

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Gráficos de Curvatura Média Constante em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  com  
Bordo em Planos Paralelos**

Dissertação de Mestrado

LUIZ FELIPE LICKS PEREIRA

Porto Alegre, 28 de julho de 2016

### **Resumo**

Neste trabalho apresentamos condições suficientes para a existência de gráficos de curvatura média constante (CMC) com bordo em dois planos paralelos. Também são feitas estimativas para a altura de superfícies CMC com vetor normal orientado para fora limitadas por um cilindro ou horocilindro.

**Palavras-chave:** Curvatura média, superfícies, geometria, variedade riemanniana.

### **Abstract**

In this work we present sufficient existence conditions for constant mean curvature (CMC) graphs with boundary in two parallel planes. We also make height estimates for outwards-oriented CMC surfaces bounded by a cylinder or horocylinder.

**Keywords:** Mean curvature, surfaces, geometry, riemannian manifold.

# Conteúdo

<b>1 Prelúdio</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 O Problema . . . . .	3
1.3 Teoremas . . . . .	5
<b>2 Geometria do Problema</b>	<b>7</b>
2.1 Campos de Jacobi . . . . .	7
2.2 Laplaciano da Distância em $\mathbb{H}^2$ . . . . .	11
2.3 Equação da Curvatura Média . . . . .	13
<b>3 Ferramentas</b>	<b>16</b>
3.1 Superfícies de Revolução . . . . .	16
3.1.1 Calota Esférica com $H \geq 1/2$ . . . . .	18
3.1.2 Catenóides . . . . .	19
3.1.3 Horonodóides e Horocatenóides . . . . .	19
3.1.4 Mais Propriedades . . . . .	21
3.2 O Método de Perron . . . . .	27
<b>4 Demonstrações</b>	<b>30</b>

# Capítulo 1

## Prelúdio

### 1.1 Introdução

Nosso principal objetivo é apresentar e demonstrar resultados a respeito da existência e não existência de superfícies de curvatura média constante na variedade  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{H}^2$  é o plano hiperbólico de curvatura  $-1$ , e nos baseamos no trabalho de P. Klaser, R. Soares e M. Telichevesky [13].

Sobre a história deste tipo de questão, podemos falar de Riemann que em 1898 [16] abordou o problema de classificar as superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  em forma anular que têm como fronteira dois círculos em planos paralelos. Este trabalho foi concluído por M. Schifman [20] em 1956. Em [18], A. Ros e H. Rosenberg propuseram o problema de encontrar superfícies anulares de curvatura média constante com fronteira em curvas convexas de Jordan contidas em planos paralelos. Neste contexto, J. Ripoll e N. Espírito Santo [8] consideraram o caso em que as curvas planas  $\alpha$  e  $\beta$  da fronteira são tais que a projeção ortogonal de  $\alpha$  sobre o plano de  $\beta$  está contida na região limitada por  $\beta$ .

Este problema também foi estudado por A. Aiolfi, P. Fusieger e J. Ripoll em [1], [2], [9], onde os autores consideram gráficos radiais e provam resultados de existência.

O estudo das superfícies de curvatura média constante com bordo em planos paralelos pode ser feito, em vez de  $\mathbb{R}^3$ , em uma variedade tridimensional da forma  $M \times \mathbb{R}$ , onde o problema se estende de forma natural considerando o bordo como curvas contidas em planos  $M \times \{0\}$  e  $M \times \{h\}$ . Com respeito a isso, L. Hauswirth [11] estudou superfícies de Riemann generalizadas em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Adaptando os trabalhos de M. Schifman [20] e A.Barbosa [3], ele estabeleceu versões dos resultados de superfícies mínimas de [8] em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  por meio do Método de Perron, como será visto na Seção 3.2. Outros resultados relacionados a  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  se encontram em [12], [15], [19], [5], [7].

Neste texto serão feitas hipóteses que relacionam os parâmetros e a geometria do problema e implicam a existência ou não existência de superfícies. Os resultados consistem de dois teoremas que dão condições suficientes para a existência destas superfícies e outros dois mostram condições sob as quais tais superfícies não existem, de uma forma muito parecida com o que foi feito no  $\mathbb{R}^3$  em [8].

O desenvolvimento deste texto se dará da seguinte maneira: na Seção 1.2 deste capítulo, será exposto o problema e serão fixadas algumas notações para em seguida, na Seção 1.3, apresentarmos os teoremas centrais deste trabalho. No Capítulo 2 faremos uma revisão de alguns tópicos de Geometria Riemanniana com os quais deduziremos na Seção 2.3 uma equação para superfícies de curvatura média constante (CMC). No Capítulo 3, construiremos alguns casos particulares de superfícies CMC com simetria rotacional (Seção 3.1). Elas serão usadas para demonstrar os teoremas usando o método de Perron, o qual será abordado na Seção 3.2. Finalmente, no Capítulo 4, são demonstrados os teoremas.

Algumas noções de Geometria Riemanniana como geodésicas, imersões, aplicação exponencial, conexões, campos de vetores, volumes, curvatura, dentre outros, podem ser encontrados em [4]. Outros conceitos que veremos mais cuidadosamente como Laplaciano, Campos de Jacobi e curvatura média também podem ser consultados nesta referência.

## 1.2 O Problema

Passamos a descrever em mais detalhes o problema e algumas notações que serão bastante usadas daqui por diante.

Consideremos na variedade  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  duas curvas fechadas  $\tilde{\alpha}$  e  $\beta$ , contidas respectivamente nos planos  $\mathbb{H}^2 \times \{h\}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ . Estamos supondo que a projeção de  $\tilde{\alpha}$  sobre o plano de  $\beta$  está contida inteiramente na região limitada por  $\beta$  em  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ . Denotaremos, a partir de agora,  $\alpha$  a projeção ortogonal da  $\tilde{\alpha}$  de  $\mathbb{H}^2 \times \{h\}$  sobre o plano  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ .

A respeito da geometria das curvas, considerando como ambiente apenas o plano que as contém, suporemos as seguintes propriedades (ver figura 1.1):

$$\alpha \quad \text{satisfaz a condição do círculo interior de raio } r \quad (1.1)$$

$$\beta \quad \text{satisfaz a condição do círculo exterior de raio } R. \quad (1.2)$$

Mais precisamente, a afirmação (1.1) sobre  $\alpha$  quer dizer que em cada ponto da curva, existe um círculo de raio  $r$  tangente a ela neste ponto e que está contido na região limitada por  $\alpha$ . De forma semelhante, dizer que  $\beta$  possui a propriedade (1.2) significa que, em cada ponto desta curva, existe um círculo tangente a ela neste ponto, com raio  $R$ , de forma que  $\beta$  esteja contida na região limitada pelo círculo (veja figura 1.1). Note que esta última condição implica a convexidade de  $\beta$ , bem como limita inferiormente sua curvatura.

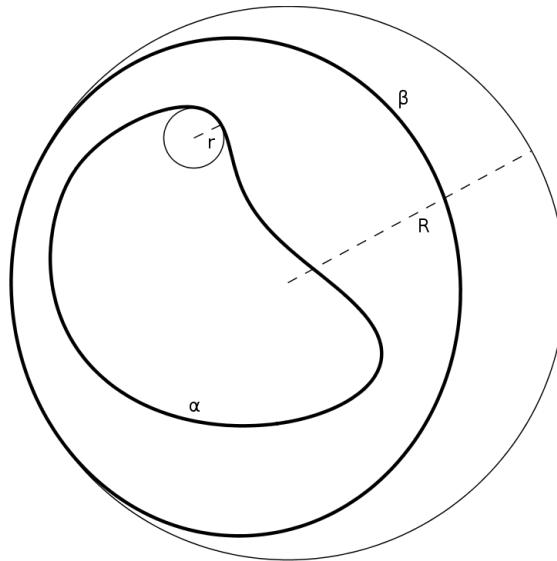


Figura 1.1: Círculos interior e exterior.

Chamaremos  $d$  a distância entre as duas curvas no plano  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  e denotaremos por  $\text{diam}\beta$  o diâmetro da curva  $\beta$ , isto é, a maior distância entre dois de seus pontos:

$$d = \inf\{d(p, q) \mid p \in \alpha, q \in \beta\} \quad (1.3)$$

$$\text{diam}\beta = \sup\{d(p, q) \mid p, q \in \beta\}. \quad (1.4)$$

Sabido que o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ , de curvatura seccional constante  $-1$ , é uma variedade riemanniana completa e simplesmente conexa, é garantido, pelo Teorema de Hadamard, que  $\mathbb{H}^2$  é difeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . Então existe um difeomorfismo que parametriza toda a variedade,  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ . Com isso, induzimos um difeomorfismo natural

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \\ (v, x) &\mapsto (\psi(v), x). \end{aligned} \quad (1.5)$$

A parametrização de  $\mathbb{R}$ , é claro, é a identidade. Assim, o espaço tangente se decompõe em uma soma direta na forma  $T_{(p,x)}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) = T_p\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{R}$ .

Convencionaremos que a superfície será orientada com vetor normal apontando para baixo, isto é,  $\langle \eta, X_3 \rangle \leq 0$ , onde  $\eta$  é o vetor normal à superfície e  $X_3 = d\Psi(e_3)$  é o vetor na direção positiva do eixo real.

A forma de abordar a questão será via equações diferenciais: procuraremos por uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  cujo gráfico em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  seja uma superfície de curvatura média constante (CMC) igual a  $H$  com fronteira  $\alpha \cup \beta$ . Isto é equivalente a encontrar uma solução para o seguinte Problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} Q_H(u) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0 \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.6)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{H}^2$  é o domínio duplamente conexo cuja fronteira é  $\partial\Omega = \alpha \cup \beta$  e  $\varphi$  é a função que assume  $h$  em  $\alpha$  e  $0$  em  $\beta$ , isto é,

$$\varphi(p) = \begin{cases} h, & \text{se } p \in \alpha \\ 0, & \text{se } p \in \beta. \end{cases}$$

Os operadores  $\operatorname{div}$  e  $\nabla$  são respectivamente o divergente e o gradiente em  $\mathbb{H}^2$ . Assim, apenas consideraremos valores de curvatura média  $H \geq 0$ , e os casos em que o vetor normal da superfície aponta para cima podem ser obtidos se virarmos de cabeça para baixo a solução do problema quando  $h < 0$ .

Alguns dos resultados principais serão provados com o método de Perron usando uma família a dois parâmetros, a saber  $H$  e  $r$ , de superfícies de CMC  $H$  com simetria rotacional, geradas pela função

$$\text{H-nod}_r(s) = \int_0^s \frac{2H(\cosh(r) - \cosh(t+r)) + \sinh(r)}{\sqrt{\sinh^2(t+r) - [2H(\cosh(r) - \cosh(t+r)) + \sinh(r)]^2}} dt \quad (1.7)$$

que está definida em  $s \in [0, T_H]$ , onde

$$T_H := \begin{cases} +\infty, & \text{se } H \leq 1/2 \\ \ln \left( \frac{2H+1}{2H-1} \right), & \text{se } H > 1/2 \end{cases} \quad (1.8)$$

Em alguns casos especiais, as  $\text{H-nod}_r$  serão chamadas de  $\text{cat}_r$ , no caso  $H = 0$  ou  $\text{H-cap}$ , quando  $r = 0$ . Isto será visto em detalhes na Seção 3.1.



### 1.3 Teoremas

Nas notações anteriores, os teoremas de existência que provaremos no Capítulo 4 serão os seguintes:

**Teorema 1.3.1.** *Seja  $H \geq 0$ . Suponha  $\alpha$  e  $\beta$  satisfazendo as condições (1.1) e (1.2), respectivamente, e que*

$$\begin{aligned} \text{diam}\beta &\leq d + 2 \cosh^{-1} \left( \cosh(r) + \frac{\sinh(r)}{2H} \right) \\ 0 \leq h &\leq \min \left\{ \text{cat}_r(d), \frac{2Hd}{\sqrt{\coth^2(r) - 4H^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

*considerando  $\text{diam}\beta < +\infty$  quando  $H = 0$  e  $h < +\infty$ , caso  $\coth^2(r) - 4H^2 \leq 0$ . Se for  $H > 1/2$ , suponha adicionalmente que*

$$\begin{aligned} R &\leq T_H, \text{ e também que} \\ 0 \leq h &\leq \frac{4H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 - 4H^2 \tanh^2 \left( \frac{T_H - d}{2} \right)}{4H^2 - 1}} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

*Então, o problema de Dirichlet (1.6) associado a  $H$  possui solução única  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ .*

E considerando  $h < 0$ , isto é, a curva  $\tilde{\alpha}$  abaixo de  $\beta$ , o outro teorema de existência é

**Teorema 1.3.2.** *Seja  $H \geq 0$  e  $\alpha$  e  $\beta$  como em (1.1) e (1.2). Suponha que  $\text{diam}\beta - (2r + d) \leq T_H$ ,  $R \leq T_H$ , e que*

$$0 \leq -h \leq \min\{H\text{-nod}_r(d), H\text{-nod}_r(\text{diam}\beta - (2r + d))\}. \quad (1.11)$$

*Então o Problema (1.6) possui solução única  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ .*

Os próximos teoremas afirmam que se a distância entre os planos paralelos for muito grande, então não existe uma superfície CMC com bordo neles e vetor curvatura média apontando para “fora”. Estes dois próximos resultados valem mesmo para superfícies CMC que não sejam gráfico.

