^{\infty} x^k \mathbf{A}_k], \quad (6.37)$$

com $\Psi(x) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 x = \mathbf{w}(0) + \mathbf{w}'(0)x$, e então resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= \mathbf{w}(0), \\ \mathbf{c}_1 &= \mathbf{w}'(0), \\ \mathbf{c}_k &= \frac{-1}{k(k-1)}[(k-1)\mathbf{K}_1\mathbf{c}_{k-1} + \mathbf{K}_2\mathbf{c}_{k-2} - \mathbf{K}_3\mathbf{A}_{k-2}], \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6.38)$$

De outra maneira, propõe-se nesse trabalho considerar a solução de (6.35) como a soma da solução homogênea, dada em termos da base dinâmica, e convolução da resposta fundamental $\mathbf{h}(x)$ com o termo não linear expandido em função dos polinômios de Adomian exercendo o papel de termo não homogêneo ou forçante, obtém-se assim

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}_0^*(x)\mathbf{w}(0) + \mathbf{h}_1^*(x)\mathbf{w}'(0) + \int_0^x \mathbf{h}(x-\tau) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) d\tau. \quad (6.39)$$

Sendo $\{\mathbf{h}_0^*(x), \mathbf{h}_1^*(x)\}$ a denotada base dinâmica definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0^*(x) &= \mathbf{h}'(x)\mathbb{M} + \mathbf{h}(x)\mathbb{C}, \\ \mathbf{h}_1^*(x) &= \mathbf{h}(x)\mathbb{M}, \end{aligned} \quad (6.40)$$

onde $\mathbf{h}(x)$ é a resposta fundamental matricial de valor inicial, solução do PVI matricial

$$\begin{cases} \mathbb{M}\mathbf{h}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{h}'(x) + \mathbb{K}\mathbf{h}(x) = 0, \\ \mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \mathbb{M}\mathbf{h}'(0) = I. \end{cases} \quad (6.41)$$

Se for considerado o **caso linear** em que $\mathbf{Nw}(x) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{h}(x)$ é expandida em série de potências

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{h}_k}{k!} x^k, \quad (6.42)$$

tal que quando substituindo-se (6.42) em (6.41) resulta o problema de valor inicial em diferenças

$$\begin{cases} \mathbb{M}\mathbf{h}_{k+2} + \mathbb{C}\mathbf{h}_{k+1} + \mathbb{K}\mathbf{h}_k = 0, \\ \mathbf{h}_0 = 0, \quad \mathbb{M}\mathbf{h}_1 = I, \end{cases} \quad (6.43)$$

com soluções dadas recursivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0 &= 0, \\ \mathbf{h}_1 &= \mathbb{M}^{-1}, \\ \mathbf{h}_k &= -\mathbb{M}^{-1}(\mathbb{C}\mathbf{h}_{k-1} + \mathbb{K}\mathbf{h}_{k-2}), \quad k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (6.44)$$

Obtém-se

$$\mathbf{w}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k x^k = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{h}_{k+1}}{k!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{C} \right) x^k \right] \mathbf{w}(0) + \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{M} x^k \right] \mathbf{w}'(0). \quad (6.45)$$

E então coletando segundo as potências de x resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= \mathbf{w}(0), \\ \mathbf{c}_1 &= \mathbf{w}'(0), \\ \mathbf{c}_k &= \left[\frac{\mathbf{h}_{k+1}}{k!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{C} \right] \mathbf{c}_0 + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{M} \mathbf{c}_1, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6.46)$$

Agora, voltando para o **caso não linear**, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k x^k &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{h}_{k+1}}{k!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{C} \right) x^k \right] \mathbf{w}(0) + \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{M} x^k \right] \mathbf{w}'(0) \\ &+ \int_0^x \mathbf{h}(x - \tau) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k), \end{aligned} \quad (6.47)$$

e então objetiva-se resolver recursivamente a integral

$$\int_0^x \mathbf{h}(x - \tau) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) d\tau. \quad (6.48)$$

Observa-se que tanto a parte referente a solução quanto a parte relativa a integral fracionária são consideradas em termos da solução fundamental. Nas próximas etapas busca-se resolver a integral de convolução resultando um esquema iterativo em termos de potências de x .

Abordagem I

- Expansão em série de Taylor para $\mathbf{h}(x)$

Considera-se

$$\mathbf{h}(x - \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{h}_k}{k!} (x - \tau)^k. \quad (6.49)$$

Aplicando produto de Cauchy ¹, com $a_k = \frac{\mathbf{h}_k}{k!} (x - \tau)^k$, $b_k = \tau^k \mathbf{A}_k$, resulta

$$\int_0^x \mathbf{h}(x - \tau) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{\mathbf{h}_m}{m!} \mathbf{A}_{k-m} \int_0^x (x - \tau)^m \tau^{k-m} d\tau. \quad (6.50)$$

Sendo a integral

$$\int_0^x (x - \tau)^m \tau^{k-m} d\tau = \frac{m!(k-m)!}{(k+1)!} x^{k+1} \quad (6.51)$$

calculada utilizando o teorema da convolução ². Então

$$\int_0^x \mathbf{h}(x - \tau) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{A}_{k-m} \frac{(k-m)!}{(k+1)!} x^{k+1}. \quad (6.52)$$

Substituindo na expansão da solução espacial $\mathbf{w}(x)$ (6.39) resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{h}_{k+1}}{k!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{C} \right) x^k \right) \mathbf{w}(0) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{M} x^k \right) \mathbf{w}'(0) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{A}_{k-m} \frac{(k-m)!}{(k+1)!} x^{k+1}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

¹ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k a_m \cdot b_{k-m}$.

² $\mathcal{L}\left\{ \int_0^x f(x - \tau)g(\tau) d\tau \right\} = F(s)G(s)$.

Então coleta-se nas potências de x de forma a obter os termos \mathbf{c}_k da expansão

(6.32)

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= \mathbf{w}(0), \\ \mathbf{c}_1 &= \mathbf{w}'(0), \\ \mathbf{c}_k &= \left(\frac{\mathbf{h}_{k+1}}{k!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{M} \mathbf{c}_1 + \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^{k-1} ((k-1) - m)! \mathbf{h}_m \mathbf{A}_{(k-1)-m}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6.54)$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_2 &= \left(\frac{\mathbf{h}_3}{2!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{M} \mathbf{c}_1 + \frac{1}{2!} \mathbf{h}_1 \mathbf{A}_0, \\ \mathbf{c}_3 &= \left(\frac{\mathbf{h}_4}{3!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{M} \mathbf{c}_1 + \frac{1}{3!} (\mathbf{h}_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{h}_2 \mathbf{A}_0). \end{aligned} \quad (6.55)$$

Abordagem II

Nesse caso considera-se na expansão (6.47)

$$\int_0^x \mathbf{h}(x - \tau) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^x \mathbf{h}(x - \tau) \tau^k d\tau \right) \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k), \quad (6.56)$$

e busca-se determinar $U_k(x) = \int_0^x \mathbf{h}(x - \tau) \tau^k d\tau$, solução matricial do PVI

$$\begin{cases} \mathbb{M}U_k''(x) + \mathbb{C}U_k'(x) + \mathbb{K}U_k(x) = x^k I, \\ U_k(0) = 0, \\ U_k'(0) = 0. \end{cases} \quad (6.57)$$

Considera-se a expansão de $U_k(x)$

$$U_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_k^{(j)}(0)}{j!} x^j, \quad (6.58)$$

em (6.56), e (6.47) torna-se

$$\mathbf{w}(x) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{h}_{k+1}}{k!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{C} \right) x^k \right] \mathbf{w}(0) + \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{M} x^k \right] \mathbf{w}'(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_k^{(j)}(0) \mathbf{A}_k}{j!} \right) x^j. \quad (6.59)$$

Para determinar $U_k^{(j)}(0)$, substitui-se (6.58) em (6.57) e então obtém-se o PVI em diferenças

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\mathbb{M}U_k^{(j+2)}(0) + \mathbb{C}U_k^{(j+1)}(0) + \mathbb{K}U_k^{(j)}(0) \right) \frac{x^j}{j!} = x^k I \\ U_k^{(0)}(0) = U_k^{(1)}(0) = 0. \end{cases} \quad (6.60)$$

Primeiramente para $j = 0, 1, \dots, k-1$

$$\begin{cases} \mathbb{M}U_k^{(j+2)}(0) + \mathbb{C}U_k^{(j+1)}(0) + \mathbb{K}U_k^{(j)}(0) = 0, \\ U_k^{(0)}(0) = U_k^{(1)}(0) = 0, \end{cases} \quad (6.61)$$

então $U_k^{(0)}(0) = U_k^{(1)}(0) = \dots = U_k^{(k+1)}(0) = 0$. Agora, para $j = k$

$$\begin{cases} \mathbb{M}U_k^{(k+2)}(0) + \mathbb{C}U_k^{(k+1)}(0) + \mathbb{K}U_k^{(k)}(0) = k!I, \\ U_k^{(k)}(0) = U_k^{(k+1)}(0) = 0. \end{cases} \quad (6.62)$$

Então $U_k^{(k+2)}(0) = k!\mathbb{M}^{-1}$. E para $j = k+1, k+2, \dots$

$$\begin{cases} \mathbb{M}U_k^{(j+2)}(0) + \mathbb{C}U_k^{(j+1)}(0) + \mathbb{K}U_k^{(j)}(0) = 0, \\ U_k^{(k+1)}(0) = 0, \quad U_k^{(k+2)}(0) = k!\mathbb{M}^{-1}, \end{cases} \quad (6.63)$$

resulta

$$U_k^{(j+2)}(0) = -\mathbb{M}^{-1}(\mathbb{C}U_k^{(j+1)}(0) + \mathbb{K}U_k^{(j)}(0)), \quad (6.64)$$

assim

$$\begin{aligned} U_k^{(k+3)}(0) &= -\mathbb{M}^{-1}(\mathbb{C}U_k^{(k+2)}(0) + \mathbb{K}U_k^{(k+1)}(0)) = -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}k!\mathbb{M}^{-1}, \\ U_k^{(k+4)}(0) &= -\mathbb{M}^{-1}(\mathbb{C}U_k^{(k+3)}(0) + \mathbb{K}U_k^{(k+2)}(0)) = \mathbb{M}^{-1}k!(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{C} - \mathbb{K})\mathbb{M}^{-1}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

De forma sistemática tem-se

$U_k^{(j)}(0)$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$j = 0$	0	0	0	0	0
$j = 1$	0	0	0	0	0
$j = 2$	$0!M^{-1}$	0	0	0	0
$j = 3$	$-M^{-1}C0!M^{-1}$	$1!M^{-1}$	0	0	0
$j = 4$	*	$-M^{-1}C1!M^{-1}$	$2!M^{-1}$	0	0
$j = 5$	**	*	$-M^{-1}C2!M^{-1}$	$3!M^{-1}$	0
$j = 6$	***	**	*	$-M^{-1}3!M^{-1}$	$4!M^{-1}$

Tabela 6.1: Valores $U_k^{(j)}(0)$.

onde as entradas * são elementos não nulos calculados pela expressão (6.64).

De outra forma, denotando-se $V_j = U_k^{(j)}(0)$ em (6.60), resulta a equação em diferenças

$$\begin{cases} \mathbb{M}V_{j+2} + \mathbb{C}V_{j+1} + \mathbb{K}V_j = f_j, \\ V_0 = 0, \\ V_1 = 0, \end{cases} \quad (6.65)$$

com

$$f_j = \begin{cases} k!, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (6.66)$$

V_j é a resposta forçada de (6.65), logo é dada pela convolução com a solução fundamental, ou seja, $V_j = \mathbf{h} * f$, na sua forma discreta [26]

$$V_j = \sum_{m=0}^{j-1} \mathbf{h}_{j-m-1} f_m, \quad (6.67)$$

com \mathbf{h} resposta fundamental discreta definida por meio do PVI em diferenças

$$\begin{cases} \mathbb{M}\mathbf{h}_{k+2} + \mathbb{C}\mathbf{h}_{k+1} + \mathbb{K}\mathbf{h}_k = 0, \\ \mathbf{h}_0 = 0, \quad \mathbb{M}\mathbf{h}_1 = I. \end{cases} \quad (6.68)$$

Analogamente ao calculado através de (6.61), (6.62) e (6.63) obtém-se da convolução discreta (6.67)

$V_j = U_k^{(j)}(0)$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$j = 0$	0	0	0	0	0
$j = 1$	0	0	0	0	0
$j = 2$	$\mathbf{h}_1 0!$	0	0	0	0
$j = 3$	$\mathbf{h}_2 0!$	$\mathbf{h}_1 1!$	0	0	0
$j = 4$	$\mathbf{h}_3 0!$	$\mathbf{h}_2 1!$	$\mathbf{h}_1 2!$	0	0
$j = 5$	$\mathbf{h}_4 0!$	$\mathbf{h}_3 1!$	$\mathbf{h}_2 2!$	$\mathbf{h}_1 3!$	0
$j = 6$	$\mathbf{h}_5 0!$	$\mathbf{h}_4 1!$	$\mathbf{h}_3 2!$	$\mathbf{h}_2 3!$	$\mathbf{h}_1 4!$

Tabela 6.2: Valores de $V_j = U_k^{(j)}(0)$ em função da solução matricial $\mathbf{h}_j = \mathbf{h}^{(j)}(0)$.

Voltando para (6.59), coleta-se segundo as potências de x

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}_0 &= \mathbf{w}(0) + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^{(0)}(0) \mathbf{A}_k}_{=0} = \mathbf{w}(0), \\
 \mathbf{c}_1 &= \mathbf{w}'(0) + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^{(1)}(0) \mathbf{A}_k}_{=0} = \mathbf{w}'(0), \\
 \mathbf{c}_2 &= \left(\frac{\mathbf{h}_3}{2!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \left(\frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{M} \right) \mathbf{c}_1 + \frac{1}{2!} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^{(2)}(0) \mathbf{A}_k}_{=U_0^{(2)} \mathbf{A}_0} \\
 &= \left(\frac{\mathbf{h}_3}{2!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \left(\frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{M} \right) \mathbf{c}_1 + \frac{1}{2!} \mathbf{h}_1 \mathbf{A}_0,
 \end{aligned} \tag{6.69}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_3 &= \left(\frac{\mathbf{h}_4}{3!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \left(\frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{M} \right) \mathbf{c}_1 + \frac{1}{3!} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^{(3)}(0) \mathbf{A}_k}_{=U_0^{(3)} \mathbf{A}_0 + U_1^{(3)} \mathbf{A}_1} \\
&= \left(\frac{\mathbf{h}_4}{3!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \left(\frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{M} \right) \mathbf{c}_1 + \frac{1}{3!} (\mathbf{h}_2 \mathbf{A}_0 + \mathbf{h}_1 \mathbf{A}_1), \tag{6.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_4 &= \left(\frac{\mathbf{h}_5}{4!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_4}{4!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \frac{1}{4!} (\mathbf{h}_3 \mathbf{A}_0 + \mathbf{h}_2 \mathbf{A}_1 + 2! \mathbf{h}_1 \mathbf{A}_2), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

De modo geral para $k \geq 2$

$$\mathbf{c}_k = \left(\frac{\mathbf{h}_{k+1}}{k!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \left(\frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{M} \right) \mathbf{c}_1 + \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^{k-1} ((k-1) - m)! \mathbf{h}_m \mathbf{A}_{(k-1)-m}. \tag{6.71}$$

Salienta-se que esse coeficientes coincidem com aqueles calculados em (6.54) via abordagem I.

Abordagem III

- Considerando $\mathbf{h}(x)$ matricial em função de $d(x)$

Nesse caso considera-se na expansão (6.47)

$$\int_0^x \mathbf{h}(x - \tau) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^x \mathbf{h}(x - \tau) \tau^k d\tau \right) \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k). \tag{6.72}$$

Objetiva-se calcular

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^x \mathbf{h}(x - \tau) \tau^k d\tau \right) \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k). \tag{6.73}$$

Se o caso clássico adimensional de Timoshenko for considerado, tem-se

$$\mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} (\eta\Omega^2 - \xi) d(x) + d''(x) & \xi d'(x) \\ -\xi d'(x) & \Omega^2 d(x) + \xi d''(x) \end{pmatrix}, \tag{6.74}$$

onde

$$d(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{b_0 \epsilon \delta (\delta^2 + \epsilon^2)} \quad (6.75)$$

é solução do PVI

$$\begin{cases} b_0 d^{(iv)}(x) + b_2 d''(x) + b_4 d(x) = 0, \\ d(0) = d'(0) = d''(0) = 0, \quad b_0 d'''(0) = 1, \end{cases} \quad (6.76)$$

com

$$b_0 = \xi; \quad b_2 = \xi \eta \Omega^2 + \Omega^2; \quad b_4 = -\Omega^2 \xi + \Omega^4 \eta, \quad (6.77)$$

e ainda

$$\epsilon = \sqrt{\frac{-b_2}{2b_0} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_0}\right)^2 - \frac{b_4}{b_0}}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{b_2}{2b_0} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_0}\right)^2 - \frac{b_4}{b_0}}}. \quad (6.78)$$

Decompondo $\mathbf{h}(x)$ de modo que

$$\mathbf{h}(x - \tau) = \mathbf{H}_0 d(x - \tau) + \mathbf{H}_1 d'(x - \tau) + \mathbf{H}_2 d''(x - \tau), \quad (6.79)$$

com

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} \eta \Omega^2 - \xi & 0 \\ 0 & \Omega^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}, \quad (6.80)$$

então

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_0^x \mathbf{H}_0 d(x - \tau) \tau^k \mathbf{A}_k d\tau + \int_0^x \mathbf{H}_1 d'(x - \tau) \tau^k \mathbf{A}_k d\tau + \int_0^x \mathbf{H}_2 d''(x - \tau) \tau^k \mathbf{A}_k d\tau \right]. \quad (6.81)$$

Fazendo uso da regra de Leibniz³ obtém-se

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 \frac{d}{dx} + \mathbf{H}_2 \frac{d^2}{dx^2} \right) \int_0^x d(x - \tau) \tau^k d\tau \right] \mathbf{A}_k. \quad (6.82)$$

³ $\int_0^x d'(x - \tau) \tau^k d\tau = \frac{d}{dx} \left[\int_0^x d(x - \tau) \tau^k d\tau \right],$
 $\int_0^x d''(x - \tau) \tau^k d\tau = \frac{d^2}{dx^2} \left[\int_0^x d(x - \tau) \tau^k d\tau \right].$

Define-se

$$N_k(x) = \int_0^x d(x - \tau) \tau^k d\tau, \quad (6.83)$$

e decompondo $d(x)$ em exponenciais

$$d(x) = \frac{\epsilon i(e^{i\delta x} - e^{-i\delta x}) + \delta(e^{\epsilon x} - e^{-\epsilon x})}{2b_0(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta}, \quad (6.84)$$

tem-se

$$N_k(x) = \frac{1}{2b_0(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta} \int_0^x [\epsilon i(e^{i\delta x} - e^{-i\delta x}) + \delta(e^{\epsilon x} - e^{-\epsilon x})] \tau^k d\tau. \quad (6.85)$$

Utilizando o fato que $\int_0^x e^{a(x-\tau)} \tau^k d\tau$ é solução do PVI

$$\begin{cases} u' - au = x^k, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (6.86)$$

e considerando a decomposição da resposta forçada é possível obter (Apêndice B)

$$\int_0^x e^{a(x-\tau)} \tau^k d\tau = \frac{k!e^{ax}}{a^{k+1}} + \left(-\frac{x^k}{a} + \sum_{j=1}^k \frac{k!}{(k-j)!a^{j+1}} x^{k-j} \right), \quad (6.87)$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \int_0^x (e^{a(x-\tau)} - e^{-a(x-\tau)}) \tau^k d\tau &= \frac{k!}{a^{k+1}} (e^{ax} + (-1)^k e^{-ax}) - \\ &\sum_{j=1}^k \frac{k!}{a^{j+1}} \frac{x^{k-j}}{(k-j)!} (1 + (-1)^j). \end{aligned} \quad (6.88)$$

Utilizando (6.88) em (6.85) resulta

$$\begin{aligned} N_k(x) &= \frac{-x^k}{\epsilon^2 \delta^2 \xi} + \frac{-k!}{(\epsilon^2 + \delta^2) \xi \epsilon^2 \delta^2} \cdot \left(\sum_{j=0}^k \frac{x^{k-j}}{2(k-j)!} (1 + (-1)^j) \left(\frac{\epsilon^{j+2} + ij \delta^{j+2}}{ij \delta^j \epsilon^j} \right) \right) \\ &+ \frac{k!}{(\epsilon^2 + \delta^2) \xi \epsilon^{k+2} \delta^{k+2}} \begin{cases} \epsilon^{k+2} (-1)^j \cos(\delta x) + \delta^{k+2} \cosh(\epsilon x); & k = 2j, \\ \epsilon^{k+2} (-1)^j \sin(\delta x) + \delta^{k+2} \sinh(\epsilon x); & k = 2j + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.89)$$

Tem-se $N_k(x) = \int_0^x d(x - \tau) \tau^k d\tau$ para alguns k 's

$$\begin{aligned}
N_0(x) &= \frac{\delta^2 \cosh(\epsilon x) + \epsilon^2 \cos(\delta x)}{\delta^2 \epsilon^2 (\epsilon^2 + \delta^2) \xi} - \frac{1}{\delta^2 \epsilon^2 \xi}, \\
N_1(x) &= \frac{\delta^3 \cosh(\epsilon x) + \epsilon^3 \cos(\delta x)}{\delta^3 \epsilon^3 (\epsilon^2 + \delta^2) \xi} - \frac{x}{\delta^2 \epsilon^2 \xi}, \\
N_2(x) &= \frac{2(\delta^4 \cosh(\epsilon x) - \epsilon^4 \cos(\delta x))}{\delta^4 \epsilon^4 (\epsilon^2 + \delta^2) \xi} - \frac{x^2}{\delta^2 \epsilon^2 \xi} - \frac{(2\delta^2 - 2\epsilon^2)}{\delta^4 \epsilon^4 \xi}, \\
N_3(x) &= \frac{6(\delta^5 \sinh(\epsilon x) - \epsilon^5 \sin(\delta x))}{\delta^5 \epsilon^5 (\epsilon^2 + \delta^2) \xi} - \frac{x^3}{\delta^2 \epsilon^2 \xi} - \frac{(6\delta^2 - 6\epsilon^2)x}{\delta^4 \epsilon^4 \xi}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Voltando para (6.82)

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{H}_0 N_k(x) + \mathbf{H}_1 N'_k(x) + \mathbf{H}_2 N''_k(x)) A_k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{L}_k(x) A_k, \tag{6.91}$$

com

$$\mathbf{L}_k(x) = \mathbf{H}_0 J_k(x) + \mathbf{H}_1 (J_k)'(x) + \mathbf{H}_2 (J_k)''(x), \tag{6.92}$$

então

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{h}_{k+1}}{k!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{C} \right) x^k \right) \mathbf{w}(0) + \\
&+ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{M} x^k \right) \mathbf{w}'(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{L}_k(x) A_k.
\end{aligned} \tag{6.93}$$

Coletando nas potências de x

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_0 &= \mathbf{w}(0) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{L}_k \mathbf{A}_k \right) \Big|_{x=0} = \mathbf{w}(0), \\
\mathbf{c}_1 &= \mathbf{w}'(0) + \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{L}_k \mathbf{A}_k \right) \Big|_{x=0} = \mathbf{w}'(0), \\
\mathbf{c}_2 &= \left(\frac{\mathbf{h}_3}{2!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{C} \right) \mathbf{w}(0) + \frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{M} \mathbf{w}'(0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{L}_k \mathbf{A}_k \right) \Big|_{x=0} \\
&= \left(\frac{\mathbf{h}_3}{2!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{M} \mathbf{c}_1 + \frac{1}{2! \xi} \mathbf{H}_2 \mathbf{A}_0, \\
\mathbf{c}_3 &= \left(\frac{\mathbf{h}_4}{3!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{C} \right) \mathbf{w}(0) + \frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{M} \mathbf{w}'(0) + \frac{1}{2!} \frac{d^3}{dx^3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{L}_k \mathbf{A}_k \right) \Big|_{x=0} \\
&= \left(\frac{\mathbf{h}_4}{3!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{M} \mathbf{c}_1 + \frac{1}{3! \xi} (\mathbf{H}_1 \mathbf{A}_0 + \mathbf{H}_2 \mathbf{A}_1), \\
&\vdots \\
\mathbf{c}_k &= \left(\frac{\mathbf{h}_{k+1}}{k!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \left(\frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{M} \right) \mathbf{c}_1 + \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{L}_k \mathbf{A}_k \right) \Big|_{x=0}.
\end{aligned} \tag{6.94}$$

