

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO NUMÉRICO DA INFLUÊNCIA DA GEOMETRIA DE BOCAIS
CONVERGENTE-DIVERGENTE EM ESCOAMENTOS SUPERSÔNICOS

por

Luciano da Silva Berchon

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, agosto de 2016

ESTUDO NUMÉRICO DA INFLUÊNCIA DA GEOMETRIA DE BOCAIS
CONVERGENTE-DIVERGENTE EM ESCOAMENTOS SUPERSÔNICOS

por

Luciano da Silva Berchon

Bacharel em Física

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da
Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos
requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Energia

Orientador: Prof. Dr. Paulo Smith Schneider

Co-orientador: Dr. Paulo Arthur Beck

Aprovada por:

Prof.^a Dr.^a Adriane Prisco Petry.....PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Carlos Eduardo Guex FalcãoDEMEC / UFSM

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira RochaPROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 26 de agosto de 2016

Dedicado à minha família

AGRADECIMENTOS

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro e ao PROMEC pelo apoio e estrutura fornecidos.

Ao meu orientador Professor Dr. Paulo Smith Schneider pela disponibilidade, ensinamentos e pela amizade ao longo desses dois anos. Ao meu co-orientador Dr. Paulo Arthur Beck pelos ensinamentos, discussões e amizade.

Aos meus colegas do GESTE e do LETA pelos longos debates sobre assuntos que nem sempre eram de cunho acadêmico. Aos colegas de disciplinas que sempre me auxiliaram e que principalmente me acolheram no PROMEC.

Ao Tiago, Yuri e ao Andrés que sempre estavam prontos para me auxiliar sobre dúvida neste trabalho. Ao Paulo Buffon pelo coleguismo, amizade e por montar o cluster onde as simulações deste estudo foram feitas.

A todos que de alguma forma contribuíram para esse trabalho.

A minha família pelo infinito apoio, pelo entendimento da minha ausência física, mas principalmente pelo incentivo incondicional quando das muitas vezes em que achei que não era capaz.

A Danny, pelo apoio e compreensão da minha ausência, principalmente nessa fase final do mestrado. Por me ouvir nos momentos difíceis e pelo consolo em momentos de frustração. Esse trabalho não seria possível sem a sua ajuda.

RESUMO

O comportamento do escoamento supersônico no interior de bocais convergente-divergente retangulares é investigado numericamente, comparando-se quatro bocais com diferentes seções divergentes, com a mesma razão de aspecto $AR=1.14$ e mesma relação áreas da saída e da garganta dos bocais $NAR=1.43$. Os bocais são submetidos a diferentes pressões de admissão do fluido de trabalho, mantendo-se a relação entre a pressão de admissão e de descarga constante $NPR=5$. As simulações consideram o escoamento em regime permanente, compressível, viscoso, com abordagem baseada na massa específica (abordagem acoplada), juntamente com o modelo de turbulência $k - \omega/SST$. A qualidade dos resultados é medida empregando-se três níveis de refino da discretização do domínio computacional, observando-se a ordem de convergência e o índice de convergência de malhas GCI. Os resultados numéricos mostram que o número de Mach e a temperatura do fluido de trabalho independem da pressão de admissão, ao contrário do comportamento da pressão local e da massa específica. As propriedades do escoamento são fortemente dependentes da variação da geometria, e a variação do ângulo da seção divergente provoca uma mudança direta do número de Mach e inversa da pressão, da temperatura e da massa específica do escoamento no interior dessa seção. As simulações são comparadas com os resultados da teoria isentrópica e mostram que a linha sônica é deslocada do centro geométrico da garganta dos bocais para cada geometria simulada. A comparação com a teoria e com dados experimentais mostra desvios inferiores a $6 \times 10^{-3} \%$. O uso do modelo de turbulência $k - \omega/SST$ é capaz de resolver o escoamento com boa precisão, prevendo bem seu perfil de velocidades, as ondas de expansão de Prandtl-Meyer, juntamente com as interações dessas ondas com a camada limite.

Palavras-chave: Bocal convergente-divergente; escoamento supersônico; escoamento compressível; escoamento viscoso; ondas de expansão; GCI; $k - \omega/SST$.

ABSTRACT

The behavior of the supersonic flow inside rectangular convergent-divergent nozzle is investigated numerically by comparing four nozzles with different divergent sections, with a common aspect ratio $AR=1.14$, and the same nozzle exit-to-throat area ratios $NAR=1.43$. Nozzles are subject to several working fluid inlet pressures, maintaining a constant pressure ratio $NPR=5$. Simulations assume the flow in steady state, compressible, viscous, using a coupled approach with the turbulence model $k - \omega/SST$. The quality of results is measured by employing three refining levels of the computational domain discretization, observing the order of convergence and the grid convergence index GCI. Numerical results show that the Mach number and the temperature of the working fluid are independent of the inlet pressure, unlike the behavior of local pressure and the density. Flow properties are strongly dependent on the geometry variation, and the change on the angle of divergent section causes a direct effect on the Mach number and inverse on the pressure, the temperature and the density of the flow in this section. Simulations are compared to the results of the isentropic theory and show that the sonic line is offset from the geometric center of the throat nozzle, for each simulated geometry. Results from this work are compared to experimental and theoretical data and show deviations below $6 \times 10^{-3} \%$. The $k - \omega/SST$ turbulence model is able to solve the flow with good accuracy, and predicts its velocity profile, Prandtl-Meyer expansion waves, and their interactions with the boundary layer.

Keywords: Convergent-divergent nozzle; supersonic flow; compressible flow; viscous flow; expansion waves; GCI; $k - \omega/SST$.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	1
1.2	Revisão bibliográfica.....	2
1.3	Objetivos	7
1.4	Organização do texto.....	7
2	MODELO MATEMÁTICO	9
2.1	Introdução.....	9
2.2	Conservação de massa.....	9
2.3	Conservação da quantidade de movimento	10
2.3.1	Termo viscoso	11
2.4	Conservação da energia.....	12
2.4.1	Termo viscoso	13
2.5	Relações termodinâmicas para uma massa de controle.....	14
2.5.1	Definição de estagnação	16
2.6	Escoamento compressível	17
2.7	Bocal convergente-divergente.....	19
2.7.1	Efeitos da diferença de pressão entre a entrada e a saída de bocais.....	22
2.8	Bloqueio do escoamento	26
2.9	Modelo de turbulência $k - \omega/SST$	28
3	MÉTODO NUMÉRICO	31
3.1	Equação generalizada de transporte	31
3.2	Discretização da equação do transporte	33
3.2.1	O termo temporal.....	33
3.2.2	O termo fonte volumétrico	33
3.2.3	O termo advectivo	33
3.2.4	O Termo difusivo	34
3.3	Gradientes reconstruídos e limitados	36
3.4	Iteração implícita.....	40
3.4.1	Sub-relaxação implícita.....	40
3.4.2	Forma delta.....	41
3.4.3	Solução iterativa	42
3.4.3.1	Método algébrico multi-malha	42
3.4.3.2	Método iterativo Gauss-Seidel	43
3.5	Discretização da equação da continuidade.....	43
3.5.1	Faces interiores ao domínio.....	44
3.5.2	Faces de contorno com velocidade prescrita.....	45
3.5.3	Faces de contorno com pressão prescrita	45
3.6	Discretização da equação de conservação de quantidade de movimento	46
3.6.1	Discretização do termo de tensões viscosas para faces interiores.....	47
3.6.2	Discretização do termo de tensões viscosas para faces de contorno.....	47
3.6.3	Discretização do termo de pressão	48
3.7	Modelo de escoamento acoplado	48
3.8	Estimativas de erros e verificação de resultados	52

3.8.1	Estimativa de erros	52
3.8.2	Método para verificação de resultados	53
4	MODELO FÍSICO	55
4.1	Domínio físico	55
4.2	Domínio computacional	57
4.3	Condições de contorno	59
4.4	Condição inicial.....	64
4.5	Geração de malhas.....	64
4.5.1	Gerador de Superfícies	64
4.5.2	Gerador de malhas hexaédricas	64
4.5.3	Gerador de camada prismática	65
4.5.4	Gerador de extrusão.....	65
4.5.5	Malha gerada	65
4.5.5.1	Malha do domínio computacional.....	65
4.6	Critério de convergência e CFL	68
4.7	Verificação dos resultados.....	68
4.8	Validação da solução numérica	70
4.9	Conclusões parciais	74
5	RESULTADOS.....	75
5.1	Influência da variação da pressão de admissão do Bocal A no escoamento	75
5.2	Comportamento do escoamento nos diferentes bocais estudados.....	81
5.3	Comparação dos resultados numéricos com o modelo isentrópico e com resultados experimentais.....	88
5.4	Conclusões parciais	100
6	CONCLUSÃO	102
6.1	Proposta de trabalhos futuros	103
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	104
	ANEXO I.....	109

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Volume de controle finito fixo no espaço. (Adaptado de Anderson, 2004) ..	10
Figura 2.2	Representação das forças atuantes em um elemento de fluido infinitesimal movendo-se no espaço. Somente as forças no eixo x são mostradas. (Adaptado de Anderson, 2004).....	11
Figura 2.3	Fluxo de energia associado ao movimento de um volume elementar. Por simplicidade somente fluxos na direção do eixo x são mostrados. (Adaptado de Anderson, 2004).....	13
Figura 2.4	Definição de compressibilidade. (Adaptado de Anderson, 2007)	18
Figura 2.5	Variação isentrópica da massa específica com o número de Mach. (Adaptado de Anderson, 2007)	19
Figura 2.6	Geometria para a derivação da relação da área e o número de Mach. (Adaptado de Anderson, 2004)	20
Figura 2.7	Relação entre a razão das áreas e o número de Mach. (Adaptado de Anderson, 2004).....	21
Figura 2.8	Escoamento isentrópico supersônico em bocais. (Adaptado de Anderson, 2004).....	22
Figura 2.9	Escoamento isentrópico subsônico em um bocal convergente-divergente. (Adaptado de Anderson, 2004)	23
Figura 2.10	Escoamento isentrópico com onda de choque dentro do bocal. (Adaptado de Anderson, 2007)	24
Figura 2.11	Escoamento isentrópico com onda de choque na saída do bocal. (Adaptado de Anderson, 2004)	26
Figura 2.12	Variação da taxa de massa em função da pressão de saída. (Adaptado de Anderson, 2004).....	27
Figura 3.1	Decomposição dos valores ϕ_0 e ϕ_1 em uma face no interior do volume. (Adaptado de Beck, 2014).....	35
Figura 3.2	Decomposição dos valores ϕ_0 e ϕ_f em uma face de contorno. (Adaptado de Beck, 2014).....	36
Figura 4.1	Vista isométrica de um dos bocais construídos por Neckel, 2014.....	56
Figura 4.2	Vista superior e lateral dos bocais construídos por Neckel, 2014	56

Figura 4.3	Perfil das seções divergentes	57
Figura 4.4	Representação dos chanfros feitos no domínio computacional	58
Figura 4.5	Condições de entrada e saída do domínio computacional	60
Figura 4.6	Representação das regiões de refino das malhas do domínio computacional.	66
Figura 4.7	Representação da superfície da malha do domínio computacional utilizada no Bocal B	67
Figura 4.8	Representação interna da malha do domínio computacional no Plano XZ $[x, y=0, z]$	68
Figura 4.9	Comportamento da razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função da pressão de entrada no bocal. (a) Comparação entre os resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado).....	70
Figura 4.10	Comportamento da razão entre a temperatura na garganta e a temperatura de estagnação em função da pressão de entrada no bocal. (a) Comparação dos resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado).....	71
Figura 4.11	Comportamento da razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função do número de Mach na garganta do bocal. (a) Comparação entre os resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado).....	72
Figura 4.12	Comportamento da taxa mássica em função da pressão de entrada no bocal. (a) Comparação entre os resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado)	73
Figura 5.1	Representação dos Planos XY e XZ e da Linha X no interior dos bocais.....	75
Figura 5.2	Comportamento de propriedades do escoamento no interior do bocal A em função da pressão de entrada. Plano XZ $[x, y=0, z]$. (a) Número de Mach. (b) Pressão. (c) Temperatura. (d) Massa específica.....	76
Figura 5.3	Comportamento de propriedades do escoamento no interior do bocal A em função da pressão de entrada. Plano XY $[x, y, z=0]$. (a) Número de Mach. (b) Pressão. (c) Temperatura. (d) Massa específica.....	77
Figura 5.4	Influência da pressão na entrada do bocal sobre o número de Mach do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X $[x, y=0, z=0]$	78

Figura 5.5	Influência da pressão na entrada do bocal sobre a pressão do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X $[x, y=0, z=0]$	79
Figura 5.6	Influência da pressão na entrada do bocal sobre a temperatura do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X $[x, y=0, z=0]$	80
Figura 5.7	Influência da pressão na entrada do bocal sobre a massa específica ao longo da direção principal do escoamento. Linha X $[x, y=0, z=0]$	81
Figura 5.8	Perfil das seções divergentes apresentadas na Figura 4.3	82
Figura 5.9	Comportamento de propriedades do escoamento na seção divergente do bocal em função da pressão de entrada para as diferentes geometrias estudadas. Plano XZ $[x, y=0, z]$. (a) Número de Mach. (b) Pressão. (c) Temperatura. (d) Massa específica	83
Figura 5.10	Influência da geometria dos bocais sobre o número de Mach do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X $[x, y=0, z=0]$	85
Figura 5.11	Influência da geometria dos bocais sobre a pressão do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X $[x, y=0, z=0]$	86
Figura 5.12	Influência da geometria dos bocais sobre a temperatura do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X $[x, y=0, z=0]$	87
Figura 5.13	Influência da geometria dos bocais sobre a massa específica do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X $[x, y=0, z=0]$	88
Figura 5.14	Representação do máximo deslocamento da linha sônica em relação ao centro geométrico da garganta dos bocais	89
Figura 5.15	Razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função da pressão de entrada no bocal. (a) Comparação entre os resultados numéricos com a teoria isentrópica (ideal). (b) Resultados experimentais obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado)	91
Figura 5.16	Razão entre a temperatura na garganta e a temperatura de estagnação em função da pressão de entrada no bocal. (a) Comparação dos resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado)	93
Figura 5.17	Razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função do número de Mach na garganta do bocal. (a) Comparação entre os resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado)	95

Figura 5.18	Taxa mássica do escoamento em função da pressão de entrada no bocal. (a) Comparação entre os resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado)	97
Figura 5.19	Comparação entre o número de Mach obtido numericamente e o previsto teoricamente ao longo da direção principal do escoamento para uma pressão de entrada de 400 kPa. Linha X [x, y=0, z=0]	99
Figura I.1	Comportamento da razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função da pressão de entrada no bocal.....	109
Figura I.2	Comportamento da razão entre a temperatura na garganta e a temperatura de estagnação em função da pressão de entrada no bocal.....	109
Figura I.3	Comportamento da razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função do número de Mach na garganta do bocal	110
Figura I.4	Comportamento da taxa mássica na garganta dos bocais em função da pressão de entrada no bocal.....	110

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Propriedades físicas do fluido de trabalho	60
Tabela 4.2	Condições de contorno utilizadas nas simulações	61
Tabela 4.3	Valores das pressões utilizadas na condição de contorno de entrada	62
Tabela 4.4	Relação entre as condições de contorno de saída com a pressão de entrada para o domínio computacional	63
Tabela 4.5	Parâmetros utilizados para geração das malhas em todas as geometrias do domínio computacional	67
Tabela 4.6	Dados de entrada do modelo de verificação da incerteza numérica	69
Tabela 4.7	Verificação da incerteza numérica do modelo de validação.....	69
Tabela 5.1	Deslocamento máximo da linha sônica ($M=1$) no eixo x em relação ao centro geométrico da garganta do bocal.....	89
Tabela 5.2	Relação entre os rótulos utilizados nesse estudo e aqueles utilizados por Neckel para nomear os diferentes bocais	90
Tabela 5.3	Parâmetros de ajuste dos resultados numéricos da Figura 5.15 (a)	92
Tabela 5.4	Parâmetros de ajuste dos resultados numéricos da Figura 5.16 (a)	94
Tabela 5.5	Parâmetros de ajuste dos resultados numéricos da Figura 5.17 (a)	96
Tabela 5.6	Parâmetros de ajuste dos resultados numéricos da Figura 5.18 (a)	98

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AMG	Método algébrico multi-malha (<i>Algebraic Multigrid</i>)
AR	Razão de aspecto (<i>Aspect Ratio</i>)
CFD	Fluido dinâmica computacional (<i>Computational Fluid Dynamics</i>)
CFL	Número de Courant-Friedrichs-Lewy
GCI	Índice de convergência de malha (<i>Grid convergence index</i>)
LU	Decomposição de Matriz não singular como o produto de matriz triangular inferior e superior (<i>lower and upper</i>)
NAR	Relação de áreas do bocal (<i>Nozzle Area Ratio</i>)
NPR	Relação de pressão no bocal (<i>Nozzle Pressure Ratio</i>)
PROMECC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
RST	Transporte das tensões de Reynolds (<i>Reynolds-Stress Transport</i>)
SST	Transporte da tensão de cisalhamento (<i>Shear-Stress Transport</i>)
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas

A	Área, m ²
A	Matriz de coeficientes de equações lineares
a	Coeficiente angular de ajuste linear
a	Velocidade de propagação do som no meio, m/s
a	Coeficiente de equações lineares discretizadas
\mathbf{a}	Vetor área
A^*	Área da garganta do bocal/Área crítica ($M = 1$), m ²
A_e	Área da saída do bocal, m ²
A_i	Área da entrada do bocal, m ²
a_1	Coeficiente do modelo de turbulência
\mathbf{b}	Vetor dos resíduos r de cada célula
$CD_{k\omega}$	Relacionado ao termo de difusão cruzada no modelo de turbulência
c_p	Calor específico à pressão constante, J/(kg.K)
c_v	Calor específico à volume constante, J/(kg.K)
d	Distância entre a onda de choque e a garganta do bocal, m
D_f	Forma discreta do termo difusivo da equação de transporte
D_ω	Termo de derivadas cruzadas
E	Energia interna, J
e_{Total}	Energia total específica, J/kg
e	Energia interna específica, J/kg
\mathbf{e}	Vetor erro iterativo
\mathbf{F}	Força, N
\mathbf{F}	Vetor de termos invíscidos
\mathbf{f}	Forças de campo específica, N/kg
F_1	Função híbrida
F_2	Função híbrida
F_D	Força de arrasto, N
f_β	Parâmetro de modelagem da turbulência

$F_{viscosa}$	Força total exercida na superfície de controle devido à viscosidade, N
G	Vetor de termos viscosos
$GCI \%$	Índice percentual de convergência entre as malhas
$GG_{grad}(\phi)$	Gradiente de ϕ calculado pelo método de Green-Gauss
G_k	Produção de energia cinética da turbulência
G_ω	Produção da taxa de dissipação específica
H	Vetor forças de campo, N
h	Entalpia específica, J/kg
h_0	Entalpia específica de estagnação, J/kg
h_0	Altura da camada de células adjacente à parede, m
I	Tensor/Matriz identidade
i	Versor da coordenada x
j	Versor da coordenada y
K	Energia cinética, J
k	Energia cinética da turbulência, J/kg
k	Versor da coordenada z
k_0	Energia cinética da turbulência que se opõe ao decaimento da turbulência
k_i	Condutividade térmica na coordenada i , W/(m.K)
L	Dimensão característica do problema, m
$LSQ_{grad}(\phi)$	Gradiente de ϕ calculado pelo método de mínimos quadrados
M	Número de Mach
m	Massa, kg
M^*	Número de Mach crítico, $M \equiv 1$
M_e	Número de Mach na saída do bocal
\dot{m}	Taxa mássica, kg/s
N	Identificador de malha
$N_{C.L.}$	Número de camadas de células dentro da camada limite turbulenta
p	Pressão, Pa
p_0	Pressão de estagnação, Pa
p_e	Pressão na saída no bocal, Pa
p_{obs}	Ordem de convergência observada do método numérico
Q	Vetor da solução interpolada

q	Calor específico (por unidade de massa), J/kg
\dot{q}	Taxa de calor adicionado, J/s
$\dot{Q}_{viscosa}$	Taxa de adição de calor devido à viscosidade, J/s
$\dot{Q}'_{viscosa}$	Fluxo de calor devido à viscosidade, J/(s.m ³)
$\dot{\mathbf{q}}''$	Vetor fluxo de calor, Pa.m/s
R	Constante específica do gás, J/(kg.K)
r	Termo residual
r	Resíduo numérico
r	Coefficiente de correlação
\mathbf{r}	Vetor resíduos método Gauss-Seidel
r_{12} e r_{23}	Razão de refino do dimensionamento de malhas (malhas 1, 2 e 3)
r_h	Razão entre as alturas de células adjacentes
r_{ref}	Razão de refino do projeto de malha
R_a^2	Coefficiente de determinação ajustado
Re_L	Número de Reynolds característico
S	Erro padrão
\mathbf{S}	Tensor taxa de deformação
s	Entropia específica, J/(kg.K)
\mathbf{s}	Vetor distância, m
S_ϕ	Termo fonte por unidade de volume associado a variável genérica
s_{irr}	Entropia específica vinculada aos termos dissipativos, J/(kg.K)
T	Temperatura, K
\mathbf{T}	Tensor das tensões viscosas, Pa
T_0	Temperatura de estagnação, K
T_e	Temperatura de saída no bocal, K
$T_{k\omega}$	Escala de tempo, s
u	Componente da velocidade na direção da coordenada x , m/s
u_*	Velocidade de referência, m/s
u^+	Velocidade adimensional
u^*	Velocidade do escoamento quando $M = 1$ /Velocidade do som no meio, m/s
U_r	Velocidade de referência, m/s
V	Volume, m ³

v	Componente da velocidade na direção da coordenada y , m/s
\mathbf{v}	Vetor velocidade, m/s
ϑ	Volume específico, m ³ /kg
\mathbf{W}	Vetor das variáveis conservativas
w	Componente da velocidade na direção da coordenada z , m/s
$\dot{W}_{viscosa}$	Taxa de adição de trabalho devido à viscosidade, J/s
$\dot{W}'_{viscosa}$	Fluxo de trabalho devido à viscosidade, J/(s.m ³)
x	Coordenada cartesiana
\mathbf{x}	Vetor posição, m
$\tilde{\mathbf{x}}$	Vetor das incógnitas da equação linear ou vetor com a solução exata (de acordo com o contexto)
y	Coordenada cartesiana
y	Distância à parede mais próxima, m
y_w^+	Altura adimensional das células adjacentes à parede
z	Coordenada cartesiana

Letras Gregas

α	Vetor que define um ângulo de torção no cálculo de gradientes
$\tilde{\alpha}$	Fator de escala entre os gradientes limitado e ilimitado
α^*	Coefficiente do modelo de turbulência
α^\dagger	Razão entre os índices de convergência, $\alpha^\dagger \equiv GCI_{23}\%/GCI_{12}\%$
β	Fator de sobreposição (gradientes reconstruídos)
β^*	Coefficiente do modelo de turbulência
γ	Coefficiente isentrópico do gás
γ	Coefficiente de mistura do modelo de turbulência
γ_{efet}	Intermitência efetiva
γ_f	Dissipação na face do tipo Rhie-e-Chow
Γ	Difusividade
$\mathbf{\Gamma}$	Matriz de pré-condicionamento
ΔS_R	Comprimento de base de referência, m
$\Delta\tau$	Passo de tempo local, s
$\delta_{C.L.}$	Espessura da camada limite turbulenta, m

ε	Taxa de dissipação específica, J/(kg.s)
ε	Erro absoluto
κ	Constante de Von Kármán
λ	Segundo coeficiente de viscosidade (viscosidade volumétrica), Pa.s
μ	Viscosidade dinâmica, Pa.s
μ_t	Viscosidade da turbulência, Pa.s
ν	Viscosidade cinemática, m ² /s
ρ	Massa específica, kg/m ³
ρ^*	Massa específica crítica, kg/m ³
ρ_0	Massa específica de estagnação, kg/m ³
σ	Número de Von Neumann
σ	Desvio padrão
σ_k	Coeficiente do modelo de turbulência
σ_ω	Coeficiente do modelo de turbulência
$\sigma_{\omega 2}$	Coeficiente do modelo de turbulência
τ_{ij}	Tensão de cisalhamento atuando na direção i e exercida no plano perpendicular ao eixo j , N/m ²
τ_S	Compressibilidade isentrópica, Pa ⁻¹
τ_T	Compressibilidade isotérmica, Pa ⁻¹
τ	Compressibilidade, Pa ⁻¹
τ_w	Tensão de cisalhamento, N/m ²
ϕ	Coeficiente de ponderação no modelo de turbulência
ϕ	Quantidade escalar
ω	Taxa de dissipação específica, s ⁻¹
ω	Trabalho específico, J/kg
ω	Fator de sub-relaxação
ω_0	Taxa de dissipação específica que se opõe ao decaimento da turbulência

Subscritos

*	Quantidade de referência
0	Quantidade de estagnação ou total
0	Quantidade na célula “0”

1	Quantidade na célula “1”
∞	Quantidade não perturbada
i	Índice inteiro representante de coordenada cartesiana
j	Índice inteiro representante de coordenada cartesiana
S	Quantidade isentrópica
T	Quantidade isotérmica
e	Quantidade na saída do bocal
$efet$	Efetivo
f	Face da célula
irr	Quantidade irreversível
n	Célula vizinha ou coeficiente vizinho (de acordo com o contexto)
p	Pressão constante
p	Coeficiente central
r	Valor reconstruído
v	Volume constante
viz	Célula vizinha

Sobrescritos

'	Valor de correção
+	Quantidade adimensional
*	Valor não corrigido
*	Quantidade crítica (onde o número de Mach é unitário, $M \equiv 1$)
G	Método Green-Gauss
G	Propriedade determinada no centro geométrico da garganta do bocal
k	k -ésima iteração
lsq	Método dos mínimos quadrados
max	Valor máximo
min	Valor mínimo
n	Passo de tempo
u	Valor ilimitado

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Com o aumento da conscientização da sociedade mundial sobre preservação da natureza, aquecimento global e preservação de recursos naturais, vários pesquisadores têm buscado novas fontes de energias limpas e renováveis. Essa busca só é possível com um grande esforço industrial, político e social. Com restrições técnicas e custos muitas vezes proibitivos, a implementação da tecnologia verde ainda é lenta e as fontes tradicionais de energia ainda são as mais utilizadas.

Uma estratégia para diminuir o consumo de combustíveis consiste no aumento da eficiência de processos empregados na indústria e no reaproveitamento energético de fontes de baixa disponibilidade. Com isso, o uso de turbinas para esse reaproveitamento vem ganhando forças em plantas onde se tem disponibilidade de vapor superaquecido. Entretanto, turbinas convencionais não operam com vapor próximo da sua saturação, situação que pode provocar danos ao equipamento [Neckel, 2014]. Ainda, a eficiência desses equipamentos é baixa quando a disponibilidade energética da corrente de alimentação também é baixa.

Como alternativa para a produção de energia mecânica e elétrica em pequena escala, a turbina de múltiplos discos (turbina Tesla) se mostra atrativa, uma vez que ela é aplicável em situações de baixo potencial energético disponível e que sua estrutura permite a operação na presença de escoamento bifásico (líquido + vapor). Além disso, esses equipamentos possuem uma construção e operação mais simples que as turbinas convencionais, o que viabiliza suas aplicações. Entretanto, a performance global da turbina Tesla é fortemente dependente da eficiência de seus bocais de injeção [Rice, 2003; Rice, 1963], e está diretamente ligada à uniformidade do escoamento que sai do bocal e interage com os discos [Guha e Sengupta, 2013]. As perdas devidas aos bocais são geralmente consideradas como a maior fonte de perdas na turbina Tesla [Guha e Sengupta, 2013; Rice, 2003, Rice, 1963]. Por isso, o entendimento do comportamento do escoamento no interior de bocais é importante, pois assim pode-se melhorar a geometria do bocal adaptando-o ao problema da turbina em questão ajustando parâmetros para aumentar a uniformidade do escoamento na saída do bocal.

1.2 Revisão bibliográfica

A maioria dos estudos do escoamento em bocais supersônicos, sejam eles visando a performance do bocal ou o estudo de estruturas de choque, são feitos variando as dimensões da geometria ou as relações de pressão de operação. Em trabalhos numéricos, uma grande preocupação é a capacidade dos modelos de turbulência de resolver os fenômenos físicos do escoamento com qualidade. Por isso, a comparação dos modelos de turbulência em escoamentos supersônicos também é um grande foco de pesquisas.

Um estudo experimental da estrutura das ondas de choque de jatos supersônicos emitidos por orifícios retangulares foi feito por Teshima, 1994 (*apud* Menon e Skews, 2009a). Em seu estudo, ele comparou a influência que diferentes bocais causam na estrutura das ondas de choque. Posteriormente, Menon e Skews, 2009a reproduziram numericamente o experimento de Teshima, 1994, e concluíram que o efeito da geometria de entrada dos bocais é o retardamento no aparecimento das estruturas típicas de choques vistos em jatos subexpandido. Os autores ainda observaram um efeito de vena-contracta no campo do escoamento, em casos de bocais com geometrias com ângulos de entrada acentuado.

A influência da geometria no jato supersônico emitido de bocais também foi estudado por Otobe et al., 2007, Xiao et al., 2007a. Otobe et al., 2007 estudaram os efeitos da geometria dos bocais na estrutura do campo do escoamento sônico altamente subexpandido próximo à parede de saída dos bocais. Os autores mostraram que o diâmetro do disco de Mach aumenta com a relação de pressão no bocal (NPR – *Nozzle Pressure Ratio*), e ele é mais significativamente influenciado pela geometria do bocal, ao contrário da distância do disco de Mach a partir da saída do bocal. Contudo, uma dependência da geometria do bocal não mais é encontrada quando um conceito de diâmetro efetivo é levado em conta, para um escoamento de um orifício com ângulos agudos. Já Xiao et al., 2007a estudaram as instabilidades do jato sobre expandido. Eles realizaram simulações para diferentes relações de áreas dos bocais (NAR – *Nozzle Area Ratio*) $1.0 \leq \text{NAR} \leq 1.8$ e para diferentes relações de pressão do bocal $1.2 \leq \text{NPR} \leq 1.8$. Os pesquisadores tiveram conclusões semelhantes às de Otobe et al., 2007, e ainda foram além, eles concluíram que as estruturas dos jatos são governadas pela geometria (governadas pela NAR) e em menor medida pela NPR e que o aumento da NAR resulta no aumento das taxas de mistura do escoamento. Os resultados ainda mostraram que o pico da energia cinética da turbulência no jato de saída do bocal move-se em direção à saída do bocal com o aumento da NAR. Por fim, os autores concluíram que o aumento significativo da

energia cinética da turbulência dentro do bocal é devido à separação assimétrica do escoamento.

Zhou et al., 2014 investigaram o impacto que a variação do raio de curvatura da junção entre a garganta e a seção divergente causam na performance do bocal. Os resultados mostraram que o arredondamento da junção melhora o desempenho do bocal, pois reduz as perdas hidráulicas locais e induzem a separação do escoamento na área próxima à garganta, aumentando com isso o comprimento potencial do núcleo sônico e sua distância efetiva. Com isso, uma maior velocidade axial na saída do bocal pode ser obtida.

Madhu e Vijaya, 2014 e Alam et al., 2016 também determinaram o efeito que a variação da geometria do bocal causa no escoamento. Madhu e Vijaya, 2014 simularam diferentes bocais com ângulo de abertura da seção divergente primeiramente constante, e depois variável. O fenômeno da onda de choque foi visualizado e os resultados mostraram semelhanças na formação do disco de Mach e nos padrões de reflexões como reportados em vários estudos sobre expansão em bocais convergente-divergente com baixos ângulos divergentes. Entretanto, as ondas de choques foram suprimidas para altos ângulos divergentes. Seus resultados ainda descreveram velocidades de saída mais altas e alto grau de separação do escoamento nos bocais com ângulo variável, quando comparado com o correspondente bocal com ângulo constante. Alam et al., 2016 estudaram os efeitos da variação da geometria dos bocais no coeficiente de descarga. Os resultados obtidos mostraram que a geometria do bocal tem nítido efeito na linha sônica e no coeficiente de descarga, e que o coeficiente de descarga encontrado foi diferente da unidade devido à não uniformidades dos parâmetros do escoamento na saída do bocal e também devido a presença da camada limite.

O coeficiente de descarga também foi utilizado como parâmetro de determinação da eficiência de bocais por Hu et al., 2011. Seus estudos numérico e experimental mostraram que os coeficientes de descarga são proporcionais ao tamanho da garganta, e que a relação de pressão crítica (NPR crítica) para a ocorrência de choque é insensível ao número de Reynolds. Uma importante conclusão que os autores chegaram é que o fluxo de calor nas paredes dos bocais não muda sensivelmente o campo de velocidades e o coeficiente de descarga. Este fato se traduz num menor custo computacional, que é maior em simulações que utilizam paredes diatérmicas, quando comparadas com paredes adiabáticas. Seus resultados ainda mostraram que o escoamento à jusante da garganta do bocal desenvolve-se em um jato supersônico subexpandido, em que as ondas de choque oblíquo e de expansão aparecem alternadamente.