**Teorema 1.3.3.** *Seja  $M \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  uma superfície conexa imersa de curvatura média constante  $H$  contida num horocilindro  $B \times \mathbb{R}$ , onde  $B$  é um horodisco. Suponha que  $M$  intersecta os planos  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \{h\}$ , com  $\partial M \cap (\mathbb{H}^2 \times (0, h)) = \emptyset$  e que o vetor curvatura média de  $M$  aponta para  $\partial B \times \mathbb{R}$ . Então  $h \leq h_H$ , onde  $h_H$  é dado por*

$$h_H := \begin{cases} \pi - \frac{8H}{\sqrt{1 - 4H^2}} \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 - 2H}{1 + 2H}} \right), & \text{se } H < 1/2 \\ \pi - 2, & \text{se } H = 1/2 \\ \pi - \frac{8H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{2H - 1}{2H + 1}} \right), & \text{se } H > 1/2 \end{cases} .$$

**Teorema 1.3.4.** *Seja  $M \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , uma superfície conexa imersa de curvatura média constante  $H$  contida num cilindro  $B_{r^*} \times \mathbb{R}$  onde  $B_{r^*}$  é um disco de raio  $r^*$ . Suponha que  $M$  intersecta dois*

planos paralelos  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \{h\}$ , com  $\partial M \cap (\mathbb{H}^2 \times (0, h)) = \emptyset$  e que o vetor curvatura média de  $M$  aponta para  $\partial B_{r^*} \times \mathbb{R}$ . Então

$$h \leq 2 \max H\text{-nod}_{r^*}.$$

Estes são os resultados a serem provados. A partir daqui revisaremos alguns conceitos e construiremos os elementos necessários para demonstrar os quatro teoremas enunciados anteriormente.

## Capítulo 2

# Geometria do Problema

### 2.1 Campos de Jacobi

Quando estamos interessados em analisar o quanto as geodésicas que partem de um ponto se afastam em uma variedade riemanniana, é natural que estudemos a aplicação exponencial. Podemos pensar, por exemplo, em retas partindo da origem em  $\mathbb{R}^2$ . Como quantificar ou ainda definir o que se quer dizer por quanto elas se afastam? Uma maneira é parametrizar uma família de retas associando a cada ângulo  $\theta$  uma reta  $\{(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Depois, percorremos um comprimento  $t_0$  em cada reta e tomamos a derivada de  $\theta \mapsto t_0(\cos(\theta), \sin(\theta))$  que, em módulo, é  $t_0$ .

Generalizando esta idéia para uma variedade riemanniana  $M$  qualquer, podemos tomar uma curva  $v : (-\epsilon, \epsilon) \mapsto T_p M$  e definir uma superfície parametrizada em  $M$  por

$$f(t, s) = \exp_p(tv(s))$$

onde  $t \in \mathbb{R}$  e  $v(s)$  é uma curva parametrizada em  $T_p M$ , com  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ . O próximo passo é tomar a derivada  $\frac{\partial f(t, 0)}{\partial s}$ . Para concluir algo, a primeira coisa que notamos é que  $\partial f / \partial s$ , considerada como um campo de vetores definido ao longo da geodésica  $\gamma(t) = f(t, 0)$  obedece a uma equação diferencial. No que segue, utilizaremos os dois seguintes resultados:

**Lema 2.1.1** (Lema de Simetria). *Se  $M$  é uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica e  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  é uma superfície parametrizada, então*

$$\frac{D}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

**Demonstração:** Seja  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  um sistema de coordenadas em uma vizinhança de um ponto da imagem de  $f$ . Assim,

$$\varphi^{-1} \circ f(u, v) = (x_1(u, v), \dots, x_n(u, v)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) &= \frac{D}{\partial v} \left( \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u} \nabla_{\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Como a conexão é simétrica, vale a igualdade  $\nabla_{\partial/\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Ao calcularmos  $\frac{D}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)$ , obtemos a mesma expressão.  $\square$

E também o seguinte lema que relaciona as derivadas de um campo definido sobre uma superfície com sua curvatura  $R$ :

**Lema 2.1.2.** *Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  superfície parametrizada e  $V = V(s, t)$  um campo definido sobre esta superfície. Então*

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = R \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V.$$

**Demonstração:** Tome um sistema de coordenadas  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  no qual  $V = \sum v^i(s, t) X_i$ , onde  $X_i = d\varphi(e_i)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial s} V &= \sum_i v_i \frac{D}{\partial s} X_i + \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial s} X_i, \text{ o que nos dá} \\
\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V &= \sum_i v_i \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_i + \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_i \\
&+ \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial s} \frac{D}{\partial t} X_i + \sum_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial s} X_i, \text{ e podemos fazer a diferença} \\
\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V &= \sum_i v_i \left( \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_i - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} X_i \right).
\end{aligned}$$

Em coordenadas, temos que  $f(s, t) = (x_1(s, t), \dots, x_n(s, t))$ . Daí,  $\frac{\partial f}{\partial s} = \sum \frac{\partial x_j}{\partial s} X_j$  e  $\frac{\partial f}{\partial t} = \sum \frac{\partial x_k}{\partial t} X_k$ . Desta forma, temos

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial s} X_i &= \nabla_{\sum_j (\partial x_j / \partial s) X_j} X_i = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{X_j} X_i, \\
\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_i &= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s} \nabla_{X_j} X_i + \sum_j \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial t} \nabla_{X_k} \nabla_{X_j} X_i, \text{ procedendo com acima,} \\
\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_i - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} X_i &= \sum_{j,k} \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial t} (\nabla_{X_k} \nabla_{X_j} X_i - \nabla_{X_j} \nabla_{X_k} X_i)
\end{aligned}$$

A partir disto, obtemos finalmente

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = \sum_{i,j,k} v_i \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial t} R(X_j, X_k) X_i = R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) V.$$

□

Agora, como  $t \mapsto f(t, s)$  define uma geodésica  $\gamma_s$  para todo  $s$  fixo, então  $\nabla_{\gamma'_s} \gamma'_s = 0$ , isto é,  $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , qualquer que seja  $(t, s)$ . Desta forma, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{\partial s} \left( \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{D}{\partial t} \left( \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \right) - R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t} \left( \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} \right) + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Definindo  $J_s(t) := \frac{\partial f(t, s)}{\partial s}$ , temos:

$$\frac{D^2}{dt^2} J_s(t) + R(\gamma'_s, J_s) \gamma'_s = 0.$$

Esta é a equação de Jacobi, e o campo  $J$  ao longo de uma geodésica  $\gamma$  satisfazendo esta equação é o campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$ .

Se  $\gamma$  é uma geodésica partindo de  $p \in M$ , podemos tomar em  $T_p M$  uma base ortonormal de vetores  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  e transportá-los paralelamente ao longo da geodésica, obtendo uma base  $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$  de  $T_{\gamma(t)} M$  ortonormal e paralela ao longo de  $\gamma$ , isto é,  $\nabla_{\gamma'} e_i = 0$ . Assim, o campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  pode ser escrito como  $J(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) e_i(t)$ , onde cada  $f_i$  é uma função diferenciável. Daí, temos

$$J''(t) = \sum_{j=1}^n f_j''(t) e_j + R(\gamma', J) \gamma' = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_i \langle R(\gamma', e_i) \gamma', e_j \rangle e_j.$$

Portanto, definindo os coeficientes  $a_{ij} := \langle R(\gamma', e_i) \gamma', e_j \rangle$ , a equação de Jacobi equivale ao sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem:

$$f_j''(t) + \sum_{i=1}^n f_i(t) a_{ij}(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

que tem solução única, dadas as  $2n$  condições iniciais  $f_j(0)$  e  $f_j'(0)$ , que é o mesmo que dar as condições iniciais  $J(0)$  e  $J'(0)$  em  $p$ .

Note que podemos tomar um referencial ortonormal paralelo a  $\gamma$  com  $e_n = \gamma'$ . Fazendo esta escolha, os coeficientes satisfazem  $a_{ij} = 0$ , se qualquer índice  $i$  ou  $j$  for igual a  $n$ . Desta maneira, a  $n$ -ésima equação se reduz a  $f_n''(t) = 0$ , para a componente tangente a  $\gamma'$  do campo de Jacobi. Logo, se escolhermos as condições iniciais do campo normais a  $\gamma'$ , então o campo será normal a  $\gamma'$  ao longo de toda a geodésica.

Como estamos interessados particularmente no plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  cuja curvatura é constante e igual a  $-1$ , o seguinte Lema torna muito simples a determinação dos campos de Jacobi para esta variedade.

**Lema 2.1.3.** *Sejam  $M$  uma variedade riemanniana,  $p \in M$  e seja  $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$  a aplicação trilinear definida por*

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle$$

para quaisquer  $X, Y, Z, W \in T_p M$ . Então  $M$  tem curvatura seccional constante igual a  $K_0$  se, e somente se,  $R = K_0 R'$ , onde  $R$  é o tensor de curvatura de  $M$ .

**Demonstração:** Suponha que  $K(p, \sigma) = K_0$ ,  $\forall p \in M \forall \sigma \subset T_p M$  onde  $\sigma$  é subespaço de dimensão dois. Denotemos  $\langle R'(X, Y, Z), W \rangle$  pela quádrupla ordenada  $(X, Y, Z, W)$  e notemos que ela satisfaz as seguintes propriedades:

- (a)  $\langle X, Y, Z, W \rangle + \langle Z, X, Y, W \rangle + \langle Y, Z, X, W \rangle = 0$
- (b)  $\langle X, Y, Z, W \rangle = -\langle Y, X, Z, W \rangle$
- (c)  $\langle X, Y, Z, W \rangle = -\langle X, Y, W, Z \rangle$
- (d)  $\langle X, Y, Z, W \rangle = \langle Z, W, X, Y \rangle$ .

A hipótese de curvatura seccional  $K_0$  implica que a curvatura  $R$  de  $M$  satisfaz  $\langle R(X, Y)X, Y \rangle = K_0(|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2) = K_0\langle X, Y, X, Y \rangle$ ,  $\forall X, Y \in T_p M$ . Assim

$$\begin{aligned} \langle R(X+Z, Y)(X+Z), Y \rangle &= K_0\langle X+Z, Y, X+Z, Y \rangle, \text{ e daí} \\ \langle R(X, Y)X, Y \rangle + 2\langle R(X, Y)Z, Y \rangle + \langle R(Z, Y)Z, Y \rangle &= \\ K_0[\langle X, Y, X, Y \rangle + 2\langle X, Y, Z, Y \rangle + \langle Z, Y, Z, Y \rangle], \text{ donde} \\ \langle R(X, Y)Z, Y \rangle &= K_0\langle X, Y, Z, Y \rangle, \end{aligned}$$

para quaisquer  $X, Y, Z \in T_p M$ , onde foi usado o fato de que  $R$  satisfaz as quatro propriedades (a), (b), (c) e (d). Por este fato recém provado, temos que

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y+W)Z, Y+W \rangle &= K_0\langle X, Y+W, Z, Y+W \rangle, \text{ que implica} \\ \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, W)Z, Y \rangle &= K_0[\langle X, Y, Z, W \rangle + \langle X, W, Z, Y \rangle]. \text{ Logo,} \\ \langle R(X, Y)Z, W \rangle - K_0\langle X, Y, Z, W \rangle &= -\langle R(X, W)Z, Y \rangle + K_0\langle X, W, Z, Y \rangle \\ &= \langle R(Y, Z)X, W \rangle - K_0\langle Y, Z, X, W \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, isto vale  $\langle R(Z, X)Y, W \rangle - K_0\langle Z, X, Y, W \rangle$ . Portanto, pela propriedade (a), temos que

$$3(\langle R(X, Y)Z, W \rangle - K_0\langle X, Y, Z, W \rangle) = 0 \text{ para todo } X, Y, Z, W \in T_p M.$$

Isto é o que queríamos provar. A recíproca é óbvia.  $\square$

Agora, se escolhermos  $J$  normal a  $\gamma'$ , então, usando este Lema, a equação de Jacobi se reduz a uma forma muito mais simples. Seja  $\gamma$  geodésica com  $|\gamma'| = 1$ . Temos que:

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', X \rangle = K_0(\langle \gamma'\gamma' \rangle \langle J, X \rangle - \langle \gamma', X \rangle \langle J, \gamma' \rangle) = K_0\langle J, X \rangle \quad \forall X \in T_p M.$$

Daí  $R(\gamma', J)\gamma' = K_0 J$ , fazendo com que a equação de Jacobi tome a forma

$$J''(t) + K_0 J(t) = 0.$$

Vamos nos restringir ao caso do  $\mathbb{H}^2$  em que  $K_0 = -1$ . Assim, se  $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = \gamma'\}$  é base ortonormal e paralela ao longo de  $\gamma$ , temos que as funções componentes de  $J$  são as soluções das equações acima, e assim são dadas por:

$$\begin{cases} f_i(t) = A_i \sinh(t) + B_i \cosh(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1 \\ f_n(t) \equiv 0 \end{cases}$$

Escolhendo  $J(0) = 0$  e  $|J'(0)| = 1$ , ficamos com  $B_i = 0$  e  $|\sum A_i^2| = 1$ , e daí

$$J(t) = \sinh(t) \sum A_i e_i(t) = \sinh(t)w(t),$$

onde  $w(t)$  é o transporte paralelo de  $J'(0)$  ao longo de  $\gamma$ , que tem módulo constante igual a 1, pois o transporte paralelo preserva a norma.

Como exemplo de aplicação do que acaba de ser visto, calculemos o perímetro e a área de um círculo  $\overline{B_r(p)} \subset \mathbb{H}^2$ . Definindo  $f(t, s) = \exp_p(tv(s))$ , onde  $v(s)$  descreve um círculo em  $T_p\mathbb{H}^2$  tal que  $|v(s)| = |v'(s)| = 1$ , temos que, para cada  $s$ , a aplicação  $t \mapsto f(t, s)$  define uma geodésica  $\gamma_s$  normalizada, e  $\frac{\partial f(t, s)}{\partial s}$  define um campo de Jacobi  $J_s(t)$  ao longo de  $\gamma_s$ , tal que  $J_s(0) = 0$  e  $|J'_s(0)| = |v'(s)| = 1$ . A normalidade de  $J_s(t)$  com respeito a  $\gamma'_s(t)$  segue do Lema de Gauss:

$$\langle J_s(t), \gamma'_s(t) \rangle = \langle (d\exp_p)_{tv(s)}(tv'(s)), (d\exp_p)_{tv(s)}(v(s)) \rangle = \frac{1}{t} \langle v'(s), v(s) \rangle = 0, \quad (2.1)$$

pois  $|v(s)|$  é constante igual a 1.

