

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

GABRIEL WADIH DE OLIVEIRA FERREIRA

SMART BETA: UMA APLICAÇÃO AO MERCADO DE AÇÕES BRASILEIRO

Porto Alegre

2015

GABRIEL WADIH DE OLIVEIRA FERREIRA

SMART BETA: UMA APLICAÇÃO AO MERCADO DE AÇÕES BRASILEIRO

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Ribeiro de Macêdo.

Porto Alegre

2015

CIP - Catalogação na Publicação

Ferreira, Gabriel Wadih de Oliveira
Smart Beta: uma aplicação ao mercado de ações
brasileiro / Gabriel Wadih de Oliveira Ferreira. --
2015.
57 f.

Orientador: Guilherme Ribeiro de Macêdo.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas,
Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre,
BR-RS, 2015.

1. Smart Beta. 2. Otimização de Carteiras. 3.
Ibovespa. I. Macêdo, Guilherme Ribeiro de, orient.
II. Título.

GABRIEL WADIIH DE OLIVEIRA FERREIRA

SMART BETA: UMA APLICAÇÃO AO MERCADO DE AÇÕES BRASILEIRO

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Aprovada em: Porto Alegre, 03 de Agosto de 2015.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Guilherme Ribeiro de Macêdo – Orientador
UFRGS

Prof. PhD Marcelo Scherer Perlin
UFRGS

Prof. Dr. Regis Augusto Ely
UFPeI

Prof. Dr. Igor Alexandre Clemente de Morais
UNISINOS

RESUMO

O objetivo dessa dissertação é avaliar o desempenho do Ibovespa a partir de uma nova ponderação dos ativos utilizando estratégias *Smart Beta* baseadas no risco. Para obter essas carteiras, restritas para vendas a descoberto, foram utilizadas três matrizes de covariância diferentes: matriz de covariância amostral, matriz *RiskMetrics* e o método de encolhimento conforme Ledoit & Wolf (2004). As medidas de desempenho fora da amostra utilizadas indicam que as estratégias *Smart Beta* utilizadas proporcionam melhores resultados em termos de retorno anualizado e volatilidade em relação ao Ibovespa no período analisado.

Palavras-chave: *Smart Beta*. Otimização de Carteiras. Ibovespa.

ABSTRACT

The goal of this dissertation is to evaluate the performance of the Ibovespa from a re-weighting of assets using risk-based Smart Beta strategies. For these portfolios, long-only, three different covariance matrices were used: sample covariance matrix, RiskMetrics and the Shrinkage method as Ledoit & Wolf (2004). The performance measures used indicate that Smart Beta strategies provide better results in terms of annualized returns and volatility in relation to the Ibovespa in the period analyzed.

Keywords: Smart Beta. Portfolio Optimization. Ibovespa.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	5
2 REVISÃO DA LITERATURA	8
3 METODOLOGIA.....	13
3.1 <i>CAP-WEIGHTED INDEX</i>	13
3.2 ÍNDICES PONDERADOS COM BASE EM OUTROS CRITÉRIOS	16
3.2.1 Indexação fundamentalista	16
3.2.2 Indexação baseada no risco	18
3.2.2.1 <i>Equally Weighted (1/N)</i>	19
3.2.2.2 <i>Mínima Variância (MV)</i>	20
3.2.2.3 <i>Most Diversified Portfolio (MDP)</i>	22
3.2.2.4 <i>Equal Risk Contribution (ERC)</i>	26
3.2.2.5 <i>Comparação entre as estratégias</i>	30
3.3 ESTIMAÇÕES DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA.....	30
3.3.1 Matriz de Covariância Amostral	31
3.3.2 Método EWMA/<i>RiskMetrics</i>	32
3.3.3 Método de encolhimento (<i>Shrinkage</i>)	32
4 AVALIAÇÃO EMPÍRICA	34
4.1 BASE DE DADOS E PROCEDIMENTOS	34
4.2 ÍNDICE BOVESPA	37
4.3 INDICADORES DE DESEMPENHO	39
5 RESULTADOS	43
6 COMPARAÇÃO COM FUNDOS DE INVESTIMENTOS.....	46
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	50
REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO

No universo dos fundos de investimento, existem dois tipos de estratégias no que se refere à gestão. Os fundos podem ser considerados de gestão ativa ou passiva.

Os fundos de gestão ativa possuem como objetivo superar a rentabilidade de um determinado índice de referência. Nesse caso os gestores irão procurar alternativas de investimentos que tragam um maior retorno combinado com uma maior exposição ao risco. No Brasil, os fundos multimercados podem ser considerados de gestão ativa, já que podem realizar uma combinação de instrumentos de investimentos em mercados como de renda fixa, ações, cambial, entre outros, a fim de obter maior retorno.

Já os fundos de gestão passiva, diferentemente do primeiro, buscam replicar o desempenho de uma carteira de mercado, como por exemplo, o Ibovespa ou IBRX-100. Para isso o gestor pode comprar todas as ações que compõem esse índice ou realizar investimentos por meio de ETF's. Porém, isso sempre será feito de forma a acompanhar o índice que se deseja replicar.

No Brasil, diferentemente do que ocorre nos Estados Unidos, os fundos indexados rendem menos que os ativos. Isso pode ser explicado por dois motivos. O primeiro deles refere-se ao custo dos fundos indexados. Mesmo apenas seguindo carteiras já existentes no mercado, grande parte deles é gerida por grandes bancos que cobram maiores taxas de administração em relação aos fundos de gestoras menores. Além disso, há poucos índices disponíveis no mercado que os fundos indexados podem replicar, inibindo assim produtos mais sofisticados e rentáveis.

Considerando todas as categorias de fundos existentes no país em agosto de 2013, o patrimônio em fundos indexados é de 1,2 bilhões de reais e em fundos ativos 21 bilhões de reais (LOCATELLI, 2013). Nos Estados Unidos essa diferença também é grande, pois o total aplicado em fundos indexados é de 1,6 trilhões de dólares, enquanto em fundos ativos é de 10 trilhões. Porém, o retorno médio dos fundos indexados foi maior quando se verifica em um horizonte dos últimos dez anos.

Entretanto, percebe-se que os gestores de fundos ativos não conseguiram entregar um retorno acima do mercado. Estudos como de Koenig (2014) e Tindall (2014) mostram que na realidade esses investimentos perderam em desempenho para fundos indexados tradicionais. Altas taxas cobradas dos clientes, excesso de negociações no mercado e até falta de habilidade dos gestores foram prejudiciais à indústria de gestão ativa de investimentos.

Apesar do termo *Smart Beta* ser considerado uma nova invenção no mundo dos investimentos, algumas das estratégias adotadas por investidores já são bem conhecidas e difundidas no mercado. Dentre elas, pode-se citar a de igual ponderação dos ativos, existente desde 2003 através do *S&P 500 Equal Weighted Index*. Além disso, destaca-se a de mínima variância, conhecida desde o artigo de em 1952 de Harry Markowitz's a respeito da otimização média-variância e também dos investimentos em índices de mínima volatilidade, já existentes desde os anos 2000.

De acordo com Watson (2013, p. 1), uma empresa líder de consultoria em investimentos, “*Smart Beta* é simplesmente uma tentativa em identificar boas ideias de investimento que possam ser melhor estruturadas, seja aprimorando as oportunidades de beta existentes, seja criando exposições ou temas que possam ser implementados a um baixo custo e de modo sistemático.”. Um dado da Towers Watson mostra que as alocações dos clientes institucionais da consultoria nos EUA subiram de US\$ 5 bilhões, de 65 portfólios no final de 2012, para US\$ 11 bilhões, de 182 carteiras, no encerramento de 2013.

Outros exemplos de investimentos *Smart Beta* são aqueles ponderados por fatores fundamentalistas e índices de volatilidade mínima. O argumento usualmente utilizado para justificar o uso do *Smart Beta* é de que os índices ponderados pela capitalização das empresas são ineficientes, sendo possível construir um portfólio mais eficiente aplicando algumas ponderações alternativas. Blitz (2013) concorda com esse ponto de vista, porém defende que é importante entender qual a origem do valor adicionado causada pela nova ponderação da carteira. Pesquisas mostram que a ponderação utilizada em índices alternativos resultam na escolha de ações que possuem alguns fatores específicos que são responsáveis pelo desempenho da carteira.

Apesar de óbvio, o autor afirma que muitos gestores ainda são relutantes em assumir que estratégias *Smart Beta* são aquelas em que ocorre exposição a determinados fatores, como por exemplo, ações de baixa volatilidade em índices de volatilidade mínima e ações de valor em estratégias fundamentalistas.

Para Blitz (2013) as estratégias *Smart Beta* são formas ativas de investimento, uma vez que são fundamentalmente diferentes e exigem análises subjetivas.

Após a crise financeira de 2008 e com os baixos retornos e altas taxas de administração dos fundos de gestão ativa, os investidores sentiram a necessidade da existência de uma nova classe de estratégias em relação aos investimentos no mercado de ações, que são conhecidas como estratégias *Smart Beta*. No mercado financeiro, índices que são ponderados pela capitalização das empresas são aqueles que dão um maior peso às ações valorizadas e

menor peso àquelas que estão em baixa, levando à construção de um portfólio subótimo. Até recentemente, assumia-se que investimentos de gestão ativa era a única maneira de se obter vantagens e superar os retornos de mercado.

De certa forma, a aplicação de estratégias *Smart Beta* no mercado de ações brasileiro é uma maneira de testar a hipótese de eficiência dos mercados. Essa hipótese considera que os preços dos ativos financeiros são formados pelo resultado da oferta e demanda em um mercado competitivo composto por agentes racionais.

Além disso, toda informação pública disponível é conhecida por todos participantes do mercado, de forma que os preços dos ativos refletem isso. Como resultado, não seria possível um agente conseguir auferir retornos superiores à média do mercado para um dado nível de risco.

Existem três versões para a hipótese dos mercados eficientes, sendo elas a fraca, a semi forte e a forte. Na hipótese fraca é considerado que os preços dos ativos financeiros refletem apenas a informação contida em preços passados. Na semi forte também ocorre isso, além dos preços mudarem a partir de novas informações que possam surgir. Já a forte considera também as informações privilegiadas na formação dos preços, que são aquelas restritas a um determinado grupo de pessoas, não sendo disponível publicamente.

Portanto, investidores interessados em adotar estratégias baseadas na hipótese de eficiência de mercado devem ter como objetivo a alocação de recursos em fundos de gestão passiva, buscando replicar um índice que represente o mercado. No caso do Brasil, pode-se citar o índice Bovespa, benchmark da bolsa brasileira composto pelas ações com maior liquidez e valor de mercado.

Em contrapartida, as estratégias *Smart Beta* farão uso de instrumentos fundamentalistas e baseados no risco para se chegar a uma alocação de ativos que supere a relação risco/retorno da carteira de mercado, contrariando assim a hipótese de que os mercados são eficientes e de que não é possível superá-lo.

Diante disso, a presente dissertação consiste em avaliar a alocação de capital nas estratégias utilizada pelos investidores na ponderação das ações em uma carteira de investimentos. As estratégias *Smart Beta* permitem, portanto, verificar se há um melhor desempenho dos portfólios ao propor diferentes abordagens. O trabalho está dividido da seguinte forma: além desta introdução, o capítulo 2 apresenta a revisão de literatura, o capítulo 3 aborda a metodologia para a estimação das carteiras de investimento, o capítulo 4 a avaliação empírica, o capítulo 5 os resultados, o capítulo 6 a comparação com os fundos de investimentos, e por fim as considerações finais.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Investimentos no mercado financeiro exigem tanto dos investidores pessoa física e jurídica bastante conhecimento dado à complexidade das operações e o número de ativos disponíveis para aplicação. A escolha dos ativos, assim como o peso que as respectivas ações e títulos devem possuir na carteira de investimento é bastante controversa, sendo esse um assunto recorrente no campo das finanças.

Uma forma de auxiliar os investidores na tomada de decisões são os modelos teóricos existentes, que são utilizados na composição e gestão dos investimentos. Dentre os modelos, pode-se citar o de Markowitz (1952), o modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) de Sharpe (1964), Lintner (1965) e Black (1972).

Todos esses modelos são utilizados pelos investidores com o objetivo de compor uma carteira de ações no mercado que traga a melhor relação de risco-retorno, ou seja, que para cada nível de risco assumido se tenha uma maior rentabilidade dos investimentos, além de se tentar capturar retornos maiores que os de mercado.

No trabalho *Portfolio Selection* de Markowitz (1952) foi criada a base para a Teoria Moderna de Carteiras e também estabelecida a diversificação de carteiras, amplamente utilizada no mercado atualmente. Anteriormente a esse trabalho, acreditava-se que a maximização de portfólios era feita a partir da escolha de ativos com maior expectativa de retornos individuais.

A partir da teoria de Markowitz (1952), investidores passaram a tomar decisões de investimento de acordo com o retorno e risco dos ativos. Leva-se em consideração também a correlação e covariância entre os ativos, que são calculadas em pares. Com isso, o processo de otimização é feito através de portfólios com a melhor relação entre risco e retorno, em oposição ao que era feito anteriormente com a seleção de ativos individuais.

Em 1964, na sequência do trabalho de Markowitz (1952), William Sharpe desenvolve o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), permitindo a precificação de ativos individuais. Com o objetivo de ampliar o trabalho já existente, Sharpe (1964) traz o conceito de risco sistemático, conhecido também como beta. Diferentemente da Teoria do portfólio, o CAPM visa identificar o risco global do mercado e a relação dos ativos individualmente com esse risco.

O coeficiente beta (β) foi uma das principais contribuições do modelo construído por Sharpe (1964), permitindo verificar o risco sistemático de um ativo em relação ao mercado. Ao construir uma carteira constituída apenas com risco sistemático, considera-se que ela

possui beta “1”. Portanto, ao analisar o beta de diferentes carteiras de investimento, verifica-se que elas podem possuir maior ou menor risco se comparado ao mercado.

Alguns autores como Fama e French (1992) criticaram a relação entre os betas e os retornos dos ativos, afirmando que outros fatores como tamanho da empresa e valor de mercado em relação ao de mercado poderiam melhor explicar o desempenho das ações. Em contrapartida, o trabalho de Amihud, Christensen e Mendelson (1992) demonstra que os betas podem ser sim utilizados para explicar os retornos.

Destacam-se ainda outros trabalhos relacionados ao uso do CAPM, tanto no Brasil como em outros países, tais como Reiganum (1981), Disatnik e Benninga (2007). No Brasil pode-se citar os trabalhos de Varga (1999), Fonseca *et al.* (2007) e Crisóstomo e Vallelado (2006).

Portanto, através do exposto acima, é possível afirmar que o trabalho de Sharpe (1964) ainda é base de inúmeras pesquisas e aplicações em estudos sobre o retorno dos ativos financeiros. A partir disso, e assumindo algumas premissas do modelo, pode-se dizer que o modelo CAPM prevaleceu como referência na alocação de ativos no mercado por aproximadamente 40 anos, sendo a ponderação dos ativos feita por meio da capitalização das empresas, ou seja, companhias com maior valor de mercado possuem um maior peso na composição dos índices.

Desde então, índices ponderados pela capitalização das empresas se tornaram referência na indústria de investimentos, fornecendo acesso ao mercado de maneira ampla, e posteriormente como *benchmark* para fundos de gestão ativa, que possuem como objetivo superar os retornos de determinadas carteiras de mercado. Porém, analisando algumas premissas do CAPM, como a de que todos investidores possuem as mesmas expectativas, é possível inferir que o modelo não seja tão eficiente como se imaginava, conforme demonstrado nos trabalhos de Amenc *et al.* (2011) e Hsu (2004).

