

HELIO SILVEIRA RIBAS

PROJETO ÓTIMO DA GEOMETRIA DE TRELIÇAS ESPACIAIS

Tese apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de "MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL".

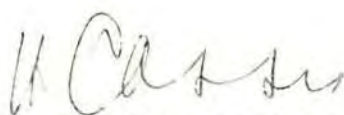
Porto Alegre

Estado do Rio Grande do Sul - Brasil

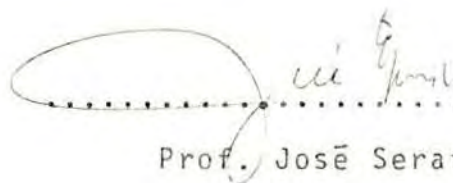
Maio de 1980

ESCOLA DE ENGENHARIA  
BIBLIOTECA

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Juan Cassis Mohor  
Orientador



Prof. José Serafim Gomes Franco  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

Aos meus pais Paulo e Sylvia,  
à minha esposa Solange e  
ao meu filho Rodrigo

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Juan Cassis Mohor pela segura orientação recebida no transcurso deste trabalho, sem a qual pouco ter-se-ia feito.

Ao professor José Serafim Gomes Franco, coordenador deste curso, pela preocupação em proporcionar melhores condições de trabalho.

Aos professores José Antonio Fedalto e José Carlos Feraz Hennemann pela co-orientação indispensável.

A Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior (CAPES), Conselho Nacional de Desenvolvimento e Pesquisa (CNPq), Comissão Nacional de Engenharia Nuclear (CNEN), e à Fundação Universidade Estadual de Londrina (FUEL), pelo auxílio financeiro durante a elaboração deste trabalho.

Aos professores, alunos e funcionários do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS pelo apoio constante recebido.

Ao colega José Antonio Oliveira do Nascimento pelo grande auxílio prestado.

A Liliani Gaeversen pela dedicação na preparação dos originais desta tese.

## SINOPSE

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um programa computacional aplicado à otimização da geometria de treliças espaciais submetidas a várias condições independentes de carregamento estático. A análise elástica da estrutura é procedida pelo método da rigidez direta.

As variáveis de projeto são as coordenadas nodais e as áreas da seção transversal dos elementos, as quais são limitadas por valores superiores e inferiores. São consideradas restrições geométricas na estrutura através da fixação dos valores máximos e mínimos das coordenadas dos nós. São incluídas restrições de comportamento através da limitação das tensões nos elementos e dos deslocamentos nodais. É considerada a flambagem elástica e inelástica para os membros em regime de compressão. Finalmente, por considerações de simetria e fabricação, são consideradas limitações das áreas dos elementos e das coordenadas dos nós, reduzindo assim o número de variáveis de projeto.

O problema de programação não linear com restrições de desigualdade que resulta, é resolvido por uma seqüência de sub-problemas de programação linear, onde a função objetiva e as restrições são aproximadas por suas expansões em série de Taylor de primeira ordem. O problema de programação linear é resolvido pelo método Simplex. São adotados limites móveis para controlar a convergência do método.

São incluídos vários exemplos mostrando a efetividade do programa.

## ABSTRACT

This work presents the development of a computational program applicable to the optimization of the geometry of space trusses subject to many independent conditions of static loading. The elastic analysis is done by the direct stiffness method.

The design variables are the nodal coordinates and the cross sectional areas of the bars, which are limited by upper and lower bounds. Geometric restraints on the structure are considered by imposing maximum and minimum values on the nodal coordinates. Behavior constraints on stresses and nodal displacement are included. Elastic and inelastic buckling is considered for members in compression. Finally, by considerations of symmetry and fabrication, linking of the cross sectional areas and nodal coordinates are considered, leading to a reduction in the number of design variables.

The inequality constrained nonlinear optimization problem posed is solved by a sequence of linear programming sub-problems; in doing that, both the objective function and the constraints are approximated by their first order Taylor series expansions. The linear programming problem is solved by a Simplex algorithm. Move limits are added to control the convergence of the method.

Several examples showing the effectiveness of the program are included.

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $\underline{A}, \underline{A}_0$  - vetores das áreas da secção transversal dos elementos  
 $\underline{a}_e$  - área da secção transversal do elemento  $e$   
 $\underline{dA}$  - vetor da variação ótima da área dos elementos  
 $\underline{dA}^+$  - vetor de variáveis não-negativas associadas à área dos elementos  
 $\underline{dA}^{mx}$  - vetor da máxima variação da área dos elementos  
 $\underline{dA}^{mn}$  - vetor da mínima variação da área dos elementos  
 $\underline{d\bar{A}}$  - vetor de variáveis de folga associadas à área dos elementos  
 $dx_\ell$  - variação da coordenada do nó  $\ell$   
 $\underline{dX}$  - vetor da variação ótima das coordenadas dos nós  
 $\underline{dX}^+$  - vetor de variáveis não-negativas associadas às coordenadas nodais  
 $\underline{dX}^{mx}$  - vetor da máxima variação das coordenadas nodais  
 $\underline{dX}^{mn}$  - vetor da mínima variação das coordenadas nodais  
 $\underline{d\bar{X}}$  - vetor de variáveis de folga associadas às coordenadas nodais  
 $dW$  - variação do peso da estrutura  
 $d\alpha_i$  - variação do ângulo diretor da barra  $i$   
 $d\phi$  - função objetiva simplificada  
 $\{D\}$  - vetor dos deslocamentos nodais da estrutura  
 $\underline{D}_e$  - vetor dos deslocamentos do elemento  $e$   
 $\underline{D}$  - vetor dos deslocamentos nodais críticos da estrutura  
 $\underline{D}^*$  - vetor dos deslocamentos nodais críticos admissíveis da estrutura

- $\underline{\bar{D}}$  - vetor de variáveis de folga associadas aos deslocamentos nodais críticos da estrutura  
 $e_e$  - alongação do elemento  $e$   
 $E$  - módulo de elasticidade longitudinal (módulo de Young)  
 $F_e$  - força axial no elemento  $e$   
 $F_e^*$  - força axial admissível no elemento  $e$   
 $F_b^L$  - carga crítica de flambagem do elemento  
 $\underline{F}_{e,j}$  - vetor das forças no nó  $j$  do elemento  $e$   
 $\underline{F}_e$  - vetor das forças nodais do elemento  $e$   
 $\underline{F}$  - vetor das forças críticas nos elementos  
 $\underline{F}^*$  - vetor das forças críticas admissíveis nos elementos  
 $\underline{\bar{F}}$  - vetor de variáveis de folga associadas às forças críticas nos elementos  
 $[F]$  - matriz de flexibilidade estrutural  
 $\underline{F}_{jk}$  - sub-matrizes da matriz de flexibilidade estrutural (nós  $j,k$ )  
 $q_i, h_i$  - matrizes de cosenos diretores do elemento  $i$   
 $I$  - momento de inércia da seção transversal dos elementos  
 $\underline{I}$  - matriz identidade  
 $i$  - raio de giração mínimo  
 $k_e$  - coeficiente de rigidez axial do elemento  $e$   
 $\underline{K}_e$  - matriz de rigidez do elemento  $e$   
 $\underline{K}_e^n$  - matriz de rigidez nodal do elemento  $e$   
 $[K]$  - matriz de rigidez estrutural  
 $\underline{K}_{jk}$  - sub-matrizes da matriz de rigidez estrutural (nós  $j,k$ )



- $l_e, l'_e$  - comprimento do elemento  $e$   
 $\underline{L}$  - vetor dos comprimentos dos elementos  
 $m$  - grau de hiperestaticidade interna da estrutura  
 $n$  - número de elementos da estrutura  
 $\underline{0}$  - matriz nula  
 $\{P\}$  - vetor das cargas nodais externas da estrutura  
 $p^u$  - vetor da base canônica do  $R^n$   
 $\underline{p}_j$  - vetor das componentes de carga no nó  $j$  da estrutura  
 $p, \kappa$  - número de estados de carga atuantes  
 $\underline{r}_e$  - matriz de cosenos diretores do elemento  $e$   
 $\underline{R}_e$  - matriz de rotação do elemento  $e$   
 $S$  - coeficiente de segurança à flambagem  
 $[T]$  - matriz de ligação de variáveis de projeto  
 $u_j$  - componente horizontal do deslocamento do nó  $j$   
 $u_j^*$  - componente horizontal admissível do deslocamento do nó  $j$   
 $v_j$  - componente vertical do deslocamento do nó  $j$   
 $v_j^*$  - componente vertical admissível do deslocamento do nó  $j$   
 $x_\ell$  - coordenada do nó  $\ell$   
 $X_i^q$  - variável de projeto de um elemento  $i$  num ciclo  $q$  do processo iterativo  
 $X'$  - variável de projeto ligada  
 $\underline{X}, \underline{X}_0$  - vetores das coordenadas dos nós  
 $\underline{X}^{mx}$  - vetor das máximas coordenadas nodais  
 $\underline{X}^{mn}$  - vetor das mínimas coordenadas nodais

- $Z$  - função de resposta estrutural  
 $W$  - peso total da estrutura  
 $w_j$  - componente normal do deslocamento no nó  $j$   
 $w_j^*$  - componente normal do deslocamento admissível no nó  $j$   
 $\alpha_e$  - parâmetro estatístico da secção transversal do elemento  $e$   
 $\alpha_e, \beta_e$  - ângulos de orientação do elemento  $e$   
 $\gamma_e$  - coseno diretor do elemento  $e$   
 $\delta_{ei}$  - delta de Kroenecker  
 $\underline{\delta}_j$  - vetor das componentes do deslocamento do nó  $j$  da estrutura  
 $\underline{\Delta A}$  - vetor da amplitude de variação da área dos elementos  
 $\underline{\Delta X}$  - vetor da amplitude de variação das coordenadas dos nós  
 $\nabla$  - gradiente (operador de Hamilton)  
 $\zeta$  - fator dos limites móveis  
 $\kappa$  - estado de carga ativo  
 $\mu$  - fator de escalamento  
 $\xi$  - fator de exclusão das restrições  
 $\pi$  - constante matemática  
 $\rho$  - peso específico do material  
 $\sigma_e$  - tensão axial do elemento  $e$   
 $\sigma_e^*$  - tensão axial admissível no elemento  $e$   
 $\sigma_t^*$  - tensão de tração admissível  
 $\sigma_b^L$  - tensão de compressão admissível com flambagem  
 $\sigma^L$  - tensão limite de proporcionalidade do material

- $\sigma_y$  - tensão de escoamento do material
- $\sigma'$  - tensão à compressão simples admissível
- $\lambda_{cr}$  - índice de esbeltez limite
- $\phi_e$  - fator geométrico do elemento e
- $\omega_e$  - ângulo de orientação do elemento e

## SUMÁRIO

## CAPÍTULO 1

Introdução..... 3

## CAPÍTULO 2

0 Problema da Otimização Estrutural..... 7

2.1 - Introdução..... 7

2.2 - Conceitos básicos..... 7

2.2.1 - Variáveis de projeto..... 7

2.2.2 - Função objetiva..... 9

2.2.3 - Restrições..... 10

2.2.4 - Espaço de projeto e região admissível.....

2.3 - Formulação matemática do problema de otimização... 9

2.4 - Métodos de programação matemática..... 10

## CAPÍTULO 3

Projetos Plenamente Tensionados..... 15

3.1 - Introdução..... 17

3.2 - Método da relação da tensão..... 17

## CAPÍTULO 4

Considerações Gerais..... 19

4.1 - Introdução..... 19

4.2 - Obtenção da matriz de flexibilidade..... 19

4.3 - Ligação de variáveis de projeto..... 21

4.4 - Considerações sobre a flambagem..... 21

## CAPÍTULO 5

Formulação Matemática do Problema de Projeto Ótimo de Estruturas Treliçadas..... 25

5.1 - Análise da estrutura..... 26

5.2 - Determinação dos gradientes.....	1
5.2.1 - Gradientes com relação à área da seção transversal dos elementos.....	2
5.2.1.1 - variação dos deslocamentos nodais.....	3
5.2.1.2 - variação da força nos elementos.....	3
5.2.1.3 - variação da força admissível nos elementos.....	4
5.2.1.4 - variação do peso total da estrutura.....	2
5.2.2 - Gradiente com relação às coordenadas dos nós.....	3
5.2.2.1 - variação dos deslocamentos nodais.....	3
5.2.2.2 - variação das forças nos elementos.....	8
5.2.2.3 - variação das forças admissíveis nos elementos.....	4
5.2.2.4 - variação do peso total da estrutura.....	4
5.3 - Problema de programação linear.....	4

## CAPÍTULO 6

Desenvolvimento do Programa Computacional.....	1
6.1 - Introdução.....	5
6.2 - Descrição da estrutura.....	7
6.3 - Análise da estrutura.....	9
6.4 - Projeto plenamente tensionado.....	11
6.5 - Expansão linear das funções e determinação dos limites móveis.....	5
6.6 - Montagem do problema de programação linear.....	6
6.7 - Solução do problema de programação linear.....	6

6.8 - Teste de convergência.....	76
----------------------------------	----

## CAPÍTULO 7

Exemplos Numéricos e Comentários.....	68
7.1 - Exemplo 1.....	68
7.2 - Exemplo 2.....	83
7.3 - Exemplo 3.....	100

## CAPÍTULO 8

Conclusões.....	118
-----------------	-----

BIBLIOGRAFIA.....	123
-------------------	-----

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Desde os primórdios, estudiosos vêm desenvolvendo pesquisas de maneira a aperfeiçoar os dispositivos de cálculo de estruturas disponíveis e ao mesmo tempo criar técnicas de resolução mais eficientes. Porém, muitas dessas pesquisas foram abandonadas devido a falta de uma ferramenta mais potente de cálculo.

A necessidade de se projetar com economia já se fez sentir desde Galileo, dando um dos primeiros passos para a criação de uma nova técnica em termos da otimização estrutural.

Em 1854, Maxwell<sup>30</sup> enunciou alguns teoremas básicos para a otimização de estruturas, porém, somente em 1904, esses teoremas foram reformulados e aplicados por Michel<sup>31</sup>, que definiu alguns tipos de estruturas de volume mínimo. Estas estruturas não apresentaram entretanto algum interesse prático. Desta época até aproximadamente a década de quarenta, todos os esforços nesse sentido não passaram de escassos desenvolvimentos teóricos sem possibilidade de aplicação prática, devido a impossibilidade de satisfazer as necessidades por eles exigidas.

Por volta de 1950, com o advento dos computadores eletrônicos, grandes horizontes se abrem, entre outros, no campo da otimização estrutural. Nessa época surgiram já alguns trabalhos importantes com aplicações práticas no campo da teoria da plasticidade.

Em 1964, Dorn, Gomory e Greemberg<sup>11</sup> desenvolveram um trabalho, aplicando a programação linear, que pode ser considerado o pioneiro na otimização geométrica de es

truturas. Neste trabalho eram escolhidos pontos no plano indicando a posição dos nós de uma treliça e se determinava como esses nós deveriam ser conectados por barras de maneira a suportar o carregamento externo com a mínima quantidade de material.

Cronologicamente seqüenciados, muitos outros trabalhos surgiram como os de Moses<sup>32</sup>, Razani<sup>40</sup>, Kicher<sup>21</sup>, Ronstad e Wang<sup>43</sup>, Dobbs e Felton<sup>10</sup>, Pedersen<sup>35</sup>, Kuan Chen Fu<sup>15</sup>, Reinschmidt e Russell<sup>42</sup>, Spillers<sup>47</sup>, Kirsch<sup>22</sup>, Thomas e Brown<sup>48</sup>, Chan e Turlea<sup>8</sup>, Prager<sup>36</sup> e outros, que se todos, porém, com aplicação às estruturas planas.

A otimização de estruturas em treliça espacial é um estudo mais recente, apesar de na maioria das vezes constar de uma simples expansão dos processos para otimização de treliças planas.

A otimização estrutural discreta foi inicialmente desenvolvida com os estudos de Toakley<sup>49</sup> (1968). Em 1970, Cella e Logcher<sup>7</sup> apresentaram um algoritmo de otimização nesta área, aplicado ao projeto de estruturas reticuladas, considerando a forma da estrutura fixa e a seção transversal das barras definida por uma tabela de perfis do AISC. A função objetiva adotada é o custo total da estrutura.

La Pay e Goble<sup>25</sup>, em 1971, apresentaram um trabalho onde comparam a eficiência das formulações em programação linear e não linear. Nele são consideradas múltiplas condições de carga e a flambagem de Euler é tratada de maneira especial. Na aplicação às estruturas com um grande número de barras, como as torres de transmissão de energia, comprovaram a eficiência da programação não linear.

Na mesma época, Sheu e Shmit<sup>46</sup> propuseram um mē



tudo de otimização de treliças planas e espaciais, considerando várias condições de carga e utilizando o método Simplex e o método das direções admissíveis.

Em 1972, Vanderplaats e Moses<sup>50</sup> expuseram um trabalho sobre otimização geométrica de treliças de grande porte com vários estados de carga, analisadas pelo método dos esforços, e usando uma técnica de separação de espaços de projeto. O procedimento aplica o método das direções admissíveis de Zoutendijk e inclui também o projeto por sub-estruturas. Pode ser empregado em outros tipos de estruturas, como pórticos e cascas.

Em 1973, Pedersen<sup>35</sup> apresentou um método para a otimização de treliças espaciais, implementando o seu trabalho referente às treliças planas<sup>35</sup>. O processo de otimização se desenvolve na área da programação linear com limites móveis aplicando o método Simplex.

Alsbaugh e Kunoo<sup>1</sup>, em 1974, desenvolveram um método para a otimização geométrica de treliças planas e espaciais, com possibilidades de implementação para outros tipos de estruturas como vigas, pórticos, placas, etc. A análise estrutural é feita pelo método dos elementos finitos-modelo dos deslocamentos - e a otimização pelo método do máximo descenso.

No mesmo ano, Lo, Marcos e Goel<sup>29</sup> apresentaram o programa "Trantower" para a otimização de grandes torres de transmissão de energia. Este programa dispõe inclusive de um sistema de geração e plotagem da estrutura, como também, verifica e corrige automaticamente problemas de instabilidade.

Em 1975, Lipson e Gwin<sup>27</sup> propuseram uma formulação para a otimização geométrica de estruturas em treliça

espacial. O algoritmo conta com a possibilidade de eliminar certas barras durante o processo e opera com espaços de projeto separados para as dimensões dos elementos e a geometria da estrutura. A análise elástico-linear da estrutura é procedida pelo método dos deslocamentos. A geometria é modificada pelo método Complex e as dimensões dos elementos por relação de tensão e por escalamento de rigidez. São apresentados como exemplos estruturas de torres de transmissão de energia e coberturas.

No mesmo ano, Patnaik e Srivastava<sup>34</sup> apresentaram uma formulação onde consideraram separadamente a otimização de treliças com uma única e com várias condições de carga. Para a primeira hipótese, aplicam a programação linear, e para a segunda, a não-linear. Durante o processo de reanálise, na segunda hipótese, é utilizado o método da matriz dos deslocamentos condensada, reduzindo assim a quantidade de cálculos.

Outro trabalho foi proposto por Jagannathan, Epstein e Christiano<sup>20</sup>, para a otimização de cascas reticuladas, usando a análise não linear. São considerados problemas de instabilidade com carregamento não uniforme e uma simplificação na análise das estruturas ciclicamente simétricas com carregamento simétrico.

No Segundo Simpósio Nacional sobre Análise e Projeto Estrutural Computadorizados, em Washington (1976), Kuzmanovic, Willens e Thomas<sup>24</sup> apresentaram um método para otimizar torres de transmissão. Utilizam um computador de grande porte (Honeywell 635 com o programa STRESS) em combinação com uma calculadora programável (Hewlett Packard 6820A). A torre proposta, toda executada com cantoneiras, tem três apoios formando um triângulo equilátero em planta. Se propõe uma orientação, diferente do

modelo clássico, para as cantoneiras de apoio da estrutura. É também feita uma comparação entre as torres de três e quatro apoios usando a mesma geometria e as mesmas condições de carregamento, encontrando-se uma economia de 13,9% em favor da primeira. São apresentados os programas usados no projeto das barras de apoio, do corpo da torre e das diagonais.

Em 1977, Lipson e Gwin<sup>28</sup> apresentaram um programa de otimização discreta da geometria e da topologia de treliças espaciais com múltiplas condições de carga, aplicando o método Complex; constitui-se numa expansão do trabalho de Lipson e Agrawal para treliças planas, apresentado em 1974.

No mesmo ano Lev<sup>26</sup> apresentou dois métodos de otimização geométrica de treliças simples submetidas a duas condições de carga. O primeiro é uma simples extensão do trabalho de Spillers<sup>47</sup> (1975) para treliças estaticamente indeterminadas com um estado de carga, por formulação de condições de otimização, usando a matriz de rigidez geométrica da estrutura. O segundo, combina programação matemática e técnicas gradientes, iterativamente.

O desenvolvimento e a aplicação dos métodos de otimização no projeto automático de estruturas, tem sido um tópico de grande interesse da mecânica estrutural nos últimos anos.

No Brasil, algum esforço se têm feito para o desenvolvimento desse setor. Trabalhos como os de Segenreich<sup>44</sup>, Moura<sup>31</sup>, Cassis<sup>6</sup>, Fedalto<sup>12</sup>, Zäquera<sup>51</sup>, marcaram o início do desenvolvimento do projeto estrutural ótimo, estimulando o aparecimento de novas técnicas que possibilitem o tratamento dos mais variados tipos de estruturas.

É desnecessário enfatizar a importância da oti-

mização estrutural, principalmente para os projetos das estruturas de grande porte, ou daquelas que deverão ser construídas repetitivamente.

A economia e a eficiência nos projetos, constituem uma das principais metas na engenharia, e portanto temos certeza de que a otimização não é apenas uma nova técnica, mas sim, uma ferramenta potente de cálculo que se torna realidade em nossa engenharia estrutural.

## CAPÍTULO 2

### O PROBLEMA DA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

#### 2.1 - Introdução

Como pudemos observar no capítulo anterior, muitos são os métodos já desenvolvidos para a resolução do problema da otimização de estruturas. Todos, porém, possuem suas vantagens e desvantagens.

As dimensões de um problema de otimização estrutural que um determinado método se propõe a resolver depende de vários fatores, entre os quais podemos citar o tipo da estrutura (treliça, pórtico, etc.), número de condições de carga solicitantes, número de nós e de elementos da estrutura, etc.

Antes de formularmos matematicamente o problema da otimização, vamos introduzir alguns conceitos básicos cuja terminologia merece alguma referência.

#### 2.2 - Conceitos Básicos

Os problemas de otimização estrutural apresentam alguns conceitos importantes como veremos a seguir.

##### 2.2.1 - Variáveis de projeto

As variáveis de projeto englobam as grandezas quantificáveis do mesmo.

De acordo com a complexidade do problema, pode-se definir algumas dessas variáveis. Porém, as mais usadas são aquelas relacionadas às características da seção transversal dos elementos da estrutura (área, momento de inércia, etc.) e/ou à configuração geométrica estru-

tural.

### 2.2.2 - Função objetiva

Também chamada de função custo ou função mérito, é a função com respeito a qual o projeto vai ser otimizado. Ela atua como seletora sobre as várias alternativas de um projeto.

Nos projetos de estruturas metálicas, a função objetiva geralmente adotada é o peso total da estrutura, pois este, minimizado, pode reduzir o seu custo.

### 2.2.3 - Restrições

As restrições são condições impostas sobre certas características da resposta da estrutura, e também diretamente sobre as variáveis de projeto.

Estas restrições podem aparecer sob a forma de equações ou inequações nas variáveis de projeto, e constituem um conjunto de condições necessárias mas não suficientes para se obter o projeto ótimo.

De maneira geral pode-se definir duas classes de restrições. As restrições laterais que são limitações sobre o valor das variáveis de projeto. Estas são facilmente determinadas e aparecem por imposições dos fabricantes dos elementos estruturais, ou por imposições do projeto arquitetônico ou uso da estrutura. E, restrições de comportamento, que envolvem limitações impostas sobre as características de comportamento da estrutura como limitações de tensão nos elementos, deslocamentos nodais, etc. Estas são determinadas através de uma análise da estrutura.

### 2.2.4 - Espaço de projeto e região admissível

O espaço de projeto é um espaço onde se situam todos os projetos admissíveis e inadmissíveis e cuja dimensão depende do número de variáveis de projeto.

Considerando um vetor de projeto n-dimensional, definimos um sistema de referência hiper-axial que coordena o espaço de projeto.

As restrições representadas nesse sistema de referência definem duas regiões distintas:

- Região factível, que é o espaço dos projetos admissíveis.

- Região não factível, onde se situam as soluções indesejáveis do problema.

Portanto, o vetor de projeto será considerado ótimo quando satisfizer as condições restritivas, isto é, estiver contido na região admissível do espaço de projeto e ainda extremizar a função objetiva.

### 2.3 - Formulação Matemática do Problema de Otimização

Vistos os conceitos básicos, podemos agora formular matematicamente o problema de otimização estrutural.

Dada uma estrutura e o seu carregamento externo, podemos definir o vetor de projeto que será representado por  $\underline{X}$ . Assim, as restrições ficam definidas pelo sistema de inequações.

$$g_j(\underline{X}) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m$$

A função objetiva escolhida é o peso total da estrutura, que representaremos por  $W(\underline{X})$ . Logo teremos problema de otimização formulado da seguinte maneira:

$$\text{Encontrar } \underline{X} \rightarrow \underline{X} \in R^n \text{ tal que } W(\underline{X}) \rightarrow \text{mín}$$

$W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  sujeito a  $g_j(\underline{X}) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m$

Este sistema define um problema de minimização restringida, onde as restrições aparecem sob forma de inequações.

#### 2.4 - Métodos de Programação Matemática

Os métodos de programação matemática são aqueles que pretendem extremizar a função objetiva, submetida ao conjunto de restrições. Esses métodos, de maneira geral, podem ser agrupados nos métodos de programação linear ou não-linear, conforme a função objetiva e as restrições sejam lineares ou não nas variáveis de projeto.

A maior parte dos problemas de programação matemática, mesmo para estruturas com comportamento bem simples, são do tipo não-linear. Eles podem ser resolvidos de maneira direta, a partir da sua formulação, como por exemplo, utilizando um método de direções admissíveis, ou ainda transformando-os de minimização restringida para uma seqüência de minimizações livres, como por exemplo, num método de funções de penalidade.

Entretanto, podemos transformar um problema não-linear em uma seqüência de problemas lineares e utilizar então as técnicas de solução da programação linear, o que torna bem mais fácil a sua abordagem.

