

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE  $\mathcal{H}_\infty$  NÃO-LINEAR

Luís Gustavo Soares Longhi

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA QUÍMICA.

Aprovada por:

---

Prof. Enrique Luis Lima, D.Sc.

---

Prof. Argimiro Resende Secchi, D.Sc.

---

Prof. Evaristo Biscaia Jr., D.Sc.

---

Prof. Amit Bhaya, Ph.D.

---

Prof. Darci Odloak, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2001

LONGHI, LUÍS GUSTAVO SOARES

Solução do Problema de Controle  $\mathcal{H}_\infty$  Não-  
Linear [Rio de Janeiro] 2001

VIII, 170 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,  
Engenharia Química, 2001)

Tese - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Controle Não-Linear

I. COPPE/UFRJ II. Título ( série )

## AGRADECIMENTOS

É muito difícil lembrar de todas as pessoas que me ajudaram nestes quase 4 anos de tese, tanto profissional quanto emocionalmente. Nossos pais, parentes e amigos mais próximos sabem da sua importância para tornar nossa vida com algum sentido e é desnecessário dizer o quanto sou grato a estas pessoas. No entanto, para não tornar esta seção preliminar demasiadamente longa, irei me restringir somente às pessoas e instituições que colaboraram diretamente para a realização desta tese. Desde já, peço desculpas por eventuais esquecimentos. Algumas páginas do livro da memória podem passar despercebidas enquanto escrevo estas linhas ...

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer aos meus orientadores, Enrique Luis Lima e Argimiro Resende Secchi. A liberdade que tive para realizar meu trabalho - primeiro no PEQ/COPPE/UFRJ e depois no DEQUI/UFRGS - e suas críticas sempre construtivas são algo que tem muito valor para mim.

Já que citei instituições, gostaria de agradecer ao Programa de Engenharia Química da COPPE, por ter me aceito como aluno de doutorado e lutado para conseguir uma bolsa de estudos para mim; e ao Departamento de Engenharia Química da UFRGS, por ter me dado excelentes acomodações e condições para a realização do meu trabalho de pesquisa a partir de outubro de 1998, quando retornei à Porto Alegre.

Ainda no plano institucional, gostaria de agradecer à Associação Brasileira de Engenharia Química (ABEQ) por ter concedido à minha tese o primeiro lugar na primeira edição do Prêmio Nacional de Pós-Graduação. Sem dúvida, este foi um fato que me motivou muito nestes últimos meses.

No plano pessoal, gostaria de agradecer ao professor Martin Schmal por ter me convencido a continuar no PEQ em janeiro de 1998, época em que pensei seriamente em abandonar o curso devido à baixa qualidade de vida que estava levando no Rio de Janeiro vivendo somente com a bolsa de doutorado. Quanto à bolsa em si, agradeço ao CNPq e à CAPES pela concessão da mesma, apesar dos eventuais atrasos e do seu valor estar num nível aquém das necessidades requeridas para se levar uma vida com um mínimo de qualidade.

Um agradecimento especial vai para minha tia, Maria Cristina Dill Soares Penna e sua família, pela acolhida no Rio de Janeiro e pela estadia na sua residência no ano de 1997.

Agradeço também aos professores Evaristo Biscaia Jr. e Amit Bhaya, pelas sugestões para minha tese e pelo acompanhamento do meu trabalho nos exames de qualificação e seminário de tese, apresentados no PEQ em 1998 e 1999, respectivamente.

Finalmente, gostaria de agradecer aos meus colegas do DEQUI/UFRGS e PEQ/COPPE/UFRJ pelas boas discussões que tivemos nestes anos nestas duas instituições. Em particular, agradeço ao bolsista de iniciação científica do DEQUI/UFRGS, Pablo Ricardo Barrera, pelo auxílio na parte experimental desta tese; e, pela ajuda na aquisição de grande parte da bibliografia desta tese, seja pelo correio, pessoal ou eletronicamente, agradeço aos amigos: Sandra Medeiros, Irapuan Oliveira Pinheiro e Maria Marchand Dal Piva.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ NÃO-LINEAR

Luís Gustavo Soares Longhi

Março/2001

Orientadores: Enrique Luis Lima  
Argimiro Resende Secchi

Programa: Engenharia Química

Este trabalho apresenta novos resultados matemáticos sobre a positividade local de funções escalares multivariáveis. Estes resultados são usados para resolver de forma quantitativa o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. Por solução quantitativa, entende-se uma solução (uma lei de controle) associada a uma região de validade. A região de validade é a região do espaço de estados onde os requerimentos de estabilidade e desempenho são satisfeitos. Para resolver o problema de forma eficiente, foi desenvolvido um procedimento que visa maximizar a região de validade do controlador enquanto garante um desempenho mínimo. A solução deste problema de otimização é estudada e alternativas para sua simplificação são apresentadas. Uma aplicação experimental a um sistema de controle de pH é apresentada. A utilidade dos resultados teóricos desenvolvidos na teoria de estabilidade de Lyapunov também é estudada.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## NONLINEAR $\mathcal{H}_\infty$ CONTROL PROBLEM SOLUTION

Luís Gustavo Soares Longhi

March/2001

Advisors: Enrique Luis Lima

Argimiro Resende Secchi

Department: Chemical Engineering

This work presents new mathematical results concerning the positiveness of multivariable scalar functions. These results are used to quantitatively solve the nonlinear H-infinity control problem. A quantitative solution means a solution (a control law) associated with a validity region. The validity region is the state-space region where the stability and performance requirements are satisfied. To efficiently solve the problem, it was developed a procedure to maximize the validity region while guaranteeing a minimal performance. The solution of this optimization problem is studied and some alternatives to simplify it are presented. An experimental application to a pH control system is presented. The usefulness of the results when applied to the Lyapunov stability theory is also studied.

## ÍNDICE

RESUMO	v
ABSTRACT	vi
1. INTRODUÇÃO	01
1.1 BREVE REVISÃO HISTÓRICA DA TEORIA DE CONTROLE	01
1.2 JUSTIFICATIVA DA TESE	15
1.3 DESCRIÇÃO DA TESE	18
2. CÔMPUTO DE LEIS DE CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ NÃO-LINEARES	21
2.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ NÃO LINEAR	21
2.2 APROXIMAÇÕES DA LITERATURA E SUAS LIMITAÇÕES	37
2.3 ABORDAGEM PROPOSTA	59
3. RESULTADOS TEÓRICOS DESENVOLVIDOS	62
3.1 MOTIVAÇÃO E INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA	62
3.2 RESULTADOS PRINCIPAIS	68
3.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO A UM PROBLEMA DE CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ NÃO-LINEAR	79
4. SOLUÇÃO QUANTITATIVA PROPOSTA PARA O PROBLEMA	83
4.1 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A SOLUÇÃO QUANTITATIVA DO PROBLEMA	83
4.2 MÉTODO DESENVOLVIDO	87
4.3 EXEMPLOS	93
5. APLICAÇÃO A UM SISTEMA DE pH EXPERIMENTAL	103
5.1 DESCRIÇÃO E MODELAGEM DO PROCESSO DE NEUTRALIZAÇÃO DE pH	103
5.2 SÍNTESE DA LEI DE CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ NÃO-LINEAR	111
5.3 IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLADOR NA PLANTA	119

6. APLICAÇÃO DOS RESULTADOS À TEORIA DE ESTABILIDADE DE LYAPUNOV	133
6.1 TEORIA DE ESTABILIDADE DE LYAPUNOV	133
6.2 ESTIMATIVA DO DOMÍNIO DE ATRAÇÃO E SUA MAXIMIZAÇÃO	136
6.3 EXTENSÃO DO TEOREMA DE ZUBOV	149
7. CONCLUSÕES	162
7.1 CONCLUSÕES	162
7.2 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DA TESE	163
7.3 PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS	166
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	169

# Capítulo 1

## Introdução

---

### Resumo

Neste capítulo é feita uma revisão em perspectiva histórica dos desenvolvimentos da teoria de controle e seu impacto no controle de processos químicos de modo a situar o assunto tratado na tese. Logo após, a justificativa para a tese e os seus objetivos são apresentados. Encerrando o capítulo, é apresentada uma visão geral da tese e dos assuntos tratados nos próximos capítulos.

### 1.1 BREVE REVISÃO HISTÓRICA DA TEORIA DE CONTROLE

O objetivo da teoria de controle é projetar dispositivos concretos ou abstratos para manter certos sistemas operando dinamicamente de acordo com o nosso desejo. Neste trabalho, entende-se por sistema uma entidade dinâmica com entradas e saídas definidas unindo-a a outros sistemas e ao ambiente externo. No âmbito da engenharia, sistemas são processos ou partes destes. Sistemas de controle que operam sem a intervenção de um operador humano são ditos automáticos. Como os sistemas de controle tratados neste trabalho são projetados exatamente para evitar este tipo de intervenção, deve-se considerar implícito o termo “automático” sempre que se falar em controle. A figura 1 mostra um diagrama de blocos de um sistema de controle genérico de uma planta química e como a informação, representada pelas linhas, flui neste sistema.

Apesar da importância do conceito de controle antecipatório (*feedforward*), o mecanismo fundamental pelo qual os sistemas de controle, não importando qual seja a sua natureza, mantém o seu equilíbrio é a realimentação, ou *feedback*, como é mais usual na literatura de controle. O controle via realimentação pode ser definido como o uso de sinais de diferença, determinados pela comparação de valores atuais da saída do sistema com os seus valores desejados, como um meio de ajustar algumas entradas do sistema (LEWIS, 1992). Sistemas que operam em modo *feedback* são chamados de sistemas de controle em malha fechada devido ao fato que existe uma malha fechada entre as informações que circulam no sistema, ver figura 2.

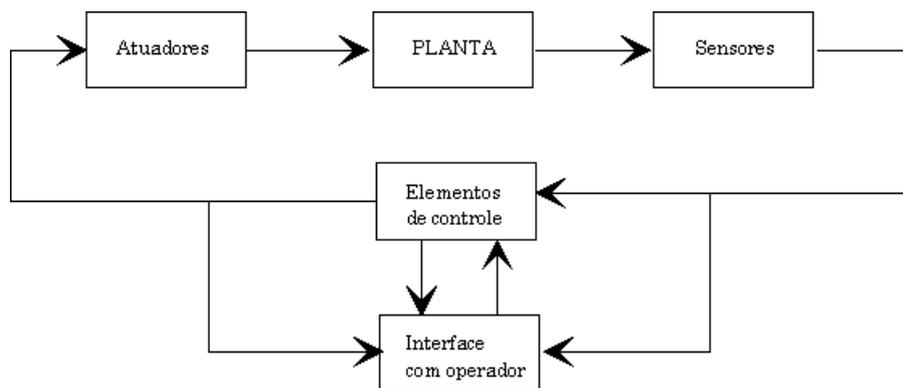


Figura 1 - Esquema geral de um sistema de controle

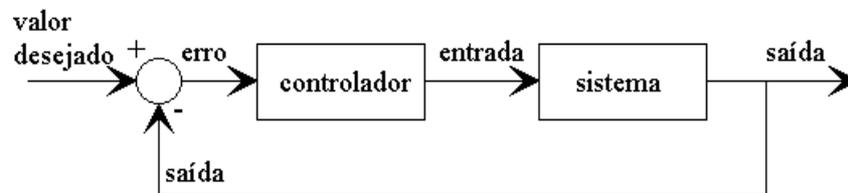


Figura 2 – Sistema de controle em malha fechada.

Na seqüência desta seção, é apresentada uma revisão em perspectiva histórica da teoria de controle comentando sempre que possível o impacto dos desenvolvimentos no controle de processos químicos.

### **Período Pré-histórico da Teoria de Controle.**

Os primeiros dispositivos de controle de que se tem notícias datam de mais de 2000 anos atrás entre os gregos e árabes. Em torno de 270 AC, o grego Ktesibios inventou um regulador de nível através de bóias para um relógio de água. O regulador de bóia em questão desempenhava a mesma função realizada hoje por algumas descargas de banheiro e foi usado para diversos fins na antigüidade.

O primeiro sistema de controle significativo conhecido data do início da revolução industrial e é historicamente atribuído a James Watt (OGATA, 1990). Trata-se do famoso sistema de controle de velocidade de barcos a vapor inventado em 1769 e aperfeiçoado em 1788. Tão logo este sistema foi aperfeiçoado de modo a melhorar seu

desempenho, foram encontrados alguns problemas que hoje denominamos como instabilidade. Assim, ainda de forma incipiente, surgiram os dois problemas básicos da teoria de controle: a análise do sistema de controle e o projeto do controlador para este sistema.

### **O Nascimento da Teoria de Controle.**

O projeto de sistemas de controle até meados do século XIX era realizado por tentativa baseado na intuição do engenheiro, sendo mais uma arte que uma ciência. Em torno de 1840, a matemática foi usada pela primeira vez para analisar a estabilidade de sistemas de controle em malha fechada. Como a matemática é a linguagem formal da teoria de controle, pode-se chamar o período que antecede a sua utilização como a pré-história da teoria de controle.

O trabalho mais famoso deste período foi a análise da estabilidade do regulador centrífugo de Watt (*Watt's flyball governor*) realizado por J. C. Maxwell em 1868. Em seu trabalho, Maxwell usou o ferramental da teoria do movimento de sistemas dinâmicos baseada em equações diferenciais desenvolvida por Lagrange (1736-1818) e Hamilton (1805-1865). Seu método consistia em linearizar as equações diferenciais e encontrar as raízes da equação característica do sistema. Se todas as raízes tivessem parte real negativa, o sistema seria estável. Na década seguinte, em 1877, E. J. Routh desenvolveu um método numérico para determinar quando a equação característica tinha raízes estáveis. Outro método para este fim foi desenvolvido independentemente por A. Hurwitz em 1895.

Um trabalho importantíssimo desta época é a tese de doutorado do russo A. M. LYAPUNOV (1892). Nesse trabalho, a estabilidade de sistemas descritos por equações diferenciais não-lineares é analisada usando uma generalização da noção de energia. No entanto, este trabalho permaneceu praticamente desconhecido do ocidente até a década de 1960. Mesmo no seu país de origem, o trabalho de Lyapunov ficou hibernando por aproximadamente 40 anos antes de ter sua utilidade reconhecida na teoria de controle.

### **Controle Clássico - 1920 a 1950**

A teoria de controle clássico se consolidou como uma disciplina independente nas primeiras décadas do século XX. Nesta época, os métodos de análise no domínio de frequência, desenvolvidos no laboratório da companhia de telefone Bell nos anos 30 por H. W. Bode e H. Nyquist, e os métodos do lugar das raízes, desenvolvido por W. R.

Evans, e da carta de Nichols, desenvolvido por N. B. Nichols, ambos no Laboratório de radiação do M.I.T. nos anos 40, marcaram o que denomina-se atualmente como Controle Clássico.

As principais características do controle clássico são o uso de modelos muito simplificados da realidade - modelos lineares SISO (*Single Input - Single Output*) - e o uso da transformada de Laplace como principal ferramenta de trabalho. As leis de controle predominantes (como ainda são até hoje) eram as pertencentes à família do PID, introduzido originalmente por N. Minorsky em 1922 com o nome de controlador de três termos.

Os principais problemas da abordagem clássica são a sua inadequação para lidar com sistemas não-lineares e sistemas multivariáveis com interação entre as variáveis (sistemas acoplados ou “multivariáveis reais”). Além disto, a dificuldade de alcançar certos critérios de desempenho especificados em outros domínios (normalmente as especificações do processo são feitas no domínio tempo) que não o de Laplace e de frequência, restringem muito o uso das suas ferramentas de análise e projeto em vários processos reais. Um ponto positivo da abordagem clássica é que, devido à limitação dos modelos lineares usados, a robustez frente às incertezas do modelo e o compromisso entre robustez e desempenho tinham uma posição central na teoria. Estas preocupações eram refletidas, principalmente, através de conceitos como margem de ganho e margem de fase.

Apesar do sucesso da teoria de controle clássico em um grande número de sistemas, o projeto de sistemas de controle era feito somente de modo que o sistema em malha fechada satisfizesse um conjunto de requisitos de desempenho mais ou menos arbitrário. Os sistemas resultantes eram apenas aceitáveis mas não eram ótimos em qualquer sentido. Este fato talvez tenha sido o incentivo para os desenvolvimentos em controle ótimo nos anos 40 e 50.

### **O Controle Ótimo dos Anos 50**

Paralelamente ao desenvolvimento dos métodos de controle clássico, ocorreram alguns avanços na teoria de sistemas (Wiener, 1930-1950, Kolmogorov, 1940, programação linear e não-linear, etc.) que levaram a um resultado puramente matemático conhecido como o controle ótimo dos anos 50 e 60. Esta ramificação da teoria de otimização se baseava na colocação do problema de controle como um problema de otimização e havia 2 caminhos básicos para a sua solução, a abordagem de

programação dinâmica de R. Bellman e a abordagem baseada no cálculo de variações, conhecida como Princípio do Máximo (ou do Mínimo) de Pontryagin, ambos divulgados na segunda metade dos anos 50. Estes métodos possuíam soluções matematicamente trabalhosas, mas produziam uma resposta ótima para o modelo. O principal fator limitante de sua aplicação experimental (principalmente em processos químicos) residia no fato que as incertezas não são consideradas na formulação do problema, i.e., o controle ótimo era um procedimento que só poderia ser bem-sucedido quando controlasse os próprios modelos da planta e não a planta propriamente dita. Seu impacto no controle de plantas químicas foi praticamente nulo e a sua principal contribuição foi trazer de volta a análise e o projeto de sistemas de controle para o domínio tempo, o que permitiu usar tanto modelos lineares quanto não-lineares para representar a planta. Nesta época iniciaram também as primeiras aplicações de controle com computadores (ÅSTRÖM, WITTENMARK, 1984).

### **A Teoria de Controle Moderno - Anos 60 e 70**

Desde 1960 aproximadamente, devido à possibilidade de usar computadores digitais para analisar sistemas complexos no domínio tempo, a teoria de controle moderno, baseada na análise e síntese no domínio tempo usando variáveis de estado (estado é a menor quantidade de variáveis que consegue descrever completamente um sistema a partir de suas informações passadas), foi desenvolvida como alternativa à abordagem clássica que se mostrava ineficiente para lidar com sistemas multivariáveis e não-lineares resultantes da crescente complexidade dos processos industriais.

A teoria de controle moderno possibilitava a abordagem dos problemas de controle baseado numa descrição no domínio tempo conhecida como Espaço de Estados (*State Space*, espaço euclidiano  $n$ -dimensional onde  $n$  é o número de variáveis de estado necessárias para descrever o sistema). A abordagem no espaço de estados permitia o uso de modelos não-lineares para representar os processo, mas as principais técnicas foram desenvolvidas para sistemas lineares. Nesta época, duas linhas de pesquisa se destacaram para o projeto de controladores: a técnica de Colocação de Pólos e o Controle Ótimo Quadrático, com uma ligeira vantagem para esta última, por possibilitar a obtenção de uma solução ótima.

Dentro deste quadro do controle moderno, e como uma extensão da teoria de controle ótimo, merece destaque o trabalho de R. Kalman e seus famosos controladores ótimos: o LQR (*Linear Quadratic Regulator*) e o LQG (*Linear Quadratic Gaussian*). O

primeiro foi desenvolvido para o caso de realimentação de estado (*state feedback*) e o segundo para o caso de realimentação da saída (*output feedback*). Nestes trabalhos são obtidas soluções fechadas elegantes para sistemas descritos por modelos lineares, onde uma função custo quadrática das variáveis de estado e das ações de controle é minimizada. No caso do LQG, o G vem de *Gaussian* e é devido ao fato que os sinais que entram no processo são considerados corrompidos com ruídos gaussianos (totalmente descritos pela média e pela variância) de média zero (é neste ponto que se encontra a descrição da incerteza do sistema como incerteza nos sinais de entrada). Pode-se dizer que com estes controladores a teoria de controle moderno alcançava seu ápice.

Durante os anos 60 e 70, a teoria de controle moderno foi o paradigma vigente e neste período a teoria de sistemas lineares foi completamente estabelecida através de conceitos como controlabilidade, observabilidade, teoria da realização, etc. Muitos poderiam até imaginar que a teoria de controle clássico tivesse chegado a seu fim. No entanto, não foi isso que aconteceu.

Embora elegante e bem sucedida em algumas aplicações como a engenharia aeroespacial nos Estados Unidos da América e na antiga União Soviética, a abordagem de espaço de estados, quando transportada para o controle de processos químicos, não foi bem sucedida, pois o tipo de descrição de incerteza como ruído gaussiano é incapaz de representar as incertezas normais nos obscuros modelos de processos químicos (tanto para sinais de entrada quanto para incertezas do modelo). Assim, por considerar as questões ligadas a robustez de forma inadequada, o impacto do controle moderno na indústria química foi muito baixo. As técnicas de controle clássico continuaram predominantes.

Fora do escopo do controle moderno, mas ainda nos anos 60 e 70, surgiram também alguns desenvolvimentos importantes ligados à análise de estabilidade de sistemas como a extensão de alguns resultados de sistemas lineares para sistemas não lineares, principalmente na análise destes sistemas através da teoria de estabilidade de Lyapunov, além de análises baseadas em argumentos de análise funcional, como o teorema do ganho pequeno (*Small Gain Theorem*) (ZAMES, 1966a, ZAMES, 1966b), que posteriormente viria a se tornar o principal resultado da teoria de controle robusto, sendo estendido para sistemas não-lineares e variantes no tempo.

## **O Controle Adaptativo nos Anos 70**

Extensões não-lineares de resultados lineares também foram propostas nos anos 70. No entanto, como estas são de difícil implementação, este período também presenciou o reaparecimento da teoria de controle adaptativo com os trabalhos de Åström (ÅSTRÖM, 1973, ÅSTRÖM, WITTENMARK, 1989) e Clarke (CLARKE, GAWTHROP, 1975, 1979, CLARKE et al., 1987), entre outros. Este tipo de trabalho era na sua grande maioria baseado em modelos lineares e se dividia, basicamente, em duas abordagens principais: 1) adaptar (ajustar) o modelo do processo a cada intervalo de amostragem (abordagem auto-ajustável) e 2) adaptar os parâmetros do controlador quando um indicador de desempenho não fosse favorável (abordagem por modelo de referência).

A idéia central do controle adaptativo auto-ajustável é que todo sistema não-linear suave aceita uma representação local linearizada. O trabalho, então, a ser realizado era identificar a cada amostragem este modelo linearizado e reprojeter o controlador de modo a assegurar o seu desempenho. Intuitivamente, o controle adaptativo é uma maneira de lidar com as incertezas resultantes da aproximação através de modelos lineares. Se realmente se conseguisse identificar esse modelo linearizado a cada amostragem, seria possível projetar um controlador bem menos conservativo que um controlador robusto.

Pode-se imaginar que esta idéia não era nova e, de fato, não era, sua origem está na década de 1950. No entanto, devido aos desenvolvimentos da informática nos anos 70 e 80, houve um renovado interesse nestas técnicas nesse período. Esse interesse de alguns pesquisadores era totalmente justificado pois, caso a adaptação fosse bem-sucedida, seria possível usar as técnicas de controle linear para projetar os controladores.

No entanto, embora possuísse todos esses apelos de uso e, de fato, ser eficiente em alguns casos simplificados, o controle adaptativo se mostra comprometedor quando aplicado a processos multivariáveis e, como estes são a realidade industrial, seu impacto na indústria química foi muito pequeno. Não seria um exagero dizer que o controle adaptativo funciona bem nas situações onde ele não é necessário.

## **O Paradigma MPC nos Anos 80**

O panorama do controle de processos químicos até o fim dos anos 70 não era muito positivo. Apesar de todos os desenvolvimentos na teoria de controle, a indústria química continuava a usar as técnicas de controle clássico devido a estas não serem tão dependentes da qualidade do modelo usado para projetar o controlador. Este panorama só veio a dar mostras de melhora no fim dos anos 70 e começo dos 80 com o aparecimento de dois trabalhos de filosofia similar desenvolvidos independentemente: o DMC (CUTLER, RAMAKER, 1979) e o IDCOM (RICHALET et al., 1978). Nestes trabalhos, as ações de controle eram calculadas através de um problema de otimização *on-line* da trajetória de saída do processo em malha aberta ao longo de um horizonte de predição futuro. A realimentação neste tipo de controle aparece na atualização do problema de otimização, a cada intervalo de amostragem, usando novas medidas disponíveis da planta.

Estes trabalhos foram desenvolvidos na indústria usando modelos lineares discretos no domínio tempo alguns anos antes de suas publicações e vieram a originar o que se conhece hoje como MPC (*Model Predictive Control*) ou, simplesmente, controle preditivo. Seu sucesso nas indústrias químicas foi muito grande e muitos trabalhos foram desenvolvidos usando esta abordagem. MORARI (1996), na conferência de Controle de Processos de 1996 - CPC V (*Conference of Process Control*), escreve em seu artigo que a tecnologia MPC é o que mais se aproxima para a indústria química de um paradigma<sup>1</sup> atual para os autores, do mesmo modo como foi o controle moderno nos anos 60/70 para a teoria de controle.

Apareceram também muitos trabalhos que tentaram implementar as idéias do MPC (principalmente baseadas em modelos lineares) em conjunto com esquemas adaptativos para evitar os cálculos pesados do MPC não-linear. No entanto, estas abordagens também esbarram nos mesmos limites dos controladores adaptativos, i.e., não são confiáveis para sistemas multivariáveis. Atualmente tem sido propostos alguns esquemas adaptativos com algoritmos de identificação baseados em redes neurais que tem obtido um desempenho melhor, inclusive para sistemas multivariáveis.

Apesar do grande sucesso do MPC e da sua crescente quantidade de aplicações industriais, as principais questões teóricas ligadas a esta classe de controladores permanecem em aberto. Qualquer implementação usual que considere restrições das ações de controle e um horizonte de predição finito, mesmo que utilize um modelo

---

<sup>1</sup> Nestas notas o termo paradigma é usado no sentido proposto em (KUHN, 1966) como o conjunto de métodos e teorias vigentes para uma área de conhecimento e não simplesmente como um modelo.

linear para descrever o processo, não tem qualquer garantia de estabilidade e robustez. No entanto, estas lacunas da teoria não tem impedido o sucesso cada vez maior do MPC nas indústrias químicas. Atualmente, tem sido dada grande ênfase ao desenvolvimento de algoritmos MPC baseados em modelos não-lineares.

### **Controle Robusto Moderno - Anos 80 e 90**

Até os anos 80, com exceção do MPC, poder-se-ia classificar a maioria dos métodos de projeto como pertencentes à teoria de controle clássico ou à de controle moderno. No entanto, baseado na inadequação da teoria de controle moderno em lidar com incertezas, alguns autores começaram a tentar desenvolver métodos que tivessem uma formulação matemática tão detalhada quanto a teoria de controle moderno e tão preocupada com a robustez como a teoria de controle clássico. Assim, nos anos 70, principalmente no Reino Unido, vários conceitos do controle clássico no domínio da frequência começaram a ser estendidos para englobar sistemas multivariáveis (ROSEMBROCK, 1974). Em paralelo com estas extensões, até o fim dos anos 80, a relação destes resultados no domínio de frequência com o domínio tempo usado no espaço de estados foi totalmente estabelecida.

Indo um pouco mais além no passado, pode-se atribuir o início do controle robusto moderno aos trabalho de George Zames com o seu famoso teorema do ganho pequeno nos anos 60 e posteriormente com seus trabalhos que marcam o início da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  (ZAMES, 1979, 1981). A consolidação deste tipo de abordagem ocorreu no início de 1981 com a publicação de uma edição especial sobre controle multivariável linear na revista *IEEE Transactions on Automatic Control*. Muitos trabalhos deste volume se tornaram referências nesta nova área, como os artigos de DOYLE e STEIN (1981) e SAFONOV et al. (1981).

Algumas das principais características deste tipo de abordagem são: o uso dos valores singulares como uma generalização dos ganhos nos gráficos de Bode para sistemas MIMO (*Multiple Input - Multiple Output*) e a descoberta de que a representação de incertezas através da norma infinita como a mais conveniente para o tratamento do problema de análise. Alguns dos tópicos correntes de pesquisa são o uso de incertezas estruturadas na formulação do problema e a síntese de controladores ótimos robustos com normas mistas. Aplicações dos métodos desenvolvidos nas duas últimas décadas para o controle de processos químicos multivariáveis podem ser encontrados em SKOGESTAD E POSTLETHWAITE (1996).

Alguns autores consideram o ápice do chamado “controle robusto moderno” como sendo o estado da arte da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  (ZHOU et al., 1996). De fato, os desenvolvimentos das últimas décadas levaram a esta teoria. No entanto, se por um lado, o controle  $\mathcal{H}_\infty$  produz um controlador que é robusto em relação às perturbações externas, a otimização do seu desempenho pode levar a um controlador com uma extrema falta de robustez em relação às incertezas paramétricas. Este problema foi apontado pela primeira vez por KEEL e BHATTACHARYYA (1997) e a tendência dos próximos anos é, apesar da resistência de muitos autores que trabalham na área, o desenvolvimento de leis de controle  $\mathcal{H}_\infty$  confiáveis, i.e., que sejam robustas em situações reais de operação.

Um possível caminho para este fim é através da teoria de controle robusto paramétrico. Desde há muito tempo a robustez em relação a variações nos parâmetros do modelo é reconhecida como algo fundamental para a síntese de controladores robustos. No entanto, foi somente a partir do resultado matemático de KHARITONOV (1978) que foi disponibilizado na literatura um método prático para a análise deste tipo de situação. O amadurecimento desta abordagem, assim como uma revisão histórica detalhada sobre o seu desenvolvimento, pode ser encontrada no livro de BHATTACHARYYA et al. (1995).

Para fechar este assunto, a teoria de controle robusto moderno pode ser vista como uma maneira de se introduzir robustez na teoria de controle moderno ou de projetar mais formalmente os problemas do controle clássico, i.e., de misturar os métodos clássicos e modernos para poder lidar com problemas MIMO, sendo uma área ainda em desenvolvimento. Isto tudo, aliado ao fato que o assunto da presente tese se encaixa nesta categoria, torna muito difícil a emissão de uma opinião definitiva, ou até mesmo imparcial sobre este tema.

### **Controle Não-Linear: de 1989 até hoje**

Os resultados do controle robusto moderno foram desenvolvidos usando basicamente modelos lineares. No entanto, desde os anos 60, com a representação de sistemas usando o espaço de estados e o desenvolvimento de microprocessadores cada vez mais rápidos nas décadas seguintes, o caminho natural da teoria de controle foi o surgimento de uma teoria de controle não-linear a partir da década de 1980.

Apesar de alguns resultados que datam dos anos 50 com o controle ótimo, a teoria de controle não-linear tem como marco principal o lançamento do livro *Nonlinear Control Systems* em 1989 (ISIDORI, 1989) pois, a partir desta publicação, as publicações sobre controle não-linear tem crescido continuamente. Antes desta data, exceto pelo controle ótimo, os métodos de controle não-linear eram restritos a casos muito particulares. Uma revisão destas técnicas de controle tradicionais pode ser encontrada em BEQUETTE (1998). Com exceção destes métodos tradicionais de controle não-linear, as principais abordagens de controle não-linear puro podem ser divididos em 3 grupos: controle geométrico, controle ótimo não-linear e controle preditivo não-linear.

Dentre estas, a abordagem mais bem sucedida do ponto de vista prático é o controle preditivo não-linear. Apesar de todas as implementações atuais não possuírem nenhuma garantia teórica de estabilidade e robustez, as aplicações deste tipo de controle tem crescido exponencialmente (BADGWELL, QIN, 1998). Muito deste sucesso pode ser encarado simplesmente como uma extensão do MPC original, baseado em modelos lineares (CUTLER, RAMAKER, 1979).

Curiosamente, a abordagem do livro de Isidori, conhecida como controle geométrico, devido ao seu forte embasamento nos conceitos de geometria diferencial, talvez seja a abordagem não-linear que permaneça mais longe de uma aplicação a sistemas reais devido à sua grande falta de robustez, entre outras razões.

Da mesma forma que o controle geométrico, o controle ótimo não-linear apresenta problemas de falta de robustez. Outra limitação sua, que ocorre desde a década de 1950, é a grande dificuldade em se resolver as equações de síntese do controlador. Atualmente, uma nova ramificação do controle ótimo tem tentado incorporar robustez na formulação do problema de controle. Um exemplo desta tentativa baseado nas idéias do controle robusto moderno é a teoria de  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear (VAN DER SCHAFT, 1991, ISIDORI, 1994, ISIDORI, KANG, 1995). No entanto, se a questão da robustez pode ser amenizada com esta teoria, a inexistência de um método prático para computar a lei de controle tem limitado muito sua aplicação a sistemas reais. Este problema é tão antigo quanto o controle ótimo e atualmente foi classificado (ATHANS et al., 1999) como um dos problemas mais importantes a serem atacados nos próximos anos pela comunidade acadêmica. Um dos objetivos da presente tese é contribuir para esta solução.

## **Controle de Processos Químicos – Principais Características e Futuro**

A principal diferença entre o controle de processos químicos e o controle de processos de outra natureza é o tipo de sistema a se controlar. Como a maioria dos resultados da teoria de controle é desenvolvido por engenheiros elétricos, é de se esperar que estes sejam de utilidade relativa para a indústria química devido às diferenças óbvias entre os sistemas de engenharia elétrica e os de engenharia química.

Os processos químicos tem características próprias que os diferem dos outros processos abordados pela teoria de controle, a saber:

- São grande, lentos e a maioria estável;
- Possuem tempo-morto;
- Alguns possuem fortes não-linearidades (do tipo exponencial, por exemplo);
- São multivariáveis, i.e., possuem interação entre as variáveis;
- São difíceis de modelar com precisão e;
- Muitas vezes operam no limite das restrições.

Assim, embora a grande maioria das malhas de plantas químicas sejam controladas satisfatoriamente através de controladores clássicos tipo PID, existem algumas situações onde são necessárias estratégias de controle mais sofisticadas, por exemplo:

- Processos onde pequenas flutuações das condições operacionais nominais podem gerar produtos muito diferentes dos desejados;
- Processos muito susceptíveis à instabilidade, i.e., com grande risco de instabilizar em resposta a pequenas perturbações.
- Processos multivariáveis com forte interação entre as variáveis controladas.

Estas 3 características listadas acima aparecem normalmente em sistemas fortemente não-lineares e multivariáveis. Assim, devido ao exposto nesta seção - e aliado ao poder computacional atual - fica claro que os novos métodos de projeto devem se basear em formulações MIMO robustas e não-lineares, pelo menos para o caso mais geral.

Pode-se enunciar genericamente o problema a ser resolvido como: *“Projetar uma lei de controle baseada na melhor representação matemática do processo de modo a obter o melhor desempenho possível respeitando as restrições impostas ao sistema. Isto tudo sabendo que o modelo não representa fielmente a realidade.”*

Uma limitação deste enunciado são as passagens referentes ao melhor modelo e ao melhor desempenho. Isto mostra que, apesar de geral, até mesmo na otimalidade existe um grande grau de subjetividade na definição do que seja o melhor modelo e o melhor desempenho. De uma maneira geral, considera-se como melhor modelo aquele que apresenta o melhor compromisso entre a menor diferença para a realidade e a maior simplicidade de representação. Quanto ao melhor desempenho, normalmente este é julgado através de um critério matemático que deve refletir os benefícios que deseja-se aumentar. No caso do controle ótimo, o melhor controlador é o que extremiza este critério.

De todas as inovações atuais na teoria de controle, somente a tecnologia MPC tem sido realmente utilizada nas indústrias. Isto se deve muito ao fato do MPC poder lidar com as restrições nas variáveis e usar modelos tanto lineares quanto não-lineares para calcular a sua solução. No entanto, questões teóricas ligadas a estabilidade e robustez ainda não foram tratadas adequadamente com esta abordagem, e por isso tem sido uma linha de pesquisa de grande atividade atualmente.

Devido ao fato que a maioria dos desenvolvimentos teóricos importantes das últimas décadas não tiveram qualquer sucesso na indústria química, uma pergunta pode vir à mente: o que faz uma abordagem ser bem sucedida para controle de processos? Já foi visto que a robustez do controlador e a existência de um método para computar a lei de controle fazem parte da resposta. No entanto, uma resposta mais completa pode ser achada no livro “*Fundamental Process Control*” (PRETT, GARCIA, 1988). Nesse livro, os autores criticam o pensamento popularizado em controle de processos de que “quanto mais simples melhor”. Segundo os autores, com o objetivo de conseguir soluções simples, o problema de controle tem sido alterado para torná-lo mais simples de ser resolvido. Na maioria dos casos, esta simplificação tem deixado de lado aspectos fundamentais do problema e é justamente por isso que as novas abordagens não têm sido bem sucedidas em aplicações industriais. Na figura 3 são mostrados todos os aspectos que devem ser considerados na formulação do problema de controle. Prett e Garcia chamaram este problema de “problema fundamental de controle”.

O fato do MPC ser a única técnica que se encaixa na formulação da figura 3 até agora, não significa que seja a única possibilidade. Muitos trabalhos de pesquisa têm sido feitos em controle robusto e não-linear e é possível que nos próximos anos outras técnicas computacionalmente mais simples também venham a ser bem sucedidas. Já em

1994, SHINSKEY (1994) alertou que estavam ocorrendo muitos abusos no uso do MPC, inclusive em situações onde outras leis de controle mais simples seriam mais indicadas.

Como perspectivas para a pesquisa em controle de processos nos próximos anos, o controle robusto e não-linear parece ser a abordagem de maior potencial. No que diz respeito ao MPC não-linear, do ponto de vista prático, grande esforço ainda deve ser gasto no desenvolvimento de métodos numéricos que permitam uma solução rápida e confiável do problema de otimização inerente ao MPC. Do ponto de vista teórico, o maior desafio será provar as propriedades de estabilidade e robustez observadas nas implementações atuais, baseados em horizontes de predição finitos e sem restrições terminais. Fora do escopo do MPC, as técnicas não-lineares oriundas do controle ótimo e do controle robusto modernos e que possuem garantias de robustez e estabilidade devem ser reformuladas para se encaixar dentro da formulação realista da figura 3. Somente desta forma, estas terão chance de competir com o controle preditivo em aplicações industriais.

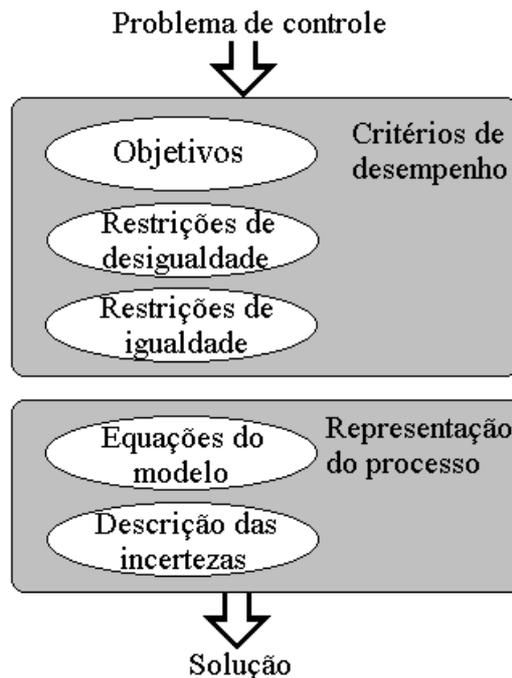


Figura 3 – O problema de controle fundamental.

### Comentário Final

Para fechar esta seção, deve ser dito que a revisão aqui apresentada se restringiu somente a leis de controle e apenas os desenvolvimentos mais populares foram

comentados. O objetivo ao escrever esta revisão é situar o assunto da tese, que será apresentado na próxima seção. Uma consideração implícita no texto é que a planta (ou seja, o processo) está construída e não pode ser modificada. No entanto, hoje é quase um consenso que o controle começa na fase de projeto e que, conseqüentemente, este deve levar em consideração todos os aspectos necessários para garantir a sua boa controlabilidade. Também não foi discutido como obter os diferentes tipos de modelos usados para o projeto do controlador.

## 1.2 OBJETIVOS DA TESE

De tudo que foi discutido na seção 1.1, pode-se concluir que um dos maiores conflitos da teoria de controle é entre robustez e desempenho. Sempre deseja-se o melhor desempenho e desde a década de 1950 o problema de controle vem sendo tratado como um problema de otimização (controle ótimo). Mais recentemente, a questão do desempenho vem sendo aperfeiçoada através da consideração de modelos matemáticos mais realistas, i.e., não-lineares e multivariáveis. Apesar disso, a grande maioria dos desenvolvimentos feitos fora do chamado controle clássico não foi absorvida pelas indústrias químicas. Os principais motivos desta não absorção são: (1) a falta de robustez destas novas técnicas de controle e, (2) sua formulação muito simplificada para o problema de controle, que despreza alguns de seus aspectos fundamentais. O objetivo desta tese é contribuir para a obtenção de um método de projeto de controladores ótimos robustos baseados em formulações MIMO não-lineares.

Considere o diagrama de blocos genérico da figura 4. De um modo geral, o controlador deve ser projetado baseado num modelo matemático do processo e seu objetivo é manter a variável controlada dentro de certos limites especificados, mesmo na presença de :

1. Perturbações externas do tipo (ruídos, perturbações medidas e não-medidas e mudanças de *set-point*);
2. Incertezas no modelo da planta e;
3. Restrições nas variáveis de controle (saturação do controlador e velocidade do atuador).

Dentro deste quadro geral, sabe-se que existe uma imensa quantidade de métodos para se projetar o controlador baseado numa representação matemática da planta, seja esta uma representação linear/linearizada (regras de ajuste PID empíricas, controle LQG,  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$ , MPC, Síntese Direta, etc.) ou não-linear (*Feedback Linearizing*, Controle adaptativo, Controle Deslizante, Controle  $\mathcal{H}_\infty$  não linear e MPC não-linear, por exemplo).

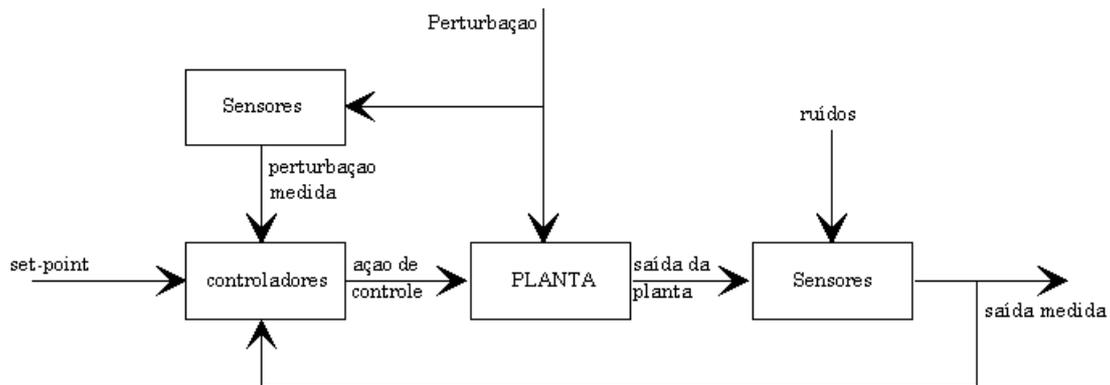


Figura 4 - Diagrama de blocos de um sistema de controle genérico.

Infelizmente, nenhuma destas técnicas consegue satisfazer formalmente os objetivos de controle diante dos três tipos de interferências citadas. A influência das perturbações externas não chega a ser um problema para a maioria das técnicas. Normalmente o fator limitante no projeto do controlador diz respeito às interferências 2 e 3, que normalmente são negligenciadas e/ou tratadas de forma *ad hoc*. De todas estas técnicas, somente o MPC tem se mostrado viável para uso em indústrias químicas. O grande problema com o MPC é que as questões teóricas ligadas à estabilidade e à robustez ainda não estão claras. No entanto, esta ausência de garantias de robustez não tem impedido um grande número de aplicações bem-sucedidas pois, apesar de desejável, a prova matemática é fundamental somente para a teoria.

Assim, como uma alternativa ao MPC, e por ser a teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear a que melhor trata de algumas questões ligadas à robustez e ao desempenho, nesta tese, parte-se do seu estado atual de desenvolvimento e tenta-se identificar algumas lacunas existentes que impedem sua aplicação a sistemas reais. Após isto são feitas algumas propostas para preenchê-las.

O principal motivo que impede a utilização dos resultados da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear é a falta de um método ou algoritmo eficiente para encontrar uma solução positiva-definida que satisfaça a desigualdade de Hamilton-Jacobi-Isaacs. Esta última é uma desigualdade diferencial parcial não-linear de primeira ordem, que aparece no problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear da mesma forma que a equação de Riccati aparece no problema de controle ótimo linear. Outro motivo que limita sua utilização é a falta de um método para determinar a região de validade da lei de controle não-linear. Como um dos objetivos primordiais do controle não-linear é aumentar a região de validade do sistema em malha fechada, o conhecimento desta região é de fundamental importância, tanto para determinar se a lei de controle obtida é prática quanto para saber quão o controle não-linear é melhor que o linear equivalente.

Neste trabalho, essas duas limitações de ordem prática da teoria de controle robusto não-linear são consideradas. Novos resultados sobre a positividade (negatividade) de funções escalares multivariáveis são desenvolvidos e usados para resolver o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. Os resultados obtidos permitem obter, não somente uma solução para o problema, mas também uma estimativa para a região de validade do controlador. Um procedimento sistemático para maximizar a região de validade do controlador também é apresentado e a solução do problema de otimização associado é estudada. Os resultados comentados neste parágrafo formam a maior contribuição da tese e por isso o seu título: “Solução do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear”.

Outra limitação da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear que merece ser citada é a sua inabilidade, na sua formulação atual, para lidar com restrições nas ações de controle. A questão das restrições é fundamental para qualquer aplicação de controle pois se uma ação de controle projetada não puder ser implementada, todo projeto fica comprometido. No entanto, este assunto não é tratado nesta tese, pelo menos diretamente.

Para ilustrar os resultados teóricos apresentados na tese, inúmeros exemplos são apresentados ao longo do texto. Como o “mapa não é o território”, i.e., controlar um modelo não é a mesma coisa que controlar o objeto modelado, uma aplicação experimental da metodologia desenvolvida é aplicada a um sistema contínuo de neutralização de pH. Sistemas de neutralização são altamente não-lineares e bastante comuns na indústria química, tendo se consagrado ao longo dos anos como um

excelente teste padrão para controladores não-lineares. Além disto, não é do conhecimento do autor que exista outra aplicação experimental de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear puro, ou seja, sem estar acoplada a algum esquema de linearização, a algum processo químico.

Como comentário final sobre o objetivo da tese, deve-se ter em mente que a principal motivação para o desenvolvimento deste trabalho não foi o alargamento da teoria de controle robusto não-linear e sim possibilitar seu uso. Espera-se que os resultados possam servir como ponto de partida para o desenvolvimento de novos métodos de controle robusto e não-linear que sirvam de alternativa ao controle preditivo, que tem dominado as aplicações industriais de controle nos últimos anos. Esta expectativa é totalmente justificada se for lembrado que o próprio controle multivariável e a consideração de restrições nas variáveis de controle, hoje bastante comuns na indústria química, também não eram usados até poucos anos atrás quando não havia ferramentas para este fim.

### 1.3 VISÃO GERAL DA TESE

A seguir são apresentados os assuntos tratados nos demais capítulos desta tese.

#### Capítulo 2

Neste capítulo, a teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear é explicada e seus principais resultados teóricos revisados. As principais limitações da teoria são discutidas e o que existe na literatura é revisado. Uma revisão dos principais métodos de cômputo destas leis de controle disponíveis na literatura é apresentada em detalhe. As características e principais limitações destes métodos são analisadas. No fim desta seção, a abordagem a ser seguida para a solução do problema na presente tese é explicada.

#### Capítulo 3

Os resultados matemáticos mais importantes, incluindo os três teoremas matemáticos que formam o coração da tese são apresentados e discutidos, a saber:

**Teorema 3.2:** Critério para determinação do sinal global de funções escalares multivariáveis.

**Teorema 3.3:** Critério para determinação do sinal local de funções escalares multivariáveis.

**Teorema 3.4:** Critério para determinação do sinal local de funções escalares multivariáveis com estimativa da região de sinal definido.

#### **Capítulo 4**

Neste capítulo, as condições para a obtenção de um controlador com região de validade conhecida são especificadas. A seguir, usando os resultados apresentados no capítulo 3, um procedimento sistemático bastante genérico é desenvolvido de modo a maximizar a região de validade do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear quando de sua síntese. Para este fim, o grau de atenuação das perturbações é relaxado, de modo que o problema perde sua otimalidade original. No entanto, o resultado obtido é muito mais prático. Alguns exemplos numéricos ilustrativos são apresentados.

#### **Capítulo 5**

Uma aplicação experimental a um sistema de neutralização de pH é apresentada. Primeiramente, o processo é descrito e o seu modelo desenvolvido. As principais características do processo e sua relevância para o teste de controladores não-lineares são discutidas. Os resultados do modelo são comparados com os dados experimentais. Posteriormente, a lei de controle é sintetizada, de acordo com a metodologia apresentada no capítulo 4. A lei de controle é testada através de simulações. Finalmente, o controlador é implementado na planta e os resultados apresentados.

#### **Capítulo 6**

A aplicação dos resultados do capítulo 3 à teoria da estabilidade de Lyapunov é apresentada neste capítulo. Apesar de não fazer parte do objetivo da tese, os resultados obtidos para este assunto, de certa forma relacionado com o assunto da tese, são inéditos na literatura. Os principais resultados obtidos são: (a) um critério para a escolha de funções de Lyapunov que maximizam a estimativa da região de estabilidade do sistema e, (b) uma extensão do método de Zubov que permite incorporar estimativas da região de atração ao teorema original, restrito somente à região de atração completa e, por esse mesmo motivo, de muito difícil utilização.