Diante da ineficiência e resultados ruins apresentados pelos índices ponderados pela capitalização das empresas, surgem novas estratégias para a distribuição dos pesos das ações em uma carteira de investimentos. Uma ponderação alternativa pode ser considerada como aquela onde os pesos são distribuídos utilizando outros fatores existentes com exceção do valor de mercado das empresas.

Conforme Roncalli *et al.* (2010), os índices alternativos podem ser de dois tipos: índices fundamentalistas e índices baseados no risco. Os índices fundamentalistas são aqueles em que as ações são ponderadas de acordo com indicadores das empresas tais como receita operacional, crescimento de vendas, pagamento de dividendos, margem operacional, lucro

líquido, entre outros. Além disso, depende também de indicadores do mercado, tendo como exemplos o crescimento econômico, nível de inflação, renda média e exportações. Destacam-se alguns trabalhos utilizando essa estratégia como os de Arnott *et al.* (2004) e Estrada (2008), onde se obtém uma melhor relação risco-retorno em comparação aos índices ponderados pela capitalização das empresas.

Já a ponderação de índices baseados no risco tem como objetivo obter uma melhor diversificação do mesmo no portfólio. De acordo com Roncalli *et al.* (2010), duas estratégias bem difundidas e utilizadas na indústria de investimentos são a de Mínima Variância (MV) e *Equally Weighted* (EW). A estratégia de MV refere-se àquela que se situa na fronteira eficiente descrita por Markowitz com o menor risco. É muito utilizada por gestores de fundos de investimentos em ações, dado que existe certa facilidade para aplicá-la e também não há necessidade de se obter as expectativas de retornos futuros dos ativos. Porém, um ponto que chama atenção na estratégia diz respeito é a concentração que pode ocorrer em determinados ativos, prejudicando a diversificação da carteira.

A fim de evitar que isso aconteça, surge como alternativa a estratégia *Equally Weighted* (EW) ou $(1/n)$, onde há uma distribuição igual de pesos entre os ativos da carteira, evitando concentração em um número pequeno de ações. Tal estratégia foi utilizada na prática em trabalhos como os de Bernartzi e Thaler (2001), Windeliff e Boyle (2004) e mostrou bons resultados em DeMiguel *et al.* (2007).

Na sequência outra estratégia também desenvolvida foi a *Most Diversified Portfolio* (MDP), presente no trabalho de Choueifaty e Coignard (2008). Assim como a estratégia de MV, essa também apenas depende da matriz de covariância dos ativos, excluindo a necessidade de se obter o retorno futuro dos ativos. Finalmente, Maillard *et al.* (2009) desenvolve mais uma estratégia para a diversificação do risco do portfólio, chamada de *Equally Weighted Risk Contributions* (ERC).

Sendo assim, além da estratégia fundamentalista, no que se refere à ponderação dos ativos em relação à diversificação do risco, destacam-se quatro estratégias, sendo elas *Equally Weighted* (EW), Mínima Variância (MV), *Most Diversified Portfolio* (MDP) e *Equally Risk Contribution* (ERC).

Na literatura internacional destacam-se dois artigos que utilizam estratégias *Smart Beta* baseadas apenas no risco para a ponderação dos ativos nos índices. Um deles é o artigo de Bertrand e Lapointe (2013), onde os autores possuem como objetivo verificar se a utilização de ações de empresas com responsabilidade social nas estratégias *Smart Beta* contribui na obtenção de melhores resultados se comparado aos índices ponderados pela

capitalização das empresas. Foram utilizadas as estratégias EW, MV, MDP e ERC em três diferentes índices, sendo que no ASPI (índice de responsabilidade corporativa) todas as estratégias *Smart Beta* utilizadas superaram os índices ponderados pelo valor de mercado das empresas.

O trabalho de Cazalet *et al.* (2013) também aplica as quatro estratégias baseadas na diversificação do risco no S&P 500 no período de 1989 a 2012. O artigo tem como objetivo verificar o *trade-off* entre diversificação, volatilidade, liquidez e *tracking error* ao utilizar o *Smart Beta*. Como resultado verifica-se que uma melhora de 10% na redução da volatilidade implica em um aumento de 3% a 4% no *tracking error*. Mostra também que estratégias de baixa volatilidade implicam em melhores resultados em relação aos índices ponderados pela capitalização de mercado quando a bolsa está com um viés negativo, com resultado contrário em caso de um mercado com viés positivo. Conclui, portanto, que apostas em estratégias *Smart Beta* dependem das expectativas que se têm com relação ao mercado de ações.

No Brasil não se verifica nenhum trabalho utilizando a expressão *Smart Beta* para descrever as estratégias alternativas na ponderação de carteiras, porém se utilizam alguns dos métodos descritos acima, tais como Thomé Neto *et al.* (2011), Santos e Tessari (2012) e Rubesam e Beltrame (2013).

No trabalho de Thomé Neto *et al.* (2011) os autores desenvolvem um índice de variância mínima global (MVP) para as ações com maior liquidez da Bolsa. São analisadas se as MVPs formadas desempenham melhor relação entre risco e retorno comparada ao índice Ibovespa. Essas carteiras também são comparadas com uma estratégia ingênua de investimento (1/N) e com fundos de gestão ativa, que são aqueles com o objetivo de superar um determinado *benchmark*.

Os resultados apurados foram significativos no caso da MVP em relação ao Ibovespa apenas quando se utiliza 10% como limite de alocação máxima por ativo. Quando essa restrição não existe, os resultados entre as duas carteiras não são estatisticamente significativos. Quando se compara o resultado com a carteira 1/N a relação risco-retorno é praticamente igual. Já na comparação com os fundos de gestão ativa, a MVP mesmo com a restrição de 10% não apresentou bons resultados, sendo constantemente superada, com os fundos apresentando uma menor volatilidade.

No trabalho de Santos e Tessari (2012), os autores utilizam estratégias de otimização de carteiras por meio da média-variância e mínima variância de ações, comparando os resultados com uma carteira igualmente ponderada e o índice Ibovespa. Foram empregadas cinco abordagens diferentes para a estimação das matrizes de covariância entre os ativos. Os

autores chegam à conclusão de que a utilização de estimadores mais robustos para a matriz de covariância foi capaz de melhorar a relação entre risco-retorno da carteira, superando inclusive o desempenho da estratégia ingênua (1/N) e o índice Ibovespa. O principal índice de referência do mercado brasileiro foi superado em todas as cinco diferentes abordagens utilizadas para os estimadores.

No artigo de Rubesam e Beltrame (2013), os autores investigam carteiras de variância mínima utilizando diferentes métodos para a estimação da matriz de covariância. No trabalho a comparação das carteiras de MV é feita com relação ao índice Ibovespa, uma carteira igualmente ponderada (1/N), uma carteira formada através da maximização do índice de Sharpe e outra formada pela maximização da média geométrica dos retornos. Nesse caso o universo de ações utilizadas não se restringiu apenas às ações que compõem o Ibovespa, mas sim todas as ações participantes do mercado brasileiro. Diferentemente dos outros trabalhos, Rubesam e Beltrame (2013) também analisam uma carteira do tipo 130/30, ou seja, com posições compradas e vendidas.

Os resultados mostram mais uma vez que as carteiras de mínima variância apresentaram os melhores resultados, superando todos os outros *benchmarks* utilizados no trabalho. A carteira de MV apresentou os maiores retornos, assim como menor volatilidade e perda máxima. Em relação à carteira do tipo 130/30, os resultados foram similares com o caso onde não há alavancagem. Diferentemente do resultado de Santos e Tessari (2012), o uso de métodos mais simples para a estimação da matriz de covariância produziu os melhores resultados.

Comparando todos os trabalhos feitos para o mercado brasileiro com as estratégias alternativas de ponderação dos ativos para a construção de índices, verifica-se que o trabalho de Rubesam e Beltrame (2013) é o que mais se aproxima das estratégias descritas no artigo de Roncalli *et al.* (2010), porém com diferenças significativas, principalmente nas estratégias *Most Diversified Portfolio* (MDP) e *Equal Risk Contribution* (ERC). Em comum, todos os trabalhos consideram as estratégias de mínima variância e ativos distribuídos igualmente (1/N).

3 METODOLOGIA

Esta seção está dividida em cinco partes. A primeira contempla as características dos índices do tipo *cap-weighted* e como são construídos índices ponderados de outras maneiras. A segunda parte detalha os índices ponderados de acordo com outros critérios. Na terceira parte apresentam-se os métodos para a estimação de matriz de covariância. Na quarta e quinta partes são abordadas as medidas de desempenho dos resultados, a base de dados e os procedimentos que serão adotados.

3.1 CAP-WEIGHTED INDEX

De acordo com a metodologia de Demey (2010), o peso dos ativos em índices *cap-weighted* é dado por:

$$w_{i,t} = \frac{N_{i,t}P_{i,t}}{\sum_{j=1}^n N_{j,t}P_{j,t}} \quad (1)$$

Conforme equação acima, $N_{i,t}$ refere-se ao número de ações disponíveis no mercado do ativo i . Denota-se por $C_{i,t}$ o valor de mercado da empresa i , dado por $N_{i,t} P_{i,t}$. Sendo assim, o peso do ativo i corresponde ao seu valor de mercado com relação ao valor total do índice, dado pelo somatório no denominador da equação (1).

Em índices desse tipo o número de ativos muda com pouca frequência, ou seja:

$$\begin{aligned} w_{i,t} &= \frac{N_{i,t}P_{i,t}}{\sum_{j=1}^n N_{j,t}P_{j,t}} \\ &= \frac{N_{i,t-1}P_{i,t}}{\sum_{j=1}^n N_{j,t-1}P_{j,t}} \\ &\neq w_{i,t-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Apesar do número de ativos apresentarem poucas mudanças em diferentes períodos no tempo, isso não ocorre com o peso das ações, pois a relação do valor de mercado das empresas em relação ao total muda de acordo com as variações do mercado, de forma que se:

$$\begin{aligned} w_{i,t} \geq w_{i,t-1} &\rightarrow \frac{C_{i,t}}{\sum_{j=1}^n C_{j,t}} \geq \frac{C_{i,t-1}}{\sum_{j=1}^n C_{j,t-1}} \\ &\rightarrow \frac{C_{i,t}}{C_{i,t-1}} \geq \frac{\sum_{j=1}^n C_{j,t}}{\sum_{j=1}^n C_{j,t-1}} \\ &\rightarrow R_{i,t} \geq R_{B,t} \end{aligned} \quad (3)$$

No mercado externo esses índices são bastante utilizados. Entre os benefícios existentes no uso de *cap-weighted index* pode-se citar a facilidade em se obter os dados de preços dos ativos e quantidades de ações existentes no mercado, além dos baixos custos de transação e uso do índice para fins de *hedge*, uma vez que são de fácil replicação considerando que grande parte das ações com maiores valores de mercado possuem alta liquidez.

Já em relação às críticas destacam-se o viés de momento que pode aumentar a exposição ao risco da carteira com um maior peso das ações com melhor desempenho e menor participação daquelas com pior desempenho. Além disso, esses índices geralmente também apresentam um viés de crescimento, já que empresas com melhores múltiplos de mercado possuem maior participação em relação às aquelas com menores múltiplos.

De acordo com Demey (2010) a ponderação de índices construídos de maneiras alternativas devem possuir as seguintes características:

- a) o universo de empresas consideradas nos índices alternativos deve estar incluído nos índices tradicionais (*cap-weighted index*):

$$\mu_{AW} \subseteq \mu_{CW} \quad (4)$$

Ou seja, nesse caso só serão incluídas ações das empresas contidas nos índices tradicionais. Isso contribui para reduzir o viés entre os índices e também para facilitar a comparação. Como exemplo de aplicação no mercado de ações do Brasil, ao utilizar o índice Bovespa como referência, apenas as ações do índice serão utilizadas para a construção de índices alternativos, desconsiderando todo o restante de empresas existentes negociadas no mercado de ações brasileiro;

- b) no longo prazo a relação de risco/retorno dos índices alternativos deve superar os índices tradicionais. Além disso, é necessário que o índice alternativo seja caracterizado como alfa (indexação fundamentalista) ou beta (indexação baseada no risco);
- c) a correlação entre a *performance* dos índices alternativos e tradicionais deve ser estritamente diferente de 1. Além disso, investidores podem combinar estratégias de investimentos utilizando as duas carteiras, permitindo assim a diversificação do risco e melhorando a relação risco-retorno;
- d) a metodologia para a construção de índices alternativos deve ser clara e de fácil implementação, sendo possível replicá-la por outros investidores.

O artigo “*Cap-Weighted Portfolios Are Sub-optimal Portfolios*” de Hsu (2004) realiza um estudo sobre a viabilidade em utilizar esse tipo de estratégia no universo dos investimentos. Segundo o autor, esse estudo é importante, pois mais de 10 trilhões de dólares são investidos em estratégias passivas desse tipo. Ainda assim, cita os principais benefícios na utilização dos índices ponderados pela capitalização das empresas.

Entre eles pode-se citar o fato de ser uma estratégia passiva de investimento, não havendo gestão ativa e cobrança de taxas, o fato de serem rebalanceados automaticamente a partir da flutuação dos ativos, de possuir maior peso em empresas maiores, portanto com maior liquidez e menor probabilidade de perdas devido aos custos de transação e sob as hipóteses do CAPM ocorre automaticamente a maximização do índice de Sharpe. Segundo Hsu (2004), dessas vantagens listadas, apenas a maximização do índice de Sharpe é a menos aceita, pois depende de condições específicas para que ocorra. Porém, o autor mostra que sob pequenas ineficiências de preço no mercado essa estratégia não representa mais o portfólio ótimo.

Para Hsu (2004) as carteiras ponderadas pela capitalização das empresas apresentam um desempenho ruim porque se os preços são ineficientes no sentido de que a cotação das ações não reflete totalmente os fundamentos das companhias, então uma menor ponderação nos papéis com menor valor de mercado e maior ponderação nas empresas com maior valor de mercado faz com que ocorra uma menor exposição em ativos distantes do preço justo (com potencial de crescimento) e uma maior alocação nos ativos com maior valor de mercado em relação ao valor justo.

A alocação nesse tipo de estratégia faz com que um maior peso seja dado às ações já valorizadas, e uma menor ponderação ocorra nos ativos com melhor potencial de valorização. Dessa forma, como esses erros de precificação não são persistentes, essa estratégia tende a possuir menor rentabilidade se comparado a outras estratégias que não utiliza o valor de mercado das empresas para o cálculo das ponderações.

O autor conclui com o trabalho que os índices *cap-weighted* de fato são portfólios sub ótimos quando os preços dos ativos não refletem os fundamentos das empresas, de forma que os índices ponderados a partir de outras estratégias não possuem alfa negativo, diferentemente do que ocorre com os índices ponderados pela capitalização das empresas.

3.2 ÍNDICES PONDERADOS COM BASE EM OUTROS CRITÉRIOS

Nesta seção serão apresentadas as diferentes maneiras existentes para se realizar a ponderação dos ativos em uma carteira de investimentos, considerando as indexações fundamentalista e baseadas no risco.

3.2.1 Indexação fundamentalista

A indexação fundamentalista é a estratégia que utiliza a ponderação de ativos de acordo com os fundamentos das empresas e consideram para a determinação do peso das ações as informações como distribuição de dividendos, volume de vendas, número de funcionários e o valor de mercado em relação ao valor contábil. Como exemplo, pode-se citar a criação do *DJ US Select Dividend Index* pela Dow Jones em novembro de 2003, índice criado a partir de empresas americanas selecionadas conforme a distribuição de dividendos.