Neste trabalho será usado um processo de linearização onde desenvolvemos a função objetiva e as restrições em série linear de Taylor, tendo como centro da expansão um ponto da região admissível. A adoção deste procedimento implica em uma aproximação dos resultados, pois o cálculo dos termos de maior ordem das séries é uma tarefa demorada e imprecisa. Portanto serão calculados apenas



os termos lineares e os erros provenientes desse procedimento serão controlados por restrições extras, chamada de "limites móveis". A resolução do problema linear será feita através do método Simplex.

## CAPÍTULO 3

### PROJETOS PLENAMENTE TENSIONADOS

#### 3.1 - Introdução

Um projeto plenamente tensionado (P.P.T.) é um projeto no qual cada elemento estrutural está submetido a tensão admissível sob no mínimo uma das condições de carga atuantes.

Este é um conceito tradicional no projeto ótimo de estruturas e conserva sua importância devido a maneira simples e intuitiva no dimensionamento.

A pesquisa das seções transversais dos elementos é feita iterativamente, considerando uma configuração geométrica fixa e os materiais especificados.

Uma das características de um P.P.T. é a ausência de uma função objetiva. Estes projetos são governados apenas por restrições de tensão, não se impondo restrições sobre os deslocamentos e dimensões dos elementos.

Outra característica importante já estudada por Razani<sup>40</sup>, nos diz ser o peso de uma estrutura plenamente tensionada, bastante próximo do peso mínimo. Isto torna o conceito do P.P.T. muito atraente. Em problemas de programação matemática, tal característica pode ser explorada para acelerar a convergência gerando um vetor inicial de projeto mais próximo do ótimo desejado.

Considerando apenas as restrições de tensão, um estrutura isostática sempre originará um P.P.T.. Porém para estruturas hiperestáticas, como as tensões estão relacionadas por condições de compatibilidade de deslocamentos, a existência de um ou mais P.P.T. depende da configu-

ração geométrica da estrutura e das condições de carregamento externo.

A menos que sejam satisfeitas algumas condições especiais, estas estruturas são originarão um ou mais P.P.T. se for satisfeita necessariamente a condição:

$$p \geq \frac{n}{n - m} \quad (3.1.1)$$

sendo:  $p$  - número de estados de carga atuantes  
 $n$  - número de elementos da estrutura  
 $m$  - grau de hiperstaticidade interna da estrutura.

### 3.2 - Método da Relação da Tensão

Vários são os métodos desenvolvidos para a obtenção de um projeto plenamente tensionado. Porém, o método da relação da tensão é de grande importância pelo simples funcionamento devido ao reduzido trabalho computacional por ele executado em cada etapa do processo iterativo.

Vamos eleger a variável de projeto e a tensão num elemento  $i$  da estrutura, que chamaremos respectivamente de  $X_i$  e  $\sigma_i$ . Considerando um passo  $q$  da análise e um estado de carga  $j$ , a variável de projeto no passo seguinte ( $q+1$ ) será dada por:

$$X_{ij}^{q+1} = X_i^q \eta_{ij}^q \quad (3.2.1)$$

sendo

$$\eta_{ij}^q = \left( \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{ij}^*} \right)^q \quad (3.2.2)$$

onde  $\sigma_{ij}^*$  é a tensão admissível no elemento  $i$  para estado de carga  $j$ .

Os elementos estruturais deverão ser projetados para suportar o máximo estado de carga atuante, logo, a variável de projeto no passo seguinte será considerada como:

$$x_i^{q+1} = \max_j x_{ij}^{q+1} \quad (3.2.3)$$

Para estruturas isostáticas, como as forças atuantes independem da área da seção transversal dos elementos, a convergência, desprezando o peso próprio, é obtida em um único passo iterativo. Contudo, nas estruturas hiperestáticas isso não ocorre devido a redistribuição de tensão. Um elemento com tensão superior à tensão admissível deverá sofrer um acréscimo de seção transversal para que sua tensão alcance a tensão admissível. Porém, nessa classe de estruturas, os elementos com maior rigidez absorvem maior força de maneira que a tensão admissível só será alcançada depois de alguns passos da iteração. Fato semelhante ocorre para elementos com tensão inferior à admissível.

## CAPÍTULO 4

### CONSIDERAÇÕES GERAIS

#### 4.1 - Introdução

A otimização de estruturas utilizando uma análise de sensibilidade implica no cálculo dos gradientes das forças, forças admissíveis e dos deslocamentos com respeito às variáveis de projeto consideradas.

Esta análise requer razoável tempo de processamento e além do mais, como vimos no capítulo 2, fazemos uso do método Simplex, que em certas formulações é oneroso em termos de tempo.

Urge então que procuremos simplificar ao máximo possível todos os passos necessários dessa análise de sensibilidade e da montagem da matriz Simplex, visando obter os resultados com um dispêndio computacional mais reduzido.

Neste capítulo expomos alguns procedimentos que de alguma maneira colaboram com essa redução desejada.

#### 4.2 - Obtenção da Matriz de Flexibilidade

Para o cálculo dos gradientes já mencionados, necessitaremos da matriz de flexibilidade estrutural, que é obtida pela inversão da matriz de rigidez estrutural. Contudo, a obtenção da matriz de rigidez global inversa não é aconselhável por acarretar um grande dispêndio de memória e de tempo no computador.

Para contornar esse problema usaremos o conceito das restrições "quase críticas", isto é, das forças e dos deslocamentos mais próximos dos seus valores admissíveis. Com isto não necessitaremos da matriz de flexibilidade total, mas simplesmente das linhas correspondentes à essas restri-

ções, tornando o problema menor.

O procedimento é o seguinte:

Consideremos um vetor  $\underline{p}^u$  da base canônica do  $\Gamma$ , onde posicionamos a unidade na linha correspondente à restrição "quase crítica" considerada.

Teremos então:

$$\underline{p}^u = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \quad \text{linha correspondente à restrição} \\ \text{quase crítica}$$

Pelo método da rigidez, podemos escrever:

$$[K] \{D\} = \{P\} \quad (4.2.1)$$

e analogamente:

$$[K] \underline{D}^u = \underline{P}^u \quad (4.2.2)$$

e portanto:

$$\underline{D}^u = [K]^{-1} \underline{P}^u \quad (4.2.3)$$

Resolvendo este sistema de equações através do método da eliminação de Gauss, obteremos o vetor  $\underline{D}^u$ , que conterá a coluna da matriz de flexibilidade correspondente àquela restrição quase crítica; devido à simetria da matriz, teremos obtido a linha desejada.

Como geralmente existe mais de uma restrição quase crítica, basta transformarmos o vetor  $\underline{P}^u$  em uma matriz

composta de tantos vetores da base canônica quantas forem tais restrições. Notemos que se todas as restrições forem as se críticas, teremos  $\underline{P}^u = \underline{I}$ , matriz de identidade, e  $\underline{D}^u = [F]$ , matriz de flexibilidade total da estrutura.

#### 4.3 - Ligação de Variáveis de Projeto

Na prática, sempre que possível, procura-se elaborar projetos de estruturas que dentro das condições exigidas obedecem um critério de simetria qualquer, pois isto possibilita um melhor aspecto estético além de uma facilidade na construção e na maioria das vezes uma possível redução no custo total da obra.

A ligação das variáveis de projeto ("linking") pode ser aplicada aos projetos cuja topologia possua uma simetria com relação a algum eixo de referência. Isto faz com que trabalhem com um menor número de variáveis de projeto tornando o problema computacionalmente menos oneroso.

O processo de otimização desenvolvido neste trabalho fundamenta-se na mudança sucessiva das áreas da seção transversal dos elementos e na mudança das coordenadas nodais, até que se consiga uma configuração estrutural ótima.

Pode-se facilmente prever que mesmo para um projeto inicial simétrico, porém com carregamento assimétrico, o projeto final (ótimo) pode não ser simétrico.

Aqui se caracteriza uma grande vantagem da utilização da ligação de variáveis, pois com isto, as variáveis de projeto ligadas serão alteradas proporcionalmente, conservando a simetria da estrutura.

A equação que define a ligação de variáveis é a seguinte:

$$\underline{X} = [T] \underline{X}' \quad (4.3.1)$$

onde  $\underline{X}$  é o vetor das variáveis primárias,  $\underline{X}'$  é o vetor das variáveis ligadas e  $[T]$  é a matriz de ligação de variáveis. No caso  $\underline{X}'$  contém as áreas e as coordenadas nodais ligadas.

A variável de projeto primária de um elemento genérico  $i$  será dada por:

$$X_i = \sum_j T_{ij} X'_j \quad (4.3.2)$$

A matriz  $[T]$  é tal que em cada linha existe um único elemento diferente de zero, portanto podemos escrever:

$$X_i = T_{ij} X'_j \quad (4.3.3)$$

De acordo com a característica anterior da matriz  $[T]$ , podemos transformá-la em um vetor, assim:

$$T_{ij} = T_i \quad (4.3.4)$$

e portanto

$$X_i = T_i X'_j \quad (4.3.5)$$

A utilização da ligação de variáveis também oferece eficiência computacional na análise de sensibilidade.

A derivada parcial de uma função de resposta estrutural  $Z(\underline{X}')$ , com respeito às variáveis de projeto ligadas, é determinada através da derivada parcial dessa função com respeito às variáveis primárias  $\underline{X}$ . Portanto teremos:

$$\frac{\partial Z}{\partial X'_j} = \sum_i \frac{\partial Z}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial X'_j} \quad (4.3.6)$$



sendo que o somatório é aplicado a cada conjunto de variáveis ligadas.

Como:

$$\frac{\partial X_i}{\partial X_j} = T_i \quad (4.3.1)$$

e, definindo cada conjunto de variáveis ligadas como  $J^*$  teremos finalmente:

$$\frac{\partial Z}{\partial X_j} = \sum_{i \in J^*} \frac{\partial Z}{\partial X_i} T_i \quad (4.3.2)$$

Deve-se notar que a ligação de variáveis atua como uma restrição lateral e portanto o projeto final ("ótimo") terá um peso superior àquele caso não fosse usado esse conceito.

#### 4.4 - Considerações sobre a Flambagem

Apesar de se tratar de uma análise estrutural elástica, no caso da flambagem podemos admitir o funcionamento elasto-plástico dos elementos comprimidos das treliças.

Para tensões abaixo da tensão limite de proporcionalidade do material, a flambagem segue a teoria de Euler, porém, para tensões maiores, a carga de flambagem dada por esta teoria cresce muito e a capacidade de carga fica limitada pela tensão de escoamento do aço.

Os resultados experimentais mostram que a curva de flambagem elasto-plástica tem a forma que indica a figura seguinte:

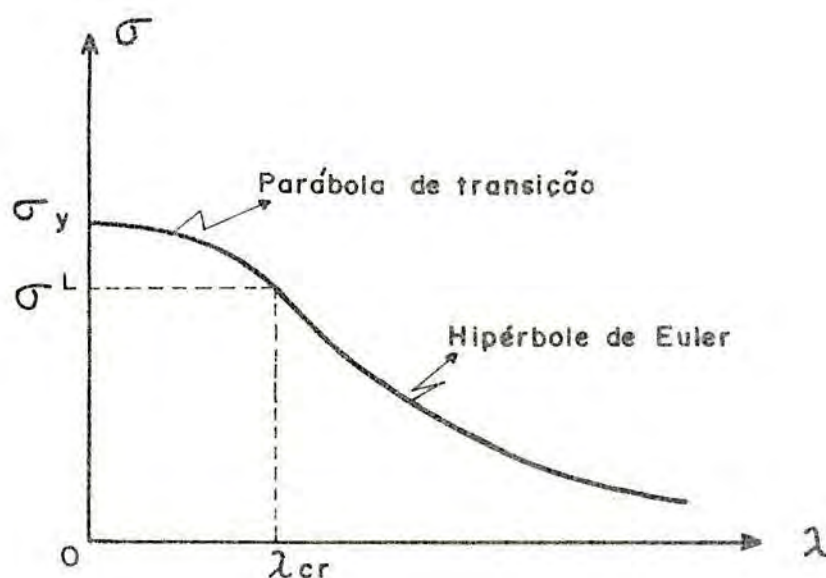


Figura 4.4.1

onde:

$\sigma^L$  - tensão de proporcionalidade do material

$\sigma_y$  - tensão de escoamento do material

$\lambda_{cr}$  - Índice de esbeltez limite definido pela razão entre o comprimento teórico de flambagem e o raio de giração crítico.

Na figura acima o trecho limitado pelo ponto  $(\lambda_{cr}, \sigma^L)$ , mostra a variação hiperbólica da carga de flambagem definida pela teoria de Euler. Para o caso do aço estrutural esse ponto limite tem como coordenadas aproximadas, 105 e 1900 Kgf/cm<sup>2</sup>, respectivamente.

O trecho seguinte, definido pela parábola entre  $\sigma_e = \sigma^L$  e  $\sigma_e = \sigma_y$ , mostra a variação da carga de flambagem no regime elastoplástico.

A carga crítica de Euler é dada por:

$$F_e = - \frac{\pi^2 E I}{L_e^2} \quad (4.4.1)$$

que corresponde a uma tensão crítica:

$$\sigma_e = - \frac{F_e}{a_e} = - \frac{\pi^2 E}{L_e^2} \cdot \frac{I}{a_e} = - \frac{\pi^2 E i^2}{L_e^2} = - \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2} \quad (4.4.2)$$

a expressão anterior é válida para  $|\sigma_e| < |\sigma^L|$ ; para  $\sigma_e = \sigma^L$  teremos:

$$- \frac{\pi^2 E}{\lambda_{cr}^2} = \sigma^L \quad (4.4.3)$$

ou seja:

$$\lambda_{cr} = \sqrt{- \frac{\pi^2 E}{\sigma^L}} \quad (4.4.4)$$

No limite de proporcionalidade do material a carga de flambagem será igual a carga crítica de Euler, sim:

$$F_e^L = \sigma^L a_e^{cr} = - \frac{\pi^2 E}{\lambda_{cr}^2} a_e^{cr} \quad (4.4.5)$$

Pelas equações (4.4.2) e (4.4.4) notamos que  $a_e^{cr}$  é tal que:

$$\left( \frac{L_e^2 a_e}{I_e} \right)_{cr} = - \frac{\pi^2 E}{\sigma L} \quad (4.4.6)$$

LaPay<sup>25</sup>, determinou relações empíricas entre o quadrado do raio de giração crítico e a área da seção transversal dos elementos, que tem a forma seguinte:

$$i_e^2 \approx (\alpha'_e)^2 a_e \quad \text{que equivale a} \quad I \approx (\alpha'_e)^2 a_e^2 \quad (4.4.7)$$

onde  $\alpha'_e$  é um parâmetro que ajusta estatisticamente as áreas dos perfis disponíveis com os respectivos quadrados dos raios de giração mínimos, conforme a figura:

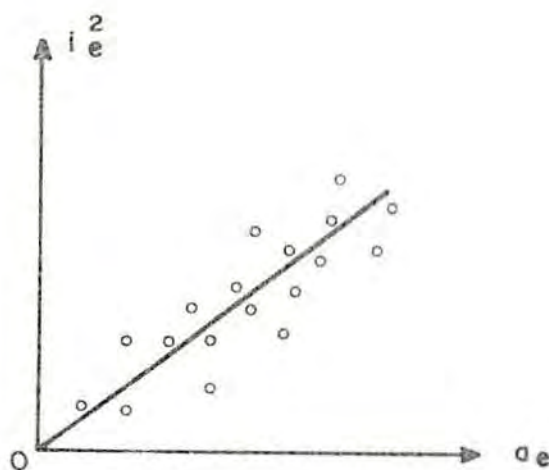


Figura 4.4.2

Considerando (4.4.7), a (4.4.6) pode ser escrita como:

$$- \frac{\pi^2 E}{\sigma L} = \left( \frac{L_e^2}{(\alpha'_e)^2 a_e} \right)_{cr} \quad (4.4.8)$$

ou ainda:

$$a_e^{cr} = - \frac{L_e^2 \sigma^L}{\pi^2 (\alpha_e')^2 E} \quad (4.4.9)$$

Substituindo o valor de  $a_e^{cr}$  da (4.4.9) e o valor de  $\lambda_{cr}$  da (4.4.4), na equação (4.4.5) teremos o valor da carga crítica no limite de proporcionalidade, a seja:

$$F_e^L = - \frac{L_e^2 (\sigma^L)^2}{\pi^2 (\alpha_e')^2 E} \quad (4.4.10)$$

Considerando o coeficiente de segurança  $\underline{s}$  a carga limite de projeto será dada por:

$$F_b^L = - \frac{L_e^2 (\sigma^L)^2}{\underline{s} \pi^2 (\alpha_e')^2 E} \quad (4.4.11)$$

Agora considerando as equações (4.4.1) e (4.4.7) teremos:

$$F_e = - \frac{\pi^2 E}{L_e^2} (\alpha_e')^2 a_e^2 \quad (4.4.12)$$

Portanto, no regime elástico, a carga de projeto será obtida dividindo (4.4.12) pelo coeficiente de segurança  $\underline{s}$ , assim:

$$F_e^* = - \frac{\pi^2 E (\alpha_e')^2 a_e^2}{\underline{s} L_e^2} \quad (4.4.13)$$

No regime inelástico a área mínima requerida será dada por:

$$a_e^{mn} = a_e^{in} + a_e^{cr} \quad (4.4.14)$$

Pedersen propõe para  $a_e^{in}$ , a área adicional na fase inelástica, a seguinte expressão:

$$a_e^{in} = \frac{F_e^* - F_b^L}{\sigma'} \quad (4.4.15)$$

onde

$$\sigma' = \frac{\sigma_y}{2} \quad (4.4.16)$$

portanto, teremos:

$$a_e^{mn} = \frac{(F_e^* - F_b^L)}{\sigma'} - \frac{L_e^2 \sigma^L}{\pi^2 (\alpha_e')^2 E} \quad (4.4.17)$$

Definindo a constante  $\phi_e$  como sendo:

$$\phi_e = \frac{L_e \sqrt{s}}{\pi \alpha_e' \sqrt{E}} \quad (4.4.18)$$

e substituindo em (4.4.13) e (4.4.17), podemos finalmente escrever as expressões da força admissível nos elementos, ou seja:

- fase elástica:

$$F_e^* = - \left( \frac{a_e}{\phi_e} \right)^2 \quad \text{para} \quad F_b^L \leq F_e^* < 0 \quad (4.4.19)$$

- fase inelástica:

$$F_e^* = F_b^L + \sigma' ( a_e - \phi_e \sqrt{-F_b^L} ) \quad \text{para} \quad F_e^* < F_b^L \quad (4.4.20)$$

A força admissível no caso da tração será:

$$F_e^* = \sigma_t^* a_e \quad (4.4.21)$$

onde  $\sigma_t^*$  é a tensão admissível à tração.

Os parâmetros  $\alpha_e'$  foram determinados através do método dos mínimos quadrados, para uma série de perfis metálicos (padrão americano), conforme a tabela seguinte:











Nº	Perfil	$\alpha_e'$	Nº	Perfil	$\alpha_e'$
1	 NB	0,50	6	 NB	0,35
2	 NB	0,27	7	 NB	0,31
3	 NB	0,25	8	 NB	0,99
4	 NB	0,44	9	 NB	0,86
5	 NB	0,49	10	 AISC	0,82

Tabela 4.4.1

## CAPÍTULO 5

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE PROJETO  
ÓTIMO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS

## 5.1 - Análise da Estrutura

Considerando uma configuração geométrica determinada e um dado estado de carga estática, determinaremos os deslocamentos nodais e as tensões nos elementos utilizando o método da rigidez direta.

Tomando como referência global o sistema cartesiano  $O-X_1, X_2, X_3$ , representemos duas barras de treliç espacial como segue:

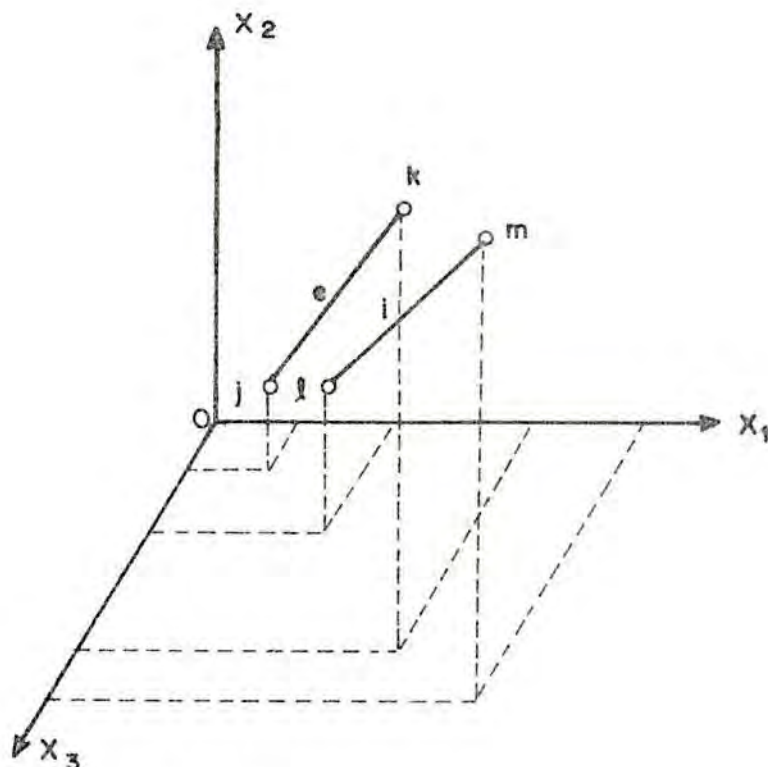


Figura 5.1



A barra  $e$  se conecta aos nós  $j$  e  $k$  e seu eixo particular  $\bar{e}$  é orientado de  $j$  para  $k$  com  $j < k$ ; a barra  $i$  se conecta aos nós  $\ell$  e  $m$  e seu eixo particular  $\bar{i}$  é orientado de  $\ell$  para  $m$ , com  $\ell < m$ . A força axial atuante na barra será tomada positiva ou negativa conforme se trate de tração ou compressão, respectivamente.

A elongação do elemento  $e$  é definida como um incremento no seu comprimento devido aos deslocamentos dos nós  $j$  e  $k$  segundo a direção dos eixos  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ .

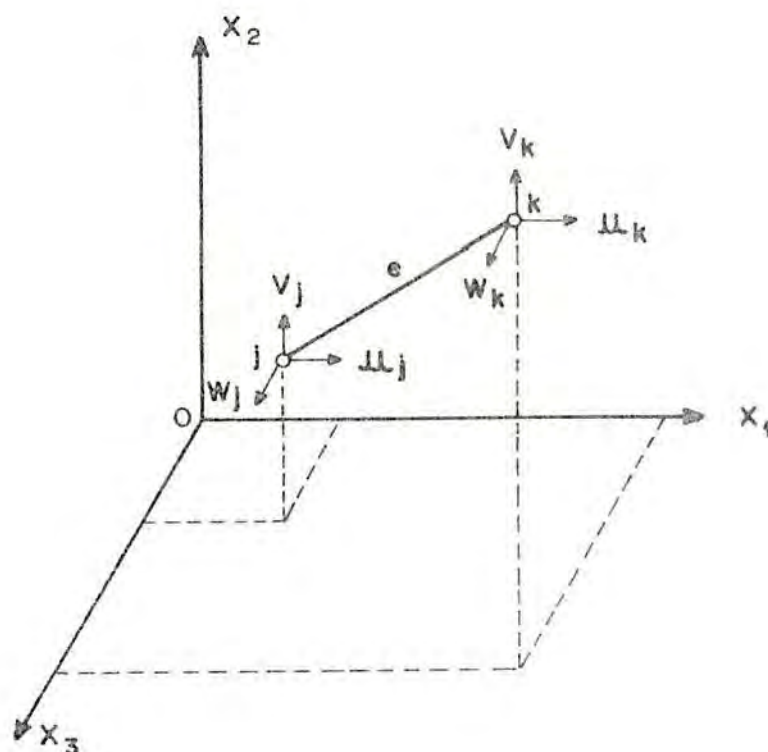


Figura 5.2

Para o caso da linearidade geométrica, basta projetar ortogonalmente os deslocamentos nodais, sobre a configuração não deformada do elemento.

Considerando um estado de carga  $\underline{\kappa}$ , podemos escrever:

$$e_e^{\kappa} = (u_k - u_j)^{\kappa} \gamma_e^1 + (v_k - v_j)^{\kappa} \gamma_e^2 + (w_k - w_j)^{\kappa} \gamma_e^3 \quad (5.1.1)$$

onde  $\gamma_e^1$ ,  $\gamma_e^2$ ,  $\gamma_e^3$  são os cossenos diretores da barra  $e$ , definidos por:

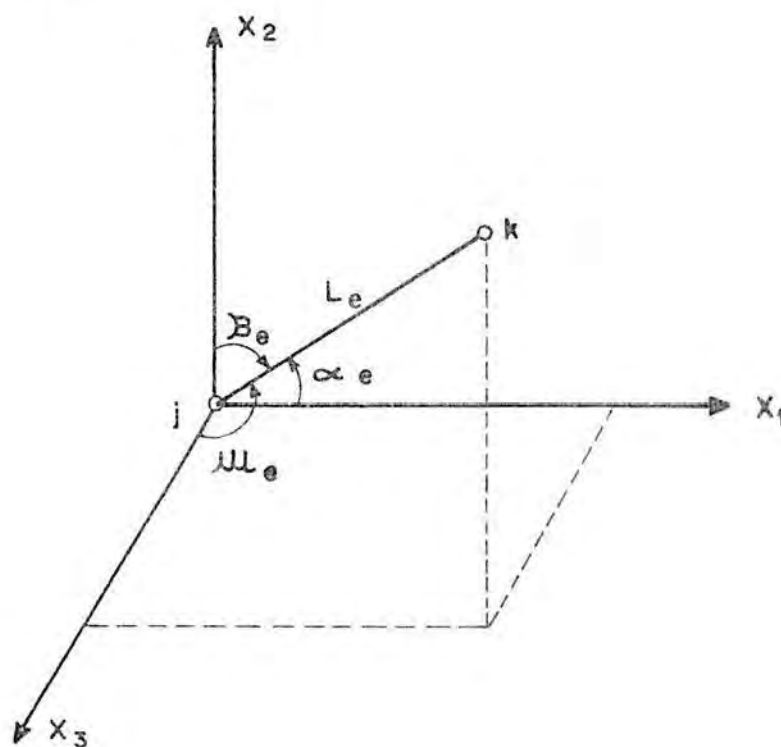


Figura 5.3

$$\begin{aligned} \gamma_e^1 &= \cos \alpha_e = \frac{x_k^1 - x_j^1}{L_e} \\ \gamma_e^2 &= \cos \beta_e = \frac{x_k^2 - x_j^2}{L_e} \\ \gamma_e^3 &= \cos \omega_e = \frac{x_k^3 - x_j^3}{L_e} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

A expressão (5.1) pode ser escrita como:

$$e_e^k = \{ \gamma_e^1 \ \gamma_e^2 \ \gamma_e^3 \ - \ \gamma_e^1 \ - \ \gamma_e^2 \ - \ \gamma_e^3 \} \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix}^k \quad (5.1.3)$$

Definindo as matrizes:

$$\underline{r}_e = \{ \gamma_e^1 \ \gamma_e^2 \ \gamma_e^3 \} \quad (5.1.4)$$

$$\underline{\delta}_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} \quad e \quad \underline{\delta}_j = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} \quad (5.1.5)$$

podemos escrever:

$$e_e^k = \{ \underline{r}_e \quad -\underline{r}_e \} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{\delta}_k \\ \underline{\delta}_j \end{Bmatrix}^k \quad (5.1.6)$$

onde  $\underline{\delta}_k$  e  $\underline{\delta}_j$  são os vetores dos deslocamentos nodais.