Estudos da variação da geometria dos bocais e da variação da relação de pressão dos bocais foram feitos por Xiao et al., 2009. Eles estudaram experimentalmente e numericamente o jato compressível emergindo de um bocal planar convergente-divergente contendo separação do escoamento através de uma onda de choque. Seus estudos foram feitos inicialmente utilizando os modelos de turbulência Spalart-Allmaras, $k - \varepsilon$, $k - \omega$, $k - \omega / SST$ e o modelo do tensor de Reynolds (RSM – *Reynolds-stress model*) e posteriormente várias relações de área $1 \leq NAR \leq 1.8$ e várias relações de pressão $1.2 \leq NPR \leq 1.8$. Nesse estudo, os resultados mostraram que o comportamento do jato emitido pelo bocal é governado pela NAR, e com menos intensidade com a NPR, e ainda que aumentar a NAR resulta em um aumento nas propriedades do escoamento e acelera o decaimento axial do pico de velocidade. Estes resultados encontrados por Xiao et al., 2009 estão de acordo com o reportado por muitos autores. Menon e Skews, 2009b apresentaram um trabalho semelhante ao de Xiao et al., 2009, mostrando que o tamanho da célula de choque adimensionalizado pela largura do bocal é reduzido linearmente com o aumento da razão de aspecto (AR – *Aspect Ratio*), e que a altura adimensional da haste de Mach aumenta para pequenas NPR e é reduzida para grandes NPR. Em outro estudo, Menon e Skews, 2009a mostraram que a altura da haste de choque normal no jato emitido do contorno do bocal tem sido maior com o aumento das NPR investigadas.

A influência de diferentes relações de pressão em bocais (NPR) foram estudadas por Yüceil e Ötügen, 2002, por Mohamed et al., 2003 e por Otobe et al., 2007. Yüceil e Ötügen, 2002 fizeram uma análise experimental para estudar a propagação e as taxas de decaimentos das propriedades do escoamento na linha central de jatos supersônicos subexpandidos emanados de bocais com diferentes NPR. O estudo determinou um conjunto parâmetros de normalização que permite a comparação das propriedades dos jatos emitidos de bocais para uma grande variedade de relações entre a pressão do ambiente e da saída dos bocais. Esses parâmetros fornecem o diâmetro inicial, a velocidade, a temperatura e a massa específica de um jato equivalente cuja a pressão estática é a do ambiente. Eles ainda mostraram que o jato sônico poderia ter um alcance da ordem de 270 vezes o diâmetro do plano de saída do bocal. Este resultado é importante para os estudos numéricos, uma vez que ele dá uma noção do tamanho do domínio computacional necessário para estudos de jatos supersônicos emitidos de bocais. Na investigação experimental conduzida por Mohamed et al., 2003 foram estudadas as estruturas de choque de jatos supersônicos de bocais convergente-divergente com seção

transversal retangular. Os resultados mostraram que a taxa de propagação das propriedades de jatos retangulares é maior ao longo do eixo menor e aumenta com a taxa de pressão no bocal (NPR) e mostraram que o comprimento individual da célula de choque, bem como o número total de células de choque encontrados dentro da pluma do jato, aumentam com a taxa de pressão no bocal (NPR). Já Otobe et al., 2007 em seu estudo numérico mostraram que a distância entre a saída do bocal e o disco de Mach é uma função crescente da NPR do jato, que também influencia significativamente a forma do contorno do jato. Os autores também mostraram que o diâmetro do disco de Mach aumenta com a NPR e ainda concluem que a estrutura de campos próximos a jatos sônicos altamente subexpandidos é uma função unicamente da NPR, independentemente da geometria do bocal.

Os estudos de Xiao et al., 2007b e de Khan e Shembharkar, 2008 foram realizados com parâmetros muito parecidos. Eles utilizaram a mesma relação de área do bocal, $NAR = 1.5$ e baixos valores de NPR. Xiao et al., 2007b observaram a separação do escoamento devido à ação da estrutura lambda de choque, seguida por uma sucessão de ondas de expansão e compressão, e revelaram a possibilidade de uma estrutura assimétrica do escoamento. E que, além disso, outras características do escoamento, tais como localização do choque e distribuição da pressão na parede também estão em concordância com os resultados experimentais. Os autores ainda fornecem informações que confirmam conjecturas anteriores sobre a estrutura da onda, relevantes para a instabilidade da separação do escoamento em bocais convergente-divergente com moderada taxa de expansão.

A correta previsão do modelo de turbulência utilizado para resolver problemas em escoamentos turbulentos é um fator importante no entendimento da fluido dinâmica. O efeito de diferentes modelos de turbulência na resolução de escoamentos foi estudado por vários autores. É sabido que o modelo de turbulência $k - \varepsilon$ padrão não prevê com precisão o comportamento de jatos turbulentos (Thies e Tam, 1996). Anos mais tarde, Tandra et al., 2006 desenvolveram um modelo $k - \varepsilon$ modificado que pode ser usado para prever as propriedades de jatos axissimétricos. Uma investigação numérica de injeção sônica utilizando os modelos de turbulência de transporte das tensões de Reynolds (RST – *Reynolds-Stress Transport*) e $k - \varepsilon$ padrão foi feita por Chenault et al., 1999. A análise do modelo RST revelou resultados fisicamente consistentes e precisos na previsão do escoamento. Entretanto, as simulações com o modelo $k - \varepsilon$ revelaram resultados não físicos e inconsistentes. Hu et al., 2011 compararam os modelos de turbulência Spalart-Allmaras e $k - \omega$ padrão. Eles concluíram que os

coeficientes de descarga são previstos com maior precisão com o modelo de turbulência Spalart-Allmaras, na comparação com o experimento. Mummidiyeti et al., 2013 investigaram vários modelos de turbulência para prever o modelo mais eficiente para um bocal supersônico bidimensional. Os autores concluíram que o modelo de turbulência $k - \varepsilon$ apresentou a melhor correlação com os experimentos. Entretanto, o modelo de turbulência $k - \omega/SST$ não foi levado em consideração nesse estudo.

Georgiadis e Papamoschou, 2003 investigaram uma série de jatos duplos coaxiais utilizando vários modelos de turbulência. Na comparação dos resultados numéricos obtidos com vários modelos de turbulência, o modelo $k - \omega/SST$ é o que apresenta maior concordância com os experimentos. Xiao et al., 2007a, em seu estudo das instabilidades no jato supersônico, também compararam vários modelos de turbulência com resultados experimentais, sendo que o $k - \omega/SST$ também foi o modelo que apresentou os melhores resultados. Esta mesma conclusão também foi obtida por Xiao et al., 2009 ao comparar modelos de turbulência em seu estudo.

Neckel, 2014 fez um estudo experimental em bocais com geometria convergente-divergente projetados para o estabelecimento de escoamentos supersônicos. O projeto de seus bocais foi conduzido para uma pressão de entrada do fluido de trabalho na seção convergente de 500 kPa, considerando duas taxas mássicas distintas: 55 e 70 kg/h. Neckel, 2014 observou que os bocais construídos pelo método das características apresentaram eficiências isentrópicas mais elevadas, obtendo $87.23 \pm 0.5 \%$ de eficiência para a taxa mássica de 55 kg/h e $87.73 \pm 0.5 \%$ de eficiência para a taxa mássica de 70 kg/h. Ainda, a partir da técnica de Schlieren foi possível comprovar a presença de ondas de choque na descarga dos bocais.

Tendo em vista que o dimensionamento de bocais para aplicações específicas é um problema de difícil solução, constatou-se que um estudo numérico do escoamento no interior de bocais convergente-divergente deve ser realizado com vistas ao entendimento das influências que a forma do bocal exerce sobre as propriedades físicas do escoamento.

1.3 Objetivos

O objetivo principal do presente estudo é a investigação numérica do comportamento do escoamento no interior de bocais convergente-divergente de seção retangular, buscando uma aplicação futura no dimensionamento de bocais eficientes para a turbina Tesla.

Os objetivos específicos são:

- Entender e definir um modelo de turbulência que represente bem os fenômenos do escoamento.
- Compreender a metodologia numérica empregada e aplicá-la ao estudo do escoamento no interior de bocais.
- Investigar a relação entre a variação da seção divergente dos bocais e as propriedades físicas do escoamento
- Determinar a confiabilidade do solver empregado na caracterização do escoamento no interior de bocais convergente-divergente, validando os resultados numéricos obtidos com a previsão do modelo unidimensional isentrópico e com os resultados experimentais obtidos por Neckel, 2014.

1.4 Organização do texto

Nesta dissertação, os capítulos subsequentes estão organizados como seguem:

No Capítulo 2 apresenta-se uma breve revisão das equações de conservação e do modelo de turbulência $k - \omega/SST$, juntamente com uma revisão de conceitos termodinâmicos e do modelo isentrópico utilizado para descrever o escoamento no interior de bocais.

No Capítulo 3 descreve-se a aproximação das equações governantes pelo método de volumes finitos utilizando uma abordagem acoplada e ainda, descreve-se o método de validação do modelo computacional utilizado.

No Capítulo 4 apresenta-se o bocal construído e experimentado por Neckel, 2014 e Neckel e Godinho, 2015. Apresenta-se o domínio físico do bocal seguido do correspondente domínio computacional, acompanhado por condições de contorno e condições iniciais. Os métodos utilizados para geração da malha computacional são apresentados, juntamente com seu estudo de independência. Por fim, apresenta-se a comparação os resultados experimentais com aqueles produzidos computacionalmente.

No Capítulo 5 apresentam-se os resultados numéricos obtidos nas simulações dos bocais experimentados por Neckel, 2014 e Neckel e Godinho, 2015. Inicialmente, apresentam-se as influências do aumento da pressão do fluido de trabalho na admissão dos bocais investigados e posteriormente comparam-se os efeitos que as diferentes geometrias causam no escoamento, considerando-se uma mesma pressão de entrada. Por fim, apresenta-se a comparação dos resultados numéricos com os experimentos de Neckel e com o previsto no modelo teórico.

No Capítulo 6 apresenta-se as conclusões finais deste trabalho, bem como propostas para trabalhos futuros.

No ANEXO I apresenta-se as figuras originais do trabalho de Neckel, 2014.

2 MODELO MATEMÁTICO

2.1 Introdução

O presente capítulo apresenta as equações de conservação de massa, força e energia para um escoamento viscoso. Ainda, mostra-se algumas relações termodinâmicas definindo-se propriedade de estagnação e compressibilidade. Discute-se também o comportamento do escoamento no interior de bocais mostrando-se a influência da diferença de pressão entre a entrada e a saída destes no escoamento e por fim, apresenta-se o modelo de turbulência $k - \omega/SST$. Com o entendimento destes conceitos torna-se possível compreender e caracterizar o escoamento de fluidos no interior de bocais convergente-divergente.

2.2 Conservação de massa

A equação da continuidade baseia-se que a massa m (kg) de um volume de controle não pode ser criada nem destruída. Considerando-se um volume de controle V (m^3) em uma determinada região de um escoamento, conforme representado na Figura 2.1

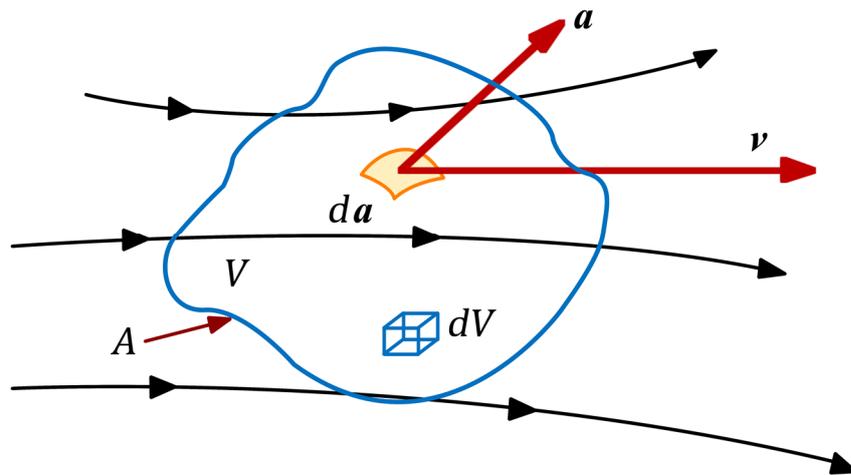


Figura 2.1 – Volume de controle fixo no espaço. (Adaptado de Anderson, 2004)

onde A (m^2) é a área da superfície fechada, \mathbf{a} é um vetor normal à área $d\mathbf{a}$, \mathbf{v} (m/s) é o vetor velocidade, dV é um volume infinitesimal e $d\mathbf{a}$ é uma área elementar. Após algumas considerações pode-se reescrever a equação da continuidade em sua forma integral como

$$\oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV. \quad (2.1)$$

2.3 Conservação da quantidade de movimento

A equação do momento linear baseia-se na segunda lei de Newton que estabelece que a força \mathbf{F} (N) exercida sobre uma partícula é igual à sua variação do momento linear

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (2.2)$$

A aplicação dessa lei a um escoamento de um fluido leva à equação do momentum linear, que é escrita em sua forma integral como

$$\oint_S (\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}) \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV - \oint_S p d\mathbf{a} + \mathbf{F}_{viscosa}. \quad (2.3)$$

2.3.1 Termo viscoso

Por simplicidade a determinação do termo viscoso é feita em uma dimensão, pois a generalização para as demais dimensões é uma tarefa simples. Ainda, consideram-se as forças de campos \mathbf{f} nulas. Lembre-se que o lado direito da Equação (2.3) representa as forças que atuam no volume de controle, que podem ser visualizadas com o auxílio da Figura 2.2.

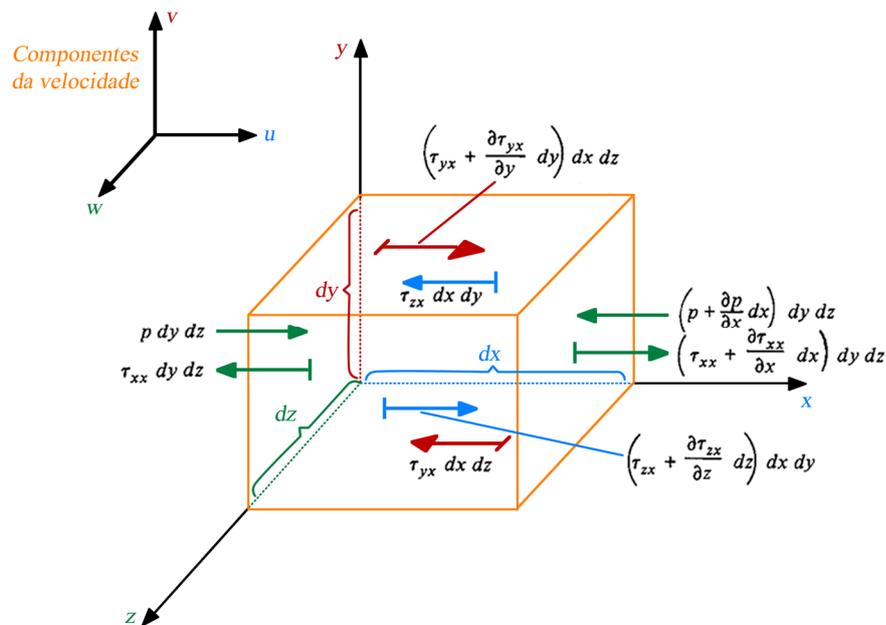


Figura 2.2 – Representação das forças atuantes em um elemento de fluido infinitesimal movendo-se no espaço. Somente as forças no eixo x são mostradas. (Adaptado de Anderson, 2004)

Com isso a equação do momento linear unidimensional para um escoamento compressível, viscoso e sem forças de campos pode ser escrita em sua forma integral pela Equação (2.4)

$$\begin{aligned}
& \oint_S (\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}) \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV \\
&= \iiint_V \left\{ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \right\} dV.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

2.4 Conservação da energia

A equação da energia baseia-se na primeira lei da termodinâmica que diz que a variação da energia, de (J/kg), em um certo volume elementar dV é devida a trocas de energia, na forma de calor ou trabalho, com a vizinhança. A primeira lei da termodinâmica pode ser expressa como

$$\delta q + \delta \omega = de. \tag{2.5}$$

Aplicando a primeira lei em um escoamento que atravessa o volume de controle da Figura 2.1, pode-se escrever, após algumas considerações, a equação da energia em sua forma integral

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \dot{q} \rho dV + \dot{Q}_{viscosa} - \oint_A p \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} + \iiint_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dV + \dot{W}_{viscosa} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \left(e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) dV + \oint_A \rho \left(e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.4.1 Termo viscoso

Com o auxílio da Figura 2.3, da equação da continuidade e desprezando as forças de campos escreve-se a taxa de adição de trabalho $\dot{W}_{viscosa}$ (J/s) e a taxa de adição de calor $\dot{Q}_{viscosa}$ (J/s) devidas à viscosidade no volume de controle, Equações (2.7) e (2.8) respectivamente, como

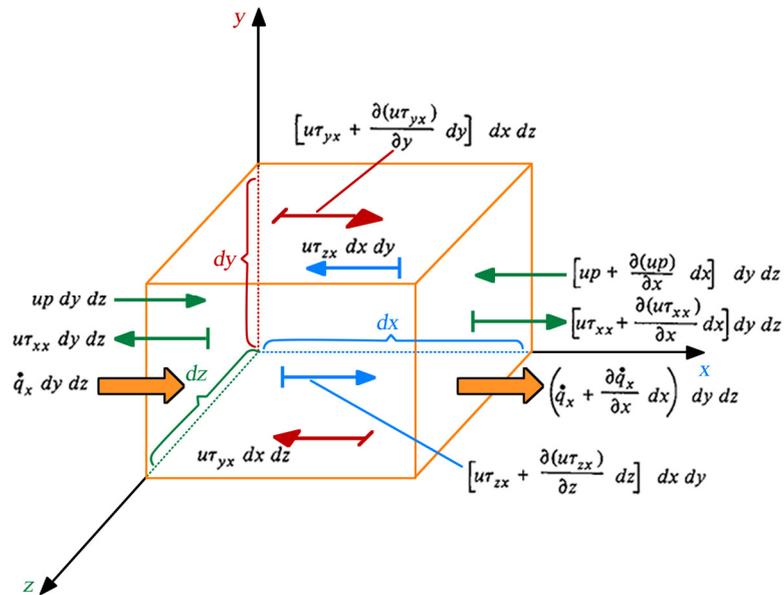


Figura 2.3 – Fluxo de energia associado ao movimento de um volume elementar. Por simplicidade somente fluxos na direção do eixo x são mostrados. (Adaptado de Anderson, 2004)

$$\iiint_V \dot{W}'_{viscosa} dV$$

$$= \iiint_V \left\{ \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right\} dV \quad (2.7)$$

$$\iiint_V \dot{Q}'_{viscosa} dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dV \quad (2.8)$$

onde a equação da energia pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \iiint_V (\dot{q}\rho + \dot{Q}'_{viscosa}) dV + \iiint_V [-\nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \dot{W}'_{viscosa}] dV \\ = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left\{ \rho \left(e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \mathbf{v} \right] \right\} dV. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.5 Relações termodinâmicas para uma massa de controle

Um gás com forças intermoleculares negligenciadas pode ser definido como um gás perfeito [Callen, 1985] descrito pela seguinte equação de estado

$$p\vartheta = RT \quad (2.10)$$

onde R ($J\ kg^{-1}\ K^{-1}$) é a constante específica do gás, ϑ (m^3/kg) é seu volume específico, p (Pa) é sua pressão termodinâmica e T (K) é sua temperatura absoluta. Considerando um volume elementar desse gás se movendo no espaço, este é dotado de uma energia e a soma das energias de todos os volumes elementares localizados em uma dada região é denominada de energia interna E (J). A energia interna específica e (J/kg) (por unidade de massa) está relacionada com a entalpia específica h (J/kg) por

$$h = e + p\vartheta \quad (2.11)$$

onde

$$e = c_v T \quad (2.12)$$

$$h = c_p T \quad (2.13)$$

$$\frac{c_p}{c_v} \equiv \gamma \quad (2.14)$$

onde c_p ($J/(kg K)$) e c_v ($J/(kg K)$) são, respectivamente, o calor específico do gás a pressão e a volume constantes, e γ o coeficiente isentrópico do gás.

A variação da energia interna de um determinado massa de controle é dada pela primeira lei da termodinâmica, Equação (2.5), que relaciona essa mudança na energia com as formas de transferências energéticas. Isso indica que calor q (J/kg) e trabalho ω (J/kg) são apenas as manifestações dessas trocas energéticas.

A primeira lei da termodinâmica em nada fala sobre o sentido dessa transferência energética, entretanto esta informação é dada pela variação da entropia específica de uma massa de controle ds ($J/(kg K)$)

$$ds = \frac{\delta q}{T} + ds_{irr} \quad (2.15)$$

onde ds_{irr} é a contribuição dos termos dissipativos, expresso por:

$$ds_{irr} \geq 0 \quad (2.16)$$

onde a igualdade indica que o processo é reversível. Além disso, se o processo for adiabático, $\delta q = 0$, tem-se

$$ds \geq 0 \quad (2.17)$$

que é uma forma da segunda lei da termodinâmica.

Considerando um processo adiabático e sem atrito, onde $\delta q = 0$ e $ds = 0$, obtém-se uma relação termodinâmica muito importante, que relaciona pressão, massa específica e temperatura para processos isentrópicos

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (2.18)$$

2.5.1 Definição de estagnação

Considerando um elemento de fluido, em um escoamento, passando através de um dado ponto onde as propriedades locais são p , T , ρ e \mathbf{v} , onde ρ (kg/m^3) é a massa específica e \mathbf{v} (m/s) é o vetor velocidade. Estas propriedades físicas são as sentidas pelo elemento de fluido quando ele desloca-se com a velocidade do escoamento. No entanto se este elemento de fluido for desacelerado adiabaticamente e lentamente até o repouso estas propriedades físicas sentidas serão chamadas de estagnação ou totais. As propriedades físicas de estagnação são representadas com um índice subscrito “0”. Assim, pode-se reescrever a Equação (2.13) como

$$h_0 = c_p T_0. \quad (2.19)$$

Com o auxílio da equação da energia, para um escoamento estacionário, isentrópico e sem forças de campos mostra-se que

$$h + \frac{\mathbf{v}^2}{2} = \text{constante}. \quad (2.20)$$

A equação da energia diz que Equação (2.20) é constante em todo o escoamento, logo

$$h + \frac{\mathbf{v}^2}{2} = h_0 + \frac{\mathbf{v}_0^2}{2} = h_0 \quad (2.21)$$

uma vez que por definição $\mathbf{v}_0^2 = 0$. Assim, em uma mesma linha de corrente $h_0 = \text{constante}$ [Anderson, 2007]. Com essa consideração e utilizando a Equação (2.19) pode-se escrever

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} = c_p h_0 = \text{cte}. \quad (2.22)$$

Esta equação em conjunto com a relação $a = \sqrt{\gamma RT}$ [Fox, 2006] e com a definição $M \equiv u / a$, onde a (m/s) é a velocidade de propagação do som no meio, possibilita escrever

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2. \quad (2.23)$$

Utilizando-se as relações da Equação (2.18) obtém-se

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.24)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (2.25)$$

Ainda, pode-se reescrever essas relações de temperatura, pressão e massa específica para um caso particular onde o número de Mach é unitário

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1} \quad (2.26)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.27)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (2.28)$$

onde o asterisco sobrescrito representa que o número de Mach é unitário.

Estas considerações são importantes, uma vez que a introdução do conceito de estagnação simplifica o estudo do escoamento e o dimensionamento em bocais [Wyllen et al., 2009].

2.6 Escoamento compressível

Define-se como compressibilidade a propriedade física que representa o quanto uma substância pode ser comprimida. Todas as substâncias possuem um certo grau de compressibilidade, umas maiores e outras menores. A fase desta substância é um fator

importante na determinação do grau da compressibilidade. Substâncias na fase sólida são menos compressíveis que substâncias na fase líquida, que por sua vez são menos compressíveis que substâncias na fase gasosa. Em uma abordagem preliminar, o escoamento de ar pode ser modelado como o escoamento de um gás perfeito [Anderson, 2004].

Considerando-se um elemento de volume V onde a pressão exercida nesse elemento é dada por p , conforme a Figura 2.4, um acréscimo infinitesimal dp na pressão externa gera um decréscimo dV no volume.

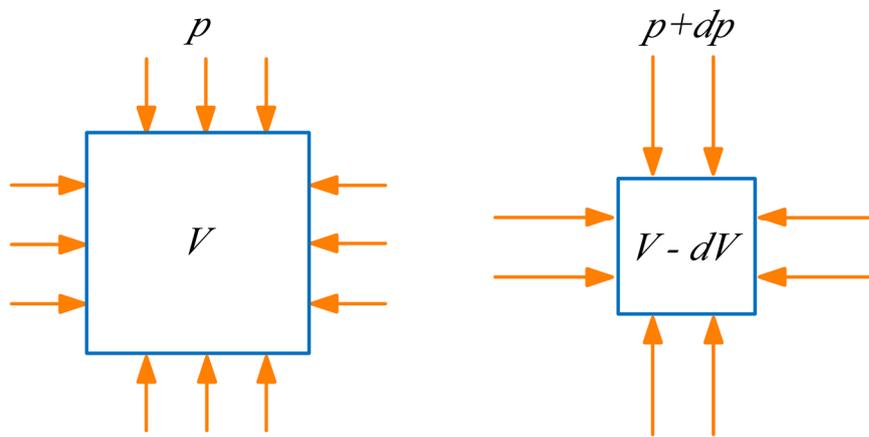


Figura 2.4– Definição de compressibilidade. (Adaptado de Anderson, 2007)

Assim, por definição a compressibilidade τ (Pa^{-1}) de um fluido é dada por

$$\tau = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad (2.29)$$

e ainda, pode-se definir uma compressibilidade isotérmica τ_T (Pa^{-1}) e uma compressibilidade isentrópica τ_S (Pa^{-1})

$$\tau_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (2.30)$$

$$\tau_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \quad (2.31)$$

A Equação (2.25) mostra a relação entre a massa específica e o número de Mach de um fluido e a Figura 2.5 traz esse comportamento para $\gamma = 1.4$. Nota-se que para $M < 0.32$ a variação de ρ em relação a ρ_0 é menor que 5%, o que na prática pode ser considerado como um escoamento incompressível [Anderson, 2007].

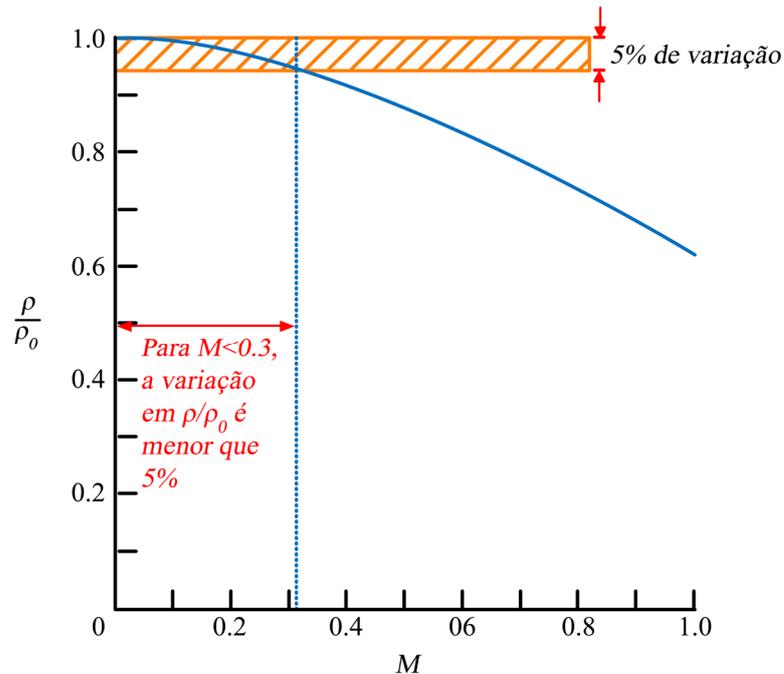


Figura 2.5 – Variação isentrópica da massa específica com o número de Mach. (Adaptado de Anderson, 2007)

2.7 Bocal convergente-divergente

Considerando o escoamento isentrópico em um gás perfeito, pode-se analisar esse escoamento através de relações de áreas e com isso determinar as propriedades físicas do fluido. Considerando o duto mostrado na Figura 2.6 e levando-se em conta que na garganta do bocal o escoamento é sônico [Anderson, 2004], ou seja $M^* = 1$, pode-se escrever a equação da continuidade em uma dimensão como

$$\rho^* u^* A^* = \rho u A. \quad (2.32)$$

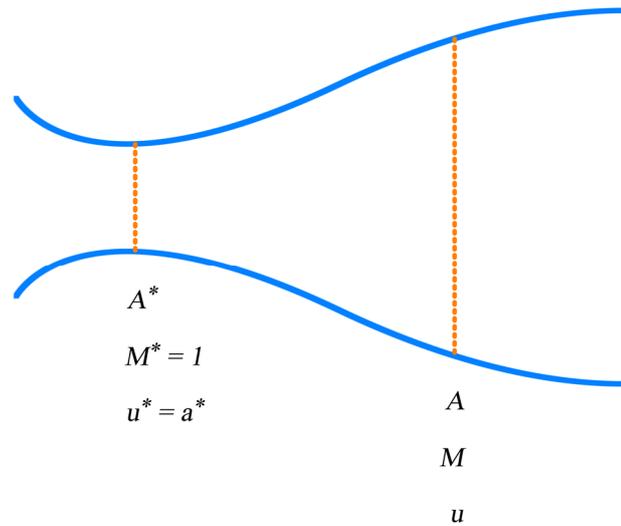


Figura 2.6 – Geometria para a derivação da relação da área e o número de Mach. (Adaptado de Anderson, 2004)

Com o auxílio das Equações (2.25) e (2.28), após alguma manipulação algébrica, chega-se na expressão

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}. \quad (2.33)$$

Este resultado mostra que o número de Mach em um determinado local do duto é uma função da razão entre a área do duto nesse local e a área da garganta do duto. Uma razão entre as áreas menor que a unidade não é fisicamente possível para um escoamento isentrópico [Anderson, 2007]. Analisando a Equação (2.33) nota-se que existem apenas dois valores de número de Mach que correspondem a uma dada razão de áreas, onde um valor corresponde à solução supersônica e o outro à solução subsônica. Na Figura 2.7 mostram-se as duas soluções da Equação (2.33).

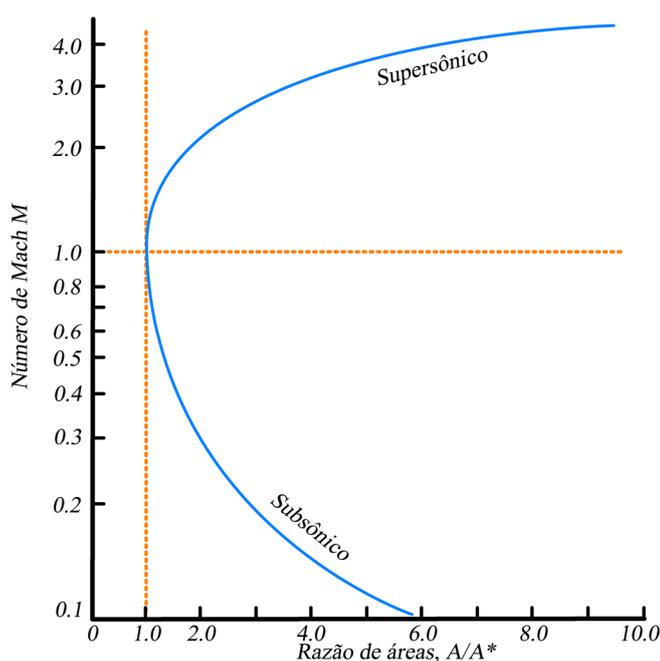


Figura 2.7– Relação entre a razão das áreas e o número de Mach. (Adaptado de Anderson, 2004)

Nos escoamentos isentrópicos em bocais a energia total do sistema está associada à energia cinética, energia térmica e energia capaz de realizar trabalho. Na Figura 2.8 (a) é representado um bocal convergente-divergente, onde a área de entrada A_i é muito maior que a área da garganta A^* , a pressão de entrada é p_0 e a temperatura de entrada é T_0 . Como a área de entrada é muito maior que a área da garganta, o número de Mach é aproximadamente zero e isso implica que a pressão e a temperatura de entrada são praticamente as de estagnação.

Na seção convergente, o fluido é acelerado e, como a velocidade de entrada é subsônica, a solução da Equação (2.33) é dada pela parte inferior da Figura 2.7. Na Figura 2.8 (b) é mostrado o comportamento do número de Mach ao longo do bocal. Na parte divergente, o escoamento pode ser supersônico ou subsônico, isto dependerá da pressão de saída do escoamento. A variação da energia cinética vem à custa de uma variação na temperatura, na pressão ou ambas, conforme representado na Figura 2.8 (c) e na Figura 2.8 (d), respectivamente. As propriedades físicas de saída do bocal são completamente determinadas pela razão entre a área de saída e a área da garganta do bocal, reduzindo o problema a um problema geométrico. Note que na Figura 2.8 (b) e (c) os valores $p/p_0 = 0.528$ e $T/T_0 = 0.833$ são para o caso em que $\gamma = 1.4$.

