UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Cássio Volpato Selbach

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE ANÉIS E CORPOS

Porto Alegre
2015

Cássio Volpato Selbach

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE ANÉIS E CORPOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para o grau de Licenciado em Matemática

Orientadora Profa. Dra. Barbara Seelig Pogorelsky

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

____

Profa. Dra. Carolina Noele Renz
Departamento de Matemática da Unisinos

____

Profa. Dra. Barbara Seelig Pogorelsky – Orientador
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao Triuno Deus, que me deu orientação intelectual e espiritual durante toda esta faculdade.

Agradeço à digníssima Mariângela Torre Dias Selbach, minha esposa que suportou pacientemente todas as minhas crises, ouviu sobre debates que não lhe são do interesse e me empurrou para frente quando eu pensei em desistir.

Agradeço à Helena Pinto Selbach, Pedro Pinto Selbach, Adir Selbach, Antonio Selbach e Alaide Selbach que me foram os grandes exemplos da minha vida. Pessoas das quais a Terra não era digna da presença deles.

Agradeço à Artur Selbach Neto, meu pai, pelos seus conselhos sobre educação tão enigmáticos e úteis.

Agradeço à Marilene Schmitt Volpato, minha mãe, também por seus conselhos e por sua leitura da minha pessoa como ninguém consegue fazer.

Agradeço a todos os demais parentes que colaboram na minha formação, intelectual e espiritual e me deram suporte material tão incontável vezes. Seria impossível agradecer a todos individualmente.

Agradeço a todos os amigos, pois se não fosse por nossos debates tão acalorados certamente eu não estaria aqui. Seria impossível agradecer a todos individualmente.

Agradeço à professora Dra. Barbara Seelig Pogorelsky pela paciência e pela liberdade que disponibilizou durante todo esse projeto.

RESUMO

Este trabalho destina-se a ser um resumo mínimo dos conceitos de anel e corpo – com os exemplos habituais (inteiros, racionais, reais, polinômios e matrizes) – e uma aplicação de uma atividade para estudantes do ensino médio com habilidade em matemática. Para esse fim, colocamos uma breve nota histórica, procurando responder a pergunta "Por que se definiu e se estudou as estruturas algébricas de anel e corpo?" ou ainda " definição e estudo das estruturas algébricas se referem a qual experiência humana real?". Acrescentamos também uma nota filosófica para embasar os comentários sobre a aplicação da atividade. Essa nota é um resumo dos textos que temos lido do filósofo Mário Ferreira dos Santos. Não se trata de uma discussão, mas apenas um resumo da visão do autor.

PALAVRAS CHAVE: Anel, corpo, álgebra.

ABSTRACT

This work is intended to be a minimum summary of ring and field concepts - with the usual examples (integers, rational and real numbers, polynomials and matrices) - and applying an activity for high school students with math ability. To this purpose, we put a brief historical note, seeking an answer to the question "Why are defined and studied the structures of rings and fields?" or "The definition and study of algebraic structures refer to which real human experience?". Also added a philosophical note to support the comments on the application of the activity .This note is a summary of the texts that we have read from the philosopher Mário Ferreira dos Santos .This is not a discussion, but only a summary of the author's view.

KEY WORDS: Ring, field, algebra.

SUMÁRIO

SUMÁRIO DE IMAGENS

1. **INTRODUÇÃO**

Este trabalho é um resumo da experiência real do professor de matemática. Começamos situando o leitor historicamente no conteúdo da álgebra de anéis e corpos, depois desenvolvemos o mesmo com definições, exemplos e teoremas. Por fim mostraremos uma proposta de atividade realizada com alunos de Ensino Médio do Colégio Estadual Senador Alberto Pasqualini da cidade de Novo Hamburgo, com uma nota filosófica anterior para sustentar a proposta de atividade.

O objetivo central deste texto está certamente a parte matemática, é a parte mais extensa e com mais sub-seções. Neste capítulo, apenas procuramos tomar livros textos que já versam sobre o assunto e detalhá-lo. O leitor não encontrará aqui nada novo, todas as afirmações já foram anteriormente demonstradas, mas certamente encontrará detalhes que os autores por vezes suprimem. Esta é a razão de ser do nosso escrito, não criar, mas divulgar conceitos específicos de matemática. Todo interesse é despertado por alguma propaganda, esta é uma propaganda das estruturas algébricas.

Na seção histórica o leitor perceberá como os conhecimentos não surgem sem um motivo concreto de contexto. Não se trata de opinar no debate sobre a matemática ser inventada ou descoberta, mas quando a matemática acontece ela tem suas motivações embasadas na realidade do matemático. Tanto o contexto interior quanto o contexto exterior influenciam. Como base deste estudo utilizei o livro "Introdução à história da matemática" de Howard Eves, que embora seja uma edição da década de 1990, permanece útil, principalmente para o propósito desse estudo que é simplesmente situar o leitor no contexto histórico.

Na seção da atividade com estudantes o leitor encontrará uma visão embrionária de um possível estudo futuro. Como é padrão, a realidade é cheia de dificuldades de interpretação, sobretudo quando se estuda humanos. Suas motivações, seus sentimentos sua história são sempre um entrave ao conhecimento, pois como abstrair o essencial do acidental? Como separar o diferente do semelhante? Como discernir o relevante do irrelevante? O humano é repleto de contradições e tensões, para estudá-lo não temos o controle que temos sobre a matemática, nem o fechamento que há sobre a história. Por isso não nos propomos a criar uma sequência didática para um tema tão pouco explorado no Ensino Médio, mas criar a possibilidade da indagação quanto ao ensino dos anéis e corpos.

Este trabalho destina-se tanto a ser um trabalho de conclusão de curso como a ser um possível apoio a outros professores que estejam otimistas com o desenvolvimento de seus estudantes e desejem dar-lhes estudos mais avançados de matemática, bem como conceitos estruturantes dos conhecimentos que eles já adquiriram. Justamente por isso os exemplos são dos conteúdos comuns do Ensino Médio (números inteiros, racionais e reais, além de polinômios e matrizes). As demonstrações feitas aqui não são menos rigorosas do que as realizadas em aulas de universidade, então elas podem ser reproduzidas inteiramente ou parcialmente, de acordo com o tempo e a necessidade de cada contexto. Portanto, a atividade com os estudantes (aula expositiva e avaliação) reflete essas características.

2. **NOTA HISTÓRICA**

Como estudar a história de um conceito matemático? Em certo sentido todo conceito matemático está dado potencialmente nos primeiros homens que trataram da abstração. Por isso, como a abstração já está pressuposta pela própria faculdade de pensamento, então todo ser humano já tem esses conceitos virtualmente. Entretanto, o conceito somente se atualizará historicamente em pessoas que falarem e discutirem sobre ele. A fala porém é irrastreável pois a fala é som e o som é devir da energia no ar. Por isso somente se pode estudar historicamente os conceitos enquanto escritos. Às vezes um conceito é estudado profundamente, outras vezes é apenas citado de relance e outras vezes começa apenas citado e mais tarde é desenvolvido profundamente.

Nosso objetivo com esta nota histórica é responder a pergunta: "Qual o motivo para os matemáticos definirem e estudarem as estruturas algébricas?". Descremos que seja mero interesse academicista, mas que seja devido a um problema real. Ao meu ver, o que motivou tal estudo foi a necessidade de organização da álgebra tal como na geometria.

Segundo Eves (1997, p 536) foi o jovem Galois o primeiro a usar e registrar a ideia de grupo em sentido técnico (um conjunto com uma operação e as propriedades de associatividade, elemento neutro e elementos inversos). Eves prossegue:

> "As pesquisas em teoria dos grupos foram levadas adiante por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e outros que se sucederam para o caso particular dos grupos de substituições. Com o subsequente notável trabalho de Arthur Cayley (1821-1895), Ludwig Sylow (1832-1918), Sophus Lie, Gorge Frobenius (1848-1917), Felix Klein, Henri Poincaré (1854-1912) Otto Holder (1859-1937) e outros o estudo dos grupos assumiu sua forma abstrata independente e se desenvolveu rapidamente. A noção de grupo veio a alcançar um grande papel codificador em geometria [...] e em álgebra serviu como estrutura atômica de coesão, fator de grande importância para a ascenção da álgebra abstrata no século XX. A teoria dos grupos ainda é, nesta segunda metade do século XX, um campo de pesquisas muito produtivo em matemática."(EVES, 1997, p 536)

"No início do século XIX, a álgebra era considerada simplesmente como aritmética simbólica" (EVES,1997, p 546). Segundo Eves, George Peacock (1791-1858) desenvolveu o "princípio da permanência das formas equivalentes". Peacock supunha que quando uma estrutura algébrica subia de grau de abstração ela mantinha sua forma abarcando as mesmas propriedades com mais elementos. Ele estava enganado quanto a isso, pois quando subimos nas estruturas algébricas percebemos que algumas propriedades são perdidas. Por exemplo, os números complexos são corpo, mas os números quaternários, que são uma estrutura acima dos números complexos não são comutativos. Podemos encarar os polinômios como uma extensão dos números reais, mas estes têm inverso multiplicativo e aqueles não tem inverso multiplicativo. Entretanto, apesar desse equívoco e motivado pelo mesmo, Peacock publicou seu *Treatise on Algebra* onde buscou rigor lógico para a álgebra, semelhantemente aos Elementos de Euclides. Esse rigor foi um dos primeiros fundamentos para a criação das estruturas algébricas.

Historicamente vemos que os séculos XVII e XVIII foram séculos predominantemente de descobertas científicas e matemáticas e já o século XIX foi predominante a organização desses novos conhecimentos. Dentro do espírito organizacional e catalogante os matemáticos do século XIX definiram mais de 200 estruturas algébricas, entre elas estão as que são foco deste trabalho, a saber anéis, subanéis, ideais e corpos.

Assim como muita geometria foi produzida ao trocar-se o quinto axioma de Euclides, também o foi com a álgebra. As matrizes e os números quaternários são exemplos de estruturas algébricas que não possuem contradições tanto quanto os números inteiros, mas não possuem a comutatividade no produto, como veremos na seção que trataremos de matrizes neste trabalho.

O desenvolvimento da álgebra abstrata foi aberto por Hamilton, Grassmann, e Cayley. Consta-se que Hamilton, após 15 anos de reflexões infrutíferas, de relance descobriu a fórmula dos quaternários $i^2=j^2=k^2=i\cdot j\cdot k=-1$. Em suma, o que motivou o estudo das estruturas algébricas foram algumas descobertas científicas e a vontade de sistematizar a álgebra. Como vimos, iniciou-se com Galois definindo grupo e os demais matemáticos trazendo à tona novos conceitos a partir deste.

3. **ANÉIS, SUBANÉIS, IDEIAIS E CORPOS**.