Na edição 260 da Revista Institucional de Junho de 2014 foi veiculada uma reportagem sobre o lançamento dos fundos Brasil 50 e BDR 20 pela Itaú Asset. Segundo a reportagem os gestores do Brasil e da América Latina já estavam atentos a essas estratégias alternativas (*Smart Beta*), principalmente a partir da crise de 2008 e do forte crescimento desse *benchmark* nos EUA e Europa. O fundo 50 será criado a partir de 50 ativos da bolsa de valores brasileira, e será elaborado a partir da metodologia da empresa FTSE Rafi, atualmente umas das líderes em estratégias *Smart Beta*. Já o BDR 20 será feito a partir dos múltiplos que reflitam os fundamentos das empresas americanas. Conforme a consultoria Morningstar, os fundos de investimentos com estratégias *Smart Beta* somaram US\$ 291 bilhões no fim de 2013. Um ano atrás esse valor era de US\$ 175 bilhões, mostrando forte crescimento.

Essas estratégias foram utilizadas de forma extensiva no artigo “*Fundamental Indexation*” de Arnott *et al.* (2004). Para os autores a indústria de investimentos promoveu a crença de que os índices *cap-weighted* existentes no mercado são suficientemente representativos do portfólio de mercado do CAPM, representando assim o portfólio ótimo no contexto de média-variância.

No estudo feito pelos autores a seleção de empresas e os respectivos pesos são baseados em indicadores fundamentalistas como valor contábil, lucro, dividendos, receitas, vendas e total de funcionários.

Antes da construção de índices alternativos aos *cap-weighted*, o autor cita as vantagens em seu uso, e destaca os baixos custos de transação envolvidos devido às poucas

mudanças que ocorrem nas carteiras ao longo do tempo. Porém, em um estudo realizado por Blume e Edelen (2003), foi demonstrado que esse custo não é insignificante, já que entre o período de 1995 e 2000 foram feitas mudanças em 235 empresas que compõem o S&P500.

Os autores destacam que o objetivo do trabalho é realizar a construção de um índice fundamentalista que mantenha os benefícios dos índices construídos a partir da capitalização de mercado, e afirmam que as medidas de tamanho das empresas utilizadas a partir de indicadores como vendas, receita bruta e total de empregados são altamente correlacionadas com liquidez e valor de mercado, sugerindo que a ponderação desse novo índice mantém as características desejadas das carteiras *cap-weighted*.

Uma das maiores preocupações no trabalho para a construção do índice fundamentalista diz respeito ao *turnover* da carteira. Diferentemente dos índices tradicionais, o rebalanceamento utilizando a estratégia fundamentalista deve ser feito a partir da mudança no fundamento das empresas, sendo que os autores afirmam que efeitos negativos dos índices *cap-weighted* podem ser reintroduzidos caso isso não seja feito no tempo certo. Para minimizar esses custos de transação, os autores definiram um rebalanceamento anual, feito sempre no início de janeiro de cada ano do período analisado.

Para a construção das carteiras fundamentalistas os autores reordenaram as ações do S&P500 ou Russell 1000 pelo valor contábil, possuindo assim uma lista das empresas mais capitalizadas e com maior valor contábil, uma vez que as companhias utilizadas para fazer essa reordenação são aquelas que compõem o S&P500 ou Russell 1000. Feita essa classificação, as 1000 maiores empresas foram selecionadas e a partir disso foi construído um índice com seis métricas diferentes, de acordo com as seguintes medidas: valor contábil, média dos últimos cinco anos do lucro operacional, receitas, vendas, dividendos brutos e total de empregados. Além disso, foi também criado um índice agregado igualmente ponderado com apenas quatro das medidas acima, excluindo-se o total de empregados por ser bastante volátil e o total de vendas, pela semelhança com a receita.

Como dito anteriormente, o rebalanceamento foi feito no início de cada ano, e foram feitos testes para casos de rebalanceamento mensal, trimestral e semestral. Porém, em nenhum deles foi obtida vantagem em relação ao anual, além dos maiores custos de transação envolvidos.

Conforme os autores, como nenhuma das medidas para a ponderação dos ativos teve como base o preço dos ativos, a composição da carteira possivelmente não captura algumas boas empresas com potencial de crescimento, principalmente empresas novas e com rápido crescimento. É dito também que o fato da escolha das ações ter sido feita por fatores de

crescimento não alterou a forte correlação dos índices com a carteira de mercado, já que apresentaram um beta entre 0,95 e 0,99.

Os resultados mostram que os índices fundamentalistas tiveram uma melhor relação risco-retorno em relação aos índices cap-weighted em diferentes contextos econômicos, de taxas de juros e do próprio mercado de ações, A *performance* do índice constituído pelos autores foi comparada com o S&P500 (Cap-weighted equity market *portfolio*) no período de 01 de janeiro de 1962 a 31 de dezembro de 2003.

De todos os índices constituídos, com exceção do índice de dividendos brutos, o beta e volatilidade foram semelhantes aos índices ponderados pela capitalização das empresas. Conforme os autores esse resultado já era esperado, uma vez que esse índice de dividendos é composto por empresas que já atingiram a maturidade, portanto com menor risco e menores possibilidades de crescimento.

O resultado obtido com as estratégias fundamentalistas superou o S&P500 em uma média de 1,91% a.a e 2.13% a.a em relação ao *cap-weighted index* utilizado de referência ao longo dos 42 anos de teste.

Dessa forma, os autores concluem o artigo dizendo que os resultados devem ser interpretados não como uma anomalia da gestão ativa de portfólios, mas sim como um resultado consistente capaz de superar índices de mercado bastante utilizados, como o S&P500 e Russell 1000.

3.2.2 Indexação baseada no risco

Conforme descrito em seções anteriores, os índices ponderados de maneiras alternativas podem ser de dois tipos, fundamentalista e baseados no risco. Os índices fundamentalistas são aqueles que buscam maiores retornos em relação aos *cap-weighted index* (gestão ativa), enquanto os índices baseados no risco buscam diversificação com o objetivo de diminuir o risco absoluto ou relativo do portfólio.

Nesta seção será descrito os quatro métodos de indexação baseados no risco, que são: *Equally Weighted* (EW) ou estratégia ingênua (1/n), Mínima Variância (MV), *Most Diversified Portfolio* (MDP) e *Equal Risk Contribution* (ERC). Conforme Demey (2010, p.10) “Essas estratégias foram escolhidas porque elas já são utilizadas pela indústria de investimentos. Além disso, a principal vantagem no uso desses quatro métodos é que eles foram estudados tanto por acadêmicos quanto por profissionais”.

3.2.2.1 Equally Weighted (1/N)

A estratégia EW depende unicamente do número de ativos que compõem a carteira de investimento e os pesos são divididos de acordo com o total, além de ser perfeitamente diversificado por construção. A ideia da estratégia ingênua é definir um portfólio independente das propriedades das ações que constituem uma carteira de investimentos (WINDCLIFF *et al.*, 2004). São estratégias bastante utilizadas na prática, como demonstrado nos trabalhos de Bernartzi e Thaler (2001) e DeMiguel *et al.* (2007).

O trabalho “*Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy?*” de DeMiguel *et al.* (2009) comparou 14 modelos de otimização de portfólios, tendo a estratégia ingênua (1/n) como benchmark. Todas as estratégias e derivações utilizadas do modelo de média-variância para mitigar erros na estimação dos retornos e covariância não foram capazes de possuir um maior índice de Sharpe se comparado à estratégia igualmente ponderada, que possui ainda como benefício um baixo *turnover*. Dessa forma, os autores consideram que toda estratégia desenvolvida de otimização de carteiras, tanto desenvolvidas por participantes do mercado, quanto por acadêmicos, deve usar como referência para comparação a estratégia 1/n.

Assumindo-se que não seja possível realizar a previsão de retorno e risco dos ativos, a igual distribuição de pesos acaba sendo uma escolha razoável para a ponderação das ações. Nesse caso o peso dos ativos individuais em uma carteira composta de n empresas é dado por:

$$w_i = \frac{1}{n} \quad (5)$$

Em termos de ponderação é considerado um tipo de portfólio onde ocorre a menor concentração entre os ativos. Dentre as principais características do uso dessa estratégia pode-se citar a não concentração da carteira em poucos ativos, uma maior exposição às ações small caps e maiores custos associados ao rebalanceamento da carteira. Comparando-o com os índices ponderados pela capitalização de mercado pode-se dizer que a estratégia ingênua não preserva os mesmos benefícios dessa estratégia, principalmente devido à falta de liquidez ao investir em determinadas ações e também por não ser uma carteira representativa do mercado.

O coeficiente de Gini aplicado às carteiras de investimento mostra que quanto mais próximo de 1 esse indicador, mais concentrado é o portfólio. Segundo Demey (2010), no caso da estratégia 1/n o coeficiente de Gini é 0, indicando que não há concentração em poucos ativos.

Esse tipo de estratégia não considera o risco individual dos ativos e a correlação existente entre eles, de forma que se torna difícil a identificação da carteira no contexto de média-variância. Conforme Demey (2010, p.11) “Do ponto de vista teórico, esse portfólio coincide com o portfólio eficiente se os retornos esperados e volatilidade dos ativos são iguais e a correlação entre eles uniforme”.

No mercado de ações brasileiro foi feito um estudo por Santiago (2013) do desempenho de carteiras igualmente ponderadas com uma pequena quantidade de ações em relação ao Ibovespa, uma carteira de mínima variância global com limite de 10% e fundos de investimentos em ações com gestão ativa entre 1988 e 2011. Além disso, foram consideradas carteiras igualmente ponderadas com o número de ativos entre 6 e 16, além de poucos rebalanceamentos ao longo do ano e a utilização do índice de Sharpe como critério para a seleção dos ativos.

Dentre as carteiras utilizadas no estudo, o retorno ajustado ao risco das estratégias ingênuas só não foi superior em relação à estratégia de mínima variância com os pesos limitados a 10%, porém foi superior que o Ibovespa e muitos fundos de gestão ativa analisados.

3.2.2.2 Mínima Variância (MV)

Dentre as estratégias de mínima volatilidade existentes no mercado, a de mínima variância é uma das que mais se destacam, sendo um método bastante popular utilizado pelos participantes do mercado, onde não é necessário utilizar a informação sobre o retorno esperado dos ativos que compõem a carteira, ocorrendo apenas a minimização do risco. Nessa estratégia é preciso estimar a matriz de covariância entre os ativos.

A estratégia de mínima variância busca se beneficiar de ações com baixa volatilidade e baixo beta. Um exemplo de índices existentes que possuem esse objetivo são os MSCI *Minimum Variance Index* e S&P *Low Volatility Index*. O trabalho de Scherer (2011) mostrou uma forte significância da estratégia MV com os fatores de Fama-French, além da alocação em ativos com baixo beta e volatilidade residual. Porém, ao analisar o excesso de retorno das carteiras de MV, concluiu-se que os fatores de baixo beta e volatilidade residual são mais capazes de explicar os ganhos em relação aos de Fama-French.

O vetor de pesos w e a matriz de covariância no portfólio de mínima variância são calculados através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
w &= \arg \min(w' \Sigma w) \\
\text{s.a } &\sum_i^n w_i = 1 \\
&0 \leq w_i \leq 1
\end{aligned} \tag{6}$$

De acordo com Clarke, Silva, e Thorley (2006) e Scherer (2011) é um portfólio com a menor volatilidade *ex-ante*, não depende do retorno esperado dos ativos e oferece boa *performance*. Além disso, para Bertrand (2013) o risco marginal é igual para todos componentes da carteira que possuem peso diferente de zero:

$$\forall i, j, (w_i \neq 0 \wedge w_j \neq 0 \rightarrow \frac{\delta \sigma, w}{\delta w_i} = \frac{\delta \sigma, w}{\delta w_j}) \tag{7}$$

Um dos trabalhos que se destacam na estimação de carteiras de mínima variância é o “*Minimum-Variance Portfolio in the U.S. Equity Market*” de Clarke *et al.* (2006), onde os autores possuem como objetivo construir um índice de mínima variância com um grande número de ações do mercado americano e verificar como se comportam risco e retorno ao longo de décadas.

O período abrangente do trabalho é de janeiro de 1968 a dezembro de 2005, estimando a matriz de covariância para as maiores 1000 empresas com maior valor de mercado, e utilizam além da matriz de covariância amostral, a análise de componentes principais e o método de encolhimento.

O retorno da carteira de mercado, representado pelo índice Russell 1000, teve um retorno médio anualizado de 5,6% e um desvio padrão de 15,4%, com um índice de Sharpe de 0,36 para o período analisado. As otimizações sem restrições para a carteira de mínima variância utilizando as matrizes através da análise dos componentes principais e método de encolhimento apresentaram os melhores resultados em relação à carteira de mercado. O retorno utilizando o método de encolhimento foi de 6,5% com risco de 11,7%, com índice de Sharpe de 0,55. Utilizado a análise dos componentes principais o retorno foi de 6,7%, com um risco de 11,8%, com Sharpe de 0,58.

Os resultados encontrados pelos autores confirmaram a pesquisa empírica feita por Haugen e Baker's (1991) que foi feita entre 1972 e 1989, e mostram que os índices de mínima variância podem ser alternativas interessantes para gerar excesso de retorno em relação aos índices ponderados pelo valor de mercado das empresas.

O portfólio de mínima variância situa-se na fronteira eficiente e não depende da expectativa sobre os retornos futuros dos ativos. Para Demey (2010) as principais vantagens da estratégia ocorrem por ser de fácil entendimento, por possuir a menor volatilidade *ex-ante*

por definição, além do fato da literatura acadêmica registrar bom desempenho das carteiras fora da amostra quando se considera um ciclo econômico completo.

Apesar de o portfólio contribuir de forma significativa para diminuir o risco da carteira, um ponto negativo refere-se à concentração em um número pequeno de ações, que pode contribuir para uma maior exposição do investimento a determinados setores da economia.

3.2.2.3 *Most Diversified Portfolio* (MDP)

A estratégia *Most Diversified Portfolio* foi introduzida por Choueifaty (2006) e trouxe o conceito de diversificação de portfólios através do *Diversification Ratio* (DR), sendo ela similar à estratégia *Maximum Sharpe Ratio* (MSR) criada por Martellini (2008). O artigo “*Properties of the Most Diversified Portfolio*” de Choueifaty, Froidure e Reynier (2011) expande as propriedades matemáticas do DR e da otimização dessa estratégia no contexto de média-variância. Além disso, compara o portfólio MDP com as estratégias da carteira igualmente ponderada, mínima variância e *equal risk contribution*.

Conforme os autores do trabalho “*Properties of the Most Diversified Portfolio*” (2011), o *Diversification Ratio* é uma medida utilizada para medir a diversificação da carteira, sendo ele a divisão da volatilidade média ponderada sobre a volatilidade total. Essa definição vai de encontro com o conceito de diversificação, onde o risco de uma carteira é menor ou igual à soma das volatilidades individuais dos ativos. Dessa forma, o DR de uma carteira será maior que 1, ou igual a 1 no caso do portfólio ser constituído de apenas um ativo. Segundo os autores, essa razão de diversificação mede o ganho que se obtém ao possuir na carteira de investimentos ativos que não são perfeitamente correlacionados.