Exprimindo a matriz de rotação do elemento  $\underline{e}$  como:

$$\underline{R}_e = \{ \underline{r}_e \quad -\underline{r}_e \} \quad (5.1.7)$$

e o vetor dos deslocamentos nodais do elemento como:

$$\underline{D}_e^k = \begin{Bmatrix} \underline{\delta}_k \\ \underline{\delta}_j \end{Bmatrix}^k \quad (5.1.8)$$

definimos a expressão da alongação do elemento  $\underline{e}$ :

$$e_e^k = R_e D_e^k \quad (5.1.9)$$

A força axial no elemento pode ser escrita em função da elongação. Considerando a linearidade física, onde é aplicável a Lei de Hooke, teremos:

$$F_e^k = k_e e_e^k \quad (5.1.10)$$

sendo  $k_e = \frac{E_e a_e}{L_e}$  a rigidez axial do elemento  $e$ , onde  $E_e$  é o módulo de deformação longitudinal,  $a_e$  a área da seção transversal e  $L_e$  o seu comprimento.

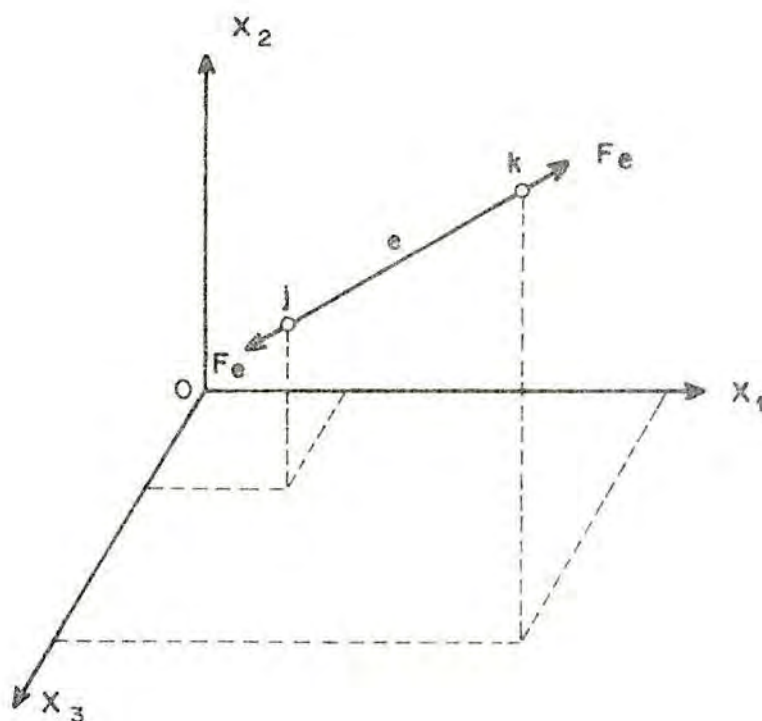


Figura 5.4

Na figura acima representamos a força axial no elemento  $e$ , que pode ser expressa em termos de suas comp.

nentes nodais, por:

$$\underline{F}_{e,k}^{\kappa} = \begin{Bmatrix} \gamma_e^1 \\ \gamma_e^2 \\ \gamma_e^3 \end{Bmatrix} F_e^{\kappa} \quad \text{e} \quad \underline{F}_{e,j}^{\kappa} = \begin{Bmatrix} -\gamma_e^1 \\ -\gamma_e^2 \\ -\gamma_e^3 \end{Bmatrix} F_e^{\kappa} \quad (5.1.11)$$

e de acordo com a expressão (5.1.4):

$$\underline{F}_{e,k}^{\kappa} = \underline{r}_e^T F_e^{\kappa} \quad \text{e} \quad \underline{F}_{e,j}^{\kappa} = -\underline{r}_e^T F_e^{\kappa} \quad (5.1.12)$$

Logo, teremos:

$$\underline{F}_e^{\kappa} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_{e,k}^{\kappa} \\ \underline{F}_{e,j}^{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{r}_e^T \\ -\underline{r}_e^T \end{Bmatrix} F_e^{\kappa} \quad (5.1.13)$$

e considerando a (5.1.7):

$$\underline{F}_e^{\kappa} = \underline{R}_e^T F_e^{\kappa} \quad (5.1.14)$$

onde  $\underline{F}_e^{\kappa}$  é o vetor das forças nodais do elemento  $\underline{e}$ .

De acordo com as expressões (5.1.9) e (5.1.10), podemos escrever:

$$\underline{F}_e^{\kappa} = \underline{R}_e^T k_e \underline{e}_e^{\kappa} = \underline{R}_e^T k_e \underline{R}_e \underline{D}_e^{\kappa} \quad (5.1.15)$$

onde identificamos:

$$\underline{K}_e = \underline{R}_e^T k_e \underline{R}_e \quad (5.1.16)$$

como sendo a matriz de rigidez do elemento  $\underline{e}$ , com relação ao sistema global de coordenadas.

Substituindo a (5.1.7) e efetuando os produtos matriciais obtemos:

$$\underline{K}_e = \begin{Bmatrix} \underline{r}_e^T \\ -\underline{r}_e^T \end{Bmatrix} k_e \{ \underline{r}_e \quad -\underline{r}_e \} = k_e \begin{bmatrix} \underline{r}_e^T \underline{r}_e & -\underline{r}_e^T \underline{r}_e \\ -\underline{r}_e^T \underline{r}_e & \underline{r}_e^T \underline{r}_e \end{bmatrix} \quad (5.1.1)$$

sendo:

$$k_e \underline{r}_e^T \underline{r}_e = k_e \begin{bmatrix} (\gamma_e^1)^2 & \gamma_e^1 \gamma_e^2 & \gamma_e^1 \gamma_e^3 \\ & (\gamma_e^2)^2 & \gamma_e^2 \gamma_e^3 \\ \text{sim.} & & (\gamma_e^3)^2 \end{bmatrix} = \underline{K}_e^n \quad (5.1.18)$$

onde  $\underline{K}_e^n$  é a matriz de rigidez nodal do elemento  $e$ . Portanto, podemos escrever a matriz de rigidez do elemento  $e$  como:

$$\underline{K}_e = \begin{bmatrix} \underline{K}_e^n & -\underline{K}_e^n \\ -\underline{K}_e^n & \underline{K}_e^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{kk} & \underline{K}_{kj} \\ \underline{K}_{jk} & \underline{K}_{jj} \end{bmatrix} \quad (5.1.19)$$

Com isto, as forças nodais no elemento ficam:

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_{e,k} \\ \underline{F}_{e,j} \end{Bmatrix}^K = \begin{bmatrix} \underline{K}_{kk} & \underline{K}_{kj} \\ \underline{K}_{jk} & \underline{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\delta}_k \\ \underline{\delta}_j \end{Bmatrix}^K \quad (5.1.20)$$

Através das equações de equilíbrio das forças nodais,  $\underline{P}_j^K = \sum_e \underline{F}_{e,j}^K$ , com o somatório abrangendo todas as barras que conectam o nó em questão, montamos a matriz de rigidez da estrutura:

$$[K] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}^t & \bar{K}_{12} & \cdots & \bar{K}_{1j} & \cdots & \bar{K}_{1k} & \cdots & \bar{K}_{1\ell} & \cdots & \bar{K}_{1m} & \cdots & \bar{K}_{1n} \\ & \bar{K}_{22}^t & \cdots & \bar{K}_{2j} & \cdots & \bar{K}_{2k} & \cdots & \bar{K}_{2\ell} & \cdots & \bar{K}_{2m} & \cdots & \bar{K}_{2n} \\ & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & \bar{K}_{jj}^t & \cdots & \bar{K}_{jk} & \cdots & \bar{K}_{j\ell} & \cdots & \bar{K}_{jm} & \cdots & \bar{K}_{jn} \\ & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \bar{K}_{kk}^t & \cdots & \bar{K}_{k\ell} & \cdots & \bar{K}_{km} & \cdots & \bar{K}_{kn} \\ & & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & \bar{K}_{\ell\ell}^t & \cdots & \bar{K}_{\ell m} & \cdots & \bar{K}_{\ell n} \\ & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & \text{sim.} & & & & & & & & \bar{K}_{mm}^t & \cdots & \bar{K}_{mn} \\ & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & \bar{K}_{nn}^t \end{bmatrix}$$

(5.1.21)

na qual, para formação das sub-matrizes diagonais e não-diagonais usamos as expressões:

$$\bar{K}_{jk} = \bar{K}_{kj} = -K_{-e}^n$$

$$\bar{K}_{jj}^t = \sum_e K_{-e}^n \quad (5.1.22)$$

A relação linear entre as cargas nodais  $\{P\}^K$  e os deslocamentos nodais  $\{D\}^K$ , expressa pelo método da rigidez é:

$$P^K = [K] \{D\}^K \text{ ou } \{D\}^K = [K]^{-1} \{P\}^K \quad (5.1.23)$$

em que

$$\{P\}^K = \{ \bar{P}_1 \quad \bar{P}_2 \quad \cdots \quad \bar{P}_j \quad \cdots \quad \bar{P}_k \quad \cdots \quad \bar{P}_\ell \quad \cdots \quad \bar{P}_m \quad \cdots \quad \bar{P}_n \}^T$$

$$\{D\}^K = \{ \bar{\delta}_1 \quad \bar{\delta}_2 \quad \cdots \quad \bar{\delta}_j \quad \cdots \quad \bar{\delta}_k \quad \cdots \quad \bar{\delta}_\ell \quad \cdots \quad \bar{\delta}_m \quad \cdots \quad \bar{\delta}_n \}^T$$

(5.1.24)

A força no elemento  $e$  será calculada através das equações (5.1.4/10), sendo:

$$F_e^k = k_e \{ \gamma_e^1 \ \gamma_e^2 \ \gamma_e^3 \} (\delta_k - \delta_j)^k \quad (5.1.25)$$

As forças admissíveis serão determinadas de acordo com as expressões apresentadas no capítulo 4.

Considerando que em cada iteração do processo alguns deslocamentos e forças se aproximam dos seus valores admissíveis, podemos estabelecer um critério que selecione estes elementos próximos, desprezando os demais. Assim, estes deslocamentos e forças denominados "quase críticos" serão identificados pelas expressões abaixo:

$$\xi \cdot u_j^* \leq u_j^k \quad (5.1.26)$$

$$\xi \cdot v_j^* \leq v_j^k$$

$$\xi \cdot w_j^* \leq w_j^k$$

$$\xi \cdot F_e^* \leq F_e^k \quad (5.1.27)$$

onde  $0 < \xi < 1$  é uma determinada percentagem,  $u_j^*$ ,  $v_j^*$  e  $w_j^*$  são os deslocamentos admissíveis correspondentes aos graus de liberdade no nó  $j$  e  $F_e^*$  é a força admissível no elemento  $e$ .

## 5.2 - Determinação dos Gradientes

### 5.2.1 - Gradiente com relação à área da seção transversal dos elementos

#### 5.2.1.1 - Variação dos deslocamentos nodais

Considerando as cargas nodais independentes das variáveis de projeto, a derivação da expressão do método da rigidez (5.1.23) nos dá:



$$\frac{\partial [K]}{\partial a_i} \{D\}^K + [K] \frac{\partial \{D\}^K}{\partial a_i} = \{0\} \quad (5.2.1.1)$$

Logo

$$\frac{\partial \{D\}^K}{\partial a_i} = - [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial a_i} \{D\}^K \quad (5.2.1.2)$$

ou ainda

$$\frac{\partial \{D\}^K}{\partial a_i} = - [F] \frac{\partial [K]}{\partial a_i} \{D\}^K \quad (5.2.1.3)$$

sendo  $[F]$  a matriz de flexibilidade da estrutura.

A derivada da matriz de rigidez da estrutura (5.1.21) é obtida tomando as expressões (5.1.22), (5.1.21) (5.1.19), com as quais obtemos:

$$\frac{\partial [K]}{\partial a_i} = \frac{1}{a_i} \begin{bmatrix} \underline{0} & \dots & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \underline{K}_{\ell\ell} & \dots & \underline{K}_{\ell m} & \dots & \underline{0} \\ \text{sim.} & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & \underline{K}_{mm} & \dots & \underline{0} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (5.2.1.4)$$

Substituindo em (5.2.1.3) obtemos, para um determinado nó  $\underline{j}$ :

$$\frac{\partial \delta_{\underline{j}}^K}{\partial a_i} = - \frac{1}{a_i} (F_{j\ell} \underline{K}_{\ell\ell} + F_{jm} \underline{K}_{m\ell}) \delta_{\underline{\ell}}^K + (F_{j\ell} \underline{K}_{\ell m} + F_{jm} \underline{K}_{mm}) \delta_{\underline{m}}^K \quad (5.2.1.5)$$

lembrando que:

$$\begin{aligned} \underline{K}_{\ell\ell} &= \underline{K}_{mm} = \underline{K}_i^n \\ \underline{K}_{\ell m} &= \underline{K}_{m\ell} = -\underline{K}_i^n \end{aligned} \quad (5.2.1.5)$$

teremos portanto:

$$\frac{\partial \delta_j^k}{\partial a_i} = \frac{1}{a_i} (\underline{F}_{j\ell} - \underline{F}_{jm}) \underline{K}_i^n (\delta_m - \delta_\ell)^k \quad (5.2.1.7)$$

Considerando a expressão (5.1.18) podemos assim expressar a matriz de rigidez nodal:

$$\frac{1}{a_i} \underline{K}_i^n = \frac{E_i}{L_j} \begin{Bmatrix} 1 \\ \gamma_i^1 \\ \gamma_i^2 \\ \gamma_i^3 \end{Bmatrix} \{ \gamma_i^1 \quad \gamma_i^2 \quad \gamma_i^3 \} \quad (5.2.1.8)$$

e de acordo com (5.1.4):

$$\frac{1}{a_i} \underline{K}_i^n = \frac{E_i}{L_j} \underline{r}_i^T \underline{r}_i \quad (5.2.1.9)$$

Como a tensão axial atuante no elemento  $\bar{e}$  é dada pelo quociente:

$$\sigma_i^k = \frac{F_i^k}{a_i} \quad (5.2.1.10)$$

e tendo em conta a expressão (5.1.26), determinamos:

$$\sigma_i^k = \frac{E_i}{L_j} \underline{r}_i (\delta_m - \delta_\ell)^k \quad (5.2.1.11)$$

Logo, considerando (5.2.1.9) e (5.2.1.11), podemos reescrever a expressão (5.2.1.7) como:

$$\frac{\partial \delta_j^k}{\partial a_i} = \sigma_i^k (\underline{F}_{j\ell} - \underline{F}_{jm}) \underline{r}_i^T \quad (5.2.1.12)$$

### 5.2.1.2 - Variação da força nos elementos

Derivando a expressão (5.1.26) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_e^{\kappa}}{\partial a_i} &= k_e \underline{r}_e \frac{\partial}{\partial a_i} (\underline{\delta}_k - \underline{\delta}_j)^{\kappa} + \\ &+ \delta_{ei} \frac{\partial k_e}{\partial a_i} \underline{r}_e (\underline{\delta}_k - \underline{\delta}_j)^{\kappa} \end{aligned} \quad (5.2.1.1)$$

sendo  $\delta_{ei}$  o conhecido delta de Kroenecker ( $\delta_{ei} = 1$ , para  $e = i$  e  $\delta_{ei} = 0$ , para  $e \neq i$ ).

Considerando as expressões (5.2.1.12) e (5.1.26) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_e^{\kappa}}{\partial a_i} &= k_e \sigma_i^{\kappa} \underline{r}_e (F_{kl} - F_{km} - F_{jl} + F_{jm}) \underline{r}_i^T + \\ &+ \delta_{ei} \sigma_e^{\kappa} \end{aligned} \quad (5.2.1.14)$$

### 5.2.1.3 - Variação das forças admissíveis nos elementos

Considerando as expressões (4.4.21), (4.4.19) (4.4.20), teremos:

- para os elementos tracionados:

$$\frac{\partial F_e^*}{\partial a_i} = \delta_{ei} \sigma_i^* \quad (5.2.1.15)$$

- para os elementos comprimidos em ambos os regimes:

$$\frac{\partial F_e^*}{\partial a_i} = -2 \delta_{ei} \frac{ae}{\phi_e}, \text{ para } F_b^L \leq F_e^* < 0 \quad (5.2.1.16)$$

$$\frac{\partial F_e^*}{\partial a_i} = \delta_{ei} \sigma_e', \quad \text{para } F_e^* < F_b^L \quad (5.2.1.1')$$

5.2.1.4 - Variação do peso total da estrutura

O peso total da estrutura é dado por:

$$W = \sum_i \rho_i a_i L_i \quad (5.2.1.1'')$$

logo:

$$\frac{\partial W}{\partial a_i} = \rho_i L_i \quad (5.2.1.1''')$$

5.2.2 - Gradientes com relação às coordenadas dos nós

5.2.2.1 - Variação dos deslocamentos nodais

Derivando a expressão do método da rigidez, (1.23) agora com relação às coordenadas nodais, teremos:

$$\frac{\partial [K]}{\partial x_\ell} \{D\}^K + [K] \frac{\partial \{D\}^K}{\partial x_\ell} = \{0\} \quad (5.2.2.1)$$

logo:

$$\frac{\partial \{D\}^K}{\partial x_\ell} = - [F] \frac{\partial [K]}{\partial x_\ell} \{D\}^K \quad (5.2.2.2)$$

Da expressão (5.1.21), derivando, temos que:

$$\frac{\partial [K]}{\partial x_\ell} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial K_{ll}}{\partial x_\ell} & \dots & \frac{\partial K_{lm1}}{\partial x_\ell} & \dots & \frac{\partial K_{lm2}}{\partial x_\ell} & \dots & \frac{\partial K_{lmi}}{\partial x_\ell} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \frac{\partial K_{m1m1}}{\partial x_\ell} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial K_{m2m2}}{\partial x_\ell} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial K_{mimi}}{\partial x_\ell} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{sim.} \quad (5.2.2.3)$$

Derivando a matriz de rigidez nodal (5.1.18), temos:

$$\frac{\partial K_i^n}{\partial x_\ell} = -\frac{E_i a_i}{L_i^2} \begin{bmatrix} (\gamma_i^1)^2 & \gamma_i^1 \gamma_i^2 & \gamma_i^1 \gamma_i^3 \\ & (\gamma_i^2)^2 & \gamma_i^2 \gamma_i^3 \\ \text{sim} & & (\gamma_i^3)^2 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \frac{\partial L_i}{\partial x_\ell} + k_i \begin{bmatrix} 2 \gamma_i^1 \frac{\partial \gamma_i^1}{\partial x_\ell} & \gamma_i^1 \frac{\partial \gamma_i^2}{\partial x_\ell} + \gamma_i^2 \frac{\partial \gamma_i^1}{\partial x_\ell} & \gamma_i^1 \frac{\partial \gamma_i^3}{\partial x_\ell} + \gamma_i^3 \frac{\partial \gamma_i^1}{\partial x_\ell} \\ & 2 \gamma_i^2 \frac{\partial \gamma_i^2}{\partial x_\ell} & \gamma_i^2 \frac{\partial \gamma_i^3}{\partial x_\ell} + \gamma_i^3 \frac{\partial \gamma_i^2}{\partial x_\ell} \\ \text{sim.} & & 2 \gamma_i^3 \frac{\partial \gamma_i^3}{\partial x_\ell} \end{bmatrix}$$

(5.2.2.4)

O comprimento do elemento genérico  $i$  pode ser expresso por:

$$L_i = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (x_m^j - x_\ell^j)^2}$$

(5.2.2.5)

Para as suas derivadas obtemos:

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_\ell^1} = -\frac{x_m^1 - x_\ell^1}{L_i} = -\gamma_i^1$$

(5.2.2.6)

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_\ell^2} = -\frac{x_m^2 - x_\ell^2}{L_i} = -\gamma_i^2$$

(5.2.2.7)

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_\ell^3} = -\frac{x_m^3 - x_\ell^3}{L_i} = -\gamma_i^3$$

(5.2.2.8)

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_m^1} = \frac{x_m^1 - x_\ell^1}{L_i} = \gamma_i^1 \quad (5.2.2.9)$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_m^2} = \frac{x_m^2 - x_\ell^2}{L_i} = \gamma_i^2 \quad (5.2.2.10)$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_m^3} = \frac{x_m^3 - x_\ell^3}{L_i} = \gamma_i^3 \quad (5.2.2.11)$$

ou ainda condensando a notação:

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_k^s} = \pm \gamma_i^s \quad s = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (5.2.2.12)$$

onde teremos (+) para  $k = m$  e (-) para  $k = \ell$ .

Derivando (5.2.2.9/11), obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_i^1}{\partial x_\ell^1} &= \frac{-L_i - (x_m^1 - x_\ell^1) \frac{L_i}{\partial x_\ell^1}}{L_i^2} \dots \\ \frac{\partial \gamma_i^1}{\partial x_\ell^1} &= - \frac{1 - (\gamma_i^1)^2}{L_i} \quad (5.2.2.13) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \gamma_i^2}{\partial x_\ell^1} = - \frac{(x_m^2 - x_\ell^2)}{L_i^2} \frac{\partial L_i}{\partial x_\ell^1} \dots$$

$$\frac{\partial \gamma_i^2}{\partial x_\ell^1} = \frac{\gamma_i^1 \gamma_i^2}{L_i} \quad (5.2.2.14)$$

$$\frac{\partial \gamma_i^3}{\partial x_\ell^1} = - \frac{x_m^3 - x_\ell^3}{L_i^2} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x_\ell^1} \dots$$

$$\frac{\partial \gamma_i^3}{\partial x_\ell^1} = \frac{\gamma_i^1 \gamma_i^3}{L_i} \quad (5.2.2.15)$$

$$\frac{\partial \gamma_i^1}{\partial x_\ell^2} = - \frac{x_m^1 - x_\ell^1}{L_i^2} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x_\ell^2} \dots$$

$$\frac{\partial \gamma_i^1}{\partial x_\ell^2} = \frac{\gamma_i^1 \gamma_i^2}{L_i} \quad (5.2.2.16)$$

$$\frac{\partial \gamma_i^2}{\partial x_\ell^2} = \frac{-L_i - (x_m^2 - x_\ell^2) \frac{\partial L_i}{\partial x_\ell^2}}{L_i^2} \dots$$

$$\frac{\partial \gamma_i^2}{\partial x_\ell^2} = - \frac{1 - (\gamma_i^2)^2}{L_i} \quad (5.2.2.17)$$

$$\frac{\partial \gamma_i^3}{\partial x_\ell^2} = - \frac{x_m^3 - x_\ell^3}{L_i^2} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x_\ell^2} \dots$$

$$\frac{\partial \gamma_i^3}{\partial x_\ell^2} = \frac{\gamma_i^2 \gamma_i^3}{L_i} \quad (5.2.2.18)$$

$$\frac{\partial \gamma_i^1}{\partial x_\ell^3} = - \frac{x_m^1 - x_\ell^1}{L_i^2} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x_\ell^3} \dots$$

$$\frac{\partial \gamma_i^1}{\partial x_\ell^3} = \frac{\gamma_i^1 \gamma_i^3}{L_i} \quad (5.2.2.19)$$

$$\frac{\partial \gamma_i^2}{\partial x_\ell^3} = - \frac{x_m^2 - x_\ell^2}{L_i^2} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x_\ell^3} \dots$$

$$\frac{\partial \gamma_i^2}{\partial x_\ell^3} = \frac{\gamma_i^2 \gamma_i^3}{L_i} \quad (5.2.2.20)$$

$$\frac{\partial \gamma_i^3}{\partial x_\ell^3} = \frac{-L_i - (x_m^3 - x_\ell^3) \frac{\partial L_i}{\partial x_\ell^3}}{L_i^2} \dots$$

$$\frac{\partial \gamma_i^3}{\partial x_\ell^3} = - \frac{1 - (\gamma_i^3)^2}{L_i} \quad (5.2.2.21)$$

Colocando sob notação indicial temos:

$$\frac{\partial \gamma_i^q}{\partial x_k^s} = \pm \frac{\gamma_i^q \gamma_i^s}{L_i}, \text{ para } s \neq q \quad (5.2.2.22)$$

$$\frac{\partial \gamma_i^q}{\partial x_k^s} = \pm \frac{\gamma_i^q \gamma_i^s - 1}{L_i}, \text{ para } s = q \quad (5.2.2.23)$$

onde tomamos (+) para  $k = \ell$  e (-) para  $k = m$ , sendo  $s, q = 1, 2$  e  $3$ .

