PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS COM O AUXÍLIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA E CONHECIMENTO DE DERIVADAS

Francine Mirele Numer - franumer@gmail.com - Polo Picada Café
Dagoberto Adriano Rizzotto Justo - dagoberto.justo@ufrgs.br - UFRGS

Resumo: O cálculo desde a década de 60 foi extinto do currículo da Educação Básica, porém ainda é uma ferramenta muito importante para a realização de diversas construções algébricas e para o entendimento de diferentes conteúdos das mais variadas disciplinas. A didática de resoluções de problemas é uma excelente forma de estimular o aluno a aprender, a pensar e a desenvolver o senso crítico e, por exmplo, aplicar seus conhecimentos de derivada em problemas de máximo e mínimo, pode tornar a aprendizagem mais significativa. Aliada ao *software* Geogebra, *software* de Geometria dinâmica que possibilita a visualização geométrica, algébrica e gráfica de funções, a resolução de problemas poderá auxiliar positivamente a aprendizagem dos alunos. Então, neste trabalho, busca-se apresentar problemas que promovam nos alunos a capacidade de explorar, desenvolver e consolidar o uso de derivada em problemas de máximos e mínimos.

Palavras - chave: Resolução de Problemas; Máximo e Mínimo; Geogebra.

Introdução

No curso técnico de eletrônica da Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha os alunos de 3º ano do Ensino Médio aprendem, de forma introdutória, conceitos de limites, derivada e integral, pois necessitam dessa base para as disciplinas técnicas do quarto ano do Ensino Médio. Em geral os alunos não encontram muitas dificuldades no entendimento e aplicação destes conceitos o que comprova que os alunos do Ensino Médio podem aprender esses conteúdos perfeitamente e nos permite indagar: "Porque desde a década de 60 este conteúdo foi retirado do Ensino Regular de Matemática se é uma excelente ferramenta de cálculos para diversas disciplinas?".

Pensou-se então em uma atividade que envolvesse o *software* Geogebra e fosse baseada em problemas de máximos e mínimos, com a finalidade de tornar a aprendizagem de derivada mais significativa ao aluno uma vez que neste *software* pode-se trabalhar simultaneamente com a parte gráfica, geométrica e algébrica de funções e então o aluno consegue visualizar e entender os diferentes processos em todas as formas de visualização disponíveis pelo *software.* Também porque este *software* é livre e permite a criação de *applets* que podem ser acessados de qualquer local que tenha acesso a internet não necessitando a instalação do *software* nas máquinas, desde que se tenha Java instalado.

Embora os alunos em geral ainda sejam bastante resistentes para resolver problemas, imaginou-se que, se a atividade fosse encaminhada por esta didática a aprendizagem seria efetiva, ampliando os conhecimentos dos alunos, facilitando o desenvolvimento das atividades posteriores e dando a eles mais segurança para resolver outros problemas relativos à área técnica ou outras disciplinas.

Por que ensinar Cálculo no Ensino Médio?

Há tempos que a disciplina de cálculo é uma das mais temidas quando um aluno ingressa no Ensino Superior de algum curso dito "das Ciências Exatas". Por conta do elevado número de reprovações nesta disciplina que Barros e Meloni (2006, p.1) afirmam que:

> O ensino de Cálculo nas universidades tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes nos primeiros períodos matriculados nesta disciplina.

Pensando no grande número de reprovações dos alunos de graduação nas disciplinas de cálculo pergunta-se porque que conceitos não são trabalhados durante o Ensino Médio já que podem ser utilizados como ferramenta simplificadora dos cálculos? Será que uma proposta educacional que contemple uma introdução a limites, derivada e integral já no Ensino Médio não diminuiria esses problemas?

Em concordância com Centenaro e Steffenon:

> Atualmente, o ensino de Matemática é tema de diversas pesquisas, pois não está ocorrendo de forma satisfatória. Por um lado, educadores constatam que essa é uma área de conhecimento importante; por outro lado, esses mesmos educadores encontram-se insatisfeitos diante dos resultados do ensino e da aprendizagem. A constatação da importância da Matemática apoia-se no fato de que essa ciência desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona também como instrumento fundamental para a construção de conhecimentos em outras áreas.

> Além disso, influencia na estrutura do pensamento organizado e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno.
> A insatisfação diante dos resultados obtidos na aprendizagem da Matemática nos revela que existem problemas a serem corrigidos, e um deles é o ensino centrado em procedimentos mecânicos, sem significados para o aluno. (Garcia, et. al., 2011, p.82)

Assim, acredita-se que o ensino de Cálculo Diferencial aplicados a situações problemas para alunos de ensino Médio é uma forma de trabalhar com a desmecanização da matemática, tornando o ensino mais significativo e qualificado. E são muitas as aplicações que se pode trabalhar com o Cálculo, conforme cita Pickover:

> Atualmente, o cálculo invadiu todos os campos do esforço científico e desempenha papéis inestimáveis na biologia, na física, na economia, na sociologia, e na engenharia, e em qualquer domínio em que algumas quantidades como a velocidade ou a temperatura, variam. O cálculo pode ser usado para explicar a estrutura de um arco-íris, ensinar como fazer mais dinheiro na bolsa de valores, pilotar uma nave espacial, prever o crescimento da população, projetar edifícios, e analisar a propagação de doenças. O cálculo causou uma revolução. Mudou a forma de olharmos o mundo. (PICKOVER, 2011, p.152)

Pickover na citação acima acabou listando algumas das diferentes aplicações da disciplina de Cálculo e afirma que ela pode ser trabalhada conectando-a a diversas áreas do conhecimento. Pode-se utilizar-se das aplicações e dar significado a aprendizagem dos alunos através da explicação de fenômenos nas mais variadas áreas, agregando conhecimento, e tornando a aprendizagem contextualizada.

Barros e Meloni (2006, p.1) afirmam que

> Percebe-se que o Cálculo é uma das mais tradicionais disciplinas e que mais tem preservado sua estrutura original. Vale ressaltar que, apesar do surgimento de calculadoras e computadores, a estrutura do Cálculo é essencialmente a mesma desde o seu surgimento, no final do século 17, ou seja, há mais de 300 anos, quando Newton e Leibniz desenvolveram, independentemente, as ideias básicas do Cálculo. A metodologia usada pela maioria dos professores desta disciplina prioriza a aula expositiva, é centrada na fala do professor, e os conceitos são apresentados como verdades inquestionáveis, como algo pronto e acabado, sem a preocupação de torná-los significativos. Os alunos, por sua vez, acabam resolvendo os exercícios propostos mecanicamente, sem que se exija dos mesmos criatividade e reflexão frente aos problemas, o que os levam a questionar, muitas vezes, a razão da disciplina dentro de sua grade curricular.

Ou seja, o Ensino de Cálculo se dá há muitos anos e geralmente de forma tradicional. Gerando o seguinte questionamento: “Será que não seria mais vantajoso para os alunos se eles pudessem entrar em contato com os conceitos de cálculo já no Ensino Médio e com uma exploração diferente da tradicional?”.

O ensino da matemática de forma tradicional trabalha geralmente como se os conteúdos abordados estivessem em gavetas e não se explora de forma eficiente as ligações dessas gavetas. O aluno por mais que precise dos conceitos de frações para resolver um problema, o trata como algo descontextualizado dos demais. Ao resolver um exercício em que uma fração aparece, retira da “gaveta frações” utiliza-se dos conhecimentos adquiridos e depois os guarda de volta na “gaveta”, não refletindo sobre o significado real da fração naquele problema. Na sua grande maioria, os alunos nem sabem que uma fração é uma parte de um todo, embora saibam operar com as quatro operações envolvendo frações de forma satisfatória. Sobre esse problema na forma com que a matemática é ensinada, Silva (2013, p.15) citando Lopes (1990) afirma que:

> Para que o aluno possa compreender os diversos métodos ensinados no curso de cálculo são necessários alguns conhecimentos matemáticos básicos que devem ser adquiridos antes do início da disciplina, normalmente durante o curso do ensino médio. A atual estrutura de educação básica nacional organiza o ensino de matemática em camadas que, conforme o aluno vai avançando entre as diversas etapas e séries, vão sobrepondo conhecimentos anteriores e os desenvolvendo cada vez mais, de maneira a obter uma maior capacidade de compreender conceitos mais complexos. Lopes (1990) coloca que talvez esse sistema de empilhamento de conhecimentos seja uma das principais razões da existência de tantas reprovações de cálculo no ensino superior e também levanta fortemente a hipótese de que se fossem abordados ainda no ensino médio tópicos iniciais de cálculo poderiam diminuir as deficiências de aprendizagem encontradas na universidade. (LOPES, 1990).

Assim, acredita-se que se os alunos já tivessem uma ideia sobre o que é cálculo e fizessem associações com funções e outros conteúdos no instante em que eles fossem ensinados, esse processo de empilhamento de conhecimentos seria diminuído e a aprendizagem melhor explorada.

Ávila na *Revista do Professor de Matemática* questiona sobre o Ensino de Cálculo no Ensino Médio:

> Por que não ensinamos cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o cálculo no ensino? Por que? Como fazer isso? (ÁVILA, 1991, p.1).

Esses questionamentos pertinentes fazem-nos refletir sobre a abordagem de conteúdos e o que se deve ser trabalhado na matemática do Ensino Médio. Ávila (1991) também questiona o porquê de não ensinar, logo após o ensino de funções, técnicas de derivação, uma vez que em 1960 era conteúdo obrigatório no que era o equivalente ao Ensino Médio.

