

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PROCESSOS DE CONFORMAÇÃO  
MECÂNICA ATRAVÉS DA FORMULAÇÃO DA MECÂNICA DOS FLUIDOS  
COM FUNÇÃO DE PENALIDADE UTILIZANDO O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS

POR

MARTIN POULSEN KESSLER

DISSERTAÇÃO PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
MESTRE EM ENGENHARIA

PORTO ALEGRE

1995

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PROCESSOS DE CONFORMAÇÃO  
MECÂNICA ATRAVÉS DA FORMULAÇÃO DA MECÂNICA DOS FLUIDOS  
COM FUNÇÃO DE PENALIDADE UTILIZANDO O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS

por

Martin Poulsen Kessler  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Armando Miguel Awruch

Aprovada por:

Prof. Dr. Lírio Schaeffer

Prof. Dr. Ademar G. Groehs

Prof. Dr. Marco Túllio M. B. de Vilhena

Prof. Dr. Horácio A. Vielmo

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 15 de dezembro de 1995

## **AGRADECIMENTOS**

- à CAPES pela concessão de bolsa de mestrado;
- ao PROMEC pela oportunidade de realizar este trabalho;
- ao Prof. Dr. Armando Miguel Awruch pela orientação.

## RESUMO

O presente trabalho simula processos de conformação mecânica em domínios bidimensionais. Para tanto, considera-se o material como sendo um fluido não newtoniano e utiliza-se a formulação da mecânica dos fluidos com função de penalidade. O método empregado para realizar a discretização espacial é o método dos elementos finitos com integração reduzida do termo da função de penalidade. Para discretizar o tempo usa-se diferenças finitas com o esquema de Crank-Nicolson.

É apresentado também o método Lagrangiano-Euleriano arbitrário para descrever o movimento da malha de elementos finitos.

## ABSTRACT

Simulations of metal forming processes in two dimensional domains are presented in this work. The material is considered as a non newtonian fluid and the flow formulation with the penalty function approach is used. Spatial discretization is accomplished using the finite element method with reduced integration for the pressure term. Finite differences is used for time integration with a Crank-Nicolson scheme.

The arbitrary Lagrangian-Eulerian scheme is employed to describe the motion of the finite element mesh.

## LISTA DE SÍMBOLOS

### CARACTERES ROMANOS

$c$	Calor específico
$c_i$	Velocidade convectiva
$f_i$	Componentes das forças de volume
$f_s$	Força de fricção
$h_C$	Coefficiente de convecção
$h_R$	Coefficiente de radiação
$J$	Equivalente mecânico do calor
$J_2^\sigma$	Segundo invariante do tensor desviador
$J_2^\epsilon$	Segundo invariante do tensor de taxas de deformação desviadoras
$k$	Tensão de cisalhamento local
$k_{ij}$	Componentes do tensor de condutividade térmica
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{M}$	Matriz de massa
$m$	Fator de fricção
$\bar{n}$	Vetor normal unitário
$n_i$	Cossenos diretores da normal ao contorno
$\mathbf{N}$	Vetor que contém as funções de interpolação para a velocidade
$\bar{\mathbf{N}}$	Vetor que contém as funções de interpolação para a temperatura
$p$	Pressão hidrostática
$\mathbf{P}$	Vetor de termos independentes
$\bar{q}_{fi}$	Fluxo de calor por condução prescrito
$\bar{q}_C$	Fluxo de calor por convecção prescrito
$\bar{q}_R$	Fluxo de calor por radiação prescrito
$Q$	Fonte ou sumidouro
$t$	Variável tempo
$\bar{t}_i$	Componentes da força prescrita

$T$	Temperatura
$T_{\infty}$	Temperatura ambiental
$\bar{T}$	Temperatura prescrita
$\mathbf{T}$	Vetor que contém os valores nodais de temperatura
$u_m$	Velocidade da matriz
$U_n$	Velocidade da peça normal à superfície de contato
$\bar{u}$	Vetor velocidade
$u_{ij}$	Componentes do vetor velocidade
$\mathbf{u}$	Vetor velocidade
$\mathbf{u}^r$	Vetor que contém os valores nodais de velocidade
$v_i$	Velocidade de um ponto da malha de elementos finitos na direção de $x_i$
$\mathbf{w}$	Vetor que contém as funções de interpolação para a função teste da velocidade
$\bar{\mathbf{w}}$	Vetor que contém as funções de interpolação para a função teste da temperatura
$W$	Potência mecânica
$x_i$	Coordenada de um ponto no eixo de direção “i”

## CARACTERES GREGOS

$\beta$	Coefficiente de dilatação térmica
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\delta u_i$	Função teste para a velocidade
$\delta p$	Função teste para a pressão
$\delta T$	Função teste para a temperatura
$\delta \mathbf{u}^r$	Vetor que contém os valores nodais da função teste da velocidade
$\delta \mathbf{T}$	Vetor que contém os valores nodais da função teste da temperatura
$\Gamma$	Contorno total
$\Gamma_u$	Parte do contorno com condições de contorno de velocidade
$\Gamma_{\sigma}$	Parte do contorno com condições de contorno de força
$\Gamma_T$	Parte do contorno com condições de contorno de temperatura
$\Gamma_f$	Parte do contorno com condições de contorno de condução de calor
$\Gamma_C$	Parte do contorno com condições de contorno de convecção de calor

$\Gamma_R$	Parte do contorno com condições de contorno de radiação
$\varepsilon$	Emissividade
$\dot{\varepsilon}$	Taxa de deformação
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	Componentes do tensor taxa de deformação
$\dot{\bar{\varepsilon}}$	Taxa de deformação efetiva
$\lambda$	Coefficiente de penalidade
$\mu$	Viscosidade dinâmica
$\rho$	Massa específica
$\sigma$	Coefficiente de Stefan-Boltzman
$\sigma_{ij}$	Coefficientes do tensor de tensões
$\bar{\sigma}$	Tensão efetiva
$\sigma_y$	Tensão de escoamento do material
$\tau_{ij}$	Componentes do tensor desviador
$\Omega$	Domínio



## ÍNDICE ANALÍTICO

<b>AGRADECIMENTOS</b> .....	<b>i</b>
<b>RESUMO</b> .....	<b>ii</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>iii</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	<b>iv</b>
<b>ÍNDICE ANALÍTICO</b> .....	<b>vii</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> .....	<b>ix</b>
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 Apresentação .....	1
1.2 O Método dos Elementos Finitos .....	1
1.3 O Método dos Elementos Finitos na Conformação Mecânica .....	2
1.4 Conformação - Aspectos Gerais .....	4
1.5 Objetivo do Trabalho .....	8
<b>2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA</b> .....	<b>9</b>
2.1 Equações que Governam o Problema .....	9
2.2 Hipótese Simplificativa.....	10
2.3 Formulação de Mecânica de Fluidos.....	11
2.4 Comportamento do Material .....	14
2.5 Condições de Contorno e Matrizes de Formas Arbitrárias .....	17
2.6 Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária .....	18
<b>3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</b> .....	<b>21</b>
3.1 Formulação Variacional .....	21
3.2 Método da Função de Penalidade.....	23
3.3 Implementação do Método dos Elementos Finitos.....	24
3.4 Termo de Penalidade.....	30
3.5 Integração no Tempo .....	31
3.6 Cálculo da Pressão .....	34
<b>4. APLICAÇÕES</b> .....	<b>37</b>
4.1 Extrusão Sem Radiação .....	37
4.2 Extrusão Com Radiação.....	45
4.3 Forjamento .....	49
<b>5. CONCLUSÃO</b> .....	<b>57</b>
5.1 Conclusões .....	57
5.2 Sugestões Para Trabalhos Futuros.....	58
<b>ANEXO I</b> .....	<b>60</b>

<b>ANEXO II .....</b>	<b>64</b>
<b>ANEXO III .....</b>	<b>66</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>69</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 - Processos e produtos típicos da conformação mecânica.	7
Figura 2.1 - Relações tensão efetiva ( $\bar{\sigma}$ ) x taxa de deformação efetiva ( $\dot{\epsilon}$ ) e viscosidade ( $\mu$ ) x taxa de deformação efetiva para fluidos newtonianos (a) e materiais visco-plásticos (b).	16
Figura 4.1 - Esquema do processo de extrusão direta.	37
Figura 4.2 - Geometria e condições de contorno do problema de extrusão direta sem radiação.	38
Figura 4.3 - Malha de elementos finitos formada por 241 nós e 200 elementos de 4 nós cada.	39
Figura 4.4 - Campo de velocidades, sob forma vetorial, no instante $t = 20$ segundos.	40
Figura 4.5 - Detalhe do campo de velocidades no instante $t = 20$ segundos.	40
Figura 4.6 - Distribuição de temperatura (em °F) em isorregiões no instante $t = 20$ segundos.	41
Figura 4.7 - Distribuição de pressão (em $N/cm^2$ ) em isorregiões no instante $t = 20$ segundos.	41
Figura 4.8 - Distribuição de tensão equivalente (em $N/cm^2$ ) em isorregiões no instante $t = 20$ segundos.	42
Figura 4.9 - Comparação entre o campo de velocidades calculado no presente trabalho e o campo de velocidades obtido por Zienkiewicz <i>et al.</i> [3] no corte A-A da figura 4.2, em $x_1 = 11,5$ cm.	43
Figura 4.10 - Comparação entre a distribuição de temperatura calculada no presente trabalho e o obtido por Zienkiewicz <i>et al.</i> [3] em $x_2 = 2,5$ cm.	44
Figura 4.11 - Geometria e condições de contorno do problema de extrusão direta com perda de calor por radiação.	45
Figura 4.12 - Distribuição de temperatura (em °F) em isorregiões para o problema com perda de calor para o meio por radiação.	46

Figura 4.13 - Comparação entre a distribuição de temperatura calculada no presente trabalho e a obtida por Zienkiewicz <i>et al.</i> [3] em $x_2 = 2,5$ cm.	47
Figura 4.14 - Comparação entre a distribuição de temperatura calculada no problema sem perda de calor por radiação e a distribuição de temperatura calculada no problema com perda de calor por radiação em $x_2 = 2,5$ cm .	48
Figura 4.15 - Representação do processo de forjamento.	49
Figura 4.16 - Geometria e condições de contorno do problema. Somente a parte hachurada da figura 4.15 é representada nesta figura.	50
Figura 4.17 - Evolução da compressão do cilindro através da visualização da malha de elementos finitos nos instante $t = 0$ (malha inicial), $t = 0,2$ s (redução de 20% da altura) e $t = 0,4$ s (redução de 40% da altura).	52
Figura 4.18 - Campo de velocidades do cilindro no instante final da compressão ( $t = 0,4$ s - redução de 40% da altura inicial do cilindro).	53
Figura 4.19 - Distribuição de pressão (em lbf/pol <sup>2</sup> ) no instante $t = 0,4$ s (redução de 40% da altura inicial do cilindro).	54
Figura 4.20 - Distribuição de tensão equivalente (em lbf/pol <sup>2</sup> ) no instante $t = 0,4$ s (redução de 40% da altura inicial do cilindro).	54
Figura 4.21 - Comparação entre a malha de elementos finitos calculada no presente trabalho (azul) e a malha de elementos finitos obtida por Kobayashi <i>et al.</i> [2] (vermelho) no instante $t = 0,4$ s (redução de 40% da altura inicial do cilindro).	55
Figura 4.22 - Comparação entre o campo de velocidades calculado no presente trabalho (azul) e o campo de velocidades obtido por Kobayashi <i>et al.</i> [2] (vermelho) no instante $t = 0,4$ s (redução de 40% na altura inicial do cilindro).	55
Figura 4.23 - Comparação entre a malha de elementos finitos calculada no presente trabalho (azul) e a malha de elementos finitos obtida pelo software CAPS-FINEL (vermelho) no instante $t = 0,4$ s (redução de 40% da altura inicial do cilindro).	56

# **1. INTRODUÇÃO**

## **1.1 Apresentação**

Conformação é um dos processos de fabricação mais importantes da atualidade. É o meio mais rápido de se mudar a forma de uma peça. Se essa forma é tal que pode ser obtida por apenas uma operação de conformação, então este é o processo mais econômico que se pode utilizar. Se a forma de um produto é muito complexa para ser obtida como uma única peça, frequentemente é possível formá-lo como duas ou mais peças e depois juntá-las mecânica ou metalurgicamente.

A simulação por computador dos processos de conformação pode torná-los ainda mais eficientes e econômicos à medida que visa antecipar e prever a evolução e o resultado final desses processos. Com base em dados obtidos através da simulação é possível modificar o processo a fim de otimizá-lo. É por isso que nos últimos 20 anos o uso de técnicas assistidas por computador vem aumentando na indústria de conformação. A tendência é que as aplicações dessas técnicas aumentem cada vez mais.

Dentre as técnicas de simulação por computador, destaca-se o Método dos Elementos Finitos por ser uma técnica poderosa e extremamente versátil. No presente trabalho lança-se mão deste método para simular processos de conformação mecânica.

## **1.2 O Método dos Elementos Finitos**

O conceito básico do método dos elementos finitos é o da discretização através do emprego da formulação variacional e da interpolação das variáveis. Este método é um procedimento de aproximação para solucionar equações diferenciais com condições de contorno e/ou iniciais em problemas de engenharia ou física matemática. O procedimento emprega a subdivisão do domínio de solução em várias regiões menores (elementos finitos) de formas

convenientes e simples, tais como triângulos e retângulos, e aproxima a solução através de uma combinação linear de funções interpoladoras constituídas de polinômios algébricos, de fácil derivação e integração. Disposições apropriadas de coordenadas (nós) são especificadas para cada elemento, e a ação da equação diferencial é aproximada por valores das variáveis dependentes nesses nós. Usando uma abordagem conveniente (direta, princípio variacional, método de resíduos ponderados ou balanço de energia), as equações diferenciais governantes são transformadas em equações de elementos finitos que governam cada elemento isolado. Estas equações locais são agrupadas para formar um sistema global de equações diferenciais ordinárias ou algébricas, incluindo um apropriado cálculo das condições de contorno. Os valores nodais das variáveis dependentes são determinadas pela solução deste sistema global de equações.

Dentre as características do método dos elementos finitos pode-se destacar as seguintes vantagens: a possibilidade de lidar com geometrias complexas que exijam malhas irregulares, a facilidade de incorporar condições de contorno, tratar de domínios multiplamente conexos, o mesmo código (programa) pode ser utilizado para uma grande variedade de problemas simplesmente mudando-se os dados de entrada e o possível emprego de adaptação e refinamento de malha. Como desvantagem pode-se citar o fato de que em fenômenos transientes não se pode obter uma forma explícita natural quando o método é usado na sua forma consistente, pois sempre haverá uma matriz não diagonal (a de massa) a ser invertida. Para tentar contornar esse problema é possível concentrar a matriz na diagonal principal, embora isto possa provocar diminuição na precisão [1].

### **1.3 O Método dos Elementos Finitos na Conformação Mecânica**

O método dos elementos finitos foi originalmente desenvolvido por engenheiros nos anos 50 para analisar grandes sistemas estruturais de aeronaves. Porém, devido a sua enorme versatilidade, foi logo aplicado a outras áreas da engenharia. Na área de conformação mecânica não foi diferente.

A aplicação do método dos elementos finitos a processos de conformação pode ser realizada sob dois enfoques diferentes:

- de mecânica dos sólidos, quando os efeitos elásticos não podem ser desprezados. Neste caso, o material comporta-se como um sólido elasto-plástico ou elasto-viscoplástico.

- de mecânica dos fluidos, quando os efeitos elásticos podem ser desprezados. Neste caso, o material comporta-se de maneira rígido-plástica ou rígido-viscoplástica.

O primeiro enfoque aplicado a problemas de conformação foi o de mecânica dos sólidos, que começou como uma extensão da técnica de análise estrutural para o regime de deformação plástica. Mas, segundo Kobayashi *et al.* [2], um método de análise na área de conformação, em muitos casos, só pode justificar-se por sua confiabilidade de solução e sua eficiência computacional. Este fato levou ao desenvolvimento de procedimentos numéricos baseados na formulação da mecânica dos fluidos. O primeiro trabalho a utilizar esta formulação foi apresentado por Goon *et al.* [3] em 1968. Lee e Kobayashi [4] e Zienkiewicz e Godbole [5] estenderam esta formulação à solução de problemas plásticos e viscoplásticos.

O problema associado a processos de deformação é um problema de condições de contorno. O processo de deformação de um material rígido-viscoplástico é apresentado da seguinte forma: em um determinado estágio de distorção supõe-se dadas ou determinadas, *a priori*, certas características do processo, tais como: a forma do corpo, a distribuição interna de temperatura, o estado de não-homogeneidade e os valores correntes das propriedades do material. O vetor velocidade  $\bar{u}$  é prescrito na parte  $S_u$  do contorno e as forças de superfície “ $f$ ” são prescritas no restante do contorno,  $S_f$ .

Na formulação de mecânica dos sólidos, o problema de condições de contorno é apresentado de maneira que, além do estado corrente do corpo, a distribuição interna de tensões é suposta conhecida e as condições de contorno são prescritas em termos de velocidade e taxa de forças de superfície. A aplicação do método dos elementos finitos a problemas de conformação com esta formulação tem sido baseada no uso das equações da Prandtl-Reuss para materiais elasto-plásticos. Entretanto, esta formulação apresenta sérias desvantagens: assume a teoria da deformação infinitesimal, mas a grande quantidade de rotação presente no processo elimina a análise infinitesimal e, além disso, a natureza das equações constitutivas de materiais elasto-viscoplásticos exige pequenos intervalos de tempo para a análise de processos transientes, fato que é agravado quando o corpo passa da deformação elástica para a deformação plástica.

Uma maneira simples de evitar este problema é desprezar os efeitos elásticos e tratar a deformação plástica como um problema de escoamento de fluidos. É a chamada formulação de

mecânica dos fluidos. Em geral, esta formulação torna possíveis a análise infinitesimal e o uso de grandes intervalos de tempo.

Na formulação da mecânica dos fluidos, o material apresenta tensões dependentes da taxa de deformação, da deformação equivalente e da temperatura. Ele pode, também, sustentar uma carga finita sem deformar-se. A idealização do material rígido-viscoplástico simplifica o processo de solução e reduz a exigência computacional. Além disso, este material oferece excelente precisão, uma vez que os efeitos elásticos em grandes deformações são desprezíveis. Por esta razão, o material rígido-viscoplástico é apropriado para análise de processos de conformação em temperaturas elevadas [6].