Então sabemos, pelas considerações anteriores, que  $J_s(t) = \sinh(t)w_s(t)$  onde  $w_s(t)$  é o transporte paralelo de  $J'_s(0) = v'(s)$ , portanto  $|w_s(t)| = 1$ .

Agora, o perímetro  $P$  do círculo geodésico de raio  $R$  é o comprimento da curva  $s \mapsto \gamma_s(R)$  quando  $s$  vai de  $-\pi$  a  $\pi$ , isto é,  $v(s)$  dá uma volta em  $T_p\mathbb{H}^2$ . Podemos pensar como a distância percorrida pela ponta de uma geodésica de comprimento  $R$  quando giramos ela por uma volta completa em torno de um ponto fixo. Assim, temos:

$$P = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{d}{ds} \gamma_s(R) \right| ds = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{d}{ds} f(R, s) \right| ds = \int_{-\pi}^{\pi} |J_s(R)| ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sinh(R) ds = 2\pi \sinh(R).$$

Além disso, a área  $A$  está definida em termos dos coeficientes  $g_{ij}$  da métrica riemanniana. A seguir, no que diz respeito ao laplaciano da distância, calcularemos explicitamente os componentes da matriz dos  $g_{ij}$  no mesmo sistema de coordenadas deste exemplo. Mas, para agora, saibamos apenas que neste sistema, temos  $\sqrt{\det(g_{ij})} = \sinh(t)$ . Por definição, temos que  $\text{vol} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(q), \frac{\partial f}{\partial s}(q) \right) = \sqrt{\det(g_{ij})}(q)$ , assim:

$$A = \int_{f^{-1}(B_r)} \text{vol} \left( \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sinh(t) dt ds = 2\pi \cosh(R) - 2\pi = 4\pi \sinh^2(R/2).$$

Outro exemplo do que podemos calcular é a função laplaciano da distância. Como esta função terá um papel relevante para a continuidade do texto, vamos estudá-la com um pouco mais de cuidado na seção seguinte.

## 2.2 Laplaciano da Distância em $\mathbb{H}^2$

Na equação da curvatura média, precisaremos conhecer o laplaciano da função distância no plano hiperbólico. Para lembrar sua definição no contexto de variedades, façamos uma breve revisão.

O Hessiano de uma função diferenciável  $h$  de uma variedade  $M$  em  $p \in M$  é, por definição, o operador linear em  $T_pM$  que aplica cada  $v \in T_pM$  em  $\nabla_v(\text{grad } h)(p)$ . Define-se o gradiente de  $h$ ,

$\text{grad } h$ , por sua vez, como o campo de vetores em  $M$ ,  $p \mapsto u_p$  tal que  $\langle u_p, v \rangle = dh_p(v)$  para todo  $v \in T_p M$ . Finalmente, o Laplaciano de  $h$  em  $p$ , cuja notação é  $\Delta h(p)$ , é expresso pelo traço do Hessiano:

$$\Delta h(p) = \text{tr Hess } h(p) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \text{grad } h(p), E_i \rangle,$$

onde  $\{E_i\}_{i=1}^n$  é uma base ortonormal de  $T_p M$ .

Visto isso, passemos a calcular o laplaciano da função distância a um ponto  $a \in \mathbb{H}^2$ ,  $s_a : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . É um fato bem conhecido que esta função é diferenciável em  $\mathbb{H}^2 \times \{a\}$ , para qualquer ponto distinto de  $a$ . Primeiro escolhemos o sistema de coordenadas  $f(t, \theta) = \exp_a(tv(\theta))$ ,  $0 < t < +\infty$ ,  $-\pi < \theta < \pi$ , onde  $v(\theta)$  descreve um círculo unitário em  $T_p M$  tal que  $|v(\theta)| = |v'(\theta)| = 1$ . Os campos coordenados relativos a este sistema são  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\}$ . Para os coeficientes da métrica, temos

$$g_{tt} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = |v(\theta)|^2 = 1$$

$$g_{t\theta} = g_{\theta t} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\rangle = \frac{1}{t} \langle v(\theta), v'(\theta) \rangle = 0$$

$$g_{\theta\theta} = \left| \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|^2 = |J_\theta(t)|^2 = \sinh^2(t),$$

onde  $J_\theta(t)$  é o campo de Jacobi ao longo da geodésica  $\gamma_\theta : t \mapsto f(t, \theta)$ , ortogonal a  $\gamma'_\theta$  e que se anula em  $t = 0$ . No caso do plano  $\mathbb{H}^2$ , sabemos que  $|J_\theta(t)| = \sinh(t)$  quando  $|J'_\theta(0)| = 1$ . A ortogonalidade dos campos decorre do Lema de Gauss, conforme a equação 2.1, e  $g_{tt} = 1$  se deve ao fato de que quando variamos a coordenada radial,  $t$ , andamos por geodésicas normalizadas.

A função distância pode ser expressa por meio da aplicação exponencial na forma  $s_a(q) = |\exp_a^{-1}(q)|$ , portanto, nas coordenadas escolhidas, a distância é simplesmente

$$s_a \circ f(t, \theta) = |tv(\theta)| = t.$$

Agora, notando que

$$\frac{1}{|\partial f / \partial t|^2} \left\langle \text{grad } s_a, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial(s_a \circ f)}{\partial t} = 1$$

e que

$$\frac{1}{|\partial f / \partial \theta|^2} \left\langle \text{grad } s_a, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\rangle = \frac{\partial(s_a \circ f)}{\partial \theta} = 0,$$

temos, portanto que o gradiente é dado por

$$\text{grad } s_a = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

A partir disso, temos para o traço o Hessiano de  $s_a$ :

$$\begin{aligned} \text{tr Hess } s_a &= \frac{1}{|\partial f / \partial t|^2} \left\langle \nabla_{\partial f / \partial t} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{|\partial f / \partial \theta|^2} \left\langle \nabla_{\partial f / \partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\rangle \\ &= 0 + \Gamma_{\theta t}^\theta. \end{aligned}$$



Usando a fórmula dos símbolos de Christoffel, isto é

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta t}^{\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\theta t}}{\partial t} + \frac{\partial g_{t t}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta t}}{\partial t} \right) g^{t\theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial t} + \frac{\partial g_{\theta t}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta t}}{\partial \theta} \right) g^{\theta\theta} \\ &= \frac{1}{2g_{\theta\theta}} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial t} = \frac{\partial \ln(\sqrt{g_{\theta\theta}})}{\partial t} = \frac{\partial \ln(\sinh(t))}{\partial t} = \coth(t).\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\Delta s_a(q) = \coth(s_a(q)).$$

Em alguns casos, em vez de considerar a distância a um ponto, estaremos lidando com a distância a um círculo geodésico de centro  $a \in \mathbb{H}^2$  e raio  $r$ ,  $C_r(a)$ , definida somente fora de uma bola geodésica. Neste caso, temos  $s : \mathbb{H}^2 \setminus B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $s(q) = s_a(q) - r$ . Assim, temos que:

$$\Delta s(q) = \Delta(s_a(q)) = \coth(s_a(q)) = \coth(s(q) + r).$$

Por último, será necessário analisarmos o caso em que  $B$  é um horodisco e a função  $s : \mathbb{H}^2 \setminus B \rightarrow \mathbb{R}$  é a distância ao horociclo  $C = \partial B$ . Podemos pensar, no modelo do semi-plano, o horociclo sendo o limite de uma família de círculos hiperbólicos passando por um ponto  $p$  e com centro no eixo vertical, quando o centro se aproxima da origem (figura 2.1).

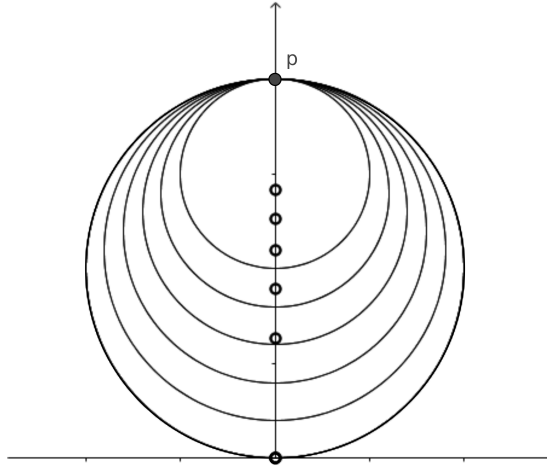


Figura 2.1: Círculos tendendo a um horociclo e seus respectivos centros tendendo ao infinito.

Assim, fica natural que tenhamos o laplaciano da distância a um horociclo  $C$  como o limite do laplaciano da distância a um círculo,  $\Delta s = \coth(s + r)$ , quando seu centro tende ao infinito, isto é,  $r \rightarrow +\infty$ . Portanto, para  $s$  a distância ao horociclo, teremos

$$\Delta s = 1.$$

## 2.3 Equação da Curvatura Média

Usando o que vimos até aqui, vamos obter a equação da curvatura média de um gráfico em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  de uma função  $u$  definida em um domínio de  $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ ,  $\text{Gr}(u) = \{(x, u(x)) | x \in \Omega\}$ .

Em uma variedade Riemanniana  $M$  de dimensão  $n$ , definimos a curvatura média  $H$  de uma hipersuperfície  $S \subset M$  orientada com vetor normal  $\eta$  em cada ponto  $p \in S$  como

$$H(p) = \frac{1}{n-1} \text{tr}(S_\eta(p))$$

onde  $S_\eta$  é o operador forma, definido em cada  $p \in M$  por

$$\begin{aligned} S_\eta(p) : T_p M &\rightarrow T_p M \\ v &\mapsto -(\bar{\nabla}_v N)^T \end{aligned}$$

onde o termo  $(\cdot)^T$  denota a componente tangencial do vetor à hipersuperfície,  $N$  é uma extensão local de  $\eta$  à variedade e  $\bar{\nabla}$  é a conexão da variedade.

Particularizando isto ao nosso caso, temos  $M = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , de dimensão  $n = 3$ , e a hipersuperfície  $S$  é gráfico de uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ . Se definirmos agora

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(p, x) = u(p) - x$$

temos que  $S = \text{Gr}(u) = F^{-1}(\{0\})$ . Por consequência, temos que  $\text{grad } F$  é normal a  $S$ . Desta forma, temos que  $\eta = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|}$  é um campo unitário normal a  $S$ . Para obter agora a curvatura média, tomamos uma base ortonormal  $\{E_1, E_2\}$  de  $T_p S$ :

$$\begin{aligned} 2H = \text{tr } S_\eta &= \sum_{i=1}^2 \langle -\bar{\nabla}_{E_i} \eta, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle -\bar{\nabla}_{E_i} \eta, E_i \rangle + \overbrace{\langle -\bar{\nabla}_\eta \eta, \eta \rangle}^{=0} \\ &= -\text{div}_M(\eta). \end{aligned}$$

Retomando a parametrização,  $\Psi$  de  $M = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , dada em (1.5), temos que  $\text{grad } F = \nabla u - X_3$ , onde  $\nabla$  é o gradiente de  $\mathbb{H}^2$ . Assim,  $\eta = \frac{\text{grad } F}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$ , e  $\eta$  aponta para baixo. É fácil ver que  $\text{grad } F = (\nabla u, -1)$ , e portanto, a equação da curvatura média toma a forma

$$\text{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0, \quad (2.2)$$

onde  $\text{div}$  e  $\nabla$  são os operadores divergente e gradiente em  $\mathbb{H}^2$ .

Será de interesse usarmos a equação da curvatura média com uma função de  $\mathbb{H}^2$  em  $\mathbb{R}$  da forma  $\phi \circ s$ , onde  $s$  está definida num domínio de  $\mathbb{H}^2$  e  $\phi$  é uma função real definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Neste caso teremos, para todo  $v \in T_p \mathbb{H}^2$ , que  $v(\phi \circ s) = d\phi_{s(p)} ds_p(v) = \phi'(s(p)) ds_p(v)$ , do que concluímos que  $\nabla(\phi \circ s) = \phi'(s) \nabla s$ . Então, com  $u = \phi \circ s$ , o divergente da equação (2.2) fica:

$$\begin{aligned} \text{div} \left( \frac{\phi'(s) \nabla s}{\sqrt{1 + |\phi'(s) \nabla s|^2}} \right) &= \left\langle \nabla \frac{\phi'(s)}{\sqrt{1 + |\phi'(s) \nabla s|^2}}, \nabla s \right\rangle + \frac{\phi'(s) \text{div} \nabla s}{\sqrt{1 + |\phi'(s) \nabla s|^2}} \\ &= \frac{d}{ds} \left( \frac{\phi'(s)}{\sqrt{1 + |\phi'(s) \nabla s|^2}} \right) \langle \nabla s, \nabla s \rangle + \left( \frac{\phi'(s)}{\sqrt{1 + |\phi'(s) \nabla s|^2}} \right) \Delta s. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A razão de estarmos considerando uma tal função é discutida a seguir.

# Capítulo 3

## Ferramentas

### 3.1 Superfícies de Revolução

A fim de provar os teoremas que são o objetivo principal desta dissertação, será indispensável utilizarmos certa classe de funções. Seu propósito será garantir que as soluções do problema de Dirichlet obtidas pelo método de Perron sejam contínuas até a fronteira do domínio. Neste contexto, estas funções são denominadas barreiras. No que segue, construiremos estas barreiras.