Levando esses resultados na expressão (5.2.2.4) temos:

$$\frac{\partial K_i^n}{\partial x_\ell} = \frac{k_i}{L_i} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = \frac{k_i}{L_i} \underline{h}_i \quad (5.2.2.24)$$



onde os elementos da matriz  $h_{ij}$ , simétrica, são calculadas segundo a derivação:

- com relação a  $x_k^1$  :

$$\begin{aligned} h_{11} &= \pm \gamma_i^1 \left[ 3 (\gamma_i^1)^2 - 2 \right] \\ h_{12} = h_{21} &= \pm \gamma_i^2 \left[ 3 (\gamma_i^1)^2 - 1 \right] \\ h_{13} = h_{31} &= \pm \gamma_i^3 \left[ 3 (\gamma_i^1)^2 - 1 \right] \\ h_{22} &= \pm 3 \gamma_i^1 (\gamma_i^2)^2 \\ h_{32} = h_{23} &= \pm 3 \gamma_i^1 \gamma_i^2 \gamma_i^3 \\ h_{33} &= \pm 3 \gamma_i^1 (\gamma_i^3)^2 \end{aligned} \quad (5.2.2.25)$$

- com relação a  $x_k^2$  :

$$\begin{aligned} h_{11} &= \pm 3 (\gamma_i^1)^2 \gamma_i^2 \\ h_{12} = h_{21} &= \pm \gamma_i^1 \left[ 3 (\gamma_i^2)^2 - 1 \right] \\ h_{31} = h_{13} &= \pm 3 \gamma_i^1 \gamma_i^2 \gamma_i^3 \\ h_{22} &= \pm \gamma_i^2 \left[ 3 (\gamma_i^2)^2 - 2 \right] \\ h_{23} = h_{32} &= \pm \gamma_i^3 \left[ 3 (\gamma_i^2)^2 - 1 \right] \\ h_{33} &= \pm 3 \gamma_i^2 (\gamma_i^3)^2 \end{aligned} \quad (5.2.2.26)$$

- com relação a  $x_k^3$ :

$$h_{11} = \pm 3 (\gamma_i^1)^2 \gamma_i^3$$

$$\begin{aligned}
 h_{21} &= h_{12} = \pm 3 \gamma_i^1 \gamma_i^2 \gamma_i^3 \\
 h_{13} &= h_{31} = \pm \gamma_i^1 \left[ 3 (\gamma_i^3)^2 - 1 \right] \\
 h_{22} &= \pm 3 (\gamma_i^2)^2 \gamma_i^3 \\
 h_{23} &= h_{32} = \pm \gamma_i^2 \left[ 3 (\gamma_i^3)^2 - 1 \right] \\
 h_{33} &= \pm \gamma_i^3 \left[ 3 (\gamma_i^3)^2 - 2 \right] \quad (5.2.2.27)
 \end{aligned}$$

onde teremos (+) para  $k = \ell$  e (-) para  $k = m$ .

Com isto podemos escrever:

$$\frac{\partial [K]}{\partial x_\ell} \{D\}^K = \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \Sigma_i \frac{\partial \dot{K}_i^n}{\partial x_\ell} (\delta_{\ell} - \delta_{mi}) \quad \text{n\bar{o } } \underline{\ell} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial \dot{K}_i^n}{\partial x_\ell} (\delta_{m1} - \delta_{\ell}) \quad \text{n\bar{o}s } \underline{m} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial \dot{K}_i^n}{\partial x_\ell} (\delta_{mi} - \delta_{\ell}) \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \quad (5.2.2.28)$$

Considerando as expressões (5.2.2.28) e (5.2.2.2) teremos:

$$\frac{\partial \delta_j^K}{\partial x_\ell} = \Sigma_i \frac{k_i}{L_i} (F_{j\ell} - F_{jm}) \underline{h}_i (\delta_m - \delta_\ell)^K \quad (5.2.2.29)$$

com o somat\u00f3rio abrangendo as barras que se conectam ao n\u00f3 em quest\u00e3o.

#### 5.2.2.2 - Varia\u00e7\u00e3o das for\u00e7as nos elementos

Derivamos novamente a expressão (5.1.25):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_e^k}{\partial x_\ell} &= k_e \underline{r}_e \frac{\partial}{\partial x_\ell} (\delta_{\underline{k}} - \delta_{\underline{j}})^k + \\ + \delta_{ei} &\left[ \frac{\partial k_e}{\partial x_\ell} \underline{r}_e (\delta_{\underline{k}} - \delta_{\underline{j}})^k + k_e \frac{\partial \underline{r}_e}{\partial x_\ell} (\delta_{\underline{k}} - \delta_{\underline{j}})^k \right] \end{aligned} \quad (5.2.2.30)$$

Levando em conta as expressões (5.2.2.29), (5.2.2.12) e (5.2.2.22/23) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_e^k}{\partial x_\ell} &= k_e \underline{r}_e \sum_i \frac{k_i}{L_i} (\underline{F}_{k\ell} - \underline{F}_{km} - \underline{F}_{j\ell} + \underline{F}_{jm}) \underline{h}_i (\delta_{\underline{m}} - \delta_{\underline{\ell}})^k + \\ &+ \delta_{ei} \frac{k_e}{L_e} \underline{q}_e (\delta_{\underline{k}} - \delta_{\underline{j}})^k \end{aligned} \quad (5.2.2.31)$$

onde  $\underline{i}$  é o número de elementos conectados ao nó alterado. A matriz  $\underline{q}_e = \{q_1 \ q_2 \ q_3\}$ , é calculada segundo a derivação:

- com relação a  $x_k^1$ :

$$\begin{aligned} q_1 &= \pm \left[ 2 (\gamma_i^1)^2 - 1 \right] \\ q_2 &= \pm 2 \gamma_i^1 \gamma_i^2 \\ q_3 &= \pm 2 \gamma_i^2 \gamma_i^3 \end{aligned} \quad (5.2.2.31)$$

- com relação a  $x_k^2$ :

$$\begin{aligned} q_1 &= \pm 2 \gamma_i^1 \gamma_i^2 \\ q_2 &= \pm \left[ 2 (\gamma_i^2)^2 - 1 \right] \\ q_3 &= \pm 2 \gamma_i^2 \gamma_i^3 \end{aligned} \quad (5.2.2.32)$$

- com relação a  $x_k^3$ :

$$\begin{aligned} q_1 &= \pm 2 \gamma_i^1 \gamma_i^3 \\ q_2 &= \pm 2 \gamma_i^2 \gamma_i^3 \\ q_3 &= \pm \left[ 2 (\gamma_i^3)^2 - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.2.2.33)$$

onde teremos (+) para  $k = \ell$  e (-) para  $k = m$ .

### 5.2.2.3 - Variação das forças admissíveis nos elementos

Considerando as expressões (4.4.21), (4.4.19) e (4.4.20), teremos:

- para os elementos tracionados:

$$\frac{\partial F_e^*}{\partial x_\ell} = 0 \quad (5.2.2.34)$$

- para os elementos comprimidos:

$$\frac{\partial F_e^*}{\partial x_\ell} = - 2 \delta_{ei} \frac{F_e^*}{L_e} \frac{\partial L_i}{\partial x_\ell}, \quad \text{para } F_b^L \leq F_e^* < 0 \quad (5.2.2.35)$$

$$\frac{\partial F_e^*}{\partial x_\ell} = - 2 \delta_{ei} \frac{F_b^L}{L_e} \left( \frac{\sigma_e' \cdot S}{\sigma_e^L} - 1 \right) \frac{\partial L_i}{\partial x_\ell}, \quad \text{para } F_e^* < F_b^L \quad (5.2.2.36)$$

e de acordo com a expressão (5.2.2.12), podemos escrever:

$$\frac{\partial F_e^*}{\partial x_k^s} = \pm 2 \delta_{ei} \frac{F_e^*}{L_e} \gamma_e^s, \quad \text{para } F_b^L \leq F_e^* < 0 \quad (5.2.2.37)$$

$$\frac{\partial F_e^*}{\partial x_k^s} = \pm 2 \delta_{ei} \frac{F_b^L}{L_e} \left( \frac{\sigma_e' \cdot S}{\sigma_e^L} - 1 \right) \gamma_e^s, \quad \text{para } F_e^* < F_b^L \quad (5.2.2.38)$$

onde teremos (+) para  $k = \ell$  e (-) para  $k = m$ .

#### 5.2.2.4 - Variação do peso total da estrutura

De acordo com a expressão (5.2.1.18), temos:

$$\frac{\partial W}{\partial x_{\ell}} = \sum_e \delta_{ei} \rho_e a_e \frac{\partial L_e}{\partial x_{\ell}} \quad (5.2.2.38)$$

e considerando a expressão (5.2.2.12), obtemos:

$$\frac{\partial W}{\partial x_k^s} = \pm \sum_e \delta_{ei} \rho_e a_e \gamma_e^s \quad (5.2.2.39)$$

onde temos (+) para  $k = m$  e (-) para  $k = \ell$ .

### 5.3 - Problema de Programação Linear

Neste problema de otimização, procuramos determinar o mínimo peso da estrutura. Portanto a função objetiva  $\bar{w}$  é dada por:

$$W = \rho \underline{L}^T \underline{A} \quad (5.3.1)$$

sendo  $\rho$  o peso específico do material,  $\underline{L}$  o vetor dos comprimentos e  $\underline{A}$  o vetor das áreas da seção transversal das barras.

No presente caso, incluímos como variáveis aquelas associadas a uma característica geométrica das barras (área da seção transversal) e a configuração geométrica da estrutura (coordenadas dos nós). Portanto, a função expressa anteriormente não é linear. Podemos entretanto desenvolvê-la em série de Taylor considerando apenas os seus termos de 1ª ordem:

$$W - W_0 = \underline{\nabla} W (\underline{A}_0, \underline{X}_0)^T d\underline{A} + \underline{\nabla} W (\underline{A}_0, \underline{X}_0)^T d\underline{X} \quad (5.3.2)$$

e considerando a expressão (5.3.1) podemos escrever:

$$dW = \rho \left( \underline{L}_0^T d\underline{A} + \underline{A}_0^T \underline{\nabla} \underline{L} (\underline{A}_0, \underline{X}_0) d\underline{X} \right) \quad (5.3.3)$$

As restrições de comportamento que governam o projeto são:

- restrições de deslocamentos nodais:

$$(\underline{D} - \underline{D}^*)^K \leq 0 \quad (5.3.4)$$

- restrições de forças nos elementos:

$$(\underline{F} - \underline{F}^*)^K \leq 0 \quad (5.3.5)$$

sendo  $\underline{D}^*$  e  $\underline{F}^*$  valores admissíveis.

As restrições acima não são lineares, e portanto aplicamos o processo de linearização visto anteriormente, obtendo:

$$(\underline{D}_0 + \underline{\nabla} \underline{D} (\underline{A}_0, \underline{X}_0) d\underline{A} + \underline{\nabla} \underline{D} (\underline{A}_0, \underline{X}_0) d\underline{X})^K \leq (\underline{D}^*)^K \quad (5.3.6)$$

$$(\underline{F}_0 + \underline{\nabla} \underline{F} (\underline{A}_0, \underline{X}_0) d\underline{A} + \underline{\nabla} \underline{F} (\underline{A}_0, \underline{X}_0) d\underline{X})^K \leq (\underline{F}^* + \underline{\nabla} \underline{F}^* (\underline{A}_0, \underline{X}_0) d\underline{A} + \underline{\nabla} \underline{F}^* (\underline{A}_0, \underline{X}_0) d\underline{X})^K \quad (5.3.7)$$

onde  $\underline{\nabla} \underline{D}$  e  $\underline{\nabla} \underline{F}$  são as matrizes dos gradientes das funções  $\underline{D}$  e  $\underline{F}$  avaliadas em um determinado ponto do espaço de projeto.

Introduzindo as variáveis de folga,

$$\underline{\bar{D}} \geq 0 \quad \text{e} \quad \underline{\bar{F}} \geq 0 \quad (5.3.8)$$

para transformar o sistema de inequações acima em um sistema de equações, podemos escrever:

$$(\underline{\bar{D}} + \underline{\nabla} \underline{D}(\underline{A}_0, \underline{X}_0)) d\underline{A} + \underline{\nabla} \underline{D}(\underline{A}_0, \underline{X}_0) d\underline{X})^k = (\underline{D}^* - \underline{D}_0)^k \quad (5.3.9)$$

$$(\underline{\bar{F}} + \underline{\nabla} \underline{F}(\underline{A}_0, \underline{X}_0)) d\underline{A} + \underline{\nabla} \underline{F}(\underline{A}_0, \underline{X}_0) d\underline{X})^k = (\underline{F}_0^* - \underline{F}_0 + \underline{\nabla} \underline{F}^*(\underline{A}_0, \underline{X}_0) d\underline{A} + \underline{\nabla} \underline{F}^*(\underline{A}_0, \underline{X}_0) d\underline{X})^k \quad (5.3.10)$$

Como o problema original não é linear e a linearização introduzida provoca distorção na região admissível, as variáveis  $\underline{A}$  e  $\underline{X}$  devem ser controladas no processo de avanço, surgindo assim as seguintes restrições laterais:

$$\underline{0} \geq d\underline{A}^{mn} \leq d\underline{A} \leq d\underline{A}^{mx} \geq \underline{0} \quad (5.3.11)$$

$$\underline{0} \geq d\underline{X}^{mn} \leq d\underline{X} \leq d\underline{X}^{mx} \geq \underline{0} \quad (5.3.12)$$

Para colocar um problema de programação linear na forma padrão é necessário que todas as variáveis sejam positivas. Portanto vamos fazer uma mudança de variáveis através de:

$$d\underline{A}^+ = d\underline{A} - d\underline{A}^{mn} \geq \underline{0} \quad (5.3.13)$$

$$d\underline{X}^+ = d\underline{X} - d\underline{X}^{mn} \geq \underline{0} \quad (5.3.14)$$

ou ainda:

$$d\underline{A}^+ \leq d\underline{A}^{mx} - d\underline{A}^{mn} \quad (5.3.15)$$

$$d\underline{X}^+ \leq d\underline{X}^{mx} - d\underline{X}^{mn} \quad (5.3.16)$$

Introduzindo as variáveis de folga:

$$d\underline{\bar{A}} \geq \underline{0} \quad \text{e} \quad d\underline{\bar{X}} \geq \underline{0} \quad (5.3.17)$$

obtemos:

$$d \underline{\bar{A}} + d \underline{A}^+ = d \underline{A}^{mx} - d \underline{A}^{mn} = \Delta \underline{A} \quad (5.3.18)$$

$$d \underline{\bar{X}} + d \underline{X}^+ = d \underline{X}^{mx} - d \underline{X}^{mn} = \Delta \underline{X} \quad (5.3.19)$$

Através das equações (5.3.9), (5.3.10), (5.3.18) e (5.3.19), podemos montar a matriz das condições restritivas em conjunto:

$$\begin{bmatrix} \underline{\nabla} \underline{D}(\underline{A}_0, \underline{X}_0) & \underline{\nabla} \underline{D}(\underline{A}_0, \underline{X}_0) & \underline{I} \underline{0} \underline{0} \underline{0} \\ \underline{\nabla} \underline{F}(\underline{A}_0, \underline{X}_0) - \underline{\nabla} \underline{F}^*(\underline{A}_0, \underline{X}_0) & \underline{\nabla} \underline{F}(\underline{A}_0, \underline{X}_0) - \underline{\nabla} \underline{F}^*(\underline{A}_0, \underline{X}_0) & \underline{0} \underline{I} \underline{0} \underline{0} \\ \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \underline{0} \underline{I} \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \underline{0} \underline{0} \underline{I} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} d \underline{A}^+ \\ d \underline{X}^+ \\ \underline{\bar{D}} \\ \underline{\bar{F}} \\ d \underline{\bar{A}} \\ d \underline{\bar{X}} \end{Bmatrix}^k$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} \underline{D}^* - \underline{D}_0 - \underline{\nabla} \underline{D}(\underline{A}_0, \underline{X}_0) d \underline{A}^{mn} - \underline{\nabla} \underline{D}(\underline{A}_0, \underline{X}_0) d \underline{X}^{mn} \\ \underline{F}_0^* - \underline{F}_0 - \left[ \underline{\nabla} \underline{F}(\underline{A}_0, \underline{X}_0) - \underline{\nabla} \underline{F}^*(\underline{A}_0, \underline{X}_0) \right] d \underline{A}^{mn} - \left[ \underline{\nabla} \underline{F}(\underline{A}_0, \underline{X}_0) - \underline{\nabla} \underline{F}^*(\underline{A}_0, \underline{X}_0) \right] d \underline{X}^{mn} \\ \Delta \underline{A} \\ \Delta \underline{X} \end{bmatrix}^k \right\rangle \quad (5.3.20)$$

onde  $\underline{I}$  é a matriz identidade e  $\underline{0}$  é a matriz nula.

Da mesma maneira expressamos a função objetiva em termos das novas variáveis, obtendo:

$$dW = \rho \left( \underline{L}_0^T d \underline{A}^+ + \underline{A}_0^T \underline{\nabla} \underline{L}(\underline{A}_0, \underline{X}_0) d \underline{X}^+ + \underline{L}_0^T d \underline{A}^{mn} + \underline{A}_0^T \underline{\nabla} \underline{L}(\underline{A}_0, \underline{X}_0) d \underline{X}^{mn} \right) \quad (5.3.21)$$

logo, para tornar mínimo  $dW$ , basta minimizar:

$$d \phi = \underline{L}_0^T d \underline{A}^+ + \underline{A}_0^T \underline{\nabla} \underline{L}(\underline{A}_0, \underline{X}_0) d \underline{X}^+ \quad (5.3.22)$$



A solução deste problema será obtida aplicando-se o método Simplex. Determinadas as variáveis auxiliares  $\tilde{dA}^+$  e  $\tilde{dX}^+$ , imediatamente se determinam as variáveis  $\tilde{dA}$  e  $\tilde{dX}$ , a cada iteração do problema.

Repetimos este processo até obter a convergência.

A aplicação do método Simplex com esta formulação, conduz a um grande tempo de processamento, principalmente para treliças espaciais onde a matriz Simplex é de ordem elevada, mesmo para estruturas razoavelmente pequenas.

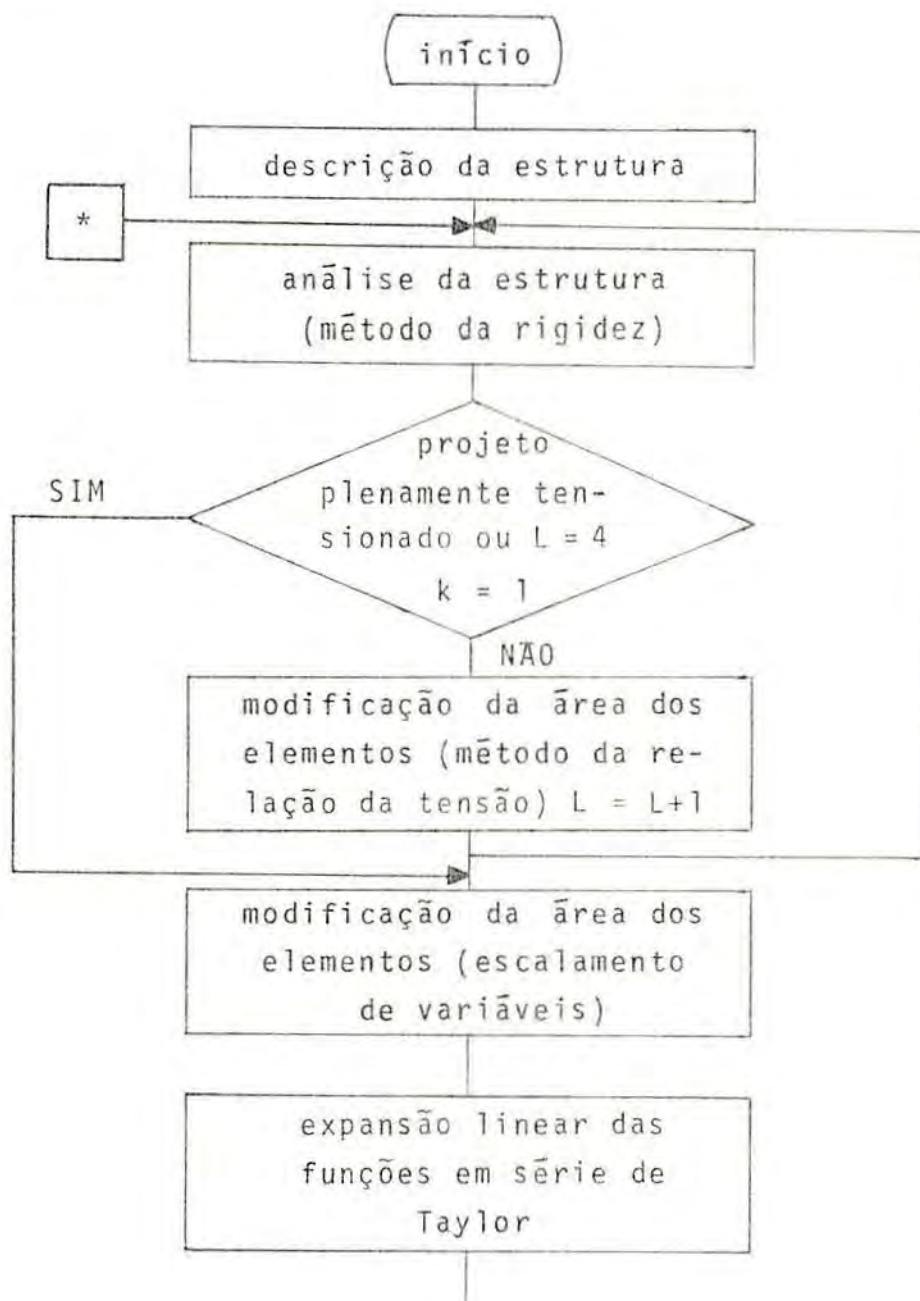
Uma maneira eficiente para se reduzir a ordem dessa matriz é a ligação de variáveis de projeto, conforme apresentada no capítulo anterior. Com isto a matriz Simplex torna-se bem menor e o problema menos oneroso.

## CAPÍTULO 6

## DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

## 6.1 - Introdução

Baseada na formulação matemática apresentada no capítulo anterior, a elaboração do programa computacional de otimização tem como diretriz básica o seguinte macro-fluxograma:





## 6.2 - Descrição da Estrutura

Partindo de uma estrutura pré-delineada, devemos informar as suas características geométricas básicas, como o número de nós e as suas coordenadas, o número de elementos e a sua conectividade, o número de apoios e também os estados de carga nela atuantes. As características dos elementos como o módulo de Young, o peso específico, também devem ser fornecidas.

No que se refere à área inicial dos elementos, elas podem ser quaisquer.

Relativamente às restrições do problema, devemos informar as limitações dos elementos, das coordenadas dos nós e dos deslocamentos nodais, assim como a tensão admissível à tração, à compressão simples e a tensão limite de proporcionalidade do material usado.

### 6.3 - Análise da Estrutura

Neste passo se processa a determinação dos deslocamentos nodais, das forças atuantes nos elementos e das reações de apoio provenientes da aplicação do carregamento externo. É usado o método da rigidez direta, onde com os dados gerais sobre as características dos elementos da estrutura e sua incidência, se obtém a matriz de rigidez global da estrutura, que é armazenada no esquema semi-banda simétrica. Resolve-se a equação geral do método da rigidez através do método da eliminação de Gauss, obtendo-se os deslocamentos nodais e em seguida as forças axiais atuantes nos elementos.

A força admissível em cada elemento será calculada através do limite de elasticidade do material, no caso dos elementos tracionados.

Para elementos comprimidos será seguido no cálculo da força admissível, o seguinte procedimento:

- No regime elástico, consideraremos a carga crítica de Euler.

- No regime inelástico, tomaremos a tensão de escoamento do material majorada pelo coeficiente de segurança da Norma Brasileira.

Sendo que apenas os valores críticos (ou os próximos a eles) das forças e dos deslocamentos participarão do processo de otimização, usaremos o fator  $\epsilon$  (equações 5.1.26 e 5.1.27) que excluirá do processo as restrições

não críticas.

Deve-se notar que quando variam as variáveis de projeto, as tensões variam mais sensivelmente que os deslocamentos, pois as tensões são proporcionais às diferenças de deslocamentos.

Desta maneira fixaremos fatores de exclusão  $\xi$ , diferentes para esses dois tipos de restrições.

Estes fatores variam durante a seqüência iterativa, pois com o avanço do processo vão se definindo as restrições que governarão o projeto. Para tanto fixaremos arbitrariamente os extremos 0,2 e 0,8 para exclusão de restrições de tensão e 0,4 e 0,8 para exclusão de restrições de deslocamentos.

Os demais valores serão determinados através de uma interpolação linear entre esses valores extremos, com respeito a um número máximo de iterações dado, de acordo com a seguinte expressão:

$$\xi_i = \xi_1 + \frac{\xi_n - \xi_1}{(n-1)} (i-1) \quad (6.3.1)$$

onde:

- $\xi_1 = 0,2$  ou  $0,4$  conforme a restrição seja de tensão ou deslocamento respectivamente.
- $\xi_n = 0,8$  para ambos os tipos de restrições.
- $n$  - é o número máximo de iterações, pré-fixado.

Além do conceito visto anteriormente, podemos ainda reduzir o número de restrições do projeto considerando o conceito de "regionalização", que consiste em considerar apenas uma restrição de tensão para cada classe de variáveis ligadas. Isto pode ser feito admitindo que

em cada conjunto de variáveis ligadas, apenas a restrição de tensão mais crítica governará o projeto. Como a restrição mais crítica pode variar de um ciclo para outro, ao começar cada sub-problema linear ela deve ser identificada dentro de cada grupo de variáveis ligadas.

#### 6.4 - Projeto Plenamente Tensionado

Quando analisamos a estrutura pelo método da rigidez, partimos com valores arbitrários para a área da seção transversal dos elementos.

A aplicação do método da relação de tensão tem por objetivo melhorar o projeto inicial, uma vez que é um processo rápido e eficiente. Devemos no entanto considerar as restrições de área da seção transversal dos elementos, caso existam, de modo que nessa fase, os elementos se não projetados por tensão ou por tamanho da seção.

Para as barras tracionadas, suas respectivas áreas serão determinadas pela equação:

$$A_i^{q+1} = \max_j A_i^q \frac{\sigma_{ij}^q}{\sigma_t^*} \quad (6.4.1)$$

Para as barras comprimidas no regime elástico, considerando a variação da tensão admissível, usaremos a expressão:

$$A_i^{q+1} = \max_j A_i^q \frac{\sigma_{ij}^q}{\sigma_i^* + \delta \sigma_i^*} \quad (6.4.2)$$

onde

$$\delta \sigma_i^* = \frac{\partial \sigma_i^*}{\partial A_i^q} (A_i^{q+1} - A_i^q) \quad (6.4.3)$$

A tensão admissível neste regime será dada por:

$$\sigma_i^* = - \frac{A_i^q}{\phi_i^2} \quad (6.4.4)$$

como:

$$\frac{\partial \sigma_i^*}{\partial A_i^q} = - \frac{1}{\phi_i^2} \quad (6.4.5)$$

Substituindo em (6.4.3) e depois em (6.4.2) obtemos:

$$A_i^{q+1} = \max_j \frac{A_i^q \sigma_{ij}^q \phi_i^2}{\sigma_i^* \phi_i^2 - (A_i^{q+1} - A_i^q)}$$

como:  $\sigma_i^* \phi_i^2 = - A_i^q$ , teremos:

$$A_i^{q+1} = \max_j \phi_i \sqrt{-\sigma_{ij} A_i^q} \quad (6.4.6)$$

No regime inelástico a expressão obtida considerando-se a variação da tensão admissível torna-se algebricamente muito complexa, portanto não será utilizada. Logo, neste caso as áreas serão determinadas segundo:

$$A_i^{q+1} = \max_j \frac{A_i^q \sigma_{ij}^q}{\sigma_i^*} \quad (6.4.7)$$

onde

$$\sigma_i^* = \frac{F_b^L + \sigma_i^L (A_i - \phi_i \sqrt{-F_b^L})}{A_i} \quad (6.4.8)$$

sendo que  $j$  é o estado de carga considerado.