Uma das grandes vantagens da formulação da mecânica dos fluidos é a possibilidade da introdução do acoplamento termo-mecânico, permitindo que o aumento da temperatura devido à dissipação de energia mecânica seja resolvida simultaneamente com o problema do escoamento, no qual as propriedades dependentes da temperatura são levadas em conta. Este acoplamento é apresentado por Oden *et al.* [7] e por Zienkiewicz e Godbole [5].

Apesar dos muitos avanços feitos na formulação de mecânica dos sólidos, sua aplicação a processos de conformação continua limitada. Por outro lado, a formulação de mecânica dos fluidos pode ser aplicada a uma grande variedade de problemas de conformação.

No presente trabalho, o enfoque utilizado para simular processos de conformação mecânica é o da formulação de mecânica dos fluidos com acoplamento termo-mecânico.

#### **1.4 Conformação - Aspectos Gerais**

Conformação é o processo industrial no qual o tamanho ou a forma de uma peça é alterada pela aplicação de forças que produzem tensões que são maiores que a tensão de escoamento e menores que a tensão de fratura do material [8]. Sobre o material de trabalho são efetuadas deformações plásticas (permanentes), impondo-lhe modificações a fim de se obter uma forma definida.



Segundo Chiaverini [9] e Bresciani Filho *et al.* [10], os processos de conformação, em função dos tipos de esforços aplicados, podem ser classificados nas seguintes categorias:

- processos de compressão direta (ex: forjamento e laminação);
- processos de compressão indireta (ex: trefilação e extrusão);
- processos de tração (ex: estiramento de chapas);
- processos de dobramento ou flexão (ex: dobramento de chapas e de barras);
- processos de cisalhamento (ex: torção de barras e corte de chapas),

sendo que pode aparecer mais de um tipo de esforço em um mesmo processo.

Os processos de conformação recebem, ainda, uma divisão no que se refere à temperatura de trabalho. Segundo Datsko [8], Chiaverini [9], Bresciani Filho *et al.* [10] e Schaeffer [11], esta divisão é a seguinte:

- conformação a frio (a temperatura do material durante o processo está abaixo de sua temperatura de recristalização<sup>1</sup>);
- conformação a quente (a temperatura do material durante o processo está acima de sua temperatura de recristalização).

A temperatura de trabalho desempenha papel importante no resultado de um processo de conformação mecânica na medida em que confere diferentes propriedades ao material de trabalho no final do processo.

Características da conformação a frio:

- provoca-se o aparecimento no metal do chamado efeito de encruamento, ou seja, o aumento da resistência mecânica com a deformação plástica;
- pode alterar sensivelmente as propriedades mecânicas do material de trabalho (resistência e dureza aumentam, ductilidade diminui);
- as máquinas devem ser de maior capacidade do que na conformação a quente;
- maior precisão e melhor acabamento superficial.

---

<sup>1</sup> Cristalização: aparecimento das primeiras células cristalinas unitárias que servem como núcleos para o posterior desenvolvimento ou “crescimento” dos cristais, dando origem aos grãos definitivos e à “estrutura granular” típica dos metais.

Características da conformação a quente:

- a deformação plástica é realizada numa faixa de temperatura, durante um determinado tempo, em que o encruamento é eliminado pela recristalização do material;
- menor esforço mecânico;
- a estrutura do metal é refinada (melhora a tenacidade);
- o ferramental deve apresentar boa resistência ao calor;
- oxidação e formação de casca de óxido;
- grandes deformações e pouca precisão.

Na figura 1.1 são mostrados os processos e produtos típicos da conformação mecânica (Fonte: Bresciani Filho *et al.* [10]).

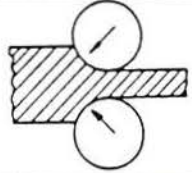
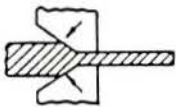
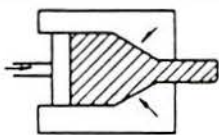
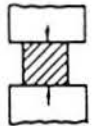
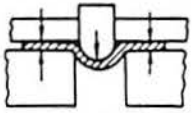


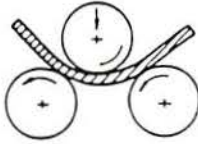
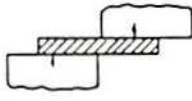
Processo	Força Preponderante	Trabalho		Ilustração	Semi-produtos ou produtos	
		a quente	a frio		Aços	Não-ferrosos
Laminação	Compressão direta	x			Placas Chapas Barras Perfis	Placas Chapas Barras
			x		Chapas	
Trefilação	Compressão indireta		x		Barras Arames Fios	Barras Arames Fios Tubos
Extrusão	Compressão indireta	x			Tubos	Barras Tubos Perfis
			x		Peças pequenas extrudadas	Peças longas extrudadas
Forjamento	Compressão direta	x			Peças forjadas	
			x		Peças pequenas forjadas	
Estampagem (profunda)	Compressão indireta em parte	x			Peças grandes estampadas (a partir de placas)	
			x		Peças de chapas estampadas	
Estiramento de chapas	Tração		x		Peças de chapas estiradas	
Dobramento	Flexão	x	x		Peças de chapas e tiras dobradas	
Calandragem	Flexão		x		Tubos	
Corte	Cisalhamento	x	x		Peças cortadas de chapas ou perfis pequenos diversos	

Figura 1.1 - Processos e produtos típicos da conformação mecânica.

#### 1.4 Objetivo do Trabalho

O objetivo do trabalho é simular processos de conformação mecânica em domínios bidimensionais através da formulação da mecânica dos fluidos com função de penalidade. Para tanto, utiliza-se o método dos elementos finitos para fazer a discretização espacial do domínio. A discretização do tempo é feita pelo uso de diferenças finitas com esquema de Crank-Nicolson.

A simulação será realizada através do desenvolvimento de um algoritmo escrito em FORTRAN77 destinado a computadores padrão IBM-PC com sistema operacional MS-DOS.

O algoritmo desenvolvido no presente trabalho destina-se a simular processos de conformação mecânica onde são empregados metais ou polímeros como matérias-primas desses processos. Os exemplos apresentados no presente trabalho utilizam apenas metais como matéria-prima.

O algoritmo também destina-se a permitir e descrever o movimento da malha de elementos finitos. Para tanto, objetiva-se introduzir o método Lagrangiano-Euleriano arbitrário para a descrição desse movimento. Este método visa ser utilizado nos casos em que a descrição Lagrangiana não pode ser aplicada.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

### 2.1 Equações que Governam o Problema

As equações que governam o escoamento de um fluido incompressível, em coordenadas cartesianas ortogonais são [12]:

- Equação da conservação da quantidade de movimento:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{em } \Omega \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.1)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $u_i$  são as componentes do vetor velocidade nas direções dos eixos de coordenadas  $x_i$ ,  $f_i$  são as componentes das forças de volume,  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões, “t” indica a variável tempo e  $\Omega$  é o domínio do problema, onde  $\{x_j \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^j, j = 1,2,3\}$

- Equação da conservação de massa (equação da continuidade):

$$\text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (i=1,2,3) \quad (2.2)$$

- Equação da conservação de energia:

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = Q + W \quad \text{em } \Omega \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.3)$$

onde “c” é o calor específico, “T” é a temperatura,  $k_{ij}$  são as componentes do tensor de condutividade térmica, “Q” é uma fonte (ou sumidouro) e “W” é a potência mecânica (taxa de trabalho mecânico) e corresponde à energia dissipada em forma de calor devido ao trabalho mecânico que é desenvolvido durante o processo de deformação.

## 2.2 Hipótese Simplificativa

A conformação de produtos industriais, como foi dito antes, pode ser obtida por diferentes processos, todos envolvendo grandes e permanentes deformações. Quando tais processos ocorrem, os efeitos elásticos são, em geral, desprezíveis em relação à deformação plástica.

Assumindo a hipótese de deformação elástica nula, pode-se relacionar a tensão real ( $\sigma$ ) à taxa de deformação ( $\dot{\epsilon}$ ) da seguinte maneira [13]:

$$\sigma = G\dot{\epsilon} \quad (2.4)$$

onde a matriz “G” pode ser dependente da deformação efetiva ( $\bar{\epsilon}$ ), da temperatura (T) e da própria taxa de deformação:

$$G = G(\bar{\epsilon}, \dot{\epsilon}, T) \quad (2.5)$$

A hipótese acima, se admitida, faz com que o material passe a comportar-se essencialmente como um fluido, definido por Zienkiewicz [13] como “um material incapaz de sustentar, sem movimento, qualquer tensão desviadora”.

Pode-se adotar, a partir de agora, a formulação de mecânica de fluidos (ou formulação de fluxo).

Embora a formulação de mecânica de fluidos omita os efeitos elásticos, eles podem ser introduzidos através de cálculos adicionais. Estes efeitos são importantes apenas para a determinação de tensões residuais e do chamado “spring back”<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Spring back: recuperação elástica que ocorre quando a pressão aplicada para conformar a peça é retirada. Esta recuperação, em geral, não é uniforme em toda peça e, por isso, tensões residuais são criadas.

### 2.3 Formulação de Mecânica de Fluidos

As componentes  $\sigma_{ij}$  do tensor de tensões da equação (2.1) podem ser decompostas da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.6)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker (1 se  $i = j$  e 0 se  $i \neq j$ ),  $\tau_{ij}$  são as componentes do tensor desviador e “p” é a pressão hidrostática e vem dada por:

$$p = -\frac{\sigma_{ii}}{3} \quad (i=1,2,3) \quad (2.7)$$

Aplicando a relação (2.4) às tensões desviadoras ( $\tau_{ij}$ ) obtém-se a seguinte equação constitutiva:

$$\tau_{ij} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.8)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica e  $\dot{\epsilon}_{ij}$  é a taxa de deformação, que vem dada por:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.9)$$

A equação (2.8) surge quando se considera o fluido newtoniano, para o qual se pode aplicar a hipótese de Stokes, que estabelece uma relação linear entre as tensões desviadoras ( $\tau_{ij}$ ) e as taxas de deformação ( $\dot{\epsilon}_{ij}$ ) [1].

Substituindo as equações (2.6) e (2.8) na equação da conservação da quantidade de movimento (2.1) obtém-se uma equação escrita em termos das componentes de velocidade e da pressão, ficando a seguinte expressão:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad \text{em } \Omega \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.10)$$

As equações (2.10) são conhecidas como Equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível [14].

As equações (2.2), (2.3) e (2.10) formam um sistema de equações diferenciais a derivadas parciais que governam o fluxo transiente e laminar de um fluido incompressível.

Até aqui, poderia parecer que o problema termo-mecânico é desacoplado, uma vez que assume-se que a massa específica ( $\rho$ ) independe da pressão (“p”) e da temperatura (“T”). Entretanto, o problema termo-mecânico é, em geral, acoplado devido às seguintes razões [12] :

- A viscosidade dinâmica ( $\mu$ ) é uma função da temperatura, ou seja,

$$\mu = \mu(T) \quad (2.11)$$

- Existem deformações produzidas por efeitos da temperatura ( $\varepsilon_{ij}^T$ ), ou seja,

$$\varepsilon_{ij}^T = \beta(T - T_R) \delta_{ij} \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.12)$$

onde  $T_R$  é uma temperatura de referência e  $\beta$  é o coeficiente de dilatação térmica.

- A potência mecânica é dissipada em forma de calor, constituindo-se numa fonte na equação (2.3). Este valor vem dado por:

$$W = \frac{f}{J} \tau_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.13)$$

onde “f” é a fração de potência mecânica que se transforma em calor e “J” é o equivalente mecânico do calor.



Para completar a descrição do modelo obtido acima, é necessário introduzir as condições de contorno do problema. Essas condições são as seguintes:

- para o problema mecânico:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (i=1,2,3) \quad (2.14a)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.14b)$$

- para o problema térmico:

$$T = \bar{T} \quad \text{em } \Gamma_T \quad (2.15a)$$

$$k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j = \bar{q}_{fi} \quad \text{em } \Gamma_f \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.15b)$$

$$h_C (T_\infty - T) = \bar{q}_C \quad \text{em } \Gamma_C \quad (2.15c)$$

$$\sigma \varepsilon (T_\infty^4 - T^4) = h_R (T_\infty - T) = \bar{q}_R \quad \text{em } \Gamma_R \quad (2.15d)$$

onde  $\bar{u}_i$  são as componentes do vetor velocidade na direção  $x_i$  prescrita na parte  $\Gamma_u$  do contorno,  $n_j$  corresponde aos cossenos diretores da normal ao contorno,  $\bar{t}_i$  são as componentes de força prescrita na direção da normal a  $\Gamma_\sigma$  dirigida para o exterior com respeito ao eixo  $x_j$ ,  $\bar{T}$  é a temperatura prescrita na parte  $\Gamma_T$  do contorno,  $\bar{q}_{fi}$  é o fluxo de calor por condução prescrita na direção  $x_i$  na parte  $\Gamma_f$  do contorno,  $T_\infty$  é a temperatura ambiental,  $h_C$  é o coeficiente de convecção,  $\bar{q}_C$  é o fluxo por convecção prescrita na parte  $\Gamma_C$  do contorno,  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzman,  $\varepsilon$  é a emissividade,  $\bar{q}_R$  é o fluxo por radiação prescrita na parte  $\Gamma_R$  do contorno e  $h_R$  é o coeficiente de radiação, que vem dado por:

$$h_R = \sigma \varepsilon (T_\infty^2 + T^2)(T_\infty + T) \quad (2.16)$$

É importante observar que

$$\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma \quad (2.17)$$

e que

$$\Gamma_T \cup \Gamma_f \cup \Gamma_C \cup \Gamma_R = \Gamma \quad (2.18)$$

onde  $\Gamma$  é o contorno total do domínio  $\Omega$ .

As equações (2.10), (2.2) e (2.3) representam a formulação para problemas em coordenadas cartesianas ortogonais. Os casos uni e bidimensionais são obtidos diretamente fazendo-se  $i,j=1$  e  $i,j=1,2$ , respectivamente. A formulação em coordenadas cilíndricas (e, a partir desta, para o caso axi-simétrico) encontra-se descrita no Anexo I do presente trabalho.

## 2.4 Comportamento do Material

Relações similares à equação (2.8) podem ser escritas em termos do segundo invariante do tensor de tensões e do segundo invariante do tensor de taxas de deformações. Desta maneira, define-se tensão efetiva ou equivalente da seguinte forma [12]:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}} = \sqrt{3J_2^\sigma} \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.19)$$

onde  $\bar{\sigma}$  é a tensão efetiva ou equivalente e  $J_2^\sigma$  é o segundo invariante do tensor desviador que vem dado por

$$J_2^\sigma = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + \tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2 \quad (2.20)$$

A relação (2.19) é convencionalmente feita para tornar o estado multiaxial igual à tensão sob carregamento uniaxial, ou seja, quando todas as tensões, com exceção de  $\sigma_{11}$ , são nulas. Resulta  $\bar{\sigma} = \sigma_{11}$ .

Define-se taxa de deformação efetiva ou equivalente da seguinte forma:

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} = \sqrt{\frac{4}{9} 3J_2^\epsilon} \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.21)$$

onde  $J_2^\epsilon$  é o segundo invariante do tensor de taxas de deformações desviadoras, que vem dado por:

$$J_2^{\dot{\epsilon}} = \frac{1}{6} \left[ (\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22})^2 + (\dot{\epsilon}_{22} - \dot{\epsilon}_{33})^2 + (\dot{\epsilon}_{33} - \dot{\epsilon}_{11})^2 \right] + \dot{\epsilon}_{12}^2 + \dot{\epsilon}_{23}^2 + \dot{\epsilon}_{31}^2 \quad (2.22)$$

O fator 4/9 na relação (2.21) é introduzido para que, sob um estado de carga axial, resulte  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{11}$  quando o material é incompressível, ou seja, quando o módulo de Poisson vale 1/2.

Com as relações (2.19) e (2.21) obtém-se, no lugar da relação (2.8), a seguinte expressão:

$$\bar{\sigma} = 3\mu\dot{\epsilon} \quad (2.23)$$

que dá o comportamento do material sob carga uniaxial. Isolando-se a viscosidade, obtém-se

$$\mu = \frac{\bar{\sigma}}{3\dot{\epsilon}} \quad (2.24)$$

Para um fluido newtoniano a viscosidade dinâmica ( $\mu$ ) é constante. Por essa razão, a relação  $\bar{\sigma} - \dot{\epsilon}$  é linear.

Para um fluido não newtoniano essa relação não é linear e, em geral, comporta-se como uma relação de potência.

O fluido de Bingham (não newtoniano) descreve o comportamento de um material rígido-viscoplástico. Neste caso, a viscosidade é dada pela seguinte relação [13] :

$$\mu = \frac{\sigma_y + \gamma\dot{\epsilon}^n}{3\dot{\epsilon}} \quad (2.25)$$

onde  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do material para o estado uniaxial de tensões,  $\gamma$  e “n” são constantes do material e, em geral, “n” varia entre 0 e 1.

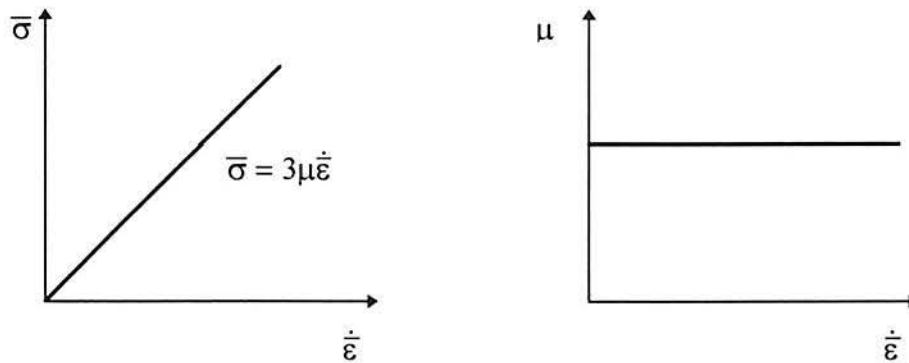
Para o caso de plasticidade pura os efeitos viscosos são desprezados e a relação (2.25) fica da seguinte forma:

$$\mu = \frac{\sigma_y}{3\dot{\epsilon}} \quad (2.26)$$

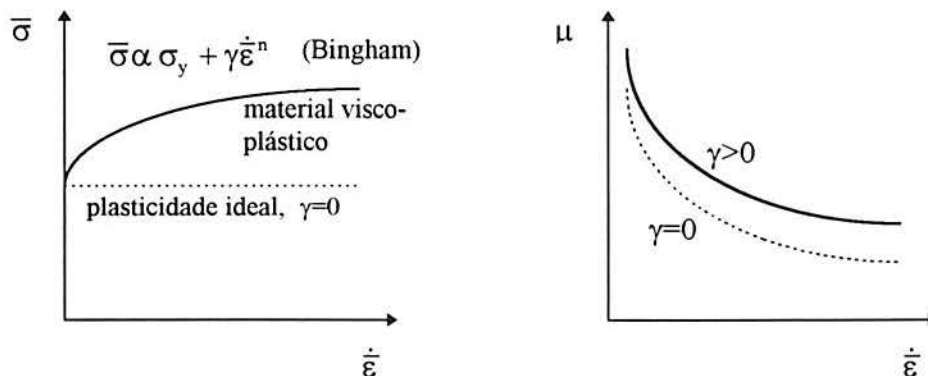
Para ambos os casos (de plasticidade pura e de viscoplasticidade) é possível incluir os efeitos de encruamento do material e de temperatura. Para tanto, basta escrever a dependência da seguinte maneira:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}, T) \quad (2.27)$$

Na figura 2.1 é possível observar as relações entre tensão efetiva e taxa de deformação efetiva e entre viscosidade e taxa de deformação efetiva para fluidos newtonianos e materiais visco-plásticos.



