REDES SOCIAIS

CONEXÕES QUE TRANSFORMAM

Grafos Coespectrais tanto para Matrizes de Adjacência quanto para Laplacianas Normalizadas

19 a 23 de outubro - Campus do Vale - UFRGS

Autora: Bruna Lautert[1]

Orientador: Luiz Emilio Allen[2]

1 Licencianda em Matemática Instituto de Matemática e Estatística UFRGS

2 Professor Adjunto da UFRGS no Instituto de Matemática e Estatística

CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO Salão UFRGS 2015

XXVII SIC

Salão de Iniciação Científica

1 Introdução

Um grafo é uma estrutura G=G(V,E) formada por um conjunto V não vazio finito, cujos elementos são denominados vértices, e um conjunto E, formado por elementos denominados arestas, que são os subconjuntos de elementos de V dois a dois.

Na teoria Espectral de Grafos, as propriedades estruturais de um Grafo podem ser analisadas a partir dos autovetores e dos autovalores de matrizes a ele associadas.

Apresentaremos e construiremos, nesse trabalho, a partir dos resultados do professor Steve Butler, um caso particular de Grafos Bipartidos que possuem mesmos autovalores (espectro) tanto para sua Matriz de Adjacência quanto para sua Laplaciana Normalizada, ou seja, que são Coespectrais para tais matrizes.

Grafo Bipartido

G=G(V,E) é bipartido quando:
$V(G) = V_1 \cup V_2$, com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ou seja:
quando as arestas de G são sempre da forma $\{v_1, v_2\}$, com v_1 em V_1 e v_2 em V_2.

Matriz de Adjacência A(G)

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } \{i,j\} \in E \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Matriz Laplaciana Normalizada L(G)

$$\lambda ij = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \text{ e } d(i) \neq 0; \\ \dfrac{-1}{\sqrt{d(i)d(j)}}, \text{se } \{i,j\} \in E; \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2 Lema

Seja B matriz pxq. Então:

$$\text{spect}\left(\begin{bmatrix} 0 & B & B \\ B^T & 0 & 0 \\ B^T & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \sqrt{2}\text{spect}\left(\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}\right) \cup \{0 \text{ de mult. } q\};$$

$$\text{spect}\left(\begin{bmatrix} 0 & B & 0 \\ B^T & 0 & B^T \\ 0 & B & 0 \end{bmatrix}\right) = \sqrt{2}\text{spect}\left(\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}\right) \cup \{0 \text{ de mult. } p\};$$

E, além disso, se B é não-negativa e tem somas de linhas e colunas positivas, então:

$$\text{spect}\left(L\left(\begin{bmatrix} 0 & B & B \\ B^T & 0 & 0 \\ B^T & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) = \text{spect}\left(L\left(\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}\right)\right) \cup \{1 \text{ de mult. } q\};$$

$$\text{spect}\left(L\left(\begin{bmatrix} 0 & B & 0 \\ B^T & 0 & B^T \\ 0 & B & 0 \end{bmatrix}\right)\right) = \text{spect}\left(L\left(\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}\right)\right) \cup \{1 \text{ de mult. } p\}$$

3 Teorema

Seja G um grafo bipartido dado com $|V_1| = p \leq |V_2| = q$, M(G) Matriz de Adjacência e L(M(G)) Laplaciana Normalizada de G. Então:

$\text{spect}(M(G_1)) - \text{spect}(M(G_2)) = $ (q-p) autovalores 0.

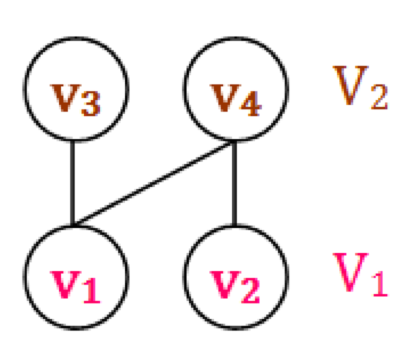
Ainda, se G não tem vértices isolados:

$\text{spect}(L(M(G_1))) - \text{spect}(L(M(G_2))) = $ (q-p) autovalores 1.

4 Exemplo

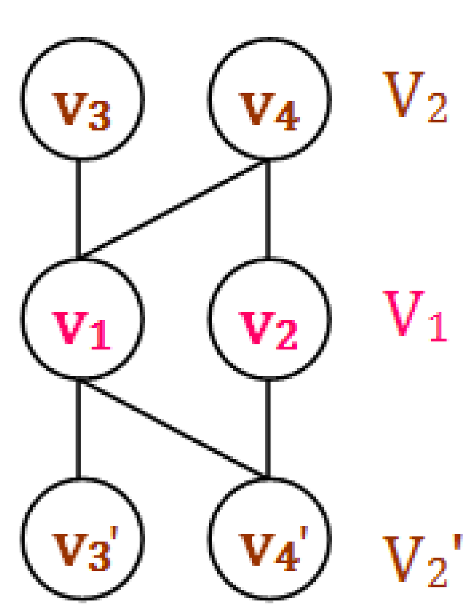
Seja G(V,E) Grafo Bipartido:

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \text{ tal que: } \begin{cases} V_1 \cap V_2 = \emptyset; \\ V_1 = \{v_1, v_2\}; \\ V_2 = \{v_3, v_4\}. \end{cases}$$



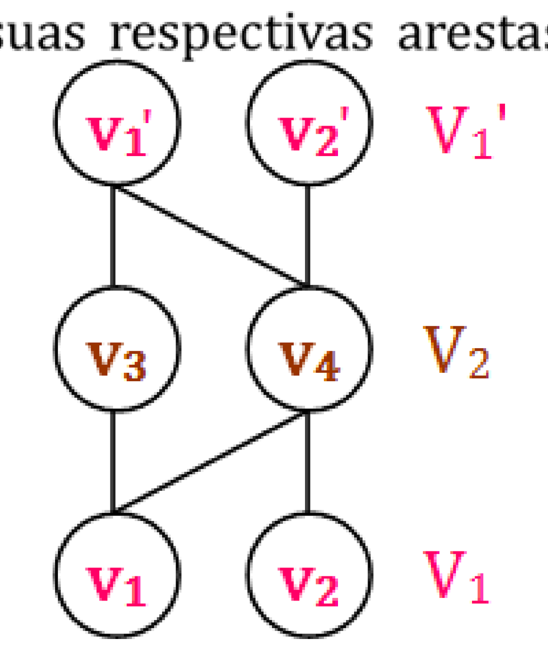
Seja G_1 (V,E) Grafo Bipartido construído a partir de G(V.E),"anexando" mais um subconjunto V_2 e suas respectivas arestas com o subconjunto V_1, ou seja,:

$$V(G_1) = V_1 \cup V_3 \text{ tal que: } \begin{cases} V_1 \cap V_3 = \emptyset; \\ V_3 = V_2 \cup V_2'; \\ V_1 = \{v_1, v_2\}; \\ V_2 = \{v_3, v_4\}; \\ V_2' = \{v_3', v_4'\}. \end{cases}$$



Seja I(V,E) Grafo Bipartido construído a partir de G(V.E), "anexando" mais um subconjunto e suas respectivas arestas com o subconjunto , ou seja,:

$$V(G_2) = V_2 \cup V_4 \text{ tal que: } \begin{cases} V_2 \cap V_4 = \emptyset; \\ V_4 = V_1 \cup V_1'; \\ V_1 = \{v_1, v_2\}; \\ V_2 = \{v_3, v_4\}; \\ V_1' = \{v_1', v_2'\}. \end{cases}$$



Mostraremos que, como $|V_1| = |V_2|$ e como V não possui vértices isolados em G(V,E), então H(G) e I(G) são dois grafos bipartidos coespectrais tanto para Matrizes de Adjacência quanto para Laplacianas Normalizadas (Teorema).

Temos as respectivas Matrizes de Adjacência e Laplacianas Normalizadas com seus respectivos espectros (autovalores λ_k):

M(G):

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$\lambda_1 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_4 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$M(G_1)$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 3' & 4' \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3' & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4' & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\lambda_1 = -\sqrt{3+\sqrt{5}}$, $\lambda_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$, $\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, $\lambda_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, $\lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = 0$

$M(G_2)$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 1' & 2' \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1' & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2' & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$\lambda_1 = -\sqrt{3+\sqrt{5}}$, $\lambda_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$, $\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, $\lambda_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, $\lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = 0$

L(M(G)):

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 3 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{array}$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_4 = 0$

$L(M(G_1))$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 3' & 4' \\ \hline 1 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 3 & \frac{-1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{-1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3' & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4' & \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = 1$, $\lambda_6 = 1$

$L(M(G_2))$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 1' & 2' \\ \hline 1 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & \frac{-1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 4 & \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{-1}{2} & 0 & 1 & \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{-1}{2} \\ 1' & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{4} & 1 & 0 \\ 2' & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{array}$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = 1$, $\lambda_6 = 1$

Assim, temos: $\begin{cases} \text{spect}(M(G_1)) = \text{spect}(M(G_2)); \\ \text{spect}(L(M(G_1))) = (L(M(G_2))). \end{cases}$ (Teorema)

e ainda: $\begin{cases} \text{spect}(M(G_{1,2})) = \sqrt{2}\text{spect}(M(G)) \cup \{0,0\}; \\ \text{spect}\left(L(M(G_{1,2}))\right) = \text{spect}(L(M(G))) \cup \{1,1\}. \end{cases}$ (Lema)

Referências:

BUTLER, Steve, *Cospectral graphs for both adjacency and normalized Laplacian matrices*,