Silva (2013) afirma que tópicos de cálculo diferencial e integral já fizeram parte do Ensino Básico brasileiro. Sendo introduzido com a reforma proposta por Benjamim Constant em 1890 com o intuito de substituir a formação literária pela científica, porém como a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, que era abordada no terceiro ano do ensino médio e não era relacionada com outras áreas, seu ensino perdeu o sentido e foi retirada do programa em 1900. Então, em 1931, com a estruturação e padronização de um curso secundário nacional, fizeram uma associação de diversos conteúdos e propuseram a disciplina de Cálculo Infinitesimal porém os professores se diziam inseguros para trabalhar com as várias mudanças propostas. Por fim, em 1942, com a Reforma Capanema os conteúdos referentes ao Cálculo continuaram no programa de matemática, só que de forma mais sintética, permanecendo até 1961.

Com o movimento da Matemática Moderna nas décadas de 60 e 70 o cálculo e outros conteúdos considerados inapropriados foram excluídos do currículo da matemática na educação básica.

Silva (2013, p.21) faz uma reflexão muito importante citando Ávila. Afirma que o aluno que está cursando o último ano do Ensino Médio é o mesmo que irá cursar a disciplina de cálculo no ano seguinte, e então indaga:

> Será mesmo que o desenvolvimento intelectual e a capacidade de compreender conceitos de um aluno podem aumentar tanto em tão pouco tempo a ponto de que ele já esteja apto a estudar o conteúdo de cálculo? Acredito que o período de transição entre o ensino médio e o superior é muito curto para que haja algum desenvolvimento intelectual realmente significativo que possa qualificar o aluno para aprender um novo conteúdo. Portanto, como o cálculo é trabalhado no ensino superior podemos concluir que é perfeitamente viável abordá-lo no final do ensino médio, no entanto Ávila (1996) vai mais além, afirmando que "[...] o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções [...]" (ÁVILA, 1996).
> Descartar o Cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual. (ÁVILA 1991, p. 7).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN´s) (BRASIL - 1998) encontra-se que o currículo do Ensino Médio precisa ser estruturado de forma a garantir ao aluno que amplie e aprofunde os conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente, integrando-o com outras áreas do conhecimento. Porém na prática não é bem assim que os conteúdos são trabalhados, já que o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), exame que avalia a aprendizagem do aluno ao final do Ensino Médio revela que o aluno se forma no Ensino Médio com muita defasagem matemática tendo dificuldades inclusive na interpretação gráfica simples.

Geralmente no Ensino de Cálculo para alunos de Ensino Médio as dificuldades por parte dos alunos estão relacionadas mais aos conceitos de funções do que a aplicação do conhecimento de limites, derivadas e integrais. Os alunos não associam os conteúdos matemáticos uns aos outros e então não utilizam-se dos conteúdos aprendidos como ferramentas para desenvolver os demais.

Nos livros didáticos, problemas de máximos e mínimos são geralmente associados a problemas da física, uma vez que a física trabalha seus conceitos a partir de taxas de variações e análises gráficas. Acredita-se que se fosse trabalhado com o conceito de derivada juntamente com esses problemas o conteúdo não seria dissociado e, portanto o aluno teria uma aprendizagem mais significativa.

Acredita-se que estas abordagens feitas nos livros são bastante ilustrativas e levam o aluno a aprender mais já que é baseada em exemplos aplicados, dominados pelos alunos e de fácil ilustração. Ainda assim, a Geometria Dinâmica agrega a essas associações uma representação significativa e, quando aliada aos exemplos de aplicação tornam a aprendizagem mais completa.

Sabendo-se que nos anos de 1960 o ensino de Cálculo era um conteúdo obrigatório no Ensino Médio e que o Cálculo é uma ferramenta que auxilia muito nas Ciências Exatas, acredita-se então que sim, é viável o Ensino de Cálculo Diferencial para esses alunos.

Resolução de Problemas

Trabalhar com resolução de problemas e utilizar-se de problemas concretos para a abordagem dá relevância e significado ao processo de ensino e aprendizagem estabelecendo, no aluno, uma conexão com conceitos e situações problemas que fazem parte do seu cotidiano. Os problemas também permitem que o aluno coloque-se em questionamentos, pense por si e isso possibilita o raciocínio e não apenas a reprodução de regras ou fórmulas. Dante (2010, p.21) afirma que:

> A oportunidade de usar os conceitos e procedimentos matemáticos no dia a dia favorece o desenvolvimento de uma atitude positiva de aluno em relação à matéria, evitando questionamentos como “Para que serve isso?” ou “Onde vou usar isso na minha vida?”. Não basta, por exemplo, saber executar mecanicamente os algoritmos das quatro operações ou as passagens na resolução de uma equação. É preciso saber como e quando usá-las convenientemente(...).

E a resolução de problemas oportuniza exatamente isso. Relacionar os problemas aplicados ao cotidiano dos alunos a conteúdos que se queira ensinar e então permitir que o aluno compreenda e associe esses conhecimentos as suas realidades e aplicações.

De acordo com Polya (2006) a resolução de problemas matemáticos ocorre quando o aluno se depara com um problema que nunca antes tenha tentado resolver e que precisa criar planos para a resolução. Além disso Polya (2006) também afirma que existem quatro etapas para a resolução de problemas: A primeira etapa é a compreensão do problema, uma vez que é impossível resolver algo que não se compreende, sendo isto um problema matemático ou não. Se o aluno não compreender sobre o que o problema trata falhará nas outras etapas de resolução. A segunda etapa é a elaboração de um plano que pode surgir de forma simples ou não e se estiver estrategicamente elaborada a partir da compreensão do problema a forma que foi desenvolvido o plano não importa mas sim sua finalidade que é a de solucionar o problema. A terceira etapa é a execução do plano e portanto é muito importante um plano bem feito para quando no momento da execução não ocorram imprevistos e seja necessário um novo plano para a solução. Quando o planejamento é bem elaborado, basta paciência na execução para se chegar ao resultado esperado. Por fim a quarta etapa consiste em fazer o retrospecto ou verificação, ou seja, ver se as soluções encontradas correspondem àquelas que solucionam o problema (ARAÚJO, 2010). E, durante essas quatro etapas o professor deverá acompanhar o desenvolvimento do aluno e poderá, quando solicitado ou achar necessário, fazer questionamentos ao aluno com o intuito de incentivá-lo na construção e elaboração da resolução do problema.

Para o aluno o método de resolução de problemas é bastante proveitoso já que:

> Ensinar a resolver problemas é educar a vontade. Na resolução de problemas que, para ele, não são muito fáceis, o estudante aprende a perseverar a despeito de insucessos, a apreciar pequenos progressos, a esperar pela ideia essencial e a concentrar todo o seu potencial quando esta aparecer. Se o estudante não tiver, na escola, a oportunidade de se familiarizar com as diversas emoções que surgem na luta pela solução, a sua educação matemática terá falhado no ponto de vista mais formal. (POLYA, 2006, p.131).

Porém “o que é um problema para alguns pode não ser para outros, ou o que é um problema num determinado contexto pode não ser em outro” (DANTE, 2010, p.11), ou seja, pode-se apresentar um mesmo problema para mais de um indivíduo e cada um vai interpretar e solucionar o problema de diferentes formas, e tendo isso em vista, o professor deve saber mediar e entender caso um problema proposto não atenda aos objetivos previstos. Sempre levando em consideração que a classificação dos problemas depende também do conhecimento de quem o resolve, bem como o meio em que os alunos estão inseridos. Propor aos alunos problemas que estão aquém de seus conhecimentos para resolvê-los pode deixar os alunos frustrados porque mesmo estabelecendo ou tentando estabelecer as melhores estratégias a solução delas vai falhar por não se ter o conhecimento suficiente e então os alunos se desmotivam. Em contraponto, propor problemas que para os alunos não gera questionamentos por serem muito simples também desmotiva porque o aluno não se sente desafiado e não encara um problema como algo a ser resolvido, tornando-o um simples exercício mecânico que já sabe resolver e não precisa realizar estratégias para chegar a solução correta.

A importância da resolução de problemas se dá pelo fato de:

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade de gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidades de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como ampliar a visão que tem dos problemas da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (ARAÚJO, 2008, p.21)

Além disso, aos que resolvem problemas há a possibilidade de encontrar mais de uma forma para resolvê-los, instigando assim a curiosidade e a criatividade, bem como o interesse pelo conhecimento matemático e então promove-se mais confiança para solucionar situações em qualquer instância sendo ela escolar ou não. Compartilhar as diferentes formas de resoluções de um problema também é uma forma interessante de aprendizagem, porque as vezes o aluno ao analisar a resolução do outro, consegue construir uma nova forma de resolução e assim ressignificar sua aprendizagem.

A proposta de ensino através de resolução de problemas geralmente é confundida com o desenvolvimento de listas de exercícios com problemas matemáticos que geralmente são exercícios repetitivos para a fixação dos conteúdos que foram estudados e ao aluno resta aplicar e reproduzir os procedimentos recém aprendidos. Porém esta sequência de resolução de problemas não desenvolve no aluno a possibilidade de transpor o raciocínio utilizado para o estudo de outros problemas. E realmente é difícil, tanto para os professores quanto para os alunos, a distinção entre problema e exercício matemático. Porém, Brasil (1997, p.29) afirma o contrário, isto é, que é fácil distinguir um problema de um exercício pois "um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início mas é possível construí-la." e ainda de Brasil (1997, p.28) pode-se complementar que "o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada".