(a) linear, fluido newtoniano.



(b) não-linear, fluido não-newtoniano. Materiais visco-plásticos.

Figura 2.1 - Relações tensão efetiva ( $\bar{\sigma}$ ) x taxa de deformação efetiva ( $\dot{\bar{\epsilon}}$ ) e viscosidade ( $\mu$ ) x taxa de deformação efetiva para fluidos newtonianos (a) e materiais visco-plásticos (b).

## 2.5 Condições de Contorno e Matrizes de Formas Arbitrárias

A implementação das condições de contorno de velocidade, eq. (2.14a), e de forças de superfície, eq. (2.14b), é realizada de maneira direta. Entretanto, na análise de processos de conformação mecânica através do método dos elementos finitos deve-se tomar cuidado com as condições de contorno entre matriz e peça. A fricção, em geral, muda de direção no chamado “ponto neutro”, mas a localização deste ponto não é conhecida *a priori*.

A forma das matrizes em processos de conformação mecânica varia de processo para processo. A implementação do método dos elementos finitos para cada uma dessas formas de matrizes exigiria grande esforço de programação. Por isso, é conveniente usar uma técnica que pode ser aplicada a matrizes de qualquer geometria. Com esta técnica, o método dos elementos finitos se torna uma ferramenta prática e econômica na análise de processos de conformação. Esta técnica permite a implementação sistemática das condições de contorno de fricção para matrizes de forma arbitrária. Também oferece a capacidade de prever a localização do “ponto neutro” na interface matriz-peça.

Esta técnica consiste no seguinte [6] : considera-se que uma matriz com superfície curva está em contato com a peça de trabalho; as condições de contorno na interface são as seguintes:

$$U_n = u_m \cdot \bar{n} \quad (2.28a)$$

$$f_s = -mk \frac{\Delta u_s}{|\Delta u_s|} \cong -\frac{2}{\pi} mk \tan^{-1} \left( \frac{\Delta u_s}{u_0} \right) \quad (2.28b)$$

onde  $U_n$  é a velocidade da peça normal à superfície de contato,  $u_m$  é a velocidade da matriz,  $\bar{n}$  é o vetor normal unitário apontado para fora do domínio da peça,  $f_s$  é a força de fricção, “m” é o fator de fricção, “k” é a tensão de cisalhamento local,  $u_0$  é um número pequeno comparado a  $\Delta u_s$ ,  $\Delta u_s$  é a diferença entre a velocidade tangencial da matriz e a velocidade tangencial da peça, “s” indica a direção tangencial e “n” indica a direção normal.

## 2.6 Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária

Até recentemente, as soluções de problemas transientes de escoamentos com superfície livre aplicando o método dos elementos finitos empregava, invariavelmente, a descrição Euleriana ou a descrição Lagrangiana para descrever movimento.

A solução do método dos elementos finitos baseada na descrição Euleriana caracteriza-se por um sistema de coordenadas que permanece fixo no tempo em relação a um observador externo. Dessa maneira o fluido se move de elemento em elemento. Algumas vantagens da descrição Euleriana são as seguintes: (a) o fluido pode ser submetido a grandes distorções arbitrárias sem perda de precisão e (b) os contornos com escoamento externo são fáceis de lidar. Como desvantagens pode-se citar as seguintes: (a) as interfaces de material perdem sua definição precisa à medida que o fluido se move através da malha, de modo que os cálculos Eulerianos básicos exigem uma lógica especial para as interfaces, o que é complicado e frequentemente causa imprecisões e (b) regiões locais com bom refinamento de malha são difíceis de se atingir.

Por outro lado, a solução do método dos elementos finitos baseada na descrição Lagrangiana caracteriza-se por um sistema de coordenadas que se move junto com o fluido. Assim, cada elemento sempre contém a mesma porção do fluido. Algumas das vantagens dessa descrição são as seguintes: (a) as interfaces do material podem ser especificamente traçadas e precisamente seguidas; (b) as condições de contorno da superfície livre são facilmente aplicáveis e (c) contornos curvos e rígidos de forma arbitrária podem estar presentes. A principal desvantagem é a sua incapacidade de lidar com grandes distorções, as quais frequentemente caracterizam escoamentos de interesse.

Para evitar as dificuldades descritas acima tanto para o enfoque Euleriano como para o enfoque Lagrangiano, propõe-se uma técnica onde os pontos nodais podem ser deslocados independentemente do movimento do fluido. Esta técnica é conhecida como método Lagrangiano-Euleriano arbitrário, ou ALE (sigla em inglês para Arbitrary Lagrangian-Eulerian method). Devido aos aspectos Lagrangianos desta técnica, pode-se aplicá-la a escoamentos com superfície livre. Também mantém aspectos Eulerianos que eliminam distorções indesejadas da malha frequentemente associadas ao enfoque Lagrangiano. Esta técnica é chamada método

Lagrangiano-Euleriano arbitrário porque existem três opções para o movimento dos vértices: (1) podem movimentar-se junto com o fluido em uma descrição Lagrangiana, (2) podem manter-se fixos em uma descrição Euleriana ou (3) podem movimentar-se de uma forma arbitrariamente prescrita para dar uma contínua capacidade de redividir a malha.

O trabalho de Ramaswamy e Kawahara [15] descreve a aplicação do método ALE, que consiste no seguinte:

Considera-se a seguinte diferença de velocidades:

$$c_i = u_i - v_i \quad (i=1,2,3) \quad (2.29)$$

onde  $c_i$  é a velocidade convectiva na representação mista,  $u_i$  é a velocidade do material,  $v_i$  é a velocidade da malha e “i” indica a direção do eixo  $x_i$ .

A equação (2.29) é introduzida nas equações que governam o problema:

- equação da conservação da quantidade de movimento, eq. (2.10):

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + c_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad \text{em } \Omega \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.30)$$

- equação da conservação de energia, eq. (2.3):

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + c_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = Q + W \quad \text{em } \Omega \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.31)$$

Para o caso de escoamento incompressível, a equação da continuidade, eq. (2.2), não é modificada pelo método ALE.

Observe-se que se a velocidade da malha ( $v_i$ ) for igual a zero (descrição Euleriana), então a velocidade convectiva ( $c_i$ ) é igual à velocidade do material e os termos convectivos das

equações (2.30) e (2.31) têm seus valores máximos. Por outro lado, se a velocidade da malha for igual à velocidade do material (descrição Lagrangiana), então a velocidade convectiva é nula e os termos convectivos das equações (2.30) e (2.31) são nulos.

A velocidade da malha ( $v_i$ ) é calculada através da seguinte expressão [16]:

$$(v_i^I)_{t+\Delta t} = \frac{1}{N} \sum_{J=1}^N (v_i^J)_t + \frac{1}{10N^2 \Delta t} \sum_{J=1}^N L_{IJ} \sum_{J=1}^N \frac{(\delta_i^J - \delta_i^I)}{L_{IJ}} \quad (i=1,2,3) \quad (2.32)$$

onde  $v_i^I$  é a componente da velocidade da malha no nó "I" na direção do eixo  $x_i$ , "N" é o número de nós conectados ao nó "I" através de lados e diagonais,  $L_{IJ}$  é a distância entre o nó "I" e o nó "J",  $\delta_i^J$  é o deslocamento total do nó "J" na direção do eixo  $x_i$  e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo.

A atualização das coordenadas dos nós, após terem se movido durante um intervalo de tempo, pode ser obtida acrescentando-se a estas coordenadas a velocidade dos nós correspondentes multiplicada pelo intervalo de tempo, ou seja,

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t v_i \quad (i=1,2,3) \quad (2.33)$$

onde  $x_i^n$  é a coordenada do nó na direção do eixo  $x_i$  no tempo "n",  $\Delta t$  é o intervalo de tempo.



### 3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

#### 3.1 Formulação Variacional

Multiplicando as equações que governam o problema (equações (2.2), (2.3) e (2.10) ) por funções teste, também chamadas funções peso, e integrando este produto sobre todo domínio  $\Omega$ , obtém-se a chamada formulação do método dos resíduos ponderados [1]:

- Equações da conservação da quantidade de movimento:

$$\int_{\Omega} \left\{ \delta u_i \left[ \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\partial p}{\partial x_j} - f_i \right] \right\} d\Omega = 0 \quad (i,j=1,2,3) \quad (3.1)$$

- Equação da conservação de massa:

$$\int_{\Omega} \delta p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (3.2)$$

- Equação da conservação de energia:

$$\int_{\Omega} \left\{ \delta T \left[ \rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - Q - W \right] \right\} d\Omega = 0 \quad (i,j=1,2,3) \quad (3.3)$$

onde  $\delta u_i$  é uma função teste que corresponde à variação da velocidade na direção do eixo  $x_i$ ,  $\delta p$  é uma função teste que corresponde à variação da pressão e  $\delta T$  é uma função teste que corresponde à variação de temperatura.

Para se obter a formulação variacional das equações acima, aplica-se o teorema de Green. A formulação variacional também é conhecida como “forma fraca”, pois enfraquece as exigências de continuidade das variáveis primárias (velocidade, pressão e temperatura). Essa formulação faz com que as condições de contorno sejam introduzidas naturalmente nas equações governantes, sob forma de integrais de contorno. Desta maneira, as equações (3.1), (3.2) e (3.3) ficam, sob forma variacional, da seguinte maneira [17], [12]:

- Equações da conservação da quantidade de movimento:

$$\int_{\Omega} \left[ \rho \delta u_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - p \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_i} - f_i \delta u_i \right] d\Omega - \int_{\Gamma_s} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma = 0 \quad (3.4)$$

onde  $i,j=1,2,3$  e o último termo do lado esquerdo da igualdade corresponde à condição de contorno de forças de superfície.

- Equação da conservação de massa:

$$\int_{\Omega} \delta p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (3.5)$$

- Equação da conservação de energia:

$$\int_{\Omega} \left[ \rho c \delta T \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + k_{ij} \frac{\partial \delta T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_i} - Q \delta T - W \delta T \right] d\Omega - \int_{\Gamma_f} \bar{q}_f \delta T d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \bar{q}_c \delta T d\Gamma - \int_{\Gamma_R} \bar{q}_R \delta T d\Gamma = 0 \quad (3.6)$$

onde  $i,j=1,2,3$  e os três últimos termos do lado esquerdo da igualdade correspondem às condições de contorno do problema térmico.

Observe-se que não houve mudança na equação da conservação da conservação de massa.

Embora a pressão seja uma variável primária, sua especificação não constitui uma condição de contorno necessária, pois  $\delta p$  (variação da pressão) não aparece nas integrais de contorno da formulação variacional. Além disso, não há diferenciação da pressão nas equações de conservação da quantidade de movimento, eq. (3.4). A pressão, portanto, é uma ordem menos diferenciável do que a velocidade e a função de interpolação aplicada à pressão pode ter um grau a menos que a função de interpolação aplicada à velocidade.

O problema de escoamento de fluido incompressível representado pelas equações (3.4) e (3.5) pode ser resolvido de diversas formas. No presente trabalho estas equações são resolvidas pelo método da função de penalidade.

### 3.2 Método da Função de Penalidade

O método da função de penalidade tem por objetivo a obtenção de uma forma variacional que não contenha a pressão como variável primária do problema. Para tanto, a equação da conservação de massa é tomada como uma restrição incorporada às equações da conservação da quantidade de movimento através de um termo de penalidade (restrição da incompressibilidade). O uso deste método tem vantagens sobre outras representações de escoamento incompressível por sua simplicidade no processo de discretização do método dos elementos finitos [18].

A expressão “penalidade” decorre do fato de que o termo de pressão é penalizado se a restrição não é cumprida, ou seja, quanto mais violada for a restrição, maior é o valor do termo de penalidade [19].

O método da função de penalidade consiste em escrever a restrição de incompressibilidade (equação da conservação de massa) da seguinte forma [12]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{p}{\lambda} \quad (i=1,2,3) \quad (3.7)$$

onde  $\lambda$  é um número positivo muito grande e é tratado como coeficiente de penalidade.

Isolando “p” obtém-se:

$$p = -\lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3) \quad (3.8)$$

A restrição de incompressibilidade é imposta, agora, através da equação (3.8) e não mais pela equação auxiliar (3.2). Dessa maneira, a formulação variacional para a equação da conservação de quantidade de movimento fica, substituindo-se (3.8) em (3.4), da seguinte maneira [1]:

$$\int_{\Omega} \left[ \rho \delta u_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_i} - f_i \delta u_i \right] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma = 0 \quad (3.9)$$

Desta forma, através da função de penalidade, obtém-se a redução do sistema de equações pela eliminação da pressão como variável primária e retém-se a possibilidade de emprego de elementos e funções simples e genéricas na implementação do método dos elementos finitos.

### 3.3 Implementação do Método dos Elementos Finitos

As equações da conservação da quantidade de movimento, eq. (3.9), e da conservação de energia, eq. (3.6), podem ser escritas sob forma matricial, ficando da seguinte maneira:

- equações da conservação da quantidade de movimento:

$$\int_{\Omega} \left[ \rho \delta \mathbf{u}^T \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}^T \hat{\nabla} \mathbf{u} \right) + (\mathbf{B}^T \delta \mathbf{u})^T \mu \mathbf{D}(\mathbf{B}^T \mathbf{u}) + \lambda (\mathbf{B}^T \delta \mathbf{u})^T \mathbf{m} \mathbf{m}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{u}) - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (3.10)$$

- equação da conservação de energia:

$$\int_{\Omega} \left[ \rho c \delta T \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}^T \nabla T \right) + (\nabla^T \delta T) \mathbf{k} (\nabla T) - Q \delta T - W \delta T \right] d\Omega - \int_{\Gamma_f} \bar{q}_f \delta T d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \bar{q}_c \delta T d\Gamma - \int_{\Gamma_R} \bar{q}_R \delta T d\Gamma = 0 \quad (3.11)$$

onde “T” como superíndice indica transposição, negrito indica matriz ou vetor,

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] \quad (3.12)$$

$$\delta \mathbf{u}^T = [\delta u_1 \quad \delta u_2 \quad \delta u_3] \quad (3.13)$$

$$\nabla^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\hat{\nabla}^T = [\nabla \quad \nabla \quad \nabla] \quad (3.15)$$

$$\mathbf{m}^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (3.16)$$

$$\mathbf{f}^T = [f_1 \quad f_2 \quad f_3] \quad (3.17)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Para implementar o método dos elementos finitos a partir das equações de conservação da quantidade de movimento, eq. (3.10), e da equação da conservação de energia, eq. (3.11), divide-se o domínio total do problema em regiões menores, de formas simples, (elementos finitos) e considera-se os campos de velocidade e de temperatura expressos em termos de funções de interpolação e valores nodais de velocidade e temperatura, válidos no domínio de cada elemento em que foi dividida a região em estudo.

Dessa maneira, tem-se:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^r \mathbf{N}^i \mathbf{u}^i = \mathbf{N} \mathbf{u}^r \quad (3.21)$$

$$T = \sum_{i=1}^s \bar{\mathbf{N}}^i T^i = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{T} \quad (3.22)$$

onde “r” e “s” são os números de nós de cada elemento para velocidade e para temperatura, respectivamente. Em geral,  $r = s$ . Ainda,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N^i & 0 & 0 \\ 0 & N^i & 0 \\ 0 & 0 & N^i \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, r) \quad (3.23)$$

$$\mathbf{u}^r = \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, r) \quad (3.24)$$

onde  $N^i$  é uma função de interpolação de grau “r” usada para expandir a velocidade e  $\bar{N}^i$  é uma função de interpolação de grau “s” usada para expandir a temperatura. Em geral, pode-se fazer  $N^i = \bar{N}^i$ .

Da mesma forma que a velocidade e a temperatura, as funções teste também podem ser expressas em termos de funções de interpolação e valores nodais, ficando da seguinte maneira:

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}^i \delta \mathbf{u}^i = \mathbf{w} \delta \mathbf{u}^r \quad (3.25)$$

$$\delta T = \sum_{i=1}^s \bar{\mathbf{w}}^i T^i = \bar{\mathbf{w}} \delta T \quad (3.26)$$

onde “r” e “s” são os números de nós de cada elemento para a função teste da velocidade e para a função teste da temperatura, respectivamente. Em geral,  $r=s$ . Ainda,

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^i & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{w}^i & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{w}^i \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, r) \quad (3.27)$$

$$\delta \mathbf{u}^r = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^i \\ \delta \mathbf{u}^i \\ \delta \mathbf{u}^i \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, r) \quad (3.28)$$

onde  $\mathbf{w}^i$  é uma função de interpolação de grau “r” usada para expandir a função teste da velocidade e  $\bar{\mathbf{w}}^i$  é uma função de interpolação de grau “s” usada para expandir a função teste da temperatura. Em geral, pode-se fazer  $\mathbf{w}^i = \bar{\mathbf{w}}^i$ .