Visto que pela expressão anterior as \mathbf{c}'_k s tornam-se de difícil determinação, tanto por envolver derivação quanto por envolver somatórios infinitos. Alternativamente, busca-se resolver

$$N_k(x) = \int_0^x d(x - \tau) \tau^k d\tau, \tag{6.95}$$

utilizando o fato que $N_k(x)$ é resposta forçada do PVI

$$\begin{cases} b_0 N_k^{(iv)}(x) + b_2 N_k''(x) + b_4 N_k(x) = x^k, \\ N_k(0) = N_k'(0) = N_k''(0) = 0, \quad N_k'''(0) = 0. \end{cases} \tag{6.96}$$

Busca-se $N_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{N_k^{(j)}(0) x^j}{j!}$ que quando substituído em (6.96) resulta o PVI

em diferenças

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \left(b_0 N_k^{(j+4)}(0) + b_2 N_k^{(j+2)}(0) + b_4 N_k^{(j)}(0) \right) \frac{x^j}{j!} = x^k \\ N_k^{(0)}(0) = N_k^{(1)}(0) = N_k^{(2)}(0) = N_k^{(3)}(0) = 0. \end{cases} \tag{6.97}$$

Fazendo $N_j = N_k^{(j)}(0)$ em (6.97), resulta a equação em diferenças

$$\begin{cases} b_0 N_{j+4} + b_2 N_{j+2} + b_4 N_j = f_j, \\ N_0 = N_1 = N_2 = N_3 = 0, \end{cases} \quad (6.98)$$

com

$$f_j = \begin{cases} k!, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (6.99)$$

Similarmente a (6.65)-(6.67), tem-se

$$N_j = \sum_{l=0}^{j-1} d_{j-l-1} f_l, \quad (6.100)$$

onde as funções $d_j = d^{(j)}(0)$, são relativas ao PVI (6.76), e dadas discretamente

$$d_0 = d_1 = d_2 = 0, \quad d_3 = \frac{1}{b_0}, \quad (6.101)$$

$$d_{j+4} = -\frac{1}{b_0} [b_2 d_{j+2} + b_4 d_j], \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Expandindo os primeiros termos de (6.100)

$$\begin{aligned} N_0 &= N_1 = N_2 = N_3 = 0, \\ N_4 &= \sum_{l=0}^3 d_{4-l-1} f_l = d_3 f_0 + d_2 f_1 + d_1 f_2 + d_0 f_3 = d_3 f_0, \\ N_5 &= \sum_{l=0}^4 d_{5-l-1} f_l = d_4 f_0 + d_3 f_1 + d_2 f_2 + d_1 f_3 + d_0 f_4 = d_4 f_0 + d_3 f_1, \\ N_6 &= \sum_{l=0}^5 d_{6-l-1} f_l = d_5 f_0 + d_4 f_1 + d_3 f_2, \\ N_7 &= \sum_{l=0}^6 d_{6-l-1} f_l = d_6 f_0 + d_5 f_1 + d_4 f_2 + d_3 f_3, \end{aligned} \quad (6.102)$$

e assim sucessivamente, utilizando a simplificação das condições iniciais d_j , $j = 0, 1, 3$. As $N_j = N_k^{(j)}(0)$ podem ser distribuídas em forma de tabela, analogamente ao caso matricial da Tabela 6.2

$N_j = N_k^{(j)}(0)$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
$j = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j = 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j = 2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j = 3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j = 4$	$d_3 0!$	0	0	0	0	0	0	0	0
$j = 5$	$d_4 0!$	$d_3 1!$	0	0	0	0	0	0	0
$j = 6$	$d_5 0!$	$d_4 1!$	$d_3 2!$	0	0	0	0	0	0
$j = 7$	$d_6 0!$	$d_5 1!$	$d_4 2!$	$d_3 1!$	0	0	0	0	0
$j = 8$	$d_7 0!$	$d_6 1!$	$d_5 2!$	$d_4 1!$	$d_3 3!$	0	0	0	0

Tabela 6.3: Valores de $N_j = N_k^{(j)}(0)$ em função de $d_j = d^{(j)}(0)$.

Voltando para (6.82)

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 \frac{d}{dx} + \mathbf{H}_2 \frac{d^2}{dx^2}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{N_k^{(j)}(0) x^j}{j!} \right] \mathbf{A}_k, \quad (6.103)$$

com

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 \frac{d}{dx} + \mathbf{H}_2 \frac{d^2}{dx^2}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{N_k^{(j)}(0) x^j}{j!} \right] \mathbf{A}_k = \\ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left[\mathbf{H}_0 N_k^{(j)}(0) + \mathbf{H}_1 N_k^{(j+1)}(0) + N_k^{(j+2)} \right] \frac{x^j}{j!} \right] \mathbf{A}_k. \end{aligned} \quad (6.104)$$

Na expansão geral de $\mathbf{w}(x)$ resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k x^k &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{h}_{k+1}}{k!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{C} \right) x^k \right] \mathbf{w}(0) + \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{M} x^k \right] \mathbf{w}'(0) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\mathbf{H}_0 N_k^{(j)}(0) + \mathbf{H}_1 N_k^{(j+1)}(0) + N_k^{(j+2)} \right] \frac{x^j}{j!}. \end{aligned} \quad (6.105)$$

E analogamente aos casos anteriores coleta-se segundo as potências de x

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= \mathbf{w}(0) + \underbrace{\frac{1}{0!} \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{H}_0 N_k^{(0)}(0) + \mathbf{H}_1 N_k^{(1)}(0) + \mathbf{H}_2 N_k^{(2)}(0)] \mathbf{A}_k}_{=0} = \mathbf{w}(0), \\ \mathbf{c}_1 &= \mathbf{w}'(0) + \underbrace{\frac{1}{1!} \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{H}_0 N_k^{(1)}(0) + \mathbf{H}_1 N_k^{(2)}(0) + \mathbf{H}_2 N_k^{(3)}(0)] \mathbf{A}_k}_{=0} = \mathbf{w}'(0), \end{aligned} \tag{6.106}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_2 &= \left(\frac{\mathbf{h}_3}{2!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \left(\frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{M} \right) \mathbf{c}_1 + \underbrace{\frac{1}{2!} \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{H}_0 N_k^{(2)}(0) + \mathbf{H}_1 N_k^{(3)}(0) + \mathbf{H}_2 N_k^{(4)}(0)] \mathbf{A}_k}_{d_3 \mathbf{H}_2 \mathbf{A}_0}, \\ &= \left(\frac{\mathbf{h}_3}{2!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \left(\frac{\mathbf{h}_2}{2!} \mathbb{M} \right) \mathbf{c}_1 + \frac{1}{2!} \mathbf{h}_1 \mathbf{A}_0, \\ \mathbf{c}_3 &= \left(\frac{\mathbf{h}_4}{3!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \left(\frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{M} \right) \mathbf{c}_1 + \underbrace{\frac{1}{3!} \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{H}_0 N_k^{(3)}(0) + \mathbf{H}_1 N_k^{(4)}(0) + \mathbf{H}_2 N_k^{(5)}(0)] \mathbf{A}_k}_{d_3 \mathbf{H}_1 \mathbf{A}_0 + d_3 \mathbf{H}_2 \mathbf{A}_1}, \\ &= \left(\frac{\mathbf{h}_4}{3!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \left(\frac{\mathbf{h}_3}{3!} \mathbb{M} \right) \mathbf{c}_1 + \frac{1}{3!} (\mathbf{h}_2 \mathbf{A}_0 + \mathbf{h}_1 \mathbf{A}_1), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.107}$$

Foi utilizado em \mathbf{c}_2 , $d_3 \mathbf{H}_2 = \mathbf{h}_1$, e em \mathbf{c}_3 , $d_3 \mathbf{H}_1 = \mathbf{h}_2$. Espera-se assim que os coeficientes c_k definidos em (6.107) sejam os mesmos que aqueles dados em (6.69).

6.3 Método de Adomian no caso linear

Nessa seção o método de Adomian, descrito na seção anterior, é aplicado ao modelo de Timoshenko clássico, desconsiderando a presença do termo não linear. A mesma formulação é estendida para o caso do modelo de Timoshenko gradiente de deformação. De acordo com a formulação introduzida na seção 6.1 para o modelo de Timoshenko clássico

considera-se $L = \frac{d^2}{dx^2}$ e para o modelo de Timoshenko gradiente de deformação $L = \frac{d^4}{dx^4}$. Em ambos os casos, sem a presença de não linearidade, o método nada mais é que a aplicação de um método de séries de potência à um problema de contorno, caracterizando-se como um método de Cauchy.

Modelo de Timoshenko clássico

As equações governantes referentes ao modelo clássico de Timoshenko são dadas em termos dos deslocamentos $w(t, x)$ e $\phi(t, x)$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0, \quad (6.108)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) - EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0.$$

Condições de contorno genéricas incluindo molas translacionais e rotacionais a esquerda (k_{TL} e k_{TR}), e molas rotacionais e translacionais e massa atarraxada a direita (k_{TR} , k_{RR} , M , J_M), são escritas, de acordo com [67], em $x = 0$

$$\begin{aligned} [\kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) - k_{TL} w]_{x=0} &= 0, \\ [EI \frac{\partial \phi}{\partial x} - k_{RL} \phi]_{x=0} &= 0, \end{aligned} \quad (6.109)$$

e em $x = L$

$$\begin{aligned} [\kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + k_{TR} w + M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Me \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}]_{x=L} &= 0, \\ [EI \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_{RR} \phi + (J_M + Me^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + Me \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}]_{x=L} &= 0. \end{aligned} \quad (6.110)$$

Supondo vibrações harmônicas de frequência ω , obtém-se

$$\begin{aligned} \kappa GA \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \frac{d\phi(x)}{dx} \right) + \rho A \omega^2 w(x) &= 0, \\ EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \kappa GA \left(\frac{dw(x)}{dx} - \phi \right) + \rho I \omega^2 \phi(x) &= 0. \end{aligned} \quad (6.111)$$

E as condições de contorno tornam-se

$$\begin{aligned}
& \left[\kappa GA \frac{dw(x)}{dx} - k_{TL}w(x) - \kappa GA\phi(x) \right] |_{x=0} = 0, \\
& \left[EI \frac{d\phi(x)}{dx} k_{RL}\phi(x) \right] |_{x=0} = 0, \\
& \left[\kappa GA \frac{dw(x)}{dx} + (k_{TR} - M\omega^2)w(x) - (\kappa GA + Me\omega^2)\phi(x) \right] |_{x=L} = 0, \\
& \left[EI \frac{d\phi(x)}{dx} - Me\omega^2w(x) + (k_{RR} - (J_M + Me^2)\omega^2)\phi(x) \right] |_{x=L} = 0.
\end{aligned} \tag{6.112}$$

Considerando a seguinte adimensionalização das variáveis e parâmetros

$$\begin{aligned}
X &= \frac{x}{L}, \quad W(X) = \frac{w(x)}{L}, \quad \Phi(X) = \phi(x), \\
\Omega^2 &= \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}, \quad \eta = \frac{I}{AL^2}; \quad \xi = \frac{\kappa GAL^2}{EI} = \frac{\kappa}{2\eta(1+\nu)}, \\
K_{TL} &= \frac{k_{TL}L^3}{EI}, \quad K_{TR} = \frac{k_{TR}L^3}{EI}, \quad K_{RL} = \frac{k_{RL}L}{EI}, \\
\mu &= \frac{M}{M_B} = \frac{M}{\rho AL}, \quad \delta = \frac{e}{L}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{J_M}{ML^2}},
\end{aligned} \tag{6.113}$$

resultas as equações adimensionais

$$\begin{aligned}
& \xi \left(\frac{d^2W(X)}{dX^2} - \frac{d\Phi(X)}{dX} \right) + \Omega^2 W(X) = 0, \\
& \frac{d^2\Phi(X)}{dX^2} + \xi \left(\frac{dW(X)}{dX} - \Phi(X) \right) + \eta\Omega^2 \Phi(X) = 0,
\end{aligned} \tag{6.114}$$

com condições de contorno correspondentes

$$\begin{aligned}
& \left[\xi \frac{dW(X)}{dX} - K_{TL}W(X) - \xi\Phi(X) \right] |_{X=0} = 0, \\
& \left[\frac{d\Phi(X)}{dX} - K_{RL}\Phi(X) \right] |_{X=0} = 0, \\
& \left[\xi \frac{dW(X)}{dX} + (K_{TR} - \mu\Omega^2)W(X) - [\xi + \delta\mu\Omega^2]\Phi(X) \right] |_{X=1} = 0, \\
& \left[\frac{d\Phi(X)}{dX} - \delta\mu\Omega^2W(X) + [K_{RR} - \mu(\gamma^2 + \delta^2)]\Phi(X) \right] |_{X=1} = 0.
\end{aligned} \tag{6.115}$$

Escrevendo as equações (6.114) em uma forma matricial, compatível a equação dada em (6.30), com

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e } \mathbb{K} = \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 \\ 0 & -\xi + \eta\Omega^2 \end{bmatrix}. \quad (6.116)$$

Expandindo as componentes do vetor $\mathbf{w}(X)$ em séries convergentes

$$\mathbf{w}(X) = \begin{bmatrix} W(X) \\ \Phi(X) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k X^k = \Psi(X) + \sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{c}_k X^k, \quad (6.117)$$

De acordo com (6.36)-(6.38), desconsiderando o termo não linear

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} W(0) \\ \Phi(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{w}'(0) = \begin{bmatrix} W'(0) \\ \Phi'(0) \end{bmatrix}, \quad (6.118)$$

$$\mathbf{c}_k = \frac{-1}{k(k-1)} [(k-1)\mathbf{K}_1 \mathbf{c}_{k-1} + \mathbf{K}_2 \mathbf{c}_{k-2}], \quad k = 2, 3, \dots$$

Na prática a série (6.117) é truncada, de modo a obter-se uma aproximação com n termos

$$\varphi^{[n]}(X) = \begin{bmatrix} W^{[n]}(X) \\ \Phi^{[n]}(X) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{c}_k X^k, \quad (6.119)$$

tal que

$$\mathbf{w}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{[n]}(X). \quad (6.120)$$

Visto que as condições de contorno em $X = 0$ determinam parcialmente as componentes \mathbf{c}_0 e \mathbf{c}_1 , de acordo com [67], define-se $\mathbf{c}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{a}$. Das condições de contorno em $X = 0$ conhecidas, é possível determinar \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 , tais que $\mathbf{c}_0 = \mathbf{P}_0(\Omega) \mathbf{a}$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{P}_1(\Omega) \mathbf{a}$, com $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2]^T$. E recursivamente obtém-se

$$\mathbf{P}_k = \frac{-1}{k(k-1)} [(k-1)\mathbf{K}_1 \mathbf{P}_{k-1}(\Omega) + \mathbf{K}_2 \mathbf{P}_{k-2}(\Omega)], \quad k = 2, 3, \dots \quad (6.121)$$

Substituindo-se

$$\varphi^{[n]}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\Omega) \mathbf{a} X^k \quad (6.122)$$

nas condições de contorno em $X = 1$, obtém-se o sistema

$$\mathbf{F}^{[n]}(\Omega)\mathbf{a} = 0. \quad (6.123)$$

Para \mathbf{a} não nulo decorre a equação de frequência

$$|\mathbf{F}^{[n]}(\Omega)| = 0. \quad (6.124)$$

O termo n da aproximação pode ser decidido seguindo a desigualdade [67], [78], [91]

$$|\Omega_i^{[n]} - \Omega_i^{[n-1]}| \leq \varepsilon. \quad (6.125)$$

O i -ésimo modo de vibração associado a i -ésima frequência Ω_i

$$\varphi_i^{[n]}(X) = \begin{bmatrix} W_i^{[n]}(X) \\ \Phi_i^{[n]}(X) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{c}_k^{[i]} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}_k^{[i]} \mathbf{a} X^k, \quad (6.126)$$

o qual quando normalizado torna-se

$$\bar{\varphi}_i^{[n]}(X) = \frac{\varphi_i^{[n]}(X)}{\sqrt{\int_0^1 [\varphi_i^{[n]}(X)]^2 dX}}. \quad (6.127)$$

Caso viga fixa-livre

Nesse caso, as condições em $X = 0$ são $W(0) = 0$ e $\Phi(0) = 0$, então

$$\mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad (6.128)$$

$$\mathbf{c}_k(a_1, a_2) = \frac{-1}{k(k-1)} [(k-1)\mathbf{K}_1 \mathbf{c}_{k-1} + \mathbf{K}_2 \mathbf{c}_{k-2}], \quad k = 2, 3, \dots$$

As condições em $X = 1$ são $W'(1) - \Phi(1) = 0$ e $\Phi'(1) = 0$, matricialmente escritas como

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(1) \\ \mathbf{w}'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.129)$$

com $\mathbf{w}(1)$ e $\mathbf{w}'(1)$ aproximados de acordo com (6.122)

$$\mathbf{w}(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{c}_k, \quad \mathbf{w}'(1) = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \mathbf{c}_{k+1}, \quad (6.130)$$

e dados em função de Ω e linearmente em função de a_1 e a_2

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(1) &= \phi_{11}(\Omega)a_1 + \phi_{12}(\Omega)a_2, \\ \mathbf{w}'(1) &= \phi_{21}(\Omega)a_1 + \phi_{22}(\Omega)a_2. \end{aligned} \quad (6.131)$$

Em (6.129) resulta o sistema

$$F^{[n]}(\Omega)\mathbf{a} = 0, \quad (6.132)$$

com $F^{[n]}(\Omega) = \mathbf{B}\Phi$, onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11}(\Omega) & \phi_{12}(\Omega) \\ \phi_{21}(\Omega) & \phi_{22}(\Omega) \end{bmatrix}. \quad (6.133)$$

As frequências naturais adimensionais $\Omega_i^{[n]}$ são então obtidas resolvendo-se a equação de frequência dada por

$$|F^{[n]}(\Omega)| = 0. \quad (6.134)$$

E os modos de vibração são calculados pela expressão (6.126).

Caso viga biapoçada

Esse caso é resolvido de maneira análoga ao caso anterior, com condições em $X = 0$ sendo $W(0) = 0$ e $\Phi'(0) = 0$, tem-se

$$\mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_k(a_1, a_2) = \frac{-1}{k(k-1)} [(k-1)\mathbf{K}_1\mathbf{c}_{k-1}(\Omega) + \mathbf{K}_2\mathbf{c}_{k-2}(\Omega)], \quad k = 2, 3, \dots$$
(6.135)

E com as condições em $X = 1$ $W(1) = 0$ e $\Phi'(1) = 0$ resulta a matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
(6.136)

e conseqüentemente a equação de frequência

$$|F^{[n]}(\Omega)| = 0,$$
(6.137)

com $F^{[n]}(\Omega) = \mathbf{B}\Phi$, e \mathbf{B} descrita em (6.136) e Φ analogamente ao caso anterior (6.133).

Resultados considerando as formulações dessa seção são apresentados no final do capítulo, comparativamente aos obtidos no caso em que se considera um termo de não linearidade cúbica.

Modelo de Timoshenko não local de Eringen

Esse caso é idêntico ao caso anterior, com a diferença que a matriz \mathbb{M} é a descrita em (6.31), e as condições de contorno são as relativas ao momento fletor e cisalhamento referentes ao modelo não local de Eringen, descritos no capítulo 2 na forma adimensional

$$M = \phi' - e_n\Omega^2(\eta\phi' - w),$$

$$S = \xi(w' - \phi) - e_n\Omega^2w'.$$
(6.138)

Para viga biapoçada, deslocamento e momento são nulos, então as condições de contorno na sua forma adimensional são

$$\begin{aligned} W(0), \quad (1 - e_n \Omega^2 \eta) \phi'(0) + e_n \Omega^2 W(0) &= 0, \\ W(1), \quad (1 - e_n \Omega^2 \eta) \phi'(1) + e_n \Omega^2 W(1) &= 0, \end{aligned} \tag{6.139}$$

Para viga fixa-livre tem-se $w(0) = 0$ e $\tilde{\phi}(0) = 0$ e em $X = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\xi & \xi - e_n \Omega^2 & 0 \\ e_n \Omega^2 & 0 & 0 & 1 - e_n \Omega^2 \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}(1) \\ \tilde{\phi}(1) \\ \tilde{w}'(1) \\ \tilde{\phi}'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.140}$$

Resultados considerando as formulações dessa seção são apresentados na Tabela 7.3 do capítulo 7, e referem-se a aplicação ao modelo de Timoshenko não local de Eringen, com resultados satisfatoriamente comparados com aqueles obtidos quando se utiliza a solução fundamental, para os casos de viga fixa-livre e viga biapoçada.

Modelo de Timoshenko gradiente de deformação

Considerando a equação matricial adimensional dada em (4.43) multiplicada a esquerda por $\begin{bmatrix} -\xi_2 & 0 \\ 0 & -\xi_5 \end{bmatrix}^{-1}$ obtém-se a equação diferencial matricial

$$\mathbf{W}^{(iv)}(X) + \mathbf{K}_1 \mathbf{W}'''(X) + \mathbf{K}_2 \mathbf{W}''(X) + \mathbf{K}_3 \mathbf{W}'(X) + \mathbf{K}_4 \mathbf{W}(X) = 0. \tag{6.141}$$

A mesma formulação do caso clássico é agora generalizada para o caso $L = \frac{d^4}{dX^4}$,
tem-se então

$$\mathbf{w}(X) = \begin{bmatrix} W(X) \\ \Phi(X) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k X^k = \Psi(X) + \sum_{k=4}^{\infty} \mathbf{c}_k X^k \quad (6.142)$$

$$\Psi(X) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 X + \mathbf{c}_2 \frac{X^2}{2!} + \mathbf{c}_3 \frac{X^3}{3!},$$

sendo

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} W(0) \\ \Phi(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{w}'(0) = \begin{bmatrix} W'(0) \\ \Phi'(0) \end{bmatrix}, \quad (6.143)$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{w}''(0) = \begin{bmatrix} W''(0) \\ \Phi''(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \mathbf{w}'''(0) = \begin{bmatrix} W'''(0) \\ \Phi'''(0) \end{bmatrix},$$

e para $k = 4, 5, 6, \dots$

$$\mathbf{c}_k = \frac{-[(k-1)(k-2)(k-3)\mathbf{K}_1 \mathbf{c}_{k-1} + (k-2)(k-3)\mathbf{K}_2 \mathbf{c}_{k-2} + (k-3)\mathbf{K}_3 \mathbf{c}_{k-3} + \mathbf{K}_4 \mathbf{c}_{k-4}]}{k(k-1)(k-2)(k-3)}. \quad (6.144)$$

Das condições em $X = 0$, são obtidos parcialmente os quatro primeiros \mathbf{c}'_k s, visto que são conhecidas apenas quatro condições de contorno em $X = 0$, os \mathbf{c}'_k s serão definidos em função de incógnitas a_1, a_2, a_3 e a_4 .

Viga biapoada

Nesse caso a condição de contorno apoiada na extremidade $X = 0$ é dada por

$$W(0) = \Phi'(0) = W''(0) = \Phi'''(0) = 0, \quad (6.145)$$

então

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{w}'(0) = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.146)$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{w}''(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \mathbf{w}'''(0) = \begin{bmatrix} a_4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

e para $k = 4, 5, 6 \dots$

$$\mathbf{c}_k(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{-[(k-1)(k-2)(k-3)\mathbf{K}_1\mathbf{c}_{k-1} + (k-2)(k-3)\mathbf{K}_2\mathbf{c}_{k-2} + (k-3)\mathbf{K}_3\mathbf{c}_{k-3} + \mathbf{K}_4\mathbf{c}_{k-4}]}{k(k-1)(k-2)(k-3)}. \quad (6.147)$$

Agora, utilizando as condições de contorno em $X = 1$, dadas na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(1) \\ \mathbf{w}'(1) \\ \mathbf{w}''(1) \\ \mathbf{w}'''(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.148)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(1) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{c}_k = \phi_{11}(\Omega)a_1 + \phi_{12}(\Omega)a_2 + \phi_{13}(\Omega)a_3 + \phi_{14}(\Omega)a_4, \\ \mathbf{w}'(1) &= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\mathbf{c}_{k+1} = \phi_{21}(\Omega)a_1 + \phi_{22}(\Omega)a_2 + \phi_{23}(\Omega)a_3 + \phi_{24}(\Omega)a_4, \\ \mathbf{w}''(1) &= \sum_{k=0}^{n-3} (k+2)(k+1)\mathbf{c}_{k+2} = \phi_{31}(\Omega)a_1 + \phi_{32}(\Omega)a_2 + \phi_{33}(\Omega)a_3 + \phi_{34}(\Omega)a_4, \\ \mathbf{w}'''(1) &= \sum_{k=0}^{n-4} (k+3)(k+2)(k+1)\mathbf{c}_{k+3} = \phi_{41}(\Omega)a_1 + \phi_{42}(\Omega)a_2 + \phi_{43}(\Omega)a_3 + \phi_{44}(\Omega)a_4, \end{aligned} \quad (6.149)$$

resulta o sistema $F^{[n]}(\Omega)\mathbf{a} = 0$, $F^{[n]}(\Omega) = \mathbf{B}\Phi(\Omega)$, $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]$, com

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11}(\Omega) & \phi_{12}(\Omega) & \phi_{13}(\Omega) & \phi_{14}(\Omega) \\ \phi_{21}(\Omega) & \phi_{22}(\Omega) & \phi_{23}(\Omega) & \phi_{24}(\Omega) \\ \phi_{31}(\Omega) & \phi_{32}(\Omega) & \phi_{33}(\Omega) & \phi_{34}(\Omega) \\ \phi_{41}(\Omega) & \phi_{42}(\Omega) & \phi_{43}(\Omega) & \phi_{44}(\Omega) \end{bmatrix}. \quad (6.150)$$

e tem-se equação de frequência dada por $\det(F^{[n]}(\Omega)) = 0$.