O que queremos são funções definidas em domínios tipo  $\mathbb{H}^2 \setminus B_r(a)$ , o exterior a uma bola geodésica (ou uma horobola) em  $\mathbb{H}^2$  de centro  $a \in \mathbb{H}^2$  e raio  $r$  prescritos, e cujo gráfico em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  seja uma superfície de curvatura média constante igual a  $H$ . Mais ainda, queremos que esta superfície seja simétrica em torno do eixo  $\{a\} \times \mathbb{R}$ . Desta maneira, podemos supor que estas funções tenham mais particularmente a forma  $u = \phi \circ s : \mathbb{H}^2 \setminus B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $s : \mathbb{H}^2 \setminus B_r(a) \rightarrow [0, +\infty)$  é a função distância ao círculo geodésico  $C_r(a)$  e  $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real definida em algum intervalo, que como veremos será determinado mais adiante.

Para que o gráfico  $\text{Gr}(u) = \{(p, \phi(s(p))) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \mid p \in \mathbb{H}^2 \setminus B_r(a)\}$  tenha curvatura média constante  $H \geq 0$ , a função  $u$  deve satisfazer a equação (2.2). Além disso, dada a igualdade (2.3) para o divergente de uma composta, e levando em conta que para a função distância temos  $|\nabla s| = 1$  e  $\Delta s = \coth(s + r)$ , concluímos que  $\phi$  deve satisfazer:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\phi'(s)}{\sqrt{1 + (\phi'(s))^2}} \right) + \left( \frac{\phi'(s)}{\sqrt{1 + (\phi'(s))^2}} \right) \coth(s + r) + 2H = 0. \quad (3.1)$$

Esta equação diferencial ordinária equivale a

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\phi'(s)}{\sqrt{1 + (\phi'(s))^2}} \sinh(s + r) \right) + 2H \sinh(s + r) = 0$$

que pode ser integrada para obtermos

$$\frac{\phi'(s)}{\sqrt{1 + (\phi'(s))^2}} = \frac{-2H \cosh(s + r) + C}{\sinh(s + r)}$$

Vamos querer que  $\phi(s)$  tenha o maior alcance e a maior altura possível. A razão disso é para que sua superfície gerada ainda seja capaz de ser supersolução do Problema (1.6) com tanto menos restrições quanto for possível impormos sobre  $\alpha$  e  $\beta$  e sobre  $h$ . Tendo isso em vista, exigiremos a condição  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \phi'(s) = +\infty$ , e conseqüentemente  $C = \sinh(r) + 2H \cosh(r)$ . Daí, resolvendo

$$\frac{\phi'(s)}{\sqrt{1 + (\phi'(s))^2}} = \frac{2H(\cosh(r) - \cosh(s+r)) + 2H\sinh(r)}{\sinh(s+r)}$$

para  $\phi'$ , poderemos integrá-la diretamente para obter a expressão da função desejada. Daqui por diante iremos chamá-la de H-nodóide de raio interno  $r$ , e usaremos a notação  $\text{H-nod}_r$  para a  $\phi$ . O nome é dado segundo as superfícies de curvatura média constante com simetria axial do  $\mathbb{R}^3$ , nodóides, ondulóides e, em alguns casos especiais, catenóides ou esferas. Quando não houver ambigüidade, usaremos os mesmos nomes para designar as superfícies geradas por estas funções, isto é, os gráficos das  $\text{H-nod}_r \circ s$ . Assim, temos

$$\text{H-nod}_r(s) = \int_0^s \frac{2H(\cosh(r) - \cosh(t+r)) + \sinh(r)}{\sqrt{\sinh^2(t+r) - [2H(\cosh(r) - \cosh(t+r)) + \sinh(r)]^2}} dt.$$

A condição inicial foi escolhida igual a zero, mas isto não é importante, pois diferentes condições iniciais só alteram a  $\text{H-nod}_r$  por uma constante aditiva, o que não muda o fato de que a curvatura média é constante e igual a  $H$ . Podemos ver isto também pela equação de  $u$ , que só depende de suas derivadas de primeira e segunda ordem.

Podemos notar que  $\text{H-nod}_r(s)$  está definida apenas enquanto o radicando do denominador não for negativo para todo  $t \in [0, s]$ , ou seja, temos a condição

$$\sinh^2(t+r) - [2H(\cosh(r) - \cosh(t+r)) + \sinh(r)]^2 \geq 0$$

que, para  $t \geq 0$ , como  $\sinh(t+r) \geq 0$ , equivale a

$$\sinh(t+r) \geq |2H(\cosh(r) - \cosh(t+r)) + \sinh(r)|$$

$$\Leftrightarrow \sinh(r) - \sinh(t+r) \leq 2H(\cosh(t+r) - \cosh(r)) \leq \sinh(t+r) + \sinh(r)$$

$$\Leftrightarrow 4H\sinh(t/2)\sinh(t/2+r) \leq 2\sinh(t/2+r)\cosh(t/2)$$

$$\Leftrightarrow \coth(t/2) \geq 2H.$$

Se  $H \leq 1/2$ , a desigualdade é satisfeita para todo  $t > 0$ , já que  $\coth(x) > 1$  se  $x > 0$ . Por outro lado, se  $H > 1/2$ , como temos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \coth(x) = 1$ , e a cotangente hiperbólica é estritamente decrescente em  $(0, +\infty)$ , a desigualdade apenas valerá para  $t > 0$  tal que

$$\coth\left(\frac{t}{2}\right) \geq 2H \Leftrightarrow \frac{t}{2} \leq \coth^{-1}(2H) \Leftrightarrow t \leq \ln\left(\frac{2H+1}{2H-1}\right).$$

Assim, o domínio de  $\text{H-nod}_r$  é o intervalo  $[0, T_H]$ , onde

$$T_H := \begin{cases} +\infty, & \text{se } H \leq 1/2 \\ \ln\left(\frac{2H+1}{2H-1}\right), & \text{se } H > 1/2 \end{cases}.$$

Vejam os a seguir alguns casos particulares desta família de H-nodóides que serão de especial importância para a demonstração dos teoremas.

### 3.1.1 Calota Esférica com $H \geq 1/2$

No caso de  $H \geq 1/2$ , tomando o limite  $r \rightarrow 0^+$  de  $H\text{-nod}_r$ , obtemos a calota esférica de CMC  $H$ , denotada por  $H\text{-cap}$ .

Se  $H > 1/2$ , temos

$$\begin{aligned} H\text{-cap}(s) &= \int_0^s \frac{2H(1 - \cosh(t))}{\sqrt{\sinh^2(t) - 4H^2(1 - \cosh(t))^2}} dt \\ &= \frac{4H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 - 4H^2 \tanh^2(t/2)}{4H^2 - 1}} \right) \Big|_0^s \end{aligned}$$

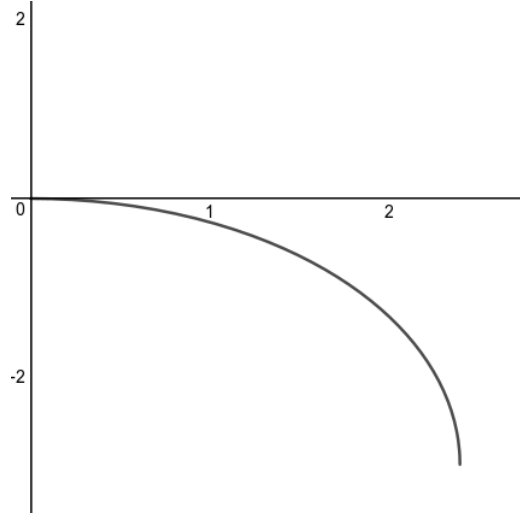


Figura 3.1:  $H\text{-cap}$

Se  $H = 1/2$ , então

$$(1/2)\text{-cap}(s) = 2 - 2 \cosh(s/2)$$

Podemos observar que as  $H\text{-cap}$  são estritamente decrescentes. Seu valor máximo é  $H\text{-cap}(0) = 0$  e seu valor mínimo é  $H\text{-cap}(T_H)$ , exceto no caso de ser  $H = 1/2$ , então teremos  $\lim_{s \rightarrow +\infty} (1/2)\text{-cap}(s) = -\infty$ , ou seja, a calota esférica de curvatura média  $1/2$  tem altura infinita.

Mais adiante será útil conhecermos o valor de  $H\text{-cap}(T_H)$ , para  $H > 1/2$ , para fazermos estimativas a respeito das demais nodóides. Observando que  $T_H = 2 \coth^{-1}(2H)$ , é imediato que

$$H\text{-cap}(T_H) = \frac{-4H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{4H^2 - 1}} \right).$$

Não estaremos interessados nas calotas esféricas de curvatura média menor do que  $1/2$ , pois apenas usaremos as calotas como supersoluções do problema de Dirichlet, e a  $(1/2)\text{-cap}$  será supersolução com qualquer  $H \in [0, 1/2]$  (ela satisfaz  $Q_H((1/2)\text{-cap}) \leq 0$ ), e além disso, ela tem

altura infinita. Assim, não importa o quão grande seja o valor dado de  $h = u|_\alpha$  no bordo, sempre conseguiremos colocar esta particular calota esférica de tal modo que ela fique por cima de  $h$  em  $\alpha$ .

### 3.1.2 Catenóides

O catenóide em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  é a superfície de revolução mínima, ou seja, é a H-nodóide com  $H = 0$ . Assim, denotaremos a 0-nod $_r$  por  $\text{cat}_r$ , cuja expressão é

$$\text{cat}_r(s) = \int_0^s \frac{\sinh(r)}{\sqrt{\sinh^2(t+r) - \sinh^2(r)}} dt \quad (3.2)$$

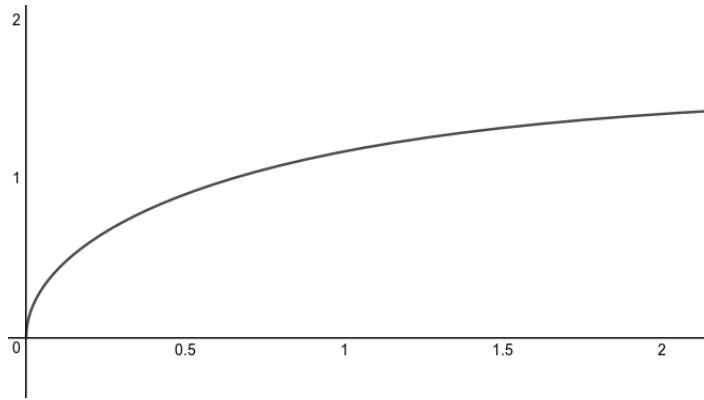


Figura 3.2:  $\text{cat}_2$

O catenóide de raio interno  $r$  é estritamente crescente, como fica evidente pelo integrando positivo. Além disso, é a única nodóide com esta característica. Também é um fato que as  $\text{cat}_r$  são limitadas superiormente por  $\pi/2$ . Este fato é provado por A. Barbosa em [3]. Em seguida provaremos esta limitação em decorrência de que  $r \mapsto \text{cat}_r(s)$  é crescente e  $\text{cat}_\infty$  tem supremo  $\pi/2$ . Assim, os catenóides  $\text{cat}_r$  são assintóticos a um valor menor ou igual a  $\pi/2$ .

### 3.1.3 Horonodóides e Horocatenóides

Tomando o limite  $r \rightarrow +\infty$  na expressão de H-nod $_r$ , obtemos a expressão para H-nod $_\infty$ , a função geradora do horonodóide de curvatura média  $H$ .

Os horonodóides podem ser vistos como superfícies CMC geradas por rotação em torno de um ponto no infinito. São gráficos de uma função do tipo  $\phi \circ s$  conforme descrito no início deste capítulo, exceto pela diferença de considerarmos aqui  $s : \mathbb{H}^2 \setminus B \rightarrow \mathbb{R}$  a função distância a um horociclo  $C \subset \mathbb{H}^2$ , onde  $B$  é o horodisco cuja fronteira é  $C$ . Temos que, para o laplaciano da distância  $s$  em  $\mathbb{H}^2 \setminus \bar{B}$ , vale  $\Delta s = 1$ . Assim, a função geradora da H-horonodóide satisfaz

$$\left( \frac{\phi'(s)}{\sqrt{1 + (\phi'(s))^2}} \right)' + \left( \frac{\phi'(s)}{\sqrt{1 + (\phi'(s))^2}} \right) + 2H = 0.$$

Em qualquer caso, seja considerando a distância ao horociclo ou simplesmente tomando o limite  $r \rightarrow +\infty$ , obtemos a seguinte expressão para as H-horonodóides:

$$\begin{aligned} \text{H-nod}_\infty(s) &= \int_0^s \frac{-2H + (1 + 2H)e^{-t}}{\sqrt{1 - (-2H + (1 + 2H)e^{-t})^2}} dt \\ &= \begin{cases} \theta - \frac{4H}{\sqrt{1 - 4H^2}} \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 - 2H}{1 + 2H}} \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \right), & \text{se } H < 1/2 \\ \theta - \tan \left( \frac{\theta}{2} \right), & \text{se } H = 1/2 \\ \theta - \frac{4H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{2H - 1}{2H + 1}} \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \right), & \text{se } H > 1/2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde  $\theta$  é tal que  $\cos \theta = -2H + (1 - 2H)e^{-s}$ . Observamos que  $\theta$  está bem definido: no caso  $H \leq 1/2$ ,  $\cos \theta$  começa em 1, quando  $s = 0$  e tende a  $-2H \geq -1$ , para  $s \rightarrow +\infty$ . Assim,  $\theta = 0$  ( $s = 0$ ), e  $\theta \rightarrow \cos^{-1}(-2H) \leq \pi$ ,  $s \rightarrow +\infty$ . Já o caso  $H > 1/2$  é análogo para  $s = 0$ , mas quando  $s \rightarrow T_H$ , temos que  $\cos \theta \rightarrow -1^+$ , e daí  $\theta \rightarrow \pi^-$ . Cabe aqui observarmos rapidamente que o domínio de definição de  $\text{H-nod}_\infty$  é idêntico ao de  $\text{H-nod}_r$ . Em qualquer caso, seja qual for  $H$ , sempre vale que  $\theta$  é crescente com  $s$ .