Portanto, para solucionar um problema matemático é necessário que a pessoa que tenta resolvê-lo descubra informações matemáticas desconhecidas, descrevendo novas estratégias, percorrendo novos caminhos e então construindo novas habilidades e formas de resolução. O solucionador do problema pode até conhecer os objetivos a alcançar mas desconhece os meios para fazê-lo e é assim que se dá a resolução de problemas. Ou seja, pode-se resumir que um problema matemático é aquele em que devemos chegar a um objetivo cujo caminho é desconhecido e o fim é sabido. De outro jeito não seria um problema mas a aplicação de conhecimentos anteriormente obtidos. (ARAÚJO, 2010)

Em Brasil (1997) para que o aluno resolva um problema ele precisará elaborar, um ou vários, procedimentos até a resolução, entre eles fazer tentativas ou formular hipóteses; comparar os resultados com os de outros colegas e validar seus procedimentos.

Brasil acrescenta ainda que:

> Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido. Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução. O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos. (BRASIL, 1997, p.29)

Logo, ao final da aplicação é muito importante que o aluno reflita sobre os seus resultados, analisando suas possibilidades bem como fazendo uma reflexão sobre os procedimentos usados, para além de saber se estão corretos verificar também se podia obter as mesmas soluções por estratégias diferentes.

Ao professor cabe selecionar problemas que instiguem o interesse dos alunos, estando de acordo com a realidade escolar do grupo com que se trabalha. Ou seja, deve-se propor problemas que o aluno deseja resolver, desenvolvendo sua curiosidade, um gosto maior pela aprendizagem e motivando-o a questionar, raciocinar, pensar, criar estratégias e compartilhar ideias para solucionar o problema.

O Geogebra:

Com frequência se deve utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) na preparação das aulas. E deve-se explorar os diferentes tipos de recursos disponíveis. Com calma, curiosidade, disposição e dedicação consegue-se encontrar materiais de apoio disponíveis para os mais variados problemas e conteúdos. Com certeza trabalhar com TIC demanda ao professor bastante trabalho, pois precisa, anteriormente à proposta ser remetida aos alunos, se apropriar do que será trabalhado, explorar os recursos e ver as diferentes funcionalidades. Deve-se encarar as TIC's como uma ferramenta tão importante quanto o quadro, o giz ou a caneta, para que as atividades sugeridas aos alunos acordem com suas realidades e aspirações tecnológicas, já que os alunos são geralmente jovens conectados as mais diversas tecnologias (DE PAULA E TESTONI, 2013).

Ou seja, uma aula que se utiliza de TIC é uma aula que utiliza ferramentas de domínio dos alunos e pode incentivá-los a aprender por estar abordada num contexto em que o aluno se sente confortável e domina. De Paula e Testoni (2013, p.1) ainda afirmam que as TIC propiciam "um ambiente de construção do conhecimento, a socialização de ideias e possibilidade de reflexão" e esses devem ser os objetivos dos professores ao trabalharem com elas. Deve-se deixar os alunos discutirem entre si sobre os conceitos e até as respostas das atividades propostas para complementar a aprendizagem. Cada aluno que descobre algo novo geralmente compartilha com os colegas e essa troca de ideias favorece muito a aprendizagem.

A TIC pensada para esta proposta é o *software* Geogebra por ser um *software* pequeno, livre, já conhecido pelos alunos em que se pode trabalhar de diversas formas. Segundo Moreira et. al. (ano desconhecido, p.2):

> O Geogebra é um *software* de Geometria Dinâmica, que permite o estudo de Geometria, Álgebra e Cálculo. Trata-se de um *software* gratuito, disponível em português em <http://www.geogebra.at/>. As construções feitas no mesmo são dinâmicas e interativas, o que faz do programa um importante recurso para a aprendizagem.

Ou seja, é uma ferramenta livre podendo ser utilizada de diferentes formas. Além disso, Ferreira (ano desconhecido, p.1) afirma que:

> O *software* Geogebra permite que você faça *applets*, dispensando conhecimentos prévios de linguagens de programação. Em outras palavras, você fica responsável pelo conteúdo matemático, utiliza as ferramentas do programa Geogebra para desenvolver o seu trabalho e, o Geogebra traduz este trabalho em linguagem de programação, para poder ser rodado em uma página da web.
> A característica do *applet* de permitir a interação com o usuário, muda a posição do mesmo: de observador passa a ser agente ativo do processo.
> E isto, sem sombra de dúvida, facilita a aprendizagem.

Isso significa que pode-se criar *applets* de acordo com a necessidade sem ser necessário se preocupar em aprender uma linguagem de programação específica, o que torna sua produção mais simples. E ainda pode ser acessado de forma universal e isso significa que o aluno consegue trabalhar nos *applets* em qualquer lugar. Além de serem arquivos que dependem de pouca memória podendo rodar em qualquer computador que tenha Java instalado ou um navegador web.

Moreira relata mais sobre a importância dos *applets* e suas facilidades como ser pequeno e de fácil acesso:

> O fato de o *applet* ser um arquivo com extensão .html, permite que esse seja aberto em computadores nos quais o Geogebra não está instalado, bastando ter um navegador Web. Esse é um fator muito importante, pois na maioria das vezes, a instalação de *software*s nas escolas, mesmo gratuitos, não é simples (requer permissão do administrador).
> (...) o procedimento para gerar um *applet* no Geogebra é simples. Isso permite que professores construam seus próprios *applets*, possuindo apenas conhecimentos básicos de Informática e conhecimentos matemáticos sobre o tema abordado.
> No *applet* é possível realizar ações diversas, mas, ao fechá-lo, esse retornará ao seu estado original, ou seja, não é possível salvar modificações no próprio *applet*. (Moreira et. al., ano desconhecido, p.4)

No ensino de máximos e mínimos o Geogebra pode ser muito eficiente, de acordo com Moraes (2013, p.11):

> O *software Geogebra* possui uma grande potencialidade em relação ao ensino específico de pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável,

> ele oferece vários recursos como capacidade de computação algébrica, numérica e gráfica, capacidade de manipulação de fórmula e números e uma linguagem de programação de alto nível e ao mesmo tempo muito simples de se utilizar.

E, além de todas estas vantagens o *software* Geogebra possui duas janelas. A de visualização onde aparecem os gráficos e as construções e a janela de álgebra em que os alunos conseguem observar as funções escritas, selecionar os pontos, as retas e fazer as associações necessárias para a aprendizagem relacionando com facilidade a parte gráfica à parte algébrica.

Como os alunos já conhecem o funcionamento do *software* e o Geogebra permite criar e explorar gráficos com facilidade, acredita-se que os alunos terão bons resultados a partir desta atividade. Espera-se que a visualização gráfica nas atividades provoque uma construção de conhecimento mais significativo e que, portanto, os alunos compreendam com mais facilidade os conceitos de máximos e mínimos.

Plano de Aula

A proposta de plano de aula será aplicada aos alunos do 3º ano do Ensino Médio do Curso Técnico de Eletrônica da Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha. O número de alunos por turma varia de 25 a 30. Por conta da dificuldade em adequar estas atividades ao calendário escolar onde as provas já estão marcadas não foi escolhida uma turma completa, solicitou-se que os alunos que se disponibilizassem a realizar a proposta fossem no contra turno, e então foram atendidos 30 alunos, destes 27 eram meninos e 3 eram meninas, atendendo ao todo 15 duplas.

A Fundação Liberato, como é conhecida na região Vale dos Sinos, conta em sua estrutura com seis laboratórios físicos de informática. Quatro deles com 32 computadores, que comportam qualquer uma de suas turmas, visto que o número máximo de alunos por turma é de 32 alunos. E os outros dois laboratórios possuem 22 computadores. Todos os laboratórios contam com Data Show instalado. Além destes laboratórios a Fundação também conta com dois laboratórios itinerantes, um composto com 32 notebooks e o outro composto por 32 net books. A internet wi-fi não funciona de forma excelente, mas a rede por cabos funciona muito bem.

Num primeiro momento seria proposto que as atividades fossem realizadas individualmente. Mas como os alunos trocam ideias e conhecimentos com os colegas e a aprendizagem flui com facilidade nesse sistema e ainda podem discutir sobre suas respostas e analisar seus resultados, optou-se por aplicar a atividade em duplas.

Tempo de duração: 4 períodos de 50 minutos.

Pré- requisitos:

- diferenciar funções polinomiais;
- reconhecer os gráficos das funções polinomiais;
- calcular o valor numérico de uma função;
- diferenciar se uma função polinomial do 1º grau é crescente ou decrescente;
- analisar gráficos;
- construir gráficos no Geogebra;
- calcular e conhecer o conceito de limites;
- saber o significado geométrico de derivada;
- saber o conceito de derivada e técnicas de derivação.

Como os alunos foram convocados a comparecer no contra turno deles a atividade foi realizada durante quatro períodos consecutivos.

Período	Atividade	Objetivo
1º, 2º e 3º	Problema da Caixa: exploração, manipulação e resolução das atividades do objeto educacional	Que o aluno consiga construir a equação formadora a partir do problema. Que ele explore o *applet* e então o compreenda. Que consiga construir e resolver problemas que envolvam máximos e mínimos.
3°	Exploração, manipulação e resolução das atividades do material sobre o problema da caixa com ênfase para o gráfico formador.	Que o aluno associe este problema ao problema da atividade anterior. Que ele consiga realizar as atividades com mais facilidade uma vez que são similares as já resolvidas anteriormente.
4º	Resolução de problemas com máximos e mínimos.	Que o aluno, após a realização das atividades anteriores esteja apto a resolver os problemas de máximos e mínimos.