Para aplicação do algoritmo de otimização que se propõe, devemos partir de um projeto inicial admissível. Portanto devemos fazer um escalamento de variáveis uma vez que o projeto obtido pelo método da relação da tensão pode não satisfazer todas as condições de restrições impostas.

### 6.5 - Expansão Linear das Funções e Determinação dos Limites Móveis

O problema original não linear é linearizado através do desenvolvimento da função objetiva e das restrições em série linear de Taylor. Como consequência teremos um erro de aproximação nos resultados. Para controlá-lo, introduzimos os chamados limites móveis que definirão, em cada ciclo do processo, um intervalo de variação para as variáveis de projeto.

No processo da solução a convergência é mais acentuada nos primeiros ciclos, tornando-se monótona à medida que se avança nas iterações, portanto devemos iniciar com limites móveis de maior amplitude, decrescendo-os à medida que nos aproximamos da solução ótima.

Neste trabalho usaremos para tais limites o seguinte:

- Para variação da área dos elementos:

$$d \underline{A}^{mx} = - d \underline{A}^{mn} = \zeta_1 (\underline{A} - \underline{A}^{mn}) \quad (6.5.1)$$

- Para variação das coordenadas nodais:

$$d \underline{X}^{mx} = \zeta_2 (\underline{X}^{mx} - \underline{X}) \quad (6.5.2)$$

$$d \underline{X}^{mn} = \zeta_2 (\underline{X}^{mn} - \underline{X}) \quad (6.5.3)$$

A escolha dos limites móveis é um fator importante neste processo, pois eles governarão o andamento do problema. Além do mais uma escolha inadequada pode fazer com que a convergência se dê para um valor que não o ótimo.

Após aplicarmos o método da relação da tensão, fazemos um escalamento de variáveis para corrigir as possíveis restrições violadas. Esse escalamento também será



feito em cada ciclo do processo, levando o projeto gerado até o contorno da restrição mais crítica, melhorando portanto a convergência da solução.

Para esse escalamento será tomado o fator  $\mu$  sendo que as novas áreas ficam determinadas através da seguinte expressão:

$$A_i^E = \mu A_i \quad (6.5.4)$$

onde  $A_i^E$  é a área escalada e  $A_i$  a área inicial.

Para evitar uma nova análise da estrutura, uma vez que as tensões e deslocamentos dependem das áreas escaladas, pesquisemos o fator pelo qual as funções de resposta da estrutura devem ser multiplicadas para que tenhamos o novo projeto inicial bem definido.

Assim, consideremos um deslocamento qualquer  $u_j$  definido pelo método dos trabalhos virtuais:

$$u_j = \sum_{i=1}^n \frac{F_{ij}^R(A) \cdot F_{ij}^V(A)}{A_i E} L_i \quad (6.5.5)$$

onde  $F_{ij}^R$  é a força real no elemento  $i$  e  $F_{ij}^V$  é a força gerada por um deslocamento unitário no nó  $j$ .

Considerando a expressão (6.5.4) podemos escrever o valor do deslocamento  $u_j^E$ , após o escalamento.

$$u_j^E = \sum_{i=1}^n \frac{F_{ij}^R(\mu A) F_{ij}^V(\mu A)}{\mu A_i E} L_i = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \frac{F_{ij}^R(A) F_{ij}^V(A)}{A_i E} L_i \quad (6.5.6)$$

pois  $F_{ij}^R(\mu A) = F_{ij}^R(A)$  e  $F_{ij}^V(\mu A) = F_{ij}^V(A)$  já que a distribuição de esforços em uma treliça não varia quando todas as áreas dos elementos variam proporcionalmente.

Levando em conta as expressões (6.5.5) e (6.5.6) obtemos:

$$u_j^E = \frac{1}{\mu} u_j \quad (6.5.7)$$

A tensão de tração num elemento  $\underline{i}$  da estrutura  $\bar{e}$  é definida como:

$$\sigma_i = \frac{F(\underline{A})}{A_i} \quad (6.5.8)$$

considerando a expressão (6.5.4) teremos:

$$\sigma_i^E = \frac{F(\mu \underline{A})}{\mu A_i} \quad (6.5.9)$$

e, considerando novamente que  $F(\mu \underline{A}) = F(\underline{A})$  e substituindo em (6.5.9) obtemos:

$$\sigma_i^E = \frac{F(\underline{A})}{\mu A_i} \quad (6.5.10)$$

então pelas expressões (6.5.8) e (6.5.10) obtemos:

$$\sigma_i^E = \frac{1}{\mu} \sigma_i \quad (6.5.11)$$

Para os elementos comprimidos a determinação do fator de escalamento não é tão simples devido a variação das tensões admissíveis por influência da flambagem.

No regime de flambagem elástica a carga de flambagem dada por Euler é definida como:

$$F_{ie}^* = \frac{\pi^2 E I}{L_i^2} = \frac{\pi^2 E A_i}{\left(\frac{L_i}{i}\right)^2} \quad (6.5.12)$$

que corresponde a uma tensão dada por:

$$\sigma_{ie}^* = \frac{\pi^2 E}{L_i^2} i^2 \quad (6.5.13)$$

considerando a aproximação sugerida por LaPay<sup>25</sup>:

$$i_i^2 = (\alpha_i')^2 A_i \quad (6.5.14)$$

teremos:

$$\sigma_{ie}^* = \frac{\pi^2}{L_i^2} E (\alpha_i')^2 A_i = K A_i \quad (6.5.15)$$

onde  $K$  é uma constante com respeito às áreas.

Das equações (6.5.4) e (6.5.15) temos:

$$\sigma_{ie}^* E = K \mu A_i = \mu \sigma_{ie}^* \quad (6.5.16)$$

No caso de flambagem no regime inelástico a força de compressão é dada por:

$$F_{ip}^* = F_b^L + \sigma' (A_i - \phi_i \sqrt{-F_b^L}) \quad (6.5.17)$$

$$\text{onde: } F_b^L = - \frac{L_i^2 (\sigma^L)^2}{\pi^2 (\alpha_i')^2 E S} = K_1 \quad (6.5.18)$$

é a força no limite de proporcionalidade, e:

$$\phi_i = \frac{L_i \sqrt{S}}{\pi \alpha_i' \sqrt{E}} \quad (6.5.19)$$

é um fator geométrico do elemento  $i$ .

A tensão será dada por:

$$\sigma_{ip}^* = \frac{F_b^L}{A_i} + \sigma' \left( 1 - \frac{\phi_i}{A_i} \sqrt{-F_b^L} \right) \quad (6.5.20)$$

ou ainda:

$$\sigma_{ip}^* = \frac{F_b^L - \sigma' \phi_i \sqrt{-F_b^L}}{A_i} + \sigma' \quad (6.5.21)$$

Substituindo os valores constantes obtemos:

$$\sigma_{ip}^* = \frac{K_1 - K_2}{A_i} + K_3 = \frac{K_4}{A_i} + K_3 \quad (6.5.22)$$

ou ainda:

$$\sigma_{ip}^* - K_3 = \frac{K_4}{A_i} \quad (6.5.23)$$

Das equações (6.5.4) e (6.5.23) obtemos:

$$\sigma_{ip}^{*E} - K_3 = \frac{K_4}{\mu A_i} = \frac{1}{\mu} (\sigma_{ip}^* - K_3) \quad (6.5.24)$$

ou ainda:

$$\sigma_{ip}^{*E} = \frac{1}{\mu} (\sigma_{ip}^* - K_3) + K_3 \quad (6.5.25)$$

substituindo o valor da constante  $K_3$  obtemos:

$$\sigma_{ip}^{*E} = \frac{1}{\mu} (\sigma_{ip}^* - \sigma') + \sigma' \quad (6.5.26)$$

O fator necessário para escalar um projeto  $\bar{a}$  uma restrição crítica se determina pela relação:

$$Z^E = Z^{*E} \quad (6.5.27)$$

onde  $Z^E$  é uma função de resposta para um projeto escalado e  $Z^{*E}$  é o valor crítico dessa função de resposta.

No caso de uma restrição de área mínima se obtém, pelas equações (6.5.4) e (6.5.27):

$$A_i^E = \mu A_i = A_i^{mm} \quad (6.5.28)$$

donde o fator de escalamento  $\bar{a}$ :

$$\mu = \frac{A_i^{mn}}{A_i} \quad (6.5.29)$$

Para uma restrição de deslocamento o valor crítico  $\bar{e}$  é independente do projeto, então pelas equações (6.5.7) e (6.5.27) obtemos:

$$u_j^E = \frac{u_j}{\mu} = u_j^* \quad (6.5.30)$$

donde o fator de escalamento  $\bar{e}$  é:

$$\mu = \frac{u_j}{u_j^*} \quad (6.5.31)$$

Para uma restrição de tensão de tração o valor crítico também não depende do projeto, logo das equações (6.4.11) e (6.4.27) obtemos:

$$\sigma_i^E = \frac{1}{\mu} \sigma_i = \sigma_i^* \quad (6.5.32)$$

donde o fator de escalamento fica:

$$\mu = \frac{\sigma_i}{\sigma_i^*} \quad (6.5.33)$$

No caso de restrições de compressão, a tensão admissível varia durante o processo. Para o caso de regime elástico devemos aplicar as equações (6.5.10), (6.5.27) que toma a forma:

$$\sigma_i^E = \sigma_{ie}^* \quad (6.5.34)$$

assim:

$$\frac{1}{\mu} \sigma_i = \mu \sigma_{ie}^* \quad (6.5.35)$$

donde o fator de escalamento será:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma_i}{\sigma_{ie}^*}} \quad (6.5.36)$$

No regime inelástico, usando as equações (6.5.

11), (6.5.26) e (6.5.27), obtemos:

$$\frac{1}{\mu} \sigma_i = \frac{1}{\mu} (\sigma_{ip}^* - \sigma') + \sigma' \quad (6.5.37)$$

donde o fator de escaleamento fica:

$$\mu = \frac{\sigma_i - \sigma_{ip}^* + \sigma'}{\sigma'} \quad (6.5.38)$$

Das equações (6.5.29), (6.5.31), (6.5.33), (6.5.36) e (6.5.38) se deduz que o fator de escaleamento até a restrição mais crítica deve ser tomado como sendo:

$$\mu = \max \left\{ \begin{array}{l} \max_k \frac{A^{mn}}{A_i} \\ \max_j \frac{u_j}{u_j^*} \\ \max_{i \in I_t} \frac{\sigma_i}{\sigma_i^*} \\ \max_{i \in I_e} \sqrt{\frac{\sigma_i}{\sigma_{ie}^*}} \\ \max_{i \in I_p} \frac{\sigma_i - \sigma_{ip}^* + \sigma'}{\sigma'} \end{array} \right.$$

onde:

$I_t$ ,  $I_e$  e  $I_p$  - são os conjuntos de índices associados às tensões de tração, compressão elástica e compressão plástica, respectivamente.

Na figura seguinte, onde representamos um espaço bi-dimensional, podemos visualizar melhor tais conceitos:



Determinados os deslocamentos e forças "quase críticos", fazemos a análise de sensibilidade através da determinação dos respectivos gradientes com respeito às variáveis de projeto.

Com isto, podemos montar o quadro completo das condições restritivas, agregando ainda as restrições do tipo lateral, para aplicar o método Simplex.

### 6.7 - Solução do Problema de Programação Linear

Para solucionar o problema de programação linear através do método Simplex, devemos colocá-lo na forma canônica, através da adição de variáveis de folga, não negativas, com coeficientes nulos na função objetiva, que tornarão as restrições da forma ( $\leq$ ) em restrições de igualdade. No caso de restrições da forma ( $\geq$ ), para colocá-las na forma ( $=$ ), deve-se subtrair variáveis de folga, não negativas, com coeficientes nulos na função objetiva e adicionar variáveis artificiais, não negativas com coeficientes extremamente grandes na função objetiva.

Com isto, o problema será resolvido obtendo-se como resultado as variáveis auxiliares  $d \underline{A}^+$  e  $d \underline{X}^+$ , a partir das quais se determinam as variáveis  $d \underline{A}$  e  $d \underline{X}$  que representam as mudanças ótimas na estrutura, em cada ciclo do processo.

### 6.8 - Teste de Convergência

A cada ciclo, fazemos um teste através da redução em peso obtida. A solução será tomada como ótima quando, por exemplo:

$$\frac{W^{q-1}}{W^q} \leq 1,01 \quad (6.8.1)$$



Como já vimos anteriormente, depois de um certo número de iterações a convergência torna-se monótona.

Assim, podemos fixar o número de iterações caso não se satisfaça a expressão (6.8.1). Sugere-se que esse número seja igual a 10.

## CAPÍTULO 7

## EXEMPLOS NUMÉRICOS E COMENTÁRIOS

## 7.1 - Exemplo 1

Consideremos a estrutura de uma torre de transmissão executada em aço e analisada como treliça espacial, conforme a figura abaixo:

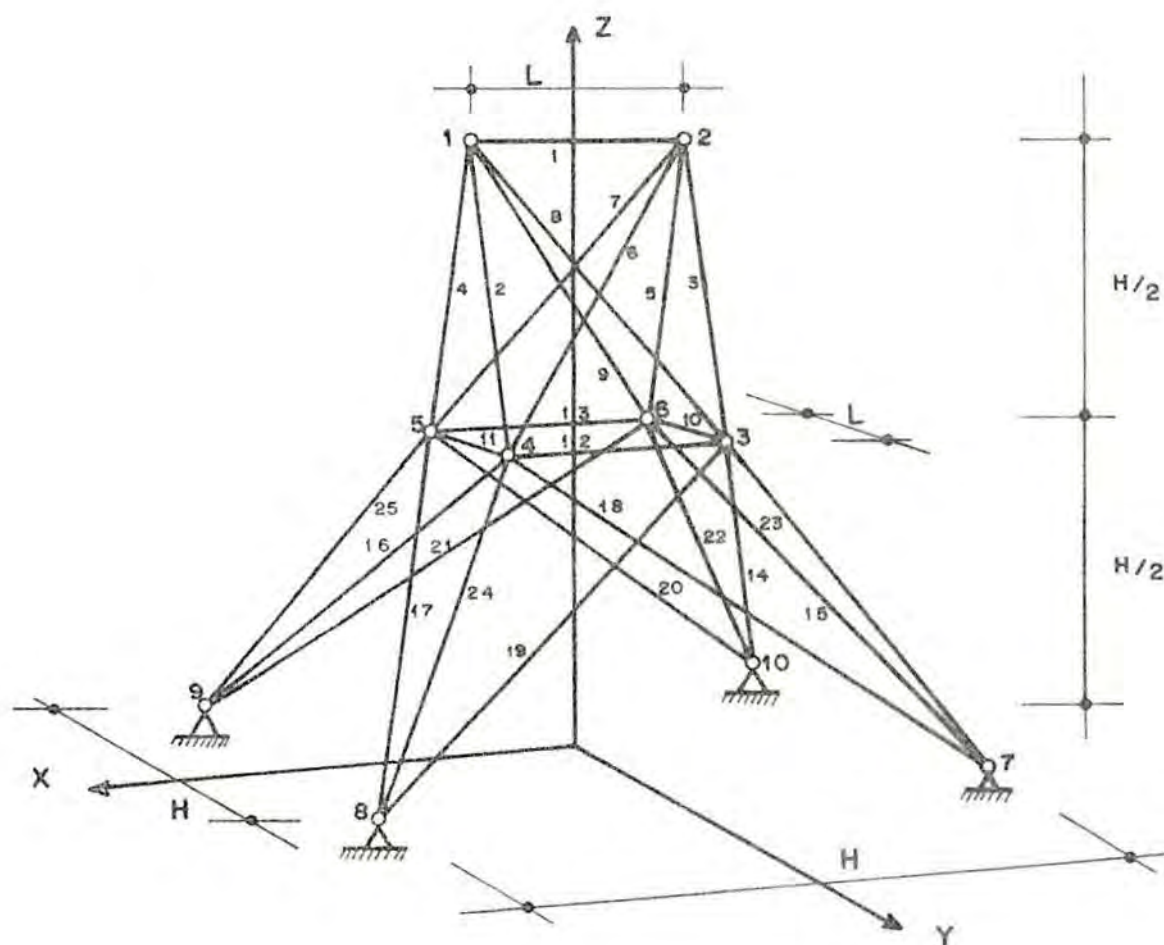


Figura 7.1.1

Sendo:

$$L = 190 \text{ cm}$$

$$H = 500 \text{ cm}$$

$$E = 2100000 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\rho = 0,00785 \text{ Kgf/cm}^3$$

$$\sigma' = -1200 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma_t^* = 1500 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma^L = -1500 \text{ Kgf/cm}^2$$

Será considerado o coeficiente de segurança à flambagem da norma brasileira (NB-14),  $S=2,00$  e todos os elementos serão confeccionados com cantoneiras de aço de abas iguais (C.S.N.).

Os valores das restrições e as áreas iniciais da seção transversal dos elementos são os seguintes (dados em  $\text{cm}^2$ ):

ELEMENTOS	ÁREA INICIAL	ÁREA MÍNIMA	ÁREA MÁXIMA	PARÂMETRO DA SEÇÃO
1 a 25	16,00	1,48	50,00	0,44

Tabela 7.1.1

Os valores iniciais e as restrições dos nós são os seguintes (dados em cm):

Nº	COORD. INICIAL			COORD. MÁXIMA			COORD. MÍNIMA			DESL. ADMIS.
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X, Y, Z
1	-95	0	500	-45	0	500	-145	0	500	$\pm 0,89$
2	95	0	500	145	0	500	45	0	500	$\pm 0,89$
3	-95	95	250	-45	145	350	-145	45	150	$\pm 0,89$
4	95	95	250	145	145	350	45	45	150	$\pm 0,89$
5	95	-95	250	145	-45	350	45	-145	150	$\pm 0,89$
6	-95	-95	250	-45	-45	350	-145	-145	150	$\pm 0,89$
7	-250	250	0	-150	350	0	-350	150	0	0
8	250	250	0	350	350	0	150	150	0	0
9	250	-250	0	350	-150	0	150	-350	0	0
10	-250	-250	0	-150	-150	0	-350	-350	0	0

Tabela 7.1.2

A estrutura será solicitada por dois estados de carga independentes conforme a tabela abaixo (dados em Kgf):

Nº	CARREGAMENTO 1			CARREGAMENTO 2		
	X	Y	Z	X	Y	Z
1	0	9072	-2242	448	4485	-2242
2	0	9072	-2242	0	4485	-2242
3	0	0	0	224	0	0
6	0	0	0	224	0	0

Tabela 7.1.3

A otimização envolve a área dos elementos e a configuração geométrica da estrutura, onde são consideradas 12 variáveis ligadas, sendo 8 referentes às áreas dos elementos e 4 referente às coordenadas nodais, conforme as tabelas abaixo:

#### Áreas dos elementos

VARIÁVEIS LIGADAS	ELEMENTOS
1	1
2	2,3,4,5
3	6,7,8,9
4	10,11
5	12,13
6	14,15,16,17
7	18,19,20,21
8	22,23,24,25

Tabela 7.1.4

#### Coordenadas dos nós

VARIÁVEIS LIGADAS	NÓS		
	DIREÇÃO X	DIREÇÃO Y	DIREÇÃO Z
1	1,2	_____	_____
2	3,4,5,6	3,4,5,6	_____
3	7,8,9,10	7,8,9,10	_____
4	_____	_____	3,4,5,6

Tabela 7.1.5

Neste projeto apenas a altura da torre permanecerá inalterada.

Para limites móveis, serão adotados os valores 0,3 para variação de áreas e 0,1, para variação das coordenadas nodais.

Em seguida apresentamos os resultados obtidos da aplicação do método de otimização:

#### ESTRUTURA OTIMIZADA

##### ÁREA E COMPRIMENTO DOS ELEMENTOS

ELEMENTO	ÁREA	COMPRIMENTO
1	1.7	134.4
2	14.0	295.4
3	14.0	295.4
4	14.0	295.4
5	14.0	295.4
6	10.0	252.0
7	10.0	252.0
8	10.0	252.0
9	10.0	252.0
10	1.7	174.7
11	1.7	174.7
12	0.3	174.7
13	0.3	174.7
14	2.0	341.0
15	2.0	341.0
16	2.0	341.0
17	2.0	341.0

18	17.3	391.5
19	17.3	391.5
20	17.3	391.5
21	17.3	391.5
22	24.1	297.7
23	24.1	297.7
24	24.1	297.7
25	24.1	297.7

## COORDENADAS NODALES

NO	X	Y	Z
1	-87.2	0.0	500.0
2	87.2	0.0	500.0
3	-87.4	87.4	203.9
4	87.4	87.4	203.9
5	87.4	-87.4	203.9
6	-87.4	-87.4	203.9
7	-184.9	184.9	0.0
8	184.9	184.9	0.0
9	184.9	-184.9	0.0
10	-184.9	-184.9	0.0

PESO INICIAL = 1173.600

PESO FINAL = 771.933

REDUCCION DE PESO (%) = 34.2

ITERACIONES NECESSARIAS = 10

TIEMPO TOTAL (SEG) = 404.21

## RESULTADOS PARA A CONDIÇÃO DE CARGA 1

## DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	U	V	W
1	-0.00310	0.35222	-0.01250
2	0.00310	0.35222	-0.01250
3	-0.01538	0.05555	-0.05492
4	0.01538	0.05555	-0.05492
5	-0.01342	0.05342	0.04337
6	0.01342	0.05342	0.04337
7	0.00000	0.00000	0.00000
8	0.00000	0.00000	0.00000
9	0.00000	0.00000	0.00000
10	0.00000	0.00000	0.00000

## REAÇÕES NODAIS

NO	PX	PY	PZ
1	-0.00	9072.00	-2242.00
2	0.00	9072.00	-2242.00
3	-0.00	-0.00	0.00
4	0.00	-0.00	0.00
5	0.00	-0.00	-0.00
6	0.00	-0.00	-0.00
7	6602.53	-4970.11	13309.22
8	-6602.53	-4970.11	13309.22
9	5487.30	-4101.89	-11147.22
10	-5487.30	-4101.89	-11147.22



## FORÇA E TENSÃO NOS ELEMENTOS

ELEMENTO	FORÇA AXIAL	TENSÃO
1	107.13	70.70
2	-4074.70	-330.41
3	-4074.70	-330.41
4	+207.91	273.03
5	+207.91	273.03
6	-10117.30	-544.95
7	0237.45	443.09
8	-10117.30	-544.95
9	0237.45	443.09
10	44.24	25.03
11	44.24	25.03
12	1746.40	309.44
13	-1098.04	-322.50
14	-29.62	-11.07
15	-61.18	-24.55
16	-29.62	-11.07
17	-61.18	-24.55
18	-3716.22	-215.34
19	-3716.22	-215.34
20	3072.47	170.04
21	3072.47	170.04
22	10261.00	425.43
23	-12231.00	-507.13
24	-12231.00	-507.13
25	10261.00	425.43

## RESULTADOS PARA A CONDICAO DE CARGA Z

## DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	U	V	W
1	0.01103	0.17907	-0.01019
2	0.01312	0.17907	-0.01400
3	-0.00441	0.02754	-0.02073
4	0.01108	0.02043	-0.03146
5	-0.00310	0.02544	0.01713
6	0.00983	0.02034	0.01907
7	0.00000	0.00000	0.00000
8	0.00000	0.00000	0.00000
9	0.00000	0.00000	0.00000
10	0.00000	0.00000	0.00000

## REAÇÕES NODAIS

NO	PX	PY	PZ
1	448.00	4485.00	-2242.00
2	0.00	4485.00	-2242.00
3	224.00	-0.00	0.00
4	0.00	-0.00	0.00
5	-0.00	0.00	0.00
6	224.00	-0.00	-0.00
7	3332.30	-2490.70	6723.32
8	-3700.00	-2855.70	7040.96
9	2195.11	-1027.30	-4401.32
10	-2044.11	-1958.22	-5400.96

## FORÇA E TENSÃO NOS ELEMENTOS

ELEMENTO	FORÇA AXIAL	TENSÃO
1	50.53	32.73
2	-2858.26	-195.00
3	-2479.80	-169.93
4	1601.42	115.22
5	2059.80	141.15
6	-5556.89	-299.51
7	3517.30	139.45
8	-5233.30	-201.59
9	3340.81	206.00
10	24.90	14.43
11	02.02	35.94
12	979.45	105.91
13	-822.29	-150.00
14	-17.51	-7.03
15	-33.12	-13.27
16	-50.04	-22.40
17	-71.04	-20.74
18	-1905.13	-110.39
19	-2143.12	-124.10
20	1451.05	84.00
21	1213.07	70.29
22	5009.38	207.09
23	-6110.54	-253.34
24	-6944.47	-287.92
25	4175.45	173.11

Relativamente ao projeto inicial podemos observar uma redução em peso da estrutura de 34,2% em 10 iterações com um tempo total de processamento de 6,7 minutos.

Deve-se notar que o projeto inicial considerado é o projeto obtido após a aplicação de quatro ciclos do método da relação da tensão, uma vez que inicialmente são fornecidos valores arbitrários para as áreas da seção transversal dos elementos.