Substituindo as equações (3.21), (3.22), (3.25) e (3.26) nas equações (3.10) e (3.11), obtém-se:

- equações da conservação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\Omega} \rho \mathbf{w}^T \mathbf{N} d\Omega \right) \frac{\partial \mathbf{u}^r}{\partial t} + \left( \int_{\Omega} \rho (\mathbf{N} \mathbf{u}^r) \mathbf{w} \nabla \mathbf{N} d\Omega \right) \mathbf{u}^r + \left( \int_{\Omega} (\mathbf{B}^T \mathbf{w})^T \mu \mathbf{D}(\mathbf{B}^T \mathbf{N}) d\Omega \right) \mathbf{u}^r + \\ & + \left( \int_{\Omega} \lambda (\mathbf{B}^T \mathbf{w})^T \mathbf{m} \mathbf{m}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{N}) d\Omega \right) \mathbf{u}^r - \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma_s} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

- equação da conservação de energia:

$$\begin{aligned}
& \left( \int_{\Omega} \rho c \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{N}} d\Omega \right) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \left( \int_{\Omega} \rho c (\mathbf{N} \mathbf{u}^r) \bar{\mathbf{w}}^T \nabla \bar{\mathbf{N}} d\Omega \right) \mathbf{T} + \left( \int_{\Omega} \nabla \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{k} \nabla \bar{\mathbf{N}} d\Omega \right) \mathbf{T} + \\
& + \left( \int_{\Gamma_c} h_c \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{N}} d\Gamma + \int_{\Gamma_R} h_R \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{N}} d\Gamma \right) \mathbf{T} - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{w}}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{W}) d\Omega - \\
& - \int_{\Gamma_f} \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{q}}_{fi} d\Gamma - \int_{\Gamma_c} h_c \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{T}_{\infty} d\Gamma - \int_{\Gamma_R} h_R \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{T}_{\infty} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Observe-se que os valores nodais das funções teste ( $\delta \mathbf{u}^r$  e  $\delta \mathbf{T}$ ) foram excluídos das equações governantes por terem forma arbitrária e aparecerem em todos os termos das respectivas equações.

As funções de interpolação usadas para expandir as funções teste  $\delta u$  e  $\delta T$  podem ser as mesmas usadas para expandir a velocidade e a temperatura, respectivamente, dando origem ao método Galerkin. Desta forma,

$$\mathbf{w} = \mathbf{N} \tag{3.31}$$

e

$$\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{N}} \tag{3.32}$$

Segundo Zienkiewicz *et al.* [3] o método Galerkin pode levar a instabilidades numéricas quando há convecção dominante. Entretanto, para problemas de conformação mecânica os efeitos convectivos são pequenos e o método Galerkin pode ser aplicado.

As equações da conservação da quantidade de movimento podem ser escritas de forma compacta, obtendo-se:

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{u}^r}{dt} + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3) \mathbf{u}^r = \mathbf{P} \tag{3.33}$$

onde



$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{w}^T \mathbf{N} \, d\Omega \quad (3.34a)$$

$$\mathbf{K}_1 = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{N} \mathbf{u}^T) \mathbf{w} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega \quad (3.34b)$$

$$\mathbf{K}_2 = \int_{\Omega} \mathbf{B} \mathbf{w}^T \mu \mathbf{D} \mathbf{B}^T \mathbf{N} \, d\Omega \quad (3.34c)$$

$$\mathbf{K}_3 = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^T \mathbf{w})^T \mathbf{m} \lambda \mathbf{m}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{N}) \, d\Omega \quad (3.34d)$$

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Omega \quad (3.34e)$$

Da mesma forma, a equação da conservação de energia também pode ser escrita sob forma compacta, ficando:

$$\bar{\mathbf{M}} \frac{d\mathbf{T}}{dt} + (\bar{\mathbf{K}}_1 + \bar{\mathbf{K}}_2 + \bar{\mathbf{K}}_3) \mathbf{T} = \bar{\mathbf{P}} \quad (3.35)$$

onde

$$\bar{\mathbf{M}} = \int_{\Omega} \rho c \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{N}} \, d\Omega \quad (3.36a)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_1 = \int_{\Omega} \rho c (\mathbf{N} \mathbf{u}^T) \bar{\mathbf{w}}^T \nabla \bar{\mathbf{N}} \, d\Omega \quad (3.36b)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_2 = \int_{\Omega} \nabla \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{k} \nabla \bar{\mathbf{N}} \, d\Omega \quad (3.36c)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_3 = \int_{\Gamma_c} h_c \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{N}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_R} h_R \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{N}} \, d\Gamma \quad (3.36d)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{w}}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{W}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{q}}_n \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} h_c \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{T}_{\infty} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_R} h_R \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{T}_{\infty} \, d\Gamma \quad (3.36e)$$

### 3.4 Termo de Penalidade

Segundo Carey e Oden [19], o sistema de equações formado pelas equações (3.33) geralmente não conduz ao resultado correto. Isto acontece porque o problema discreto é sobre-restringido e tende à solução trivial ( $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ). Em outras palavras, o que ocorre é o seguinte: considere-se o sistema de equações da conservação de quantidade de movimento representado por (eq. 3.33) :

$$[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \lambda \mathbf{K}_3] \mathbf{u} = \mathbf{P} - \mathbf{M} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (3.37)$$

onde  $\lambda$  é o coeficiente de penalidade, a matriz  $\mathbf{K}_3$  representa o termo de penalidade, a matriz  $[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2]$  representa todos os termos restantes que multiplicam o vetor velocidade  $\mathbf{u}$  e a matriz  $[\mathbf{P} - \mathbf{M}d\mathbf{u}/dt]$  representa todos os termos que não multiplicam o vetor velocidade.

No limite, tem-se

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\lambda} (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) + \mathbf{K}_3 \right] \mathbf{u} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\lambda} \left( \mathbf{P} - \mathbf{M} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \right] = 0 \quad (3.38)$$

Através da análise da equação acima conclui-se que para valores grandes de  $\lambda$  obtém-se  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Por outro lado, para valores pequenos de  $\lambda$  a restrição não é satisfeita adequadamente.

Para contornar este problema deve-se fazer a matriz  $\mathbf{K}_3$  singular e, por isso, não inversível, tornando o sistema indeterminado quando  $\lambda$  tende ao infinito. Entretanto, o sistema completo continua inversível e com solução única pois a matriz  $[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2]$  é não singular e a soma das duas matrizes garante a inversibilidade da matriz total  $[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \lambda \mathbf{K}_3]$  [17].

Uma maneira de garantir a singularidade da matriz  $\mathbf{K}_3$  é o emprego da chamada integração reduzida. Este nome é dado porque a integração numérica é efetuada com um grau inferior ao necessário para obter a solução exata da integral. Em outras palavras, a integração é feita com um número de pontos menor do que o necessário para a solução exata da integral.

### 3.5 Integração no Tempo

As equações (3.33) e (3.35) podem ser representadas, de maneira genérica, por

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{P} \quad (3.39)$$

Na equação acima a derivada temporal foi conservada em sua forma diferencial, enquanto que as derivadas espaciais foram substituídas por operadores discretos através da aplicação do método dos elementos finitos. Para a implementação computacional deste sistema de equações é necessária a discretização da derivada temporal. Isto é obtido através da introdução da chamada família  $\theta$  para aproximação, ou seja, a aproximação da derivada temporal é realizada por uma média ponderada entre dois intervalos de tempo consecutivos [17]:

$$\theta \dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} + (1-\theta) \dot{\mathbf{X}}_t = \frac{\mathbf{X}_{t+\Delta t} - \mathbf{X}_t}{\Delta t} \quad (3.40)$$

onde  $\dot{\mathbf{X}}_t$  é o valor da derivada temporal da variável  $\mathbf{X}$  no tempo “t”,  $\mathbf{X}_t$  é o valor da variável  $\mathbf{X}$  no tempo “t”,  $\Delta t$  é o intervalo de tempo e

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{Esquema explícito de Euler} \\ \frac{1}{2} & \text{Esquema implícito de Crank – Nicolson} \\ \frac{2}{3} & \text{Esquema de Galerkin no tempo} \\ 1 & \text{Esquema completamente implícito} \end{cases}$$

No presente trabalho emprega-se o esquema implícito de Crank-Nicolson ( $\theta = 1/2$ ).

Aplicando a aproximação (3.40) em (3.39) para os tempos ‘t’ e ‘t+Δt’, obtém-se

$$[\mathbf{M}_{t+\Delta t} + \theta \Delta t \mathbf{K}_{t+\Delta t}] \mathbf{X}_{t+\Delta t} = [\mathbf{M}_t - (1-\theta) \Delta t \mathbf{K}_t] \mathbf{X}_t + \Delta t [\theta \mathbf{P}_{t+\Delta t} + (1-\theta) \mathbf{P}_t] \quad (3.41)$$

Para o caso de acoplamento termo-mecânico, as equações de conservação de quantidade de movimento e de conservação de energia são resolvidas simultaneamente. Neste caso, a matriz

$\mathbf{K}$  das equações de conservação da quantidade de movimento dependem do campo de velocidades, através dos termos convectivos, e a viscosidade pode depender da temperatura e do campo de velocidades, através das deformações específicas. Por outro lado, a matriz  $\mathbf{K}$  da equação de conservação de energia depende do campo de velocidade, através dos termos convectivos, e pode depender da temperatura, se os coeficientes de condutividade térmica e de convecção forem dependentes da mesma.

Observe-se que os termos convectivos ( $\mathbf{K}_1$  na eq. (3.33) e  $\bar{\mathbf{K}}_1$  na eq. (3.35) ) dão origem a matrizes não-simétricas, aumentando as exigências computacionais.

Se for considerado que a massa específica ( $\rho$ ) e o calor específico (“c”) forem independentes do campo de velocidades e da temperatura, então a matriz de massa ( $\mathbf{M}$ ) é uma matriz constante.

O vetor  $\mathbf{P}$  da equação de conservação de energia depende do campo de velocidades através da taxa de trabalho mecânico que se transforma em calor.

A equação genérica (3.41) pode ser escrita sob forma compacta da seguinte maneira:

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t} \mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{G}_t \mathbf{X}_t + \Delta t \mathbf{H}_{t+\theta\Delta t} \quad (3.42)$$

onde

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t} = \mathbf{M}_{t+\Delta t} + \theta \Delta t \mathbf{K}_{t+\Delta t} \quad (3.43a)$$

$$\mathbf{G}_t = \mathbf{M}_t - (1-\theta) \Delta t \mathbf{K}_t \quad (3.43b)$$

$$\mathbf{H}_{t+\theta\Delta t} = \theta \mathbf{P}_{t+\Delta t} + (1-\theta) \mathbf{P}_t \quad (3.43c)$$

Observe-se que no caso em que  $\theta = 0$  (esquema explícito de Euler) a matriz de coeficientes ( $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$ ) é simétrica, positiva definida e de coeficientes constantes. Entretanto, os

métodos explícitos, embora mais simples, têm severas limitações quanto ao tamanho do intervalo de tempo.

Por outro lado, nos casos em que  $\theta \neq 0$  (esquemas implícitos), a matriz dos coeficientes (a ser invertida) passa a ser não simétrica e dependentes do campo de velocidades, tornando o sistema não linear. Neste caso, o sistema de equações deve ser resolvido através da aplicação de algum esquema iterativo. O esquema iterativo escolhido para o presente trabalho foi o método de Newton-Raphson modificado. As fórmulas de recorrência deste método para serem usadas durante o processo iterativo em cada intervalo de tempo são as seguintes:

$$\mathbf{F}_t \Delta \mathbf{X}_{t+\Delta t}^{i+1} = [\mathbf{G}_t \mathbf{X}_t + (1-\theta)\Delta t \mathbf{P}_t] + \theta \Delta t \mathbf{P}_{t+\Delta t}^i - \mathbf{F}_{t+\Delta t}^i \mathbf{X}_{t+\Delta t}^i \quad (3.44)$$

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{X}_{t+\Delta t}^i + \Delta \mathbf{X}_{t+\Delta t}^{i+1} \quad (3.45)$$

onde o superíndice “i” indica o número da iteração. Observe-se que o vetor  $\mathbf{H}_{t+\theta\Delta t}$  da equação (3.42) foi desmembrado para indicar que o termo entre colchetes permanece constante durante o processo iterativo.

A obtenção de  $\mathbf{X}_{t+\Delta t}$  a partir da equação (3.45) ocorre quando um determinado critério de convergência é satisfeito, podendo-se atualizar as matrizes  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{H}$  e a geometria do problema. Dois dos critérios de convergência que podem ser aplicados a este sistema de equações são os seguintes:

$$\frac{[\Delta \mathbf{X}_{t+\Delta t}^{i+1} \cdot \Delta \mathbf{X}_{t+\Delta t}^{i+1}]^{1/2}}{[\mathbf{X}_{t+\Delta t}^{i+1} \cdot \mathbf{X}_{t+\Delta t}^{i+1}]^{1/2}} \leq \text{tolerância} \quad (3.46)$$

e

$$\frac{[(\mathbf{P}_{t+\Delta t}^i - \mathbf{F}_{t+\Delta t}^i \mathbf{X}_{t+\Delta t}^i)^2]^{1/2}}{[(\mathbf{P}_{t+\Delta t}^i - \mathbf{F}_t \mathbf{X}_t)^2]^{1/2}} \leq \text{tolerância} \quad (3.47)$$

Uma terceira alternativa para determinar a convergência e para a solução de problemas não lineares utiliza um parâmetro acelerador e “line searching”. Este algoritmo encontra-se descrito no Anexo II do presente trabalho.

### 3.6 Cálculo da Pressão

O método da função de penalidade aplicado às equações que governam o problema mecânico permite eliminar a pressão como variável primária do problema, reduzindo o sistema de equações a ser resolvido. A pressão, por estar ausente do sistema de equações, deve ser calculada de alguma maneira alternativa, a partir do campo de velocidades.

Para tanto, considera-se as equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível e viscoso em regime laminar (eq. (2.10)) :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) \quad (i,j=1,2,3) \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (3.49)$$

Diferenciando-se as equações (3.48) com respeito a  $x_i$  e somando-as, obtém-se a equação de Poisson para a pressão [20] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} = & -\rho \frac{\partial}{\partial x_1} \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) - \\ & -\rho \frac{\partial}{\partial x_2} \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x_3} \left( u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \\ & + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + \\ & + \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

ou, em notação indicial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = & -\rho \frac{\partial}{\partial x_1} \left( u_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x_2} \left( u_i \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x_3} \left( u_i \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \right) + \\ & + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i^2} \right) \end{aligned} \quad (i=1,2,3) \quad (3.51)$$

onde os termos de derivadas temporais foram eliminados pela aplicação da equação da continuidade (3.49).

A formulação variacional da equação acima é obtida multiplicando-a por uma função teste, ou função peso, integrando-a sobre todo domínio  $\Omega$  e aplicando o teorema de Green, resultando na seguinte equação:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega = & - \int_{\Omega} \rho \left[ \frac{\partial \delta p}{\partial x_1} \left( u_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \delta p}{\partial x_2} \left( u_i \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \delta p}{\partial x_3} \left( u_i \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \mu \left[ \frac{\partial \delta p}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2} \right) + \frac{\partial \delta p}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2} \right) + \frac{\partial \delta p}{\partial x_3} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i^2} \right) \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \delta p \left[ \left( u_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) n_1 + \left( u_i \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) n_2 + \left( u_i \frac{\partial u_3}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) n_3 \right] d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma} \mu \delta p \left[ \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2} \right) n_1 + \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2} \right) n_2 + \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i^2} \right) n_3 \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde  $i=1,2,3$ ,  $\delta p$  é uma função teste (ou função peso) e corresponde à variação de pressão,  $n_i$  é a componente na direção do eixo  $x_i$  do vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma$  apontando para fora do domínio  $\Omega$ .

Considerando que as equações de conservação da quantidade de movimento (3.48) sejam satisfeitas à medida que se aproxima do contorno a partir do interior do domínio  $\Omega$ , pode-se reescrever a equação acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega = & - \int_{\Omega} \rho \left[ \frac{\partial \delta p}{\partial x_1} \left( u_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \delta p}{\partial x_2} \left( u_i \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \delta p}{\partial x_3} \left( u_i \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \mu \left[ \frac{\partial \delta p}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2} \right) n_1 + \frac{\partial \delta p}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2} \right) n_2 + \frac{\partial \delta p}{\partial x_3} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i^2} \right) n_3 \right] d\Omega - \\
& - \int_{\Gamma} \delta p \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} n_1 + \frac{\partial u_2}{\partial t} n_2 + \frac{\partial u_3}{\partial t} n_3 \right) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.53}$$

onde  $i=1,2,3$  e a integral de contorno envolvendo derivadas temporais (última integral da equação acima) é nula quando o contorno é rígido ou o problema é estacionário.

O uso da equação (3.53) para o cálculo da pressão exige o conhecimento da segunda derivada da velocidade nos termos viscosos, o que introduz dificuldades adicionais. A maneira como é efetuado o cálculo da segunda derivada da velocidade encontra-se descrito no Anexo III do presente trabalho.

A aplicação do método dos elementos finitos à equação (3.53) é feita de maneira similar à realizada sobre as equações de conservação da quantidade de movimento e de conservação de energia, de maneira que as variáveis são expressas em termos de funções de interpolação e valores nodais.

Observe-se que quando da utilização da descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE) para o movimento da malha, descrita no item 2.6 do presente trabalho, deve-se utilizar a velocidade convectiva nos termos convectivos da equação (3.53) (primeira integral do lado direito da igualdade).



## 4. APLICAÇÕES

### 4.1 Extrusão Sem Radiação

Analisa-se o processo de extrusão direta plana da liga Ti-6Al-4V a alta temperatura (conformação a quente - a temperatura de trabalho está acima da temperatura de recristalização). A deformação plástica ocorre, portanto, sem efeito de encruamento do material. É considerado o acoplamento termo-mecânico do processo. Não se considera perdas de calor para o ambiente.

Considera-se que a largura do problema é muito maior que a sua altura, de maneira que pode-se desprezar os efeitos causados pelas paredes laterais e o problema pode ser analisado bidimensionalmente. Observe-se, na figura 4.1, que há um plano de simetria na geometria do problema, o que permite a análise de apenas metade do domínio.

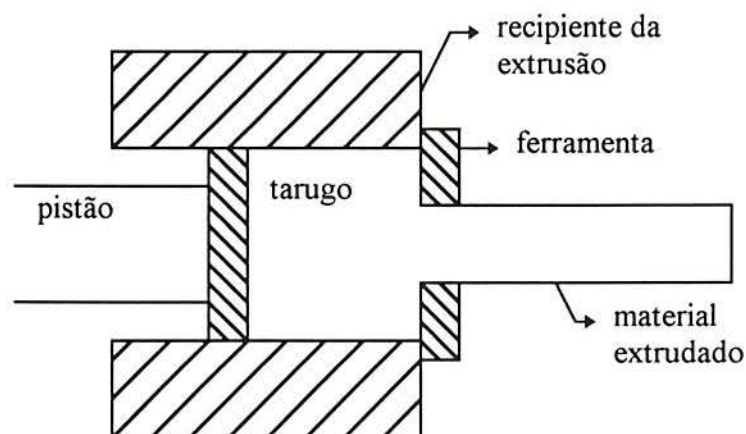


Figura 4.1 - Esquema do processo de extrusão direta.