Neste capítulo o leitor encontrará a definição, exemplos e teoremas sobre os anéis, subanéis, ideais e corpos, sobretudo de anéis e corpos. As demonstrações são todas rigorosas e detalhadas, pensado para que o professor de matemática ou o estudante de graduação possam entendê-las individualmente.

3.1 Definição de anel, domínio de integridade e corpo.

Neste primeiro momento definiremos o conceito de anel.

Definição: A terna ordenada (A,+, ·) é um *anel* se A for um conjunto não vazio e + e . são duas operações binárias e fechadas em A (as quais denominaremos *soma e produto,* respectivamente), entendidas da seguinte maneira:

$$+ : \mathrm{AxA} \rightarrow A \qquad\qquad \cdot : \mathrm{AxA} \rightarrow A$$
$$(a,b) \rightarrow a+b \quad \text{e} \quad (a,b) \rightarrow a\cdot b$$

Devem também ser satisfeitas as seguintes propriedades para quaisquer elementos *a, b* e *c* pertencentes a A:

P1. (Associatividade da soma) $(a+b)+c=a+(b+c)$.

P2. (Existência do elemento neutro da soma) Existe um elemento denotado por 0 pertencente a A tal que $a+0=a.$

P3. (Existência do inverso aditivo) Para todo x pertencente a A existe **y** pertencente a A (denotaremos $y=-x$) tal que $x+y=0.$

P4. (Comutatividade da soma) $a+b=b+a.$

P5. (Associatividade do produto) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

P6. (Distributividade do produto sobre a soma): $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c=(b+c)\cdot a.$

Se o anel satisfaz a propriedade

P7. (Existência do elemento neutro do produto) Existe um elemento denotado por 1 pertencente a A tal que $a\cdot 1=a=1\cdot a$ **,**

então dizemos que é um *anel com unidade.*

Se o anel satisfaz a propriedade

P8. (Comutatividade do produto) $a\cdot b=b\cdot a$,

então dizemos que é A um *anel comutativo.*

Se o anel satisfaz a propriedade

P9. *Se* $a\cdot b=0$ *então* $a=0$ *ou* $b=0$

dizemos que A é um *anel sem divisores de zero.* Note que a forma contrapositiva da propriedade P9 é se $a \neq 0$ *e* $b \neq 0$ *então* $a \cdot b \neq 0$ e é igualmente útil.

Se o anel for comutativo, com unidade e sem divisores de zero dizemos que (A, +, ·) é um *domínio de integridade.*

Finalmente, se um domínio de integridade (A, +, ·) satisfaz
P10. (Existência do inverso multiplicativo) Se *a* é diferente de 0, então existe a' denotado por a^{-1} pertencente a A tal que $a \cdot a' = a \cdot a^{-1} = 1,$ dizemos que (A, +, ·) é um *corpo.*

É interessante perceber que se A é um anel comutativo com unidade e A possui P10 então A é um corpo, ou seja, P9 está dada em P10. De fato, vamos supor que temos $x,y \in A$ tais que $x \cdot y = 0$ (*). Vamos supor também que P10 é satisfeita, por exemplo, $y \neq 0$, logo $\exists\, y^{-1} \in A$ tal que $y \cdot y^{-1} = 1$. Ao multiplicar y^{-1} nos dois membros de (*) obtemos $x \cdot y \cdot y^{-1} = 0 \cdot y^{-1}$, logo $x \cdot 1 = 0$, ou ainda $x = 0$, logo A não tem divisores de zero, portanto A possui P9 e como A possui P10 (por hipótese) alcançamos que A é um corpo.

Observe que o elemento neutro da soma é único, pois supondo que existem dois elementos neutros da soma (0 e $0'$) temos $0 + 0' = 0$ pois $0'$ é neutro para a soma e $0 + 0' = 0'$, pois 0 também é neutro para a soma de onde concluímos que $0 = 0'$. O mesmo argumento pode ser usado para demonstrar que o elemento neutro do produto é único.

O elemento 0 é chamado em algumas circunstâncias de *elemento absorvente do produto,* pois dado A anel, temos que $\forall\, a \in A, a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$ De fato, $a \cdot 0 = a(0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0\,,$ por P6. como A é anel, o produto é fechado e $a \cdot 0 \in A$ e por P3 $\exists(-a \cdot 0) \in A$. Somando-se $-a \cdot 0$ em ambos os membros da expressão obtemos $a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-a \cdot 0)$ e portanto $0 = a \cdot 0$. Analogamente podemos provar que $0 \cdot a = 0$.

Afirmamos sem demonstração que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ não é anel, pois apenas o 0 possui elemento inverso para a soma. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é um domínio de integridade, pois satisfaz P1 a P9. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ são corpos, pois satisfazem P1 a P10. Finalmente, o conjunto dos números irracionais $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é anel, pois falta-lhe o neutro da soma.

Outros exemplos de anéis conhecidos no Ensino Médio são os polinômios a uma variável e as matrizes quadradas que estudaremos nas seguintes seções.

3.2 Anel de polinômios

Nesta seção vamos definir o conjunto dos polinômios a uma variável e coeficientes reais e verificar que este conjunto satisfaz de P1 a P9, sendo além de um anel, um domínio de integridade. Notamos também que podemos definir polinômios com coeficientes em outros conjuntos, como por exemplo os números inteiros, racionais, complexos ou ainda coeficientes em um anel qualquer A. No entanto, nesse trabalho trataremos apenas do caso com coeficientes reais.

Um polinômio é um ente matemático da forma $p(x)=a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots$, com um número finito de $a_i's\neq 0, i\in\mathbb{N}$, ou simplesmente dizemos que $a_i, i\in\mathbb{N}$ é o coeficiente do polinômio, *x* é a variável do polinômio e $n=\partial(p(x))$ o grau do polinômio p(x), onde n é o maior expoente com $a_i\neq 0$. Em algumas situações é interessante considerar o polinômio p(x) como a upla ordenada $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$.

Seja P o conjunto dos polinômios a uma variável e sejam p (ou p(x)) e q (ou q(x)) elementos de P com $p(x)=a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots$ e $q(x)=b_0x^0+b_1x^1+\ldots+b_mx^m+\ldots$ com $a_i, b_j\in\mathbb{R}, m,n\in\mathbb{N}$, $i\in\{0,\ldots,n,\ldots\}$ e $j\in\{0,\ldots,m,\ldots\}$.

Dizemos que dois polinômios p(x) e q(x) são iguais se, e somente se, $m=n$ e $a_i=b_i$ para cada $0\leq i\leq n$.

Definimos a soma de polinômios

$p(x)+q(x)=(a_1x^n+a_2.x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)+(b_1x^n+b_2.x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots)$ =

$(a_0+b_0)x^0+(a_1+b_1)x^1+\ldots+(a_n+b_n)x^n+\ldots$

e o produto de polinômio $r(x)=p(x).q(x)$ =

$(a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots)\cdot(b_0x^0+b_1x^1+\ldots+b_nx^n+\ldots)=(c_0x^0+c_1x^1+\ldots+c_nx^n+\ldots)$,

onde $c_k=\sum_{i=0}^{k} a_i.b_{k-i}$.

Com a definição equivalente obtemos

$p(x)+q(x)=(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)+(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)=(a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n, \ldots)$ e

$p(x)\cdot q(x)=(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)\cdot(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)=(c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots)$, com $c_k=\sum_{i=0}^{k} a_i.b_{k-i}$.

Observação: Note que se $n=\partial(p(x))$ e $m=\partial(q(x))$ então:

a) $n, m \in \mathbb{N}$

b) $\partial(p(x)+q(x)) \leq max\{\partial(p(x)), \partial(q(x))\}$

c) $\partial(p(x).q(x))=n+m$.

d) Podemos considerar os números reais como sendo polinômios de grau zero.

e) O grau do polinômio p(x)=0 é definido como $\partial(p(x))=-\infty$. Tal definição ocorre para simplificar o algoritmo da divisão de polinômios que não será tratado aqui.

Vamos demonstrar que o conjunto dos polinômios é um anel e um domínio de integridade. Lembrando que estamos supondo como válida a afirmação de que $\mathbb{R}$ é um corpo e as propriedades derivam dessa constatação.

P1. $[p(x)+q(x)]+r(x)$ =

$$\left[\left(a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)+\left(b_0x^0+b_1x^1+\ldots+b_nx^n+\ldots\right)\right]+\left(c_0x^0+c_1x^1+\ldots+c_nx^n+\ldots\right) =$$

$$\left[\left(a_0+b_0\right)x^0+\left(a_1+b_1\right)x^1+\ldots+\left(a_n+b_n\right)x^n+\ldots\right]+\left(c_0x^0+c_1x^1+\ldots+c_nx^n+\ldots\right) =$$

$$\left[\left(a_0+b_0\right)+c_0\right]x^0+\left[\left(a_1+b_1\right)+c_1\right]x^1+\ldots+\left[\left(a_n+b_n\right)+c_n\right]x^n+\ldots =$$

$$\left[a_0+\left(b_0+c_0\right)\right]x^0+\left[a_1+\left(b_1+c_1\right)\right]x^1+\ldots+\left[a_n+\left(b_n+c_n\right)\right]x^n+\ldots =$$

$$\left(a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)+\left[\left(b_0x^0+b_1x^1+\ldots+b_nx^n+\ldots\right)+\left(c_0x^0+c_1x^1+\ldots+c_nx^n+\ldots\right)\right] =$$

$$p(x)+[q(x)+r(x)] \; .$$

P2. O polinômio nulo $0=0x^0+0x^1+0x^2+\ldots$ é o neutro da soma. De fato

$$p(x)+0=\left(a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)+\left(0x^0+0x^1+0x^2+\ldots\right) =$$

$$\left(a_0+0\right)x^0+\left(a_1+0\right)x^1+\ldots+\left(a_n+0\right)x^n+\ldots=a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots=p(x) \; .$$

P3. Dado $p(x)\in P$ o inverso aditivo de $p(x)$ é $-p(x)=-a_0x^0-a_1x^1-\ldots-a_nx^n-\ldots$, pois

$$p(x)+[-p(x)]=\left(a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)+\left(-a_0x^0-a_1x^1-\ldots-a_nx^n-\ldots\right) =$$

$$\left(a_0-a_0\right)x^0+\left(a_1-a_1\right)x^1+\ldots+\left(a_n-a_n\right)x^n+\ldots=0x^0+0x^1+0x^2+\ldots=0 \; .$$

P4. $p(x)+q(x)=\left(a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)+\left(b_0x^0+b_1x^1+\ldots+b_nx^n+\ldots\right) =$

$$\left(a_0+b_0\right)x^0+\left(a_1+b_1\right)x^1+\ldots+\left(a_n+b_n\right)x^n+\ldots=\left(b_0+a_0\right)x^0+\left(b_1+a_1\right)x^1+\ldots+\left(b_n+a_n\right)x^n+\ldots =$$

$$\left(b_0 x^0 + b_1 x^1 + \ldots + b_n x^n + \ldots\right) + \left(a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n + \ldots\right) = q(x) + p(x) .$$

P5. $[p(x) \cdot q(x)] \cdot r(x)$ =

$$(a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad . \quad b_0 x^0 + b_1 x^1 + \ldots + b_n x^n + \ldots) \ . \ \left(c_0 x^0 + c_1 x^1 + \ldots + c_n x^n + \ldots\right) =$$

$$\left(a_0 . b_0\right) x^0 + \left(a_1 b_0 + a_0 b_1\right) x^1 + \ldots + \sum_{i=0}^{\mathrm{n}} \left(a_i b_{k-i}\right) x^{\mathrm{n}} + \ldots \ . \ \left(c_0 x^0 + c_1 x^1 + \ldots + c_n x^n + \ldots\right) =$$

$$(a_0 . b_0) . c_0 x^0 + [(a_0 . b_1 + a_1 . b_0) . c_0 + (a_0 . b_0) . c_1] x^1 + \ldots + \sum_{k=0}^{n} [\sum_{i=0}^{(k)} a_i . b_{k-i}] . c_{n-k} + \ldots \ .$$

É possível demonstrar via indução que $\sum_{k=0}^{n} [\sum_{i=0}^{(k)} a_i . b_{k-i}] . c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} . [\sum_{i=0}^{(k)} b_i . c_{k-i}]$.