Resultados considerando as formulações dessa seção são apresentados nas Tabelas 7.4, 7.5, 7.6 (casos dimensionais) e Tabelas 7.7 e 7.8 (casos adimensionais) do capítulo 7, e referem-se a aplicação ao modelo de Timoshenko gradiente de deformação, com resultados satisfatoriamente comparados com aqueles obtidos considerando o método espectral para o caso de viga biapoiada.

6.4 Método de Adomian considerando não linearidade cúbica

A formulação do caso não linear será similar ao caso linear apresentado na seção anterior, com a diferença que resulta em um sistema não linear. Nesse caso considera-se em (6.30) a não linearidade cúbica

$$\mathbf{Nw}(x) = \begin{pmatrix} \alpha(w(x))^3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.151)$$

Visto que $\mathbf{Nw}(x)$ só depende de $w(x)$, tem-se de acordo com (6.33) $N_1 w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k A_{1,k}(c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,k})$ e utilizando as fórmulas apresentadas na seção 6.1

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) = \begin{bmatrix} A_{1,k} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,k}(c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,k}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.152)$$

$$\begin{aligned} A_{1,0} &= c_{1,0}^3, \\ A_{1,1} &= 3c_{1,0}^2 c_{1,1}, \\ A_{1,2} &= 3c_{1,0} c_{1,1}^2 + 3c_{1,0}^2 c_{1,2}, \\ A_{1,3} &= c_{1,1}^3 + 6c_{1,0} c_{1,1} c_{1,2} + 3c_{1,0}^2 c_{1,3}, \\ A_{1,4} &= 3c_{1,1}^2 c_{1,2} + 3c_{1,0} c_{1,2}^2 + 3c_{1,0}^2 c_{1,4}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.153)$$

Considera-se $\mathbf{w}(x)$ dado em (6.53) e a recorrência dos coeficientes \mathbf{c}_k descrita em (6.54). Os termos \mathbf{c}_k são determinados parcialmente pelas condições de contorno em $x = 0$,

e tem sua determinação completa sujeita a resolução de um sistema não linear quando são consideradas condições de contorno em $x = 1$.

No caso do modelo de Timoshenko clássico, para condição de contorno em $x = 0$ tem-se

$$\mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.154)$$

E c_k para $k \geq 2$ definidos da maneira padrão

$$\mathbf{c}_k = \frac{-1}{k(k-1)} [(k-1)\mathbf{K}_1\mathbf{c}_{k-1} + \mathbf{K}_2\mathbf{c}_{k-2} - \mathbf{K}_3A_{k-2}] \quad (6.155)$$

ou utilizando a formulação modificada pela solução fundamental \mathbf{h}

$$\mathbf{c}_k = \left(\frac{\mathbf{h}_{k+1}}{k!} \mathbb{M} + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{C} \right) \mathbf{c}_0 + \frac{\mathbf{h}_k}{k!} \mathbb{M} \mathbf{c}_1 + \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^{k-1} ((k-1)-m)! \mathbf{h}_m \mathbf{A}_{(k-1)-m}. \quad (6.156)$$

Nesse caso, $a_1 = \phi(0)$ e $a_2 = w'(0)$, a serem determinados. Na prática as séries são truncadas de modo que

$$\mathbf{w}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{c}_k(\Omega, a_1, a_2) x^k, \quad (6.157)$$

$$\mathbf{w}'(x) = \sum_{k=0}^{N-2} (k+1) \mathbf{c}_{k+1}(\Omega, a_1, a_2) x^k.$$

Como nos casos descritos anteriormente, para viga apoiada em $x = 1$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(1) \\ \mathbf{w}'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.158)$$

e resulta o sistema não linear

$$F(a_1, a_2, \Omega) = 0, \quad (6.159)$$

ou

$$\begin{pmatrix} F_1(a_1, a_2, \Omega) \\ F_2(a_1, a_2, \Omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.160)$$

Esse sistema pode ser aproximado utilizando o método de Newton, nesse caso

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Omega \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (6.161)$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (6.162)$$

sendo $D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ a matriz jacobiana

$$D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{F_1(\mathbf{x})}{\partial\Omega} & \frac{F_1(\mathbf{x})}{\partial a_1} & \frac{F_1(\mathbf{x})}{\partial a_2} \\ \frac{F_2(\mathbf{x})}{\partial\Omega} & \frac{F_2(\mathbf{x})}{\partial a_1} & \frac{F_2(\mathbf{x})}{\partial a_2} \end{pmatrix}. \quad (6.163)$$

Objetiva-se determinar $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ tal que

$$D\mathbf{F}(x_i)\Delta x = -\mathbf{F}(x_i), \quad (6.164)$$

então

$$\mathbf{x}_{i+1} = x_i + \Delta x. \quad (6.165)$$

O processo iterativo é inicializado com um chute inicial, considera-se

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \Omega_k^{[0]} \\ a_1^{[0,k]} \\ a_2^{[0,k]} \end{pmatrix}, \quad (6.166)$$

onde o índice k refere-se ao k -ésimo modo de vibração e respectiva k -ésima frequência, os valores de chute inicial são tomados sendo aqueles do caso linear $a_1^{[0,k]} = \phi_k(0)$, $a_2^{[0,k]} = w'_k(0)$.

Iterando m vezes a k -ésima frequência natural do caso não linear e o k -ésimo modo de vibração são dados aproximadamente por

$$\Omega_k^{[m]}, \quad \mathbf{w}_{NL}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{c}_k(\Omega_k^{[m]}, a_1^{[m,k]}, a_2^{[m,k]})x^k. \quad (6.167)$$

Nas tabelas a seguir são descritas as três primeiras frequências naturais relativas ao modelo clássico de Timoshenko, referentes ao caso linear descritos na seção 6.3 e ao caso não linear, descrito nessa seção, com os coeficientes c'_k s dados da maneira padrão ou dados em função da resposta fundamental \mathbf{h} , e definidos respectivamente em (6.38) e (6.54).

Na Tabela 6.4 considera-se a comparação das três primeiras frequências naturais adimensionais do caso linear e do caso não linear de uma viga de Timoshenko fixa-livre, utilizando os parâmetros adimensionais $\xi = 625$, $\eta = 0.0004$, e variando o número de termos considerados na expansão. Os resultados do caso linear coincidem com resultados apresentados em [67].

Nas Tabelas 6.4 e 6.6 a influência do termo não linear é variada, no caso de viga fixa-livre e no caso de viga biapoçada. Para os valores testados não há um padrão, apenas tem-se que a influência aumenta com o aumento da contribuição do termo não linear. A primeira coluna das Tabelas 6.4 e 6.6 coincide com os valores apresentados em [67] e corresponde aos casos lineares.

	Ω_1		Ω_2		Ω_3	
	Linear	Não linear	Linear	Não linear	Linear	Não linear
$N = 15$	3.4998	3.4986	18.6185	18.9371	-	-
$N = 25$	3.4998	3.5066	21.3546	21.3552	57.1886	65.6641
$N = 35$	3.4998	3.5066	21.3546	21.3546	57.4704	55.7187
$N = 40$	3.4998	3.5066	21.3526	21.3546	57.4704	59.0579

Tabela 6.4: Frequências naturais adimensionais lineares ($\alpha = 0$) e não lineares ($\alpha = 1$) da viga de Timoshenko fixa-livre com $\eta = 0.0004$, $\xi = 625$.

	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-2}$	$\alpha = 10^{-1}$	$\alpha = 1$
Ω_1	3.4998	3.4998	3.4998	3.5004	3.5066
Ω_2	21.3546	21.3546	21.3546	21.3546	21.3546
Ω_3	57.4707	57.4714	57.4804	57.5733	59.0579

Tabela 6.5: Frequências naturais adimensionais lineares ($\alpha = 0$) e não lineares ($\alpha = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1$) da viga de Timoshenko fixa-livre com $\eta = 0.0004$, $\xi = 625$, $N = 40$.

	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-2}$	$\alpha = 10^{-1}$
Ω_1	8.2146	8.2146	8.2147	8.2151
Ω_2	24.2280	24.2280	24.2281	24.2342
Ω_3	41.5416	40.5478	36.9692	31.5199

Tabela 6.6: Frequências naturais adimensionais lineares ($\alpha = 0$) e não lineares ($\alpha = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$) da viga de Timoshenko biapoada com $\eta = 0.01$, $\nu = 0.25$, $\kappa = 2/3$, $N = 40$.

7 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA VIBRAÇÕES LIVRES

Nesse capítulo são apresentados resultados numéricos da obtenção de frequências e modos de vibração fazendo uso das metodologias descritas nos capítulos anteriores: base fundamental, método espectral e decomposição de Adomian. Antes disso, são apresentados resultados referentes a análise dos polinômios característicos, fixando valores paramétricos.

7.1 Análise de polinômios característicos

7.1.1 Não local de Eringen adimensional

O polinômio característico relativo a esse caso, foi apresentado em (4.27) sendo as raízes das funções que definem os coeficientes $b_0(\Omega)$, $b_2(\Omega)$, $b_4(\Omega)$, respectivamente, Ω_{b01} e Ω_{b02} , Ω_{b2} e Ω_c , definidas em (4.29), (4.31) e (4.32).

Pré-fixando os parâmetros dimensionais $\frac{L}{h} = 10$, $\kappa = 5/6$ e $\nu = 0.3$, os parâmetros adimensionais correspondentes ao caso local podem ser estimados sendo $\xi = 384$ e $\eta = 0.0008$. Com esses valores é possível mostrar que $\Omega_{b01} < \Omega_{b02}$, também verificam-se analiticamente as seguintes relações

$$\begin{aligned} \Omega_c^2 < \Omega_{b01}^2 < \Omega_{b02}^2 &\Leftrightarrow e_n < \eta, \\ \Omega_{b01}^2 < \Omega_c^2 < \Omega_{b02}^2 &\Leftrightarrow \eta < e_n < \frac{1}{\xi}, \\ \Omega_{b01}^2 < \Omega_{b02}^2 < \Omega_c^2 &\Leftrightarrow e_n > \frac{1}{\xi}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Por exemplo, fixando valores paramétricos considerando-se $e_n = 0.0005$, $e_n = 0.001$, $e_n = 0.02$ tem-se as seguintes relações entre as frequências críticas, de acordo com

(7.1), e sendo $\Omega_c = 692.82$

$$\begin{aligned}
 e_n = 0.0005, \quad \Omega_c < \Omega_{b01} < \Omega_{b02}, \quad \Omega_{b01} = 876.35, \quad \Omega_{b02} = 1581.13, \\
 e_n = 0.001, \quad \Omega_{b01} < \Omega_c < \Omega_{b02}, \quad \Omega_{b01} = 629.67, \quad \Omega_{b02} = 1118.03, \\
 e_n = 0.02, \quad \Omega_{b01} < \Omega_{b02} < \Omega_c, \quad \Omega_{b01} = 138.56, \quad \Omega_{b02} = 250.
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

A frequência Ω_{b2} foi omitida dessa análise, pois constata-se que a mesma tem menor sensibilidade em relação a variações de e_n .

Nas Figuras 7.1, 7.2 e 7.3 a seguir são apresentados os comportamentos dos coeficientes b_0 , b_2 e b_4 em relação a e_n e Ω , sendo que o caso $e_n = 0$ corresponde ao caso clássico. Observa-se que para valores de e_n menores tem-se um maior intervalo em que o coeficiente b_0 e b_2 se comportam de maneira mais próxima ao caso clássico, quando são considerados valores de e_n maiores, ou seja, mais influência do parâmetro não local, a tendência é o comportamento se distinguir mais do caso clássico.

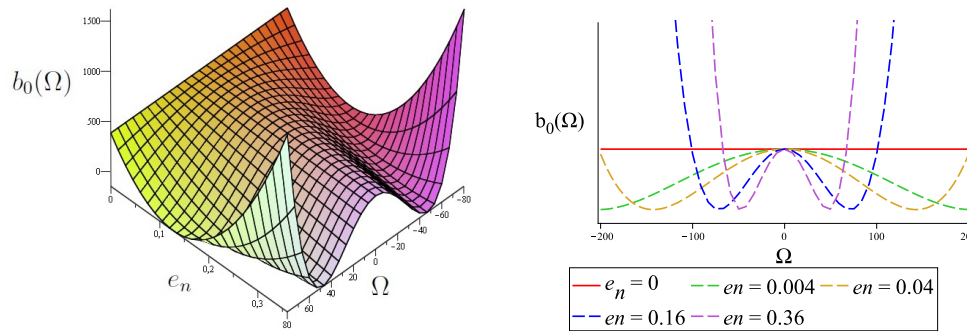


Figura 7.1: Representação gráfica do coeficiente $b_0(\Omega)$.

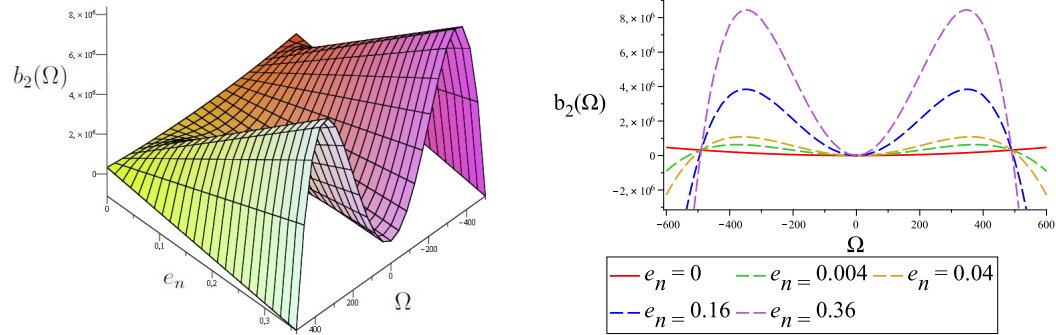


Figura 7.2: Representação gráfica do coeficiente $b_2(\Omega)$.

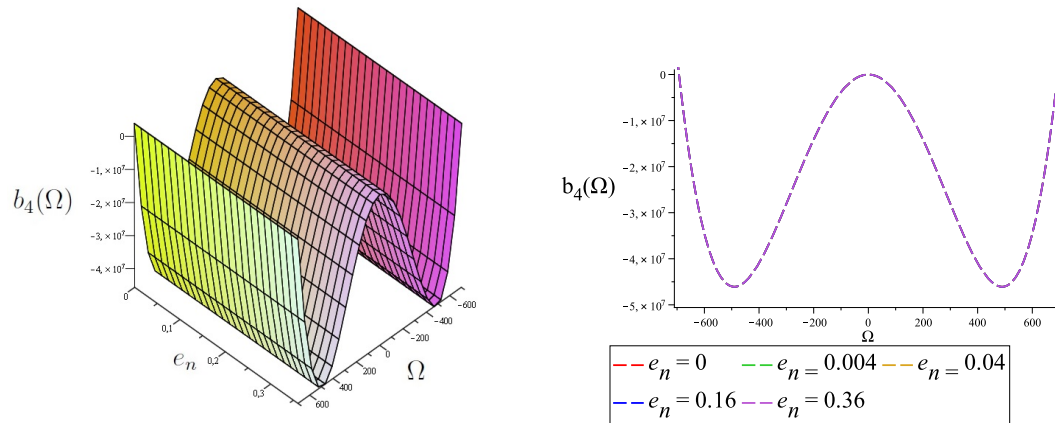


Figura 7.3: Representação gráfica do coeficiente $b_4(\Omega)$.

Na Figura 7.4 são apresentados resultados gráficos da equação característica $\Delta(\beta, \Omega) = 0$ para quatro casos de valores de e_n : $e_n = 0$, $e_n = 0.0005$, $e_n = 0.001$ e $e_n = 0.02$. A Figura 7.4 caracteriza os intervalos com presença ou não de raízes reais.

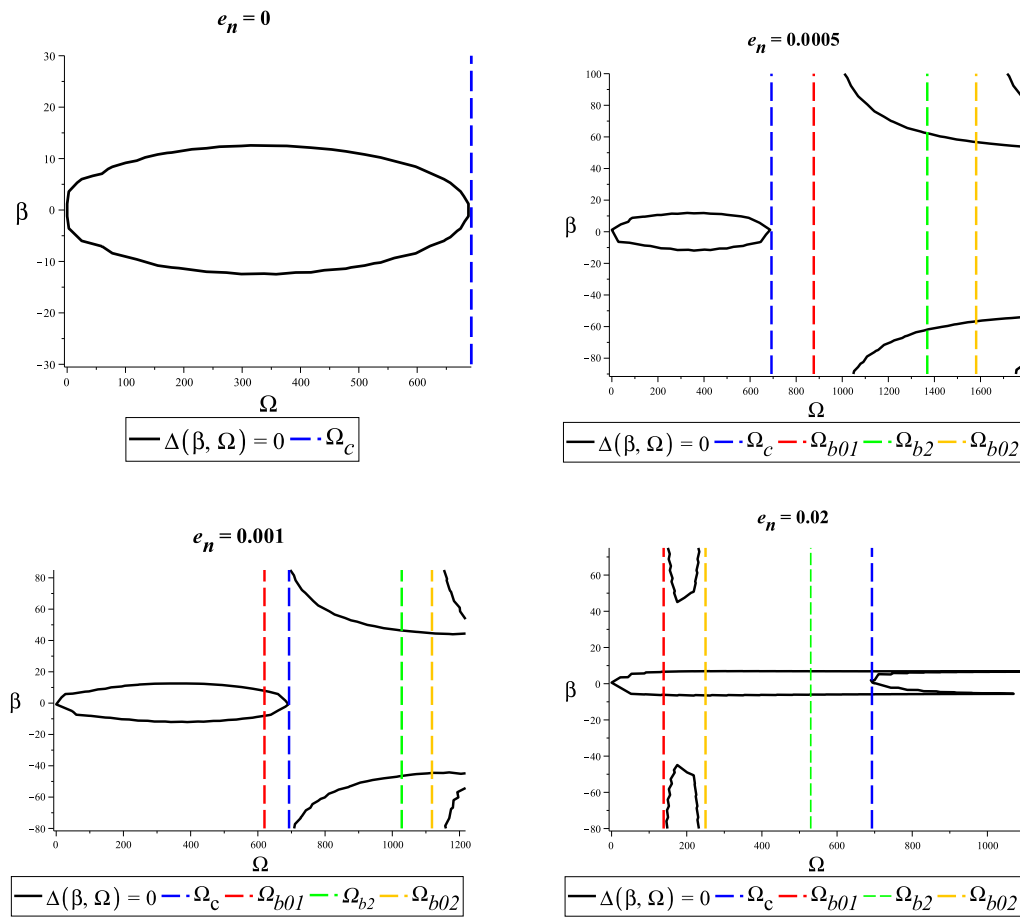


Figura 7.4: Comportamento equação característica $\Delta(\beta, \Omega) = 0$ para diferentes valores de e_n .

A análise da Figura 7.4 consiste na observação do número de raízes β reais, por exclusão tem-se que os casos de raízes β não reais caracterizam raízes puramente imaginárias.

1. Para $e_n = 0$

- $\Omega < \Omega_c$: Duas raízes reais,
- Raiz nula para $\Omega = \Omega_c$,
- $\Omega > \Omega_c$: Nenhuma raiz real.

2. Para $e_n = 0.0005$,

- $0 < \Omega < \Omega_c$: Duas raízes reais,
- Raiz nula para $\Omega = \Omega_c$,
- $\Omega_c < \Omega < \Omega_{b01}$: Nenhuma raiz real,
- $\Omega = \Omega_{b01}$: Nenhuma raiz real,
- $\Omega_{b01} < \Omega < \Omega_{b02}$: Duas raízes reais,
- $\Omega > \Omega_{b02}$: Quatro raízes reais.

Nota

Os casos de raízes não reais caracterizam raízes puramente imaginárias, pois o caso de raízes complexas é excluído visto que verifica-se, para os parâmetros fixados, que $\left(\frac{b_2}{2b_0}\right)^2 - \frac{b_4}{b_0} > 0$ para $\beta = \pm\epsilon$, $\beta = \pm i\delta$, ϵ e δ

$$\epsilon = \sqrt{\frac{-b_2}{2b_0} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_0}\right)^2 - \frac{b_4}{b_0}}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{b_2}{2b_0} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_0}\right)^2 - \frac{b_4}{b_0}}}. \quad (7.3)$$

A análise dos outros casos descritos na Figura 7.4 segue de maneira análoga. Observa-se, como esperado, que o aumento da influência não local torna o comportamento da natureza das raízes mais distinto do caso clássico. O caso clássico caracteriza-se apenas por duas frequências reais abaixo da frequência crítica Ω_c e nenhuma raiz real acima dessa mesma frequência, para os casos não locais, quanto maior o valor de e_n aparecem outras possibilidades de variações da natureza dessas raízes.

O caso $e_n = 0.0005$, é retratado com mais detalhes na Tabela 7.1, a qual mostra a natureza de todas as raízes β para valores de Ω arbitrários, mas fixos nos intervalos definidos pelas frequências adimensionais críticas. O comportamento das raízes nos três primeiros intervalos corresponde ao caso clássico, havendo a transição de ϵ real ($\Omega < \Omega_c$) para $\epsilon = 0$ ($\Omega = \Omega_c$) e ϵ puramente imaginário ($\Omega_c < \Omega < \Omega_{b01}$).

Intervalo	Natureza de ϵ e δ	Raízes β
$0 < \Omega < \Omega_c$	ϵ real δ real	$\beta_{1,2}$ reais $\beta_{3,4}$ puramente imaginárias
$\Omega = \Omega_c$	$\epsilon = 0$ δ real	$\beta_{1,2} = 0$ $\beta_{3,4}$ puramente imaginárias
$\Omega_c < \Omega < \Omega_{b01}$	ϵ puramente imaginário δ real	$\beta_{1,2}$ pur. imag. $\beta_{3,4}$ puramente imaginárias
$\Omega = \Omega_{b01}$	Problema singular	$\beta_{1,2}$ puramente imaginárias
$\Omega_{b01} < \Omega < \Omega_{b2}$	ϵ real δ real	$\beta_{1,2}$ reais $\beta_{3,4}$ puramente imaginárias
$\Omega = \Omega_{b2}$	ϵ real δ real	$\beta_{1,2}$ reais $\beta_{3,4}$ puramente imaginárias
$\Omega_{b2} < \Omega < \Omega_{b02}$	ϵ real δ real	$\beta_{1,2}$ reais $\beta_{3,4}$ puramente imaginárias
$\Omega = \Omega_{b02}$	Problema singular	$\beta_{1,2}$ reais
$\Omega > \Omega_{b02}$	ϵ real δ puramente imaginário	$\beta_{1,2}$ reais $\beta_{3,4}$ reais

Tabela 7.1: Natureza de ϵ , δ e raízes β nos intervalos de definição dados pelas frequências críticas Ω_c , Ω_{b01} , Ω_{b2} e Ω_{b02} , parâmetros dimensionais fixados $e_n = 0.0005$, $\xi = 384$, $\eta = 0.0008$.

7.1.2 Gradiente de deformação

Nessa subseção é analisada a natureza das raízes do polinômio característico adimensional, apresentado na seção 4.2

Fixando valores paramétricos adimensionais, utilizando os parâmetros dimensionais dados na Tabela 2.2, com $h = \alpha\ell$, $b = 2h$ e $L = 20h$ é possível verificar, independente do valor de α que $\Omega_{b8} < \Omega_{b4}$.

