UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

NEWTON BOHRER KERN

UMA INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO ATRAVÉS DE RELAÇÕES FUNCIONAIS

PORTO ALEGRE
2008

NEWTON BOHRER KERN

UMA INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO ATRAVÉS DE RELAÇÕES FUNCIONAIS

Dissertação apresentada a banca da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM ENSINO DE MATEMÁTICA.

Orientadora: Profª. Drª. Maria Alice Gravina

PORTO ALEGRE
2008

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO-NA-PUBLICAÇÃO(CIP)

K396i Kern, Newton Bohrer

Uma introdução ao pensamento algébrico através de relações funcionais / Newton Bohrer Kern. – Porto Alegre: UFRGS / Instituto de Matemática, 2008.

xi, 134 f. : il. ; 29,5 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Porto Alegre, BR – RS, 2008. Orientador(a): Profª. Drª. Maria Alice Gravina.

1. Ensino. 2. Álgebra. 3. Funções. 4. Informática. I. Gravina, Maria Alice. II.Título.

CDU – 51:37

Bibliotecária responsável : Josiane Gonçalves da Costa – CRB 10/1544

NEWTON BOHRER KERN

UMA INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO ATRAVÉS DE RELAÇÕES FUNCIONAIS

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovado em 17 de abril de 2008.

BANCA EXAMINADORA:

____

Prof. Dr. Ítalo Modesto Dutra
Colégio de Aplicação - UFRGS

____

Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo
Instituto de Matemática - UFRGS

____

Profa. Dr. Vera Clotilde Garcia
Instituto de Matemática - UFRGS

DEDICATÓRIA

A minha esposa Ivana, pelo apoio incondicional; aos meus filhos Matheus e Laura, e aos meus pais, Oscar e Sonia, por incutir nos filhos a importância dos estudos.

AGRADECIMENTO

> "Melhor serem dois do que um, porque têm melhor paga no seu trabalho. Porque se caírem, um levanta o companheiro. Também se dois dormirem juntos, eles se aquentarão. E se alguém quiser prevalecer contra um, os dois lhe resistirão; o cordão de três dobras não se rebenta com facilidade!"
> - Salomão (Eclesiastes 4:12)

A conclusão deste trabalho não é resultado do empenho de apenas uma pessoa. Muitas foram as pessoas que contribuíram para que este momento chegasse.

Agradeço à Profª. Maria Alice Gravina por sua orientação e paciência. Aos meus colegas de mestrado, agradeço pelo companheirismo.

Agradeço a minha esposa Ivana por sua constante motivação, dedicação e apoio.

Agradeço a Deus pelas portas abertas diante de mim.

RESUMO

Esta dissertação de mestrado tem foco no ensino introdutório de álgebra na 6ª série do Ensino Fundamental. A partir de estudo de características do ensino vigente registrados na literatura e nos livros didáticos, das dificuldades apresentadas pelos alunos e de seus desempenhos nas avaliações do SAEB / MEC, avançamos na discussão sobre perspectivas que poderiam ser trabalhadas na escola de forma a melhorar a introdução ao ensino de álgebra, e fizemos nossas escolhas didáticas para construção de uma proposta de ensino. A metodologia de investigação, a Engenharia Didática, definiu o processo de concepção da situação didática acompanhada de análise *a priori*, de experimentação e de análise *a posteriori*. Desta forma foi possível validar a proposta e o produto que se constituem, como parte desta dissertação, na nossa contribuição para melhorias no ensino de Matemática. Como proposta trazemos a possibilidade de se fazer uma introdução ao pensamento algébrico através do estudo de relações funcionais, nisso usando diferentes situações-problema, incluindo-se entre elas situações de modelagem matemática. Na viabilização da proposta, considerando a faixa etária de nosso público alvo, de grande importância foi a utilização do objeto de aprendizagem "Máquinas Algébricas" nas suas possibilidades de concretizar as relações funcionais a serem estabelecidas pelos alunos. Como produto resultante deste trabalho temos, de forma organizada, uma seqüência de atividades, organizada em grau crescente de complexidade, sempre contemplando os importantes momentos de exploração no objeto "Máquinas Algébricas". Foi com este produto que constatamos a evolução dos alunos no uso da linguagem algébrica: de início raciocínios de natureza aritmética estavam presentes, mas aos poucos, raciocínios algébricos foram se fazendo cada vez mais presentes. Ao final da experimentação com nossa turma de 6ª série, os alunos mostraram entendimento sobre as relações funcionais, sabendo expressá-las via "leis", tabelas e gráficos.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino, Álgebra, Funções, Informática.

ABSTRACT

This dissertation is focused in the early teaching of Algebra, in the 6^{th} grade of the Elementary School. From the study of characteristics of the teaching recorded in the literature and textbooks, and the difficulties faced by the students and their performance in the evaluations of SAEB, we move in the discussion of prospects that could be worked at the school in order to improve the introduction of the teaching of algebra, and made our didactic choices to construct a teaching proposal. The research methodology, “Didactic Engineering”, defined the process of designing the didactic situation accompanied by a priori analysis, experimentation and analysis afterwards. In this way, it was possible to validate the proposal and the product which are, as part of this dissertation, our contribution to the improvement in the teaching of Mathematics. As a proposal we brought the possibility of developing an introduction to algebraic thinking through the study of functional relationships, using different problem-situations, including situations with mathematical modeling. To make this proposal feasible, considering the age range of our target audience, the use of the object of learning “Algebraic Trees” was very important, since it helped the students to understand functional relations in a more concrete way. As a product resulting from this work, we have organized a sequence of activities, in an increasing degree of complexity, always contemplating the important moments of exploration in the object "Algebraic Trees." It was with this product we saw the evolution of the students in the use of algebraic language: in the beginning, arguments of arithmetic nature were present but gradually, algebraic reasoning was increasingly present. At the end of the experiment on our 6^{th} grade class the students showed understanding of the functional relationships, being able to express them via "laws", charts and graphs.

KEYWORDS: Teaching, Algebra, Functions, Computing.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 Introdução

Esta dissertação de mestrado tem como propósito apresentar uma proposta pedagógica que trata da introdução ao pensamento algébrico na 6ª série do Ensino Fundamental. A motivação para realização deste trabalho está diretamente ligada a nossa prática profissional. Temos atuado como professor de Matemática desde 1996, sempre nas séries finais do Ensino Fundamental. Há alguns anos, temos trabalhado nas 5ª e 6ª séries.

De nossa experiência, podemos ver que os conteúdos de Matemática a serem trabalhados nas 5ª e 6ª séries, no geral, se apresentam de interesse para os alunos no que diz respeito à Matemática que se faz presente no cotidiano. Isso, com certeza, facilita o trabalho do professor quanto as justificativas a serem apresentadas quando questionado pelos alunos sobre a necessidade de aprenderem um determinado conteúdo. Frente a situações que envolvem cálculos com dinheiro, ou uso de metros, múltiplos e submúltiplos, ou unidades de medidas de outras grandezas, ou proporções e porcentagens, enfim frente a situações diretamente ligadas as suas vivências no dia a dia, onde há presença palpável da Matemática, os alunos não questionam o professor sobre o “por quê” aprender um determinado assunto.

Mas no decorrer dos estudos, quando se dá início ao trabalho com a linguagem algébrica – o estudo de equações, polinômios, produtos notáveis, fatoração, etc. - a situação em sala de aula já não é mais tão tranqüila. Somando-se a postura da adolescência de tudo questionar, têm-se as naturais dificuldades que se fazem presentes no estudo mais formal da Matemática. A mudança de um trabalho voltado para a Matemática concreta, diretamente ligada a situações do dia a dia, para um trabalho voltado para aspectos mais abstratos, mais afastados do cotidiano, faz com que o seu ensino se torne uma fonte de problemas no processo de aprendizagem. Em particular, o aprendizado da álgebra, na nossa experiência como professor, tem se constituído como um dos maiores desafios no ensino de Matemática do Ensino Fundamental.

É na perspectiva de trazer uma contribuição para a superação deste desafio, tentando amenizar as dificuldades existentes, que fizemos a concepção, a experimentação e a análise de uma proposta pedagógica que trata da introdução ao pensamento algébrico. Esta proposta esteve sempre norteada pela pergunta: como trabalhar com a introdução à linguagem algébrica de modo que o aluno possa relacioná-la com situações reais e entenda a utilidade de sua aplicação?

Na construção da proposta também levamos em consideração as diretrizes traçadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)[1] :

> *Tradicionalmente, o estudo da álgebra no Ensino Fundamental tem-se iniciado no final da 6ª série, valorizando-se o cálculo algébrico e seu uso para resolver problemas de valores desconhecidos. No entanto, as pesquisas em Educação Matemática têm apontado a importância de se introduzir o uso da linguagem algébrica mais cedo – não com o tratamento de equações, acompanhado de suas classificações e fatorações – mas com a preparação do aluno para entender a linguagem simbólica que expresse abstrações e generalizações.*

A proposta que apresentamos nesta dissertação é resultado de um processo de construção mediado por leituras, reflexões e pesquisas, o qual se reflete na organização de seu texto. No capítulo 2, analisamos a forma como vem sendo orientado o ensino introdutório da Álgebra, através das concepções de álgebra registradas na literatura e nos livros didáticos, e também através do tratamento dado a este conteúdo nos livros de 5ª e 6ª séries aprovados pelo MEC. Em particular analisamos as "situações-problema" que são usadas como motivadoras para a introdução ao estudo de equações, e aqui muitas das vezes detectamos o quão pouco motivadoras podem ser estas situações.

Ainda no capítulo 2 estaremos abordando as dificuldades que se apresentam no processo de introdução ao pensamento algébrico. Identificamos que além da dificuldade, bastante natural, de compreensão da nova linguagem usada para estabelecer relações entre entes abstratos, ainda há a questão da relutância do aluno em utilizar um método de resolução de problemas que ele não julga pertinente e importante, atitude recorrentemente identificada em minha prática como professor. Quanto à compreensão do conteúdo: muitos fatores acabam por prejudicar a correta construção do pensamento algébrico por parte do aluno. O próprio conhecimento aritmético do aluno pode ser um empecilho no aprendizado do novo conteúdo. Por exemplo, ao escrever a fração mista 2 1/3, estamos representando a adição de 2 a 1/3. Em contrapartida, quando escrevemos 3a não estamos representando uma adição, mas uma multiplicação. Outra dificuldade ocorre pela dificuldade em aceitar a chamada "ausência de fechamento". Uma expressão numérica pode ser resolvida até chegar a um resultado numérico, o que contribui para que o aluno entenda que qualquer expressão deve ter, em seu lado esquerdo, uma conta a ser resolvida, enquanto seu lado direito se reserva para a resposta numérica. Já na resolução de uma expressão algébrica podemos encontrar uma expressão simplificada como "2a + 3b", o que parece inacabado para o aluno, fazendo com que

[1] http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Avalmat/pnldmat07.pdf

continue, chegando a respostas como "5ab". Também o conceito de variável acaba muitas vezes não sendo bem assimilado pelo aluno, visto estar ele (o aluno) mais acostumado com a idéia de letra como um número desconhecido, que pode ser determinado depois de algumas etapas de algum algoritmo, do que aquela que usa a letra para representar relação entre variáveis.

No final do capítulo 2 trazemos o desempenho dos alunos nas provas do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica)[2]. O SAEB avalia o aprendizado dos alunos em Língua Portuguesa e Matemática, ao final das 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e ao final do 3º ano do Ensino Médio. Analisamos, dentre os descritores previstos para o ensino de Matemática, questões que abordam o ensino de álgebra. Os resultados do SAEB são alarmantes: menos de 3% dos alunos chegam, ao menos, no nível satisfatório. E, além disso, o desempenho só tem caído nos últimos 10 anos (1995 a 2005).