## **Capítulo 7**

Neste capítulo são apresentadas as conclusões do trabalho de tese. Uma listagem das principais contribuições também é apresentada, juntamente com perspectivas de trabalhos futuros que podem complementar os resultados obtidos na tese.

# Capítulo 2

## Cômputo de Leis de Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não-Lineares

---

### Resumo

Neste capítulo é apresentada a teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. Após a discussão de seus principais resultados e limitações de ordem prática, é realizada, na seção 2.2, uma revisão dos principais métodos disponíveis na literatura usados para computar sua lei de controle associada. Finalmente, na seção 2.3, a abordagem a ser seguida é explicada.

### 2.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ NÃO LINEAR

A teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  é fruto do esforço da comunidade de controle nas duas últimas décadas no desenvolvimento de técnicas de controle robustas e multivariáveis (ZHOU, DOYLE, 1998). Para obedecer uma seqüência lógica, nesta seção, o significado da norma  $\mathcal{H}_\infty$  e a origem da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear são explicados. A seguir, os principais resultados teóricos da teoria são apresentados. Posteriormente suas principais limitações são discutidas, de modo a introduzir a próxima seção deste capítulo.

#### Interpretação da norma $\mathcal{H}_\infty$

$\mathcal{H}_\infty$  é um termo matemático que denota um espaço normado completo (espaço de Banach). Este espaço, conhecido como “Espaço de Hardy  $\mathcal{H}_\infty$ ” (*Hardy Space  $\mathcal{H}_\infty$* ), consiste de todas as funções analíticas de uma variável complexa limitadas na metade direita do plano aberto (*open RHP*<sup>2</sup>). Deixando a interpretação matemática em segundo plano, uma interpretação do ponto de vista de controle da norma  $\mathcal{H}_\infty$  será apresentada. Considere o sistema linear da figura 5. No caso de um sistema SISO, a norma infinita do sistema  $G$  é equivalente ao maior ganho do sistema sobre todas as frequências (pico do gráfico de magnitude de Bode ou o ponto mais afastado da origem no gráfico de Nyquist). Para sistemas multivariáveis, a interpretação da norma  $\mathcal{H}_\infty$  é semelhante

---

<sup>2</sup> Metade aberta à direita do plano complexo, i.e, com parte real  $\geq 0$ .

desde que se considere o maior valor singular da matriz de transferência como a generalização do ganho de Bode para estes sistemas. Em ambos os casos, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser interpretada como o maior fator de amplificação do sistema (maior ganho de estado estacionário) em resposta a uma excitação senoidal.

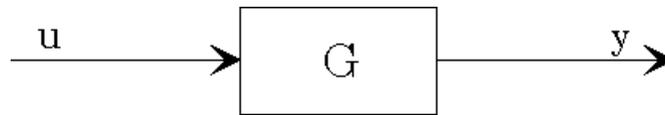


Figura 5 - Sistema linear descrito pela matriz de transferência  $G$ .

Para deixar mais claro este assunto, pode-se recordar um pouco dos conceitos de resposta em frequência para sistemas multivariáveis e de norma induzida.

Considere novamente o sistema linear multivariável da figura 5. Sabe-se da teoria de sistemas lineares que estes sistemas quando perturbados com um sinal senoidal persistente de frequência  $w$  apresentam, após um certo período de tempo (transiente), uma resposta senoidal de mesma frequência mas de amplitude diferente e com um atraso de fase.

Sabe-se também que as razões entre as amplitudes e as diferenças entre as fases podem ser obtidas diretamente da função de transferência do sistema. Assim, cada elemento da matriz de transferência  $G(jw)$ , representado por  $g_{ij}(jw)$ , contém todas as informações necessárias para saber a razão de amplitude e o atraso de fase da saída do canal  $i$  para a entrada do canal  $j$ .

Considere uma entrada escalar senoidal no canal  $j$  dada por:

$$u_j(t) = u_{j0} \cdot \text{sen}(w \cdot t + \phi_j) \quad (2.1)$$

A resposta de estado estacionário, se esta entrada é persistente e o sistema é estável, é também senoidal. No caso do canal de saída  $i$ , esta pode ser escrita como:

$$y_i(t) = y_{i0} \cdot \text{sen}(w \cdot t + \theta_i) \quad (2.2)$$

Neste exemplo, a amplificação e o atraso de fase podem ser obtidos diretamente do número complexo  $g_{ij}(jw)$ , da seguinte maneira:

$$\frac{y_{i0}}{u_{j0}} = |g_{ij}(j\omega)| \quad (2.3)$$

$$\theta_i - \phi_j = \angle g_{ij}(j\omega)$$

A resposta global a sinais de entrada simultâneos e de mesma frequência em diversos canais pode ser calculada, através do princípio da superposição, como o somatório das respostas individuais:

$$y_i(j\omega) = \sum_j g_{ij}(j\omega) \cdot u_j(j\omega) \quad (2.4)$$

ou, na forma matricial:

$$y(j\omega) = G(j\omega) \cdot u(j\omega) \quad (2.5)$$

onde os vetores das entradas e saídas senoidais são dados, no domínio de frequência, por:

$$u(j\omega) = \begin{bmatrix} u_1(j\omega) \\ u_2(j\omega) \\ \vdots \\ u_m(j\omega) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y(j\omega) = \begin{bmatrix} y_1(j\omega) \\ y_2(j\omega) \\ \vdots \\ y_1(j\omega) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

No domínio tempo os sinais de entrada e saída podem ser escritos como:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_{10} \cdot \text{sen}(w.t + \phi_1) \\ \vdots \\ u_{m0} \cdot \text{sen}(w.t + \phi_m) \end{bmatrix}, \quad \text{para as entradas e,} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_{10} \cdot \text{sen}(w.t + \theta_1) \\ \vdots \\ y_{10} \cdot \text{sen}(w.t + \theta_1) \end{bmatrix}, \quad \text{para as}$$

saídas (após o transiente).

Para sistemas SISO, por razões óbvias, o ganho de  $G(j\omega)$  depende somente da frequência  $w$  e é igual à razão entre a norma-2 do sinal de saída dividida pela norma-2 do sinal de entrada. Para sistemas MIMO, onde os sinais de entrada e saída são vetores, para saber o ganho da matriz de transferência deve-se somar, de alguma maneira, as magnitudes dos elementos do vetor através do uso de alguma norma. Normalmente, é selecionada a norma vetorial euclidiana (norma-2) que é a noção usual de distância no

mundo real. Então, numa dada frequência  $w$ , as magnitudes dos vetores de entrada e saída são dadas, respectivamente, por:

$$\|u(jw)\|_2 = \sqrt{\sum_j |u_j(jw)|^2} = \sqrt{u_{10}^2 + u_{20}^2 + \dots} \quad (2.7)$$

$$\|y(jw)\|_2 = \sqrt{\sum_i |y_i(jw)|^2} = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2 + \dots} \quad (2.8)$$

E, o ganho do sistema  $G(s)$  para uma entrada em particular  $u(jw)$  é dada pela razão:

$$\frac{\|y(jw)\|_2}{\|u(jw)\|_2} = \frac{\|G(jw).u(jw)\|_2}{\|u(jw)\|_2} = \frac{\sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2 + \dots}}{\sqrt{u_{10}^2 + u_{20}^2 + \dots}} \quad (2.9)$$

Como no caso SISO, o ganho depende da frequência  $w$  e é independente da magnitude da entrada  $\|u(jw)\|_2$ . No entanto, para um sistema multivariável, o ganho, diferentemente do caso SISO, depende da direção da entrada  $u$  (por exemplo, duas entradas de mesma norma-2 podem ter ganhos diferentes). Assim, numa dada frequência,  $w$ , pode-se ter inúmeros ganhos, dependendo da direção do vetor de entradas.

Apesar desta indefinição do ganho, é possível definir dois ganhos para o sistema numa dada frequência: o maior e o menor.

O máximo valor do ganho na equação 2.9, quando a direção da entrada varia, é o máximo valor singular de  $G$ :

$$\bar{\sigma}(G) = \max_{u \neq 0} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2} = \max_{\|u\|_2=1} \|Gu\|_2 \quad (2.10)$$

Enquanto que o ganho mínimo é o menor valor singular de  $G$ :

$$\sigma(G) = \min_{u \neq 0} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2} = \min_{\|u\|_2=1} \|Gu\|_2 \quad (2.11)$$

E a maior amplificação, dada pelo maior valor singular sobre todas as frequências, é a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema G:

$$\|G\|_\infty = \sup_{w \in \mathfrak{R}} \bar{\sigma}(G) \quad (2.12)$$

Outra interpretação da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema pode ser obtida através do conceito de norma induzida. Esta é um tipo especial de norma, aplicável a operadores, inclusive matriciais. Usando a notação da figura 5, a norma-p induzida de uma sistema matricial  $g(t)$ , no domínio tempo, é dada por:

$$\|g\|_{ip} = \max_{\|u\|_p \neq 0} \frac{\|y\|_p}{\|u\|_p} = \max_{\|u\|_p \neq 0} \frac{\|gu\|_p}{\|u\|_p} \quad (2.13)$$

No caso particular da norma-2 induzida, tem-se:

$$\|g\|_{2i} = \max_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|gu\|_2}{\|u\|_2} = \max_{\|u\|_2=1} \|gu\|_2 \quad (2.14)$$

É um fato conhecido que a norma-2 induzida é uma generalização do ganho (ganho máximo) para sistemas multivariáveis<sup>3</sup>. Esta norma matricial pode ser interpretada como o maior valor possível para a amplificação do sinal de saída sobre o de entrada quando esta entrada é limitada em energia (norma-2 do sinal de entrada). Esta interpretação é muito importante pois permite a generalização dos resultados para sistemas não-lineares ou variantes no tempo.

A conexão da norma-2 induzida com a norma  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares pode ser provada através de alguns resultados matemáticos (ZHOU et al., 1996). Deste modo, pode-se concluir que se o sistema  $g(t)$  for linear e limitado e, além disso, possui uma

---

<sup>3</sup> Note que para achar o ganho máximo não é preciso citar “sobre todas as frequências” pois isto já está incorporado na equação 2.14 que engloba todas as entradas possíveis limitadas em energia.

transformada de Laplace  $G(s)$  que pertence à  $\mathcal{H}_\infty$ , i.e., que seja uma matriz de transferência estável, então a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é equivalente à norma-2 induzida. Além disso, pode ser mostrado que, para sistemas lineares, a norma-2 induzida do sistema, tanto no domínio tempo como no de frequência, é igual ao máximo valor singular do operador  $G(s)$ , que é a própria definição da norma  $\mathcal{H}_\infty$  deste sistema.

Dadas estas explicações, pode-se agora escrever a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema  $G$  da figura 5 em função dos sinais de entrada e saída no domínio tempo:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\phi_i, w, \hat{u}} \frac{\|\hat{y}\|_2}{\|\hat{u}\|_2} \quad (2.15)$$

$$\text{onde } \hat{u} = \begin{bmatrix} u_{10} \\ \vdots \\ u_{m0} \end{bmatrix} \text{ e } \hat{y} = \begin{bmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{l0} \end{bmatrix}$$

Note que, para o caso de sistemas não-lineares, a norma-2 induzida existe mas não é igual à norma  $\mathcal{H}_\infty$  - simplesmente porque não existe norma  $\mathcal{H}_\infty$  para operadores não-lineares. Mas, mesmo assim, talvez pelo fato da interpretação no domínio tempo ser a mesma para sistemas lineares, a extensão não-linear do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$ , ou seja, o problema de minimização do ganho  $\mathcal{L}_2$ -induzido, costuma ser referido na literatura como controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. Na realidade, nestes casos, o mais correto seria escrever controle  $\mathcal{L}_2$ -induzido (ou de ganho  $\mathcal{L}_2$ -induzido). No entanto, para manter a padronização da literatura, a nomenclatura “ $\mathcal{H}_\infty$  não-linear” foi mantida nesta tese.

### Origens da teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$ não-linear

O início da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  (linear) pode ser atribuída a G. Zames no fim dos anos 70 e início dos 80 (ZAMES, 1979, 1981). Suas idéias se baseavam em duas constatações importantes (WILLENS, 1998):

- 1) O principal objetivo de controle é lidar com as incertezas e,
- 2) Os modelos deveriam expressar esta incerteza mas, um modelo muito preciso da incerteza é um oxímoro (i.e., um paradoxismo).

George Zames suspeitava dos métodos do controle moderno por achá-los muito sensíveis ao modelo. Ele era também contrário ao snobismo matemático vigente nos anos 60 e 70 e via a robustez e a estabilidade como objetivos muito mais importantes que desempenhos ótimos baseados em modelos matemáticos precisos. Com o tempo, estes conceitos vieram se tornar o ponto central da teoria de controle atual e hoje são plenamente aceitos mas foram muito originais na época.

Inicialmente, o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  foi tratado através de modelos lineares SISO no domínio de frequência. Esta formulação se encontra em alguns livros de teoria de controle como “*A course in  $\mathcal{H}_\infty$  control theory*” (FRANCIS, 1987), de Bruce Francis e no artigo tutorial de KWAKERNAAK (1993).

A formulação no domínio de frequência foi usada para resolver o problema  $\mathcal{H}_\infty$  até o fim dos anos 80 quando, com os trabalhos de GLOVER e DOYLE (1988) e DOYLE et al. (1989), foi possível encontrar soluções no domínio tempo para o problema através de descrições no espaço de estados. Esta solução no domínio tempo, além de popularizar este tipo de controle, possibilitou estender a formulação do problema  $\mathcal{H}_\infty$  para modelos não-lineares e variantes no tempo, marcando o início de uma série de trabalhos que até hoje procuram generalizar os resultados obtidos na formulação linear para o caso não-linear.

Segundo alguns pesquisadores, o problema linear está praticamente resolvido e é bem entendido. Assim, com o objetivo de obter controladores com melhor desempenho e região de validade maiores, as pesquisas da última década se voltaram para a extensão dos resultados lineares a sistemas não-lineares. Ao contrário do caso linear, o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear ainda está na sua infância. Os primeiros trabalhos nesta área recém completaram 10 anos (BALL, HELTON, 1988, 1989, VAN DER SCHAFT, 1991). Existem várias abordagens, como teoria de jogos diferenciais e teoria de sistemas dissipativos, que se complementam, e que tem sido utilizadas com sucesso para realizar esta extensão. Em vários casos têm sido encontradas relações interessantes entre os problemas linear e não-linear. Uma caracterização completa do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear está disponível e, de uma maneira geral, um problema com realimentação de estados pode ser resolvido desde que uma certa desigualdade diferencial parcial, conhecida como desigualdade de Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) - a versão não-linear da equação de Riccati do problema linear - admita uma solução positiva definida. O nome HJI vem do fato que a desigualdade a ser resolvida é uma equação do tipo Hamilton-

Jacobi que aparece na solução de um jogo diferencial associado ao problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. Esta equação foi desenvolvida por Rufus Isaacs em meados dos anos 50 e publicada no livro *Differential Games* (ISAACS, 1965), 10 anos após.

Como não é de interesse na presente tese, e por ser um caso particular dos resultados da formulação não-linear, a teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  linear não será discutida daqui por diante. Existem diversos livros textos dedicados ao assunto, por exemplo (ZHOU et al., 1996, ZHOU, DOYLE, 1998). A seguir, são apresentados os principais resultados teóricos da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear.

### Formulação do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ não-linear

Considere inicialmente o sistema não-linear descrito pelo sistema de equações 2.16.

$$\begin{aligned} f(\dot{x}, x, w, u, t) &= 0 \\ g(z, x, w, u, t) &= 0 \\ h(y, x, w, u, t) &= 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Neste sistema,  $x \in M$  ( $M \subseteq \mathfrak{R}^n$ ) é o vetor de estado do sistema, definido numa vizinhança da origem,  $w \in \mathfrak{R}^q$  é o vetor de entradas exógenas,  $u \in \mathfrak{R}^m$  é o vetor das ações de controle,  $z \in \mathfrak{R}^s$  é o vetor de saídas exógenas que caracterizam o objetivo de controle,  $y \in \mathfrak{R}^p$  é o vetor de informações que alimentam o controlador e  $t$  é o tempo. Esta descrição, talvez a mais genérica possível usando a abordagem de espaço de estados estendido, pode se encaixar na configuração geral de controle da figura 6.

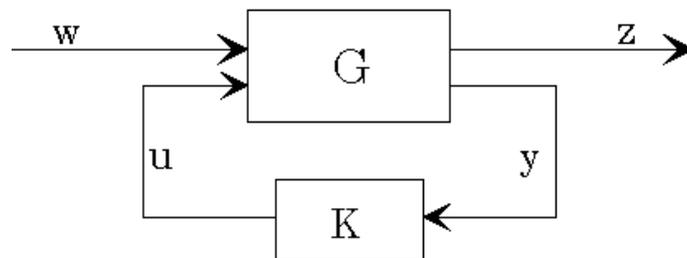


Figura 6 – Configuração geral para síntese de controladores

Como não existe uma solução na literatura para sistemas descritos por 2.16, nesta tese, partir-se-á da descrição mais genérica para a qual existem soluções disponíveis na literatura. Esta é dada pelo sistema de equações 2.17, onde as variáveis tem o mesmo significado que em 2.16.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, w, u) \\ z &= Z(x, w, u) \\ y &= Y(x, w, u) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Por simplicidade, é comum considerar que a origem do espaço de estados é a solução de interesse para o sistema, isto é  $F(0,0,0) = Z(0,0,0) = Y(0,0,0) = 0$ . Esta simplificação será adotada daqui por diante.

Dada uma descrição não-linear como o do sistema de equações 2.17, por exemplo, os objetivos do controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear são dois:

- 1) Estabilizar assintoticamente a planta em malha fechada.
- 2) Atenuar a influência das entradas externas  $w$  na variável controlada  $z$ .

A atenuação no objetivo 2 é definida em termos da razão entre as normas  $\mathcal{L}_2$  de  $w$  para  $z$ , o chamado ganho  $\mathcal{L}_2$ -induzido ou simplesmente ganho  $\mathcal{L}_2$  (que tem a mesma interpretação da norma  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares). A seguir, este ganho é definido, de acordo com (VAN DER SCHAFT, 1992).

**DEFINIÇÃO 2.1 - Ganho  $\mathcal{L}_2$  finito.** Dado qualquer  $\gamma > 0$ , o mapeamento de  $w(t)$  para  $z(t)$  é dito ter ganho  $\mathcal{L}_2$  finito menor ou igual a  $\gamma$  se, sob condição inicial nula,  $x(0) = 0$ ,

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \tag{2.18}$$

para todo  $T \geq 0$  e todo  $w(\cdot) \in \mathcal{L}_2(0,T)$ , onde  $\|\cdot\|$  denota a norma-2 euclidiana.

No entanto, a minimização do ganho  $\mathcal{L}_2$  tem dois sérios problemas:

1. É muito difícil de realizar na prática (mesmo para o caso linear).
2. Pode resultar num controlador com uma região de validade muito pequena (YAZDANPANA et al., 1999) ou muito próximo da fronteira de estabilidade (KEEL, BHATTACHARYYA, 1997).

Devido a estas duas razões, é usual na literatura de controle considerar somente soluções sub-ótimas para o problema. Neste caso, o mínimo de  $\gamma$  é trocado pela atenuação do ganho a algum nível aceitável.

A solução sub-ótima do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear via realimentação de estado ( $y = x$ ), para um sistema descrito pelo sistema de equações 2.17, pode ser dada pelo teorema 2.1 (YUNG et al., 1998). Antes de enunciar este resultado, é necessário apresentar duas considerações que são assumidas como verdadeiras no referido teorema.

**CONSIDERAÇÃO 2.1.** A matriz  $D_{12}$  possui posto (*rank*)  $m$  e a matriz  $D_{11}^T D_{11} - \gamma^2 I$  é negativa definida, onde  $\gamma$  é um número positivo,  $D_{12} = \left( \frac{\partial Z}{\partial u} \right)_{(x,w,u)=(0,0,0)}$  e

$$D_{11} = \left( \frac{\partial Z}{\partial w} \right)_{(x,w,u)=(0,0,0)}.$$

**CONSIDERAÇÃO 2.2.** Qualquer trajetória limitada,  $x(t)$ , do sistema  $\dot{x}(t) = F(x(t), 0, u(t))$  que satisfaça  $Z(x, 0, u) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , é tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

**TEOREMA 2.1 - Solução sub-ótima do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear via realimentação de estados.**

“Considere o sistema não-linear 2.17 e um parâmetro real,  $\gamma > 0$ . Suponha que as considerações 2.1 e 2.2 são válidas. Suponha que as seguintes hipóteses também sejam verdadeiras: Existe uma função suave positiva definida,  $V(x)$ , localmente definida numa vizinhança da origem em  $\mathfrak{R}^n$ , tal que a função

$$H_*(x) = H(x, V_x^T(x), \alpha_1(x), \alpha_2(x))$$

seja negativa semidefinida na vizinhança de  $x = 0$  (a desigualdade  $H_*(x) \leq 0$  é chamada de desigualdade HJI), onde  $V_x(x)$  denota o vetor linha

$$(\partial V / \partial x) = [(\partial V / \partial x_1) \cdots (\partial V / \partial x_n)]$$

e a função  $H: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^q \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$  é o pré-Hamiltoniano do sistema<sup>4</sup>, definido numa vizinhança de  $(x, p, w, u) = (0, 0, 0, 0)$  como

$$H(x, p, w, u) = p^T \cdot F(x, w, u) + \|Z(x, w, u)\|^2 - \gamma^2 \cdot \|w\|^2$$

onde  $p \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de multiplicadores de Lagrange,  $\alpha_1(x) = w_*(x, V_x^T(x))$ ,  $\alpha_2(x) = u_*(x, V_x^T(x))$ ,  $w_*(x, p)$  e  $u_*(x, p)$  são definidos numa vizinhança de  $(x, p) = (0, 0)$ , que satisfaça

$$\frac{\partial H}{\partial w}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) = 0$$

com  $w_*(0, 0) = 0$  e  $u_*(0, 0) = 0$ .

Então, a lei de controle *feedback*  $u = \alpha_2(x)$  resolve localmente o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear sub-ótimo via realimentação de estados para um nível de atenuação de perturbações igual ou menor que  $\gamma$ .”

A respeito do resultado do teorema 2.1, pode ser mostrado que o requerimento de estabilidade assintótica do controlador é satisfeito porque  $V(x)$  é uma função de Lyapunov (para maiores informações sobre a teoria de estabilidade de Lyapunov,

<sup>4</sup> Nomenclatura advinda da teoria de jogos diferenciais (VAN DER SCHAFT, 1999, ISAACS, 1965). Ao se substituir os valores ótimos de  $u(t)$  e  $w(t)$  neste pré-hamiltoniano, chega-se ao Hamiltoniano (ótimo) que define a desigualdade HJI.

recomenda-se ler o capítulo 6 desta tese) para o sistema não perturbado<sup>5</sup> (ISIDORI, KANG, 1995). Assim, como uma consequência da teoria de Lyapunov, a consideração 2.2 pode ser eliminada do teorema 2.1 se a desigualdade HJI for trocada pela sua versão estrita ( $H_*(x) < 0$ ) no mesmo teorema.

Uma descrição bastante popular na teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, e que aparece nos primeiros trabalhos sobre o assunto (VAN DER SCHAFT, 1991), é a descrição afim nas entradas, ou IA (do inglês, *Input Affine*). Um sistema é dito IA se, por exemplo, pode ser descrito pelas equações 2.19.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x).u + k(x).w \\ z &= \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $k(x)$  e  $h(x)$  são funções não-lineares suaves e, de novo, por simplicidade,  $f(0) = h(0) = 0$ .

Uma propriedade muito útil das descrições IA é que elas permitem o conhecimento do formato das soluções obtidas para o controle ótimo e para a pior perturbação possível. O teorema 2.2, a seguir, fornece a solução para o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, para sistemas IA descritos pelas equações 2.19, via realimentação de estados (VAN DER SCHAFT, 1992). Porém agora, diferente do teorema 2.1, é explorada a abordagem da desigualdade HJI estrita, ao invés de assumir uma consideração de detectabilidade similar à consideração 2.2.

**TEOREMA 2.2 - Solução local sub-ótima para o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear via realimentação de estados para sistemas IA.**

“Considere o sistema não-linear 2.19 e um parâmetro real  $\gamma > 0$ . Suponha que existe uma solução suave positiva definida,  $V(x) > 0$ , para a desigualdade HJI dada pela equação a seguir,

$$H_*(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x).f(x) + \frac{1}{2}.h^T(x).h(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x}(x) \cdot \left( g(x).g^T(x) - \frac{1}{\gamma^2}.k(x).k^T(x) \right) \frac{\partial V}{\partial x}(x) < 0$$

<sup>5</sup> Por sistema não perturbado, entende-se que  $w(t) = 0$  na equação 2.17.

então, o sistema em malha fechada com a realimentação da equação 2.20,

$$u_*(x) = -g^T(x) \cdot \frac{\partial^T V}{\partial x}(x) \quad (2.20)$$

é assintoticamente estável na origem e tem um ganho  $\mathcal{L}_2$  local (de  $w$  para  $z = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$ )

menor ou igual a  $\gamma$ . Além disso, a pior perturbação que o sistema pode sofrer de modo a

manter esta atenuação é dada por  $w_*(x) = \frac{1}{\gamma^2} k^T(x) \cdot \frac{\partial^T V}{\partial x}(x)$ .”

Note que para o resultado do teorema 2.2 ser coerente com o teorema 2.1, é necessário que a solução da desigualdade HJI do teorema 2.1 seja dividida por 2.

Como o objetivo da tese é obter soluções para o problema de controle, o caso de realimentação de saídas (*output feedback*) não será aqui discutido. Para os interessados, o desenvolvimento de controladores via realimentação de saídas, assim como as provas dos teoremas 2.1 e 2.2, podem ser encontradas em (YUNG et al., 1998, ISIDORI, KANG, 1995, VAN DER SCHAFT, 1999). Da mesma forma, as relações entre os resultados da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear e outras matérias de matemática aplicada – como a teoria de sistemas dissipativos (WILLEMS, 1972, HILL, MOYLAN, 1976, 1980), a teoria de jogos diferenciais (ISAACS, 1965) e a teoria da estabilidade de Lyapunov (LYAPUNOV, 1892, CHETAYEV, 1955, LASALLE, LEFSCHETZ, 1961, HAHN, 1967) - não serão apresentadas. Estes temas estão disponíveis na literatura e tomariam um espaço extremamente grande da tese. Um texto que explica estas relações de modo bastante didático está disponível em ISIDORI (1994).

### **Limitação fundamental da teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$ não-linear**

É interessante notar que os teoremas 2.1 e 2.2, assim como outros resultados similares da literatura, não fornecem qualquer informação sobre como calcular a solução da equação HJI,  $V(x)$ , nem falam algo sobre o tamanho da região local onde a lei de controle é válida. De fato, somente condições para a existência da solução são enunciadas. Nenhum resultado quantitativo é apresentado.

Reconhecidamente, a principal limitação da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear é a inexistência de métodos para resolver a desigualdade HJI (VAN DER SCHAFT, 1999), tanto global quanto localmente. Não é por acaso que são raros os relatos de aplicações da teoria a sistemas reais. Recentemente, têm aparecido na literatura alguns trabalhos sobre o cômputo destas leis de controle (YANG et al., 1998, TSIOTRAS et al., 1998, HARDT et al., 2000). No entanto, com exceção do trabalho de BEARD et al. (1998), que será discutido na próxima seção, os trabalhos não se preocupam em fornecer informações quantitativas sobre o controlador obtido, mais especificamente, sobre a região de validade da aproximação local obtida com seus métodos.

Como a obtenção de uma solução global para a desigualdade HJI é muito difícil, a determinação da região de validade local do controlador é de grande importância pois, muitas vezes, quando se aproxima da solução ótima - i.e., do menor valor de  $\gamma$  que satisfaz os teoremas associados à solução do problema - a região de atração em malha fechada do sistema se reduz a uma vizinhança cada vez menor em torno do ponto estacionário de interesse. No pior dos casos, a solução converge para este ponto. Assim, se pelo menos uma estimativa da região de estabilidade para cada valor de  $\gamma$  estivesse disponível, poder-se-ia julgar a real utilidade da solução obtida. Outra razão para o conhecimento da região de validade é permitir comparações entre os desempenhos de controladores lineares e não-lineares com o mesmo nível de atenuação e/ou obtidos com outros métodos.

Para trabalhar com resultados quantitativos, antes de mais nada, é necessário definir a região de validade do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear e sua estimativa. A definição usada neste trabalho foi extraída de (YAZDANPANAHI et al., 1999) e é apresentada na definição 2.2. Como a descrição IA das equações 2.19 é um caso particular da descrição das equações 2.17, somente esta última será mencionada na definição a seguir.

**DEFINIÇÃO 2.2 – Região de validade do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear.** A região do espaço de estados do sistema de equações 2.17 que, sujeito à lei de controle *feedback* do teorema 2.1, simultaneamente satisfaz a desigualdade HJI e garante a estabilidade do sistema em malha fechada para a pior perturbação possível ( $w_*(x,p)$  do teorema 2.2), é referida como a região de validade correspondente ao controlador  $u(t) = \alpha_2(x)$ . Qualquer região do espaço de estados que seja um subconjunto desta região é chamada de uma estimativa da região de validade do controlador.

Deve ser observado que a definição 2.2 não é tão natural quanto pode parecer a primeira vista. Na formulação do problema original (VAN DER SCHAFT, 1991), um dos objetivos é estabilizar o sistema não perturbado. No entanto, por parecer de maior importância considerar a pior perturbação na definição da região de validade, optou-se pela definição usada em Yazdanpanah et al. (1999).

Na próxima seção, é apresentada uma revisão da literatura sobre o cômputo de leis de controle  $\mathcal{H}_\infty$  lineares e, nos próximos dois capítulos, a abordagem desta tese é desenvolvida. No entanto, por uma questão de unidade, ainda nesta seção, são comentadas as outras limitações da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear.

### **Outras limitações da teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$ não-linear**

Como foi comentado anteriormente, a principal limitação da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear é a inexistência de métodos para o cálculo da sua lei de controle e sua região de validade. No entanto, estas não são as únicas limitações da teoria. Existem outras questões que, apesar de não serem tão cruciais, também têm limitado a sua aplicação, por exemplo as colocadas a seguir.

#### 1) Robustez às incertezas do modelo e do controlador:

A escassez de resultados ligados à robustez frente às incertezas dos modelos e controladores também é um fator limitante para a aplicação da teoria. Praticamente todas as formulações não-lineares assumem que o modelo é perfeitamente conhecido e o controlador projetado será implementado sem incertezas.

Quanto às incertezas do modelo, sabe-se que os problemas clássicos lineares de estabilidade robusta (RS, *robust stability*) e desempenho robusto (RP, *robust performance*) também admitem uma formulação no contexto não-linear. No entanto, devido à dificuldade de se lidar de forma unificada e eficiente com a representação de incertezas em sistemas não-lineares, somente nos últimos 5 anos este tópico começou a ser considerado através de incertezas limitadas em normas (LU, DOYLE, 1997, NGUANG, 1996, LU et al., 2000).

Outro ponto para o qual atualmente foi chamada a atenção na literatura é a fragilidade dos controladores ótimos e robustos. KEEL E BHATTACHARYYA (1997) alertam a comunidade de controle que alguns controladores ótimos e robustos podem instabilizar o sistema em malha fechada se não forem implementados com os seus parâmetros exatamente iguais aos calculado na etapa de projeto. Seus exemplos se

restringiram a sistemas lineares e monovariáveis devido à possibilidade de verificar esta fragilidade através dos conceitos de margem de ganho e margem de fase em malha fechada. Verificar a sensibilidade da resposta para mudanças nos parâmetros do controlador em sistemas não-lineares e multivariáveis, embora não seja uma questão de grande interesse atual, também seria uma grande contribuição para a teoria de controle.

É possível que ambos problemas ligados às incertezas (do controlador e da planta) possam ser melhor resolvidas se forem consideradas incertezas paramétricas na solução do problema. Atualmente, a maioria dos trabalhos de controle  $\mathcal{H}_\infty$  que lidam com incertezas somente consideram incertezas nos modelos através de termos limitados em norma. No entanto, as incertezas dos sistemas reais são melhor descritas através de incertezas paramétricas. Como atualmente já existe uma teoria de controle robusto paramétrico para sistemas lineares, seria de se esperar que no futuro, estes resultados pudessem ser estendidos para formulações não-lineares.

## 2) Restrições:

Conforme comentado no capítulo 1, o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não lida com restrições de forma explícita. Isto pode gerar alguns problemas quando da implementação dos controladores, pois as variáveis de sistemas reais possuem restrições que devem ser respeitadas. Seria de grande interesse que o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  fosse reformulado de forma a englobar estas restrições na etapa de projeto do controlador. No entanto, este problema não é exclusivo da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, mas de toda teoria de controle. Apesar de muito importante, nesta tese, este problema não é considerado de forma direta.

## 3) Persistência do *off-set*:

O problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear visa obter um controlador que resulte num sistema em malha fechada assintoticamente estável e que minimize o parâmetro que mede a atenuação das perturbações. A eliminação do *off-set* não faz parte do objetivo de controle. Assim, no caso de perturbações persistentes, ocorre várias vezes o deslocamento do ponto de equilíbrio para um novo valor. Muitas vezes, este *off-set* pode ser indesejado. A abordagem padrão na literatura para este fim é a introdução de um integrador na lei de controle. No entanto, esta introdução pode fazer a solução do problema (a lei de controle) perder sua otimalidade. Outra maneira de adicionar um integrador sem perder a otimalidade é aumentar o modelo da planta com um estado correspondente ao integrador. Normalmente esta introdução, além de aumentar a

complexidade do problema a ser resolvido, resulta num sistema sem solução. As vezes, nem mesmo esta introdução resulta num controlador com modo integral. Nesta tese, uma maneira de introduzir um integrador sem perder a otimalidade do projeto é apresentada no exemplo do capítulo 5. De modo a garantir a presença do integrador, o controlador deve apresentar uma estrutura pré-definida e, para garantir a solvabilidade do problema, as propriedades de detectabilidade do modelo usado são exploradas.

## 2.2 APROXIMAÇÕES DA LITERATURA E SUAS LIMITAÇÕES

Uma grande dificuldade encontrada na implementação de leis de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-lineares diz respeito a como encontrar soluções para as desigualdades HJI que estejam numa forma adequada para a implementação. A desigualdade HJI dificilmente tem uma solução global em forma fechada. Assim sendo, é necessário aproximar numericamente esta solução de modo a obter uma lei de controle numa vizinhança da solução de interesse. Idealmente, tal aproximação deveria ter as características descritas na definição 2.3.

### **DEFINIÇÃO 2.3 - Características desejáveis para uma aproximação ideal de uma lei de controle $\mathcal{H}_\infty$ não-linear.**

”Uma aproximação ideal de uma lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear deve satisfazer de alguma forma os seguintes critérios:

- A) Ser explícita, de implementação fácil e simples de ajustar.
- B) Não exigir um esforço computacional proibitivo (em termos de tempo de computação e necessidade de memória).
- C) A região de validade da solução possa ser definida ou conhecida.
- D) O aumento da complexidade do controlador deve implicar numa melhora do seu desempenho. Essa melhora é medida de duas maneiras:
  - D.1) em termos do nível de atenuação do sistema em malha fechada e
  - D.2) em termos do tamanho da região de validade em malha fechada.
- E) No caso de aproximações por séries, ter garantia de estabilidade para truncamentos finitos das séries.”

Existem várias propostas na literatura para resolver a desigualdade HJI. A grande maioria destas tenta resolver a equação HJI ao invés da desigualdade. Também foi observado que a maioria destes métodos falha em, pelo menos, três dos requerimentos da hipotética lei de controle ideal da definição 2.3.

Como a solução da equação HJI é uma lei de controle que deve ser implementada, uma solução numérica do tipo diferenças finitas ou elementos finitos não parece ser o mais indicado e, por isso, os métodos que se baseiam neste tipo de abordagem não serão comentados. Outro método comum consiste em integrar a equação HJI para uma condição inicial específica. No entanto isso resulta num controle em malha aberta que é muito difícil de implementar na prática. A própria história do controle ótimo mostra que este tipo de abordagem não tem muitas possibilidades de êxito na prática. Outra possibilidade seria usar as propriedades de aproximação universal das redes neurais para tentar resolver o problema. Em YANG et al. (1997), esta possibilidade é explorada. No entanto, esta abordagem resulta numa lei de controle muito complexa e sem nenhuma informação sobre sua região de validade.

Neste trabalho, dar-se-á ênfase aos métodos de aproximação por séries, mais especificamente, séries polinomiais. Esta escolha é devido ao fato deste tipo de método ser intuitivamente o melhor candidato à obtenção de uma lei de controle e também por ter sido sugerido nos trabalhos teóricos iniciais da teoria.

A primeira contribuição para a solução do problema  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear neste sentido aparece em (Van der Schaft, 1991). Partindo possivelmente da observação que a matriz jacobiana do campo vetorial hamiltoniano do problema não-linear tem uma estrutura semelhante a uma matriz hamiltoniana que aparece no problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  linear, Van der Schaft provou que existe uma solução não-linear local para o problema  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear se o problema linear correspondente pode ser resolvido. Em outras palavras, a solução do problema para a aproximação linear é uma solução local para o problema não-linear. No entanto nada é dito sobre o tamanho desta região local.

Esses resultados iniciais foram estendidos posteriormente por Isidori (1994), que provou que, sob algumas condições fáceis de serem verificadas, podem existir soluções locais mesmo que o sistema linearizado não possa ser resolvido.

Quanto às soluções não-lineares propriamente ditas, desde que Van der Schaft (1992) citou o método de aproximação por séries desenvolvido por Lukes (Lukes, 1969) como uma possibilidade para encontrar uma aproximação para a equação HJI, este tem

sido o método mais usado nos trabalhos que tratam deste assunto. Muitas variantes apareceram na literatura. Neste trabalho, a variante desenvolvida por Isidori e Kang (1995), por ser a mais genérica e de mais fácil utilização, é usada como exemplo desta categoria de método. Uma observação interessante é que esta variante, apesar de não gerar um procedimento sistemático, parece ser a única que explora a possibilidade de se resolver a desigualdade HJI ao invés da igualdade (equação).

Recentemente, um importante resultado no âmbito de aproximações por séries foi apresentado por BEARD e MCLAIN (1998). Neste trabalho, a partir de uma lei de controle inicial com região de estabilidade conhecida, os autores conseguem obter uma aproximação para a lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear com a mesma região de estabilidade inicial (a região de estabilidade não é a mesma coisa que a região de validade, ver definição 2.2). Isto é feito através de um algoritmo que combina o método de aproximação de Galerkin com aproximações sucessivas.

Estes dois métodos, assim como suas limitações, são descritos a seguir.

### **Método de Lukes – Variante de Isidori e Kang**

O método apresentado em (Lukes, 1969) é conhecido por alguns como método da perturbação<sup>6</sup> pois o sistema não-linear é considerado como uma perturbação de um sistema linear. O custo ótimo e as ações de controle são consideradas analíticas e expandidas em séries de Taylor. Várias técnicas são empregadas para encontrar os primeiros termos nas séries.

Na versão original (VAN DER SCHAFT, 1992), que pode ser encontrada em vários trabalhos (CHRISTEN, CIRILLO, 1997, TSOTRAS et al., 1998, SHUE et al., 2000), a aproximação de menor ordem corresponde ao problema linear e produz uma aproximação de primeira ordem para a lei de controle e de segunda ordem para a solução da “equação” HJI. O método é bastante trabalhoso e não há garantias de que a lei de controle de ordem mais elevada irá melhorar o desempenho do sistema de controle em malha fechada. Os resultados obtidos em (CHRISTEN, CIRILLO, 1997) e (TSOTRAS et al., 1998) comprovam estas afirmações.

Por sua vez, o procedimento usado por ISIDORI e KANG (1995) se baseia na solução da desigualdade HJI e não requer, nem a solução da equação de Riccati do

---

<sup>6</sup> Os chamados métodos de perturbação são técnicas de solução aproximadas particularmente úteis para resolver equações que contém um pequeno parâmetro que, quando cancelado, permite a solução analítica da equação. Seu principal uso é na solução de equações diferenciais não-lineares.

primeiro termo, nem dos sucessivos problema lineares que aparecem no método original. Seus resultados foram desenvolvidos para uma classe de sistemas similares aos das equações 2.17 e podem ser resumidos, para o caso com realimentação de estado, da seguinte maneira:

Suponha que o interesse seja a determinação de uma função positiva-definida  $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , definida numa vizinhança da origem e nula para  $x=0$ , tal que:

$$H(x, V_x^T(x), w_*(x, V_x^T(x)), u_*(x, V_x^T(x))) = \phi(x) \quad (2.21)$$

para alguma função  $\phi(x)$  analítica, negativa semi-definida ou negativa definida (dependendo das considerações do problema a ser resolvido) - note que a equação 2.21 é a própria desigualdade HJI. Suponha que  $V(x)$ ,  $w_*(x)$ ,  $u_*(x)$  e  $\phi(x)$  são analíticas. Então, podem-se realizar suas expansões em séries:

$$V(x) = \sum_{d=1}^{\infty} V^{[d+1]}(x) \quad (2.22)$$

$$w_*(x) = w_*(x, V_x^T(x)) = \sum_{d=1}^{\infty} w_*^{[d]}(x) \quad (2.23)$$

$$u_*(x) = u_*(x, V_x^T(x)) = \sum_{d=1}^{\infty} u_*^{[d]}(x) \quad (2.24)$$

$$\phi(x) = \sum_{d=2}^{\infty} \phi^{[d]}(x) \quad (2.25)$$

onde o índice  $[d]$  significa que os componentes das funções são polinômios homogêneos de grau  $d$ .

Na abordagem original (VAN DER SCHAFT, 1992), é possível mostrar que, para qualquer  $d > 1$ ,  $V^{[d+1]}(x)$ ,  $w_*^{[d]}(x)$  e  $u_*^{[d]}(x)$  dependem somente de  $V^{[2]}(x)$ ,  $w_*^{[1]}(x)$ ,  $u_*^{[1]}(x)$ , ...,  $V^{[d]}(x)$ ,  $w_*^{[d-1]}(x)$  e  $u_*^{[d-1]}(x)$ . A função  $V^{[2]}(x)$  é

determinada através de uma equação de Riccati envolvendo os parâmetros que caracterizam a aproximação linear da planta no equilíbrio  $(x, w, u) = (0, 0, 0)$ , enquanto  $V^{[d+1]}(x)$ , para qualquer  $d > 1$ , é determinada através de uma equação linear que envolve  $V^{[2]}(x), w_*^{[1]}(x), u_*^{[1]}(x), \dots, V^{[d]}(x), w_*^{[d-1]}(x)$  e  $u_*^{[d-1]}(x)$ . Dessa maneira, é desenvolvido um procedimento recursivo que, após  $d$  estágios, produz uma aproximação polinomial de ordem  $[d+1]$  para  $V(x)$  e de ordem  $[d]$  para  $u_*(x)$ .

Em (Isidori, KANG, 1995), os autores exploram a arbitrariedade da função  $\phi(x)$ , cujo único requerimento é que seja negativa-definida ou negativa semi-definida, para simplificar a obtenção da aproximação de  $V(x)$ . Ao fazer isso, a necessidade de se resolver os sucessivos problemas lineares é eliminada e o procedimento pode ser consideravelmente simplificado. Isto pode ser melhor visto através do exemplo no fim desta seção. Note que a variante de Isidori e Kang não requer a solução do problema linearizado e explora os graus de liberdade extras fornecidos pela desigualdade. O maior trabalho que se tem são as manipulações algébricas que devem ser feitas para que as soluções propostas satisfaçam  $V(x) > 0$  e  $HJI < 0$ .

Apesar de ser uma alternativa que produz uma lei de controle explícita e relativamente simples de implementar, este método não satisfaz os itens C e D da aproximação ideal da definição 2.3. Suas principais falhas são as seguintes:

1. Existe muita dificuldade, mesmo para problemas simples, de encontrar os termos de ordem mais elevada da aproximação. Assim, somente leis de controle de ordem dois ou três tem sido utilizadas nas aproximações.
2. Não se tem qualquer informação a respeito da região de validade do sistema em malha fechada.
3. A solução é obtida por inspeção, nenhum procedimento de otimização de desempenho é utilizado.

### **Aproximações Sucessivas de Galerkin**

Talvez o único método que considere aspectos quantitativos da lei de controle obtida seja o método das aproximações sucessivas de Galerkin, desenvolvido por BEARD e MCLAIN (1998). O método consiste de dois passos:

- 1) Transformar a equação HJI numa seqüência de equações diferenciais parciais (EDP) lineares (BELLMAN, 1957).

2) O método de aproximação de Galerkin (resíduos ponderados) é usado com funções base definidas globalmente num espaço compacto para aproximar cada uma das EDP's lineares.

Para um melhor entendimento, a explicação do método é dividida em duas partes: (a) aproximações sucessivas e (b) aproximações de Galerkin.

a) Aproximações Sucessivas

Considere o sistema IA das equações 2.19. A equação HJI e as correspondentes lei de controle ótima e pior perturbação podem ser escritas, para o caso de realimentação de estados, respectivamente, como:

$$V_x(x) \cdot (f + g \cdot u + k \cdot w) + h^T \cdot h + \|u\|^2 - \gamma^2 \cdot \|w\|^2 = 0 \quad (2.26)$$

$$u(x) = -\frac{1}{2} \cdot g^T \cdot V_x(x)^T \quad (2.27)$$

$$w(x) = \frac{1}{2 \cdot \gamma^2} \cdot k^T \cdot V_x(x)^T \quad (2.28)$$

A idéia básica das aproximações sucessivas é, ao invés de computar  $V$  e  $u$  simultaneamente, computar estas funções iterativamente. Observando a equação 2.26, pode-se concluir que as únicas fontes de não-linearidades são as dependências de  $V_x$  em  $u$  e  $w$ . Para reduzir a equação HJI a uma seqüência de EDP's lineares, devem-se usar duas iterações simultâneas para as aproximações sucessivas. O algoritmo da tabela 1 é a base do método das aproximações sucessivas para as equações 2.26 a 2.28.

Esta iteração tem uma interpretação teórica de jogos diferenciais. Dado um controle fixo  $u(i)$ , a malha interna atualiza a perturbação até ser atingido o pior caso com que este controle ainda pode lidar. Após isto, o controle é atualizado para melhorar o desempenho do sistema para aquela perturbação. Os Lemas 2.1 e 2.2 formalizam estas afirmações:

Tabela 1 – Algoritmo de aproximações sucessivas (algoritmo 1).

```

Faça  $u^{(0)}$  ser a lei de controle estabilizante inicial para o sistema 2.19 (com  $w=0$ ) com região de
estabilidade  $\Omega$ .
For  $i = 0$  to  $\infty$ 
    Set  $w(i,0) = 0$ 
    For  $j = 0$  to  $\infty$ 
        Solve for  $V(i,j)$ :
        
$$V_x(i, j) \cdot [f + g \cdot u(i) + k \cdot w(i, j)] + h^T \cdot h + u(i)^2 - \gamma^2 \cdot w(i, j)^2$$

        Atualize a perturbação:
        
$$w(i, j+1) = \frac{1}{2 \cdot \gamma^2} \cdot k^T \cdot V_x(i, j)^T$$

    End For
    Atualize o controle:  $u(i+1) = -\frac{1}{2} \cdot g^T \cdot V_x(i, \infty)^T$ 
End For

```

**LEMA 2.1.** “Se para cada par  $(i,j)$  o sistema:  $\dot{x} = f + g \cdot u(i) + k \cdot w(i, j)$  é assintoticamente estável em  $\Omega$ , então  $V(i, j)(x) \leq V(i, j+1)(x) \leq V(i, \infty)(x)$  para cada  $x \in \Omega$ , onde  $V(i, \infty)$  resolve a equação:

$$V_x(i, \infty) \cdot [f + g \cdot u(i)] + h^T \cdot h + \|u(i)\|^2 + \frac{1}{4 \cdot \gamma^2} \cdot V_x(i, \infty) \cdot k \cdot k^T \cdot V_x(i, \infty)^T = 0$$

Além disso, se  $V(i, j+1)(x) = V(i, j)(x)$ , então  $V(i, j+1) = V(i, \infty)$ , i.e.,  $V(i, j) \rightarrow V(i, \infty)$  em  $\Omega$ .”

**LEMA 2.2:** “Se para cada  $i$  o sistema:  $\dot{x} = f + g \cdot u(i) + k \cdot w(i, \infty)$  é assintoticamente estável em  $\Omega$ , então  $V(i, \infty)(x) \geq V(i+1, \infty)(x) \geq V(x)$  para cada  $x \in \Omega$ , onde  $V(x)$  resolve a equação HJI (equação 2.26). Além disso, se  $V(i+1, \infty)(x) = V(i, \infty)(x)$ , então  $V(i+1, \infty) = V(x)$ , i.e.,  $V(i, \infty) \rightarrow V(x)$  em  $\Omega$ .”

A estabilidade assintótica de  $u(i)$  em  $\Omega$  é formalizada no próximo Lema.

**LEMA 2.3.** “Se  $u(i)(x)$  é assintoticamente estabilizante em  $\Omega$ , então  $u(i+1)(x)$  também o é. Além disso,  $V(i, \infty)$  é uma função de Lyapunov para  $u(i+1)$ .”

