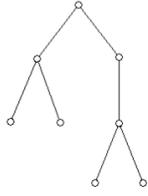


## INTRODUÇÃO – DEFINIÇÕES

### Grafo

Um **grafo** é uma estrutura constituída por um conjunto finito e não vazio de elementos chamados vértices e por um conjunto formado por subconjuntos binários de vértices, denominados arestas. Uma **árvore** é um grafo conexo (existe um caminho ligando cada par de vértices) e sem ciclos.

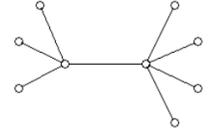
Ex: Árvore com 8 vértices



### Double Broom

Neste trabalho, estamos interessados em árvores do tipo *double broom*. Uma **double broom** pode ser vista como um caminho em que foram adicionados vértices pendentes nos extremos.

Ex: *Double broom* de diâmetro 3 com 9 vértices



### Matriz

Um grafo pode ser representado por diversos tipos de matrizes, como a matriz de adjacências, a matriz Laplaciana e a matriz Laplaciana normalizada. Em nosso trabalho utilizamos a matriz Laplaciana normalizada.

Definição da matriz Laplaciana normalizada.

$$\mathcal{L}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \text{ e } d_i > 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

### Energia

A **energia** de um grafo é a soma dos valores absolutos dos autovalores da matriz de adjacências. A **energia Laplaciana** de um grafo é a soma dos valores absolutos das diferenças entre os autovalores Laplacianos e a sua média. Analogamente para a **energia Laplaciana normalizada**.

Energia Laplaciana normalizada de um grafo G bipartido de n vértices:

$$E_{\mathcal{L}}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i - 1|$$

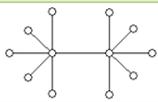
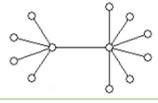
## ORDENANDO DOUBLE BROOMS

### Ordenamento

Em 2011, V. Trevisan *et al.* [1] obtiveram um ordenamento das *double brooms* de diâmetro 3 pela **conectividade algébrica** (segundo menor autovalor da matriz Laplaciana) e pela energia Laplaciana. Foi provado que quanto mais “balanceada” for a *double broom* (ou seja, com menor diferença entre o número de pendentes nas extremidades) menor é a conectividade algébrica e maior é a energia Laplaciana.

### Exemplo

Exemplo: ordenando *double brooms* de diâmetro 3 e 12 vértices

Grafo	Conectividade Algébrica	Energia Laplaciana
	0,25834	20,14998
	0,26451	20,13765
	0,28510	20,09646
	0,32871	20,00924
	0,42509	19,81649

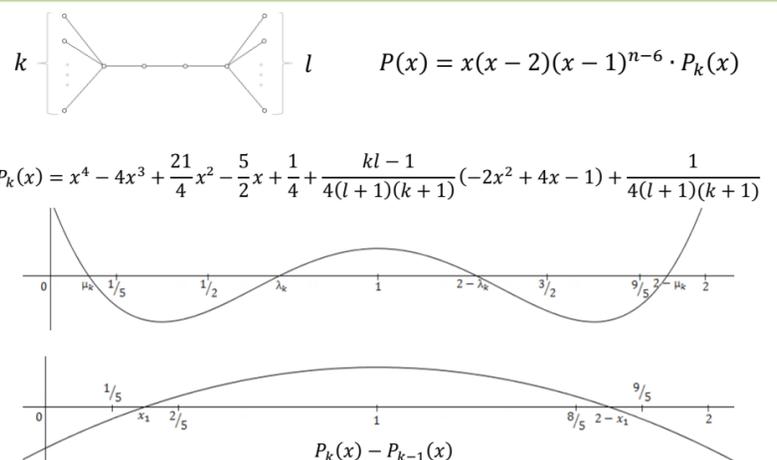
## NOVO RESULTADO

### Objetivo

Neste trabalho, estudamos a possibilidade de obter um ordenamento das *double brooms* de diâmetro 5 pelo segundo menor autovalor da matriz Laplaciana normalizada e pela energia Laplaciana normalizada.

### Estratégia

Para alcançar o nosso objetivo, foi preciso calcular o polinômio característico da matriz Laplaciana normalizada das *double brooms* de diâmetro 5 e obter cotas para os seus autovalores. Também fizemos uma análise do gráfico do polinômio.



### Êxito

Conseguimos provar que, para uma *double broom* de diâmetro 5, quanto mais balanceada for a árvore, menor é o segundo menor autovalor da matriz Laplaciana normalizada e maior é a energia Laplaciana normalizada.

### Ordenamento

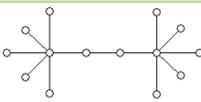
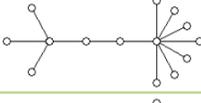
Em um trabalho em andamento, V. Rodrigues *et al.* [2] obtiveram um ordenamento das *double brooms* de diâmetros 3 e 4 pelo segundo menor autovalor da matriz Laplaciana normalizada e pela energia Laplaciana normalizada.

### Conjectura

Os autores conjecturam que esse ordenamento é válido para *double brooms* de qualquer diâmetro.

### Exemplo

Ordenando *double brooms* de diâmetro 5 e 14 vértices

Grafo	2º menor autovalor da Laplaciana normalizada	Energia Laplaciana normalizada
	0,05778	4,76887
	0,05935	4,76163
	0,06459	4,73685
	0,07567	4,68148
	0,09926	4,54623

## REFERÊNCIAS

- [1] V. Trevisan, J. B. Carvalho, R. R. Del-Vecchio, C. T. M. Vinagre. Laplacian energy of diameter 3 trees. Applied Mathematics Letters 24 (2011) 918-923.  
[2] R. O. Braga, V. M. Rodrigues, V. Trevisan, T. R. R. Del-Vecchio, C. T. M. Vinagre. Ordering double brooms by the second smallest normalized Laplacian eigenvalue. (em andamento).