Visando uma proposta pedagógica que busca uma melhoria no aprendizado da álgebra, no capítulo 3 nos concentramos nas diferentes diretrizes que frisam a importância da álgebra no desenvolvimento escolar do aluno e que apontam que é na observação das relações entre os números, na observação das diferentes formas de representar situações matemáticas - gráficos, tabelas, expressões - que o aluno desenvolve o pensamento algébrico e não através do ensino centrado na resolução mecânica de exercícios. Buscamos na literatura diferentes sugestões para combater as dificuldades de aprendizagem, e é assim que trazemos diferentes perspectivas para a abordagem algébrica: a generalização, a resolução de problemas, a modelagem, as relações funcionais.

Também é no capítulo 3 que fazemos as nossas escolhas didáticas quanto à construção de proposta à introdução ao aprendizado da álgebra:

- a primeira escolha é fazer o desenvolvimento da proposta dentro da perspectiva das relações funcionais, aqui incluindo a modelagem matemática;

- a segunda escolha toma como princípios aqueles que caracterizam a Educação Matemática Realista, o que significa propor situações-problema que provoquem, de forma natural e contextualizada, a construção de relações funcionais e modelos matemáticos.

A proposta inclui o uso do aplicativo "Máquinas Algébricas". Este aplicativo foi desenvolvido pelo Instituto Freudenthal, da Universidade de Utretch, na Holanda, dentro de um projeto chamado WisWeb[3]. Uma das metas deste projeto é disponibilizar, na Internet,

---

[2] www.inep.gov.br/basica/saeb/default.asp

[3] http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/

aplicativos de Matemática (applets que se caracterizam como objetos de aprendizagem[4]), desenvolvidos pelo próprio Instituto. Entre os aplicativos disponíveis em inglês, um deles, o "Algebra Trees", despertou nosso interesse por sua estrutura e funcionalidade, e através de uma parceria com o Instituto Freudenthal, o aplicativo foi traduzido para o Português pelo autor deste trabalho e disponibilizado na Internet [5].

O processo de construção da proposta e do resultante produto didático foi desenvolvido dentro dos moldes da Engenharia Didática. Esta é uma metodologia de pesquisa não apenas teórica, mas voltada para as experiências em sala de aula. Iniciamos o capítulo 4 com a organização da Engenharia Didática e, a partir desta organização apresentamos o processo de criação, experimentação e análise da proposta pedagógica. Construímos e testamos uma seqüência de atividades de forma a provocar, nos alunos de 6ª série, a construção de relações funcionais, através de situações-problema a serem exploradas no aplicativo "Máquinas Algébricas" e através de situação de modelagem matemática que inicia com a coleta de dados.

É com uma avaliação de nossa proposta, feita a partir dos resultados observados no desempenho e envolvimento dos alunos durante os momentos de experimentação, que finalizamos nossa dissertação de mestrado, no capítulo 5.

---

[4] Objeto de aprendizagem – software que permite a interação do aluno para o aprendizado de um conteúdo específico.

[5] O objeto de aprendizagem "Máquinas Algébricas" está disponível no site EDUMATEC em http://www.edumatec.mat.ufrgs.br no link Atividades. Outro objeto de aprendizagem, o "Balança Algébrica", que também foi traduzido para o português pelo autor deste trabalho, mas não chegou a ser usado na proposta didática que foi colocada sob experimentação, também está disponível no site EDUMATEC.

2 A ÁLGEBRA NA ESCOLA

Neste capítulo analisaremos diferentes aspectos relativos ao ensino e à aprendizagem de álgebra na escola, visando subsidiar a concepção e implementação da situação didática que trata da introdução ao pensamento algébrico na sexta série do Ensino Fundamental, a ser detalhada no capítulo 4.

Na seção 2.1 registraremos as diferentes concepções de álgebra apresentadas nos livros didáticos e em artigos voltados para o ensino e aprendizagem da álgebra escolar. Na seção 2.2 observaremos o tratamento dado aos conteúdos algébricos em livros didáticos de 5ª e 6ª série, aprovados pelo MEC. Aspectos relativos ao processo de aprendizagem – a necessária transição da aritmética para a álgebra, bem como os freqüentes erros cometidos pelos alunos – serão tratados na seção 2.3. Finalizaremos o capítulo com a seção 2.4, onde apresentaremos o desempenho dos alunos em exames de avaliação do SAEB[6].

2.1 As interpretações circulantes

Assim como existem diferentes concepções sobre o que é a Matemática, é natural que também existam diferentes concepções do que seja álgebra (Filloy & Sutherland, 1996, pág. 139). Se buscássemos o significado de álgebra no meio acadêmico, a resposta passaria pelas estruturas de anéis, corpos, ideais, entre outras. Neste trabalho vamos nos concentrar nas concepções relativas à álgebra a ser ensinada no Ensino Fundamental. Para Filloy e Sutherland (1996), qualquer pessoa envolvida no desenvolvimento de um currículo de álgebra traz consigo uma concepção consciente ou inconsciente do que seja álgebra, e isto se reflete no tipo de currículo que produz, o que por sua vez se reflete nas diferentes práticas em sala de aula. Os professores também têm suas concepções, muitas das vezes, influenciadas pela apresentação dada ao assunto no livro didático.

No meio escolar, uma resposta para a pergunta "o que é álgebra?" frequentemente resume-se em dizer que "*álgebra é a parte da Matemática que trata do uso de letras*". Essa é, com certeza, uma interpretação um tanto simplista. Em uma busca rápida de informação, encontramos outras concepções: a enciclopédia virtual Wikipedia define álgebra como sendo "*o ramo da Matemática que estuda as generalizações dos conceitos e operações de aritmética";* no dicionário Aurélio, álgebra é "*a parte da matemática que estuda as leis e processos formais de operações com entidades abstratas"*.

[6] O SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica – foi desenvolvido pelo INEP/MEC visando avaliar o ensino no Brasil, através de provas realizadas em diferentes escolas, de diferentes redes e regiões, com alunos de 4ª e 8ª série do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio. Material disponível em http://www.inep.gov.br/basica/saeb/default.asp.

Já em alguns dicionários, anexos de livros didáticos, encontramos que álgebra é *"a parte da Matemática que estuda equações e cálculos com variáveis e incógnitas, que são representadas por letras"*, ou ainda "é a *parte da Matemática que estuda equações e cálculos envolvendo letras que representam números quaisquer"*.

Para Lee (1996, pág. 87) ajudaria muito pensar em álgebra como sendo "*... uma mini cultura dentro da cultura da matemática. Assim, seria possível compreender álgebra como um conjunto de atividades, álgebra como uma linguagem".* Charbonneau (1996, pág. 34) fala que a álgebra "*não é somente uma extensão do domínio numérico*", "*ou somente uma questão de simbolismo*" (apesar de o simbolismo ser central na álgebra, ele não compreende toda a álgebra), mas que a álgebra seria "*um caminho para manipular relações*". Wheeler (1996, pág. 319) chama a atenção para a dificuldade de definir álgebra: "*quando alguém pensa que se apossou de sua essência, outro percebe novos aspectos que também precisam ser inseridos nesta definição*". Ele também afirma que "*álgebra é um sistema simbólico, mas não apenas um sistema simbólico. Álgebra é cálculo, mas também é mais do que isso. Álgebra é um sistema de representação, mas não apenas isso*".

Usiskin (1997), também ressaltando a variedade de concepções associadas à álgebra, comenta que a álgebra escolar é geralmente entendida como o ensino do uso de letras (incógnitas, variáveis ou parâmetros) e de operações com letras, isto de forma multifacetada. E exemplifica com cinco diferentes situações que tratam sempre da operação de multiplicação:

1. $A = b \, . \, h$
2. $40 = 5 \, x$
3. $\sin x = \cos x \, . \, \tan x$
4. $1 = n \, . \, (1/n)$
5. $y = k \, . \, x$

Apesar de terem a mesma forma "produto", as igualdades acima apresentam diferentes significados quanto ao uso de letras: (1) é a fórmula que calcula a área de um retângulo, conhecendo-se as dimensões de seus lados; (2) indica uma equação a ser resolvida, sendo **x** uma incógnita de valor numérico a ser determinado; (3) é uma igualdade trigonométrica que é válida para qualquer valor de **x**, e neste caso **x** pode ser pensado como o argumento de função; (4) diferentemente das outras situações, esta igualdade generaliza uma propriedade aritmética onde "n" identifica "uma instância" da propriedade; (5) indica uma relação funcional entre duas variáveis, envolvendo um parâmetro constante k, e aqui temos o sentido mais evidente de "variabilidade". Com estas cinco situações Usiskin procura ilustrar, em parte, a complexidade que se apresenta para os alunos no processo de aprendizagem da álgebra, dados os diferentes significados associados à notação algébrica.

Usiskin (1997) também chama a atenção para as diferentes interpretações e concepções associadas à álgebra: a álgebra como aritmética generalizada; a álgebra como o estudo de procedimentos para a resolução de certos tipos de problemas; álgebra como o estudo de relações entre quantidades; e finalmente a álgebra como o estudo de estruturas e suas propriedades (esta a álgebra que é objeto de estudo na universidade). Algumas destas concepções serão discutidas com mais detalhe no capítulo 3.

As considerações feitas nesta seção nos fazem entender que as diferentes interpretações sobre os propósitos do ensino da álgebra escolar fazem com que o aprendizado da álgebra se apresente naturalmente complexo para os alunos iniciantes e portanto exigindo um longo processo de aculturação.

2.2 A introdução à álgebra nos livros didáticos de 5as e 6as séries

Nesta seção temos como propósito trazer uma análise de como é feita a apresentação de conteúdos de álgebra nos livros didáticos de 5as e 6as séries do Ensino Fundamental. Para isto foram escolhidas algumas coleções aprovadas pelo MEC.

Segundo o MEC[7]:

> *Tradicionalmente, o estudo da álgebra no Ensino Fundamental tem-se iniciado no final da 6ª série, valorizando-se o cálculo algébrico e seu uso para resolver problemas de valores desconhecidos. No entanto, as pesquisas em Educação Matemática têm apontado a importância de se introduzir o uso da linguagem algébrica mais cedo – não com o tratamento de equações, acompanhado de suas classificações e fatorações – mas com a preparação do aluno para entender a linguagem simbólica que expresse abstrações e generalizações. Infelizmente, muitas coleções retardam a introdução à álgebra e omitem qualquer menção ao tema na 5ª série. Isso prejudica a construção gradual do pensamento algébrico.*

[7] http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Avalmat/pnldmat07.pdf

Este texto traz a importância de uma introdução mais cedo à linguagem algébrica. Como os livros didáticos têm feito essa introdução? Nesta seção nos concentramos em responder esta pergunta.

Sob dois enfoques diferentes analisamos nove coleções de 5ª e 6ª série. Inicialmente foram analisados, nos capítulos que não tratam especificamente de álgebra, os diferentes usos da representação simbólica. Depois analisamos os capítulos que tratam, especificamente, da iniciação ao estudo da álgebra. Especial atenção foi dada à análise dos problemas que são tomados como motivadores para a introdução ao aprendizado da álgebra, esta uma abordagem bastante comum nos livros didáticos.

2.2.1 O uso da representação simbólica

No que segue organizamos o uso de representações simbólicas em diferentes categorias: letras como algarismos; letras como incógnitas; letras nas operações; letras nas propriedades de operações; letras nas fórmulas.