Pode-se observar, na figura 4.2, a geometria do problema, bem como as suas condições de contorno.

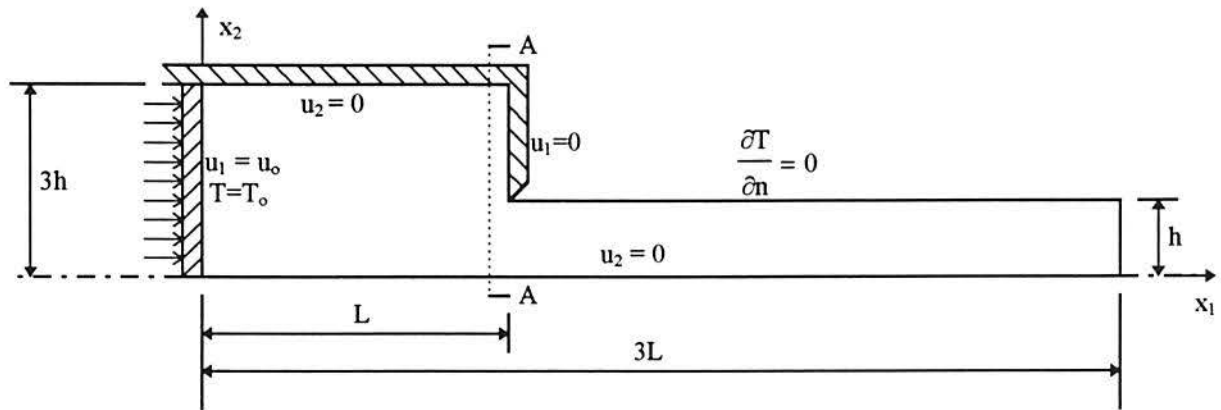


Figura 4.2 - Geometria e condições de contorno do problema de extrusão direta sem radiação.

Os dados do problema são os seguintes:

$$h = 2,5 \text{ cm}$$

$$L = 12 \text{ cm}$$

$$\text{Velocidade do pistão: } u_0 = 3,5 \text{ cm/s}$$

$$\text{Temperatura inicial: } T_0 = 1750^\circ\text{F} [1227,59 \text{ K}]$$

$$\text{Massa específica: } \rho = 4,598 \times 10^{-5} \text{ N.s}^2/\text{cm}^4$$

Propriedades térmicas:

$$\text{Coeficientes de condutividade térmica: } k_{11} = k_{22} = 1,54 \text{ cal}/(\text{cm.s.}^\circ\text{F}) [1160,6 \text{ kg.m}/(\text{s}^3.\text{K})]$$

$$\text{Calor específico: } c = 8,34 \times 10^3 \text{ cal.cm}/(\text{N.s}^2 \text{ }^\circ\text{F}) [628,5 \text{ m}^2/(\text{s}^2.\text{K})]$$

$$\text{Coeficiente de penalidade: } \lambda = 1 \times 10^8$$

$$\text{Intervalo de tempo: } \Delta t = 1 \times 10^{-1} \text{ s}$$

$$\text{Viscosidade inicial: } \mu_{\text{inicial}} = 500 \text{ N.s}/\text{cm}^2$$

Faixa de variação da viscosidade: de 100 a 500 N.s/cm<sup>2</sup>

Para o cálculo da viscosidade usou-se a seguinte expressão:

$$\mu = \frac{\sigma_y + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\gamma}\right)^{1/n}}{3\dot{\epsilon}} \quad (4.1)$$

onde

$$\dot{\gamma} = \frac{2\dot{\gamma}^1}{\sqrt{3}(\sigma_y)^n} \quad (4.2)$$

onde  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento,  $\dot{\epsilon}$  é a taxa de deformação efetiva,  $\dot{\gamma}^1$  e “n” são constantes que são calculadas por

$$\sigma_y = \begin{cases} 794 + 0,0036(T - 1500)^2 - 3,25(T - 1500) & \text{se } T \leq 1950^\circ \text{ F} \\ 61 & \text{se } T > 1950^\circ \text{ F} \end{cases}$$

$$n = \begin{cases} 8,2497 & \text{se } T \leq 1800^\circ \text{ F} \\ 8,2497 - 0,01376(T - 1800) & \text{se } 1800 \leq T \leq 2100^\circ \text{ F} \\ 4,1218 & \text{se } T \geq 2100^\circ \text{ F} \end{cases}$$

$$\dot{\gamma}^1 = \begin{cases} 0,343485 \times 10^{-8} & \text{se } T \leq 1800^\circ \text{ F} \\ 0,343485 \times 10^{-8} + 0,342532 \times 10^{-15} (T - 1500)^5 & \text{se } 1800 \leq T \leq 2100^\circ \text{ F} \\ 0,832265 \times 10^{-3} + 0,294604 \times 10^{-10} (T - 1500)^5 & \text{se } 2100 \leq T \leq 2240^\circ \text{ F} \\ 1,58535 & \text{se } T \geq 2240^\circ \text{ F} \end{cases}$$

A malha de elementos finitos é mostrada na figura 4.3. A malha consiste de 200 elementos de 4 nós cada, num total de 241 nós.

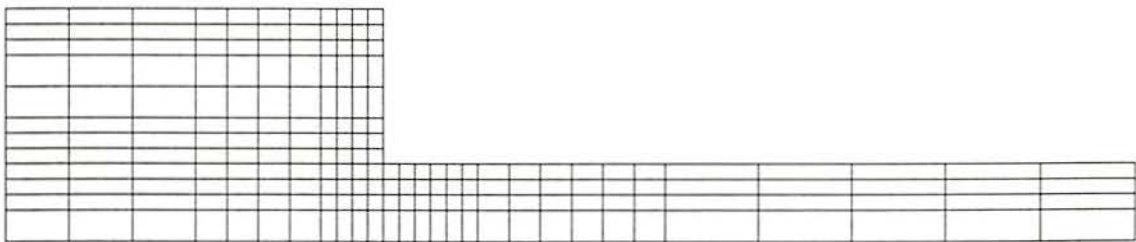


Figura 4.3 - Malha de elementos finitos formada por 241 nós e 200 elementos de 4 nós cada.

Na figura 4.4 tem-se o campo de velocidades, sob forma de vetores, no instante  $t = 20s$ . Um detalhe do campo de velocidades é mostrado na figura 4.5.

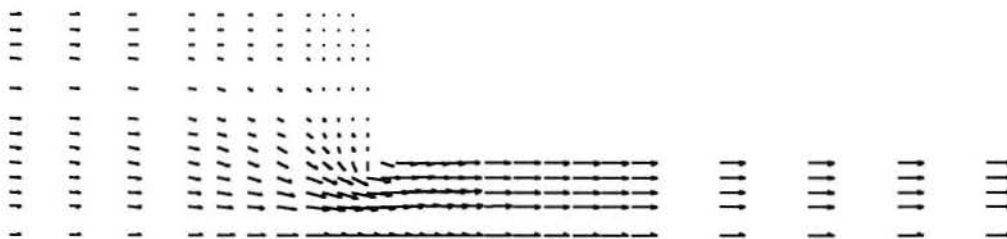


Figura 4.4 - Campo de velocidades, sob forma vetorial, no instante  $t = 20$  segundos.

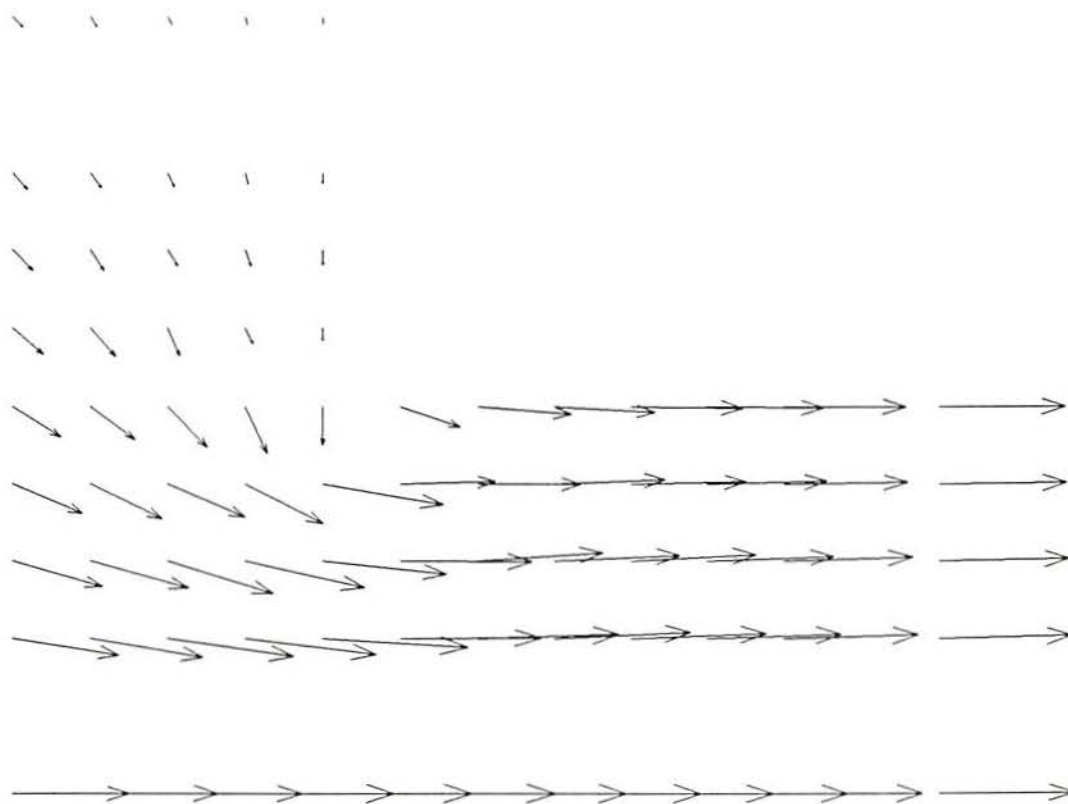


Figura 4.5 - Detalhe do campo de velocidades no instante  $t = 20$  segundos.

Nas figuras 4.6, 4.7 e 4.8 são mostradas as distribuições de temperatura, pressão e tensão equivalente, respectivamente, no instante  $t = 20$  segundos.

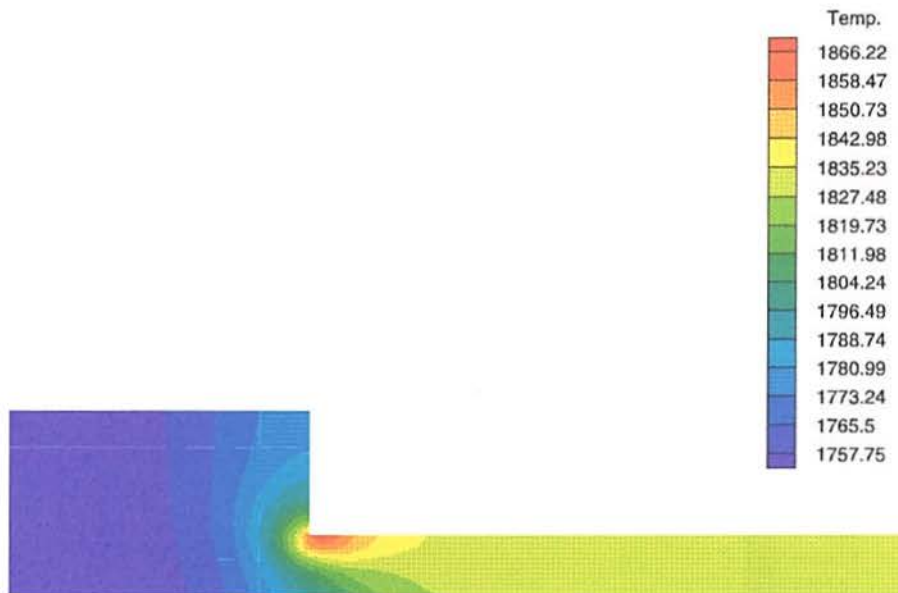


Figura 4.6 - Distribuição de temperatura (em °F) em isorregiões no instante  $t = 20$  segundos.

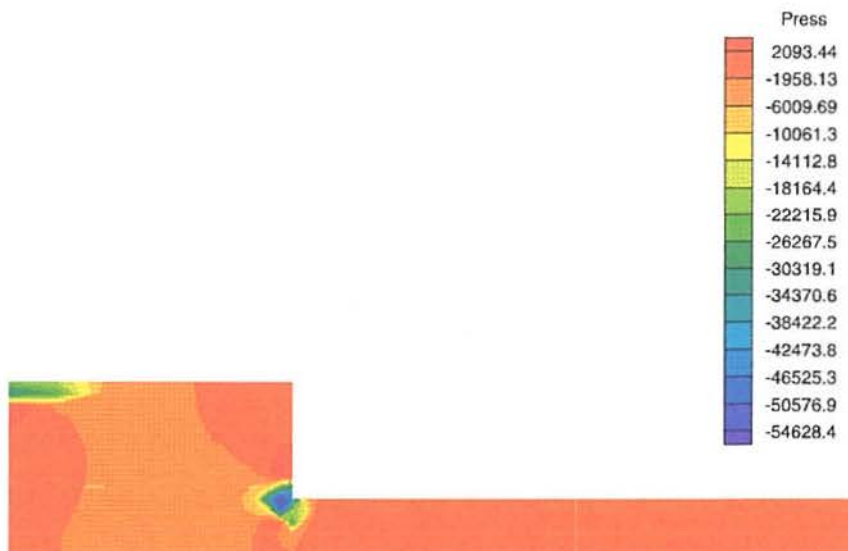


Figura 4.7 - Distribuição de pressão (em  $\text{N}/\text{cm}^2$ ) em isorregiões no instante  $t = 20$  segundos.

Observe-se que na distribuição de pressão (figura 4.7) há o surgimento de zonas (lado esquerdo) com valores de pressão inadequados para este tipo de escoamento. Estas zonas podem estar sendo geradas pelo fato da matriz utilizada para o cálculo das derivadas das velocidades e que servem para o cálculo da pressão (Anexo III) ser uma matriz reduzida. Sohn & Heinrich [20] advertem da possibilidade do uso da matriz reduzida levar a imprecisões no cálculo da pressão.

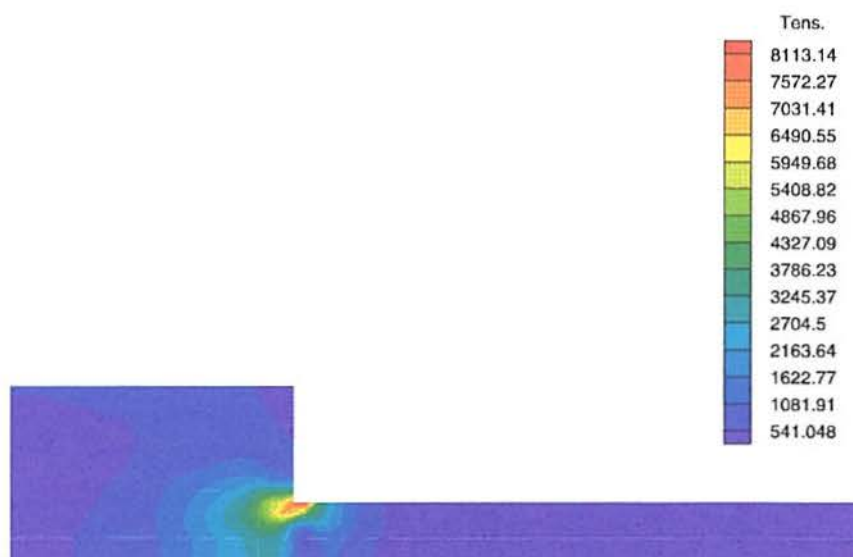


Figura 4.8 - Distribuição de tensão equivalente (em  $\text{N}/\text{cm}^2$ ) em isorregiões no instante  $t = 20$  segundos.

Na figura 4.9 é mostrada uma comparação entre o campo de velocidades calculado no presente trabalho e o campo de velocidades obtido por Zienkiewicz *et al.* [3] no corte A-A da figura 4.2, em  $x_1 = 11,5$  cm.

Na figura 4.10 mostra-se uma comparação entre a distribuição de temperatura calculada no presente trabalho e a distribuição obtida por Zienkiewicz *et al.* [3] em  $x_2 = 2,5$  cm.

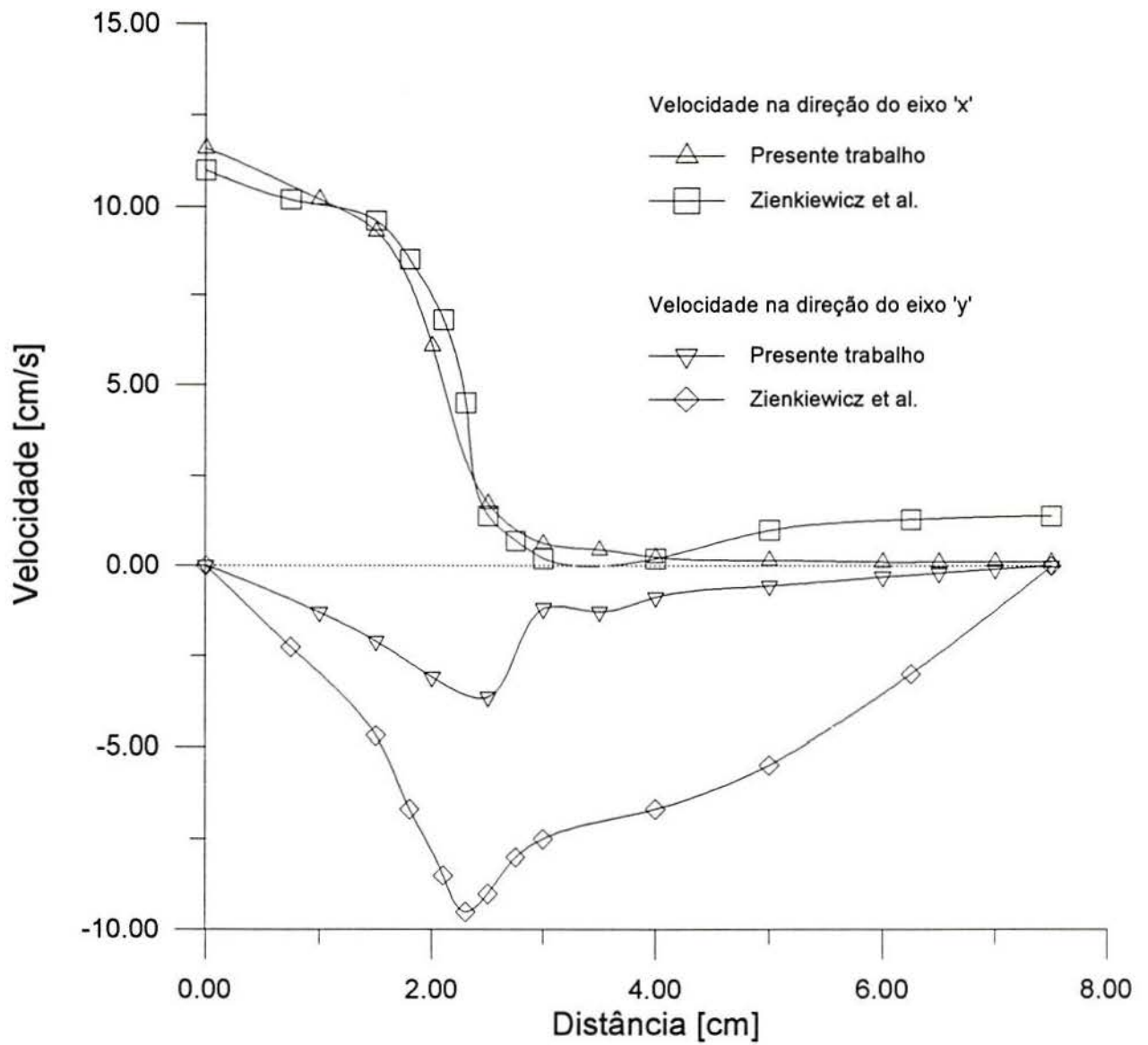


Figura 4.9 - Comparação entre o campo de velocidades calculado no presente trabalho e o campo de velocidades obtido por Zienkiewicz *et al.* [3] no corte A-A da figura 4.2, em  $x_1 = 11,5$  cm.