Avaliação: os alunos serão avaliados durante todo o processo através da iniciativa, comprometimento e interação deles com as atividades. Também serão avaliados através da entrega do relatório das atividades ao final delas.

Relato de Experiência

Os alunos foram orientados a sentar em duplas e foi entregue um relatório para cada um (figura 1). Foi solicitado que eles anotassem em um dos relatórios as discussões que fizeram para chegar a resposta e no outro as respostas propriamente ditas. Foi pedido também que as duplas não se comunicassem com outras e se precisassem discutir alguma questão poderiam fazer somente entre si ou com a professora, esta solicitação se deu para que fosse mais fácil acompanhar o pensamento e desenvolvimento dos alunos durante todo o processo.

Figura 1: Foto do início dos trabalhos.

Fonte: a autora.

A primeira instrução recebida no relatório era: 1) Abra o *applet* que se encontra no seguinte endereço: http://tube.geogebra.org/material/show/id/1379575. Este *applet* está disponível no Geogebra Tube no endereço http://tube.geogebra.org/m/1379575 para a apreciação.

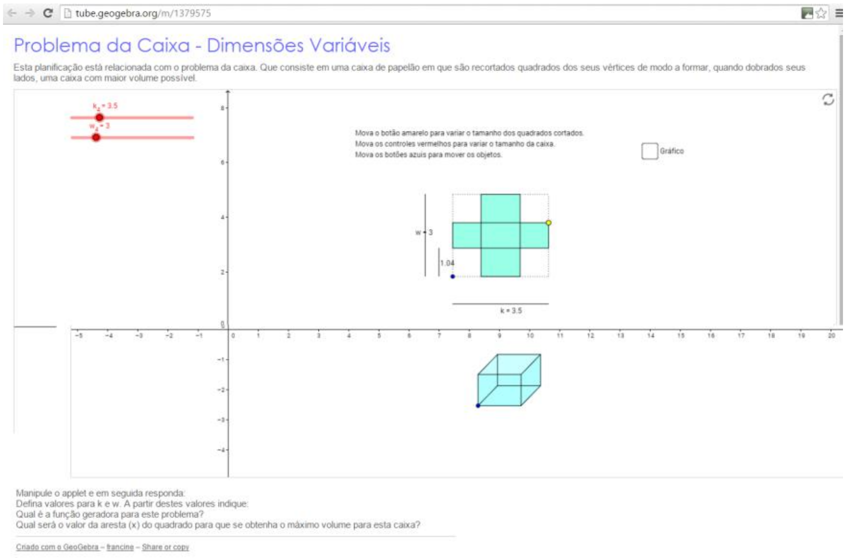
Ao acessar o aluno se deparava com a tela da figura 2.

Figura 2: Print da tela inicial do *applet*.

Fonte: a autora.

E esperava-se que eles acessassem a versão estudante e então encontrassem a tela conforme a figura 3. Mas alguns baixaram o *applet* diretamente e não havia nele a descrição do problema e portanto, não entenderam o que deveriam executar e então questionaram. Dessa maneira foi orientado que estes alunos acessassem pelo botão "ir para a versão do estudante". Este problema foi editado inserindo no *applet* a descrição e o título dele.

Figura 3 - Print da tela do *applet* após clicar no botão "Ir para a versão do estudante"



Fonte: a autora.

Na tela da figura 3 junto com o titulo do *applet*: "Problema da Caixa - Dimensões Variáveis" há a descrição dele: "Esta planificação está relacionada com o problema da caixa. Que consiste em uma folha de papelão em que são recortados quadrados dos seus vértices de modo a formar, quando dobrados seus lados, uma caixa com maior volume possível." e abaixo do título e descrição está o *applet* para manipulação. Após estão algumas perguntas que motivam a exploração, são elas:

"Manipule o applet e em seguida responda:

Defina valores para k e w.

A partir destes valores indique:

Qual é a função formadora do volume da caixa?

Qual será o valor da aresta (x) do quadrado para que se obtenha o máximo volume para esta caixa?"

No *applet* encontramos dois controles deslizantes que variam as dimensões da folha de papelão, um botão amarelo que varia o tamanho do lado dos quadrados retirados dos vértices, a planificação da figura da folha de papelão e a estrutura da caixa de papelão que varia conforme alteramos os controles deslizantes e o tamanho dos quadrados. Existe também uma caixa, denominada "Gráfico" que esconde ou mostra o gráfico do polinômio que está relacionado com o problema da caixa. No gráfico há um ponto amarelo com a função "rastro" ativada que percorre somente a parte do gráfico do polinômio que viabiliza a formação da caixa.

No *applet* também encontra-se, além do título e descrição, as seguintes instruções:

"Mova o botão amarelo para variar o tamanho dos quadrados cortados.

Mova os controles vermelhos para variar o tamanho da caixa.

Mova os botões azuis para mover os objetos."

Nesta tela (figura 3) os alunos tiveram acesso ao enunciado do problema e algumas questões para responder e refletir. As duplas que somente baixaram o *applet* tiveram que ser instruídas a acessar novamente o *software* e clicar no ícone "Ir para a versão do estudante" para lerem a pergunta do problema.

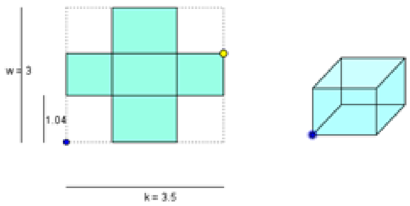
Após a manipulação do *applet* e leitura das observações que nele constavam eles então prosseguiram a leitura do relatório que se encontra em anexo na íntegra (anexo 1), que dizia o seguinte:

Este arquivo trabalha com um problema muito comum na matemática denominado "Problema da Caixa". Manipule-o e observe as mudanças que ocorrem.

Temos uma folha de dimensões 10k cm x 10w cm e precisamos retirar quatro quadrados, um de cada canto da folha, de modo a transformar esta folha em uma caixa sem tampa.

Restringindo para k = 5 e w = 3, responda as questões abaixo.

Figura 4 - Print da figura do Geogebra que consta no relatório fornecido aos alunos.



Fonte: a autora.

1.1) *Encontre a equação formadora do volume da caixa.*___________________

Na questão 1.1 os alunos precisaram utilizar-se de todas as estratégias e metodologias da Resolução de Problemas.

Primeiro precisaram entender o Problema da Caixa, depois precisaram compreender como ele se desenvolvia e, por fim, compreender como se obtinha a equação formadora. Segue abaixo um dos diálogos entre a professora (P) uma dupla de alunos (A,A1, A2).

A - Sora a gente não entendeu nada.

P - Vocês já leram o problema?

A - Sim.

P - E do que que ele trata?

A - Temos um papelão, precisamos tirar quadrados dos vértices e então dobrar e ter uma caixa sem tampa.

P - Ok, vocês entenderam então o problema.

A - Não sora.

P - Como não? Descreveram ele corretamente.

A - Na verdade só repetimos o que lemos.

P - Então repitam tentando entender.

A - A gente tem um papelão e vamos tirar quadrados dos vértices.

P - Ok, qual é o tamanho desses quadrados, vocês sabem?

A - Sabemos?!

P - Eu que pergunto a vocês! Vocês sabem?

A - Ah! Tá escrito no site que o lado vale x.

P - Ok, então vocês tem um papelão e vão tirar quatro quadrados de lado x. E vão montar uma caixa. Desenhem isso! Ou melhor, montem isso. Façam recortes e dobrem uma folha. Explorem e olhem o desenho do applet.

A1 - Tá, então agora precisamos calcular o volume da caixa.

A2 - Mas precisamos saber a área da base e a altura.

A1 - A base vai ser o papelão "né"?

P - Né?

A2 - Não, o papelão menos o quadrado. Um lado vai ser 50 - x e o outro 30 - x.

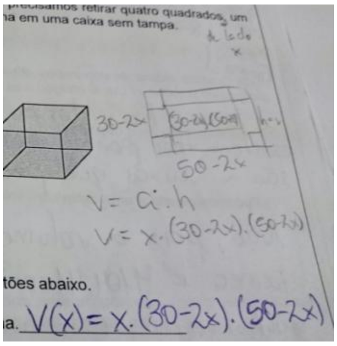
A1 - Não cara! A gente tira um x de cada lado, é 50 - 2x e 30 - 2x.

A2 - Bah, pior meu! Mas a altura? Ahhh... a altura vai ser o x, é só dobrar.

A1 - Então o volume vai ser a multiplicação de tudo isso?!

E então os alunos chegam a conclusão que V(x) = (50 - 2x). (30 - 2x). x, (figura 5):

Figura 5 - Cópia da resposta da questão 1.1 da dupla do diálogo anterior.



Fonte: a autora.

Doze duplas resolveram o problema desta maneira. E uma décima terceira resolveu de outra forma, conforme segue.

Dialogando só entre os membros a dupla chegou ao resultado certo porém por outro caminho. Segue o diálogo deles:

A1 - A área total 30x50 é uma constante que nunca muda. Que é igual a 1500, menos 4 x^2 porque são quatro quadrados que a gente tira, de área x^2, vezes x é o meu volume né? Porque x é a altura. Então podemos até simplificar isso: $-4x^3 + 1500x$

A2 -Tá mas seria mais 4x.