A redução iterativa do peso da estrutura pode ser vista na figura abaixo:

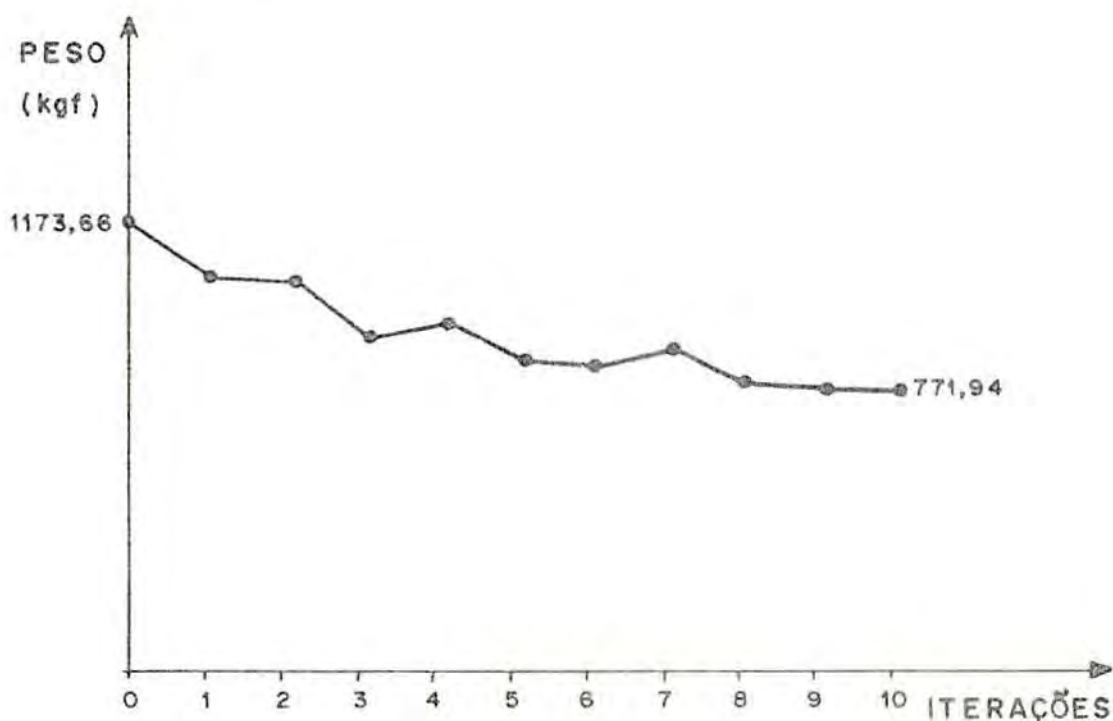


Figura 7.1.2

Podemos notar um acréscimo de peso nos ciclos 4 e 7 e depois a redução nos ciclos seguintes. Isto

ocorre devido aos erros decorrentes das linearizações e ainda ao escalamento de variáveis que é feito em cada ciclo do processo iterativo para levar o projeto à região admissível não linearizada.

A utilização de limites móveis menores tornaria a curva de decréscimo de peso monotônica.

Uma comparação entre a configuração inicial e a configuração final da estrutura pode ser feita através das seguintes figuras:

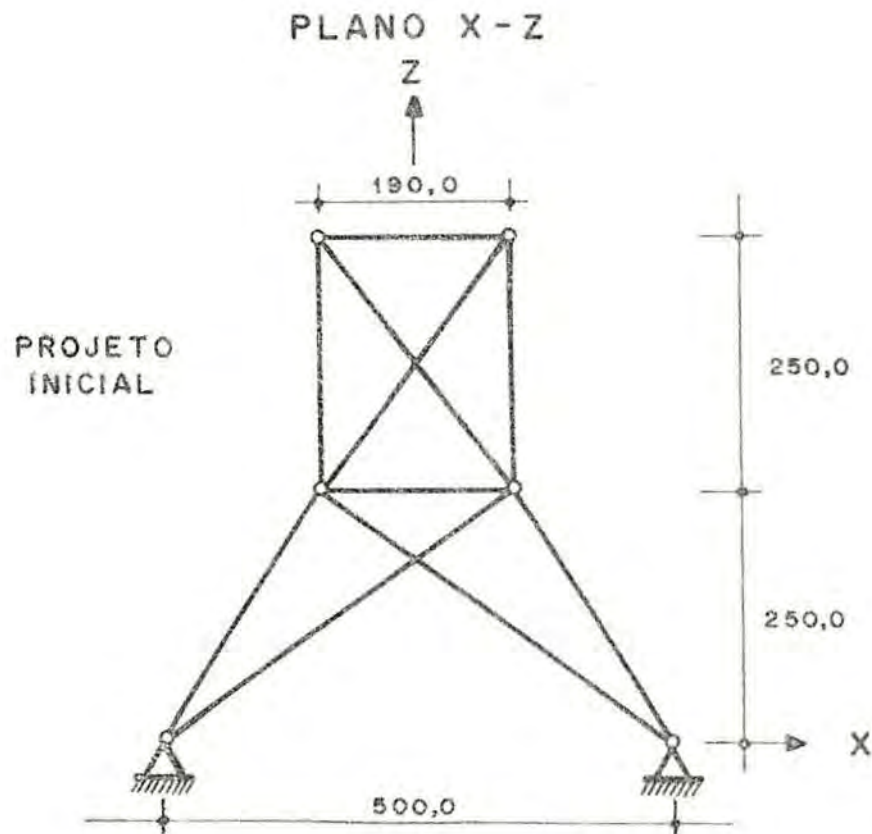


Figura 7.1.3

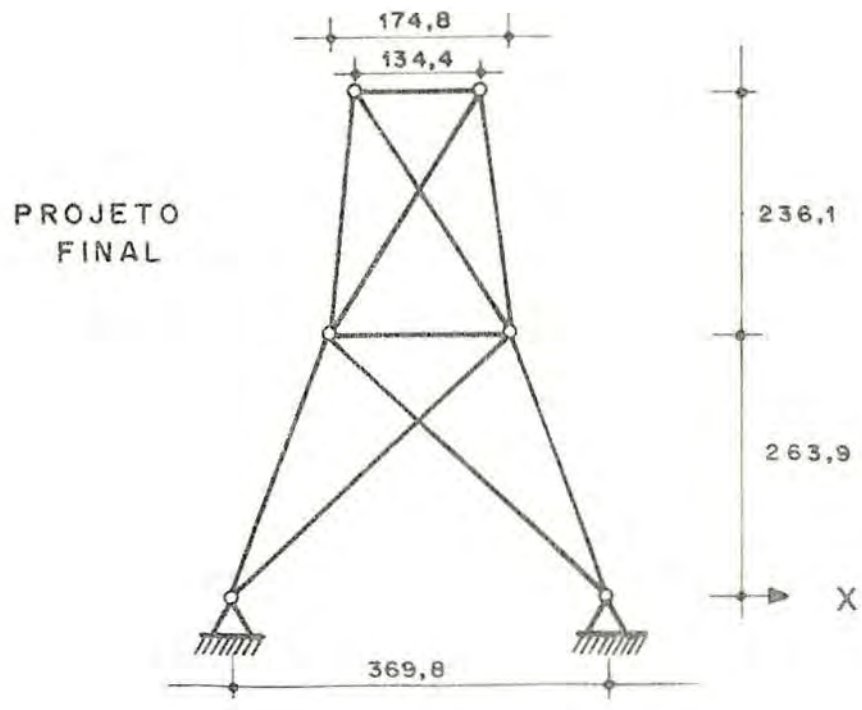


Figura 7.1.4

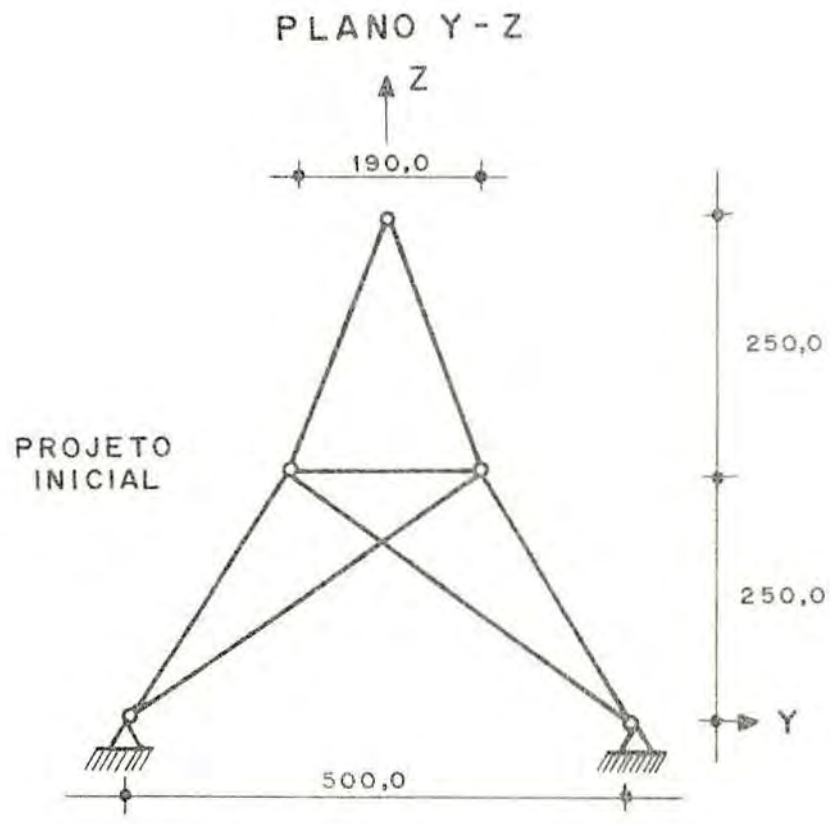


Figura 7.1.5

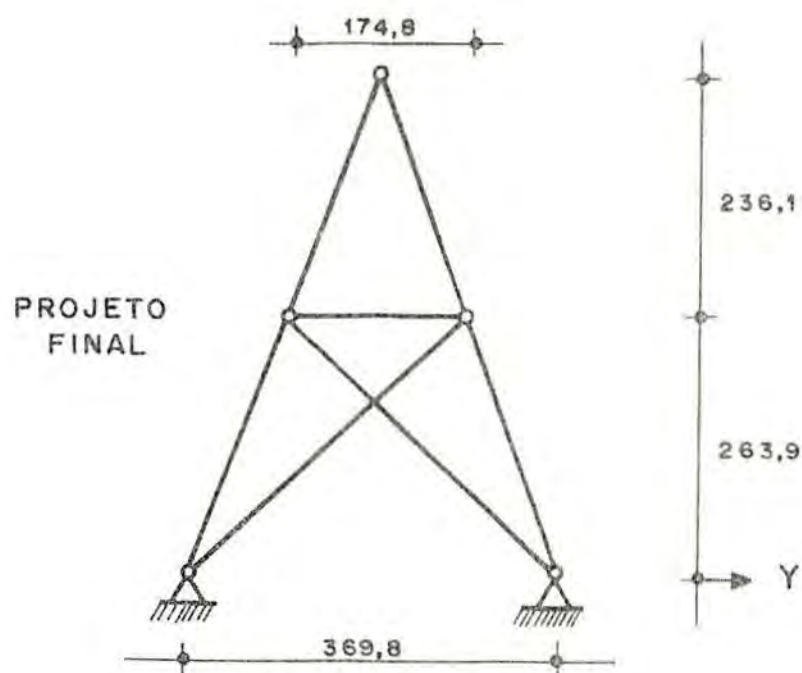


Figura 7.1.6

Neste projeto as tensões nos elementos 2 e 3 atingiram os seus valores admissíveis para o primeiro estado de carga sendo que as outras tensões de compressão ficaram bem próximas dos valores admissíveis para o mesmo estado de carga. Os deslocamentos dos nós ficaram bem abaixo dos respectivos valores admissíveis de modo que o projeto teve as tensões como condição dominante.

Em seguida apresentamos uma tabela onde podemos comparar os resultados obtidos pela utilização de diversos pares de fatores de limites móveis:

ELEMENTOS		L.M. ÁREAS			
		0,1	0,2	0,1	0,3
1		1,7	1,8	1,8	1,7
2 a 5		12,9	14,3	15,5	14,6
6 a 9		18,1	17,9	17,4	18,6
10, 11		1,7	1,8	1,8	1,7
12, 13		5,1	5,3	6,3	5,3
14 a 17		8,5	4,4	9,2	2,5
18 a 21		18,4	17,1	16,5	17,3
22 a 25		24,6	24,0	23,0	24,1
NÓS		L.M. COORD.			
		0,1	0,1	0,3	0,1
X	1, 2	± 85,9	± 68,3	± 52,7	± 67,2
	3 a 6	± 89,2	± 87,2	± 80,7	± 87,4
	7 a 10	± 184,9	± 184,9	± 152,8	± 184,9
Y	3 a 6	± 89,2	± 87,2	± 80,7	± 87,4
	7 a 10	± 184,9	± 184,9	± 152,8	± 184,9
Z	1, 2	500,0	500,0	500,0	500,0
	3 a 6	278,3	268,3	267,9	263,9
PESO FINAL (kgf)		855,2	786,4	792,6	771,9
REDUÇÃO ( % )		27,1	33,0	32,5	34,2
Nº DE ITERAÇÕES		10	10	10	10

Tabela 7.1.6



## 7.2 - Exemplo 2

Trata-se da estrutura de uma ponte com pista de rolamento inferior, executada em aço e analisada como treliça plana conforme a figura abaixo:

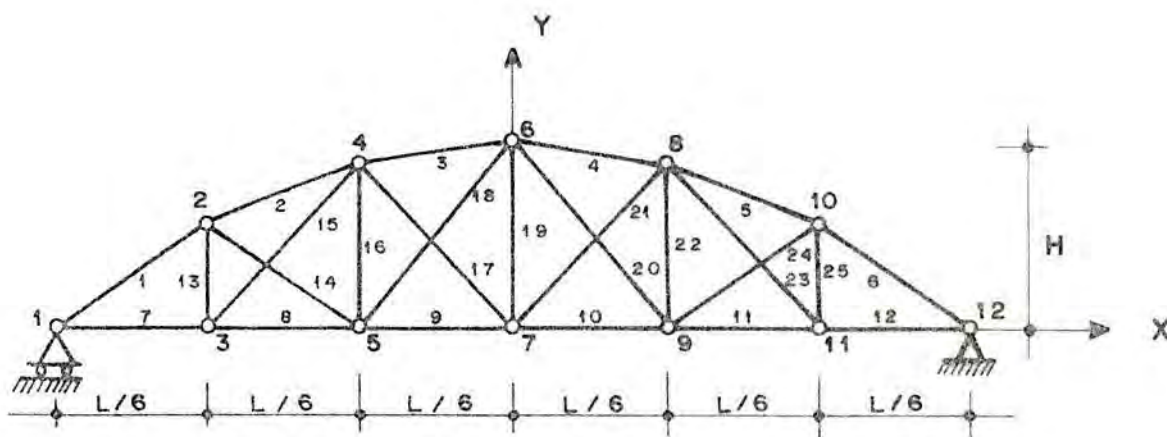


Figura 7.2.1

Sendo:

$$L = 3000,0 \text{ cm}$$

$$H = 600,0 \text{ cm}$$

$$E = 2100000 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\rho = 0,00785 \text{ Kgf/cm}^3$$

$$\sigma' = -1120 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma_t^* = 1500 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma^L = -1500 \text{ Kgf/cm}^2$$

Será considerado o coeficiente de segurança  $\bar{\alpha}$  à flambagem do AISC,  $S=1,92$  e todos os elementos serão confeccionados com perfis tubulares (A.I.S.C.).

As características dos elementos são as seguin-

tes (dados em  $\text{cm}^2$ ):

ELEMENTOS	ÁREA INICIAL	ÁREA MÍNIMA	ÁREA MÁXIMA	PARÂMETRO DA SEÇÃO
1 a 25	20,00	15,42	ilimitada	0,82

Tabela 7.2.1

Os valores iniciais e as restrições dos nós, assim como as restrições de deslocamento são os seguintes (dados em cm):

Nº	COORD. INICIAL		COORD. MÁXIMA		COORD. MÍNIMA		DESL. ADMIS.	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	-1500	0	-1500	0	-1500	0	$\pm 1$	0
2	-1000	333	-900	483	-1100	183	$\pm 1$	$\pm 1$
3	-10000	0	-1000	0	-1000	0	$\pm 1$	$\pm 1$
4	-500	533	-400	683	-600	383	$\pm 1$	$\pm 1$
5	-500	0	-500	0	-500	0	$\pm 1$	$\pm 1$
6	0	600	0	750	0	450	$\pm 1$	$\pm 1$
7	0	0	0	0	0	0	$\pm 1$	$\pm 1$
8	500	533	600	683	400	383	$\pm 1$	$\pm 1$
9	500	0	500	0	500	0	$\pm 1$	$\pm 1$
10	1000	333	1100	483	900	183	$\pm 1$	$\pm 1$
11	1000	0	1000	0	1000	0	$\pm 1$	$\pm 1$
12	1500	0	1500	0	1500	0	0	0

Tabela 7.2.2

A estrutura será solicitada por três estados de carga independentes conforme a tabela abaixo (dados em Kgf):

Nº	CARREGAMENTO 1		CARREGAMENTO 2		CARREGAMENTO 3	
	X	Y	X	Y	X	Y
3	0	0	0	0	0	-10.000
5	0	0	0	-10.000	0	-10.000
7	0	-10.000	0	-10.000	0	-10.000
9	0	0	0	-10.000	0	-10.000
11	0	0	0	0	0	-10.000

Tabela 7.2.3

A otimização envolve a área dos elementos e a configuração geométrica da estrutura, onde são consideradas 12 variáveis ligadas, sendo 7 referente à área dos elementos e 5 referentes às coordenadas nodais, conforme a tabela abaixo:

#### Área dos elementos

VARIÁVEIS LIGADAS	ELEMENTOS
1	1, 6
2	2, 5
3	3, 4
4	7, 12
5	8, 11
6	9, 10
7	13 a 25

Tabela 7.2.4

## Coordenadas dos nós

VARIÁVEIS LIGADAS	NÓS	
	DIREÇÃO X	DIREÇÃO Y
1	2, 10	—————
2	4, 8	—————
3	—————	2, 10
4	—————	4, 8
5	—————	6

Tabela 7.2.5

Para limites móveis são considerados os valores 0,4 para a variação de áreas e 0,2 para a variação das coordenadas nodais.

Neste projeto é mantido o vo da estrutura, assim como a posição dos nós pertencentes ao banzo inferior da treliça.

Em seguida apresentamos os resultados obtidos da aplicação do programa de otimização:

ESTADÍSTICA DE LA ZONA

AREA E COMPROMISO DE ELEMENTOS

ELEMENTO	AREA	COMPROMISO
1	02.8	021.0
2	09.3	038.0
3	05.4	093.1
4	05.4	093.1
5	09.3	038.0
6	02.8	021.0
7	05.2	000.0
8	13.1	000.0
9	82.3	000.0
10	02.3	000.0
11	13.1	000.0
12	05.2	000.0
13	01.7	4/5.4
14	01.7	01.8
15	01.7	203.2
16	01.7	02.0
17	01.7	009.9
18	01.7	000.0
19	01.7	133.9
20	01.7	000.0
21	01.7	6.600
22	01.7	02.0

23	31.7	703.2
24	31.7	751.8
25	31.7	475.4

## COORDENADAS NODAIS

NO	X	Y
1	-1500.0	0.0
2	-1009.3	466.9
3	-1000.0	0.0
4	-509.3	666.9
5	-500.0	0.0
6	0.0	733.9
7	0.0	0.0
8	509.3	666.9
9	500.0	0.0
10	1009.3	466.9
11	1000.0	0.0
12	1500.0	0.0

PESO INICIAL = 9269.749

PESO FINAL = 5942.312

REDUCCION DE PESO (%) = 35.7

ITERACIONES NECESSARIAS = 10

TIEMPO TOTAL (SEG) = 130.05

## RESULTADOS PARA A CONDIÇÃO DE CARGA 1

## DESLOCAMENTOS NODAIS

NÚ	U	V
1	-0.11272	0.00000
2	-0.03003	-0.11461
3	-0.07072	-0.13693
4	-0.02057	-0.20461
5	-0.07900	-0.21236
6	-0.05634	-0.25127
7	-0.05634	-0.30137
8	-0.09222	-0.20461
9	-0.03379	-0.21236
10	-0.03276	-0.11461
11	-0.01607	-0.13693
12	0.00000	0.00000

## REAÇÕES NODAIS

NÚ	PX	PY
1	0.00	5000.00
2	-0.00	0.00
3	-0.00	-0.00
4	-0.00	0.00

5	-0.00	-0.00
6	0.00	-0.00
7	-0.00	-10000.00
8	-0.00	-0.00
9	0.00	0.00
10	0.00	0.00
11	-0.00	0.00
12	0.00	5000.00

FURCA E TENSAO NOS ELEMENTOS

ELEMENTO	FURCA AXIAL	TENSAO
1	-5057.42	-100.00
2	-5073.72	-90.30
3	-7457.03	-144.04
4	-7457.03	-144.04
5	-5073.72	-90.30
6	-5057.42	-100.00
7	4370.02	07.47
8	5442.04	74.40
9	7007.54	94.92
10	7007.54	94.92
11	5442.04	74.40
12	4370.02	07.47
13	1510.25	41.52
14	1770.35	02.40



15	-1510.37	-47.89
16	-24.95	-0.79
17	3037.58	114.80
18	-1450.72	-45.75
19	4545.17	143.37
20	-1450.72	-45.95
21	3037.58	114.80
22	-24.95	-0.79
23	-1510.37	-47.89
24	1978.35	62.40
25	1510.25	41.52

RESULTADOS PARA A CONDIÇÃO DE CARGA 2

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	U	V
1	-0.32157	0.00000
2	-0.07015	-0.33959
3	-0.27537	-0.39909
4	-0.05047	-0.57512
5	-0.22253	-0.04827
6	-0.15077	-0.07000
7	-0.15077	-0.72614
8	-0.25512	-0.57512
9	-0.09909	-0.04827
10	-0.24340	-0.33959
11	-0.04020	-0.39909
12	0.00000	0.00000

## REAÇÕES GLOBAIS

NO	FX	FY
1	0.00	15000.00
2	0.00	-0.00
3	-0.00	0.00
4	-0.00	-0.00
5	-0.00	-10000.00
6	0.00	-0.00
7	-0.00	-10000.00
8	-0.00	-0.00
9	0.00	-10000.00
10	0.00	0.00
11	-0.00	0.00
12	0.00	15000.00

## FORÇA E TENSÃO NOS ELEMENTOS

ELEMENTO	FORÇA AXIAL	TENSÃO
1	-19970.25	-310.01
2	-20070.78	-298.07
3	-24411.24	-373.20
4	-24411.24	-373.20
5	-20070.78	-298.07
6	-19970.25	-310.01
7	13190.00	202.42
8	10010.00	153.02

9	21333.08	257.30
10	21333.08	257.30
11	13012.00	213.02
12	13173.95	202.42
13	3040.57	70.10
14	0753.39	217.33
15	-3310.81	-110.73
16	3123.74	101.00
17	3774.23	117.00
18	121.37	22.74
19	4313.30	130.05
20	121.37	22.74
21	3774.23	117.00
22	3123.74	101.00
23	-3310.81	-110.73
24	0753.39	217.33
25	3040.57	70.10

RESULTADOS PARA A CONDIÇÃO DE CARGA 3

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	U	V
1	-0.4775+	0.00000
2	-0.1113+	-0.33273
3	-0.37722	-0.05770
4	-0.11031	-0.33020

5	-0.32205	-0.71043
6	-0.23777	-0.74525
7	-0.23777	-1.00000
8	-0.35404	-0.83028
9	-0.15748	-0.71043
10	-0.35021	-0.53275
11	-0.05033	-0.85498
12	0.00000	0.00000

## RE4CUES JUDALS

NO	PA	PF
1	0.00	25000.00
2	-0.00	-0.00
3	-0.00	-10000.00
4	-0.00	-0.00
5	-0.00	-10000.00
6	0.00	-0.00
7	-0.00	-10000.00
8	-0.00	-0.00
9	0.00	-10000.00
10	-0.00	0.00
11	-0.00	-10000.00
12	0.00	25000.00

## FORÇA E TENSÃO NOS ELEMENTOS

ELEMENTO	FORÇA AXIAL	TENSÃO
1	-33297.08	-530.01
2	-30007.88	-445.71
3	-31001.45	-403.20
4	-31001.45	-403.20
5	-30007.88	-445.71
6	-33297.08	-530.01
7	21993.08	337.37
8	23084.49	324.06
9	25434.24	345.01
10	25434.24	345.01
11	23084.49	324.06
12	21993.08	337.37
13	9903.05	312.37
14	5133.53	193.47
15	320.77	10.12
	.	.
17	3357.00	105.95
18	1315.65	41.50
19	4905.00	120.63
20	1315.65	41.50
21	3357.00	105.95
22	5147.15	102.42
23	320.77	10.12
24	5133.53	193.47
25	9903.05	312.37

Com relação ao projeto inicial podemos observar uma redução em peso da estrutura de 35,9% em 10 iterações, com um tempo total de processamento de 2,1 minutos.

A redução iterativa do peso da estrutura pode ser vista na figura abaixo:

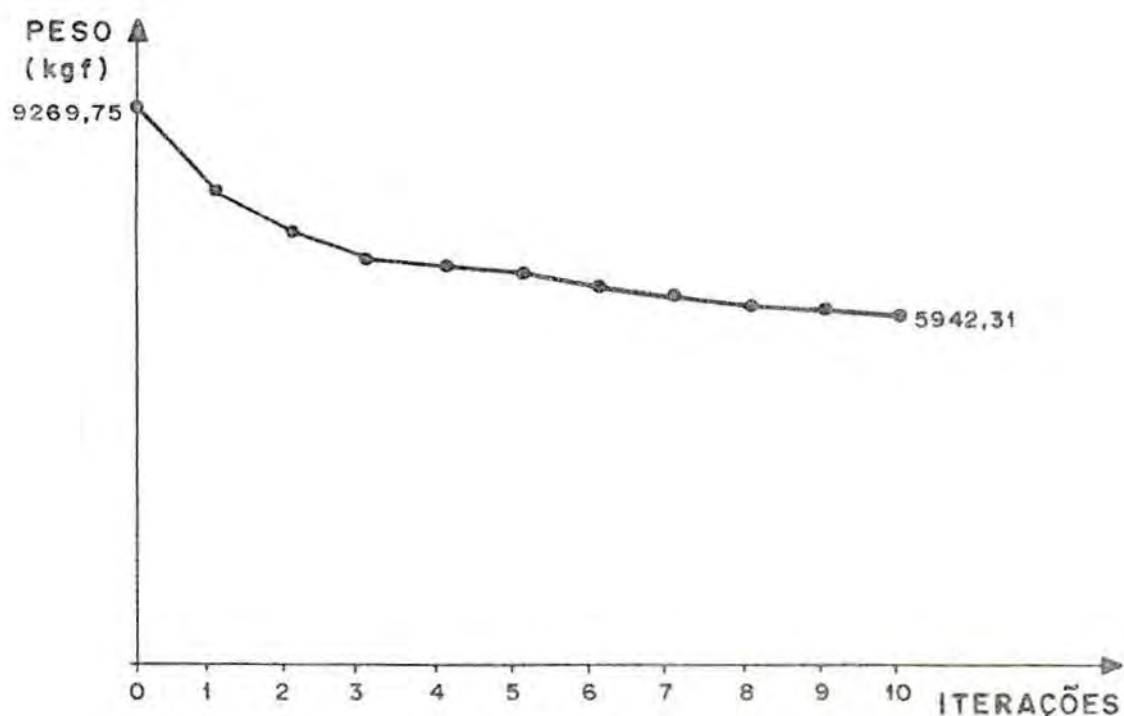


Figura 7.2.2

Deve-se notar que a configuração inicial da estrutura já é próxima da configuração ótima para estruturas treliçadas com carregamento no banzo inferior, que vencem grandes vãos. O uso de estruturas com banzos paralelos conduz a variações bruscas nos esforços dos elementos tornando o dimensionamento anti-econômico.