**PROVA.** Das equações:

$$V_x(i, \infty) \cdot [f + g \cdot u(i)] + h^T \cdot h + \|u(i)\|^2 + \frac{1}{4 \cdot \gamma^2} \cdot V_x(i, \infty) \cdot k \cdot k^T \cdot V_x(i, \infty)^T = 0$$

$$u(i+1) = -\frac{1}{2} \cdot g^T \cdot V_x(i, \infty)^T$$

pode-se escrever:

$$V_x(i, \infty) \cdot [f + g \cdot u(i)] = -h^T \cdot h - \|u(i)\|^2 - \frac{1}{4 \cdot \gamma^2} \cdot V_x(i, \infty) \cdot k \cdot k^T \cdot V_x(i, \infty)^T + V_x(i, \infty) \cdot g \cdot u(i+1) - V_x(i, \infty) \cdot g \cdot u(i)$$

$$V_x(i, \infty) \cdot [f + g \cdot u(i)] = -h^T \cdot h - \|u(i)\|^2 - \frac{1}{4 \cdot \gamma^2} \cdot V_x(i, \infty) \cdot k \cdot k^T \cdot V_x(i, \infty)^T - \|u(i) - u(i+1)\|^2$$

que prova a estabilidade assintótica desde que a dinâmica do sistema seja observável através de h.

◆

A essência do algoritmo 1 é reduzir a equação HJI a uma seqüência infinita de EDP's lineares do tipo:

$$V_x(x) \cdot (f + g \cdot u + k \cdot w) + h^T \cdot h + \|u\|^2 - \gamma^2 \cdot \|w\|^2 = 0 \quad (2.29)$$

onde u e w são funções conhecidas de x. BEARD e MCLAIN (1998) batizaram esta equação de Equação generalizada de Hamilton-Jacobi-Isaacs (GHJI). Infelizmente, esta equação também não é simples de resolver e a seguir ver-se-á como usar o método de Galerkin para aproximar sua solução.

## b) Aproximações de Galerkin

O método de Galerkin é um caso particular dos chamados métodos de resíduos ponderados (MWR, *methods of weighted residuals*). Neste método, o de maior acurácia dentre as demais possibilidades dos MWR, a projeção do erro (ou resíduo) é anulada no mesmo subespaço onde a solução é procurada. O método pode ser explicado do seguinte modo.

Dada uma EDP,  $A(V(x)) = 0$ , com condições de contorno  $V(0) = 0$ , o método de Galerkin assume que pode ser encontrado um conjunto completo de bases  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ , tal

que  $\phi_j(0) = 0, \forall j$ <sup>7</sup> e  $V(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot \phi_j(x)$  onde o somatório é assumido convergir em

alguma região  $\Omega$ . Uma aproximação para  $V(x)$  é formada truncando a série à

$V_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \cdot \phi_j(x)$ , i.e., restringindo a solução à sua porção presente no subespaço  $N$ -

dimensional  $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ . Os coeficientes  $c_j$  são obtidos através da solução de  $N$  equações

algébricas definidas pelo cancelamento do produto interno entre o resíduo e as bases:

$$\int_{\Omega} A(V_N(x)) \cdot \phi_l(x) \cdot dx = 0, \quad l = 1, \dots, N \quad (2.30)$$

Maiores explicações sobre o método de Galerkin podem ser encontradas em (RICE, DO, 1995) e (VILLADSEN, MICHELSEN, 1978).

O algoritmo resultante ao unir o método de Galerkin com o algoritmo da tabela 1 é o método das aproximações sucessivas de Galerkin (SGA, *successive Galerkin approximation*). Note que, embora nada seja dito no método sobre isso, as funções-base devem ser escolhidas de modo que a aproximação  $V(x)$  seja positiva-definida.

Apesar de, talvez ser o único que se preocupe com os aspectos quantitativos da aproximação obtida, o método SGA tem mais limitações que o método de Isidori e Kang; por exemplo:

1. Como achar o melhor conjunto de funções-base permanece obscuro. Não se pode usar cegamente qualquer conjunto pois o algoritmo sofre do famoso

---

<sup>7</sup> Ou seja, as condições de contorno  $V(0) = 0$  são satisfeitas para todos os componentes da base (método interior).

“*Curse of dimensionality*”, i.e., o aumento exponencial dos cálculos para um aumento linear no número de funções-base. De fato, tem-se que avaliar um grande número de integrais multidimensionais, o que pode tornar o método proibitivo computacionalmente, ferindo o item A da definição 2.3

2. A necessidade de uma lei de controle inicial estabilizante para o sistema não perturbado com bacia de atração definida. Nem sempre esta lei é facilmente encontrada.
3. O método é limitado a sistemas afim nas entradas (IA).

### Aplicação das aproximações da literatura a um exemplo clássico

Nesta parte do texto, as duas abordagens revisadas nesta seção são avaliadas na solução de um problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  via realimentação de estados para um sistema dinâmico. O sistema, descrito pelas equações 2.30 e 2.31, apresenta características dinâmicas propícias para avaliação de controladores não-lineares e foi proposto em (ISIDORI, KANG, 1995), sendo discutido em diversos livros e artigos relevantes da área (GUCKENHEIMER, HOLMES, 1983, VAN DER SCHAFT, 1999). Este exemplo é trabalhado detalhadamente pois será usado novamente nos capítulos 3 e 4 desta tese. Considere o sistema de equações abaixo.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1^2 + w + u \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1^2 \\ u \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

O pré-Hamiltoniano do jogo diferencial associado ao problema de  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear é dado pela equação 2.32.

$$H(x, p, w, u) = p_1 \cdot x_1 \cdot x_2 + p_2 \cdot (x_1^2 + u + w) + h^2 + u^2 - \gamma^2 \cdot w^2 \quad (2.32)$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são os chamados co-estados (ou multiplicadores de Lagrange ou variáveis adjuntas).

Substituindo  $p=[p_1 \ p_2]^T$  por  $V_x(x)^T$  e substituindo as expressões ótimas de  $u$  e  $w$  ( $u_*(x)$  e  $w_*(x)$ ) na equação 2.32, pode-se chegar à desigualdade HJI do problema:

$$H_*(x, V_x^T(x)) = V_{x_1} \cdot x_1 \cdot x_2 + V_{x_2} \cdot x_1^2 + x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot x_1^2 + x_1^4 + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \cdot V_{x_2}^2 \leq 0$$

A tarefa agora é encontrar uma solução  $V(x) > 0$  para a desigualdade acima com a condição de contorno  $V(0) = 0$  para o menor valor possível de  $\gamma \in \mathfrak{R}^+$ . Se tal função puder ser encontrada numa vizinhança da solução de interesse, a ação de controle ótima é dada por:

$$u_* = -\frac{1}{2} \cdot V_{x_2}(x) \quad (2.33)$$

e a pior perturbação, dada pela equação:

$$w_* = \frac{1}{2 \cdot \gamma^2} \cdot V_{x_2}(x) \quad (2.34)$$

Antes de partir para a obtenção do controlador com os métodos revisados, é interessante examinar as características do sistema estudado.

Em primeiro lugar, deve-se ter em mente que o interesse reside no ponto dado pela origem do sistema.

Diferente de sistemas lineares, não existe um procedimento padrão para análise do comportamento de sistemas não-lineares. Assim, as seguintes ferramentas qualitativas são usadas para este fim: (a) Teoria de Lyapunov - método da linearização e método direto, (b) Teoria da Variedade Central (CARR, 1981) e, (c) Simulações Numéricas (plano de fase e diagramas de bifurcação).

Primeiramente, é analisada a estabilidade da origem do sistema em malha aberta. Se  $w = u = 0$ , a origem é uma solução possível para o sistema, pois:

$$\begin{cases} 0 = x_1 \cdot x_2 \\ 0 = x_1^2 \end{cases} \text{ implica em } x_{1SS} = 0 \text{ e } x_{2SS} = \forall \text{ (qualquer valor)}$$

Analisando a matriz Jacobiana na origem (método da linearização), tem-se:

$$Df|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & x_{1SS} \\ 2 \cdot x_{1SS} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{autovalor nulo duplo} \rightarrow \text{n\~{a}o se pode}$$

concluir nada sobre a estabilidade do sistema n\~{a}o-linear via o m\~{e}todo da lineariza\~{c}\~{a}o<sup>8</sup>.

O segundo m\~{e}todo de Lyapunov tamb\~{e}m foi tentado e n\~{a}o foi poss\~{i}vel mostrar que a origem \~{e} est\~{a}vel. Como este m\~{e}todo fornece apenas uma condi\~{c}\~{a}o suficiente para estabilidade, tampouco pode-se provar que a origem seja inst\~{a}vel.

A teoria da variedade central tamb\~{e}m n\~{a}o \~{e} \~{u}til neste caso pois o sistema reduzido a se analisar \~{e} o pr\~{o}prio sistema original.

No entanto, simula\~{c}\~{o}es mostram que o ponto (0,0) \~{e} inst\~{a}vel, como pode ser visto no plano de fases da figura 7.

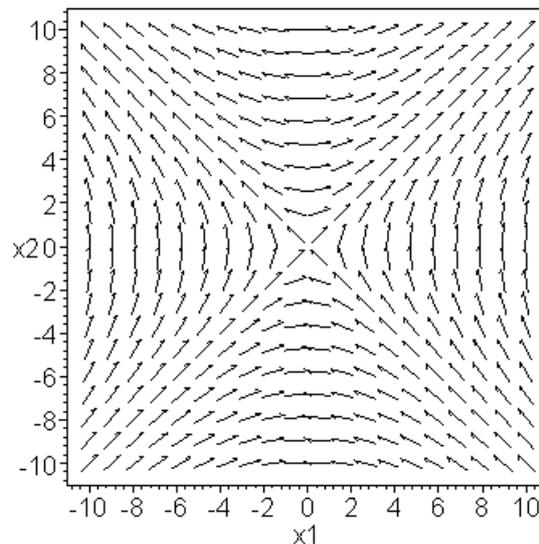


Figura 7 – Plano de fases para o sistema em malha aberta.

Analisando os sinais das derivadas, com um pouco de perspic\~{a}cia, pode-se chegar \~{a} conclus\~{a}o que o sistema possui dois subespa\~{c}os invariantes com caracter\xedsticas de estabilidade. S\~{a}o as retas  $x_1(t) = \pm x_2(t)$ , para valores de  $x_2(t) < 0$ . Qualquer Condi\~{c}\~{a}o inicial dentro deste subespa\~{c}o tende ao equil\xedbrio desejado (0,0) e l\~{a}

<sup>8</sup> Na realidade, A. M. Lyapunov realizou um estudo deste caso particular (autovalor nulo duplo). Os resultados, no entanto, n\~{a}o foram apresentados em seu livro de 1892 porque n\~{a}o se encaixavam na

chegando permanece indefinidamente. No entanto, não se consegue formar uma vizinhança ao redor da origem que seja estável no sentido de Lyapunov e o sistema portanto é considerado instável.

Uma pergunta que pode surgir antes de tentar partir para o controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear é se o problema não pode ser resolvido através da teoria linear correspondente. Caso isso fosse possível, poderia ser útil mais tarde para comparar com desempenho do controlador não-linear, ou mesmo como ponto de partida para a síntese de uma lei de controle não-linear.

Linearizando o modelo do exemplo em torno da origem obtém-se a seguinte descrição:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B_1 \cdot w + B_2 \cdot u \\ z &= C_1 \cdot x + D_{11} \cdot w + D_{12} \cdot u \\ y &= C_2 \cdot x + D_{21} \cdot w + D_{22} \cdot u \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & D_{11} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & D_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_2 &= [0 \quad 1] & D_{21} &= [0] & D_{22} &= [0] \end{aligned}$$

O próximo passo é verificar se as condições necessárias à existência dos controladores  $\mathcal{H}_\infty$  lineares são satisfeitas. Uma condição fundamental é a seguinte:

(i)  $(A, B_2, C_2)$  é estabilizável e detectável.

O par  $(A, B_2)$  é estabilizável se existe um  $F = [k_1 \quad k_2]$  tal que a matriz  $A + B_2 \cdot F$  seja Hurwitz. Assim:

---

categoria de métodos gerais. No entanto, estes foram incluídos numa tradução posterior para o inglês em 1966 (edição esta não disponível nas bibliotecas pesquisadas).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{n\~{a}o \u00e9 Hurwitz!} \rightarrow \text{Logo, n\~{a}o se pode garantir que existam controladores lineares que estabilizem o sistema linearizado!}$$

Outras condi\u00e7\u00f5es tamb\u00e9m s\u00e3o feridas, como por exemplo:

(ii)  $(A, B_1, C_1)$  \u00e9 control\u00e1vel e observ\u00e1vel.

Isto \u00e9 facilmente verificado que n\u00e3o vale para o sistema em quest\u00e3o:

$$\begin{bmatrix} B_1 & A \cdot B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rank} = 1 \rightarrow \text{n\~{a}o \u00e9 control\u00e1vel!}$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rank} = 1 \rightarrow \text{n\~{a}o \u00e9 observ\u00e1vel!}$$

Da condi\u00e7\u00e3o (i), pode-se concluir que n\u00e3o pode ser constru\u00eddo um controlador linear (independente de ser  $\mathcal{H}_\infty$  ou n\u00e3o) para o sistema linearizado.

No entanto, isso n\u00e3o garante que um controlador linear n\u00e3o possa controlar o sistema n\u00e3o-linear. Para ter uma resposta mais conclusiva \u00e9 necess\u00e1rio substituir um controlador linear hipot\u00e9tico no sistema n\u00e3o-linear original e analisar suas caracter\u00edsticas de estabilidade.

Assim, substituindo o controlador  $u = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2$  na equa\u00e7\u00e3o 2.30 (com  $w=0$ ), tem-se (note que a origem ainda \u00e9 uma solu\u00e7\u00e3o do sistema):

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1^2 + k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

Analisando o Jacobiano na origem:  $Df|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1=0 \text{ e } \lambda_2=k_2 \rightarrow \text{caso}$

degenerado!  $\rightarrow$  não se pode dizer nada do equilíbrio (a não ser que se  $k_2 > 0$  o sistema é instável).

A seguir, considerando que  $k_2 < 0$ , será mostrado como a teoria da variedade central (*Center Manifold Theory*) pode ser útil para provar que o sistema estudado com esse tipo de controle é instável.

A primeira coisa a fazer quando deseja-se usar o teorema da variedade central é colocar o sistema na seguinte forma canônica<sup>9</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_- = A_- \cdot x_- + f^-(x_-, x_0) \\ \dot{x}_0 = A_0 \cdot x_0 + f^0(x_-, x_0) \end{cases} \quad (2.37)$$

onde os sub-índices 'o' e '-' denotam as porções degeneradas e estáveis do sistema, respectivamente. As funções  $f^0$  e  $f^-$  não podem possuir termos lineares (note que, no caso em questão,  $x_1 = x_0$  e  $x_2 = x_-$ ).

Para colocar o sistema de interesse nesta formato, precisa-se de uma transformação de variáveis que separe o sistema nestas duas partes distintas. Como é necessário desacoplar somente a parte linear, pode-se usar uma transformação de variáveis linear. Decompondo a parte linear do sistema em seus valores característicos:

$$A = T \cdot D \cdot T^{-1}$$

onde a matriz  $D$  é uma matriz diagonal com os valores característicos de  $A$  e a matriz  $T$  é a matriz dos vetores característicos correspondentes, e definindo uma nova variável  $y = T^{-1} \cdot x$ , obtém-se o seguinte sistema desacoplado:  $\dot{y} = D \cdot y$ .

Essa transformação irá desacoplar a parte linearizada, que é a de interesse:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

---

<sup>9</sup> O estudo se restringe ao caso com autovalores estáveis e nulos.

Autovalor	Autovetor
$k_2$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
0	$\begin{bmatrix} 1 \\ -k_1/k_2 \end{bmatrix}$

com a seguinte mudança de variável:

$$y = T^{-1} \cdot x \quad \rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1/k_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = T \cdot y \quad \rightarrow \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k_1/k_2 & 1 \end{bmatrix}$$

chegando a:

$$\begin{aligned} y_1 = x_1 & \quad \rightarrow \quad x_1 = y_1 \\ y_2 = (k_1/k_2) \cdot x_1 + x_2 & \quad \rightarrow \quad x_2 = y_2 - (k_1/k_2) \cdot y_1 \end{aligned}$$

E, se  $y_1$  e  $y_2$  forem estáveis,  $x_1$  e  $x_2$  também serão estáveis.

O sistema estudado, agora pode ser rescrito em função das novas variáveis como:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1/k_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \cdot (y_2 - \frac{k_1}{k_2} \cdot y_1) \\ y_1^2 \end{pmatrix}, \text{ onde } \begin{cases} y_1 = y_0 \\ y_2 = y_- \end{cases} \quad (2.38)$$

A teoria da variedade central diz que a característica de estabilidade do sistema é a mesma do sistema reduzido  $\dot{y}_0$ . Deste modo, escrevendo a equação da variedade central como  $y_- = h(y_0)$ , onde  $h(0) = h'(0) = 0$  é uma condição necessária, e após algumas manipulações algébricas, chega-se a uma expressão polinomial aproximada para  $h(y_0)$ :

$$h(y_0) = \frac{(k_1 / k_2)^2 - 1}{k_2} \cdot y_0^2 + \theta(|y_0|^3) \quad (2.39)$$

onde  $\theta(|y|^3)$  denota os termos polinomiais em  $y$  de ordem superior (pelo menos 3).

De acordo com a teoria da variedade central, pode-se substituir essa aproximação de segunda ordem no sistema reduzido para obter uma aproximação para o comportamento local que é topologicamente equivalente ao do sistema original (em termos da nova variável  $y$ ). Portanto:

$$\dot{y}_0 = y_0 \cdot \left( \frac{(k_1 / k_2)^2 - 1}{k_2} \cdot y_0^2 - \frac{k_1}{k_2} \cdot y_0 \right) \quad (2.40)$$

Nas proximidades da origem o termo dominante é o de menor grau, deste modo, a estabilidade local pode ser inferida da estabilidade do seguinte sistema:

$$\dot{y}_0 \approx -\frac{k_1}{k_2} \cdot y_0^2 \quad (2.41)$$

que através de uma análise dos sinais da derivada, mostra-se instável, independente do sinal da constante, ou seja, da escolha de  $k_1$  ( $k_2$  já era  $< 0$ ). E se o comportamento da variável transformada ( $y$ ) é instável, a variável original ( $x$ ) também é instável.

Logo, fica mostrado que uma realimentação linear não pode estabilizar o sistema não-linear da equação 2.31.

Note que como o problema linear correspondente não pode ser resolvido, isto implica que nenhuma das abordagens para solução não-linear baseadas em aproximações de primeira ordem (VAN DER SCHAFT, 1992, TSIOTRAS et al., 1998, HUANG, 1998, CHRISTEN, CIRILLO, 1997, SHUE et al., 2000) não podem ser utilizadas.

Para aplicar a variante de Isidori e Kang, deve-se antes recordar a desigualdade HJI do problema:

$$H^*(x, V_x^T(x)) = V_{x_1} \cdot x_1 \cdot x_2 + V_{x_2} \cdot x_1^2 + x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot x_1^2 + x_1^4 + \frac{1}{4} \cdot \lambda \cdot V_{x_2}^2 \leq 0$$

$$\lambda = (1/\gamma^2) - 1 \quad (2.42)$$

Em seu artigo, ISIDORI e KANG (1995), após algumas manipulações algébricas, chegam à seguinte solução para a desigualdade:

$$V(x) = a.x_1^2 + b.x_2^2 + c.x_1^2.x_2 \quad (2.43)$$

Considerando que  $a = 1 - b - \frac{\lambda}{2}.b.c > 0$  e substituindo  $V(x)$  na desigualdade HJI, chega-se à seguinte expressão:

$$\phi(x) = (1 + b^2.\lambda).x_2^2 + \left(\frac{\lambda}{4}.c^2 + c + 1\right)x_1^4 + 2.c.x_1^2.x_2^2 \quad (2.44)$$

A função  $V(x)$  da equação 2.43 é positiva definida e a equação 2.44 é negativa definida, ambas localmente em torno da origem, para qualquer  $\gamma > 1$ , desde que valham as seguintes restrições:

$$b > 0, \quad 1 + b^2.\lambda < 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\lambda}{4}.c^2 + c + 1\right) < 0 \quad (2.45)$$

Na prática, estas restrições são satisfeitas simultaneamente para escolhas suficientemente altas de  $b$  e  $c > 0$  (quanto mais próximo  $\gamma$  estiver da unidade, mais altos devem ser os valores de  $b$  e  $c$ ). Assim, através do teorema 2.2, chega-se a uma lei de controle por realimentação dada por:

$$u = \alpha(x) = -b.x_2 - \frac{c}{2}.x_1^2 \quad (2.46)$$

que estabiliza local e assintoticamente o ponto de equilíbrio em malha fechada e resulta num sistema com ganho  $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$ , para valores suficientemente altos de  $b > 0$  e  $c > 0$  e valores de  $\gamma$  maiores que 1. Note que, apesar de simples, a solução é obtida apenas por inspeção. Não há um procedimento sistemático para ajustar os valores de  $b$  e  $c$  e encontrar o menor valor de  $\gamma$  que produza a lei ótima. Não se tem, também, qualquer

informação sobre a região de validade da lei de controle. O sucesso do método depende exclusivamente da habilidade algébrica e da intuição do projetista.

Como exemplo, pode-se verificar que se  $\lambda = (1/\gamma^2 - 1) = -0,10$  (equivalente a um valor  $\gamma \approx 1,05$ ) e  $b = c = 100$  ( $a = 1 - b - (\lambda/2).b.c = 401$ ), a desigualdade HJI toma a seguinte forma:

$$H_*(x, V_x^T(x)) = (-149).x_1^4 + (-999).x_2^2 + (200).(x_1.x_2)^2 \quad (2.47)$$

Pode ser observado, via simulações numéricas, que a equação 2.47 é localmente negativa definida. Desse modo,  $V(x)$  pode ser considerada como uma função de Lyapunov para o sistema não-perturbado e o equilíbrio  $(0,0)$  é assintoticamente estável<sup>10</sup>.

Assim, a lei de controle para o sistema tem a forma da equação 2.48.

$$u_*(x) = -(1/2).g^T.V_x(x)^T = -50.x_1^2 - 100.x_2 \quad (2.48)$$

E, a pior perturbação é dada por:

$$w_*(x) = \frac{1}{2.\gamma^2}.g^T.V_x(x)^T = 45.x_1^2 + 90.x_2 \quad (2.49)$$

Quanto ao método das aproximações sucessivas de Galerkin, precisa-se, antes de mais nada, de uma lei de controle estabilizante inicial com bacia de atração  $\Omega$  definida para o sistema não perturbado ( $w=0$ ).

Como o sistema estudado é SISO e afim (linear) nos controles, a primeira alternativa que pode-se tentar é a linearização exata por realimentação de estados.

A linearização exata ou linearização entrada-estado (*input-state*) tem 4 passos básicos:

1. Encontrar um difeomorfismo  $z = \phi(x)$ , i.e., uma mudança de coordenadas não-linear com inversa suave existente, que permita colocar o sistema na

<sup>10</sup> Isidori e Kang falam em estabilidade local, mas através do segundo método de Lyapunov pode ser mostrado que o sistema em malha fechada não perturbado ( $w=0$ ) com a lei de controle da equação 38 é globalmente assintoticamente estável.

forma canônica abaixo, conhecida como forma camarada (*Companion Form*):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x) + b(x).u \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

2. Fazer a seguinte transformação de entrada  $u = u(x,v)$ :

$$u = \frac{1}{b} \cdot [f - v] \quad (2.51)$$

3. Projetar a lei de controle para a entrada  $v$  do sistema linear resultante, baseado em qualquer técnica linear.

Por exemplo, fazer  $v = -k_1 \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 - \dots - k_n \cdot x_{n-1}$  e escolher os ganhos de modo que o sistema seja estável.

4. Rescrever a lei de controle nas variáveis de entrada originais,  $u$ , e implementar o controle. (Note que a lei de controle tem como bacia de atração o próprio espaço  $\mathfrak{R}^n$ .)

No entanto, o sistema estudado (com  $w=0$ ) não é *input-state* linearizável. Quando se observa a matriz de controlabilidade local, abaixo, na vizinhança da origem, verifica-se que a mesma não tem *rank* cheio e portanto, de acordo com os teoremas apresentados em (ISIDORI, 1989), não existe um difeomorfismo que permita colocar o sistema na forma canônica da equação 2.50:

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[f, g] = g_x \cdot f - f_x \cdot g = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(g \ [f, g]) = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Tem posto 1 no ponto } (0,0) \rightarrow \text{N\~{a}o existe um}$$

difeomorfismo numa vizinhança de  $(0,0) \rightarrow$  O sistema n\~{a}o pode ser colocado na forma can\~{o}nica  $\rightarrow$  O sistema n\~{a}o pode ser *input-state* linearizado.

Apesar disso, foram tentadas algumas mudanças de coordenadas, mas os resultados n\~{a}o foram satisfat\~{o}rios pois, apesar do sistema ter sido colocado numa forma

linearizável com a transformaça\~{o}:  $z = \phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$ , n\~{a}o havia como retornar às

variáveis originais, i.e., o mapa  $x = \phi^{-1}(z)$  n\~{a}o é definido na origem do novo sistema.

Assim, a linearizaça\~{o} por realimentaça\~{o} de estados n\~{a}o pode ser usada e deve-se pensar em outra maneira de obter a lei de controle com bacia de atraça\~{o} definida. Como sabe-se que a lei de controle obtida com o m\~{e}todo anterior é pelo menos localmente estabilizante, uma abordagem interessante seria usar o segundo m\~{e}todo de Lyapunov para tentar definir a regi\~{a}o de atraça\~{o} desta lei de controle.

Usando como lei inicial:  $u(x) = -b \cdot x_2 - \frac{c}{2} \cdot x_1^2$ , e definindo como funça\~{o} teste de Lyapunov a forma quadrática:  $V(x) = C_1 \cdot x_1^2 + C_2 \cdot x_2^2$  (A funça\~{o}  $V(x)$  é positiva definida se  $C_1, C_2 > 0$ ), pode-se verificar a estabilidade desta lei de controle analisando sua derivada temporal:

$$\dot{V}(x) = V_x(x) \cdot \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 \cdot C_1 \cdot x_1 & 2 \cdot C_2 \cdot x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ -b \cdot x_2 + (1 - \frac{c}{2}) \cdot x_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\dot{V}(x) = 2 \cdot C_1 \cdot x_1^2 \cdot x_2 - 2 \cdot b \cdot x_2^2 + 2 \cdot C_2 \cdot (1 - \frac{c}{2}) \cdot x_1^2 \cdot x_2 \quad (2.53)$$

Fazendo  $\frac{c}{2} = \frac{C_1 + C_2}{C_2}$  (ou seja,  $c > 2$ , pois  $C_1, C_2 > 0$ ), a equaç\~{a}o 2.53 se reduz

a:

$$\dot{V}(x) = -2 \cdot b \cdot x_2^2 \quad (2.54)$$

que é globalmente negativa semi-definida ( $\dot{V}(x) \leq 0$ ) se  $b > 0$ .

De posse destas informações, pode-se apenas dizer que o sistema é globalmente estável. No entanto, se a condição de LaSalle (SLOTINE, LI, 1991) for aplicada, i.e., se forem analisadas as trajetórias em que a derivada temporal de  $V(x)$  é nula para verificar se estas são realmente trajetórias possíveis do sistema, chega-se à conclusão que, se  $c > 2$  e  $b > 0$ , a lei de controle  $u(x) = -b \cdot x_2 - \frac{c}{2} \cdot x_1^2$  é globalmente assintoticamente estável.

De fato, as seguintes relações são implicantes:

$\dot{V}(x) = 0 \rightarrow x_2(t) = 0 \rightarrow \dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_1(t) = C_3$  (constante)  $\rightarrow \dot{x}_2 = (1 - \frac{c}{2}) \cdot C_3^2$  (constante)  $\rightarrow x_2(t)$  é uma reta  $\rightarrow x_2(t) = \left(1 - \frac{c}{2}\right) C_3^2 t$   $\rightarrow$  Isso só é compatível se  $C_4 = C_3 = 0$ , isto é,  $x_1(t) = x_2(t) = 0$ . Logo, a única possibilidade compatível com  $\dot{V}(x) = 0$  é o sistema estar na própria origem. Portanto, pode-se concluir que o equilíbrio  $(0,0)$  é globalmente assintoticamente estável se  $b > 0$  e  $c > 2$ .

Para simplificar o projeto, foi escolhida a lei de controle inicial  $u(x) = -x_2 - 3 \cdot x_1^2$ . Sua região de convergência é conhecida e dada por  $\mathfrak{R}^2$ . Note que, apesar da estabilidade assintótica global, esta lei de controle não produz um sistema com propriedade de atenuação de ganho  $\mathcal{L}_2$  garantida. A lei inicial é somente uma lei estabilizante.

O próximo passo do procedimento poderia ser, a partir da lei de controle inicial, usar as mesmas funções-base usadas na solução obtida pelo método de Isidori e Kang para tentar verificar se o algoritmo proposto por Beard e McLain consegue encontrar um ajuste robusto para o mesmo problema (i.e., com  $\gamma = 1,05$ ).

Para isto, deve-se partir da aproximação dada pela equação 2.55 e tentar obter os parâmetros  $c_j$  com o algoritmo SGA.

$$V_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \cdot \phi_j(x) = c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 + c_3 \cdot x_1^2 \cdot x_2 \quad (2.55)$$

No entanto, quando tenta-se fazer isso, mesmo para aproximações simples como a da equação 2.55, depara-se com inúmeras integrais n-dimensionais que devem ser

avaliadas. Este problema, conhecido como *curse of dimensionality*, é particularmente grave pois, mesmo que somente uma base fosse usada, dever-se-iam calcular os elementos (cada elemento é uma integral dupla) de 8 matrizes 3x3 e 2 vetores 3x1. Assim, mesmo que o método SGA forneça um método sistemático para achar a aproximação, é muito mais fácil procurar uma solução por inspeção do que escrever o algoritmo do seu método.

Para quantificar esta dificuldade, o número de integrais definidas n-dimensionais a serem avaliadas com o algoritmo é dado pela equação 2.56.

$$\text{Número de integrais n-dimensionais} = (2 + 2.n).(N \times N) + 2.N \quad (2.56)$$

onde n é a dimensão do vetor de estados e N é o número de funções-base pesquisadas na aproximação.

Como exemplo, se  $N = 8$ , o que não é absurdo, tem-se que calcular 1168 integrais n-dimensionais antes de escrever o algoritmo propriamente dito.

### 2.3 ABORDAGEM PROPOSTA

O desafio enfrentado ao procurar por um método para a solução da desigualdade HJI foi o de encontrar um procedimento que fosse, ao mesmo tempo, simples e eficiente. Para este fim, foram examinadas 3 possíveis abordagens:

**ABORDAGEM 1** - Usar o Lema 2.3 (sobre aproximações sucessivas) juntamente com outros métodos de aproximação mais simples que as aproximações de Galerkin.

Esta abordagem se baseou no fato de o algoritmo de aproximações sucessivas produzir uma lei de controle com região de validade definida. A proposta desta abordagem seria usar outro método para evitar a avaliação das diversas integrais n-dimensionais que aparecem quando se usa o método SGA para resolver os “infinitos” problemas lineares que surgem no uso do algoritmo 1.

Para driblar a necessidade de avaliar as integrais, poder-se-ia tentar outros métodos mais simples e com acurácia semelhante. Uma idéia seria testar o método da colocação ortogonal (VILLADSEN, MICHELSEN, 1978). Isto foi feito, no entanto, isso ainda não elimina os infinitos problemas lineares a serem resolvidos.

**ABORDAGEM 2** - Tentar resolver a equação HJI diretamente pelo método dos resíduos ponderados sem aproximações sucessivas.

A idéia desta abordagem era simplificar a solução da equação HJI aplicando diretamente o método de Galerkin (ou outros métodos MWR) ao problema não-linear. A vantagem neste caso é que não precisar-se-ia mais resolver os infinitos problemas lineares que surgem no algoritmo de aproximações sucessivas. No entanto, a solução obtida não tem qualquer garantia de ser uma lei estabilizante.

Neste caso, seria necessária uma etapa adicional para verificar a positividade da solução e com isso obter sua validação. O problema desta abordagem é que não existe na literatura um método ou algoritmo para determinar o sinal local de formas escalares genéricas. Isso também foi uma motivação para propor a terceira abordagem.

**ABORDAGEM 3** - Resolver a desigualdade HJI através de métodos específicos para determinação de sinais e de regiões de sinal definido.

Algo que deve-se ter em mente é que as duas propostas anteriores não exploram os graus de liberdade permitidos pela desigualdade HJI. As soluções, de acordo com o publicado na literatura, teriam que se restringir à equação HJI.

Além disso, como não existem métodos na literatura para verificar o sinal global e local, com a região local definida, de formas escalares genéricas, uma idéia muito interessante seria o desenvolvimento de um método para este fim e usá-lo, não só para obter uma solução positiva-definida para a desigualdade HJI, mas também para outras aplicações de engenharia e matemática aplicada.

A primeira abordagem estudada tem a grande vantagem de gerar um controle com região de validade bem definida. No entanto, devido ao fato de ser muito trabalhosa, foi, logo cedo, descartada.

A segunda abordagem não é tão trabalhosa quanto a primeira mas os resultados obtidos não foram muito bem-sucedidos. Havia sempre a necessidade de uma etapa posterior de verificação numérica do sinal das funções obtidas na sua solução.

Assim sendo, nesta tese, a terceira abordagem foi a escolhida. Tal abordagem parece ser a mais natural pois, independente do método usado para obter a aproximação, na maioria das vezes, é necessária uma etapa adicional de verificação do sinal das funções para validar os resultados obtidos.

No próximo capítulo, os resultados teóricos necessários ao desenvolvimento desta abordagem são explicados. Sua aplicação ao exemplo trabalhado na seção 2.2 também é apresentada no capítulo 3.

# Capítulo 3

## Resultados Teóricos Desenvolvidos

---

### Resumo

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados obtidos na pesquisa sobre critérios suficientes para a determinação de sinais locais e globais de funções escalares multivariáveis. Na seção 3.1 a motivação para desenvolver este trabalho e a interpretação geométrica da abordagem são apresentadas. Na seção 3.2 os principais resultados são apresentados. O principal resultado obtido é um teorema que permite determinar o sinal de uma forma escalar e sua região local de sinal definido. Finalmente, na seção 3.3, é apresentado o uso dos resultados para resolver quantitativamente, por inspeção, um problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, o mesmo do capítulo 2.

### 3.1 MOTIVAÇÃO E INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Em virtude dos resultados apresentados no capítulo 2, o problema de encontrar uma lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear pode ser visto como o problema de encontrar uma função escalar positiva definida:

$$V(x) > 0 \tag{3.1}$$

que satisfaça uma desigualdade estrita - ou não-estrita, desde que uma condição de detectabilidade seja satisfeita (consideração 2.2) - conhecida como desigualdade HJI:

$$H_*(x) < 0 \tag{3.2}$$

Assim sendo, independente do método usado para resolver a desigualdade 3.2, seria de grande valia um método que possibilitasse avaliar o sinal de funções escalares multivariáveis, tanto global quanto localmente. Se um método para este fim estivesse disponível, sua utilização na solução do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear poderia ser conduzida de duas maneiras:

1. Como uma ferramenta de análise, usando um método qualquer para resolver a equação 3.2 e, caso este método não garanta que a equação 3.1 seja satisfeita, usar-se-ia o método para verificar se  $V(x) > 0$ .
2. Como uma ferramenta de síntese, forçando a solução  $V(x)$  a satisfazer as equações 3.1 e 3.2.

Da experiência que foi adquirida ao se resolver problemas de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, foi observado que tanto  $V(x)$  como  $H_*(x)$  podem ser escritas de forma mais compacta como formas quadráticas de bases não-lineares, batizadas nesta seção como  $\Theta(x)$  e  $\Phi(x)$ , respectivamente:

$$\begin{cases} V(x) = \Theta^T(x) \cdot P_V \cdot \Theta(x) \\ H_*(x) = \Phi^T(x) \cdot P_H \cdot \Phi(x) \end{cases} \quad (3.3)$$

As bases destas formas quadráticas, aqui chamadas funções-eixo da representação, devido à sua possível interpretação geométrica, logo adiante explicada, são vetores de funções não-lineares das variáveis de estado:

$$\begin{cases} \Theta(x) = [\theta_1(x) \ \theta_2(x) \ \dots \ \theta_n(x)]^T \\ \Phi(x) = [\varphi_1(x) \ \varphi_2(x) \ \dots \ \varphi_m(x)]^T \end{cases} \quad (3.4)$$

E as matrizes  $P_V$  e  $P_H$  podem, sem perda de generalidade, ser escritas como matrizes simétricas de elementos reais:

$$\begin{aligned} P_V &\in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (p_{V_{ij}} = p_{V_{ji}}) \\ P_H &\in \mathfrak{R}^{m \times m} \quad (p_{H_{ij}} = p_{H_{ji}}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como a estabilidade global de sistemas lineares tem sido verificada através da análise da matriz  $P$  da forma quadrática  $V(x) = x^T \cdot P \cdot x$ , foi pensado em explorar a simetria das equações 3.3-3.5 para inferir os sinais de  $V(x)$  e  $H_*(x)$ .

Para este fim, antes, é necessário recordar alguns resultados das teoria de matrizes e vetores (KREYSZIG, 1993, STEINBRUCH, 1975):

DEFINIÇÕES:

1. Uma matriz  $A$  é ortogonal se  $A^{-1} = A^T$ .
2. Uma matriz  $A$  é simétrica se  $A^T = A$ .
3. O conjunto de todos autovalores da matriz  $A$  é chamado de espectro de  $A$ .
4. O problema de determinar os autovalores e autovetores de uma matriz  $A$  é chamado de um problema de autovalor.

TEOREMAS:

1. Os autovalores de uma matriz simétrica são reais.
2. Uma matriz simétrica  $n \times n$  possui uma base ortonormal de autovetores para o espaço euclidiano  $n$ -dimensional,  $\mathfrak{R}^n$ .
3. Se os autovetores de um matriz  $A$ , de dimensão  $n \times n$ , formam uma base para  $\mathfrak{R}^n$ , estes podem ser usados para diagonalizar  $A$ .
4. Uma transformação ortogonal preserva o valor do produto interno dos vetores, assim como a norma dos vetores.
5. Qualquer transformação ortogonal no plano ou no espaço tridimensional é uma rotação.

Usando estes resultados, pode-se rescrever uma forma quadrática qualquer em sua forma canônica. A seguir é mostrado como definir o sinal global de uma forma quadrática para um sistema linear e como as conclusões obtidas podem ser estendidas para formas quadráticas compostas por bases não-lineares.

Considere uma forma quadrática  $V(x) = x^T \cdot P \cdot x$ , formada por funções-eixo lineares  $x = [x_1 \ x_2]^T$  e com  $P$  simétrico e real:

$$P = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Esta forma quadrática pode ser escrita como uma função escalar de duas variáveis:

$$V(x) = a.x_1^2 + b.x_2^2 + 2.c.x_1.x_2 \quad (3.7)$$

Note que se o último termo do lado direito da equação 3.7 não existisse, o sinal global desta função poderia ser facilmente definido. Como o sinal não pode ser definido desta maneira, usam-se as propriedades das matrizes reais simétricas para rescrever a função  $V(x)$  em função de uma nova base que elimine este termo de sinal indefinido.

Assim, se  $P$  é real e simétrica,  $P$  admite uma diagonalização do tipo:  $P = T.D.T^{-1}$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores (reais) de  $P$  e  $T$  é a matriz dos autovetores correspondentes a estes autovalores. Como  $T$  é ortogonal ( $T^{-1} = T^T$ ) pode-se escrever  $P$  como  $P = T.D.T^T$  e definir uma nova variável  $y = T^T.x$ . Esta nova variável forma uma nova base para  $V(x) = V(T.y) = V(y)$ :

$$V(x) = x^T.P.x = x^T.T.D.T^T.x = y^T.D.y \quad (3.8)$$

Expandindo  $V(x) = V(y)$ , obtém-se:

$$V(x) = \lambda_1.y_1^2 + \lambda_2.y_2^2 \quad (3.9)$$

A equação 3.9 é conhecida como a forma canônica das formas quadráticas com bases lineares, onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores de  $P$ . Vista nesta forma, a análise do sinal global de  $V(x)$  se resume à avaliação os sinais dos autovalores de  $P$  e o problema de determinar o sinal de  $V(x)$  se transforma num problema de autovalores. De fato, os famosos critérios de Sylvester (OGATA, 1990) para determinação dos sinais de matrizes podem ser obtidos a partir da análise dos autovalores da matriz<sup>11</sup>.

### **Interpretação geométrica no espaço euclidiano bidimensional.**

Uma forma quadrática permite uma interpretação geométrica em  $\mathfrak{R}$  e  $\mathfrak{R}^2$ . É possível que por indução matemática, as conclusões sobre o sinal da função escalar obtidas com este tipo de interpretação também sejam válidas para  $n > 2$ .

---

<sup>11</sup> Uma versão, considerando somente números inteiros, mas que segue a mesma linha de raciocínio, dos critérios de Sylvester para determinação do sinal de formas quadráticas bidimensionais já havia sido desenvolvida no século XVIII por Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Para maiores detalhes, recomenda-se consultar (SCHARLAU, OPOLKA, 1985).

Para  $n = 1$ , a interpretação é óbvia pois não existem termos cruzados entre as bases. Para  $n = 2$ , uma forma quadrática genérica pode ser colocada na forma canônica através de uma transformação linear formada pelos seu autovetores. Como o operador desta transformação é uma matriz ortogonal, esta transformação linear pode ser encarada simplesmente como uma rotação (transformação que mantém a norma e o produto interno), de modo que as conclusões obtidas sobre o sinal da forma canônica são as mesmas para a forma quadrática original. Uma forma quadrática canônica pode ser interpretada geometricamente em  $\mathfrak{R}^2$  como um parabolóide elíptico (de sinal definido), hiperbólico (de sinal indefinido) ou uma superfície cilíndrica parabólica (de sinal semi-definido), dependendo do sinal dos autovalores envolvidos. A visualização destas figuras geométricas em função dos autovalores da forma estão nas figuras 8 a 10.

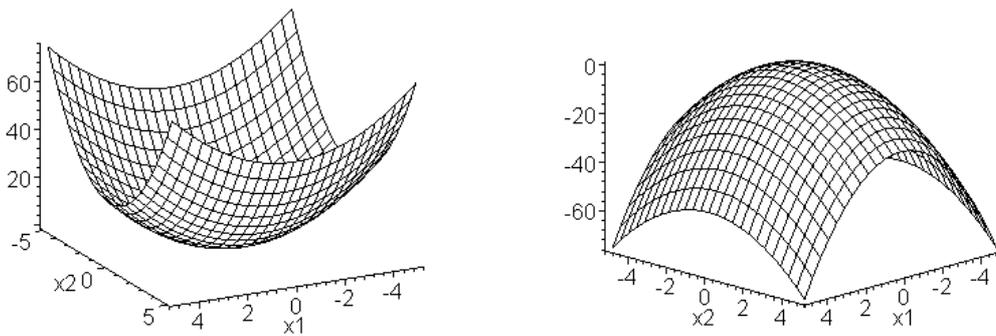


Figura 8 – Parabolóides Elípticos.

a)  $Z(x) = x_1^2 + 2.x_2^2$  e b)  $Z(x) = -2.x_1^2 - x_2^2$

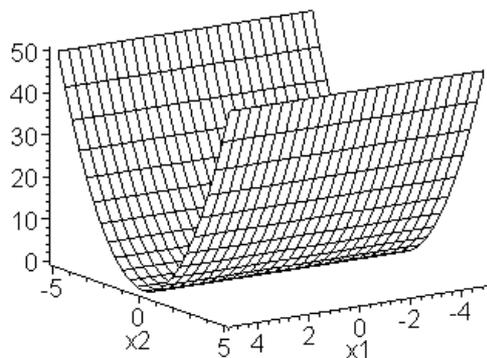


Figura 9 – Parabolóide semi-definido (superfície cilíndrica parabólica  $Z(x) = 2.x_2^2$ ).

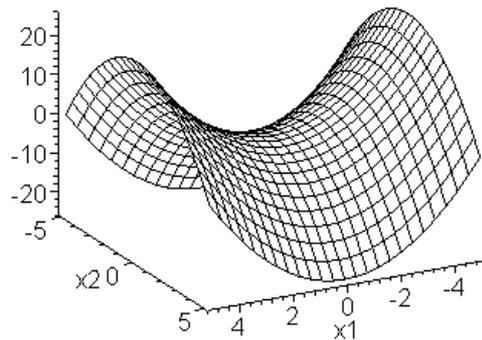


Figura 10 – Parabolóide não-definido (parabolóide hiperbólico  $Z(x) = x_1^2 - x_2^2$ ).

### Extensão para formas quadráticas de bases não-lineares

As conclusões obtidas para as formas quadráticas de sistemas lineares podem ser estendidas para formas quadráticas compostas por bases não-lineares. A diferença é que, para formas quadráticas de bases lineares, a representação matricial é única e fornece uma condição necessária e suficiente para a determinação do sinal da função. Como todo o espaço euclidiano é varrido, o critério obtido é global. Isto não é garantido se as bases forem não-lineares. As diferenças fundamentais das formas quadráticas formadas por bases não-lineares são as seguintes:

1. A função multivariável escalar a ser analisada possui uma representação em forma quadrática não-única.
2. Como existem relações entre as bases, os critérios obtidos são apenas suficientes.
3. O subconjunto do campo real assumido pelas variáveis de estado de modo a permitir que as bases da forma quadrática (funções-eixo do parabolóide) pertençam ao campo real pode ser usado para delimitar uma região local onde a função expandida tem sinal definido.

Com base nestas diferenças, são apresentados na próxima seção deste capítulo os principais resultados obtidos sobre a determinação do sinal local e global de funções escalares multivariáveis. Por questão de simplicidade (e por permitir uma interpretação

geométrica), a maioria dos exemplos deste capítulo envolvem funções bidimensionais, i.e., mapeamentos do tipo:  $\mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ .

### 3.2 RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção, são desenvolvidos novos critérios suficientes para a determinação de sinais estritos, global e local com região definida, de funções escalares multivariáveis. Os critérios se baseiam na rescrita das funções escalares como formas quadráticas de bases não-lineares e na exploração das propriedades e interpretações explicadas na seção 3.1.

#### **Critério global para formas quadráticas não-lineares**

Antes de apresentar a extensão dos resultados de sistemas lineares para não-lineares foi feita uma pesquisa na literatura para procurar resultados similares. O único resultado similar ao trabalho que está sendo realizado foi encontrado em (BOSE, LI, 1968). Neste trabalho, que continua sendo citado até os dias de hoje (HASAN, HASAN, 1996), o autor propõe um critério suficiente para determinação de sinais globais de formas polinomiais. O teorema 3.1 é apresentado sem provas em (BOSE, LI, 1968):

#### **TEOREMA 3.1**

“Faça  $V(x)$  ser um polinômio real de  $n$  variáveis. Se a representação em forma quadrática de  $V(x)$  é  $y^T \cdot B \cdot y$ , onde os elementos de  $y$  são funções aceitáveis (polinomiais) de  $x$  e  $B$  é uma matriz real simétrica obtida diretamente dos coeficientes de  $V$ , então uma condição suficiente para a positividade (semi-positividade) de  $V(x)$  é que  $B$  seja uma matriz positiva-definida (positiva semi-definida).”

Para mostrar onde esse teorema falha, considere a função da equação 3.10:

$$V(x) = (-6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2)^2 + (2 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - 2 \cdot x_2^3)^2 \quad (3.10)$$

Esta função pode ser colocada como uma forma quadrática com funções-eixo não-lineares polinomiais, equação 3.11.

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 & -24 & -4 \\ -24 & 40 & 12 \\ -4 & 12 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \Theta^T(x) \cdot P_V \cdot \Theta(x) \quad (3.11)$$

Analisando o espectro de  $P_V$ , obtém-se os seguintes autovalores: {17,92 ; 0,00 ; 66,08}. Estes autovalores indicam que a matriz  $P_V$  é positiva semi-definida. No entanto, a função  $V(x)$  é positiva definida, figura 11. Os únicos valores de  $x$  que anulam  $V(x)$  pertencem ao campo complexo.

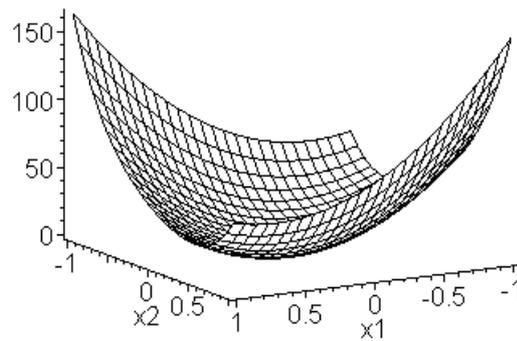


Figura 11 – Gráfico de  $V(x) = (-6.x_1 + 2.x_2)^2 + (2.x_1 - 6.x_2 - 2.x_2^3)^2$  versus  $x_1$  e  $x_2$ .

Por outro lado, se  $V(x)$  fosse escrita de acordo com a equação 3.12, obter-se-iam os seguintes autovalores para a matriz  $P_V$  associada: {24 ; 64.13 ; 16.62 ; 3.2413}. Neste caso, a positividade de  $V(x)$  poderia ser concluída.

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 & -24 & 0 & -4 \\ -24 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \Theta^T(x) \cdot P_V \cdot \Theta(x) \quad (3.12)$$

Na realidade, quando a matriz da representação em forma quadrática é semi-definida, o sinal da função pode ser tanto definido como semi-definido e o teorema 3.1 poderia ser modificado para colocar este fato em evidência. Antes disso, porém, define-se o que é uma função aceitável global para as funções-eixo.