A1 - Porquê?

A2 - O gráfico começa em baixo e termina em cima.

A1 - Não, não, isso está um pouquinho errado, eu esqueci de contar as partes que dobram. Essa parte aqui de dentro está meio errada. Vai ser 1500 mas vai ser menos uma fórmula a partir de x, sabendo que vai ser 30 e 50 nesse caso, pra fazer aquela parte ali em volta.

A1 - Dava pra fazer tipo 100x pra tirar a parte de baixo e a parte de cima. Daí ficam as abas do lado que vai ser (30-x) vezes x. Então na verdade a gente tem x vezes o que tiver dentro disso: 1500 que é a área total menos... Vai ser 100x, porque 50x é uma, então 100x são as duas, mais 30-x porque o tamanho da altura vai depender de x.

A2 - Mas porque 100x?

A1 - O 100 x vai ser... Pensando em outra coisa que dá pra fazer. Pega a área total e tira as áreas em volta que não vão virar base e dai consegue só o tamanho da base e faz vezes a altura. 1500 área total, 30 vezes 50. Daí menos esse parênteses aqui, entre isso e isso, vai ser o que eu "tô" tirando "né"? Então 100x que é duas vezes 50x que é a parte de cima e a parte de baixo. E daí junto com isso eu vou ter 30 - x que vai ser a altura das partes do lado.

A1 - Não, não, 30 menos 2x.

A2 - 50x?

A1 - Não! É que é duas vezes 50x, que "tá" aqui do lado.

A2 - Tá, 50x e 50x e daí só sobram os cantos.

A1 - Os lados né? A altura desses cantos vai ser 30 - 2x vezes x que é a espessura.

A2 - Isso duas vezes.

A1 - Por quê?

A2 - Porque são duas áreas.

A1 - Ah tá! Então vezes dois x. Essa equação não ficou muito bonitinha. A gente pode simplificar isso mas acho que é mais fácil a gente verificar no Geogebra, já que a gente tem ele aqui.

A2 - Agora vamos só arrumar esta equação. $x\big(1500 - (100x + (30 - 2x) \cdot 2x)\big)$

A1 - Olha o tamanho, vai ser "uma mão" arrumar...

A2 - Não cara, não vai ser "uma mão". É só fazer...

A2 - $+4x^3 - 160x^2 + 1500x$

A1 - Tá, a questão é... Vamos checar se isso está certo. Como quando a gente colocou no gráfico a gente viu as raízes 1.5 e 2.5 a gente pode aplicar uma Bháskara pra testar aí "né"? Eu acho que é válido.

A2 - Tu quer aplicar uma Bháskara?

A1 - Tipo diminui um grau porque uma das raízes é zero e aplica uma Bháskara nisso, o que não vai ser muito divertido. A gente pode usar calculadora?

A2 - Podemos sim. Vai ser tranquilo.

A1 - Daí a gente tem certeza né?! Vai ser

$$\Delta = 160^2 - 16 \cdot 1500, \qquad \Delta = 1600$$

$$\frac{160 \pm 40}{8} = \begin{matrix} \frac{200}{8} = 25 \\ \frac{120}{8} = 15 \end{matrix}$$

A1 - Era pra dar 1,5... Tem algo na escala que a gente fez errado...

A2 - Tem algum zero a mais...

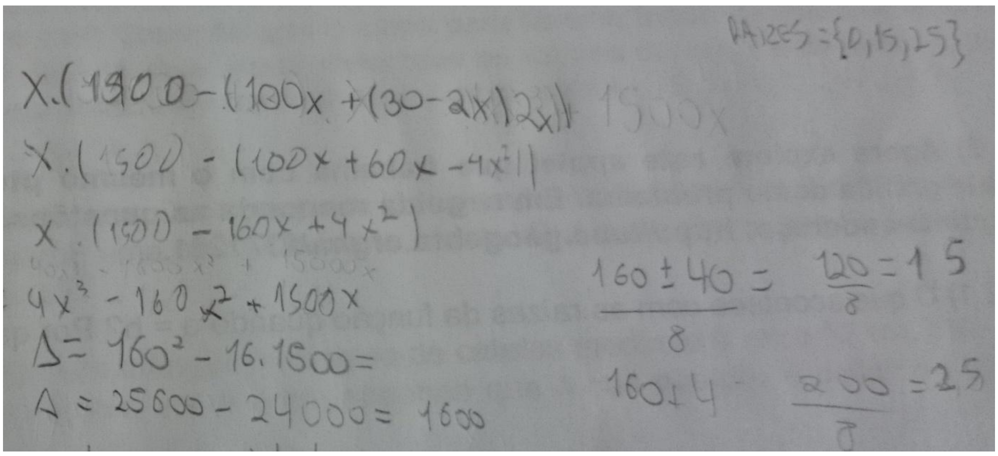
A1 - A escala é na Bháskara ou na equação? Ah eu sei! A gente esqueceu de contar que é 10k e 10w.

A2 - É a função do Geogebra que não está considerando vezes 10. O Geogebra que está com 3 e 5 e não 30 e 50.

A1 - Ah! É encontre a função formadora do problema, não do Geogebra. Então está certo! É $4x^3 - 160x^2 + 1500x$.

E então a resolução realizada por eles foi a seguinte (figura 6):

Figura 6 - Cópia da resposta da questão 1.1 da dupla do diálogo acima.



Fonte: a autora.

Ainda é válido levar em consideração que duas duplas estavam utilizando o valor do k = 3,5 porque ao invés de considerar o que o problema pedia, simplesmente reproduziram o desenho que constava no enunciado (figura 4), foi chamada a atenção destas duplas e elas refizeram suas análises.

A compreensão do problema ocorreu quando os alunos entenderam que, de uma folha retangular deveriam retirar quatro quadrados de mesmo lado de cada um dos vértices desta folha.

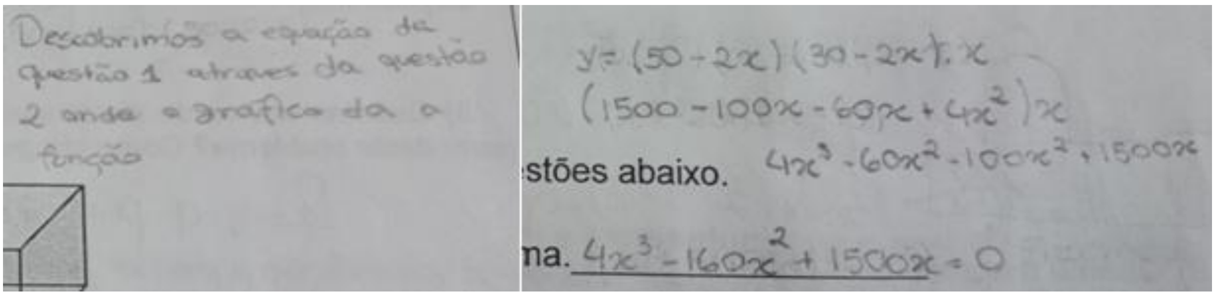
O plano ocorreu quando os alunos discutiram sobre como encontrariam o volume da caixa. Como encontrar a área da base e como encontrar a altura.

A execução se deu quando realmente conseguiram montar a equação formadora para este problema.

E a verificação ocorreu quando eles, por iniciativa própria, escreveram a função no Geogebra e verificaram a sua viabilidade a partir do gráfico formado.

As duas últimas duplas não conseguiram solucionar o problema 1.1 a partir das informações nele contidas e precisaram observar as raízes no gráfico ao resolver a questão 1.2 para chegar ao entendimento da questão 1.1, conforme relata uma dupla (figura 7).

Figura 7 - Cópia da resposta da questão 1.1 de uma dupla.



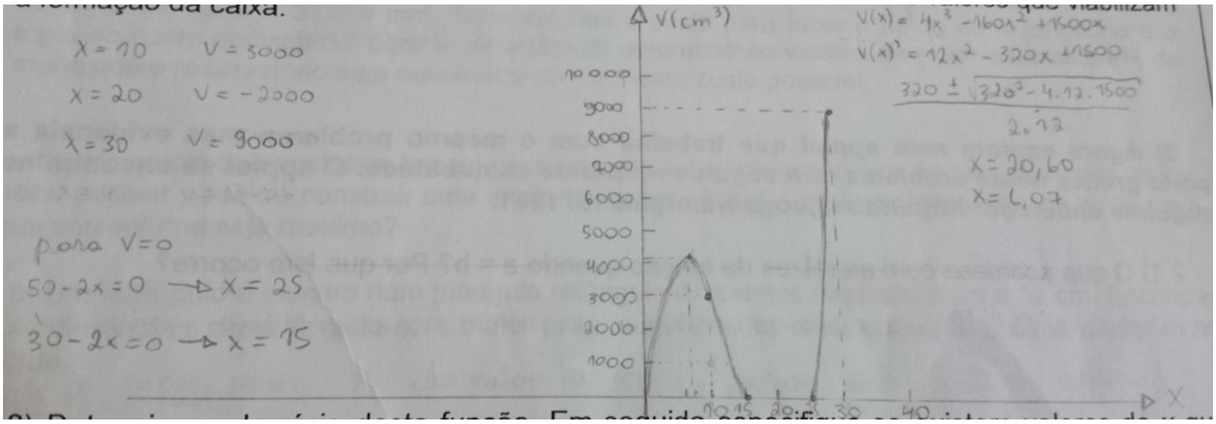
Fonte: a autora.