Segundo a metodologia dos autores, considera-se uma carteira investimentos apenas de posições compradas com N ativos $\{S_1, \dots, S_N\}$, volatilidade $\sigma = (\sigma_i)$, matriz de correlação $C = (\rho_{i,j})$ e matriz de covariância $\Sigma = (\rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j)$, onde $1 \leq i, j \leq N$. Sendo $w = (w_i)$ o peso dos ativos do portfólio, $\sigma(w)$ a volatilidade total e $\langle w | \sigma \rangle = \sum_i w_i \sigma_i$ a volatilidade média. Sendo o *Diversification Ratio* dado pela volatilidade média ponderada em relação à volatilidade total, tem-se:

$$DR(w) = \frac{\langle w | \sigma \rangle}{\sigma(w)} \quad (8)$$

Dessa maneira, índices como o Ibovespa, onde poucos ativos possuem maior peso na composição total, são menos diversificados e, portanto apresentam baixo *Diversification Ratio*. Os autores do trabalho apresentam esse conceito decompondo o DR em duas medidas chamadas *weighted-correlation* e *weighted-concentration*. A decomposição o DR é dada por:

$$DR(w) = [\rho(w)(1-CR(w)) + CR(w)]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Sendo $\rho(w)$ a correlação média ponderada pela volatilidade dos ativos que compõem a carteira, dado por:

$$\rho(w) = \frac{\sum_{i \neq j} (w_i \sigma_i w_j \sigma_j) \rho_{i,j}}{\sum_{i \neq j} (w_i \sigma_i w_j \sigma_j)} \quad (10)$$

E $CR(w)$ a razão de concentração ponderada pela volatilidade da carteira, onde:

$$CR(w) = \frac{\sum_i (w_i \sigma_i)^2}{(\sum_i w_i \sigma_i)^2} \quad (11)$$

Como dois exemplos opostos podem-se citar o caso de uma carteira composta apenas por um ativo, que nesse caso teria um CR de 1 e por outro lado uma carteira onde os pesos são divididos igualmente (estratégia ingênua) teria o menor CR possível. Segundo os autores, essa razão de concentração ponderada pela volatilidade não mede apenas a concentração dos ativos, mas também o risco, sendo que os ativos serão ponderados proporcionalmente às volatilidades.

Seguindo a metodologia dos autores, o *Most Diversified Portfolio* é aquele que maximiza o *Diversification Ratio*, ou seja:

$$w^{MDP} = argMax DR(w) \quad (12)$$

$$w \in \Pi^+$$

Sendo Π^+ o conjunto de portfólios com posições somente compradas onde o somatório dos pesos individuais dos ativos seja igual a 1.

Os autores mostram que o MDP é um problema de otimização de programação quadrática, e graças à propriedade do DR não se modificar ao ser multiplicado por um escalar, o problema pode ser definido como:

$$min_w \frac{1}{2} w' \Sigma w \quad (13)$$

Restrito por:

$$\begin{aligned} w_i &\geq 0 \\ \sum_i w_i \sigma_i &= 1 \end{aligned} \quad (14)$$

Sendo assim, o *Most Diversified Portfolio* sempre existe e é único quando a matriz de covariância Σ é definida. Além disso, os pesos do portfólios satisfazem a seguinte condição de primeira ordem:

$$\Sigma w^{\text{MDP}} = \frac{\sigma(w^{\text{MDP}})}{\text{DR}(w^{\text{MDP}})} \sigma + \lambda \quad (15)$$

Onde a não negatividade das variáveis λ é tal que $\text{Min}(\lambda, w^{\text{MDP}}) = 0$.

Os autores também analisam o MDP como sendo o portfólio ótimo no contexto de média variância. Apesar de assumir essa condição, Choueifaty e Coignard (2008) lembram que ela não é necessária para otimizar a carteira em outros contextos, principalmente no mundo real.

Nesse caso, considera-se um universo de ações homogêneas (ex-ante), onde nenhum dos ativos possui um prêmio de risco maior que outro, além de possuírem mesmo índice de Sharpe e onde o excesso de retorno em relação à taxa livre de risco é proporcional à volatilidade.

Sendo r_f a taxa livre de risco, r_1, \dots, r_n o retorno dos ativos, k uma constante positiva, o excesso de retorno esperado dos ativos individuais é dado por:

$$E(r_i) - r_f = k \sigma_i \quad (16)$$

Assim, para portfólios com pesos w e retornos r_w :

$$E(r_w) - r_f = \sum_{i=1}^N w_i (E(r_i) - r_f) = k \langle w | \sigma \rangle \quad (17)$$

Usando a definição do *Diversification Ratio*, têm-se:

$$E(r_w) - r_f = k \sigma(w) \text{DR}(w) \quad (18)$$

Através da equação acima é possível perceber que o excesso de retorno esperado dos ativos individuais equivale à volatilidade multiplicada pelo *Diversification Ratio*. Além disso, caso os dois lados da equação sejam divididos por $\sigma(w)$ nesse universo considerado pelos autores, a maximização do *Most Diversified Portfolio* torna-se equivalente à maximização do índice de Sharpe.

Para comparar o *Most Diversified Portfolio* com outras estratégias quantitativas de investimentos os autores citam propriedades que devem existir na construção da carteira baseados no senso comum e em princípios econômicos. Para isso, foram criados três conceitos chamados *Duplication Invariance*, *Leverage Invariance* e *Polico Invariance*.

O primeiro conceito considera que na construção de um portfólio com ações duplicadas (como no caso em que há diferentes classes de ações do mesmo ativo), a escolha dos ativos deve levar em consideração todos os tipos existentes, independente do ativo ser duplicado ou não. O segundo diz respeito à alavancagem, sendo que o peso alocado em empresas que decidam por realizar uma desalavancagem não deve ser alterado, mesmo o caixa sendo tratado separadamente. O terceiro e último diz que uma combinação linear de ativos pertencentes ao universo de ações não deve alterar o peso desses ativos no portfólio

Os autores também realizaram um estudo empírico comparando cinco portfólios apenas com posições compradas, sendo eles *Market Capitalization-Weighted Index* (MKT), *Equal Risk Contribution* (ERC), *Equal Weighted* (EW), *Most Diversified Portfolio* (MDP) e *Minimum Variance* (MV).

Para realizar os testes foi considerado o universo de ações do MSCI World, composto por aproximadamente 1.500 ações em diferentes mercados desenvolvidos. Dentre desse universo de ações, há também um índice chamado *MSCI World Minimum Volatility Index* (MsMV), utilizado para representar a carteira de mínima variância (MV). Porém, conforme argumentam os autores, isso não foi feito, pois ao analisarem como esse índice era composto notou-se a existência de uma complexa metodologia com limites de peso mínimo e máximo conforme país, setor e fatores de risco. Dessa maneira, preferiram implementar uma versão simples da estratégia de mínima variância.

Foram feitos rebalanceamentos em todas as estratégias semestralmente, sendo que as ações para compor as carteiras foram selecionadas a partir da data desses rebalanceamentos. Citam também que para evitar problemas de liquidez foram apenas selecionadas a metade das ações com maior capitalização, ou seja, aquelas com maior valor de mercado (aproximadamente 793 ações que representam 90% da capitalização total do mercado). Para representar a carteira do mercado (MKT) e poder compará-la com as demais estratégias foi construído um índice composto pela metade das empresas com maior valor de mercado (MKT/2). Além disso, os autores estabeleceram um peso máximo, uma restrição regional e uma multa de *turnover* para as estratégias MV e MDP para tornar a comparação com o índice MsMV coerente.

Em relação à matriz de covariância, foi utilizada uma janela de dados diários de um ano a cada data de rebalanceamento. Devido ao número de observações menor que o número de ativos foi utilizado um método robusto de encolhimento de metade da matriz em torno da matriz de identidade.

Conforme os resultados das estratégias utilizadas pelos autores na tabela 1, é possível verificar que todas as carteiras apresentaram melhor *performance* que a capitalização de mercado, indo de encontro aos trabalhos que citam a ineficiência dos índices *cap-weighted*. Destacam-se principalmente as estratégias ERC, MV e MDP com retorno superior e risco inferior em relação ao MKT e EW.

Tabela 1 - Comparação dos resultados das estratégias utilizadas entre 1999-2010

Statistic	MKT	MKT/2	MMV	EW	ERC	MV	MDP
Return	3.1%	2.9%	4.2%	5.8%	6.3%	6.7%	7%
Volatility (monthly)	16.6%	16.3%	11.7%	16.7%	13.1%	10.0%	11.4%
Volatility (daily)	17.2%	17.2%	12.3%	16.4%	12.9%	10.0%	11.2%
Turnover (one Way)	14%	11%	23%	29%	50%	76%	82%
TrackingError (daily)	0.0%	0.8%	7.6%	3.6%	6.7%	10.4%	9.2%
DR (daily)	2.3	2.2	2.8	2.5	3.0	3.4	3.7
nbStocks(avg)	1,586	793	250	793	793	159	137
Sharpe (monthly)	-0.00	-0.01	0.05	0.16	0.24	0.36	0.42

Fonte: Choueifaty, Froidure, Reynier (2011, p. 27).

Também é possível verificar através do *Dirversification Ratio* diário que o MDP atende às expectativas, e apresenta a melhor diversificação, e também o maior índice de Sharpe. Já o índice de mercado possui o menor DR, como era de se esperar, já que ocorre uma maior ponderação em um menor número de ativos, aumentando os fatores de risco da carteira.

Dessa forma o MDP se mostrou um forte concorrente como estratégia a ser utilizada pelos participantes do mercado a fim de obter melhor relação entre risco e retorno. Além disso, é um portfólio mais diversificado e menos sensível a pequenas modificações se comparado com o portfólio de mínima variância. Nesse caso o risco marginal relativo é também igual para todos os ativos com peso diferente de zero (BERTRAND, 2013):

$$\forall i, j, (w_i \neq 0 \wedge w_j \neq 0 \rightarrow \frac{1}{\sigma_i} \frac{\delta \sigma, w}{\delta w_i} = \frac{1}{\sigma_j} \frac{\delta \sigma, w}{\delta w_j}) \quad (19)$$

Dentre os pontos negativos no uso da estratégia MDP, pode-se citar a concentração em um pequeno número de ações, assim como no portfólio de mínima variância.

3.2.2.4 *Equal Risk Contribution (ERC)*

A última estratégia é chamada de *Equal Risk Contribution* (MAILLARD; RONCALLI; TEILTCHÉ, 2009) e o objetivo desse portfólio é que a contribuição do risco seja a mesma para todos os ativos, ou seja:

$$\forall i, j, (w_i \frac{\delta \sigma, w}{\delta w_i} = w_j \frac{\delta \sigma, w}{\delta w_j}) \quad (20)$$

Conforme metodologia descrita no trabalho “*On the Properties of Equally-Weighted Risk Contribution Portfolios*” de Maillard, Roncalli e Teiltche (2009), sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma carteira com n ativos de risco, σ_i^2 a variância do ativo i , σ_{ij} a covariância entre os ativos i e j , Σ a matriz de covariância, o risco da carteira de investimento é dado por:

$$\sigma(x) = \sqrt{x^T \Sigma x} = \Sigma_i x_i^2 \sigma_i^2 + \Sigma_i \Sigma_{j \neq i} x_i x_j \sigma_{ij} \quad (21)$$

A contribuição marginal ao risco, $\partial_{x_i} \sigma(x)$, é dada por:

$$\partial_{x_i} \sigma(x) = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{x_i \sigma_i^2 + \Sigma_{j \neq i} x_j \sigma_{ij}}{\sigma(x)} \quad (22)$$

Segundo o autor, o termo marginal refere-se ao fato de que a volatilidade do portfólio altera-se a partir de um pequeno aumento no peso de um ativo da carteira. Sendo $\sigma_i(x) = x_i \times \partial_{x_i} \sigma(x)$ a contribuição total ao risco do portfólio do i -ésimo ativo, chega-se ao seguinte resultado:

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \quad (23)$$

Sendo assim, o risco total da carteira pode ser visto como a soma total das contribuições individuais ao risco de cada ativo i .

Além disso, na metodologia adotada no trabalho não é permitida venda à descoberto. Essa restrição é feita com o objetivo de poder compará-la com outras estratégias de investimento, como por exemplo a estratégia ingênua, onde a participação de cada ativo da carteira é igual. Dessa forma, isso pode ser descrito como:

$$x^* = \left\{ x \in [0,1]^n : \sum x_i = 1, x_i \times \partial_{x_i} \sigma(x) = x_j \times \partial_{x_j} \sigma(x) \text{ para todo } i \text{ e } j \right\} \quad (24)$$

Considerando a dotação na forma vetorial e o fato de que $\partial_{x_i} \sigma(x) \propto (\Sigma x)_i$, a relação passa a ser:

$$x^* = \left\{ x \in [0,1]^n : \sum x_i = 1, x_i \times (\Sigma x)_i = x_j \times (\Sigma x)_j \text{ para todo } i \text{ e } j \right\} \quad (25)$$

Onde $(\Sigma x)_i$ representa a i -ésima linha do vetor obtido pela multiplicação da matriz de covariância com o ativo x .

Considerando o caso onde a carteira é composta por dois ativos, sendo ρ o coeficiente de correlação entre os ativos, $x = (w, 1 - w)$ o vetor de pesos, o vetor da contribuição total ao risco é dado por:

$$\frac{1}{\sigma(x)} = \left(\begin{array}{c} w^2 \sigma_1^2 + w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2 \\ (1-w)^2 \sigma_2^2 + w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2 \end{array} \right) \quad (26)$$

Nesse caso, para encontrar o portfólio ERC é necessário encontrar o w que satisfaça a relação acima. Para isso basta realizar $w^2\sigma_1^2 = (1-w)^2\sigma_2^2$. A única solução que satisfaz a relação e onde $0 \leq w \leq 1$ é dada por:

$$x^* = \left(\frac{\sigma_1^{-1}}{\sigma_1^{-1} + \sigma_2^{-1}}, \frac{\sigma_2^{-1}}{\sigma_1^{-1} + \sigma_2^{-1}} \right) \quad (27)$$

Essa solução única independe da correlação entre os ativos. Já no caso generalizado há um grande incremento no número de parâmetros, sendo necessário a estimação de n volatilidades e $n(n-1)/2$ correlações.

Os autores utilizam uma solução analítica simples para se chegar a resolução do problema. Considera-se que cada par de variáveis possuam os mesmos coeficientes de correlação, ou seja, $\rho_{i,j} = \rho$ para todo i e j . A contribuição total ao risco do ativo i é dada por $\sigma_i(x) = (x_i^2\sigma_i^2 + \rho \sum_{j \neq i} x_i x_j \sigma_i \sigma_j) / \sigma(x)$, podendo ser reescrita como $\sigma_i(x) = x_i \sigma_i ((1 - \rho)x_i \sigma_i + \rho \sum_j x_j \sigma_j) / \sigma(x)$. Considerando a restrição do modelo $\sum_i x_i = 1$, chega-se ao seguinte resultado:

$$x_i = \frac{\sigma_i^{-1}}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^{-1}} \quad (28)$$

Através da relação acima o peso do ativo i no portfólio ERC é dado pelo inverso da própria volatilidade pela média harmônica das volatilidades, sendo que quanto maior a volatilidade do ativo individual menor o peso na carteira, da mesma forma que quanto menor for essa volatilidade, maior será a participação do ativo.

Os autores citam que em casos, por exemplo, onde a volatilidade de todos os ativos é igual e os coeficientes de correlação diferentes, não é possível obter uma solução explícita para a carteira ERC.

Além disso, apesar das fórmulas descritas fornecerem uma solução em termos do risco relativo da carteira em relação ao total, apenas com a utilização de um algoritmo numérico torna-se possível chegar a uma solução.