Se notarmos que a derivada de  $\text{H-nod}_\infty$  é estritamente decrescente, fica claro que ela atinge seu máximo absoluto no único valor  $s_0 > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \text{H-nod}'_\infty(s_0) &= \frac{-2H + (1 + 2H)e^{-s_0}}{\sqrt{1 - (-2H + (1 + 2H)e^{-s_0})^2}} = 0 \Leftrightarrow \\ -2H + (1 + 2H)e^{-s_0} &= 0 \Leftrightarrow s_0 = \ln \left( 1 + \frac{1}{2H} \right) \end{aligned}$$

pois  $\text{H-nod}'_\infty(s) > 0$  em  $0 < s < s_0$  e  $\text{H-nod}'_\infty(s) < 0$  em  $s > s_0$ .

Calculando  $\text{H-nod}_\infty(s_0)$ , tendo em vista que  $\cos \theta(s_0) = 0$ , isto é,  $\theta = \pi/2$ , obtemos seu valor máximo:

$$\begin{aligned} \max \text{H-nod}_\infty &= \text{H-nod}_\infty(s_0) = \\ &\begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{4H}{\sqrt{1 - 4H^2}} \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 - 2H}{1 + 2H}} \right), & \text{se } H < 1/2 \\ \pi/2 - 1, & \text{se } H = 1/2 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{4H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{2H - 1}{2H + 1}} \right), & \text{se } H > 1/2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Também será interessante para nossos propósitos conhecermos o valor de  $\text{H-nod}_\infty(T_H)$ . Consideremos primeiro o caso  $H > 1/2$ . Vimos acima que quando  $s \rightarrow T_H$ , então  $\theta \rightarrow \pi$ . Sabendo disto, tomando o limite de  $s$  tendendo a  $T_H$  na expressão de  $\text{H-nod}_\infty(s)$ , fica claro que

$$\text{H-nod}_\infty(T_H) = \pi - \frac{4H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \frac{\pi}{2} = \pi \left( 1 - \frac{2H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \right) \quad (3.5)$$

No caso  $0 < H \leq 1/2$ , queremos saber como se comporta  $\text{H-nod}_\infty(s)$  no limite quando  $s \rightarrow +\infty$ . Neste caso, vimos que  $\theta \rightarrow \cos^{-1}(-2H)$  de maneira crescente. Para vermos o que acontece na



expressão de  $H\text{-nod}_\infty(s)$  quando tomamos este limite, observamos que

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}, \text{ para } 0 \leq \theta < \pi.$$

Feito isto, fica fácil ver que, neste limite, o argumento da tangente hiperbólica inversa em  $H\text{-nod}_\infty(s)$  se aproxima assintoticamente de 1, e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \tanh^{-1}(x) = +\infty$ . Se  $H = 1/2$ , temos que  $\tan(\theta/2)$  vai a  $+\infty$ , pois  $\theta \rightarrow \pi$ . Após estas considerações, o ponto a que queríamos chegar é o seguinte:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} H\text{-nod}_\infty(s) = -\infty, \text{ para todo } H \in (0, 1/2]. \quad (3.6)$$

O caso  $H = 0$  não terá o mesmo comportamento pois o termo que vai a  $-\infty$  é nulo.

Por fim, consideremos o caso particular de uma horonodóide  $H\text{-nod}_\infty$  quando  $H = 0$ . Temos assim a  $0\text{-nod}_\infty$  que denotaremos por  $\text{cat}_\infty$ , que gera a superfície que chamaremos de horocatenóide. Sua expressão é dada por

$$\text{cat}_\infty(s) = \int_0^s \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} dt = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(e^{-s}).$$

Esta função é estritamente crescente, como já observamos sobre o comportamento das  $\text{cat}_r$ , e tende ao valor assintótico  $\pi/2$ .

### 3.1.4 Mais Propriedades

Nesta seção veremos algumas propriedades gerais das nodóides. Obteremos estimativas para seus valores assintóticos e zeros, e também analisaremos como se comportam as curvas da família de  $H\text{-nodóides}$  de raio interno  $r$  quando variamos os parâmetros  $H$  e  $r$ .

Antes de começarmos, retomemos a expressão para a  $H\text{-nodóide}$  em torno do círculo de raio  $r$

$$H\text{-nod}_r(s) = \int_0^s \frac{2H(\cosh(r) - \cosh(t+r)) + \sinh(r)}{\sqrt{\sinh^2(t+r) - [2H(\cosh(r) - \cosh(t+r)) + \sinh(r)]^2}} dt$$

o que pode ser expresso alternativamente da seguinte maneira:

$$H\text{-nod}_r(s) = \int_0^s \frac{g_r^H(t)}{\sqrt{1 - (g_r^H(t))^2}} dt,$$

onde a função auxiliar  $g_r^H$  é dada por

$$g_r^H(t) = \frac{2H(\cosh(r) - \cosh(t+r)) + \sinh(r)}{\sinh(t+r)} \quad (3.7)$$

Esta  $g$  que depende dos parâmetros  $H$  e  $r$  surge naturalmente na equação diferencial ordinária em  $u$  cuja solução é  $H\text{-nod}_r$ , se definirmos  $g := u'/\sqrt{1 + (u')^2}$ . Desta forma, a equação fica com uma aparência muito mais simples na forma

$$g'(s) + g(s) \coth(s+r) + 2H = 0.$$

Os cálculos para alguns resultados desta seção serão muito facilitados usando  $g_r^H$  para expressar  $H\text{-nod}_r$ .

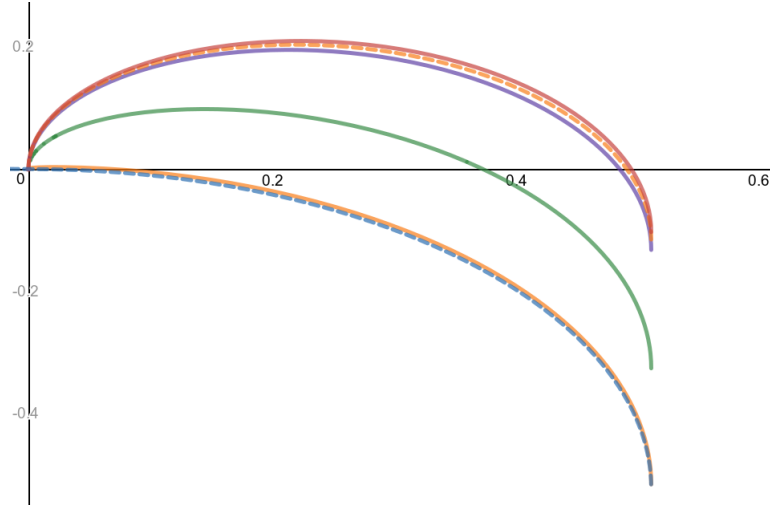


Figura 3.3: As curvas representam, de baixo para cima: 2-cap, 2-nod<sub>0.01</sub>, 2-nod<sub>0.1</sub>, 2-nod<sub>0.8</sub>, 2-nod<sub>1.2</sub> e 2-nod<sub>∞</sub>. Notamos o comportamento monotônico ao variar  $r$ .

O primeiro fato a ser apontado, dados  $H \geq 0$  e  $s \in (0, T_H]$ , é o seguinte:

$$\frac{\partial \text{H-nod}_r(s)}{\partial r} > 0. \quad (3.8)$$

Para ver que isto vale, procedemos por cálculo direto

$$\frac{\partial \text{H-nod}_r(s)}{\partial r} = \int_0^s \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{g_r^H(t)}{\sqrt{1 - (g_r^H(t))^2}} \right) dt = \int_0^s \frac{\frac{\partial}{\partial r} g_r^H(t)}{(1 - (g_r^H(t))^2)^{3/2}} dt,$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_r^H(t)}{\partial r} &= \left( \frac{2H(\sinh(r) - \sinh(t+r)) + \cosh(r)}{\sinh^2(t+r)} \right) \sinh(t+r) \\ &\quad - \left( \frac{2H(\cosh(r) - \cosh(t+r)) + \sinh(r)}{\sinh^2(t+r)} \right) \cosh(t+r) \\ &= \frac{2H}{\sinh^2(t+r)} (\sinh(r)\sinh(t+r) - \sinh^2(t+r)) \\ &\quad - \cosh(r)\cosh(t+r) + \cosh^2(t+r) \\ &\quad + \left( \frac{\cosh(r)\sinh(t+r) - \sinh(r)\cosh(t+r)}{\sinh^2(t+r)} \right) \\ &= \frac{2H(1 - \cosh(t)) + \sinh(t)}{\sinh^2(t+r)} \\ &= \frac{2\sinh^2(t/2)}{\sinh^2(t+r)} \left[ \coth\left(\frac{t}{2}\right) - 2H \right]. \end{aligned}$$

Por esta expressão fica evidente que a derivada de  $g_r^H(t)$  com respeito a  $r$  é estritamente positiva para  $0 < t < T_H$ . Isto prova o fato que  $\text{H-nod}_r(s)$  é estritamente crescente em  $r$ , dados quaisquer  $H \geq 0$  e  $s \in (0, T_H]$ .

Como consequência imediata deste fato, podemos afirmar que, se  $0 < H \leq 1/2$ , então  $\text{H-nod}_r(s)$  é menor do que  $\text{H-nod}_\infty(s)$ , e como  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \text{H-nod}_\infty(s) = -\infty$ , então necessariamente

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \text{H-nod}_r(s) = -\infty$$

para todo  $r > 0$ . No caso mínimo, ou seja, quando  $H = 0$ , vimos que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \text{cat}_\infty(s) = \pi/2$ , e que  $\text{cat}_r$  cresce estritamente ao seu valor assintótico  $\text{cat}_r(\infty)$ . O que podemos afirmar agora é que

$$\text{cat}_r(\infty) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \text{cat}_r(s) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Outra implicação de  $\partial \text{H-nod}_r / \partial r > 0$  é que o valor final em  $T_H$ , da  $\text{H-nod}_r$  de  $H > 1/2$  fica estimado por cotas inferior e superior provenientes de  $\text{H-cap}(T_H)$  e  $\text{H-nod}_\infty(T_H)$ :

$$\frac{-4H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{4H^2 - 1}} \right) \leq \text{H-nod}_r(T_H) \leq \pi \left( 1 - \frac{2H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \right).$$

Além disso, dado  $H > 0$ , a função  $\text{H-nod}_r$  fica limitada superiormente pelo valor máximo de  $\text{H-nod}_\infty$ , ou seja,

$$\text{H-nod}_r(s) \leq \frac{\pi}{2} - \frac{4H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{2H - 1}{2H + 1}} \right), \text{ para todo } s \in [0, T_H]$$

Analisemos agora o que acontece ao variarmos o parâmetro  $H$ , mantendo fixos  $r$  e  $s$ . O cálculo da derivada fica

$$\frac{\partial \text{H-nod}_r(s)}{\partial H} = \int_0^s \frac{\partial}{\partial H} \left( \frac{g_r^H(t)}{\sqrt{1 - (g_r^H(t))^2}} \right) dt = \int_0^s \frac{\frac{\partial}{\partial H} g_r^H(t)}{(1 - (g_r^H(t))^2)^{3/2}} dt,$$

e como

$$\frac{\partial g_r^H(t)}{\partial H} = \frac{\cosh(r) - \cosh(t+r)}{\sinh(t+r)} < 0, \text{ para todo } t > 0,$$

concluimos que a aplicação  $H \mapsto \text{H-nod}_r(s)$  é decrescente. Desta forma, se ambas  $\text{H}_1\text{-nod}_r(s)$  e  $\text{H}_2\text{-nod}_r(s)$  estiverem definidas (pois lembremos que o domínio varia com  $H$ ), então

$$H_1 \leq H_2 \Leftrightarrow \text{H}_1\text{-nod}_r(s) \geq \text{H}_2\text{-nod}_r(s). \quad (3.9)$$

Consideremos agora os valores máximos das  $\text{H-nod}_r$ . Já vimos anteriormente que o máximo valor de  $\text{H-cap}$  é atingido em  $s = 0$ , e o máximo de  $\text{H-nod}_\infty$  em  $s = \ln(1 + \frac{1}{2H})$ . Em geral,  $\text{H-nod}_r$  atinge um único máximo absoluto, contanto que  $H \neq 0$ . Isto fica mais claro se olharmos para a derivada

$$\text{H-nod}'_r(s) = \frac{g_r^H(s)}{\sqrt{1 - (g_r^H(s))^2}}$$

que começa positiva e troca de sinal em um particular  $s > 0$  que denotaremos por  $x_H(r)$ , que é tal que

$$g_r^H(x_H(r)) = \frac{2H(\cosh(r) - \cosh(x_H(r) + r)) + \sinh(r)}{\sinh^2(x_H(r) + r)} = 0.$$

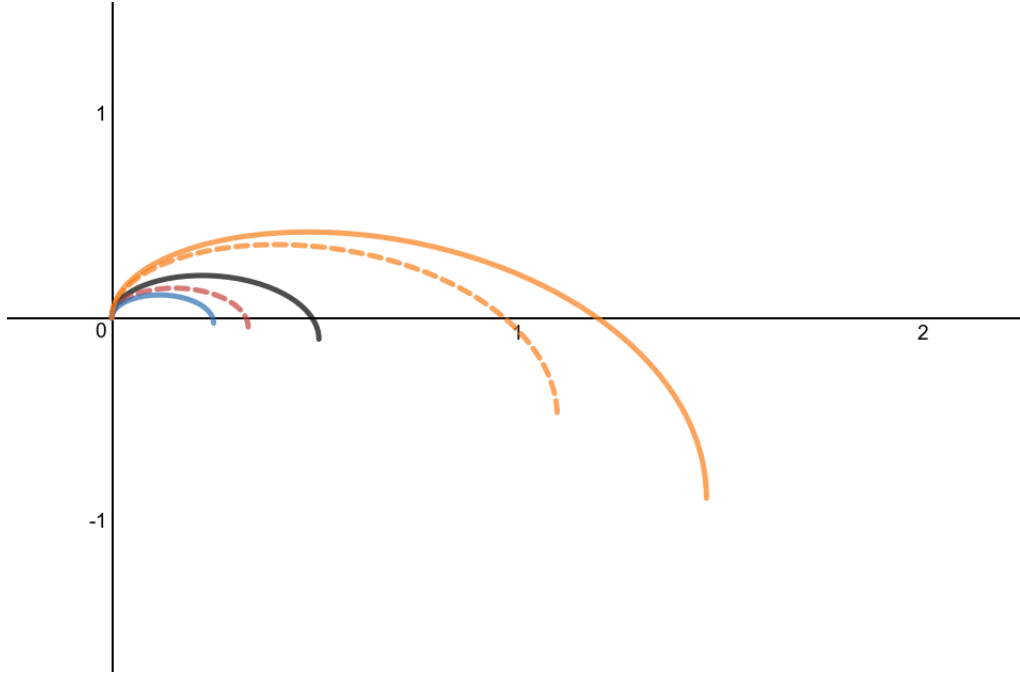


Figura 3.4: As curvas são os gráficos de, na ordem de baixo para cima, 4-nod<sub>3</sub>, 3-nod<sub>3</sub>, 2-nod<sub>3</sub>, 1-nod<sub>3</sub> e 0.8-nod<sub>3</sub>.