Assumindo essa expressão como verdadeira concluímos como segue.

$$(a_0 . b_0) . c_0 x^0 + [(a_0 . b_1 + a_1 . b_0) . c_0 + (a_0 . b_0) . c_1] x^1 + \ldots + \sum_{k=0}^{n} [\sum_{i=0}^{(k)} a_i . b_{k-i}] . c_{n-k} + \ldots =$$

$$a_0 . (b_0 . c_0) x^0 + [a_0 . (b_0 . c_1 + b_1 . c_0) + a_1 . b_0 . c_0] x^1 + \ldots + \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} . [\sum_{i=0}^{(k)} b_i . c_{k-i}] + \ldots =$$

$$\left(a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n + \ldots\right) \ . \ [\left(a_0 . b_0\right) x^0 + \left(a_1 b_0 + a_0 b_1\right) x^1 + \ldots + \sum_{i=0}^{\mathrm{n}} \left(a_i b_{k-i}\right) x^{\mathrm{n}} + \ldots] =$$

$$\left(a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n + \ldots\right) \ . \ (\left(b_0 x^0 + b_1 x^1 + \ldots + b_n x^n + \ldots\right) \ . \ \left(c_0 x^0 + c_1 x^1 + \ldots + c_n x^n + \ldots\right)) =$$

$$p(x) \cdot [q(x) \cdot r(x)]$$

P6. $r(x) \cdot [p(x) + q(x)]$ =

$$\left(c_0 x^0 + c_1 x^1 + \ldots + c_n x^n + \ldots\right) \cdot [\left(a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n + \ldots\right) + \left(b_0 x^0 + b_1 x^1 + \ldots + b_n x^n + \ldots\right)] =$$

$$\left(c_0 x^0 + c_1 x^1 + \ldots + c_n x^n + \ldots\right) \cdot [\left(a_0 + b_0\right) x^0 + \left(a_1 + b_1\right) x^1 + \ldots + \left(a_n + b_n\right) x^n + \ldots] =$$

$$\left(c_0 . \left(a_0 + b_0\right)\right) x^0 + \left(c_1 \left(a_0 + b_0\right) + c_0 \left(a_1 + b_1\right)\right) x^1 + \ldots + \sum_{i=0}^{\mathrm{n}} \left(c_i \left(a_{k-i} + b_{k-i}\right)\right) x^{\mathrm{n}} + \ldots =$$

$$\left(c_0 a_0 + c_0 b_0\right) x^0 + \left[\left(c_1 a_0 + c_1 b_0\right) + \left(c_0 a_1 + c_0 b_1\right)\right] x^1 + \ldots + \sum_{i=0}^{\mathrm{n}} \left(\left(c_i a_{k-i} + c_i b_{k-i}\right)\right) x^{\mathrm{n}} + \ldots =$$

$$[\left(c_0 + a_0\right) x^0 + \left(c_1 + a_1\right) x^1 + \ldots + \left(c_n + a_n\right) x^n + \ldots] + [\left(c_0 + b_0\right) x^0 + \left(c_1 + b_1\right) x^1 + \ldots + \left(c_n + b_n\right) x^n + \ldots] =$$

$$\left(c_0 x^0 + \ldots + c_n x^n + \ldots\right) \cdot \left(a_0 x^0 + \ldots + a_n x^n + \ldots\right) + \left(c_0 x^0 + \ldots + c_n x^n + \ldots\right) \cdot \left(b_0 x^0 + \ldots + b_n x^n + \ldots\right) =$$

$$r(x) \cdot p(x) + r(x) \cdot q(x) \ .$$

A demonstração de P8 tornará evidente que a propriedade análoga $[p(x) + q(x)] \cdot r(x) = p(x) \cdot r(x) + q(x) \cdot r(x)$ também é válida.

P7. O neutro do produto é $1=1\cdot x^0=1x^0+0x^1+0x^2+\ldots$. De fato, $p(x)\cdot 1=\left(a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)\cdot[1x^0+0x^1+0x^2+\ldots]=$

$\left(a_0.1\right)x^0+\left(a_1.1+a_0.0\right)x^1+\ldots+\sum_{i=0}^{n}\left(a_ib_{k-i}\right)x^n+\ldots=\left(a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)=p(x)$ onde $1=b_0$ e $0=b_j$, $\forall j\neq 0, j\in\mathbb{N}$.

P8. p(x).q(x) =($\left(a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)$ + $\left(b_0x^0+b_1x^1+\ldots+b_nx^n+\ldots\right)$) =

$(a_0\cdot b_0)\cdot x^0+(a_0\cdot b_1+a_1\cdot b_0)\cdot x_1+\ldots+\sum_{i=0}^{n}(a_i\cdot b_{n-i})\cdot x^n+\ldots$ =

$\left(b_0.a_0\right)x^0+\left(a_0b_1+a_1b_0\right)x^1+\ldots+\sum_{j=0}^{n}\left(b_j.a_{n-j}\right)x^n+\ldots$ =

$\left(b_0x^0+b_1x^1+\ldots+b_nx^n+\ldots\right)\cdot\left(a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)=q(x)\cdot p(x)$ onde $j=n-i$.

P9. Sejam p(x) e q(x) polinômios não nulos. Assim $p(x)=\left(a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)$ com algum $a_i\neq 0$ e $q(x)=\left(b_0x^0+b_1x^1+\ldots+b_nx^n+\ldots\right)$ com algum $b_j\neq 0$ então

$p(x)\cdot q(x)=\left(a_0.b_0\right)x^0+\left(a_1b_0+a_0b+1\right)x^1+\ldots+\sum_{i=0}^{k}\left(a_ib_{k-i}\right)x^k+\ldots$ e o coeficiente de

x^{i+j} será $0\neq c_{i+j}=\sum_{n=0}^{i+j}a_n.b_{i+j-n}$, pois $a_i.b_j\neq 0$ e $\left(a_i.b_j\right)x^{i+j}\neq 0$.

O conjunto dos polinômios não caracteriza um corpo, pois falta P10. Se tomamos p(x)=x, então não existe um polinômio q(x) tal que p(x).q(x)=1. De fato $\partial[p(x)\cdot q(x)]=\partial(1)=0$, temos que $\partial(p(x)\cdot q(x))=n+m=0$ logo, $\partial[p(x)]$ e $\partial[q(x)]$ são no máximo zero o que contradiz $\partial[p(x)]=\partial(x)=1$.

3.3 Anel de Matrizes

Outro conjunto importante que constitui um anel é o conjunto das matrizes quadradas. Para não tornar a leitura pesada demonstraremos as propriedades apenas para as matrizes quadras de ordem 2x2, denotadas por Mat $_2$ ($\mathbb{R}$), pois o caso nxn é análogo. Uma matriz 2x2 é um objeto matemático da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ composto por duas linhas e duas colunas onde a,b,c e d são números reais.

Dizemos que dias matrizes M= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e N= $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ são iguais se, e somente se, a=e, b=f, c=g e d=h. A soma de matrizes é definida por

M+N= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ e o produto por

M·N= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a.e+b.g & a.f+b.h \\ c.e+d.g & c.f+d.h \end{pmatrix}$.

Definimos também o produto por escalar. Seja r um número real e M uma matriz quadrada de ordem 2x2 temos

$$r\cdot M=r\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ar & br \\ cr & dr \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot r=M\cdot r$$

Para verificar que o conjunto das matrizes é um anel, baseado na afirmação de que $\mathbb{R}$ é um corpo. Demonstremos as propriedades.

P1. (M+N)+O= $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ =

$\begin{pmatrix} (a+e)+i & (b+f)+j \\ (c+g)+k & (d+h)+l \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{pmatrix}$ =

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right]$ =M+(N+O)

P2. O elemento neutro da soma é $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. De fato,

M+0= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ c+0 & d+0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ =M.

P3 O inverso aditivo de M é -M= $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$. De fato,

M+(-M)= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ =0.

P4.M+N= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ =N+M

.

P5= (M·N)·O= $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a.e+b.g & a.f+b.h \\ c.e+d.g & c.f+d.h \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ =

$$\begin{pmatrix} i.(a.e+b.g)+k(a.f+b.h) & j.(a.e+b.g)+l(a.f+b.h) \\ i(c.e+d.g)+k(c.f+d.h) & j(c.e+d.g)+l(c.f+d.h) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (i.a.e+i.b.g)+(k.a.f+k.b.h) & (j.a.e+j.b.g)+(l.a.f+l.b.h) \\ (i.c.e+i.d.g)+(k.c.f+k.d.h) & (j.c.e+j.d.g)+(l.c.f+l.d.h) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} i.a.e+k.a.f+i.b.g+k.b.h & j.a.e+l.a.f+j.b.g+l.b.h \\ i.c.e+k.c.f+i.d.g+k.d.h & j.c.e+l.c.f+j.d.g+l.d.h \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a(i.e+k.f)+b(i.g+k.h) & a(j.e+l.f)+b(j.g+l.h) \\ c(i.e+k.f)+d(i.g+k.h) & c(j.e+l.f)+d(j.g+l.h) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e.i+f.k & e.j+f.l \\ g.i+h.k & g.j+hl \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right] = \text{M.(N.O)}$$

P6. O·(M+N)= $\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} i(a+e)j+(c+g) & i(b+f)+j(d+h) \\ k(a+e)+l(c+j) & k(b+f)+l(d+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(a+e)j+(c+g) & i(b+f)+j(d+h) \\ k(a+e)+l(c+j) & k(b+f)+l(d+h) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ia+ie+jc+jg & ib+if+jd+jh \\ ka+ke+lc+lj & kb+kf+ld+lh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i.a+j.c & i.b+j.d \\ k.a+l.c & k.b+l.d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i.e+j.g & i.f+j.h \\ k.e+l.g & k.f+l.h \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \text{O·M+O·N.}$$

A distributividade pela esquerda está demonstrada. A distributividade pela direita é análoga.