Conforme a metodologia do artigo, uma maneira de resolver o problema de otimização é através do uso de um algoritmo de programação quadrática seqüencial (SQP):

$$\begin{aligned} x^* &= \operatorname{argmin} f(x) \\ \text{s. a } &1^T x = 1 \text{ e } 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (29)$$

Onde:

$$w = \operatorname{argmin} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i (\Sigma w)_i - w_j (\Sigma w)_j)^2 \right) \quad (30)$$

Existindo a condição $f(x^*) = 0$, ou seja, quando $x_i(\sum x)_i = x_j(\sum x)_j$, encontra-se o portfólio *Equal Risk Contribution*. Uma alternativa para o problema de otimização pode ser dada por:

$$\begin{aligned} y^* &= \operatorname{argmin} \sqrt{y^T \Sigma y} \\ \text{s.a } &\sum_{i=1}^n \ln y_i \geq c \text{ e } y \geq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Onde c representa uma constante arbitrária. Para a resolução desse problema também se utiliza de um algoritmo SQP. É um procedimento semelhante ao de minimização da variância, porém com diferentes restrições. Os autores citam a maior facilidade em realizar a otimização da primeira maneira em relação à segunda caso não haja nenhuma restrição não linear ao problema de otimização.

Esse portfólio também não depende dos retornos esperados dos ativos, possui pesos e risco bem diversificados por definição e é menos sensível a pequenas modificações na matriz de covariância se comparado às estratégias de MV e MDP (DEMEY, 2010).

Comparando-o com outra estratégia utilizada no mercado financeiro como a de mínima variância, o portfólio ERC coincide com o de MV apenas quando a volatilidade dos ativos na carteira são iguais. O trabalho define que a estratégia ERC coincide com a de MV quando a diversificação é a máxima possível, ou seja, no ponto onde a matriz de correlações possui o menor valor possível (MAILLARD; RONCALLI; TEILTCHÉ, 2009).

Ao considerar o portfólio de maximização do índice de Sharpe, as carteiras irão se coincidir caso a estratégia ERC possua uma matriz de correlação constante e os ativos possuam o mesmo Índice de Sharpe. Caso essas variáveis sejam diferentes a distribuição de pesos entre os ativos também será.

Conforme cita Demey (2010, p. 13) “a localização do *portfolio* no contexto de média-variância é difícil, porém o mesmo corresponde à carteira ótima quando a correlação é uniforme e os ativos possuem o mesmo Índice de Sharpe. Ainda assim, quando a correlação é uniforme a estratégia coincide com a estratégia MDP”.

O índice de Gini para a estratégia ERC é zero, sendo igual ao caso da estratégia ingênua ($1/n$), quando não há concentração em poucos ativos da carteira e o risco é bem diversificado.

3.2.2.5 Comparação entre as estratégias

Conforme Demey (2010), embora as quatro estratégias baseadas no risco sejam diferentes, elas possuem alguns fatores em comum, sendo possível compará-las em termos de peso e contribuição ao risco da carteira:

$$w_i = w_j \quad (1/n)$$

$$\frac{\delta\sigma,w}{\delta w_i} = \frac{\delta\sigma,w}{\delta w_j} \quad (MV)$$

$$w_i \frac{\delta\sigma,w}{\delta w_i} = w_j \frac{\delta\sigma,w}{\delta w_j} \quad (ERC)$$

$$\frac{1}{\sigma_i} \frac{\delta\sigma,w}{\delta w_i} = \frac{1}{\sigma_j} \frac{\delta\sigma,w}{\delta w_j} \quad (MDP)$$

Através das relações acima é possível verificar que no caso da carteira ingênua (1/n) o peso dos ativos são iguais e na carteira de mínima variância (MV) o risco marginal de cada ativo contribui de igual maneira para o risco total do *portfolio*. Na estratégia ERC a igualdade ocorre através do produto do peso pelo risco marginal de cada ativo. Já no caso MDP o risco marginal de cada ação dividido pela volatilidade são iguais, sendo interpretada como o risco relativo.

Outra comparação importante é também derivada de Maillard *et al.* (2009), que analisa a volatilidade entre as carteiras de MV, ERC e 1/n, chegando à seguinte conclusão:

$$\sigma_{MV} \leq \sigma_{ERC} \leq \sigma_{1/n} \quad (32)$$

Nesse caso, o *portfolio* ERC situa-se entre o de MV e a estratégia ingênua (1/n). A estratégia MDP não foi incluída na relação, pois sua volatilidade pode ser tanto maior quanto menor em relação à ERC e 1/n. Porém, a estratégia de MV possui menor volatilidade se comparada com a MDP. Além disso, as estratégias MDP e ERC não possuem diferença caso a correlação entre os retornos dos ativos seja constante. Para Demey (2010) “O *portfolio* MDP corresponde ao de MV quando as volatilidades individuais dos ativos são iguais”.

3.3 ESTIMAÇÕES DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA

Com exceção da estratégia ingênua (1/n), em todas as demais estratégias citadas na seção 3.2.2 é necessária a estimação da matriz de covariância Σ , que é desconhecida.

A estimação da matriz de covariância pode ser feita através de diferentes métodos, sendo o modelo mais simples a estimação da covariância amostral.

Como não é possível verificar diretamente a volatilidade e correlação entre os ativos financeiros, utilizam-se dados amostrais a fim de se estimar a matriz de covariância. Dessa maneira, a alocação dos pesos ótimos entre os ativos é feita a partir dessa estimação, sendo sensível a erros na estimação.

Mudanças nos métodos utilizados podem levar a diferentes resultados. Conforme Ledoit e Wolf (2003), outro problema também ocorre quando o número de ativos utilizados supera o tamanho da amostra.

Todas as matrizes foram estimadas utilizando-se dados diários de 1 ano para cada ação que compõe a carteira teórica do Ibovespa no período analisado. Nesta seção serão introduzidos os diferentes métodos que serão utilizados para a estimação da matriz de covariância.

3.3.1 Matriz de Covariância Amostral

Dentre os vários métodos existentes para a estimação da matriz, o mais simples deles é a matriz de covariância amostral. Uma das críticas existentes ao modelo diz respeito à baixa eficiência na estimação, principalmente quando se possui um grande número de ativos, uma vez que o número de parâmetros a serem estimados cresce exponencialmente.

Esse método baseia-se na hipótese de que os retornos são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d) e utiliza a série dos retornos dos ativos em um período recente. A matriz de covariância amostral, conforme Santos e Tessari (2012), é dada por:

$$\Sigma_t = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \mu)(R_t - \mu)' \quad (33)$$

Onde R_t refere-se ao vetor de retornos dos ativos utilizados no tempo t , T é o tamanho da janela de estimação e $\mu = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$ representa a média amostral dos retornos dos ativos.

Apesar dos retornos serem considerados i.i.d para a estimação da matriz, na prática isso não se verifica. Além disso, os retornos históricos utilizados possuem o mesmo peso no tempo, de forma que informações mais recentes recebem o mesmo tratamento dos dados passados. Para diminuir esse problema, utilizam-se janelas móveis com um número fixo de observações, possibilitando assim o uso de informações mais recentes na estimação. Ledoit e Wolf (2004) argumentam que apesar da matriz de covariância amostral ser um estimador não viesado, quando se tem um N grande o estimador torna-se ruidoso.

3.3.2 Método EWMA/*RiskMetrics*

O J.P Morgan & Reuters (1996) criaram o método de ponderação exponencial (*Exponentially-Weighted Moving Average*), também chamado de *RiskMetrics*. Esse método consiste na utilização de uma ponderação onde informações mais recentes possuem maior peso, enquanto observações mais distantes possuem menor peso exponencial, determinado pelo parâmetro λ .

É bastante utilizado pelos participantes do mercado financeiro e pode ser considerada uma modificação da matriz de covariância amostral, descrita na seção anterior. A matriz de covariância *RiskMetrics*, conforme Santos e Tessari (2012), é dada por:

$$\Sigma_t = (1 - \lambda)R_{t-1}R'_{t-1} + \lambda\Sigma_{t-1} \quad (34)$$

Onde λ representa o parâmetro de suavização, que determina a velocidade de decaimento das ponderações. Na prática considera-se com bastante frequência $\lambda = 0,94$ quando se utiliza dados diários para as séries.

No modelo a variância dos retornos são heterocedásticas e autocorrelacionadas, além das covariâncias também serem autocorrelacionadas.

3.3.3 Método de encolhimento (*Shrinkage*)

A ideia apresentada no artigo de Ledoit e Wolf (2004) é realizar a combinação entre dois tipos de estimadores, sendo o primeiro um estimador simples como a matriz de covariância empírica e o segundo um estimador robusto e estruturado, porém com um menor número de parâmetros a serem estimados. Segundo os autores esse método assume a existência de *outliers* na matriz de covariância amostral.

Conforme argumentam Ledoit e Wolf (2004) é improvável que a estrutura criada reflita de maneira correta todos os dados, de forma que esses estimadores possam conter erros de especificação, criando um *trade-off* entre a variância e os erros.

Sendo \mathbf{S} a matriz de covariância amostral e \mathbf{F} o estimador estruturado, conforme Santos e Tessari (2012), têm-se:

$$\Sigma_t = \gamma\mathbf{F} + (1 - \gamma)\mathbf{S} \quad (35)$$

A constante de encolhimento é definida por γ , sendo $0 \leq \gamma \leq 1$.

Ledoit e Wolf (2004) se baseiam na suposição de que todas as correlações entre os ativos sejam iguais para a utilização da matriz de covariância \mathbf{F} baseada no modelo de correlação constante. Essa correlação pode ser estimada através das médias amostrais. Os

autores também citam no trabalho como estimar a constante de encolhimento ótima, de forma a minimizar a diferença entre o estimador utilizado e a verdadeira matriz de covariância.

Os autores também afirmam que o modelo de correlação constante possui bom desempenho assim como outros estimadores tais como modelo unifatorial e matriz identidade (LEDOIT; WOLF, 2004).

4 AVALIAÇÃO EMPÍRICA

Nesta seção serão descritos os dados da amostra, procedimentos adotados e indicadores de desempenho utilizados para avaliar se o uso das estratégias *Smart Beta* no mercado de ações brasileiro é capaz de gerar melhor desempenho que o índice Bovespa.

4.1 BASE DE DADOS E PROCEDIMENTOS

A partir das diferentes estratégias de ponderação dos ativos baseadas no risco apresentadas na seção 3.2.2, o presente trabalho consiste na aplicação desses quatro métodos (EW, MV, MDP e ERC) para o cálculo dos pesos ótimos das ações que compõem o índice Bovespa. Ou seja, ao invés do índice Bovespa ser ponderado pelo índice de negociabilidade, o peso atribuído a cada papel no índice será estimado através de otimizações descritas na seção de metodologia.

Para aplicar as quatro estratégias de indexação alternativas ao mercado de ações brasileiro serão utilizados os dados das ações que compõem o índice Bovespa no período de janeiro de 2001 a maio de 2014, que foram extraídos do software Economatica. Os dados são diários e foram utilizados os preços de fechamento para o cálculo do logaritmo natural dos retornos. Já a composição das carteiras teóricas do Ibovespa ao longo desse período foram obtidas através de email enviado à Bmf&Bovespa com a solicitação das informações.

O software Economatica possui uma particularidade com relação aos códigos das ações de empresas que foram modificados ao longo do tempo. Ao procurar as cotações de empresas com códigos que foram alterados o software não retorna nenhum valor, sendo necessário procurar pelo novo código para assim obter as cotações no período em que essa modificação ainda não havia ocorrido. Dessa forma, no quadro abaixo constam as modificações que ocorreram no período analisado dentre as empresas que compuseram o Ibovespa. Em alguns casos, aconteceram mais de uma mudança.

Quadro 1 - Mudanças nos códigos das ações ao longo do período analisado

Cotação Anterior	1ª Mudança	2ª Mudança
BRHA4	AMBV4	
BRTO4	OIBR3	
CESP4	CESP6	
CLSC6	CLSC4	
COGU4	GGBR4	
CPNE5	BRKM5	
ECOD3	VAGR3	
ELPL6	ELPL4	
GRSU3	TBLE3	
ITAU4	ITUB4	
KLAB4	KLBN4	
LIGH3	LIGT3	
PCAR5	PCAR4	
PLIM4	NETC4	
PRGA3	BRFS3	
TCSL3	TIMP3	
TCSP3	BRTP3	
TCSP4	BRTP4	
TEPR4	BRTO4	OIBR3
TERJ4	TMAR5	
TSPP3	VIVO3	
TSPP4	VIVO4	
DURA4	DTEX3	
SDIA4	BRFS3	
ARCZ6	FIBR3	
ALLL11	ALLL3	
TCSL4	TIMP3	
UGPA4	UGPA3	
VCPA3	FIBR3	
TLPP3	VIVT3	
TLPP4	VIVT4	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Sendo assim, a partir da identificação das mudanças ocorridas nos códigos da empresa foi possível obter as cotações diárias das ações conforme a composição do índice Bovespa no período em análise.

As alterações ocorridas na carteira teórica do Ibovespa a cada quadrimestre de cada ano também serão consideradas para efeito do cálculo dos pesos de cada ativo. Sendo assim, a cada mudança teórica da carteira do Ibovespa será estimada uma nova matriz de covariância e um novo peso para os ativos para cada método utilizado, utilizando-se uma janela amostral de um ano. Isso ocorre nos primeiros dias dos meses de janeiro, maio e setembro, que são as datas em que passa a vigorar a nova composição do índice.

Porém, há casos onde algumas ações ainda não eram negociadas, de forma que não foi possível obter as cotações do ano anterior para o cálculo das matrizes de covariância. Dessa

forma, essas empresas foram excluídas para manter o cálculo uniforme ao longo do período. Foram excluídas também de todas as carteiras do Ibovespa as ações da Brasil Telecom, pois em várias ocasiões houve pregões em que as ações não foram negociadas devido aos conflitos dos acionistas existentes. Dessa forma, para que as ações não obtivessem um maior peso pela “menor variância” existente no período analisado, os papéis foram desconsiderados, incluído também as ações da Oi.

No quadro 2 abaixo consta a relação com os códigos das demais empresas excluídas e o período da carteira do Ibovespa correspondente.

Quadro 2 - Empresas retiradas do Índice Bovespa

Período da Carteira Teórica do Ibovespa	Códigos das empresas excluídas
Janeiro a Abril de 2001	BRAP4, TERJ4, TSPP4
Maió a Agosto de 2001	BRAP4, TERJ4
Setembro a Dezembro de 2001	TDBH4, TERJ4
Janeiro a Abril de 2002	TDBH4, TMAR5
Maió a Agosto de 2002	TDBH4, TMAR5
Setembro a Dezembro de 2002	TMAR5
Setembro a Dezembro de 2005	CTAX3, CTAX4
Janeiro a Abril de 2006	CTAX3, CTAX4
Maió a Agosto de 2006	CTAX3, CTAX4, PRGA3
Setembro a Dezembro de 2006	CESP6, PRGA3
Janeiro a Abril de 2007	CESP6, ELPL6, PRGA3
Maió a Agosto de 2007	CESP6, ELPL6
Setembro a Dezembro de 2007	BTOW3, CCPR3
Janeiro a Abril de 2008	BTOW3, CCPR3
Maió a Agosto de 2008	BTOW3, CCPR3
Setembro a Dezembro de 2008	BVMF3
Janeiro a Abril de 2009	BVMF3
Maió a Agosto de 2009	BVMF3
Setembro a Dezembro de 2009	VCPA3, BRTP4
Maió a Agosto de 2010	AGEI3, CIEL3
Setembro a Dezembro de 2010	SANB11
Janeiro a Abril de 2011	PRTX3
Maió a Agosto de 2011	BRAP4, TERJ4
Setembro a Dezembro de 2013	KROT3
Janeiro a Abril de 2014	BBSE3

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em relação ao rebalanceamento, ele será feito de acordo com as mudanças na carteira do Ibovespa, ou seja, de quatro em quatro meses. Além disso, o peso inicial estimado no início de cada quadrimestre para os ativos será o mesmo utilizado até a próxima mudança da composição teórica do Ibovespa. Isso foi feito com o objetivo de minimizar os custos de transação com rebalanceamentos diários, semanais e mensais.