Para $\alpha = 1$, são apresentados na Tabela 7.2 a seguir, os valores das raízes β , de acordo com Ω fixada nos intervalos definidos pelas frequências críticas Ω_{b8} e Ω_{b4} , utilizando o método de Ferrari (Apêndice A). Assim como no caso clássico, a frequência crítica Ω_{b8} determina a mudança da natureza de uma das raízes β de real ($\Omega < \Omega_{b8}$) para zero ($\Omega = \Omega_{b8}$) e para puramente imaginária ($\Omega > \Omega_{b8}$). Na Figura 7.5 tem-se o gráfico gerado pela equação característica plotado implicitamente em termos de β e Ω e apresentando resultados compatíveis aos da Tabela 7.2.

$0 < \Omega < \Omega_{b8}$	$\Omega = \Omega_{b8}$	$\Omega_{b8} < \Omega < \Omega_{b4}$	$\Omega = \Omega_{b4}$	$\Omega > \Omega_{b4}$
$\Omega = 2000$	$\Omega_{b8} = 2700.21$	$\Omega = 2800$	$\Omega_{b4} = 2839.97$	$\Omega = 3000$
$\beta_{1,2} = \pm 37.7358$	$\beta_{1,2} = \pm 43.0323$	$\beta_{1,2} = \pm 42.4303$	$\beta_{1,2} = \pm 44.0275$	$\beta_{1,2} = \pm 43.0059$
$\beta_{3,4} = \pm 82.4781$	$\beta_{3,4} = \pm 82.5184$	$\beta_{3,4} = \pm 82.7981$	$\beta_{3,4} = \pm 82.5265$	$\beta_{3,4} = \pm 83.0117$
$\beta_{5,6} = \pm 5.6688$	$\beta_{5,6} = 0$	$\beta_{5,6} = 2.4411 i$	$\beta_{5,6} = 2.7555 i$	$\beta_{5,6} = 4.4315 i$
$\beta_{7,8} = \pm 31.9369 i$	$\beta_{7,8} = \pm 37.7129 i$	$\beta_{7,8} = \pm 37.5647 i$	$\beta_{7,8} = \pm 38.7641 i$	$\beta_{7,8} = \pm 38.4969 i$

Tabela 7.2: Natureza das raízes β nos intervalos definidos pelas frequências críticas Ω_{b4} e Ω_{b8} .

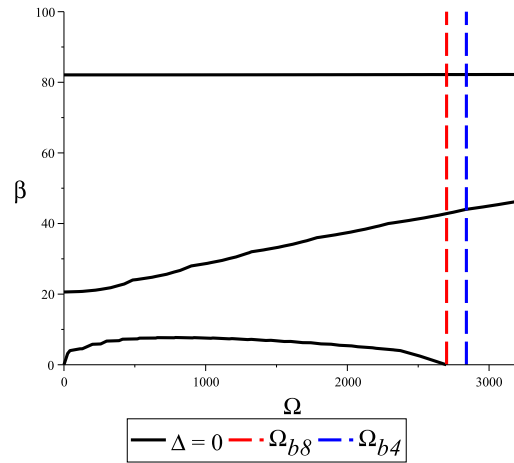


Figura 7.5: $\Delta(\beta, \Omega) = 0$ para valores paramétricos fixados.

7.2 Modos e frequências naturais de vibração relativas ao modelo de Timoshenko não local de Eringen

O momento fletor e cisalhamento definidos em (2.3) são considerados na seguinte forma adimensional

$$\begin{aligned} M^* &= \tilde{\phi}' - e_n \Omega^2 (\eta \tilde{\phi}' - \tilde{w}), \\ S^* &= \xi (\tilde{w}' - \tilde{\phi}) - e_n \Omega^2 \tilde{w}'. \end{aligned} \quad (7.4)$$

As soluções $\tilde{\mathbf{w}}(X)$ podem ser escritas em termos da resposta fundamental matricial

$$\tilde{\mathbf{w}}(X) = \mathbf{h}(X)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(X)\mathbf{c}_2, \quad (7.5)$$

sendo $\mathbf{h}(X)$ a solução fundamental do problema adimensional, descrita em (5.25).

Para viga fixa-livre temos que $\tilde{w}(0) = 0$ e $\tilde{\phi}(0) = 0$, e utilizando o fato que $\mathbf{h}(0) = 0$ segue que $\mathbf{c}_2 = 0$. Logo

$$\tilde{\mathbf{w}}(X) = \mathbf{h}(X)\mathbf{c}_1. \quad (7.6)$$

Em $X = 1$ as condições de contorno são $M^* = 0$ e $S^* = 0$, dadas matricialmente como

$$\begin{pmatrix} 0 & -\xi & \xi - e_n \Omega^2 & 0 \\ e_n \Omega^2 & 0 & 0 & 1 - e_n \Omega^2 \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}(1) \\ \tilde{\phi}(1) \\ \tilde{w}'(1) \\ \tilde{\phi}'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Substituindo (7.6) nas condições de contorno, obtém-se uma equação do tipo $\mathcal{U}\mathbf{c} = 0$, e a fim de determinar constantes \mathbf{c} não nulas resulta a equação de frequência

$$F(\Omega) = \det(\mathcal{U}) = 0. \quad (7.8)$$

O caso de uma viga simplesmente apoiada segue analogamente, sendo as condições de contorno definidas matricialmente como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ e_n \Omega^2 & 0 & 0 & 1 - e_n \Omega^2 \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}(0) \\ \tilde{\phi}(0) \\ \tilde{w}'(0) \\ \tilde{\phi}'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ e_n \Omega^2 \eta & 0 & 0 & 1 - e_n \Omega^2 \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}(1) \\ \tilde{\phi}(1) \\ \tilde{w}'(1) \\ \tilde{\phi}'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Na Tabela 7.3, a seguir, são apresentados resultados das frequências naturais adimensionais, para os casos de viga fixa-livre e simplesmente apoiada, considerando $e_n = 0$, correspondente ao modelo clássico de viga de Timoshenko e $e_n = 0.0005$, $e_n = 0.001$ para os casos não locais.

Contorno	Caso	Método	Frequências naturais adimensionais Ω_i				
			Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
Ap. Ap	$e_n = 0$	Analítico	9.7087	37.1131	78.2184	128.8072	185.5586
		Adomian	9.7087	37.1131	78.2184	128.8078	182.1635
	$e_n = 0.0005$	Analítico	9.6849	36.7522	76.5372	124.0047	175.0696
		Adomian	9.6849	36.7522	76.5372	124.0052	172.0866
	$e_n = 0.001$	Analítico	9.6612	36.4016	74.9600	119.7022	166.1821
		Adomian	9.6612	36.4016	74.9600	119.7027	163.5160
F-L	$e_n = 0$	Adomian	3.4885	20.9155	55.0327	99.8646	152.0639
		Adomian	3.4885	20.9155	55.0327	99.8646	151.8392
	$e_n = 0.0005$	Analítico	3.4889	20.8453	54.4074	97.4757	145.9372
		Adomian	3.4892	20.8453	54.4074	97.4757	145.6876
	$e_n = 0.001$	Analítico	3.4900	20.7757	53.8026	95.2484	140.4907
		Adomian	3.4900	20.7757	53.8026	95.2484	140.2158

Tabela 7.3: Frequências naturais adimensionais, modelo de Timoshenko não local de Eringen, analítico utilizando solução fundamental matricial e método de Adomian com $N = 41$, $\xi = 384$, $\eta = 0.0008$, condições de contorno do tipo viga apoiada-apoiada e fixa-livre.

Modos de vibração correspondentes a viga apoiada-apoiada são apresentados na Figura 7.6 e correspondentes ao caso viga fixa livre na Figura 7.7.

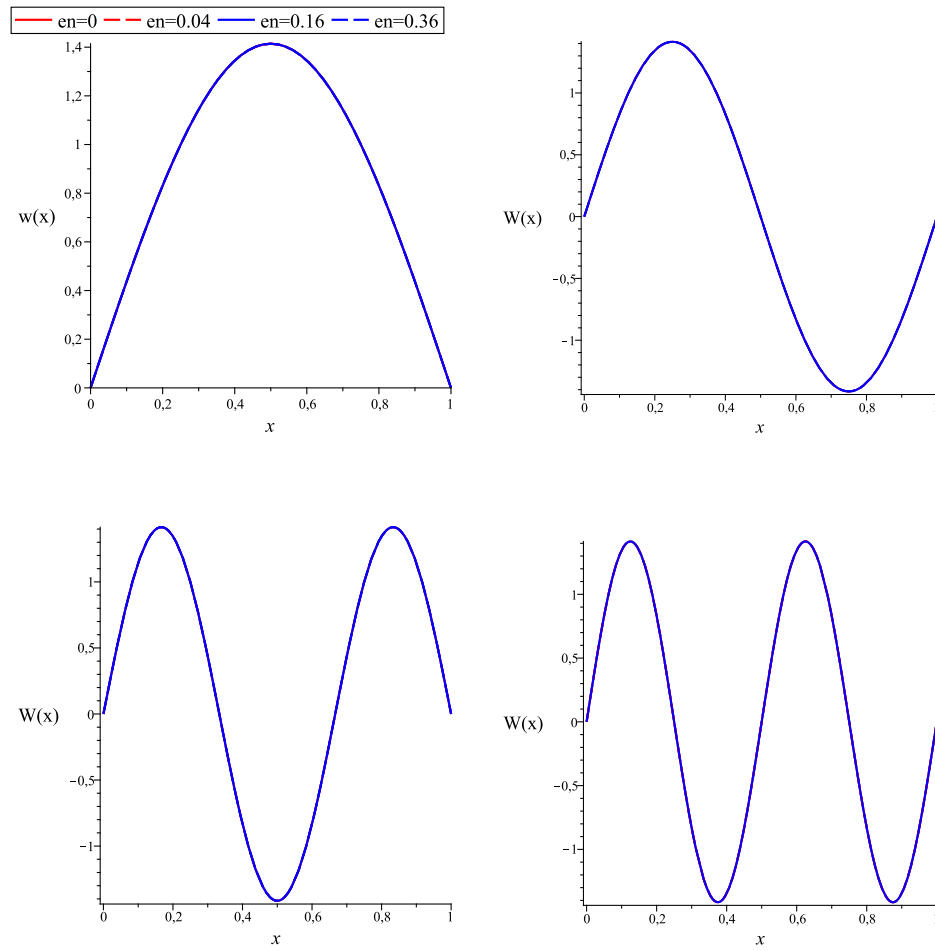


Figura 7.6: Modos de vibração da viga simplesmente apoiada caso clássico (linha sólida) e incluindo efeitos não locais (linha tracejada).

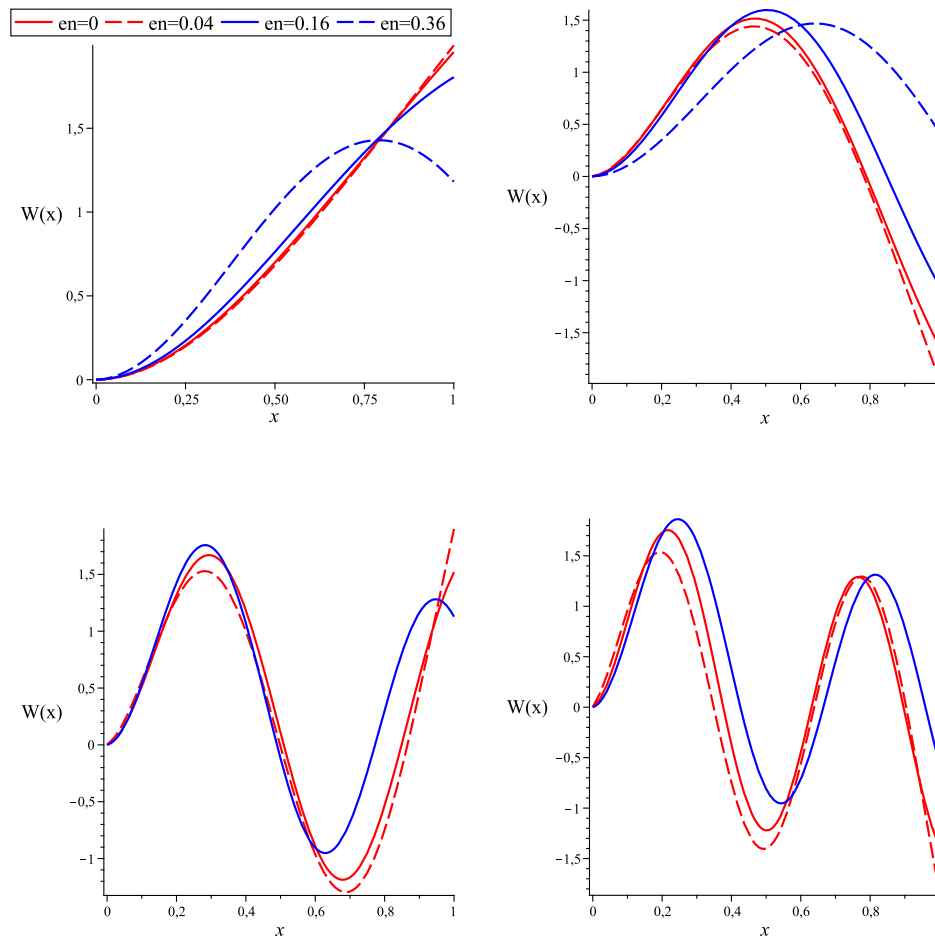


Figura 7.7: Modos de vibração da viga fixa-livre, caso clássico (linha sólida) e incluindo efeitos não locais (linha tracejada).

Comentários

- Verifica-se da Tabela 7.3 que as frequências naturais tendem a decrescer devido aos efeitos não locais, com exceção da primeira frequência da viga fixa-livre que apresenta comportamento oposto [98], [87].
- O método de Adomian e método considerando a resposta fundamental de valor inicial apresentam resultados em acordo.

- Para o caso biapoiado os efeitos não locais influenciam apenas as frequências naturais, a primeira componente dos modos, de acordo com a Figura 7.6, não sofrem influência. Propriedades dinâmicas da viga fixa-livre são mais influenciadas pelos efeitos não locais, tem-se a presença de modos degenerados para $e_n = 0.36$, de acordo com a Figura 7.7, fato evidenciado também para o caso do modelo de Euler-Bernoulli apresentado em [86].

7.3 Vibrações em vigas simplesmente apoiadas segundo modelo de Timoshenko gradiente de deformação/tensão acoplada

Na Tabela 2.2 são descritos os parâmetros materiais e geométricos para microvigas de epoxy, de acordo com [120], [89]. Por simplificação considera-se ($\ell_0 = \ell_1 = \ell_2 = \ell$) nos modelos gradiente de deformação e da tensão acoplada. Além disso, para viga de seção retangular, a melhor aproximação para o coeficiente de cisalhamento é dada por $\kappa = \frac{(5 + 5\nu)}{(6 + 5\nu)}$ [89].

Nas Tabelas 7.4, 7.5, 7.6 são apresentados resultados de frequências naturais dimensionais de vigas biapoiadas segundo os modelos gradiente de deformação (com coeficiente de Poisson não nulo), tensão acoplada (com coeficiente de Poisson não nulo), clássico com coeficiente de Poisson não nulo e clássico com Poisson nulo, para vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko, para $h = \ell$, $h = 4\ell$ e $h = 8\ell$, respectivamente, $b = 2h$ e $L = 20h$.

Caso	$h = \ell$				
	Frequências naturais ω_n (rad/s)				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
EBSG($\nu = 0.38$)	1.8266×10^7	7.3223×10^6	1.6534×10^7	2.9542×10^7	4.6453×10^7
TBSG($\nu = 0.38$)	1.7310×10^6	6.1303×10^6	1.2072×10^7	1.9106×10^7	2.7199×10^7
AMDMTBSG($\nu = 0.38, n = 40$)	1.7310×10^6	6.1303×10^6	1.2072×10^7	1.9106×10^7	2.7768×10^7
AMDMTBSG($\nu = 0.38, n = 50$)	1.7310×10^6	6.1303×10^6	1.2072×10^7	1.9106×10^7	2.7199×10^7
EBCS ($\nu = 0.38$)	1.0965×10^6	4.3861×10^6	9.8689×10^6	1.754×10^7	2.7413×10^7
TBCS($\nu = 0.38$)	1.0862×10^6	4.2304×10^6	9.1447×10^6	1.5483×10^7	2.2933×10^7
EB($\nu = 0.38$)	6.0157×10^5	2.4062×10^6	5.4141×10^6	9.6251×10^6	1.5039×10^7
TB($\nu = 0.38$)	5.9734×10^5	2.3410×10^6	5.1018×10^6	8.7061×10^6	1.2973×10^7
EB($\nu = 0$)	4.3968×10^5	1.7587×10^6	3.9571×10^6	7.0348×10^6	1.099×10^7
TB($\nu = 0$)	4.3815×10^5	1.7347×10^6	3.8396×10^6	6.6786×10^6	1.0164×10^7

Tabela 7.4: Frequências naturais para vigas simplesmente apoiadas Timoshenko (TB) e Euler-Bernoulli (EB), para os modelos SG: gradiente de deformação; CS: tensão acoplada; CP: clássico considerando Poisson; C: Clássico, $h = \ell$.

Caso	$h = 4\ell$				
	Frequências naturais ω_n (rad/s)				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
EBSG($\nu = 0.38$)	1.8503×10^5	7.4075×10^5	1.6689×10^6	2.9727×10^6	4.6564×10^6
TBSG($\nu = 0.38$)	1.8316×10^5	7.1229×10^5	1.5353×10^6	2.5893×10^6	3.8153×10^6
AMDMTBSG($\nu = 0.38, n = 40$)	1.8316×10^5	7.1229×10^5	1.5355×10^6	2.5893×10^6	3.7947×10^6
AMDMTBSG($\nu = 0.38, n = 50$)	1.8316×10^5	7.1229×10^5	1.5355×10^6	2.5893×10^6	3.8153×10^6
EBCS ($\nu = 0.38$)	1.6093×10^5	6.4375×10^5	1.4484×10^6	2.5750×10^6	4.0234×10^6
TBCS($\nu = 0.38$)	1.5980×10^5	6.2627×10^5	1.3649×10^6	2.3301×10^6	3.4747×10^6
EB($\nu = 0.38$)	1.5039×10^5	6.0157×10^5	1.3535×10^6	2.4062×10^6	3.7598×10^6
TB($\nu = 0.38$)	1.4933×10^5	5.8526×10^5	1.2754×10^6	2.1765×10^6	3.2433×10^6
EB($\nu = 0$)	1.0992×10^5	4.3968×10^5	9.8928×10^5	1.7587×10^6	2.7480×10^6
TB($\nu = 0$)	1.0953×10^5	4.3369×10^5	9.5990×10^5	1.6696×10^6	2.5412×10^6

Tabela 7.5: Frequências naturais para vigas simplesmente apoiadas Timoshenko (TB) e Euler-Bernoulli (EB), para os modelos SG: gradiente de deformação; CS: tensão acoplada; CP: clássico considerando Poisson; C: Clássico, $h = 4\ell$.

Caso	$h = 8\ell$				
	Frequências naturais ω_n (rad/s)				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
EBSG ($\nu = 0.38$)	0.7987×10^5	3.1960×10^5	7.1945×10^5	1.2798×10^6	2.0014×10^6
TBSG ($\nu = 0.38$)	0.7925×10^5	3.1002×10^5	6.7379×10^5	1.1462×10^6	1.7030×10^6
ADMTBSG ($\nu = 0.38, n = 40$)	0.7925×10^5	3.1002×10^5	6.7379×10^5	1.1462×10^6	1.6934×10^6
ADMTBSG ($\nu = 0.38, n = 50$)	0.7925×10^5	3.1002×10^5	6.7379×10^5	1.1462×10^6	1.7030×10^6
EBCS ($\nu = 0.38$)	0.7654×10^5	3.0619×10^5	6.8894×10^5	1.2247×10^6	1.9137×10^6
TBCS ($\nu = 0.38$)	0.7601×10^5	2.9789×10^5	6.4923×10^5	1.1080×10^6	1.6515×10^6
EB ($\nu = 0.38$)	0.75196×10^5	3.0078×10^5	6.7676×10^5	1.2031×10^6	1.8799×10^6
TB ($\nu = 0.38$)	0.7466×10^5	2.9263×10^5	6.3773×10^5	1.0882×10^6	1.6216×10^6
EB ($\nu = 0$)	0.54960×10^5	2.1984×10^5	4.9464×10^5	8.7936×10^5	1.3740×10^6
TB ($\nu = 0$)	0.5476×10^5	2.1684×10^5	4.7995×10^5	8.3483×10^5	1.2706×10^6

Tabela 7.6: Frequências naturais para vigas simplesmente apoiadas Timoshenko (TB) e Euler-Bernoulli (EB), para os modelos SG: gradiente de deformação; CS: tensão acoplada; CP: clássico considerando Poisson; C: Clássico, $h = 8\ell$.

Na Figura 7.8, é graficamente verificado que o aumento da espessura h torna os resultados obtidos para as primeiras quatro frequências tenderem ao caso clássico de Timoshenko, todos os casos considerando coeficiente de Poisson não nulo $\nu = 0.38$.

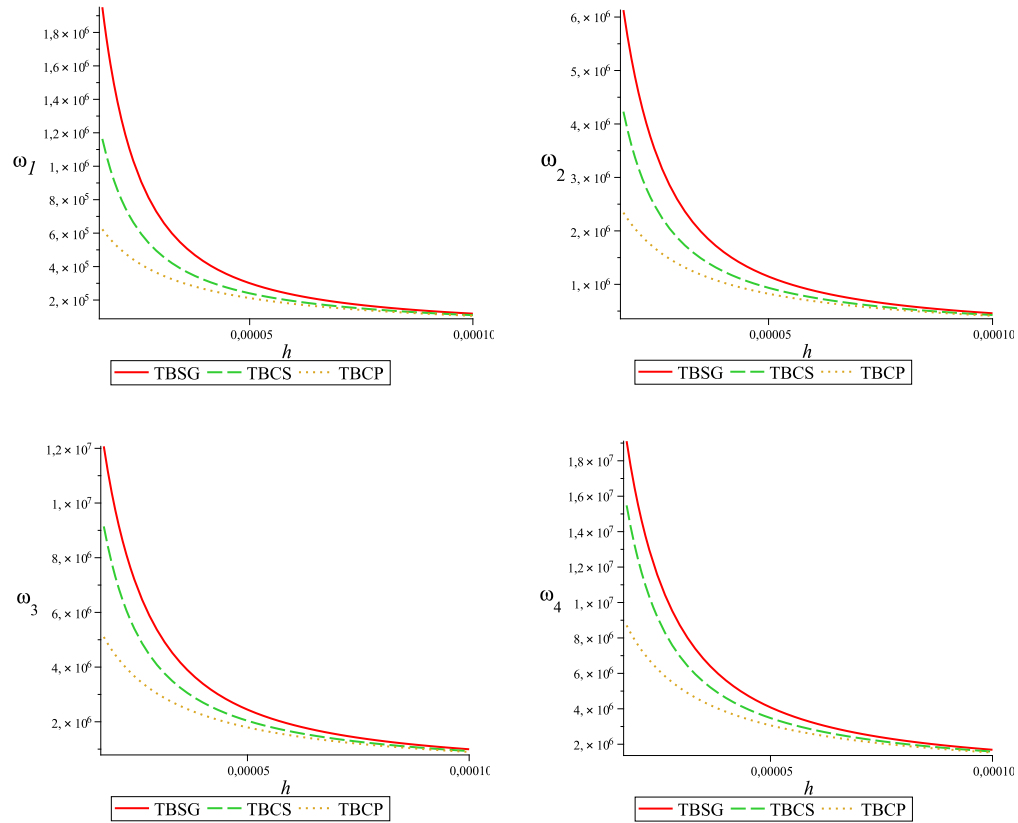


Figura 7.8: Primeiras quatro frequências para vigas simplesmente apoiadas, com h variando de $17.6\mu\text{m}$ a $100\mu\text{m}$. TBSG: gradiente de deformação; TBCP: tensão acoplada; TBCS: clássico considerando Poisson.