P7. O neutro do produto é $1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De fato temos M·1= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} a.1+b.0 & a.0+b.1 \\ c.1+d.0 & c.0+d.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ =M. A demonstração de 1·M=M também é análoga.

As demais propriedades não são válidas, de fato:

P8. Tomamos M= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e N= $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Temos: M·N= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$ e

N·M= $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 52 \end{pmatrix}$.

P9. Tomamos $0 \neq M = N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e temos M·N= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

P10. Um estudo mais aprofundado das matrizes mostra que apenas aquelas com determinante diferente de zero tem inverso multiplicativo. Em particular podemos tomar M= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e mostrar que a existência do inverso dessa matriz gera absurdos.

Supomos por absurdo que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então temos

$\begin{pmatrix} a.1+c.1 & b.1+d.1 \\ a.0+c.0 & b.0+d.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se observamos o elemento na posição 2x2 (segunda linha e segunda coluna) percebemos que temos 0=1, o que é um absurdo. Logo m não tem inversa e P10 não é satisfeita.

3.4 Subanéis e exemplos.

Nesta seção definiremos subanel, apresentaremos um teorema para simplificar a busca por subanéis e depois mostraremos alguns exemplos.

Definição: Sejam (A, +, ·) um anel e B um subconjunto não vazio de A. Se B for fechado para + e · tal como A e (B, +, ·) for um anel então dizemos que B é subanel de A.

Teorema: Seja (A, +, ·) um anel e B um subconjunto de A·B é subanel de A se, e somente se, as seguintes condições são verificadas:

I. O elemento neutro da soma de A pertence também a B: “0 pertence a B”

II. B é fechado para a diferença: “Se *x* e *y* pertencem a B, então x-y também pertence a B”

III. B é fechado para o produto: “Se *x* e *y* pertencem a B, então x·y pertence a B”

Demonstração: Vamos começar demonstrando que se (B, +, ·) é um anel então I, II e III são válidas.

De fato, se B é um anel antão valem P1 a P6. A propriedade P2 afirma que existe

0 em B, que é igual ao 0 em A, pois o neutro da soma é único como já demonstrado na observação 1. Assim, I já está provada.

Por definição B é fechado na soma e por P3 existe o inverso da soma, logo $x-y=x+(-y)\in B$ e II está demonstrada. Como estamos assumindo que B é anel, temos por definição que B é fechado no produto e isso valida III.

Agora, assumindo que I, II e III são válidas em B vamos demonstrar P1 a P6, que B é não vazio e fechado para a soma e para o produto.

Que B é não vazio é obvio, pois I afirma que 0 pertence a B e isso prova também P2. A afirmação III afirma que B é fechado no produto. Por II temos $x,y\in B\Rightarrow x-y\in B$, fazendo x=0 temos $0-y=-y\in B$, e isso prova P3. Com isso temos $x+y=x-(-y)\in B$ e isso prova que B é fechado na soma.

Notemos também que associatividade, comutatividade e distributividade são propriedades ditas *hereditárias,* ou seja, como A as possui, B as possui. Provar isso é muito simples pela via contrapositiva. Se B não possuísse as tais propriedades, então alguns elementos de B seriam contra-exemplos das ditas propriedades, mas como B é subconjunto de A, então eles também seriam contra-exemplos em A e A não possuiria a associatividade, nem a comutatividade nem a distributividade. Portanto P1, P4, P5 e P6 estão provadas.

Se B é subanel de A usaremos a notação $B\leq A$. Como exemplos de subanéis temos:

a. $n\mathbb{Z}\leq\mathbb{Z}\leq\mathbb{Q}\leq\mathbb{R}\leq\mathbb{C}$, onde $n\mathbb{Z}$ são os múltiplos inteiros de n natural fixado.

b. $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]\leq\mathbb{R}$ onde $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ são os números da forma $a+b.[\sqrt{p}]$ onde a e b são inteiros e p é primo fixado.

Provaremos que $n\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ são subanéis de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$, respectivamente. Vamos começar com $n\mathbb{Z}$.

$n\mathbb{Z}$ é subanel pois dados *a* e *b* pertencentes a $n\mathbb{Z}$ temos $a=kn$ e $b=k'n$ a soma é definida $a+b=kn+k'n=(k+k')n$ e o produto é definido como $a.b=kn.k'n=(knk')n$ e segue-se que:

I. 0=0n pertence a $n\mathbb{Z}$. 0n é o neutro da soma pois $a+0=kn+0\text{n}=(k+0)n=kn=a$.

II. $a-b=kn-k'n=(k-k')n\in n\mathbb{Z}$ pois, $k-k'\in\mathbb{Z}$.

III. $a.b=kn.k'n=(knk')n\in n\mathbb{Z}$, pois $knk'\in\mathbb{Z}$.

Observação. Se tomarmos n=2 temos $2\mathbb{Z}$ que são os pares e temos um anel sem unidade. Toda vez que tomamos $n\neq 1$ temos um anel sem unidade.

Vamos provar que $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ é subanel. Dados *x* e *y* pertencentes a $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$, temos *x*= $a+b.[\sqrt{p}]$ e *y*= $c+d.[\sqrt{p}]$, a soma é definida como

$x+y=a+b.[\sqrt{p}]+c+d.[\sqrt{p}]$ = $(a+c)+(b+d).[\sqrt{p}]$ e o produto

$x\cdot y=(a+b.[\sqrt{p}])\cdot(c+d.[\sqrt{p}])$ = $(a.c+b.d.p)+(a.d+b.c).[\sqrt{p}]$

e segue-se que:

I. 0= $0+0.[\sqrt{p}]$ pertence a $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ e x+0= $a+b.[\sqrt{p}]$ + $0+0.[\sqrt{p}]$ = $(a+0)+(b+0).[\sqrt{p}]$ = $a+b.[\sqrt{p}]$ =x

II. *x-y*= $(a+b.[\sqrt{p}])$ - $(c+d.[\sqrt{p}])$ = $(a-c)+(b-d).[\sqrt{p}]$ que pertence a $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$.

III. *xy*= $(a+b.[\sqrt{p}])$. $(c+d.[\sqrt{p}])$ = $(a.c+b.d.p)+(a.d+b.c).[\sqrt{p}]$ que pertence a $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ pois *(a·c+b·d·p)* e *(a·d+b·c)* pertencem a $\mathbb{Z}$.

Um caso curioso é o subanel do conjunto das matrizes quadradas definido por $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ com $a\in\mathbb{R}$. A unidade é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que é a unidade do anel das matrizes quadradas. Provemos que B é um anel. Sejam M= $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e N= $\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elementos de B.

I. $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e M+0= $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ =M

II. M-N= $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a-a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, como $a-a'\in\mathbb{R}$, conclui-se que M-N pertence a B.

III. M.N= $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a.a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, como $a.a'\in\mathbb{R}$, conclui-se que M.N pertence a B.

Proposição: As únicas soluções de $x^2=x$ em um domínio de integridade são 0 e 1. De fato, seja D um domínio de integridade e $x\in D$ tal que $x^2=x$ temos $x^2-x=x(x-1)=0$ se e somente se x=0 ou x=1.

Corolário. Seja D um domínio de integridade com unidade 1 e seja B um subanel de D com unidade 1'. Temos 1=1'

Demonstração: Por definição 1 e 1' são diferentes de 0 e como $1^2=1$ e $1'^2=1'$ então 1=1', pois são a segunda solução da equação $x^2=x$.

3.5 Definição de ideais e exemplos.

Nesta seção introduziremos a importante definição de ideal de um anel.

Definição: Seja A um anel I um subanel de A. Dizemos que I é ideal à esquerda de A se:

(IV) $\forall a\in A, \forall x\in I$ temos $a.x\in I$ (ou simbolicamente $A.I\subset I$).

Analogamente definimos o ideal à direita J de um anel A se

(IV') $\forall a\in A, \forall x\in J$ temos $x\cdot a\in J$ (ou simbolicamente $J.A\subset J$).

Se I é ideal simultaneamente à direita e à esquerda de um anel A, ou seja,

(V) $\forall a\in A, \forall x\in I$ temos $a\cdot x\in I, x\cdot a\in I$ (ou simbolicamente $A.I\subset I$ e $I.A\subset I$) dizemos que I é um ideal bilateral de A (ou simplesmente, I é ideal de A).

Se A for anel comutativo, então as condições IV, IV' e V são equivalentes e as três noções acima coincidem.

Os conjuntos {0} e A são sempre ideais de A, por isso são chamados *ideais triviais* de A. Os ideais não triviais são chamados *ideais próprios.*

Note que se $1\in I$, onde I é ideal (ou ideal a esquerda, ou ideal a direita) de um anel A, então I=A. Vamos supor sem perda de generalidade que I é ideal a esquerda de A. Portanto, $\forall a\in A$ e $\forall x\in I$ temos $x.a\in I$. Se tomamos $x=1$ concluímos que $\forall a\in A, a\in I$. Ou seja $A\subseteq I$, mas por definição $I\subseteq A$, logo I=A.

Exemplo: Seja A o anel Mat$_2$($\mathbb{R}$), isto é as matrizes quadradas de ordem 2x2 com coeficientes em R e sejam I e J definidos como segue-se

$I=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ tal que $a, c\in\mathbb{R}$ e $J=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tal que $a, b\in\mathbb{R}$.

O conjunto I é um ideal à esquerda de A pois $a\cdot x=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix} a.e+b.f & 0 \\ c.e+d.f & 0 \end{pmatrix}$ que pertence a I, mas não é um ideal à direita de A, pois $x\cdot a=$ $\begin{pmatrix} e & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e.a & e.b \\ g.a & g.b \end{pmatrix}$ que não pertence necessáriamente a I.

Por outro lado J é um ideal à direita de A, pois $x \cdot a = \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} e.a+f.c & e.b+fd \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que é um elemento de J, mas não é um ideal à esquerda de A

pois $a \cdot x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.e & a.f \\ c.e & d.f \end{pmatrix}$ que não é, em geral, um elemento de J.