**DEFINIÇÃO 3.1 – Função aceitável global.** Uma função escalar multivariável de  $n$  variáveis reais é chamada de função aceitável global se assume valores reais para todos os valores reais de suas variáveis e valor nulo somente quando todas suas variáveis valem zero.

Agora, pode-se enunciar o teorema para determinar o sinal global de formas quadráticas não-lineares.

**TEOREMA 3.2 – Critério global para formas quadráticas não-lineares**

“Faça  $V(x)$  ser uma função escalar multivariável de  $n$  variáveis reais. Se a representação em forma quadrática de  $V(x)$  é  $y^T \cdot B \cdot y$ , onde os elementos de  $y$  são funções aceitáveis globais de  $x$  e  $B$  é uma matriz real simétrica obtida diretamente dos coeficientes de  $V$ , então uma condição suficiente para a positividade (negatividade) de  $V(x)$  é que  $B$  seja uma matriz positiva (negativa) definida.”

**Prova: Suficiência.** Se  $V(x)$  pode ser escrita como uma forma quadrática,  $y^T \cdot B \cdot y$ , onde  $y(x)$  são funções não-lineares de  $x$  e  $B$  é uma matriz real simétrica, é um fato da álgebra linear que pode-se rescrever  $V(x)$  nas novas coordenadas  $z = U^T \cdot y$  como

$$V(x) = z(y(x))^T \cdot \Lambda \cdot z(y(x)) = z(x)^T \cdot \Lambda \cdot z(x)$$

onde  $U$  é uma matriz ortonormal cujas colunas,  $u_j$ , são os autovetores de  $B$  e a matriz  $\Lambda$  é diagonal com os mesmos autovalores de  $B$ . Então,  $V(x)$  pode ser rescrita como:

$$V(x) = \lambda_1 \cdot z_1^2 + \lambda_2 \cdot z_2^2 + \dots + \lambda_n \cdot z_n^2$$

com

$$z_i = (u_{i1} \cdot y_1(x) + u_{i2} \cdot y_2(x) + \dots + u_{in} \cdot y_n(x)), \text{ para } i = 1 \dots n.$$

Esta transformação de coordenadas ortonormal preserva a norma e o produto interno de  $B$  e conseqüentemente as conclusões sobre o sinal de  $V(x)$  são também mantidas.

Como todos os autovalores de uma matriz simétrica real pertencem ao campo real, se todos os autovalores são positivos (i.e., se a matriz é positiva definida)  $V(x)$  é positiva definida se, para todo  $x$  diferente de zero:

1.  $z_i^2(x) \geq 0$  (para  $i = 1 \dots n$ ) e,
2.  $z_i^2(x) > 0$  (para ao menos um valor de  $i$ )

Estas duas condições são satisfeitas se  $y(x)$  é um vetor de funções aceitáveis globais e o número de componentes em  $y$  (ou  $z$ ) é pelo menos igual ao número de variáveis independentes ( $x$ ). Então, a positividade de  $B$  implica que  $V(x)$  é positiva definida.

**Não necessidade.** Considere uma função positiva com uma representação em forma quadrática,  $y^T \cdot B \cdot y$ , com  $B$  positiva definida. Como a representação em forma quadrática é arbitrária, não existe restrição em adicionar um novo elemento não-nulo ao vetor  $y$ . Não há perda de generalidade se for considerado que este novo elemento não tem influência na função positiva original pois os componentes de  $y$  não são necessariamente independentes. Se isto ocorre, apesar da função ser positiva, o novo autovalor, correspondente ao novo elemento adicionado, será nulo. Assim, a positividade de  $V(x)$  não implica em  $B$  ser positiva definida e o teorema 3.2 (assim como o teorema 3.1) é somente uma condição suficiente para a positividade.

Isto também prova que a semi-positividade de  $B$  não implica em  $V(x) \geq 0$ .



**OBSERVAÇÃO 3.1.** Se for considerado que toda função positiva definida é, por definição, positiva semi-definida, o teorema 3.1 é verdadeiro.

### **Critério para determinação do sinal local de formas quadráticas não-lineares**

O teorema 3.2 é muito útil para provar o sinal global de funções multivariáveis escalares. No entanto, em muitos casos as funções envolvida não possuem um sinal global. Nestes casos, é necessário determinar o sinal local e delimitar a região com este sinal. Para determinar qualitativamente o sinal local de uma forma quadrática não-linear, pode-se usar o resultado do teorema 3.3.

**TEOREMA 3.3 – Critério para determinação do sinal local de formas escalares multivariáveis não-lineares**

“Se uma função escalar multivariável tem uma solução nula na origem, seu gradiente vale zero na origem, pode ser estendida em série de MacLaurin e rescrita como

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x + f_{NL}(x) \quad (3.13)$$

onde  $f_{NL}(x)$  contém os termos de ordem maior que 2, então o sinal local de  $V(x)$  pode ser inferido através da análise dos autovalores da matriz  $P$  da seguinte maneira:

1. Se os autovalores são positivos (negativos),  $V(x)$  é localmente positiva (negativa) definida;
2. Se pelo menos um autovalor é nulo e os demais tem o mesmo sinal, nada pode ser dito sobre o sinal de  $V(x)$ ;
3. Se pelo menos um autovalor tem sinal diferente dos demais, então  $V(x)$  tem sinal local indefinido.”

**Prova.** Considere uma função que tem valor nulo na origem. A origem é um mínimo (máximo) local se:

1. Seu gradiente é nulo na origem e,
2. A matriz Hessiana na origem é positiva (negativa) definida.

Como o mínimo (máximo) local é zero, se as condições 1 e 2 são satisfeitas, a função é localmente positiva (negativa) nas vizinhanças da origem.

Como a análise de uma expansão em série de Maclaurin truncada após o termo quadrático é equivalente à análise da matriz Hessiana quando o gradiente é nulo na origem, a suficiência do teorema fica provada.



Por exemplo, sabe-se que a função escalar:  $V(x) = a \cdot x_1^4 - b \cdot x_2^2 - c \cdot x_1^2 + d \cdot x_1^2 \cdot x_2^2$  (com  $a, b, c, d > 0$ ) é localmente negativa-definida. De fato, pode-se escrever  $V(x)$  como:

$$V(x) = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [x_1^2 \ x_2^2] \begin{bmatrix} a & d/2 \\ d/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

onde o espectro de P é :  $\{-c, -b\}$ .

Na realidade, este critério é equivalente à análise do sinal da matriz Hessiana (de derivadas segundas) de uma função multivariável na origem (ponto de interesse).

A interpretação deste resultado é óbvia, mas, muito dificilmente estas condições são satisfeitas na prática. Por exemplo, se c ou b são nulos, a matriz P do exemplo tem um autovalor nulo e é necessário avaliar os termos de ordem superior para inferir o sinal local. Neste ponto, devido à semelhança com a teoria da variedade central, poder-se-ia tentar uma adaptação desta para verificar se chega-se a um resultado útil.

### **Critério local com região definida**

Como dito anteriormente, do ponto de vista prático, funções escalares dificilmente apresentam sinal global definido. O mais comum é que essas funções tenham uma região local de sinal definido. Um fato que permanece ainda obscuro na teoria de sistemas não-lineares é como determinar essa região. Os dois critérios apresentados até agora, embora sejam importantes não são muito úteis para este fim.

Como motivação para o desenvolvimento de um critério para a determinação desta região de sinal definido, considere a função F(x) da equação 3.15:

$$F(x) = x^2 - 4 \quad (3.15)$$

Esta função possui sinal global indefinido e sinal local negativo. Isto pode ser facilmente visto na figura 12.

Seguindo o raciocínio empregado neste capítulo, a primeira coisa que pode-se tentar fazer para analisar o sinal da função é rescrevê-la como uma forma quadrática:

$$V(x) = [x \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

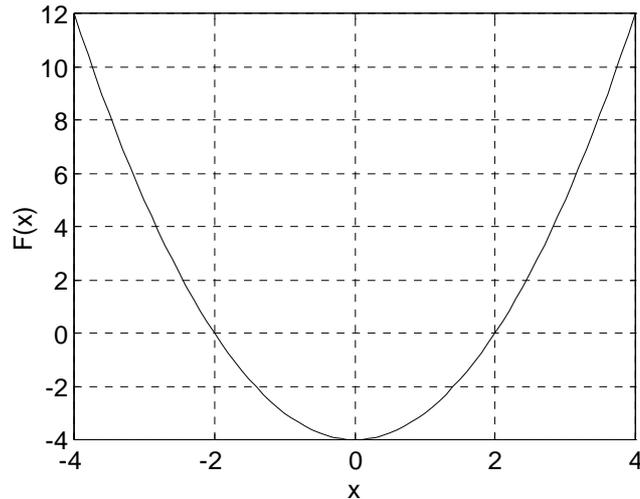


Figura 12 – Gráfico de  $F(x) = x^2 - 4$  versus  $x$ .

Como era de se esperar, a análise dos autovalores neste caso indica que o sinal não é definido. Note que as funções-eixo envolvidas na equação 3.16 são funções aceitáveis globais, e, logicamente, nenhuma outra representação em forma quadrática usando funções deste tipo poderia levar a diferentes conclusões.

No entanto, a mesma função escalar da equação 3.15, alternativamente, poderia ser escrita de acordo com a representação da equação 3.17.

$$V(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{1-x^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1-x^2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Esta representação da equação 3.17, por sua vez, produz dois autovalores negativos, indicando que a função é negativa-definida. No entanto, as funções-eixo desta representação não são mais funções aceitáveis globais. Isto indica que a negatividade da função não é global. Se for observado bem, para as funções-eixo de  $V(x)$  (que são os eixos do parabolóide) com a descrição 3.17 assumirem valores reais,  $x$  deve estar compreendido no intervalo real  $[-1,1]$ . Obviamente, nesta região  $V(x)$  é negativa, como pode ser visto na figura 12.

A partir deste exemplo motivador, pode-se enunciar o teorema mais geral deste trabalho. Antes porém é feita mais uma definição:

**DEFINIÇÃO 3.2 – Região local real.** A região local real de uma função escalar multivariável  $y(x)$  é o subconjunto de valores do campo real que a variável  $x$  pode assumir de modo que  $y(x)$  assumam valores pertencentes ao campo real e  $y \neq 0$  a menos que  $x = 0$ .

**TEOREMA 3.4 – Critério para determinação de sinal local com região definida para formas quadráticas não-lineares**

“Faça  $V(x)$  ser uma função escalar multivariável de  $n$  variáveis reais. Se a representação em forma quadrática de  $V(x)$  é  $y^T \cdot B \cdot y$ , onde os elementos de  $y$  são funções de  $x$  e  $B$  é uma matriz real simétrica obtida diretamente dos coeficientes de  $V$ , então uma condição suficiente para a positividade (negatividade) local de  $V(x)$  é que  $B$  seja uma matriz positiva definida (negativa definida).

Além disso, a região local de sinal definido de  $V(x)$  é obtida pela interseção das regiões locais reais de todas as funções-eixo  $y$  envolvidos na descrição de  $V(x)$ .”

**Prova: Suficiência.**

A prova é a mesma do teorema 2 até as duas últimas equações que aparecem na referida prova. A diferença é que agora deve ser notado que estas duas condições só são satisfeitas na região local real de cada componente de  $y$  e, conseqüentemente, a interseção destas regiões fornece uma região local onde o sinal é positivo. Então, a positividade de  $B$  implica que  $V(x)$  é positiva definida dentro da região composta pela interseção entre as regiões locais reais de todos componentes de  $y$  da representação em forma quadrática utilizada..

**Não necessidade.** A mesma do teorema 2.



Como exemplo, a região local de sinal definido de 3.17 é dada por  $\Omega = [-1,1]$  ( $x \in \Omega \subset \Re$ ).

**OBSERVAÇÃO 2.** Para provar a negatividade de uma função  $V(x)$  usando os teoremas 3.2 e 3.4, é suficiente provar a positividade de  $(-1) \cdot V(x)$ .

### Exemplo de uso dos critérios.

1. Uso do teorema 3.2 – Considere a função escalar da equação 3.18

$$V_1(x) = -x_1^2 + x_1 \cdot x_2 - x_2^2 + 0,5 \cdot x_1^3 \cdot x_2 + x_1^4 - x_1^6 \quad (3.18)$$

Rescrevendo esta função como uma forma quadrática global pode-se obter:

$$V_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & -1 & 0,25 \\ 0,50 & 0,25 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^3 \end{bmatrix} = \Theta^T(x) \cdot P_{V_1} \cdot \Theta(x) \quad (3.19)$$

O espectro de  $P_{V_1}$  é dado por:  $\{-1.59, -1.25, -0.16\}$ . Logo conclui-se pelo teorema 3.2 que a função  $V_1(x)$  é globalmente negativa definida, o que pode ser visto na figura 11.

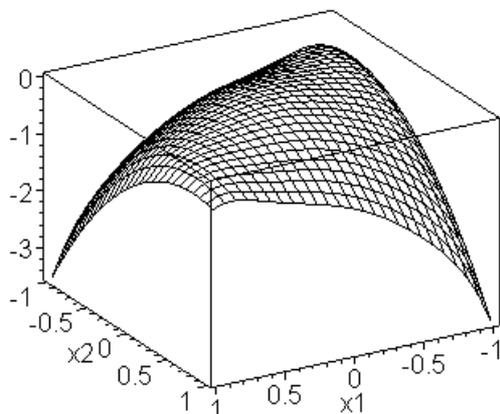


Figura 13 - Gráfico de  $V_1(x)$  versus  $x_1$  e  $x_2$ .

2. Uso do teorema 3.3 – Considere agora que o termo  $-x_1^6$  foi excluído da equação 3.18:

$$V_2(x) = -x_1^2 + x_1 \cdot x_2 - x_2^2 + 0,5 \cdot x_1^3 \cdot x_2 + x_1^4 \quad (3.20)$$

Sabe-se que a função acima não possui sinal global definido, figura 14. A coerência do critério do teorema 3.2 pode ser observada ao se analisar os autovalores da matriz correspondente à nova forma quadrática com as mesmas funções-eixo globais usados na equação 3.19:

$$\lambda \left( \begin{bmatrix} -1 & 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & -1 & 0,25 \\ 0,50 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \right) = \{-1,52 ; -0,82 ; +0,35\} \quad (3.21)$$

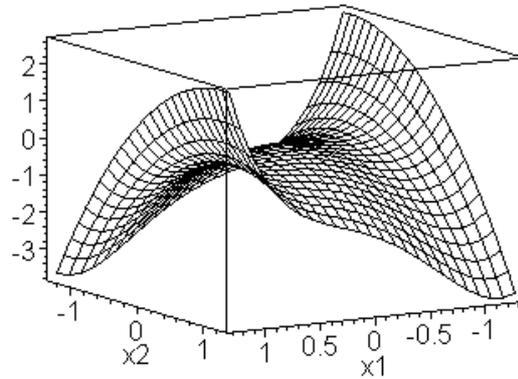


Figura 14 – Gráfico da equação 3.20 em função de  $x_1$  e  $x_2$ .

No entanto, sabe-se que a equação possui uma região local de sinal negativo, figura 15. Isso pode ser inferido pelo teorema 3.3. De fato, os autovalores da matriz Hessiana de  $V_2(x)$  na origem, equação 3.22, comprovam que a origem é localmente negativa.

$$\lambda \left( \begin{bmatrix} -1 & 0,5 \\ 0,5 & -1 \end{bmatrix} \right) = \{-1,50 ; -0,50\} \quad (3.22)$$

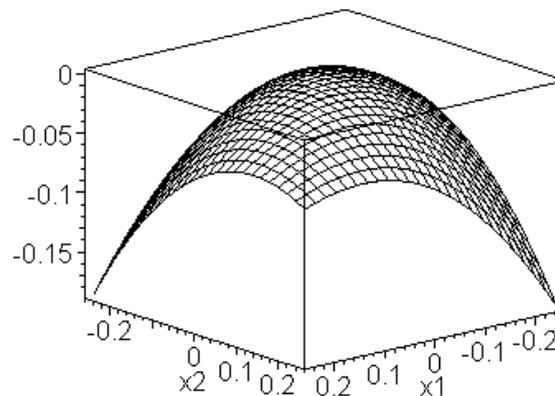


Figura 15 – Gráfico da equação 3.20 com uma maior resolução em  $x_1$  e  $x_2$ .

3. Uso do teorema 3.4 – Considere de novo a função escalar da equação 3.20

$$V_2(x) = -x_1^2 + x_1 \cdot x_2 - x_2^2 + 0,5 \cdot x_1^3 \cdot x_2 + x_1^4 \quad (3.20)$$

Como comentado anteriormente, a função da equação 3.20 tem sinal global indefinido e é localmente negativa. Uma estimativa da região de negatividade pode ser obtida ao rescrever esta função como a forma quadrática da equação 3.23.

$$V_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sqrt{0,3 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_1 \\ x_1 \cdot x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sqrt{0,3 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_1 \\ x_1 \cdot x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Neste caso,  $V_2(x)$  pode ser considerada uma função negativa definida (todos os autovalores são negativos) na região definida por  $x \in \Omega \subset \mathfrak{R}^2$ , onde  $\Omega$  é a interseção das regiões locais reais das funções-eixo, neste caso particular:  $\Omega = \{ \|x\|_2^2 < 0,3 \}$ .

### Possíveis usos dos critérios desenvolvidos no trabalho

Os critérios desenvolvidos neste trabalho, e apresentados nesta seção, visam resolver o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. Na próxima seção, a aplicação dos resultados ao problema estudado no capítulo anterior é apresentada. No entanto, os resultados obtidos possuem um leque de aplicação muito maior, tanto na engenharia quanto na matemática. Algumas possibilidades de seu uso são as seguintes:

- Determinação de intervalos locais de funções multivariáveis sem raiz real (matemática aplicada);
- Determinação de regiões de sinais locais positivos e negativos para funções de Lyapunov e suas derivadas temporais (teoria de sistemas dinâmicos);
- Determinação do tamanho da região de validade da aproximação linear de uma lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  (controle robusto linear) e;
- Ferramenta de síntese e análise de leis de controle robusto não-linear (controle robusto não-linear).

### 3.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO A UM PROBLEMA DE CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ NÃO-LINEAR

Como visto no capítulo 2, os métodos disponíveis para computar a lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear possuem algumas limitações graves. A principal destas é o total desconhecimento da região de validade da lei de controle obtida ou aproximada. Se não se conhece essa região é difícil saber quão melhor que o controle linear o controle não-linear será. Nesta seção, em primeiro lugar, é testada a utilidade dos critérios desenvolvidos no modelo matemático trabalhado no capítulo anterior, para encontrar um controlador com região de validade definida.

#### Aplicação do método ao sistema das equações 2.30-2.31

Recordando, a desigualdade HJI para o sistema dinâmico 2.30-2.31 é:

$$\begin{aligned} H_*(x, V_x^T(x)) &= V_{x_1} \cdot x_1 \cdot x_2 + V_{x_2} \cdot x_1^2 + x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot x_1^2 + x_1^4 + \frac{1}{4} \cdot \lambda \cdot V_{x_2}^2 \leq 0 \\ \lambda &= (1/\gamma^2) - 1 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Usando a abordagem de Isidori e Kang, explicada no capítulo 2, chega-se, após algumas manipulações algébricas, à seguinte solução para a desigualdade:

$$V(x) = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2^2 + c \cdot x_1^2 \cdot x_2 \quad (2.43)$$

Considerando  $a = 1 - b - \frac{\lambda}{2} \cdot b \cdot c > 0$  e substituindo  $V(x)$  na equação 2.42, chega-se à seguinte expressão:

$$H_*(x) = (1 + b^2 \cdot \lambda) \cdot x_2^2 + \left( \frac{\lambda}{4} \cdot c^2 + c + 1 \right) x_1^4 + 2 \cdot c \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 \quad (3.24)$$

Para verificar se a solução satisfaz as condições do problema, deve-se verificar se as funções  $V(x)$  e  $H_*(x)$  satisfazem localmente seus requerimentos de positividade e

negatividade. Isso pode ser feito através do teorema 3.3. Analisando as matrizes Hessianas de  $V(0)$  e  $H_*(0)$ , tem-se:

$$\nabla^2 V(x) \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2.a & 0 \\ 0 & 2b \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\nabla^2 \phi(x) \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(1 + b^2.\lambda) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Analisando a equação 3.25, pode-se concluir que se  $a$  e  $b$  são maiores que zero, a função  $V(x)$  é localmente positiva definida. Quanto à função  $H_*(x)$ , independente da escolha dos valores dos parâmetros do modelo ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $\lambda$ ), nada se pode dizer de seu sinal local através do teorema 3.3, pois existe um autovalor nulo na Hessiana.

Substituindo os valores testados no capítulo 2 ( $a = 401$ ,  $b = c = 100$  e  $\lambda = -0,10$ ) em  $V(x)$ , obtém-se:

$$V(x) = 401.x_1^2 + 100.x_2^2 + 100.x_1^2.x_2 \quad (3.27)$$

$$H_*(x) = -189.x_1^4 - 999.x_2^2 + 200.x_1^2.x_2^2 \quad (3.28)$$

Pode-se agora tentar definir a região local onde  $V(x)$  tem sinal definido através do teorema 3.4. Isso pode ser feito se for usada a seguinte forma quadrática:

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_1.\sqrt{4+x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1.\sqrt{4+x_2} \end{bmatrix} = \Phi^T(x).P_V.\Phi(x) \quad (3.29)$$

Assim, pode-se concluir que a função  $V(x)$  da equação 3.27 é positiva definida no intervalo real definido por  $x \in \Omega \subset \mathfrak{R}^2$ ,  $\Omega = \{ -\infty < x_1 < \infty, -4 < x_2 < \infty \}$ .

Quanto à equação 3.28, pode-se usar a representação em forma quadrática da equação 3.30 para tentar delimitar uma região de sinal negativo definido. Da equação 3.30, pode-se extrair a informação de que  $H_*(x)$  é negativa definida na região definida por:  $\|x\|_2^2 < 4,99$ .

$$H_*(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ \sqrt{4,99 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -149 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ \sqrt{4,99 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Assim, fazendo a união das regiões de sinal definido de  $V(x)$  e  $H_*(x)$ , pode-se definir uma região de validade para a solução da desigualdade HJI. Esta solução,  $V(x)$  da equação 3.27, como será melhor desenvolvido no capítulo 4, tem como região de validade o maior valor de  $V(x)$  contido no círculo de raio  $r = \sqrt{4,99}$  (que, por sua vez, delimita a interseção das regiões de sinal definido de  $V(x)$  e  $H_*(x)$ ).

Para ilustrar este exemplo, na figura 16, são apresentadas algumas trajetórias partindo da fronteira da região de validade do controlador para o sistema não perturbado com a lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, equação 3.31.

$$u_* = -\frac{1}{2} \cdot V_{x_2}(x) = -50 \cdot x_1^2 - 100 \cdot x_2 \quad (3.31)$$

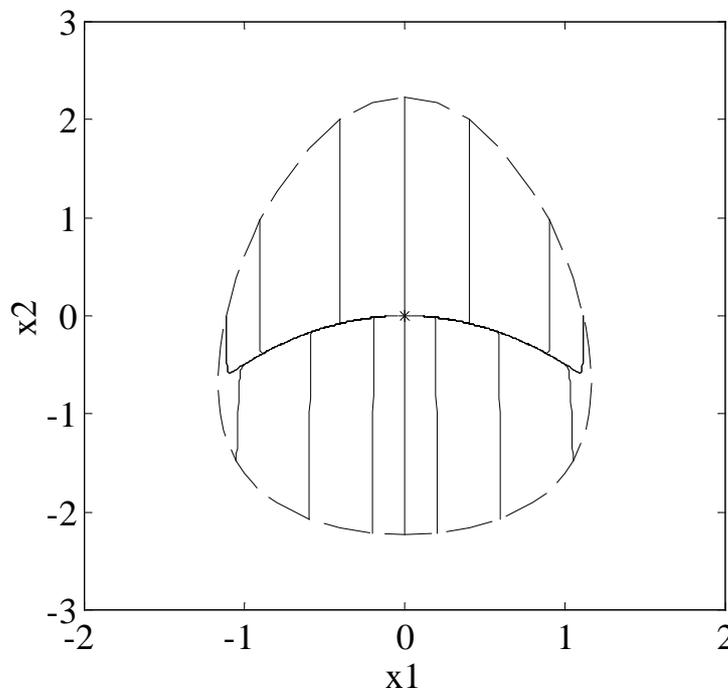


Figura 16 – Algumas trajetórias partindo da região de validade (curva tracejada) do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, equação 3.31.

Na figura 17, as propriedades de atenuação de perturbação são ilustradas para a condição inicial  $(x_1, x_2) = (-1, -1)$  e pior perturbação possível, calculada na síntese do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, equação 3.32.

$$w_* = \frac{1}{2\gamma^2} \cdot V_{x_2}(x) = 45 \cdot x_1^2 + 90 \cdot x_2 \quad (3.32)$$

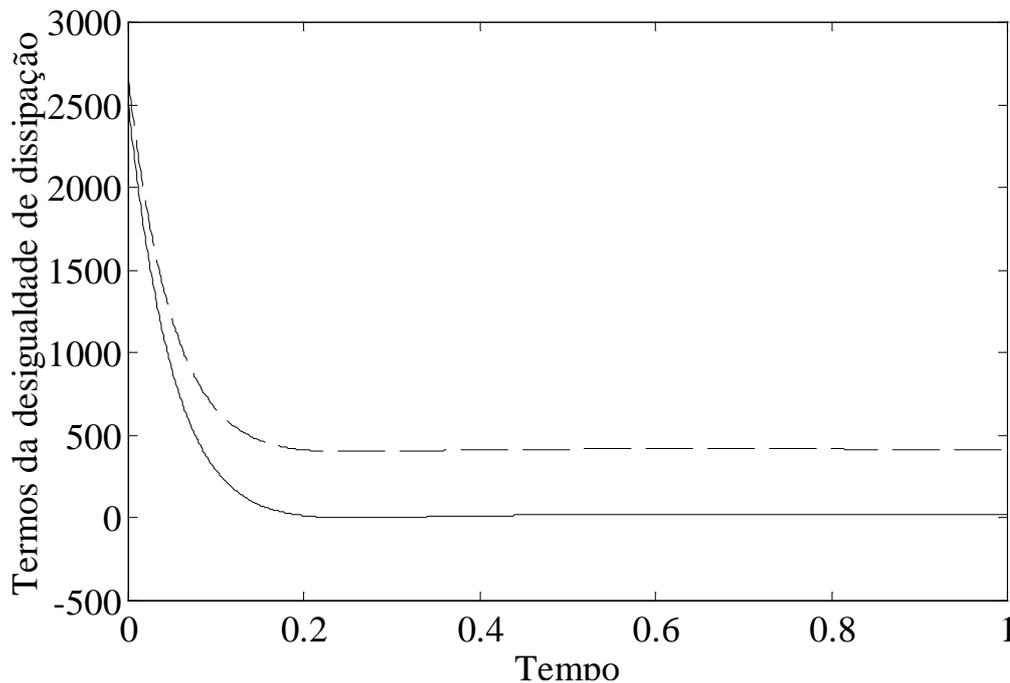


Figura 17 – Propriedades de atenuação do ganho do controlador.

A linha contínua representa o lado esquerdo da desigualdade de dissipação<sup>12</sup> associada ao problema e, a linha pontilhada, seu lado direito.

Note que, com os resultados apresentados neste capítulo, foi possível definir uma região de validade para o problema tratado no capítulo anterior. Isto atenua um dos grandes problemas da teoria. No entanto, a solução ainda foi obtida por inspeção. No próximo capítulo, será apresentado um método para escolher os parâmetros da solução do problema de modo a maximizar sua região de validade.

<sup>12</sup> Desigualdade de dissipação:  $\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt + V(x(0))$

# Capítulo 4

## Solução Quantitativa Proposta para o Problema

---

### Resumo

Neste capítulo são especificadas as condições para a obtenção de um controlador com região de validade conhecida. A seguir, usando os resultados apresentados no capítulo 3 é desenvolvido um procedimento sistemático bastante genérico, de modo a maximizar a região de validade do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear quando de sua síntese. Para este fim, é relaxado o grau de atenuação das perturbações. Deste modo, o problema perde sua otimalidade original. No entanto, o resultado obtido é muito mais prático. Alguns exemplos numéricos ilustrativos são apresentados.

### 4.1 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A SOLUÇÃO QUANTITATIVA DO PROBLEMA

Conforme visto nos capítulos 2 e 3, o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear via realimentação de estado se resume a achar uma solução positiva definida,  $V(x)$ , para a desigualdade HJI associada ao modelo matemático do sistema. A maioria dos trabalhos sobre o cômputo desta solução se restringe a provar que existe uma solução local para o problema e não indica como calcular esta solução nem a faixa de validade que entende-se por local. Assim, neste capítulo, usando os resultados apresentados no capítulo 3, é apresentado um procedimento para computar esta solução de modo a maximizar a região de validade local do controlador. Para este, parte-se da definição da região de validade do controlador, apresentada no capítulo 2:

**DEFINIÇÃO 2.2 – Região de validade do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear.** A região do espaço de estados do sistema, sujeita à lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear que simultaneamente satisfaz a desigualdade HJI e garante a estabilidade do sistema em malha fechada para a pior perturbação possível associada ao problema, é referida como a região de validade do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. Qualquer região do espaço de estados que seja um subconjunto desta região é chamada de uma estimativa da região de validade do controlador.

Assim, a região de validade do controlador é formada pela interseção das regiões de estabilidade em malha fechada (também como domínio de atração) e da região onde a desigualdade HJI é satisfeita. Dentro desta região, os requerimentos de estabilidade e desempenho são assegurados para o sistema.

A região onde a desigualdade HJI é satisfeita é formada, simplesmente, pela interseção da sua região de negatividade com a região de positividade de  $V(x)$ . A região de estabilidade assintótica, por sua vez, pode ser obtida usando os resultados da teoria de estabilidade de Lyapunov para o sistema em malha fechada com  $u(t) = \alpha_2(x) = u_*(x)$  e  $w(t) = \alpha_1(x) = w_*(x)$  (de acordo com a nomenclatura do teorema 2.2). A visualização destas condições para um sistema bidimensional está representada na figura 18.

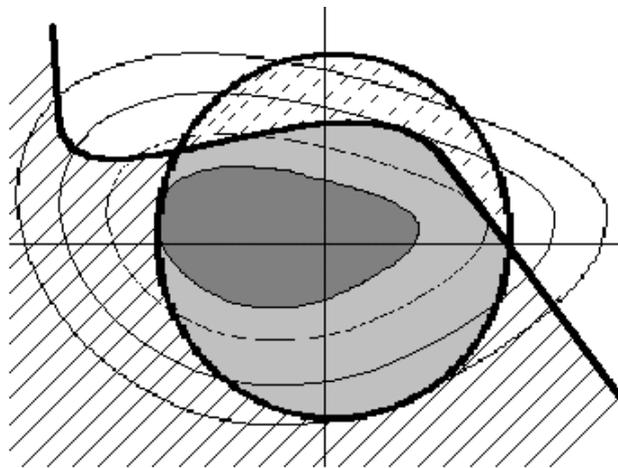


Figura 18 – Região de validade do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear de um sistema bidimensional -  $x = (x_1, x_2)$ .

Regiões da figura: (a) curvas concêntricas – curvas de nível crescentes,  $V(x) > 0$ ;  
 (b) região listrada –  $HJI < 0$ ; (c) região com listras tracejadas –  $d[V(x)]/dt < 0$ ;  
 (d) região sombreada clara –  $d[V(x)]/dt < 0$  e  $HJI < 0$ ; (e) região sombreada escura – maior curva de nível  $V(x) = c > 0$  onde  $d[V(x)]/dt < 0$  e  $HJI < 0$  – Melhor estimativa da região de validade do controlador.

Note que não é necessário resolver simultaneamente o problema de atenuação de perturbação e de estabilidade assintótica. É possível resolver a desigualdade de dissipação (desigualdade HJI) e obter  $w_*(x)$  and  $u_*(x)$  como funções de argumento  $V(x)$ . Em seguida, poder-se-ia procurar por uma função de Lyapunov que satisfizesse os requisitos da teoria de Lyapunov para a maior região de atração possível, com os

valores de  $u(t) = u_*(x)$  e  $w(t) = w_*(x)$ , substituídos nas equações 2.17, por exemplo. No entanto, esta abordagem, apesar de aparentemente atraente, pode levar a sistemas em malha fechada com regiões de atração muito estreitas. Então, neste trabalho, a abordagem usual (solução simultânea) foi mantida.

A principal dificuldade na determinação da região de validade do controlador, e que não tem sido discutida na literatura, reside na delimitação da região de atração do sistema. A observação crucial é que, exceto para o caso não perturbado ( $w(t) = 0$ ), a desigualdade de dissipação ( $HJI < 0$ ) não implica na satisfação de  $\dot{V}(x) < 0$  na mesma região do espaço de estados. Uma exceção a esta regra ocorre em sistema IA que satisfazem a condição da desigualdade 4.1.

$$\left( g(x)^T g(x) - \frac{1}{\gamma^2} k(x)^T k(x) \right) \geq 0 \quad (4.1)$$

Para provar a afirmação do parágrafo anterior, suponha que existe uma função  $V(x)$  positiva definida que satisfaz a desigualdade HJI para o sistema dado pelas equações 2.19.

$$\dot{x} = f(x) + g(x).u + k(x).w \quad (2.19)$$

$$z = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ u \end{bmatrix}$$

Então, pode-se escrever a desigualdade HJI deste sistema,

$$\begin{aligned} & V_x \cdot (f(x) + g(x).w_*(x) + k(x).u_*(x)) + h(x)^2 \\ & + \left\| \left( -\frac{1}{2} g(x)^T V_x(x)^T \right) \right\|^2 - \gamma^2 \cdot \left\| \left( \frac{1}{2\gamma^2} k(x)^T V_x(x)^T \right) \right\|^2 < 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Devido a que o termo  $V_x \cdot (f(x) + g(x).w_*(x) + k(x).u_*(x))$  é igual à derivada temporal de  $V(x)$  para o sistema em malha fechada com  $u(t) = u_*(x)$  e  $w(t) = w_*(x)$ , pode-se rescrever a desigualdade 4.2 como,

$$\dot{V}(x) + h(x)^2 + \frac{1}{4} V_x(x)^T g(x)^T g(x) V_x(x) - \frac{1}{4\gamma^2} V_x(x)^T k(x)^T k(x) V_x(x) < 0$$

que, por sua vez, pode ser reorganizada para se chegar à equação 4.3.

$$\dot{V}(x) < -h(x)^2 - \frac{1}{4} V_x(x)^T \left( g(x)^T g(x) - \frac{1}{\gamma^2} k(x)^T k(x) \right) V_x(x) \quad (4.3)$$

Assim, é fácil concluir que, se a desigualdade 4.1 é satisfeita, a desigualdade de dissipação implica na validade de  $[dV(x(t))/dt] < 0$  na mesma região do espaço de estados onde  $HJI < 0$ .

No caso geral, onde a relação da equação 4.1 pode não ser válida, para determinar a região de validade do controlador, precisa-se de um pouco mais de trabalho. Como deseja-se determinar a região de atração para a pior perturbação ( $w(t) = w_*(x)$ ), além de encontrar as regiões de sinal definido de  $V(x)$  e da desigualdade de dissipação, também é necessário encontrar a região do espaço de estados onde  $\dot{V}(x) < 0$  é satisfeita. A existência desta região é assegurada pelos resultados da teoria de sistemas dissipativos (Willems, 1972).

Como a região de atração verdadeira é normalmente muito difícil de se calcular, estimativas desta são usualmente aceitas para fins de comparação de tamanho na literatura de controle. Uma boa estimativa para a região de atração de uma certa função de Lyapunov,  $V(x)$ , é dada pela região definida por:  $\Omega = \{x \in \mathfrak{R} \mid V(x) \leq c\}$ , onde  $c$  é um número positivo correspondente ao menor valor de  $V(x)$  que reside na região definida por  $[dV(x(t))/dt] = 0$ .

Assim, para resolver o problema com uma estimativa da região de validade para o controlador, deve ser encontrada uma solução que forneça, não somente uma forma matemática para  $V(x)$ , mas também as regiões do espaço de estados onde  $V(x)$  é positiva definida,  $[dV(x(t))/dt]$  é negativa definida (para a pior perturbação  $w_*(x)$ ) e a desigualdade HJI é satisfeita. Uma boa estimativa para a região de validade do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear usando uma função de Lyapunov fixa é dada pela maior curva fechada  $V(x) = c > 0$  onde estas 3 desigualdades são satisfeitas.

A seguir, usando os resultados do capítulo 3, é apresentado um procedimento para escolher os parâmetros da solução  $V(x)$  de modo a maximizar a região de validade do controlador.

## 4.2 MÉTODO DESENVOLVIDO

O objetivo desta seção é explorar os resultados teóricos do capítulo 3 de modo a resolver de modo sistemático e quantitativo o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. Para tal tarefa, foram formulados alguns problemas de otimização baseados nos resultados da seção 4.1.

A primeira coisa que deve ser feita no método antes de enunciar os problemas de otimização é escrever as equações da desigualdade HJI para o sistema de interesse para um valor variável do nível de atenuação,  $\gamma$ . Se uma solução local existe, então, o sistema em malha fechada é localmente assintoticamente estável e não é necessário verificar o sinal local de  $[dV(x)/dt]$  para este fim.

De modo a verificar se o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear tem uma solução local, pode-se tentar resolver o problema de otimização 4.1. Se uma solução é possível, então o problema admite uma solução local.

**PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO 4.1 – Solução local do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear.** Escolha a forma da função  $V(x)$  e a substitua em  $H_*(x)$ . Expanda estas duas funções em séries de MacLaurin,

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x + f_{NL}(x) \quad (4.4)$$

$$H_*(x) = x^T \cdot H \cdot x + g_{NL}(x) \quad (4.5)$$

onde  $f_{NL}(x)$  e  $g_{NL}(x)$  contêm os termos de grau maior que 2. Escolha os parâmetros de  $V(x)$  de modo a minimizar o nível de atenuação  $\gamma$  ( $\gamma > 0$ ) da desigualdade HJI, sujeita às restrições de desigualdade  $P > 0$  e  $H < 0$ .

**OBSERVAÇÃO 4.1.** Encontrar uma solução efetiva para o problema de otimização 4.1 não é uma tarefa fácil. No entanto, um procedimento prático para resolver eficientemente este problema pode ser encontrado para a classe funções polinomiais<sup>13</sup>, ou formas (HARDY et al. 1934). Este procedimento consiste em escolher  $V(x)$  de modo que, quando esta forma for substituída na desigualdade HJI, todas as possíveis combinações de polinômios de grau 2 sejam formadas.

A importância de se encontrar uma solução para o problema de otimização 4.1 pode ser dividida em 2 partes:

- (1) Fornecer uma resposta concernente à existência de uma solução local para o problema – deve ser lembrado que se esta solução não for possível, isto não implica que o sistema em questão não possua uma lei de controle estabilizante.
- (1) Mais importante que (1), se existe uma solução para o problema de otimização 4.1, o valor obtido para o nível de atenuação pode ser interpretado como o limite inferior de  $\gamma > 0$  para qualquer forma não-linear de  $V(x)$  (VAN DER SCHAFT, 1992). Esta informação é muito útil para determinar o limite máximo do desempenho nos próximos problemas de otimização.

No entanto, a solução do problema de otimização 4.1, apesar de útil, apenas fornece uma solução local, sem qualquer informação sobre o tamanho da região de validade do controlador. Como é desejável ter-se informações quantitativas sobre esta região, é necessário formular e resolver outro problema de otimização.

Assim, após tentar resolver o problema de otimização 4.1, independente da sua viabilidade, o próximo passo lógico seria tentar encontrar uma solução global para o problema de controle. Para este fim, pode-se tentar resolver o problema de otimização 4.2.

---

<sup>13</sup> Deve ser dito que, pelo menos teoricamente, esta restrição não é tão restritiva quanto pode parecer. Isto porque um importante resultado da teoria de sistemas não-lineares diz que todas as funções suaves podem ser representadas através de séries de Volterra (i.e., séries polinomiais infinitas).

**PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO 4.2 – Solução global para o problema de  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear.** Escolha a forma da função  $V(x)$  e substitua-a em  $\dot{V}(x)$  e  $H_*(x)$ . Escreva estas três funções como representações em forma quadrática de bases não-lineares:

$$V(x) = \Theta(x)^T \cdot P_V \cdot \Theta(x) \quad (4.6)$$

$$\dot{V}(x) = \Psi(x)^T \cdot P_{Vd} \cdot \Psi(x) \quad (4.7)$$

$$H_*(x) = \Phi(x)^T \cdot P_H \cdot \Phi(x) \quad (4.8)$$

onde os elementos de  $\Theta$ ,  $\Psi$  e  $\Phi$  são funções aceitáveis globais de  $x$  e  $P_V$ ,  $P_{Vd}$  e  $P_H$  são matrizes reais simétricas obtidas diretamente dos coeficientes de  $V(x)$ ,  $\dot{V}(x)$  e  $H_*(x)$ , respectivamente. Escolha os parâmetros de  $V(x)$  de modo a minimizar o valor de  $\gamma$  ( $\gamma > 0$ ) da desigualdade HJI sujeita às restrições de desigualdade  $P_V > 0$ ,  $P_{Vd} < 0$  e  $P_H < 0$ . (Deve ser enfatizado que  $V(x)$  deve ser radialmente ilimitada para assegurar a propriedade de estabilização global).

Resolver efetivamente o problema de otimização 4.2 não é uma tarefa fácil quanto resolver o problema 4.1. Isto porque é computacionalmente proibitivo testar todas as possíveis formas de  $V(x)$  que o resolveriam. Assim, este problema pode somente ser resolvido com sucesso se é conhecido, *a priori*, que existe uma certa forma para  $V(x)$  que satisfaz globalmente as desigualdades 4.6-4.8. Neste caso, como a região de validade seria global, não é necessário se preocupar com ela, e, a solução do problema de otimização 4.2 seria usada apenas para fornecer os parâmetros ótimos para uma forma particular de  $V(x)$  que resolve o problema globalmente. Quanto menor o valor de  $\gamma$ , melhor seria o desempenho do sistema em malha fechada, sendo que, o máximo desempenho alcançável seria dado pelo valor de  $\gamma$  obtido como solução do problema de otimização 4.1.

Uma das maiores desvantagens do problema 4.2 é que, na maioria dos casos práticos, a representação em forma quadrática que o resolve globalmente não é conhecida. Muitas vezes, isto se deve à não existência de tal forma.

Retornando ao problema de otimização 4.1, se este tem uma solução e não é possível resolver o problema 4.2, então, pelo menos uma solução local existe. Então, o próximo passo a ser dado seria a procura por algum modo de usar o teorema 3.4 para encontrar uma solução que maximize a região de validade do controlador.

Quando se procura por uma solução para o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear usando o teorema 3.4, chega-se a um problema com várias variáveis que podem ser manipuladas (otimizadas) para encontrar  $V(x)$ : o nível de atenuação,  $\gamma$ , o tamanho das regiões de positividade de  $V(x)$  e de negatividade de  $H^*(x)$ , a região de estabilidade assintótica, por exemplo.

Conforme comentado no capítulo 2, a minimização de  $\gamma$  pode levar a controladores sem robustez paramétrica (BHATTACHARYYA, KEEL, 1997) ou com região de validade muito pequena (YAZDANPANA et al., 1999). Do mesmo modo, a maximização da região de sinal definido de  $V(x)$ ,  $[dV(x)/dt]$  e  $H^*(x)$  pode levar a controladores com região de validade (ou de atração) sem a menor utilidade prática (LONGHI et al., 2000) porque não existe uma relação direta entre estas regiões de sinal definido e a região de validade do controlador associado. Estes fatos, em adição ao conhecimento de que  $\gamma$  não pode assumir valores menores que o obtido como solução do problema de otimização 4.1, leva à formulação de um problema de otimização que tenta maximizar diretamente a região de validade do controlador, apresentado a seguir como o problema de otimização 4.3

Neste caso, o valor de  $\gamma$  deve permanecer dentro de um intervalo :  $\gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max}$ . Estas condições podem ser facilmente adicionadas a um problema de otimização como duas restrições de desigualdade. O limite inferior de  $\gamma$  é obtido da solução do problema 4.1 o limite superior é arbitrariamente definido de acordo com os objetivos de controle desejados.

Deve ser enfatizado que o problema de otimização 4.3, de acordo com a formulação original da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, somente fornece uma solução sub-ótima para o problema pois o valor de  $\gamma$  obtido não é o menor possível. No entanto, isto não chega a ser algo negativo, porque é um resultado bem conhecido da literatura de controle que quando o desempenho é maximizado (no caso, quando  $\gamma$  se aproxima do seu mínimo), na maioria das vezes, as garantias de estabilidade diminuem. Este conhecimento, aliado ao fato que se está maximizando a região de validade do controlador, mostram que o problema de otimização 4.3 é uma abordagem das mais

interessantes para resolver localmente o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear para sistemas não-lineares genéricos.

**PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO 4.3 (Controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear maximizando o tamanho da sua região de validade).** Escolha a forma de  $V(x)$  e substitua-a em  $H_*(x)$ . Escreva estas duas funções como representações em forma quadrática de bases não-lineares:

$$V(x) = \Theta(x)^T \cdot P_V \cdot \Theta(x) \quad (4.9)$$

$$H_*(x) = \Phi(x)^T \cdot P_H \cdot \Phi(x) \quad (4.10)$$

onde  $P_V$  e  $P_H$  são matrizes reais e simétricas obtidas diretamente dos coeficientes de  $V(x)$  e  $H_*(x)$ , respectivamente. Escreva a derivada temporal de  $V(x)$  como uma representação em forma quadrática de bases não lineares,

$$\dot{V}(x) = \Psi(x)^T \cdot P_{Vd} \cdot \Psi(x) \quad (4.11)$$

onde  $P_{Vd}$  é uma matriz real e simétrica obtida diretamente dos coeficientes de  $\dot{V}(x)$ . Faça  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  e  $\delta_i$  serem os parâmetros que definem as regiões de positividade de  $V(x)$  e de negatividade de  $\dot{V}(x)$  e  $H_*(x)$ , respectivamente. Escolha os parâmetros de  $V(x)$ ,  $\Theta(x)$ ,  $\Phi(x)$  e  $\Psi(x)$  de modo a maximizar a região definida por  $V(x) = C$  sujeita às restrições de desigualdade  $P_V > 0$ ,  $P_H < 0$ ,  $P_{Vd} < 0$  e  $\gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max}$ . O parâmetro  $C \in \mathfrak{R}^+$  é o menor valor de  $V(x)$  que reside na interseção da região de positividade de  $V(x)$  e das regiões de negatividade de  $\dot{V}(x)$  e  $H_*(x)$ . A solução,  $V(x)$ , resolve localmente o problema com região de validade definida por  $V(x) < C$  para o valor de  $\gamma$  escolhido.

Apesar de que o problema de otimização 4.3 pode ser encarado como a abordagem mais geral para resolver o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear via realimentação de estados, usualmente, este problema é muito complexo de se resolver, e, por vezes intratável. De modo a reduzir sua dimensão, algumas simplificações podem ser feitas.

Uma dificuldade esperada ocorre quando é desejado usar formas não elipsoidais para representar  $V(x)$ . Nestes casos, pode ser necessário muito algebrismo para obter uma equação para a área delimitada pela curva fechada  $V(x) = C$ . Além disso, a equação resultante pode ter uma forma muito complexa e inadequada para uso num problema de otimização. Assim, para simplificar o problema 4.3, pode ser usado o seguinte procedimento alternativo, composto por dois passos:

- (1) Reformular o problema de otimização 4.3 de modo a maximizar a região de sinal definido. Esta região pode ser definida como a interseção das regiões de positividade de  $V(x)$  e de negatividade de  $\dot{V}(x)$  and  $H^*(x)$ . Algumas vezes, a forma matemática desta região é mais simples que a área delimitada por  $V(x) = C$ .
- (2) Encontrar o menor valor da curva de nível  $V(x) = C$  que reside na região de sinal definido maximizada no passo (1). Este passo é clássico na determinação do domínio de atração através da teoria de estabilidade de Lyapunov. A solução deste problema pode ser usada como condição inicial do problema 4.3 original.

Apesar desta formulação alternativa, a dimensão do problema ainda pode ser reduzida em algumas situações:

- (1) Se  $V(x)$  é globalmente positiva definida, então, os parâmetros  $\alpha_i$  são eliminados do problema 4.3.
- (2) Para sistemas IA, se a condição da equação 4.1 é satisfeita, então o sinal de  $\dot{V}(x)$  não precisa ser avaliado. Neste caso, a satisfação da desigualdade HJI assegura a negatividade de  $\dot{V}(x)$  na mesma região do espaço de estados. Esta situação pode ser forçada quando a descrição do sistema IA é conhecida e o limite inferior de  $\gamma$  é definido como o mínimo necessário para satisfazer a condição da equação 4.1.

Deve ser notado que estas duas simplificações apresentadas acima também podem ser usadas para diminuir a dimensão do problema de otimização 4.2.

Todos os problemas de otimização desta seção são problemas de otimização não-lineares com restrições. Uma limitação relativamente grave do procedimento desenvolvido é que estes problemas são, via de regra, problemas não-convexos, ou seja,

formados por funções objetivas não convexas e restrições do tipo desigualdade matriciais não-lineares. Estas, por sua vez, formam um conjunto não-convexo - para definições de função e conjunto convexas, recomenda-se consultar algum livro sobre o assunto, por exemplo (KUO, 1996). Do que foi exposto, se não forem usados algoritmos de otimização global (FLOUDAS, 2000) para resolver os problemas 4.1-4.3, não existem garantias de que a solução obtida para o problema é o ótimo global. Uma alternativa ao uso de algoritmos globais é o uso de diversas estimativas iniciais para o problema de controle. Este tipo de abordagem garante, ao menos, que, se uma quantidade razoável de chutes iniciais for usada, uma boa solução local será encontrada para o problema de otimização.