- Letras representando algarismos no sistema decimal

Alguns livros trazem símbolos representando algarismos em situações que tratam de operações com números em representação decimal (figura 1). Nestes problemas o aluno deve encontrar o valor de cada símbolo. Em outros livros, são utilizadas letras para representar os algarismos a serem determinados (figura 2). Já na figura 3, temos a situação em que é utilizado apenas o símbolo de um quadrado, sendo que este pode representar diferentes algarismos.

```
  4 2 3
  1 ● 5
+ ■ 7 ▲
-------
1 2 8 7
```

Figura 1
Cada figura representa um algarismo diferente.

```
  POSSO        A A A
 +POSSO        B B B
 ------      + C C C
  MESMO      -------
             A C C B
```

Figura 2
Cada letra representa um algarismo diferente.

```
  ■ ■ 0 3 ■
-     ■ 6 7
-----------
    9 0 ■ 4
```

Figura 3
Cada quadrado representa um algarismo (podem assumir diferentes valores).

Nestes problemas o aluno deve encontrar o algarismo que deve ser colocado no lugar de cada símbolo (desenho ou letra) de modo que a operação esteja correta. Por exemplo, na figura 1 o aluno pode começar pela casa das unidades, somando 3 e 5, que resulta em 8, e então se questionando sobre que número deve ser somado a 8 para que o resultado termine em 7. O símbolo tem um significado semelhante ao de uma incógnita.

O uso de letras para representar algarismos de números na forma decimal pode explicar, em parte, os significados confusos que os alunos passam a atribuir, por exemplo, ao símbolo algébrico 7A: ora interpretam A como as unidades de um número tal que $70 \leq 7A < 80$; ora interpretam 7A como a multiplicação de 7 pela incógnita ou variável dada por A. Desta forma, a utilização de letras nesse tipo de problema pode não ser o mais adequado. Na seção 2.3, que trata das dificuldades no aprendizado da álgebra, voltaremos a este assunto.

- Letras representando incógnita

As letras aparecem representando números que são incógnitas, em várias situações, como por exemplo:

$$\frac{4}{5} = \frac{24}{A} \qquad \text{Se } (x+y)=30,\ 7.(x+y)=?$$

A primeira situação aparece muito no estudo de frações equivalentes e exemplos como o segundo são comuns em operações com números naturais. São situações que podem ser resolvidas pelos alunos sem exigir maiores habilidades nas manipulações algébricas; de fato, a resolução depende de conhecimento de operações no conjunto dos números naturais. Outra situação presente do uso de letras é no estudo de ângulos, como mostra a figura 4.

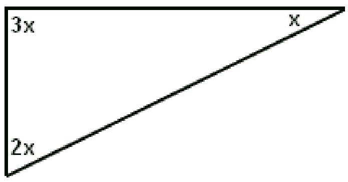


Figura 4 - letras e expressões representando ângulos

- Letras para definir operações com frações

No caso de operações com frações, como a adição, alguns livros simplesmente utilizam a "fórmula da soma":

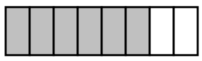
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{bd}$$

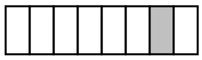
Nesse caso, o uso da álgebra é feita de uma forma inapropriada e nada produtiva. O aluno simplesmente aplica uma fórmula, sem compreender sua estrutura, seu funcionamento. Assim, apenas troca os valores, mecanicamente, calcula, e encontra o resultado, sem compreender a razão pela qual a fórmula funciona.

Mas a maioria dos livros não utiliza a fórmula. Iniciam com exemplos numéricos onde ilustram a necessidade de ter-se as frações sob o mesmo denominador para então somá-las, e nisso trabalham com a idéia de ”mínimo múltiplo comum”. Muito dos livros também usam desenhos para explicar o significado de transformar as frações em outras equivalentes.

Um exemplo: se Ivo pintou $\frac{3}{4}$ do muro, e Léo pintou $\frac{1}{8}$, que parte do muro eles já pintaram no total?

$\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$

Ivo pintou:  que é equivalente a: 

Léo pintou: 

$\frac{1}{8}$

Para somar $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$ primeiro reescrevemos como $\frac{6}{8}+\frac{1}{8}$, encontrando $\frac{7}{8}$.

Com este tipo de apresentação o aluno concretiza o sentido da operação de “somar frações”, em uma abordagem muito diferente daquela que simplesmente traz uma fórmula desprovida de sentido para o aluno.

- Letras para representar a operação de potenciação

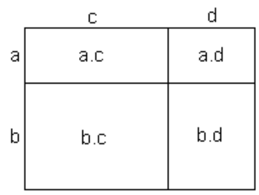
A maioria dos livros introduz a operação de potenciação, na 5ª série, apenas através de exemplos numéricos, não chegando a escrever de forma generalizada as propriedades da operação; já na 6ª série é feita a generalização com o uso de letras. Um dos livros mostra um quadrado grande composto de vários quadrados pequenos, sendo 7 em cada lado, podendo então ser efetuada a multiplicação (7x7) para encontrar o total de quadrados (49), desta forma auxiliando até na compreensão do termo “quadrado” para representar a segunda potência.

Vemos no estudo da operação de potenciação um caminho bastante natural para o raciocínio generalizador que leva ao uso da representação simbólica. Mas sempre a ser preparado através da explicação, através da fundamentação do conceito.

- Letras representando propriedades

Alguns livros trazem a lista das propriedades das operações de soma e produto de números (distributiva, associativa, comutativa,...) utilizando apenas exemplos numéricos, sem chegar a representar a propriedade com letras.

Outros fazem uso de letras e trazem representações geométricas para representar, por exemplo, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma. Através de um retângulo com lados dados medindo (a+b) e (c+d) e com a expressão de sua área de dois modos diferentes explicam a propriedade, conforme indicado na figura 5.



$$(a+b).(c+d) = a.c + a.d + b.c + b.d$$

Figura 5 – representação geométrica da propriedade distributiva

Outro livro apresenta a propriedade comutativa da soma da seguinte forma:

"Mariana e Cléber estão jogando dados. Vence quem conseguir a maior soma de pontos. Cada jogador lançou o dado duas vezes. Veja o que conseguiram na primeira jogada".

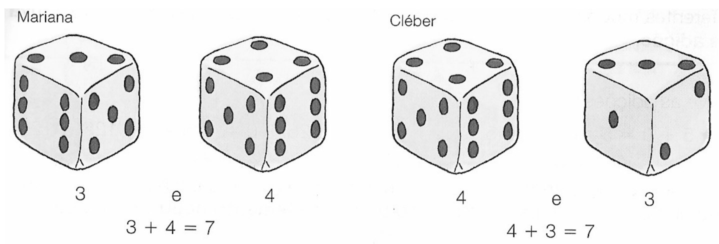


Figura 6 – soma de dados ilustrando a propriedade comutativa

Como 3+4=4+3, Mariana e Cléber estão empatados em 7 pontos.

Note que, trocando (ou comutando) a posição das parcelas 3 e 4, a soma obtida é sempre 7.

Quando a ordem das parcelas não altera a soma, temos a propriedade comutativa da adição.

Para a introdução das propriedades das operações nos parece mais adequado que se faça na 5ª série o uso de situações numéricas e gráficas, visto que as particularidades não comprometem o entendimento das propriedades. A introdução da idéia generalizadora, frente à maturidade dos alunos, deve ser reservada para a 6ª séries, mas sem exagerado formalismo.

- Letras em fórmulas

É comum encontrarmos o uso de letras em fórmulas, especialmente para expressar as áreas de polígonos. Alguns livros começam explicando o sentido de área, apresentando a unidade padrão, o m^2, usando um retângulo com medidas de lados dadas por números inteiros particulares para que se chegue à conclusão, através da decomposição do retângulo em quadrados, de que a sua área pode ser determinada através da multiplicação das medidas dos lados. Depois deste primeiro cálculo numérico, ilustrado com uma figura, é que é escrita a fórmula $A = b \cdot h$.

Em um livro encontramos primeiro a apresentação da fórmula para depois ser ela explicada via um exemplo numérico. Mas em todos os livros analisados, de um modo ou outro, encontramos uma explicação para o procedimento de cálculo da área do retângulo.

Particularmente, nos parece mais adequado que tal estudo inicie com a compreensão do sentido de área, de unidade de medida de área, para só então serem introduzidas as fórmulas, pois é este processo de compreensão que leva naturalmente ao raciocínio generalizador a ser expresso em uma fórmula.

Em relação aos poliedros, alguns livros usam o recurso de usar uma tabela para completar com os dados relativos a vértices, faces e arestas, para então, de forma indutiva, chegar à generalização que leva ao teorema de Euler dado pela relação $V-F+A=2$.

Na nossa análise detectamos, nos autores dos livros de 5ª e 6ª séries, diferentes níveis de cuidado em relação ao uso simbólico das letras: em alguns livros percebe-se uma clara preocupação na direção de levar o aluno, de forma bastante natural, ao raciocínio generalizador que vai então fazer uso, em maior ou menor grau, de representação simbólica; já em outros livros têm-se uma falta de cuidados quanto à introdução ao uso de simbolismo, o que pode em grande parte explicar as dificuldades matemáticas que vão sendo acumuladas pelos alunos ao longo de sua vida escolar.

2.2.2 A iniciação ao estudo da álgebra

Na iniciação ao estudo da álgebra, nos livros de 6ª série das nove coleções selecionadas para análise, nos capítulos referidos como *"Usando letras em Matemática", "Equações e sistemas do 1º grau", "Equações", "Quantidades desconhecidas e as equações", "Escrevendo simbolicamente"*, diferentes abordagens são apresentadas.

No que segue, muitas vezes faremos referências a dois modos de resolver um problema: através de "operações inversas" e através do "método da balança", nomenclaturas estas presentes nos livros escolares.

Resolver um problema por "operações inversas" significa aplicar as operações inversas àquelas que são dadas no problema, e em ordem contrária aquela em que aparecem no enunciado. Um exemplo: no problema "qual o número que, dobrado e somado a 7, resulta em 19?", a resolução inicia com a operação (inversa da soma) que subtrai 7 de 19, e que ao resultado aplica a operação (inversa da multiplicação) que divide 12 por 2, chegando ao número 6 como solução do problema.

Resolver um problema pelo "método da balança" exige, inicialmente, escrever a equação correspondente ao problema. Tendo-se a equação, o "método da balança" determina o valor da incógnita "x" aplicando a mesma operação em ambos os lados da igualdade. Por exemplo, a equação $2 \cdot x + 7 = 19$ do problema acima, se resolve com a subtração de 7 e depois com a divisão por 2, em ambos os lados da igualdade.

A princípio, parece que os dois métodos não se diferenciam. Isto pode ser verdade para certos tipos de equações, o caso da equação $2. x + 7 = 19$ resolvida acima. Mas tomemos, por exemplo, a equação $2.x + 5 = 5.x - 7$. Esta equação pode ser resolvida pelo "método da balança", mas não pode ser resolvida pelo método das "operações inversas", pois nela temos uma igualdade entre duas expressões, diferentemente de uma igualdade entre uma expressão e um número.

Na análise a seguir, veremos que muitos dos problemas motivadores para a introdução à álgebra, usados nos livros escolares, podem ser resolvidos através de "operações inversas", sendo este tipo de resolução de natureza essencialmente aritmética.

- **Coleção A**

O capítulo começa com o seguinte problema: "*Havia 58 litros de água em um reservatório quando foi aberta uma torneira que despeja 25 litros de água por minuto. Após quantos minutos o reservatório conterá 433 litros de água?*"

Indicando o número de minutos por x, é feita a formulação algébrica do problema através da equação 58 + 25x = 433 e então fala-se sobre a necessidade de determinar o valor de x. A equação não é resolvida. A seguir, o livro trabalha com expressões algébricas, sendo expressas a partir de situações escritas em língua corrente, e na seqüência trabalha com o cálculo do valor numérico de expressões algébricas, dado o valor das variáveis. Na seqüência, volta a trabalhar na escrita de equações (como o problema introdutório), partindo de alguns problemas propostos, e nas suas resoluções através de operações inversas (qual o número cujo triplo menos 7 é igual a 9?).