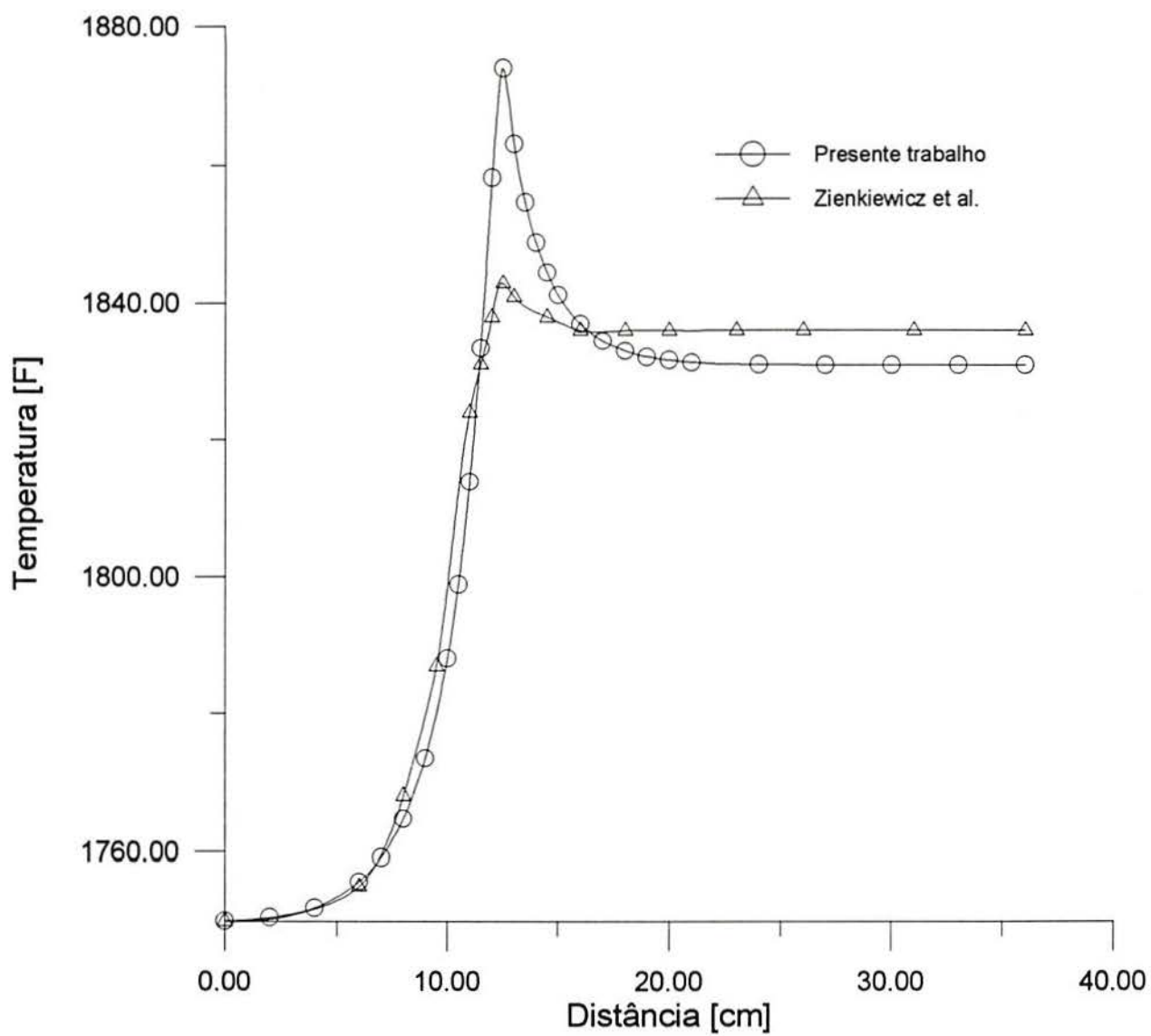


Figura 4.10 - Comparação entre a distribuição de temperatura calculada no presente trabalho e o obtido por Zienkiewicz *et al.* [3] em  $x_2 = 2,5$  cm.



## 4.2 Extrusão Com Radiação

Analisa-se o problema anterior, mas considera-se perdas de calor por radiação para o ambiente. A geometria e a malha são as mesmas utilizadas no problema anterior.

É possível observar, a partir da figura 4.2, que a única mudança ocorre em uma das condições de contorno.

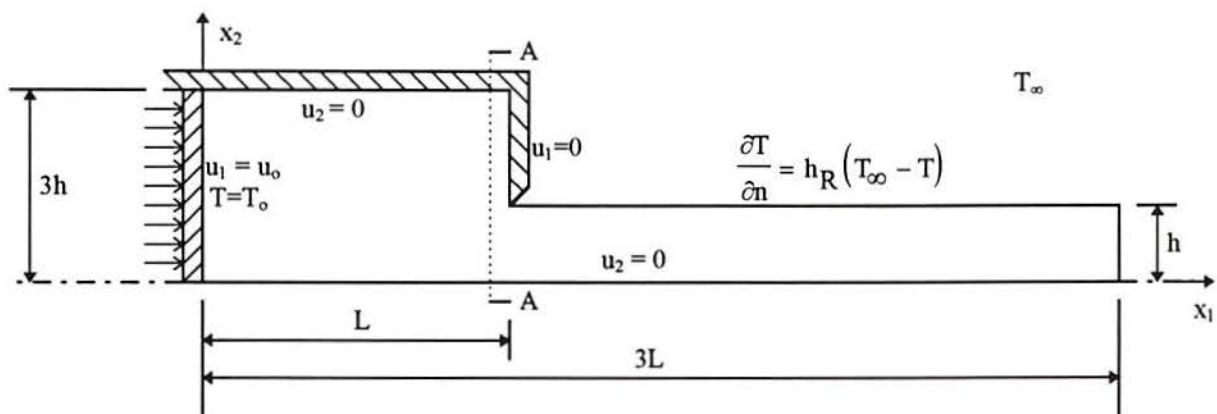


Figura 4.11 - Geometria e condições de contorno do problema de extrusão direta com perda de calor por radiação.

Os dados do problema são os seguintes:

Todos os dados do problema anterior.

Temperatura ambiental:  $T_{\infty} = 70^{\circ}\text{F}$  [294,3 K]

Constante de Stefan-Boltzman x emissividade:  $\sigma\epsilon = 1,933 \times 10^{-12}$  cal/(s.cm<sup>2</sup>.°F<sup>4</sup>) [8,5.10<sup>-7</sup> kg/(s<sup>3</sup>.K<sup>4</sup>)]

Os resultados obtidos para velocidade, pressão e tensões são os mesmos obtidos no problema anterior. Houve diferenças apenas na distribuição de temperatura.

Na figura 4.12 é mostrada a distribuição de temperatura, em isorregiões, considerando perdas de calor para o meio por radiação.

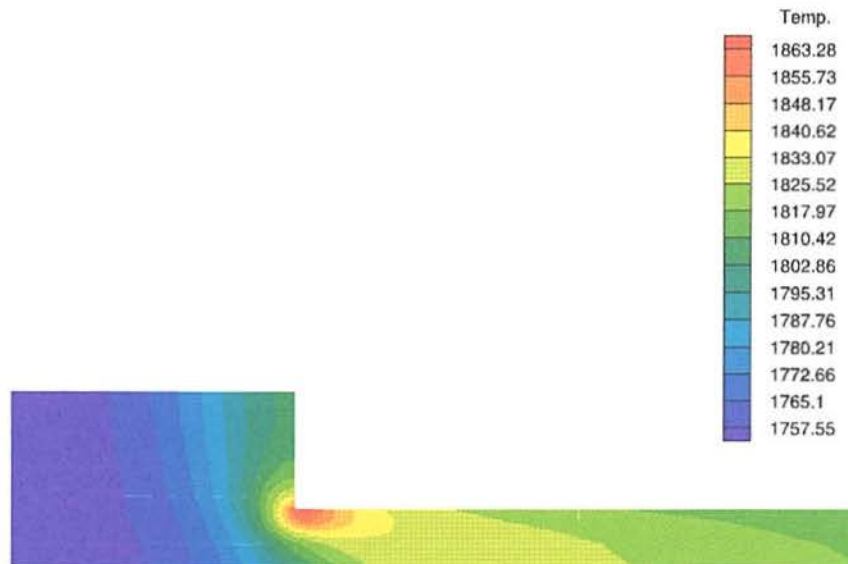


Figura 4.12 - Distribuição de temperatura (em °F) em isorregiões para o problema com perda de calor para o meio por radiação.

Na figura 4.13 é mostrada uma comparação entre a distribuição de temperatura obtida no presente trabalho e o obtido por Zienkiewicz *et al.* [3] em  $x_2 = 2,5$  cm.

Na figura 4.14 é mostrada uma comparação entre a distribuição de temperatura obtida no problema sem perda de calor por radiação e a distribuição de temperatura obtida no problema com perda de calor por radiação em  $x_2 = 2,5$  cm .

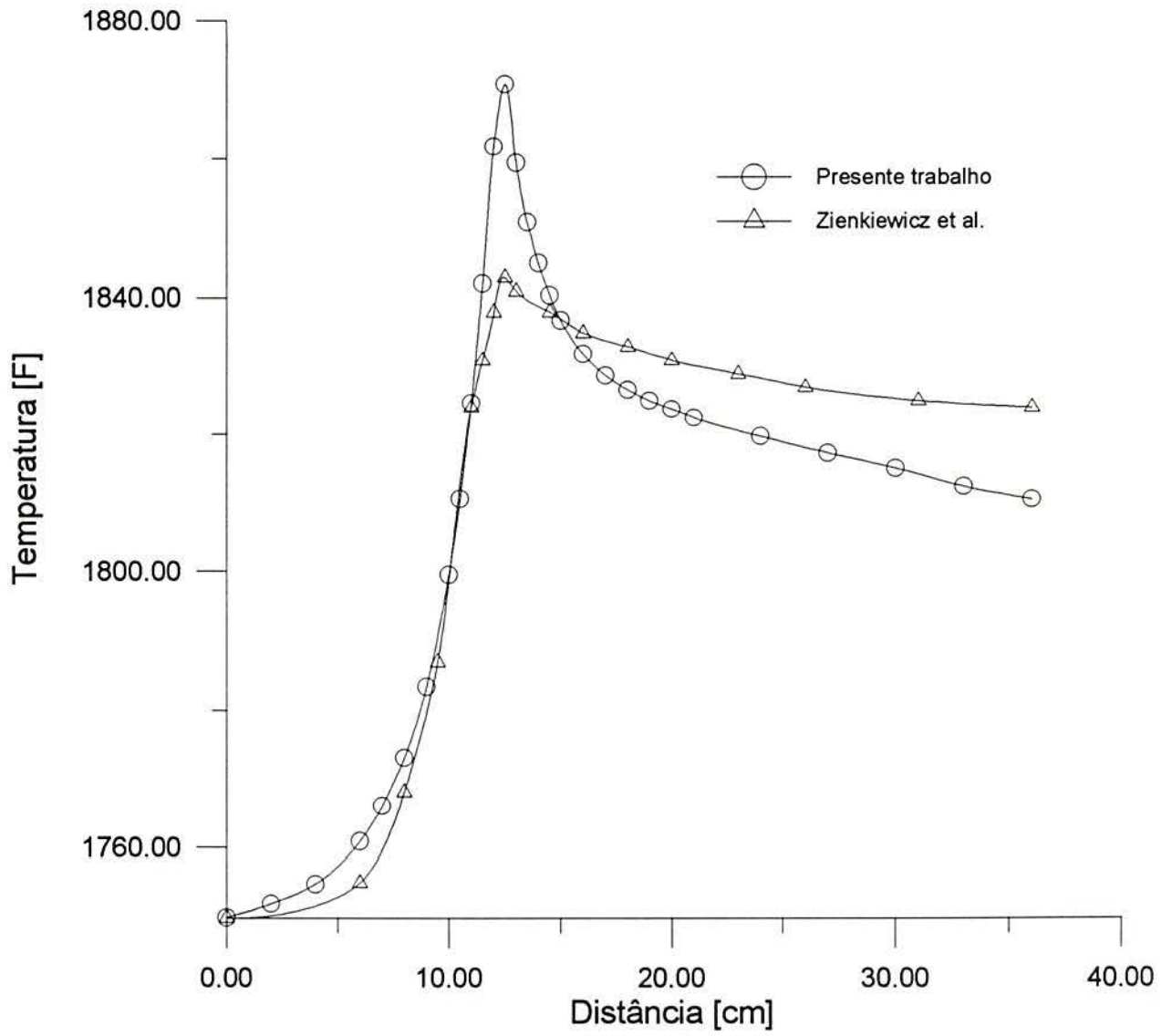


Figura 4.13 - Comparação entre a distribuição de temperatura calculada no presente trabalho e a obtida por Zienkiewicz *et al.* [3] em  $x_2 = 2,5$  cm.

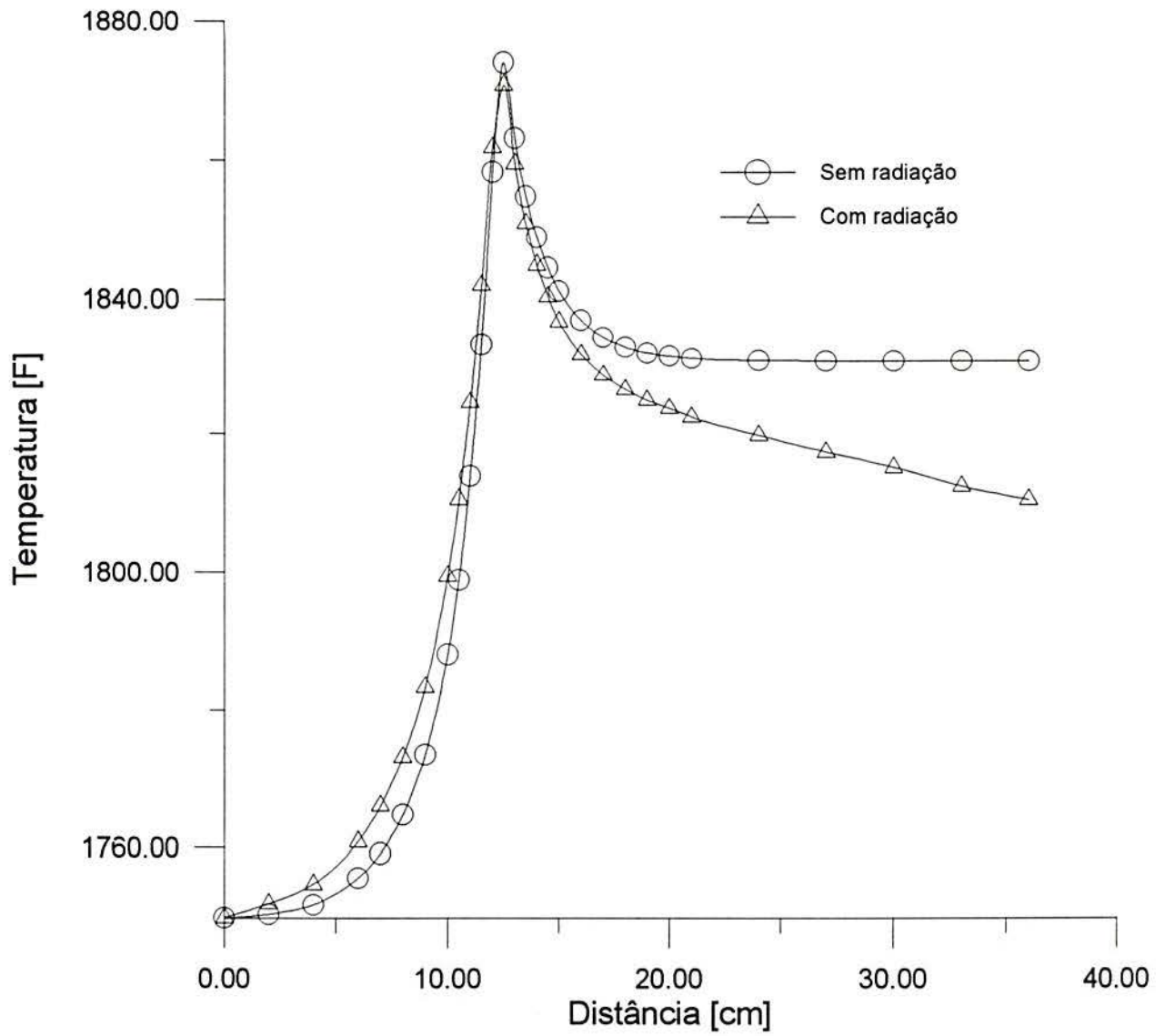


Figura 4.14 - Comparação entre a distribuição de temperatura calculada no problema sem perda de calor por radiação e a distribuição de temperatura calculada no problema com perda de calor por radiação em  $x_2 = 2,5$  cm .