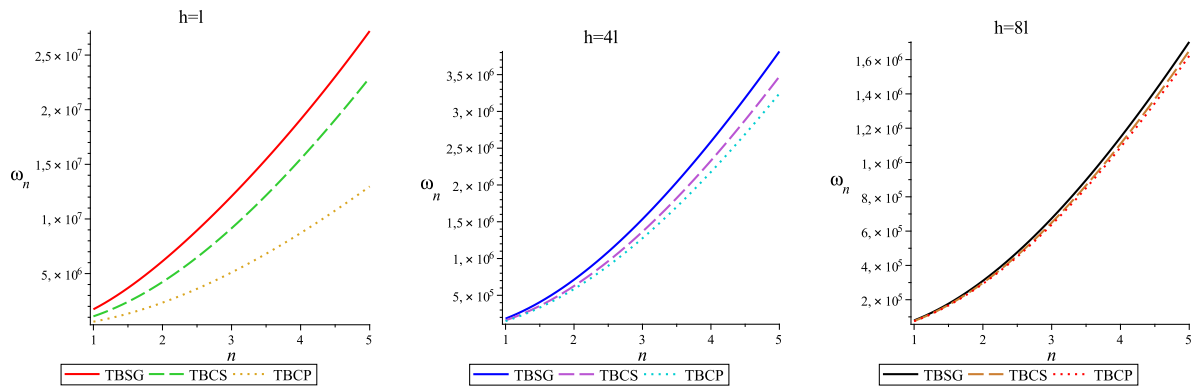


Figura 7.9: Frequências naturais ω_n (rad/s) para vigas simplesmente apoiadas, casos $h = l$, $h = 4l$, $h = 8l$. TBSG: gradiente de deformação; TBCP: tensão acoplada; TBCP: clássico considerando Poisson.

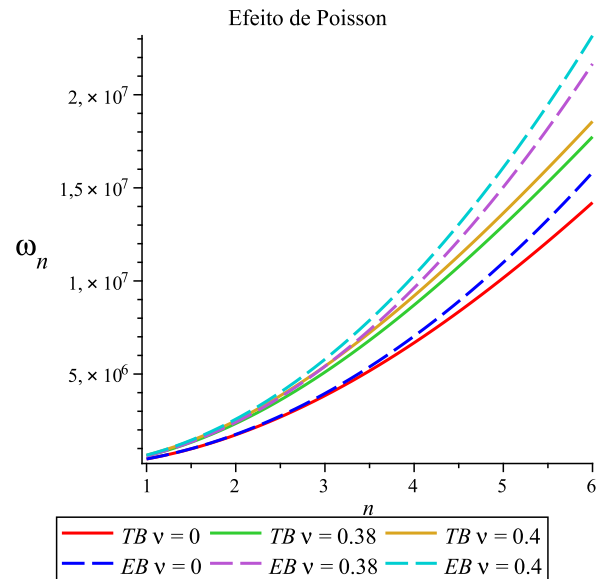


Figura 7.10: Influência do coeficiente de Poisson.

Comentários

- Analisando os resultados nas Tabelas 7.4, 7.5 e 7.6 e Figuras 7.8 e 7.9, observa-se que as diferenças entre as frequências obtidas para os oito casos (EBSG, TBSG, EBCS, TBCS, EBP, TBP, EB, TB) se tornam maiores quando a espessura da viga h é tão pequena quanto o parâmetro material de escala ℓ [120]. Além disso, as frequências naturais obtidas pelos modelos gradiente de deformação e tensão acoplada são superiores aquelas obtidas pelos modelos clássicos, sendo a diferença significativa somente para vigas de espessura comparável a medida material de escala [89].
- Somente para vigas longas o efeito de Poisson é secundário e pode ser negligenciado tomando $\nu = 0$ (hipótese utilizada nas teorias clássicas). Para outros casos os efeitos de Poisson devem ser incluídos a fim de obter resultados mais precisos [89]. Os dados nas Tabelas 7.4 e 7.5, e na Figura 7.10 indicam que negligenciar o efeito de Poisson pode levar a erros significativos, então essa hipótese comumente utilizada nos modelos para vibração transversal de vigas deve ser avaliada individualmente ou abandonada, a fim de melhorar os resultados [89].
- Nas Tabelas 7.4, 7.5 e 7.6, observa-se que as frequências obtidas para os casos TBSG e ADMTBSG, fazendo uso do método espectral e método da decomposição de Adomian tem resultados em acordo, somente na quinta frequência utilizando $n = 40$ termos na expansão de Adomian há diferenças que são corrigidas quando considera-se $n = 50$.

Nas Tabelas 7.7 e 7.8 são apresentados resultados de frequências naturais adimensionais comparando aquelas do modelo clássico de Timoshenko e Timoshenko gradiente de deformação, considerando diferentes valores de espessuras h .

Na Tabela 7.7 são obtidos valores das três primeiras frequências para o caso do modelo de Timoshenko gradiente de deformação (TBSG) fazendo uso do método de Adomian com $n = 50$ termos na expansão compatíveis com os resultados de Timoshenko clássico (CTB) e Timoshenko gradiente de deformação apresentadas na literatura [11]. Assim como no caso adimensional, a maior diferença entre caso clássico e não clássico ocorre quando $h = \ell$.

Na Tabela 7.8 também são apresentados resultados de frequências naturais adimensionais de vibração de vigas bi apoiadas, considerando variações do parâmetro h para o caso gradiente de deformação (TBSG - A, B, C, D) comparativamente àquelas do caso clássico (TB - E) cujos valores independem do parâmetro h . Os resultados são obtidos considerando o método de Adomian com $n = 30$ e $n = 40$ termos. Observa-se que a medida que h assume valores maiores os parâmetros adimensionais e resultados das frequências tendem aos do caso clássico.

Caso		Frequências naturais adimensionais			
		Ω_1	Ω_2	Ω_3	
$L = 10h$	$h/\ell = 1$	[11] CTB	13.1232	48.6751	98.8865
		[11] TBSG	34.1822	106.1615	202.6362
		ADMTBSG(n=50)	34.1822	106.1615	202.6362
	$h/\ell = 5$	[11] CTB	13.1232	48.6751	98.8865
		[11]TBSG	15.0180	54.8583	109.8844
		ADMTBSG(n=50)	15.0180	54.8583	109.8844
	$h/\ell = 10$	[11] CTB	13.1232	48.6751	98.8865
		[11] TBSG	13.6274	50.3506	101.9104
		ADMTBSG(n=50)	13.6274	50.3506	101.9104
$L = 30h$	$h/\ell = 1$	[11] CTB	13.4595	53.3195	118.1086
		[11] TBSG	39.9336	149.3488	307.6397
		ADMTBSG(n=50)	39.9336	149.3488	307.6397
	$h/\ell = 5$	[11]CTB	13.4595	53.3195	118.1086
		[11] TBSG	15.4989	61.2486	135.1623
		ADMTBSG(n=50)	15.4989	61.2486	135.1623
	$h/\ell = 10$	[11] CTB	13.4595	53.3195	118.1086
		[11] TBSG	13.9979	55.4195	122.6462
		ADMTBSG(n=50)	13.9979	55.4195	122.6462

Tabela 7.7: Frequências naturais adimensionais para viga biapoiada, modelo gradiente de deformação, variando espessura h , e modelo clássico de Timoshenko, $b = 2h$, $\kappa = 5/6$, $\nu = 0$.

Caso	Frequências naturais adimensionais Ω_i				
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
A) TBSG ($h = \ell$) (n=30)	44.15	156.76	309.67	504.50	525.42
A) TBSG ($h = \ell$) (n=50)	44.15	156.76	309.66	491.56	701.71
B) TBSG ($h = 4\ell$) (n=30)	14.95	58.73	128.47	213.62	710.77
B) TBSG ($h = 4\ell$) (n=50)	14.95	58.73	128.47	220.33	330.41
C) TBSG ($h = 8\ell$) (n=30)	11.34	44.82	98.94	166.14	712.44
C) TBSG ($h = 8\ell$) (n=50)	11.34	44.82	98.94	171.53	260.15
D) TBSG ($h = 10\ell$) (n=30)	10.82	42.80	94.58	159.02	711.57
D) TBSG ($h = 10\ell$) (n=50)	10.82	42.80	94.58	164.19	249.35
E) TB Clássico(n=30)	9.83	38.94	86.17	630.99	3098.38
E) TB Clássico(n=50)	9.83	38.94	86.18	149.91	228.17

A)	$\xi_1 = 2000,$	$\eta = 0.0002,$	$\xi_2 = 4.7,$	$\xi_3 = -4.9,$	$\xi_4 = 27.3,$	$\xi_5 = 0.0035,$
B)	$\xi_1 = 2000,$	$\eta = 0.0002,$	$\xi_2 = 0.3,$	$\xi_3 = -0.3,$	$\xi_4 = 2.64,$	$\xi_5 = 0.00021,$
C)	$\xi_1 = 2000,$	$\eta = 0.0002,$	$\xi_2 = 0.07,$	$\xi_3 = -0.076,$	$\xi_4 = 1.41,$	$\xi_5 = 0.00005,$
D)	$\xi_1 = 2000,$	$\eta = 0.0002,$	$\xi_2 = 0.04,$	$\xi_3 = -0.04,$	$\xi_4 = 1.26,$	$\xi_5 = 0.00003,$
E)	$\xi_1 = 2000,$	$\eta = 0.0002,$	$\xi_2 = 0,$	$\xi_3 = 0,$	$\xi_4 = 1$	$\xi_5 = 0.00003,$

Tabela 7.8: Frequências naturais adimensionais para viga biapoiada, modelo gradiente de deformação, variando espessura h , e modelo clássico de Timoshenko, $b = 2h$, $\kappa = 5/6$, $\nu = 0$, $L = 20h$.

7.4 Modos e frequências naturais de vibração relativas ao modelo de Timoshenko com efeitos de superfície

Na Tabela 7.9 e Figura 7.11, apresentam-se resultados numéricos relacionados as frequências naturais e modos de vibração, para os casos de viga simplesmente apoiada (AA) e fixa-livre (FL) de uma viga de Silício e na Tabela 7.10 apresentam-se frequências naturais para esses mesmos contornos de uma viga de Alumínio. Os dados dos parâmetros de vigas de Silício são os utilizados em [84] e descritos na Tabela 2.3.

Contorno	Modelo	Nano				Micro			
		Frequências naturais ω_i (GHz)				Frequências naturais ω_i (MHz)			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
AA	TBSE	7.080	25.06	51.32	82.92	7.199	27.01	55.66	89.75
	TB	7.199	27.01	55.67	89.76	7.199	27.01	55.67	89.76
	TBSE [84]	7.08	25.07	51.33	82.92	-	-	-	-
	TB [84]	7.20	27.02	55.70	89.76	-	-	-	-
FL	TBSE	3.016	14.67	36.48	64.51	2.597	15.27	39.29	69.72
	TB	2.597	15.27	39.30	69.73	2.597	15.27	39.30	69.73
	TBSE [84]	3.02	14.67	36.38	64.46	-	-	-	-
	TB [84]	2.60	15.28	39.31	69.74	-	-	-	-

Tabela 7.9: Comparativo entre as frequências naturais dos modelos de Timoshenko incluindo e não incluindo efeitos de superfície, considerando nano e micro escala, de uma viga de Silício. Parâmetros geométricos Nanoviga: $L = 50 \times 10^{-9}m$, $H = 2h = 6 \times 10^{-9}m$, $b = 3 \times 10^{-9}m$. Microviga: $L = 50 \times 10^{-6}m$, $H = 2h = 6 \times 10^{-6}m$, $b = 3 \times 10^{-6}m$.

Contorno	Modelo	Nano				Micro			
		Frequências naturais ω_i (GHz)				Frequências naturais ω_i (MHz)			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
AA	TBSE	6.087	21.45	43.95	71.08	6.142	23.11	47.83	77.41
	TB	6.142	23.12	47.83	77.42	6.142	23.12	47.83	77.42
	TBSE [84]	6.10	21.49	43.96	71.08	-	-	-	-
	TB [84]	6.14	23.13	47.84	77.43	-	-	-	-
FL	TBSE	2.618	12.59	31.25	55.29	2.214	13.06	33.74	60.09
	TB	2.214	13.06	33.74	60.10	2.214	13.06	33.74	60.10
	TBSE [84]	2.62	12.60	31.24	55.31	-	-	-	-
	TB [84]	2.21	13.05	33.74	60.16	-	-	-	-

Tabela 7.10: Comparativo entre as frequências naturais dos modelos de Timoshenko incluindo e não incluindo efeitos de superfície, considerando nano e micro escala, de uma viga de Alumínio. Parâmetros geométricos Nanoviga: $L = 50 \times 10^{-9}m$, $H = 2h = 6 \times 10^{-9}m$, $b = 3 \times 10^{-9}m$. Microviga: $L = 50 \times 10^{-6}m$, $H = 2h = 6 \times 10^{-6}m$, $b = 3 \times 10^{-6}m$.

Comentários

- As frequências naturais podem crescer ou decrescer comparativamente aos resultados clássicos, dependendo dos sinais das constantes elásticas da superfície e também condições de contorno [84]. Nos casos considerados as frequências do modelo que inclui efeitos de superfície diminuiram com relação às clássicas, com exceção das primeiras dos casos de viga fixa-livre.
- Significante influência na primeira frequência (viga fixa-livre mais influenciada), frequências altas menos influenciadas [65].
- Modos de vibração considerando efeitos de superfície são idênticos aos do modelo clássico (1ª componente) para vigas simplesmente apoiadas. Diferenças perceptíveis, ocorrem apenas para o caso de viga fixa-livre, principalmente no primeiro modo, e apenas em nanoescala [3].
- Quando as dimensões da viga vão de nano para micro escala os resultados tendem aos resultados clássicos.

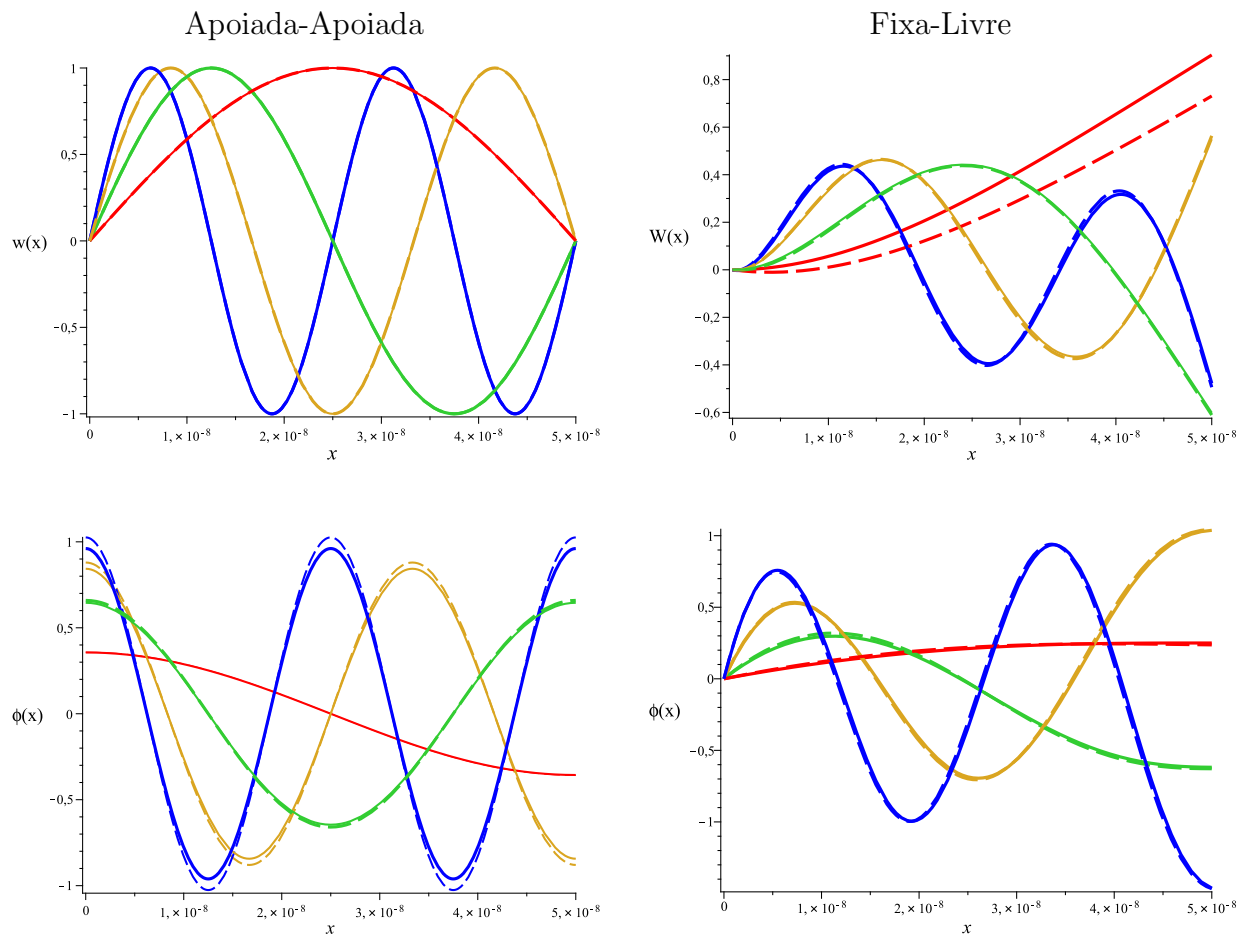


Figura 7.11: Modos de vibração da viga simplesmente apoiada (primeira coluna) e para a viga fixa-livre (segunda coluna), caso clássico (linha sólida) e incluindo efeitos de superfície (linha tracejada). Viga de Silício.

8 VIBRAÇÕES FORÇADAS E NÃO LINEARES DO MODELO DE TIMOSHENKO UTILIZANDO O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN

8.1 Respostas dinâmicas para problemas forçados

Nessa seção busca-se determinar as respostas $w(t, x)$ e $\phi(t, x)$, soluções do sistema de equações, para $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq L$

$$\begin{aligned}\rho A w_{tt} - \kappa G A (w_{xx} - \phi_x) &= f(t, x), \\ \rho I \phi_{tt} - EI \phi_{xx} - \kappa G A (w_x - \phi) &= 0,\end{aligned}\tag{8.1}$$

onde $f(t, x)$ é um forçante externo, em geral de natureza harmônica.

O sistema (8.1), considerando condições iniciais e de fronteira, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t, x) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t, x) &= \mathbf{F}(t, x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ \mathbf{v}(0, x) &= \mathbf{v}_0(x), \quad \mathbf{v}_t(0, x) = \mathbf{v}_1(x), \\ \mathbf{A}\mathbf{v}(t, 0) + \mathbf{J}\mathbf{v}_x(t, 0) &= \mathbf{f}_1(t), \\ \mathbf{F}\mathbf{v}(t, L) + \mathbf{Q}\mathbf{v}_x(t, L) &= \mathbf{f}_2(t).\end{aligned}\tag{8.2}$$

Conforme já tratado na literatura, por exemplo em [42], [38], a solução de (8.2) é a soma da solução referente ao problema homogêneo, e dependente das condições iniciais $\mathbf{v}_0(x)$ e $\mathbf{v}_1(x)$ com a resposta forçada, dada pela convolução da função de Green de valor inicial com o forçante $\mathbf{F}(t, x)$, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t, x) &= \int_0^L (\mathbf{h}_t(t, x, \xi) \mathbf{M}\mathbf{v}_0(\xi) + \mathbf{h}(t, x, \xi) \mathbf{M}\mathbf{v}_1(\xi)) d\xi \\ &+ \int_0^t \left[\int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{F}(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau + J(\mathbf{v}, \mathbf{h}).\end{aligned}\tag{8.3}$$

onde $J(\mathbf{v}, \mathbf{h})$ é um termo contendo efeitos da função de Green de valor inicial com valores de \mathbf{v} no contorno [38].

A integral de convolução para a resposta forçada pode ser decomposta em uma resposta permanente ou particular $\mathbf{v}_p(t, x)$ e uma resposta homogênea induzida pelos valores iniciais da solução particular $\mathbf{v}_{homog.induz.}(t, x)$, então

$$\int_0^t \left[\int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{f}(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau = \mathbf{v}_p(t, x) + \mathbf{v}_{homog.induz.}(t, x). \quad (8.4)$$

Por exemplo, se dada uma entrada harmônica

$$f(t, x) = e^{i\omega t} \mathbf{v}(x), \quad (8.5)$$

tem-se a resposta particular harmônica

$$\mathbf{v}_p(t, x) = e^{i\omega t} \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{v}(x), \quad (8.6)$$

onde

$$\mathbf{H}(i\omega) \mathbf{v}(x) = \int_0^L \mathbf{H}(i\omega, x, \xi) \mathbf{v}(\xi) d\xi, \quad (8.7)$$

sendo \mathbf{H} a transformada de Laplace da resposta impulso $\mathbf{h}(t, x, \xi)$.

A resposta homogênea induzida pela particular é dada por

$$\mathbf{v}_{homog.induz.}(t, x) = - \int_0^L [\mathbf{h}_t(t, x, \xi) \mathbf{M} \mathbf{v}_p(0, \xi) + \mathbf{h}(t, x, \xi) \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}_p(0, \xi)] d\xi. \quad (8.8)$$

A solução de Green dinâmica, matriz resposta impulso ou ainda solução fundamental distribuída $\mathbf{h}(t, x, \xi)$ é definida como

$$\mathbf{h} = \begin{cases} \mathbf{h}(t, x, \xi), & t \geq 0, \quad 0 \leq x, \xi \leq L, \\ 0, & t < 0, \quad 0 \leq x, \xi \leq L, \end{cases} \quad (8.9)$$

solução matricial do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{h}}(t, x, \xi) + \mathbf{K} \mathbf{h}(t, x, \xi) &= 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < \xi < L, \quad t > 0, \\ \mathbf{h}(0, x, \xi) &= 0, \quad \mathbf{M} \mathbf{h}_t(0, x, \xi) = \delta(x - \xi) I, \\ \mathbf{A} \mathbf{h}(t, 0, \xi) + \mathbf{J} \mathbf{h}_x(t, 0, \xi) &= 0, \\ \mathbf{F} \mathbf{h}(t, L, \xi) + \mathbf{Q} \mathbf{h}_x(t, L, \xi) &= 0. \end{aligned}$$

8.1.1 Aproximação espectral para a solução de Green dinâmica

Visto que a determinação analítica de funções de Green pode ser uma tarefa complicada, busca-se nessa seção uma aproximação espectral para $\mathbf{h}(t, x, \xi)$.

Supondo

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \mathbf{w}_n(x), \\ \mathbf{F}(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \mathbf{M} \mathbf{w}_n(x), \end{aligned} \quad (8.10)$$

sendo substituídas no problema

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}}(t, x) + \mathbf{K} \mathbf{v}(t, x) &= \mathbf{F}(t, x), \quad 0 < x < L, \quad 0 < \xi < L, \quad t > 0, \\ \mathbf{v}(0, x) &= \mathbf{v}_0(x), \quad \mathbf{v}_t(0, x) = \mathbf{v}_1(x), \\ \mathbf{A} \mathbf{v}(t, 0) + \mathbf{J} \mathbf{v}_x(t, 0) &= 0, \\ \mathbf{F} \mathbf{v}(t, L) + \mathbf{Q} \mathbf{v}_x(t, L) &= 0, \end{aligned} \quad (8.11)$$

onde as funções $\mathbf{w}_n(x)$ são os modos de vibração normalizados com relação a \mathbf{M} , ou seja, $\int_0^L (\mathbf{w}_n(x))^T \mathbf{M} \mathbf{w}_n(x) dx = 1$.