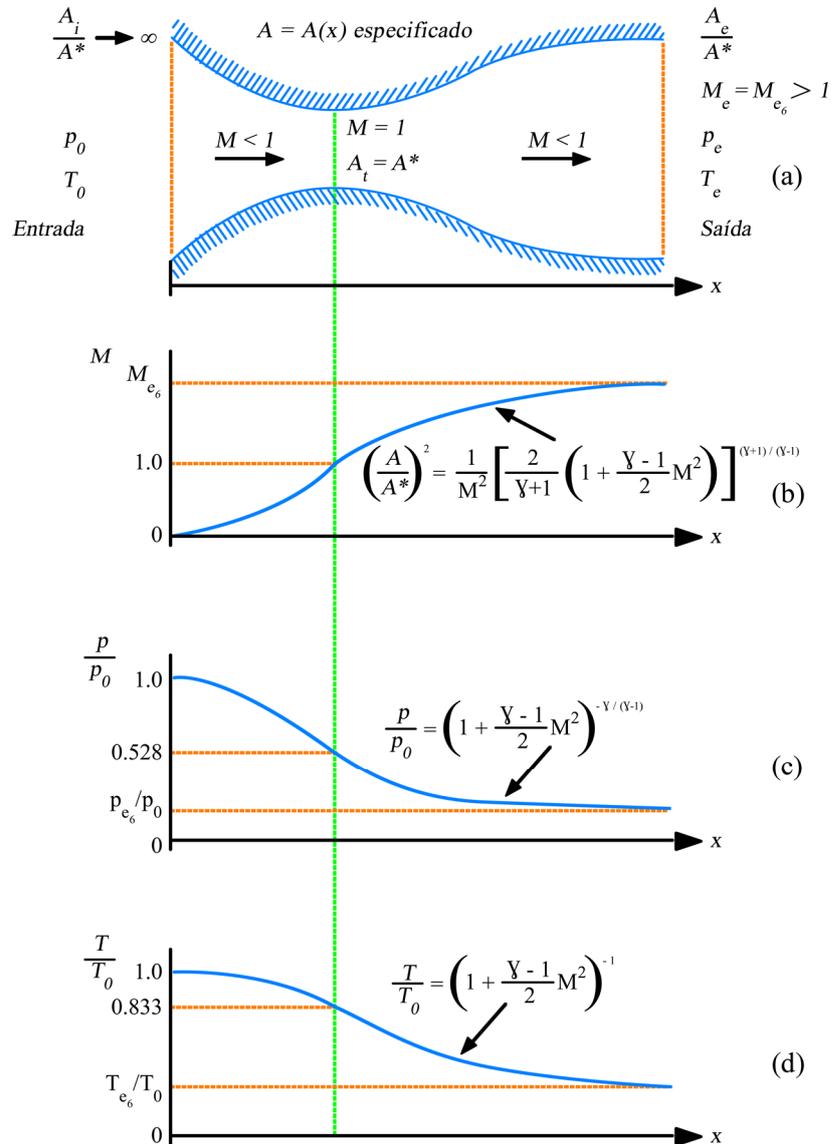


Figura 2.8 – escoamento isentrópico supersônico em bocais. (Adaptado de Anderson, 2004)

2.7.1 Efeitos da diferença de pressão entre a entrada e a saída de bocais

Considerando-se um bocal convergente-divergente, o comportamento do escoamento no seu interior é determinado pela diferença de pressão entre a sua entrada p_0 e sua saída p_e , conforme mostra a equação de Euler

$$dp = -\rho u du. \tag{2.34}$$

Caso a diferença entre as pressões de entrada e de saída do bocal for muito pequena, a velocidade do escoamento resultante será muito baixa, representada pela curva 1 na Figura 2.9 (b). Observa-se na figura que o número de Mach na garganta não é sônico.

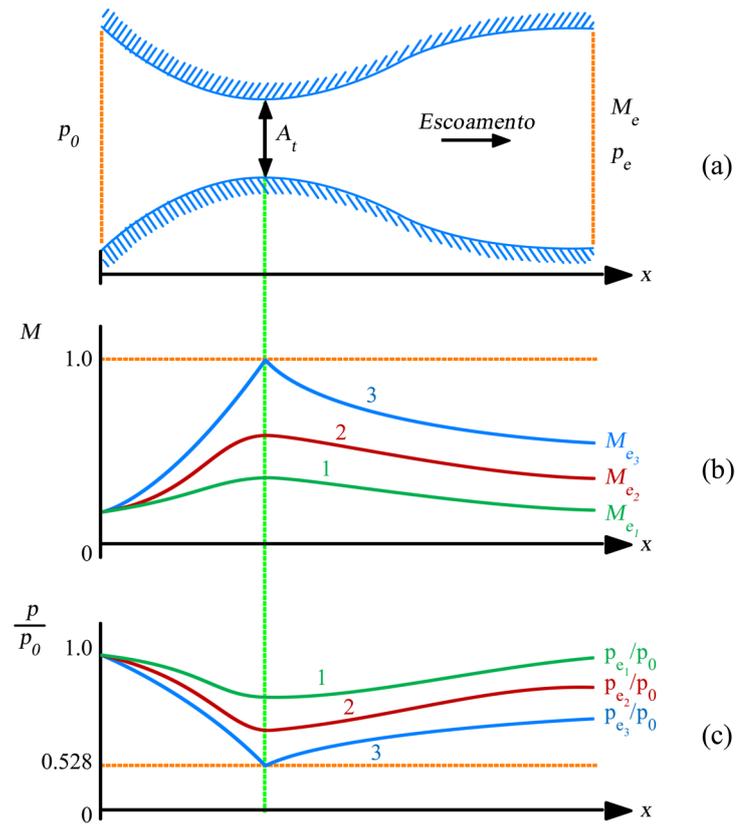


Figura 2.9– Escoamento isentrópico subsônico em um bocal convergente-divergente.

(Adaptado de Anderson, 2004)

A redução na pressão p_e leva à intensificação da velocidade do fluido ao longo da seção convergente do bocal, até o ponto onde atinge-se o escoamento sônico na garganta, com número de Mach unitário, representado pela curva 3 na Figura 2.9 (b). Esta é uma das duas soluções possíveis da Equação (2.33), no caso essa é a solução subsônica.

Diminuindo-se ainda mais a pressão de saída p_e o escoamento atingirá uma velocidade supersônica na seção divergente do bocal, conforme mostrado na Figura 2.10, sempre com a manutenção do bloqueio sônico na sua garganta.

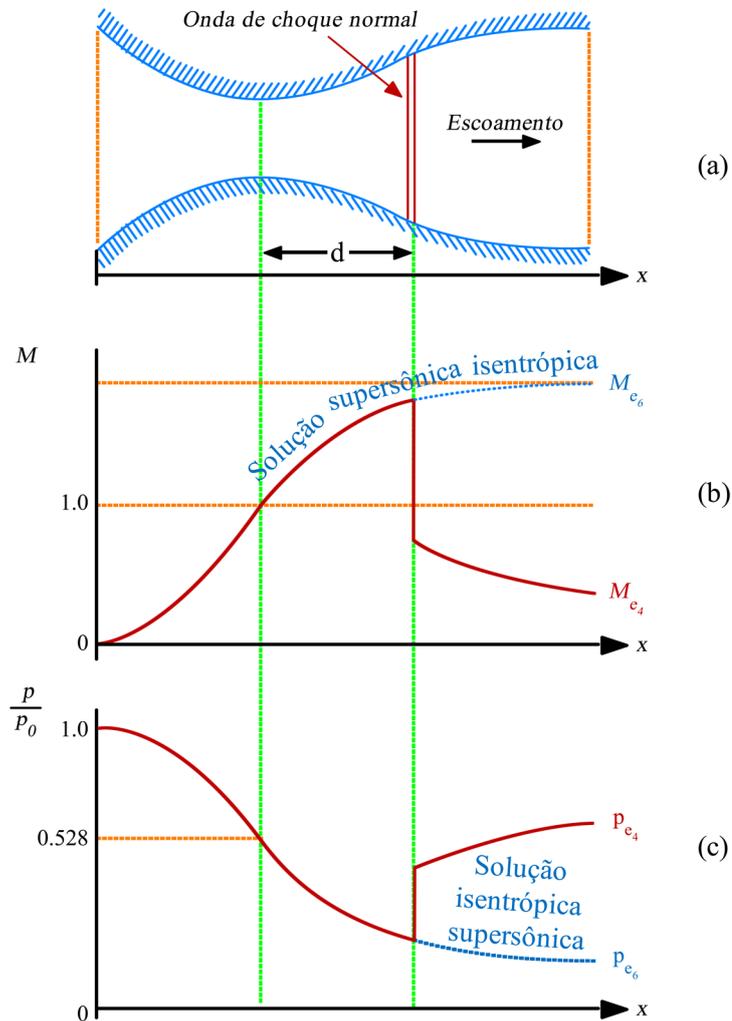


Figura 2.10– Escoamento isentrópico com onda de choque dentro do bocal. (Adaptado de Anderson, 2007)

A figura ainda mostra que esse escoamento será supersônico em uma parte da seção divergente (comprimento d), onde há a ocorrência de uma onda de choque normal, fazendo com que o restante do escoamento seja subsônico.

Essa onda de choque será deslocada mais para a jusante do escoamento à medida que a pressão de saída p_e diminui, até que chega ao final da seção divergente do bocal, correspondendo a pressão p_e da figura. O escoamento no interior do bocal comporta-se como supersônico isentrópico, correspondente ao caso de uma pressão de saída dada por p_e , na Figura 2.11.

Como a onda de choque desloca-se para a jusante com a diminuição da pressão de saída p_e e para uma pressão de saída $p_e = p_e$ a onda de choque está no final da seção divergente do bocal implica que para qualquer pressão de saída $p_e < p_e$ o escoamento no interior do bocal comporta-se como supersônico isentrópico¹, que é a solução supersônica da Equação (2.33).

¹ Existem efeitos de reflexão de ondas de choque após a saída do bocal que dependem da pressão de saída do bocal, entretanto estes fenômenos não serão discutidos aqui neste texto.

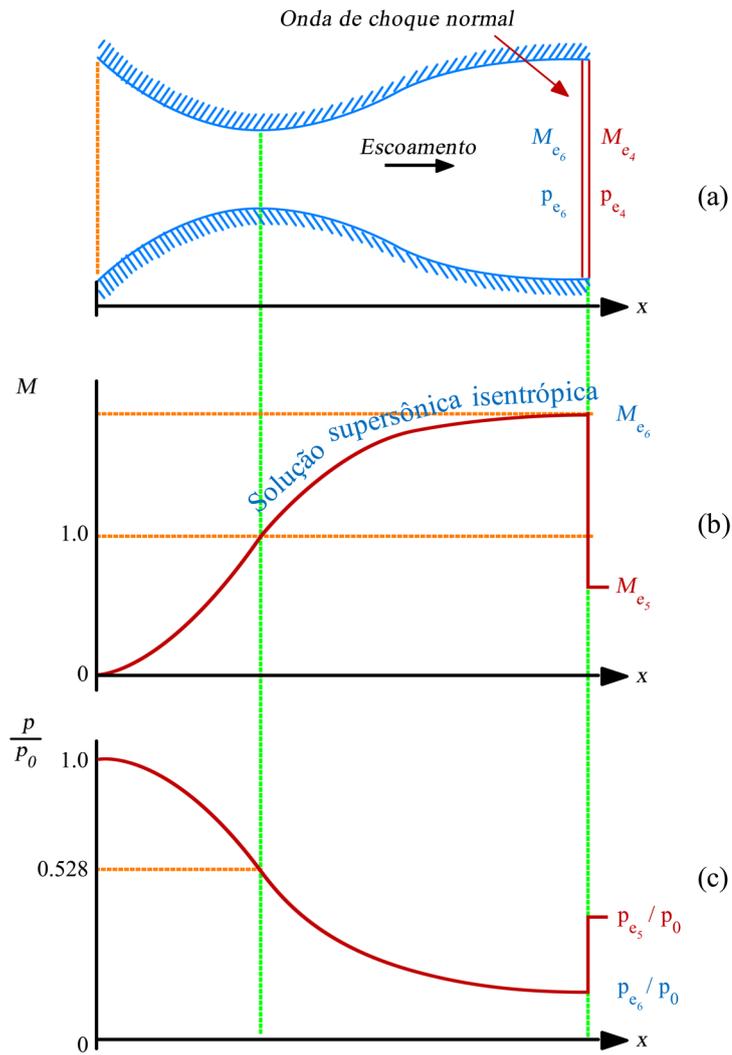


Figura 2.11 – Escoamento isentrópico com onda de choque na saída do bocal. (Adaptado de Anderson, 2004)

2.8 Bloqueio do escoamento

A taxa de massa \dot{m} (kg/s) na garganta do bocal, para o caso em que é válida $p_e \leq p_e^*$, é obtida pela expressão

$$\dot{m} = \rho^* A^* u^*. \quad (2.35)$$

onde o * indica que os valores são obtidos na garganta do bocal.

Observa-se que a taxa de massa aumenta com o decréscimo da pressão na saída do bocal p_e , seguido pelo aumento do número de Mach, para uma pressão de entrada constante. Ao atingir a pressão de saída no nível de p_e , o escoamento chega ao número de Mach unitário, e o contínuo decréscimo da pressão de saída não provocará alteração tanto do número de Mach unitário quanto da taxa de massa na garganta. Nessa situação, diz-se que o bocal está bloqueado, e o escoamento na seção divergente do bocal não mais se comunica com as condições da seção convergente [Anderson, 2004].

A Figura 2.12 mostra o comportamento da taxa de massa na garganta do bocal em função de sua pressão de saída p_e , mantendo-se a pressão de entrada p_0 constante. Observa-se que a taxa de massa aumenta à medida que p_e vai diminuindo, expresso no intervalo $p_e < p_e < p_0$. Para pressões de saídas menores que p_e a taxa de massa permanece constante.

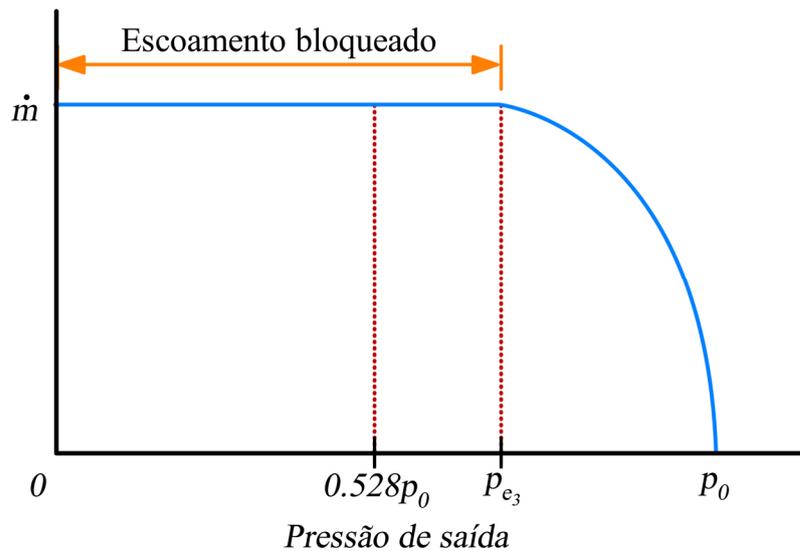


Figura 2.12– Variação da taxa de massa em função da pressão de saída. (Adaptado de Anderson, 2004)

A taxa de massa na garganta do bocal após seu bloqueio ($p_e < p_e$) é derivada da Equação (2.33), e expressa como [Anderson, 2004]:

$$\dot{m} = \frac{p_0 A^*}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} \quad (2.36)$$

2.9 Modelo de turbulência $k - \omega$ /SST

Modelos de turbulência são utilizados para resolver o problema de fechamento causados pelos termos perturbativos inseridos na equação de Navier-Stokes devidos à presença da turbulência.

O modelo $k - \omega$ desenvolvido por Wilcox, 1998, que é uma alternativa ao modelo $k - \varepsilon$, resolve as equações de transporte para a energia cinética da turbulência k (J/kg) e a taxa de dissipação específica dessa energia ω (s^{-1}).

O modelo de Wilcox é superior ao $k - \varepsilon$ na resolução do escoamento na camada limite em gradientes de pressão adversos. Ele pode ser utilizado na resolução do escoamento em toda a camada limite, incluindo a subcamada viscosa, sem modificações adicionais [Akwa, 2014] e ainda, não exige o cálculo de distância à parede.

Entretanto, na determinação da camada limite, o modelo $k - \omega$ é muito sensível à k e ω em escoamentos não perturbados. Isso significa que há grande sensibilidade ao valor de ω no contorno, onde o escoamento é livre [Beck, 2010; Akwa, 2014].

O problema da sensibilidade do modelo $k - \omega$ foi resolvido por Menter [Menter, 1994] através da adição de um termo de difusão cruzada não conservativo, contendo o produto escalar $\nabla k \cdot \nabla \omega$, e de uma função responsável por fazer a transição do comportamento do modelo $k - \varepsilon$ no contorno para o modelo $k - \omega$ junto à parede. Assim esse novo modelo, denominado $k - \omega$ /SST, funciona como o modelo $k - \varepsilon$ longe da parede e como o $k - \omega$ próximo a ela, combinando as características dos dois modelos.

O modelo $k - \omega$ /SST é muito robusto quando há ocorrências de ondas de choque no escoamento [CD-adapco, 2015], e é amplamente utilizado pela indústria aeronáutica [Beck, 2010; Pope, 2000]. Pelo tipo de fenômeno estudado nesse trabalho, optou-se por utilizar o modelo $k - \omega$ /SST [Wilcox, 1998; Menter e Kuntz, 2002; CD-adapco, 2015].

As equações para o transporte de k e ω no modelo de turbulência $k - \omega$ /SST são

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho k dV + \int_A \rho k v \cdot d\mathbf{a} \\ = \int_A (\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k \cdot d\mathbf{a} + \int_V [\gamma_{efet} G_k - \gamma' \rho \beta^* f_\beta (\omega k - \omega_0 k_0) + S_k] dV \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \omega dV + \int_A \rho \omega \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \\ = \int_A (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \nabla \omega \cdot d\mathbf{a} + \int_V [G_\omega - \rho \beta f_\beta (\omega^2 - \omega_0^2) + D_\omega + S_\omega] dV \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde σ_k , σ_ω e β^* são coeficientes do modelo, S_k e S_ω são os termos fontes, k_0 e ω_0 são a energia cinética da turbulência e a taxa de dissipação específica que se contrapõem ao decaimento da turbulência, γ_{efet} é a intermitência efetiva proporcionado pelo modelo de transição Gamma ReTheta ou é unitário caso o modelo não seja ativado. O parâmetro f_β é utilizado para modelar a turbulência em jatos planos e axisimétricos e para os demais casos seu valor é a unidade. Ainda, define-se

$$\gamma' = \min[\max(\gamma_{efet}; 0.1); 1]. \quad (2.39)$$

A viscosidade turbulenta μ_t (Pa s) é expressa por

$$\mu_t = \rho k T \quad (2.40)$$

onde a escala de tempo $T_{k\omega}$ (s) é dada por [Durbin, 1996]

$$T_{k\omega} = \min \left[\frac{1}{\max\left(\frac{\omega}{\alpha^*}; \frac{F_2 S}{a_1}\right)}; \frac{0.6}{\sqrt{3} S} \right] \quad (2.41)$$

$$F_2 = \tanh \left\{ \left[\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega y}; \frac{500\nu}{y\omega} \right) \right]^2 \right\} \quad (2.42)$$

onde $a_1 = 0.31$, α^* é um coeficiente do modelo e y (m) é a distância à parede mais próxima.

A produção de energia cinética da turbulência e a produção da taxa de dissipação específica são dados por

$$G_k = \mu_t S^2 - \frac{2}{3} \rho k \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{2}{3} \mu_t (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \quad (2.43)$$

$$G_\omega = \rho \gamma \left\{ \left[S^2 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right] - \frac{2}{3} \omega \nabla \cdot \mathbf{v} \right\} \quad (2.44)$$

onde γ é um coeficiente de mistura do modelo e a norma do tensor da taxa de deformação é

$$S = |\mathbf{S}| = \sqrt{2\mathbf{S}:\mathbf{S}^T} \quad (2.45)$$

$$S = \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{v}^T). \quad (2.46)$$

O termo de derivadas cruzadas D_ω é

$$D_\omega = 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega \quad (2.47)$$

onde $\sigma_{\omega 2}$ é um coeficiente do modelo de turbulência.

Os coeficientes ponderados ϕ da função híbrida F_1 são dados por

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2 \quad (2.48)$$

$$F_1 = \tanh \left\{ \left[\min \left(\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega y}, \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right); \frac{2k}{y^2 CD_{k\omega}} \right) \right]^4 \right\} \quad (2.49)$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(\frac{1}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega; 10^{-20} \right). \quad (2.50)$$

3 MÉTODO NUMÉRICO

O presente capítulo apresenta uma generalização das equações de transporte, o procedimento para sua discretização e cálculo de gradientes, e alguns métodos iterativos. Ainda, é mostrada a particularização da discretização da equação da continuidade e do momento linear, além de apresentar o modelo de escoamento acoplado. Por fim, discute-se um modelo de verificação de erros e verificação de resultados numéricos.

3.1 Equação generalizada de transporte

As equações da continuidade, momento e energia, equações (2.1), (2.3) e (2.6), são generalizadas por meio da variável escalar ϕ , da seguinte forma [Versteeg e Malalasekera, 1995]:

$$\frac{d(\rho\phi)}{dt} + \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{v}) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla\phi) + S_\phi. \quad (3.1)$$

Onde \mathbf{v} é o vetor velocidade, Γ é a difusividade e S_ϕ é o termo fonte.

A integração da Equação (3.1) com o auxílio do teorema da divergência de Gauss em um determinado volume de controle tridimensional é dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho\phi dV \right) + \oint_A (\rho\phi\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_A \Gamma \nabla\phi \cdot d\mathbf{a} + \int_V S_\phi dV. \quad (3.2)$$

A interpretação física dos termos da Equação (3.2) são, da esquerda para a direita, a taxa de ϕ do fluido no volume de controle, a taxa de ϕ do fluido devido à advecção nas fronteiras do volume de controle, a taxa de ϕ do fluido devido à difusão nas fronteiras do volume de controle e a taxa de geração de ϕ dentro do volume de controle devido a fontes.

As equações descritivas podem ser escritas na forma conservativa: [CD-adapco, 2015]

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{W} dV + \oint_A [\mathbf{F} - \mathbf{G}] \cdot d\mathbf{a} = \int_V \mathbf{H} dV \quad (3.3)$$

onde

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho e_{Total} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I} \\ \rho \mathbf{v} H \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \begin{bmatrix} uu & uv & uw \\ vu & vv & vw \\ wu & wv & ww \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{q}}'' \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

O vetor \mathbf{W} contém as grandezas conservadas. O vetor \mathbf{F} contém os termos não viscosos e o vetor \mathbf{G} os termos viscosos das equações de Navier-Stokes. Já \mathbf{H} é o vetor que contém a resultante \mathbf{f} de forças de campo. Ainda, ρ é a massa específica, $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ é vetor velocidade do escoamento, \mathbf{I} é a matriz identidade, e_{Total} é a energia total específica, o tensor de tensões totais é representado por \mathbf{T} e $\dot{\mathbf{q}}''$ é o vetor fluxo de calor.

A equação geral de transporte, Equação (3.2), pode ser discretizada para qualquer volume assumindo a seguinte forma [CD-adapco, 2015]

$$\frac{d}{dt}(\rho\phi V)_0 + \sum_f [\rho\phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})]_f = \sum_f (\Gamma \nabla\phi \cdot \mathbf{a})_f + (S_\phi V)_0 \quad (3.9)$$

onde os somatórios são calculados para todas as faces e o subscrito “ f ” refere-se a cada face do volume “0”. Na seção 3.2 descreve-se o procedimento utilizado para escrever os termos da Equação (3.9) como função de cada célula do domínio computacional discreto.

3.2 Discretização da equação do transporte

3.2.1 O termo temporal

Para simulações em regime permanente é empregado um esquema de marcha temporal para conduzir formas transientes das equações governantes para o regime permanente. Nesse caso, um termo temporal pseudo transiente substitui o tempo físico. A solução avança no pseudo tempo para levar este termo para zero. A solução em cada célula avança independentemente com um ótimo pseudo passo de tempo calculados localmente de acordo com as condições de estabilidade (ver equações (3.97), (3.98) e (3.99)).

3.2.2 O termo fonte volumétrico

O termo fonte S_ϕ na Equação (3.2) foi tomado como constante em todo o volume da célula, o que o transforma em um valor multiplicativo da integral calculada no interior da célula, conforme apresentado na Equação (3.9). Esta é uma formulação simples que consiste em uma discretização de segunda ordem [CD-adapco, 2015].

3.2.3 O termo advectivo

O termo advectivo em uma dada face é discretizado da seguinte forma:

$$[\rho\phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})]_f = (\dot{m}\phi)_f = \dot{m}_f\phi_f \quad (3.10)$$

onde ϕ_f e \dot{m}_f são o valor de uma propriedade física e da taxa de massa nesta face. Um esquema *Upwind* de segunda ordem é utilizado para calcular ϕ_f nas faces do domínio, sendo que o fluxo advectivo é calculado, no interior do domínio, como

$$(\dot{m}\phi)_f = \begin{cases} \dot{m}_f\phi_{f,0} & \text{para } \dot{m}_f \geq 0 \\ \dot{m}_f\phi_{f,1} & \text{para } \dot{m}_f < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

onde os valores de $\phi_{f,0}$ e $\phi_{f,1}$ são linearmente interpolados entre os valores de cada lado da face como segue:

$$\begin{aligned}\phi_{f,0} &= \phi_0 + \mathbf{s}_0 \cdot (\nabla\phi)_{r,0} \\ \phi_{f,1} &= \phi_1 + \mathbf{s}_1 \cdot (\nabla\phi)_{r,1}\end{aligned}\quad (3.12)$$

onde $(\nabla\phi)_{r,0}$ e $(\nabla\phi)_{r,1}$ são os gradientes reconstruídos das células “0” e “1” e $\mathbf{s}_0(m)$ e $\mathbf{s}_1(m)$ são as distâncias dos centroides até as faces das células, ou seja

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_0 &= \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{s}_1 &= \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_1\end{aligned}\quad (3.13)$$

onde $\mathbf{x}(m)$ é o vetor posição desses centroides. Já nas faces de contorno do domínio, o fluxo advectivo é calculado por

$$(\dot{m}\phi)_f = \begin{cases} \dot{m}_f \phi_{f,0} & \text{para } \dot{m}_f > 0 \\ \dot{m}_f \phi_f & \text{para } \dot{m}_f < 0 \end{cases}\quad (3.14)$$

onde $\phi_{f,0}$ é obtido pela interpolação dada pela Equação (3.12) e ϕ_f é extraído da condição de contorno.

3.2.4 O Termo difusivo

Define-se D_f como sendo a forma discreta do termo difusivo

$$D_f \equiv \sum_f (\Gamma \nabla\phi \cdot \mathbf{a})_f \quad (3.15)$$

onde \mathbf{a} é o vetor área da face.

Uma expressão de segunda ordem para o gradiente de ϕ , nas faces interiores do domínio, pode ser escrita utilizando os valores de ϕ_0 e ϕ_1 , o que leva a:

$$\nabla\phi = (\phi_1 - \phi_0)\boldsymbol{\alpha} + \overline{\nabla\phi} - (\overline{\nabla\phi} \cdot d\mathbf{s})\boldsymbol{\alpha} \quad (3.16)$$

$$\alpha = \mathbf{a}/(\mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}) \quad (3.17)$$

$$d\mathbf{s} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \quad (3.18)$$

$$\overline{\nabla\phi} = (\nabla\phi_0 + \nabla\phi_1)/2 \quad (3.19)$$

onde \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_0 são as posições dos centroides dos volumes e as relações acima podem ser observadas na Figura 3.1.

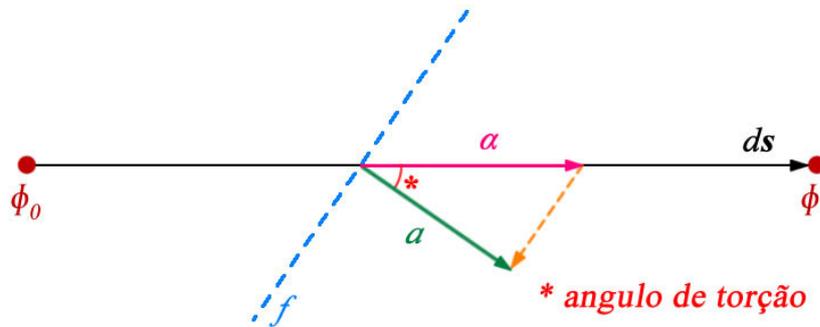


Figura 3.1 – Decomposição dos valores ϕ_0 e ϕ_1 em uma face no interior do volume.

(Adaptado de Beck, 2014)

O fluxo difusivo em uma face no interior do domínio pode ser escrito por:

$$D_f = \Gamma_f \nabla\phi_f \cdot \mathbf{a} = \Gamma_f [(\phi_1 - \phi_0)\alpha \cdot \mathbf{a} + \overline{\nabla\phi} \cdot \mathbf{a} - (\overline{\nabla\phi} \cdot d\mathbf{s})\alpha \cdot \mathbf{a}] \quad (3.20)$$

onde Γ_f é uma média harmônica valores das células. O segundo e terceiro termos do lado direito da Equação (3.20) representam os gradientes secundários (ou difusão cruzada). Estes termos mantêm a precisão quando se utiliza malhas não ortogonais.

O procedimento é similar para as faces de contorno, representada pela Figura 3.2, e o termo difusivo é escrito como

$$D_f = \Gamma_f \nabla\phi_f \cdot \mathbf{a} = \Gamma_f [(\phi_f - \phi_0)\alpha \cdot \mathbf{a} + \nabla\phi_0 \cdot \mathbf{a} - (\nabla\phi_0 \cdot d\mathbf{s})\alpha \cdot \mathbf{a}] \quad (3.21)$$

onde

$$\alpha = \mathbf{a} / (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}) \quad (3.22)$$

$$d\mathbf{s} = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0. \quad (3.23)$$

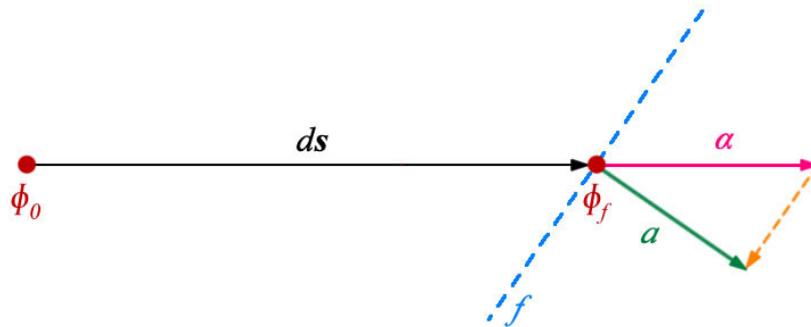


Figura 3.2 – Decomposição dos valores ϕ_0 e ϕ_f em uma face de contorno. (Adaptado de Beck, 2014)

3.3 Gradientes reconstruídos e limitados

O cálculo de gradientes é importante para a solução da equação de transporte, e envolve os seguintes passos [CD-adapco, 2015]:

- i. Cálculo dos gradientes reconstituídos (ilimitados): É feito utilizando o método de Gauss-mínimos quadrados híbrido ou o método Green-Gauss, onde ilimitado significa que os gradientes não proibem que as variáveis de campos reconstituídos nas faces das células excedam os valores máximos e mínimos das células vizinhas.
- ii. Limitação do gradiente reconstituído: Esses gradientes limitados são utilizados para calcular valores escalares nas faces das células e estes escalares são utilizados na determinação do fluxo nas faces das células.
- iii. Cálculo dos gradientes da célula: Determinam-se os valores dos fluxos nas faces das células. É somente empregado quando se utiliza o método Green-Gauss

No método Gauss-Mínimos-Quadrados Híbrido (Gauss-LSQ), calculam-se os gradientes ilimitados (sobrescrito u) e reconstruídos (subscrito r) de uma célula “0” para todas as variáveis através da seguinte equação híbrida

$$(\nabla\phi)_r^u = \sum_f (\phi_n - \phi_0) w_f^0 \quad (3.24)$$

onde

$$w_f^0 = \beta w_f^{lsq} + (1 - \beta) w_f^G \quad (3.25)$$

$$w_f^{lsq} = \left[\sum_f ds \otimes ds / (ds \cdot ds) \right]^{-1} [ds] / (ds \cdot ds) \quad (3.26)$$

$$ds = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0 \quad (3.27)$$

$$w_f^G = A_f / (V_0 + V_n). \quad (3.28)$$

Nas Equações (3.24) a (3.28), \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_n são os vetores posição dos centroides da célula “0” e de uma célula “n” vizinha com uma face f compartilhada, ϕ_0 e ϕ_n são valores escalares das células “0” e “n”, A_f é a área da face f que divide as duas células, V_0 e V_n são os respectivos volumes das células e β é uma função de campo que gera o fator geométrico de sobreposição de gradientes.