Isso ocorre se, e somente se

$$2H(\cosh(r) - \cosh(x_H(r) + r)) + \sinh(r) = 0,$$

e daí

$$x_H(r) = \cosh^{-1} \left( \cosh(r) + \frac{\sinh(r)}{2H} \right) - r. \quad (3.10)$$

Podemos verificar que  $x_H(0) = 0$  é de fato o valor em que H-cap atinge seu máximo. E também, tomando o limite

$$\begin{aligned} x_H(\infty) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} x_H(r) \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left( \cosh(r) + \frac{\sinh(r)}{2H} + \sqrt{\left( \cosh(r) + \frac{\sinh(r)}{2H} \right)^2 - 1} \right) - \ln(e^r) \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{\cosh(r)}{e^r} + \frac{\sinh(r)}{2He^r} + \sqrt{\left( \frac{\cosh(r)}{e^r} + \frac{\sinh(r)}{2He^r} \right)^2 - e^{-2r}} \right) \\ &= \ln \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4H} + \sqrt{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4H} \right)^2} \right) \\ &= \ln \left( 1 + \frac{1}{2H} \right), \end{aligned}$$

recuperamos o valor de  $s_0$  que tínhamos calculado, onde H-nod<sub>∞</sub> atinge seu máximo. Verifica-se

também que  $x_H(r)$  é crescente:

$$\frac{\partial x_H(r)}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{\left(\coth(r) + \frac{\sinh(r)}{2H}\right)^2 - 1}} \left( \sinh(r) + \frac{\cosh(r)}{2H} \right) - 1 > 0.$$

Isto é equivalente a

$$\sinh(r) + \frac{\cosh(r)}{2H} > \sqrt{\left(\cosh(r) + \frac{\sinh(r)}{2H}\right)^2 - 1}.$$

Elevando ao quadrado, temos

$$\sinh^2(r) + \frac{\cosh^2(r)}{4H^2} + \frac{\sinh(r)\cosh(r)}{H} > \cosh^2(r) + \frac{\sinh^2(r)}{4H^2} + \frac{\sinh(r)\cosh(r)}{H} - 1,$$

que é o mesmo que

$$\frac{\cosh^2(r)}{4H^2} > \frac{\sinh^2(r)}{4H^2}$$

que sempre vale. Portanto, o ponto  $x_H(r)$  onde  $\text{H-nod}_r$  assume seu máximo é crescente com  $r$  e obedece

$$0 \leq x_H(r) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2H}\right).$$

A próxima estimativa será sobre o valor positivo para o qual  $\text{H-nod}_r$  é zero, a que iremos nos referir por  $\rho_H(r)$ . Conforme o que foi visto acima, se  $H > 0$  e  $r > 0$ , então  $\text{H-nod}_r$  sempre terá zero positivo. Esta afirmação se justifica porque, inicialmente,  $\text{H-nod}_r$  cresce, começando em zero, até alcançar um valor máximo em  $x_H(r)$ . Após, ela decresce monotonicamente, tendendo a  $-\infty$ , se  $0 < H \leq 1/2$ , ou atingindo  $\text{H-nod}_r(T_H) < 0$ , caso seja  $H > 1/2$ .

O fato de que  $\text{H-nod}_r$  é estritamente positiva em  $(0, \rho_H(r))$  será importante para que se tenham supersoluções quando estivermos trabalhando com o método de Perron. Não é possível encontrar uma expressão explícita para  $\rho_H(r)$  envolvendo funções elementares, então nos limitaremos a estimar seu valor por baixo. Será de grande valia ter esta estimativa, pois sabendo quando  $\text{H-nod}_r$  é positiva, saberemos dar condições suficientes para que ela sirva como supersolução. A esse respeito, a seguinte proposição, que é um mimetismo do que foi feito no  $\mathbb{R}^3$  em [8], garante que  $\rho_H(r)$  não está antes de  $2x_H(r)$ .

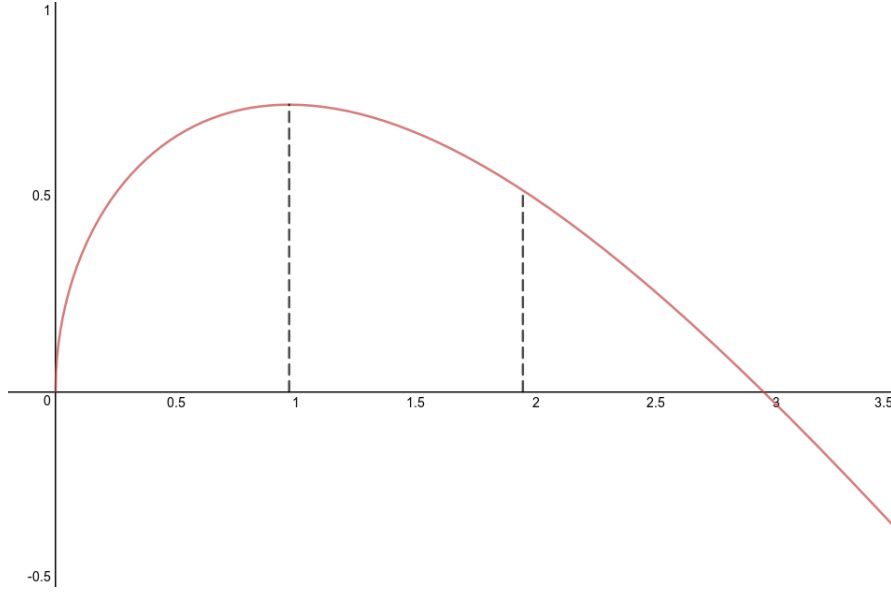


Figura 3.5:  $\text{H-nod}_r$  e em pontilhado  $x_H(r)$  e  $2x_H(r)$ , com  $H = 0.3$ ,  $r = 2$ .

**Proposição 3.1.1.** : *Sejam  $H > 0$  e  $r > 0$ , e seja  $x_H(r)$  definido como a solução positiva de*

$$2H(\cosh(x_H(r) + r) - \cosh(r)) = \sinh(r).$$

*Sob estas condições,  $\text{H-nod}_r(s) \geq 0$  para todo  $s \in [0, 2x_H(r)]$ .*

**Demonstração:** Por simplicidade, escreveremos em vez de  $x_H(r)$ , apenas  $x$ . Notamos que  $\text{H-nod}_r(0) = 0$ , e  $\text{H-nod}_r$  cresce até atingir seu máximo absoluto em  $x$ , e depois decresce. Queremos mostrar que o crescimento de  $\text{H-nod}_r$  em  $[0, x]$  é maior do que o seu decrescimento em  $[x, 2x]$ . Para isto, é suficiente mostrar que

$$|\text{H-nod}'_r(x + t)| \leq |\text{H-nod}'_r(x - t)|, \forall t \in (0, x).$$

Dado que  $\text{H-nod}'_r(t) = g_r^H(t) / \sqrt{1 - (g_r^H(t))^2}$ , percebemos que a desigualdade acima equivale às seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{-g_r^H(x + t)}{\sqrt{1 - (g_r^H(x + t))^2}} &\leq \frac{g_r^H(x - t)}{\sqrt{1 - (g_r^H(x - t))^2}}, \\ \frac{(g_r^H(x + t))^2}{1 - (g_r^H(x + t))^2} &\leq \frac{(g_r^H(x - t))^2}{1 - (g_r^H(x - t))^2}, \\ (1 - (g_r^H(x - t))^2)(g_r^H(x + t))^2 &\leq (1 - (g_r^H(x + t))^2)(g_r^H(x - t))^2, \\ (g_r^H(x + t))^2 &\leq (g_r^H(x - t))^2 \end{aligned}$$

que, levando em conta o sinal, equivale a

$$-g_r^H(x + t) \leq g_r^H(x - t).$$

Isto é o mesmo que

$$\frac{-2H(\cosh(r) - \cosh(x + r + t)) - \sinh(r)}{\sinh(x + r + t)} \leq \frac{2H(\cosh(r) - \cosh(x + r - t)) + \sinh(r)}{\sinh(x + r - t)}$$

que, se usarmos a definição de  $x_H(r)$ , equivale a

$$\frac{-2H \cosh(x+r) + 2H \cosh(x+r+t)}{\sinh(x+r+t)} \leq \frac{2H \cosh(x+r) - 2H \cosh(x+r-t)}{\sinh(x+r-t)},$$

desenvolvendo mais,

$$\frac{\cosh(x+r)(\cosh(t)-1) + \sinh(x+r)\sinh(t)}{\sinh(x+r+t)} \leq \frac{-\cosh(x+r)(\cosh(t)-1) + \sinh(x+r)\sinh(t)}{\sinh(x+r-t)},$$

que implica

$$0 \leq \cosh(x+r)\sinh(x+r)[\sinh^2(t) - \cosh(t)(\cosh(t)-1)],$$

ou equivalentemente

$$0 \leq \cosh(x+r)\sinh(x+r)(\cosh(t)-1),$$

válido para todo  $t \geq 0$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

## 3.2 O Método de Perron

Para demonstrar os teoremas de existência usaremos o Método de Perron, que aparece na seção 2.8 de [10] como O Método das Funções Subharmônicas, e esta é a referência principal para o que veremos nesta seção. O método consiste em tomar o supremo das subsoluções de  $Q_H = 0$  em  $\Omega$ , com  $H \geq 0$ , para o operador  $Q_H$  definido por

$$Q_H(u) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + 2H.$$

Este operador é elíptico, por isso as técnicas utilizadas são muito parecidas com as que usamos para funções harmônicas, como princípio da comparação e levantamento harmônico, etc.

Uma subsolução de  $Q_H = 0$  num domínio  $\Omega$  é uma função  $v \in C^0(\Omega)$  tal que, se para qualquer  $U \subset\subset \Omega$  e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $Q_H(u) = 0$  em  $U$  com  $v|_{\partial U} \leq u|_{\partial U}$ , então  $v \leq u$  em  $U$ . Caso  $v \in C^2(\Omega)$ , então o fato de ser  $Q_H(v) \geq 0$  implica que  $v$  é uma subsolução. Define-se supersolução de forma análoga, com a modificação de se considerarem as desigualdades contrárias.

Um fato muito importante é que para  $Q_H$  vale o Princípio de Comparação (ver Seção 10.1 de [10]): se  $v$  é uma subsolução e  $w$  é uma supersolução e  $v \leq w$  em  $\partial\Omega$ , então vale que  $v \leq w$  em  $\Omega$ . Lembremos que o Problema de Dirichlet (1.6) para o qual buscamos solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  é

$$\begin{cases} Q_H(u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

para  $H \geq 0$ , descrito na Seção 1.2. Deste princípio decorre a unicidade de solução do problema, pois uma solução é em particular subsolução e supersolução.

Considere agora

$$S = \{z \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \mid z \text{ é subsolução de } Q_H = 0, z|_{\partial\Omega} \leq \varphi\}.$$

O conjunto  $S$  é não vazio pois a função constante  $v = \min\{0, \varphi\}$  está nele. O seguinte lema prova que os elementos de  $S$  são superiormente limitados, dadas algumas condições.

**Lema 3.2.1.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\}$  o domínio limitado pelas curvas  $\alpha$  e  $\beta$ , satisfazendo as condições (1.1) e (1.2), e seja  $H \geq 0$  constante. Se  $H > 1/2$ , suponha além disso que*

$$R \leq T_H \text{ e que } h \leq H\text{-cap}(T_H - d) - H\text{-cap}(T_H). \quad (3.11)$$

Então o Problema de Dirichlet admite uma função  $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $Q_h(w) \leq 0$  em  $\Omega$  e  $w|_{\partial\Omega} \geq \varphi$ .

**Demonstração:** Vejamos primeiro o caso  $H \leq 1/2$ . Podemos tomar  $L > R$  grande o suficiente para que

$$2 \cosh\left(\frac{L}{2}\right) \geq 2 \cosh\left(\frac{L-d}{2}\right) + h. \quad (3.12)$$

Feito isso, considere  $B_L = B_L(a)$ , disco em  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  de centro  $a$  e raio  $L$  contendo  $\Omega$ , e tal que  $C_L = \partial B_L$  é tangente a  $\beta$  em um ponto qualquer. Seja  $s : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  a função distância ao ponto  $a$  e defina  $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$w(q) = (1/2)\text{-cap}(s(q)) - (1/2)\text{-cap}(L).$$

Como  $(1/2)\text{-cap}$  é decrescente e  $\Omega \subset B_L$ , vale que  $q \in \beta \Rightarrow s(q) \leq L \Rightarrow w(q) \geq 0$ . Portanto  $w|_{\beta} \geq 0$ .