$Mat_2(\mathbb{R})$ é um exemplo de *anel simples*, pois só possui os ideiais bilaterais triviais. Para provar isso vamos supor que I é um ideal de A=$Mat_2(\mathbb{R})$ e $I \neq \{0\}$.

$\exists M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in I$ com algum $a_{ij} \neq 0$, $1 \leq i,j \leq 2$. Sejam $E_{rs} \in Mat_2(\mathbb{R})$ com $1 \leq r,s \leq 2$ as seguintes matrizes:

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Através de cálculos rápidos é possível verificar que, dada uma matriz genérica N= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, o produto $E_{rs} \cdot N \cdot E_{mn}$ é uma matriz 2x2 que contém o elemento a_{sm} na posição (r,n). Assim podemos compor a matriz $\begin{pmatrix} a_{sm} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{sm} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a_{sm} & 0 \\ 0 & a_{sm} \end{pmatrix} \in I$, onde

$E_{1s} \cdot M \cdot E_{m1}$ = $\begin{pmatrix} a_{sm} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $E_{2s} \cdot M \cdot E_{m2}$ = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{sm} \end{pmatrix} \in I$. Escolhemos $a_{sm} \in \mathbb{R}$, $a_{sm} \neq 0$ e tomamos a^{-1}_{sm} para construir a matriz $\begin{pmatrix} a^{-1}_{sm} & 0 \\ 0 & a^{-1}_{sm} \end{pmatrix} \in I$. Calculando $\begin{pmatrix} a_{sm} & 0 \\ 0 & a_{sm} \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} a^{-1}_{sm} & 0 \\ 0 & a^{-1}_{sm} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in I$, e como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a unidade das matrizes, concluímos que $I = Mat_2(\mathbb{R})$, como queríamos demonstrar.

Definição: Dizemos que I é um ideal maximal de um anel A se $I \neq A$ e os únicos ideais de A que contém I são I e A.

Observação: Seja A um anel e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$. É fácil ver que o conjunto denotado e definido por $A.x_1 + A.x_2 + \ldots + A.x_n = \{a_1.x_1 + a_2.x_2 + \ldots + a_n.x_n : a_i \in A\}$ é um ideal à esquerda, pois cada parcela constitui um ideal separadamente. Esse conjunto é chamado de *ideal à esquerda gerado* por $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$. Podemos definir analogamente o *ideal à direita gerado* por $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$.

Definição: Ainda nesse contexto definimos $I = A.x_1$ denominado ideal principal (à esquerda) gerado por $x_1 \in A$ e podemos definir de forma similar o ideal principal à direita gerado por $x_1 \in A$.

Teorema: Seja K +, ·, um anel comutativo com unidade $1 \in K$. Então as seguintes condições são equivalentes.

a) K é um corpo.

b) {0} é um ideal maximal de K.

c) Os únicos ideais de K são os triviais.

Demonstração:

($a \Rightarrow b$) Seja K um corpo e seja J um ideal de J tal que $\{0\} \subseteq J \subseteq K$. Ou J={0} e neste caso não há o que demonstrar ou $\{0\} \neq J$, neste caso temos que $\exists 0 \neq a \in J$. Como K é um corpo, $\exists b \in K$ tal que $b.a = 1$, logo $1 \in J$, portanto J=K. Assim os únicos ideais de K que contém {0} são {0} e K. Logo {0} é ideal maximal de K.

($b \Rightarrow c$) {0} é ideal maximal de K, ou seja, os únicos ideais de K que contém {0} são {0} e K, portanto os únicos ideais de K são os triviais, pois todo ideal contém {0}.

($c \Rightarrow a$)Temos que K é um anel comutativo com unidade $1 \in K$, logo para K ser corpo falta apenas P10, ou seja $\forall a \in K, a \neq 0, \exists b \in K$, tal que $a.b = b.a = 1$. Seja $0 \neq a \in K$, e I=K·a o ideal principal de K gerado por a. Tomamos $a = 1.a \in I$, o que implica que $I \neq \{0\}$, assim, por hipótese, I=K. Segue-se que $1 \in K = K.a \Rightarrow \exists b \in K$ tal que $b.a = 1$. Isso encerra a demonstração.

4. **A EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA**

Para finalizar o estudo dos anéis e corpos nos propomos a expor uma aula e pedir que os alunos respondessem a um questionário, embora não fossem obrigados a fazê-lo, para analisar seu nível de adaptação. Antes de descrever a experiência mostraremos que base teórica usaremos para a análise dos dados.

4.1 Nota filosófica

Qualquer discussão sempre cai na questão "como se sabe?" que automaticamente levanta a questão "o que é aquilo que se sabe?". Em outras palavras, todas discussões carecem de pressupostos epistemológicos e ontológicos.

Para responder essas perguntas me apoio em Mario Ferreira dos Santos. Todo ser é composto por partes que o definem enquanto tal, que chamamos de "forma", "*logos*" ou "*numerós*" e de partes que não o definem, que chamamos "acidentes". Um acidente é tudo aquilo que acontece, mas não é necessário que aconteça e usamos a expressão necessário para algo que é impossível não acontecer.

No livro "Teoria do Conhecimento" ele diz que quando vemos um objeto captamos uma imagem do objeto, captamos sua forma. Esse logos é o que define o objeto, se o logos fosse diferente o objeto seria outro e não o primeiro. Captamos a lógica das relações internas (1), a lógica das possibilidades imediatas (que podemos chamar de latência) (2), captamos também imediatamente a diferença entre alguns acidentes e seu lógos (3) de acordo com os nossos próprios esquemas de captação. A aprendizagem em nível inicial é uma tensão entre o que podemos ver de um objeto e o que o objeto pode mostrar.

Por exemplo, ao primeiro contato com um cão, sabemos que ele é um ser vivo e que para estar vivo precisa estar conectado ao centro de seu ser (1). Sabemos que ele pode correr mas não pode voar (2) sabemos que ele tem pelo mas poderia não ter, ou se tivesse poderia ser de outra cor. Conforme vamos aprendendo, e ampliando nossa capacidade de percepção de que ele é um ser que mama, que ele pode ser manso ou agressivo, entre outros atributos. Tudo isso já está dado no cão e é o que caracteriza a espécie dos cachorros.

Aqui partimos para a questão dos universais. Todo nosso conhecimento é da forma de universais e a matemática é um universal mais abstrato que o conceito de cão, mas menos abstrato do que o conceito de ser ou de ente.

Um universal é algo que diz respeito a muitos. Nesse caso a espécie é um universal. Sobre o universal, as opiniões variam (usando a classificação de Santos em “Origem dos Grandes Erros Filosóficos”) do realismo, conceptualismo e nominalismo. O nominalismo acredita que os universais nada são, são apenas sons, são apenas nomes. O conceptualismo acredita que os universais são alguma coisa, mas sem nenhuma ligação com a realidade, são puras construções da mente para colocar o caos do mundo externo em ordem no interior do indivíduo. O realismo acredita que há uma correspondência entre os universais e a realidade. O realismo se divide em exagerado, quando pensa que os universais existiriam mesmo que nenhum mudo físico existisse e o realismo moderado pensa que os universais existem, mas dependem do mundo concreto para se manifestar e existir.

O erro do realismo exagerado é ao dizer que os universais são entes próprios, então são substâncias, então deve existir um universal do universal e este também seria um ente próprio que exige um universal do universal do universal e assim por diante. Claramente isso geraria uma sequência infinita que é impossível, pois onde estaria a forma primeira que adicionando os acidentes formaria as seguintes? O nominalismo falha por acreditar que as formas são nada em si mesmas. Se as formas não existem então não existe definições de semelhança e diferença e tudo é a mesma coisa, ou seja, nada é. O conceptualismo erra ao crer que o mundo externo é um caos e que apenas o interior do indivíduo é organizado, pois como poderíamos nos mover no tempo e no espaço se o que vemos e sentimos não corresponde a realidade, veríamos uma porta aberta, mas, na verdade, estaria fechada. A visão que consideramos mais apropriada para a natureza dos universais, a natureza do conhecimento e a natureza da matemática é o realismo moderado, que diz que as formas existem nos objetos e que a mente capta essas formas com maior ou menor proporcionalidade, mas se não houvessem objetos as formas não existiram. O realismo moderado responde a questão da natureza da matemática com uma versão intermediária das tradicionais respostas: “inventada” que uma versão de docetismo e nominalismo e “descoberta” que é uma versão de realismo exagerado.

É como se disséssemos que os triângulos, os círculos, os números, as estruturas algébricas, entre outros, existem realmente, mas só se manifestam na natureza e ao ver a natureza captamos a lógica do ser. Segundo Santos, o mundo das ideias de Platão é uma figura de linguagem para a mente humana que capta e tem a sensação de relembrar, pois simplesmente atualiza os conhecimentos em potencial que já possuía.

Retornando à questão da aprendizagem, já explicamos como se captam as imagens das coisas, falta comentar sobre a captação das formas matemáticas para compreender as dificuldades e avanços dos estudantes na atividade específica aplicada.

A imagem captada dos objetos sensíveis está na fantasia que é a união de memória e imaginação, pois toda imagem mental tem algo de externo e algo de interno, ou seja, a imagem que temos na cabeça é uma tensão entre a imagem captada e os elementos faltantes, talvez por esquecimento ou supressão psíquica, ou qualquer outro motivo, que a mente tem de reconstruir. Isso fica muito claro quando tentamos reproduzir algo baseado na memória e depois de pronto comparamos com o original. Alumas mudanças são percebidas.

Com os elementos da fantasia conseguimos construir juízos válidos. Um juízo é a impressão, memórias das experiências ou análogos imaginativos, ou sentimentos que a mente tem quando pensa sobre algo. Palavras e frases são apenas símbolos, o signo é o juízo, por isso frases não podem ser verdadeiras ou falsas, mas juízos podem. Podemos perceber essa diferença quando vemos duas pessoas discutindo por palavras diferentes, mas quando se percebe a opinião é mesma sobre o assunto.

Estes juízos são objeto de estudo também da matemática, são abstrações que os estudantes precisam obter para resolver problemas – a matemática se distingue por se esforçar para ter uma linguagem cada vez mais rígida para transpor o juízo em palavras. O problema de muitos matemáticos e o problema de muitos estudantes de matemática é que eles esquecem a experiência real que gerou o conceito matemático em primeiro lugar, gerando uma alienação, o aluno de matemática que olha isso pode ter um entrave, ou ele aceita a alienação ou ele tem muitas dificuldades durante o período escolar com esse professor.

Para vencer a alienação duas são as tentativas mais comuns o estudo da história da matemática que fará reviver a experiência inicial que gerou o conceito (por isso mesmo tentei responder a questão “por que se estudaram e se definiram as estruturas algébricas?” na nota histórica), ou a matemática aplicada que tomará o conceito e descerá na escala das abstrações.

