

APRESENTADORA: Franciele Marciane Meinerz

ORIENTADOR: Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

TEMÁTICA: CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA- Matemática- MATEMÁTICA PURA

### O problema das três cores: Uma aplicação da Teoria das Bases de Groebner

#### O problema das três cores:

Dado um grafo  $G$  com  $n$  vértices e com no máximo uma aresta conectando cada par de vértices, queremos colorir os vértices de tal forma que apenas três cores sejam utilizadas e não há dois vértices consecutivos que sejam coloridos da mesma maneira. Se for possível fazer a coloração, dizemos que  $G$  é 3-colorível.

#### Resolução do problema:

As três cores serão representadas pelas três raízes cúbicas da unidade:

$$1, \xi \text{ e } \xi^2,$$

onde  $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ .

Os vértices serão representados pelas variáveis  $x_1, \dots, x_n$ .

A cada vértice é atribuída uma cor pelas seguintes n equações:

$$(1) x_i^3 - 1 = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ainda, se  $x_i$  e  $x_j$  são ligados por uma aresta, eles precisam ter cores distintas.

Isso ocorre se, e somente se,

$$(2) x_i^2 - x_i x_j + x_j^2 = 0.$$

Agora, seja  $I$  o Ideal de  $C[x_1, \dots, x_n]$  gerado pelos polinômios da equações (1) e (2).

Consideramos a variedade  $V(I)$  contida em  $C^n$ . Então vale o teorema:

O grafo  $G$  é 3-colorível  $\leftrightarrow V(I) \neq \emptyset$ .

Através de Bases de Groebner é possível caracterizar se  $V(I) \neq \emptyset$ .

Basta computar a Base de Groebner  $G$  reduzida para  $I$ . Se  $1 \in G$ ,  $V(I) = \emptyset$ . Assim,  $1$  não pode pertencer à  $G$ . Dessa forma, determinamos se o grafo é 3-colorível.

Podemos escolher as cores de coloração resolvendo o sistema de equações representado pela base  $G$ .

O problema das três cores equivale ao problema de colorir um mapa: os vértices representam as regiões a serem coloridas e dois vértices são ligados por uma aresta quando as regiões correspondentes têm uma fronteira em comum.

Em nosso trabalho, apresentamos alguns exemplos da utilização de Bases de Groebner para verificar se um grafo pode ou não ser colorido com três cores, entre eles, podemos perceber que o mapa das mesorregiões do estado do Paraná é 3-colorível.