São então introduzidas as noções de incógnitas e raízes de uma equação. Algumas equações simples, como $x^2=49$ ou $2t+3=15$, são propostas para que os alunos resolvam mentalmente. O livro trabalha com a resolução de equações pelas operações inversas e pelo método da balança.

O livro traz explicações específicas para resolução de equações com parênteses, com frações, e traz uma seção de exercícios, com várias atividades com situações problema para serem transcritas como equações e resolvidas (por exemplo, a de um terreno retangular que tem 18m a menos de largura do que de comprimento. O perímetro do terreno é de 84m. Qual é o comprimento do terreno? E a largura?)

- **Coleção B**

A introdução à álgebra começa pelo estudo de regularidades que se apresentam em certas seqüências de figuras, como nas figuras 7 e 8. Estes exemplos provocam o aluno para formar uma expressão algébrica que informe sobre a "lei de formação" da seqüência de figuras - no caso, os números quadrados perfeitos n^2 e os números triangulares $(n+1).n/2$.

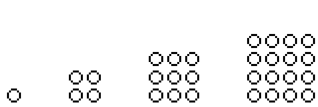


Figura 7 – quadrados perfeitos

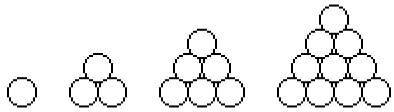


Figura 8 – números triangulares

O livro trabalha com a idéia da generalização, trazendo vários exercícios para que o aluno apresente as "leis de formação". O autor avança com a necessidade do uso de símbolos - as letras - para representar números desconhecidos, trabalhando com a escrita de expressões algébricas correspondentes a enunciados tais como "o dobro de um número aumentado em cinco unidades". Em seguida trabalha com igualdades e traz a noção de que uma igualdade não se altera quando se opera, da mesma forma, nos seus dois lados. Na resolução dos problemas trabalha com os dois métodos: operações inversas (que o livro trata como “relação entre as operações”) e pelo método da balança (referido como princípio aditivo ou multiplicativo de uma igualdade).

- **Coleção C**

O livro desta coleção faz pouco uso de letra antes da introdução à álgebra. No capítulo específico de introdução começa abordando formas de comunicação, entre elas a escrita. Trata da escrita matemática comparando-a com a linguagem comum - por exemplo, 3+5=8 corresponde a “três adicionado a cinco é igual a oito”. Faz a classificação de sentenças algébricas em abertas ou fechadas; traz exercícios resolvidos onde conceitua monômios, binômios, coeficiente, parte literal. Trabalha então com a transcrição de enunciados em língua corrente para linguagem algébrica - *se “uma calça custa 10 reais a mais que uma camisa, qual a expressão algébrica que representa o preço de uma calça e uma camisa?”,* a ser posta na forma 2x + 10. Trabalha com o cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica. Também trabalha com a idéia de generalização, através de alguns exemplos como este registrado na figura 9.

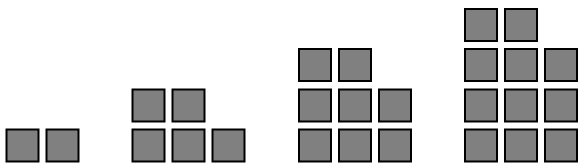


Figura 9 – seqüência de figuras – exemplo de generalização

Na resolução de equações começa resolvendo o problema *“pensei em um número, adicionei 4, dupliquei o resultado e, então, subtraí 7. Obtive 13 como resultado. Em que número pensei?”* Faz isso de duas formas: operações inversas e usando o equilíbrio da balança. Traz a resolução de mais algumas situações similares e propõem uma lista de problemas bem diversificados.

Nesta coleção é bastante forte o enfoque dado à álgebra como uma linguagem, o que se evidencia na apresentação de nomenclaturas, desde o primeiro momento (algarismos, sinais de operações, sinais de comparação, sinais de agrupamento, sentenças algébricas abertas ou fechadas, monômios, binômios, coeficiente, parte literal). Lembra uma “gramática da Matemática”.

- **Coleção D**

A introdução à álgebra inicia com uma breve apresentação histórica, falando de Diofanto e Viéte [8]. Segue com a apresentação de um problema: "Uma fábrica produz *20 calças por hora. A quantidade de calças confeccionadas é registrada por um encarregado. De que modo ele pode fazer esse registro?"* Na seqüência traz uma tabela preenchida pelo encarregado, com o tempo em uma coluna e a quantidade de calças em outra. Comenta-se que 20 vezes o número de horas é igual à quantidade de calças. Usando letras, t poderia ser o número de horas e a quantidade de calças seria 20.t. Aparentemente o livro traz uma abordagem funcional, mas este é apenas o exemplo introdutório. O livro passa para a escrita de expressões algébricas e trabalha com a simplificação de expressões. Antes de iniciar o estudo de equações, explora o equilíbrio de balança com pesos conhecidos, ilustrando os princípios aditivos e multiplicativos da igualdade entre expressões numéricas. Depois disto inicia o estudo de resolução de equações através do método da balança.

- **Coleção E**

A introdução à álgebra inicia com exemplos de igualdades onde é feito uso de balanças e do equilíbrio entre os pratos. São comparados os pesos dos pratos que colocam a balança em equilíbrio e são ilustradas as propriedades que deixam os pratos em equilíbrio (como colocar ou tirar pesos iguais de ambos os lados). Nas atividades seguintes o livro apresenta várias balanças equilibradas, mas com algum peso desconhecido, onde solicita ao aluno que indique o valor do peso desconhecido. Ao lado do desenho da balança a situação é representada na forma de equação e parcialmente resolvida, conforme ilustrado na figura 10.

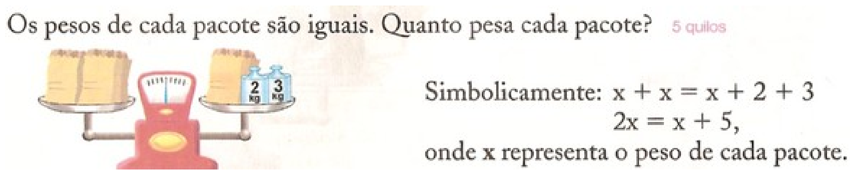


Figura 10 – Exemplos com balanças para ilustrar equação

Chama a atenção que o livro praticamente não trabalha com expressões algébricas, mas trabalha diretamente com equações. As transcrições de uma situação em linguagem matemática se restringem essencialmente ao caso de equações, com exceção de um único exercício (expresse simbolicamente, usando letras: "o antecessor do triplo de um

[8] Fala brevemente que no século III da nossa era, viveu Diofanto de Alexandria e que com ele se inicia a fase da Álgebra em que se empregam símbolos e abreviações de palavras comuns. Também fala de Viéte, matemático francês do século XVI, como sendo o primeiro a usar letras para representar incógnitas e constantes nas equações.

número”). Para a resolução de equações, trabalha com o princípio da igualdade (método da balança), e traz exercícios com equações em que não busca encontrar a raiz, apenas treinar a operação nos dois lados da igualdade (por exemplo: multiplique por 2 os dois membros da equação $7y - 3 = 18$). Traz outros exercícios apenas para transcrever uma situação em uma equação, sem resolvê-la.

Em uma seção de exercícios, traz tabelas (incompletas) que relacionam valores de x e y, e dá uma determinada lei para que o aluno complete a tabela de acordo com a lei, como mostra o exemplo abaixo:

Esta é a “máquina do dobro do sucessor”. Complete-a com os valores correspondentes à entrada e saída.

Entrada (x)	12	13	14	15		17	18	19		21
Saída (y)				32	34				42	

Tabela 1 – máquina do dobro do sucessor

Depois trabalha com seqüências numéricas, ora pedindo para que o aluno descubra um determinado termo, ora para que o aluno escreva uma lei de formação da seqüência (por exemplo, com a seqüência [1,6,11,16,21,26,...] espera pela lei $y = 5x + 1$.

Chegando à resolução de equações, enfatiza o método da balança.

- **Coleção F**

O livro traz uma seção específica sobre equações, mas antes disso já encontramos o uso da linguagem algébrica em diferentes atividades nas suas outras seções. A seção sobre equações inicia com as expressões algébricas: é proposta uma atividade onde um aluno recebe uma ficha com uma determinada “regra para operar um número” (exemplos: “o quadrado do número”, “o dobro do número menos quatro”). Os colegas apresentam diferentes números que são submetidos à regra que está na ficha e recebem como informação somente o resultado. A partir destes resultados devem descobrir e representar, de alguma forma, a regra usada pelo colega. Após esta primeira exploração de representação de uma idéia generalizadora, o livro segue com atividades que solicitam a observação de seqüências de figuras com o objetivo de generalizar o padrão de formação das figuras.

Na introdução a equações, o problema apresentado é: “*Um esquilo encontrou 50 nozes num período de 5 dias. Em cada dia, o esquilo encontrou 3 nozes a mais que no dia anterior. Quantas nozes ele encontrou em cada dia?*” Para resolver o problema, o livro trabalha com a idéia de generalização, representando a quantidade de nozes encontradas por dia: "x" no primeiro dia; "x + 3" no segundo dia; "x+3+3" no terceiro dia; até escrever a expressão "x + (x+3) + (x+3+3) + (x+3+3+3) + (x+3+3+3+3)" para o quinto dia. Feito isto é apresentada a equação "5.x + 30 = 50", necessária para resolver o problema, e é colocada a pergunta: *"qual o número que, multiplicado por 5 e somado a 30 resulta em 50".* Segue-se a isto o estudo de equações com o método da balança.

- **Coleção G**

O capítulo introdutório de álgebra traz um problema na forma de história em quadrinhos, tratando da reprodução de casais de coelhos. Na história é explicado como funciona o processo de reprodução de cada casal de coelhos. A partir disto, pede-se que os alunos montem uma tabela que relacione o número de casais de coelhos com o número de meses decorridos. Esta tabela seria:

Número de meses	-	1	2	3	4
Número de casais	1	2	3	5	8

Tabela 2 – casais de coelhos e a seqüência de Fibonacci

Este processo de proliferação dos coelhos é dado pela conhecida seqüência de Fibonacci [9]. Mas o livro não chega a fazer a generalização sobre a situação proposta.

A seção segue com as expressões algébricas, trazendo como primeiro exemplo a fórmula da área total de um cubo com lado medindo x : $6.x^2$. Segue trabalhando com o valor numérico de expressões algébricas, passa por monômios, polinômios e na 5ª página apresenta equações, conceituando sentenças abertas e fechadas. Explica como expressar dados de um problema por meio de uma equação; segue com os conceitos de raiz de uma equação, conjuntos universo e solução. Para a resolução de equações não utiliza o recurso figurativo da balança. Faz a opção, muito formal, de trabalhar com o princípio de equivalência das igualdades, escritos na forma dada abaixo:

$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ (princípio aditivo)

$a = b \Leftrightarrow a.c = b.c$ (princípio multiplicativo, com $c \neq 0$)

[9] A seqüência de Fibonacci é aquela que tem "1"e "2"como os dois primeiros termos, e a partir disto, cada termo é a soma dos seus dois antecessores. Assim, temos para a seqüência: 1,2,3,5,8,11, ...

- **Coleção H**

A iniciação à álgebra parte da observação de uma balança, conforme figura 11. O equilíbrio dos pratos sugere que é possível determinar o peso dos queijos.