4.2 A experiência

Nesta seção será apresentada uma proposta didática para o uso dos conceitos apresentados neste trabalho nas seções 3.1 a 3.3 como conteúdo para alunos do segundo ano do ensino médio, numa escola pública do estado do Rio Grande do Sul, na cidade de Novo Hamburgo. Tal proposta foi projetada numa tentativa de incluir uma linguagem matemática mais rígida, através de demonstrações e abordagem do conteúdo em si, no ensino médio e também para experimentar qual a eficácia de uma aula com conteúdos de matemática avançada para alunos do ensino médio de uma escola pública.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais a matemática do ensino médio deve servir como um espaço onde os alunos poderão explorar, ampliar e praticar os conteúdos matemáticos conhecidos e aprendidos no ensino fundamental (PCNEM, 2015, p.41), com isso podemos dizer que nossa experiência acabou oportunizando a estes alunos a possibilidade de ampliarem seu conhecimento em matemática para além do que eles estão acostumados a fazer. Numa análise e exemplo superficiais os alunos tomaram conhecimento da existência da Teoria dos Anéis e suas principais aplicações no ensino fundamental e ampliaram seu conhecimento no ensino médio a partir das relações entre conjuntos presentes nas funções matemáticas e com a nossa proposta, tais alunos tiveram a oportunidade de ter contato com conceitos que os ajudariam a ampliar ainda mais este conhecimento sobre conjuntos ao sistematizá-los em anéis ou corpos, além de tomar conhecimento de conjuntos com operações de soma e produto não usuais assim como matrizes e as extensões de corpos $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ e extensões de anéis $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. O encontro com os alunos, para este fim, ocorreu em um dia de aula, o conteúdo foi exposto e em seguida avaliado, como veremos a seguir. Este encontro serviu como aula introdutória e motivadora ao estudo do conteúdo de matrizes, conteúdo padrão no Ensino Médio. Talvez fosse necessário um tempo maior para se trabalhar tal conteúdo com os alunos, porém estas análises deixaremos para a seção posterior destinada a este fim.

A prática ocorreu no dia dois de outubro de 2015, sexta-feira, das 7h às 9h e 30 min com os alunos da turma 201 do Colégio Senador Alberto Pasqualini, na cidade de Novo Hamburgo no estado do Rio Grande do Sul, Brasil. A turma foi escolhida por ser eu o professor regente da mesma e porque os alunos desta turma tiveram um bom rendimento médio em matemática durante o primeiro trimestre deste ano (2015), mas que decaiu no segundo trimestre em relação ao primeiro trimestre no tocante ao empenho dos alunos. O assunto abordado nesta aula foi Introdução à Anéis e Corpos com análise das propriedades P1 à P10 descritas na seção 3.1 deste trabalho, estendendo tais propriedades ao conjunto das matrizes conforme abordado na seção 3.3. O objetivo desta proposta didática é criar uma situação de ensino e aprendizagem que oportunize aos alunos ampliar seus conhecimentos em matemática avançada, apresentá-los às demonstrações matemáticas e, por fim, ampliar seus esquemas imaginativos dos entes abstratos em relação ao seu conhecimento anterior colocando o que era um conjunto total como um elemento de um novo ente abstrato, tomando como exemplo os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, e introduzindo e motivando o estudo de Matrizes quadradas 2 x 2 entre outros.

Para apresentação dos conceitos a serem trabalhados na proposta didática foi dada uma aula expositiva sobre os conceitos de anel e corpo com definição e exemplos, tal como apresentado na sessão 3.1. Num primeiro momento expliquei aos alunos que neste dia eles teriam uma aula especial com conteúdo diferenciado que serviria como prática para este trabalho e que ao final da aula eles seriam avaliados. A exposição do conteúdo foi realizada transcrevendo no quadro as definições e as propriedades P1 a P10 conforme descritas na seção 3.1. Cada propriedade foi exemplificada com operações no conjunto dos números inteiros ou no conjunto dos números racionais, quando o conjunto dos números inteiros era insuficiente. Deu-se maior atenção para as propriedades da existência do neutro aditivo, do inverso aditivo, da distributividade do produto em relação a soma e da existência do neutro do produto. Ainda que o conteúdo estivesse escrito no quadro cada assunto abordado foi explicado verbalmente e permitido um espaço para perguntas e dúvidas que pudessem surgir ao longo da explanação dos conteúdos.

Logo após o final da explanação sobre as definições e propriedades de anéis e corpos foi definido o conjunto das matrizes de ordem 2 x 2, juntamente com suas definições de soma e produto. A maioria dos detalhes presentes nos exemplos utilizados na explanação sobre o conjunto de matrizes, não foram transmitidos em forma escrita, ou tão detalhadamente como aparecem na seção 3.3, e, sim, apenas citados aos alunos. Foi explicado o motivo pelo qual o Conjunto das Matrizes formam um anel e mostrado quem são a matriz unidade e a matriz nula. Foi demonstrado, por contra-exemplo, que o produto entre matrizes não é comutativo e que as matrizes têm divisores de zero, para isto foi suposto que as demais propriedades são válidas por extensões dos reais e que essas são anomalias do conjunto de matrizes em relação aos conjuntos numéricos, ou seja, como se aprende por oposição de ideias, destacou-se as diferenças entre um conjunto e outro, a saber o conjunto de matrizes e os demais usados nos exemplos anteriores. Diferenças estas que surpreendem contra intuitivamente. Neste momento os alunos demonstraram o estranhamento esperado com tais exemplos.

Após um momento de dúvidas foi dado a cada um dos alunos uma folha em branco na qual eles deveriam escrever as respostas dos seguintes enunciados, que estavam escritos no quadro:

Atividade 1

Classifique os conjuntos abaixo em anéis, corpos ou nenhum dos anteriores (NDA). Justifique suas respostas.

a) $\mathbb{N}$

b) $\mathbb{Z}$

c) $\mathbb{Q}$

d) Irracionais ou $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

e) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3}\}$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$.

f) $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3}\}$, onde $a, b \in \mathbb{Q}$.

g) Conjunto dos polinômios $\{p(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n , a_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$

Atividade 2

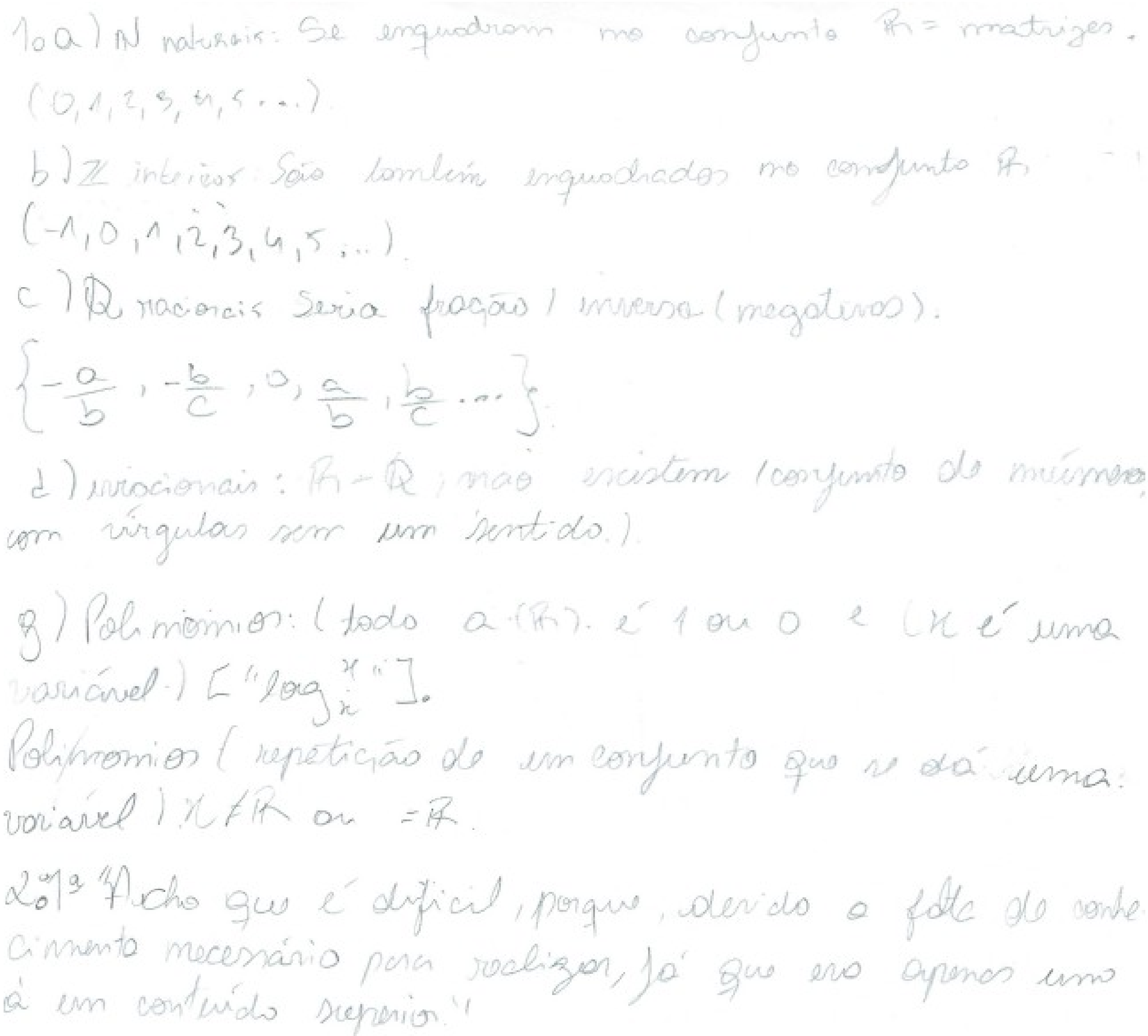
Comente a experiência de ter uma aula de álgebra avançada.

4.3 Apresentação e análise das respostas dos alunos às atividades propostas

Por não se tratar de atividades que fariam parte da avaliação anual nem todos os alunos se dispuseram a realizar as atividades. Dos vinte e nove alunos presentes, apenas vinte aceitaram a folha para responder as questões. Desses vinte alunos, apenas onze não entregaram a folha em branco. Desses onze, seis responderam apenas um item da atividade 1 ou apenas a atividade 2, quatro responderam os cinco primeiros itens da questão 1 mais a questão 2 e apenas um respondeu todas as questões.