Na próxima seção, dois exemplos extraídos da literatura são apresentados. Deve ser ressaltado que todos os cálculos numéricos e simbólicos foram realizados com a ajuda dos *softwares* MapleV release 5 e Matlab versão 5.3.

### 4.3 EXEMPLOS

O objetivo desta seção é mostrar como os resultados da seção 4.2 são usados. Para isto, são considerados dois sistemas dinâmicos.

#### 4.3.1 Exemplo 1

Considere o sistema das equações 4.12-4.14 (uma extensão de um exemplo dado em BEARD et al. (1997)).

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nl(x) - x_2 \\ x_1 + x_2 + w + u \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$z = \begin{pmatrix} h(x) \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

$$\text{nl}(x) = \begin{cases} -x_1^3 & \text{(caso A)} \\ +x_1^3 & \text{(caso B)} \end{cases} \quad (4.14)$$

O objetivo para este sistema é projetar uma lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear via realimentação de estados para as não-linearidades A e B. A solução de interesse é a origem. A desigualdade HJI para este sistema é dada pela equação 4.15.

$$H_* = V_{x_1} \cdot (\text{nl}(x) - x_2) + V_{x_2} \cdot (x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{4} \cdot \lambda \cdot V_{x_2}^2 < 0 \quad (4.15)$$

onde  $\lambda = \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right)$ .

Se uma solução positiva definida,  $V(x)$ , é encontrada para a desigualdade estrita da equação 4.15, de acordo com a teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, a lei de controle ótima,  $u_*(x)$ , é dada pela equação 4.16 e, a pior perturbação possível, pela equação 4.17.

$$u_* = -\frac{1}{2} \cdot V_{x_2} \quad (4.16)$$

$$w_* = \frac{1}{2\gamma^2} \cdot V_{x_2} \quad (4.17)$$

Como as equações 4.12-4.14 formam um sistema polinomial, o problema de otimização 4.1 pode ser resolvido eficientemente usando a forma quadrática da equação 4.18.

$$V(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \quad (4.18)$$

A solução do problema de otimização 4.1 para este sistema produz os mesmos resultados, tanto para a não-linearidade do caso A quanto para a do caso B, a saber:  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $a = 0,00525$ ,  $b = -1,9947$ , e  $c = 189,22$ . No entanto, esta solução é fortemente

dependente da sua precisão numérica e, conseqüentemente, inaceitável para fins práticos. Sua principal utilidade está em determinar o limite inferior para o valor de  $\gamma$ .

Devido à simplicidade do sistema matemático de interesse, é possível saber *a priori* que, se o termo  $x_1^4$  é adicionado à forma quadrática da equação 4.18, é possível encontrar uma solução global para a não-linearidade do caso A:

$$V(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1^4 \quad (4.19)$$

Substituindo a equação 4.19 na equação 4.15, é obtida a desigualdade HJI para esta solução, equação 4.20.

$$\begin{aligned} H^*(x) = & -4dx_1^6 + (-b-4d)x_2x_1^3 - 2ax_1^4 + (1+b+(1/4)\lambda b^2)x_1^2 \\ & + (\lambda cb-2a+2c+b)x_2x_1 + (-b+\lambda c^2+2c+1)x_2^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para resolver o problema de otimização 4.2, esta forma deve ser rescrita como a representação em forma quadrática da equação 4.21.

$$H_*(x) = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_1^2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \cdot P_H \cdot \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_1^2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

onde a matriz  $P_H$  é dada por:

$$P_H = \begin{bmatrix} -4d & 0 & 0 & \frac{-b-4d}{2} \\ 0 & -2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+b+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)b^2 & c-a+\frac{b}{2}+\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)\frac{cb}{2} \\ \frac{-b-4d}{2} & 0 & c-a+\frac{b}{2}+\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)\frac{cb}{2} & 2c+1-b+\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)c^2 \end{bmatrix}$$

A solução do problema de otimização 4.2 para a função 4.19 produz como resultados:  $\gamma = 1,0353$ ,  $a = 33,73$ ,  $b = -4,18$ ,  $c = 33,53$ , e  $d = 3,15$ . Como era de se

esperar, o valor obtido para  $\gamma$  é ligeiramente superior ao obtido como solução do problema de otimização 4.1. Se estes valores forem substituídos na representação em forma quadrática da equação 4.21, o seguinte espectro da matriz  $H$  é obtido:  $\{-67,46; -4,885; -0,0081; -14,265\}$ . Assim, pelo teorema 3.2, este resultado indica que a função  $H_*(x)$  tem um sinal global negativo. Como a forma  $V(x)$  resultante é globalmente positiva definida, a lei de controle da equação 4.22 é a solução global do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear para o caso A. Deve ser observado que se a forma quadrática da equação 4.18 fosse usada no lugar da equação 4.19, a lei de controle obtida teria a mesma estrutura linear da equação 4.22. No entanto, não poderiam ser provadas as propriedades globais da sua respectiva lei de controle.

$$u_*(x) = 2,09 x_1 - 33,53 x_2 \quad (4.22)$$

Diferente da não-linearidade A, que possui características de estabilidade, para o caso B não é possível alcançar resultados globais com a função  $V(x)$  descrita pela equação 4.19. Assim, é necessário formular e resolver o problema de otimização 4.3 para obter resultados quantitativos. Por simplicidade, a mesma forma global da equação 4.18 foi usada. A desigualdade HJI obtida pode, então, ser rescrita como a descrição em forma quadrática da equação 4.23,

$$H_*(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_1^2 \\ \sqrt{\beta_1 - V(x)} \cdot x_1 \end{bmatrix}^T \cdot P_H \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_1^2 \\ \sqrt{\beta_1 - V(x)} \cdot x_1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

onde a matriz  $P_H$  é dada por:

$$P_H = \begin{bmatrix} b+1+\lambda \frac{b^2}{4} - k\beta_1 & c-a+\frac{b}{2}+\lambda \frac{cb}{2} & 0 & 0 & 0 \\ c-a+\frac{b}{2}+\lambda \frac{cb}{2} & 2c-b+1+\lambda c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kc & \frac{b}{2}+\frac{kb}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2}+\frac{kb}{2} & ka+2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Na equação 4.23,  $k$  é um número real arbitrário e  $\beta_1 (>0)$  é o parâmetro que regula o tamanho da região de negatividade de  $H_*(x)$ . Para resolver o problema de otimização 4.3, o valor de  $\gamma$  é arbitrariamente restrito como pertencente ao segmento da linha real:  $1 < \gamma < 1,50$ . Esta escolha reduz a dimensão do problema de otimização 4.3 porque, neste caso, a equação 4.1 é satisfeita. A solução do problema de otimização é dada pelas equações 4.24 e 4.25. A lei de controle correspondente e a pior perturbação são apresentadas nas equações 4.26 e 4.27, respectivamente. Note que, como era de se esperar (YAZDANPANA et al., 1999), o valor de  $\gamma$  vai para o seu limite superior.

$$V(x) = 7,172 x_1^2 - 2,639 x_1 x_2 + 4,942 x_2^2 \quad (4.24)$$

$$\gamma = 1,50, \beta_1 = 1 \text{ and, } k = -2,487 \quad (4.25)$$

$$u_*(x) = -4,942x_2 + 1,3195 x_1 \quad (4.26)$$

$$w_*(x) = 2,196 x_2 - 0,598 x_1 \quad (4.27)$$

A estimativa da região de validade do controlador, obtida através da solução do problema de otimização 4.3, é dada pela equação 4.28. Esta região é graficamente mostrada na figura 19 em linha tracejada, juntamente com algumas trajetórias partindo de sua fronteira.

$$V(x) = 16,269x_1^2 - 3,1366x_1x_2 + 9,4556x_2^2 < 1 \quad (4.28)$$

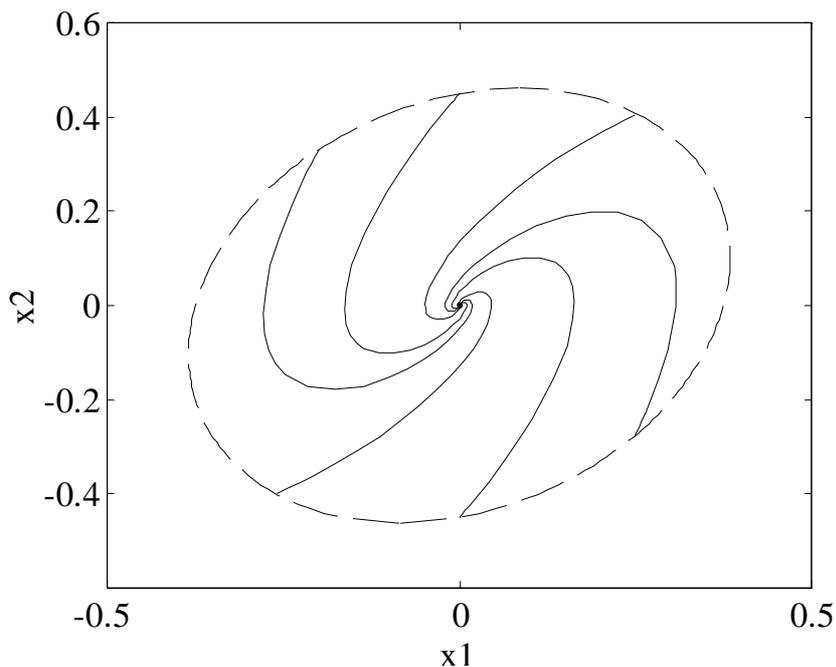


Figura 19. Plano de fases para a não-linearidade B com a lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear da equação 4.26.

Trajétórias partindo da fronteira da região de validade do controlador (elipse tracejada) para o sistema perturbado com a pior perturbação possível (equação 4.27).

### 4.3.2 Exemplo 2

Considere agora o sistema de equações estudado nos capítulos 2 e 3, dado pelas equações 2.30 e 2.31. Diferente do capítulo 3, onde foi obtida uma solução quantitativa por inspeção, o objetivo neste capítulo é obter uma lei de controle com a região de validade maximizada.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1^2 + w + u \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1^2 \\ u \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Recordando a desigualdade HJI para estes sistema:

$$H_*(x, V_x^T(x)) = V_{x_1} \cdot x_1 \cdot x_2 + V_{x_2} \cdot x_1^2 + x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot x_1^2 + x_1^4 + \frac{1}{4} \cdot \lambda \cdot V_{x_2}^2 \leq 0$$

$$\lambda = (1/\gamma^2) - 1 \quad (2.42)$$

Para computar a lei de controle, é necessário encontrar uma solução positiva definida que satisfaça a desigualdade 2.42 para um valor arbitrário de  $\gamma \in \mathfrak{R}^+$ . Se tal função,  $V(x)$ , é encontrada em torno da origem, a lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear é dada por:

$$u_* = -\frac{1}{2} \cdot V_{x_2}(x) \quad (2.33)$$

e, a pior perturbação, dada pela equação:

$$w_* = \frac{1}{2 \cdot \gamma^2} \cdot V_{x_2}(x) \quad (2.34)$$

Como o sistema das equações 2.30-2.31 não pode ser estabilizado através de controladores lineares, o problema de otimização 4.1 não tem uma solução viável. Consequentemente, a menos que uma solução global para o problema de otimização 4.2 seja conhecida, serão encontradas muitas dificuldades para resolvê-lo quantitativamente este problema. Para simplificar a procura pela solução, parte-se da solução apresentada na equação 2.43:

$$V(x) = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2^2 + c \cdot x_1^2 \cdot x_2 \quad (2.43)$$

Considerando  $a = 1 - b - \frac{\lambda}{2} \cdot b \cdot c > 0$ , e, substituindo 2.43 na desigualdade HJI, a equação 2.42 toma a forma da equação 4.29.

$$H_*(x) = (1 + b^2 \cdot \lambda) \cdot x_2^2 + \left(\frac{\lambda}{4} \cdot c^2 + c + 1\right) \cdot x_1^4 + 2 \cdot c \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 \quad (4.29)$$

Como o uso da equação 2.43 não permite uma solução global para o problema, o melhor a fazer é tentar resolver o problema de otimização 4.3. De modo similar ao exemplo anterior, o problema é simplificado ao se restringir o valor de gama como pertencente ao intervalo real:  $1 < \gamma < 1,50$  (da análise da equação sabe-se que o limite inferior de  $\gamma$  é 1). Esta consideração implica que a condição da equação 4.1 é satisfeita.

Em adição à simplificação do parágrafo anterior, como é muito difícil obter uma expressão para a área delimitada pela curva  $V(x) = C$  para a função da equação 2.43, de modo a obter um problema mais tratável, o procedimento alternativo de dois passos, explicado na seção anterior, é utilizado. O primeiro passo consiste da determinação da função  $V(x)$  que maximiza a região de sinal definido. Usando a representação em forma quadrática das equações 4.30 e 4.31, a região de positividade de  $V(x)$  é dada por  $x_2 < \alpha_1$ , e, a região de negatividade de  $H^*(x)$ , por  $\|x\|_2^2 < \beta_1$ .

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \cdot \sqrt{\alpha_1 + x_2} \end{bmatrix} P_V \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \cdot \sqrt{\alpha_1 + x_2} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$H^*(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ \sqrt{\beta_1 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_2 \end{bmatrix}^T \cdot P_H \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ \sqrt{\beta_1 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

onde as matrizes  $P_V$  e  $P_H$  são dadas por:

$$P_V = \begin{bmatrix} a - c\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$P_H = \begin{bmatrix} 1 + b^2\lambda + 2c\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{4}c^2 + c + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2c \end{bmatrix}$$

Resolvendo o primeiro passo do problema de otimização 4.3 modificado, é obtida a solução apresentada na equação 4.32. Os parâmetros otimizados adicionais são apresentados na equação 4.33. A lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear e a pior perturbação possível obtidas são dadas pelas equações 4.34 e 4.35, respectivamente.

$$V(x) = 409,72.x_1^2 + 152,49.x_2^2 + 13,248.x_1^2.x_2 \quad (4.32)$$

$$\alpha_1 = 30,927; \beta_1 = 193,40 \text{ e } \gamma = 1,5 \quad (4.33)$$

$$u_*(x) = - 6,624 x_1^2 - 152,49 x_2 \quad (4.34)$$

$$w_*(x) = 2,944 x_1^2 + 67,77 x_2 \quad (4.35)$$

Do teorema 3.4, pode ser concluído que  $V(x)$  é localmente positiva definida na região definida por  $x_2 < 30,927$  e  $H_*(x)$  é localmente negativa definida na região dada por  $\|x\|_2^2 < 193,40$ . Como a região de negatividade de  $H_*(x)$  engloba a região de positividade de  $V(x)$ , a região de sinal definido é dada pela região:  $\Omega = \{x \mid H_*(x) < 0\}$ .

Resolvendo o próximo passo do problema de otimização, é encontrado o menor valor da curva de nível  $V(x) = C$  que reside em  $H_*(x) = 0$ . Este valor é dado por  $C = 2,9492.10^4$ . Assim, a estimativa para a região de validade do controlador é dada pela equação 4.36.

$$V(x) < 2,9492.10^4 \quad (4.36)$$

Na figura 20, é mostrada, em linhas tracejadas, a curva fechada correspondente à região de validade estimada, juntamente com algumas trajetórias do sistema, com a pior perturbação possível, partindo desta curva. Na mesma figura, é mostrada, em linhas tracejadas-pontilhadas, a curva fechada correspondente à região de validade obtida por inspeção no capítulo 3. Nesta última, o valor da atenuação foi de  $\gamma = 1,05$ . A comparação entre estas duas curvas está de acordo com os resultados teóricos sobre o

tamanho da região de validade para controladores  $\mathcal{H}_\infty$  não-lineares apresentados em YAZDANPANAHA et al. (1999).

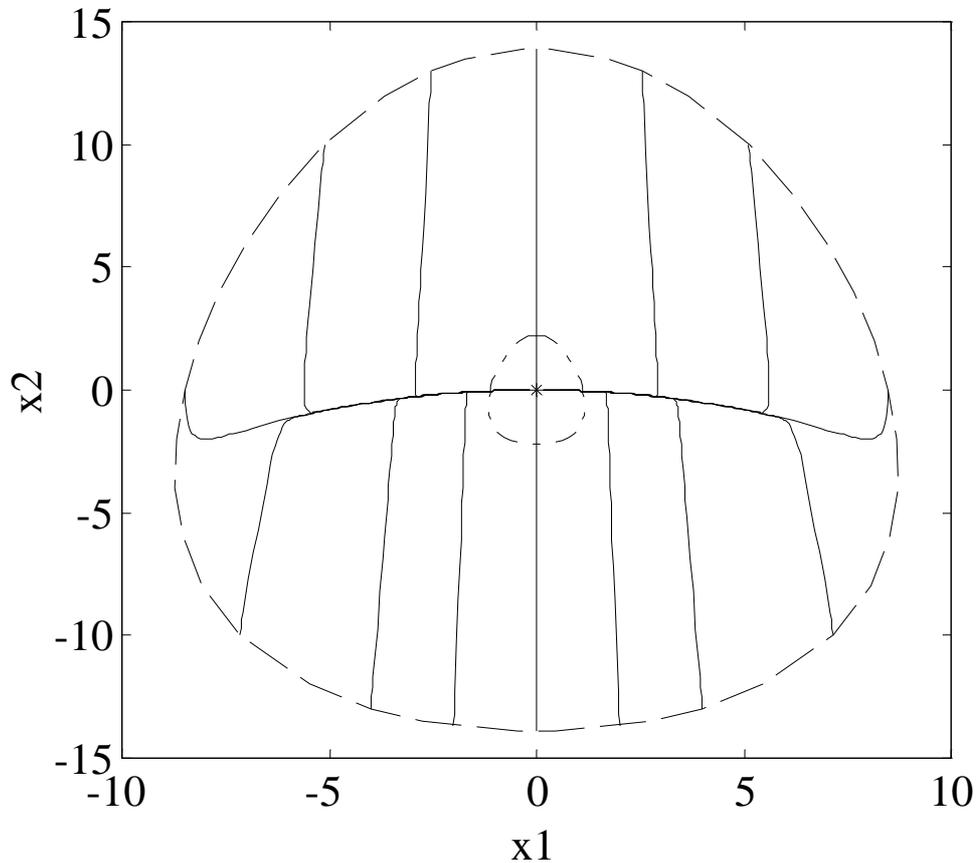


Figura 20 – Plano de fases para o sistema da equação 2.30 com o controle da equação 4.34 e a perturbação da equação 4.35.

As trajetórias partem da região de validade estimada para o controlador (curva tracejada). A curva interna (tracejada-pontilhada) representa a região de validade do controlador obtida por inspeção no capítulo anterior.

No próximo capítulo, de modo a mostrar que a metodologia pode ser usada para projetar controladores aplicados a problemas reais, será apresentada uma aplicação da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear a um sistema não-linear de engenharia química.

# Capítulo 5

## Aplicação a um sistema de pH experimental

---

### Resumo

Neste capítulo é apresentada uma aplicação experimental a um sistema de neutralização de pH. Primeiramente, o processo é descrito e seu modelo desenvolvido. As principais características do processo e sua relevância para o teste de controladores não-lineares também são discutidas. Posteriormente, a lei de controle é sintetizada, de acordo com a metodologia apresentada no capítulo 4, e testada através de simulações. Finalmente, o controlador é implementado na planta e os resultados são apresentados.

### 5.1 DESCRIÇÃO E MODELAGEM DO PROCESSO DE NEUTRALIZAÇÃO DE PH

Existem certas situações onde não é recomendável o uso de leis de controle lineares para controlar um processo. Uma destas situações ocorre quando a magnitude do ganho do processo varia muito dentro da faixa de operação de interesse. Nessas situações, o uso de um controlador linear, de ganho constante, pode levar tanto a um baixo desempenho quanto à instabilidade do sistema. Um exemplo clássico de um processo químico onde esta situação ocorre é o de um sistema de neutralização onde deseja-se controlar o pH na faixa de neutralidade. Neste tipo de processo, a curva de titulação do sistema, que representa o seu mapa de entrada e saída, apresenta uma grande variação na magnitude do ganho em resposta à adições de ácido ou base. Na figura 21 é mostrada a curva de titulação para um sistema composto por um ácido forte e uma base forte, ambos com molaridade 0,1 M.

O aparato experimental usado neste capítulo encontra-se montado no Instituto de Ciência e Tecnologia de Alimentos (ICTA/UFRGS) e é composto de um tanque de vidro agitado com capacidade de 2 litros, sensores de pH e vazão, um sistema comercial de monitoramento e controle fabricado pela companhia alemã *Braun* e um computador remoto ligado à planta, responsável pelo cômputo *on-line* das ações de controle. O vaso onde ocorre a mistura é alimentado por duas correntes, uma de ácido e outra de base, através de bombas peristálticas. O sistema é continuamente agitado numa rotação de 550 rpm. Além disso, toda quantidade adicionada pelas duas correntes de alimentação é

eliminada do vaso de modo que o sistema pode ser considerado, para fins de modelagem, como um CSTR (*Continuous Stirred Tank Reactor*). No trabalho em questão, a corrente ácida, composta por ácido clorídrico (HCl) 0,1 M, é considerada a corrente de processo (perturbação) e, a corrente básica, composta por Hidróxido de Sódio (NaOH) 0,1 M, é a variável manipulada. A figura 22 ilustra esquematicamente o sistema experimental descrito ( $F_B$  é a corrente de base e  $F_A$  a corrente de ácido) e a figura 23 mostra a foto do equipamento utilizado.

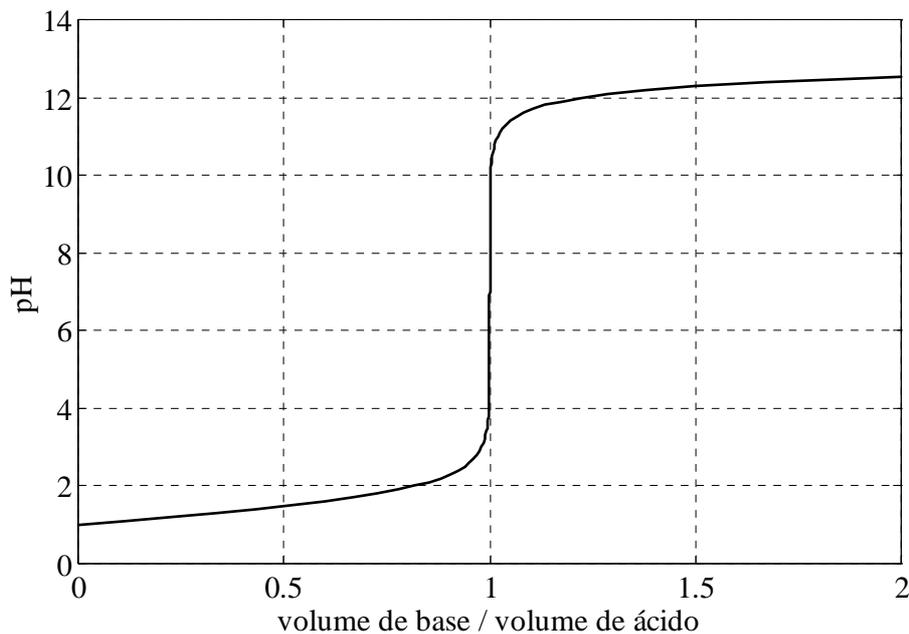


Figura 21 – Curva de titulação de um sistema de neutralização.

Ácido: HCl (0,1M), Base: NaOH (0,1 M)

Existe uma quantidade razoável de trabalhos sobre o controle de sistemas de neutralização na literatura, por exemplo: (WRIGHT, KRAVARIS, 1991, GUSTAFSSON et al., 1995, KLATT, ENGELL, 1996, SUNG et al., 1998). A maioria destes trabalhos usa algum tipo de abordagem não-linear para controlar o processo. Algumas abordagens se destacam, como o controle adaptativo e o uso de múltiplos modelos lineares interpolados ou com programação de ganho (*gain scheduling*), por exemplo. Dentre as poucas propostas que exploram a solução do problema não-linear puro, raras são as que resultam numa lei de controle com reais possibilidades de implementação.

Outra abordagem bastante comum na literatura, e possivelmente na prática industrial, é a atenuação do mapa de entrada e saída através da adição de soluções-tampão no meio reacional. Se por um lado o uso de tampões diminui a não-linearidade da curva de titulação do sistema, diminuindo a sensibilidade de variação do ganho na zona de neutralidade, por outro lado, este procedimento aumenta a quantidade de produtos químicos adicionados para controlar o sistema, algo que pode ser muito indesejável em algumas das principais aplicações onde o controle de pH é necessário, como em sistemas de tratamento de águas e efluentes e em processos bioquímicos. Assim, a não-utilização de tampões, apesar de tornar o problema de controle mais difícil, pode ser explorada para alcançar o ponto de operação desejado com uma quantidade muito menor de produtos químicos adicionada ao sistema controlado.

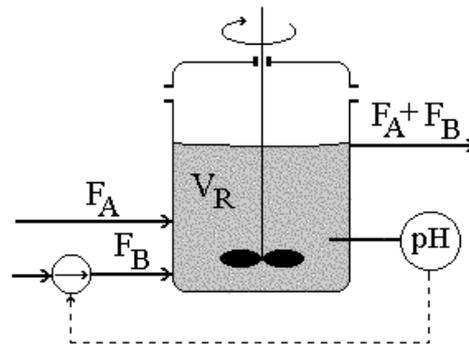


Figura 22 – Diagrama esquemático do sistema de neutralização de pH.

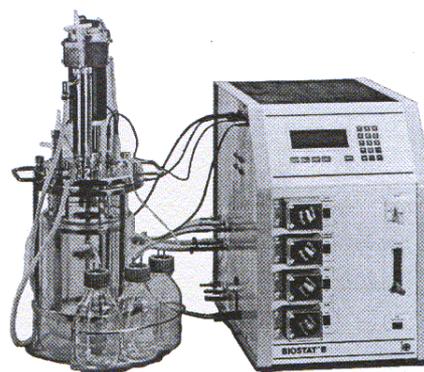


Figura 23 – Foto do equipamento

No âmbito do controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, dois trabalhos recentes foram relatados na literatura acadêmica. No primeiro destes, LI e ZHANG (1999) apresentam o controle

não-linear de um sistema composto por ácido acético e hidróxido de sódio (ácido fraco – base forte), usando o mesmo modelo desenvolvido por KLATT e ENGELL (1996) para projetar o controlador. Nesse trabalho, os autores modificam o objetivo de controle para se encaixar no método de solução por eles desenvolvido. O controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear obtido é testado somente através de simulações e, mesmo assim, a eliminação do *off-set* em malha fechada não é alcançada. Diferente desse trabalho, o artigo de GALÁN et al. (2000) relata uma aplicação experimental bem-sucedida de controle H-inifinito não-linear a um processo de neutralização. Os autores usam uma abordagem de múltiplos modelos lineares interpolados para representar o processo e, deste modo, obtém um controlador usando técnicas de projeto lineares. O controlador obtido pode ser considerado como uma mistura da abordagem multi-linear (MURRAY-SMITH, JOHANSEN, 1997) com a técnica de controle  $\mathcal{H}_\infty$  linear. Deve ser ressaltado que uma solução tampão foi adicionada ao meio reacional de modo a atenuar a não-linearidade do processo.

Neste capítulo, o objetivo é controlar o pH de um sistema experimental, composto por ácido e base fortes, sem tampões, na faixa de neutralidade usando a teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear pura, i.e., sem explorar esquemas adaptativos (SUNG et al., 1998) ou de múltiplos modelos interpolados (GALÁN et al., 2000) na etapa de projeto do controlador. A lei de controle deve satisfazer, na medida do possível, os requisitos da lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear ideal da definição 2.3 (página 36).

Para obter uma lei que possa ser facilmente implementada, grande parte da atenção recai na modelagem do processo. A escolha do modelo deve ser parcimoniosa, pesando de igual forma a proximidade da realidade e a simplicidade do modelo. Modelos de ordem mínima são bastante desejáveis quando se busca implementar leis de controle via realimentação de estados. Um modelo que se presta para este fim é o modelo de KLATT e ENGELL (1996), equação 5.1, uma evolução dos modelos de invariantes de reação (GUSTAFSSON, WALLER, 1983) e equivalente em ácido forte (WRIGHT, KRAVARIS, 1991), que depende somente da curva de titulação do sistema:

$$\dot{x}_1 = \frac{(1 + I_T(x_1)) \cdot (F_B - I_T(x_1) \cdot F_A)}{V_R \cdot (\partial I_T(x_1) / \partial x_1)}$$

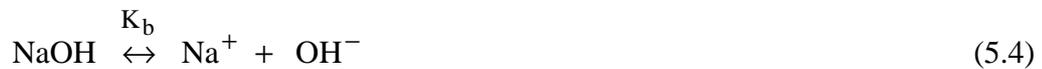
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\tau} \cdot (x_1 - x_2) \quad (5.1)$$

$$y = x_2 = \text{pH}$$

onde  $x$  são as variáveis de estado,  $F_B$  é a corrente básica,  $F_A$  é a corrente ácida,  $V_R$  é o volume do reator,  $\tau$  é uma constante de tempo que considera os atrasos de medida dos sensores e,  $I_T(x_1)$  é a inversa da curva de titulação do sistema. No caso de um sistema de ácido e base fortes (como é o sistema estudado), esta curva pode ser obtida analiticamente, sendo dada pela equação 5.2.

$$I_T(\text{pH}) = \frac{F_B}{F_A}(\text{pH}) = - \frac{10^{-\text{pH}} - K_W \cdot 10^{\text{pH}} - C_{A0}}{10^{-\text{pH}} - K_W \cdot 10^{\text{pH}} + C_{B0}} \quad (5.2)$$

onde  $C_{A0}$  é a concentração de ácido na corrente ácida,  $C_{B0}$  é a concentração de base na corrente básica e  $K_W = 10^{-14}$  é a constante de equilíbrio da dissociação da água em prótons e íons hidroxila. As reações reversíveis que ocorrem no interior do sistema estudado são mostradas nas equações 5.3 a 5.5.



onde as taxas das reações são tão rápidas que estas podem ser assumidas como instantâneas. Além disso, como o HCl e o NaOH são ácido e base fortes, isto implica numa total dissociação das reações reversíveis 5.3 e 5.4. Assim, tem-se:

$$K_a = \frac{[H^+].[Cl^-]}{[HCl]} \rightarrow \infty \Rightarrow [HCl] = 0 \quad (5.6)$$

$$K_b = \frac{[Na^+].[OH^-]}{[NaOH]} \rightarrow \infty \Rightarrow [NaOH] = 0 \quad (5.7)$$

$$K_w = [H^+].[OH^-] = 10^{-14} \quad (5.8)$$

onde  $[X]$  denota a molaridade da espécie  $X$  (a concentração de  $X$  em  $gmol/l$ ).

Voltando ao modelo da equação 5.1, apesar deste ser um modelo de ordem mínima, a síntese de uma lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear baseada nesta descrição resulta numa desigualdade HJI bastante complicada de se resolver usando a metodologia desenvolvida no capítulo 4. Como a não-linearidade problemática do modelo de Klatt e Engell pode ser isolada, o caminho natural para obter um modelo mais simples é através de uma mudança de variável.

Existem alguns trabalhos sobre mudança de variável para sistemas de pH na literatura. Um pré-requisito fundamental para esta escolha é que a nova variável não resulte apenas num modelo mais simples mas que possa ser medida com a mesma facilidade que a variável original. Vendo deste modo, os conceitos de invariante de reação e equivalente em ácido forte são inadequados para uso industrial. NARAYANAN et al. (1998) realizaram um estudo sobre algumas das principais transformações de variáveis usadas para melhorar o desempenho de sistemas de controle de pH e chegaram à conclusão que as variáveis mais indicadas para este fim são a concentração de prótons e a diferença entre os íons hidrogênio e hidroxila, definida com  $\eta$  em GOODWIN et al. (1982).

Como em (NARAYANAN et al., 1998), os autores apontam uma ligeira vantagem para o uso da variável  $\eta$ , neste trabalho foi tentada esta mudança de variável. Para o processo estudado neste capítulo, o novo modelo do processo fica muito simplificado, como pode ser visto na equação 5.9.

$$\frac{1}{V_R} \cdot \frac{d\eta}{dt} = F_A \cdot C_{A0} - F_B \cdot C_{B0} - (F_A + F_B) \cdot \eta \quad (5.9)$$

onde a definição de  $\eta$  é dada pela equação 5.10 e os demais parâmetros e variáveis tem a mesma interpretação das equações anteriores deste capítulo.

$$\eta = [\text{H}^+] - [\text{OH}^-] \quad (5.10)$$

A relação da variável  $\eta$  com a variável de interesse (pH) é dada na equação 5.11.

$$\eta = 10^{-\text{pH}} - \frac{K_W}{10^{-\text{pH}}} \Leftrightarrow \text{pH} = -\log_{10} \left( \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 + 4 \cdot K_W}}{2} \right) \quad (5.11)$$

O modelo das equações 5.9 a 5.11 é capaz de descrever o comportamento estático e dinâmico do processo com a mesma qualidade do modelo da equação 5.1. No entanto, o sistema experimental possui algumas características que não foram modeladas. A principal destas é que a água da rede hidráulica usada nos testes possui alguns sais dissolvidos desconhecidos de característica ácida. O pH medido para esta água se situa entre 5,1 e 6,3, dependendo do dia do teste. Isso explica o formato da curva experimental apresentada na figura 24, onde as maiores diferenças, em comparação com o modelo, se situam nas faixas de neutralidade e de basicidade. Existem também outras fontes de incerteza, como as concentrações das correntes ácida e básica, ruídos nos sensores, etc. No entanto, a principal fonte de incerteza do modelo é, sem dúvida, a composição da água usada nos testes.

É interessante também observar que a não-linearidade do mapa de entrada e saída do processo fica bastante atenuada quando se considera a variável de processo  $\eta$  ao invés do pH na curva de titulação do processo, como mostrado na figura 25. Deve ser reconhecido que o problema não-linear, neste caso, perde um pouco da sua relevância. No entanto, o objetivo neste capítulo, ao se fazer tal mudança de variável, não foi amenizar a não-linearidade do sistema, mas obter um modelo mais simples que possibilitasse usar o método descrito no capítulo 4. De fato, como será apresentado mais adiante, uma lei de controle não-linear, válida em toda região de operação de interesse, foi obtida e implementada no sistema experimental. O objetivo ao se fazer tal implementação não foi, num primeiro momento, comparar o desempenho do controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear com outras técnicas de controle, mas mostrar a viabilidade da técnica

para controlar um sistema experimental de engenharia química. Para o conhecimento do autor da tese, ainda não existem relatos de aplicações desta natureza na literatura.

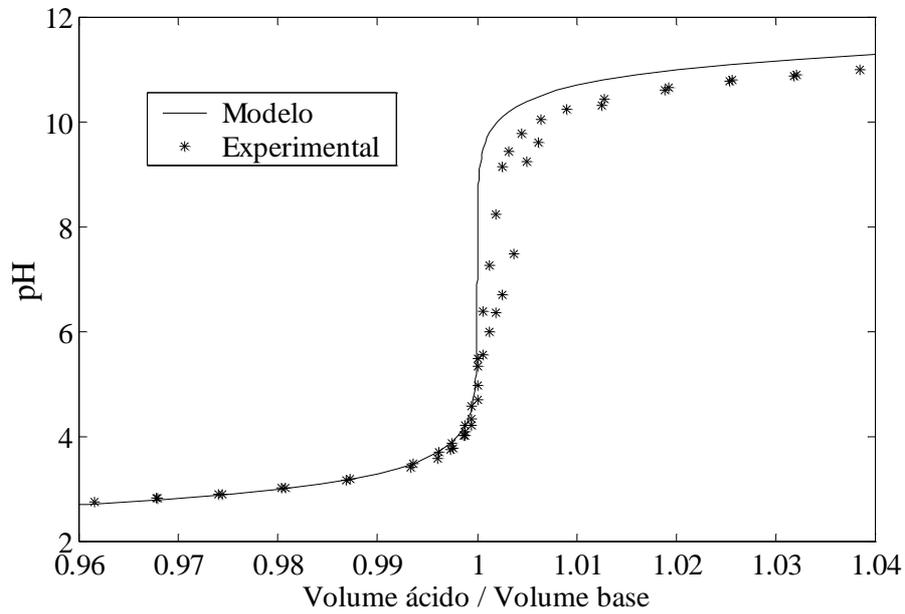


Figura 24 – Curva de titulação experimental versus curva de titulação teórica usando o modelo da equação 5.9 e a relação da equação 5.11.

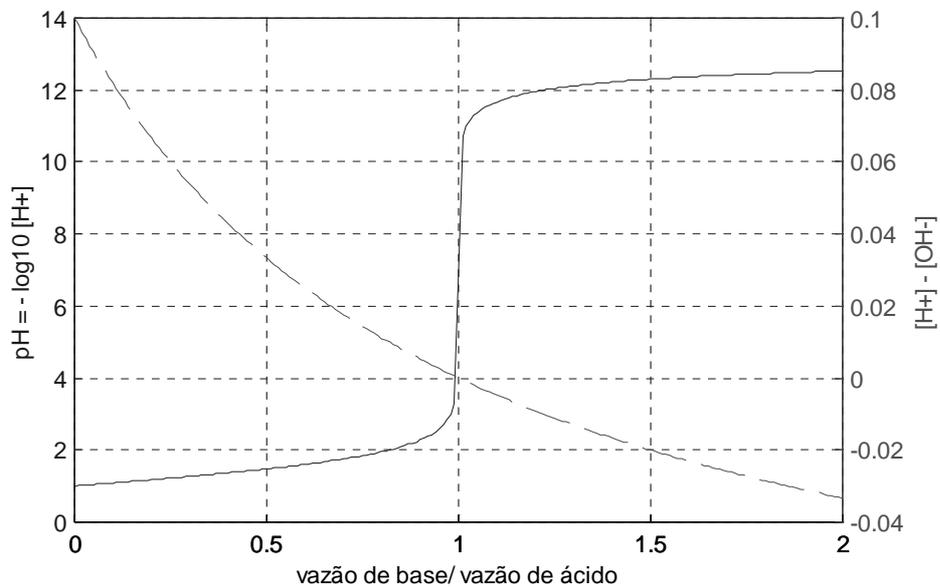


Figura 25 – Comportamento de entrada e saída do sistema de neutralização usando duas variáveis de saída diferentes.

pH - linha contínua, ordenada esquerda;  $\eta$  - linha tracejada, ordenada direita

## 5.2 SÍNTESE DA LEI DE CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ NÃO-LINEAR

Para obter a lei de controle do sistema, deve-se, em primeiro lugar, rescrever as equações do modelo de modo que a origem seja a solução de interesse. Assim, o modelo da equação 5.9 pode ser rescrito como:

$$\frac{d\eta}{dt} = \theta_A \cdot (C_{A0} - \eta) - \theta_B \cdot (C_{B0} + \eta) \quad (5.12)$$

onde as variáveis  $\theta_A$  e  $\theta_B$  são dadas por:

$$\theta_A = \frac{F_A}{V_R} \quad (5.13)$$

$$\theta_B = \frac{F_B}{V_R} \quad (5.14)$$

Definindo as novas variáveis:

$$x_1 = \eta - \eta_{SS}$$

$$w = \theta_A - \theta_{ASS}$$

$$u = \theta_B - \theta_{BSS}$$

onde o sub-índice SS indica o valor da variável no estado estacionário (do inglês, *Steady State*). No caso em questão, o valor de  $\eta_{SS}$  deve ser nulo,  $\eta_{SS} = 0$ , o que equivale ao valor de pH = 7. Consequentemente, isto implica em  $\theta_{ASS} = \theta_{BSS}$ . Não há perda de generalidade se for considerado que os valores de  $\theta_{ASS}$  e  $\theta_{BSS}$  sejam iguais a zero.

Deste modo, o modelo da equação 5.9 pode ser rescrito de acordo com os requisitos da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, equação 5.15.

$$\dot{x}_1 = (C_{A0} - x_1) \cdot w - (C_{B0} + x_1) \cdot u \quad (5.15)$$

Se o objetivo do sistema de controle for arbitrado de acordo com a descrito na equação 5.16,

$$z = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ u \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

a descrição do sistema recai na descrição IA das equações 2.19.

$$\dot{x} = f(x) + g(x).u + k(x).w \quad (2.19)$$

$$z = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ u \end{bmatrix}$$

De modo a garantir a eliminação do *off-set* do sistema de controle, o que seria inaceitável do ponto de vista prático, a lei de controle pode ter uma modo de ação integral forçado. Para isto, basta somar um termo integral à ação de controle,  $u(x)$ , e rescrever a nova ação de controle,  $v(x)$ , de acordo com as equações 5.17.

$$v(x) = u(x) + T_i . x_2 \quad (5.17)$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

onde  $x = [x_1 \ x_2]^T$  é o vetor dos estados,  $T_i$  é o parâmetro que regula a influência do modo integral no controlador e  $v(x)$  é a lei de controle realmente implementada.

Assim, a equação 5.15 pode ser expandida, resultando na descrição IA da equação 5.18.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -(C_{B0} + x_1).T_i . x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(C_{B0} + x_1) \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} C_{A0} - x_1 \\ 0 \end{pmatrix} w \quad (5.18)$$

As equações 5.18 e 5.16 definem o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear para o sistema de neutralização estudado.

Quando se usa uma função de Lyapunov com o formato simples da equação 5.19, obtém-se a desigualdade HJI mostrada na equação 5.20.

$$V(x) = a.x_1^2 + b.x_2^2 \quad (5.19)$$

$$H_*(x) = \left( \frac{a^2}{\gamma^2} - a^2 \right) x_1^4 + \left( -0,2 \cdot \frac{a^2}{\gamma^2} - 0,2 \cdot a^2 \right) x_1^3 - 2 \cdot a \cdot T_i \cdot x_1^2 \cdot x_2 + \left( -0,01 \cdot a^2 + 0,01 \cdot \frac{a^2}{\gamma^2} + 1 \right) x_1^2 + (-0,2 \cdot a \cdot T_i + 2 \cdot b) x_1 \cdot x_2 \quad (5.20)$$

Como a condição de detectabilidade de LaSalle é satisfeita para o sistema de equações 5.18 e 5.16, é suficiente que  $H_*(x) \leq 0$  para se resolver o problema. Para facilitar a tarefa de projeto, pode-se assumir que  $T_i = 10 \cdot b/a$ , cancelando, desta forma, o termo cruzado  $(x_1 \cdot x_2)$  da desigualdade HJI, que agora pode ser reescrita como:

$$H_*(x) = a^2 \cdot \lambda \cdot x_1^4 - 0,2 \cdot a^2 (\lambda + 2) \cdot x_1^3 - 20 \cdot b \cdot x_1^2 \cdot x_2 + (1 + 0,01 \cdot a^2 \cdot \lambda) x_1^2 \quad (5.21)$$

$$\lambda = \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right)$$

Uma condição necessária para a existência de uma solução local é que  $(1 + 0,01 \cdot a^2 \cdot \lambda)$  seja menor que zero. Isto só é possível quando  $\lambda < 0$ , ou seja, quando  $\gamma$  é maior que 1. Logo, a condição da equação 4.1 é automaticamente satisfeita e a busca por uma solução local para o problema fica facilitada.

Para resolver o problema de otimização 4.3 para este problema de controle, foi usada a representação em forma quadrática da equação 5.22 para representar a desigualdade HJI.



$$\begin{cases} a = b = 2837,1 \\ \beta_1 = \beta_2 = 1,874 \cdot 10^{-2} \\ \gamma = 1,3 \\ T_i = 10 \end{cases} \quad (5.24)$$

A região de validade do controlador é dada pela equação 5.25 e sua representação gráfica pode ser vista na figura 26.

$$V(x) = 2837,1 \cdot (x_1^2 + x_2^2) < 1 \quad (5.25)$$

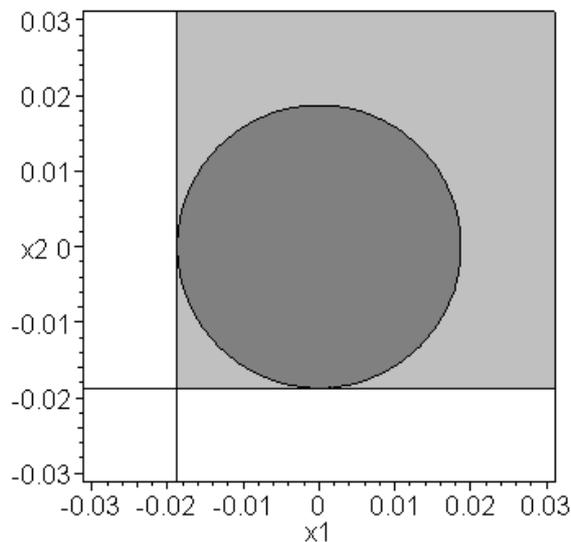


Figura 26 – Região de validade do controlador.

Sombreado claro – região de sinal definido; sombreado escuro - maior curva de nível dentro da região de sinal definido, região de validade do controlador

Apesar de aparentar ser uma região de validade pequena, deve-se ter em mente que a variável de interesse é  $\eta$  e não o pH. Em termos de pH, esta região de validade seria equivalente a um círculo, centrado no valor de neutralidade (pH = 7), de raio igual à aproximadamente 5, o que englobaria com sobras a região de interesse.

Substituindo os valores dos parâmetros do modelo, a lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear correspondente à solução do problema é mostrada na equação 5.26 em termos da variável de controle original.

$$F_B(\eta) = 1,5 \cdot 10^3 \cdot (283,71 \cdot (\eta - \eta_{SP}) + 2837,1 \cdot (\eta - \eta_{SP})^2 + 10 \cdot x_2)$$

$$\dot{x}_2 = (\eta - \eta_{SP})$$
(5.26)

onde  $\eta_{SP}$  é o valor desejado (*set-point*) para a variável  $\eta$ . Se for desejada uma lei de controle em função da variável original, pH, a transformação da equação 5.27 deve ser incorporada à lei de controle da equação 5.26 (e  $\eta_{SP}$  deve ser substituído por  $pH_{SP}$ , o valor desejado para o pH).

$$\eta = 10^{-pH} - \frac{K_W}{10^{-pH}}$$
(5.27)

Se transformação não-linear da equação 5.27 não for considerada, a lei de controle das equações 5.26 pode ser vista como um controlador PI adicionado de um termo extra quadrático. No entanto, devido ao fato de o termo quadrático ter uma influência pelo menos mil vezes menor que os outros termos da lei de controle dentro da faixa de interesse, pH entre 5 e 9, este pode ser desconsiderado. De fato, as simulações realizadas mostraram que os resultados com e sem o termo quadrático da equação 5.26 se sobrepõe. No entanto, apesar da lei de controle ser PI em relação à variável  $\eta$ , a lei de controle global é não-linear devido à não-linearidade da transformação 5.27.

Na figura 27 é mostrado o desempenho do sistema em malha fechada com a lei de controle desenvolvida em resposta a uma seqüência de eventos composta por perturbações no *set-point* e na vazão de ácido. Esta seqüência de eventos é apresentada na tabela 2.

Tabela 2 – Sequência de eventos testados do teste de controle da figura 27.

Tempo (s)	$\eta_{SP}$ (pH <sub>SP</sub> )	F <sub>A</sub> (ml/s)
0	$1 \cdot 10^{-5}$ ( $\cong 5$ )	$4 \cdot 10^{-2}$
50	$-1 \cdot 10^{-5}$ ( $\cong 9$ )	$4 \cdot 10^{-2}$
100	$1 \cdot 10^{-6}$ ( $\cong 6$ )	$4 \cdot 10^{-2}$
150	0 (= 7)	$4 \cdot 10^{-2}$
200	0 (= 7)	$2 \cdot 10^{-2}$
250	0 (= 7)	$4 \cdot 10^{-2}$
300	$1 \cdot 10^{-5}$ ( $\cong 5$ )	$4 \cdot 10^{-2}$
350	$-1 \cdot 10^{-5}$ ( $\cong 9$ )	$4 \cdot 10^{-2}$

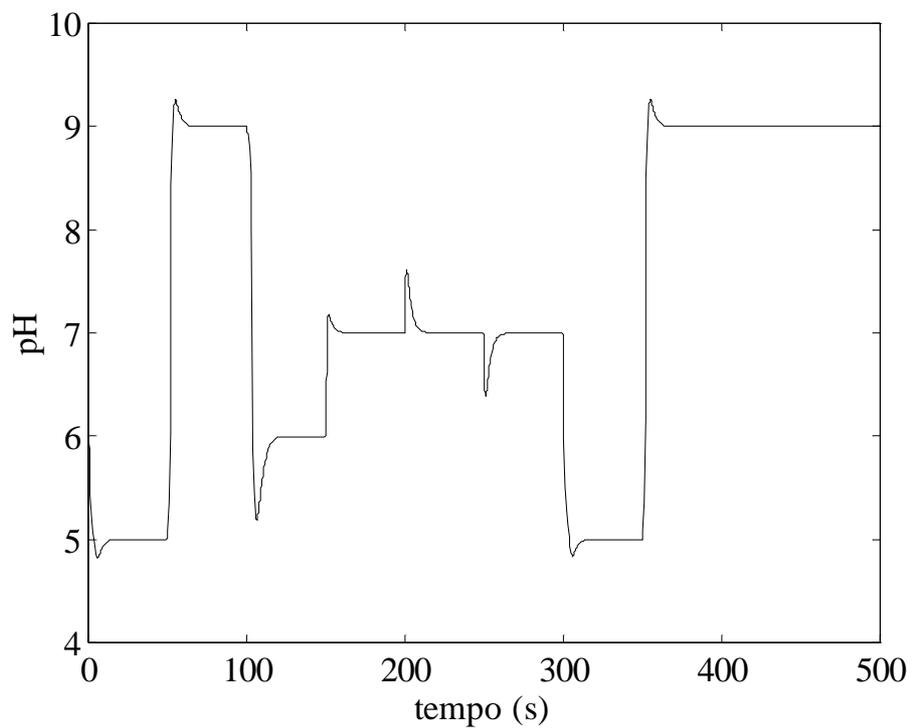


Figura 27 – Desempenho do sistema de controle simulado em resposta aos eventos da tabela 2.