O fator de mistura é utilizado para determinar o método de reconstrução do gradiente

- Um fator de sobreposição 1 equivale a selecionar o método dos mínimos quadrados;
- Um fator de sobreposição 0 equivale a selecionar o método de Green-Gauss;
- Um fator de sobreposição entre 0 e 1 equivale a utilizar uma combinação dos métodos dois métodos anteriores, com

$$\nabla\phi = (\beta) \mathbf{LSQ_grad}(\phi) + (1 - \beta) \mathbf{GG_grad}(\phi) \quad (3.29)$$

onde β é o fator de sobreposição da célula, $\mathbf{LSQ_grad}(\phi)$ é o valor do gradiente de ϕ calculado pelo método dos mínimos quadrados e $\mathbf{GG_grad}(\phi)$ o valor do gradiente calculado por Green-Gauss.

O valor do fator de sobreposição é definido como o mínimo valor obtido utilizando os critérios abaixo [CD-adapco, 2015]:

- i. O valor do fator de sobreposição é um, ou seja $\beta = 1$, se a razão entre os autovalores do tensor de mínimos quadrados da célula for maior que um valor mínimo especificado como parâmetro de simulação, então $\beta = 1$. De outra forma, β assume esse valor mínimo;
- ii. Se a tangente do ângulo entre \mathbf{a} e $d\mathbf{s}$ (ângulo de torção, Figura 3.1) for menor que o produto entre a razão de aspecto da célula e o fator normalizado de curvatura de célula (um parâmetro de simulação), então $\beta = 1$. De outra forma, β é menor do que 1 e tende rapidamente a zero;
- iii. Se o ângulo de torção for menor que um valor estipulado máximo (parâmetros de simulação), então $\beta = 1$. Entretanto, se o ângulo de torção for maior que um valor mínimo, então $\beta = 0$. De outra forma, β varia linearmente entre 0 e 1;
- iv. Se a célula for do tipo Chevron (célula delgada cuja linha que une o centroide da mesma com o de uma célula vizinha não atravessa a face compartilhada entre as células), então $\beta = 0$, caso contrário $\beta = 1$;
- v. Se nenhuma situação anterior se aplica, então $\beta = 1$.

O cálculo do valor de $LSQ_grad(\phi)$, pelo método dos mínimos quadrados, é feito através da equação

$$(\nabla\phi)_r^u = \left[\sum_f d\mathbf{s} \otimes d\mathbf{s} / (d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s}) \right]^{-1} \left[\sum_f (\phi_o - \phi_n) d\mathbf{s} / (d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s}) \right] \quad (3.30)$$

e $GG_grad(\phi)$ é obtido pelo método de Gauss. Para a determinação do gradiente por este método considera-se o teorema de divergência de Gauss

$$\int_V \nabla\phi dV = \oint_A \phi d\mathbf{a}. \quad (3.31)$$

Considerando ϕ invariável no volume pode-se aproximar a equação (3.31) por

$$(\nabla\phi)_r^u = 1/V_0 \sum_f \phi_f \mathbf{a}_f. \quad (3.32)$$

Na Equação (3.32) aproxima-se o valor de ϕ_f na face pela média aritmética entre os valores das células vizinhas de tal forma que

$$\phi_f = (\phi_1 + \phi_0)/2 \quad (3.33)$$

e o valor obtido no cálculo do gradiente é limitado pela proposição de Venkatakrishnan, 1993, onde o valor de face reconstruído da célula “0” é

$$\phi_{f,0} = \phi_0 + \mathbf{s}_0 \cdot \nabla\phi_{r,0} \quad (3.34)$$

onde $\nabla\phi_{r,0}$ é o gradiente reconstruído da face. Para cada célula “0”, esse valor não deve exceder os valores mínimos e máximos dos centroides das células vizinhas e da própria célula “0”. Por isso, define-se um fator de escala $\tilde{\alpha}$ que expresse a razão entre os valores limitado e ilimitado, tal que

$$(\nabla\phi)_{r,0} = \tilde{\alpha}(\nabla\phi)_{r,0}^u. \quad (3.35)$$

Para cada célula “0”, definem-se as quantidades

$$\begin{aligned} \phi_0^{max} &= \max(\phi_0, \phi_{viz}) \\ \phi_0^{min} &= \min(\phi_0, \phi_{viz}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde ϕ_{viz} representa o valor do escalar em cada célula vizinha com uma face comum à célula “0”. Para essas quantidades ainda pode-se definir

$$\begin{aligned} \Delta_{max} &= \phi_0^{max} - \phi_0 \\ \Delta_{min} &= \phi_0^{min} - \phi_0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Para cada face f da célula “0” define-se

$$\Delta_f = \phi_{f,0} - \phi_0 = \mathbf{s}_0 \cdot (\nabla\phi)_{r,0}^u. \quad (3.38)$$

Agora definindo

$$r_f = \begin{cases} \Delta_f / \Delta_{max} & \text{para } \Delta_f > 0 \\ \Delta_f / \Delta_{min} & \text{para } \Delta_f \leq 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

calcula-se o limitador de Venkatakrishnan, 1993 para o valor da face por

$$\alpha_f = \frac{(2r_f + 1)}{r_f(2r_f + 1) + 1}. \quad (3.40)$$

Já o limitador Min-Mod para a face é dado por

$$\alpha_f = \min\left(\frac{1,1}{r_f}\right). \quad (3.41)$$

e o limitador de Venkatakrishnan modificado é

$$\alpha_f = \frac{r_f(2r_f + 1) + 1}{r_f[r_f(2r_f + 1) + 1] + 1}. \quad (3.42)$$

O valor $\tilde{\alpha}$ da célula é dado por

$$\tilde{\alpha} = \min(\alpha_f). \quad (3.43)$$

3.4 Iteração implícita

Como resultado da discretização da Equação (3.2) surge um sistema de equações lineares e seus coeficientes são determinados pela discretização. Os métodos de solução destes sistemas são descritos nas seções a seguir.

3.4.1 Sub-relaxação implícita

O sistema algébrico para a variável de transporte ϕ na iteração $k + 1$ é expresso por

$$a_p \phi_p^{k+1} + \sum_n a_n \phi_n^{k+1} = b \quad (3.44)$$

onde o somatório dá-se sobre a vizinhança n da célula p . O termo do lado direito, da Equação (3.44) representa as contribuições explícitas (obtido com o resultado da k -ésima iteração), obtendo-se os coeficientes a_p e a_n diretamente dos termos discretizados. Um termo de sub-relaxação ω é introduzido implicitamente

$$\frac{a_p}{\omega} \phi_p^{k+1} + \sum_n a_n \phi_n^{k+1} = b + \frac{a_p}{\omega} (1 - \omega) \phi_p^k \quad (3.45)$$

onde o sobrescrito $k + 1$ implica no valor após a produção da solução, tomando-se da iteração anterior k o valor do termo fonte no lado direito da Equação (3.45).

3.4.2 Forma delta

Ao invés de resolver a Equação (3.45) para um ϕ_p^{k+1} desconhecido, define-se $\Delta\phi_p = \phi_p^{k+1} - \phi_p^k$ de tal modo que

$$\frac{a_p}{\omega} \phi_p + \sum_n a_n \Delta\phi_n = b - a_p \phi_p^k - \sum_n a_n \phi_n^k \quad (3.46)$$

onde

$$r = b - a_p \phi_p^k - \sum_n a_n \phi_n^k \quad (3.47)$$

é o termo residual e representa a Equação (3.9) na k -ésima iteração. Por definição, o resíduo será nulo no momento em que a Equação (3.46) for exatamente satisfeita.

3.4.3 Solução iterativa

A solução iterativa é requerida nos casos em que as propriedades físicas envolvidas não são lineares, por exemplo quando o termo fonte ou o coeficiente de transporte são funções de ϕ . Na solução iterativa empregam-se dois níveis de iteração: um laço externo para atualização da solução e um laço interno para solução do sistema de equações lineares.

3.4.3.1 Método algébrico multi-malha

Utiliza-se o método algébrico multi-malha (ou AMG – *Algebraic Multigrid*) para solucionar sistemas lineares discretos iterativamente e este sistema pode ser escrito na forma matricial por

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \quad (3.48)$$

que representa a equação algébrica para cada volume do domínio. A matriz \mathbf{A} contém os coeficientes do sistema linear (e.g. a_p e a_n na Equação (3.46)), o vetor $\tilde{\mathbf{x}}$ representa as incógnitas ($\Delta\phi_n$ no caso da Equação (3.46)) em cada célula e o vetor \mathbf{b} representa o resíduo em cada célula (r na Equação (3.47)). Tipicamente, \mathbf{A} é uma matriz esparsa e métodos diretos como a eliminação de Gauss ou a decomposição LU tornam-se computacionalmente caros, justificando dessa forma o emprego do método algébrico multi-malha.

Os métodos iterativos básicos têm lenta convergência mas são efetivos na remoção de componentes de alta frequência no vetor erro [CD-adapco, 2015]. Essa constatação sugere uma estratégia de convergência onde a solução seja parcialmente obtida com utilização de malhas menos refinadas, uma vez que o custo computacional é menor nessas malhas. O algoritmo multi-malha faz uso da estratégia descrita abaixo [CD-adapco, 2015]:

- i. Agrupamento de células para formar uma malha menos refinada;
- ii. Transferência do resíduo da malha mais refinada para a menos refinada (etapa de restrição);
- iii. Transferência da correção da malha menos refinada para a mais refinada (etapa de prolongamento).

O método algébrico multi-malha deriva uma malha menos refinada a partir de combinações aritméticas dos coeficientes calculados para a malha mais refinada. O Star-CCM+ utiliza o método multi-malhas e quatro tipos de refinamento de malha: os ciclos fixos F, V, W e o ciclo flexível. No ciclo flexível, os resíduos são monitorados após cada varredura em um mesmo nível de refinamento. Se o resíduo estiver abaixo de um determinado valor uma malha mais refinada é utilizada, no entanto se o resíduo exceder um valor predefinido o método continuará utilizando o mesmo nível de malha.

3.4.3.2 Método iterativo Gauss-Seidel

Define-se o erro na iteração k por

$$\mathbf{e}^k = \mathbf{x} - \mathbf{x}^k \quad (3.49)$$

onde $\tilde{\mathbf{x}}$ representa um vetor com a solução exata. O vetor de resíduos \mathbf{r} é definido por

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^k \quad (3.50)$$

de onde segue que

$$\mathbf{A}\mathbf{e}^k = \mathbf{r}^k. \quad (3.51)$$

E assim a iteração continua até que o resíduo seja minimizado, o que significa que o erro será minimizado. Este método consiste em atualizar o valor de \tilde{x}_i em cada célula i com os coeficientes das n células vizinhas conforme a equação abaixo:

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left(b - \sum_n A_{i,n} \tilde{x}_n \right). \quad (3.52)$$

3.5 Discretização da equação da continuidade

A forma discreta da equação da continuidade, Equação (2.1), é expressa abaixo

$$\sum_f \dot{m}_f = \sum_f (\dot{m}_f^* + \dot{m}'_f) = 0 \quad (3.53)$$

onde \dot{m}_f^* é a taxa de massa não corrigida e é calculada após solucionar as equações de conservação de quantidade de movimento. As correções para as faces interiores e de contorno são descritos nas subsecções a seguir

3.5.1 Faces interiores ao domínio

O valor de correção para a taxa de massa nas faces do interior do domínio é dado por

$$\dot{m}_f^* = \rho_f [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{v}_0^* + \mathbf{v}_1^*)/2] - Y_f \quad (3.54)$$

onde \mathbf{v}_0^* e \mathbf{v}_1^* são as velocidades após a solução das equações discretizadas de conservação de momento linear e Y_f é a dissipação do tipo Rhie-e-Chow na face dado por

$$Y_f = Q_f (p_1^* - p_0^* - \overline{\nabla p}_f^* \cdot d\mathbf{s}) \quad (3.55)$$

$$Q_f = \rho_f (V_0 + V_1/\bar{a}_0 + \bar{a}_1) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a} \quad (3.56)$$

onde V_0 e V_1 são os volumes, \bar{a}_0 e \bar{a}_1 são os coeficientes médios de todas as componentes do momentum das células “0” e “1”, respectivamente, p_1^* e p_0^* são as pressões calculadas na iteração anterior, $\overline{\nabla p}_f^*$ é a média ponderada dos gradientes de pressão ∇p_0^* e ∇p_1^* das células e o vetor $\boldsymbol{\alpha}$ é obtido pela Equação (3.17). O fluxo de massa na face f de uma célula é calculado por

$$\dot{m}_f = \rho_f (u_{fn}^* + u'_{fn}) |\mathbf{a}| = (\rho_f u_{fn}^* + \rho_f u'_{fn}) |\mathbf{a}| \quad (3.57)$$

onde o subscrito “fn” indica uma componente normal à face. Ainda, define-se

$$\rho_f u'_{fn} |\mathbf{a}| \equiv -Q_f (p'_1 - p'_0) \quad (3.58)$$

onde p'_1 e p'_0 são as correções na pressão. Assim, com a combinação das Equações (3.57) e (3.58), determina-se a correção da taxa de massa \dot{m}'_f

$$\dot{m}'_f = Q_f(p'_1 - p'_0). \quad (3.59)$$

Por fim, arranjando as Equações (3.53) e (3.59) obtém-se a forma discretizada da correção de pressão para o interior do domínio

$$a_p p'_p + \sum_n a_n p'_n = r \quad (3.60)$$

onde o resíduo r é a taxa líquida de massa na célula tal que

$$r = - \sum_f \dot{m}_f^*. \quad (3.61)$$

3.5.2 Faces de contorno com velocidade prescrita

Nas faces de contorno do domínio, quando a velocidade é prescrita, \dot{m}_f^* é calculado diretamente da velocidade \mathbf{v}_f^* prescrita tal que

$$\dot{m}_f^* = \rho_f (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_f^*) - Y_f \quad (3.62)$$

onde as correções da taxa de massa são zero e prescreve-se a condição de Neumann para a pressão dada por

$$p'_f = p'_0. \quad (3.63)$$

3.5.3 Faces de contorno com pressão prescrita

Nas faces de contorno do domínio, quando a pressão é prescrita, as correções de pressão são diferentes de zero e a taxa de massa não corrigida \dot{m}_f^* é dada por

$$\dot{m}_f^* = \rho_f (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{a}) - Y_f \quad (3.64)$$

onde \mathbf{v}_f é a velocidade no contorno e a dissipação Y_f é definida por

$$Y_f = Q_f (p_f^* - p_0^* - \overline{\mathbf{v} p_0^*} \cdot d\mathbf{s}) \quad (3.65)$$

onde

$$Q_f = \rho_f V_0 / \bar{a}_0 (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}). \quad (3.66)$$

A estimativa da correção da taxa de massa \dot{m}'_f é feita de forma semelhante ao procedimento adotado na obtenção da Equação (3.59)

$$\dot{m}'_f = -Q_f (p'_0 - p'_f). \quad (3.67)$$

Observando-se o fato que

$$\dot{m}'_f = (\partial \dot{m}_f^* / \partial p_f) p'_f = -(\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{a} / |\mathbf{v}_f|^2) p'_f \quad (3.68)$$

então combinam-se as Equações (3.67) e (3.68) e obtém-se

$$\dot{m}'_f = \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{a} Q_f / \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{a} - Q_f |\mathbf{v}_f|^2 \quad (3.69)$$

$$p'_f = |\mathbf{v}_f|^2 Q_f / (Q_f |\mathbf{v}_f|^2 - \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{a}) p'_0. \quad (3.70)$$

3.6 Discretização da equação de conservação de quantidade de movimento

A forma discreta da equação da quantidade de movimento, Equação (2.3), é dada por

$$(\phi_0^{n+1} - \phi_0^n) / \Delta t V_0 + \sum_f [\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})]_f = (1/\rho) \left[\sum_f (p\mathbf{I} \cdot \mathbf{a})_f + \sum_f (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}) \right]. \quad (3.71)$$

A discretização da parcela do termo de pressão e da parcela do termo do tensor das tensões viscosas é descrito nas seções 3.6.1, 3.6.2 e 3.6.3.

3.6.1 Discretização do termo de tensões viscosas para faces interiores

O tensor das tensões viscosas \mathbf{T} pode ser escrito, em termos da velocidade, como o divergente da velocidade na face da célula, $\nabla \mathbf{v}_f$. Pode-se então escrever esse divergente da forma descrita pela Equação (3.16)

$$\nabla \mathbf{v}_f = \Delta \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\alpha} + \overline{\nabla \mathbf{v}_f} - (\overline{\nabla \mathbf{v}_f} \cdot d\mathbf{s}) \otimes \boldsymbol{\alpha} \quad (3.72)$$

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 \quad (3.73)$$

$$\overline{\nabla \mathbf{v}_f} = (\nabla \mathbf{v}_0 + \nabla \mathbf{v}_1)/2 \quad (3.74)$$

onde $\nabla \mathbf{v}_0$ e $\nabla \mathbf{v}_1$ são tensores da velocidade da célula calculados explicitamente.

3.6.2 Discretização do termo de tensões viscosas para faces de contorno

Pode-se considerar a parede com deslizamento ou sem deslizamento. No caso da parede com deslizamento prescreve-se que a força de cisalhamento na face é nula. Já para o caso de ser considerado que não há deslizamento na parede escreve-se então:

$$\nabla \mathbf{v}_f = \Delta \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\alpha} + \overline{\nabla \mathbf{v}_0} - (\overline{\nabla \mathbf{v}_0} \cdot d\mathbf{s}) \otimes \boldsymbol{\alpha} \quad (3.75)$$

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_0 \quad (3.76)$$

onde \mathbf{v}_f é uma velocidade tangencial prescrita à face. Em escoamentos turbulentos desconsideram-se as componentes das velocidades perpendiculares à parede, levando-se em conta somente as componentes paralelas à ela. Assim, escreve-se a força de cisalhamento em função da diferença entre as velocidades perpendicular à parede e a prescrita na face

$$(\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\alpha})_f = -\gamma(\mathbf{v}_p^t - \mathbf{v}_f^t). \quad (3.77)$$

Pode-se definir o coeficiente γ da Equação (3.77) como

$$\gamma = |\mathbf{a}| \rho u_* / u^+ \quad (3.78)$$

utilizando a relação que determina a magnitude da tensão de cisalhamento τ_w (N/m^2) e a definição da velocidade adimensionalizada pela velocidade de referência u^+

$$\tau_w = \rho u_*^2 \quad (3.79)$$

$$u^+ \equiv \frac{|\mathbf{v}_\infty|}{u_*} \quad (3.80)$$

onde a velocidade de referência u_* é obtida de acordo com o modelo de turbulência.

3.6.3 Discretização do termo de pressão

Em cada face das células, o termo de pressão é dado por

$$p = (\bar{a}_0 p_{f0} + \bar{a}_1 p_{f1}) / (\bar{a}_0 + \bar{a}_1) \quad (3.81)$$

onde \bar{a}_0 e \bar{a}_1 são respectivamente os coeficientes médios das componentes da quantidade de movimento das células “0” e “1”.

Para as faces internas, utilizam-se os valores p_{f0} e p_{f1} interpolados entre os valores das células e os gradientes reconstruídos pela Equação (3.34). Já nas faces de contorno utiliza-se

$$p_f = p_{f0}. \quad (3.82)$$

3.7 Modelo de escoamento acoplado

Quando comparado com o modelo de escoamento segregado, o modelo de escoamento acoplado possui maior robustez e precisão no cálculo para altos números de Rayleigh e para escoamentos compressíveis, principalmente na ocorrência de ondas de choque, isso tudo às custas de um uso maior de memória. [CD-adapco, 2015].

Nesse modelo, as equações de conservação de massa, momento linear e energia são resolvidas utilizando simultaneamente uma abordagem de marcha no tempo, onde a forma transiente das equações governantes é convergida para um regime permanente [CD-adapco, 2015]. Para aumentar a eficiência computacional para todas as velocidades, uma matriz de pré-condicionamento Γ é incorporada na Equação (3.3), deixando-a com a seguinte forma [Weiss e Smith, 1995]:

$$\Gamma \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{Q} dV + \oint_A [\mathbf{F} - \mathbf{G}] \cdot d\mathbf{a} = \int_V \mathbf{H} dV \quad (3.83)$$

onde

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \theta & 0 & \rho_{,T} \\ \theta \mathbf{v} & \rho \mathbf{I} & \rho_{,T} \mathbf{v} \\ \theta H - \delta & \rho \mathbf{v} & \rho_{,T} H + \rho c_P \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{Q} = [p \quad \mathbf{v} \quad T]^T \quad (3.85)$$

onde $\rho_{,T}$ é a derivada da massa específica com respeito à temperatura à pressão constante e $\delta = 0$ ou $\delta = 1$. Para um gás ideal, $\rho_{,T} = -p/RT$ e $\delta = 1$, tornando-se a matriz Γ um membro da família Turkel de pré-condicionadores [Turkel, 1987]. Para um escoamento incompressível $\rho_{,T}$ e δ são zero. O parâmetro θ é definido como

$$\theta = \frac{1}{U_r^2} - \frac{\rho_{,T}}{\rho c_P}. \quad (3.86)$$

A velocidade de referência U_r (m/s) é escolhida de tal forma que os autovalores do sistema permaneçam bem condicionados com respeito às escalas de tempo difusiva e advectiva [Weiss e Smith, 1995]. Isto é conseguido limitando U_r de tal forma que seu valor não fique abaixo das velocidades de difusão e advecção. Uma limitação adicional de U_r considera diferenças locais de pressão onde, em regiões de estagnação, é suprimida a amplificação de perturbações visando aumentar a estabilidade numérica nessas regiões. A Equação (3.87) apresenta estas restrições de U_r

$$U_r = \min \left[\max \left(|\mathbf{v}|, \frac{\nu}{\Delta \mathbf{x}}, \varepsilon \sqrt{\frac{\delta p}{\rho}} \right), U_{r \max} \right] \quad (3.87)$$

onde $\Delta \mathbf{x}$ é uma escala característica da distância entre centroides das células sobre o qual ocorre difusão e δp a diferença de pressão entre células adjacentes. Para escoamentos compressíveis, a velocidade de referência U_r é tal que ela não exceda a velocidade local do som. Para o parâmetro de escala é atribuído o valor $\varepsilon = 2$ para assegurar estabilidade numérica [CD-adapco, 2015].

A discretização da Equação (3.83) é obtida pela aplicação de um volume de controle centrado em uma célula “0”, que assume a seguinte forma

$$V_0 \Gamma_0 \frac{\partial \mathbf{Q}_0}{\partial t} + \sum_f (\mathbf{f}_f + \mathbf{g}_f) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{h} V_0. \quad (3.88)$$

A soma é feita sobre o número total de faces da célula “0”, \mathbf{f}_f e \mathbf{g}_f são respectivamente os fluxos invíscidos e viscosos através da face f , V_0 é o volume da célula “0” e Γ_0 a matriz de pré-condicionamento calculada para célula “0”.

Os escoamentos invíscidos que aparecem na Equação (3.88) são calculados utilizando a metodologia proposta por Weiss e Smith [Weiss e Smith, 1995] e Weiss e colaboradores [Weiss et al., 1999] que decompõem \mathbf{f}_f da seguinte forma

$$\mathbf{f}_f = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1) - \frac{1}{2} \Gamma |\mathbf{A}| \Delta \mathbf{Q} \quad (3.89)$$

onde os subscritos referem-se à ambos os lados da face f da célula, Γ é a matriz de pré-condicionamento e $\Delta \mathbf{Q}$ é dado por

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1^r - \mathbf{Q}_0^r \quad (3.90)$$

e \mathbf{Q}_1^r e \mathbf{Q}_0^r são vetores da solução interpolada para face das células “0” e “1” utilizando gradientes reconstruídos (sobrescrito “r”).

A matriz de fluxos invíscidos $|\mathbf{A}|$ é definida por

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{M}|\Lambda|\mathbf{M}^{-1} \quad (3.91)$$

onde Λ é uma matriz diagonal de autovalores e \mathbf{M} é uma matriz modal que diagonaliza $\Gamma^{-1}(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{Q})$.

Para regimes turbulentos a discretização dos fluxos viscosos nas paredes, onde a condição de não-deslizamento é imposta, considera que somente componentes da velocidade paralelas à parede é de interesse. Uma relação linear entre a tensão de parede e a componente paralela da diferença entre a velocidade da parede e a velocidade da célula é obtida

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{a})_f = -\gamma(\mathbf{v}^t - \mathbf{v}_f^t) \quad (3.92)$$

onde o coeficiente de proporcionalidade γ é dado pela Equação (3.78).

A discretização no tempo das equações governantes utiliza o método de Euler implícito e assume a seguinte forma linear

$$\left[D_i + \sum_j^{N \text{ faces}} \mathbf{S}_{j,k} \right] \Delta \mathbf{Q} = -\mathbf{R}_i^n \quad (3.93)$$

onde $\Delta \mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n$. A matriz diagonal D_i , a matriz não diagonal $\mathbf{S}_{j,k}$ e o vetor de resíduos \mathbf{R}_i^n são respectivamente

$$D_i = \frac{V}{\Delta t} \Gamma + \sum_j^{N \text{ faces}} \mathbf{S}_{j,k} \quad (3.94)$$

$$\mathbf{S}_{j,k} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \mathbf{Q}_k} - \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial \mathbf{Q}_k} \right) \quad (3.95)$$

$$\mathbf{R}_i^n = \sum_j^{N \text{ faces}} (\mathbf{F}_j - \mathbf{G}_j)^n. \quad (3.96)$$

O passo de tempo local $\Delta\tau$ (s), associado com as iterações de todas as simulações de regime permanente, é obtido considerando-se o número de Courant-Friedrichs-Lewy e a condição de estabilidade de Von Neumann. O número de Courant é dado por

$$CFL = U \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.97)$$

onde U (m/s) é a velocidade característica do fenômeno transportado, $\Delta\tau$ o passo de tempo local e Δx a distância entre centroides de células adjacentes. Já a condição de estabilidade de Von Neumann é dada por

$$\Delta\tau = \min\left(\frac{CFL \cdot V(\mathbf{x})}{\lambda_{max}(\mathbf{x})}, \frac{\sigma \Delta x^2(\mathbf{x})}{\nu(\mathbf{x})}\right) \quad (3.98)$$

onde V é o volume da célula, Δx é a distância entre centroides de células adjacentes, σ é o número de Von Neumann ($\sigma \approx 1$), ν (m²/s) é a viscosidade cinemática e λ_{max} (m³/s) é o máximo autovalor obtido pela expressão

$$\lambda_{max} = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}| + c|\mathbf{a}| \quad (3.99)$$

onde \mathbf{v} é a velocidade e \mathbf{a} a velocidade do som.

3.8 Estimativas de erros e verificação de resultados

3.8.1 Estimativa de erros

A estimativa da incerteza numérica de uma solução de CFD está relacionada com a estimativa dos erros numéricos. Destes erros numéricos, os mensuráveis podem ser atribuídos a três tipos [Eça e Hoekstra, 2009]: ao de estimação do erro iterativo, ao da influência do erro iterativo na estimação do erro de discretização e à estimativa do erro de truncamento.

O erro de truncamento aparece ao se truncar um valor analítico finito ou mais comumente ao se desprezar termos de ordens mais elevadas em séries, como numa expansão em série de Taylor [Roache, 1998]. O erro de truncar um valor analítico finito está

relacionado com o número de dígitos significativos utilizado no processamento e à metodologia empregada.

O erro iterativo está relacionado com as não linearidades das equações diferenciais a serem resolvidas.

Já os erros de discretização ocorrem quando expressões algébricas representadas em base contínua são escritas em uma base discreta, tanto para o espaço quanto para o tempo.

Por isso, é importante um estudo de dependência de malha, onde pode-se utilizar o procedimento para a estimação da incerteza da discretização de acordo com a metodologia de verificação proposta por Roache, 1994. Esse método é derivado da extrapolação de Richardson generalizada [Roache, P. J. e Knupp, P. M., 1993] e dá uma abordagem assintótica para verificação da incerteza numérica e independência dos resultados quanto ao refino de malha, conforme descrito na seção 3.8.2.

3.8.2 Método para verificação de resultados

Um método para a verificação da incerteza numérica e independência dos resultados utiliza a extrapolação de Richardson generalizada proposta por Roache, P. J. e Knupp, P. M., 1993 para a quantificação desta incerteza fornecendo uma solução assintótica ϕ_0 de um certo escalar ϕ por

$$\phi_0 \cong \phi_1 + (\phi_1 - \phi_2)/(r_{12}^{p_{obs}} - 1) \quad (3.100)$$

onde o índice “1” representa uma malha mais refinada, o índice “2” uma malha intermediária e um índice “3” representa uma malha menos refinada. Na Equação (3.100) r_{12} é uma razão de refino entre as malhas e dado por

$$r_{12} = \left(\frac{N1}{N2}\right)^{1/3} \quad (3.101)$$

onde $N1$ é o número de volumes da malha mais refinada e $N2$ o número de volumes da malha intermediária.

Para estimar a ordem de convergência observada do método numérico, p_{obs} , resolve-se iterativamente a equação

$$\epsilon_{23}\% / (r_{23}^{p_{obs}} - 1) = r_{12}^{p_{obs}} [\epsilon_{12}\% / (r_{12}^{p_{obs}} - 1)] \quad (3.102)$$

onde r_{23} é uma razão de refino entre as malhas “2” e “3” e

$$\epsilon_{12}\% = 100(\phi_1 - \phi_2)/\phi_2 \quad (3.103)$$

$$\epsilon_{23}\% = 100(\phi_2 - \phi_3)/\phi_3. \quad (3.104)$$

Calcula-se o índice percentual de convergência de malha entre a malha “1” e “2” através da equação

$$GCI_{12}\% = F_s |\epsilon_{12}\%| / (r_{12}^{p_{obs}} - 1) \quad (3.105)$$

onde F_s pode ser interpretado como um fator de segurança contendo um valor de $F_s = 1,25$ [Roache, 1998]. Da mesma forma, calcula-se o índice percentual de convergência de malha entre as malhas “2” e “3”. Considera-se que o valor assintótico ϕ_0 é independente do refinamento da malha se

$$\alpha^\dagger / r_{12}^{p_{obs}} \approx 1 \quad (3.106)$$

com

$$\alpha^\dagger = \frac{GCI_{23}\%}{GCI_{12}\%}. \quad (3.107)$$

4 MODELO FÍSICO

Esse capítulo é dedicado a apresentar o bocal construído e experimentado por Neckel, 2014 e Neckel e Godinho, 2015. O domínio físico do bocal é apresentado seguido do correspondente domínio computacional, acompanhado por condições de contorno e condições iniciais. Os métodos utilizados para geração da malha computacional são apresentados, juntamente com seu estudo de independência. Por fim, são comparados os resultados experimentais com aqueles produzidos computacionalmente no presente trabalho.

4.1 Domínio físico

Os bocais implementados nesse estudo foram confeccionados de forma a reproduzir aqueles produzidos na dissertação de Neckel, 2014 e rerepresentados em Neckel e Godinho, 2015 em seu trabalho experimental. Nesse trabalho foram construídos quatro bocais cuja diferença encontra-se apenas no comprimento de suas seções divergentes. Com isso a razão entre as áreas de saída e da garganta dos bocais ($NAR - Nozzle Area Ratio$) é mantida constante, $NAR = 1.43$, e a razão de aspecto ($AR - Aspect ratio$) entre a altura e a largura da garganta dos bocais também são mantidas constantes, $AR = 1.14$. Na Figura 4.1 apresenta-se uma vista isométrica da geometria de um dos bocais utilizados nesse estudo.

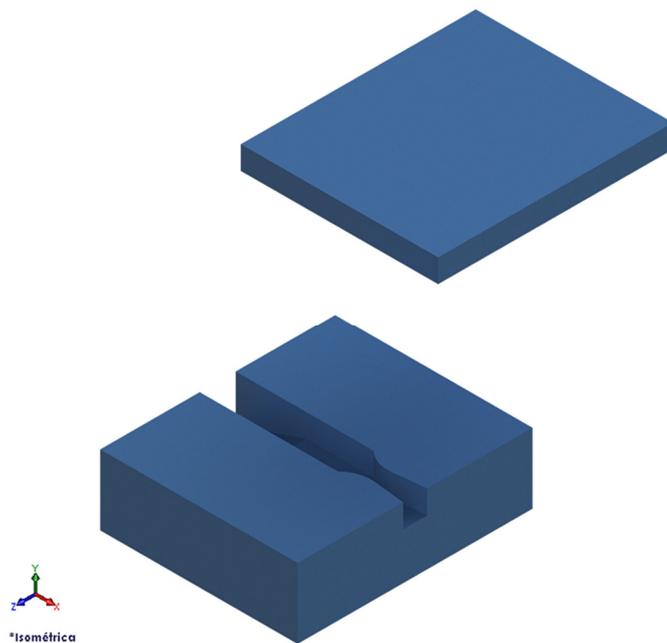


Figura 4.1 – Vista isométrica de um dos bocais construídos por Neckel, 2014

As dimensões comuns a todos os bocais estudados aqui são apresentadas na figura abaixo.