O único aluno que tentou responder todas as questões é um aluno que se esforça muito para aprender matemática, mas falta-lhe paciência e reflexão para sistematizar os conhecimentos mentalmente. Isso explica a divergência entre as respostas dadas e as perguntas, é fácil perceber, na imagem 1 a seguir, que ele tentou definir os conjuntos quando deveria classificá-los. Porém, acredito que ele tenha entendido melhor o que foi explicado, pois já tem mais esquemas de captação de conteúdos abstratos que os colegas e pela opinião sobre a aula, percebe-se que ele entendeu melhor a profundidade dos conteúdos, apenas falta-lhe a sistematização. Os alunos que apenas deram opinião, parecem ter gostado muito, mas se gostaram por que não responderam? Justamente pelo fato de nada terem captado. Eles serão analisados melhor em seguida.

Chamarei de aluno 1, o aluno que respondeu da seguinte maneira:



1º a) N naturais: Se enquadram no conjunto R = matrizes.
(0, 1, 2, 3, 4, 5 ...)

b) Z inteiros: São também enquadrados no conjunto R.
(-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...)

c) Q racionais: Seria fração / inversa (negativos).
$\left\{-\frac{a}{b}, -\frac{b}{c}, 0, \frac{a}{b}, \frac{b}{c} \ldots\right\}$

d) irracionais: R - Q; não existem (conjunto de números com vírgulas sem um sentido.)

g) Polinômios: (todo a (R). é 1 ou 0 e (x é uma variável.) ["$\log_x^x$"].
Polinômios (repetição de um conjunto que se dá uma variável) $x \neq R$ ou $= R$.

2º) "Acho que é difícil, porque, devido a falta de conhecimento necessário para realizar, já que era apenas uma à um conteúdo superior."

Imagem 1 – Resposta do aluno 1

As respostas a seguir referem-se não a apenas um aluno, mas a um grupo de quatro alunos, que responderam bem os primeiros itens das perguntas. Eles, apesar da solicitação de responderem individualmente, trocaram informações, discutiram as perguntas e pediram confirmação de suas respostas. Chamarei de aluno 2, aluno 3, aluno 4 e aluno 5 os integrantes deste grupo de alunos, cujas respostas às atividades seguem abaixo:

a → NDA, pois os naturais não possuem números negativos;
b → Anéis, não podem ser corpo, pois os inteiros não possuem frações.
c → Corpo, pois se encaixa em ambas as alternativas
d → NDA, pois não possui zero.
e → Tem da 1ª até a 9ª, já a 10ª não tenho certeza.
f →
g →

2 → Gostei de ter um ensino mais avançado e ter uma noção do que vem pela frente, porém achei bastante complexo e difícil de entender.

Imagem 2 – Resposta do aluno 2

1a. NDA, porque os naturais não tem números negativos.
b. Anéis. Não pode ser corpo, pois os inteiros não tem frações.
c. Corpo, pois se encaixa em todas as alternativas.
d. NDA, porque não tem zero.
e. Tem do 1 a 9, mas não tenho certeza se no 10 tem.
f.

2. Eu gostei da aula, foi fácil de entender as operações e poderia ter mais aulas assim.

Imagem 3 – Resposta do aluno 3

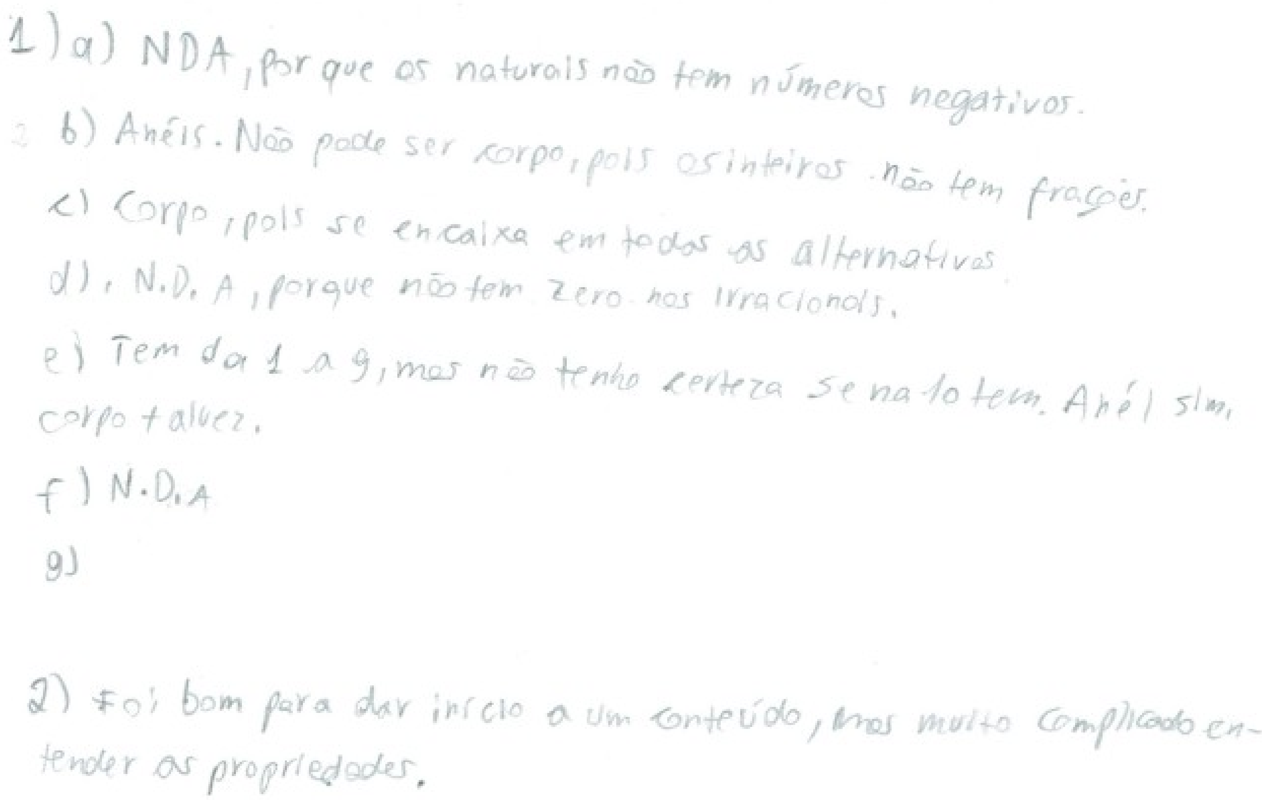

1) a) NDA, porque os naturais não tem números negativos.
b) Anéis. Não pode ser corpo, pois os inteiros não tem frações.
c) Corpo, pois se encaixa em todas as alternativas.
d), N.D.A, porque não tem zero nos irracionais.
e) Tem da 1 a 9, mas não tenho certeza se na 10 tem. Anél sim, corpo talvez.
f) N.D.A
g)
2) Foi bom para dar inicio a um conteúdo, mas muito complicado entender as propriedades.

Imagem 4 – Resposta do aluno 4

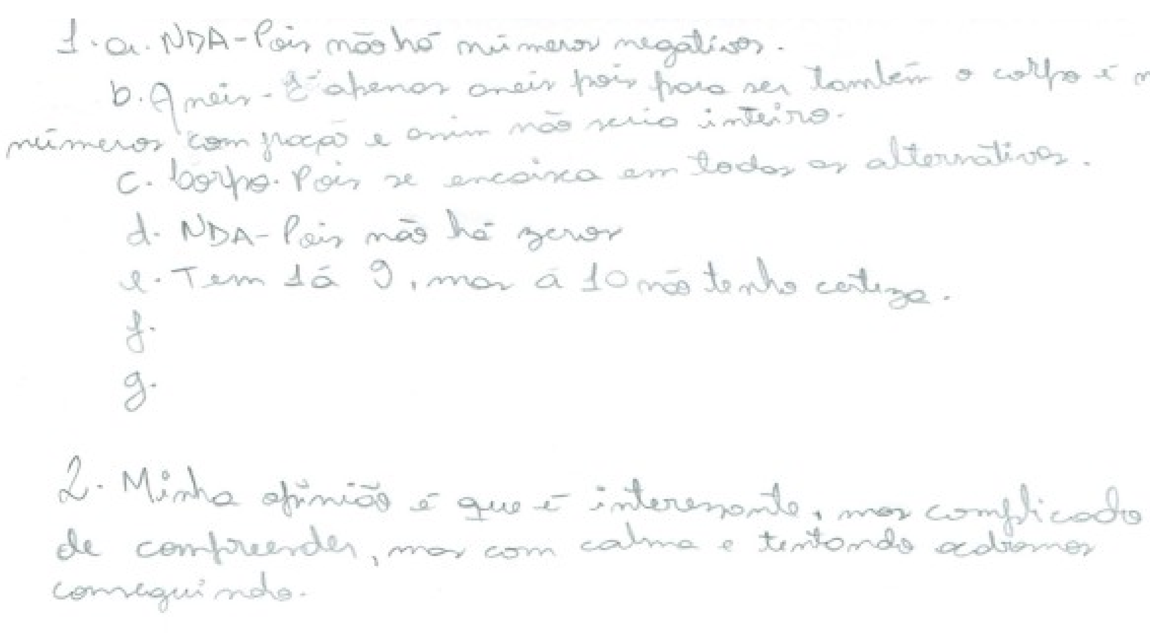

1. a. NDA - Pois não há números negativos.
b. Aneis - É apenas aneis pois para ser tambem o corpo é necessário números com fração e assim não seria inteiro.
c. Corpo. Pois se encaixa em todas as alternativas.
d. NDA - Pois não há zeros
e. Tem 1 á 9, mas à 10 não tenho certeza.
f.
g.
2. Minha opinião é que é interessante, mas complicado de compreender, mas com calma e tentando acabamos conseguindo.

Imagem 5 – Resposta do aluno 5

É facil perceber que esse grupo entendeu os conceitos, aplicando-os corretamente, tão somente não souberam justificar apropriadamente, mas isso já era esperado, pois eles não tem vocabulário matemático adequado, nem rigor, nem domínio dos símbolos. Inclusive em alguns momentos me perguntaram o que significava o $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, mas mesmo sem saber o símbolo, conheciam o conteúdo e souberam articular com as novas estruturas matemáticas.

Eles não conseguiram responder sobre os polinômios, nem sobre os conjuntos $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ e $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Sobre a não resposta dos alunos aos itens que trabalhou com polinômios se explica pela forma como eles costumeiramente viam os polinômios em equações ou funções, ou seja meios para um fim, mas nunca objetos próprios. A dificuldade com as extensões de corpos ocorre pela dificuldade de conhecer um objeto estranho e novo. Além da necessidade de expandir seus esquemas mentais para compreender estruturas algébricas, que são os anéis e corpos, compreender objetos novos foi realmente exigir algo acima da capacidade deles, mas foi positivo para encontrar o limite de suas capacidades. A opinião desse grupo, como pode ser vista, foi bem mais agradável que a do aluno anterior, gostaram, mas consideraram difícil.