É importante se notar a tendência à configuração radial, que seria a configuração ótima ideal, onde o banzo

superior se tornaria um arco.

As figuras seguintes permitem fazer uma comparação entre a configuração inicial e a configuração final obtida:

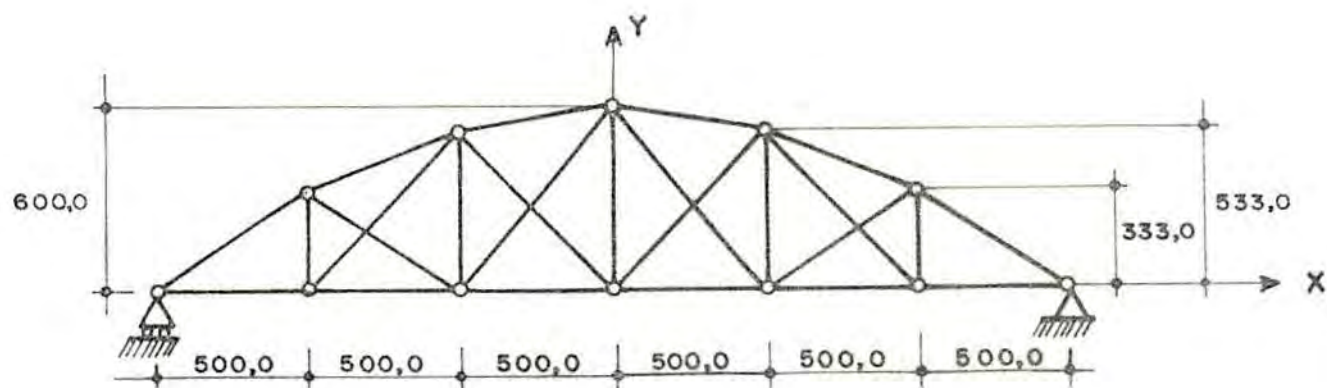


Figura 7.2.3

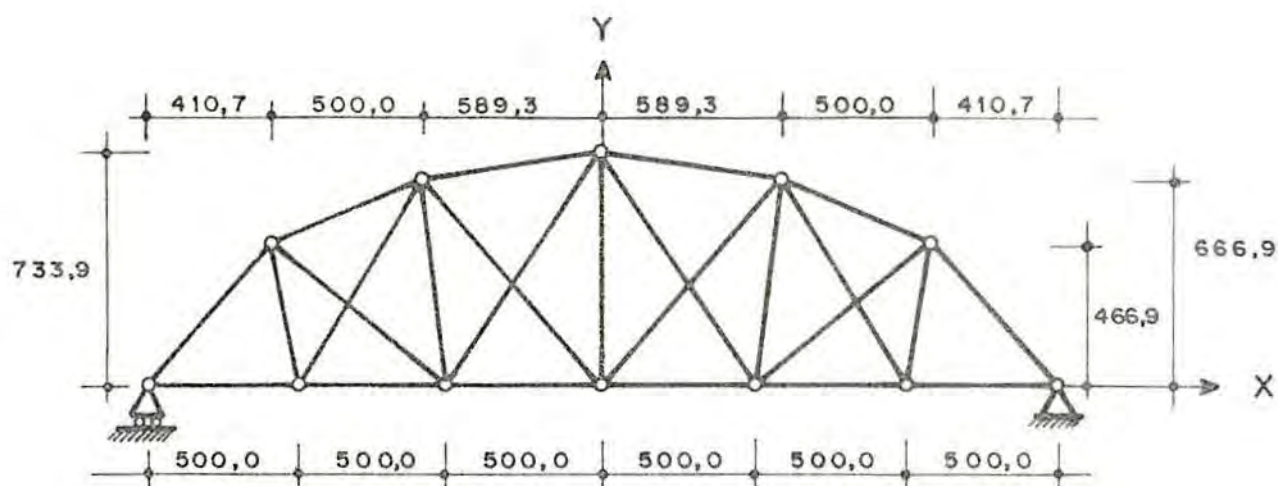


Figura 7.2.4

Neste projeto apenas o deslocamento vertical do nó 7 atingiu o valor admissível para o terceiro estado de carga, sendo que os deslocamentos verticais dos nós 5, 6 e 9 foram os que mais se aproximaram dos valores admissíveis para este estado de carga. Os demais deslocamentos e as tensões nos elementos ficaram bem abaixo dos valores admissíveis, de modo que o projeto teve os deslocamentos como condição dominante.

Em seguida apresentamos uma tabela onde podemos comparar os resultados obtidos pela utilização de diversos pares de fatores de limites móveis.



ELEMENTOS		L.M. ÁREAS			
		0,2	0,3	0,1	0,4
1, 6		94,3	75,5	150,5	62,8
2, 5		90,3	72,1	142,4	69,3
3, 4		85,2	92,0	132,3	65,4
7, 12		69,3	58,0	80,9	65,2
8, 11		62,0	69,8	75,4	73,1
9, 10		69,1	73,7	75,9	82,3
13 a 25		46,7	41,8	55,6	31,7
NÓS		L.M. COORD.			
		0,1	0,1	0,3	0,2
X	1, 12	± 1500,0	± 1500,0	± 1500,0	± 1500,00
	2, 10	± 1065,1	± 1065,1	± 1003,9	± 1089,3
	3, 11	± 1000,0	± 1000,0	± 1000,0	± 1000,0
	4, 8	± 565,1	± 565,1	± 567,8	± 589,3
	5, 9	± 500,0	± 500,0	± 500,0	± 500,0
Y	2, 10	430,7	430,7	401,2	466,9
	4, 8	597,2	630,7	501,4	666,9
	6	669,0	697,7	570,5	733,9
PESO FINAL (kgf)		7275,7	6757,8	9022,5	5942,3
REDUÇÃO ( % )		21,5	27,1	2,7	35,9
Nº DE ITERAÇÕES		10	10	10	10

Tabela 7.2.6

## 7.3 - Exemplo 3

Consideremos a treliça parabólica de uma cobertura executada em aço e analisada como treliça espacial, conforme a figura abaixo:

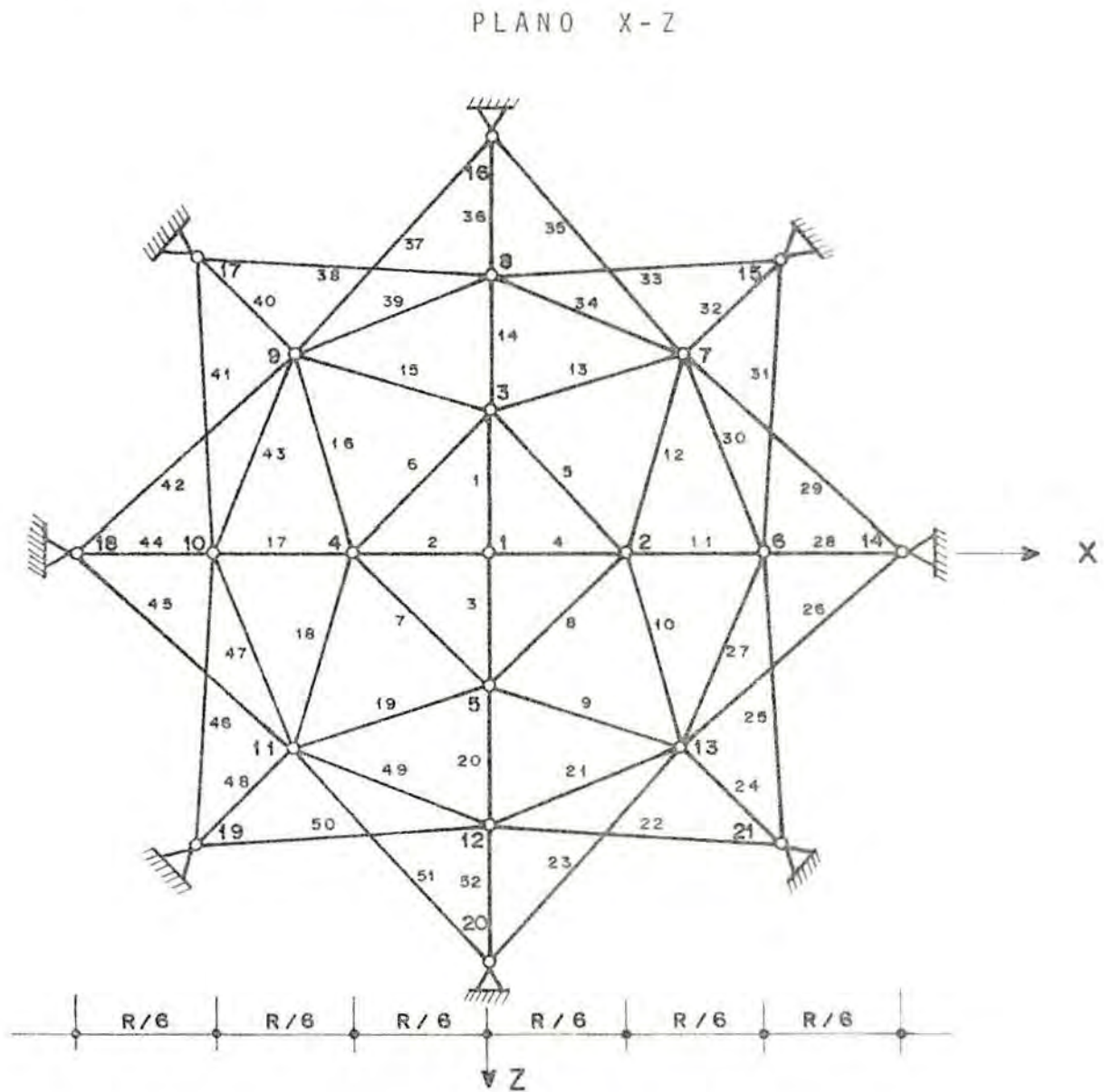


Figura 7.3.1

## PLANO Y-Z

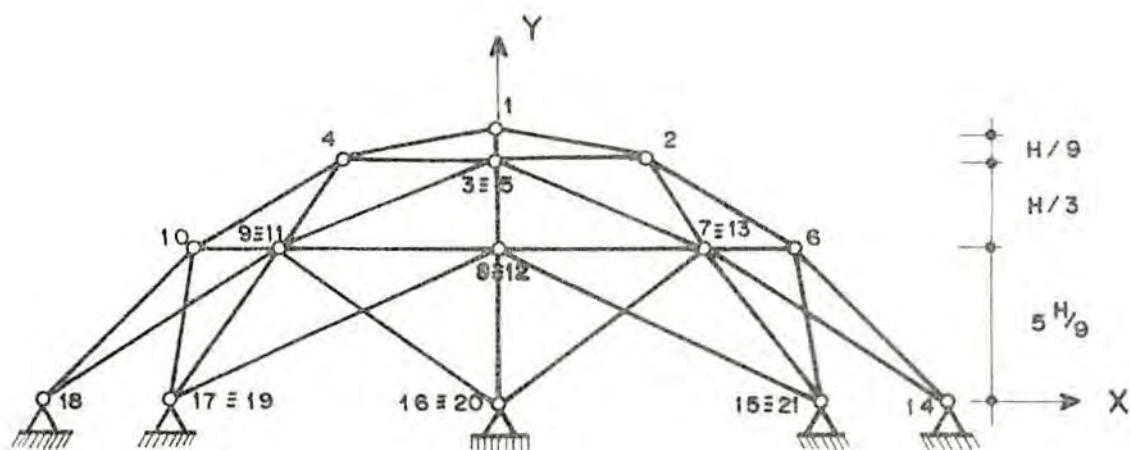


Figura 7.3.2

Sendo:

$$R = 3000,0 \text{ cm}$$

$$H = 900,0 \text{ cm}$$

$$E = 2100000 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\rho = 0,00785 \text{ Kgf/cm}^3$$

$$\sigma' = -1060 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma_t^* = 1325 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma^L = -1325 \text{ Kgf/cm}^2$$

Será considerado para coeficiente de segurança o valor  $S = 2,50$  e todos os elementos serão confeccionados com perfis tubulares para os quais consideramos  $\alpha' = 0,82$  e área inicial de  $15 \text{ cm}^2$ .

Não foram fixados valores máximos e mínimos para dimensão dos elementos. São foram consideradas restrições de tensões e de variação das coordenadas nodais.

As características dos nós são as seguintes (dados em cm):

N <sup>o</sup>	COORD. INICIAL			COORD. MÁXIMA			COORD. MÍNIMA		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	0	900	0	0	1000	0	0	800	0
2	500	800	0	600	900	0	400	700	0
3	0	800	500	0	900	600	0	700	400
4	-500	800	0	-400	900	0	-600	700	0
5	0	800	-500	0	600	-400	0	700	-600
6	1000	500	0	1100	600	0	900	400	0
7	707,1	500	707,1	807	600	807	607	400	607
8	0	500	1000	0	600	1100	0	400	900
9	-707,1	500	707,1	-607	600	807	-807	400	607
10	-1000	500	0	900	600	0	-1100	400	0
11	-707,1	500	-707,1	-607	600	-607	-807	400	-807
12	0	500	-1000	0	600	-900	0	400	-1100
13	707,1	500	-707,1	807	0	-607	607	400	-807
14	1500	0	0	1500	0	0	1500	0	0
15	1055	0	1055	1055	0	1055	1055	0	1055
16	0	0	1500	0	0	1500	0	0	1500
17	-1055	0	1055	-1055	0	1055	-1055	0	1055
18	-1500	0	0	-1500	0	0	-1500	0	0
19	-1055	0	-1055	-1055	0	-1055	-1055	0	-1055
20	0	0	-1500	0	0	-1500	0	0	-1500
21	1055	0	-1055	1055	0	-1055	1055	0	-1055

Tabela 7.3.1

A estrutura será solicitada por apenas um estado de carga composto de cargas de 3058 kgf aplicados verticalmente nos nós de 1 a 13.

A otimização envolve a área dos elementos e a configuração geométrica da estrutura, onde são consideradas 14 variáveis ligadas, sendo 8 correspondentes às áreas dos elementos e 6 correspondentes às coordenadas dos nós, conforme as tabelas abaixo:

#### Áreas dos elementos

VARIÁVEIS LIGADAS	ELEMENTOS
1	1,2,3,4
2	5,6,7,8
3	9,10,12,13,15,16,18,19
4	11,14,17,20
5	21,27,30,34,39,43,47,49
6	22,25,31,33,38,41,46,50
7	23,26,29,35,37,42,45,51
8	24,28,32,36,40,44,48,52

Tabela 7.3.2

## Coordenadas dos n̄os

VARIÁVEIS LIGADAS	N̄OS		
	X	Y	Z
1	2, 4	—	3, 5
2	6, 10	—	8, 12
3	7, 9, 11, 13	—	7, 9, 11, 13
4	—	1	—
5	—	2, 3, 4, 5	—
6	—	6,7,8,9,10,11,12,13	—

Tabela 7.3.3

Neste projeto apenas o diâmetro da projeção em planta da treliça, permanecerá inalterado.

Para limites m̄veis são considerados os valores 0,2 para a variação das áreas e 0,1 para variação das coordenadas.

Em seguida apresentamos os resultados obtidos da aplicação do método de otimização:

## ESTRUTURA UTILIZADA

## AREA E COMPRIMENTO DOS ELEMENTOS

ELEMENTO	AREA	COMPRIMENTO
1	17.1	542.7
2	17.1	542.7
3	17.1	542.7
4	17.1	542.7
5	5.0	759.0
6	5.0	759.0
7	5.0	759.0
8	5.0	759.0
9	10.0	803.5
10	10.0	803.5
11	17.3	500.1
12	10.0	803.5
13	10.0	803.5
14	17.3	500.1
15	10.0	803.5
16	10.0	803.5
17	17.3	500.1
18	10.0	803.5
19	10.0	803.5
20	17.3	500.1
21	0.1	790.0
22	0.5	1170.0
23	0.8	1103.1

24	24.7	072.4
25	8.6	1178.0
26	0.8	1103.1
27	0.1	790.0
28	24.7	070.5
29	0.8	1103.1
30	0.1	790.0
31	8.6	1178.0
32	24.7	072.4
33	8.6	1178.0
34	0.1	790.0
35	0.8	1103.1
36	24.7	070.5
37	0.8	1103.1
38	8.6	1178.0
39	0.1	790.0
40	24.7	072.4
41	8.6	1178.0
42	0.8	1103.1
43	0.1	790.0
44	24.7	070.5
45	0.8	1103.1
46	8.6	1178.0
47	0.1	790.0
48	24.7	072.4
49	0.1	790.0
50	8.6	1178.0
51	0.8	1103.1
52	24.7	070.5



## COORDENADAS NODAIS

NO	X	Y	Z
1	0.0	359.0	0.0
2	537.3	782.1	0.0
3	0.0	782.1	537.3
4	-537.3	782.1	0.0
5	0.0	782.1	-537.3
6	1041.0	523.8	0.0
7	734.8	523.8	734.8
8	0.0	523.8	1041.0
9	-734.8	523.8	734.8
10	-1041.0	523.8	0.0
11	-734.8	523.8	-734.8
12	0.0	523.8	-1041.0
13	734.8	523.8	-734.8
14	1500.0	0.0	0.0
15	1055.0	0.0	1055.0
16	0.0	0.0	1500.0
17	-1055.0	0.0	1055.0
18	-1500.0	0.0	0.0
19	-1055.0	0.0	-1055.0
20	0.0	0.0	-1500.0
21	1055.0	0.0	-1055.0

PESO INICIAL = 5471.477

PESO FINAL = 3777.594

REDUCAO DE PESO (B) = 31.0

ITERACOES NECESSARIAS = 5

TEMPO TOTAL (SEG) = 356.11

## RESULTADOS PARA A CONDIÇÃO DE CARGA 1

## DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	U	V	W
1	-0.00013	-0.91642	-0.00024
2	-0.01230	-0.42599	-0.00023
3	-0.00008	-0.42573	-0.01238
4	0.01209	-0.42635	-0.00023
5	-0.00008	-0.42661	0.01202
6	0.09846	-0.03608	-0.00000
7	0.06119	-0.02827	0.06116
8	-0.00000	-0.03626	0.09819
9	-0.06136	-0.02809	0.06134
10	-0.09925	-0.03535	-0.00000
11	-0.06192	-0.02732	-0.06194
12	-0.00000	-0.03517	-0.09952
13	0.06175	-0.02751	-0.06176
14	0.00000	0.00000	0.00000
15	0.00000	0.00000	0.00000
16	0.00000	0.00000	0.00000
17	0.00000	0.00000	0.00000
18	0.00000	0.00000	0.00000
19	0.00000	0.00000	0.00000
20	0.00000	0.00000	0.00000
21	0.00000	0.00000	0.00000

## REAÇÕES NODAIS

NO	PX	PY	PZ
1	-0.00	-3058.00	-0.00
2	-0.00	-3058.00	0.00
3	-0.00	-3058.00	0.00
4	-0.00	-3058.00	-0.00
5	-0.00	-3058.00	-0.00
6	0.00	-3058.00	-0.00
7	-0.00	-3058.00	-0.00
8	-0.00	-3058.00	-0.00
9	0.00	-3058.00	0.00
10	0.00	-3058.00	0.00
11	0.00	-3058.00	0.00
12	-0.00	-3058.00	0.00
13	-0.00	-3058.00	0.00
14	-4724.54	5292.12	2.61
15	-2937.52	4645.73	-2936.42
16	0.51	5291.20	-4724.44
17	2938.24	4644.83	-2932.84
18	4722.08	5289.92	2.61
19	2930.26	4639.23	2931.36
20	0.51	5290.77	4722.18
21	-2929.54	4640.13	2934.94

## FORÇA E TENSÃO NOS ELEMENTOS

ELEMENTO	FORÇA AXIAL	TENSÃO
1	-5374.44	-315.50
2	-5374.44	-315.50
3	-5374.44	-315.50
4	-5374.44	-315.50
5	-235.92	-47.03
6	-235.41	-47.53
7	-236.40	-47.73
8	-236.90	-47.83
9	-2333.35	-140.17
10	-2333.01	-140.20
11	-5087.53	-294.48
12	-2334.37	-140.25
13	-2335.17	-140.30
14	-5085.59	-294.36
15	-2335.56	-140.32
16	-2335.31	-140.30
17	-5086.21	-294.40
18	-2334.55	-140.26
19	-2333.74	-140.21
20	-5088.16	-294.51
21	16.40	108.08
22	-259.04	-29.79
23	-165.49	-24.40
24	-5825.91	-236.34

25	-265.16	-30.70
26	-165.26	-24.42
27	16.31	187.65
28	-0839.77	-277.47
29	-169.47	-25.04
30	16.23	186.77
31	-265.08	-30.69
32	-0829.08	-236.47
33	-266.32	-30.63
34	16.22	186.59
35	-169.03	-24.98
36	-0837.15	-277.36
37	-168.21	-24.80
38	-266.34	-30.84
39	16.23	186.81
40	-0830.73	-236.54
41	-260.23	-30.13
42	-168.44	-24.89
43	16.32	187.85
44	-0838.00	-277.40
45	-164.23	-24.27
46	-260.31	-30.14
47	16.40	186.73
48	-0827.56	-236.41
49	16.42	186.90
50	-259.06	-24.99
51	-164.67	-24.54
52	-0840.67	-277.51

Com relação ao projeto inicial podemos observar uma redução em peso da estrutura de 31,0% em 5 iterações com um tempo total de processamento de 5,9 minutos.

A redução iterativa do peso da estrutura pode ser vista na figura abaixo:

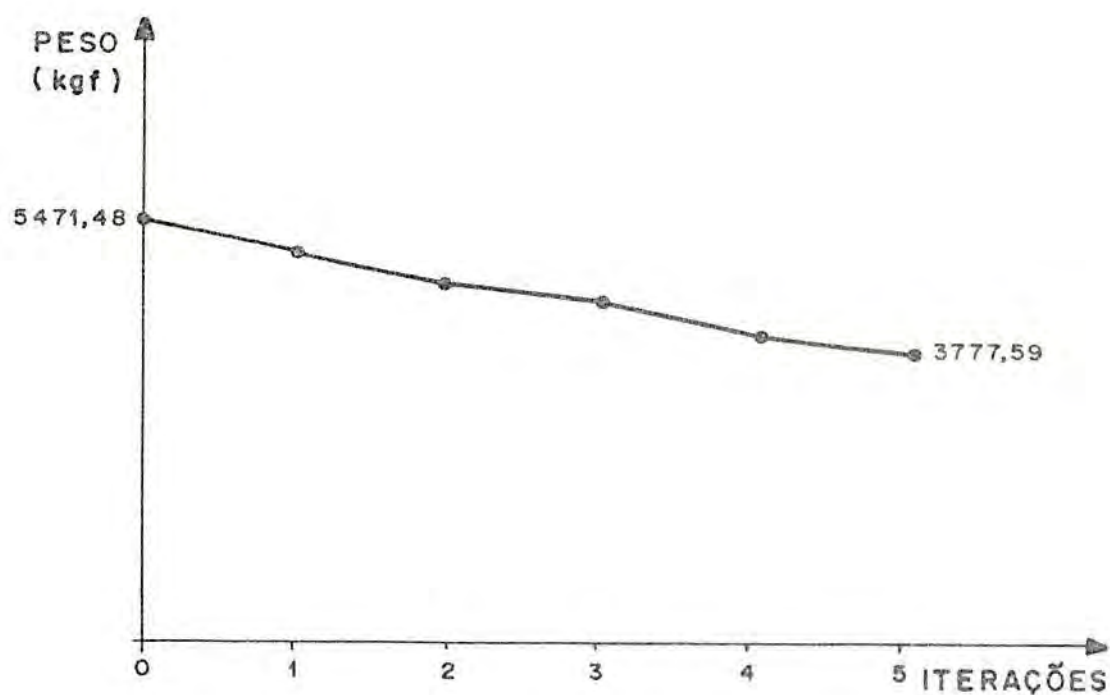


Figura 7.3.3

Como não foram fixadas áreas mínimas os elementos 21, 27, 30, 34, 39, 43, 47 e 49 ficaram com áreas próximas de zero, podendo assim serem suprimidos, desde que não causem problema de instabilidade. Caso isto ocorra devemos fixar áreas mínimas para tais elementos.

As figuras seguintes permitem fazer uma comparação entre a configuração inicial e a configuração final da estrutura.