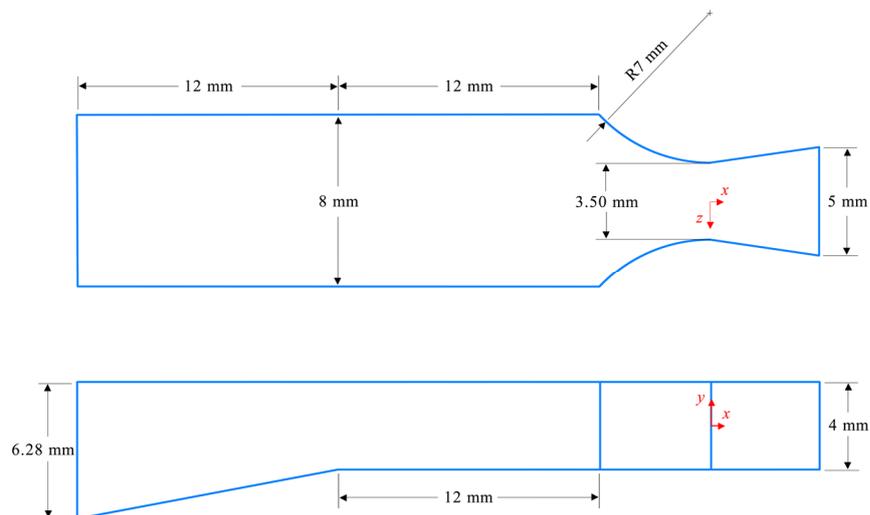


Figura 4.2 – Vista superior e lateral dos bocais construídos por Neckel, 2014

Foi arbitrado para esse estudo um referencial no centro geométrico da garganta dos bocais, conforme apresentado na última figura. O escoamento do fluido de trabalho é

admitido na extremidade esquerda do bocal, e a seção paralela que se estende até a seção convergente é uma região de estabilização do escoamento. Posteriormente, encontra-se uma seção convergente, seguida por uma garganta, e por fim a seção divergente. As geometrias das seções divergentes foram nominadas pelas letras A, B, C e D como mostrado na Figura 4.3.

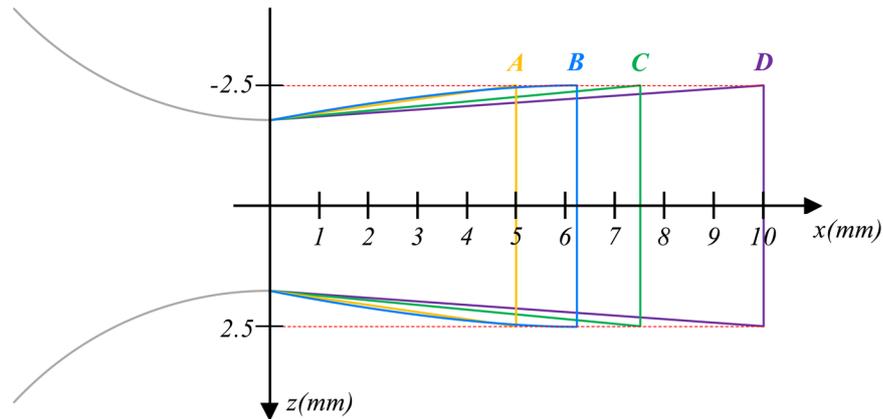


Figura 4.3 – Perfil das seções divergentes

Nos bocais A, C e D, a seção divergente é reta, enquanto que o bocal B foi projetado utilizando-se o método das características [Anderson, 2007].

4.2 Domínio computacional

O domínio computacional foi construído gerando a cavidade por onde se dá o escoamento do fluido de trabalho. As simulações foram realizadas considerando um escoamento em regime estacionário, compressível, viscoso e turbulento. O modelo de turbulência $k - \omega/SST$ foi utilizado na determinação dos efeitos turbulentos.

Afim de auxiliar na convergência da solução numérica, ao longo da direção principal do escoamento foram feitos chanfros nos cantos das paredes de todos os domínios computacionais, cujas dimensões são apresentadas na Figura 4.4.

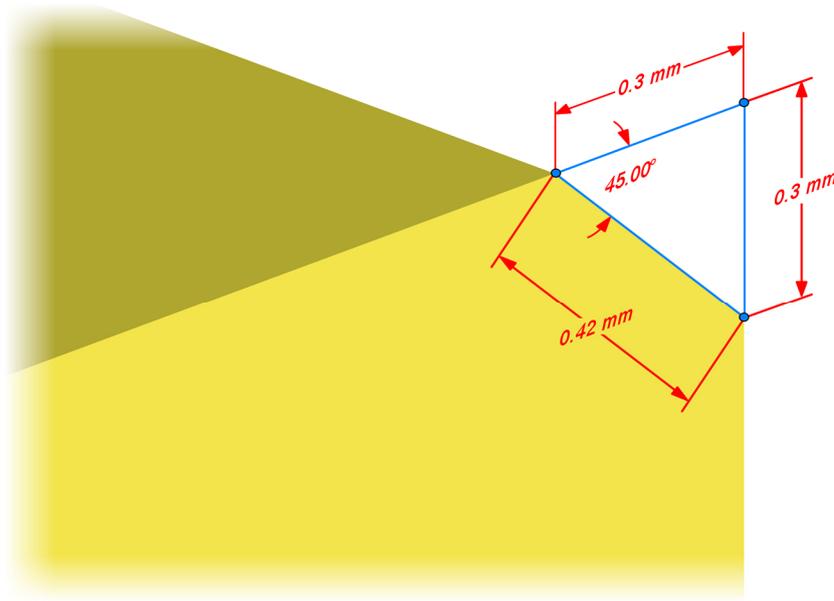


Figura 4.4– Representação dos chanfros feitos no domínio computacional

O domínio construído é prismático com volumes de discretização hexaédricos. Para geração das malhas adota-se o procedimento descrito por Mavriplis et al., 2009 e por Beck, 2014, cujos passos são dados por:

- i. *Escolha do fluido de trabalho e das grandezas que definem o escoamento;*

Neckel, 2014 operou seus bocais com ar comprimido, mas a simulação desenvolvida no presente trabalho foi realizada para um gás ideal, pois simplifica o problema e representa satisfatoriamente o fluido de trabalho dos experimentos.

- ii. *Definição do y_w^+ , que é utilizado na determinação da altura das camadas adjacentes à parede;*

Utiliza-se $y_w^+ < 5$ afim de resolver a subcamada viscosa e com isso não utilizar uma lei de parede. Com isso, a tensão de cisalhamento na parede é calculada como sendo um escoamento laminar [CD-adapco, 2015], e foi prescrito aqui como $y_w^+ = 1.25$.

- iii. *Dimensionamento da camada limite, onde estima-se a altura da camada de células adjacente à parede h_0 em função de y_w^+ e Re_L , que são definições de projeto. Gera-se a camada limite prescrevendo $r_h \leq 1,25$ como taxa de crescimento geométrico da altura das células;*

Estima-se a altura da camada de células adjacentes à parede por

$$h_0 = 5,2y_w^+ LRe_L^{-0,9} \quad (4.1)$$

[Schlichting e Gersten, 2000], onde L é uma dimensão característica do problema. Para garantir que toda a camada limite seja englobada nesse dimensionamento, calcula-se o número de camadas de células necessárias pela equação [Beck, 2014]

$$N_{C.L.} = \text{int} \left\{ \ln \left[\frac{\delta_{C.L.}}{h_0} (r_h - 1) + 1 \right] / \ln(r_h) \right\} \quad (4.2)$$

onde $\delta_{C.L.} = 0,37LRe_L^{-0,2}$ é a espessura estimada da camada limite e

$$r_h \equiv h_i/h_{i-1} \quad (4.3)$$

é a razão prescrita de crescimento da altura entre camadas de células adjacentes.

- iv. *Geração das malhas: de acordo com o método de verificação descrito na seção 3.8.2, define-se três níveis de refinamento, com razão de refinamento de projeto $r_{ref} = \sqrt[3]{3} \cong 1,44$ e distribuição hiperbólica de nós.*

4.3 Condições de contorno

Na fronteira de entrada de todos os bocais, o escoamento foi considerado como uniforme, paralelo ao eixo x e escoando da esquerda para a direita, passando pela seção convergente, garganta, seção divergente, para ser posteriormente descarregado.

No domínio, é considerada uma face de pressão prescrita na entrada e uma face de pressão prescrita na saída e as demais faces foram tratadas com condições de parede, conforme mostrado na próxima figura.

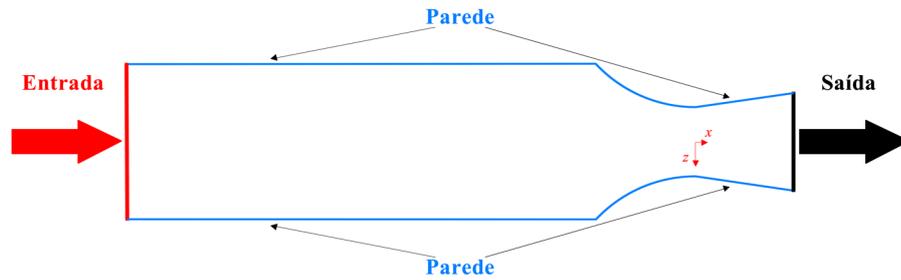


Figura 4.5 – Condições de entrada e saída do domínio computacional

Escolheu-se trabalhar com pressões absolutas em todo o domínio, sendo que a pressão atmosférica é $p_{atm} = 101.325 \text{ kPa}$.

As principais propriedades físicas do fluido de trabalho estão resumidas na Tabela 4.1

Tabela 4.1 – Propriedades físicas do fluido de trabalho

Propriedades físicas		
p	101.325	kPa
γ	1.4	
R	287	$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
T	358	K
μ	1.8551×10^{-5}	$\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$
$\rho = p/RT$	9.8617×10^{-1}	kg/m^3
$\nu = \mu/\rho$	1.8811×10^{-5}	m^2/s
$a = \sqrt{\gamma RT}$	379.2682	m/s
U_∞	62.5	m/s
$M = U_\infty/a$	0.1648	
L	35	mm
$Re_L = U_\infty L/\nu$	1.1629×10^5	

A pressão p é determinada como condição de projeto, γ é o coeficiente de expansão adiabática, R é a constante universal dos gases em base mássica, T é temperatura do gás ao entrar no domínio computacional, μ é a viscosidade dinâmica, ρ é a massa específica e ν é a viscosidade cinemática. Ainda, a é a velocidade do som no fluido, U_∞ é a velocidade não perturbada do escoamento ao entrar no domínio computacional, M é o número de Mach, L é

um comprimento característico do escoamento, onde o valor atribuído é aproximadamente o comprimento dos bocais e Re_L é o número de Reynolds.

As condições de contorno para os quatro bocais nos dois domínios computacionais são descritas na tabela a seguir.

Tabela 4.2– Condições de contorno utilizadas nas simulações

Domínio computacional	
Condição de contorno de estagnação na entrada	
Pressão estática supersônica ($[p]=\text{kPa}$)	Tabela 4.3
Pressão total ($[p_0]=\text{kPa}$)	Tabela 4.3
Taxa de dissipação específica ($[\omega]=\text{s}^{-1}$)	16004.47
Temperatura total ($[T_0]=\text{K}$)	359.944
Energia cinética da turbulência ($[k]=\text{J/kg}$)	0.5636621
Condição de contorno de pressão de saída	
Pressão ($[p]=\text{kPa}$)	Tabela 4.4
Taxa de dissipação específica ($[\omega]=\text{s}^{-1}$)	Tabela 4.4
Temperatura estática ($[T]=\text{K}$)	Tabela 4.4
Energia cinética da turbulência ($[k]=\text{J/kg}$)	Tabela 4.4
Condição de contorno de parede	
Constante de Von Kármán κ	0.42
Coefficiente da função de parede E	9.0

As paredes foram tomadas como adiabáticas, sem rugosidade e respeitando a condição de não deslizamento. Uma vez que prescreveu-se $y_w^+ < 5$, tomou-se o valor da velocidade adimensionalizada u^+ na subcamada laminar aproximada por uma função linear, e no restante da camada limite turbulenta foi aproximada por uma função logarítmica (Equações (4.4) e (4.5) respectivamente).

$$u_{lam}^+ = y^+ \quad (4.4)$$

$$u_{turb}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{E y^+}{f} \right) \quad (4.5)$$

onde $f = 1$, pois foram consideradas paredes sem rugosidade.

Para a condição de entrada, a taxa de dissipação específica ω e a energia cinética da turbulência k foram obtidas iterativamente, atualizando os seus valores após cada simulação até que esses não mais variassem. Após uma estimativa inicial desses valores, foram efetuadas

diversas simulações comparando-se os valores de k e ω obtidos, com os valores obtidos na simulação anterior. Assumiu-se a convergência desses parâmetros quando a sua diferença com a simulação anterior foi menor que 10^{-5} . Para a pressão estática supersônica foi usado o valor da pressão estática na entrada do domínio e para o cálculo da pressão total foi utilizada a Equação (2.24). A temperatura total foi calculada pela Equação (2.23). Na Tabela 4.3 são mostradas as diferentes pressões de entradas simuladas e suas respectivas pressões estáticas supersônicas e pressões totais.

Tabela 4.3– Valores das pressões utilizadas na condição de contorno de entrada

Pressão de entrada (kPa)	Pressão estática supersônica (kPa)	Pressão total (kPa)
400	400	407.655
450	450	458.612
500	500	509.569
550	550	560.526
600	600	611.483
650	650	662.440

Na Tabela 4.4 são mostrados os valores da condição de saída de p , T , ω e k em função da pressão de entrada para os diferentes bocais do domínio.

Tabela 4.4– Relação entre as condições de contorno de saída com a pressão de entrada para o domínio computacional

Bocal A (Temperatura 226.408 K)			
Entrada	Saída		
Pressão (kPa)	Pressão (kPa)	ω (s ⁻¹)	k (J/kg)
400	80.511	99911.5	1.29037
450	90.700	100333.9	1.29236
500	100.798	100666.5	1.29384
550	110.851	100934.0	1.29478
600	120.859	101159.8	1.29531
650	130.840	101346.6	1.29569
Bocal B (Temperatura 221.827 K)			
Entrada	Saída		
Pressão (kPa)	Pressão (kPa)	ω (s ⁻¹)	k (J/kg)
400	74.493	105937.3	1.32021
450	84.442	106523.5	1.32337
500	94.084	106977.4	1.32572
550	103.423	107312.9	1.32727
600	112.608	107571.0	1.32841
650	121.777	107785.4	1.32925
Bocal C (Temperatura 220.395 K)			
Entrada	Saída		
Pressão (kPa)	Pressão (kPa)	ω (s ⁻¹)	k (J/kg)
400	73.472	87371.1	1.25634
450	82.844	87700.5	1.25765
500	92.015	88014.2	1.25862
550	100.915	88307.0	1.25991
600	109.686	88565.3	1.26130
650	118.375	88794.9	1.26270
Bocal D (Temperatura 222.191 K)			
Entrada	Saída		
Pressão (kPa)	Pressão (kPa)	ω (s ⁻¹)	k (J/kg)
400	75.310	78266.9	1.17627
450	84.729	78594.2	1.17778
500	94.204	78839.5	1.17786
550	103.772	79051.7	1.17808
600	113.375	79236.2	1.17881
650	123.045	79377.0	1.17875

4.4 Condição inicial

Afim de agilizar a convergência da simulação definiu-se a condição inicial do escoamento com os mesmos parâmetros da condição de entrada para todas as simulações. Adicionalmente, acrescentou-se uma velocidade inicial ao fluido $u = 62.5 \text{ m/s}$, onde u é a componente x da velocidade.

4.5 Geração de malhas

4.5.1 Gerador de Superfícies

O gerador de superfícies é utilizado para re-triangular a malha gerada na superfície, melhorando sua qualidade e otimizando-a para a geração das malhas do volume. O refino é baseado principalmente no comprimento de base informado. Ele ainda ajusta a superfície para a criação de prismas, quando esta opção é utilizada.

4.5.2 Gerador de malhas hexaédricas

O método de malhas por corte (*Trimmed mesher*) é robusto e eficiente para a geração de malhas de alta qualidade, tanto para geometrias simples quanto para complexas. Esse gerador usa menos memória e é mais eficiente que o gerador de malhas poliédricas. Ele possui atributos altamente desejados em uma malha [CD-adapco, 2015]:

- i. malhas predominantemente hexaédricas com pouca distorção nas células;
- ii. o refinamento é baseado no tamanho da superfície da malha, podendo ser definido manualmente;
- iii. independência da qualidade da superfície;
- iv. alinhamento da malha com um sistema de coordenadas definido pelo usuário.

4.5.3 Gerador de camada prismática

Ele é utilizado para gerar células prismáticas ortogonais ao lado da parede ou em superfícies limites. O gerador é definido em termos da sua espessura, do número de camadas de células dentro dele, da distribuição do tamanho das camadas e da função que é usada para gerar a distribuição, que pode ser progressão geométrica ou tangente hiperbólica.

Camadas prismáticas permitem resolver o escoamento com precisão próximo à parede, o que é fundamental para determinar as forças e transferências de calor, mas também permitem capturar efeitos como o da separação da camada limite. Utilizando um $y_w^+ < 5$ pode-se resolver a subcamada viscosa diretamente sem o auxílio de uma função de parede. Ainda, camadas prismáticas ajudam a reduzir a difusão numérica perto da parede, uma vez que a difusão numérica é minimizada quando o fluxo está alinhado com a malha, e com isso o uso de camadas prismáticas aumentam muito a precisão dos resultados.

4.5.4 Gerador de extrusão

Ele é utilizado para gerar malhas ortogonais extrudadas a partir das superfícies de contorno. Em geral, ele é utilizado para superfícies de contorno de entrada e saída, para estender o volume inicial além das dimensões originais do domínio inicial, e com isso obter um domínio computacional mais representativo. Contudo, ele pode ser utilizado para qualquer superfície de contorno.

4.5.5 Malha gerada

Todas as malhas foram construídas pelos geradores de malhas do Star CCM+ 10.04, descritos nas seções anteriores.

4.5.5.1 Malha do domínio computacional

Para diminuir o número de volumes da malha do domínio computacional, e assim diminuir o custo computacional sem perder efeitos físicos de interesse, dividiu-se a malha em quatro regiões, impondo comprimento de bases diferentes. O comprimento de base pode ser

pensado como o comprimento de um volume da malha. O comprimento de base da região 1 Δs_{R_1} é o comprimento de base de referência, o da região 2 Δs_{R_2} são 50 % do valor de Δs_{R_1} , o da região 3 Δs_{R_3} são 30 % do valor de Δs_{R_1} e o da região 4 Δs_{R_4} são 20 % do valor de Δs_{R_1} . Essas regiões são representadas na Figura 4.6.

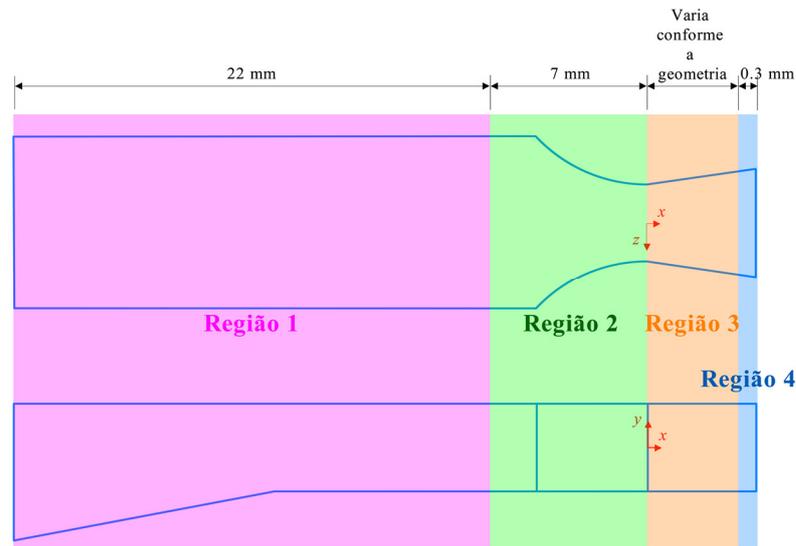


Figura 4.6– Representação das regiões de refinamento das malhas do domínio computacional.

Os parâmetros para a geração da malha do domínio computacional são descritos na Tabela 4.5, onde h_0 é a altura da primeira camada prismática, $N_{C.L.}$ é o número de camadas prismáticas, r_{ref} é a razão de crescimento destas camadas, Δs_{R_1} é o comprimento de base da região 1, Δs_{R_2} é o comprimento de base da região 2, Δs_{R_3} é o comprimento de base da região 3 e Δs_{R_4} é o comprimento de base da região 4.

Tabela 4.5– Parâmetros utilizados para geração das malhas em todas as geometrias do domínio computacional

Parâmetros de geração da malha	
h_0 (mm)	6.3×10^{-3}
$N_{C.L.}$	30
r_h	1.25
Δs_{R1} (mm)	0.50
Δs_{R2} (mm)	0.25
Δs_{R3} (mm)	0.15
Δs_{R4} (mm)	0.10

Uma das malhas do domínio computacional é mostrada nas figuras abaixo, sendo a primeira relativa à sua superfície e segunda traz seu interior.

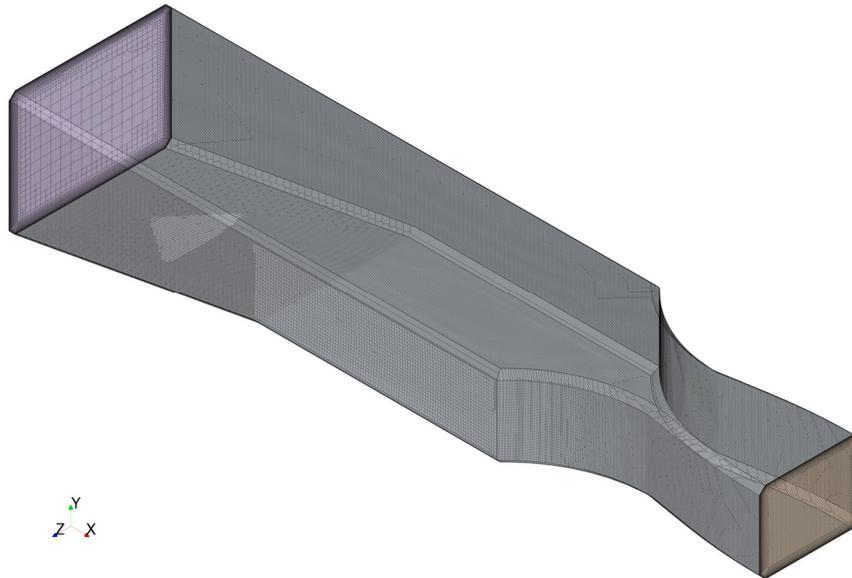


Figura 4.7– Representação da superfície da malha do domínio computacional utilizada no Bocal B

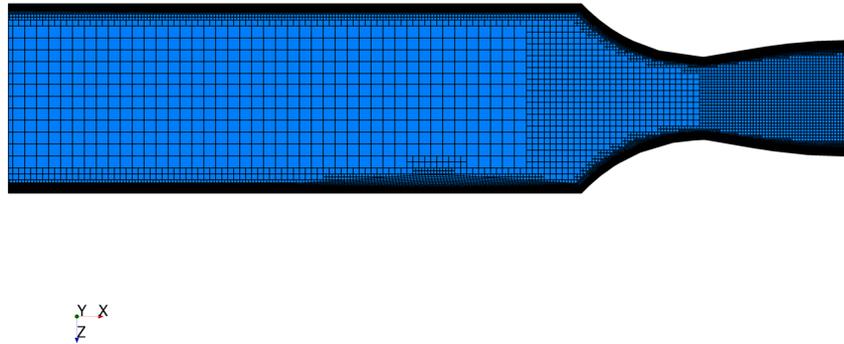


Figura 4.8– Representação interna da malha do domínio computacional no Plano XZ
 $[x, y=0, z]$

4.6 Critério de convergência e CFL

O critério de convergência r adotado em todas as simulações foi de que os resíduos da continuidade, quantidade de movimento (x , y e z), energia, taxa de dissipação específica e energia cinética da turbulência sejam todos inferiores a $r < 1 \times 10^{-5}$.

Ainda, em todas as simulações atribuiu-se para *Courant-Fredericks-Lewy* (CFL) o valor de $CFL = 5$.

4.7 Verificação dos resultados

A independência dos resultados numéricos em relação ao refino da malha é caracterizada de acordo com o descrito na seção 3.8. Escolheu-se a força de arrasto F_D (N) numa das paredes do bocal como parâmetro de observação, o escalar ϕ na Equação (3.100). Na Tabela 4.6 estão os dados de entrada para a determinação da independência de malha.

Tabela 4.6– Dados de entrada do modelo de verificação da incerteza numérica

ENTRADAS		
	Células	Força de arrasto na parede (N)
N1	3061017	3.105181
N2	1051086	3.103450
N3	602810	3.100980

Com os parâmetros da Tabela 4.6 pode-se efetuar a verificação da incerteza numérica, utilizando as considerações feitas na seção 3.8.

Tabela 4.7– Verificação da incerteza numérica do modelo de validação

RESULTADOS	
$\varepsilon_{2,3}$	-7.9589×10^{-4}
$\varepsilon_{1,2}$	-5.5746×10^{-4}
$r_{2,3}$	1.2036
$r_{1,2}$	1.4280
p_{obs}	3.9459
F_{D_0} (N)	3.1057
$GCI_{2,3}$ %	0.0923
$GCI_{1,2}$ %	0.0226
$\alpha/r_{12}^{p_{obs}}$	0.99999999994

Os valores apresentados na Tabela 4.7 mostram que a força de arrasto na parede está convergida para um valor assintótico $F_{D_0} = 3.1057 \text{ N}$ com uma incerteza de aproximadamente 0.02% . O parâmetro $p_{obs} \approx 2$ está em concordância com o previsto teoricamente por Roache, 1998. Por fim, a quantidade $\alpha/r_{12}^{p_{obs}} \approx 1$, Equação (3.106), indica que o valor assintótico F_{D_0} é independente do refinamento da malha.

4.8 Validação da solução numérica

A validação do modelo numérico foi feita para o bocal B, apresentado na Figura 4.3 desse capítulo. Os resultados obtidos foram comparados com o modelo termodinâmico, descrito no capítulo 2, em conjunto com os resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo experimental. Dentre os bocais ensaiados por Neckel, 2014 o bocal por ele rotulado como “MC” que é comparado aqui com o bocal B. O comportamento da pressão na garganta p^G normalizada pela pressão de estagnação em função da pressão de entrada no bocal é apresentado na próxima figura.

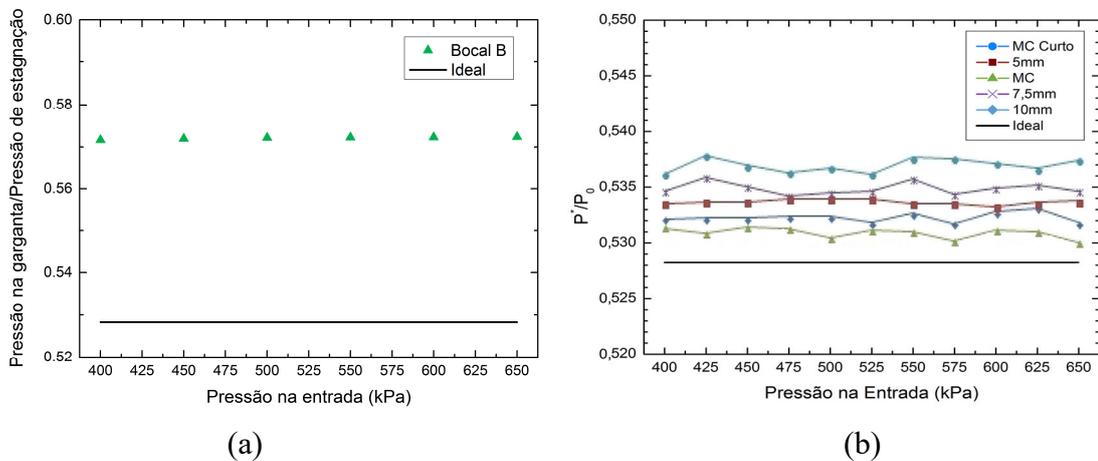


Figura 4.9– Comportamento da razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função da pressão de entrada no bocal. (a) Comparação entre os resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado)²

Na Figura 4.9 (a) observa-se que a relação entre pressão na garganta e a pressão de estagnação é constante. A diferença entre os valores numéricos e o isentrópico ocorre porque no centro geométrico da garganta o escoamento ainda não é sônico, uma vez que a linha sônica é levemente curvada e não reta conforme utilizada no modelo teórico [Anderson, 2007]. Aliado a isso, nas proximidades dessa região os gradientes de algumas propriedades termodinâmicas são muito intensos, justificando essa diferença. Na Figura 4.9 (b), são apresentados os resultados de Neckel, 2014 para comparação com os resultados numéricos. A diferença entre os valores numéricos e experimentais se dá pela incerteza na posição dos sensores, uma vez que a distância entre o “local sônico” e o centro geométrico do bocal é da

² O gráfico original encontra-se no ANEXO I.

ordem de $d \approx 0.1 \text{ mm}$. Os resultados numéricos apresentam um valor médio $\overline{p^G/p_0} = 0.57210$ e um desvio padrão $\sigma = 2.72 \times 10^{-4}$ que indica uma boa aproximação ao comportamento teórico. A comparação dos resultados numéricos com o previsto no modelo teórico indica que esses dados possuem um erro absoluto $\varepsilon = 8.3 \%$, que pode ser considerado um erro muito pequeno, visto que nessa região os gradientes de pressão são muito intensos. Na seção 5.3 são apresentados resultados no local em que o escoamento é sônico, onde estes resultados estão em maior concordância com o modelo isentrópico.

O comportamento da razão entre a temperatura na garganta T^G e a temperatura de estagnação em função da pressão de entrada no bocal é apresentado na próxima figura.

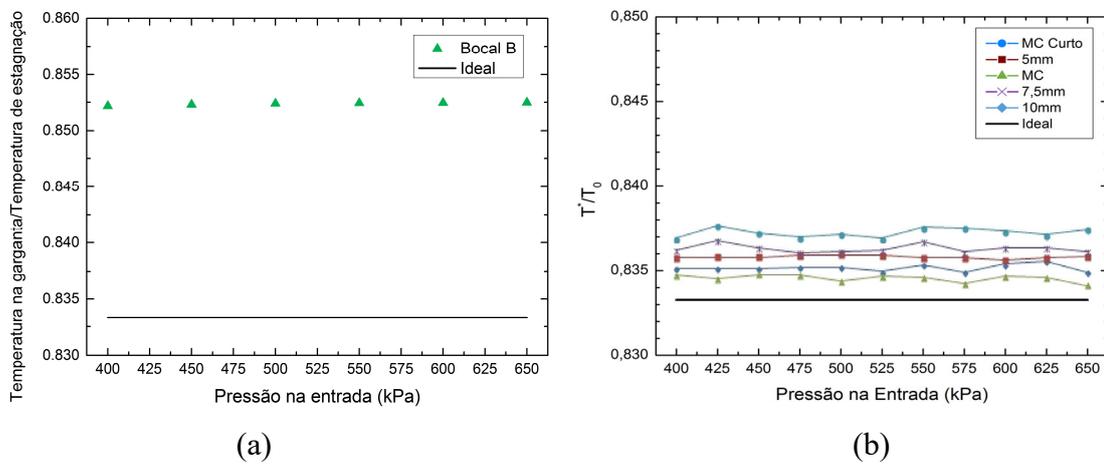


Figura 4.10– Comportamento da razão entre a temperatura na garganta e a temperatura de estagnação em função da pressão de entrada no bocal. (a) Comparação dos resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado)³

Na Figura 4.10 (a) observa-se que a relação entre temperatura na garganta e a temperatura de estagnação é constante conforme previsto na teoria isentrópica. Na Figura 4.10 (b), são apresentados os resultados de Neckel, 2014 para comparação com os resultados numéricos. As diferenças entre os valores numéricos, experimental e isentrópico ocorrem pelas mesmas razões citadas acima. Os resultados numéricos apresentam um valor médio $\overline{T^G/T_0} = 0.85237$ e um desvio padrão $\sigma = 1.16 \times 10^{-4}$ que indica uma boa aproximação ao comportamento teórico. A comparação com o previsto no modelo teórico indica que esses

³ O gráfico original encontra-se no ANEXO I.

dados possuem um erro absoluto $\varepsilon \approx 2.3\%$ que é um erro baixo, e que se torna insignificante quando se leva em conta os altos gradientes de temperatura dessa região.

A próxima figura apresenta a razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função do número de Mach na garganta do bocal.