4.2 ÍNDICE BOVESPA

Diferentemente de índices constituídos nos mercados internacionais, o principal *benchmark* da bolsa brasileira não se classifica diretamente como um *cap-weighted index*, ou seja, empresas com maior valor de mercado possuem maior peso na composição do índice. Para o cálculo dos pesos dos ativos leva-se em consideração o índice de negociabilidade das empresas, dando preferência à liquidez e ao volume de negócios.

Porém, ao se observar o valor de mercado das empresas que o compõem o Ibovespa antes da mudança de metodologia ocorrida em 2013, verifica-se uma maior participação das principais empresas. Como exemplo, na tabela abaixo é possível observar o valor de mercado das ações que compõem o Ibovespa em janeiro de 2010.

Tabela 2 - Empresas do Ibovespa com maior valor de mercado em janeiro de 2010

Código da ação	Participação (em %)	Valor de Mercado (Em R\$ Mil)
PETR4	15,70	320.357.258,950
VALE5	14,90	248.141.939,520
ITUB4	4,71	149.054.241,670
BVMF3	4,34	26.020.301,980
USIM5	3,80	25.148.145,220
GGBR4	3,78	33.371.109,800
BBDC4	3,66	97.723.352,030
CSNA3	2,76	41.534.878,550
ITSA4	2,57	50.622.860,910
FIBR3	2,26	15.998.685,550
BBAS3	2,17	72.166.040,230
Total:	60,65%	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que o Ibovespa não se classifica inteiramente como um *cap-weighted index*, pois caso fosse não seria possível que a ação do Banco do Brasil, com um valor de mercado aproximado de 72 bilhões, tivesse uma menor participação no índice se comparado com a Usiminas, com valor de mercado de 26 bilhões.

Apesar disso, apenas 11 das 59 empresas que compõem o índice Bovespa representam 60,65% do total. Portanto, há uma grande concentração em poucas empresas com maior valor de mercado, podendo ocorrer distorções. Dessa forma, a aplicação das estratégias *Smart Beta* na ponderação dos ativos pode ser aplicada ao mercado brasileiro, possuindo como objetivo uma melhor distribuição de pesos e *performance* do índice ao longo do período analisado.

Em Outubro de 2013 a BMF&Bovespa anunciou importantes mudanças no cálculo do peso dos ativos no índice Ibovespa, que passaram a valer a partir de 2014. Inicialmente a primeira composição da carteira teórica em janeiro de 2014 será feita por meio da média entre

a nova e antiga metodologias. A partir do mês de Maio passa a ser considerado apenas o novo método.

Entre as mudanças pode-se citar a ponderação do índice que passa a ser feita pelo valor de mercado das ações em circulação das empresas (*free float*), a exclusão de ações chamada “*penny stocks*”, ou seja, aquelas com valor inferior a R\$ 1,00 por ação, maior participação do volume financeiro para o cálculo do Índice de Negociabilidade, além do fato de que uma empresa individualmente (considerando ações ordinárias e preferenciais) não poderá ter mais de 20% de participação no total.

Na tabela 3 abaixo consta a composição das 8 maiores empresas do Ibovespa em maio de 2014, ou seja, período de vigência apenas da nova metodologia.

Tabela 3 - Composição do Ibovespa em Maio de 2014

Código	Qtde. Ações	Peso no Índice	Cotação 09/07/14	VI. Mercado (R\$ Mil)
ITUB4	2.426.199.142	9,97	31,73	76.983.298,78
PETR4	4.035.202.846	7,80	17,33	69.930.065,32
BBDC4	2.029.637.010	7,48	32,05	65.049.866,17
ABEV3	3.300.544.590	5,80	16,07	53.039.751,56
VALE5	1.878.758.554	5,64	27,74	52.116.762,29
PETR3	2.708.517.105	4,82	16,14	43.715.466,07
VALE3	1.262.807.257	4,19	30,81	38.907.091,59
BRFS3	624.621.521	3,47	54,31	33.923.194,81

Fonte: Elaborada pelo autor.

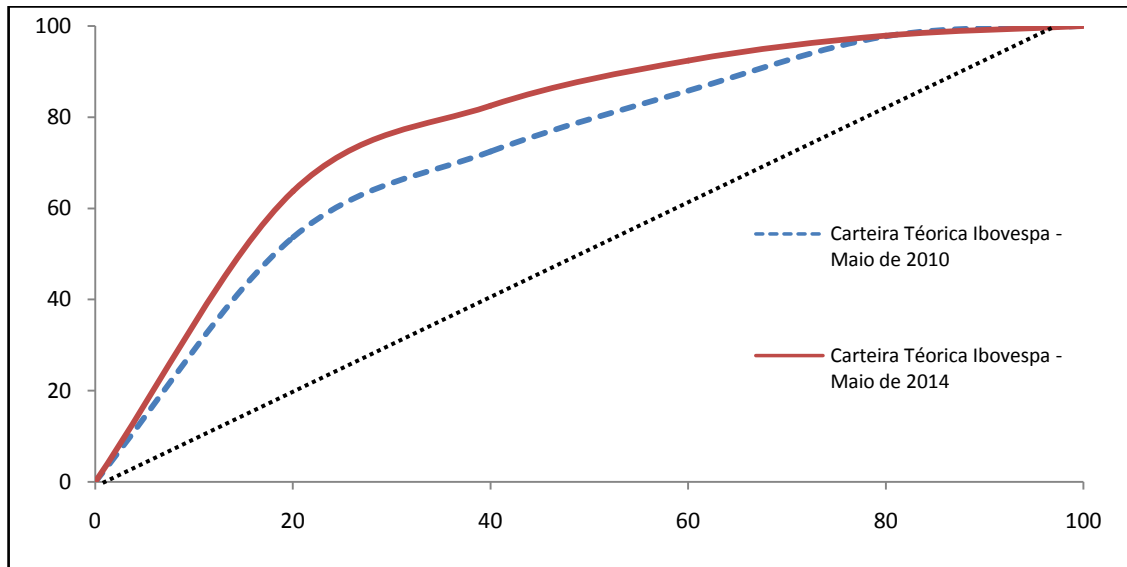
Pode-se notar, diferentemente do que ocorre na tabela 1 (antiga metodologia), que as empresas com maiores pesos são aquelas com maior valor de mercado, caracterizando o principal benchmark da bolsa brasileira como um índice de capitalização de mercado (*cap-weighted index*). Comparando a bolsa brasileira aos mercados internacionais, pode-se dizer que esse ajuste é um tanto tardio, pois nos mercados americano e europeu o debate atual ocorre em torno da viabilidade na utilização de portfólios alternativos, e não a adoção dessa regra a partir de agora.

A curva de Lorenz, também chamada de curva de concentração, é uma ferramenta bastante utilizada pelos economistas para medir a concentração de renda existente na sociedade e geralmente é complementada com o índice de Gini para quantificar essa relação. No gráfico abaixo a curva de Lorenz foi utilizada com o objetivo de medir a concentração dos ativos que compõem o Ibovespa, *benchmark* do mercado de ações brasileiro.

O gráfico foi construído com as composições da carteira do Ibovespa de maio de 2010 e 2014. Também tem o objetivo de verificar se a mudança metodológica do índice ocorrida em 2014 foi benéfica para diminuir a concentração dos ativos que já ocorria em maio de 2010.

No eixo X está o percentil do número total de ações e no eixo Y o peso acumulado dos ativos (em %) que compõem os percentis.

Figura 1 - Curva de Lorenz para o Índice Bovespa



Fonte: Elaborada pelo autor

Conforme se verifica, a mudança na metodologia, que passou a vigorar integralmente na carteira teórica de maio de 2014 aumentou ainda mais a concentração em um pequeno número de ações já existente. Em maio de 2010 em torno de 20% das ações com maior peso na carteira possuíam um pouco menos de 60% do total do índice. Já em maio de 2014 esse mesmo percentil representa mais de 60% do total da carteira.

Ou seja, apesar da introdução dessa nova metodologia, o que se verifica na prática é que o mercado de ações brasileiro passa a adotar um método que na realidade vêm deixando de ser adotado em economias desenvolvidas, como nos Estados Unidos e Europa, que diferentemente do Brasil, passam a utilizar estratégias quantitativas e fundamentalistas para a ponderação dos ativos em uma carteira de investimentos.

4.3 INDICADORES DE DESEMPENHO

Para a avaliação do desempenho das quatro estratégias alternativas baseadas no risco para os ativos do Ibovespa foram utilizados os indicadores de retorno anualizado, volatilidade anual, razão de Sharpe, VaR diário médio, perda máxima, *turnover* médio, *tracking error*, assimetria, curtose, beta, alfa de Jensen e correlação de Spearman.

Todos os resultados calculados são “fora da amostra”, ou seja, utiliza apenas dados dos períodos anteriores ao cálculo das carteiras, sendo possível que as estratégias sejam replicadas na realidade.

Para apurar o retorno anualizado das estratégias foi utilizado o *Compound Annual Growth Rate* (CAGR), ou seja, uma taxa composta anual de crescimento.

O CAGR na prática representa a taxa anual de crescimento do investimento, supondo que ela seja constante ao longo do período. Sendo assim, ele não corresponde ao retorno em um ano específico, mas sim como a taxa de retorno anual necessária para que esse retorno fosse igual durante todos os anos do período analisado. O CAGR é dado por:

$$CAGR(t_0, t_n) = \left(\frac{V_{t_n}}{V_{t_0}} \right)^{\left(\frac{1}{t_n - t_0} \right)} - 1 \quad (36)$$

Onde:

V_{t_0} : Valor inicial do investimento;

V_{t_n} : Valor final do investimento;

$t_n - t_0$: número de anos (investimento expresso em anos);

Apesar de o CAGR supor algo que na prática não ocorre, é um indicador bastante útil para realizar a comparação entre diferentes estratégias de investimento, uma vez que se obtém o retorno anualizado dos *portfolios*.

O Alfa de Jensen, também conhecido como Alfa, foi desenvolvido por Michael C. Jensen em 1967 a partir do *paper* “*The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964*”.

Nesse trabalho o autor tinha como objetivo testar a habilidade de previsibilidade dos gestores em gerar retorno para os fundos de investimentos e teve como base a teoria do CAPM desenvolvido por Sharpe (1964). Foram testados 115 fundos mútuos entre 1945 e 1964 e a capacidade em gerar retornos que seriam maiores do que aqueles esperados em determinados tipos de investimento a partir do risco da carteira.

Portanto, o alfa é utilizado para avaliar o retorno em excesso de uma carteira em relação ao ativo livre de risco e o retorno explicado pelo CAPM. Apesar do debate existente em torno do conceito de mercados eficientes, ele ainda é bastante utilizado para avaliar a *performance* de investimentos juntamente com outros indicadores, como o Índice de Sharpe, por exemplo.

Sendo assim, o alfa de Jensen pode ser definido como:

$$\alpha_j = R_i - [R_f + \beta_i(R_M - R_F)] \quad (37)$$

Ou, escrevendo de outra maneira:

$$\alpha_j = (R_i - R_f) - \beta_i(R_M - R_F)] \quad (38)$$

Onde:

α_j = alfa de Jensen;

R_i = retorno do fundo;

R_f = retorno da taxa livre de risco;

β_i = beta do fundo;

R_M = retorno do mercado.

Conforme fórmula descrita acima, caso o valor do alfa seja positivo, isso significa que o fundo de investimento foi capaz de gerar retornos maiores que o esperado de acordo com o nível de risco da carteira.

O Beta (β), também conhecido como risco sistemático ou risco de mercado, representa a relação entre a variação de um ativo e a variação de mercado. No mercado brasileiro pode-se utilizar o índice Bovespa como referência para o mercado, uma vez que é composto pelas principais companhias que possuem ações negociadas em bolsa.

Sendo assim, o Beta é um indicador utilizado para avaliar a sensibilidade de um investimento em relação a uma carteira representativa do mercado.

Pode ser calculado como:

$$\beta = \frac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_p)} \quad (39)$$

Onde:

r_i = retorno do ativo ou *portfolio* i;

r_m = retorno da carteira de mercado;

$Var(r_p)$ = variância da carteira de mercado.

O coeficiente de correlação de postos de Spearman, também chamado de “*rank correlacion*” é uma medida de correlação não paramétrica que não faz nenhuma suposição a respeito da distribuição das variáveis. Ao contrário do coeficiente de correlação de Pearson, não requer que a relação entre as variáveis seja linear e pode ser usado para variáveis medidas no nível ordinal.

Além disso, o coeficiente de correlação de Spearman é menos sensível em relação ao coeficiente de Pearson no caso de valores muito distantes do esperado. Ele é calculado da seguinte maneira:

$$\rho = 1 - \frac{6 \times \sum_{i=1}^N d_i^2}{N^3 - N} \quad (40)$$

Sendo d_i a diferença entre os números de ordem das observações x_i e y_i e N o número dos pares dos valores. O coeficiente de correlação é adimensional e situa-se entre -1 e 1, assim como o coeficiente de correlação de Pearson. Caso haja observações empatadas, o valor do coeficiente de correlação é alterado:

$$\rho_c = \frac{\frac{N^3 - N}{6} - \sum_{i=1}^N d_i^2 - \sum u_x - \sum u_y}{\sqrt{\left(\frac{N^3 - N}{6} - 2 \sum u_x\right) \times \left(\frac{N^3 - N}{6} - 2 \sum u_y\right)}} \quad (41)$$

Onde:

$$\sum u_x = \frac{\sum_{i=1}^m (u_{x_i}^3 - u_{x_i})}{12} \text{ e } \sum u_y = \frac{\sum_{i=1}^m (u_{y_i}^3 - u_{y_i})}{12} \quad (42)$$

São as somas do número de observações com números de ordem das observações de X e Y empatadas. Na hipótese nula do teste X e Y não estão correlacionadas, e na hipótese alternativa há correlação. Para verificar isso se utiliza uma tabela com a significância do coeficiente de correlação de Spearman.

Os demais indicadores utilizados como VaR, *turonver*, perda máxima, razão de Sharpe, assimetria e curtose também são amplamente utilizados na literatura para realizar comparação entre carteiras de investimentos otimizadas através de diferentes métodos.

Para o cálculo do retorno anual no período analisado da taxa livre de risco, dado pelo Certificado de Depósito Interbancário (CDI), foi utilizado a calculadora do cidadão disponível no site do Banco Central do Brasil¹.

¹ Disponível em:

<https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAOPUBLICO/exibirFormCorrecaoValores.do?method=exibirFormCorrecaoValores&aba=50029>

5 RESULTADOS

A tabela 4 mostra os resultados das otimizações com apenas posições compradas feitas a partir dos ativos que compõem o índice Bovespa de 2001 a 2014, considerando todas as mudanças que ocorreram ao longo do tempo além de rebalanceamento apenas quadrimestral. Foram empregadas as matrizes de covariância amostral, *RiskMetrics* e encolhimento para as carteiras de mínima variância, *most diversified portfolio* e *equal risk contribution*. Além dessas três estimações, foi utilizada também a estratégia ingênua (1/n).

Todas elas tiveram como *benchmark* para efeito de comparação o Ibovespa, pois toda a estimação foi feita a partir dos ativos que o compõem.