Das seguintes propriedades dos modos normais

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_m, \mathbf{M} \mathbf{w}_n \rangle &= \delta_{mn}, \\ \langle \mathbf{w}_m, \mathbf{K} \mathbf{w}_n \rangle &= \delta_{mn} \omega_n^2, \end{aligned} \quad (8.12)$$

onde δ_{mn} é a função delta de Kronecker, obtém-se

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \int_0^L (\mathbf{w}_n(x))^T \mathbf{M} \mathbf{v}(t, x) dx, \\ F_n(t) &= \int_0^L (\mathbf{w}_n(x))^T \mathbf{F}(t, x) dx, \end{aligned} \quad (8.13)$$

e também

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \mathbf{w}_n = 0. \quad (8.14)$$

Substituindo-se (8.10) em (8.11) e utilizando (8.14) para cada n tem-se

$$\ddot{v}_n(t) + \omega_n^2 v_n(t) = F_n(t), \quad (8.15)$$

cuja solução, para $F_n(t) = 0$, é dada em função da solução fundamental $h_n(t)$

$$v_n(t) = \dot{h}_n(t)v_n(0) + h_n\dot{v}_n(0), \quad (8.16)$$

com $h_n(t) = \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n}$, então

$$\mathbf{v}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(\omega_n t)v_n(0) + \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n}\dot{v}_n(0))\mathbf{w}_n(x). \quad (8.17)$$

Por outro lado,

$$\mathbf{v}(t, x) = \int_0^L \mathbf{h}_t(t, x, \xi)\mathbf{M}\mathbf{v}(0, \xi) d\xi + \int_0^L \mathbf{h}(t, x, \xi)\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}(0, \xi) d\xi. \quad (8.18)$$

Supondo $\mathbf{v}(0, x) = 0$ então $v_n(0) = 0$ e

$$\mathbf{v}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \mathbf{w}_n(x) \dot{v}_n(0) \right) = \int_0^L \mathbf{h}(t, x, \xi)\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}(0, \xi) d\xi. \quad (8.19)$$

Substituindo $\dot{v}_n(0)$ e comparando as expressões obtém-se

$$\mathbf{h}(t, x, \xi) = \sum_{n=1}^m \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \mathbf{w}_n(x)(\mathbf{w}_n(\xi))^T, \quad (8.20)$$

onde m é o número de modos considerados na aproximação. A transformada de Laplace da resposta $\mathbf{h}(t, x, \xi)$, dada por $\mathbf{H}(t, x, \xi)$ e utilizada na obtenção de soluções particulares, é então aproximada por

$$\mathbf{H}(i\omega, x, \xi) = \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \sum_{n=1}^m \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \mathbf{w}_n(x)(\mathbf{w}_n(\xi))^T. \quad (8.21)$$

8.1.2 Esquema recursivo padrão de Adomian

Considera-se a metodologia padrão de Adomian [6], [125], em que as equações (8.1) são expressas através de operadores diferenciais correspondentes às derivadas espaciais e temporais, ou seja,

$$\begin{aligned} L_t w(t, x) - L_x w(t, x) + M_x \phi(t, x) &= f(t, x), \\ L_t \phi(t, x) - R_x \phi(t, x) - S_x w(t, x) + T \phi(t, x) &= 0, \end{aligned} \quad (8.22)$$

com $L_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, escolhe-se $L_t^{-1} = \int_0^t \int_0^t () dt dt$ como operador em função do qual as soluções $w(t, x)$ e $\phi(t, x)$ serão expressas. Essa escolha é motivada a fim de que sejam utilizadas as condições iniciais do problema, se algum operador espacial fosse utilizado então seria necessário considerar condições de contorno [6], [102], [125]. Os demais operadores são definidos como

$$L_x = \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad M_x = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x}, \quad (8.23)$$

$$R_x = \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad S_x = \xi_3 \frac{\partial}{\partial x}, \quad T = \xi_3,$$

com

$$\xi_1 = \frac{\kappa GA}{\rho A}, \quad \xi_2 = \frac{EI}{\rho I}, \quad \xi_3 = \frac{\kappa GA}{\rho I}. \quad (8.24)$$

Resolvendo as equações (8.22) para $w(t, x)$ e $\phi(t, x)$ resulta

$$\begin{aligned} w(t, x) &= w(0, x) + t\dot{w}(0, x) + L_t^{-1}(L_x w - M_x \phi) + L_t^{-1} f(t, x), \\ \phi(t, x) &= \phi(0, x) + t\dot{\phi}(0, x) + L_t^{-1}(R_x \phi + S_x w - T\phi). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Observa-se que as soluções expressas dessa maneira não envolvem condições de contorno, ainda assim são de interesse prático no caso de vigas infinitas ou mesmo problemas de propagação de ondas [107], [43].

Consideram-se as expansões

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t, x), \quad \phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t, x), \quad (8.26)$$

e então define-se o esquema recursivo para os termos das séries (8.26)

$$\begin{aligned} w_0 &= w(0, x) + t\dot{w}(0, x) + L_t^{-1}(f(t, x)), \\ \phi_0 &= \phi(0, x) + t\dot{\phi}(0, x), \end{aligned} \quad (8.27)$$

e para $k \geq 0$

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= L_t^{-1}(L_x w_k - M_x \phi_k), \\ \phi_{k+1} &= L_t^{-1}(R_x \phi_k + S_x w_k - T\phi_k). \end{aligned} \quad (8.28)$$

8.2 Respostas não lineares

Nessa seção buscam-se respostas das equações de Timoshenko incluindo um fator não linear cúbico, correspondente a viga sob influência de uma fundação elástica [127], [76], [43].

No artigo [43] é apresentada uma abordagem para a análise dinâmica de uma viga de Timoshenko sob fundação elástica, na qual as equações diferenciais são resolvidas utilizando o método da decomposição de Adomian e um método perturbativo conjuntamente com a transformada de Fourier complexa. Já [66] faz uso do método da decomposição de Adomian combinado com aproximações considerando *wavelets*.

Aqui são procuradas soluções $w(t, x)$ e $\phi(t, x)$ considerando o método de Adomian, através de um sistema recursivo semelhante ao apresentado em (8.27)-(8.28), comparativamente com o mesmo método modificado pela função de Green dinâmica $\mathbf{h}(t, x, \xi)$, para uma viga de Timoshenko sobre uma fundação viscoelástica não linear, cujas equações governantes são

$$\begin{aligned} \rho A w_{tt} - \kappa G A (w_{xx} - \phi_x) &= -k_3 (w)^3, \\ \rho I \phi_{tt} - EI \phi_{xx} - \kappa G A (w_x - \phi) &= 0, \end{aligned} \quad (8.29)$$

sendo que a constante k_3 representa a parte não linear da rigidez da fundação elástica [66]. Agora além das expansões

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t, x), \\ \phi(t, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t, x), \end{aligned} \quad (8.30)$$

considera-se o termo não linear expandido em função dos polinômios de Adomian, então

$$[w(t, x)]^3 = f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (8.31)$$

Analogamente ao apresentado no Capítulo 6 em (6.153), tem-se

$$\begin{aligned}
A_0 &= w_0^3, \\
A_1 &= 3w_0^2w_1, \\
A_2 &= 3w_0w_1^2 + 3w_0^2w_2, \\
A_3 &= w_1^3 + 6w_0w_1w_2 + 3w_0^2w_3, \\
A_4 &= 3w_1^2w_2 + 3w_0w_2^2 + 3w_0^2w_4, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{8.32}$$

Alternativamente às fórmulas dadas em (6.28), tem-se que os polinômios de Adomian, especificamente para a não linearidade cúbica, podem ser obtidos através da expressão [4]

$$A_k = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} w_i w_j w_{k-i-j}. \tag{8.33}$$

Os termos das expansões (8.30) são então definidos como

$$\begin{aligned}
w_0 &= w(0, x) + tw(0, x), \\
\phi_0 &= \phi(0, x) + t\dot{\phi}(0, x),
\end{aligned} \tag{8.34}$$

e para $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
w_{k+1} &= L_t^{-1}(L_x w_k - M_x \phi_k - k_3 A_k), \\
\phi_{k+1} &= L_t^{-1}(R_x \phi_k + S_x w_k - T \phi_k).
\end{aligned} \tag{8.35}$$

Esse esquema recursivo pode ser modificado se for considerada a função de Green dinâmica $\mathbf{h}(t, x, \xi)$. Após a expansão do termo não linear em função dos polinômios de Adomian tem-se que o sistema (8.29) na forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t, x) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t, x) = \mathbf{N}(\mathbf{v}), \tag{8.36}$$

com

$$\mathbf{N}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -k_3(w(t, x))^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_3 \sum_{k=0}^{\infty} A_k \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8.37}$$

Da teoria de vibrações forçadas apresentada na seção anterior

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, x) = & \int_0^L (\mathbf{h}_t(\tau, x, \xi) \mathbf{M} \mathbf{v}_o(\xi) + \mathbf{h}(\tau, x, \xi) \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}_1(\xi)) d\xi \\ & + \int_0^t \left[\int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{N}(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau, \end{aligned} \quad (8.38)$$

motiva a escolha dos termos das expansões (8.30) que passam a ser dados por

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \int_0^L \mathbf{h}_t(t, x, \xi) \mathbf{M} \mathbf{v}(0, \xi) d\xi + \int_0^L \mathbf{h}(t, x, \xi) \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}(0, \xi) d\xi. \quad (8.39)$$

E para $k \geq 0$

$$\begin{pmatrix} w_{k+1} \\ \phi_{k+1} \end{pmatrix} = -k_3 \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) A_k(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (8.40)$$

onde a função de Green dinâmica $\mathbf{h}(t, x, \xi)$ é aproximada através da fórmula dada em (8.20).

8.3 Simulações

Para os resultados numéricos apresentados nessa seção, utilizaram-se os seguintes valores paramétricos relativos ao material e geometria da viga

$$E = 1.44 \text{GPa}, \quad \rho = 1220 \text{Kg/m}^3, \quad \nu = 0.38, \quad \ell = 1 \text{m}, \quad h = 4\ell \text{m}, \quad b = 2hm, \quad L = 20hm,$$

e considera-se uma viga de seção transversal retangular, então $I = \frac{bh^3}{12}$ e $\kappa = \frac{5}{6}$. Com esses valores obtém-se

ω_1	1.9263 rad/s
ω_2	7.6100 rad/s
ω_3	16.7853 rad/s
ω_4	29.0692 rad/s
ω_5	44.0241 rad/s

Tabela 8.1: Cinco primeiras frequências naturais da viga biapoada de Timoshenko.

Os modos de vibração da viga biapoiada podem ser escritos como

$$\mathbf{w}_n(x) = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ Kb \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{bmatrix}, \quad (8.41)$$

com $Kb = \frac{\alpha^2 \kappa GA + \omega^2 \rho A}{\alpha \kappa GA}$, $\alpha = n\pi$.

Esses modos são ainda normalizados com relação a matriz \mathbf{M}

$$\mathbf{w}_n(x) = \frac{\mathbf{w}_n(x)}{\sqrt{\int_0^L (\mathbf{w}_n(x))^T \mathbf{M} \mathbf{w}_n(x) dx}}. \quad (8.42)$$

8.3.1 Caso linear homogêneo

Desconsiderando-se a presença de forçantes ou termos não lineares em (8.1) e (8.29), são apresentados na Figura 8.1 resultados relativos ao esquema de Adomian, pelo qual

$$\begin{aligned} w_0 &= w(0, x) + t\dot{w}(0, x), \\ \phi_0 &= \phi(0, x) + t\dot{\phi}(0, x), \end{aligned} \quad (8.43)$$

e para $k \geq 0$

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= L_t^{-1}(L_x w_k - M_x \phi_k), \\ \phi_{k+1} &= L_t^{-1}(R_x \phi_k + S_x w_k - T \phi_k). \end{aligned} \quad (8.44)$$

Comparativamente com esses resultados considera-se a resposta dinâmica semi-analítica dada por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w(t, x) \\ \phi(t, x) \end{pmatrix} &= \int_0^L (\mathbf{h}_t(t, x, \xi) \mathbf{M} \mathbf{v}_o(\xi) + \mathbf{h}(t, x, \xi) \mathbf{M} \mathbf{v}_1(\xi)) d\xi \\ &+ \int_0^t \left[\int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{F}(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau. \end{aligned} \quad (8.45)$$

com $\mathbf{h}(t, x, \xi)$ aproximada com 5 termos, tomados como os 5 primeiros modos de vibração, normalizados com relação a \mathbf{M} , da viga biapoiada.

Para fins experimentais considera-se as condições iniciais dadas como uma combinação do segundo e quinto modo de vibração, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(0, x) &= \mathbf{w}_2(x) + \mathbf{w}_5(x), \\ \mathbf{v}_t(0, x) &= i\omega_2\mathbf{w}_2(x) + i\omega_5\mathbf{w}_5(x). \end{aligned} \tag{8.46}$$

A Figura 8.1 a seguir apresenta a comparação dos casos obtidos, para a primeira componente da resposta dinâmica $w(t, x)$, determinada através da expansão de Adomian e diretamente via fórmula (8.45). Observa-se que a medida que a variável tempo é considerada maior, a aproximação torna-se pior, o que se justifica pelo fato do esquema de Adomian ser convergente apenas localmente, e também com derivações e integrações sucessivas introduzindo erros computacionais. Além disso, tem-se a inexatidão da função de Green de valor inicial $\mathbf{h}(t, x, \xi)$, aproximada com um número finito de modos.

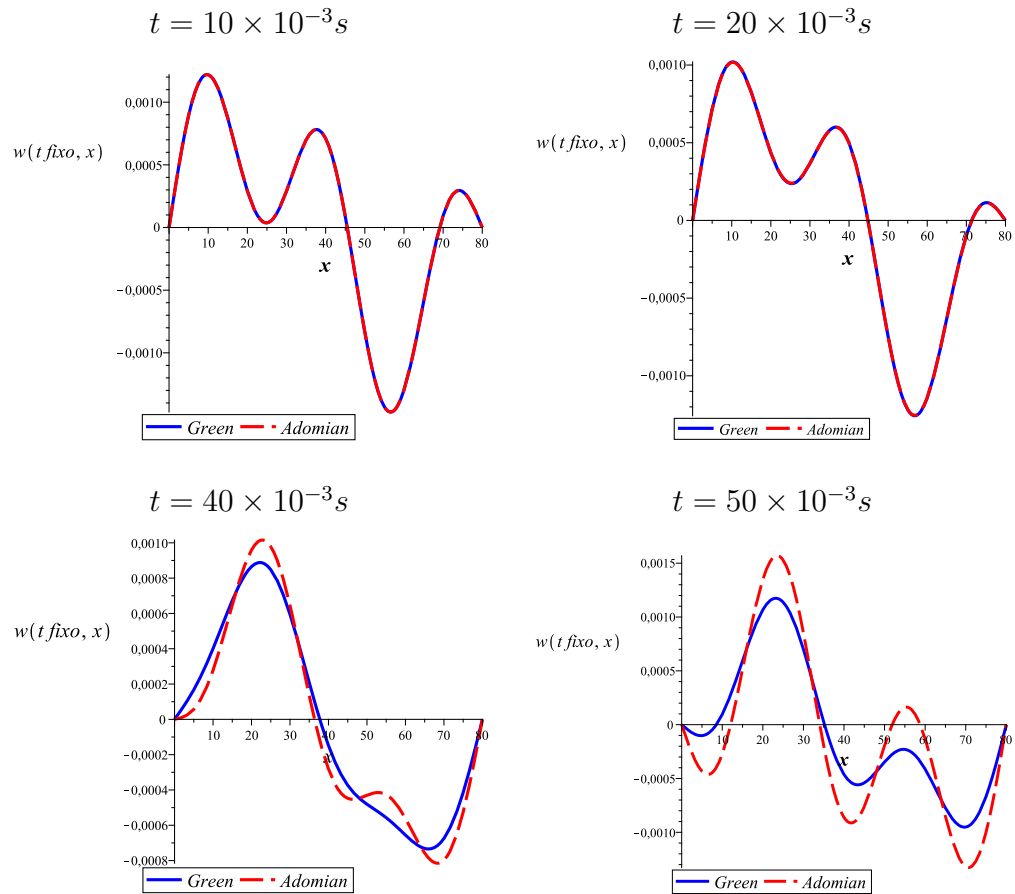


Figura 8.1: $w(t, x)$ obtida pelo esquema recursivo de Adomian (linha verde pontilhada) e $w(t, x)$ obtida via fórmulação de Green de valor inicial, com variável t fixada.

8.3.2 Forçante harmônico

Considera-se $f(t, x) = F_0 e^{i\omega_e t} F(x)$, e condições iniciais nulas em (8.1). Os Resultados a seguir são apresentados considerando $F_0 = 10^9 N$, sendo que ω_e representa a frequência de entrada e utiliza-se $\omega_e = 44 rad/s$, valor esse próximo a quinta frequência natural, relativa aos parâmetro utilizados.

Para $F(x)$ são escolhidas as seguintes configurações, relativas a sobreposição de modos de vibração

Configuração 1

$$F(x) = \mathbf{w}_2(x) + \mathbf{w}_4(x),$$

Configuração 2

$$F(x) = \mathbf{w}_2(x) + \mathbf{w}_5(x).$$

Compara-se a solução semi-analítica, da expressão (8.3) com condições iniciais nulas

$$\begin{pmatrix} w(t, x) \\ \phi(t, x) \end{pmatrix} = \int_0^t \left[\int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{F}(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau. \quad (8.47)$$

onde $\mathbf{h}(t, x, \xi)$ foi aproximada espectralmente utilizando 5 termos. Compara-se com as soluções aproximadas geradas pelas expansões $w = \sum_{k=0}^3 w_k$, com w_k definido por

$$\begin{aligned} w_0 &= L_t^{-1}(f(t, x)), \\ \phi_0 &= 0, \end{aligned} \quad (8.48)$$

e para $k \geq 0$

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= L_t^{-1}(L_x w_k - M_x \phi_k), \\ \phi_{k+1} &= L_t^{-1}(R_x \phi_k + S_x w_k - T \phi_k). \end{aligned} \quad (8.49)$$

Com os valores utilizados a solução do esquema de Adomian converge apenas em um intervalo de valores da variável t . Na figuras a seguir, apresenta-se a resposta forçada relativa a componente $w(t, x)$, para os seguintes valores da variável t fixados $t = 60 \times 10^{-3}s$, $t = 70 \times 10^{-3}s$, $t = 80 \times 10^{-3}s$, . As soluções foram ainda normalizadas devido a uma diferença de amplitudes dos resultados previstos pela decomposição Adomian, possivelmente resultante dos processos de derivação em (8.49). Também é observado que na Configuração 1 os resultados fazendo uso do esquema de Adomian estão mais próximos daqueles fazendo uso da solução fundamental distribuída do que na Configuração 2, evidenciando que a as aproximações também dependem dos forçantes considerados.

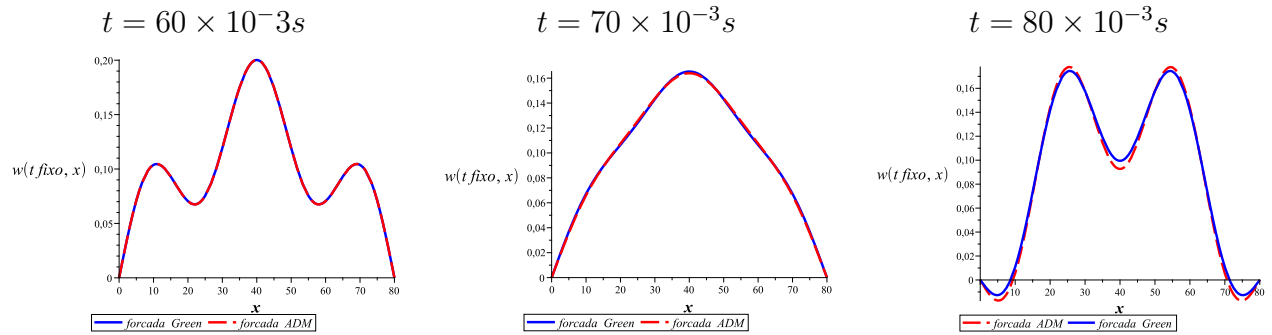


Figura 8.2: Comparação das respostas forçadas, componente $w(t, x)$, relativas a $F(x)$ definido pela Configuração 1.

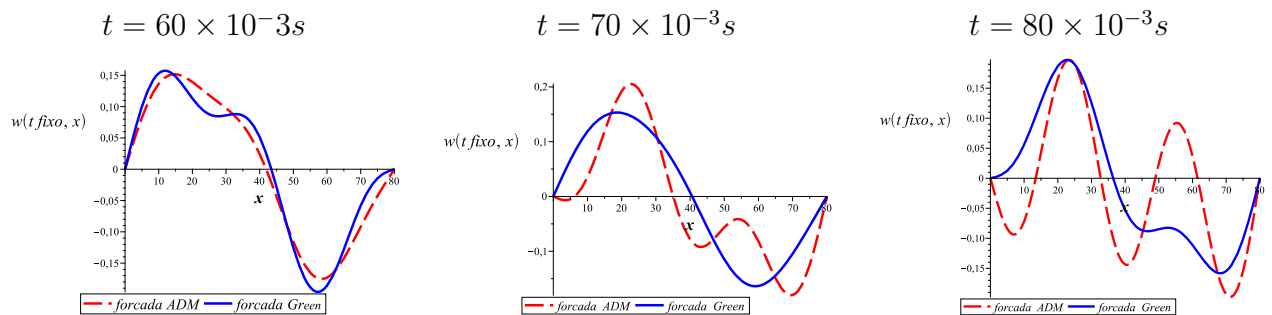


Figura 8.3: Comparação das respostas forçadas, componente $w(t, x)$, relativas a $F(x)$ definido pela Configuração 2.

8.3.3 Não linearidade cúbica

Apresentam-se resultados considerando a não linearidade cúbica, tal qual descrito na Seção 8.2. São utilizados $k_3 = 10^9 N/m^4$, e $k_3 = 0$ para o caso linear, no esquema recursivo definido em (8.34)-(8.35), com 3 termos calculados.

Foram consideradas as seguintes configurações de condições iniciais, em termos dos modos da viga biapoada:

Configuração 1. Primeiro modo como condição inicial

$$\begin{aligned} v(0, x) &= \mathbf{w}_1(x), \\ v_t(0, x) &= i\omega_1 \mathbf{w}_1(x). \end{aligned} \tag{8.50}$$

Configuração 2. Quarto modo como condição inicial

$$\begin{aligned} v(0, x) &= \mathbf{w}_4(x), \\ v_t(0, x) &= i\omega_4 \mathbf{w}_4(x). \end{aligned} \tag{8.51}$$

Configuração 3: Sobreposição primeiro e quarto modo como condição inicial

$$\begin{aligned} v(0, x) &= \mathbf{w}_1(x) + \mathbf{w}_4(x), \\ v_t(0, x) &= i\omega_1 \mathbf{w}_1(x) + i\omega_4 \mathbf{w}_4(x). \end{aligned} \tag{8.52}$$

Seguem os resultados comparativos nas Figuras 8.4, 8.5, 8.6.

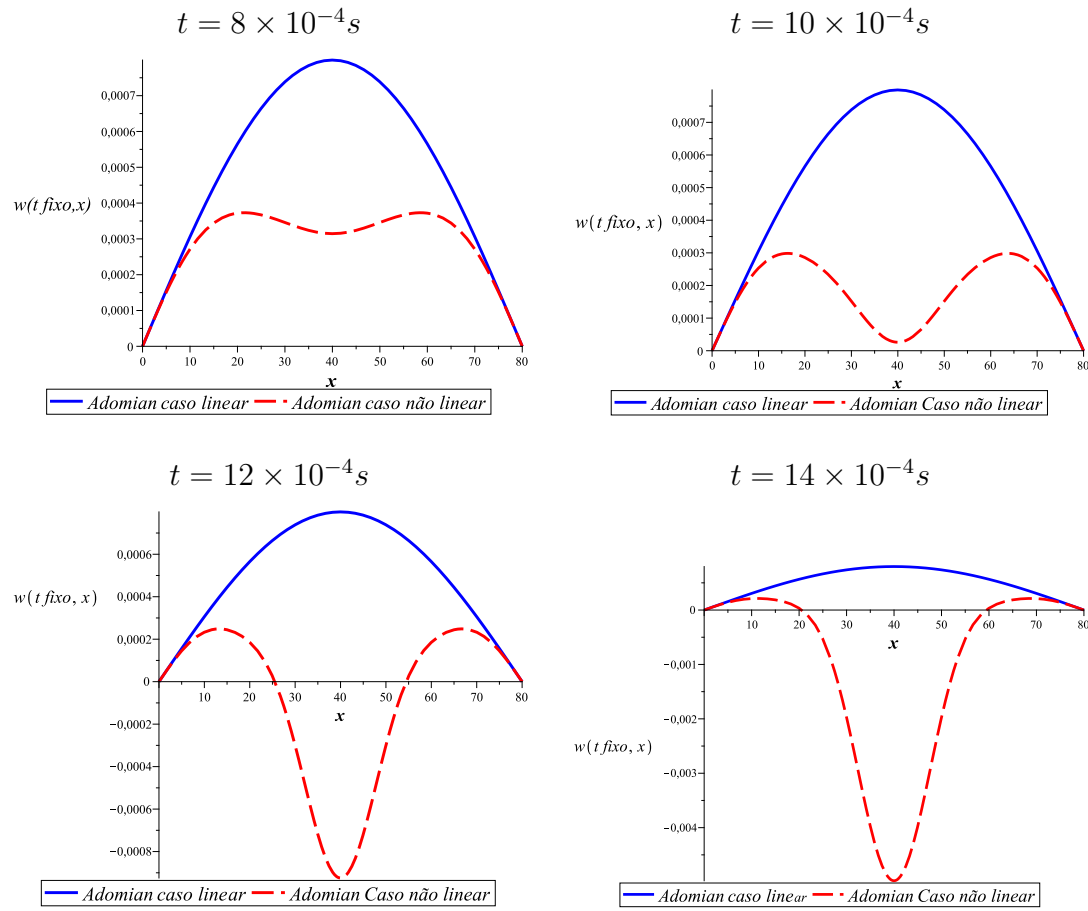


Figura 8.4: $w(t, x)$ Adomian linear (linha verde) e Adomian não linear (linha vermelha).
Condições iniciais: Configuração 1.