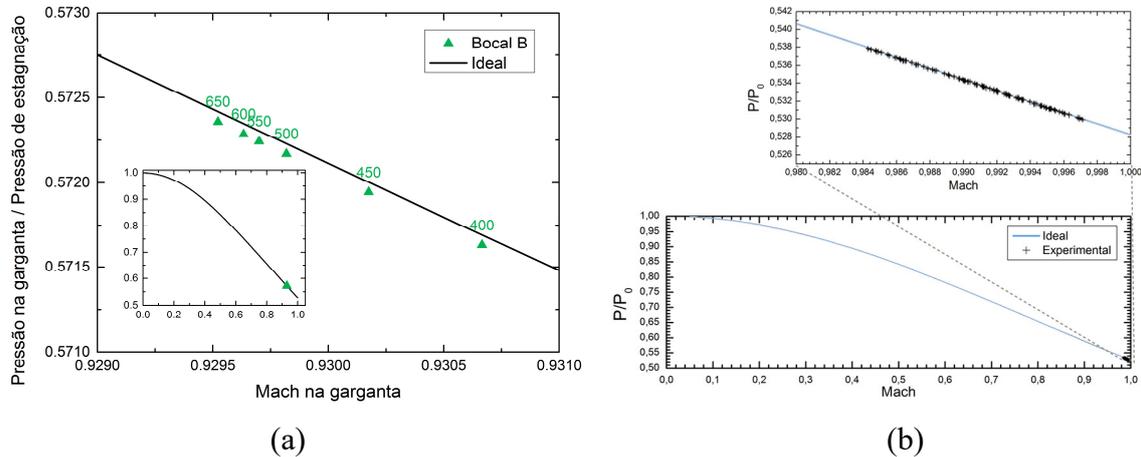


Figura 4.11– Comportamento da razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função do número de Mach na garganta do bocal. (a) Comparação entre os resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado)⁴

Na Figura 4.11 (a) observa-se que o número de Mach na garganta ainda não é sônico, contrariando a teoria isentrópica. Entretanto, conforme já discutido sabe-se que essa linha sônica na garganta não é uma linha reta e sim possui uma curvatura, o que justifica esse valor subsônico encontrado. Os rótulos inseridos acima dos pontos indicam as pressões de entrada (em kPa) das simulações que resultaram nesses pontos. Nota-se que o aumento da pressão de entrada faz com que o número de Mach no centro geométrico da garganta diminua. Na inserção pode-se visualizar o comportamento global da previsão teórica em comparação com os resultados numéricos. Na Figura 4.11 (b) Neckel, 2014 mostra os resultados de seus cinco bocais ensaiados, entretanto, na Figura 4.11 (a) são mostrados somente os resultados do bocal simulado B. As diferenças entre os valores numéricos, experimental e isentrópico ocorrem pelas mesmas razões já citadas. Os resultados numéricos apresentam um valor médio $\overline{p^G/p_0} = 0.57210$ e um desvio padrão $\sigma = 2.72 \times 10^{-4}$, que indica uma pequena dispersão nos pontos. A comparação com o previsto no modelo teórico indica que para um mesmo

⁴ O gráfico original encontra-se no ANEXO I.

número de Mach na garganta os resultados de p^G/p_0 apresentam um erro absoluto $\varepsilon \approx 0.002\%$, que indica uma boa aproximação entre os valores numéricos e teóricos.

Na figura abaixo mostra-se a taxa de massa que atravessa a garganta em função da pressão de entrada.

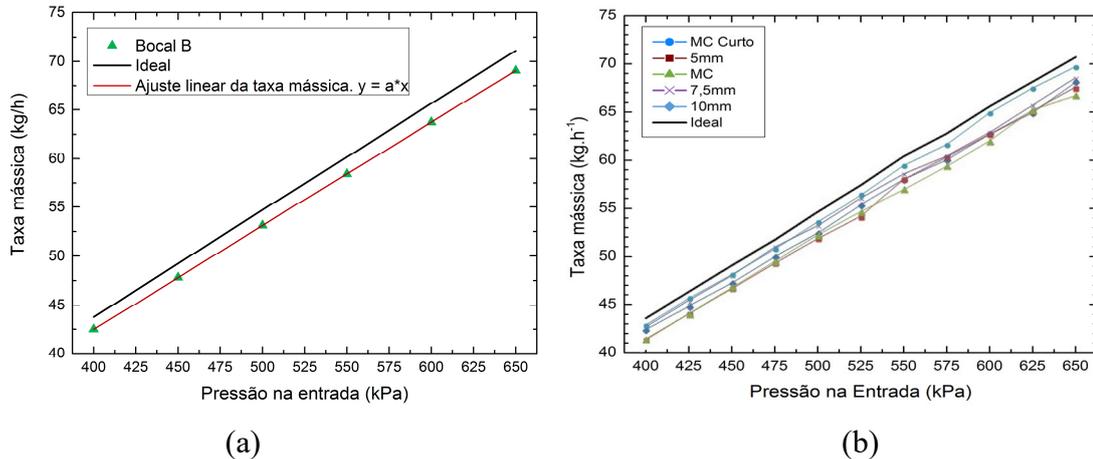


Figura 4.12– Comportamento da taxa mássica em função da pressão de entrada no bocal.

(a) Comparação entre os resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado)⁵

Na Figura 4.12 (a) observa-se que a taxa de massa que atravessa a garganta aumenta linearmente com a pressão de entrada. O ajuste linear dos valores numéricos retorna um coeficiente angular $a = 0.10618$ com um erro padrão $S = 2.63 \times 10^{-5}$ e o coeficiente de correlação r e o coeficiente de determinação ajustado R_a^2 são unitários. Mesmo com baixo erro padrão e com uma curva de alta representatividade o coeficiente angular determinado possui um erro absoluto $\varepsilon \approx 3\%$ em relação a coeficiente angular da reta teórica. Na figura mostra-se ainda a previsão do modelo isentrópico para essa taxa de massa em função da pressão de entrada. Já na Figura 4.12 (b), são apresentados os resultados de Neckel, 2014 para comparação com os resultados numéricos. As diferenças entre os valores numéricos, experimental e isentrópico ocorrem pelas razões já citadas. Na região do gráfico de maior afastamento entre as retas numérica e teórica, a numérica apresenta um erro absoluto $\varepsilon \approx 3\%$ em comparação com a reta teórica, o que indica uma boa aproximação entre o modelo numérico e o teórico na faixa de pressões de entrada estudadas.

⁵ O gráfico original encontra-se no ANEXO I.

4.9 Conclusões parciais

Neste capítulo foram descritos os procedimentos utilizados para as montagens das simulações. Apresentou-se os quatro bocais convergente-divergente estudados e suas dimensões, juntamente com o domínio computacional criado. Definiu-se as condições das variáveis de projetos, as condições de contorno e inicial e as propriedades físicas do escoamento. Para a discretização do domínio computacional utilizou-se os geradores de malhas nativos do Star-CCM+. Com o intuito de diminuir o número de volumes de discretização utilizou-se diferentes regiões de refino da malha. Já para a determinação da independência da solução numérica da discretização do domínio computacional utilizou-se o método do índice de convergência de malha (GCI - “*Grid convergence index*”), onde determinou-se que o parâmetro de observação é independente do refino da malha e convergiu para o seu valor assintótico com uma incerteza de 0.02% . Para a validação do modelo numérico comparou-se os resultados obtidos com o modelo isentrópico e com resultados experimentais. A baixa dispersão nos resultados comparados indica que tanto o comportamento da previsão teórica quanto os resultados experimentais são bem representados pelo modelo numérico. Somado a isso, os baixos erros encontrados mostram que além de uma boa precisão, os resultados possuem uma boa acurácia, indicando com isso que os resultados do modelo numérico estão em concordância com o medido experimentalmente e com a previsão teórica.

5 RESULTADOS

Neste capítulo, apresentam-se os resultados numéricos obtidos nas simulações dos bocais experimentados por Neckel, 2014 e Neckel e Godinho, 2015. Estes resultados foram obtidos utilizando a modelagem e condições apresentadas nos capítulos anteriores. Inicialmente, mostram-se as influências do aumento da pressão do fluido de trabalho na admissão dos bocais investigados e posteriormente comparam-se os efeitos que as diferentes geometrias causam no escoamento, considerando-se uma mesma pressão de entrada. Por fim, apresenta-se a comparação dos resultados numéricos com os experimentos de Neckel e com o previsto no modelo teórico.

Os comportamentos das propriedades de interesse no interior dos bocais são mostrados no Plano XY [$x, y, z=0$], Plano XZ [$x, y=0, z$] e na Linha X [$x, y=0, z=0$]. Esses planos e a linha são definidos com base no sistema de coordenadas definido na Figura 4.2 e são apresentados na figura a seguir.

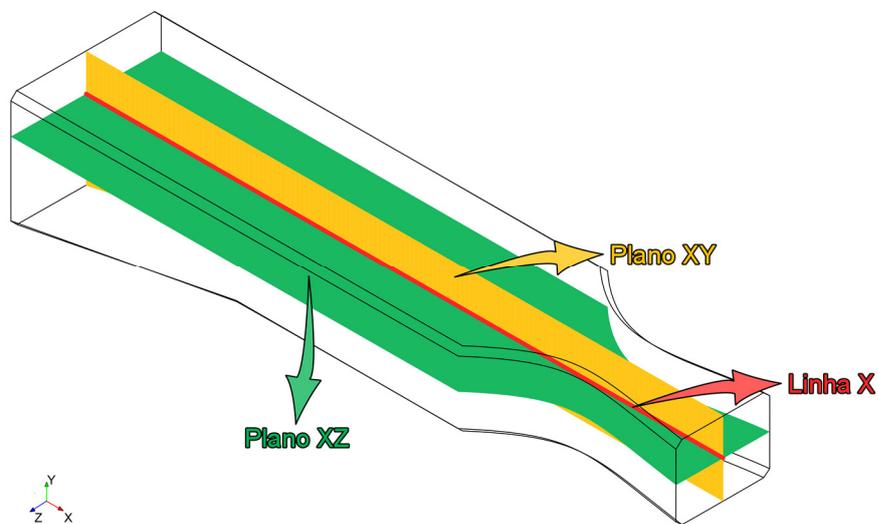


Figura 5.1 – Representação dos Planos XY e XZ e da Linha X no interior dos bocais

5.1 Influência da variação da pressão de admissão do Bocal A no escoamento

Os efeitos da variação da pressão do fluido de trabalho na entrada do bocal A (Figura 4.1) são apresentados nesta seção. Na figura a seguir mostram-se o comportamento do número

de Mach, da pressão, da temperatura e da massa específica do escoamento, apresentados nas colunas, para as diferentes pressões do fluido de trabalho na entrada do bocal, agrupados em linhas.

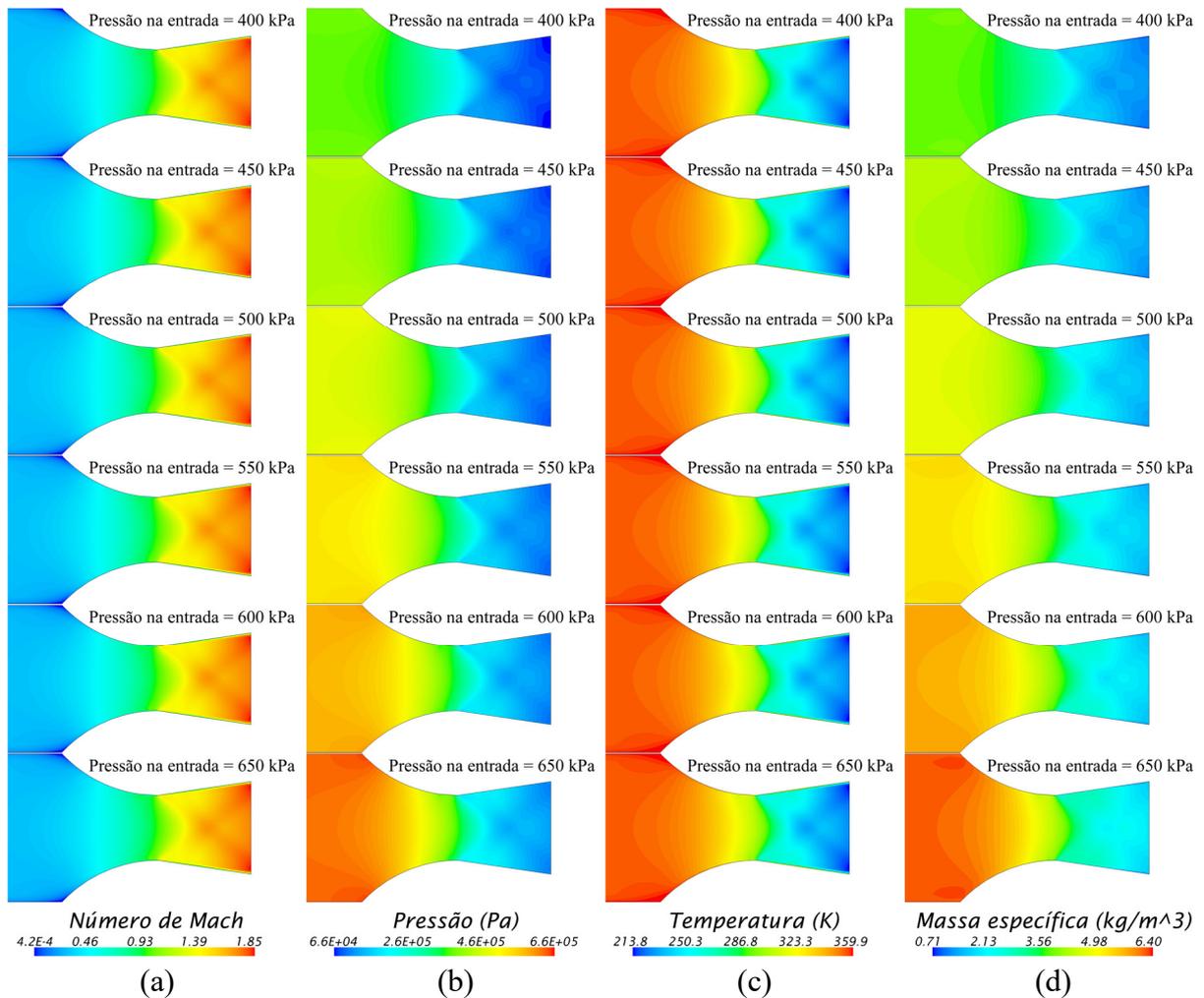


Figura 5.2 – Comportamento de propriedades do escoamento no interior do bocal A em função da pressão de entrada. Plano XZ [$x, y=0, z$]. (a) Número de Mach. (b) Pressão. (c) Temperatura. (d) Massa específica

Na Figura 5.2 (a) observa-se que o número de Mach não é afetado pela variação da pressão na entrada do bocal. Esse comportamento é previsto pela teoria isentrópica, que diz que o número de Mach no interior do bocal depende somente da razão entre suas áreas do local de interesse e da garganta. Na Figura 5.2 (b) nota-se que a variação na pressão de entrada afeta completamente a intensidade da pressão no interior do bocal. Este comportamento também é previsto pela teoria isentrópica, que diz que a pressão no interior do bocal depende da pressão de estagnação, que é diretamente ligada com a pressão na entrada

do bocal, definidas de acordo com a Tabela 4.4. Na Figura 5.2 (c) observa-se que os efeitos da variação na pressão de entrada do bocal não influenciam o comportamento da temperatura ao longo do escoamento, o que faz todo sentido, pois segundo a teoria a temperatura independe da pressão de entrada. Na Figura 5.2 (d) mostra-se que a massa específica é afetada pela alteração da pressão na entrada do bocal, o que não é diretamente explicitado pela teoria isentrópica, que, entretanto, expressa esse comportamento pela relação das massas específicas no interior do bocal e em sua entrada. Essa relação é dada por $p = \rho RT$, e como a temperatura não apresenta variação em função da pressão, percebe-se que a massa específica é proporcional à pressão.

O comportamento do número de Mach, da pressão, temperatura e massa específica no Plano XY em consequência da variação da pressão na entrada do bocal é mostrado na figura abaixo.

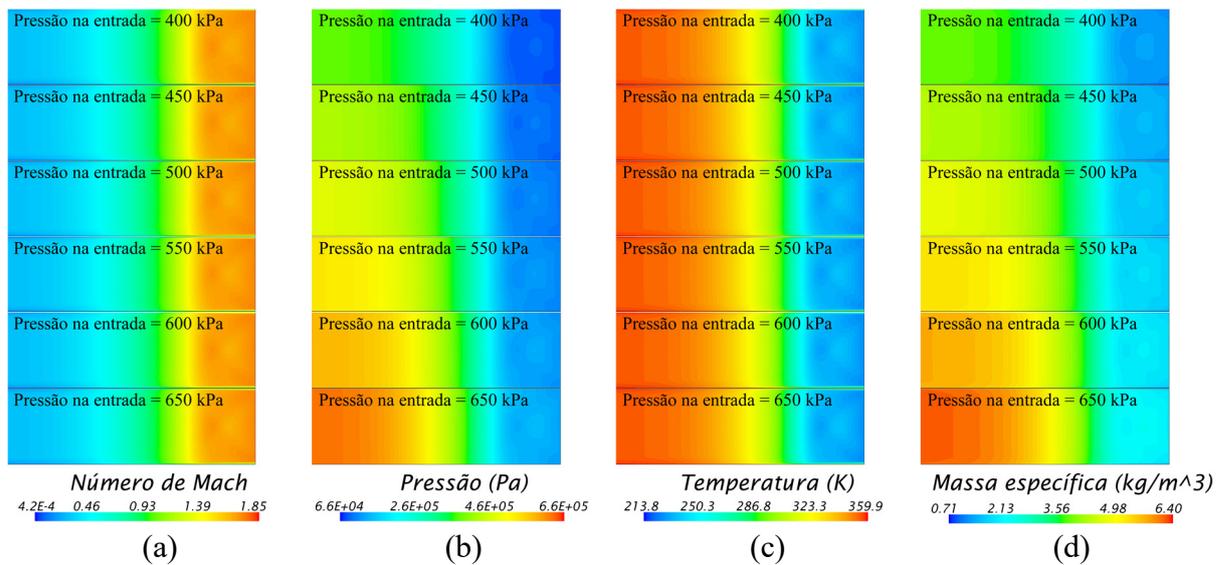


Figura 5.3 – Comportamento de propriedades do escoamento no interior do bocal A em função da pressão de entrada. Plano XY $[x, y, z=0]$. (a) Número de Mach. (b) Pressão. (c) Temperatura. (d) Massa específica

Observa-se o mesmo comportamento apresentado na Figura 5.2 em relação à pressão na entrada do bocal, ou seja, a independência do número de Mach e da temperatura em relação à pressão na entrada e a dependência da pressão e da massa específica ao longo do escoamento em relação à pressão na entrada do bocal, mesmo que a garganta não esteja contida nesse plano.

Na próxima figura mostra-se o comportamento do número de Mach na Linha X [$x, y=0, z=0$] que se estende ao longo do bocal para as diferentes pressões de entrada simuladas.

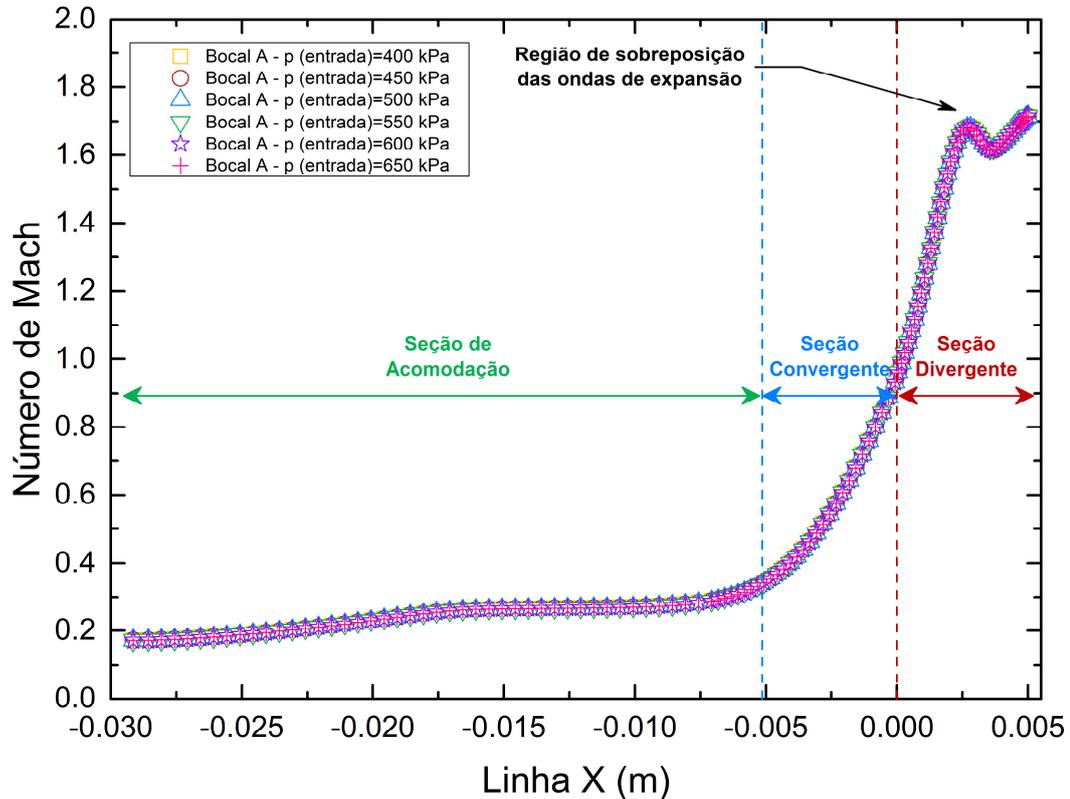


Figura 5.4– Influência da pressão na entrada do bocal sobre o número de Mach do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X [$x, y=0, z=0$]

Observa-se claramente a independência do número de Mach em relação à pressão na entrada do bocal. Ele é baixo na entrada do bocal (posição -0.029 m), e sofre um leve acréscimo devido ao afunilamento do bocal na entrada, tornando-se constante após isso. Nas proximidades da seção convergente, o número de Mach aumenta rapidamente, ficando um pouco abaixo da unidade na garganta, e aumenta sensivelmente na seção divergente. O ponto de máximo local que aparece na seção divergente é devido às ondas de expansão de Prandt-Meyer geradas na garganta. Logo após a esse máximo o escoamento perde velocidade, pois não há influência das ondas de expansão.

Apresenta-se na próxima figura o comportamento da pressão na Linha X ao longo do escoamento.

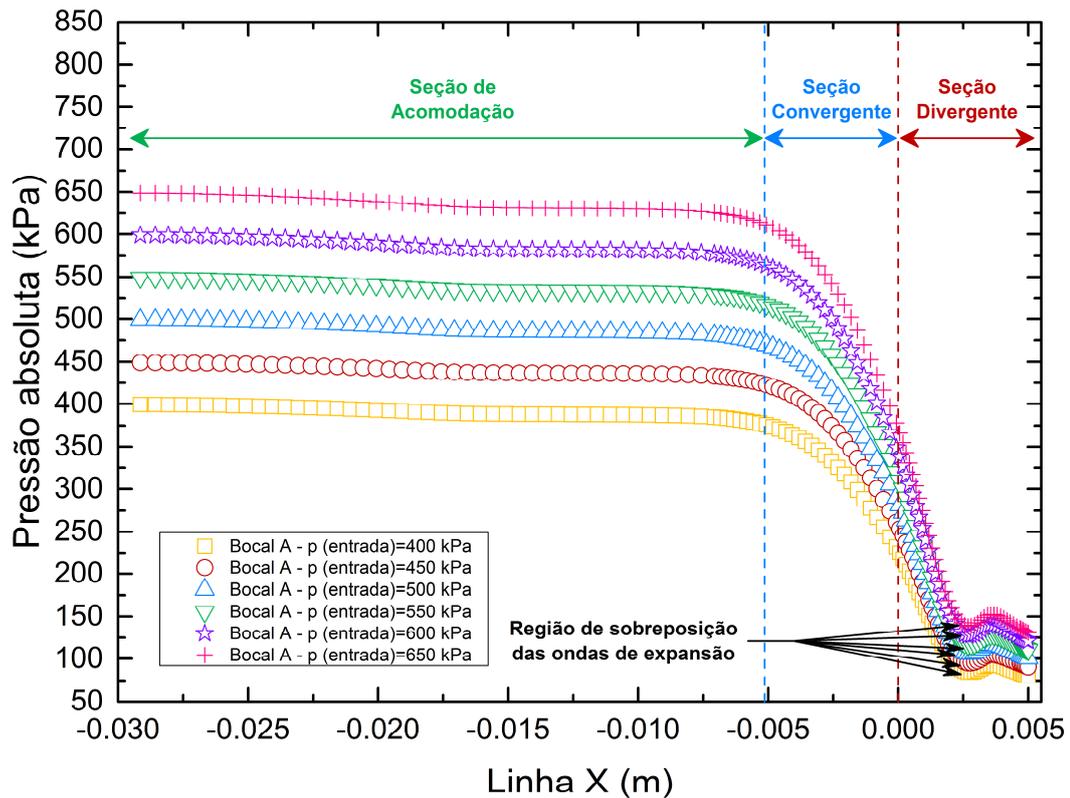


Figura 5.5 – Influência da pressão na entrada do bocal sobre a pressão do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X $[x, y=0, z=0]$

A pressão do fluido não sofre modificações sensíveis ao longo da seção de acomodação, sendo que verifica-se uma pequena diminuição próxima da entrada do bocal. A pressão começa a diminuir sua intensidade nas proximidades da seção convergente, onde um gradiente começa a aparecer. A onda de expansão gerada na garganta age na pressão de forma a diminuí-la localmente, mas volta a aumentar levemente na sequência, ajustando-se ao comportamento previsto no modelo isentrópico.

Na figura a seguir mostra-se o comportamento da temperatura no bocal ao longo da Linha X $[x, y=0, z=0]$.

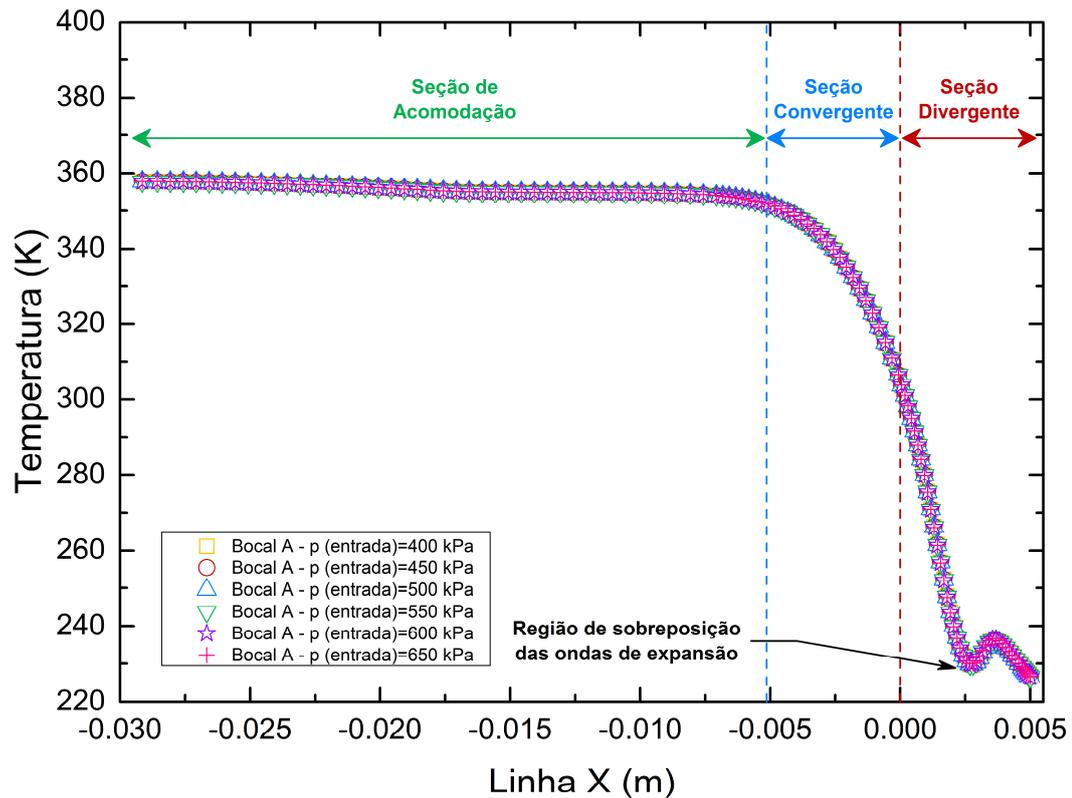


Figura 5.6– Influência da pressão na entrada do bocal sobre a temperatura do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X [$x, y=0, z=0$]

Assim como o número de Mach, a temperatura não sofre efeito pelo aumento na pressão de entrada do bocal e por isso as curvas de temperatura ficam sobrepostas. O gradiente de temperatura é intenso nas proximidades da garganta, onde ela sofre uma diminuição abrupta. Na seção divergente, os efeitos das ondas de expansão de Prandtl-Meyer também são perceptíveis e agem no sentido de diminuir a temperatura ainda mais. Após esse efeito de interferência, a temperatura aumenta um pouco para ajustar-se ao escoamento previsto teoricamente e retorna a diminuir até a saída do bocal.

Na figura a seguir mostra-se o comportamento da massa específica no interior do bocal ao longo da Linha X.

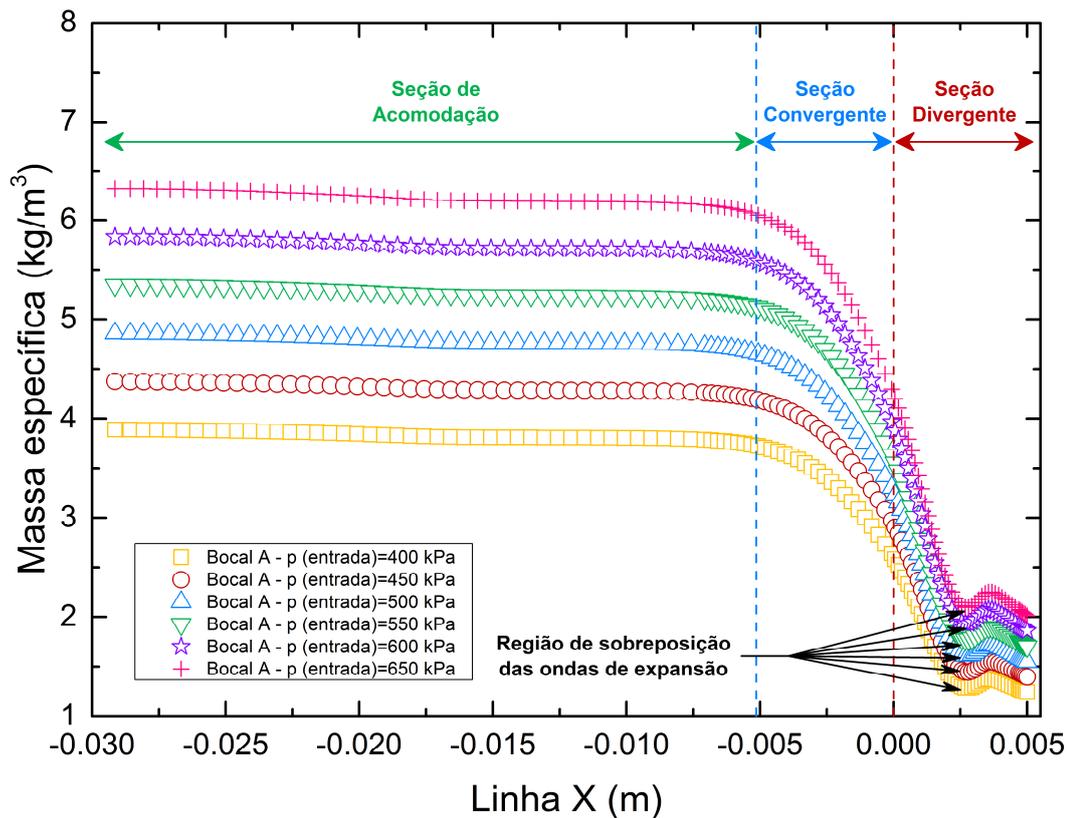


Figura 5.7 – Influência da pressão na entrada do bocal sobre a massa específica ao longo da direção principal do escoamento. Linha X [$x, y=0, z=0$]

Assim como acontece com a pressão no interior do bocal, a massa específica também sofre os efeitos de mudanças da pressão na entrada do bocal, aumentando sua intensidade com o aumento da pressão na entrada do bocal. Observa-se que a massa específica é praticamente constante ao longo da zona de acomodação do escoamento para uma mesma pressão na entrada do domínio. Ela varia abruptamente nas proximidades da garganta, e é influenciada pelas ondas de expansão na seção divergente.

5.2 Comportamento do escoamento nos diferentes bocais estudados

Nesta seção apresentam-se os efeitos sobre o escoamento causados pela mudança na geometria da seção divergente dos bocais propostos na Figura 4.3, que são rerepresentados a seguir para facilitar o acompanhamento das análises.

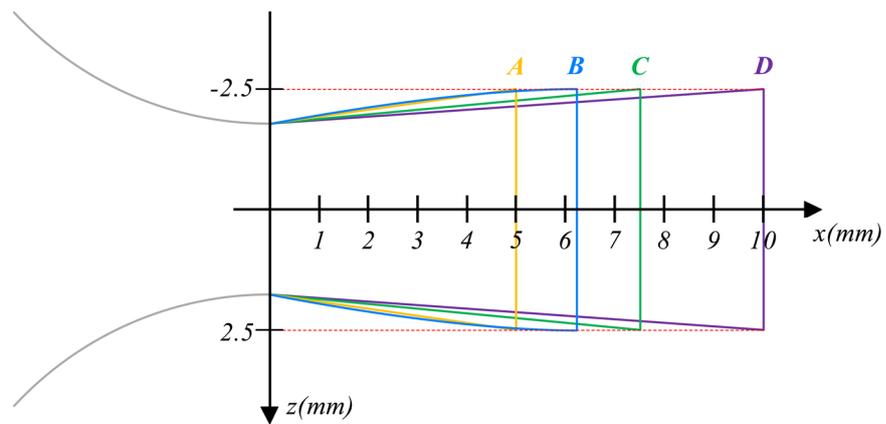


Figura 5.8 – Perfil das seções divergentes apresentadas na Figura 4.3

Na figura a seguir são apresentados os comportamentos do número de Mach, da pressão, da temperatura e da massa específica do escoamento nas geometrias estudadas para a pressão do fluido de trabalho na entrada do bocal de 650 kPa.