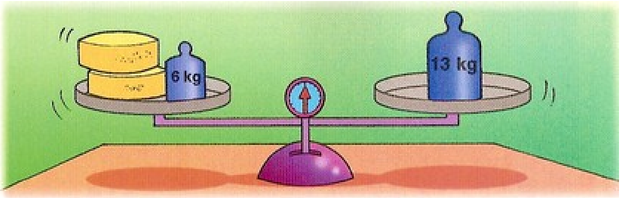


Figura 11 – balança com elementos de peso desconhecido representando equações

A resolução do problema é feita inicialmente através das operações inversas: desconta 6 de 13 e divide o resultado por 2. Depois disto é escrita a equação correspondente "$6 + 2 . x = 13$ " e para resolvê-la são efetuadas as mesmas etapas das operações inversas, mas agora mostrando que devem ser efetuadas as mesmas operação nos dois lados da igualdade, estabelecendo desta forma uma correspondência entre a resolução via operações inversas e aquela que opera dos dois lados da igualdade em analogia com o equilíbrio dos pratos da balança. Após esta discussão inicial, seguem-se exercícios para resolver diferentes tipos de equações. Em seqüência trabalha-se com equações com parênteses. Segue então com a resolução pelo método da balança. Trabalha também com equações em forma de proporções, com a "multiplicação em cruz" (o produto dos extremos é igual ao produto dos meios). Aborda então a resolução de problemas via resolução de equações.

- **Coleção I**

A introdução algébrica ocorre em um capítulo intitulado "Usando letras em matemática", onde uma história em quadrinhos mostra, em diferentes línguas, diálogos em aulas de matemática que estão tratando da fórmula da área do retângulo. O objetivo é ilustrar que a linguagem falada é diferente, mas que a linguagem matemática é universal – é a mesma em diferentes países. É feita uma apresentação sobre a utilidade do uso de fórmulas na matemática, dando como exemplo o uso de planilhas eletrônicas. O enfoque mais presente nos exercícios é o de generalização (exemplos: seqüência de quadrados perfeitos, fórmula do ângulo central de um polígono regular). O livro passa então a abordar o processo de simplificação de expressões algébricas. No fim do capítulo é proposta uma atividade para ser trabalhada no computador, usando uma planilha eletrônica, com o objetivo de fazer a criação de fórmulas, que nada mais são do que expressões algébricas.

No capítulo de equações há uma ilustração onde um professor propõe um problema para uma aluna: *"Pensei num número; multipliquei por 7; somei 15; deu 71. Adivinhe o número".* Na ilustração a aluna resolve o problema por operações inversas – desconta 15 de 71 e divide por 7 - e é elogiada pelo professor. Depois o professor mostra outro modo de resolver o problema: escreve a equação $7 \cdot x + 15 = 71$ e resolve-a efetuando as mesmas operações que a aluna, mas agora nos dois lados da igualdade. A aluna questiona a utilidade deste método, pois não difere do raciocínio por ela utilizado. O professor responde que ela verá que o uso de letras é vantajoso em muitos casos. O livro então propõe, inicialmente, que se resolvam equações realizando operações dos dois lados da igualdade, para depois então fazer diretamente as operações inversas. Segue com a apresentação de problemas a serem transcritos para a linguagem algébrica, na forma de equações, as quais devem ser resolvidas.

A análise feita nos mostra que, no geral, quase todos os livros seguem um padrão nos capítulos que tratam, de modo específico, da introdução á álgebra: trabalham com expressões algébricas, monômios, valor numérico, equações.

Enquanto alguns livros enfocam a generalização, outros enfatizam a escrita de expressões algébricas. Alguns começam diretamente com o estudo de equações. O uso da letra em geral aparece de uma forma imediata: representa um valor desconhecido. A letra está, no geral, associada a idéia de incógnita, de valor a ser descoberto, sendo pouco o uso da letra como variável. Alguns livros já trazem o uso de letras desde o começo da 5ª série. Em outros, o uso de letras aparece gradativamente. Em alguns conteúdos há apenas exemplos numéricos na 5ª série, com a generalização aparecendo de forma mais intensa na 6ª série.

2.2.3 Sobre os problemas motivadores

Embora muitos livros façam o uso de problemas para motivar a introdução à linguagem da álgebra (este um viés bastante presente nas práticas didáticas escolares), é interessante observar que o caminho de resolução que os alunos escolhem, no geral, não faz uso da pretendida linguagem algébrica. Os alunos não expressam o problema na forma de uma equação, conforme esperado/desejado pelo professor, mas resolvem por métodos essencialmente aritméticos. A título de ilustração trazemos alguns exemplos acompanhados de possíveis soluções aritméticas, estas inspiradas em situações vivenciadas em nossa prática profissional.

<u>Problema 1</u>: Você comprou um livro por R$20,00. Deu R$8,00 de entrada e o saldo em três prestações iguais. Qual o valor de cada prestação sabendo que não houve acréscimos?

<u>Comentário:</u> É esperado que o aluno escreva a equação 3.x + 8 = 20 e resolva–a. No entanto, os alunos utilizam de imediato as "operações inversas": do valor de 20 reais, subtraem os 8 reais do pagamento inicial e os 12 reais restantes dividem por 3, resultando no valor de 4 reais de prestação.

<u>Problema 2</u>: Encontre o número cujo quíntuplo, somado com 7, resulta em 102"

<u>Comentário:</u> É esperado que o aluno, fazendo uso das operações diretas, escreva a equação 5.x + 7 = 102. No entanto, como antes, o aluno usa de imediato as "operações inversas": parte do valor 102, subtrai 7 e divide o valor obtido, 95, por 5 chegando ao resultado final de 19.

<u>Problema 3:</u> Nas pilhas a seguir (figura 12), o número de cada caixa é a soma dos dois números que vêm logo abaixo dele. Por exemplo, o número 28, do topo da pirâmide, é o resultado da soma dos dois números logo abaixo deles – um é o 15, o outro é desconhecido, mas pode ser encontrado. Determine os números da pirâmide, para isto representando por "x" o número do retângulo indicado pela seta.

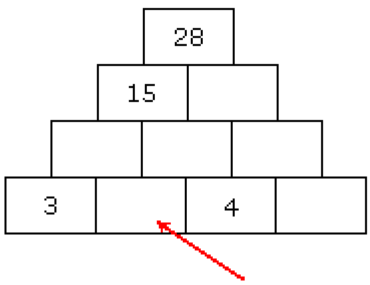


Figura 12 – pirâmide da adição

<u>Comentário:</u> Se o aluno seguir a sugestão de usar a letra "x" para representar o valor no retângulo entre aqueles que contem os números 3 e 4, poderá representar os números nos retângulos abaixo do número 15 como "3 + x" e "x + 4". Feito isto, espera-se que o aluno chegue à equação 3 + x + x + 4 = 15, com solução x= 4, a partir da qual pode completar os

demais valores. Mas na prática, o aluno não escreve a equação e resolve o problema através de sucessivas tentativas, até ter sucesso com o número 4.

Problema 4: Um sitiante tem alguns coelhos e algumas galinhas. Quando coloca um dos coelhos em uma cesta, verifica que o peso é de 4 kg. Em seguida, ele tira o coelho da cesta, coloca nela uma galinha e verifica que o peso é de 5 kg. Se o coelho e a galinha "pesam", juntos, 3 kg, quanto "pesa" a cesta vazia?

Comentário: Espera-se que o aluno escreva as equações $c + k = 4$, $c + g = 5$ e $g + k = 3$, onde c = peso da cesta, g = peso da galinha e k = peso do coelho. Do enunciado do problema o aluno também deve concluir que a galinha é 1 kg mais pesada que o coelho, ou seja, $g = k + 1$. Disto, segue com as manipulações algébricas:

$$g + k = 3 \Leftrightarrow k + 1 + k = 3 \Leftrightarrow 2.k + 1 = 3 \Leftrightarrow 2.k = 2$$

portanto $k = 1$ e $g = 2$ e então $c + k = 4 \Leftrightarrow c + 1 = 4 \Leftrightarrow c = 3$.

Porém, o aluno considera a diferença de 1kg entre o peso do coelho e da galinha, dado no enunciado de forma quase direta, e sabendo que os dois pesam 3 kg, conclui rapidamente que o coelho pesa 1 kg e a galinha pesa 2kg, e que portanto a cesta "pesa" 3 kg, nisso tudo sem fazer qualquer uso da linguagem das equações.

Problema 5: A soma das idades de Vevê e Alice é 22 anos. Qual é a idade de cada uma, sabendo que Vevê é 6 anos mais velha do que Alice?

Comentário: A transcrição do problema para linguagem algébrica corresponde a equação $a + a + 6 = 22$, onde a = idade de Alice. Os alunos não consideram esta equação e utilizam as "operações inversas": descontam os 6 anos, que Vevê tem a mais, do total de 22, e dividem igualmente o restante. Na prática, um dos erros mais freqüentes ocorre quando o aluno divide 22 por 2, resultando em 11 anos para cada, e acrescenta 6 anos à idade de Vevê, fazendo com que a soma não seja igual a 22, como pede o problema.

Problema 6: Numa balança de pratos temos 12 bananas, que pesam 100 gramas cada uma, e 8 laranjas de pesos iguais, equilibrando com 2 melões, que pesam 2 quilos cada um. Qual o peso, em gramas, de cada laranja?

Comentário: Novamente espera-se que o aluno escreva e resolva a equação correspondente ao problema: $12 . 100 + 8x = 2 . 2000$, onde "x" é o peso de uma laranja.

Neste problema os alunos não trabalham diretamente com as "operações inversas", talvez pelo fato de ter-se cálculos, a serem feitos, em ambos os lados da igualdade. É quando o problema trata de uma seqüência de operações que "dá um certo resultado numérico" (tem-se de um lado da igualdade as operações e do outro lado um valor numérico) que naturalmente os alunos iniciam com o valor numérico e executam as "operações inversas" para chegar ao valor a ser determinado.

Na situação do problema acima, os alunos descontam dos 4 kg o peso das 12 bananas e concluem que as 8 laranjas pesam 2,8 kg, fazendo então a divisão para determinar o peso de cada laranja.

Problemas do tipo acima são bastante usados nos livros didáticos, com pequenas variações de enunciados. Nossos comentários tratam de mostrar o quão difícil se torna para o professor justificar, com estes problemas, a importância da linguagem algébrica, frente à resolução aritmética que é naturalmente apresentada pelos alunos – seja usando o método das "operações inversas", seja usando o método "da tentativa". Para os alunos, a expressão algébrica do problema, na forma de equação, significa apenas uma complicação desnecessária. É assim que reagem ao "método do professor", no qual primeiro deve-se explicitar a equação, para então resolvê-la pelo "método da balança". É fato que no método da balança são raciocínios de natureza algébrica que explicam as operações a serem aplicadas a ambos os lados da igualdade de forma a obter-se o valor da incógnita "x". Mas os problemas propostos não chegam a exigir, para sua resolução, uma transcrição na forma de equação.

E mais, como as etapas da resolução via "operações inversas", usadas pelos alunos, coincidem com aquelas a serem efetuadas para a resolução da equação via "método da balança", é com maior razão que eles não entendem porque devem aprender uma outra forma de resolver os problemas, se já sabem resolver de um modo mais fácil e pleno de sentido. É interessante observar que na nossa análise do livro didático encontramos o caso em que o próprio autor do livro antecipa esta dificuldade ao trazer no texto a situação em que o professor elogia o método das "operações inversas" usado por uma aluna, mas trata de apresentar o método que inicia com a explicitação da equação, que questionado pela aluna, recebe como resposta do professor "*que ela verá que o uso de letras é vantajoso em muitos casos*" [10].