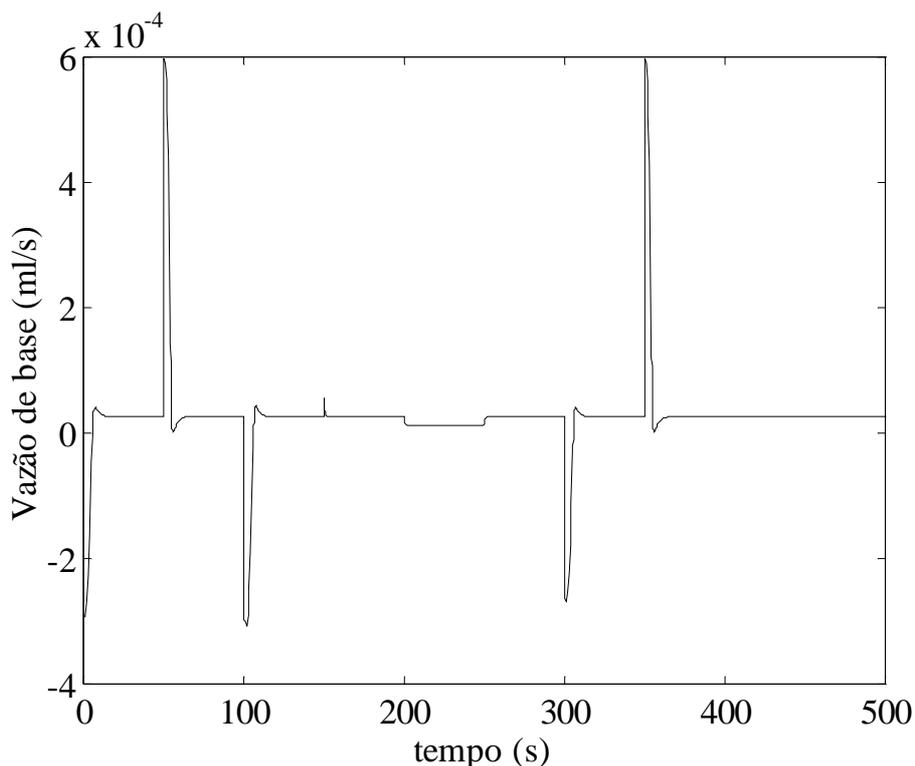


Figura 28 – Ações de controle correspondentes à figura 27.

Uma preocupação que foi levada em conta quando da síntese do controlador diz respeito às restrições das ações de controle. Sabe-se que as bombas peristálticas que alimentam o reator com a corrente básica têm como limite físico máximo a vazão de 8 ml/min. Também existem limites quanto à taxa de alimentação da corrente básica. Muito provavelmente, as ações de controle da figura 28 não poderiam ser realizadas na prática. Assim, como estas duas restrições não foram consideradas na etapa de síntese do controlador, se forem projetadas ações de controles superiores a este limite, o projeto ficará comprometido. No entanto, testes experimentais preliminares, assim como as simulações das figuras 27 e 28, mostram que, na faixa de interesse, pH entre 5,5 e 8,5, onde ocorrem os maiores problemas de controle, o sistema não apresenta problemas de saturação desta natureza. Somente para valores fora desta faixa central de pH é que o controlador projetado calcularia ações de controle superiores ao seu limite máximo. No entanto, para estas regiões, o controle de pH não é considerado um problema desafiador.

### 5.3 IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLADOR NA PLANTA

Para implementar o controlador da equação 5.26 no sistema experimental é necessário medir o valor de  $\eta$ , calcular o valor de  $F_B$  de acordo com a lei de controle projetada e enviar este sinal para a válvula que regula o fluxo  $F_B$ . Para obter o valor de  $\eta$ , basta medir o pH e aplicar a transformação da equação 5.27. Como o sistema comercial usado permite somente algumas leis de controle pré-definidas, é necessário conectar o seu sistema de controle a um computador remoto para computar a lei de controle desejada. O grande problema enfrentado na implementação do controlador é que o sistema comercial usado não permite a manipulação de  $F_B$  através do computador conectado à planta. O único parâmetro de entrada que é possível de se manipular é o valor do *set-point* do controlador PID responsável pelo controle da malha de pH do sistema, figura 29.

Assim, foi pensado em atuar diretamente no *set-point* do processo, caracterizando um modo de operação em cascata, e tentar, de algum modo, fazer o valor da ação de controle calculada passar direto para o processo. Este tipo de procedimento é matematicamente possível, bastando para isso usar um modo de operação proporcional de ganho unitário e enviar como *set-point* o valor de controle desejado ( $F_B$ , calculado de acordo com a equação 5.26) adicionado do valor atual da variável medida, equação 5.28.

$$SP = -F_B + \text{pH}_{\text{medido}} \quad (5.28)$$

Como o valor calculado pelo sistema comercial é dado pela equação 5.29, se a equação 5.28 for enviada como *set-point* para a malha proporcional de ganho unitário ( $K_C = 1$ ), a ação proporcional será cancelada e o valor da ação de controle desejado,  $F_B$ , será implementada.

$$u = K_C \cdot (\text{pH}_{\text{medido}} - SP) \quad (5.29)$$

Para implementar a lei de controle no processo, foi desenvolvida uma interface entre a planta e o usuário usando o *software* SIMULINK/MATLAB (versão 5.3). Na figura 30, é mostrado o bloco de *simulink* usado para implementar a lei de controle da

equação 5.26. A interface desenvolvida, como pode ser acompanhado na figura 30, mede o valor de pH e o transforma na variável  $\eta$  (no bloco Fcn). Esta variável alimenta o controlador PID, juntamente com o valor do set-point desejado. O bloco PID possui os parâmetros lineares da lei de controle 5.26 e produz, desta forma, o valor desejado,  $F_B$ . Este valor é subtraído do valor atual do pH e alimentado como *set-point* do sistema comercial. Se o controlador opera de modo contínuo e o modelo da planta é perfeito, o cancelamento da ação proporcional se verifica e a ação implementada no processo é a lei de controle desejada. De fato, através de simulações, onde o bloco do reator é trocado pelo modelo do processo, para a sequência de eventos da tabela 2, obtém-se um desempenho igual ao apresentado nas figuras 27 e 28.

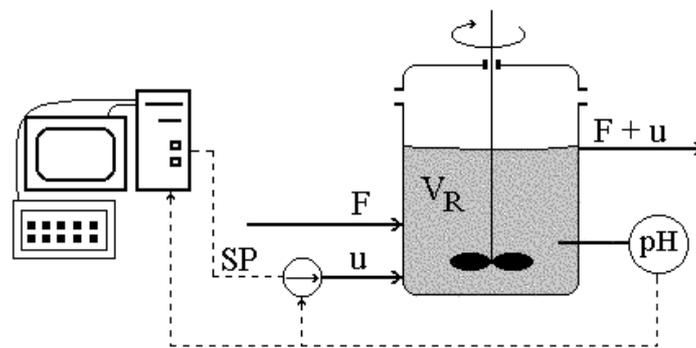


Figura 29 – Implementação do controlador através da manipulação do *set-point*.

No entanto, devido à implementação discreta da lei de controle, o cancelamento total da ação proporcional não é possível, resultando num comportamento oscilatório do sistema em malha fechada. Na figura 31 é mostrado o desempenho do controlador implementado em resposta a algumas mudanças de *set-point* e um tempo de amostragem de 5 segundos. O uso deste tempo de amostragem é devido ao fato de ser o padrão usado pelo sistema comercial. Observa-se neste teste um comportamento bastante oscilatório em torno dos valores desejados de pH.

Para tentar justificar este comportamento, além do tempo de amostragem que parece ser muito alto, outra conjectura diz respeito ao tipo de alimentação da corrente de processo ( $F_A$ ). Se for levado em conta que esta corrente, fixada em 30 % da sua vazão máxima para o teste da figura 31, é alimentada, a cada intervalo de amostragem, através de pulsos pela bomba peristáltica, figura 32, pode-se tentar algum procedimento alternativo para eliminar estes pulsos.

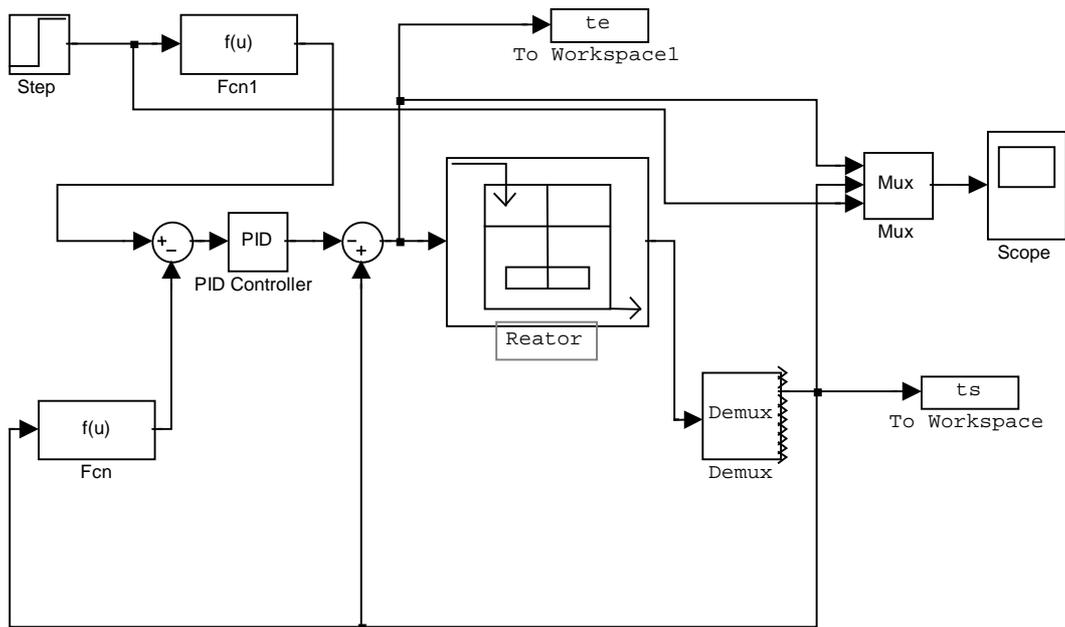


Figura 30 – Diagrama do simulink responsável pela implementação do controlador no sistema experimental.

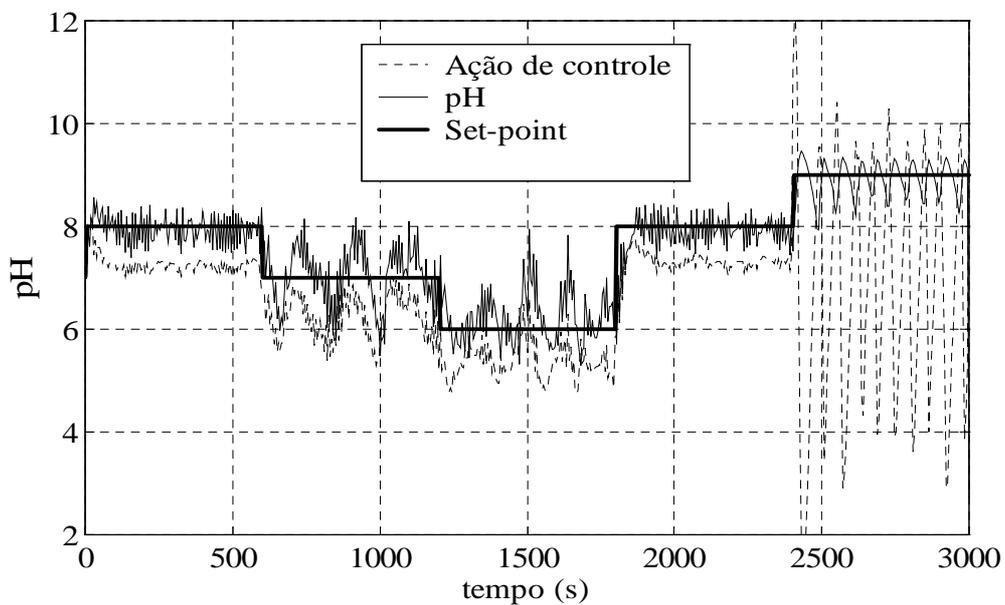


Figura 31 – Resposta do sistema a mudanças de *Set-Point*.

A ação de controle é o *set-point* enviado pelo controlador.

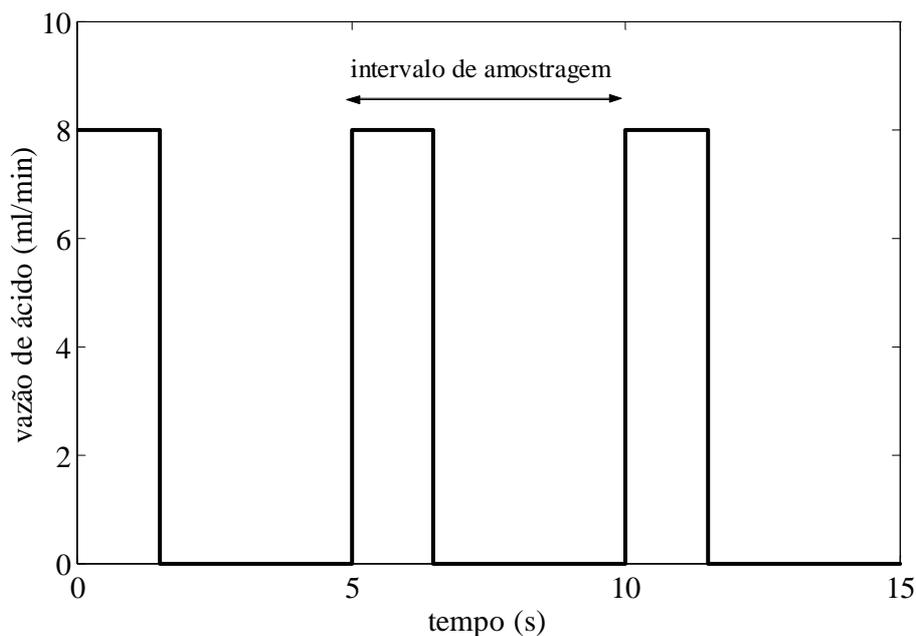


Figura 32 – Perturbação através de pulsos na corrente de ácido.

Para tentar atenuar este comportamento oscilatório do sistema de controle, duas alterações foram feitas. Primeiro, para diminuir o efeito do atraso da medida, o tempo de amostragem foi reduzido de 5 para 0,5 segundos. Além disso, a perturbação em pulso da figura 32 foi substituída por uma alimentação contínua de ácido (vazão máxima) com uma concentração 0,03 M. Esta última alteração é teoricamente equivalente à perturbação original onde a concentração da corrente de ácido era 0,1 M e a vazão 30 % do máximo. Os resultados deste novo teste são apresentados na figura 33.

Os resultados da figura 33 também apresentam o mesmo comportamento oscilatório da figura 31. Seguindo esta mesma linha de raciocínio, poder-se-ia tentar reduzir ainda mais o tempo de amostragem. No entanto, deste modo, o controlador poderia começar a atuar sobre os ruídos da medida de pH, o que não eliminaria a oscilação do sistema. Outra possibilidade seria usar o modelo do processo para prever o pH do próximo intervalo de amostragem e alimentar o controlador com esta previsão no lugar do pH medido. Esta abordagem tem contra si o fato do modelo possuir muitas incertezas estáticas na faixa de interesse, como pode ser visto na figura 24. Deste modo, o cancelamento da ação proporcional continuaria não ocorrendo e, se o motivo da oscilação for devido ao cancelamento do pH medido, provavelmente isto não implicaria na sua eliminação.

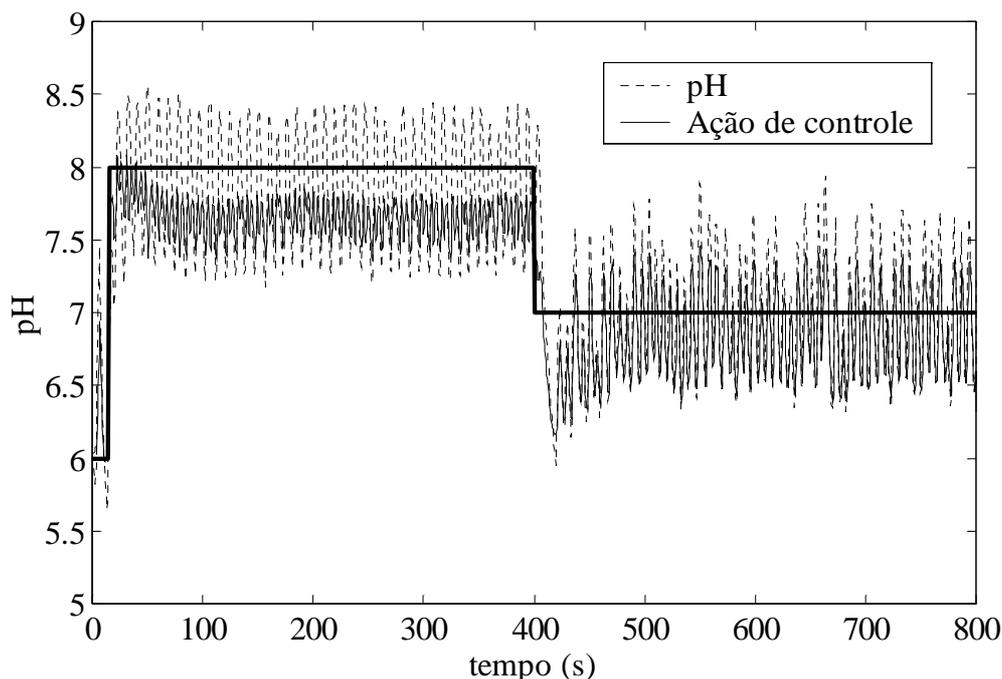


Figura 33 – Resposta do sistema a mudanças de *Set-Point*.

A ação de controle é o *set-point* implementado.

Investigando o processo um pouco mais, pode-se conjecturar que o principal motivo do comportamento oscilatório do sistema em malha fechada seja inerente ao aparato experimental. Quando se observa a alimentação do processo de perto, pode-se perceber que a mesma é feita de forma quantizada. De tão pequenas que são as quantidades de ácido e base adicionadas, a alimentação é conduzida gota a gota. Deste modo, muitas vezes, as ações de controle implementadas tem que esperar até que se alcance uma quantidade mínima de rotações da bomba peristáltica para que a gota se forme e caia no meio reacional. Algumas vezes, inclusive, uma ação mínima de controle libera uma gota de base devido ao acúmulo de fluido ocasionado pelas ações de controle anteriores. Como na faixa de neutralidade, qualquer adição de ácido ou base resulta numa grande alteração de pH, este problema limita muito o desempenho alcançável do sistema. Outra possível fonte da oscilação talvez seja devido ao eletrodo de pH (sensor) utilizado. Sabe-se que o sensor utilizado não apresenta uma resposta instantânea. Seu comportamento usual apresenta um pico de pH após qualquer adição de ácido ou base antes de alcançar o valor final da variável.

Para comprovar estes fatos, foram realizados dois testes em malha aberta (somente com o controlador proporcional do sistema comercial): um com o mesmo sensor dos testes anteriores e ganho proporcional unitário e, outro com um ganho proporcional baixo ( $4,44 \cdot 10^{-3}$ ) e um novo eletrodo de resposta mais suave. Estes dois testes são apresentados nas figuras 34 e 35, respectivamente. Deve ser ressaltado que todos os testes daqui por diante usam um tempo de amostragem de 0,5 segundos.

Na figura 34, como era de se esperar, foi observado um comportamento oscilatório. No entanto, comparando o período da oscilação ( $\approx 10$  segundos) com o tempo de formação da gota ( $\approx 0,6$  segundos), fica evidente que a quantização da alimentação não é a principal causa da oscilação. Como o teste da figura 35 apresenta um comportamento pouco oscilatório, fica comprovado que a oscilação observada era devido, principalmente, ao elemento sensor de pH. Esta justificativa fica mais evidente quando se compara o tipo de alimentação destes testes. Diferente do teste da figura 34, onde a alimentação foi conduzida sem pulsos, no teste da figura 35, foi utilizada a alimentação de ácido da figura 32. Assim, nos próximos testes, o eletrodo original foi trocado pelo novo eletrodo usado no experimento da figura 35.

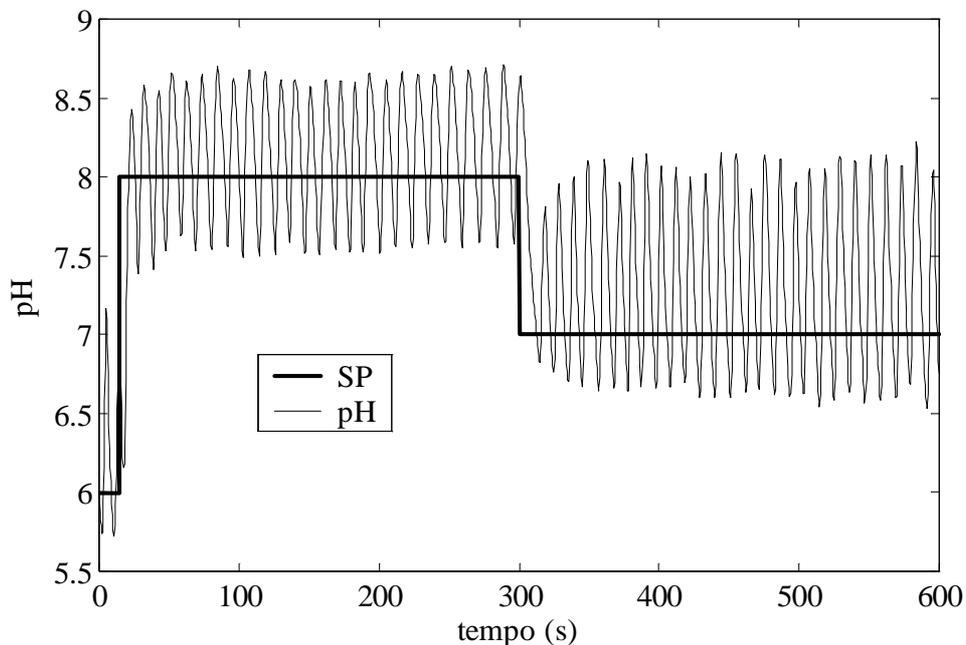


Figura 34 – Controle proporcional do sistema de neutralização com o eletrodo de pH original, ganho do controlador unitário e alimentação sem pulsos.

pH medido – linha sólida, *Set-point* – linha sólida grossa

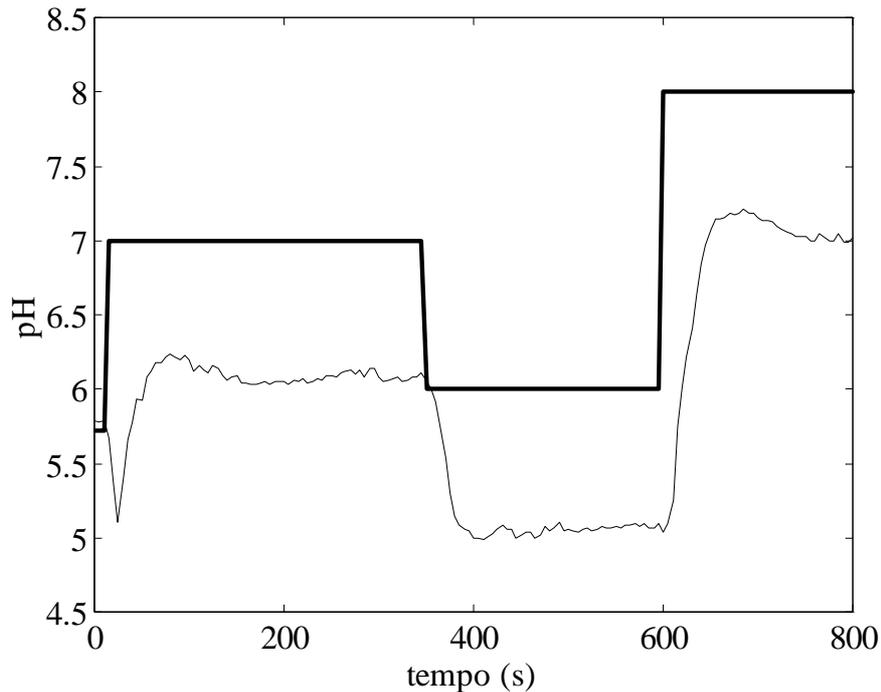


Figura 35 – Controle proporcional do sistema de neutralização com o novo eletrodo de pH, ganho do controlador baixo ( $K_c = 4,44 \cdot 10^{-3}$ ) e alimentação em pulsos.  
pH medido – linha sólida, *Set-point* – linha sólida grossa

Na figura 36, as propriedades de atenuação de perturbações na corrente de processo são apresentadas. Observa-se que, mesmo dentro da região de maior sensibilidade do processo, o controlador consegue compensar perturbações tipo degrau implementadas na corrente ácida com pequenos desvios em relação ao *set-point*. Os degraus aplicados na corrente ácida são apresentados na figura 37.

Para fins de comparação, foi realizado um teste com o controlador originalmente proposto pelo fabricante do equipamento. Este controlador é um PI com ganho proporcional igual à  $4,44 \cdot 10^{-3}$  e constante de tempo integral igual a 30 segundos. Pode ser observado na figura 38 que o controlador obtido não consegue nem manter o *set-point* no valor de neutralidade para uma perturbação na corrente de ácido (0,1 M) em 30 % da vazão máxima. No entanto, como estes parâmetros normalmente são usados com soluções de ácido e base fortes 10 vezes mais concentradas (apesar de não haver referência alguma no manual do fabricante sobre a concentração dos reagentes), os parâmetros do controlador PI foram multiplicados por 10 e testados novamente. O resultado deste controlador alterado é apresentado na figura 39, onde ainda observa-se um comportamento oscilatório para a mesma perturbação em  $F_A$ .

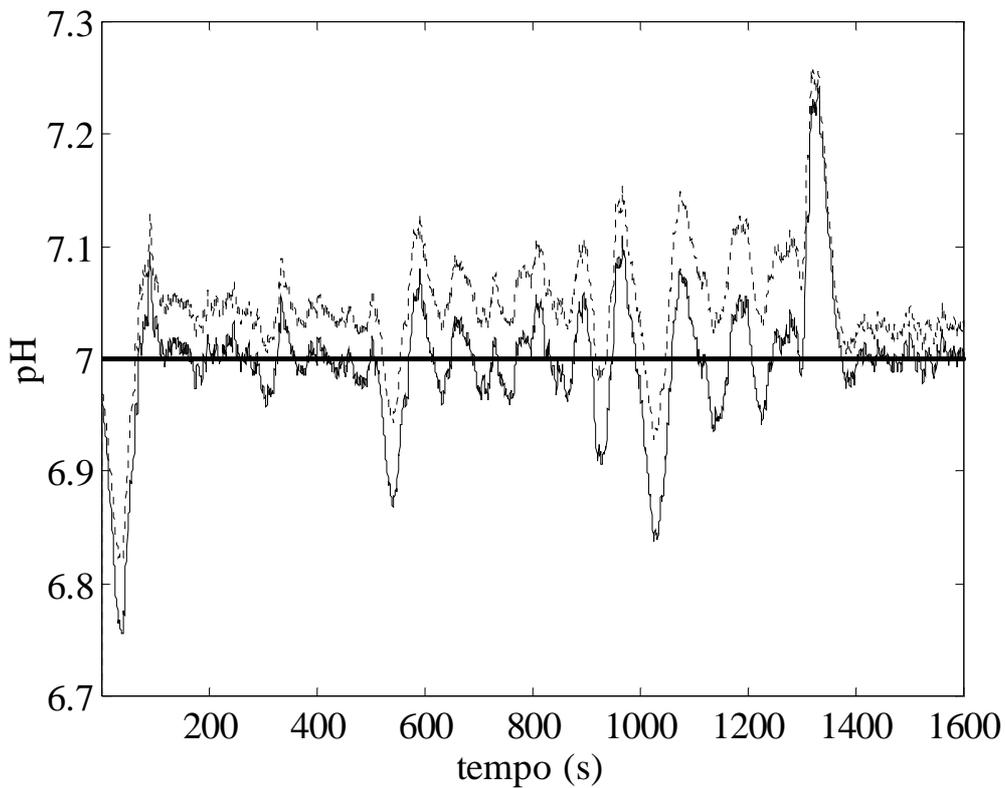


Figura 36 – Atenuação de perturbações usando controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear.  
 Ação de controle - linhas tracejadas; pH medido – linha sólida, *Set-point* – linha sólida grossa

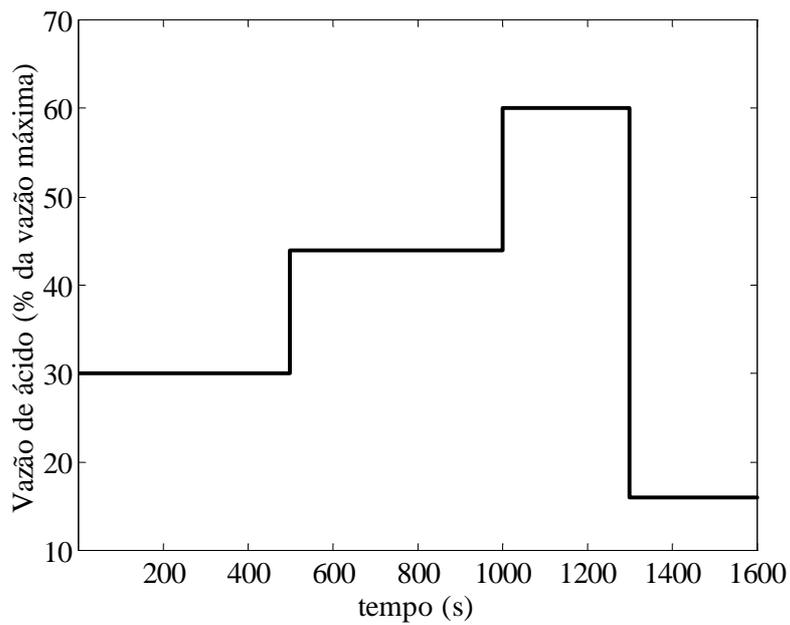


Figura 37 – Perturbações aplicadas na corrente de ácido do teste da figura 36.

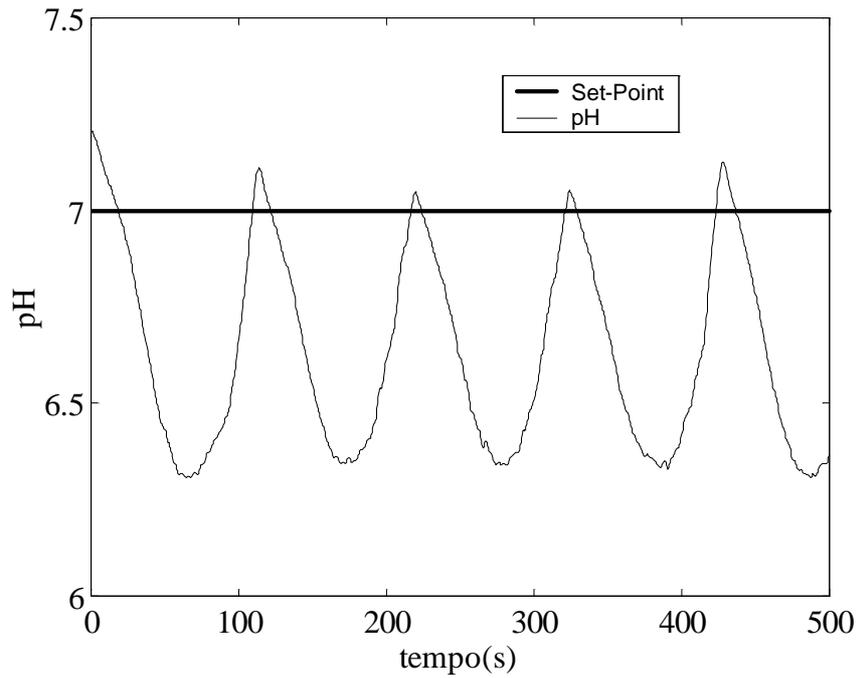


Figura 38 – Controle de pH com o PI original do sistema ( $F_A = 30\%$  em pulsos).

pH medido – linha sólida, *Set-point* – linha sólida grossa

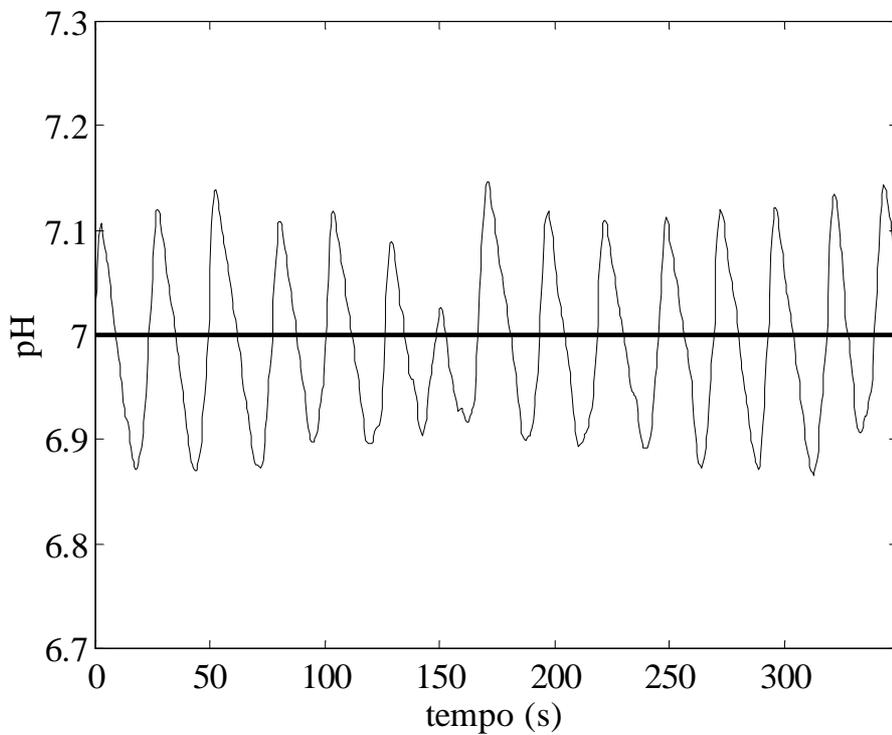


Figura 39 – Controle de pH com o PI alterado ( $F_A = 30\%$  em pulsos).

pH medido – linha sólida, *Set-point* – linha sólida grossa

Para verificar se a alimentação em pulso utilizada nos testes das figuras 36, 38 e 39 tem influência na rejeição da perturbação com o novo sensor, o  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear desenvolvido foi testado com uma alimentação de corrente ácida 0,03 M a 100%. Os resultados são apresentados na figura 40 onde, no tempo de 200 segundos, a vazão é alterada para 50 % do valor máximo. Como não se observou grandes diferenças de desempenho neste teste em comparação com os anteriores, nos testes seguintes foi utilizada a alimentação em pulso da figura 32 com uma concentração de ácido igual a 0,1 M.

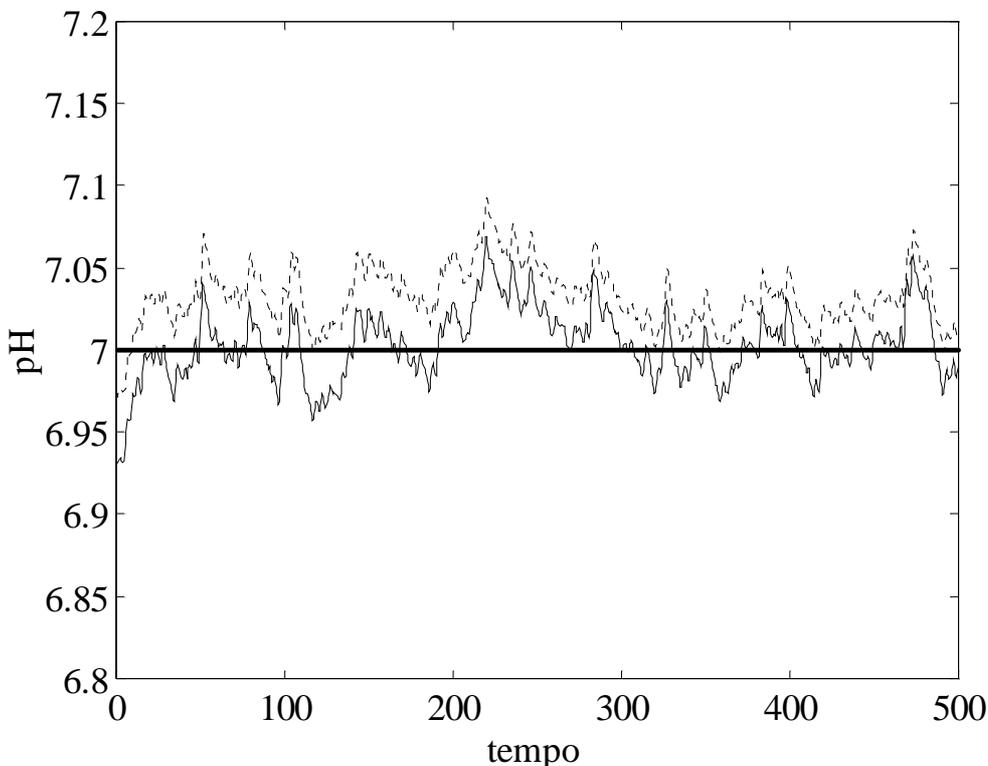


Figura 40 – Atenuação de perturbações usando controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear.

Corrente ácida 0,03 M: 100 % da vazão máxima até 200 segundos e 50 % após este tempo.

Ação de controle - linhas tracejadas; pH medido – linha sólida, *Set-point* – linha sólida grossa

Nas figuras 41 e 42, são apresentados dois testes de mudanças de *set-point* com o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, de 7 para 6 e de 7 para 8, respectivamente. Ambos os testes foram realizados com uma alimentação em pulsos na corrente ácida 0,1 M. Pode-se observar que o desempenho não é tão bom quanto o obtido na rejeição de

perturbações em  $F_A$  devido à existência de um *overshoot* elevado. No entanto, esta sobrelevação já era prevista nas simulações e, após a sua ocorrência, o controlador consegue estabilizar a planta com pequenas oscilações em relação ao novo valor de referência. Uma possível justificativa para este comportamento talvez seja o fato que o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear foi projetada para compensar perturbações na corrente ácida e não no *set-point*.

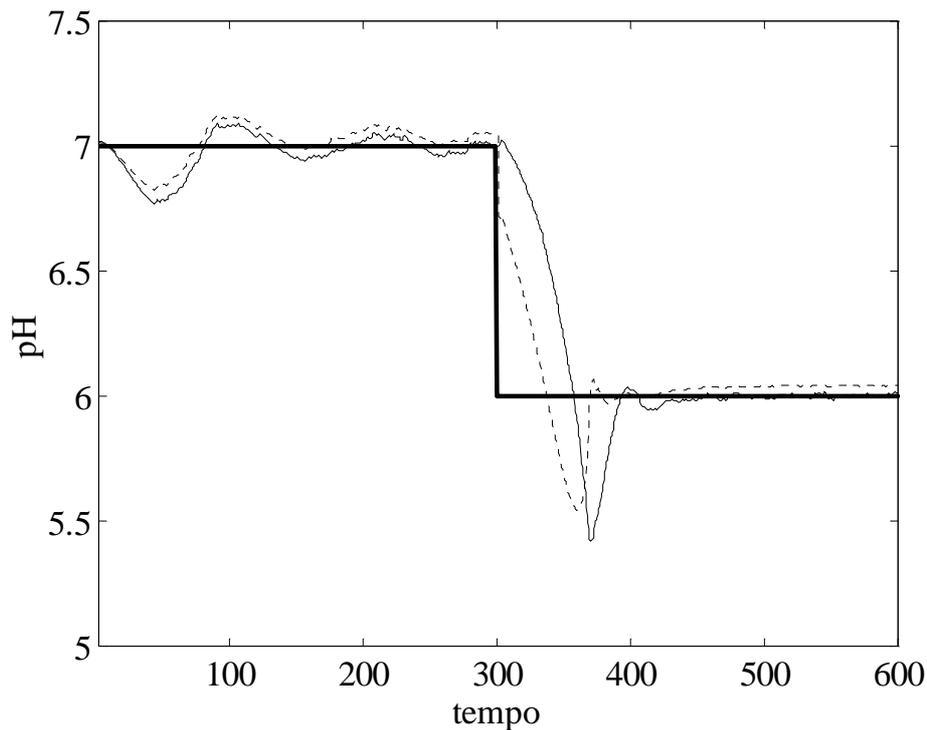


Figura 41 – Mudança de *set-point* de 7 para 6 com o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear  
Ação de controle - linhas tracejadas; pH medido – linha sólida, *Set-point* – linha sólida grossa

Novamente, para fins de comparação, o controlador PI alterado usado no teste da figura 39 foi implementado. Na figura 43, o desempenho do sistema de controle com este PI é apresentado em resposta à algumas mudanças de *set-point*. Observa-se que, apesar do seu comportamento oscilatório em todos os valores de referência testados, o sistema apresenta uma sobrelevação bem menor que o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear.

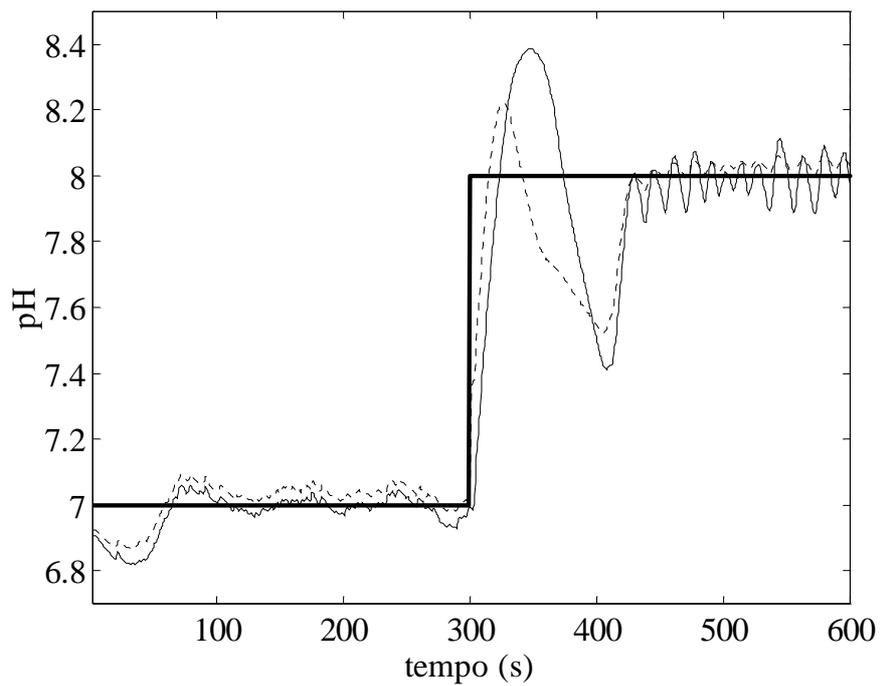


Figura 42 – Mudança de *set-point* de 7 para 8 com o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear  
 Ação de controle - linhas tracejadas; pH medido – linha sólida, *Set-point* – linha sólida grossa

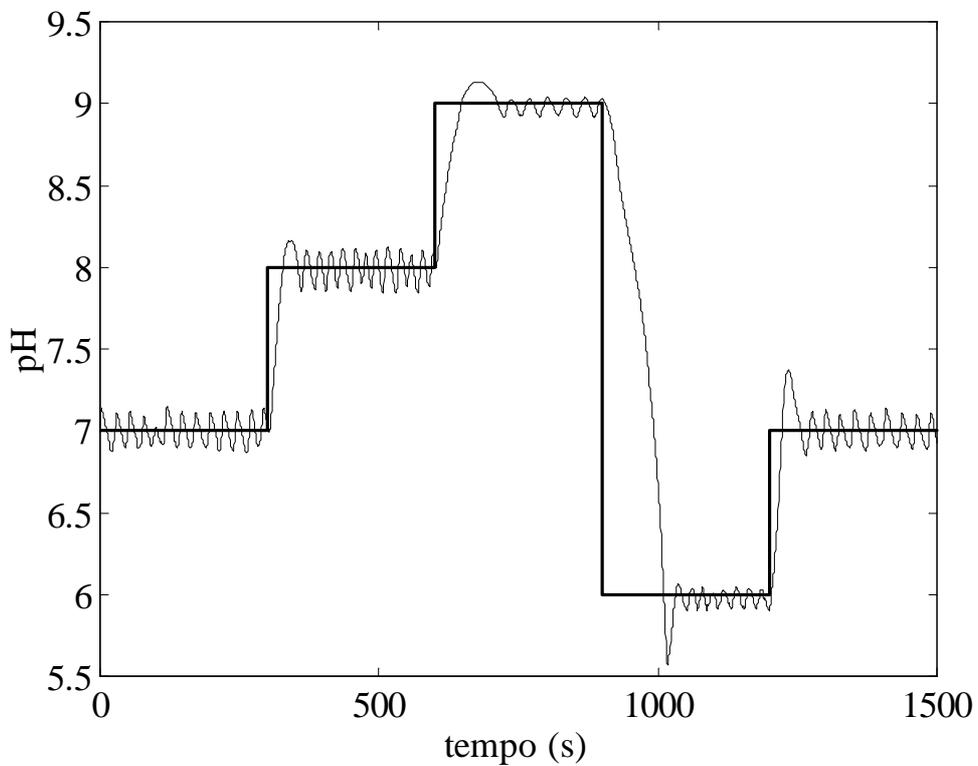


Figura 43 – Mudanças de *set-point* com o controlador PI alterado  
 pH medido – linha sólida, *Set-point* – linha sólida grossa

Nas figuras 44 e 45, os desempenhos destes dois controladores ( $\mathcal{H}_\infty$  não-linear e PI) em resposta às mesmas mudanças de *set-point* podem ser comparados. Neste último teste, onde foi usada uma alimentação contínua de ácido 0,03 M, fica claro que, quanto mais próximo da faixa de neutralidade, melhor o desempenho obtido com o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. Isso já era de se esperar pois o projeto foi realizado para operar nesta faixa de pH. Quanto ao PI, o contrário ocorre, ou seja, quanto mais distante da faixa de neutralidade, menor é a oscilação do sistema em malha fechada.

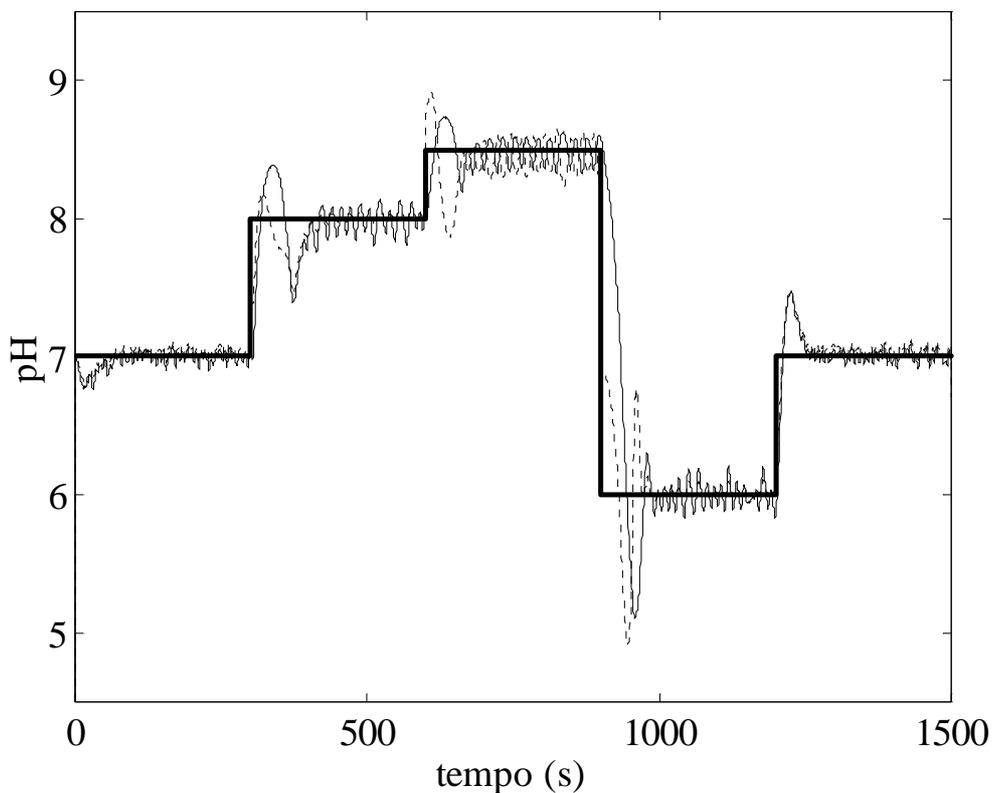


Figura 44 – Mudanças de *set-point* com o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear

Ação de controle - linhas tracejadas; pH medido – linha sólida, *Set-point* – linha sólida grossa

Para fechar este capítulo, pode-se dizer que o controlador desenvolvido, devido às características inerentes ao aparato experimental utilizado, não pôde mostrar todo seu potencial quando aplicado a um sistema experimental de neutralização de pH. Espera-se um desempenho experimental próximo aos obtidos via simulação quando a atuação direta na variável de controle for possível. Assim mesmo, o desempenho obtido com o controlador desenvolvido foi melhor que o controlador originalmente proposto pelo

fabricante do equipamento, na faixa de neutralidade. No entanto, mais importante que a comparação entre desempenhos, os resultados apresentados neste capítulo mostraram que a implementação deste tipo de controlador não só é possível como é simples. Do ponto de vista prático, a abordagem utilizada se constitui-se numa alternativa aos métodos que usam múltiplos modelos lineares ou esquemas adaptativos.