Conforme tabela apresentada, considerando apenas o retorno anualizado, a carteira com melhor desempenho foi a MDP utilizando a matriz *RiskMetrics*, seguido das carteiras de mínima variância. A estratégia teve um retorno anualizado de 9,13%, enquanto o Ibovespa no período teve apenas 2,14%. As carteiras de MV apresentaram retornos de 8,02% e 7,77%, utilizando a matriz amostral e encolhimento respectivamente. Em termos do retorno anualizado todas as carteiras estimadas independente da matriz de covariância adotada superaram o principal *benchmark* da bolsa de valores do Brasil.

Em termos de risco, as menores volatilidades encontradas foram na carteira de mínima variância, como já era esperado. Porém, as carteiras MDP tiveram valores bem próximos, como no caso da matriz de covariância amostral, onde a carteira de mínima variância apresentou um risco de 16,70% e a *Most Diversified Portfolio* 17,70%. Comparando com o Ibovespa, novamente todas as estratégias com as diferentes matrizes apresentaram menor risco. A que mais se aproxima é a EW, com risco de 26,30%, enquanto o Ibovespa teve 27,73%.

Considerando a relação risco-retorno, os melhores resultados são da carteira de mínima variância utilizando a matriz amostral, com 8,02% de retorno e 16,70% de risco. A razão de Sharpe foi calculada para todas as estimações, porém não pôde ser utilizada para comparação, pois todos os resultados foram negativos no período analisado. Isso indica que todas as estratégias renderam menos que o CDI no período. A taxa livre de risco para o período foi de 13% ao ano. Isso ocorre pelo fato do período em análise ser bastante extenso, além dos dois períodos turbulentos vivenciados pelo país, sendo o primeiro com as eleições de 2002 e o segundo com a crise do *subprime* em 2008. Contribuiu também as elevadas taxas de juros praticadas no país no início dos anos 2000, como o CDI médio de 2003 em 20,63% ao ano.

Tabela 4 - Indicadores de desempenho para os resultados fora da amostra entre janeiro de 2001 e maio de 2014 obtidos através a partir das otimizações feitas com os ativos que compõem o índice Bovespa com os três diferentes métodos utilizados para estimação da matriz de covariância, além da carteira igualmente ponderada (EW) e o Benchmark (IBOV). Para o retorno foi utilizado o CAGR e o VaR com 95%.

	Benchmark	Matriz Amostral			Matriz <i>RiskMetrics</i>			Matriz <i>Shrinkage</i>			EW
	Ibovespa	MV	MDP	ERC	MV	MDP	ERC	MV	MDP	ERC	
Retorno Anualizado	2,14%	8,02%	5,01%	5,84%	4,98%	9,13%	6,29%	7,77%	5,47%	5,54%	4,93%
Volatilidade Anual	27,73%	16,70%	17,70%	21,25%	23,46%	22,69%	23,89%	16,91%	17,81%	22,04%	26,30%
Razão de Sharpe	-0,39	-0,30	-0,45	-0,34	-0,34	-0,17	-0,28	-0,31	-0,43	-0,34	-0,31
VaR Diário Médio	-2,73%	-1,32%	-1,41%	-1,70%	-1,91%	-1,84%	-1,92%	-1,35%	-1,36%	-1,76%	-2,52%
Perda Máxima	-62,96%	-43,14%	-51,95%	-53,38%	-58,53%	-58,39%	-64,71%	-42,88%	-50,45%	-54,29%	-57,75%
Turnover Médio	-	57,74%	65,87%	20,55%	44,71%	70,29%	57,09%	56,12%	61,92%	16,82%	0,00%
Tracking Error	-	1,20%	1,20%	0,74%	0,93%	1,09%	0,98%	1,17%	1,14%	0,73%	0,97%
Assimetria	-0,16	-0,16	-0,15	-0,18	-0,10	-0,09	-0,11	-0,16	-0,19	-0,18	-0,17
Curtose	3,47	3,43	3,38	3,46	3,48	3,40	3,83	3,47	3,48	3,48	3,50
Beta	-	0,44	0,47	0,69	0,72	0,65	0,72	0,46	0,49	0,72	0,66
Alfa de Jensen	-	-6,78%	-6,53%	-4,18%	-3,24%	-3,89%	-3,28%	-6,57%	-6,24%	-3,19%	-1,33%
Correlação (Spearman)	-	0,69	0,69	0,87	0,81	0,75	0,80	0,71	0,71	0,88	0,69

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em relação à robustez no método de estimação da matriz de covariância, as matrizes amostral e encolhimento apresentaram menor risco se comparado ao método *RiskMetrics*, porém em relação aos retornos há bons desempenhos utilizando todos os métodos, de forma que nenhum deles se sobressai. No caso da estratégia *Equal Risk Contribution* os resultados são bastante semelhantes em todas as estimações.

O *Value at Risk* juntamente com a perda máxima são duas estatísticas bastante utilizadas pelos investidores para avaliar o risco das estratégias. O VaR é uma estimativa a partir de um determinado nível de confiança estatística para avaliar o risco de perda do investimento. No trabalho foi calculado o VaR diário com 95% de confiança para as quatro estratégias calculadas. Todos os resultados encontrados foram superiores que o do Ibovespa. Destacam-se o VaR diário para as carteiras de MV e MDP utilizando as matrizes amostral e *Shrinkage*, com valores de 1,32% e 1,41% respectivamente no caso da matriz amostral.

Já a perda máxima pode ser definida como o valor máximo no qual o investidor tem risco de perder considerando como referência o topo e a mínima dos retornos das carteiras utilizadas. Analisando os resultados se verifica que as menores perdas máximas ocorrem quando se utiliza a matriz de encolhimento, principalmente na carteira de mínima variância, com 42,88%. De qualquer maneira os resultados são altos para as carteiras, pois há casos onde o investir pode ter uma perda de mais de 50% no valor do investimento, como por exemplo, na carteira MDP utilizando a matriz *RiskMetrics*, com 58,39%. Comparando os resultados com a perda máxima do Ibovespa de 62,96%, apenas a carteira ERC utilizando *RiskMetrics* apresentou um resultado ligeiramente superior de 64,71%. Nos demais casos os resultados foram melhores quando se comparado ao *benchmark*.

Em relação à assimetria das carteiras, com exceção das carteiras estimadas utilizando a matriz *RiskMetrics*, que tiveram os menores valores negativos, em todas as outras estratégias os resultados são semelhantes ao Ibovespa, indicando uma assimetria negativa da distribuição dos retornos. A curtose de todas as estratégias e do Ibovespa são maiores que 3, indicando uma distribuição mais concentrada com caudas pesadas.

Todas as estratégias tiveram como resultado forte correlação positiva com o índice Bovespa, com destaque para a estratégia ERC utilizando as matrizes amostral e encolhimento, com valores de 0,87 e 0,88 respectivamente. Os menores valores ocorrem nas carteiras de MV e MDP, sendo próximos entre si. Apesar da forte correlação, indicando que as estratégias tendem a gerar retornos na mesma direção do índice, os betas das estratégias MV e MDP são baixos, enquanto nas carteiras ERC e EW são maiores.

6 COMPARAÇÃO COM FUNDOS DE INVESTIMENTOS

Para avaliar a *performance* das estratégias *Smart Beta* elas serão comparadas com fundos de investimentos de ações existentes no mercado brasileiro que se enquadram na categoria Ibovespa Ativo da Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (Anbima). As estratégias serão comparadas com fundos da categoria Ibovespa Ativo, pois todas as metodologias utilizadas no trabalho superaram o Ibovespa, de forma que a comparação com estratégias passivas não atende ao objetivo de avaliar a *performance* das estratégias *Smart Beta* diante da gestão ativa de fundos de ações.

A base de dados contém o valor da cota diária de 576 fundos no período de 2001 a 2014 e foi obtida com a empresa Quantum Finance². Para o cálculo dos retornos anualizados foi utilizado o CAGR e a volatilidade foi calculada a partir do logaritmo dos retornos das cotas diárias.

Dentre os 576 fundos disponíveis, apenas 50 possuíam valor da cota diária entre janeiro de 2001 e maio de 2014. Esses fundos estão listados abaixo pela ordem decrescente do CAGR e respectivas volatilidades.

Tabela 5 - Retorno e Volatilidade anual dos fundos selecionados

		(continua)	
Gestor	Fundo de Investimento	CAGR	Volat.
BTG Pactual Gestora de Recursos	BELLS FI	9,69%	25,95%
Bradesco Asset Management	BRADERSCO PRIVATE ALAVANC. IBOVESPA FI	8,59%	25,60%
Elite Corretora	ELITE FI	8,50%	22,44%
Bradesco Asset Management	BRADERSCO PRIME ACTIVE FIC	8,40%	26,01%
Guide Investimentos	COMERCIAL MASTER FI	8,37%	25,32%
Bradesco Asset Management	BRADERSCO PRIVATE FI	8,20%	26,49%
BTG Pactual Gestora de Recursos	BTG PACTUAL ANDRÔMEDA FI	8,15%	27,12%
BTG Pactual Gestora de Recursos	ITAPOÃ FIC	7,68%	26,11%
Taquari Asset	FIBRA VIC FI	7,13%	25,57%
Bradesco Asset Management	BRAM FIB FI	6,99%	25,92%
Votorantim Asset Management	VOTORANTIM FI	6,85%	26,98%
BNP Paribas Asset Management	MULTIPLY VARIABLE FI	6,84%	26,03%
Santander Asset Management	SANTANDER ATIVO II FI	6,45%	26,64%
Focusinvest Investimentos	FOCUS FI	6,44%	27,93%
BTG Pactual Gestora de Recursos	PREVIDÊNCIA B FI	5,98%	25,34%
Itaú Unibanco	LUXOR FI	5,95%	25,61%
Verde Asset Management	CSHG STRATEGY II FIC	5,84%	25,35%
Itaú DTVM	INVESTCENTER OPPORTUNITY LÓGICA II FIC	5,81%	28,05%
Itaú Unibanco	ITAÚ INSTI. MASTER IBOVESPA ATIVO FI	5,79%	26,34%
Itaú Unibanco	ITAÚ PRIVATE ATIVO FIC	5,59%	26,68%
Western Asset	WESTERN ASSET IBOVESPA ATIVO FI	5,52%	26,90%
Santander Asset Management	SANTANDER INSTIT. IBOVESPA ATIVO FI	5,36%	26,61%
Itaú Unibanco	ITAÚ INSTITUCIONAL IBOVESPA ATIVO FIC	5,04%	26,73%
Coinvalores	COINVALORES FI	4,90%	26,41%
Bradesco Asset Management	BRADERSCO SUPER AÇÃO FI	4,87%	26,03%
Geração Futuro	GERAÇÃO FI	4,60%	23,71%
Bradesco Asset Management	BRADERSCO IBOVESPA ATIVO FIC	4,23%	26,16%

² Quantum Finance é uma empresa de tecnologia em finanças especializada no desenvolvimento de soluções para acessar, analisar, comparar e acompanhar informações financeiras.

Gestor	Fundo de Investimento	(conclusão)	
		CAGR	Volat.
Itaú Unibanco	ITAÚ PERSONNALITÉ IBOVESPA ATIVO FIC	4,14%	26,91%
Crédit Agricole Brasil	CRÉDIT AGRICOLE SELECTION FI	4,06%	26,77%
Fator Administração de Recursos	FATOR JAGUAR FIC	3,92%	26,51%
Bradesco Asset Management	BRADESCO III FIC	3,40%	25,81%
Banco do Nordeste do Brasil	BANCO DO NORDESTE FI	3,37%	26,61%
Itaú Unibanco	ITAÚ STRATEGY FIC	3,32%	26,55%
J Safra Asset Management	SAFRA PRIVATE FI	3,22%	25,15%
Santander Asset Management	SANTANDER FI	2,55%	26,70%
Magliano Corretora	MAGLIANO FI	2,25%	24,73%
Itaú Unibanco	ITAÚ TIMING FI	2,22%	29,69%
Bradesco Asset Management	BRADESCO FIC	1,98%	25,64%
Banrisul	BANRISUL ÍNDICE FI	1,81%	26,91%
Itaú Unibanco	ITAÚ SELECT IBOVESPA FIC	1,67%	26,73%
Western Asset	WESTERN ASSET PRIVATE FOCUS FIC	1,62%	26,90%
Banco Alfa de Investimento	ALFA PREMIUM FI	1,58%	27,54%
BB Gestão de Recursos DTVM	BB IBOVESPA ATIVO FIC	1,03%	26,65%
Santander Asset Management	SANTANDER MAIS FIC	1,00%	26,86%
Bradesco Asset Management	BRADESCO IV FIC	0,77%	26,00%
Bradesco Asset Management	BRADESCO MAXI FIC	0,70%	26,01%
Western Asset	WESTERN ASSET SIVER IBOVESPA ATIVO FIC	0,36%	26,90%
Itaú Unibanco	ITAÚ BLUE FIC	0,15%	26,40%
Santander Asset Management	SANTANDER ÔNIX FIC I	-0,63%	26,53%
Western Asset	WESTERN ASSET LONG BIASED FI	-10,71%	28,41%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A comparação será feita utilizando os 10 melhores fundos de investimentos selecionados a partir do CAGR. Dentre as estratégias *Smart Beta*, serão utilizados os resultados das carteiras ERC e MV utilizando a matriz de covariância amostral e da MDP com a matriz *RiskMetrics*, pois apresentaram os melhores resultados.

A tabela 6 contém os resultados das comparações entre as carteiras de investimentos e os fundos. Não foram considerados fatores como taxa de administração, tributação e taxa de *performance* (quando houver) dos fundos na análise. A razão de Sharpe não foi calculada pelo fato do CDI no período ser superior aos resultados dos fundos de investimentos e das estratégias *Smart Beta*.

Considerando a volatilidade anual, com exceção do fundo de investimento ELITE FI, com 22,44%, todas as três estratégias *Smart Beta* selecionadas tiveram menor risco com diferenças significativas, como no caso da carteira de mínima variância, com volatilidade anual de 16,70% contra uma média de 25,65% dos fundos de gestão ativa.

Em relação aos retornos, destacam-se principalmente as carteiras MDP e MV, com retornos anualizados de 9,13% e 8,0% respectivamente. Dentro os fundos selecionados, apenas o BELLS FI foi capaz de superar o retorno do MDP, com retorno de 9,69%. Porém, ao levar em consideração a relação entre risco e retorno, as estratégias *Smart Beta* levam vantagem, uma vez que possuem menor volatilidade.

Tabela 6 - Comparação entre os 10 melhores fundos de investimentos da categoria “Ibovespa Ativo” selecionados da amostra e as estratégias *Smart Beta* que apresentaram melhor relação entre retorno risco entre janeiro de 2001 e maio de 2014.

	Fundos de Investimentos										Matriz Amostral		Matriz <i>RiskMetrics</i>
	BELLS FI	BRADESCO PRIVATE FI	ELITE FI	BRADESCO PRIME ACTIVE FIC	COMERCIAL MASTER FI	BRADESCO PRIVATE FI	BTG PACTUAL ANDROMEDA FI	ITAPOA FIC	FIBRA VIC FI	BRAM FIB FI	MV	ERC	MDP
Retorno	9,69%	8,59%	8,50%	8,40%	8,37%	8,20%	8,15%	7,68%	7,13%	6,99%	8,0%	5,8%	9,13%
Volatilidade	25,95%	25,60%	22,44%	26,01%	25,32%	26,49%	27,12%	26,11%	25,57%	25,92%	16,70%	21,25%	22,69%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Destaca-se também o fato de que dentre os fundos selecionados para efeitos de comparação há estratégias alavancadas, e também os gestores consideram todo o universo de ações existente ao realizar a alocação nos ativos. Diferentemente desse caso, as estratégias utilizadas no trabalho levaram em considerações apenas as ações que compõem o Ibovespa em cada quadrimestre entre 2001 e 2014, de forma que há ainda ganhos potenciais a serem explorados ao considerar todas as ações disponíveis no mercado de ações brasileiro.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A indexação *cap weighted*, sob as premissas do CAPM, sempre foi apresentada como o *portfolio* eficiente e representativo da carteira de mercado. Como ilustrado na dissertação, índices ponderados pela capitalização de mercado são concentrados nas maiores empresas, ocorrendo uma falta de diversificação e maior exposição a determinados fatores de risco.