PLANO X - Z

PROJETO INICIAL

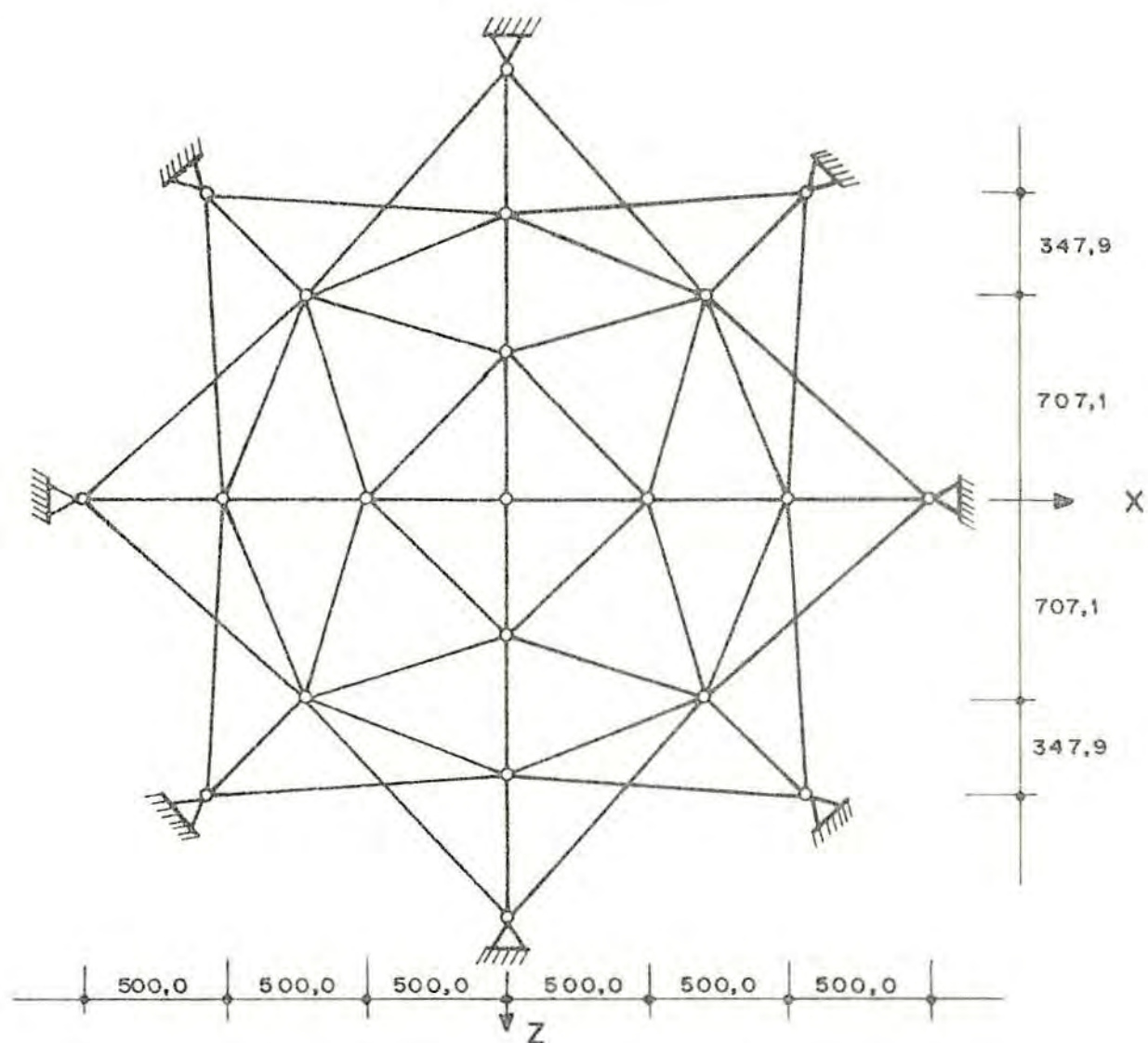


Figura 7.3.4

## PROJETO FINAL

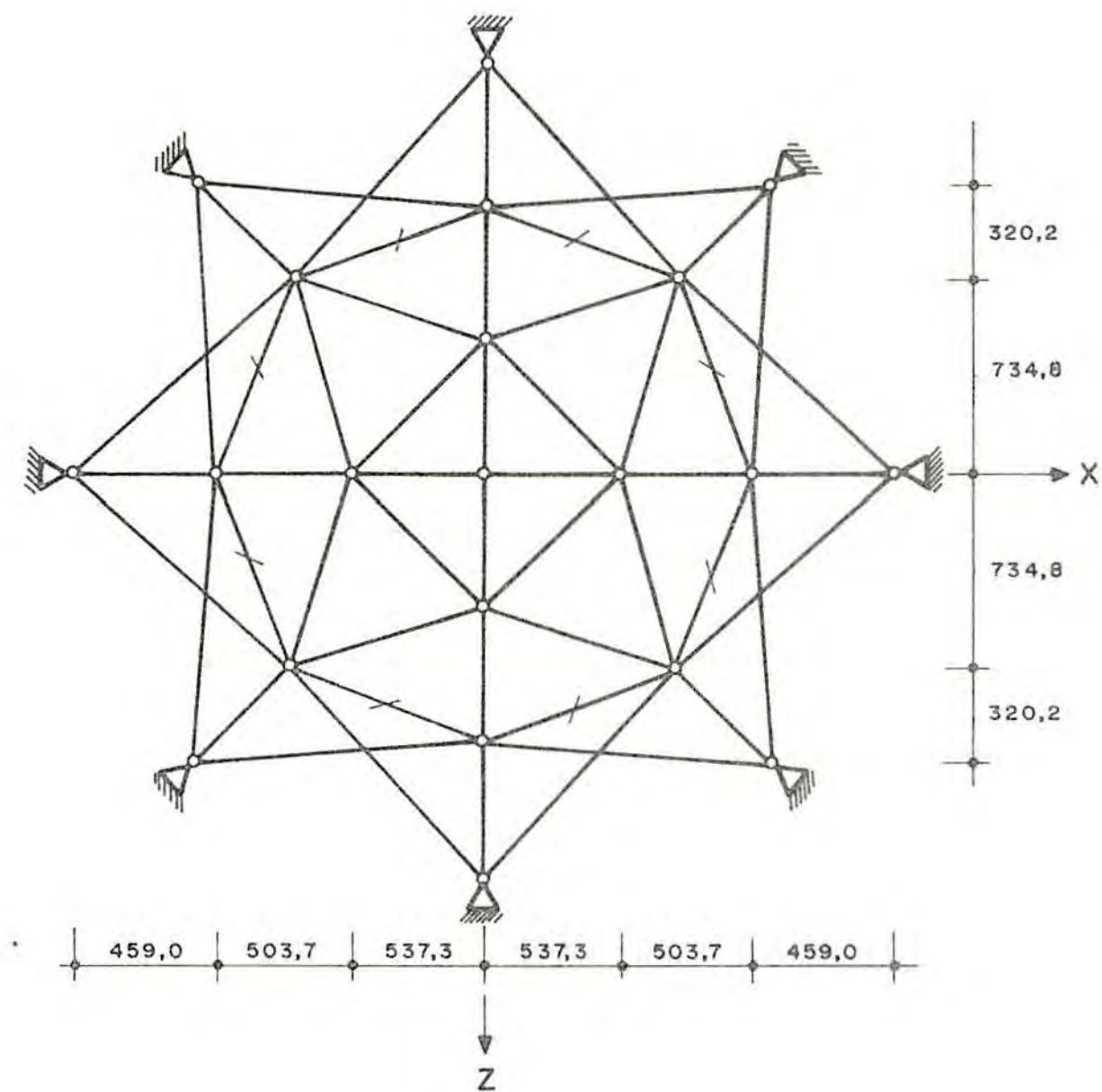


Figura 7.3.5



PLANO X-Y

PROJETO INICIAL

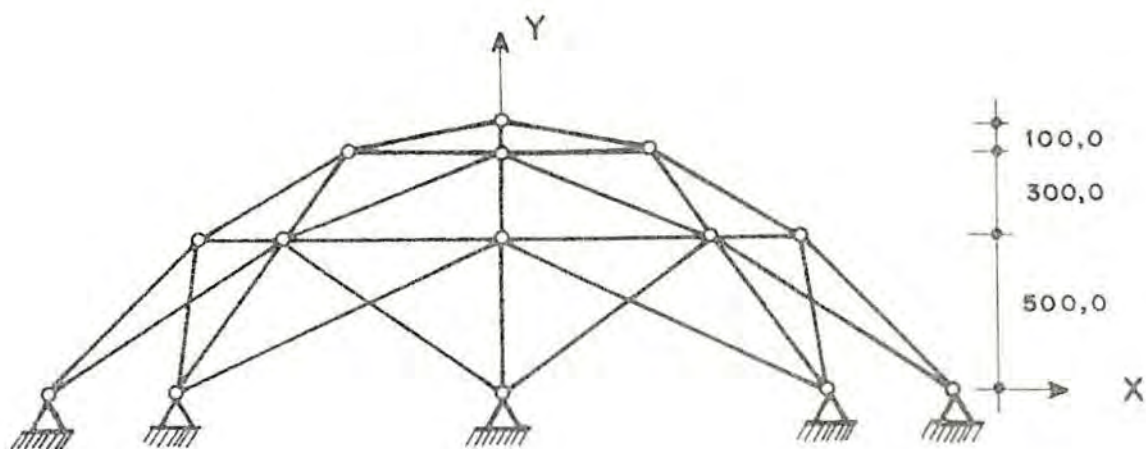


Figura 7.3.6

PROJETO FINAL

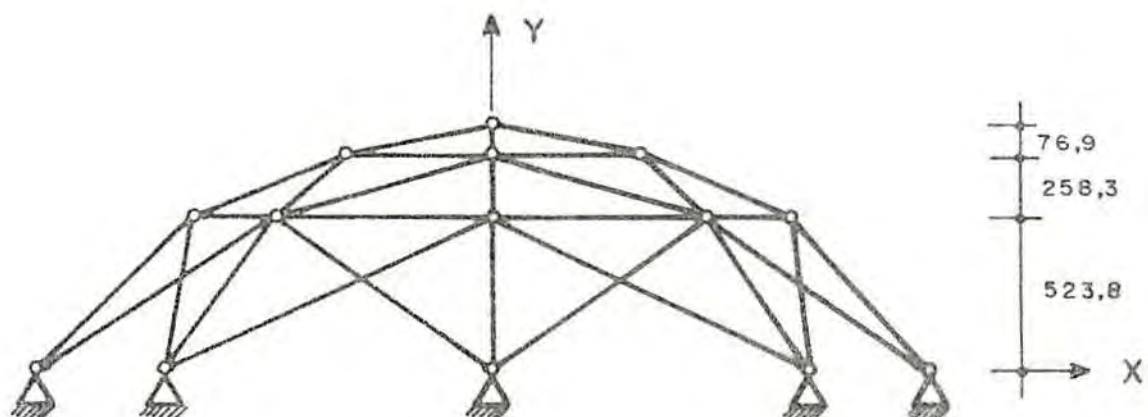


Figura 7.3.7

Como não impusemos restrições de deslocamentos, o projeto foi governado por tensões, sendo que as tensões nos elementos 5, 6, 7 e 8 alcançaram os seus valores admissíveis, sendo que os demais elementos comprimidos estão sob tensões próximas aos valores admissíveis.

Em seguida apresentamos uma tabela onde podemos comparar os resultados obtidos pela utilização de diversos pares de limites móveis:

ELEMENTOS \ L.M. ÁREAS (cm <sup>2</sup> )	0,3	0,1	0,1	0,2
1 a 4	27,8	41,0	16,7	17,1
5 a 8	10,9	19,5	5,5	5,0
9,10,12,13,15,16, 18,19	36,7	45,9	16,9	16,6
11, 14, 17, 20	37,9	45,6	17,1	17,3
21,27,30,34,39,43 47,49	0,1	0,6	0,2	0,1
22,25,31,33,38,41 46,50	10,3	58,0	16,3	8,6
23,26,29,35,37,42 45,51	8,0	48,1	13,5	24,7
24,28,32,36,40,44 48,52	51,7	59,0	23,1	24,7

NDS		L.M. COORD. (cm)	0,1	0,3	0,1	0,1
X	2, 4		± 498,0	± 446,7	± 541,0	± 537,3
	6, 10		±1041,0	±1083,2	±1041,0	±1041,0
	7, 9, 11, 13		± 706,9	± 691,9	± 731,1	± 734,8
	14, 18		±1500,0	±1500,0	±1500,0	±1500,0
	15, 17, 19, 21		±1055,0	±1055,0	±1055,0	±1055,0
Y	1		879,0	817,2	859,0	859,0
	2 $\bar{a}$ 5		782,3	716,8	773,1	782,1
	6 $\bar{a}$ 13		526,7	423,4	499,9	523,8
Z	3, 5		± 498,0	± 446,7	± 541,0	± 537,3
	8, 12		±1041,0	±1083,2	±1041,0	±1041,0
	7, 9, 11, 13		± 706,9	± 691,9	± 731,1	± 734,8
	16, 20		±1500,0	±1500,0	±1500,0	±1500,0
	15, 17, 19, 21		±1055,0	±1055,0	±1055,0	±1055,0
PESO FINAL (kgf)			6869,8	14430,2	4759,4	3777,6
REDUÇÃO			*	*	13,0	31,0
Nº DE ITERAÇÕES			5	5	5	5

\* Converge para valor errado

Tabela 7.3.4

## CAPÍTULO 8

## CONCLUSÕES

Neste trabalho se desenvolveu com êxito, um algoritmo computacional que resolve o problema do projeto de peso mínimo de uma estrutura treliçada plana ou espacial, na qual as variáveis de projeto são constituídas por dois grupos com características diferentes, que são as áreas da seção transversal dos elementos e a situação dos nós da estrutura. O problema de programação não linear com restrições de desigualdade pode ser resolvido com um tempo de processamento razoável, mediante a introdução de vários tipos de aproximações. Estas aproximações são aplicadas de tal modo que o projeto final resulta admissível com respeito à formulação exata original.

Desta maneira, as funções restritivas e a função objetiva, que originalmente são não-lineares, são desenvolvidas em série de Taylor truncada, onde são usados apenas os seus termos lineares. Isto resultou em uma boa aproximação para esse tipo de problema uma vez que o tratamento não-linear é bem mais complexo. Contudo, essa aproximação introduz certos erros que devem, de alguma maneira, ser controlados. No trabalho em questão, o controle dos erros decorrentes da linearização das funções envolvidas é feito através dos chamados "limites móveis", que são limitações impostas às variações do vetor de projeto, em cada ciclo do processo iterativo.

Esses limites móveis desempenham um papel importante no processo iterativo, uma vez que eles controlam parcialmente sua seqüência. Portanto, se faz necessária uma escolha adequada para tais valores de modo que

a convergência se dê para o valor ótimo.

É difícil se fixar valores para esses limites móveis, pois muitos são os fatores que influem em tal escolha. No capítulo 7 pode-se ter uma idéia geral da variação dos resultados obtidos com limites móveis diferentes. Nas tabelas 7.1.6, 7.2.6 e 7.3.4 pode-se notar que as maiores reduções de peso foram obtidas quando se deu maior liberdade de variação para as áreas dos elementos e uma menor variação para as coordenadas nodais.

Embora a variação iterativa das áreas e coordenadas nodais estejam relacionadas de alguma maneira, se permitirmos uma variação muito grande para as coordenadas nodais, em cada ciclo, poderá haver uma distorção no problema originando uma convergência para um valor absurdo. Com as áreas dos elementos a probabilidade que isto ocorra é bem menor, pois em cada ciclo é feito um escalamento levando o projeto até o contorno da restrição mais crítica.

Valores aceitáveis para limites móveis estão em torno de 30% para a variação das áreas dos elementos e 10% para a variação das coordenadas dos nós.

O conhecimento antecipado de uma configuração para a qual tenderá a configuração final da estrutura nos possibilita uma melhor fixação dos valores máximos e mínimos das coordenadas dos nós, podendo reduzir o número de iterações necessárias para a obtenção do projeto ótimo.

A ligação das variáveis de projeto "linking" nos possibilita uma redução muito grande no tempo de processamento com a vantagem de se obter estruturas simétricas mesmo para carregamentos não simétricos. Contudo, para essas estruturas o peso resulte maior.

A eliminação das tensões e deslocamentos que não estão próximos dos valores admissíveis também colabora para a redução do tempo de processamento.

Neste trabalho adotamos fatores de exclusão de restrições não críticas, diferentes para restrições de tensões e restrições de deslocamentos. Como as tensões são proporcionais às diferenças de deslocamentos, quando variam as variáveis de projeto a variação das tensões é mais sensível que a variação dos deslocamentos, portanto podemos tomar fatores de exclusão de restrições menores para os deslocamentos e com isto reduzimos a magnitude do problema. Além do mais, podemos admitir que em cada conjunto de variáveis ligadas apenas a restrição mais crítica governará o projeto e portanto podemos reduzir ainda mais a magnitude do projeto considerando a regionalização que consiste em tomar apenas esta restrição mais crítica em cada conjunto de variáveis ligadas.

Considerando apenas as "restrições críticas" a análise de sensibilidade torna-se bem mais simples, uma vez que só serão calculados os gradientes das funções de resposta da estrutura com respeito às essas restrições, além de uma considerável redução na ordem da matriz Simplex.

A fixação do número de restrições críticas, variável com o avanço das iterações é importante, uma vez que no início do processo de otimização apenas alguns valores estão próximos dos admissíveis, aumentando com o avanço das iterações.

A consideração da flambagem inelástica do dimensionamento das peças comprimidas com pequena esbelteza, traz uma melhor aproximação à realidade; também a sugestão de Lapay<sup>25</sup> que consiste em tomar o quadrado do raio de

giração mínimo diretamente proporcional a área da seção transversal dos elementos nos permite uma simplificação onde esse fator de proporcionalidade é determinado para cada classe de perfis através de um método estatístico, no caso, o método dos mínimos quadrados.

Baseado no método de otimização apresentado ao longo deste trabalho elaboramos o programa OTRESPLA, em linguagem ALGOL, processado pelo computador Burroughs B-6700.

Para comprovar a eficiência deste algoritmo, apresentamos alguns exemplos onde conseguimos altas percentagens de redução em peso da estrutura.

A consideração da mudança das coordenadas nodais associada à mudança das áreas dos elementos, permite uma melhor distribuição dos esforços nos elementos, originando estruturas bem mais leves e econômicas do que a consideração de uma configuração geométrica fixa, além de uma boa aproximação à configuração geométrica ideal.

Como continuação deste trabalho sugerimos um estudo comparativo entre diversos pares de limites móveis para estudar a convergência, levando em conta o número de iterações necessárias para a obtenção do projeto ótimo. Também a consideração de limites móveis variáveis durante o processo iterativo poderá dar bons resultados, assim começamos com valores maiores para tais limites, decrescendo à medida que nos aproximamos do valor ótimo das variáveis de projeto e função objetiva.

Outra alternativa seria a eliminação dos limites móveis fixando o número de iterações do método Simplex em cada iteração do problema. Assim, a variação do vetor de projeto ficaria limitada não por valores extremos fixados, mas dentro do próprio algoritmo de otimização.

Ainda a combinação dos dois procedimentos, ou seja, adotar limites móveis maiores compensando com a limitação do número de iterações do método Simplex.

Outro estudo comparativo que pode ser feito é quanto aos fatores de exclusão de restrições não críticas e também sobre a regionalização. Estes são conceitos normalmente aplicados a otimização de estruturas onde não varia a configuração geométrica. Para problemas de otimização geométrica deve-se ter mais cuidado, pois a eliminação de muitas restrições pode distorcer muito o problema, de modo que para conjuntos de variáveis ligadas com muitas variáveis, deve-se tomar uma percentagem das variáveis de cada grupo ligado, como críticas, e não apenas a mais crítica.

Longe de significar algo definitivo no projeto ótimo de treliças, temos certeza da importância deste trabalho pela maneira prática com que são tratadas as estruturas e pelos bons resultados obtidos.



## BIBLIOGRAFIA

1. ALSPAUGH, Dale W. & Kunoo, Kazuo. Optimum configurational and dimensional design of truss structures. Computers and Structures, Oxford, 4(4):755-70, Aug. 1974
2. AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. Manual of steel construction. 7.ed. New York, 1970.
3. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Cálculo e execução de estruturas de aço. Rio de Janeiro, 1970. (NB-14).
4. BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. The finite element technique. Porto Alegre, UFRGS, 1975
5. CASSIS, Juan H. Optimum design of structures subjected to dynamic loads. Los Angeles, Mechanics and Structures Department, UCLA Eng.-7451, 1974. 144p. /Diss.(Ph.D.)- Univ. of California, Los Angeles/.
6. \_\_\_\_\_. Métodos de diseño optimo de estructuras. Trabalho apresentado ao 19 Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia civil, Rio de Janeiro, COPPE, out. 1977.
7. CELLA, Aldo & LOGCHER, Robert D. Automated optimum design from discrete componentes. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 97(1):175-89, Jan. 1971.
8. CHAN, A.S.L. & TURLEA, E. An approximate method for structural optimisation. Computers and Structures, Oxford, 8(3/4):357-63, May 1978.
9. COMPANHIA SIDERÚRGICA NACIONAL. Catálogo de produtos. Rio de Janeiro, 1968.

10. DOBBS, Michael W. & FELTON, Lewis P. Optimization of truss geometry. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 95(10):2105-18, Oct. 1969.
11. DORN, W.S.; GOMORY, R.F.; GREENBERG, H.J. Automatic design of optimal structures. Journal de Mécanique, Paris, 3(1):25-52, mars 1964.
12. FEDALTO, J.A.C. Projeto ótimo da geometria de treliças planas. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1977. 121p. [Tese (M.C.) - Escola de Engenharia].
13. FEDALTO, J.A. & CASSIS, J. Projeto ótimo da geometria de treliças planas. Trabalho apresentado ao 1º Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, Rio de Janeiro, COPPE, out. 1977.
14. FOX, Richard L. Optimization methods for engineering design. Reading, Mass, Addison-Wesley, 1971.
15. FU, Kuan-Chen. An application of search technique in truss configurational optimization. Computer & Structures, Oxford, 3(2):315-28, Mar. 1973.
16. GALLAGHER, R.H. & ZIENKIEWICZ, O.C. Optimum structural design; theory and applications. London, John Wiley, 1973.
17. GASS, Saul I. Linear programming; methods and applications. New York, McGraw-Hill, 1975.
18. GERE, J.M. & WEAVER Jr., W. Analysis of framed structures. Toronto, Van Nostrand, 1965.

19. GUZMAN, Julio & Cassis, Juan H. Aplicacion de criterios de optimidad en el diseño automatico de marcos de acero. Santiago, Departamento de Obras Civiles da Universidad de Chile, 1976. 96p.
20. JAGANNATHAN, Dharapuran S.; EPSTEIN, Howard I.; CHRISTIANO, Paul. Non linear analysis of reticulated space trusses. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 101(12):2641-58, Dec. 1975.
21. KICHER, Thomas P. Optimum design - minimum weight versus fully stressed. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 92(6):265-79, Dec. 1966.
22. KIRSCH, Uri. Synthesis of elastic structures with controlled forces. Computers and Structures, Oxford, 6(2):111-6, Apr. 1976.
23. KREIDER, Donald L. et alii. An introduction to linear analysis. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1966.
24. KUZMANOVIC, B.O.; WILLEMS, N.; THOMAS, F.M. Automated design of three-legged steel transmission towers. Computers and Structures, Oxford, 7(2):171-82, Apr. 1977.
25. LAPAY, William S. & GOBLE, George G. Optimum design of trusses for ultimate loads. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 97(1):157-73, Jan. 1971.
26. LEV, Ovadia E. Optimum choice of determinate trusses under multiple loads. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 103(2):391-403, Feb. 1977.
27. LIPSON, Samuel L. & GWIN, Larry B. The complex method

- applied to optimal truss configuration. Computers and Structures, Oxford, 7(3):461-8, June 1977.
28. LIPSON, Samuel L. & GWIN, Lawrence B. Discrete sizing of trusses for optimal geometry. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 103(5):1031-46, May 1977.
29. LO, David L.C.; MORCOS, Andrew; GOEL, Surendra K. Use of computers in transmission tower design. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 101(7):1443-53, July 1975.
30. MAXWELL, J.C. Scientific papers. v.2, 1869. p.175 apud GALLAGHER, R.H. & ZIENKIEWICZ, O.C. Optimum structural design. London, John Wiley, 1973.
31. MICHELL, A.G.M. The limits of economy of material in framed structures. Phil. Mag. (Series 6), 8:589-97, 1904 apud GALLAGHER, R.H. & ZIENKIEWICZ, O.C. Optimum structural design. London, John Wiley, 1973.
32. MOSES, Fred. Optimum structural design using linear programming. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 90(6):89-104, Dec. 1964.
33. MOURA, V.F. Otimização geométrica de treliças. Rio de Janeiro, 1977. 102p. |Tese (M.C.)-COPPE/UFRJ|
34. PATNAIK, S.N. & SRIVASTANA, N.K. On automated optimum design of trusses. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Amsterdam, 9(3):245-65, Nov./Dec. 1976.
35. PEDERSEN, Pauli. On the optimal layout of multi-purpose

- trusses. Computers and Structures, Oxford, 2(5/6): 695-712, Dec. 1972.
36. \_\_\_\_\_. Optimal joint positions for space trusses. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 99(12):2459-76, Dec. 1973.
37. PFEIL, W. Estruturas de aço. 2.ed. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1977.
38. PRAGER, William. Conditions for structural optimality. Computers and Structures, Oxford, 2(5/6):833-40, Dec. 1972.
39. \_\_\_\_\_. Nearly optimal design of trusses. Computers and Structures, Oxford, 8(3/4):451-4, May 1978.
40. RAZANI, R. The behaviour of the fully-stresses design of structures and its relationship to minimum weight design. AIAA Journal, New York, 3(12):2262-8, Dec. 1965.
41. REINSCHMIDT, Kenneth F. Discrete structural optimization. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 97(1):133-55, Jan. 1971.
42. REINSCHMIDT, F. & RUSSELL, Alan D. Applications of linear programming in structural layout and optimization. Computers and Structures, Oxford, 4(4):855-69, Aug. 1974.
43. ROMSTAD, Karl M. & Wang, Chu-Kia. Optimum design of framed structures. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 94(12):2817-45, Dec. 1968.
44. SEGENREICH, S.A. AUTOBAR - Uma alternativa para a análise de estruturas reticuladas. Trabalho apresentado ao I?

Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, Rio de Janeiro, COPPE, out. 1977.

45. SEGENREICH, S.A. & ZIRA, A.F. Otimização estrutural em problemas dinâmicos. Trabalho apresentado ao 3º Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil e 1º Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia Civil, Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, dez. 1979.
46. SHEU, C.Y. & SCHIMIT Jr., L.A. Minimum weight design of elastic redundant trusses under multiple static loading conditions. AIAA Journal, New York, 10(2):155-61, Feb. 1972.
47. SPILLERS, William R. Iterative design for optimal geometry. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 101(7):1435-41, July 1975.
48. THOMAS Jr., H. Randolph & BROWN, Daniel M. Optimum least-cost design of a truss roof system. Computers and Structures, Oxford, 7(1):13-22, Feb. 1977.
49. TOAKLEY, A.R. Optimum design using available sections. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 94(5):1219-41, May 1968.
50. VANDERPLAATS, Garret N. & MOSES, Fred. Automated design of trusses for optimum geometry. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 98(3):671-90, Mar. 1972.
51. ZÁQUERA, C. Projeto ótimo de pórticos planos de aço. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS,

1979. 64p. [Tese (M.C.) - Esc. Eng.].

52. ZÁQUERA, C.; FEDALTO, J.A.; CASSIS, J. Projeto Ótimo de pórticos planos de aço. Trabalho apresentado ao 3º Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil e 1º Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia Civil, Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, dez. 1979.