Se  $q \in \alpha$ , então  $s(q) \leq L - d$ . Daí, por (3.12):

$$\begin{aligned} w(q) &= (1/2)\text{-cap}(s(q)) - (1/2)\text{-cap}(L) \geq (1/2)\text{-cap}(L - d) - (1/2)\text{-cap}(L) \\ &= 2 \cosh(L/2) - 2 \cosh\left(\frac{L-d}{2}\right) \geq h. \end{aligned}$$

Isto é, temos  $w|_{\partial\Omega} \geq \varphi$ . Pela construção de  $(1/2)\text{-cap}$ , temos que  $Q_H(w) = -2(1/2) + 2H = 2H - 1 \leq 0$  em  $\Omega$ .

Agora, consideremos  $H > 1/2$ . Tomemos um círculo de raio  $T_H$ ,  $C_{T_H}(a)$ , que delimita uma região contendo  $\Omega$ , o que é possível pela hipótese adicional (3.11). Seja  $s : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  a distância ao centro  $a$  do círculo  $C_{T_H}$ , e definamos  $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $w(q) = H\text{-cap}(s(q)) - H\text{-cap}(T_H)$ . Por construção, temos  $Q_H(w) = 0$  em  $\Omega$ . Para pontos  $q \in \beta$ , vale  $s(q) \leq T_H$ , e portanto  $w(q) \geq 0$ , pois as  $H\text{-cap}$  são decrescentes. Para  $q \in \alpha$ , vale  $s(q) \leq T_H - d$ , donde  $H\text{-cap}(s(q)) \geq H\text{-cap}(T_H - d)$ . Com a condição (3.11) isto implica  $w(q) \geq h$ . Assim, temos  $w|_{\partial\Omega} \geq \varphi$ .  $\square$

Assim, usando o Princípio do Máximo, temos que as subsoluções de  $S$  estão superiormente limitadas por  $H\text{-cap}$ . Portanto, podemos definir  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$u(p) = \sup_{z \in S} z(p), \text{ para } p \in \Omega. \quad (3.13)$$

Queremos provar que  $u$  assim definida é de classe  $C^2(\Omega)$  e satisfaz  $Q_H(u) = 0$  em  $\Omega$ . Atentemos para o fato de que, mesmo após isso, ainda restará mostrar que  $u$  é contínua em  $\partial\Omega$ . Para isso, dada uma subsolução de  $Q_H = 0$  em  $\Omega$  e um disco  $D \subset \Omega$ , defina

$$U(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x), & \text{para } x \in D \\ u(x), & \text{para } x \in \Omega \setminus D \end{cases}$$

onde  $\tilde{u}$  é a função tal que  $Q_H(\tilde{u}) = 0$  em  $D$  e  $\tilde{u}|_{\partial D} = u|_{\partial D}$ , que existe para algum disco geodésico  $D$  (Teorema 1.1 de [6]). Chamaremos  $U$  o *levantamento* de  $u$  em  $D$ , que acontece de também ser uma subsolução. Com isso, temos o seguinte

**Teorema 3.2.2.** *A função  $u$  dada por (3.13) satisfaz  $Q_H(u) = 0$  em  $\Omega$ .*



**Demonstração:** Fixe um ponto  $q \in \Omega$ . Por definição de  $u$ , existe uma sequência  $\{z_n\} \subset S$  tal que  $z_n(q) \rightarrow u(q)$ . Podemos assumir que as  $z_n$  são limitadas, substituindo  $z_n$  por  $\max\{z_n, \min \varphi\}$  caso necessário. Agora, tome um disco  $D = B_\rho(q) \subset\subset \Omega$  e seja  $Z_n$  o levantamento de  $z_n$  em  $D$ . Assim, temos que  $Z_n \in S$ ,  $Z_n(q) \rightarrow u(q)$  e a sequência  $\{Z_n\}$  contém uma subsequência  $\{Z_{n_k}\}$  convergindo uniformemente em qualquer disco  $B_\sigma(q)$ , com  $\sigma < \rho$ , a uma função  $v$  tal que  $Q_H(v) = 0$  em  $D$ . É claro que  $v \leq u$  e  $v(q) = u(q)$ . Suponha agora que  $v(p) < u(p)$  em algum  $p \in D$ . Então existe uma função  $\bar{u} \in S$  tal que  $v(p) < \bar{u}(p)$ . Definindo  $w_k = \max\{\bar{u}, Z_{n_k}\}$  e também seus levantamentos  $W_k$  em  $D$ , obtemos uma subsequência de  $\{W_k\}$  convergindo a uma função  $w$  tal que  $Q_H(w) = 0$  com  $v \leq w \leq u$  em  $D$  e  $v(q) = w(q) = u(q)$ . Mas daí, pelo Princípio de Comparação, devemos ter  $v = w$  em  $B$ , contradizendo a definição de  $\bar{u}$ . Portanto  $Q_H(u) = 0$  em  $\Omega$ .  $\square$

Uma barreira superior (inferior) em um ponto  $p \in \partial\Omega$  é uma supersolução (subsolução)  $w$  ( $v$ ) de  $Q_H = 0$  em  $\Omega$  tal que  $w \geq \varphi$  ( $v \leq \varphi$ ) em  $\partial\Omega$  e  $w(p) = \varphi(p)$  ( $v(p) = \varphi(p)$ ). A existência de uma supersolução num ponto garante cada  $z \in S$  (o conjunto das subsoluções menores ou iguais ao dado  $\varphi$  no bordo) fica limitada superiormente por  $\varphi$  naquele ponto, pelo Princípio de Comparação. E a existência de uma barreira inferior num ponto garante que solução dada pelo método de Perron (3.13) fica limitada inferiormente por  $\varphi$  naquele ponto.

Assim, para provarmos que a função dada por (3.13) é solução do Problema (1.6), apenas precisamos mostrar que ela é contínua e igual a  $\varphi$  na fronteira de  $\Omega$ . Isto é feito construindo barreiras inferiores e superiores para o Problema (1.6) em cada ponto da fronteira, e é a essência das demonstrações dos teoremas de existência.

# Capítulo 4

## Demonstrações

Como vimos no capítulo anterior, existe uma  $u \in C^2(\Omega)$  satisfazendo  $Q_H(u) = 0$ . Para provar que  $u$  é solução do Problema de Dirichlet (1.6), basta construirmos barreiras superiores e inferiores em cada ponto de  $\partial\Omega$ , garantindo que  $u$  é contínua até o bordo de  $\Omega$ . Assim, seguem demonstrações abaixo. Os teoremas do Capítulo 1 serão enunciados novamente para conveniência do leitor.

**Teorema 1.3.1** *Seja  $H \geq 0$ . Suponha  $\alpha$  e  $\beta$  satisfazendo as condições (1.1) e (1.2), respectivamente, e que*

$$\begin{aligned} \text{diam}\beta &\leq d + 2 \cosh^{-1} \left( \cosh(r) + \frac{\sinh(r)}{2H} \right) \\ 0 \leq h &\leq \min \left\{ \text{cat}_r(d), \frac{2Hd}{\sqrt{\coth^2(r) - 4H^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

*considerando  $\text{diam}\beta < +\infty$  quando  $H = 0$  e  $h < +\infty$ , caso  $\coth^2(r) - 4H^2 \leq 0$ . Se for  $H > 1/2$ , suponha adicionalmente que*

$$\begin{aligned} R &\leq T_H, \text{ e também que} \\ 0 \leq h &\leq \frac{4H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 - 4H^2 \tanh^2\left(\frac{T_H - d}{2}\right)}{4H^2 - 1}} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

*Então, o problema de Dirichlet (1.6) associado a  $H$  possui solução única  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ .*

### Demonstração do Teorema 1.3.1:

**Barreiras em pontos de  $\beta$ :** Como  $h \geq 0$ , segue imediatamente que a função identicamente nula,  $v = 0$  em  $\bar{\Omega}$ , é subsolução ( $Q_H(v) = 2H \geq 0$ , em  $\Omega$ ) e  $v|_\alpha \leq h$ . Além disso,  $v(p) = \varphi(p) = 0$  em  $p \in \beta$ . Portanto esta função é barreira inferior para todos os pontos de  $\beta$ . Para barreira superior em qualquer ponto de  $\beta$ , basta tomarmos uma das calotas esféricas utilizadas no Lema 3.2.1, tomando o círculo exterior tangente a  $\beta$  em  $p$ .

**Barreiras em pontos de  $\alpha$ :** Construamos primeiro as barreiras inferiores. Usando a condição do círculo interior de raio  $r$  em  $\alpha$ , tomamos um tal círculo com centro  $a \in \mathbb{H}^2$ ,  $C_r = C_r(a)$  tangente a  $\alpha$  em  $p \in \alpha \cap C_r$ . Este círculo está contido na região limitada por  $\alpha$ . Assim, consideraremos daqui em diante  $s : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  a função distância a  $C_r$ .

Caso seja  $h \leq \text{cat}_r(d)$ , a barreira inferior em  $p$  será dada por

$$v_p(q) = -\text{cat}_r(s(q)) + h, \text{ para } q \in \bar{\Omega}.$$

Notemos que pela construção de  $\text{cat}_r$ , temos que  $Q_H(v_p) = 2H \geq 0$ , ou seja,  $v_p$  é subsolução. Se  $q \in \beta$ , então  $s(q) \geq d$ . Daí, como  $\text{cat}_r$  é crescente, temos  $\text{cat}_r(s(q)) \geq \text{cat}_r(d)$ , o que implica

$$v_p(q) = -\text{cat}_r(s(q)) + h \leq -\text{cat}_r(d) + h \leq 0.$$

Já se  $q \in \alpha$ , é claro que temos  $-\text{cat}_r(s(q)) \leq 0$ . Daí  $v_p \leq h$  para  $q \in \alpha$ . Por fim, como  $p \in \alpha$ , vale  $v_p(p) = h = \varphi(p)$ . Segue que  $v_p$  é barreira inferior em  $p \in \alpha$ .

Caso tenhamos  $h > \text{cat}_r(d)$ , tomamos como barreira o cone truncado de raio interno  $r$  contendo  $C_r$ . Seja  $v_p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$v_p(q) = -\frac{h}{d}s(q) + h.$$

Temos que  $v_p$  satisfaz  $v_p(p) = h$ . Se  $q \in \alpha$ , então  $s(q) \geq 0$ , por  $C_r$  está contido na região limitada por  $\alpha$ . Pela mesma razão, temos  $s(q) \geq d$  para  $q \in \beta$ . Estas últimas considerações implicam  $v|_{\partial\Omega} \leq \varphi$ . Além disso,  $v_p$  satisfaz

$$Q_H(v_p) = \frac{-h/d}{\sqrt{1 + (h/d)^2}} \coth(s+r) + 2H.$$

Assim,  $v_p$  será subsolução isto é,  $Q_H(v_p) \geq 0$ , se, e somente se

$$\frac{2H}{\coth(s+r)} \geq \frac{h/d}{\sqrt{1 + (h/d)^2}}, \quad \forall s > 0,$$

que equivale a

$$\frac{2H}{\coth(r)} \geq \frac{h/d}{\sqrt{1 + (h/d)^2}}.$$

Esta desigualdade pode ser reescrita na forma

$$\frac{h}{d} \leq \frac{2H}{\sqrt{\coth^2(r) - 4H^2}},$$

que assumimos como hipótese. Notemos, pela expressão para  $Q_H(v_p)$ , que caso  $\coth^2(r) - 4H^2 \leq 0$ , então teremos  $Q_H(v_p) \geq 0 \quad \forall s \geq 0$ , pois o valor máximo de  $\coth(s+r)$  é  $\coth(r)$ , e ainda  $(h/d)/\sqrt{1 + (h/d)^2} < 1$ . Assim,  $v_p$  é subsolução para qualquer  $h \geq 0$ , e desta maneira, temos uma barreira inferior para  $p \in \alpha$ .

Agora, como barreira superior em um ponto  $p \in \alpha$ , usamos uma H-nod $_r$  em torno de  $C_r$ . Onde  $C_r = C_r(a)$ , lembremos, é o círculo de raio  $r$  e centro  $a$ , tangente à curva  $\alpha$  em  $p$  e contido na região limitada por ela. Definamos então  $w_p(q) = \text{H-nod}_r(s(q)) + h$  para  $q \in \bar{\Omega}$ . Temos que  $Q_H(w_p) = 0$ . Considerando agora  $q \in \bar{\Omega}$ , seja  $q' \in \beta$  o ponto onde a geodésica partindo de  $q$  passando por  $a$  encontra  $\beta$  (figura 4.1). Daí

$$d(q, q') = d(a, q) + d(a, q') = s(q) + r + s(q') + r \geq s(q) + d + 2r.$$

Como  $d(q, q') \leq \text{diam}\beta$ , segue que  $\text{diam}\beta \geq s(q) + d + 2r$ . Isto implica, levando em conta a hipótese  $\text{diam}\beta \leq d + 2x_H(r)$ , que  $s(q) \leq 2x_H(r)$ . Nestas condições, pela Proposição 3.1.1, segue

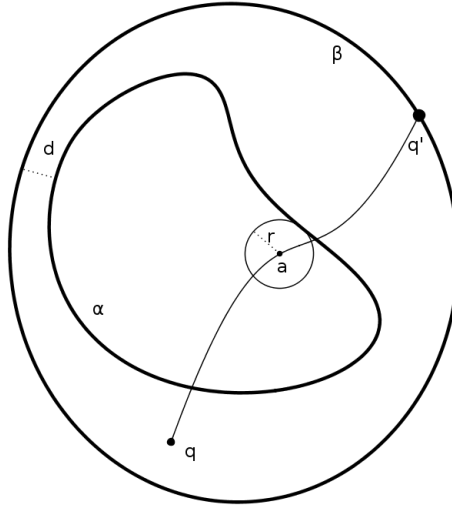


Figura 4.1: Geodésica partindo de  $q$ , por  $a$ , encontrando  $\beta$  em  $q'$ .

que  $H\text{-nod}_r(s(q)) \geq 0$ , portanto  $w_p|_{\bar{\Omega}} \geq h$ . Para concluir, verificamos que  $w_p(p) = h = \varphi(p)$ , e segue que  $w_p$  é barreira superior em  $p \in \alpha$ .  $\square$

No Teorema abaixo estamos considerando  $h < 0$ , ou seja, a curva  $\alpha$  está abaixo de  $\beta$ .