### 4.3 Forjamento

Analisa-se o processo de forjamento de um cilindro circular a temperatura constante. Não é considerado, portanto, o acoplamento termo-mecânico. Não há efeitos de encruamento do material. O cilindro é comprimido até a redução de 40% de sua altura inicial.

Um esquema do processo de forjamento que este problema envolve é mostrado na figura 4.15. Observe-se que existe um eixo de simetria axial no processo, de maneira que pode-se considerar um caso axi-simétrico. Além disso, o processo também apresenta um plano de simetria, de modo que pode-se analisar apenas a área hachurada da figura 4.15 .

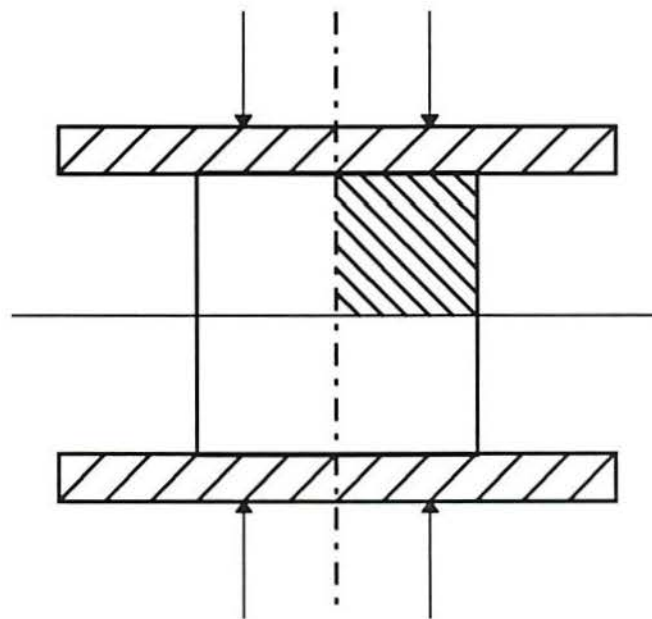


Figura 4.15 - Representação do processo de forjamento.

Observando a figura 4.15 nota-se que a peça a ser forjada (cilindro) tende a deslocar-se tangencialmente à matriz (o raio do cilindro aumenta) ou, em outras palavras, há uma velocidade relativa entre a matriz e a peça de modo que a fricção entre eles deve ser considerada.

Na figura 4.16 é mostrado a geometria e as condições de contorno do problema.

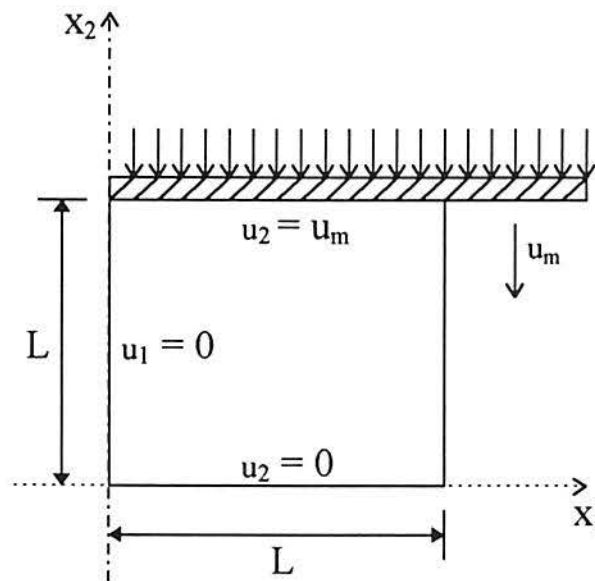


Figura 4.16 - Geometria e condições de contorno do problema. Somente a parte hachurada da figura 4.15 é representada nesta figura.

Os dados do problema são os seguintes:

$L = 1$  polegada [0,0254 m]

Velocidade da matriz:  $u_m = 1$  pol/seg. [0,254 m/s]

Massa específica:  $\rho = 6.0$  lb/pol<sup>3</sup> [166079,4 kg/m<sup>3</sup>]

Coefficiente de penalidade:  $\lambda = 1.10^5$

Intervalo de tempo:  $\Delta t = 0,001$  segundos

Redução total da altura: 40% da altura inicial do cilindro

Viscosidade inicial:  $\mu_{\text{inicial}} = 5.0$  lb/(pol.s) [89,3 kg/(m.s)]

Faixa de variação da viscosidade: 0,578 a 9,85 lb/(pol.s) [10,3 a 175,9 kg/(m.s)]

A viscosidade é calculada através da seguinte expressão:

$$\mu = \frac{\bar{\sigma}}{3\bar{\epsilon}} \quad (4.3)$$

onde

$$\bar{\sigma} = 10.0 \dot{\bar{\epsilon}}^{0.1} \quad [10^3 \text{ lbf/pol}^2] \quad \text{ou} \quad [6,89 \cdot 10^6 \text{ kg/(m.s}^2)] \quad (4.4)$$

onde  $\bar{\sigma}$  é a tensão efetiva e  $\dot{\bar{\epsilon}}$  é a taxa de deformação efetiva.

Este problema, como foi dito acima, é um problema com contato e fricção, ou seja, considera-se que o contato entre a matriz e a peça ofereça resistência ao movimento. Esta força de fricção é calculada pela seguinte expressão (apresentada no capítulo 2 do presente trabalho - item 2.5):

$$f_s = -mk \frac{\Delta u_s}{|\Delta u_s|} \cong -\frac{2}{\pi} mk \tan^{-1} \left( \frac{\Delta u_s}{u_0} \right) \quad (4.5)$$

onde

$f_s$  = força de fricção

$m$  = fator de fricção = 0,5

$k$  = tensão de cisalhamento local =  $\frac{\sqrt{3}\bar{\sigma}}{3}$  ( $\bar{\sigma}$  é a tensão efetiva)

$\Delta u_s$  = diferença entre a velocidade tangencial da matriz e a velocidade tangencial da peça

$u_0$  = número pequeno comparado a  $\Delta u_s = 1 \cdot 10^{-4}$

Na figura 4.17 é mostrada a evolução da compressão do cilindro através da visualização da malha de elementos finitos no instante inicial (redução nula), para o instante  $t = 0,2s$  (redução de 20% da altura) e para o instante final,  $t = 0,4s$ , (redução de 40% da altura). A malha de elementos finitos utilizada neste trabalho contém 121 nós e 100 elementos de 4 nós cada.

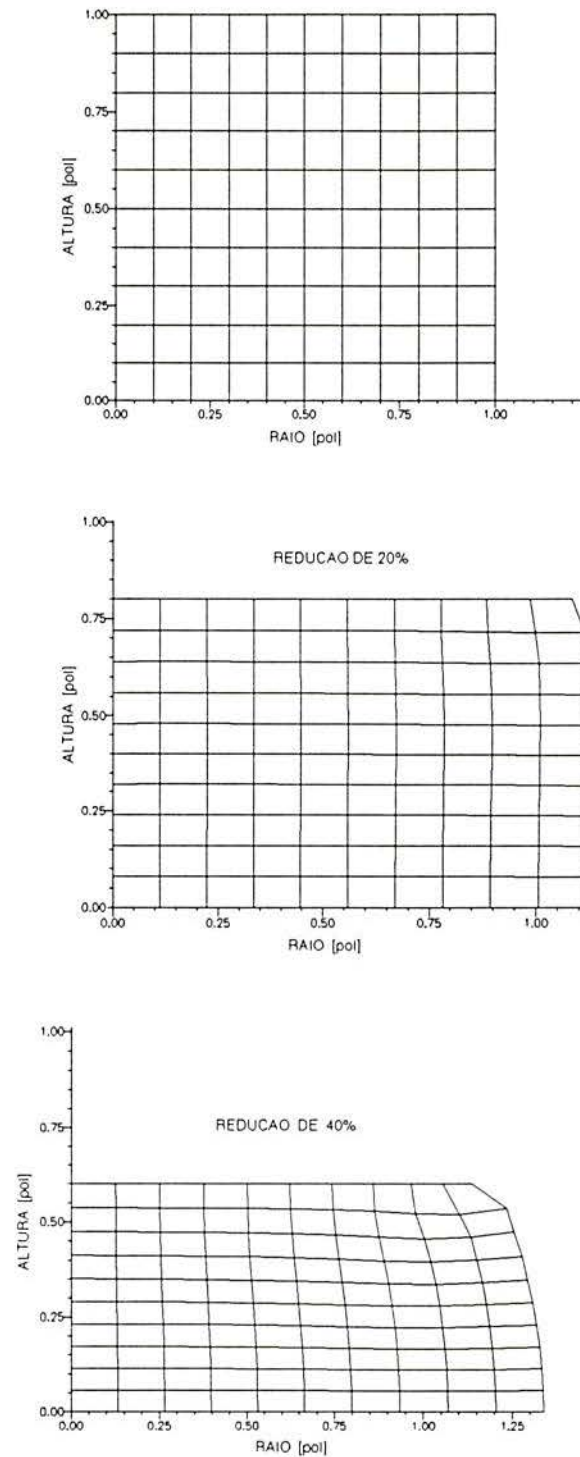


Figura 4.17 - Evolução da compressão do cilindro através da visualização da malha de elementos finitos nos instante  $t = 0$  (malha inicial),  $t = 0,2$  s (redução de 20% da altura) e  $t = 0,4$  s (redução de 40% da altura).

Na figura 4.18 é mostrado o campo de velocidades, sob forma de vetores, no instante final da compressão ( $t = 0,4$ s - redução de 40% da altura).



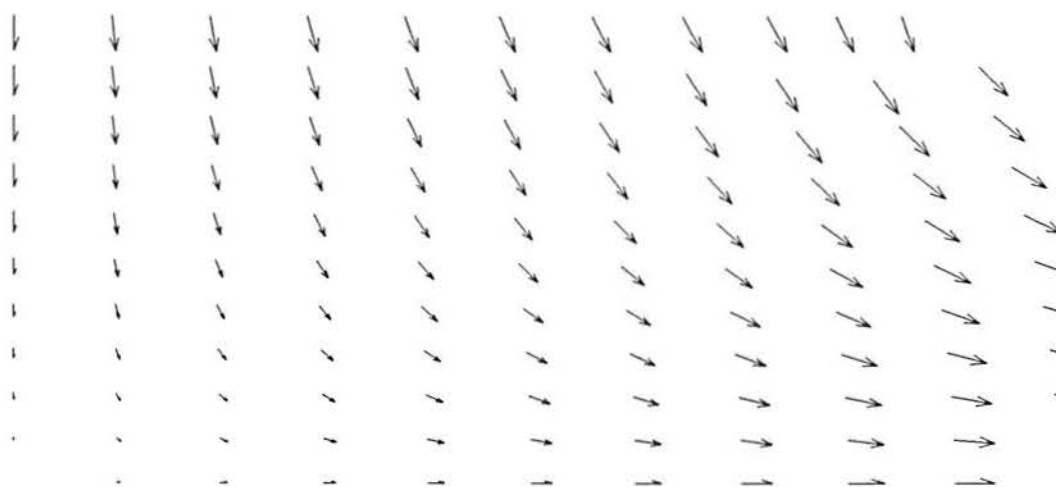


Figura 4.18 - Campo de velocidades do cilindro no instante final da compressão ( $t = 0,4s$  - redução de 40% da altura inicial do cilindro).

Na figura 4.19 é mostrada a distribuição de pressão no instante  $t = 0,4s$  (redução de 40% da altura inicial do cilindro).

Na figura 4.20 tem-se a distribuição de tensão equivalente no instante  $t = 0,4s$  (redução de 40% da altura inicial do cilindro).

Na figura 4.21 apresenta-se uma comparação entre a compressão do cilindro calculada no presente trabalho e a compressão do cilindro obtida por Kobayashi *et al.* [2] através da visualização das respectivas malhas de elementos finitos no instante  $t = 0,4s$  (redução de 40% da altura inicial do cilindro).

Na figura 4.22 apresenta-se uma comparação entre o campo de velocidades calculado no presente trabalho e o campo de velocidades obtido por Kobayashi *et al.* [2], sob forma de vetores, no instante  $t = 0,4s$  (redução de 40% da altura inicial do cilindro).

Na figura 4.23 apresenta-se uma comparação entre a compressão do cilindro calculada no presente trabalho e a compressão do cilindro obtida pelo software CAPS-FINEL através da visualização das respectivas malhas de elementos finitos no instante  $t = 0,4s$  (redução de 40% da altura inicial do cilindro).



Figura 4.19 - Distribuição de pressão (em  $\text{lbf/pol}^2$ ) no instante  $t = 0,4\text{s}$  (redução de 40% da altura inicial do cilindro).



Figura 4.20 - Distribuição de tensão equivalente (em  $\text{lbf/pol}^2$ ) no instante  $t = 0,4\text{s}$  (redução de 40% da altura inicial do cilindro).

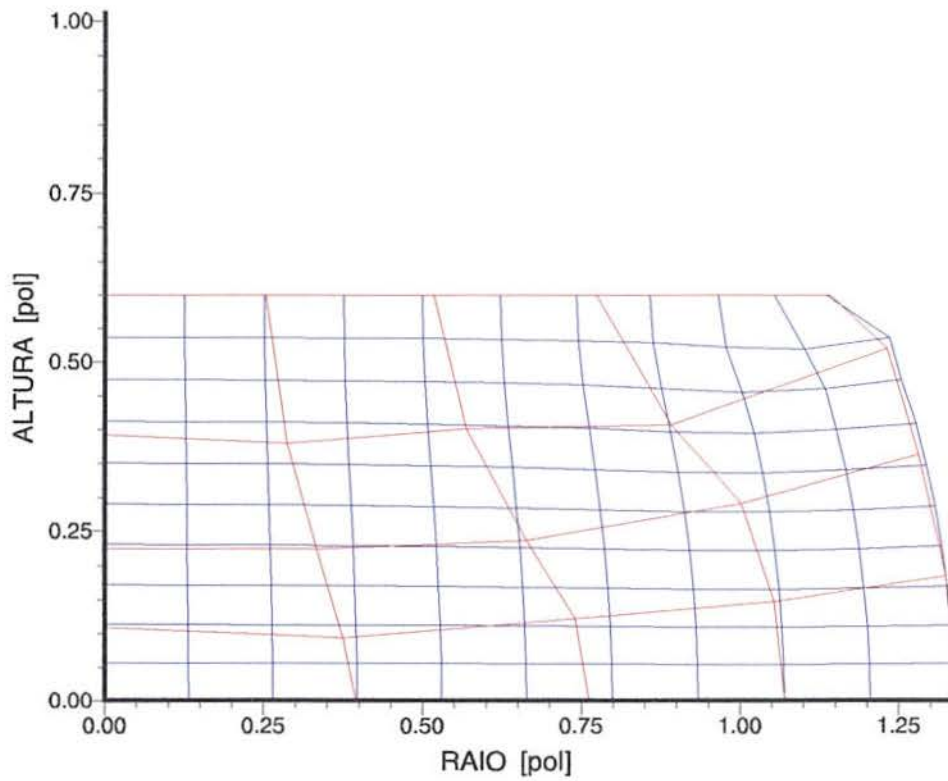


Figura 4.21 - Comparação entre a malha de elementos finitos calculada no presente trabalho (azul) e a malha de elementos finitos obtida por Kobayashi *et al.* [2] (vermelho) no instante  $t = 0,4s$  (redução de 40% da altura inicial do cilindro).

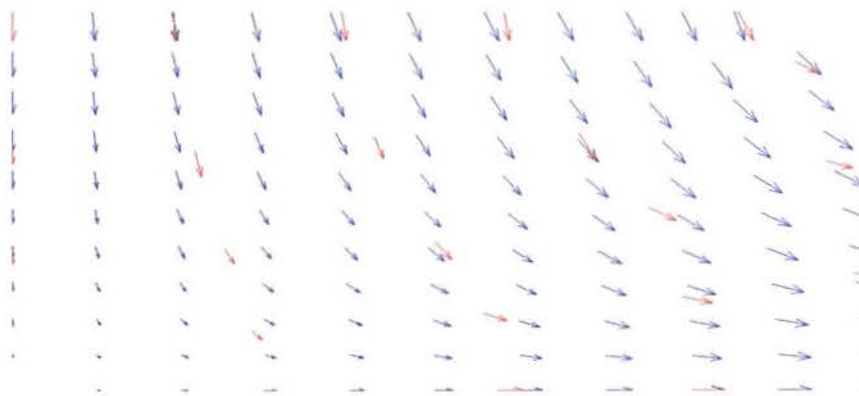


Figura 4.22 - Comparação entre o campo de velocidades calculado no presente trabalho (azul) e o campo de velocidades obtido por Kobayashi *et al.* [2] (vermelho) no instante  $t = 0,4s$  (redução de 40% na altura inicial do cilindro).

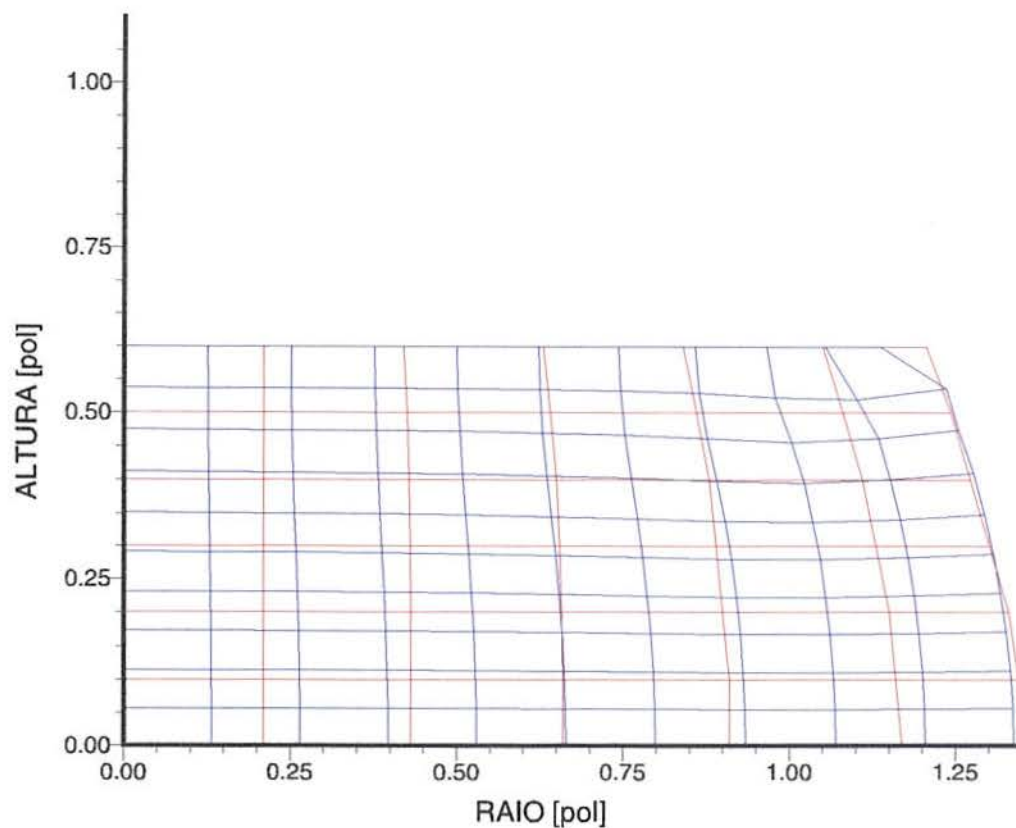


Figura 4.23 - Comparação entre a malha de elementos finitos calculada no presente trabalho (azul) e a malha de elementos finitos obtida pelo software CAPS-FINEL<sup>3</sup> (vermelho) no instante  $t = 0,4s$  (redução de 40% da altura inicial do cilindro).