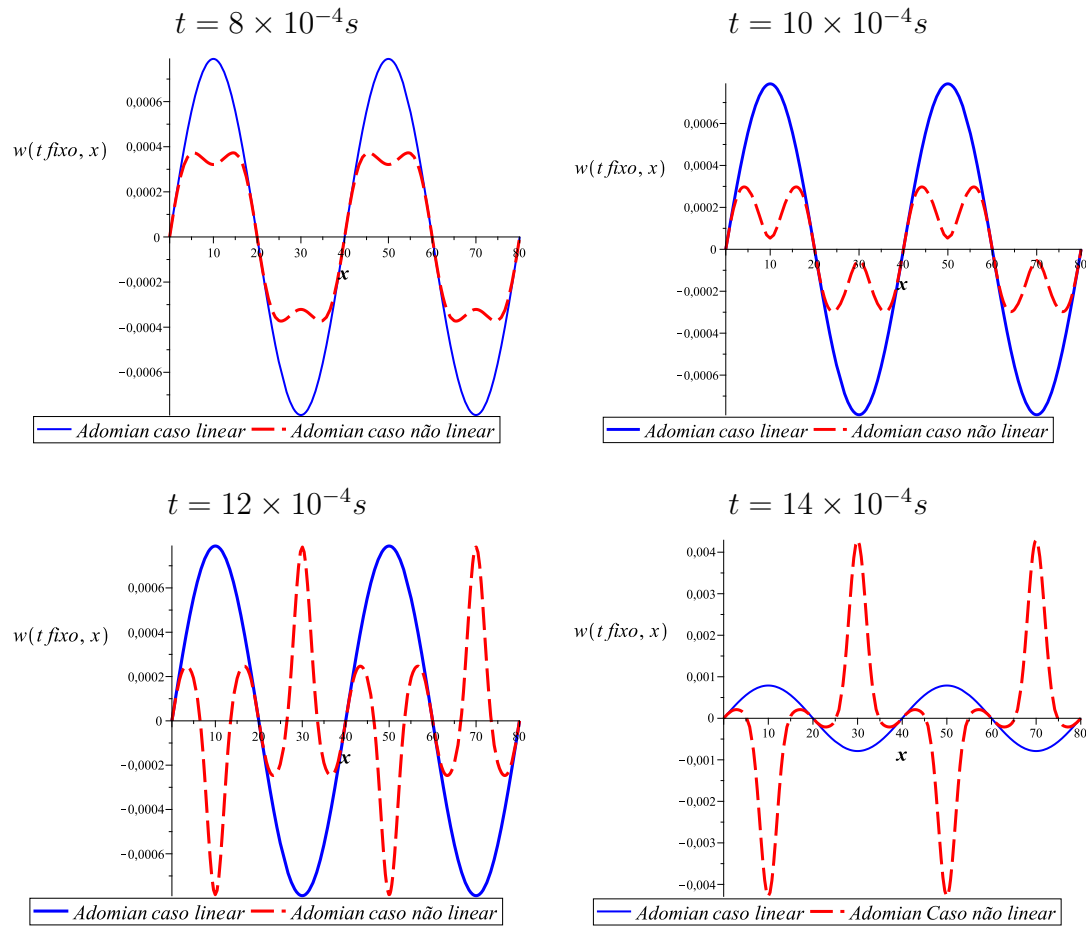


Figura 8.5: $w(t, x)$ Adomian linear (linha verde) e Adomian não linear (linha vermelha).

Condições iniciais: Configuração 2.

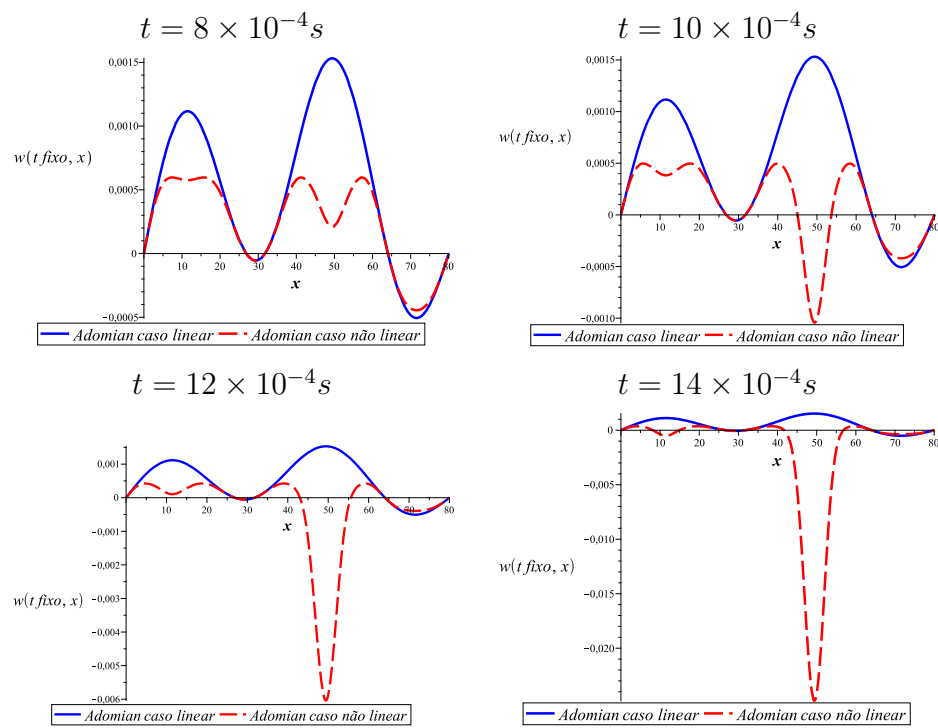


Figura 8.6: $w(t, x)$ Adomian linear (linha verde) e Adomian não linear (linha vermelha). Condições iniciais: Configuração 3.

9 CONCLUSÕES

Foi apresentado neste trabalho um estudo das vibrações de micro e nanovigas descritas por modelos não clássicos. Tais modelos, diferentes dos casos clássicos de Euler-Bernoulli e Timoshenko, levam em consideração hipóteses da mecânica do contínuo não clássica a fim de capturar os efeitos da diminuição acentuada de escala, por exemplo, quando as estruturas são reduzidas da macro para a micro ou nanoescala. Essas hipóteses não clássicas se baseiam na inclusão de parâmetros materiais de medida interna nas relações constitutivas, inclusão de termos de ordem superior na integral que descreve a energia de deformação, e hipótese de uma superfície de espessura matematicamente nula completamente aderida a viga e com parâmetros superficiais de tensão e elásticos próprios, respectivamente relacionados à teoria não local de Eringen, teoria do gradiente de deformação e teoria da elasticidade de superfície.

O tratamento das equações relativas a cada um desses modelos modificados pelas mencionadas teorias, se deu a partir da procura de soluções exponenciais no tempo, que por sua vez resultaram em problemas de autovalor regulares ou singulares para as amplitudes espaciais. Na sua formulação diferencial, observa-se que em alguns problemas de autovalor apresentam polinômios característicos de ordem superior ao caso clássico de Timoshenko. De forma sistemática tem-se

- Modelo de Timoshenko clássico: equação matricial regular com polinômio característico de ordem 4.
- Modelo de Timoshenko segundo a teoria não local de Eringen: equação matricial regular com polinômio característico de ordem 4 (tornando-se singular nos casos em que as frequências naturais atingem valores críticos).
- Modelo de Timoshenko segundo as teorias do gradiente de deformação (tensão acoplada): equação matricial regular (singular) com polinômio característico de ordem 8 (ordem 6).

- Modelo de Timoshenko que inclui efeitos de superfície: equação matricial singular com polinômio característico de ordem 4.

O comportamento das soluções é associado à natureza das raízes dos polinômios característicos, que por sua vez tem sua natureza determinada pela presença de frequências críticas.

- Para o modelo não-local de Eringen, além da frequência crítica correspondente ao caso clássico tem-se a presença de três outras frequências críticas (Ω_{b01} , Ω_{b02} , Ω_{b2}), sendo as duas primeiras de maior influência na natureza das raízes do polinômio característico;

- Para o modelo gradiente de deformação/ tensão acoplada, além da frequência crítica correspondente ao caso clássico tem-se a presença de uma outra frequência crítica de menor influência na natureza das raízes do polinômio característico;

- O modelo que inclui efeitos de superfície altera a frequência crítica clássica e, além dessa, tem outra frequência crítica de menor influência.

Soluções espaciais ou modos de vibração foram determinadas utilizando três abordagens distintas: base matricial gerada pela solução fundamental, método espectral de Euler e método da decomposição de Adomian. Sendo que o primeiro e o último destinam-se apenas aos casos regulares.

Em relação ao método da decomposição de Adomian aplicado ao modelo de Timoshenko, com a possibilidade de ser estendido ao caso não local com a mesma formulação, foram apresentadas formulações alternativas para a determinação das soluções espaciais, considerando a solução fundamental matricial espacial, expandida de três maneiras diferentes resultando esquemas iterativos equivalentes. Essas formulações foram aplicadas para os casos lineares, com resultados comparados satisfatoriamente aos da literatura. O caso linear foi também utilizado comparativamente ao caso incluindo não linearidade de natureza cúbica, ausente na literatura nessa formulação.

Através de simulações numéricas, com auxílio do software matemático simbólico Maple[®], foram apresentados resultados comparativos de modos e frequências naturais de

vibração para os casos de vigas com condições de contorno simplesmente apoiada e fixa-livre, utilizando as três abordagens mencionadas e com resultados compatíveis aos da literatura. Os principais resultados são

- As frequências naturais de vibração não locais decrescem com relação as do caso clássico. Com exceção, da primeira frequência do caso da viga fixa-livre que apresenta comportamento oposto. A primeira componente dos modos de vibração são influenciadas apenas no caso fixa-livre que inclusive apresenta modos degenerados para certos valores do parâmetro não local.

- O modelo gradiente de deformação, para vigas biapoiadas apresenta frequências naturais superiores as do caso clássico, sendo que a diferença é maior quando a espessura da viga tem medida comparável a medida de comprimento interno.

- Efeitos de superfície tendem a decrescer as frequências naturais em relação às do caso clássico, para vigas biapoiadas e fixa-livres, com exceção da primeira frequência do caso fixa-livre que apresenta comportamento oposto, utilizando valores paramétricos de vigas de Silício e Alumínio. Além disso, os efeitos de superfície tem influência apenas na nanoescala, na microescala os resultados tendem ao caso clássico.

O método da decomposição de Adomian primeiramente utilizado na obtenção de modos e frequências naturais de vibração, foi ainda aplicado na obtenção de respostas forçadas, comparadas àquelas obtidas de maneira semi-analítica considerando a resposta impulso distribuída aproximada espectralmente. Foram também apresentados resultados de respostas dinâmicas quando a viga está sujeita a uma não linearidade de natureza cúbica, também fazendo uso da decomposição de Adomian e comparativamente ao mesmo caso desconsiderando a não linearidade. O método de Adomian, da maneira como foi implementado, apresentou restrições computacionais, podendo ser aplicado apenas em intervalos limitados da variável tempo.

Em relação a trabalhos futuros, pretende-se aprimorar o uso de técnicas computacionais para tratamento numérico de raízes de polinômios de grau superior com coeficientes dependentes não linearmente das frequências, e técnicas para integração numérica da

convolução da função de Green dinâmica com componentes da decomposição de Adomian. Bem como, ampliar o estudo do tratamento analítico e numérico de soluções para modelos considerando termos não lineares, fazendo uso de outras técnicas além da decomposição de Adomian.

Referências Bibliográficas

- [1] K. Abbaoui and Y. Cherruault. Convergence of Adomian's method applied to differential equations. *Computers e Mathematics with Applications*, 28(5):103 – 109, 1994.
- [2] K. Abbaoui and Y. Cherruault. Convergence of Adomian's method applied to nonlinear equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 20(9):69 – 73, 1994.
- [3] S. Abbasion, A. Rafsanjani, R. Avazmohammadi, and A. Farshidianfar. Free vibration of microscaled Timoshenko beam. *Applied Physics Letters*, 95(14):143122, 2009.
- [4] A. Abdelrazec. Adomian decomposition method: convergence analysis and numerical approximations. Master's thesis, McMaster University, Hamilton, Ontario, 2008.
- [5] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1972.
- [6] G. Adomian. A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of mathematical analysis and applications*, 135:501–544, 1988.
- [7] G. Adomian. *Solving frontier problems of physics*. Springer, New York, 1993.
- [8] G. Adomian and R. Rach. Transformation of series. *Applied Mathematics Letters*, 4(4):69–71, 1991.
- [9] B. Akgöz and Ö. Civalek. Free vibration analysis of microtubules as cytoskeleton components: Nonlocal Euler-Bernoulli beam modeling. *Transaction B: Mechanical Engineering*, 17(5):367–375, 2010.
- [10] B. Akgöz and Ö. Civalek. Analysis of micro-sized beams for various boundary conditions based on the strain gradient elasticity theory. *Archive of Applied Mechanics*, 82:423–443, 2012.

- [11] B. Akgöz and Ö. Civalek. A size-dependent shear deformation beam model based on the strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 70:114, 2013.
- [12] M. Almazmumy, F.A. Hendi, H.O. Bakodah, and H. Alzumi. Recent modifications of Adomian decomposition method for initial value problem in ordinary differential equations. *American Journal of Computational Mathematics*, 2:228–234, 2012.
- [13] R. Ansari, R. Gholam, and M. Ali Darabi. A nonlinear Timoshenko beam formulation based on strain gradient theory. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 7(2):195–211, 2012.
- [14] R. Ansari, S. Sahmani, and B. Arash. Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets. *Physics Letters A*, 375(1):53–62, 2010.
- [15] B. Arash and R. Ansari. Evaluation of nonlocal parameter in the vibrations of single-walled carbon nanotubes with initial strain. *Physica E*, 42(8):2058–2064, 2010.
- [16] E.A. Az-Zobi and K. Al-Khaled. A new convergence proof of the Adomian decomposition method for a mixed hyperbolic elliptic system of conservation laws. *Applied Mathematics and Computation*, 217(8):4248 – 4256, 2010.
- [17] L. Behera and S. Chakraverty. Free vibration of Euler and Timoshenko nanobeams using boundary characteristic orthogonal polynomials. *Applied Nanoscience*, 4(3):347–358, 2014.
- [18] G.S. Canahualpa. *A resposta impulso em problemas vibratórios evolutivos e modais*. PhD thesis, UFRGS/Promec, Porto Alegre, 2000.
- [19] Y. Cherruault. Convergence of adomians method. *Kybernetes*, 18:31–38, 1989.
- [20] Y. Cherruault, K. Abbaoui, and V. Seng. Practical formulae for the calculus of multivariable Adomian polynomials. *Mathematical and Computer Modelling*, 22(1):89 – 93, 1995.

- [21] Y. Cherruault, G. Adomian, K. Abbaoui, and R. Rach. Further remarks on convergence of decomposition method. *International Journal of Bio-Medical Computing*, 38(1):89 – 93, 1995.
- [22] J.C.R. Claeysen. On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using dynamical matrix solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 140(1):73–84, 1990.
- [23] J.C.R. Claeysen, G. Canahualpa, and C. Jung. A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations. *Applied Numerical Mathematics*, 30(1):65–78, 1999.
- [24] J.C.R. Claeysen, L.D. Chiwiacowsky, and G.C. Suazo. The impulse response in the symbolic computing of modes for beams and plates. *Applied Numerical Mathematics*, 40:119–135, 2002.
- [25] J.C.R. Claeysen and S.N.J. Costa. Modes for the coupled Timoshenko model with restrained end. *Journal of Sound and Vibration*, 296:1053–1058, 2006.
- [26] J.C.R. Claeysen and I.F. Ferreira. *A resposta impulso em modelos evolutivos e estacionários*. Editora UFSM, Santa Maria, 2009.
- [27] J.C.R. Claeysen, I.M. Ferreira, and R.D. Copetti. Decomposition of forced responses in vibrating systems. *Applied Numerical Mathematics*, 47(1):391–405, 2003.
- [28] J.C.R. Claeysen, E. Gallicchio, and A. Tamagna. *Sistemas vibratórios amortecidos*. Editora UFRGS, Porto Alegre, 2004.
- [29] J.C.R. Claeysen and R.A. Soder. A dynamical basis for computing modes of Euler-bernoulli and Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 259(4):986–990, 2003.
- [30] J.C.R. Claeysen and L. Tonetto. Modelo de Timoshenko para vibração de vigas em nanoescala segundo a teoria do gradiente de deformação. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 3(2), 2015.

- [31] J.C.R. Claeysen, L. Tonetto, and E.A. Bravo. Efeitos de superfície no espectro do modelo de Timoshenko. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 3(1), 2014.
- [32] J.C.R. Claeysen, L. Tonetto, and D. Tolfo. Non local elastic beam models in small size structures. *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*, 6, 2015.
- [33] J.C.R. Claeysen, L. Tonetto, and T. Tsukazan. Microbeams with surface and piezoelectric effects in AFM. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 1(1), 2013.
- [34] J.C.R. Claeysen and T. Tsukazan. Dynamical solutions of linear matrix differential equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 48(1), 1990.
- [35] J.C.R. Claeysen, T. Tsukazan, J.M. Balthazar, and R.D. Copetti. The Timoshenko model in atomic force microscopy.
- [36] J.C.R. Claeysen, T. Tsukazan, and R.D. Copetti. Nonlocal effects in modal analysis of forced responses with single carbon nanotubes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 38:299–311, 2013.
- [37] J.C.R. Claeysen, T. Tsukazan, L. Tonetto, and J.M. Balthazar. Forced oscillations with continuum models of atomic force microscopy. pages 230–237, 2012.
- [38] J.C.R. Claeysen, T. Tsukazan, L. Tonetto, and D. Tolfo. Modeling the tip-sample interaction in atomic force microscopy with Timoshenko beam theory. *Nanotechnology and Mathematical Modeling*, 2(1):124–144, 2013.
- [39] R.D. Copetti. *Sistemas concentrados e distribuídos através da análise modal adjunta*. PhD thesis, UFRGS/Promec, Porto Alegre, 2002.
- [40] R.D. Copetti. *Respostas periódicas em sistemas lineares e fracamente não lineares e comportamento dinâmico de sistemas rotativos com o uso da base dinâmica*. PhD thesis, UFRGS/Promec, Porto Alegre, 2003.

- [41] R.D. Copetti, J.C.R. Claeysen, and T. Tsukazan. Modal formulation of segmented Euler-Bernoulli beams. *Mathematical Problems in Engineering*, 2007(36261), 2007.
- [42] S.N.J. Costa. *O modelo de Timoshenko em vigas elásticas, estruturas offshore e nanotubos de carbono através da resposta fundamental de valor inicial*. PhD thesis, UFRGS/PPGMap, Porto Alegre, 2006.
- [43] H. Ding, K.L. Shi, L.Q. Chen, and S-P. Yang. Dynamic response of an infinite Timoshenko beam on a nonlinear viscoelastic foundation to a moving load. *Nonlinear Dynamics*, 73(1-2):285–298, 2013.
- [44] W.H. Duan, N. Challamel, C.M. Wang, and Z. Ding. Development of analytical vibration solutions for microstructured beam model to calibrate length scale coefficient in nonlocal Timoshenko beams. *Journal of Applied Physics*, 114:104312, 2013.
- [45] W.H. Duan and C. M. Wang. Exact solutions for axisymmetric bending of micro/nanoscale circular plates based on nonlocal plate theory. *Nanotechnology*, 18(38):89–106, 2007.
- [46] R.J. Duffin. Chrystal’s theorem on differential equation systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 8:325–331, 1963.
- [47] I.L. El-Kalla. Error analysis of Adomian series solution to a class of nonlinear differential equations. *Applied Mathematics E-Notes*, 7:214 – 221, 2007.
- [48] A.C. Eringen. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54(9):4703–4710, 1983.
- [49] A.C. Eringen. *Nonlocal continuum field theories*. Springer, 2002.
- [50] R.P. Feynman. There’s plenty of room at the bottom: An invitation to enter a new field of physics. *Engineering and Science*, 23(5):22–36, 1960.
- [51] N.A. Fleck and J.W. Hutchinson. Strain gradient plasticity. *Advances in applied mechanics*, 33:295–361, 1997.

- [52] J. Freundlich. Vibrations of a simply supported beam with a fractional viscoelastic material model supports movement excitation. *Shock and Vibration*, 20:1103–1112, 2013.
- [53] E. Gallichio. *Sistemas vibratórios: um enfoque através da solução dinâmica e da matriz de transferência*. PhD thesis, UFRGS/Promec, Porto Alegre, 1999.
- [54] X.L. Gao. A new Timoshenko beam model incorporating microstructure and surface. *Acta Mechanica*, 226:457–474, 2015.
- [55] C.R. Garibotti. Respostas dinâmicas em sistemas distribuídos e decomposição forçada da superfície livre para um modelo acoplado oceano-atmosfera. Master's thesis, UFRGS/PPGMap, Porto Alegre, 2003.
- [56] Y.M. Ghugal and R. Sharma. A hyperbolic shear deformation theory for flexure and vibration of thick isotropic beams. *International Journal of Computational Methods*, 6(4):585–604, 2009.
- [57] M.K. Giaretta. Vibrações forçadas com forçial num modelo de Euler-Bernoulli para vigas. Master's thesis, UFRGS/PPGMap, Porto Alegre, 2001.
- [58] J. Ginsberg. *Mechanical and Structural Vibrations: Theory and Applications*. John Wiley and Sons, 2001.
- [59] M.E. Gurtin and A.I. Murdoch. A continuum theory of elastic material surfaces. *Archive for Analysis and Rational Mechanics*, 57:291–323, 1975.
- [60] M.E. Gurtin and A.I. Murdoch. Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 14(6):431–440, 1978.
- [61] M.E. Gurtin, J. Weismuller, and F. Larche. A general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium. *Philosophical Magazine A*, 78(5):1093–1109, 1998.
- [62] C.A. Hall and T. A. Porsching. *Numerical analysis of partial differential equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.

- [63] S.M. Han, H. Benaroya, and T. Weit. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5):935–988, 1999.
- [64] M. Hosseini and H. Nasabzadeh. On the convergence of Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 182:536–543, 2006.
- [65] S. Hosseini-Hashemi, M. Fagher, and R. Nazemnezhad. Surface effects on free vibration analysis of nanobeams using nonlocal elasticity: A comparison between Euler-Bernoulli and Timoshenko. *Journal of Solid Mechanics*, 5(3):290–304, 2013.
- [66] Z. Hryniewicz and P. Koziol. Wavelet-based solution for vibrations of a beam on a nonlinear viscoelastic foundation due to moving load. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 51(3):215–224, 2013.
- [67] J-C Hsu, H-Y Lai, and C-K Chen. An innovative eigenvalue problem solver for free vibration of uniform Timoshenko beams by using the Adomian modified decomposition method. *Journal of Sound and Vibration*, 325:451470, 2009.
- [68] Y. G. Hu, K. M. Liew, Q. Wang, X.Q. He, and B.I. Yakobson. Nonlocal shell model for elastic wave propagation in single and double walled carbon nanotubes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:3475–3485, 2008.
- [69] S. Iijima. Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature*, 354:56–58, 1991.
- [70] M.H. Kahrobaian, M. Asghari, and M.T. Ahmadian. A strain gradient Timoshenko beam element: application to MEMS. *Acta Mechanica*, 2014.
- [71] M.H. Kahrobaian, M. Asghari, and M. Nikfar. A size-dependent nonlinear Timoshenko microbeam model based on the strain gradient theory. *Acta Mechanica*, 223:1233–1249, 2012.
- [72] S.M.H. Karparvarfard, M. Asghari, and R. Vatankhah. A geometrically nonlinear beam model based on the second strain gradient theory. *International Journal of Engineering Science*, 91:63–75, 2015.

- [73] V. Klein. Um estudo evolutivo e espectral dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Master's thesis, UFRGS/PPGMap, Porto Alegre, 2006.
- [74] W.T. Koiter. Couple-stresses in the theory of elasticity: I and II. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, B:17–44, 1964.
- [75] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, and K. Wang. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 47:487–498, 2009.
- [76] P. Koziol. Wavelet approximation of Adomian's decomposition applied to the nonlinear problem of a double-beam response subject to a series of moving loads. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 52(3), 2014.
- [77] H. Kroto, J. Heath, S. O'Brien, R. Curl, and R. Smalley. C60 buckminsterfullerene. *Nature*, 318(1):162–163, 1985.
- [78] H-Y Lai, J-C Hsu, and C-K Chen. An innovative eigenvalue problem solver for free vibration of Euler-Bernoulli beam by using the Adomian decomposition method. *Computers and Mathematics with Applications*, 56:3204–3220, 2008.
- [79] D.C.C. Lam, F. Yang, A.C.M. Chonga, J. Wang, and P. Tong. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51:1477–1508, 2003.
- [80] J. Lee and W.W. Schultz. Eigenvalue analysis of Timoshenko beams and axisymmetric Mindlin plates by the pseudospectral method. *Journal of Sound and Vibration*, 269(35):609 – 621, 2004.
- [81] M. Levinson and D.W. Cooke. On the two frequency spectra of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 84(3):319–326, 1982.
- [82] C.W. Lim. On the truth of nanoscale for nanobeams based on nonlocal elastic stress field theory: equilibrium, governing equation and static deflection. *Applied Mathematics and Mechanics*, 31(1):37–54, 2010.