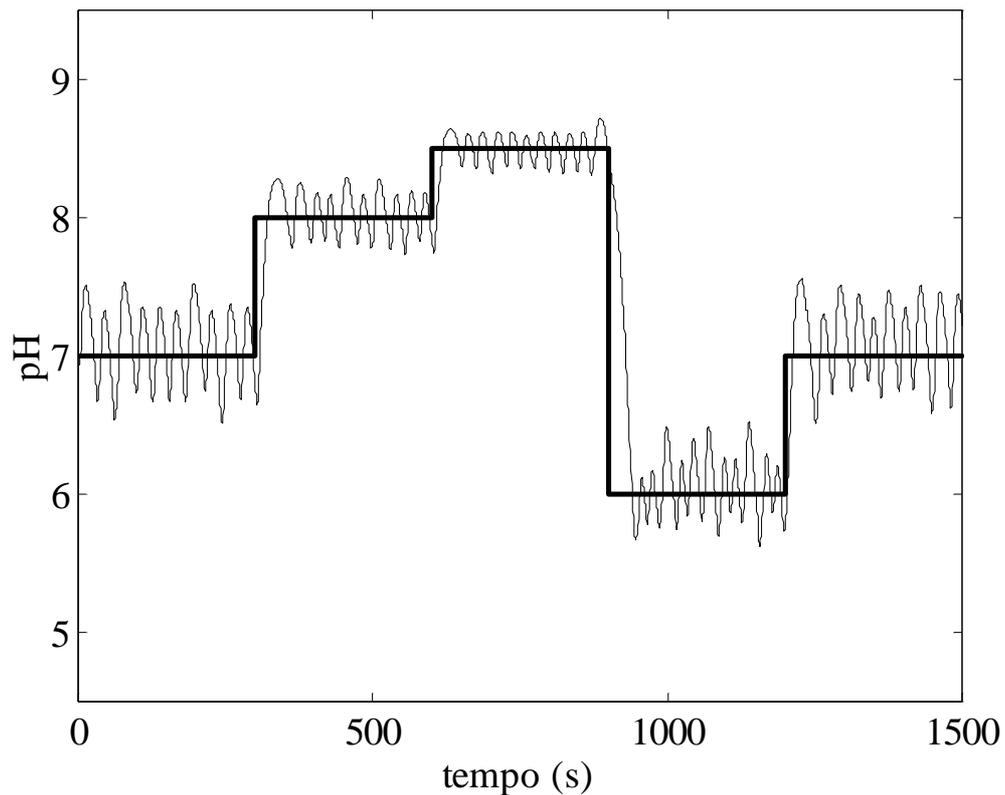


Figura 45 – Mudanças de *set-point* com o controlador PI original do sistema  
pH medido – linha sólida, *Set-point* – linha sólida grossa

# Capítulo 6

## Aplicação dos Resultados à Teoria de Estabilidade de Lyapunov

---

### Resumo

Neste capítulo, os resultados teóricos apresentados no capítulo 3 são aplicados à teoria da estabilidade de Lyapunov. As principais contribuições são: um critério para a escolha de funções de Lyapunov, de modo a maximizar a estimativa da região de estabilidade de um sistema dinâmico e, uma extensão do método de Zubov que permite incorporar estimativas da região de atração ao teorema original, restrito somente à região de atração completa e, por esse mesmo motivo, de muito limitada utilização.

### 6.1 TEORIA DE ESTABILIDADE DE LYAPUNOV

A determinação da estabilidade de sistemas dinâmicos é um problema interdisciplinar dos mais importantes da matemática. Sua origem remonta aos primórdios da ciência moderna e sua importância pode ser inferida através das inúmeras publicações atuais relacionadas a modelos dinâmicos nas diversas áreas do conhecimento humano.

A dinâmica de sistemas surgiu no século XIX como uma sub-área da mecânica e, posteriormente, consolidou-se como uma disciplina isolada. Um de seus precursores, Alexandr Mikhailovich Lyapunov, desenvolveu uma teoria de estabilidade e alguns dos métodos mais genéricos para a sua determinação. Devido à universalidade de seus resultados, a teoria de Lyapunov tem sido extensivamente usada pelos cientistas, principalmente nas teorias de controle e sistemas não-lineares.

Apesar de não fazer parte do objetivo da pesquisa de tese, são apresentados, neste capítulo, os resultados obtidos sobre a determinação da região de estabilidade - também conhecida como domínio de atração (DA) - de sistemas dinâmicos através do método direto de Lyapunov. Além da importância do assunto, outro motivo para esta inclusão é devido à similaridade entre a teoria de estabilidade de Lyapunov e a teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. De fato, muitos dos resultados apresentados nos capítulos anteriores desta tese foram obtidos a partir dos estudos sobre a determinação e/ou a maximização do DA de sistemas dinâmicos autônomos (LONGHI, 2000, LONGHI et

al., 2000a, 2000b, LONGHI et al., 2001c) pois, a grosso modo, a determinação de funções de Lyapunov para um sistema dinâmico pode ser considerada como um caso simplificado do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear.

Neste capítulo não será gasto muito tempo explicando os resultados da teoria de Lyapunov - já existem ótimas referências sobre o assunto (CHETAYEV, 1955, LASALLE, LEFSCHETZ, 1961, HAHN, 1967, KHALIL, 1996). Somente os aspectos relevantes para as contribuições apresentadas são discutidos.

Do mesmo modo que a teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, a teoria de estabilidade de Lyapunov leva a um problema composto por duas desigualdades a serem resolvidas. A principal diferença entre estes problemas é a substituição da desigualdade HJI do problema de controle pela derivada temporal da função de Lyapunov que deseja-se determinar.

Considere o sistema dinâmico autônomo da equação 6.1:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = f(x) \quad (6.1)$$

onde  $x$  é o vetor de variáveis de estado,  $f: D \rightarrow \mathcal{R}^n$  é um mapeamento localmente Lipschitz de um domínio do espaço de estados  $D \subset \mathcal{R}^n$  em  $\mathcal{R}^n$  e a origem é o ponto de equilíbrio de interesse, i.e.,  $f(0) = 0$ .

A determinação da estabilidade assintótica deste sistema através do método direto de Lyapunov pode ser visto como o problema de encontrar uma função escalar positiva,

$$V(x) > 0 \quad (6.2)$$

que satisfaça uma desigualdade diferencial parcial estrita (ou não-estrita combinada com a condição de invariância de LaSalle, como será visto mais adiante):

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) < 0 \quad (6.3)$$

ambas numa vizinhança da origem.

A principal dificuldade do método direto de Lyapunov é a ausência de técnicas sistemáticas e eficientes para resolver as desigualdades 6.2-6.3 de modo quantitativo. Se o sistema da equação 6.1 for linear,  $\dot{x} = A.x$ , sua estabilidade global pode ser facilmente estabelecida através da análise dos autovalores da matriz A. Se o sistema for não-linear, pode-se encontrar uma resposta local sobre seu comportamento através do método da linearização de Lyapunov (SLOTINE, LI, 1991), desde que o sistema linearizado resultante não seja degenerado. No caso de equilíbrios degenerados, ou não-hiperbólicos, devem ser usados outros métodos, como a teoria de variedades centrais (CARR, 1981), para tentar obter uma resposta local.

Se o ponto de interesse for estável, o próximo passo no estudo do sistema é determinar qual a extensão desta estabilidade. Sabe-se que muitos sistemas localmente estáveis apresentam um DA tão pequeno que, do ponto de vista prático, não podem ser considerados estáveis (LASALLE, LEFSCHETZ, 1961). Para saber se a estabilidade local é prática, muitas vezes é suficiente obter uma estimativa do DA do sistema. Para este fim, pode-se lançar mão de um teorema 6.1. Este teorema já inclui o princípio da invariância de LaSalle e sua prova pode ser encontrada em diversos livros texto, como (KHALIL, 1996), por exemplo.

**TEOREMA 6.1 – Extensão do teorema de Lyapunov devido a LaSalle para sistemas autônomos**

“Considere o sistema da equação 6.1 e seja  $G \subset \mathfrak{R}^n$  um domínio contendo a origem. Suponha que existe localmente uma função de Lyapunov,  $V(x)$ , com as seguintes propriedades:

- 1)  $V$  é continuamente diferenciável e positiva definida em  $G$ , i.e.,

$$\begin{cases} V(x) > 0 \\ V(0) = 0 \end{cases} \quad \forall x \in G$$

- 2) A derivada temporal de  $V(x)$  satisfaz

$$\begin{cases} \dot{V}(x) \leq 0 \\ \dot{V}(0) = 0 \end{cases} \quad \forall x \in G$$

3) Nenhuma trajetória é possível na região definida por  $\dot{V}(0) = 0$ .

Então, a estimativa mais simples do domínio de atração do sistema da equação 6.1 é dada pelo conjunto  $\Omega_c = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid V(x) < c\}$ , onde  $\Omega_c$  é limitado e contido em  $G$ .”

**OBSERVAÇÃO 6.1.** Se a condição 3 do teorema 6.1 não for válida, o teorema ainda pode ser válido, desde que a desigualdade não-estrita da condição 2 seja substituída pela sua versão estrita.

Do teorema 6.1 pode-se concluir que a principal dificuldade encontrada na determinação da região de estabilidade de sistemas dinâmicos reside em encontrar soluções quantitativas para as desigualdades 6.2 e 6.3, ou seja, encontrar as regiões  $G$  e  $\Omega_c$ . Mesmo soluções por inspeção não são fáceis, porque não existem critérios para determinar a região de sinal definido de funções escalares multivariáveis. Assim, a principal ferramenta usada na delimitação do DA de sistemas dinâmicos tem sido o emprego de simulações numéricas. Neste trabalho, com o auxílio dos resultados obtidos no capítulo 3, são apresentadas algumas contribuições para a determinação da região de estabilidade através da teoria de Lyapunov. Na seção 6.2, usando uma abordagem similar à do capítulo 4, é apresentado um método para a escolha de funções de Lyapunov de modo a maximizar a estimativa do DA do sistema e, na seção 6.3, é apresentada uma extensão do teorema de Zubov que permite incorporar estimativas do DA ao teorema original.

## 6.2 ESTIMATIVA DO DOMÍNIO DE ATRAÇÃO E SUA MAXIMIZAÇÃO

Esta seção apresenta um método para escolher funções de Lyapunov de modo a maximizar o DA de um sistema dinâmico. Para este fim, os resultados obtidos no capítulo 3 são usados para fornecer restrições nos problemas de otimização formulados. Antes de apresentar o método, é feita uma breve revisão histórica sobre o assunto.

## **Breve revisão histórica sobre o cômputo do DA de sistemas dinâmicos**

Um dos problemas mais importantes da dinâmica de sistemas é a determinação da estabilidade das soluções de um dado sistema. Existem diversas abordagens para qualificar e quantificar a estabilidade de sistemas dinâmicos, mas nenhuma até hoje supera o grau de generalização do trabalho desenvolvido por A. M. Lyapunov no final do século XIX. Em sua tese de doutorado, LYAPUNOV (1892) apresenta alguns métodos para determinar qualitativamente a estabilidade de sistemas descritos por equações diferenciais ordinárias (EDO). Como sabe-se que qualquer sistema dinâmico pode ser descrito por meio de um sistema de EDO's (HIRSCH, SMALE, 1974), seus resultados apresentam um grau de generalidade extremamente amplo. Seu resultado mais importante é conhecido como método direto de Lyapunov. Este método leva o nome “direto” porque permite inferir diretamente a estabilidade de um sistema de EDO's sem a necessidade de resolvê-lo – isso era muito importante pois no século XIX não haviam computadores para realizar integrações numéricas.

É interessante notar que o trabalho de Lyapunov, apesar do reconhecimento do autor como grande cientista de sua época, não gozava do prestígio que tem hoje no meio acadêmico. Foi somente na década de 1930 que seus resultados teóricos começaram a ser usados de modo mais prático, para obter resultados quantitativos. Esta nova fase começa com a citação de N. G. Chetayev (KIRIN ET AL., 1982) de que a própria prova do método direto de Lyapunov continha elementos suficientes para determinar o tamanho da região de estabilidade do sistema. No entanto, o primeiro resultado que lida diretamente com o tamanho da região de estabilidade assintótica só aparece em 1949 (AIZERMAN, 1949) - antes disto, o método direto de Lyapunov só era utilizado para obter resultados qualitativos. Assim, na década que se seguiu teve início na antiga União Soviética a famosa escola de teoria de estabilidade de Leningrado (atual e novamente São Petersburgo) que formulou e resolveu muitos problemas de estabilidade, principalmente os relacionados a estimação e construção de regiões de estabilidade. Um dos mais importantes resultados da escola de Leningrado é devido a V. I. Zubov, que em meados da década de 1950 apresentou novos resultados teóricos que permitiram-no desenvolver um método para determinação da região de estabilidade completa para sistemas dinâmicos autônomos e não-autônomos<sup>14</sup> nas décadas de 1960/70. Este método, hoje conhecido como método de Zubov, objetiva a construção de uma função

---

<sup>14</sup> No caso de sistemas não-autônomos, como a região de atração depende do tempo inicial, só é possível obter estimativas da região de atração.

de Lyapunov que permita a determinação da região de estabilidade completa. No entanto, para obter esta função deve-se achar a solução de uma equação diferencial parcial, o que dificulta sua ampla utilização, mesmo para os sistemas não-lineares simples.

Fora da antiga União Soviética, o trabalho de Lyapunov só foi se popularizar no ocidente (Europa e América) nos anos 60 durante a época do chamado Controle Moderno. Isso deveu-se muito ao fato de que os resultados do controle moderno eram baseados em equações diferenciais ordinárias. Assim, todo o ferramental desenvolvido por Lyapunov para lidar com EDO's foi amplamente utilizado e expandido pelos teóricos de controle. Uma das principais extensões desta época é devida a Joseph La Salle com seu famoso princípio da invariância (LA SALLE, LEFSCHETZ, 1961). Deve ser ressaltado que esta extensão é muito mais citada e utilizada que o método de Zubov, devido à sua simplicidade de uso. Outras contribuições visando a utilização sistemática da teoria de Lyapunov a classes específicas de sistemas com aplicações à teoria de controle foram desenvolvidas nesta época.

Observando as publicações atuais, pode-se notar que as pesquisas sobre a teoria de estabilidade de Lyapunov mantêm esta tendência. Enquanto que no leste Europeu e na região da Rússia predomina uma escola matemática de estabilidade, de cunho predominantemente teórico, no ocidente predomina uma visão mais aplicada onde o objetivo principal parece ser o uso dos resultados existentes para resolver problemas de engenharia de controle e de física.

Do ponto de vista prático, tão importante quanto a obtenção de resultados qualitativos a respeito da estabilidade de um sistema dinâmico é a quantificação destes resultados. A principal informação quantitativa sobre a estabilidade de um sistema é o tamanho da região de estabilidade de suas soluções. Como foi comentado anteriormente, a ferramenta básica para determinar a região de estabilidade usando a teoria de Lyapunov é o método de Zubov. No entanto, devido à complexidade de sua solução, na maioria das vezes é mais interessante ter pelo menos uma estimativa desta região do que gastar tempo tentando encontrar a região de estabilidade completa. Entende-se por estimativa, qualquer subconjunto da região de estabilidade completa.

Quanto à determinação da região de estabilidade via métodos de Lyapunov, as pesquisas atuais podem ser divididas em dois grupos: (1) busca por métodos teóricos que permitam encontrar a região de estabilidade verdadeira de maneira mais simples

que o método de Zubov (VANELLI, VIDYASAGAR, 1985) e, (2) busca por métodos simples e eficientes para obter estimativas não-conservativas da região de estabilidade (TESI et al., 1996). Do ponto de vista teórico, o primeiro grupo é o mais importante e, do ponto de vista de engenharia, o segundo é o mais importante. Os resultados deste capítulo podem ser encaixados neste segundo grupo.

Já foi colocado que a aplicação do método direto de Lyapunov para a análise de sistemas dinâmicos leva a um problema composto por duas desigualdades a serem resolvidas (é atribuído a Lyapunov (BOYD et al., 1994) o pioneirismo da análise de um sistema dinâmico através da solução de desigualdades algébricas ao invés de resolver suas equações diferenciais). Assim, o problema de determinar o tamanho da região de sinal definido de funções escalares multivariáveis tem um papel central na delimitação do DA. Convém lembrar que, apesar de sua importância e de ainda não existir até hoje uma solução satisfatória para este problema, são escassos na literatura os métodos para determinação do sinal local e global de funções multivariáveis escalares não-lineares. Alguns trabalhos sobre este assunto aparecem na literatura de controle, principalmente nos anos 60 e 70 (GADENZ, LI, 1964, BOSE, LI, 1968, BOSE, JURY, 1975, HASAN, HASAN, 1996). No entanto, todos estes trabalhos lidam somente com o sinal global das funções e se restringem apenas a algumas classes muito específicas de sistemas. Não é do conhecimento do autor que existam na literatura de controle trabalhos que tratem da determinação da região local de sinal definido para funções genéricas.

Assim, explorando os resultados sobre o sinal local de funções não-lineares escalares apresentados no capítulo 3, são apresentadas duas contribuições ao estado da arte da teoria de estabilidade de Lyapunov, ligadas ao domínio de atração do sistema de interesse, uma nesta seção e outra na próxima. O pré-requisito fundamental para o desenvolvimento do método da presente seção é que os sistemas dinâmicos cuja DA deseja-se determinar sejam estáveis.

### **Abordagem usual na literatura**

A abordagem padrão usada pela maioria dos métodos para encontrar uma estimativa da região de atração de um sistema dinâmico consiste de dois passos. No primeiro, uma função de Lyapunov é escolhida segundo algum método específico e, no segundo, tenta-se encontrar uma estimativa para o DA resolvendo-se o problema de otimização 6.1.

**PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO 6.1 (Estimativa da região de atração dada uma função de Lyapunov).** A maior estimativa para a região de atração, dada uma função de Lyapunov,  $V(x)$ , é dada pelo conjunto  $D(x) = \{x : V(x) \leq \rho\}$ , onde o valor de  $\rho > 0$  é obtido através da minimização de  $V(x)$  sujeito à restrição de igualdade  $\dot{V}(x) = 0$ , ou seja,  $\rho = \inf_{\substack{x \in \mathcal{X}^n \\ \text{s.t. } \dot{V}(x) = 0}} V(x)$ .

O problema de otimização 6.1 tem algumas limitações. Em primeiro lugar, é um problema não convexo. Assim, dependendo do método de otimização, pode-se chegar a soluções que são apenas mínimos locais e não globais, o que invalida o resultado obtido. Outro problema é que a função de Lyapunov é escolhida sem o menor compromisso com o tamanho da região de atração. A proposta desta seção é usar os resultados teóricos do capítulo 3 para eliminar estes dois problemas.

### Procedimento proposto

O principal motivo de não se resolver um problema que maximize o DA é a ausência de critérios na literatura para analisar o sinal de funções escalares multivariáveis não-lineares. No entanto, um critério para este fim é dado pelo teorema 3.4 desta tese. Assim, pode-se formular um problema de otimização, chamado de problema de otimização 6.2, que escolhe os parâmetros de uma dada função de Lyapunov de modo a maximizar sua região de atração enquanto assegura a positividade de  $V(x)$  e a negatividade de sua derivada temporal.

**PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO 6.2 (Determinação dos parâmetros de uma função de Lyapunov para maximização da estimativa da região de atração).** Escolha a forma da função  $V(x)$  e obtenha sua derivada temporal,  $\dot{V}(x)$ . Escreva estas duas funções como representações em formas quadráticas:

$$V(x) = y^T \cdot P_v \cdot y \tag{6.4}$$

$$\dot{V}(x) = z^T \cdot P_d \cdot z \tag{6.5}$$

onde  $P_v$  e  $P_d$  são matrizes reais simétricas obtidas diretamente dos coeficientes de  $V(x)$  e  $\dot{V}(x)$ , respectivamente. A região definida pela interseção das regiões locais reais das funções-eixo  $y(x)$  e  $z(x)$  fornecem uma estimativa das regiões de positividade de  $V(x)$  e negatividade de  $\dot{V}(x)$ , respectivamente. Faça  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  serem os parâmetros que definem o tamanho das regiões de sinal definido de  $V(x)$  e  $\dot{V}(x)$ , respectivamente. Escolha  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  e os parâmetros de  $V(x)$  de modo a maximizar a região definida por  $V(x) = C$  sujeita às restrições  $P_v > 0$  e  $P_d < 0$ . O parâmetro  $C \in \Re^+$  é obtido através do mínimo de  $V(x)$  que intersecta a região de positividade de  $V(x)$  ou de negatividade de  $\dot{V}(x)$ .

Se o problema de otimização 6.2 puder ser resolvido a contento, ele fornece a melhor estimativa simples para uma dada estrutura de função de Lyapunov  $V(x)$ . Note que, apesar de ainda ser um problema não convexo, a sua solução não acarreta o risco de se encontrar uma solução local que não satisfaça as condições de estabilidade de Lyapunov pois estas, graças ao critério do teorema 3.4, estão incluídas como restrições no próprio problema de otimização.

As principais dificuldades do problema de otimização 6.2 estão em:

- (1) Encontrar uma função que descreva o espaço  $n$ -dimensional correspondente à região da curva fechada  $V(x) = C$ .
- (2) Encontrar o valor do parâmetro  $C$  da restrição de igualdade do problema.

No caso da função de Lyapunov ser uma forma quadrática,  $V(x) = x^T P x$ , a região correspondente à área  $n$ -dimensional de forma  $V(x) = 1$  pode ser facilmente mostrada como sendo proporcional ao inverso do produto dos autovalores de  $P$ . Assim, a função objetivo a ser minimizada pode ser escrita como o determinante da matriz  $P$ . Neste caso, como  $V(x)$  é globalmente positiva se  $P > 0$ , também os parâmetros  $\alpha_i$  são eliminados do problema de otimização.

Já a determinação do parâmetro  $C$  da restrição de igualdade é uma questão um pouco mais complicada. Usando um tipo especial de representação em forma quadrática, explicada na seção 6.3, este problema pode ser eliminado. No entanto, de um modo geral, sua determinação é muito complicada. Nestes casos, pode-se tentar maximizar a região de sinal definido, ou seja, a região onde  $V(x)$  é positiva definida e

$\dot{V}(x) < 0$  e depois resolver o problema de otimização 6.1. Para maximizar a região de sinal definido, pode-se tentar resolver o problema de otimização 6.3.

Na realidade, este último procedimento não apresenta muitas vantagens sobre a maioria dos métodos disponíveis na literatura. Como será mostrado no exemplo 2, apesar de ser tentador pensar que maximizando a região de sinal definido aumenta-se a região de atração, este procedimento pode levar a um DA sem valor prático. No entanto, este procedimento não deixa de ser mais uma possibilidade para escolher a função de Lyapunov do sistema.

**PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO 6.3 (Determinação dos parâmetros de uma função de Lyapunov para maximização da estimativa da região de sinal definido).** Escolha a forma da função  $V(x)$  e obtenha sua derivada temporal,  $\dot{V}(x)$ . Escreva estas duas funções como representações em formas quadráticas:

$$V(x) = y^T \cdot P_v \cdot y$$

$$\dot{V}(x) = z^T \cdot P_d \cdot z$$

onde  $P_v$  e  $P_d$  são matrizes reais simétricas obtidas diretamente dos coeficientes de  $V(x)$  e  $\dot{V}(x)$ , respectivamente.

A região definida pela interseção das regiões locais reais das funções-eixo  $y(x)$  e  $z(x)$  fornecem uma estimativa das regiões de positividade de  $V(x)$  e negatividade de  $\dot{V}(x)$ , respectivamente. Faça  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  serem os parâmetros que definem o tamanho das regiões de positividade de  $V(x)$  e  $\dot{V}(x)$ , respectivamente. Escolha  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  e os parâmetros de  $V(x)$  de modo a maximizar a região definida pela interseção das regiões de positividade de  $V(x)$  e negatividade de  $\dot{V}(x)$  sujeito às restrições de desigualdade,  $P_v > 0$  e  $P_d < 0$ .

### Exemplo 1 – um sistema clássico

Considere o sistema apresentado na equação 6.6.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_1^2 \cdot x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Este sistema dinâmico foi originalmente estudado por V. I. Zubov e, ao longo dos anos, inúmeros autores determinaram estimativas da sua região de atração usando seus métodos. Na figura 46 são mostrados algumas destas estimativas, juntamente com a região de atração completa, dada pela curva  $x_1 \cdot x_2 < 1$ .

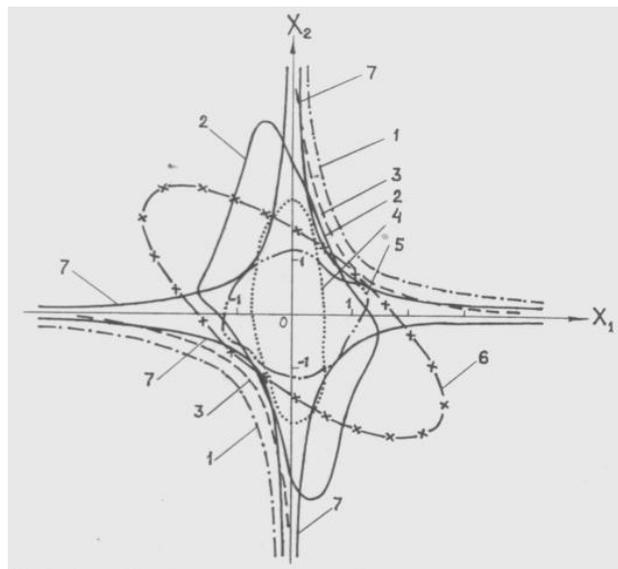


Figura 46. Regiões de atração para o exemplo 1 segundo vários autores.

1) região exata, 2) resultado de Zubov com otimização, 3) resultado de Zemlyakov e Matrosov (VORONOV E MATROSOV, 1987), 4) resultado de Zubov sem otimização, 5) resultado de Ingwerson, 6) resultado de DAVISON E KURAK (1971) e 7) resultado de LEVIN (1994).

O primeiro objetivo neste exemplo é mostrar que o método desenvolvido pode ser usado para obter uma estimativa rápida e simples da região de atração. Para simplificar esta tarefa, pode-se considerar que a função de Lyapunov usada tem a forma da equação 6.7.

$$V(x) = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2^2 \quad (6.7)$$

cuja derivada temporal é dada pela equação 6.8.

$$\dot{V}(x) = -2 \cdot a \cdot x_1^2 - 2 \cdot c \cdot x_2^2 + 4 \cdot a \cdot x_1^3 \cdot x_2 \quad (6.8)$$

que, por sua vez, pode ser rescrita como a representação em forma quadrática da equação 6.9.

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sqrt{1-4.a.x_1.x_2}.x_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2a+1 & 0 & 0 \\ 0 & -2c & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sqrt{1-4.a.x_1.x_2}.x_1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Assim, a região de atração é dada por  $V(x) < 1$  e os valores dos parâmetros de  $V(x)$  que maximizam a estimativa da região de atração, usando a representação em forma quadrática da equação 6.9, é dada pela solução do problema de otimização da equação 6.10.

$$\begin{aligned} [a, b] = \arg \quad & \text{Min} \quad (a, b) & (6.10) \\ & \text{a, b} \\ \text{s.t. } & a-0,5 > 0; \quad b > 0 \\ & \frac{b^2}{a} \sqrt{\frac{a}{b}} + b \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = 4 \end{aligned}$$

onde as restrições de desigualdade são impostas de modo a satisfazer as condições de positividade de  $V(x)$  e negatividade da equação 6.9. A restrição de igualdade é necessária para informar que o valor ótimo de  $V(x)$  é igual a 1.

Note que o problema acima é um problema de otimização não-convexo. Assim, como não foi usado um algoritmo de otimização global, foi necessário testar várias estimativas iniciais para se ter uma certa segurança sobre o resultado obtido. O problema foi resolvido usando as ferramentas da *Optimization Toolbox* do MATLAB versão 5.3 (assim como os demais problemas de otimização deste capítulo) e a solução encontrada foi:  $a = 0,5$  e  $b = 1,2599$ . Assim, a região de atração obtida pode ser escrita analiticamente como mostrado na equação 6.11.

$$V(x) = 0,5.x_1^2 + 1,26.x_2^2 < 1 \quad (6.11)$$

A forma geométrica da região de atração pode ser vista na figura 47, juntamente com a região de atração verdadeira.

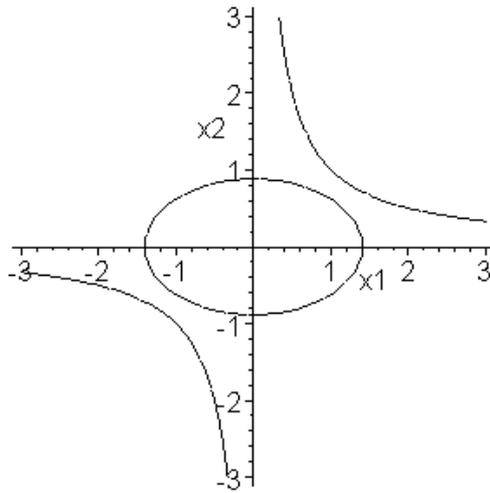


Figura 47 – Região de atração estimada (elipse) e região de atração verdadeira (curva aberta).

Para mostrar que o método desenvolvido nesta seção não se aplica somente a formas quadráticas, pode-se, com um pouco de perspicácia, considerar a função de Lyapunov da equação 6.12 e tentar encontrar uma estimativa da região de atração a partir desta.

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 \cdot (1 - a \cdot x_1 \cdot x_2) \quad (6.12)$$

Note que esta forma é positiva na região definida por  $a \cdot x_1 \cdot x_2 < 1$ , o que coincide com a região de atração verdadeira se  $a = 1$ . Sua derivada temporal ao longo das trajetórias é dada pela equação 6.13.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & -6 \cdot a \cdot x_2^2 \cdot x_1^4 + (4 + 4 \cdot a) \cdot x_2 \cdot x_1^3 - 2 \cdot x_1^2 - 2 \cdot a \cdot x_2^4 \cdot x_1^2 \\ & + 4 \cdot a \cdot x_2^3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2^2 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Colocando em evidência a forma  $V(x)$  da equação 6.12, obtém-se:

$$\dot{V}(x) = -2 \left( 1 - \frac{3 \cdot a \cdot x_2^2 \cdot x_1^4 - a \cdot (x_1 \cdot x_2^3 + x_1^3 \cdot x_2) - 2 \cdot x_1^3 \cdot x_2 + a \cdot x_1^2 \cdot x_2^4}{V(x)} \right) V(x) < 0 \quad (6.14)$$

Assim, a região onde  $\dot{V}(x)$  é negativa é dada pela interseção das regiões onde  $V(x)$  é positiva definida e a região definida por:

$$\left( 1 - \frac{3.a.x_2^2.x_1^4 - a.(x_1.x_2^3 + x_1^3.x_2) - 2.x_1^3.x_2 + a.x_1^2.x_2^4}{V(x)} \right) > 0 \quad (6.15)$$

que ocorre quando:

$$V(x) > 3.a.x_2^2.x_1^4 - a.(x_1.x_2^3 + x_1^3.x_2) - 2.x_1^3.x_2 + a.x_1^2.x_2^4 \quad (6.16)$$

Escolhendo o parâmetro ‘a’ como sendo de valor igual a 1, pode-se chegar a uma solução que apresenta a região de atração mostrada na figura 48. Esta região tem uma forma analítica consideravelmente mais complexa que a equação 6.11. Note que a obtenção desta região não é nem um pouco sistemática e possui uma forma analítica complicada. Devido a esses motivos, não foram realizados mais esforços nos outros exemplos deste capítulo em cima de soluções deste tipo.

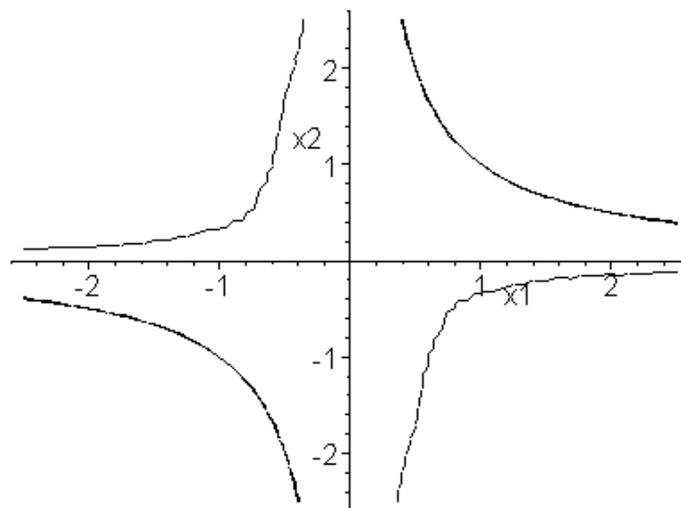


Figura 48 – Região de atração estimada com a forma das equações 6.12-6.16 com  $a = 1$ .

Note que no primeiro e no terceiro quadrantes a curva da região de atração estimada coincide com a região de atração verdadeira.

### Exemplo 2 – um contraexemplo para o problema de otimização 6.3

Considere o sistema dinâmico da equação 6.17 (LONGHI et al., 2000a).

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \cdot x_2 \\ x_1^2 - x_2^3 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

A determinação da estabilidade da origem do sistema da equação 6.17 não é óbvia. A análise local, via método da linearização, não permite que se conclua nada sobre sua estabilidade pois trata-se de um equilíbrio degenerado. Com um pouco mais de esforço, através da teoria da variedade central (CARR, 1981), pode-se chegar à conclusão que a origem é estável, mas não se tem qualquer informação sobre o tamanho da região de atração local. Uma maneira de encontrar uma estimativa para esta região é através do método direto de Lyapunov.

De modo a simplificar o procedimento desta seção, pode-se novamente tentar a seguinte forma para  $V(x)$ :

$$V(x) = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2^2 \quad (6.18)$$

Assim, a derivada temporal de  $V(x)$  tem a forma da equação 6.19.

$$\dot{V}(x) = -2a \cdot x_1^2 + (2a + 2b) \cdot x_1^2 \cdot x_2 - 2b \cdot x_2^4 \quad (6.19)$$

Ao contrário do exemplo 1, primeiramente tenta-se resolver o procedimento alternativo composto pelos problemas de otimização 6.3 e 6.1, respectivamente. Para isto, tem-se que propor uma representação em forma quadrática para  $\dot{V}(x)$  que explicita sua região de negatividade. Isto pode ser feito usando a representação da equação 6.20.

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^2 \\ \sqrt{\alpha_1 - x_2} \cdot x_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha_1(2a + 2b) - 2a & 0 & 0 \\ 0 & -2b & 0 \\ 0 & 0 & -(2a + 2b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^2 \\ \sqrt{\alpha_1 - x_2} \cdot x_1 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Na equação 6.20, o parâmetro  $\alpha_1 \in \mathfrak{R}^+$  é o único parâmetro que regula o tamanho da região de sinal definido do problema de otimização 6.3. A solução deste problema leva necessariamente aos valores:  $a > 0$ ,  $b \rightarrow 0^+$  e  $\gamma \rightarrow 1$ . Para calcular a máxima região

de atração para esta solução, deve-se resolver o problema de otimização 6.1. Este produz como solução:  $x^* = [0,00 \quad 1,00]$ . Substituindo este valor em  $V(x)$ , obtém-se  $V(x^*) = 0$ . Assim, a região de atração obtida é o segmento do eixo  $x_2$ , definido por:  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \text{ e } -1 < x_2 < 1\}$ . Obviamente, uma região de atração como esta não tem o menor valor prático.

Por outro lado, pode-se tentar resolver o problema de otimização 6.2, usando a mesma representação em forma quadrática da equação 6.20:

$$\begin{aligned}
 [a, b, \alpha_1] = & \quad \text{Min} & & \quad (a \ b) & & (6.21) \\
 & \quad a, b, \alpha_1 \\
 \text{s.t. } & a > 0, \ b > 0, \ \alpha_1 > 0 \\
 & P_d < 0 \\
 & b \alpha_1^2 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

onde  $P_d$  representa a matriz da representação em forma quadrática da equação 6.20.

A solução deste problema de otimização leva aos seguintes valores:  $a = 5,33$ ;  $b = 1,778$ , e  $\alpha_1 = 0,75$ . Na figura 49 é mostrada a representação geométrica do DA estimado. Na mesma figura, a região de atração verdadeira, delimitada pelas variedades estáveis dos pontos-sela  $(-1,1)$  e  $(1,1)$ , também é apresentada.

A conclusão que se pode tirar deste exemplo é que, como o valor de  $\gamma$  baixou de 1,0 (solução seqüencial dos problemas 6.3 e 6.1) para 0,75 (solução do problema 6.2), fica claro que não existe uma relação direta entre o tamanho das regiões de positividade de  $V(x)$  e de negatividade de  $\dot{V}(x)$  e o tamanho da região de atração gerada pela respectiva forma  $V(x)$ .

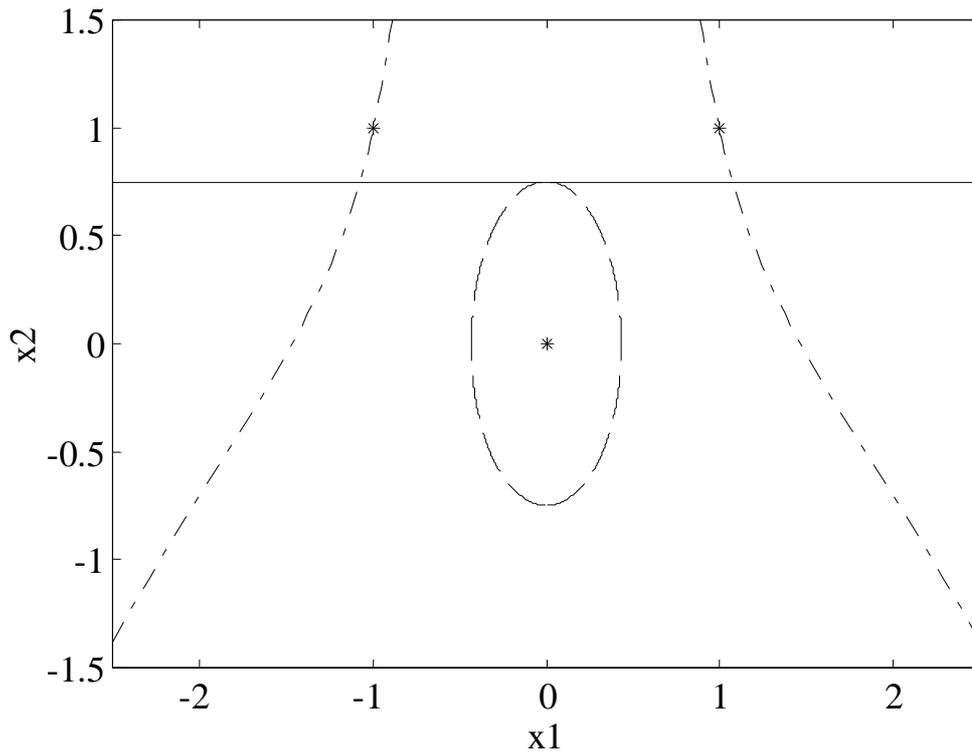


Figura 39 – Região de negatividade de  $\dot{V}(x)$  (linha sólida), estimativa do DA (linha tracejada), DA completo (linha pontilhada) e pontos estacionários (\*).

### 6.3 EXTENSÃO DO TEOREMA DE ZUBOV

O teorema de Zubov é a ferramenta básica para o cômputo do DA completo de sistemas dinâmicos. De modo a introduzir o assunto, considere a seguinte versão do teorema de Zubov para sistemas autônomos extraída de KHALIL (1996):

#### TEOREMA 6.2 – Teorema de Zubov

“Considere o sistema dinâmico da equação 6.1 e seja  $G \subset \mathfrak{R}^n$  um domínio contendo a origem. Suponha a existência de duas funções  $V: G \rightarrow \mathfrak{R}$ , que satisfaz  $V(0) = \dot{V}(0) = 0$ , e  $h: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  com as seguintes propriedades:

- $V$  é continuamente diferenciável e positiva definida em  $G$  e satisfaz a desigualdade

$$0 < V(x) < 1, \quad \forall x \in G - \{0\}$$

- Quando  $x$  se aproxima da fronteira de  $G$ , ou, no caso de um domínio  $G$  ilimitado, quando  $\|x\| \rightarrow \infty$ ,

$$\lim V(x) = 1.$$

- $h$  é contínua e positiva definida em  $\mathfrak{R}^n$ .
- Para todo  $x \in G$ ,  $V(x)$  satisfaz a equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) = -h(x)[1 - V(x)] \quad (6.22)$$

então  $x = 0$  é assintoticamente estável e  $G$  é o domínio de atração completo.”

Apesar de fornecer um resultado teórico forte, dificilmente o teorema 6.2 é aplicado integralmente. Existe uma grande dificuldade associada à solução da equação diferencial parcial 6.22. Isto tem levado muitos autores a procurar por aproximações para esta equação, ao invés de insistir em soluções em forma fechada. Uma investigação sobre este assunto pode ser encontrada em GENESIO et al. (1985).

Para realizar a extensão do teorema 6.2, o fato crucial é a observação da equação 6.22 como uma representação em forma quadrática de bases não-lineares. A principal diferença para a representação geral é que esta equação específica só possui um tipo de função-eixo.

De fato, pode-se rescrever a equação 6.22 do teorema de Zubov como uma representação em forma quadrática para a derivada temporal de  $V(x)$  que contenha apenas uma única função-eixo, como pode ser visto na equação 6.23.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= z^T(x) \cdot P_V \cdot z(x) \\ &= [\sqrt{1 - V(x)} \cdot m(x)] \cdot [-1] \cdot [\sqrt{1 - V(x)} \cdot m(x)] \\ &= -m(x)^2 \cdot [1 - V(x)] \end{aligned} \quad (6.23)$$

onde  $m(x)$  é uma função aceitável global (de acordo com a definição do capítulo 3). Como consequência,  $m(x)^2 = h(x) > 0$ .

Deste modo, pode-se enxergar o teorema de Zubov como um caso particular do método desenvolvido na seção anterior, onde é possível determinar a região de atração verdadeira para sistemas dinâmicos autônomos. Para isto, basta que todas as funções-eixo tenham o mesmo formato usado na equação 6.23. Se outras funções-eixo estiverem presentes na representação em forma quadrática, a região definida por  $V(x) < 1$  é apenas uma estimativa da região de atração completa. Mais formalmente, estas conclusões podem ser apresentadas na forma de um novo teorema (teorema 6.3).

**TEOREMA 6.3 – Extensão do Teorema de Zubov.**

“Considere o sistema da equação 6.1 e seja  $G \subset \mathfrak{R}^n$  um domínio contendo a origem. Suponha que existem duas funções  $V: G \rightarrow \mathfrak{R}$ , que satisfaz  $V(0) = \dot{V}(0) = 0$ , e  $\phi(x)$ , que é um função contínua com região local real sendo o campo real, com as seguintes propriedades:

- $V(x)$  é continuamente diferenciável e positiva definida em  $G_1 \subset G$ :

$$V(x) > 0, \quad \forall x \in G_1 - \{0\}$$

- $\dot{V}(x)$  pode ser rescrita de acordo com a representação em forma quadrática da equação 6.24.

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ \sqrt{1 - V(x)}\phi(x) \end{bmatrix}^T \cdot P_{Vdot} \cdot \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ \sqrt{1 - V(x)}\phi(x) \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

com  $P_{Vdot}$  sendo uma matriz negativa definida e  $y_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) tendo como suas regiões locais reais o campo real.

- A região  $G_2 = \{x \mid V(x) \leq 1\}$  está contida em  $G_1$ , isto é,  $G_2 \subseteq G_1$

então  $x = 0$  é assintoticamente estável e  $G_2$  é uma estimativa do DA.

Além disso, se não são necessárias outras funções-eixo, além de  $\sqrt{1 - V(x)}\phi(x)$ , para descrever  $\dot{V}(x)$  e  $\phi(x)$  é uma função definida, então  $G_2$  é o DA completo do sistema da equação 6.1.”

**Prova: Suficiência.** A primeira parte da prova consiste em mostrar que  $V(x) = 1$  é uma estimativa do DA.

É um resultado bem conhecido da teoria de Lyapunov, através de seus teoremas conversos, que, se um sistema dinâmico é estável, então existe uma função de Lyapunov para este. Como consequência, existe uma região  $G_1$  contida em  $\mathfrak{R}^n$  onde  $V(x) > 0$ . Esta função de Lyapunov pode ser usada para determinar uma estimativa do DA, dada por  $V(x) = C > 0$ . Os parâmetros de  $V(x)$  podem ser normalizados para obter  $V(x) = 1$  (DAVISON, KURAK, 1971). Se  $\dot{V}(x)$  pode ser rescrita como a representação em forma quadrática da equação 6.24, com  $P_{\dot{V}}$  sendo uma matriz negativa definida e  $\phi(x)$  sendo uma função contínua com região local real sendo  $\mathfrak{R}^n$ , então, de acordo com o teorema 3.4,  $V(x) = 1$  é uma estimativa da região de negatividade de  $\dot{V}(x)$ . Se a região  $G_2$  é englobada por  $G_1$  (ambas como definidas no teorema 6.3) então, de acordo como teorema 6.1,  $G_2$  está contida no DA completo.

A segunda parte da prova consiste em mostrar que, se as condições da primeira parte da prova são válidas e adicionalmente, exceto por  $\sqrt{1 - V(x)}\phi(x)$ , não são necessárias outras funções-eixo para escrever a equação 6.24, então  $V(x) = 1$  é o DA completo.

Para mostrar isto, é suficiente notar que, no caso de uma simples função-eixo,  $\sqrt{1 - V(x)}\phi(x)$ , as equações 6.22 e 6.24 são as mesmas se  $\phi(x)^2 = h(x)$ . Então, a única condição extra a ser verificada é a positividade de  $h(x)$ . Esta condição é satisfeita se e somente se  $\phi(x)$  é uma função definida. Se esta condição é verdadeira, todas as demais condições do teorema 6.2 são satisfeitas e  $G_2$  é o DA completo para o sistema da equação 6.1.

◆

Note que o teorema 6.3 não é um resultado particular restrito a uma certa classe de sistemas mas, um resultado geral que pode ser aplicado a uma grande classe de sistemas não-lineares. De fato, o teorema 6.3 pode ser interpretado como uma generalização do teorema 6.2 e o caso particular do teorema 6.1 correspondente à representação em forma quadrática da equação 6.24. A principal vantagem do teorema 6.3 sobre o teorema 6.2 é que é muito mais fácil encontrar uma função de Lyapunov que satisfaça a equação 6.24 do que a equação 6.22. No entanto, a representação em forma quadrática da equação 6.24 não é única e, apesar de sempre ter-se conseguido aplicá-lo nos sistemas dinâmicos estudados, não se sabe se é sempre possível encontrar tal descrição para  $\dot{V}(x)$ .

Tão importante quanto apresentar a extensão do teorema 6.2 é apresentar um procedimento para usá-lo. Do mesmo modo que na seção 6.2, pode-se tentar maximizar a estimativa do DA usando os resultados do teorema 6.3 quando a função de Lyapunov escolhida não se encaixa no caso particular do teorema 6.2. Para obter esta estimativa maximizada usando a representação em forma quadrática da equação 6.24, deve-se maximizar a área da curva  $V(x) = 1$  sujeita às restrições de desigualdade correspondentes a  $V(x) > 0$  e  $\dot{V}(x) < 0$ . Este tipo de problema já foi enunciado e chamado de problema de otimização 6.2 na seção anterior. Note que a restrição de desigualdade que informa que  $V(x) = 1$  se localiza na fronteira da região de sinal definido não é mais necessária pois, no caso da equação 6.24, a fronteira da região de sinal definido é a própria curva  $V(x) = 1$ .