1.2) *Faça o esboço do gráfico desta função com o domínio restrito aos valores que viabilizam a formação da caixa.*

Mesmo que os alunos estivessem com o Geogebra aberto e que nele pudessem explorar gráficos a ideia de fazer o esboço do gráfico com o domínio restrito a viabilidade foi com o intuito de fazer o aluno refletir efetivamente sobre o problema e levá-lo a entender que a função não viabilizava a caixa em todo o seu domínio.

A compreensão do problema neste item se deu de forma mais fácil, como os alunos precisaram explorar bastante a função e construí-la, para o exercício 1.2 já tinham uma ideia melhor do problema e só precisavam analisar. Estabelecer o plano também foi mais simples porque bastava analisar a viabilidade da caixa a partir de x. Apenas uma dupla não analisou corretamente o gráfico e disse que seria possível construir a caixa para valores maiores que 25 (figura 8).

Figura 8 - Cópia da resposta da questão 1.2 de uma das duplas.



Fonte: a autora.

Os alunos precisaram de um plano mais elaborado para encontrar o valor máximo desta função para então desenhar o gráfico corretamente e com os pontos corretos. Cinco duplas não estabeleceram um plano para a resolução deste problema e simplesmente utilizaram uma aproximação de pontos no Geogebra para encontrar este valor máximo. E então não trabalharam com esta parte da atividade como uma resolução de problemas. Já quem encarou esta etapa do trabalho como uma resolução de problemas o plano foi primeiramente derivar a função e depois descobrir as raízes da derivada para encontrar os máximos e mínimos. Estabelecido o plano, executá-lo foi simples pois precisavam apenas derivar um polinômio de grau 3, encontrando um polinômio de grau 2, igualar a zero e encontrar as raízes da equação. A verificação se deu graficamente. Alguns analisaram então o ponto no Geogebra e outros encontraram o ponto a partir da inclinação da reta tangente.

Segue o diálogo entre dois alunos para este problema que inicialmente discutiam sobre o intervalo que viabilizava a caixa:

A1 - Isto é de x com zero a 15. É aquilo que eu te disse, depois que passar do 1.5 ele para de fazer sentido. No 1.5 ele está só dobrando o papel. E depois disso tu estaria destruindo com a lógica do universo porque o papel estaria entrando um no outro. Que não faz sentido daí. Tipo, puxa... o w até o x ficar negativo... Não tem na verdade. A função nem permite. Enfim, tu entende né? Qual vai ser o máximo dessa equação?

A2 - x vai até 1,5 aberto.

A1 - Até 15 aberto porque é vezes 10. Como a gente sabe que não é uma parábola deformada, posso chutar que é no 7,5. Mas acho que só fica certo se a gente fizer por derivada.

A2 - As raízes da equação a gente tem, a gente já estava fazendo aqui. São 15 e 25.

A1 - Acho que a gente não precisa das raízes.

A2 - Mas é pra fazer um esboço do gráfico. A gente tem que ter as raízes dele.

A1 - Sim, mas só no domínio que viabiliza a formação da caixa. A gente vai parar na primeira raiz. Porque

depois da primeira raiz já para de ser uma caixa e vira um "troço" sem sentido. Daí a gente já pode parar na primeira raiz, em 15 porque já não é mais viável. A gente tem o domínio, de zero a 15, os dois abertos. E daí a gente só precisa do topo dele. E pra isso precisamos derivar.
A2 - Isso.
A1 - Mas agora eu "tô" pensando pra que grau a gente quer derivar. A gente deriva e acha uma de grau 2.
A2 - A gente deriva e acha o ponto que ele muda de concavidade aqui né?
A1 - É de concavidade? É uma coisa assim.
A2 - A primeira raiz (da derivada) na verdade vai nos dar esse ponto.
A1 - Derivar isso é fácil na real. Ops... já fiz errado. Vamos escrever ela direito e derivar.
A2 - A função é $4x^3 - 160x^2 + 1500x$. E o domínio é (0,15).
A1- O domínio que faz sentido né? Da função ele é infinito.
A2 - $f'(x) = 12x^2 - 320x + 1500$.
A1 - Agora Bháskara disso que é quando zera.
A2 - Vamos por soma e produto. É só dividir... Ah não, esquece.
A1 - Quando a gente tem uma calculadora na mão é muito mais fácil fazer Bháskara.
A1 - Vai dar então $320^2 - 4.12.1500$, né?
A2 - 30040.
A1 - Meio alto "né"?! Tá certo isso?
A2 - Não. 30400.
A1 - E a raiz disso vai dar?
A2 - 174,36, vai ser quebrado sim.
A1 - Então a gente vai ter $320 \pm 174{,}36$ sobre...
A2 - A gente só vai precisar do menos. A menor raiz.
A1 - É porque a maior raiz vai ser a concavidade de baixo. Eu até vou riscar esse mais aqui. $\frac{320-174{,}36}{24} = 6{,}07$.
A2 - Escreve aí que é quando muda a concavidade.
A1 - Mas não é a mudança de concavidade meu, é o vértice. A mudança de concavidade é a derivada segunda!
A2 - Então dá 4103,6.

As terceira e quarta questões não são propriamente um problema, pois, os alunos utilizaram dos resultados das questões anteriores para resolvê-las. Logo não houve dúvidas na execução destes itens. Inclusive um aluno sugeriu que se colocasse as questões 1.3 e 1.4 antes da questão 1.2.

1.3*) Determine o domínio desta função. Em seguida especifique se existem valores de x que tornam o problema inviável. Se sim, quais?*

Apenas a dupla que errou o gráfico na questão 1.2 errou esta questão.

1.4) *Quais valores de x maximizam o volume da caixa? E que valor é este?*

Cinco duplas, as mesmas que aproximaram a resposta do vértice do gráfico da questão 1.2, resolveram esta equação apenas através da aproximação gráfica e não algebricamente. E todas resolveram corretamente. Inclusive a dupla que considerou que seria viável a formação da caixa para valores maiores que 25, o que geraria valores maiores do que aproximadamente 4100cm³, mas não notou que o gráfico da questão 1.2 estava incorreto porque provavelmente não fez uma reflexão sobre as respostas fornecidas nos problemas.

1.5) *Tu podes verificar qual é o volume mínimo para esta caixa? Justifique.*

Na questão 1.5 como os alunos já tinham feito a análise do domínio da função e percebido que o volume não poderia nem ser negativo, nem ser igual a zero a questão 1.5 gerou a seguinte discussão:

A1 - O volume mínimo para esta caixa?

A1 - Não existe bem um volume mínimo, ele tende a zero né?! Tipo, quanto mais tu aproximar de zerar a largura, o comprimento ou a altura mais próximo de zero é teu volume.

A2 - É, o volume não pode ser igual a zero, ele tem que tender a zero. Porque se alguma dimensão for igual a zero ele não vai mais ser uma caixa. Isto significa que não tem como encontrar um valor mínimo para o volume pois nunca conseguiremos alcançar um valor tão próximo de zero. E, então, o mínimo que teremos é quando a altura for um valor muito próximo de zero, ou seja, quando o $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ou quando $\lim_{x\to 15} f(x) = 0$ que vai acontecer quando uma das dimensões está muito próxima de zero.

Compreender este problema estava relacionado a compreender que não existia um valor específico que geraria um menor volume e sim um limite que faria o volume tender ao menor possível, ou seja, muito próximo de zero mas sendo ainda diferente de zero.

Os alunos estabeleceram o plano corretamente justificando que precisariam calcular o limite desta função quando x tendia a zero. Porém muitos (sete duplas) esqueceram de analisar o limite quando x tendia a 15 que também faria o volume tender a zero.

A execução do plano se deu corretamente, os alunos conseguiram encontrar o limite, porém, ao fazer a análise, como o limite da função quando x tendia a zero era igual a zero, quatro duplas argumentaram que não podia existir pois o volume não podia ser zero, sem fazer a análise que o limite estava tendendo a zero e não sendo igual a zero. Nesta etapa três duplas entenderam que não haviam analisado as aproximações quando x tendia a 15 e então retificaram seus erros, mostrando o quão importante é fazer o retrospecto para encontrá-los.

1.6*) Quantas caixas de dimensões diferentes e volume igual a 1000cm³ poderão ser feitas a partir deste problema? Como chegou a esta conclusão?*

A compreensão deste problema ocorreu de forma mais dificultosa. Muitos alunos não conseguiam compreender como encontrariam estes valores.

Segue um diálogo que ocorreu entre a professora e uma das duplas:

A - Sora, como assim caixas de dimensões diferentes?

P - Quem é que está variando na tua função?

A - O x.

P - Tá, e o que ele representa?

A - O lado do quadrado.

P - E esse lado é fixo?

A - Não, ele varia.

P - Pois então, cada vez que ele varia forma caixas diferentes, certo?

A - Sim!

P - Quantas dessas vai ser possível formar tal que o volume da caixa seja igual a 1000cm³?

A - Ah! Mas daí o 30 e o 50 não variam né? É só o x que varia.

P - Isso mesmo!

Alguns no estabelecimento do plano pensaram em igualar o volume a 1000cm³. Outros pensaram em analisar o gráfico da função.

Segue o diálogo entre dois alunos:

A1 - Duas!

A2 - Ah sim, duas porque é uma parábola.

A1 - Não, não é uma parábola. Mas a parte que a caixa existe o gráfico sobe e desce, como se fosse uma parábola.