Infelizmente os outros alunos não puderam ser devidamente avaliados, principalmente os que se recusaram a aceitar a folha ou não escreveram nada na mesma, dentre os que responderam apenas uma frase, não se pode ter certeza se copiaram de um segundo grupo, ou se realmente resolveram sozinhos, acredito que eles tentaram fazer, mas ou só conseguiram uma das respostas da questão ou sua opinião, ou dizer que $\mathbb{N}$ não é nem corpo e nem anel, pois faltam-lhe os negativos. Meu parecer sobre tais respostas realmente terem sido transcritas por tais alunos e não serem fruto de cópia de respostas é que caso eles quisessem copiar, teriam copiado todas as respostas dos colegas e não apenas uma resposta, ou uma opinião.

As respostas do terceiro grupo confirmam a possibilidade de tentativa e erro, ou seja, eles tentaram fazer, mas não captaram a real dificuldade e a real problemática da atividade. Sobre esse grupo maior, juntamente com os demais que nada disseram, podemos dizer que nesse momento estavam abaixo da discussão realizada, e tal atividade não deveria ser-lhes proposta. Eis alguns exemplos, os demais estão nos anexos. Chamarei de alunos 6 e 7 os alunos que apresentaram as atividades a seguir:

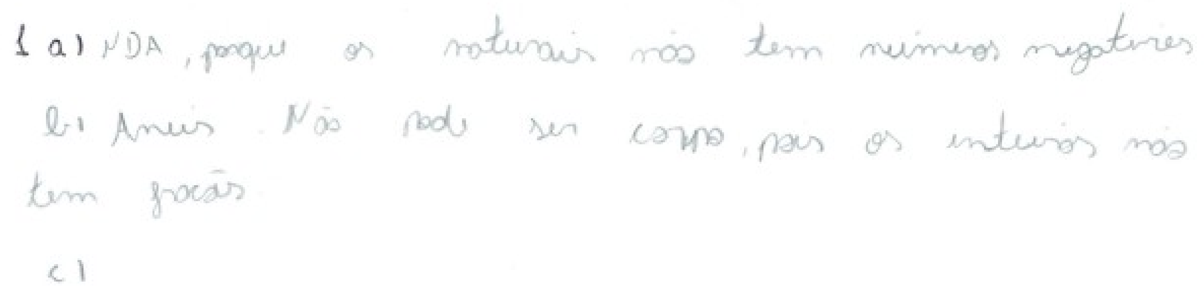

1 a) NDA, porque os naturais não tem números negativos
b) Anéis. Não pode ser corpo, pois os inteiros não tem frações
c)

Imagem 6 - Resposta do aluno 6

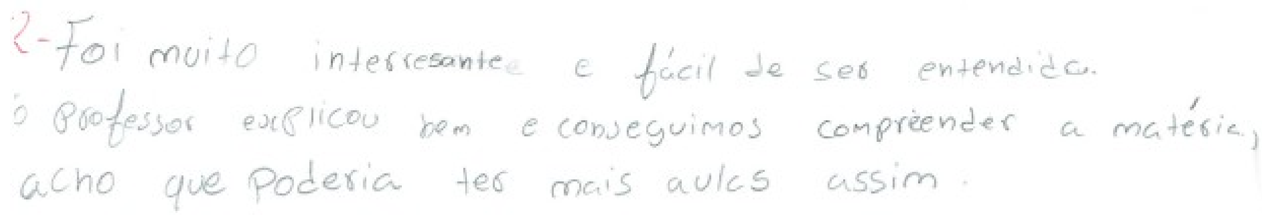

2- Foi muito interressante e fácil de ser entendida.
O Professor explicou bem e conseguimos compreender a matéria,
acho que Poderia ter mais aulas assim.

Imagem 7 – Resposta do aluno 7

4.4 Considerações sobre a experiência.

Respondendo a pergunta se eu repetiria a experiência outras vezes a resposta é afirmativa. Tenho a impressão, e tão somente a impressão, de que se os alunos do Ensino Médio pudessem escolher seus currículos, matriculando-se e visitando aulas temáticas então o rendimento de um modo geral aconteceria. Digo isso pois percebo que a atividade foi boa para todos aqueles que estavam interessados na aula, mesmo aqueles que apenas responderam uma questão ou apenas deram sua opinião saíram da aula mais instigados e/ou propensos ao estudo da álgebra, saíram com a noção de que há algo a ser aprendido e que matemática estuda a si mesma. Para o grupo dos alunos 2, 3, 4 e 5, que aprenderam algo sobre estruturas algébricas nada precisa ser acrescentado, pois o objetivo foi alcançado e para o aluno 1 que tudo confundiu, basta que se dê mais tempo e uma atenção especial à sua vontade de aprender mais matemática, bastando comentários extras ao final da aula, conectando só conteúdos da aula com os demais conteúdos que ele já conhece a fim de ter melhor sistematização.

Apesar de ser uma boa turma, em certo sentido, menos da metade aproveitou a aula, mas isso ocorreria mesmo que o assunto fosse outro, pois, como foi citado antes, ela decaiu no segundo trimestre em relação ao primeiro trimestre, isto não quer dizer que eles perderam suas potencialidades. Com isso quero dizer que por ser um conteúdo de álgebra avançada este resultado não deve desestimular o ensino.

Alguns itens devem ser corrigidos nessa atividade. Falar de matrizes, extensões de corpos e pressupor que eles conheciam os polinômios foi um exagero. Quando repetir isso, tratarei de ser menos rigoroso em alguns pontos usando apenas exemplos já conhecidos dos alunos e quando introduzir um conteúdo novo como matrizes, que já faz parte do currículo, situá-lo dentro das discussões mais profundas (como um anel), até mesmo para evitar a alienação que citamos acima. Podendo isso ser feito em mais aulas.

Podemos dizer que o processo de aprendizagem desse conteúdo foi, em média assim: os alunos que já tinham experiências e que dilataram os esquemas mentais com os números reais em abundância para organizá-los sistematicamente conseguiram compreender o conteúdo e cumprir o que foi solicitado nas atividades. Dentre os interessados eles de fato alcançaram esse objetivo, mas tendendo para a estrutura não intuíram as latências dos objetos matemáticos. Podemos dizer que os juízos estavam corretos acerca dos anéis e corpos, faltou-lhes desenvolver a capacidade de justificar para além de uma linha, de usar argumentos completos com premissas, termo médio e conclusão.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho poderia tratar de muitos outros aspectos da vivência do professor de matemática, por exemplo, “Como preparar um aula para alunos numa comunidade de vulnerabilidade social, indígena, ribeirinha, entre outros?, “Como preparar uma prova sobre álgebra avançada? Múltipla escolha ou com alternativas?”, porém perguntas como essas somente poderiam ser tratadas no campo teórico, pois a realidade da turma e a realidade da experiência não nos apresentaram tais problemas. Os problemas que envolvem o estudo dos anéis e corpos que a realidade nos propôs foram “Por que algum matemático desenvolveu os conceitos de anéis e corpos?”, “O que é relevante dentro desses tópicos?”, “Como ensinar esses conteúdos?”, “Como avaliar a aprendizagem desses conteúdos?”. Por essa razão, dizemos que o presente trabalho representa metonimicamente o ser professor.

Em linhas gerais podemos dizer o seguinte: As coisas existem, elas possuem uma forma conhecível composta de essência e acidentes, dessa forma conhecível captamos as informações e guardamos na fantasia, conforme nossos esquemas de captação e conforme capacidade da coisa em se mostrar, da fantasia tiramos os juízos sobre as coisas. Atentamos para aquilo que nos interessa, para os problemas e dramas que temos, ou seja, abstraímos mais na proporção que aquilo nos interessa.

No caso dos anéis e corpos podemos dizer que os números são abstrações que tiramos da realidade concreta ao contar e comparar. Quando estamos devidamente acostumados com a noção de número, dos conjuntos numéricos percebemos certas propriedades comuns que abstraímos novamente e criamos os conceitos de estruturas algébricas. Isso se comprova nos relatos da história da matemática quando os matemáticos desenvolveram os conceitos de álgebra avançada, pois queriam axiomatizar e sistematizar a álgebra como na geometria. Lembramos o caso curioso de Hamilton que encontrou a fórmula dos quaternários caminhando por uma ponte com sua mulher, ou seja, esse problema da sistematização o incomodava constantemente, ou o caso de Peacock que supunha uma total preservação de propriedades algébricas.

Baseados nisso propusemos uma aula expositiva supondo que os alunos tinham suficiente domínio dos conjuntos numéricos (que em parte é verdadeiro e em parte é falso), e utilizamos as matrizes quadradas de ordem 2x2, que já faz parte do conteúdo programático, para exemplificar outros conjuntos que se encaixam na definição de anel e corpo, destacando a forma do neutro da soma, da unidade e da não comutatividade das matrizes. Utilizamos também as extensões $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ como exemplos de conjuntos.

Analisando as respostas dos alunos, percebemos que eles têm capacidade de aprendizagem do conteúdo proposto, mas cometemos o erro de exigir que eles aprendessem a definição de estrutura de anel e corpo ao mesmo tempo que aprendessem sobre matrizes e extensões $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Por isso alguns alunos apresentaram dificuldade de aprendizagem, outros estavam, de fato, abaixo do nível da discussão. Em suma, estamos satisfeitos com o trabalho produzido e com a aprendizagem obtida pelos alunos.

Para o leitor interessado há muito o que estudar no campo das estruturas algébricas, como dissemos existem mais de duzentas estruturas definidas. Dentro dos anéis e corpos poderíamos falar em extensões de corpos, homomorfismos, o corpo de frações de um domínio, além de uma série de propriedades interessantes do domínio de integridade dos polinômios a uma variável, ou caso seja do interesse do leitor, pode-se estudar os quaternários, os polinômios a n variáveis, os espaços vetoriais entre tantos outros temas interessantes.

7. REFERÊNCIAS

BRASIL. MEC. SEMTEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC.1997.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 2 ed. Campinas, SP. Unicamp.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro, RJ. IMPA. 2012.

HEFEZ, Abramo. **Curso de Álgebra, volume 1,** 4 ed. Rio de Janeiro, RJ. IMPA. 2010.

LEQUAIN, Arnaldo Garcia Yves. **Elementos de Álgera**. 5 ed. Rio de Janeiro, RJ. IMPA, 2008.

SANTOS, Mário Santos dos. **A origem dos grandes erros filosóficos**. São Paulo, SP, Logos.

SANTOS, Mário Santos dos. **Filosofias da afirmação e da negação**. 2ª ed. São Paulo, SP Logos. 1962.

SANTOS, Mário Santos dos. **Teoria do conhecimento**. 3ª ed. São Paulo, SP. Logos. 1958.