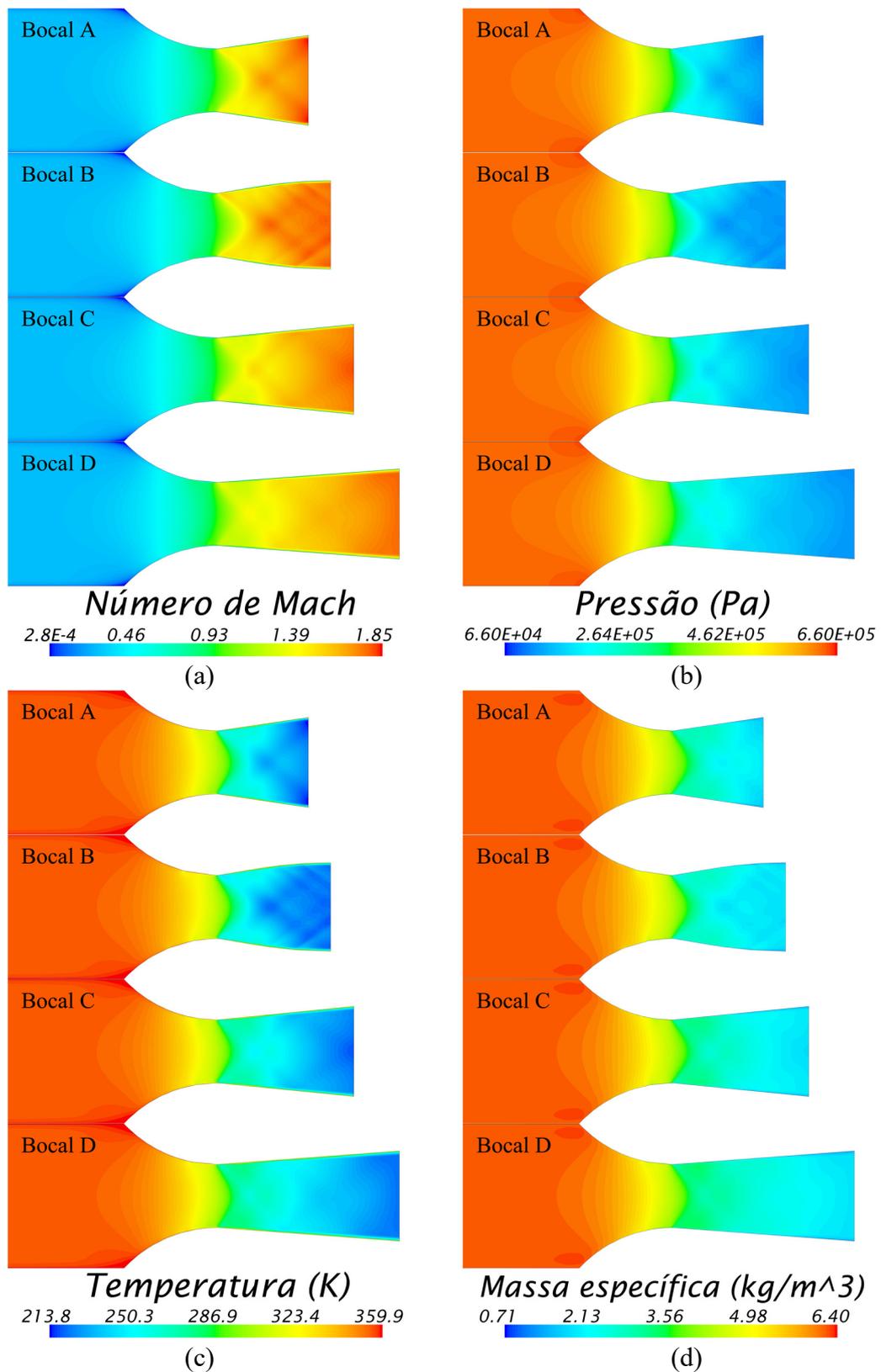


Figura 5.9– Comportamento de propriedades do escoamento na seção divergente do bocal em função da pressão de entrada para as diferentes geometrias estudadas. Plano XZ [$x, y=0, z$].

(a) Número de Mach. (b) Pressão. (c) Temperatura. (d) Massa específica

Observa-se na Figura 5.9 que as propriedades do escoamento na seção de acomodação e na seção convergente não se alteram de uma geometria para outra. Na seção divergente observa-se que o comportamento das ondas de expansão de Prandtl-Meyer varia conforme a geometria. No bocal A, as ondas de expansão são geradas na garganta e aproximadamente na metade da seção divergente se interferem mutuamente. Após a interferência elas se dirigem para a saída do domínio computacional.

No bocal B várias ondas de expansão são geradas, não apenas duas como no bocal A. Isto ocorre devido à variação do ângulo de abertura da seção divergente. Nesse bocal observam-se várias regiões onde essas ondas de expansão se interferem mutuamente.

No bocal C as ondas de expansão se interferem duas vezes, pois após a primeira interferência essas ondas são refletidas ao interagirem com a camada limite e se interferem novamente próximo à saída do domínio computacional.

No bocal D além das duas interferências que já ocorriam no bocal C, também aparece uma segunda reflexão das ondas de expansão.

Na figura a seguir mostra-se o comportamento do número de Mach no interior dos quatro bocais estudados para as pressões do fluido de trabalho na entrada de 400 kPa, 500 kPa e 650 kPa.

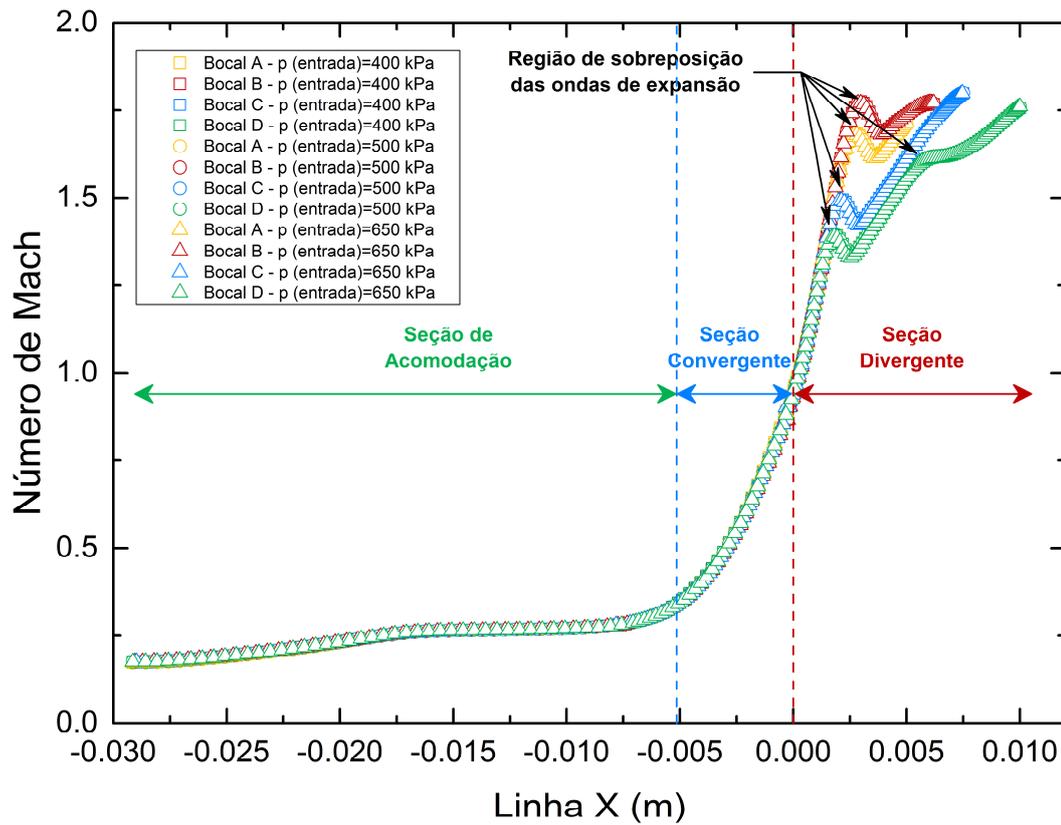


Figura 5.10– Influência da geometria dos bocais sobre o número de Mach do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X [$x, y=0, z=0$]

Observa-se que a variação da pressão de entrada em uma mesma geometria não altera o número de Mach, exceto para a seção divergente.

Na zona divergente o bocal B é o que apresenta os maiores números de Mach, enquanto que o bocal D apresenta os menores. Entretanto, eles apresentam praticamente os mesmos números de Mach na saída, pois suas áreas de saídas são as mesmas.

Na figura a seguir mostra-se o comportamento da pressão no interior dos quatro bocais estudados para as três pressões na entrada.

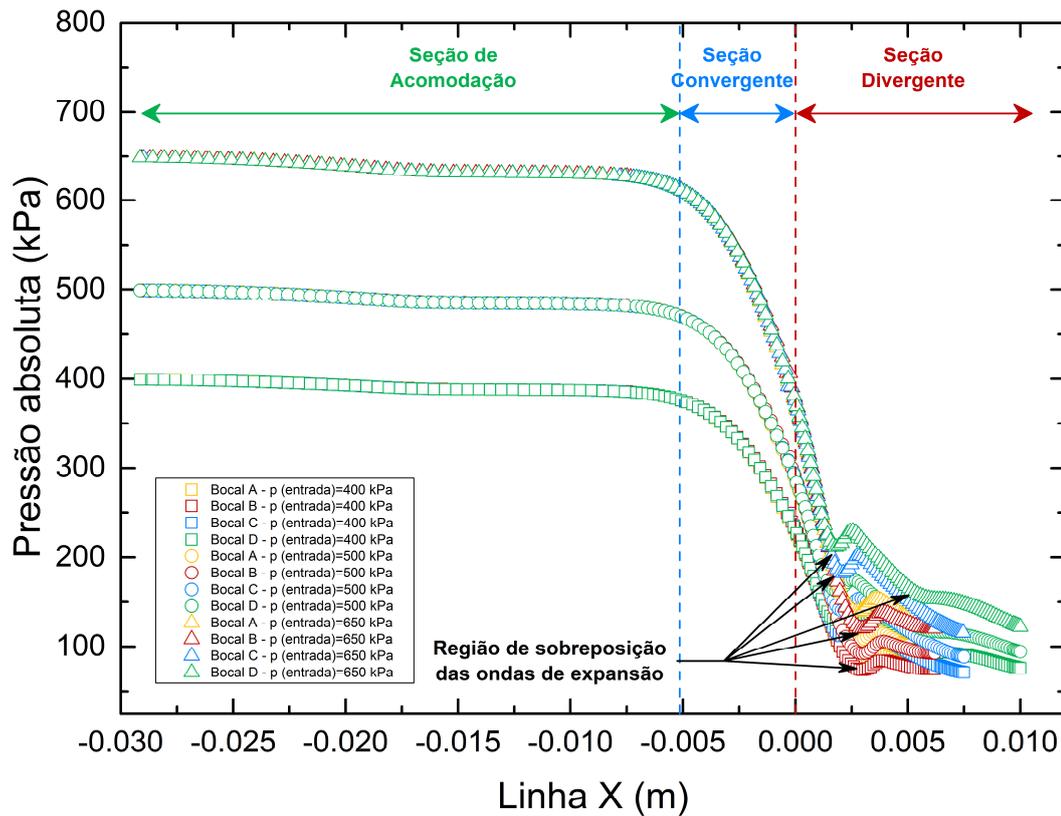


Figura 5.11 – Influência da geometria dos bocais sobre a pressão do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X [$x, y=0, z=0$]

Observa-se que as curvas de pressão se sobrepõem na região anterior à garganta do bocal, para uma mesma pressão de entrada, o que se altera na região divergente, onde as curvas se separam. O bocal B apresenta os menores valores da pressão nessa região, enquanto que o bocal D apresenta os maiores valores.

Na figura a seguir mostra-se o comportamento da temperatura no interior dos quatro bocais estudados para as três pressões na entrada.

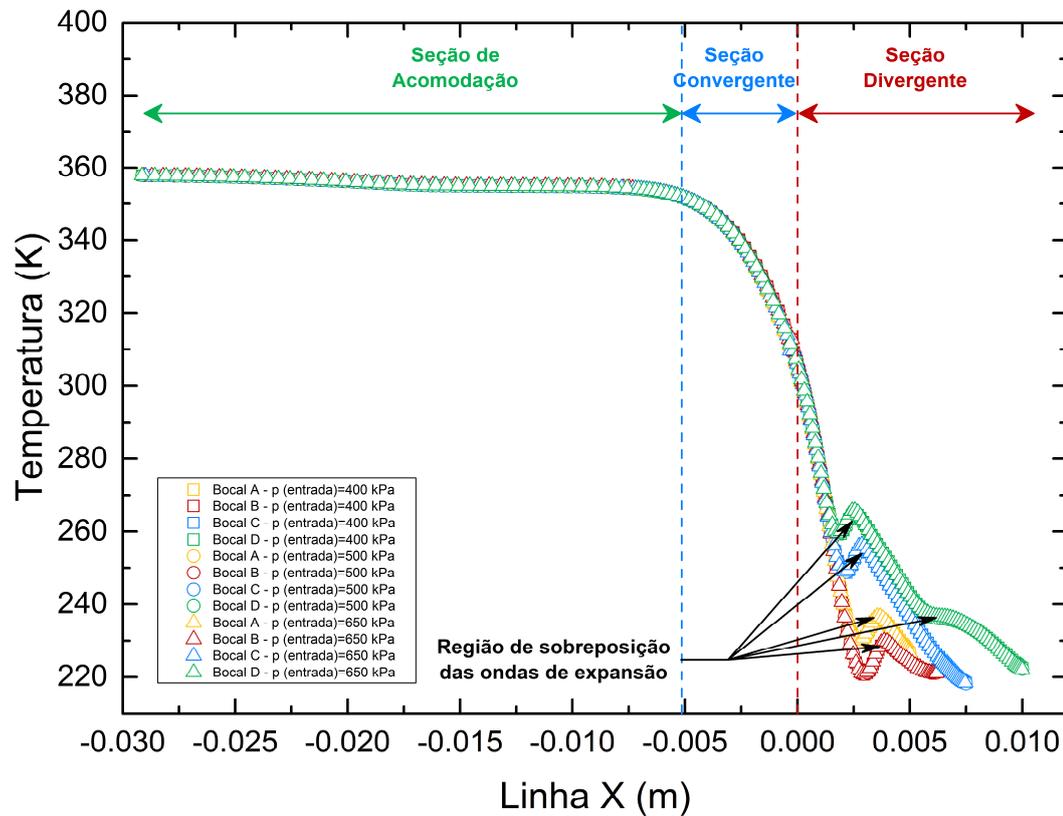


Figura 5.12– Influência da geometria dos bocais sobre a temperatura do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X [$x, y=0, z=0$]

A temperatura somente sofre variações na seção divergente, onde as curvas se separam. O bocal B apresenta os menores valores de temperatura naquela região, enquanto que o bocal D apresenta os maiores valores. Já nas saídas dos bocais, as temperaturas das quatro geometrias convergem para valores muito próximos.

Na figura a seguir mostra-se o comportamento da massa específica no interior dos quatro bocais estudados para as três pressões de entrada.

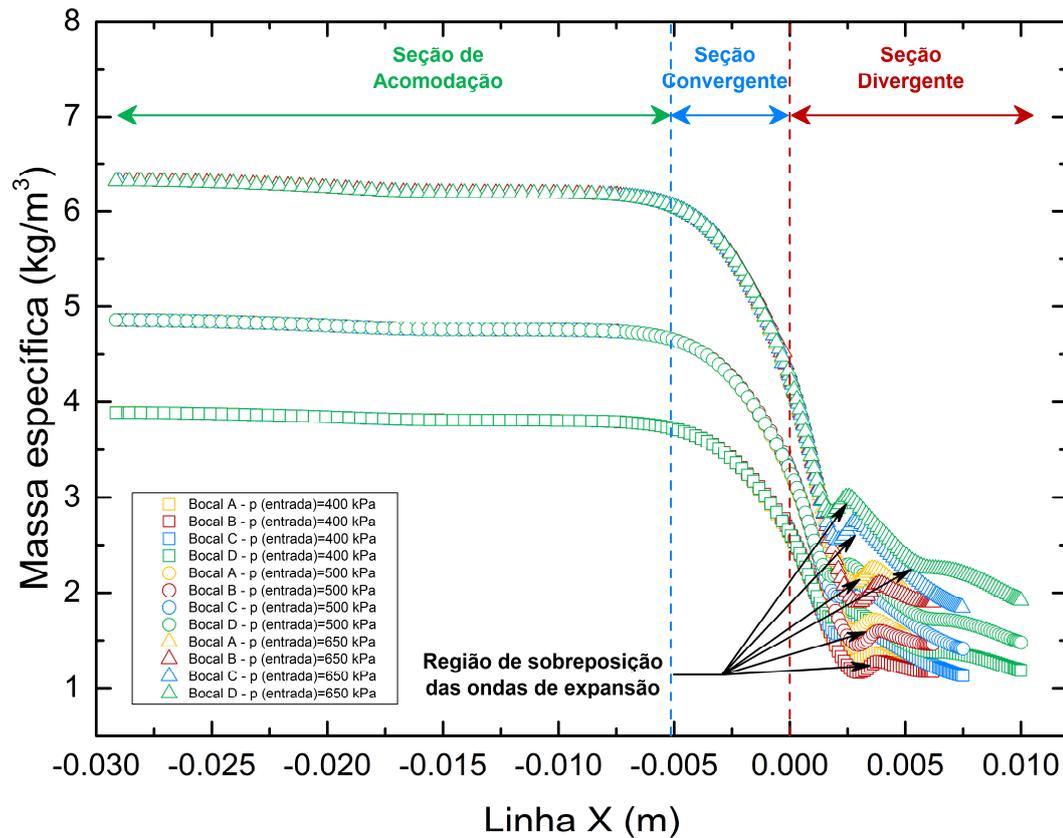


Figura 5.13 – Influência da geometria dos bocais sobre a massa específica do escoamento ao longo da direção principal do escoamento. Linha X [$x, y=0, z=0$]

Observa-se que as curvas se sobrepõem na zona de acomodação, convergente e na garganta para uma mesma pressão. Para uma mesma geometria, na zona divergente quanto menor a pressão na entrada menor a massa específica local. Para uma mesma pressão de entrada o bocal B apresenta os menores valores de massa específica e o bocal D os maiores valores.

5.3 Comparação dos resultados numéricos com o modelo isentrópico e com resultados experimentais

Nesta seção apresenta-se o comparativo dos resultados numéricos produzidos no presente trabalho com aqueles previstos pelo modelo isentrópico, seguido dos resultados experimentais de Neckel, 2014.

O modelo isentrópico prediz um valor unitário para o número de Mach na garganta do bocal, entretanto sabe-se que a linha sônica na garganta é curvada [Cengel e Cimbala, 2013].

Na tabela abaixo mostra-se o deslocamento máximo Δx (mm) dessa linha sônica em relação à garganta dos quatro bocais ao longo da Linha X. Esse deslocamento é obtido conforme mostrado na Figura 5.14, onde o valor de Δx é dado pela Tabela 5.1.

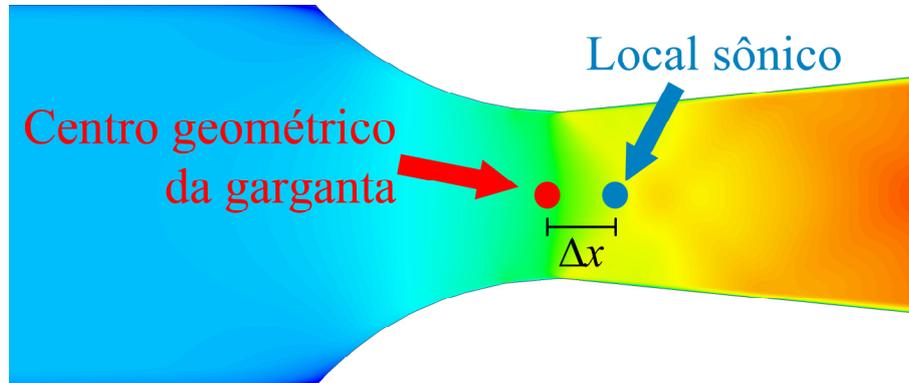


Figura 5.14– Representação do máximo deslocamento da linha sônica em relação ao centro geométrico da garganta dos bocais

Tabela 5.1– Deslocamento máximo da linha sônica ($M=1$) no eixo x em relação ao centro geométrico da garganta do bocal

Bocal A						
Pressão na entrada (kPa)	400	450	500	550	600	650
Δx (mm)	0.223138	0.225587	0.227335	0.228370	0.229274	0.230301
Bocal B						
Pressão na entrada (kPa)	400	450	500	550	600	650
Δx (mm)	0.275784	0.277504	0.278579	0.278805	0.279026	0.279523
Bocal C						
Pressão na entrada (kPa)	400	450	500	550	600	650
Δx (mm)	0.261666	0.262990	0.263869	0.263928	0.263881	0.264128
Bocal D						
Pressão na entrada (kPa)	400	450	500	550	600	650
Δx (mm)	0.252801	0.254254	0.255210	0.255565	0.256020	0.256619

Pode-se observar que o máximo deslocamento ocorre para o bocal B com uma pressão de entrada de 650 kPa, sendo inferior à 0.3 mm. Esse deslocamento da linha sônica é muito pequeno, e torna-se difícil de ser captado experimentalmente, bem como seus efeitos.

As figuras a seguir mostram os resultados numéricos obtidos no presente trabalho para o centro geométrico da garganta dos bocais juntamente com aqueles obtidos no local onde o número de Mach é unitário, para a comparação com o modelo teórico e com o obtido experimentalmente.

A nomenclatura para referenciar os bocais utilizada nesse estudo é diferente da utilizada por Neckel. Para facilitar a comparação dos resultados obtidos nesse estudo com aqueles obtidos por Neckel mostra-se a seguir uma tabela de correspondência dessas nomenclaturas.

Tabela 5.2– Relação entre os rótulos utilizados nesse estudo e aqueles utilizados por Neckel para nomear os diferentes bocais

Nomenclatura utilizada nesse estudo	Nomenclatura utilizada por Neckel
Bocal A	5 mm
Bocal B	MC
Bocal C	7.5 mm
Bocal D	10 mm

Nas figuras a seguir mostra-se o comportamento da razão entre a pressão local e a pressão de estagnação em função da pressão de admissão. Na Figura 5.15 (a) mostra-se esse comportamento em duas regiões distintas: no centro geométrico da garganta do bocal e no local onde o número de Mach é unitário (região sônica) na Linha X [$x, y, z=0$]. O valor da componente x é mostrado na Tabela 5.1.

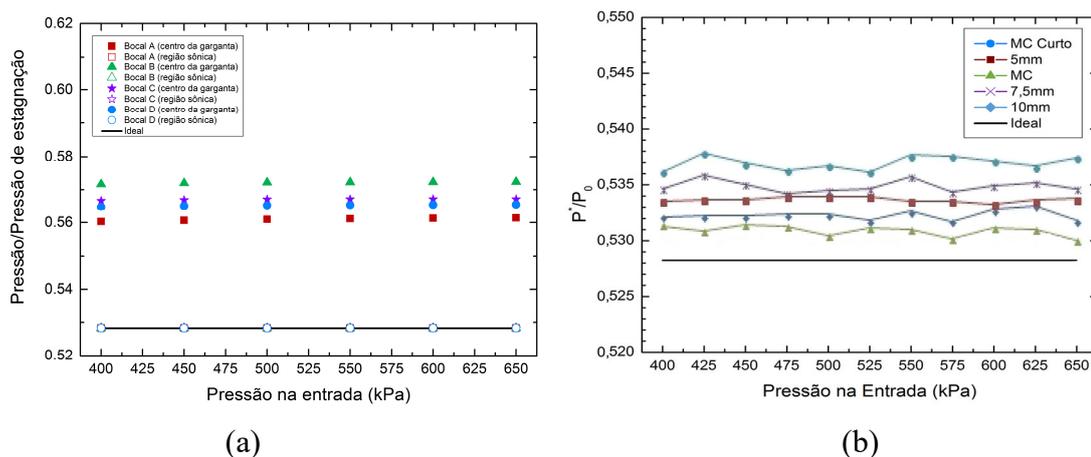


Figura 5.15– Razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função da pressão de entrada no bocal. (a) Comparação entre os resultados numéricos com a teoria isentrópica (ideal). (b) Resultados experimentais obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado)⁶

A curva ideal prevê o comportamento das propriedades do escoamento no local onde ele é sônico. Já o número de Mach no centro geométrico da garganta é um pouco inferior à unidade. Este fato, aliado aos grandes gradientes do escoamento nessa região, explica o afastamento dos resultados obtidos no centro geométrico da garganta da previsão teórica. Entretanto, mesmo que exista uma separação entre resultados numéricos e a curva teórica, o comportamento deles é o mesmo, ou seja constante. Na Figura 5.15 (b) são apresentados os resultados de Neckel, 2014, para comparação com os resultados numéricos. Observa-se que os resultados obtidos na região sônica estão em maior concordância com a previsão teórica, quando comparado com os resultados obtidos no centro geométrico da garganta e com os obtidos por Neckel. Observa-se que os resultados obtidos no centro geométrico da garganta e os obtidos por Neckel se afastam levemente da curva ideal. Este afastamento indica que o número de Mach no local onde foram tomadas as medidas não é unitário, o que é o caso dos resultados obtidos na região sônica.

Na tabela a seguir mostram-se os parâmetros de ajuste das curvas numéricas obtidas na Figura 5.15 (a) em relação à curva ideal.

⁶ O gráfico original encontra-se no ANEXO I.

Tabela 5.3– Parâmetros de ajuste dos resultados numéricos da Figura 5.15 (a)

	Centro geométrico da garganta			Região sônica		
	$\overline{p^G}/p_0$	σ^G	ε^G (%)	$\overline{p^*}/p_0$	σ^*	ε^* (%)
Bocal A	0.56095	4.18E-04	6.184	0.52830	1.22E-16	0.0038
Bocal B	0.57210	2.72E-04	8.296	0.52828	2.13E-06	0.0003
Bocal C	0.56702	2.00E-04	7.334	0.52830	8.20E-07	0.0040
Bocal D	0.56528	2.80E-04	7.004	0.52830	8.11E-07	0.0042

Na tabela o índice sobrescrito “G” indica o centro geométrico da garganta e o sobrescrito “*” indica a região sônica. A barra sobre as variáveis indica que foram tomados os valores médios dos resultados, σ indica o desvio padrão destes resultados e ε é o erro absoluto dos valores médios em relação ao valor ideal. Os desvios padrão apresentados para todas as médias indicam que os resultados representam muito bem uma curva constante. Os erros apresentados mostram que os resultados estão em concordância com o modelo teórico, mesmo na garganta onde se encontrou erros menores que 10 %.

O comportamento da razão entre a temperatura e a temperatura de estagnação em função da pressão de entrada do bocal é apresentado na próxima figura.

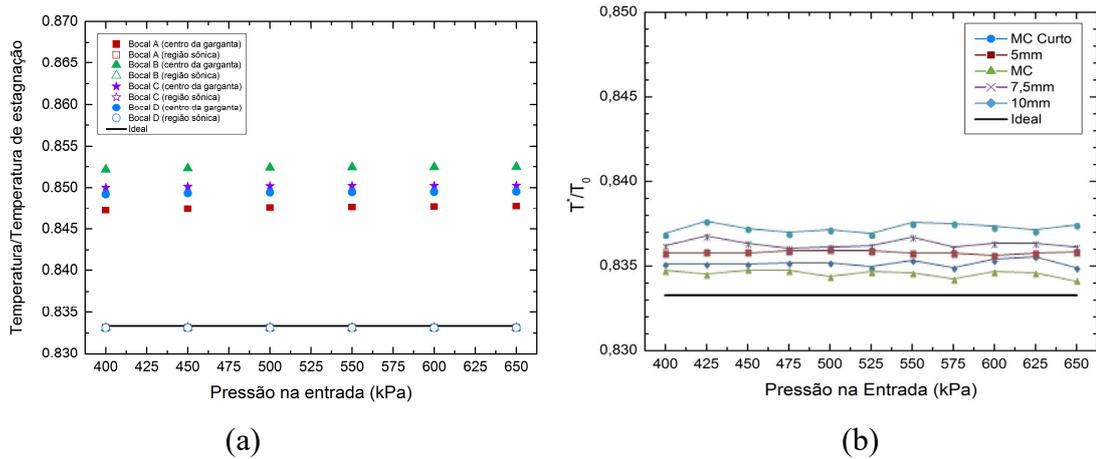


Figura 5.16– Razão entre a temperatura na garganta e a temperatura de estagnação em função da pressão de entrada no bocal. (a) Comparação dos resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado)⁷

Na Figura 5.16 (a) observa-se que a razão entre a temperatura na garganta e a temperatura de estagnação para todos os casos simulados mantém-se constante em função da pressão de entrada no bocal, conforme é previsto pela teoria isentrópica. Os resultados obtidos no centro geométrico da garganta estão um pouco afastados da curva ideal, enquanto que os resultados da região sônica são praticamente coincidentes. Este afastamento do resultado do centro da garganta é devido à curvatura da linha sônica. Na Figura 5.16 (b), são apresentados os resultados de Neckel, 2014, para comparação com os resultados numéricos.

A comparação entre os resultados obtidos no centro geométrico da garganta, na região sônica, obtidos experimentalmente por Neckel e a previsão teórica é semelhante ao apresentado para a Figura 5.15, ou seja, a região sônica está em maior concordância com a teoria, seguido dos resultados experimentais e dos resultados no centro geométrico da garganta. Da mesma forma que na figura anterior, o responsável pelo afastamento dos resultados do centro geométrico da garganta e dos resultados experimentais da previsão teórica é a curvatura da linha sônica.

Na tabela a seguir mostram-se os parâmetros de ajuste das curvas numéricas obtidas na Figura 5.16 (a) em relação à curva ideal.

⁷ O gráfico original encontra-se no ANEXO I.

Tabela 5.4– Parâmetros de ajuste dos resultados numéricos da Figura 5.16 (a)

	Centro geométrico da garganta			Região sônica		
	$\overline{T^G}/T_0$	σ^G	ε^G (%)	$\overline{T^*}/T_0$	σ^*	ε^* (%)
Bocal A	0.84757	1.81E-04	1.709	0.83312	3.25E-07	0.025
Bocal B	0.85237	1.16E-04	2.285	0.83312	4.89E-07	0.025
Bocal C	0.85019	8.60E-05	2.023	0.83312	2.27E-07	0.026
Bocal D	0.84943	1.20E-04	1.932	0.83312	3.36E-07	0.026

O sobrescrito “G” refere-se ao centro geométrico da garganta e o sobrescrito “*” à região sônica. A barra sobre as variáveis indica valores médios dos resultados, σ é o desvio padrão e ε é o erro absoluto dos valores médios em relação aos teóricos. Os desvios padrão apresentados para todas as médias indicam que os resultados representam muito bem uma curva constante, e os erros apresentados mostram que os resultados estão em concordância com o modelo teórico.

A próxima figura apresenta a razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função do número de Mach, para a região da garganta e a sônica.

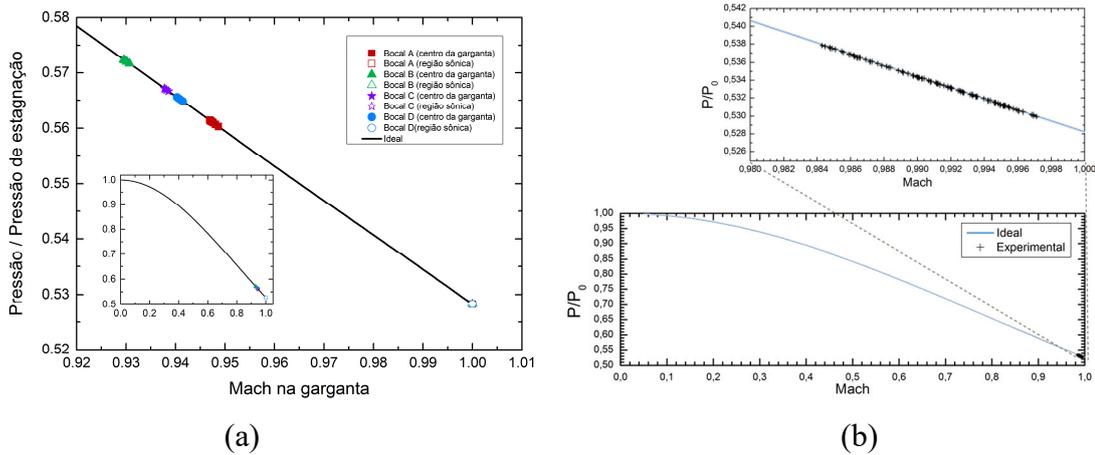


Figura 5.17– Razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função do número de Mach na garganta do bocal. (a) Comparação entre os resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado)⁸

Na Figura 5.17 (a) pode-se observar que o número de Mach não é unitário no centro geométrico da garganta. Entretanto, observar-se que a razão entre as pressões local e de estagnação são praticamente coincidentes com a curva ideal, e ainda que essa razão converge para o valor teórico previsto na garganta dos bocais $p^*/p_0 = 0.528$ à medida em que o número de Mach se aproxima da unidade. Na Figura 5.17 (b), são apresentados os resultados de Neckel, 2014, para comparação com os resultados numéricos. Pode-se observar que os resultados experimentais foram tomados em uma região em que o escoamento encontra-se a uma velocidade mais próxima à sônica em relação aos resultados numéricos obtidos no centro geométrico da garganta dos bocais.