**Teorema 1.3.2** *Seja  $H \geq 0$  e  $\alpha$  e  $\beta$  como em (1.1) e (1.2). Suponha que  $\text{diam}\beta - (2r + d) \leq T_H$ ,  $R \leq T_H$ , e que*

$$0 \leq -h \leq \min\{H\text{-nod}_r(d), H\text{-nod}_r(\text{diam}\beta - (2r + d))\}. \quad (4.3)$$

*Então o Problema (1.6) possui solução única  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ .*

**Demonstração do Teorema 1.3.2:**

**Barreiras em pontos de  $\beta$ :** As supersoluções que obtivemos no Lema 3.2.1 servem como barreira superior em qualquer ponto de  $\beta$ . Basta tomar uma calota esférica definida num disco cuja fronteira é o círculo tangente a  $\beta$  num ponto  $p \in \beta$  qualquer. Dependendo do valor de  $H$  ser no máximo  $1/2$  ou não, usa-se uma  $(1/2)$ -cap ou H-cap, conforme a construção feita no Lema 3.2.1. Para barreiras inferiores em  $\beta$ , considere o problema:

$$\begin{cases} Q_0(u) = 0 \\ u|_{\beta} = 0 \\ u|_{\alpha} = -h(\geq 0). \end{cases}$$

Por hipótese, vale que  $-h \leq H\text{-nod}_r(d)$ , o que implica, pelo fato de  $H \mapsto H\text{-nod}_r(s)$  ser decrescente, que  $-h \leq 0\text{-nod}_r(d) = \text{cat}_r(d)$ . Neste caso, o problema acima tem solução  $z \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , de acordo com o Teorema 1.3.1. Assim,  $-z$  é tal que  $Q_H(-z) = 2H \geq 0$ , portanto, serve como barreira inferior para todos os pontos  $p \in \beta$ .

**Barreiras em pontos de  $\alpha$ :** podemos considerar primeiro  $v(q) = -h \forall q \in \bar{\Omega}$ . Esta função satisfaz  $Q_H(v) = 2H \geq 0$ , sendo assim barreira inferior para todos os pontos de  $\alpha$ . Para obter barreira superior em um dado  $p \in \alpha$ , tomemos o círculo  $C_r$  contido na região limitada por  $\alpha$  e tangente

a  $\alpha$  em  $p$ . Agora, definimos  $w(q) = \text{H-nod}_r(s(q)) + h$  a nodóide de raio interno  $r$  em torno de  $C_r$ , onde  $s$  é a distância ao círculo  $C_r$ . Já temos  $w(p) = \varphi(p) = h$  e  $Q_H(w) = 0$  em  $\Omega$ , em particular  $Q_H(w) \leq 0$  donde  $w$  é supersolução. Repare que, para qualquer  $q \in \beta$ , a função distância satisfaz  $d \leq s(q) \leq \text{diam}\beta - (2r + d)$ . Como a  $\text{H-nod}_r$  é côncava, seu mínimo valor é atingido na fronteira, e por esta razão a desigualdade anterior implica  $w(q) \geq \min\{w(d), w(\text{diam}\beta - (2r + d))\} \geq 0$ , em  $\beta$ , devido à hipótese (4.3). Desta forma, concluímos que  $w|_\beta \geq 0$  e  $w|_\alpha \geq h$ , sendo assim  $w$  uma barreira superior em  $p$ .  $\square$

A seguir, as provas dos Teoremas 1.3.3 e 1.3.4 reproduzem um dos resultados de não existência de [8]. Nas demonstrações é fortemente utilizado o Princípio da Tangência que é essencialmente o fato de que duas superfícies imersas na variedade, com mesma curvatura média e com vetor normal apontando no mesmo sentido, não podem se tangenciar num ponto interior (relativo à superfície, isto é, não pertencente ao bordo), a menos que elas coincidam. Assim, a altura limitada de alguma nodóide ou horonodóide implicará a limitação na altura de uma CMC nas condições destes teoremas. A idéia é análoga ao que acontece com curvas planas. Se duas curvas se tangenciam num ponto e seus vetores curvatura apontam no mesmo sentido, então aquela que for menos curvada estará sempre “envolvendo” a de curvatura menor, como é ilustrado na figura 4.2.

**Teorema 4.1.1** *Se  $M_1$  e  $M_2$  são duas hipersuperfícies de uma variedade  $N$ , e  $H_1$  e  $H_2$  seus vetores curvatura média, e  $p \in M_1 \cap M_2$  é um ponto em que  $M_1$  e  $M_2$  são tangentes, com  $M_1$  localmente contida no mesmo lado de  $M_2$  definido por  $H_2$ , então  $|H_2| \leq |H_1|$ . Além disso, se  $M_1$  e  $M_2$  têm curvatura média constante, a igualdade vale se, e somente se,  $M_1 = M_2$ .*

O Teorema acima é o Princípio da Tangência. Para referência, consultar o Capítulo 3 de [14].

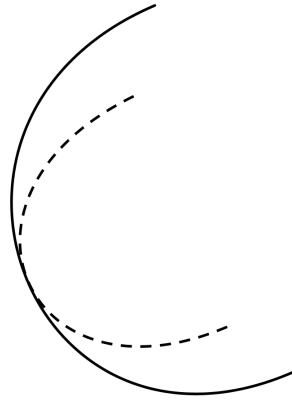


Figura 4.2: Curva de traço contínuo com curvatura menor do que a da curva tracejada.

**Teorema 1.3.3** *Seja  $M \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  uma superfície conexa imersa de curvatura média constante  $H$  contida num horocilindro  $B \times \mathbb{R}$ , onde  $B$  é um horodisco. Suponha que  $M$  intersecta os planos  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \{h\}$ , com  $\partial M \cap (\mathbb{H}^2 \times (0, h)) = \emptyset$  e que o vetor curvatura média de  $M$  aponta*

para  $\partial B \times \mathbb{R}$ . Então  $h \leq h_H$ , onde  $h_H$  é dado por

$$h_H := \begin{cases} \pi - \frac{8H}{\sqrt{1-4H^2}} \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{1-2H}{1+2H}} \right), & \text{se } H < 1/2 \\ \pi - 2, & \text{se } H = 1/2 \\ \pi - \frac{8H}{\sqrt{4H^2-1}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{2H-1}{2H+1}} \right), & \text{se } H > 1/2. \end{cases}$$

**Demonstração do Teorema 1.3.3:** Seja  $B$  um horodisco tal que  $M \subset B \times \mathbb{R}$ , e seja  $C = \partial B$ . Para cada  $t > 0$ , seja  $C_t \subset B$  o horociclo a uma distância  $t$  de  $C$ . Considere  $\mathcal{S}_t$  a translação vertical para cima por  $h_H/2$  da horosuperfície de CMC  $H$  e raio interno  $t$  (ver figura 4.3).

Segue do fato que  $\{\mathcal{S}_t\}_{t \geq 0}$  é uma folheação de  $B \times [0, h_H]$  que existe  $T > 0$  tal que  $M$  e  $C_t$  possuem um ponto de tangência. Se assumirmos que  $h > h_H$ , então este ponto não pode estar em  $\partial M$  e, portanto, deve existir um ponto de tangência interior implicando, pelo Princípio de Tangência, que  $M$  coincide com  $C_T$ , absurdo. Portanto,  $h \leq h_H$ .  $\square$

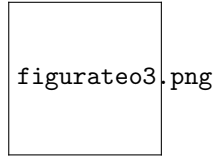


Figura 4.3: Horonodóide colada com sua reflexão em torno do plano  $\mathbb{H}^2 \times \{h/2\}$ .

**Teorema 1.3.4** *Seja  $M \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , uma superfície conexa imersa de curvatura média constante  $H$  contida num cilindro  $B_{r^*} \times \mathbb{R}$  onde  $B_{r^*}$  é um disco de raio  $r^*$ . Suponha que  $M$  intersecta dois planos paralelos  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \{h\}$ , com  $\partial M \cap (\mathbb{H}^2 \times (0, h)) = \emptyset$  e que o vetor curvatura média de  $M$  aponta para  $\partial B_{r^*} \times \mathbb{R}$ . Então*

$$h \leq 2 \max H\text{-nod}_{r^*}.$$

**Demonstração do Teorema 1.3.4:** Seja  $\mathcal{H}_r$  a superfície obtida rotacionando o gráfico de  $H\text{-nod}_r(s)$  restrita ao intervalo  $[0, x_H(r)]$ , colado com sua reflexão pelo plano  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ , isto é,

$$\mathcal{H}_r = \{(p, \pm H\text{-nod}_r(s(p))) \mid 0 \leq s(p) \leq x_H(r)\},$$

onde  $s(p)$  é a distância entre  $p$  e o círculo  $\partial B_r$ . Para  $r \in (0, r^*)$ , algum membro da família  $\mathcal{H}_r$  deve ter um ponto de contato interior com  $M$  se  $h > 2 \max H\text{-nod}_{r^*}$ .  $\square$

# Bibliografia

- [1] Aiolfi, A. ; Fusieger, P. - *Some Existence Results about Radial Graphs with Boundary in Parallel Planes* Annals of Global Analysis and Geometry **34** (2008) pp.415-430.
- [2] Aiolfi A. ; Fusieger, P. e Ripoll J. - *A Note on Doubly Connected Surfaces of Constant Mean Curvature with Prescribed Boundary*, Annals of Global Analysis and Geometry, **29**, (2006) pp.145-156.
- [3] Barbosa, A. - *Compact Minimal Vertical Graphs with non-connected boundary in  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Illinois Journal of Mathematics, **153** Volume 58, Number 3 (2014), 593-617.
- [4] do Carmo, M. - *Geometria Riemanniana*, IMPA, 2011.
- [5] Citti, G. ; Senni, C. - *Constant Mean Curvature Graphs on Exterior domains of the Hyperbolic plane*, Matematische Zeitschrift, October 2012, Volume 272, pp. 531-550.
- [6] Dajczer, M. ; Ripoll, J. - *An Extension of a Theorem of Serrin to Graphs in Warped Products*, Journal of Geometric Analysis, **15** (2005) No2, pp.193-205.
- [7] Elbert, M. ; Nelli, B. e Sa Earp, R. - *Existence of Vertical Ends of Mean Curvature  $\frac{1}{2}$  in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Trans. Amer. Mat. Soc. **364** (2012) pp.1179-1191.
- [8] Espírito Santo, N. ; Ripoll, J. - *Some Existence and Nonexistence Theorems for Compact Graphs of Constant Mean Curvature with Boundary in Parallel Planes*, J. Geom. Analysis, **11** (2001) No4, pp. 601-617.
- [9] Fusieger, P; Ripoll, J. - *Radial Graphs of Constant Mean Curvature and Doubly Connected Minimal Surfaces with Prescribed Boundary*, Annals of Global Analysis and Geometry, **23** (2003) pp.373-400.

- [10] Gilbarg, D. ; Trudinger, N.S. - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [11] Hauswirth, L. - *Minimal Surfaces of Riemann type in three-dimensional product manifolds*, Pacific Journal of Mathematics (224)(2006), no.1, 91-117.
- [12] Hauswirth, L. ; Rosenberg, H. e Spruck, J. - *Infinite Boundary Value Problems for Constant Mean Curvature Graphs in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* , American Journal of Mathematics, **131**, (2009) No 1, pp.195-226.
- [13] Klaser, P. ; Soares, R. ; Telichevesky, M. - *Constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  with boundary in two parallel planes*, (2015) arXiv:1512.07637.
- [14] López, R. - *Constant Mean Surfaces with Boundary*, Springer-Verlag, 2013.
- [15] Nelli, B. ; Sa Earp, R. ; Santos, W. e Toubiana, E. - *Uniqueness of  $H$ -Surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $|H| \leq \frac{1}{2}$ , with Boundary One or Two Parallel Horizontal Circles*, Annals of Global Analysis and Geometry, **233** (2008) No4 pp.307-321.
- [16] Riemann, B. - *Oeuvres Mathematiques de Riemann*, Gauthiers-Villars, Paris, 1898.
- [17] Ripoll, J. - *Some Characterization, uniqueness and existence results for Euclidean Graphs of constant mean curvature with planar bounary*, Pacific Journal of Mathematics, Berkeley. Vol. 198, no. 1 (2001), p.175-196.
- [18] Ros, A. ; Rosenberg, H. - *Constant Mean Curvature Surfaces in a Half-Space of  $\mathbb{R}^3$  with boundary in the boundary of the Half Space*, Journal of Differential Geometry, **44** (1996) No4, pp. 807-817.
- [19] Sa Earp, R. Toubiana, E. - *An Asymptotic Theorem for Minimal Surfaces and Existence Results for Minimal Graphs in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Mathematische Annalen **342**, (2008) pp. 309-331.
- [20] Shiffman, M. - *On Surfaces of stationary area bounded by two circles, or convex curves, in parallel planes*, Ann. of Math. **63** No2 (1956) pp.77-90.