Ainda assim, este tipo de problema de otimização não é fácil de ser resolvido para funções não-lineares genéricas  $V(x)$ . No entanto, como é um resultado bem conhecido que funções quadráticas podem ser usadas como funções de Lyapunov para sistemas hiperbólicos estáveis, usar-se-á este tipo de função ( $V(x) = x^T \cdot P \cdot x$ ) para simplificar o procedimento. Neste caso, o problema pode ser facilmente colocado como a maximização da superfície de uma hiper-elipse sujeita a duas restrições de desigualdade matriciais. Como o volume de tal região elipsoidal é proporcional ao inverso do produto dos autovalores da matriz  $P$ , o problema de otimização pode ser reescrito como a minimização do determinante de  $P$ , sujeito à  $P > 0$  e  $P_{V_{\dot{V}}} < 0$ :

$$P = \underset{\substack{P > 0 \\ P_{V_{\dot{}} < 0}}}{\text{Min}} \det(P) \quad (6.25)$$

O problema de otimização 6.25 é não-convexo devido à função objetivo,  $\det(P)$ . Usualmente, a desigualdade matricial não-linear,  $P_{V_{\dot{}}} < 0$ , também forma um conjunto não-convexo. Consequentemente, se um algoritmo de otimização global não for usado, a solução do problema de otimização 6.25 não tem garantias de resultar na melhor estimativa para o DA. Como o problema da equação 6.25 é muito difícil de convexificar, uma abordagem interessante para melhorar o DA obtido é partir de uma estimativa inicial próxima à solução ótima. DAVISON E KURAK (1971) estudaram este assunto e propuseram uma metodologia que produz um chute inicial que tenta diminuir a excentricidade do DA. No entanto, sua solução, apesar de ser de grande valor prático, não pode garantir que o mínimo global seja alcançado. Outra abordagem interessante para resolver o problema da equação 6.25 é resolver um problema de otimização auxiliar através de técnicas de envelope convexo e usar esta solução como chute inicial para o problema original não-convexo. Como esta abordagem também não garante que a solução ótima seja alcançada, talvez o mais indicado seja mesmo o uso de algoritmos de otimização global, como os novos algoritmos de ramificação e limitação (*branch and bound*) (FLOUDAS, 2000), por exemplo.

### Exemplo 3 – Retornando ao exemplo clássico de Zubov

Considere novamente o sistema apresentado na equação 6.6.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_1^2 \cdot x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Considere, para simplificar o procedimento, a função de Lyapunov da equação 6.26.

$$V(x) = a x_1^2 + b x_2^2 \quad (6.26)$$

cuja derivada temporal é dada por:

$$\dot{V}(x) = -2a x_1^2 - 2b x_2^2 + 4a x_1^3 x_2 \quad (6.27)$$

Rescrevendo a equação 6.27 de acordo com a representação em forma quadrática da equação 6.24, tem-se:

$$y(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_1^2 \\ x_1 \sqrt{1 - V(x)} \end{bmatrix}^T \cdot P_{V_{dot1}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_1^2 \\ x_1 \sqrt{1 - V(x)} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

com  $P_{V_{dot1}}$  dado por:

$$P_{V_{dot1}} = \begin{bmatrix} -2a + k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -kb & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2a & -ka & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$$

Minimizando o produto  $[ab]$ , sujeito à restrição de desigualdade,

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -P_{V_{dot1}} \end{bmatrix} > 0,$$

é encontrado o DA dado pela equação 6.29.

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 < 1 \quad (6.29)$$

Esta estimativa alcança o mínimo global do problema de otimização. Além disso, a equação 6.29 representa a elipse menos excêntrica permitida como solução ótima quando a estrutura da equação 6.28 é usada como a representação em forma

quadrática de  $\dot{V}(x)$ . Esta estimativa do DA é mostrada na figura 50, juntamente com o DA completo, dado por  $x_1x_2 < 1$ .

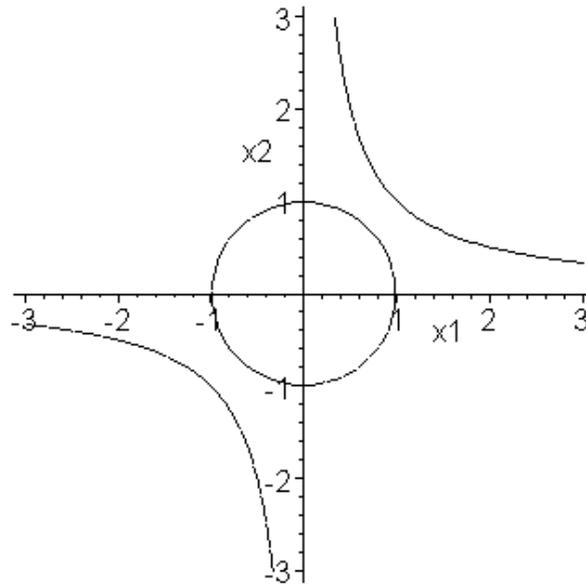


Figura 50 – O DA estimado (círculo) e o DA completo para o sistema da equação 6.6.

#### Exemplo 4 – Oscilador de van der Pol

Um exemplo extensivamente usado na teoria de sistemas não-lineares é o oscilador de van der Pol, cujas equações são apresentadas a seguir:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 - (1 - x_1^2).x_2 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

Neste exemplo, é usada a forma quadrática da equação 6.31 como função candidata de Lyapunov.

$$V(x) = x^T P x = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2 \quad (6.31)$$

cuja derivada temporal é dada por:

$$\dot{V}(x) = b x_1^3 x_2 + 2c x_1^2 x_2^2 + b x_1^2 + (-2a - b + 2c) x_1 x_2 + (-b - 2c) x_2^2 \quad (6.32)$$

Se a equação 6.32 é rescrita de acordo com a representação em forma quadrática da equação 6.33,

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1x_2 \\ \sqrt{1-V(x)} x_1 \end{bmatrix}^T \cdot P_{Vdot2} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1x_2 \\ \sqrt{1-V(x)} x_1 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

onde  $P_{Vdot2}$  é dada por

$$P_{Vdot2} = \begin{bmatrix} b+k & c-a-b/2 & 0 & 0 & 0 \\ c-a-b/2 & -b-2c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ka & \frac{b}{2}(1-k) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2}(1-k) & c(2-k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$$

então, a solução global do problema de otimização da equação 6.25,

$$[a, b, c, k] = \underset{a, b, c, k}{\text{Min}} \left[ ac - \frac{b^2}{4} \right] \quad (6.34)$$

s.t.  $P > 0, P_{Vdot2} < 0$

fornece o DA dado pela equação 6.35 e um valor de  $k = 2,4139$ .

$$V(x) = 2,415 x_1^2 - 2,415 x_1x_2 + 1,208 x_2^2 < 1 \quad (6.35)$$

Este DA maximizado e o DA completo são mostrados na figura 51.

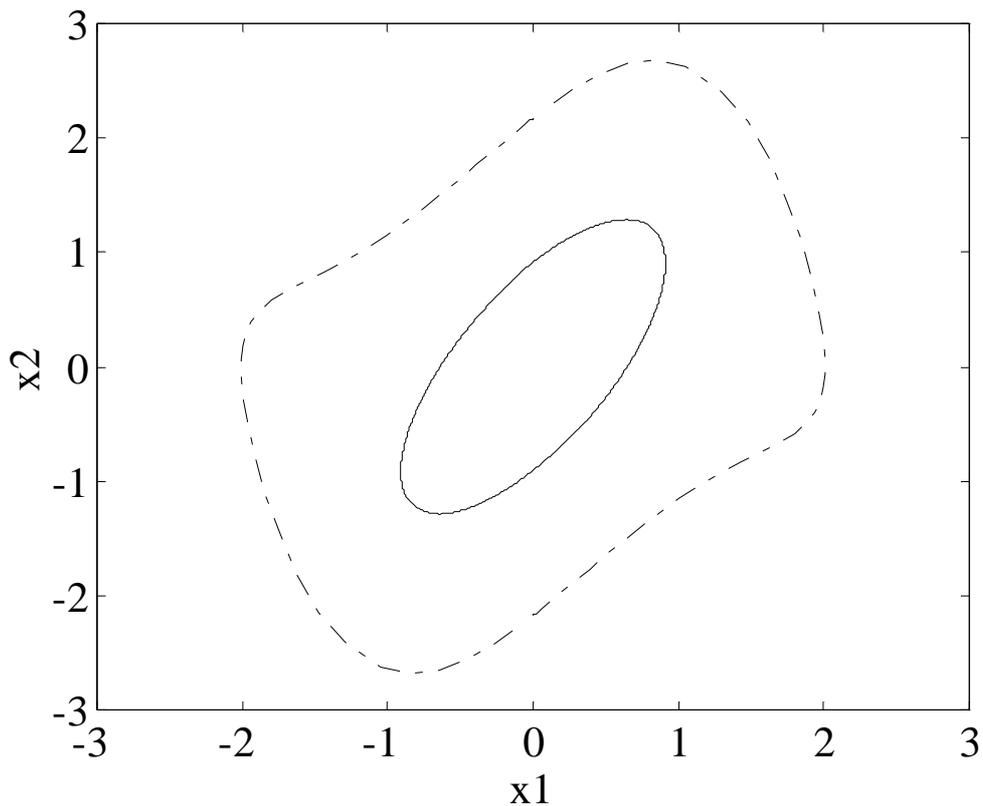


Figura 51 – O DA estimado (elipse) e o DA completo (curva tracejada-pontilhada) para o oscilador de van der Pol.

### Exemplo 5 – Obtenção do DA completo

Para ilustrar a relação entre os teoremas 6.2 e 6.3, considere o sistema da equação 6.36 (SLOTINE E LI, 1991).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1 \cdot x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_2 \cdot (x_1^2 + x_2^2 - 2) + 4x_1^2 \cdot x_2 \end{cases} \quad (6.36)$$

Se é escolhida a forma quadrática da equação 6.37,

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad (6.37)$$

como a função de Lyapunov do sistema, sua derivada temporal é dada por:

$$\dot{V}(x) = 2.(x_1^4 + x_2^4 + 2.x_1^2.x_2^2 - 2.x_1^2 - 2.x_2^2) \quad (6.38)$$

Usando o teorema 3.3, pode-se facilmente concluir que a origem é assintoticamente estável:

$$\dot{V}(0) = 0 \quad (6.39)$$

$$\nabla \dot{V}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

$$\nabla^2 \dot{V}(0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} < 0 \quad (6.41)$$

Para encontrar uma estimativa da região de atração, pode-se rescrever a derivada temporal de  $V(x)$  de acordo com a representação em forma quadrática da equação 6.42.

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sqrt{1,9 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_1 \\ \sqrt{1,9 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_2 \end{bmatrix}^T \cdot P_{Vd} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sqrt{1,9 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_1 \\ \sqrt{1,9 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_2 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

onde  $P_{Vd}$  é dada por

$$P_{Vd} = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

de onde pode-se concluir que a região definida por  $V(x) = \|x\|_2^2 < 1,9$  é uma estimativa do DA do sistema da equação 6.36.

Por outro lado, se a equação 6.38 é rescrita de acordo com a representação em forma quadrática da equação 6.43,

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{2,0 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_1 \\ \sqrt{2,0 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2,0 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_1 \\ \sqrt{2,0 - x_1^2 - x_2^2} \cdot x_2 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

pode-se concluir que na região definida por  $V(x) < 2$ , o sistema é assintoticamente estável.

No entanto, se for observado que a representação de  $\dot{V}(x)$  da equação 6.43 pode ser rescrita de acordo com a equação 6.22,

$$\dot{V}(x) = -h(x) \cdot [C - V(x)] = -2 \cdot (x_1^2 + x_2^2) \cdot (2 - x_1^2 - x_2^2) \quad (6.44)$$

pode-se concluir, do teorema 6.2, que a região definida por  $V(x) = \|x\|_2^2 < 2.0$  não é apenas uma estimativa da região de atração, mas a região de atração completa para a origem, o que é um fato. Para ser mais rigoroso, a função de Lyapunov escolhida deveria ser a da equação 6.45. Neste caso, o DA completo seria dado por  $V(x) < 1$ , o que é equivalente a  $\|x\|_2^2 < 2.0$  e estaria de acordo com os teoremas 6.2 e 6.3.

$$V(x) = \frac{1}{2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} \cdot x_2^2 \quad (6.45)$$

Na figura 52 essa região é apresentada, juntamente com algumas trajetórias do sistema partindo da sua fronteira.

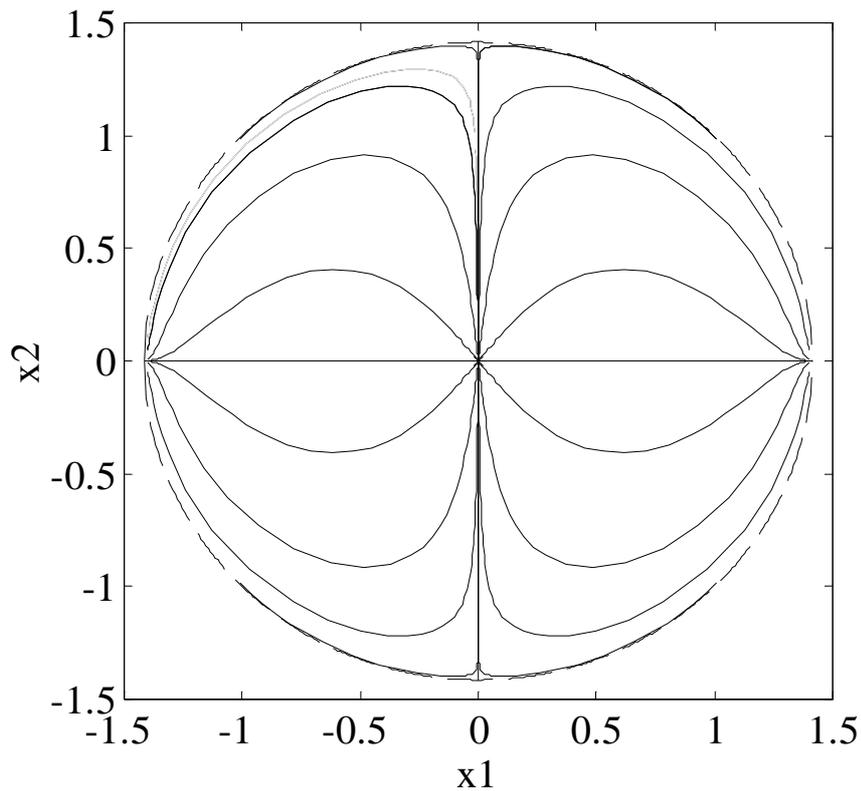


Figura 52. Algumas trajetórias partindo da fronteira do DA completo,  $\|x\|_2^2 < 2,0$ .

### Finalizando o capítulo

Neste capítulo, duas contribuições ao método direto de Lyapunov que tratam diretamente do cômputo do DA de um sistema dinâmico foram apresentadas. Resumidamente, os resultados matemáticos sobre a positividade de funções não-lineares, apresentados no capítulo 3, foram usados de modo a fornecer critérios para a escolha de funções de Lyapunov para sistemas não-lineares autônomos. Outra contribuição interessante, dentro da mesma linha de atuação, foi a apresentação de um teorema que permite incorporar estimativas da região de atração ao teorema de Zubov. Alguns exemplos ilustraram os resultados apresentados neste capítulo. Deve ser ressaltado que estes são resultados gerais que se aplicam a uma grande classe de sistemas dinâmicos não-lineares.

# Capítulo 7

## Conclusão

---

### Resumo

Este capítulo apresenta a conclusão sobre o trabalho desenvolvido, uma listagem das contribuições apresentadas ao longo do texto e algumas perspectivas para futuros trabalhos de pesquisa relacionados ao assunto da tese.

### 7.1 CONCLUSÕES

Esta tese diz respeito ao cômputo de leis de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear via realimentação de estados. A principal limitação ao uso da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear é a ausência de métodos efetivos para resolver a desigualdade de Hamilton-Jacobi-Isaacs, que aparece no processo de síntese do controlador da mesma forma que a desigualdade de Riccati aparece no problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  linear.

Neste trabalho foi apresentado um procedimento para resolver o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. Este método, diferente do usualmente reportado na literatura, pode ser aplicado a uma grande classe de sistemas não-lineares e permite a obtenção de resultados quantitativos concernentes à região de validade do controlador. A metodologia desenvolvida é baseada em novos resultados matemáticos sobre a positividade local e global de funções multivariáveis escalares (LONGHI et al., 2001a), também desenvolvidos durante o período de tese e apresentados no capítulo 3. Exemplos do uso do método foram apresentados na forma de exemplos matemáticos simulados no computador e também através de uma aplicação experimental a um sistema de neutralização de pH. A aplicação dos resultados teóricos obtidos à teoria de estabilidade de Lyapunov também foi apresentada devido à importância deste assunto para a teoria de controle.

Na próxima seção, as principais contribuições da tese são listadas e brevemente explicadas.

## 7.2 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DA TESE

As principais contribuições da tese, na ordem que aparecem no texto, são:

### 7.2.1 Resultados matemáticos sobre a região de sinal definido de funções escalares multivariáveis

A inexistência de métodos para determinar o tamanho da região de sinal definido de funções escalares multivariáveis é reconhecidamente uma grande limitação da teoria de controle, onde muitos índices e critérios podem ser escritos matematicamente como desigualdades não-lineares. Nesta tese, alguns resultados relativos a esta questão foram desenvolvidos com o objetivo de resolver as desigualdades diferenciais parciais provenientes do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. Os resultados teóricos obtidos foram formalizados em três teoremas e constituem o coração da tese já que, todos os demais resultados dependem destes:

**Teorema 3.2:** Critério para determinação do sinal global de funções escalares multivariáveis.

Este teorema é uma extensão do resultado obtido por BOSE E LI (1968) com uma pequena correção na condição de sinais semi-definidos.

**Teorema 3.3:** Critério para determinação do sinal local de funções escalares multivariáveis.

Este resultado é decorrente do cálculo de funções de várias variáveis. Sua principal utilidade se situa no método desenvolvido para computar a lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear onde, através do seu uso, pode-se determinar o máximo desempenho que a lei de controle pode alcançar.

**Teorema 3.4:** Critério para determinação do sinal local de funções escalares multivariáveis com estimativa da região de sinal definido.

Este é o principal resultado da tese e pode ser considerado como uma extensão do teorema 3.1. Seu uso permite, além de definir o sinal local da função, encontrar uma estimativa do tamanho da região que mantém este sinal.

### 7.2.2 Método para resolver o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ não-linear

A maioria dos métodos da literatura sobre o cômputo de leis de  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, ou trata da solução global de uma classe específica de sistema (NGUANG, CHEN,

1999, ISIDORI, LIN, 1998), ou se restringe à obtenção de aproximações locais para a lei de controle, sem definir o tamanho da região local onde a lei de controle é válida. Como a obtenção de uma solução global é algo raro devido à dificuldade de colocar o problema na forma requerida pelo seu respectivo método de solução, o maior interesse teórico reside na determinação de soluções locais com região de validade definida. Nesta tese, a partir dos resultados teóricos comentados anteriormente, foram formulados três problemas de otimização que permitem obter uma solução local para o problema com uma região de validade conhecida. Por região de validade do controlador entende-se a região do espaço de estados onde os requerimentos de estabilidade e desempenho são mantidos. Todos os problemas de otimização formulados usam os teoremas 3.2 a 3.4 para fornecer suas restrições de desigualdade. O primeiro problema responde se existe uma solução local para o problema e também permite definir o melhor desempenho possível do controlador. O segundo problema pode ser usado para maximizar o desempenho do controlador, quando existe uma solução global conhecida. Finalmente, o terceiro problema relaxa o desempenho do sistema em malha fechada de modo a obter um controlador com uma região de validade maior.

O procedimento, ao mesmo tempo que permite resolver de forma quantitativa o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, é suficientemente simples para ser usado na prática. O ponto crucial do método é a escolha da estrutura da solução da desigualdade HJI. A principal desvantagem do método reside no fato de as regras para esta escolha ainda não terem sido desenvolvidas. Para este fim, talvez seja necessário restringir os resultados a algumas classes específicas de sistemas não-lineares. No entanto, o procedimento obtido é bastante genérico e sua facilidade de uso foi apresentada, ao longo do texto, através de vários exemplos. Uma condição inédita na literatura, equação 4.1, relacionado a desigualdade HJI e o DA do sistema em malha fechada com os valores ótimos de controle e perturbação obtidos pela teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear, também foi desenvolvida.

### **7.2.3 Aplicação experimental de controle $\mathcal{H}_\infty$ não-linear a um processo químico**

De modo a mostrar que o método desenvolvido, descrito anteriormente, não é um resultado puramente matemático, foi realizada uma aplicação experimental a um sistema de neutralização de pH. Este sistema foi escolhido devido às suas características não-lineares desafiadoras. Primeiramente, o modelo do sistema foi descrito e o

controlador foi sintetizado baseado no método desenvolvido. Após mostrar o desempenho do sistema em malha fechada através de simulações, o controlador foi implementado na planta. Para o conhecimento do autor, esta é a primeira aplicação experimental a um processo químico de um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. Isso talvez se deva ao fato que ainda não existe um método simples e geralmente aceito para o cômputo deste tipo de lei de controle.

#### **7.2.4 Aplicação dos resultados matemáticos à Lyapunov**

As contribuições desta linha de pesquisa podem ser divididas em duas partes:

##### **A) procedimento para escolher funções de Lyapunov que maximizem o DA**

O procedimento usual na literatura para estimar o DA de um sistema dinâmico consiste em escolher uma função de Lyapunov segundo algum critério e, depois, encontrar a melhor estimativa do DA usando esta função escolhida. Nesta tese, usando os resultados teóricos dos teoremas 3.2 e 3.4, foi desenvolvido um método genérico em que a escolha da função de Lyapunov é feita de modo a maximizar a estimativa do DA do sistema. Para este fim, foram formulados problemas de otimização similares - porém, de um modo geral, mais simples - aos do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. As estimativas do DA obtidas mostraram que o método produz regiões de estabilidade próximas às obtidas por outros métodos mais complexos disponíveis na literatura.

##### **B) Extensão do teorema de Zubov**

Nesta parte do trabalho, baseado na observação de que a principal equação do teorema de Zubov para sistemas autônomos pode ser vista como uma representação em forma quadrática de uma única base não-linear de estrutura pré-definida, foi desenvolvida uma extensão ao a esse teorema original. Esta extensão foi apresentada na forma de um teorema no qual a obtenção do DA completo - correspondente ao teorema de Zubov original, de muito difícil aplicação - é um caso particular do resultado geral, onde se obtém uma estimativa para o DA. A principal vantagem do novo resultado é que é muito mais fácil encontrar uma função de Lyapunov que satisfaça o teorema estendido do que uma função que satisfaça o teorema original. Um procedimento para maximizar a estimativa do DA, quando as condições do caso particular correspondente ao teorema original não são satisfeitas, também foi apresentada, no mesmos moldes da outra contribuição deste item.

### 7.3 PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Baseado nos resultados obtidos durante o período de tese, algumas sugestões para trabalhos futuros podem ser feitas.

#### 7.3.1 Sistematização do método restrito a algumas classes de sistemas

Como dito anteriormente, o coração do método desenvolvido para resolver o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear reside na escolha da estrutura da solução da desigualdade HJI. No entanto, o desenvolvimento de um resultado geral teve como preço a não automatização de seu uso. Apesar do método desenvolvido, no caso mais geral, não poder ser automatizado, sempre se conseguiu encontrar uma representação em forma quadrática para todos os exemplos estudados cujos sistemas dinâmicos eram compostos por equações polinomiais. Assim, uma sugestão interessante para pesquisas futuras é a sistematização do método desenvolvido para alguma classe restrita de funções, como a classe dos polinômios, por exemplo. Para isto, basta desenvolver um teorema que informe que para todo sistema dinâmico polinomial sempre é possível escrever uma representação em forma quadrática de bases não-lineares pré-definidas. Se pelo menos as funções-eixo cuja região local real não é o campo real puderem ser pré-definidas, não será difícil desenvolver a sistematização do procedimento desenvolvido nesta tese.

#### 7.3.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$ integral e rejeição de perturbações persistentes

Uma grande limitação da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear é sua incapacidade de lidar com perturbações persistentes. De um modo geral, este tipo de perturbação leva o sistema a um outro ponto de operação diferente da origem, o que pode ser inaceitável em algumas aplicações. Como perturbações persistentes ocorrem na maioria das aplicações, se faz necessário o desenvolvimento de métodos que garantam a sua rejeição. Neste trabalho, a solução utilizada foi a adição de um termo integral ao controlador. Este procedimento restringiu a estrutura do controlador projetado, mas permitiu a obtenção de um controlador que rejeitou as perturbações persistentes a que o sistema esteve sujeito. No entanto, o procedimento utilizado nesta tese foi feito de um modo bastante informal e se restringiu apenas a uma aplicação onde era realmente

necessária a ausência de *off-set*. Assim, seria de grande relevância a expansão dos resultados da teoria de modo a incorporar a rejeição de perturbações persistentes, com ou sem a adição de um integrador ao controlador.

### 7.3.3 Controle sujeito a restrições nas ações de controle

Como comentado no primeiro capítulo da tese, as duas principais limitações ao uso dos resultados da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear são:

1. Falta de um algoritmo efetivo para calcular a lei de controle.
2. Falta de um método para obter resultados globais ou locais com a região de validade definida.

Nesta tese, estas duas limitações foram estudadas e foram desenvolvidas contribuições ao assunto. Outra falha importante da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear é:

3. Inabilidade em lidar com restrições nas ações de controle.

Sabe-se que todo sistema de controle está sujeito a este tipo de restrição e a sua desconsideração pode inutilizar qualquer análise ou projeto feito para um sistema sem restrições. Deste modo, todas as garantias de estabilidade e desempenho desaparecem. Deve ser ressaltado que esta limitação não é inerente à teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear mas a toda teoria de controle.

Para lidar com esta questão existem técnicas clássicas como a *Describing Function* e AWBT (*Anti-Windup Bumpless Transfer*). No entanto, apesar de úteis, estas técnicas se restringem a sistemas lineares e são muito mais ferramentas de análise que de projeto. Quanto às ferramentas de projeto, existem relativamente poucos procedimentos que lidem com tais restrições e, em se tratando de sistemas não-lineares, a única exceção é o controle preditivo (MPC). As técnicas MPC, por sua vez, não possuem garantias teóricas de estabilidade e robustez. Recentemente, uma abordagem de horizonte móvel da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear que permite unir estas duas abordagens foi reportada na literatura (MAGNI et al., 2001).

Muito da não existência de métodos de projeto para sistemas de controle não-linear com este tipo de restrição é devido ao fato que não existem ferramentas para a análise de sistemas de controle não-lineares com restrições nas ações de controle. No entanto, a partir dos resultados teóricos apresentados nesta tese, é possível tentar

estender os resultados existentes sobre síntese de sistemas de controle lineares com restrições nas ações de controle (TARBOURIECH, GARCIA, 1997) para sistemas não-lineares. Para este fim, seria necessário escrever as condições de estabilidade de um sistema de controle não-linear com restrições através de uma NLMI, ao invés das condições do tipo LMI (desigualdades lineares matriciais, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) do problema linear. Se isto for possível, o problema é garantido ter uma solução e pode ser resolvido usando os resultados apresentados nesta tese. Assim, a investigação sobre a viabilidade desta abordagem é uma boa sugestão para uma pesquisa futura de grande valor, tanto do ponto de vista teórico quanto prático.

#### **7.3.4 Controle robusto paramétrico**

Sistemas de controle são projetados com base em modelos matemáticos. Modelos matemáticos são diferentes da realidade (ORESQUES et al., 1994), i.e., são incertos. Estratégias de controle realistas devem levar em conta estas incertezas para serem bem-sucedidas. Leis de controle que consideram as incertezas são chamadas de leis de controle robustas. Uma maneira de projetar leis de controle robustas para sistemas não-lineares multivariáveis é através da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear. Isso é obtido através da equivalência entre atenuação de perturbações e desempenho robusto em relação a incertezas paramétricas. No entanto, este tipo de projeto robusto, baseado em incertezas do tipo funções limitadas em norma resulta, normalmente, em controladores conservativos. Sabe-se que uma descrição mais realista das incertezas de processos reais é dada através de incertezas paramétricas reais.

Como na última década foi consolidada uma teoria de controle robusto paramétrico, baseada em modelos lineares (BHATTACHARYYA et al., 1995), outra proposta interessante é estender os resultados da teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não-linear – ou qualquer outra técnica não-linear – para considerar este tipo de descrição de incerteza. Como no caso do controle com restrições, o problema de controle robusto paramétrico linear é baseado em desigualdades lineares. Seria lógico imaginar que a extensão desta teoria para sistemas não-lineares seria baseada em desigualdades não-lineares. Se isto for possível, o que precisa ser mais investigado, poder-se-ia usar os resultados matemáticos apresentados nesta tese para tentar encontrar uma solução para o problema de controle resultante.

# Referências Bibliográficas

---

- AIZERMAN, M.A., 1949, "A problem concerning stability 'in the large' of dynamic systems," *Usp. Mat. Nauk.*, v. 4, n. 4, pp. 181-188.
- ÅSTRÖM, K.J., WITTENMARK, B., 1973, "On Self-Tuning Regulators", *Automatica*, v. 9, pp. 185-199.
- ÅSTRÖM, K.J., WITTENMARK, B., 1984, *Computer Controlled Systems*. Prentice-Hall.
- ÅSTRÖM, K.J., WITTENMARK, B., 1989, *Adaptive Control*. Addison-Wesley.
- ATHANS, M., SENTIEIRO, J.J.S., DALEH, M.A., 1999, "Final report", *Workshop on Future Directions in Systems and Control Theory*, June, 22-27, Cascais, Portugal.
- BADGWELL, T.A., QIN, S.J., 1998, "An overview of nonlinear model predictive control applications", *In: Proceedings of International Symposium on Nonlinear Model Predictive Control: Assessment and Future Directions*, Ascona, Suíça, pp. 128-145.
- BALL, J.A., HELTON, J.W., 1988, "Factorization of Nonlinear Systems: Towards a Theory for Nonlinear H-infinity Control", *In: Proceedings of 27th Conference Decision and Control*, pp. 2376-2381.
- BALL, J.A., HELTON, J.W., 1989, "H-infinity Control for Nonlinear Plants: Connections with Differential Games", *In: Proceedings of 28th Conference Decision and Control*, pp. 956-962.
- BALL, J.A., HELTON, J.W., WALKER, M.L., 1993, "H-infinity Control for Nonlinear Systems with Output Feedback", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 38, n. 2 (Feb), pp. 546-559.
- BEQUETTE, B.W., 1998, "Practical Approaches to Nonlinear Control: A Review of Process Applications", *In: Proceedings of Nonlinear Model-Based Process Control, NATO ASI Series*, Kluwer, vol. 353, pp. 3-32.
- BHATTACHARYYA, S.P., CHAPPELLAT, H., KEEL, L.H., 1995, *Robust Control, The Parametric Approach*. Prentice-Hall.

- BEARD, R.W., SARIDIS, G.N., WEN, J.T., 1997, "Galerkin approximations of the generalized Hamilton-Jacobi-Bellman equation", *Automatica*, v. 33, n. 12, pp. 2159-2177.
- BEARD, R.W., MCLAIN, T.W., 1998, "Successive Galerkin Approximations Algorithms for Nonlinear Optimal and Robust Control", *International Journal of Control*, v. 71, n. 5, pp. 717-743.
- BELLMAN, R., 1957, *Dynamic Programming*. New Jersey, Princeton University Press.
- BOSE, N. K., LI, C.C., 1968, "A Quadratic Form Representation of Polynomials on Several Variables and Its Application", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-14, pp. 447-448.
- BOSE, N.K., JURY, E.I., 1975, "Inner algorithm to test for positive definiteness of arbitrary binary forms", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 20, pp. 169-170.
- BOYD, S., GHAOUI, L. E., FERON, E. et al., 1994, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM studies in applied mathematics 15.
- CARR, H.-D., 1981, *Applications of centre manifold theory*. Springer-Verlag.
- CHETAYEV, N.G., 1955, *The Stability of Motion*. Traduzido do original *Ustoichivost' dvizheniya*, Pergamon press Ltd. (1961).
- CHIANG, H.D., HIRSCH, M.W., WU F.F., 1988, "Stability Regions of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 33, n. 1, pp. 16-27.
- CLARKE, D.W., GAWTHROP, P.J., 1975, "Self-Tuning Controller", *Proceedings IEE-D*, v. 122, pp. 929-934.
- CLARKE, D.W., GAWTHROP, P.J., 1979, "Self-Tuning Control", *Proceedings IEE-D*, v. 126, pp. 633-640.
- CLARKE, D.W., MOHTADI, C., TUFFS, P.S., 1987, "Generalized Predictive Control. Part I: The Basic Algorithm", *Automatica*, v. 23, pp. 137-148.
- CHRISTEN, U., CIRILLO, R., 1997, *Nonlinear H-infinity Control - Derivation and Implementation*, ETH Zurich IMRT Report n. 31.
- CUTLER, C. R., RAMAKER, B. L., 1979, "Dynamic Matrix Control - A Computer Control Algorithm", *In: Proceedings of AIChE 86th National Meeting*, pp. 01-23.
- DALSMO, M., EGELAND, O., 1997 "State Feedback  $\mathcal{H}_\infty$  Suboptimal Control of A Rigid Spacecraft", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 8, pp. 1186-1189..

- DAVISON, E.J., COWAN, K.C., 1969, "A Computational Method For Determining the Stability Region of a Second Order Nonlinear Autonomous System", *International Journal of Control*, v. 9, n. 3, pp. 349-357.
- DAVISON, E.J., KURAK, E.M.C., 1971, "A Computational Method for Determining Quadratic Lyapunov Functions for Nonlinear Systems", *Automatica*, v. 7, pp. 627-636.
- DOYLE, J.C., STEIN, G., 1981, "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, n. 1, pp. 4-16.
- DOYLE, J.C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P.P. et al., 1989, "State-Space Solutions to Standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Control Problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, n. 8 (Aug), pp. 831-847.
- FLOUDAS, C.A., 2000, "Global Optimization in Design and Control of Chemical Process Systems", *Journal of Process Control*, vol. 10, pp. 125-134.
- FRANCIS, B.A., 1987, *A Course in  $\mathcal{H}_\infty$  Control Theory*. Lecture Notes in Control and Information Science n. 88, Springer-Verlag.
- GADENZ, R.N., LI, C.C., 1964, "On the Positive Definiteness of Quartic Forms of Two Variables", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 10, pp. 187-188.
- GALÁN, O., ROMAGNOLI, J.A., PALAZOGLU, A., 2000, "Robust H-infinity control of nonlinear plants based on multi-linear models: an application to bench-scale pH neutralization reactor", *Chemical Engineering Science*, v. 55, pp. 4435-4450.
- GENESIO, R., TARTAGLIA, M., VICINO, A., 1985, "On The Estimation of Asymptotic Stability Regions: State of The Art and New Proposals", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 30, n. 8, pp. 466-472.
- GLOVER, K., DOYLE, J.C., 1988, "State-Space Formulae for All Stabilizing Controllers That Satisfy an  $\mathcal{H}_\infty$  norm bound an relations to risk sensitivity", *Systems and Control Letters*, v. 11, pp. 167-172.
- GOODWIN, G.C., MCINNIS, B., LONG, R.S., 1982, "Adaptive Control Algorithms for Waste Water Treatment and pH Neutralization", *Optimal Control Appl. Meth.*, v. 3, pp. 443-459.
- GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P., 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York, Springer-Verlag.

- GUSTAFSSON, T.K., SKRIFAVRS, B.O., SANDSTRÖM, K.V. et al., 1995, “Modeling of pH for control”, *Industrial Engineering and Chem. Research*, v. 34, pp. 820-827.
- GUSTAFSSON, T.K., WALLER, K.V., 1983, “Dynamic Modeling and Reaction Invariant Control of pH”, *Chemical Engineering Science*, v. 38, pp. 389-398.
- HAHN, W., 1967, *Stability of Motion*. Springer-Verlag, Berlin.
- HARDT, M., HELTON, J.W., KREUTZ-DELGADO, K., 2000, “Numerical Solution of Nonlinear  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Control Problems With Application to Jet Engine Compressors”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 8, n. 1, pp. 98-111.
- HARDY, G.H, LITTLEWOOD, J.E., PÓLYA, G., 1934, *Inequalities*. Cambridge University Press, 2 ed. (1952).
- HASAN, M.A., HASAN, A.A., 1996, “A Procedure for the Positive Definiteness of Forms of Even Order”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 4, pp. 615-617.
- HILL, D.J., MOYLAN, P.J., 1976, “The Stability of Nonlinear Dissipative Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 21, pp. 708-7112.
- HILL, D.J., MOYLAN, P.J., 1980, “Dissipative Dynamical Systems: Basic Input-Output and State Properties”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 309, n. 5 (May), pp. 327-357.
- Hirsch, M.W., Smale S., 1974, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press.
- HUANG, J., 1998, “An Efficient Algorithm To Solve a Sequence of Linear Equations Arising in Nonlinear H-Infinity Control”, *Applied Numerical Mathematics*, v. 26, pp. 293-306.
- ISAACS, R., 1965, *Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*. Dover Books, 1999 reprint of the original from McGraw-Hill.
- ISIDORI, A., 1989, *Nonlinear Control Systems*. 2 ed., Springer-Verlag.
- ISIDORI, A., ASTOLFI, A., 1991, *Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  Control Via Measurement Feedback*, ETH-Zürich Report 91-09.

- ISIDORI, A., ASTOLFI, A., 1992, "Disturbance Attenuation and  $\mathcal{H}_\infty$  Control Via Measurement Feedback in Nonlinear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 37, n. 9, pp. 1283-1293.
- ISIDORI, A., 1994, " $\mathcal{H}_\infty$  Control via Measurement Feedback for Affine Nonlinear Systems", *International of Robust and Nonlinear Control*, v. 4, pp. 553-574.
- ISIDORI, A., KANG, W., 1995, " $\mathcal{H}_\infty$  Control via Measurement Feedback for General Nonlinear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 40, n. 3, pp. 466-472.
- ISIDORI, A., LIN, W., 1998, "Global  $\mathcal{L}_2$ -Gain Design for a Class of Nonlinear Systems", *Systems and Control Letters*, v. 34, pp. 295-302.
- JURY, E.I., 1996, "Remembering Four Stability Theory Pioneers of the Nineteenth Century", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 9, pp. 1242-1244.
- KANG, W., 1995, "Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  Control and its Application to Rigid Spacecraft", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 40, pp. 1281-1285.
- KEEL, L.H., BHATTACHARYYA, S.P., 1997, "Robust, Optimal, or Fragile?", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 8 (Aug), pp. 1098-1105.
- KHALIL, H.K., 1996, *Nonlinear Systems*. 2 ed., Prentice-Hall.
- KHARITONOV, V.L., 1978, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations", *Differential Uravnen*, v. 14, pp. 2086-2088.
- KIRIN, N.E., NELEPIN, R.A., BAIDAEV, V.N., 1982, "Construction of the Attracting Region by Zubov's Method", *Journal of Differential Equations*, v. 17, pp. 871-880.
- KLATT, K.U., ENGELL, S., 1996, "Nonlinear control of neutralization processes by gain-scheduling trajectory control", *Industrial Engineering and Chem. Research*, v. 35, pp. 3511-3518.
- KREYSZIG, E., 1993, *Advanced Engineering Mathematics*. 7 ed., John Wiley and Sons.
- KUHN, T. S., 1962, *The Structure of Scientific Revolutions*. 3 ed., The University of Chicago Press.
- KUO, J., 1996, *Engineering Optimization*. Prentice-Hall
- KWAKERNAAK, H., 1993, "Robust Control and H-infinity Optimization - Tutorial Paper", *Automatica*, v. 29, n. 2, pp. 255-273.

- LA SALLE, J., LEFSCHETZ, S., 1961, *Stability by Liapunov's Direct Method*. Mathematics in science and engineering v. 4, Academic Press.
- LEVIN, A., 1994, "An Analytical Method of Estimating the Domain of Attraction for Polynomial Differential Equations", *IEEE Transactions on automatic control*, v. 39, n. 12, pp. 2471-2475.
- LEWIS, F.L., 1992, "Introduction to Modern Control Theory". In: Lewis, F.L., *Applied Optimal Control and Estimation*, chapter 1, Prentice-Hall.
- LI, S., ZHANG, W., 1999, "Nonlinear H-infinity control of neutralization processes", *In: Proceedings of 14<sup>th</sup> World Congress of IFAC*, Beijing, China.
- LONGHI, L.G.S., LIMA, E.L, SECCHI, A.R., 2001a, "On the Positivity of Multivariable Scalar Functions", *Journal of the Franklin Institute*, v. 338, n. 4, pp. 509-516.
- LONGHI, L.G.S., LIMA, E.L, SECCHI, A.R., 2001b, "On the Computation of Nonlinear H-infinity Control Laws with Estimates of Its Validity Region", *Submitted to Automatica*. (available at <http://www.enq.ufrgs.br/~gustavo>).
- LONGHI, L.G.S., LIMA, E.L, SECCHI, A.R., 2001c, "A Sufficient Criterion to Choose Lyapunov Functions for Nonlinear Systems", *Submitted to IEEE Transactions on Automatic Control*. (available at <http://www.enq.ufrgs.br/~gustavo>).
- LONGHI, L.G.S., 2000, "Estimativa da Região de Estabilidade para Sistemas Dinâmicos Autônomos e Não-Autônomos", *Workshop sobre a Computação como ferramenta de Ensino e Pesquisa*, Porto Alegre, RS, Brasil (disponível no endereço de internet <http://www.enq.ufrgs.br/~gustavo/>).
- LONGHI, L.G.S., LIMA, E.L, SECCHI, A.R., 2000a, "Sobre a positividade local de formas e sua aplicação a teoria de Lyapunov", *In: Proceedings of the Brazilian congress of automatica*, Florianópolis, SC, Brasil (disponível no endereço de internet <http://www.enq.ufrgs.br/~gustavo/>).
- LONGHI, L.G.S., LIMA, E.L, SECCHI, A.R., 2000b, "Extending the Zubov's Theorem to Compass Estimates of the Domain of Attraction for Autonomous Systems", *In: Proceedings of 5<sup>th</sup> IFAC Symposium Nonlinear Control Systems - NOLCOS 2001* Saint Petersburg, Russia, 4 - 6 july 2001.
- LONGHI, L.G.S., LIMA, E.L, SECCHI, A.R., TRIERWEILER, J.O., 2000, "A Possible Approach to Solve Nonlinear H-infinity Control Problem", *In: Proceedings of ADCHEM 2000 - Advanced Process Control*, Pisa, Italy (disponível no endereço de internet <http://www.enq.ufrgs.br/~gustavo/>).

- LU, W.M., DOYLE, J.C., 1997, "Robustness Analysis and Synthesis for Nonlinear Uncertain Systems" *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 12, pp. 1654-1662 .
- LU, G.-P., ZHENG, Y.-F., HO, D.W.C., 2000, "Nonlinear Robust H-infinity Control Via Dynamic Output Feedback", *Systems and Control Letters*, v. 39, pp. 193-202.
- LUKES, D.L., 1969, "Optimal Regulation of Nonlinear Dynamical Systems", *SIAM Journal on Control*, v. 7, n. 1, pp. 75-100.
- LYAPUNOV, A.M., 1892, "The General problem of the Stability of Motion", *International Journal of Control*, vol. 55, n. 3 (Lyapunov Centenary Issue), pp. 531-773.
- MAGNI, L., NIJMEIER, H., VAN DER SCHAFT, A.J., 2001, "A Receding Horizon Approach to the Nonlinear H-infinity Control Problem", *Automatica*, v. 37, pp. 429-435.
- MORARI, M., 1996, "CPC I - CPC V: 20 Years of Process Control Research" *In: Proceedings of CPC V*, pp. 01-12.
- MURRAY-SMITH, R., JOHANSEN, T.A., 1997, *Multiple Model Approach to Modeling and Control*. London, Taylor and Francis.
- NARAYANAN, N.R.L., KRISHNASWAMY, P.R., RANGAIAH, G.P., 1998, "Use of alternate process variable for enhancing pH control performance", *Chemical Engineering Science*, v. 53, n. 17, pp. 3041-3049.
- NGUANG, S.K., 1996, "Robust Nonlinear H-infinity Output Feedback Control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 7, pp. 1003-1007.
- NGUANG, S.K, CHEN, X.D., 1999, "Robust H-Infinity Control of a Class of Continuous Fermentation Processes", *Applied Mathematics Letters*, v. 12, n. 1, pp. 61-69.
- OGATA, K., 1990, *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice-Hall do Brasil.
- ORESQUES, N., SHRADER-FRECHETTE, K., BELITZ, K., 1994, "Verification, Validation, and Confirmation of Numerical Models in the Earth Sciences", *Science*, v. 263, pp. 641-646.
- POINCARÉ, H., 1892, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Gauthier Villars.
- PRETT, D.M., GARCIA, C.E., 1988, *Fundamental Process Control*. Butterworths series in chemical engineering.

- RICE, J.J., DO, D.D., 1995, *Applied Mathematics and Modeling for Chemical Engineers*. McGraw-Hill.
- RICHALET, J., RAULT, A., TESTUD, J.L. et al., 1978, “Model Predictive Heuristic Control: Applications to Industrial Processes”, *Automatica*, v. 14, pp. 413-428.
- ROSEMBROCK, H.H., 1974, *Computer-Aided Control System Design*. New York, Academic Press.
- SAFONOV, M.G., LAUB, A.J., HARTMANN, G.L., 1981, “Feedback Properties of Multivariable Systems: The Role and Use of the Return Difference Matrix”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, n. 1, pp. 47-65.
- SCHARLAU, W., OPOLKA, H., 1985, *From Fermat to Minkowski – Lectures on the Theory of Numbers and Its Historical Development*. New York, Springer-Verlag.
- SHINSKEY, F.G., 1994, *Feedback Controllers for the Process Industries*. McGraw-Hill.
- SHUE, S.P., AGARWAL, R.K., SHI, P., 2000, “Nonlinear H-infinity Method for Control of Wing Rock Motions”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v. 23, n. 1, pp. 60-68
- SKOGESTAD, S., POSTLETHWAITE, I., 1996, *Multivariable Feedback Control, Analysis and Design*. John Wiley and Sons.
- SLOTINE, J.J.E., LI, W., 1991, *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall.
- STEINBRUCH, A., 1975, *Álgebra Linear e Geometria Analítica*. McGraw-Hill do Brasil, Porto Alegre.
- SUNG, S.W., LEE, I.-B., CHOI, J.Y. et al., 1998, “Adaptive control for pH systems”, *Chemical Engineering Science*, v. 53, n. 10, pp. 1941-1953.
- TARBOURIECH, S., GARCIA, G., 1997, *Control of Uncertain Systems With Bounded Inputs*. Springer-Verlag.
- TESI, A., VILLORESI, F., GENESIO, R., 1996, “On The Stability Domain Estimation Via Quadratic Lyapunov Function: Convexity and Optimality Properties For Polynomial Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 11 (Nov), pp. 1650-1657.
- TSIOTRAS, P., CORLESS, M., ROTEA, M.A., 1998, “An  $\mathcal{L}_2$  Disturbance Attenuation Solution to the Nonlinear Benchmark Problem”, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, v. 8, pp. 311-330.
- VAN DE SCHAFT, A.J., 1991, “On a State Space Approach to Nonlinear H-infinity Control”, *Systems and Control Letters*, v. 16, pp. 1-8.

- VAN DER SCHAFT, A.J., 1992, " $\mathcal{L}_2$ -Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback  $\mathcal{H}_\infty$  Control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 37, n. 6, pp. 770-784.
- VAN DER SCHAFT, A.J., 1999,  *$L_2$ -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. 2 ed., Springer-Verlag.
- VANELLI, A., VIDYASAGAR, M., 1985, "Maximal Lyapunov Functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems", *Automatica*, v. 21, n. 1, pp. 69-80.
- VILLADSEN, J., MICHELSEN, M.L., 1978, *Solution of Differential Equation Models by Polynomial Approximation*. Prentice-Hall.
- VORONOV, A.A., MATROSOV, V.M., 1987, *Method of Lyapunov Vector-Function in Stability Theory* (in Russian). Moscow: Nauka.
- WILLEMS, J.C., 1972, "Dissipative dynamical systems, part I: general theory", *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. 45, pp. 321-351.
- WILLEMS, J.C., 1999, "Editorial: Obituary of George Zames" *Automatica*, v. 34, n. 3.
- WRIGHT, R.A., KRAVARIS, C., 1991, "Nonlinear control of pH processes using strong acid equivalent", *Industrial Engineering and Chem. Research*, v. 30, pp. 1561-1572.
- YAZDANPANAHI, M.J., KHORASANI, K., PATEL, R.V., 1999, "On the Estimate of the Domain of Validity of Non-Linear H-Infinity Control", *International Journal of Control*, v. 72, n. 12, pp. 1097-1105.
- YANG, X., CHEN, T., TAMURA, K., 1997, "Approximate Solution of Hamilton-Jacobi-Isaacs Inequality by Neural Networks", *Applied Mathematics and Computation*, v. 84, pp. 49-64.
- YUNG, C.F., WU, J.L., LEE, T.T., 1997, "Parameterization of Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  State-Feedback Controllers", *Automatica*, v. 33, n. 8, pp. 1587-1590.
- YUNG, C.F., WU, J.L., LEE, T.T., 1998, " $\mathcal{H}_\infty$  Control for More General Nonlinear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 43, n. 12, pp. 1724-1727.
- ZAMES, G., 1966a, "On the Input-Output Stability of Nonlinear Time-Varying Feedback Systems, Part I: Conditions Derived Using Concepts of Loop Gain, Conicity, and Positivity", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 11, pp. 223-238

- ZAMES, G., 1966b, "On the Input-Output Stability of Nonlinear Time-Varying Feedback Systems, Part II: Conditions Involving Circles in the Frequency Plane and Sector Nonlinearities", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 11, pp. 465-476.
- ZAMES, G., 1979, "Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Weighted Seminorms, and Approximate Inverses", *In: Proceedings of 17th Allerton Conference*, pp. 744-752.
- ZAMES, G., 1981, "Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, pp. 301-320.
- ZHAN, W., WANG, L.Y., 1996, "Disturbance Attenuation Via State Feedback for Systems with a Saturation Nonlinearity in the Control Channel", *Automatica*, v. 32, n. 6, pp. 929-931.
- ZHOU, K., DOYLE, J.C., GLOVER, K., 1996, *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall.
- ZHOU, K., DOYLE, J.C., 1998, *Essentials of Robust Control*. Prentice-Hall.