[10] Esta situação está na Coleção I, analisada na pg. 31.

Estes problemas tradicionais também fazem uso, frequentemente, de complicações de enunciado, onde muitas informações devem ser controladas pelo aluno. Com a quantidade de informação a ser controlada tentam provocar a transcrição do problema na linguagem das equações, mas mesmo assim não atingem o seu propósito, pois os alunos, com natural habilidade aritmética, contornam as complicações. Neste sentido servem como exemplos os problemas 4 e 6 de nossa lista.

Fica então a pergunta: se o aluno encontra na aritmética o caminho para resolver os tradicionais problemas apresentados no livro didático, como motivá-lo para o aprendizado da álgebra? No capítulo 3, na seção 3.2.2, que trata do aprendizado da álgebra através da resolução de problemas, trazemos um estudo sobre a estrutura dos problemas que provocam a necessidade da representação algébrica.

- **Sobre a artificialidade dos problemas**

Muitos dos problemas usados para justificar a necessidade da linguagem algébrica apresentam situações que não correspondem ao que se observa no mundo real. Nisso temos em Usiskin(1980) um grande crítico quando fala que os problemas que são trabalhados em aula utilizam objetos reais, mas em situações irreais ou irrelevantes. Exemplo de um problema colocado sob o seu olhar crítico: "*alguém tem 40 moedas, algumas de 10 e outras de 25 centavos, e que no total somam R$5,80. Quantas moedas de 10 centavos tem esta pessoa*?" acompanhado do seu comentário: se sabemos que haviam 40 moedas é porque foram contadas; não seria mais fácil contar quantas são as moedas de cada tipo ao invés de resolver através de uma equação ou por tentativas?

Outro exemplo apresentado pelo mesmo autor: *"João consegue limpar a neve de uma calçada em 4 minutos. Maria consegue limpar a neve da mesma calçada em 3 minutos. Quanto tempo os dois levarão para limpar a neve dessa calçada juntos"?* Segundo Usiskin(1980), o único aspecto de realidade existente no problema é o fato de que as pessoas realmente retiram a neve das calçadas. Segundo ele, se uma calçada com neve pode ser limpa em menos de 5 minutos, no que diz respeito ao mundo real nem vale a pena ser limpa. E seu olhar crítico continua na análise de uma possível solução equivocada, recorrente dentre as apresentadas pelos alunos: já que a média dos tempos de João e Maria é de 3 minutos e meio, os dois juntos levariam a metade do tempo, 105 segundos. A solução correta é obtida a partir da resolução da equação $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{x}$, o que leva à resposta de $102\frac{6}{7}$ s. A diferença de valores entre as duas respostas é de praticamente dois segundos, o que termos práticos pouco importa, no comentário do autor. E quanto à situação real, ainda comenta que não se pode ter certeza de que as duas crianças vão terminar de limpar a calçada exatamente nesse tempo.

Um problema de estrutura semelhante ao criticado acima é o clássico problema das duas torneiras com vazões diferentes, enchendo um determinado tanque. Cada torneira tem vazão de água específica, assim como cada criança do problema trabalha com uma velocidade específica. Mas a situação das torneiras[11], além de ser realista, não tem fatores subjetivos que possam interferir sobre o funcionamento independente ou conjunto das torneiras (situação que não acontece no caso das duas crianças trabalhando de forma independente ou conjunta, dada a existência de fatores de interferência de ordem subjetiva). Este problema das torneiras é um daqueles em que se evidencia como necessária à formulação da equação algébrica correspondente, para então chegar-se a solução.

Um outro exemplo de problema fora da realidade (no caso estamos falando da realidade da geometria), apresentado em um certo livro didático informa que "x, y e z são as medidas dos lados de um triângulo de perímetro igual a 42 cm e a medida x é o dobro da medida y e z é igual a 6 cm" e então pergunta: "quais são as medidas x e y?". Um aluno, com alguma desenvoltura em álgebra, sabendo que x é o dobro de y e escreve a equação $2y + y + 6 = 42$ e resolve-a obtendo $x=24$ cm e $y=12$ cm. Só que um triângulo com lados medindo 24,12 e 6 simplesmente não existe!

Se a proposta é o uso de álgebra na resolução de problemas, não se deve forçar a contextualização. Um contexto puramente matemático, por exemplo, relacionando dimensões de um retângulo ou números em seqüência pode ser utilizado na formulação de problemas. A falsa contextualização não tem um efeito positivo no ensino, pois acaba causando a impressão de que a álgebra é uma maneira difícil de resolver problemas irreais.

Uma necessidade justificada da álgebra em problemas reais e práticos do quotidiano se apresenta nas planilhas eletrônicas, esta de uso já bastante difundida nas mais diversas áreas: de simples orçamento doméstico de gastos com alimentação, moradia, saúde, educação, até o gerenciamento financeiro de uma empresa; no trabalho de cálculos com coleta

[11] É fonte de inspiração para problema no capítulo 4 (encontro 2) - É um problema com duas impressoras, uma a laser e outra jato de tinta, que possuem diferentes velocidades. Quanto tempo as duas juntas levariam para imprimir um determinado número de páginas? O funcionamento de uma não influencia o funcionamento de outra

de dados (notas de alunos, temperaturas, índices financeiros, entre outros). O uso da planilha exige uma competência algébrica que relaciona variáveis e manipula fórmulas, e neste sentido a introdução ao pensamento algébrico via funções é uma das possibilidades que vamos discutir no capítulo seguinte.

2.3 Sobre as dificuldades no aprendizado da álgebra

Além da dificuldade que os alunos encontram para compreender a importância de aprender álgebra, muitas vezes resultado de uma proposta didática inadequada, tem-se também uma dificuldade inerente ao processo de aprendizagem: entender o significado e ter domínio da linguagem algébrica. Neste processo, conhecimentos prévios dos alunos podem se colocar como obstáculos[12] para a construção do novo conhecimento. Neste sentido, conhecimentos e procedimentos desenvolvidos na aritmética podem ser obstáculos na construção do raciocínio algébrico. Para esta análise vamos usar como referência básica artigos publicados no livro "As idéias da álgebra", de Coxford e Shulte

Na aritmética, na resolução de problemas o aluno está acostumado a dar uma resposta numérica, e para isto faz alguns cálculos. Já na álgebra, o aluno deve manipular representações simbólicas, e neste sentido torna-se difícil para ele a compreensão de que a soma de duas quantidades pode ser representada por (x + y). O aluno pode até compreender que, para resolver um problema, ele deve somar as quantidades x e y, mas reluta em escrever x + y, preferindo criar outra variável, como z, para a resposta. Neste sentido tem-se em Booth (1997, pág.24): *"Em aritmética, o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas particulares... Na Álgebra o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral".*

Collins afirma [apud Booth (1997, pág. 27) e Herscovics (1989, pág. 62)] "o aluno tem dificuldade em aceitar a ausência de fechamento". Isso significa que o aluno entende que uma seqüência de operações matemáticas deve sempre resultar em um número, o que é normal na aritmética, mas não necessariamente na álgebra. Ou seja, para os alunos, há uma idéia de que uma expressão tem, em seu lado esquerdo, operações a serem resolvidas, e, no lado direito, uma "resposta". Por exemplo, na expressão numérica $3.5^2 - 8:2$ o aluno encontra a resposta 71. Já a expressão algébrica $5.a + 2.(b - 3) + 3.(a + 2)$, quando

[12] Segundo Guy Brousseau (1983) um obstáculo é uma concepção que já foi útil para resolver determinado problema, mas falha ao ser aplicada em outro problema. Devido ao êxito prévio, a concepção resiste à modificação, tornando-se então uma barreira à nova aprendizagem. Brousseau ainda classifica os obstáculos em diferentes categorias, tais como epistemológicos, didáticos ou ontogenéticos.

desenvolvida, não resulta em um número, mas resulta em 8.a + 2.b. Quando chega nesta expressão o aluno assume que ainda deve encontrar um "resultado" e continua operando, o que pode explicar a freqüente resposta equivocada 10.a.b .

Na manipulação de expressões algébricas nos parece que não é claro para o aluno a idéia de igualdade entre os dois termos – o que está em sua mente talvez seja mais próximo do "se.... então". As operações do lado esquerdo da igualdade <u>implicam</u> em uma resposta do lado direito da igualdade. Assim, a expressão "3+5=8" pode representar para aluno algo mais próximo de "$3 + 5 \Rightarrow 8$". Essa interpretação do sinal de igualdade pode ser decorrência da freqüente atitude dos professores que orientam, por exemplo, que para resolver uma equação de 1º grau, as incógnitas devem ser colocadas no lado esquerdo e os valores numéricos do lado direito. Desta forma, para o aluno, não se torna claro que, sendo uma igualdade, não faz diferença se isolamos a incógnita de um lado ou outro da igualdade (x=3 e 3=x representam a mesma igualdade). O aluno interpreta o sinal da igualdade em "3+5 = 8" não como "é igual à", mas que "vai dar" (três mais cinco é igual a oito ou três mais cinco vai dar oito). Assim, não parece natural para o aluno obter uma expressão como resposta.

Booth (1997) também fala que a forma simplificada de escrever a multiplicação de uma variável por um número, por exemplo, "3a" em lugar de "3.a" explica alguns erros cometidos pelos alunos. Assim, se "a" representa uma quantidade de moedas, ao se escrever 3a muitas vezes o aluno interpreta isso como sendo "três moedas", e não "o triplo da quantidade de moedas".

Outro erro freqüente apontado pelo mesmo autor é quando se pede aos alunos que substituam "a" pelo número 2 em 3a, e os alunos respondem que é 32. Os alunos não compreendem que 3a é a multiplicação de 3 por a; eles entendem que 3a seja um número de dois algarismos, em que 3 represente as dezenas e "a" represente as unidades. Esse erro talvez tenha explicação no uso de problemas do tipo abaixo (mencionado na seção 2.2.1), onde cada letra representa um determinado algarismo.

POSSO	SEND
+<u>POSSO</u>	+<u>MORE</u>
MESMO	MONEY

Outro erro apontado por Booth (1997) diz respeito a forte tendência do aluno em "simplificar" a expressão a + b para ab. Ele aponta situações na aritmética que podem ajudar a conduzir o aluno a essa noção, como as frações mistas $\left(\textit{por exemplo, } 2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}\right)$. Sobre este erro Matz (apud Herscovics, 1989, pág. 62) destaca que: "na aritmética, concatenação significa uma adição implícita. Entretanto, em álgebra, concatenação significa multiplicação". Herscovics afirma que é isso que ocorre quando se pede aos alunos que substituam "a" pelo número 2 em 3a, e os alunos respondem que é 32. Os alunos não compreendem que 3a seja a multiplicação de 3 por a**.** O que nos parece é que os alunos não estão confundindo 3a com uma adição, como sugere o exemplo das frações, mas eles entendem que 3a seja um número de dois algarismos, em que 3 represente a dezena e "a" represente a unidade.

Como sugestões para superar as diferentes dificuldades listadas acima, Booth (1997) sugere que o professor acentue a bidirecionalidade da expressão 2 + 3, não apenas afirmando que "dá 5", mas que "é igual a cinco". Assim, 2 + 3 não é apenas a instrução, mas também representa o resultado. Outra sugestão é que, ao menos inicialmente, não se omita o sinal da multiplicação de números por variáveis. Assim, 5b ficaria para uma etapa posterior, enquanto que inicialmente se escreveria 5**.**b ou $5\times$b. Quando o aluno interpreta 2m + 5b como sendo duas maçãs mais cinco bananas, Booth (1997) sugere que se escreva inicialmente por extenso (2 vezes a quantidade de maçãs) para não confundir com 2 maçãs.