O surgimento das estratégias *Smart Beta* ocorreu diante da incapacidade dos investimentos em gestão ativa em obter bons resultados aos investidores. Isso fez com que investidores e demais participantes do mercado estudassem métodos alternativos para garantir uma melhor exposição ao mercado. Dessa maneira, os índices alternativos foram criados com o objetivo de se obter uma exposição mais eficiente ao mercado através de índices fundamentalistas e indexações baseadas no risco.

Diferentemente de outros trabalhos realizados com dados do mercado de ações brasileiro, este trabalho avaliou de maneira mais ampla a utilização de diferentes estratégias baseadas no risco para a ponderação dos ativos do Ibovespa entre 2001 e 2014.

Foram utilizadas quatro estratégias, sendo elas *Equally Weighted* (EW), Mínima Variância (MV), *Equal Risk Contribution* (ERC) e *Most Diversified Portfolio* (MDP). A estratégia mais simples (EW) divide igualmente o peso dos ativos entre as ações que compõem o índice, porém não garante uma melhor distribuição do risco. Na sequência desse *portfolio*, encontra-se a estratégia ERC, onde a contribuição ao risco de cada ativo do *portfolio* é igual. Já no *portfolio* de MV realiza-se a otimização baseada na volatilidade ex-ante e o MDP maximiza-se a razão de diversificação (DR). Apesar das metodologias EW e MV serem de amplo conhecimento do mercado, as estratégias ERC e MDP até então não tinham sido aplicadas ao Brasil.

Os resultados mostram que as estratégias *Smart Beta* baseadas no risco foram capazes de superar o principal benchmark da bolsa brasileira em todos os cenários utilizando os três diferentes estimadores para a matriz de covariância. Isso ocorre não apenas com relação ao retorno anualizado e volatilidade, mas também para os indicadores de perda máxima e VaR.

Em relação aos estimadores para a matriz de covariância, as estratégias MDP e ERC tiveram os melhores resultados utilizando a matriz *RiskMetrics*, enquanto a estratégia de MV teve a melhor *performance* com a matriz Amostral.

Analisando a volatilidade anual média, todas as estratégias utilizadas superaram o Ibovespa no período analisado, de forma que até a estratégia ingênua é capaz de reduzir os riscos se comparado à carteira de mercado.

Os melhores retornos anualizados, dado pelo CAGR, foram das carteiras MV utilizando a matriz Amostral e MDP com a matriz *RiskMetrics*. Enquanto o Ibovespa no período apresentou um retorno anualizado de 2,1%, os resultados para as estratégias de MV e MDP foram 8,02% e 9,13% respectivamente. Apesar desse maior retorno apresentado pela carteira MDP em relação à MV, o risco da carteira de MV é significamente menor, sendo de 16,70% contra 22,69% da carteira MDP.

Também foram comparados fundos de investimentos de ações com gestão ativa em relação às estratégias utilizadas. Analisando a volatilidade, as estratégias de MV e ERC utilizando matriz amostral e MDP com *RiskMetrics* apresentaram menor risco que todos os 50 melhores fundos selecionados. Em relação ao retorno absoluto, apenas um fundo de investimento supera a estratégia MDP. Porém, analisando-se a relação entre risco e retorno as estratégias de MV e MDP apresentam melhores resultados.

Portanto, diante das *performances* apresentadas, é possível dizer que as estratégias *Smart Beta* funcionam para o mercado de ações brasileiro, pois essa nova ponderação a partir dos ativos do Ibovespa foi capaz de gerar melhores resultados ao longo do período analisado, tanto em relação ao Ibovespa quanto aos fundos de gestão ativa. Isso mostra que novos métodos podem ser aplicados por investidores, tanto pessoas físicas quanto institucionais, com o objetivo de superar os rendimentos de um índice ponderado a partir do valor de mercado das empresas.

Conclui-se também nesse caso que a hipótese de eficiência do mercado não se aplica, pois utilizando o Ibovespa como referência para a carteira eficiente verifica-se que outras estratégias para a ponderação dos ativos geram melhores resultados.

Esta dissertação teve como foco a utilização de estratégias baseadas no risco para a ponderação dos ativos que compõem o Ibovespa a cada quadrimestre entre 2001 e 2014. No entanto, outras análises podem ser feitas em estudos futuros, como a criação de ETF's, a utilização de todos os ativos disponíveis na bolsa de valores para compor as carteiras, além do uso de estratégias fundamentalistas.

REFERÊNCIAS

- AMIHUD, Y; CHRISTENSEN, B. E; MENDELSON, H. **Further evidence on the risk-return relationship**. New York: New York University, 1992. (Research paper, n. 1248).
- AMENC, N. et al. Efficient Indexation: an Alternative to Cap-Weighted Indices. **Journal of Investment Management**, Lafayette, v. 9, n. 4, p. 1-23, 2011.
- ANG, A. **Factor investing**. Oct. 2013. Disponível em: <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2277397 > . Acesso em: 22 mar. 2015.
- ARNOTT, R.; HSU, J.; MOORE, P. Fundamental indexation. **Financial Analysts Journal**, London, v. 61, n. 2, p. 83-96, 2005.
- ASSIER, O. **The rise of smart beta: and how it is changing the game**. May 2011. Disponível em: < <http://www.ipe.com/countries/asia/the-rise-of-smart-betaand-how-it-is-changing-the-game/10003723.fullarticle.>> . Acesso em: 28 out. 2014.
- BENARTZI, S.; THALER, R. H. Naive diversification strategies in defined contribution saving plans. **American Economic Review**, Nashville, v. 91, n.1, p. 79-98, 2001.
- BERTRAND, P.; LAPINTE, V. **Smart beta strategies: the social responsibility of investment universes does matter**. Marseille: IAE Aix-en-Provence and Euromed Management, Aix-Marseille University, Apr. 2013.
- BLACK, F. Capital market equilibrium with restricted borrowing. **Journal of Business**, Chicago, n.45, p. 444-455, 1972.
- BLITZ, D. **How smart is ‘smart beta’?**. Feb. 2013. Disponível em: < <http://www.etf.com/publications/journalofindexes/joi-articles/16020-how-smart-is-smart-beta.html?nopaging=1>>. Acesso em: 12 jul. 2014.
- BLITZ, D.; SWINKELS, L. **Fundamental indexation: an active value strategy in disguise**. Aug. 2008. Disponível em: < http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1184848>. Acesso em: 19 Set. 2014.
- BLUME, M. E.; EDELEN, R. M. **S&P 500 indexers, delegation costs, and liquidity mechanisms**. London: Rodney L. White Center for Financial Research, 2003. (Working Paper, #04-03).
- CARHART, M. On the persistence in mutual fund performance. **Journal of Finance**, Stanford, v. 52, n.1, p. 57-82, 1997.
- CAZALET, Z.; GRISON, P.; RONCALLI, T. **The smart beta indexing puzzle**. Paris: Lyxor Asset Management Management, 2013.
- CHAVES, B. et al. Risk parity vs: other asset allocation heuristic portfolios. **Journal of Investing**, New York, v. 20, n. 1, p. 108-118, Spring 2010.

CHOUEIFATY, Y. **Methods and systems for providing an anti-benchmark portfolio**. London: USPTO, 2006. (USPTO, n. 60/816, 276).

CHOUEIFATY, Y.; FROIDURE, T.; REYNIER, J. **Properties of the most diversified portfolio**, London, v.2, n.2, p. 49-70, Spring 2013.

CHOUEIFATY, Y.; COIGNARD, Y. Toward maximum diversification. **Journal of Portfolio Management**, New York, n. 35, p. 40-51, 2008.

CHOW, T. A study of low volatility portfolios construction methods. **Journal of Portfolio Management**, New York, n. 4, v. 40, p. 1-10, 2014.

CLARKE, R.G; DE SILVA ,H.; THORLEY, S. Minimum-variance portfolios in the U.S. equity market. **Journal of Portfolio Management**, New York, n. 36, p. 31-45, 2006.

DEMEY, P.; MAILLARD S.; RONCALLI, T. **Risk-based indexation**. Paris: Lyxor Asset Management, 2010. (Lyxor White paper series, 1). Disponível em: < <http://ssrn.com/abstract=1582998> >. Acesso em: 15 jan. 2015.

DeMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. Optimal versus naive diversification: how inefficient is the 1/N portfolio strategy? **Review of Financial Studies**, Oxford, n. 22, p. 1915-1953, 2009.

DeMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. A generalized approach to portfolio optimization: improving performance by constraining portfolio norms. **Management Science**, London, v.55, n.5, p. 798-812, 2009.

DISATNIK, D.; BENNINGA, S. Shrinking the covariance matrix. **Journal of Portfolio Management**, New York, v. 33, n. 4, p. 55-63, Summer 2007.

ESTRADA, J. Fundamental indexation and international diversification. **Journal of Portfolio Management**, New York, v.34, n.3, p. 93-109, 2008.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. The cross-section of expected returns. **Journal of Finance**, Stanford, n.2, p. 427-465, 1992.

FLOOD, C. Large spike in 'smart beta' investments. **Financial Times**, Jun. 2013. Disponível em: < <http://www.ft.com/cms/s/0/d11df550-d4d0-11e2-b4d7-00144feab7de.html#axzz3hxtN44EI> >. Acesso em: 18 out. 2014.

FONSECA, N.F. et al. Análise do desempenho recente de fundos de investimento no Brasil. **Contab. Vista & Rev.**, Belo Horizonte, v. 18, n. 1, p. 95-116, jan./ mar. 2007.

J.P MORGAN; REUTERS. **RiskMetrics™**: technical document. 4th. ed. Dec. 1996. Disponível em: < http://pascal.iseg.utl.pt/~aafonso/eif/rm/TD4ePt_2.pdf >. Acesso em: 05 dez. 2014.

HAN, Y. Asset allocation with a high dimensional latent factor stochastic volatility model. **Review of Financial Studies**, Oxford, n.19, p. 237-271, 2009.

HARRY, M. H. Portfolio selection. **Journal of Finance**, Stanford, n.7, p. 77-91, 1952.

HAUGEN, R.; BAKER, N. The efficient market inefficiency of capitalization-weighted stock portfolios. **The Journal of Portfolio Management**, New York, v. 17, n. 3, p. 35-40, Spring 1991.

HSU, J. **Cap-weighted portfolios are sub-optimal portfolios**. Dec. 2004. Disponível em: < http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=647001 >. Acesso em: 28 dez. 2014.

HSU, J.; KALESNIK, V; FEIFEI, L. **An investor's guide to smart beta strategies**. Dec. 2012. Disponível em: <<http://www.researchaffiliates.com/Production%20content%20library/AAI%20Journal%20Dec%202012%20-%20Hsu.pdf>>. Acesso em: 11 nov. 2014.

KOENIG, D. **Smart Beta: the overnight success, 30 years in the making**. San Diego: Russel Investments, 2014.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Honey, I shrunk the sample covariance matrix. **Journal of Portfolio Management**, New York, v. 30, n. 4, p.110–119, Summer 2004.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. **Journal of Empirical Finance**, New York, v. 10, p. 603–621, 2003.

LINTNER, J. The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. **Review of Economics and Statistics**, Cambridge, n. 47, p. 3-37, 1965.

LOCATELLI, C. **Como estão os fundos de investimentos no Brasil**. ago. 2013. Disponível em: < <http://www.f2br.com/cesarlocatelli/?p=806>>. Acesso em: 10 set. 2014.

LUMANTA, K. **ETF Industry evolving to smart beta structure**. Feb. 2013. Disponível em: < <http://www.financialobserver.com.au/articles/etf-industry-evolving-to-smart-beta-structure?A=WebApp&CCID=19099&Page=2&Items=2>>. Acesso em: 20 ago. 2014.

MATON, B. **Is the smart beta revolution forever?** July 2013. Disponível em: < <http://www.scoop.it/t/smart-beta-enhanced-indices/p/4001639809/2013/05/14/is-the-smart-beta-revolution-forever-camradata-articles>>. Acesso em: 10 jul. 2014.

MATON, B. **Low or no returns send investors chasing 'smart beta'**. 12 Mar. 2012. Disponível em: < <http://www.ft.com/intl/cms/s/0/f5677e2a-690d-11e1-956a-00144feabdc0.html>>. Acesso em: 15 ago. 2014.

MAILLARD, S.; RONCALLI, T.; TEILETCHE, J. On the properties of equally weighted risk contribution portfolios. **Journal of Portfolio Management**, New York, n. 36, p. 60-70, 2009.

NETO, C.; LEGAL, R.; ALMEIDA, V. Um índice de mínima variância de ações brasileiras. **Economia Aplicada**, Ribeirão Preto, n.4, v. 15, p. 535-557, 2011.

REINGANUM, M. R. A New empirical perspective on the CAPM. **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Washington, v. 16, n. 4, p. 439-462, 1981.

RONCALLI, T. **Introduction to risk parity and budgeting**. Paris: Chapman & Hall, 2013. (CRC Financial Mathematics Series, n.1).

RUBESAM, A.; BELTRAME, A. Carteiras de variância mínima no Brasil. **Rev. Bras. Finanças**, Rio de Janeiro, v. 11, n.1, p. 81-118, mar. 2013.

SANTIAGO, D. C. **O desempenho de carteiras igualmente ponderadas com quantidade pequena de ações**. Rio de Janeiro: Instituto Coppead de Administração, 2013.

SANTOS, A. *et al.* Optimal portfolios with minimum capital requirements. **Journal of Banking and Finance**, New York, v. 36, n.7, p. 1928-1942, 2012.

SANTOS, A.; TESSARI, C. Técnicas quantitativas de otimização de carteiras aplicadas ao mercado de ações brasileiro. **Rev. Bras. Finanças**, Rio de Janeiro, v. 10, n. 3, p. 369-393, set. 2012.

SCHERER, B. A note on the returns from minimum variance investing. **Journal of Empirical Finance**, New York, v. 11, n.4, p. 652-660, 2011.

SHARPE, W. F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. **Journal of Finance**, Stanford, v. 19, n. 3, p. 425-442.

TINDALL, P. **Opportunities of using smart beta in asset allocation**. London: Towers Watson, 2014.

VARGA, G. Índice de Sharpe e outros indicadores de performance aplicados a fundos de ações brasileiros. **Revista de Administração Contemporânea**, Rio de Janeiro, v. 5, n. 3, p. 215-245, 1999.

WATSON, T. **'Low Volatility' equity strategies: should you include them in your portfolio?** July 2013. Disponível em: <<http://www.towerswatson.com/en/Insights/IC-Types/Ad-hoc-Point-of-View/2013/05/Low-volatility-equity-strategies>>. Acesso em: 30 jan. 2015.

WINDCLIFF, H.; BOYLE, P. The 1/n Pension Plan Puzzle. **North American Actuarial Journal**, Illinois, n. 8, p. 32-45, 2004.