A2 - É como se fosse uma parábola. Se fosse uma parábola o máximo seria no meio das raízes e não é.

A1 - Isso e são duas porque abaixo do vértice tem sempre dois pontos que estão na mesma altura.

A2 - Na verdade são três na parte positiva mas um deles não existe caixa.

A1 - Sim, sim e como 1000cm³ é menor que o valor do vértice, teremos então dois pontos.

Quando executaram o plano, seis duplas não se deram conta em descartar o ponto cujo volume era igual a 1000cm³ porém inviabilizava o volume da caixa e então encontraram três caixas de diferentes dimensões e mesmo volume. Isto ocorreu tanto com alunos que calcularam estes valores, quanto os que analisaram graficamente. Isto se deu porque os alunos erraram no seu retrospecto, ignorando os pontos que inviabilizavam a caixa.

1.7) *Podemos construir uma caixa com volume igual a 5000cm³? Por que sim? Por que não?*

Este não foi especificamente um problema para os educandos. Como já haviam pensado na questão 1.6 sobre como encontrar o volume, logo de cara observaram que o volume solicitado estava fora da imagem desta função, ou estava acima do vértice da função o que tornava impossível a construção de uma caixa, nestas condições, com este volume.

Todas as duplas responderam a esta questão corretamente.

1.8) *Quanto o applet foi importante para tu conseguir resolver estas questões?*

Esta questão gerou várias respostas. Todas elas relatando que o *applet* serviu para analisar os resultados.

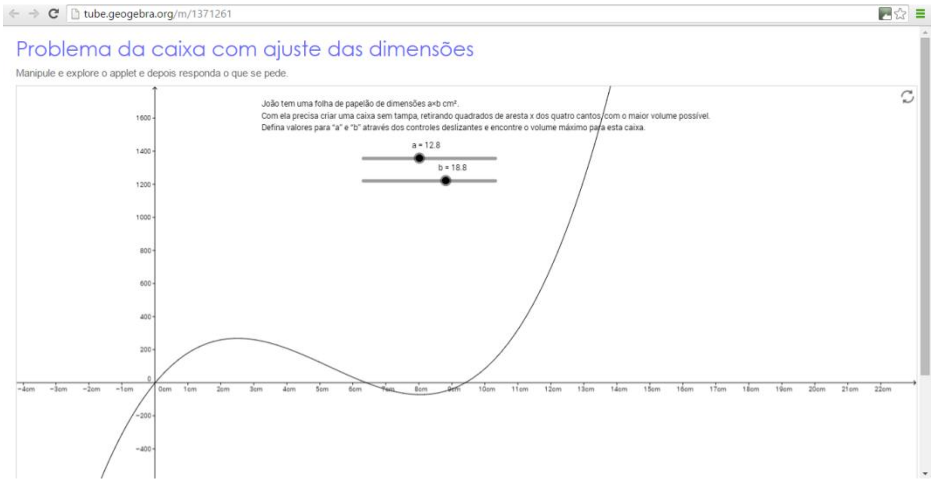
Uma dupla respondeu que o *applet* serviu para "tirar a abstração do cálculo servindo para a visualização dele". Uma outra disse que não conseguiu resolver nenhuma questão algebricamente. Que em todas as questões a visualização no *applet* foi necessária. E outra ainda disse que "foi extremamente importante, pois facilitou a compreensão do problema com sua forma visual e interativa".

A parte 2 desta atividade não se tratava bem de uma resolução de problemas. Serviu como verificação do entendimento dos alunos quanto à atividade anterior. Os resultados foram todos dentro do esperado e foi verificado que os alunos conseguiram compreender o problema.

2) *Agora explore este applet que trabalha com o mesmo problema mas evidencia a parte gráfica deste problema. Em seguida responda as questões. O applet se encontra no seguinte endereço: http://tube.geogebra.org/m/1371261.*

O *applet* está no Geogebra Tube e disponível para apreciação.

Figura 9 - Imagem da tela do segundo *applet*.



Fonte: a autora

Neste segundo *applet* (figura 9) a exploração é gráfica. Também explora o problema da caixa, de dimensões axb, com dois controles deslizantes a e b e o gráfico do polinômio que contém a função que forma o volume da caixa. A medida que o aluno varia os controles deslizantes pode observar a variação no gráfico da função.

Abaixo do *applet* existem algumas questões para fazer o aluno refletir e entender melhor o problema.

2.1) O que acontece com as raízes da função quando a = b? Por que isto ocorre?

2.2) Escolha um valor para a e um para b e encontre o volume máximo da função. Indique os valores escolhidos e o volume.

2.3) Tem como calcular o volume mínimo? Se sim, qual é este? Se não, justifique o por quê. (pode usar os mesmos valores para a e b usados anteriormente, ou, utilizando outros, indique-os).

2.4) Indique os intervalos de crescimento e decrescimento da função para a e b definidos por você.

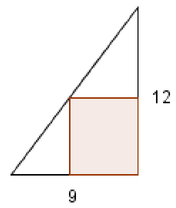
Foi interessante perceber que metade das duplas analisaram o crescimento e decrescimento da função através do gráfico da derivada da função e que a outra metade analisou simplesmente o gráfico da função original.

Para a parte 3 foi sugerido que os alunos selecionassem apenas um problema para resolver pois já estavam na metade do quarto período e foi aconselhado que eles escolhessem o problema "c" porque, como ainda não foi ensinado Geometria Espacial para eles, não precisariam recorrer a um formulário para fazer esta questão e nas outras precisariam. Todas as duplas acataram o conselho e tentaram solucionar apenas a questão 3.c.

3) *Em cada problema abaixo monte a lei algébrica para solucionar o problema, coloque-a no Geogebra e tente resolver através do software sem realizar cálculos.*

c) Um retângulo é inscrito num triângulo retângulo de catetos medindo 9 cm e 12 cm conforme figura 10. Encontrar as dimensões do retângulo com maior área, supondo que a sua posição é dada na figura ao lado.

Figura 10 - figura ilustrativa do exercício.



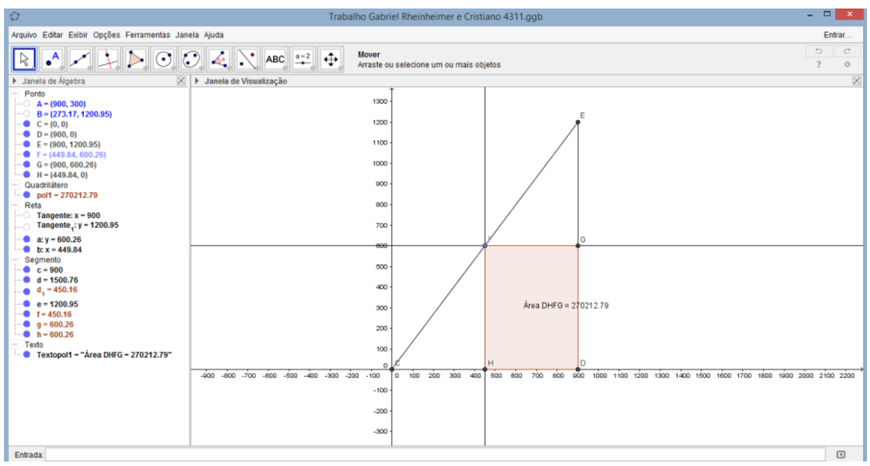
Fonte: a autora.

Após resolva algebricamente os problemas e verifique se suas estimativas estavam corretas. Justifique.

No Geogebra os alunos não tiveram dificuldades em construir a figura do problema (figura 11) e aproximar os valores de x e y para encontrar a solução. Eles montaram o problema no *software* e arrastaram o ponto para analisar a maior área.

Porém, para resolver a parte algébrica desta questão foi necessário que a professora construísse a relação com eles. Como eles só trabalharam com geometria plana no Ensino Fundamental e nas aulas de desenho e em desenho não trabalharam com resolução de problemas envolvendo geometria plana e sim construção de figuras geométricas, a ajuda para construir a função geradora do problema foi necessária para não tornar o problema complexo demais para o entendimento deles e então desmotivar o grupo.

Figura 11 - Imagem da tela do arquivo enviado por uma dupla de alunos.



Fonte: a autora.

No quadro foi perguntado e relacionado os lados do triângulo com a ajuda dos alunos.

P - Sabemos quais são as dimensões deste retângulo?

A - Não.

P - Como poderemos nomeá-las então?

A - x e y.

P - Vocês enxergam que este triângulo é proporcional ao maior?

A - Sim.

P - Então poderei fazer uma regra de três pois são proporcionais, ok?

A - Sim.

P - Quem está para quem?

A - (12 - x) está para 12, assim como (9-y) está para 9.

P - 9 - y? Olhem direito.

A - Não sora, é y ali e não 9 menos y.

P - Pronto! Resolvam a regra de três, encontrem o valor de y em função de x, substituam na função da área e resolvam-na.

Depois de auxiliados na construção da equação formadora do problema a outra dúvida que surgiu foi, "Sora porque que o x tem que ser igual a 4,5 e o y igual a 6 e não com as variáveis invertidas?" E então foi pedido que a aluna reconstruísse a regra de três e observasse as variações para x e para y e suas proporções. E então ela entendeu o problema.

Neste item foi importante solucionar o problema da equação formadora pois os alunos encontraram mais dificuldades do que o previsto inicialmente. Mas foi bastante válido porque com o *software* eles conseguiram encontrar o valor faltando-lhes o conhecimento matemático já que não tiveram ainda aula de geometria plana e isso ficou bastante evidente.