Outra fonte de dificuldade dos alunos encontra-se na transcrição de problemas para a linguagem matemática. Problemas como o descrito abaixo onde se solicita a transcrição para uma expressão matemática tem baixo índice de acerto:

> Canetas azuis custam 5 reais cada, e canetas vermelhas custam 6 reais cada. Eu comprei algumas canetas azuis e algumas canetas vermelhas e gastei 90 reais no total. Se "a" representa o número de canetas azuis e "v" representa o número de canetas vermelhas, o que podemos escrever sobre "a" e "v"?

Küchemann (apud Hersovics 1989) propôs a questão acima para três grupos de alunos, com média de idade de 13, 14 e 15 anos. O percentual de respostas corretas foi de 2%, 11% e 13%. O erro mais freqüente foi escrever "a + v = 90", onde os alunos parecem expressar que "o gasto total na compra das canetas azuis e vermelhas é de 90 reais", mas não se apropriaram de idéia de que "a" e "v" representam, respectivamente, quantidades de canetas azuis e vermelhas, e não o valor gasto na compra das canetas.

Outros problemas interessantes que ilustram as dificuldades na transcrição da linguagem corrente para a algébrica estão presentes em estudo de Clements (apud Herscovics 1989, pág. 64). Alguns exemplos:

> “Há seis vezes mais estudantes do que professores nesta universidade. Use E para representar o número de estudantes e P para representar o número de professores”
>
> Escreva uma equação usando as variáveis C e S para representar respectivamente o número de cheesecakes e strudels na questão seguinte: ‘No Restaurante Mindy’s, para cada quatro pessoas que pedem cheesecakes, há cinco pessoas que pedem strudels’”.

Estes problemas fizeram parte de um teste aplicado à 150 estudantes de engenharia. Se 63% acertaram a primeira questão, apenas 27% acertaram a segunda. Os estudantes entenderam os problemas - compreendiam que havia mais alunos que professores e eram vendidos mais strudels que cheesecakes. Mas 68% das respostas erradas nos dois problemas eram inversas: escreveram 6E=P ao invés de E=6P e 4C=5S ao invés de 5C=4S. Parece que os alunos buscam escrever a equação exatamente na ordem em que as palavras aparecem.

A noção de variável é outra dificuldade encontrada pelos alunos. Harper (apud Kieran, 1993) escreve sobre a evolução histórica da álgebra, comparando-a com a evolução do aluno. Num momento inicial, havia o uso da linguagem corrente para descrever a resolução de problemas em particular, com a ausência de uma linguagem simbólica para representar números desconhecidos. No segundo estágio, surgia o uso de abreviaturas para representar quantidades desconhecidas, e neste período o foco dos matemáticos era a descoberta do valor de incógnitas em detrimento da habilidade de expressar uma generalização. No terceiro estágio, letras eram usadas tanto para representar incógnitas como variáveis. Nesse ponto se tornou possível expressar soluções gerais através de símbolos e usar a álgebra como ferramenta para provar regras e relações numéricas. Harper indica que os estudantes costumam passar pelos mesmos estágios.

Pode ser mais fácil para o aluno a resolução de uma equação do que a criação de uma expressão que represente uma determinada situação de regularidade, ou da transformação de um texto em linguagem corrente para a linguagem matemática. Entretanto, o aluno deve ser direcionado a compreender a linguagem matemática, em todos os seus significados. Trabalhar com a resolução de uma equação pode ser mais fácil do que fazer a transcrição de um problema para linguagem algébrica. A resolução de equação pode ser feita de modo simplesmente mecânico. Já a tradução do problema de linguagem corrente para a linguagem matemática exige uma compreensão de relações entre variáveis, a serem explicitadas através de letras, e desta forma o desenvolvimento desta habilidade para transcrição pode ser mais significativo em termos de aprendizado.

A seqüência de atividades que preparamos ataca diretamente algumas das dificuldades anteriormente listadas. Usaremos em nossas atividades o sinal "." para denotar a multiplicação (3.a, e não 3a). Trabalharemos com transcrição de situações para a forma de expressões algébricas, o que deve diminuir a dificuldade do aluno em dar uma expressão como resposta, ao invés de um número..

2.4 O desempenho dos alunos no SAEB

A avaliação do SAEB[13] é realizada com alunos de 4ª e 8 série do Ensino Fundamental, e com alunos de 3º ano do Ensino Médio. São escolhidas diferentes escolas de diferentes regiões, diferentes estruturas (pública, privada) para participar da avaliação de Língua Portuguesa e Matemática.

Dentre os temas e descritores da matriz de referência de matemática[14], encontramos alguns voltados especificamente para a álgebra[15], juntamente com um exemplo de uma questão que enfoca este aspecto. No que segue, vamos listar algumas questões que foram aplicadas ou para alunos de 8ª série, ou para 8ª série e 3º ano do Ensino Médio, e vamos tratar apenas do desempenho dos alunos de 8ª série. Acompanham as questões os descritores que indicam a competência algébrica que está sendo avaliada.

1. Descritor: Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.

O valor numérico da expressão $x^2 – y^2$, para x = 2 e y = – 2, é:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

Resposta correta: A

---

[13] SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), realizado pelo INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), vinculado ao MEC (Ministério da Educação e Cultura). Vamos trabalhar com dados do SAEB 2001, pois foram os que tivemos acesso. Mas são dados significativos quanto às competências e habilidades dos alunos no contexto da álgebra.

[14] http://ensino.univates.br/~chaet/Materiais/guia_matematica.pdf

[15] http://www.inep.gov.br/download/saeb/matrizes/8serie_mat/8serie_matematica_temaIII.pdf

[redacted]					
A	B	C	D	“ ”	“.”
.48	.11	.19	.18	.03	.00

Comentário: Esta é uma questão bastante simples, que trata de cálculo de valor numérico de uma dada expressão algébrica, no entanto com percentual de acertos em torno de 50%.

2. Descritor: Resolver problema que envolva equação de segundo grau.

Um retângulo tem área 32m^2. Se o lado maior é o dobro do lado menor, então, o menor lado mede em metros

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

Resposta correta: B

[redacted]					
A	B	C	D	“ ”	“.”
.11	.24	.24	.36	.03	.02

Comentário: Esta é uma típica questão que exige o uso de raciocínio de natureza algébrica – é preciso escrever a equação x.(2.x)=32, ou 2.x^2=32. O índice de acerto é de 24%. Vale observar que como as opções de resposta são em número de 4, o índice de acerto de 24 % poderia ser obtido simplesmente jogando um dado de quatro faces para escolher a resposta. É interessante notar que a resposta mais escolhida pelos alunos foi a correspondente ao item D, com 36%. É provável que os alunos tenham relacionado a palavra “dobro” e a quantidade “32”, e concluído que 32 é o dobro de 16, sem nem pensar no contexto do problema.

3. Descritor: Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em seqüências de números ou figuras (padrões).

Observe a figura

n	5	6	7	8	9	10
P	8	10	12	14	16	18

Na figura acima, a relação entre P e n é dada pela expressão:

(A) P=n+1 (B) P=n+2 (C) P=2n-2 (D) P=n-2

Resposta correta: C

[redacted]					
A	B	C	D	“ ”	“.”
.19	.32	.33	.09	.05	.01

Comentário: Um terço dos alunos acertou essa questão. É no mínimo curioso que, apesar de nenhum dos “pontos” citados na tabela pertencerem a nenhuma das expressões A, B e D, dois terços dos alunos tenham escolhido uma destas alternativas. Talvez os alunos tenham observado a segunda linha da tabela, a linha do P, e notado que os números variam de 2 em 2, e a partir disso tenham escolhido a opção B, P=n+2. Talvez, ao observar a primeira linha, a linha do “n”, os alunos possam ter observado que os valores estão sendo acrescidos de uma unidade, e então escolhido a alternativa A, P=n+1.

4. Descritor: Identificar um sistema de equações do primeiro grau que expressa um problema.

Lucas comprou 3 canetas e 2 lápis pagando R$7,20. Danilo comprou 2 canetas e 1 lápis pagando R$4,40. O sistema de equações do 1º grau que melhor representa a situação é

(A) $\begin{cases} 3x + 2y = 7{,}20 \\ 2x + y = 4{,}40 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x - 2y = 7{,}20 \\ 2x - y = 4{,}40 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x + y = 7{,}20 \\ x - y = 4{,}40 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 3x + 2y = 7{,}20 \\ x + y = 4{,}40 \end{cases}$

Resposta correta: A

[redacted]					
A	B	C	D	“ ”	“.”
.64	.16	.08	.07	.01	.04

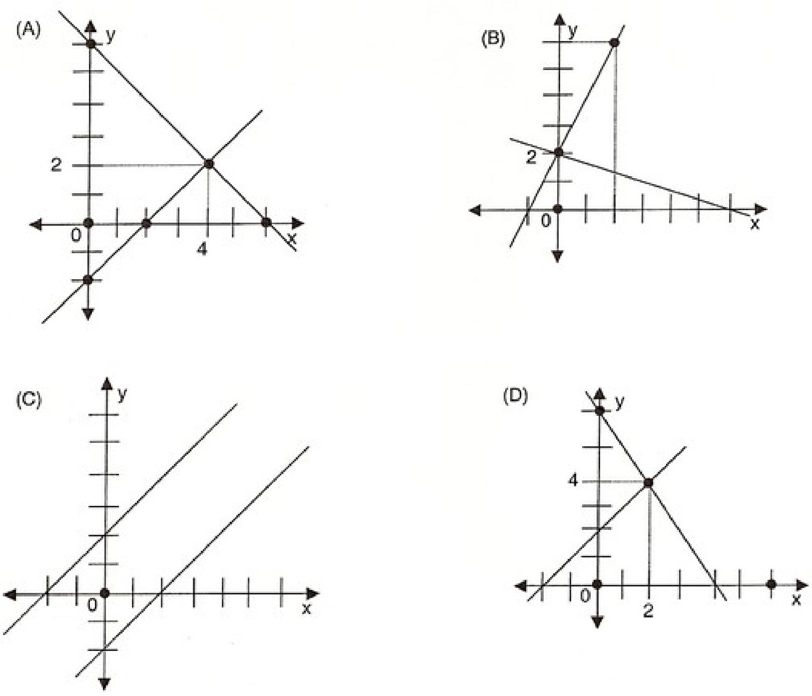
Comentário: Dois terços dos alunos responderam corretamente a esta questão. As quantidades de canetas e lápis expressas direcionam para os itens A e B, e como eles compraram canetas E lápis, fica evidente a adição de quantidades. Segundo o que lemos de Herscovics (1989), o nível de acerto provavelmente seria bem menor se o problema fosse diferente, sendo dito que “para cada 3 canetas existem 2 lápis”.

5. Descritor: Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações de primeiro grau.

Dado o sistema

$$\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

O gráfico que representa o sistema é



Resposta correta: A

A	B	C	D	“ ”	“.”
.33	.27	.11	.24	.03	.02

<u>Comentário</u>: Esta questão é bem mais difícil que a analisada anteriormente. O aluno poderia tentar resolver substituindo y por x-2 na equação y = - x + 6, ou poderia também testar nas equações os pontos de intersecção dos gráficos apresentados. Se resolvem pela substituição, encontram

x – 2 = - x + 6

2x = 8

x = 4, e em seqüência que y = 2.

Assim, as duas retas devem passar pelo ponto (4,2). O item D coloca o ponto (2,4) como intersecção das retas, o que pode complicar para o aluno, o que se reflete no percentual de 24% atribuído a letra D.