Na tabela a seguir mostram-se os parâmetros de ajuste das curvas numéricas obtidas na Figura 5.17 (a) em relação à curva ideal.

⁸ O gráfico original encontra-se no ANEXO I.

Tabela 5.5– Parâmetros de ajuste dos resultados numéricos da Figura 5.17 (a)

	Centro geométrico da garganta				Região sônica		
	$\overline{p^G}/p_0$	σ_x^G	σ_y^G	ε^G (%)	$\overline{p^*}/p_0$	σ^*	ε^* (%)
Bocal A	0.56528	4.44E-04	2.80E-04	0.006	0.52830	8.11E-07	0.004
Bocal B	0.57210	4.29E-04	2.72E-04	0.002	0.52828	2.13E-06	0.001
Bocal C	0.56702	3.17E-04	2.00E-04	0.006	0.52831	8.20E-07	0.004
Bocal D	0.56528	4.44E-04	2.80E-04	0.006	0.52830	8.11E-07	0.004

A comparação dos valores médios com a curva ideal mostra erros absolutos $\varepsilon \leq 0.006\%$, e por tanto pode-se considerar os resultados numéricos coincidentes com a previsão teórica. Este é um resultado importante, pois confirma que a diferença entre os valores obtidos no centro geométrico da garganta dos bocais e os valores teóricos (ver Figura 5.15 e Figura 5.16) se dá basicamente pela curvatura da linha sônica, e isto indica que esses resultados estão corretos, entretanto não foram obtidos no local onde o número de Mach é unitário.

A análise da Figura 5.17 mostra que, o número de Mach do escoamento no centro geométrico da garganta é inferior a unidade. Esse fato, associado aos grandes gradientes das propriedades do escoamento nas proximidades da garganta, explica as diferenças entre os resultados obtidos no centro geométrico da garganta e a previsão teórica, mostrados na Figura 5.15 e Figura 5.16. Já a diferença encontrada entre os resultados do centro geométrico da garganta com os resultados experimentais de Neckel pode ser atribuído ao diâmetro dos sensores utilizados. O diâmetro dos sensores gera uma incerteza na posição do sensor maior que o deslocamento máximo da linha sônica (Tabela 5.1). Esse fato associado aos grandes gradientes do escoamento explica as diferenças entre os experimentos de Neckel e o obtido numericamente no centro geométrico da garganta.

Na figura abaixo mostra-se a taxa mássica que atravessa a garganta do bocal em função da pressão de admissão.

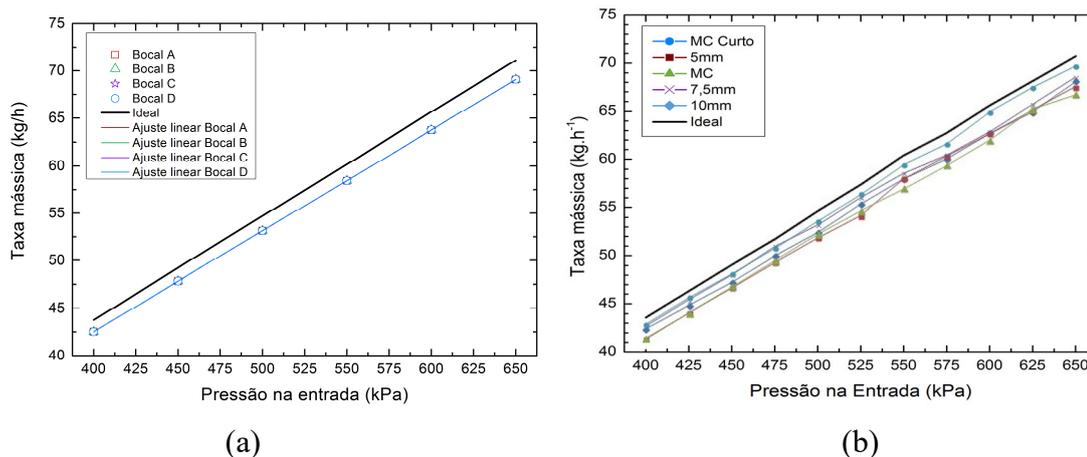


Figura 5.18– Taxa mássica do escoamento em função da pressão de entrada no bocal.
 (a) Comparação entre os resultados numéricos com a teoria isentrópica. (b) Resultados obtidos por Neckel, 2014 em seu estudo (Gráfico adaptado)⁹

Observa-se que a taxa mássica cresce linearmente com a pressão de entrada nos bocais, para a região da garganta $[x=0, y, z]$, no plano transversal à direção principal do escoamento. Na Figura 5.18 (a) observa-se que os resultados obtidos nos diferentes bocais se sobrepõem, o que indica a consistência dos modelos numéricos empregados. Ainda, pode-se observar que os resultados obtidos são um pouco inferiores ao previsto no modelo isentrópico, entretanto apresentam o mesmo comportamento linear. Dos resultados numéricos mostrados na Figura 5.18 (a) pode-se observar que eles se afastam ligeiramente da curva teórica com o aumento da pressão de admissão. Tal efeito também é observado nos resultados experimentais, Figura 5.18 (b). Na comparação dos resultados numéricos e experimentais percebe-se que os valores numéricos ficam entre os valores experimentais, considerando as respectivas pressões na entrada dos bocais.

Os parâmetros dos ajustes lineares feitos na Figura 5.18 (a) são apresentados na tabela a seguir.

⁹ O gráfico original encontra-se no ANEXO I.

Tabela 5.6– Parâmetros de ajuste dos resultados numéricos da Figura 5.18 (a)

	a	S	r	R_a^2	ε_a (%)	ε_{Abs} (%)
Bocal A	0.10616	3.12E-5	1	1	2.99	2.89
Bocal B	0.10618	2.63E-5	1	1	2.96	2.89
Bocal C	0.10618	2.70E-5	1	1	2.96	2.89
Bocal D	0.10620	3.00E-5	1	1	2.94	2.86

Na Tabela 5.6 “a” representa os coeficientes angulares das curvas de ajuste, S é o erro padrão desse coeficiente, r é o coeficiente de correlação, R_a^2 é o coeficiente de determinação do ajuste, ε_a é o erro absoluto entre o coeficiente angular do ajuste numérico e o coeficiente angular da curva ideal e ε_{Abs} é o erro absoluto entre a curva ideal e o resultado numérico para uma pressão de admissão no bocal de 650 kPa, que para todos os bocais é o local de maior afastamento entre os resultados obtidos e a curva ideal. Com isso, garante-se que os demais resultados (para outras pressões de admissão) possuem erros absolutos menores que os apresentados na Tabela 5.6. Os valores encontrados nos ajustes mostram que os coeficientes angulares possuem um baixo erro padrão e que as curvas ajustadas possuem alta representatividade dos valores numéricos. Os coeficientes angulares dos ajustes lineares possuem erros absolutos ε_a menores que 3% no comparativo com o coeficiente angular da curva teórica. O máximo erro absoluto ε_{Abs} determinado para a faixa de pressão de admissão estudada também é inferior a 3%, o que indica uma boa precisão nos resultados encontrados.

No gráfico abaixo mostra-se o comparativo do comportamento do número de Mach previsto pelo modelo isentrópico com o Número de Mach obtido nas simulações ao longo da Linha X [$x, y=0, z=0$] no interior do bocal.

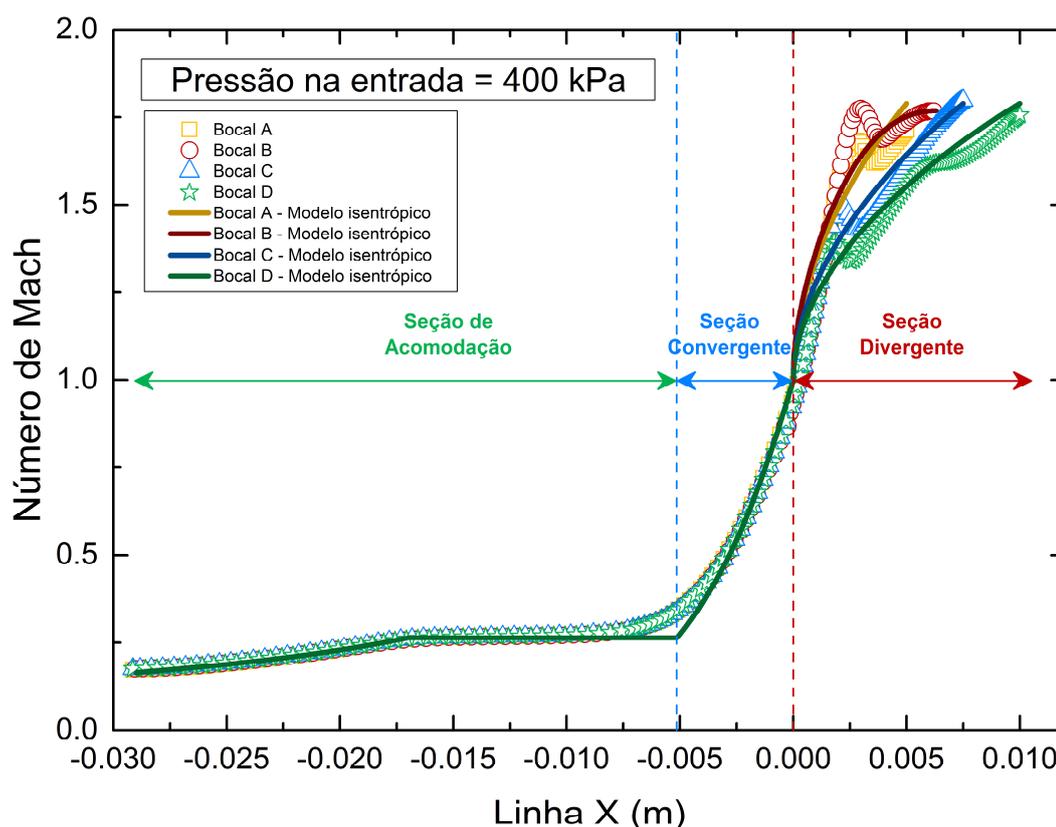


Figura 5.19– Comparação entre o número de Mach obtido numericamente e o previsto teoricamente ao longo da direção principal do escoamento para uma pressão de entrada de 400 kPa. Linha X [$x, y=0, z=0$]

Observa-se que as curvas numéricas e teóricas se sobrepõem na zona de acomodação do escoamento. No final da zona de acomodação e no início da zona convergente há uma separação entre as curvas numéricas e teóricas, devido à abrupta variação da largura nessa junção. Nela há formação de vórtices que geram uma largura efetiva do bocal, ocasionando uma redução efetiva da área local.

Devido à efeitos da garganta, o número de Mach teórico que é menor que o numérico no início da zona convergente torna-se maior no final dela. Na garganta dos bocais observa-se que as curvas teóricas possuem um número de Mach unitário, entretanto as curvas numéricas possuem um valor um pouco inferior à unidade, devido ao efeito de curvatura da linha sônica. Já na zona divergente observa-se que as curvas numéricas se separam, seguindo a previsão teórica para cada geometria de bocal.

Os resultados numéricos são capazes de prever os efeitos das ondas de expansão de Prandtl-Meyer, não capturadas no modelo isentrópico. Os bocais B e C apresentam um

número de Mach muito próximo ao teórico na descarga dos bocais, enquanto que esses valores são um pouco inferiores nos bocais A e D. Esse último efeito deve-se à influência das ondas de expansão no centro geométrico das saídas dos bocais A e D.

5.4 Conclusões parciais

Neste capítulo foram apresentados os resultados obtidos com as simulações dos bocais ensaiados por Neckel.

Inicialmente mostrou-se a influência que a variação da pressão na entrada do bocal causa no escoamento. Para as diferentes pressões na admissão de bocais com a mesma geometria, mostrou-se que o número de Mach e a temperatura não são significativamente afetados por essa variação na pressão de admissão e que o número de Mach não é unitário na garganta devido à curvatura da linha sônica. Mostrou-se que a magnitude da pressão e da massa específica no interior do bocal são diretamente proporcionais à pressão de admissão.

Posteriormente, comparou-se as influências das diferentes geometrias sobre o escoamento, para uma mesma pressão na entrada do domínio computacional. O comportamento do escoamento entre as geometrias estudadas foi mostrado para três diferentes pressões de admissão, 400 kPa, 500 kPa e 650 kPa. Mostrou-se que a diferença nas geometrias afeta fortemente as propriedades do escoamento no interior dos bocais, em particular na seção divergente onde as geometrias são diferentes. Mostrou-se também que o local de interferência entre as ondas de expansão de Prandtl-Meyer se afasta da garganta com o aumento do ângulo de abertura da seção divergente, e que essas ondas de expansão podem ser refletidas pela interação com a camada limite. Por fim verificou-se que um aumento no ângulo de abertura da seção divergente tende a aumentar o número de Mach e diminuir a pressão, a temperatura e a massa específica do escoamento no interior dessa seção.

Por fim, comparou-se os resultados numéricos obtidos nos diferentes bocais com o modelo isentrópico e com os resultados obtidos por Neckel, 2014. No comparativo dos resultados numéricos com o previsto teoricamente mostrou-se que a linha sônica está deslocada do centro geométrico da garganta dos bocais e ainda, apresentou-se a magnitude desse deslocamento para os diferentes bocais nas diferentes pressões de admissão simuladas. Com isso, além de determinar as propriedades do escoamento no centro geométrico da garganta foi possível determinar essas propriedades na região onde o escoamento é sônico.

Verificou-se que os resultados das propriedades do escoamento estão em concordância com o modelo isentrópico e com os resultados experimentais. Os resultados obtidos no centro geométrico da garganta apresentaram um erro absoluto inferior a 8.3 % na comparação com a previsão teórica e os resultados obtidos na região sônica foram praticamente coincidentes com a teoria, apresentando um erro padrão inferior a 0.026%.

6 CONCLUSÃO

Uma formulação baseada na discretização das equações de transporte foi feita pelo método de volumes finitos, apresentados por Patankar, 1980, considerando um escoamento em regime permanente, compressível, viscoso, com abordagem baseada na massa específica (abordagem acoplada), juntamente com o modelo de turbulência $k - \omega/SST$. Esta formulação foi utilizada para resolver escoamentos supersônicos no interior de bocais convergente-divergente.

O estudo foi realizado utilizando quatro bocais convergente-divergente experimentados por Neckel, 2014. Para a determinação da independência da solução numérica da discretização do domínio computacional utilizou-se o método do índice de convergência de malha (GCI - “*Grid convergence index*”), onde determinou-se que o parâmetro de observação é independente do refino da malha e convergiu para o seu valor assintótico com uma incerteza de 0.02%. Para a validação do modelo numérico comparou-se os resultados obtidos com o modelo isentrópico e com resultados experimentais. A baixa dispersão nos resultados comparados indica que tanto o comportamento da previsão teórica quanto os resultados experimentais são bem representados pelo modelo numérico. Somado a isso, os baixos erros encontrados mostram que além de uma boa precisão, os resultados possuem uma boa acurácia, indicando com isso que os resultados do modelo numérico estão em concordância com o medido experimentalmente e com a previsão teórica.

Para as diferentes pressões na admissão de bocais com a mesma geometria, mostrou-se que o número de Mach e a temperatura não são significativamente afetados por essa variação na pressão de admissão e que o número de Mach não é unitário na garganta devido à curvatura da linha sônica. Mostrou-se que a magnitude da pressão e da massa específica no interior do bocal são diretamente proporcionais à pressão de admissão.

O comportamento do escoamento entre as geometrias estudadas foi mostrado para três diferentes pressões de admissão, 400 kPa, 500 kPa e 650 kPa. Mostrou-se que a diferença nas geometrias afeta fortemente as propriedades do escoamento no interior dos bocais, em particular na seção divergente onde as geometrias são diferentes. Mostrou-se também que o local de interferência entre as ondas de expansão de Prandtl-Meyer se afasta da garganta com o aumento do ângulo de abertura da seção divergente, e que essas ondas de expansão podem ser refletidas pela interação com a camada limite. Por fim verificou-se que um aumento no

ângulo de abertura da seção divergente tende a aumentar o número de Mach e diminuir a pressão, a temperatura e a massa específica do escoamento no interior dessa seção.

No comparativo dos resultados numéricos com o previsto teoricamente mostrou-se que a linha sônica está deslocada do centro geométrico da garganta dos bocais e ainda, apresentou-se a magnitude desse deslocamento para os diferentes bocais nas diferentes pressões de admissão simuladas. Com isso, além de determinar as propriedades do escoamento no centro geométrico da garganta foi possível determinar essas propriedades na região onde o escoamento é sônico. Verificou-se que os resultados das propriedades do escoamento estão em concordância com o modelo isentrópico e com os resultados experimentais. Os resultados obtidos no centro geométrico da garganta apresentaram um erro absoluto inferior a 8.3 % na comparação com a previsão teórica e os resultados obtidos na região sônica foram praticamente coincidentes com a teoria, apresentando um erro padrão inferior a 0.026 %.

6.1 Proposta de trabalhos futuros

Para trabalhos futuros, propõe-se um estudo que determine uma geometria de bocal que aumente o desempenho global da turbina Tesla e um estudo da influência dos fatores de forma dessa geometria no escoamento. Ainda, propõem-se estudar o comportamento do escoamento supersônico emitido dos bocais. Esse estudo permitirá a observação das estruturas de choques que se formam à jusante da saída do bocal. O conhecimento desses fenômenos é importante pois assim pode-se melhorar a uniformidade dos jatos que são emitidos dos bocais e introduzidos nos discos internos da turbina Tesla.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Akwa, J. V. **Estudo numérico e experimental do escoamento sobre um rotor eólico Savonius em canal aerodinâmico com alta razão de bloqueio.** [s.l.: s.n.].

Alam, M. M. A.; Setoguchi, T.; Matsuo, S.; Kim, H. D. Nozzle geometry variations on the discharge coefficient. **Propulsion and Power Research**, v. 5, n. 1, p. 22–33, mar. 2016.

Anderson, J. D. **Modern Compressible Flow: With Historical Perspective.** [s.l.] McGraw-Hill, 2004.

Anderson, J. D. **Fundamentals of Aerodynamics.** [s.l.] McGraw-Hill Higher Education, 2007.

Beck, P. A. **Análise metodológica de simulações de escoamentos turbulentos sobre seções de perfis aerodinâmicos.** [s.l.] Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

Beck, P. A. **Análise numérica sobre a redução de arrasto pela aplicação de microcanais em superfícies visando a aplicações aerodinâmicas.** [s.l.] Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.

Callen, H. B. **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics.** [s.l.] Wiley, 1985.

CD-adapco. **User Guide STAR-CCM+.** 10.04 ed. [s.l.] CD-adapco, 2015.

Cengel, Y.; Cimbala, J. **Fluid Mechanics Fundamentals and Applications.** Edição: 3rd ed. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2013.

Chenault, C. F.; Beran, P. S.; Bowersox, R. D. W. Numerical Investigation of Supersonic Injection Using a Reynolds-Stress Turbulence Model. **AIAA Journal**, v. 37, n. 10, p. 1257–1269, 1999.

Durbin, P. A. On the k-3 stagnation point anomaly. **International Journal of Heat and Fluid Flow**, v. 17, n. 1, p. 89–90, fev. 1996.

Eça, L.; Hoekstra, M. Evaluation of numerical error estimation based on grid refinement studies with the method of the manufactured solutions. **Computers & Fluids**, v. 38, n. 8, p. 1580–1591, set. 2009.

Fox, R. **Introdução À Mecânica Dos Fluidos.** Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Georgiadis, N.; Papamoschou, D. Computational Investigations of High-Speed Dual Stream Jets. In: **9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit**. [s.l.] American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003.

Guha, A.; Sengupta, S. The fluid dynamics of the rotating flow in a Tesla disc turbine. **European Journal of Mechanics - B/Fluids**, v. 37, p. 112–123, jan. 2013.

Hu, C.-C.; Lin, W.-T.; Su, C.-M. Flow characteristics of pyramidal shaped small sonic nozzles. **Flow Measurement and Instrumentation**, v. 22, n. 1, p. 64–70, mar. 2011.

Khan, A. A.; Shembharkar, T. R. Viscous flow analysis in a convergent-divergent nozzle. 2008.

Madhu, B. P.; Vijaya, R. B. **Numerical Simulation of Supersonic Expansion in Conical and Contour Nozzle**. . In: INTERNATIONAL JOURNAL OF ENGINEERING RESEARCH AND TECHNOLOGY. ESRSA Publications, 28 jun. 2014Disponível em: <<http://www.ijert.org/view-pdf/10327/numerical-simulation-of-supersonic-expansion-in-conical-and-contour-nozzle>>. Acesso em: 28 jun. 2016

Mavriplis, D. J.; Vassberg, J. C.; Tinoco, E. N.; Mani, M.; Brodersen, O. P.; Eisfeld, B.; Wahls, R. A.; Morrison, J. H.; Zickuhr, T.; Levy, D.; Murayama, M. Grid Quality and Resolution Issues from the Drag Prediction Workshop Series. **Journal of Aircraft**, v. 46, n. 3, p. 935–950, 2009.

Menon, N.; Skews, B. W. Effect of nozzle inlet geometry on underexpanded supersonic jet characteristics. In: Hannemann, D. K.; Seiler, D. F. (Eds.). . **Shock Waves**. [s.l.] Springer Berlin Heidelberg, 2009a. p. 955–960.

Menon, N.; Skews, B. W. Rectangular underexpanded gas jets: Effect of pressure ratio, aspect ratio and Mach number. In: Hannemann, D. K.; Seiler, D. F. (Eds.). . **Shock Waves**. [s.l.] Springer Berlin Heidelberg, 2009b. p. 991–996.

Menter, F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. **AIAA Journal**, v. 32, n. 8, p. 1598–1605, 1 ago. 1994.

Menter, F. R.; Kuntz, M. Adaptation of Eddy-Viscosity Turbulence Models to Unsteady Separated Flow Behind Vehicles. In: McCallen, R.; Browand, F.; Ross, D. J. (Eds.). . **The Aerodynamics of Heavy Vehicles: Trucks, Buses, and Trains**. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. [s.l.] Springer Berlin Heidelberg, 2002. p. 339–352.

Mohamed, A.; Hamed, A.; Lehnig, T. Supersonic rectangular over-expanded jets of single and two-phase flows. **American Institute of Physics-Physics of Fluids**, n. 12, p. 2003–1119, 2003.

Mummidisetti, K.; Emani, S.; Velidi, G.; Guven, U. Investigation of Efficient Turbulence Model for Two-Dimensional Nozzle Designed for Supersonic Cruise Using STAR-CCM+. **ResearchGate**, 8 abr. 2013.

Neckel, A. L. Influência da geometria sobre o rendimento de bocais injetores de turbinas tesla no escoamento compressível supersônico. 10 jul. 2014.

Neckel, A. L.; Godinho, M. Influence of geometry on the efficiency of convergent-divergent nozzles applied to Tesla turbines. **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 62, p. 131–140, abr. 2015.

Otobe, Y.; Kashimura, H.; Matsuo, S.; Setoguchi, T.; Kim, H.-D. Influence of nozzle geometry on the near-field structure of a highly underexpanded sonic jet. **Journal of Fluids and Structures**, v. 24, n. 2, p. 281–293, jul. 2007.

Patankar, S. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. [s.l.] CRC Press, 1980.

Pope, S. B. **Turbulent Flows**. [s.l.] Cambridge University Press, 2000.

Rice, W. An Analytical and Experimental Investigation of Multiple Disk Pumps and Compressors. **Journal of Engineering for Power**, v. 85, n. 3, p. 191–198, 1 jul. 1963.

Rice, W. Tesla turbomachinery. In: Jr, E. L. (Ed.). . **Handbook of Turbomachinery**. 2. ed. [s.l.] CRC Press, 2003. p. 861–874.

Roache, P. J. Perspective: A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies. **Journal of Fluids Engineering**, v. 116, n. 3, p. 405–413, 1 set. 1994.

Roache, P. J. **Verification and Validation in Computational Science and Engineering**. Albuquerque, N.M: Hermosapublishers, 1998.

Roache, P. J.; Knupp, P. M. Completed Richardson Extrapolation. v. 9, n. 5, p. 365–374, 1993.

Schlichting, H.; Gersten, K. **Boundary-Layer Theory**. 8th edition ed. Berlin ; New York: Springer, 2000.

Tandra, D. S.; Kaliazine, A.; Cormack, D. E.; Tran, H. N. Numerical simulation of supersonic jet flow using a modified $k-\epsilon$ model. **International Journal of Computational Fluid Dynamics**, v. 20, n. 1, p. 19–27, 1 jan. 2006.

Teshima, K. Structure of supersonic freejets issuing from a rectangular orifice. **Progress in Astronautics and Aeronautics**, v. 158, p. 375–380, 1994.

Thies, A. T.; Tam, C. K. W. Computation of turbulent axisymmetric and nonaxisymmetric jet flows using the K-epsilon model. **AIAA Journal**, v. 34, n. 2, p. 309–316, 1996.

Turkel, E. Preconditioned Methods for Solving the Incompressible Low Speed Compressible Equations. **J. Comput. Phys.**, v. 72, n. 2, p. 277–298, out. 1987.

Venkatkrishnan, V. On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions. In: **31st Aerospace Sciences Meeting**. [s.l.] American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993.

Versteeg, H. K.; Malalasekera, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics The Finite Volume Method, 2/e**. [s.l.] Pearson Education, 1995.

Weiss, J. M.; Maruszewski, J. P.; Smith, W. A. Implicit Solution of Preconditioned Navier-Stokes Equations Using Algebraic Multigrid. **AIAA Journal**, v. 37, n. 1, p. 29–36, 1999.

Weiss, J. M.; Smith, W. A. Preconditioning applied to variable and constant density flows. **AIAA Journal**, v. 33, n. 11, p. 2050–2057, nov. 1995.

Wilcox, D. C. **Turbulence Modeling for CFD**. 2nd edition ed. La Cãnada, Calif: D C W Industries, 1998.

Wylen, G. J. V.; Borgnakke, C.; Sonntag, R. E. **Fundamentos da termodinãmica**. [s.l.] Edgard Blucher, 2009.

Xiao, Q.; Tsai, H. M.; Papamoschou, D. Numerical Study of Jet Plume Instability from an Over-expanded Nozzle. **45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit**, p. 8–11, 2007a.

Xiao, Q.; Tsai, H. M.; Papamoschou, D.; Johnson, A. Experimental and numerical study of jet mixing from a shock-containing nozzle. **Journal of Propulsion and Power**, v. 25, n. 3, p. 688–696, 2009.

Xiao, Q.; Tsai, H.-M.; Papamoschou, D. Numerical investigation of supersonic nozzle flow separation. **AIAA journal**, v. 45, n. 3, p. 532–541, 2007b.

Yüceil, K. B.; Ötügen, M. V. Scaling parameters for underexpanded supersonic jets. **Physics of Fluids (1994-present)**, v. 14, n. 12, p. 4206–4215, 1 dez. 2002.

Zhou, Y.-X.; Kang, Y.; Wang, X. C.; Fang, Z.-L.; Ding, X.-L. **Numerical investigation on the impact of corner radius on the performance of convergent-divergent nozzle**. 2014 ISFMFE - 6th International Symposium on Fluid Machinery and Fluid Engineering. **Anais...** In: 2014 ISFMFE - 6TH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FLUID MACHINERY AND FLUID ENGINEERING. out. 2014

ANEXO I

As imagens originais do trabalho de Neckel, 2014 são apresentadas nas figuras a seguir.

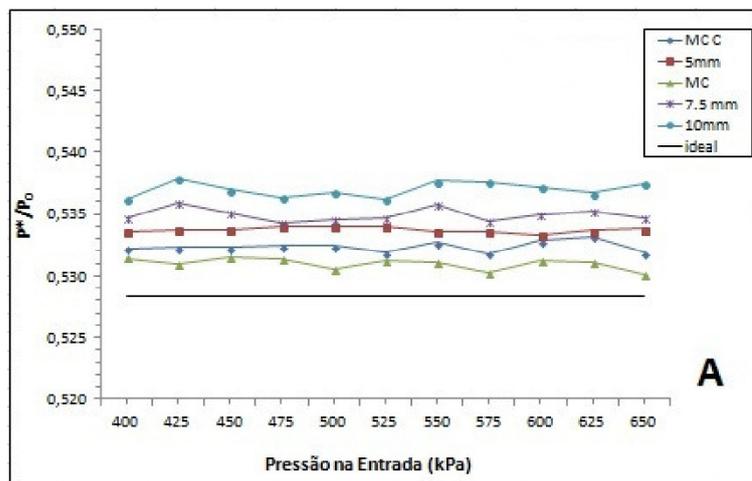


Figura I.1 – Comportamento da razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função da pressão de entrada no bocal

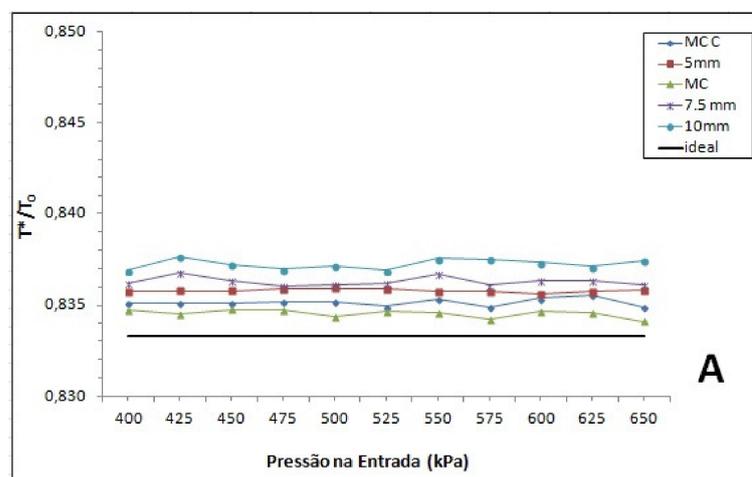


Figura I.2 – Comportamento da razão entre a temperatura na garganta e a temperatura de estagnação em função da pressão de entrada no bocal

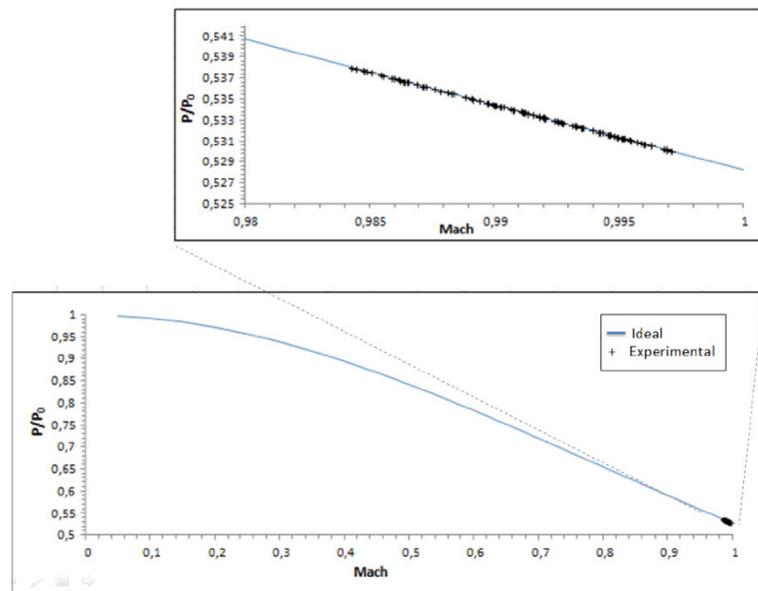


Figura I.3 – Comportamento da razão entre a pressão na garganta e a pressão de estagnação em função do número de Mach na garganta do bocal

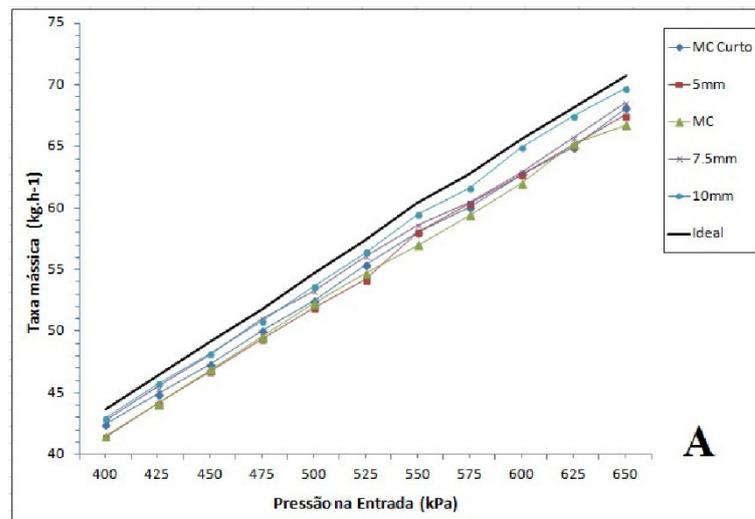


Figura I.4 – Comportamento da taxa mássica na garganta dos bocais em função da pressão de entrada no bocal