Considerações Finais

Com este trabalho observou-se a evolução no entendimento dos alunos quanto ao problema de máximo e mínimo; também que o conhecimento de derivada foi aplicado corretamente quando foi necessário calcular o valor máximo da função e quando foi solicitado a análise de crescimento da função do item 2.

Também foi averiguado que quando os alunos não tem o devido conhecimento para resolver matematicamente um problema, por mais que eles consigam resolver através de um *software* ainda assim não conseguem estabelecer um plano e executá-lo pois não possuem as ferramentas matemáticas para solucioná-lo. Cabe então ao professor fazer as intervenções na hora correta e até mesmo ajudar os alunos a construir a resposta para não desmotivá-los e entender que o problema proposto vai além dos conhecimentos que os alunos possuíam.

Pode-se concluir que a didática da resolução de problemas quando bem elaborada e bem encaminhada faz com que o aluno pense, estabeleça estratégias e, a partir delas, solucione o problema, averiguando sua resposta. Para isso os educandos desenvolvem vários mecanismos para a solução do problema que poderão utilizar em outras situações.

Observou-se que, mesmo sem conhecer as quatro etapas propostas por Polya (2006) os alunos acabaram, para resolver os problemas, executando cada uma delas e facilitando assim sua aprendizagem.

A prática também foi importante pois foi observado o crescimento no senso crítico a partir das respostas dos alunos, bem como através de seus diálogos. Os alunos estavam interessados em solucionar os problemas e discutiam entre si ou com o professor para chegar a uma conclusão e não simplesmente solicitavam ou aceitavam uma resposta pronta.

Referências Bibliográficas

ARAÚJO, Ana Itamara Paz de. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** Ji - Paraná - RO, 2010. Disponível em: http://www.dmejp.unir.br/menus_arquivos/1787_2010_ana_itamira.pdf. Acesso em 10 de junho de 2015.

ARAÚJO, Divânia Fernandes de. **O processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática em Situações Problemas como Formador da Cidadania Plena.** Curitiba, 2008. Disponível em: http://tcconline.utp.br/wp-content/uploads/2011/10/O-PROCESSO-DE-ENSINO-APRENDIZAGEM-DA-MATEMATICA-EM-SITUACOES-PROBLEMAS-COMO-FORMADOR-DA-CIDADANIA-PLENA.pdf. Acesso em 01 de julho de 2015.

ÁVILA, G. O Ensino do Cálculo no Segundo Grau. In: **Revista do Professor de Matemática,** n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

BARROS, R. M.; MELONI, L. G. P. **O processo de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral por meio de metáforas e recursos multimídia.** Anais do XXXIV COBENGE. Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, Setembro de 2006. Disponível em: http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2006/artigos/1_263_374.pdf. Acesso em 07 de outubro de 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/ SEF, 1998.

CENTENARO, G. F. C.; STEFFENON, R. R. Perímetro e Área: uma engenharia usando composição e decomposição de figuras. In: GARCIA, V. C. V.; BÚRIGO, E. Z.; BASSO, M. V. A.; GRAVINA, M. A. **Reflexão e Pesquisa na Formação de Professores de Matemática.** UFRGS, Porto Alegre, 2011.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática.** São Paulo, Editora Ática, 2010. 192p.

DE PAULA, S. M.; TESTONI, L. A. **A utilização de *applets* no Ensino de Física em cursos de Engenharia.** XLI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharias; Gramado – RS, 2013.

FERREIRA, Sonia Regina Soares. ***Applets* no Geogebra.** Disponível em: http://www.rpm.org.br/5e/docs/of8.pdf. Acesso em 05 de dezembro de 2012.

MORAES, Hugo Leonardo. **Utilização do *software* Geogebra no estudo de pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável.** Goiânia, 2013. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/528. Acesso em 10 de junho de 2015.

MOREIRA, Larissa S.; BARCELOS, Gilmara T; BATISTA, Silvia C. **Gerando *applets* no *software* Geogebra.** Disponível em http://www.essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/sMatematica/article/viewFile/2010/1176. Acesso em 05 de dezembro de 2012.

PICKOVER, C. A. **O livro da matemática – De Pitágoras à 57ª dimensão, 250 marcos da história da matemática.** Librero, b. v., Holanda, 2011.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** 2ª edição. Tradução Heitor Lisboa de Araújo, Rio de Janeiro, Interciência, 2006. 203p.

SILVA, G. P. **Pensando no infinito para entender cálculo: uma visão de professores sobre a introdução ao cálculo no Ensino Médio.** Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/93273/000914069.pdf?sequence=1. Acesso em 07 de outubro de 2014.

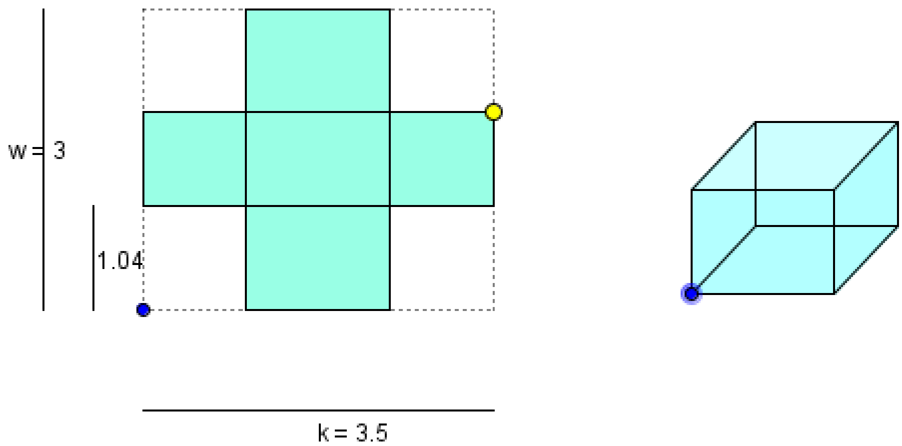
ANEXO I

FUNDAÇÃO ESCOLA TECNICA LIBERATO SALZANO VIEIRA DA CUNHA TRABALHO – II TRIMESTRE – MATEMÁTICA – PROFª FRANCINE NUMER NOME: ________________________________ Nº: _____ TURMA: ________

1) Abra o *applet* que se encontra no seguinte endereço: http://tube.geogebra.org/material/show/id/1379575.

Este arquivo trabalha com um problema muito comum na matemática denominado "Problema da Caixa". Manipule-o e observe as mudanças que ocorrem.

Temos uma folha de dimensões 10k cm x 10w cm e precisamos retirar quatro quadrados, um de cada canto da folha, de modo a transformar esta folha em uma caixa sem tampa.



Restringindo para k = 5 e w = 3, responda as questões abaixo.

1.1) Encontre a equação formadora deste problema.__________________

1.2) Faça o esboço do gráfico desta função com o domínio restrito aos valores que viabilizam a formação da caixa.

1.3) Determine o domínio desta função. Em seguida especifique se existem valores de x que tornam o problema inviável. Se sim, quais?

1.4) Quais valores de x maximizam o volume da caixa? E que valor é este?

1.5) Tu podes verificar qual é o volume mínimo para esta caixa? Justifique.

1.6) Quantas caixas de dimensões diferentes e volume igual a 1000cm³ poderão ser feitas a partir deste problema? Como chegou a esta conclusão?

1.7) Podemos construir uma caixa com volume igual a 5000cm³? Por que sim? Por que não?

1.8) Quanto o *applet* foi importante para tu conseguir resolver estas questões?

2) Agora explore este *applet* que trabalha com o mesmo problema mas evidencia a parte gráfica deste problema. Em seguida responda as questões. O *applet* se encontra no seguinte endereço: http://tube.geogebra.org/m/1371261.

2.1) O que acontece com as raízes da função quando a = b? Por que isto ocorre?

2.2) Escolha um valor para a e um para b e encontre o volume máximo da função. Indique os valores escolhidos e o volume.

2.3) Tem como calcular o volume mínimo? Se sim, qual é este? Se não, justifique o por quê. (pode usar os mesmos valores para a e b usados anteriormente, ou, utilizando outros, indique-os).

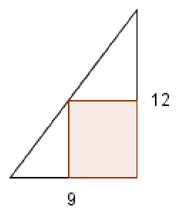
2.4) Indique os intervalos de crescimento e decrescimento da função para a e b definidos por você.

3) Em cada problema abaixo monte a lei algébrica para solucionar o problema, coloque-a no Geogebra e tente resolver através do *software* sem realizar cálculos.

a) Deseja-se construir um reservatório de água destampado na forma de um cilindro circular, com volume igual a 3125π cm³. Sabendo que o custo para fazer o fundo do reservatório é o triplo do custo do material para fazer a lateral, determine os valores do raio r e da altura h, de modo que o reservatório seja construído com o menor custo possível.

b) Um grupo de escoteiros possui uma peça de lona circular de 3 m de raio. Cortando-se um setor circular pode-se construir uma tenda de forma cônica. Quais as dimensões da tenda para que seu volume seja máximo?

c) Um retângulo é inscrito num triângulo retângulo de catetos medindo 9 cm e 12 cm. Encontrar as dimensões do retângulo com maior área, supondo que a sua posição é dada na figura ao lado.



Resolva algebricamente os problemas e verifique se suas estimativas estavam corretas. Justifique. (Encaminhe todos os arquivos construídos no Geogebra para o meu e-mail: franumer@gmail.com)