<sup>3</sup> CAPS-FINEL, CPM GmbH, Herzogenrath, Alemanha: Software alemão para cálculo de problemas de conformação mecânica. Os resultados obtidos por este software e apresentados no presente trabalho foram gerados no Centro de Tecnologia da UFRGS através da colaboração do Prof. Dr. Lirio Schaeffer.

## 5. CONCLUSÃO

### 5.1 Conclusões

A partir dos resultados obtidos com as aplicações e com as comparações feitas com os resultados das referências é possível dizer que a utilização do método dos elementos finitos utilizando o método da função de penalidade é apropriado para a simulação de processos de conformação mecânica.

Entretanto, os resultados considerados bons dão-se apenas no cálculo das chamadas variáveis primárias (velocidade e temperatura), que são calculadas diretamente pelos sistemas de equações formado pelas equações da conservação da quantidade de movimento e pela equação da conservação da energia.

Observando-se as distribuições de pressão das aplicações testadas neste trabalho, constata-se que aparecem resultados indesejados. Isto pode dever-se ao fato da matriz de massa utilizada para o cálculo da derivada da velocidade ser uma matriz diagonalizada. Sohn & Heinrich [20] já advertem da possibilidade da matriz de massa diagonalizada levar à perda de precisão.

O método Lagrangiano-Euleriano arbitrário (ALE) utilizado para descrever o movimento da malha de elementos finitos foi introduzido no algoritmo do presente trabalho objetivando solucionar problemas onde a descrição Lagrangiana não pudesse ser empregada. Entretanto, para o exemplo de movimento de malha de elementos finitos apresentado no presente trabalho (ex. 3 - item 4.3), a descrição Lagrangiana mostrou-se eficiente e apropriada, dispensando a necessidade da substituição desta descrição pela do método ALE.

O principal problema encontrado durante o desenvolvimento do presente trabalho foi a grande instabilidade numérica do algoritmo causada pela variação da viscosidade dinâmica ( $\mu$ ) a cada iteração. Para que o algoritmo pudesse convergir para uma solução, os novos valores calculados a cada iteração para a viscosidade dinâmica ficaram limitados a uma pequena faixa de variação (entre um valor mínimo e um valor máximo de viscosidade dinâmica previamente determinados e fixos durante toda a execução desse algoritmo).

## 5.2 Sugestões Para Trabalhos Futuros

Estender o programa para solução de problemas tridimensionais, o que aumenta as exigências computacionais e pode exigir, por essa razão, a mudança do método de solução.

Aplicar o algoritmo a outros processos de conformação mecânica, principalmente a processos com outro tipo de esforço dominante.. Nos processos simulados no presente trabalho (extrusão direta e do forjamento) apenas um tipo de esforço dominante foi apresentado: esforço de compressão.

Para o cálculo da pressão deve-se utilizar a matriz de massa padrão (não diagonalizada), como recomenda Sohn & Heinrich [20].

Testar a descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE) em problemas que causem maiores deformações na malha de elementos finitos e em que a descrição Lagrangiana não ofereça resultados satisfatórios, devido à excessiva distorção da malha.

## **ANEXOS**

## ANEXO I

Este anexo descreve a formulação do problema em coordenadas cilíndricas e, a partir desta, a formulação para o caso axi-simétrico [12]:

1) Coordenadas cilíndricas  $(r, z, \theta)$ :

- Equações de conservação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_r}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \mu \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = f_r \end{aligned} \quad (\text{I.1a})$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \mu \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) - \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} = f_z \end{aligned} \quad (\text{I.1b})$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) - \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) = f_\theta \end{aligned} \quad (\text{I.1c})$$

- Equação da conservação de massa:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = 0 \quad (\text{I.2})$$

- Equação da conservação de energia:



$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( k_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k_{\theta\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \frac{k_r}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = Q + W \quad (I.3)$$

As equações (I.1a) a (I.1c) e (I.2) correspondem ao escoamento de um fluido newtoniano incompressível e massa específica ( $\rho$ ) constante.

As tensões em coordenadas cilíndricas vêm dadas por:

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (I.4a)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (I.4b)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \right] \quad (I.4c)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (I.4d)$$

$$\tau_{\theta z} = \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \quad (I.4e)$$

$$\tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (I.4f)$$

2) Caso axi-simétrico ( $r, z$ ):

- Equações da conservação da quantidade de movimento:

$$\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_r}{r} \right) = f_r \quad (\text{I.5a})$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} = f_z \quad (\text{I.5b})$$

- Equação da conservação de massa:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0 \quad (\text{I.6})$$

- Equação da conservação de energia:

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( k_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{k_r}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = Q + W \quad (\text{I.7})$$

As tensões para o caso axi-simétrico ficam:

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (\text{I.8a})$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{I.8b})$$

$$\tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (\text{I.8c})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu \frac{u_r}{r} \quad (\text{I.8d})$$

Observe-se que, a menos de (I.8d), as tensões têm a mesma forma que num problema bidimensional. Além de  $\dot{\epsilon}_{rr}$ ,  $\dot{\epsilon}_{zz}$  e  $\dot{\epsilon}_{rz}$  existe uma taxa de deformação  $\dot{\epsilon}_{\theta\theta}$  que vem dada por:

$$\dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (I.9)$$

## ANEXO II

Algoritmo apresentado por Awruch [12] para a solução de um sistema de equações não lineares do tipo da equação (3.44). Este algoritmo utiliza um parâmetro acelerador e “line searching”.

Os passos deste algoritmo, dentro de um intervalo de tempo, são os seguintes:

1  $t = t_{\text{anterior}} + \Delta t$  ; se  $t > t_{\text{max}}$  ir ao passo 14.

2 Calcular

$$\bar{\mathbf{K}}_t \Delta \mathbf{X}_{t+\Delta t}^{i+1} = \bar{\mathbf{P}}_t + \theta \Delta t \mathbf{P}_{t+\Delta t}^i - \mathbf{K}_{t+\Delta t}^i \mathbf{X}_{t+\Delta t}^i = \Delta \bar{\mathbf{P}}_{t+\Delta t}^i$$

onde

$$\bar{\mathbf{K}}_t = \mathbf{M}_t + \theta \Delta t \mathbf{K}_t$$

$$\bar{\mathbf{P}}_t = [\mathbf{M}_t - (1-\theta)\Delta t \mathbf{K}_t] \mathbf{X}_t + (1-\theta)\Delta t \mathbf{P}_t$$

sendo que  $\bar{\mathbf{P}}_t$  deve ser calculado uma única vez em todo processo iterativo.

3 Se  $i = 0$  fazer  $A_i = 1.0$  (onde  $A_i = \text{acelerador}$ )

Se  $i \neq 0$  fazer  $A_i = -\frac{S_0}{S_1 - S_0}$  (onde  $A_i = \text{acelerador}$ )

4 Calcular:  $S_0 = (\Delta \mathbf{X}_{t+\Delta t}^{i+1})^T (\Delta \bar{\mathbf{P}}_{t+\Delta t}^i)$

Fazer:  $\eta = 1$  (comprimento do passo) e  $LI = 0$  (contador de “line searching”).

5 Calcular:  $\mathbf{X}_{t+\Delta t}^i = \mathbf{X}_{t+\Delta t}^i + A_i \eta_i \mathbf{X}_{t+\Delta t}^{i+1}$

6     Calcular:      $\Delta \bar{\mathbf{P}}_{t+\Delta t}^{i+1} = \bar{\mathbf{P}}_t + \theta \Delta t \mathbf{P}_{t+\Delta t}^{i+1} - \mathbf{K}_{t+\Delta t}^{i+1} \mathbf{X}_{t+\Delta t}^{i+1}$

7     Calcular:      $\frac{\|\Delta \bar{\mathbf{P}}_{t+\Delta t}^{i+1}\|}{\|\Delta \bar{\mathbf{P}}_{t+\Delta t}^i\|} = B$

8     Se  $B \leq$  tolerância, a convergência foi atingida, voltar ao passo 1.

Se  $B >$  tolerância, ir ao passo 9.

9     Calcular:

$$S_1 = (\Delta \mathbf{X}_{t+\Delta t}^{i+1})^T (\Delta \bar{\mathbf{P}}_{t+\Delta t}^{i+1})$$

$$\psi = \frac{S_1}{S_0}$$

10    Se  $\psi < \varepsilon$  (tolerância de “line searching”) fazer  $i = i+1$  e ir ao passo 2.

Se  $\psi \geq \varepsilon$  verificar o contador de “line searching”, sendo que se  $LI = LMAX$  (limite do contador) deve-se ir ao passo 2, em caso contrário ir ao passo 11.

11    Calcular:  $\phi = \frac{-S_0}{S_1 - S_0}$  ;     se  $\phi > 10$  fazer  $\phi = 10$ .

12    Calcular:      $LI = LI + 1$  (contador de “line searching”)

$$\eta_i = \phi \eta_i \text{ (comprimento do passo)}$$

13    Ir ao passo 5.

14    Fim do processo.

## ANEXO III

Este anexo contém a descrição do cálculo da segunda derivada do campo de velocidades necessária para a obtenção da pressão segundo a equação (3.53).

A solução da equação (3.53) para a obtenção da pressão exige o conhecimento da segunda derivada do campo de velocidades, o que introduz dificuldades adicionais ao problema. Para contornar esta dificuldade, Sohn & Heinrich [21] apresentaram um esquema baseado na aproximação da primeira derivada da velocidade por mínimos quadrados usando interpolação bilinear. Para tanto, define-se

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \sum_i N^i a_1^i \quad (\text{II.1a})$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \sum_i N^i a_2^i \quad (\text{II.1b})$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \sum_i N^i a_3^i \quad (\text{II.1c})$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \sum_i N^i b_1^i \quad (\text{II.1d})$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \sum_i N^i b_2^i \quad (\text{II.1e})$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \sum_i N^i b_3^i \quad (\text{II.1f})$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \sum_i N^i c_1^i \quad (\text{II.1g})$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \sum_i N^i c_2^i \quad (\text{II.1h})$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \sum_i N^i c_3^i \quad (\text{II.1i})$$

onde  $a_1^i = (\partial u_1 / \partial x_1)^i$ , etc, são os valores das derivadas no nó “i” e as funções  $N^i$  são as funções teste bilineares. “n” é o número de pontos nodais.

Considere-se, agora, que  $\bar{u}_1$  sejam as aproximações por elementos finitos das componentes da velocidade  $u_1$  usando elementos bilineares, ou seja,

$$\bar{u}_1 = \sum_i N^i u_1^i \quad (i=1, \dots, n) \quad (\text{II.2})$$

A aproximação por mínimos quadrados para as derivadas de  $u_1$  com respeito a  $x_1$  é obtida minimizando-se o funcional

$$J_a = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \right)^2 d\Omega = \int_{\Omega} \left( \sum_i N^i a_1^i - \sum_i \frac{\partial N^i}{\partial x_1} u_1^i \right)^2 d\Omega \quad (i=1, \dots, n) \quad (\text{II.3})$$

A equação de Euler para a expressão acima fica

$$\frac{\partial J_a}{\partial a_1} = 2 \int_{\Omega} N^i \left( \sum_j N^j a_1^j - \sum_j \frac{\partial N^j}{\partial x_1} u_1^j \right) d\Omega = 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (\text{II.4})$$

que leva a um sistema de equações da forma

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_1 = \mathbf{F} \quad (\text{II.5})$$

onde

$$\mathbf{M} = [m_{ij}] = \left[ \int_{\Omega} N^i N^j d\Omega \right] \quad (i,j=1, \dots, n) \quad (\text{II.6})$$

e

$$\mathbf{F} = [f_i] = \left[ \int_{\Omega} \left( N^i \sum_j \frac{\partial N^j}{\partial x_1} u_1^j \right) d\Omega \right] \quad (i,j=1, \dots, n) \quad (\text{II.7})$$

A solução do sistema de equações (II.5) fornece o vetor  $\mathbf{a}_1$  que contém as primeiras derivadas de  $u_1$  nos pontos nodais.

Finalmente, a segunda derivada de  $u_1$  com respeito a  $x_1$  é obtida diretamente pela diferenciação da equação (II.1a), ou seja,

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \sum_i \frac{\partial N^i}{\partial x_1} a_1^i \quad (i=1, \dots, n) \quad (\text{II.8})$$

O mesmo procedimento pode ser usado para obter as aproximações das outras oito derivadas parciais de segunda ordem (eq. (II.1b) a (II.1i)).



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LANGE, C. F., **Simulação de Escoamentos Incompressíveis Não-Isotérmicos pelo Método de Elementos Finitos com Função de Penalidade**, Dissertação para Obtenção do Título de Mestre em Engenharia, PROMEC/UFRGS, Porto Alegre, 1992, 109p.
- [2] KOBAYASHI, S.; OH, S. & ALTAN, T., **Metal Forming and the Finite-Element Method**, Oxford University Press, New York, 1989, 377p.
- [3] ZIENKIEWICZ, O. C.; OÑATE, E. & HEINRICH, J. C., 'A General Formulation for Coupled Thermal Flow of Metals Using Finite Elements', **Int. J. Num. Meth. Eng.**, V.17, pp.1497-1514, 1981.
- [4] LEE, C. H., & KOBAYASHI, S., New Solutions to Rigid Plastic Deformation Problem Using a Matrix Method, **J. Eng. for Ind.**, Trans. ASME, V.95, pp.865-873, 1973.
- [5] ZIENKIEWICZ, O. C., & GODBOLE, P. N., 'Flow of Plastic and Viscoplastic Solids with Special Reference to Extrusion and Forming Processes', **Int. J. Num. Meth. in Eng.**, V.8, pp.3-16, 1974.
- [6] OH, S.I., 'Finite Element Analysis of Metal Forming Processes with Arbitrarily Shaped Dies', **Int. J. Mech. Sci.**, V.24, N° 8, pp.479-493, 1982.
- [7] ODEN, J. T.; BHANDARI, D. R.; YAGEWA, G., & CHUNG, T. J., 'A New Approach to the Finite Element Formulation and Solution of a Class of Problems in Coupled Thermo-elasto-viscoplasticity of Solids', **Nuclear Eng. and Design**, V.24, p.420, 1973.
- [8] DATSKO, J., **Material Properties and Manufacturing Processes**, John Wiley & Sons., Inc., 1966, 543p.
- [9] CHIAVERINI, V., **Tecnologia Mecânica - Processos de Fabricação e Tratamento**, McGraw Hill, Vol. 2, 2.ed., 1986, 315p.
- [10] BRESCIANI FILHO, E.; ZAVAGLIA, C. A. C.; BUTTON, S. T.; GOMES, E. & NERY, F. A. C., **Conformação Plástica dos Metais**, Editora de UNICAMP, 4.ed., Campinas (SP), 1991, 385p.
- [11] SCHAEFFER, L., **Introdução à Conformação Mecânica dos Metais**, Ed. da UFRGS, 1983, 125p.
- [12] AWRUCH, A. M., **Sobre a Simulação Numérica de Processos de Conformação Usando o Método dos Elementos Finitos com um Material Representado por um Fluido Não Newtoniano**, Departamento de Metalurgia e PPGEMM, Caderno Técnico N° 1, Parte I, 1990, 66p.

- [13] ZIENKIEWICZ, O. C., 'Flow Formulation for Numerical Solution of Forming Processes', In: **Numerical Analysis of Forming Process**, PITTMAN, J. F. T.; WIENKIEWICZ, O. C.; WOOD, R. D. & ALEXANDER, J. M. (Editors), John Wiley & Sons Ltd., Cap. 1, p.1, 1984.
- [14] SCHLICHTING, H., **Boundary-Layer Theory**, McGraw Hill, Inc., 6.Ed., 1968, 747p.
- [15] RAMASWAMY, B. & KAWAHARA, M., 'Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Unsteady, Convective, Incompressible Viscous Free Surface Fluid Flow', In: **Finite Element in Fluids**, GALLAGHER, R. H.; GLOWINSKI, R.; GRESHO, P. M.; ODEN, J. T. & ZIENKIEWICZ, O. C. (Editors), John Wiley & Sons Ltd., V. 7, Cap. 4, pp.65-87, 1987.
- [16] ERICHSEN, R., **Análise Numérica de Processos de Conformação Mecânica Via uma Formulação de Escoamento**, Dissertação para Obtenção do Título de Mestre em Engenharia, PROMEC/UFRGS, 1995, 111p.
- [17] REDDY, J. N., **An Introduction to the Finite Element Method**, McGraw Hill, Inc., 1984, 495p.
- [18] NAKAZAWA, S.; PITTMAN, J. F. T. & ZIENKIEWICZ, O. C., 'Numerical Solution of Flow and Heat Transfer in Polymer Melts', In: **Finite Element in Fluids**, GALLAGHER, R. H.; NORRIE, D. H.; ODEN, J. T. & ZIENKIEWICZ, O. C. (Editors), John Wiley & Sons, V.4, Cap.13, p.257., 1982.
- [19] CAREY, G. T. & ODEN, J. T., **Finite Elements: A Second Course**, Prentice-Hall, Inc., V.2, 1983, 301p.
- [20] SOHN, J. L. & HEINRICH, J. C. 'A Poisson Equation Formulation for Pressure Calculations in Penalty Finite Element Models for Viscous Incompressible Flows', **Int. J. for Num. Meth. in Eng.**, John Wiley & sons., V. 30, pp.349-361, 1990.