- [83] C.W. Lim, G. Zhang, and J.N. Reddy. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 78:298–313, 2015.
- [84] C. Liu and R.K.N.D Rajapakse. Continuum models incorporating surface energy for static and dynamic response of nanoscale beams. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 9:422–431, 2010.
- [85] P. Lu, L. He, and H.P. Lee. Thin plate theory including surface effects. *International Journal of Solids and Structures*, 43(16):4631–4647, 2006.
- [86] P. Lu, H.P. Lee, C. Lu, and P.Q. Zhang. Dynamic properties of flexural beams using a nonlocal elasticity model. *Journal of Applied Physics*, 99:073510, 2006.
- [87] P. Lu, H.P. Lee, C. Lu, and P.Q. Zhang. Application of nonlocal beam models for carbon nanotubes. *International Journal of Solids and Structures*, 44:5289–5300, 2007.
- [88] J.B. Zhou M. Zhang, G. Meng and J.Y. Chen. Nonlinear dynamics and chaos of microcantilever-based TM-AFMs with squeeze film damping effects. *Sensors*, 9:3854–3874, 2009.
- [89] H.M. Ma, X.-L Gao, and J.N. Reddy. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:3379–3391, 2008.
- [90] A.I. Manevich. Dynamics of Timoshenko beam on linear and nonlinear foundation: Phase relations, significance of the second spectrum, stability. *Journal of Sound and Vibration*, 344:209–220, 2015.
- [91] Q. Mao. Free vibration analysis of elastically connected multiple-beams by using the Adomian modified decomposition method. *Mathematical and computer modelling*, 54:756–764, 2011.
- [92] L. Meirovitch. *Fundamentals of Vibration*. McGraw-Hill Book Company, New York, 2001.

- [93] R. Miller and V. B. Shenoy. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*, 11:139–147, 2000.
- [94] R.D. Mindlin. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1:417–438, 1965.
- [95] R.D. Mindlin and H.F. Tiersten. Effects of couple-stress in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11:415–448, 1962.
- [96] I.F. Moraes. *Uma metodologia unificada no domínio tempo para sistemas concentrados, discretos e distribuídos*. PhD thesis, UFRGS/Promec, Porto Alegre, 2002.
- [97] M.A. Nojournian and H. Salareieh. Comment on “A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory”. *European Journal of Mechanics A/Solids*, pages 1–2, 2014.
- [98] M.D Paola, G. Failla, A. Sofi, and M. Zingales. On the vibrations of a mechanically based non-local beam model. *Computational Materials Science*, 64:278–282, 2012.
- [99] M.D. Paola and M. Zingales. Long-range cohesive interactions of non-local continuum faced by fractional calculus. *International Journal of Solids and Structures*, 45:5642–5659, 2008.
- [100] J. Peddieson, G.R. Buchanan, and R.P. McNitt. Application of nonlocal continuum model to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 41(3-5):305–312, 2003.
- [101] I.G. Petrovski. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, 1984.
- [102] M.E.A. Rabie and T.M. Elzaki. A study of some systems of nonlinear partial differential equations by using Adomian and modified decomposition methods. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, 7(6):61–67, 2014.
- [103] R. Rach, G. Adomian, and R.E. Meyers. A modified decomposition. *Computers and Mathematics with Applications*, 23(1):17–23, 1992.

- [104] S. Rao. *Vibration of Continuous Systems*. John Wiley, 2007.
- [105] E. Reiss and B.J. Matkowsky. Nonlinear dynamic buckling of a compressed elastic column. *Quarterly of Applied Mathematics*, 29:245–260, 1971.
- [106] R.J.R. Reys. *Um modelo matemático de Timoshenko não-linear para uma viga elástica com força axial*. PhD thesis, UFRGS/PPGMap, Porto Alegre, 2009.
- [107] P. Ruge and C. Birk. A comparison of infinite Timoshenko and EulerBernoulli beam models on Winkler foundation in the frequency and time domain. *Journal of Sound and Vibration*, 304(35):932 – 947, 2007.
- [108] S. Sahmani and R. Ansari. Nonlocal beam models for buckling of nanobeams using state-space method regarding different boundary conditions. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25(9):2365–2375, 2011.
- [109] A. Salehi-Khojin, S. Bashash, and N. Jalili. Modeling and experimental vibration analysis of nanomechanical cantilever active probes. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 18, 2008.
- [110] M. Scotti. O problema quadrático de autovalor em vibrações e nanotecnologia. Master’s thesis, UFRGS/PPGMap, Porto Alegre, 2007.
- [111] V. Seng, K. Abbaoui, and Y. Cherruault. Adomian’s polynomials for nonlinear operators. *Mathematical and Computer Modelling*, 24(1):59 – 65, 1996.
- [112] C.M. Silva. O modelo de Timoshenko em nanotubos de carbono duplos e o efeito de van der Waals. Master’s thesis, UFRGS/PPGMap, Porto Alegre, 2009.
- [113] R.A. Soder. Modos flexurais sob a influência de uma força axial. Master’s thesis, UFRGS/PPGMap, Porto Alegre, 2000.
- [114] S.P. Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine*, 41:744–746, 1921.

- [115] S.P. Timoshenko. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine*, 43:125–131, 1922.
- [116] S.P. Timoshenko and D.H. Young. *Vibration Problems in Engineering*. Princeton, Van Nostrand, 3 ed edition, 1961.
- [117] D. Tolfo. Sobre o espectro de frequências do modelo de Timoshenko para uma viga biapoiada. Master's thesis, UFRGS/PPGMap, Porto Alegre, 2013.
- [118] L. Tonetto. Modelos elásticos para vigas segmentadas em microscopia de força atômica. Master's thesis, UFRGS/PPGMap, Porto Alegre, 2011.
- [119] T. Tsukazan. The use of a dynamical basis for computing the modes of a beam system with a discontinuous cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 281:1175–1185, 2005.
- [120] B. Wang, J. Zhao, and S. Zhou. A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29:591–599, 2010.
- [121] G.F Wang and X.Q Feng. Effects of surface elasticity and residual surface tension on the natural frequency of microbeams. *Applied Physics Letters*, 90:231904, 2007.
- [122] L.F. Wang and H.Y. Hu. Flexural wave propagation in single-walled carbon nanotubes. *Physical Review B*, 71(19):195412, 2005.
- [123] Q. Wang and V.K. Varadan. Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics. *Smart materials and structures*, 15:659–666, 2006.
- [124] A.M Wazwaz. A comparison between the variational iteration method and Adomian decomposition method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1):129–136, 2007.
- [125] A.M. Wazwaz. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

- [126] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, and P. Tong. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39:2731–2743, 2002.
- [127] Y. Yang, H. Ding, and L.Q. Chen. Dynamic response to a moving load of a Timoshenko beam resting on a nonlinear viscoelastic foundation. *Acta Mechanica Sinica*, 29(5):718–727, 2013.
- [128] X. Zhang, K. Jiao, P. Sharma, and B.I. Yakobson. An atomistic and non-classical continuum field theoretic perspective of elastic interactions between defects (force dipoles) of various symmetries and application to graphene. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(11):2304–2329, 2006.
- [129] Y.Q. Zhang, G.R. Liu, and X.Y. Xie. Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity. *Physical Review B*, 71(19):195404, 2005.
- [130] Y.Y. Zhang, C.M. Wang, and V.B.C. Tan. Assessment of Timoshenko beam models for vibrational behavior of single-walled carbon nanotubes using molecular dynamics. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 1(1):89–106, 2009.

Apêndice A **MODELOS CLÁSSICOS PARA VIBRAÇÃO TRANSVERSAL DE VIGAS**

A mecânica dos meios contínuos é a parte da Física que trata de sólidos e fluídos, quando são considerados um conjunto contínuo de pontos materiais que podem ser identificados pela posição que ocupam no espaço físico tridimensional. Em mecânica do contínuo, uma viga é um elemento estrutural prismático cuja dimensão na direção horizontal, correspondente ao comprimento L é maior que as outras duas dimensões laterais largura b e espessura H , de modo que, assim como barras e eixos é utilizada a hipótese de apenas uma dimensão ser necessária para descrever seu comportamento. Considera-se que as vigas são capazes de suportar carregamentos de flexão ou carregamentos laterais, ou seja, forças e momentos perpendiculares ao eixo do comprimento ou eixo longitudinal na direção x . O eixo x é considerado na direção do eixo neutral da viga e os eixos y e z paralelos as direções principais, compondo assim o sistema de coordenadas. A vibração transversal da viga se refere a vibração na direção z , perpendicular ao eixo x .

As teorias que preveem o comportamento de elementos estruturais, em particular vigas, são baseadas em hipóteses da sua geometria, carregamentos, hipóteses sobre o campo de deslocamentos, descrição cinemática e relações constitutivas. A descrição cinemática é simplificada pela hipótese das deformações infinitesimais, e em relação as relações constitutivas são considerados materiais homogêneos lineares isotrópicos.

Dentre as teorias elásticas clássicas para vigas, destacam-se a teoria de Euler-Bernoulli e a teoria de Timoshenko [104], [92], [58]. É conhecido que a teoria da flexão da viga de Euler-Bernoulli, ou também chamada teoria clássica ou elementar, desconsidera efeitos de deformação por cisalhamento e inércia rotária. A teoria é adequada para vigas esbeltas (*slender beams*) para as quais a razão L/H é superior a 20, e não adequada para vigas curtas (*thick beams*), cuja razão L/H é inferior a 10, já que é baseada na hipótese que as seções planas ao eixo neutral permanecem planas e perpendiculares ao eixo neutral durante

e após a deformação, implicando que a deformação por cisalhamento transversal é nula. Em consequência disso (negligenciar os efeitos de cisalhamento), a teoria clássica subestima deflexões e superestima as frequências naturais no caso de vigas curtas, onde os efeitos da deformação por cisalhamento são significativos [56]. Timoshenko [114] foi um dos primeiros a investigar a inclusão dos efeitos de inércia rotatória e deformação por cisalhamento na teoria de vigas. Mostrou que o efeito do cisalhamento transversal é mais significativo que o da inércia rotatória sobre a vibração transversal de barras prismáticas. Sua teoria é referida como teoria da viga de Timoshenko ou teoria da deformação de cisalhamento de primeira ordem. Nessa teoria, a deformação transversal de cisalhamento é assumida constante através da espessura da viga e então requer um fator de correção de cisalhamento para apropriadamente representar a energia de deformação.

Equações governantes para vibrações transversais de acordo com teoria da elasticidade linear

Campo de deslocamentos

A viga é composta de material elástico linear uniforme e isotrópico. É considerado que a seção transversal é retangular, então a viga ocupa a região $0 \leq x \leq L$; $-b/2 \leq y \leq b/2$; $-h \leq z \leq h$, sendo x, y, z as coordenadas cartesianas, L é o comprimento, b é a largura e $H = 2h$ é a espessura total da viga, de acordo com Figura A.1.

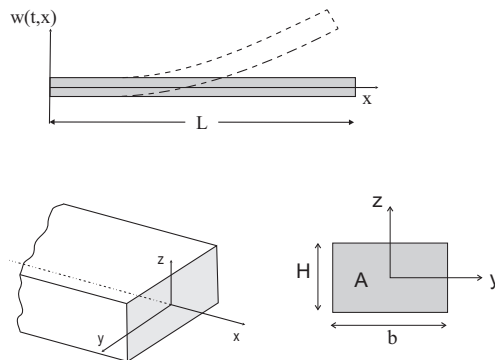


Figura A.1: Representação do deslocamento transversal da viga e seu sistema de coordenadas cartesianas.

Assumindo que as deformações da viga ocorrem na direção longitudinal-transversal e não na direção da largura, em determinado tempo t é considerado que os componentes de deslocamento axial, na direção da largura e vertical (u_1, u_2, u_3) , ao longo dos eixos (x, y, z) são somente dependentes das coordenadas x e z . Então o campo de deslocamentos pode ser escrito como

$$\begin{aligned} u_1(t, x, z) &= -z \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} + \psi(z) \left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \phi(t, x) \right), \\ u_2(t, x, z) &= 0, \\ u_3(t, x, z) &= w(t, x), \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde $w(t, x)$ e $\phi(t, x)$ são, respectivamente, o deslocamento transversal e angular da viga, e $\psi(z)$ varia de acordo com a teoria em consideração [108]

$$\begin{aligned} \text{Euler - Bernoulli} : \quad & \psi(z) = 0, \\ \text{Timoshenko} : \quad & \psi(z) = z. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Relações tensão-deformação

Considerando deformações infinitesimais, define-se o tensor de deformações, em notação indicial convencional, com índices latinos de 1 a 3

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \tag{A.3}$$

Das considerações sobre o campo dos deslocamentos tem-se o tensor das deformações

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & \gamma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

Através de relações constitutivas, específicas de acordo com o tipo de material considerado, obtém-se relações entre as tensões e deformações. Para materiais elásticos isotrópicos lineares, e sob a hipótese de deformações infinitesimais

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \tag{A.5}$$

com o tensor de quarta ordem simétrico definido por

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

podendo ser escrito como

$$\sigma_{ij} = [\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})]\varepsilon_{kl}, \quad (\text{A.7})$$

onde δ_{ij} é o operador delta de Kronecker, λ e μ são as constantes de Lamé, relacionadas com o módulo de Young E , coeficiente de Poisson ν , módulo de elasticidade transversal G ou μ e módulo volumétrico k , através das relações

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad G = \mu, \quad k = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad (\text{A.8})$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

O tensor tensão pode então ser escrito como

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} & 0 & 2\mu\gamma_{xz} \\ & \lambda\varepsilon_{xx} & 0 \\ 2\mu\gamma_{xz} & 0 & \lambda\varepsilon_{xx} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

A fim de obter trações superficiais nulas nas laterais da viga são negligenciados os efeitos do coeficiente de Poisson, de maneira que $\nu = 0$ e conseqüentemente $\lambda = 0$ e $E = 2\mu$. Então

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} E\varepsilon_{xx} & 0 & 2G\gamma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2G\gamma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} são as tensões normais, ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} são as deformações normais, τ_{xy} , τ_{yz} e τ_{xz} são as tensões cisalhantes, γ_{xy} , γ_{yz} e γ_{xz} são as deformações cisalhantes.

Viga de Timoshenko

Sendo o campo de deslocamentos dado por

$$\begin{aligned} u_1(t, x, z) &= -z\phi(t, x), \\ u_2(t, x, z) &= 0, \\ u_3(t, x, z) &= w(t, x), \end{aligned}$$

as componentes de deformação e tensão não nulas são dadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = -z \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right), \\ \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xz}, \quad \tau_{xy} = \sigma_{xz} &= 2G\gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right). \end{aligned} \tag{A.11}$$

Uma vez que γ_{xy} é tomado constante através da espessura da viga, como uma tentativa de correção desse cisalhamento, inclui-se o coeficiente κ , designado como coeficiente de cisalhamento de Timoshenko, dependente da forma da seção transversal. Tal valor é tabelado e disponível para diferentes seções transversais, por exemplo, para seções circulares $\kappa = \frac{6(1+\nu)}{(7+\nu)}$ e para seções retangulares $\kappa = \frac{10(1+\nu)}{(12+11\nu)}$.

A força de cisalhamento, já com a inclusão do fator de correção κ , é definida como [58]

$$S = \int_A \tau_{xz} dA = G \int_A \gamma_{xz} dA = \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right), \tag{A.12}$$

sendo $A = \int \int_A dydz$ é a área da seção transversal. O momento fletor é definido como

$$M = - \int_A \sigma_{xx} z dA = - \int_A E \varepsilon_{xx} z dA = EI \frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{A.13}$$

sendo que $I = \int \int_A z^2 dydz$ é o momento de inércia da seção transversal. Por exemplo, para área de seção transversal retangular $I = \frac{bH^3}{12}$.

Considerando o equilíbrio de forças na direção vertical do elemento infinitesimal da viga [58]

$$\frac{\partial S}{\partial x} + f = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (\text{A.14})$$

e o equilíbrio de momentos sobre o eixo y passando através do eixo neutral

$$\frac{\partial M}{\partial x} + S = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (\text{A.15})$$

sendo $\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ a inércia rotatória, ou seja, o produto entre momento de inércia de massa I e aceleração angular, com ρ densidade de massa.

Resultam as equações governantes

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right) &= f(t, x), \\ \rho I \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \phi(t, x) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

com condições de contorno clássicas definidas na Tabela A.1.

Extremidade Fixa	$w = 0, \phi = 0$
Extremidade Apoiada	$w = 0, EI \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
Extremidade Livre	$EI \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = 0$
Extremidade Deslizante	$\phi = 0, \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = 0$

Tabela A.1: Condições de contorno clássicas para a viga de Timoshenko.

Viga de Euler-Bernoulli

Do campo de deslocamentos proposto nessa teoria

$$\begin{aligned} u_1(t, x, z) &= -z \frac{\partial w(t, x)}{\partial x}, \\ u_2(t, x, z) &= 0, \\ u_3(t, x, z) &= w(t, x), \end{aligned}$$

e da hipótese que não há deformações por cisalhamento, segue que

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} -Ez \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

e

$$M = - \int_A \sigma_{xx} z dA = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (\text{A.18})$$

onde EI é definida como rigidez flexural da viga e depende de ambas as propriedades geométrica e material.

A força de cisalhamento é descrita por

$$S = -EI w_{xx} = -\frac{\partial M}{\partial x}. \quad (\text{A.19})$$

Equacionando o equilíbrio de forças na direção z [58]

$$S_x + f_z = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (\text{A.20})$$

obtém-se a equação

$$\rho A \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(t, x)}{\partial x^4} = f(t, x), \quad \forall t, \forall x \in (0, L), \quad (\text{A.21})$$

com condições de contorno clássicas descritas na Tabela A.2.

Extremidade Fixa	$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0$
Extremidade Apoiada	$w = 0, EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$
Extremidade Livre	$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$
Extremidade Deslizante	$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$

Tabela A.2: Condições de contorno clássicas para a viga de Euler-Bernoulli.

Apêndice B MÉTODO DE FERRARI

De acordo com [5] dado o polinômio

$$P(\beta, \omega) = \beta^8 + g^2\beta^6 - r^4\beta^4 + r^6\beta^2 - r^8, \quad (\text{B.1})$$

com

$$g^2 = \frac{b_2}{b_0}, \quad r^4 = -\frac{b_4}{b_0}, \quad r^6 = \frac{b_6}{b_0}, \quad r^8 = -\frac{b_8}{b_0}. \quad (\text{B.2})$$

Fazendo $x = \beta^2$,

$$x^4 + g^2x^3 - r^4x^2 + r^6x - r^8 = 0, \quad (\text{B.3})$$

cujas raízes são dadas por

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 8q}}{4}, \quad (\text{B.4})$$

com

$$p = g^2 \pm \sqrt{(g^2)^2 + 4r^4 + 4y_1}, \quad (\text{B.5})$$

$$q = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 + 4r^8},$$

sendo y_1 solução real da cúbica

$$\begin{aligned} & y^3 + r^4y^2 + (r^6g^2 + 4r^8)y + 4r^4r^8 + (g^2)^2r^8 - (r^6)^2 \\ & = y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

cujas raízes podem ser calculadas via fórmula de Cardano. Escolhe-se

$$Q = \frac{a_1}{3} - \frac{a_2^2}{9}, \quad (\text{B.7})$$

$$R = \frac{1}{6}(a_1a_2 - 3a_0) - \frac{1}{27}a_2^3.$$

E também

$$s_1 = (R + (Q^3 + R^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}},$$

(B.8)

$$s_2 = (R - (Q^3 + R^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}.$$

Tem-se

- Se $Q^3 + R^2 > 0$: 1 raiz real e 1 par de complexos conjugados.
- Se $Q^3 + R^2 < 0$: todas reais.
- Se $Q^3 + R^2 = 0$: todas reais e no mínimo duas iguais.

E as raízes são escritas como

$$y_1 = s_1 + s_2 - \frac{a_2}{3},$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(s_1 + s_2) - \frac{a_2}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2),$$

(B.9)

$$y_3 = \frac{1}{2}(s_1 + s_2) - \frac{a_2}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2).$$

Apêndice C CONVERGÊNCIA DO ESQUEMA DE ADOMIAN

O estudo da convergência do método de Adomian tem como ponto de partida o método de Picard para a o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(t, y), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

cuja solução é equivalente a solução da equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds. \quad (\text{C.2})$$

Considera-se o esquema

$$y^{(n+1)} = y_0 + \int_0^t f(s, y^{(n)}(s)) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.3})$$

A convergência das aproximações sucessivas (C.3) pode ser vista em [101]. Basicamente é uma convergência uniforme quando y_n é escrito em uma forma telescópica.

Procura-se em (C.2)

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \quad (\text{C.4})$$

supondo que $f(t, y)$ seja dada em termos dos polinômios de Adomian

$$f(t, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t, y_0, \dots, y_n), \quad (\text{C.5})$$

ou seja,

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_0 + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s, y_0, \dots, y_n) ds. \quad (\text{C.6})$$

e então a relação

$$\sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1} - \int_0^t A_n(s, y_0, \dots, y_n) ds) = 0 \quad (\text{C.7})$$

sugere o esquema

$$y_{n+1}(t) = \int_0^t A_n(s, y_0(s), \dots, y_n(s)) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.8})$$

A convergência do esquema de Adomian (C.8) para funções reais e analíticas, de maneira local, foi obtida em [4]. A prova envolve argumentos de majoração análogos aos da prova do teorema de Cauchy para equações diferenciais ordinárias [101]. No caso de equações parciais de primeira ordem foi mostrado por [4] utilizando o argumento da majoração do teorema de Cauchy-Kovaleskaya em um esquema de convolução do operador fundamental com os polinômios de Adomian [4], [62].

Notas

- A convergência do método da decomposição de Adomian foi estudada em diversos trabalhos para classes de equações diferenciais ordinárias e parciais [19], [4], [64], [16].
- Comparações desse método com outros métodos, por exemplo, Série de Taylor, Picard, Runge-Kutta, podem ser encontrados em [4], [124].

Apêndice D FÓRMULA DA CONVOLUÇÃO DA EXPONENCIAL

Objetiva-se mostrar que

$$\int_0^x e^{(a(x-\tau))} \tau^k d\tau = \frac{-x^k}{a} + \sum_{j=1}^k \frac{-k!}{(k-j)!} x^{k-j} + e^{ax} \frac{k!}{a^{k+1}}, \quad (\text{D.1})$$

Usando o fato que $\int_0^x e^{(a(x-\tau))} \tau^k d\tau$ é resposta forçada do PVI

$$\begin{cases} u' - au = x^k, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

tem-se que $u = u_{hp} + u_p$, onde u_{hp} é a solução homogênea induzida pela particular e u_p é a solução particular, da forma

$$u_p = \sum_{j=0}^k a_j x^j. \quad (\text{D.3})$$

Substituindo (D.3) em (D.2) resulta

$$\sum_{j=0}^{k-1} ((j+1)a_{j+1} - aa_j)x^j - aa_k x^k = x^k, \quad (\text{D.4})$$

e então $a_k = -1/a$.

Para $j = k - 1$

$$a_{k-1} = \frac{-k}{a^2}. \quad (\text{D.5})$$

Para $j = k - 2$

$$a_{k-2} = \frac{-k \cdot (k-1)}{a^3}, \quad (\text{D.6})$$

e assim sucessivamente

$$a_{k-j} = \frac{k!}{(k-j)! a^{j+1}}. \quad (\text{D.7})$$

Fazendo a translação $j = k - j$ resulta

$$u_p(x) = \frac{-x^k}{a} + \sum_{j=1}^k a_{k-j} x^{k-j} = \frac{-x^k}{a} + \sum_{j=1}^k \frac{-k!}{(k-j)!} x^{k-j}. \quad (\text{D.8})$$

A solução particular calculada em $x = 0$ é

$$u_p(0) = \frac{-k!}{a^{k+1}}, \quad (\text{D.9})$$

logo

$$u(x) = \frac{-x^k}{a} + \sum_{j=1}^k \frac{-k!}{(k-j)!} x^{k-j} + e^{ax} \frac{k!}{a^{k+1}}, \quad (\text{D.10})$$

como desejava-se mostrar.