No Relatório Nacional do SAEB em 2001 não havia questão ilustrativa de desempenho dos alunos quanto ao descritor que corresponde a escrever um problema em linguagem algébrica. Visando apresentar de forma completa a lista de descritores considerada pelo SAEB, no que diz respeito as competências e habilidades em álgebra, trazemos um exemplo de questão, mesmo sem ter o desempenho dos alunos:

Descritor: Identificar uma equação ou uma inequação de primeiro grau que expressa um problema.

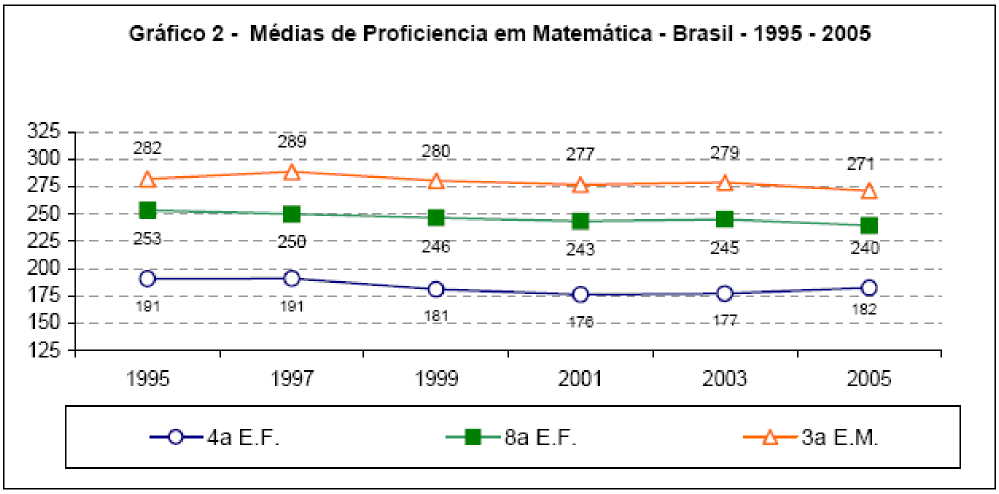
Uma prefeitura aplicou R$ 850 mil na construção de 3 creches e um parque infantil. O custo de cada creche foi de R$ 250 mil. A expressão que representa o custo do parque, em mil reais, é:

(A) $x + 850 = 250$
(B) $x – 850 = 750$
(C) $850 = x + 250$
(D) $850 = x + 750$

Considerando que a transcrição de um problema em linguagem algébrica é fonte de dificuldades para os alunos, podemos imaginar que o percentual de acerto para esta questão não seria muito diferente daquelas listadas acima.

Além de observar o fraco desempenho dos alunos nas questões acima relatadas, podemos observar uma queda do desempenho dos alunos, em todos os níveis. No caso de alunos de 8ª série, a pontuação média, nos dados de tabulação do SAEB, caiu de 253 para 240 pontos em 10 anos (1995 a 2005). A seguir, temos um gráfico (quadro 2.1) da última edição da avaliação do SAEB[16] (2005) que faz uma comparação de todos os dados encontrados na última década. Esses dados mostram o resultado geral em Matemática. Não são tabulados os dados específicos de cada área da Matemática, o que seria muito interessante para a análise do desempenho em álgebra. Mas o baixo desempenho dos alunos na Matemática em geral, com certeza se reflete no desempenho em álgebra.

[16] http://www.inep.gov.br/download/saeb/2005/SAEB1995_2005.pdf



Quadro 1 – Médias de Proficiência em Matemática, de 1995 a 2005

Para compreendermos melhor a escala que representa os níveis, vejamos como exemplo quais as habilidades de um aluno do nível 125:

- Nível 125: o aluno é capaz de calcular áreas de figuras desenhadas em malhas quadriculadas por meio de contagem. Reconhecem a quarta parte de um todo, apoiados em representações gráficas.

Já o resultado encontrado para a 8ª série está um pouco abaixo do nível 250. Vejamos que habilidades alunos deste nível apresentam[17]:

• calculam expressão numérica (soma e subtração), envolvendo o uso de parênteses e colchetes;

• identificam algumas características de quadriláteros relativas aos lados e ângulos;

• reconhecem a modificação sofrida no valor de um número quando um algarismo é alterado e resolvem problemas de composição ou decomposição mais complexos do que nos níveis anteriores;

• reconhecem a invariância da diferença em situação-problema;

• comparam números racionais na forma decimal, no caso de terem diferentes partes inteiras, e calculam porcentagens simples;

• localizam números racionais na forma decimal na reta numérica;

• reconhecem o gráfico de colunas correspondente a dados apresentados de forma textual;

• identificam o gráfico de colunas correspondente a um gráfico de setores; e

• resolvem problemas:

[17] http://www.inep.gov.br/salas/download/prova_brasil/Escala_PB_Saeb/Escala_MAT_Prova_Brasil.pdf

- realizando cálculo de conversão de medidas: de tempo (dias/anos), de temperatura (identificando sua representação numérica na forma decimal); comprimento (m/km) e de capacidade (ml/L); e
- de soma, envolvendo combinações, e de multiplicação, envolvendo configuração retangular em situações contextualizadas.

• associam uma trajetória representada em um mapa à sua descrição textual;

• localizam números inteiros e números racionais, positivos e negativos, na forma decimal, na reta numérica;

• resolvem problemas de contagem em uma disposição retangular envolvendo mais de uma operação;

• identificam a planificação de um cubo em situação contextualizada;

• reconhecem e aplicam em situações simples o conceito de porcentagem; e

• reconhecem e efetuam cálculos com ângulos retos e não-retos.

Os níveis do SAEB podem chegar a 425, mas apenas 0,14% dos alunos de 8ª série chegam neste nível.

A tabela 3 mostra a distribuição dos alunos nos diferentes estágios de construção de competências[18]:

Distribuição de Alunos nos Estágios de Construção de Competências
Matemática – 8ª Série – Saeb 2001 – Brasil

Estágio	População	%
Muito Crítico	19.021	6,65
Crítico	423.750	51,71
Intermediário	849.276	38,85
Adequado	55.430	2,65
Avançado	4.215	0,14
Total	**1.351.692**	**100,00**

Fonte: MEC/Inep/Daeb

Tabela 3 – Distribuição de alunos nos estágios de construção de competências
Matemática – 8ª série – SAEB 2001 - Brasil

Portanto, em Matemática, segundo os critérios do SAEB, menos de 3% dos alunos demonstraram ter desenvolvido competências e habilidades condizentes com uma boa escolaridade em nível fundamental. Transcrevemos do material consultado:

[18] http://www.inep.gov.br/download/cibec/2003/saeb/qualidade_educa.pdf

> *Somando os percentuais dos estágios muito crítico, crítico e intermediário, é possível concluir que 97,21% dos alunos de 8ª série não conseguiram atingir o nível adequado, estando, portanto, aquém do nível exigido para a 8ª série. Esses alunos não interpretam e nem resolvem problemas de forma competente e, portanto, não fazem o uso correto da linguagem matemática. Ou seja, a maioria apresenta apenas algumas habilidades elementares de interpretação de problemas, mas não consegue transpor o que está sendo pedido no enunciado para uma linguagem matemática específica.*

Os resultados das avaliações do SAEB são extremamente preocupantes. O baixo desempenho alcançado pelos alunos indica que muito deve ser feito no ensino de matemática. Se mais de 97% dos alunos não alcançam um nível considerado adequado, é evidente a necessidade de se pensar em novas propostas para o ensino da álgebra. No próximo capítulo apresentaremos algumas possibilidades para viabilizar uma introdução ao pensamento algébrico de forma a ser mais significativo para o aluno.

3 POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA

No capítulo anterior tratamos da álgebra que é ensinada na escola, bem como das dificuldades apresentadas pelos alunos. Vimos nos livros escolares que as escolhas didáticas são variadas: ora sinalizam na direção das generalizações, ora usam letras para expressar equações que traduzem um determinado problema, ora usam letras para representar variáveis.

Como subsídio para a construção de uma proposta de iniciação à álgebra, de forma a ser mais significativa para os alunos, apresentaremos neste capítulo: diretrizes para o ensino da álgebra e diferentes enfoques para a introdução ao pensamento algébrico. Trataremos, também, de nossas escolhas didáticas para propor uma alternativa à introdução ao pensamento algébrico, na sexta série do Ensino Fundamental.

3.1 Algumas diretrizes para o ensino da álgebra

Para o ensino da álgebra temos como recomendações gerais nos Parâmetros Curriculares Nacionais[19] (PCNs):

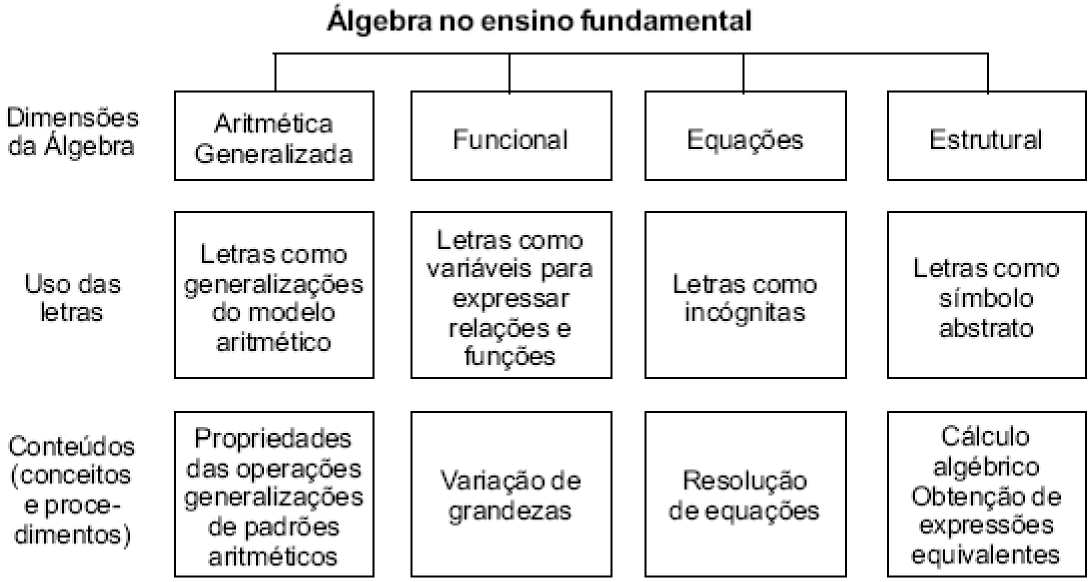
> O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. Pg. 115

De forma mais específica, os PCNs fazem referência à "*utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas seqüências numéricas*". Neste sentido, é apresentado um exemplo bem específico: o procedimento para calcular o número de diagonais de um polígono, nisto observando as regularidades entre o número de lados e diagonais. Outros aspectos destacados como importantes no trabalho escolar são: a noção de variável; a tradução de situações-problema em equações, sua resolução e discussão sobre o significado das raízes; a obtenção de expressões algébricas equivalentes usando fatorações e simplificações.

Tem-se nos PCNs (p.116) um quadro que esquematiza as diferentes dimensões da álgebra escolar, com os correspondentes usos de letras, conceitos e procedimentos.

---

[19] http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf



Quadro 2 – Álgebra no Ensino Fundamental

De forma muito similar, como perspectivas para a iniciação a álgebra na escola encontramos na literatura: a generalização; a resolução de problemas; a modelagem; e a perspectiva funcional (Bednarz e outros, 1996). No quadro abaixo colocamos em relação estas diferentes dimensões e perspectivas, incluindo nele também o olhar de Usiskin (1997) referido no capítulo anterior.

PCN's	Aritmética generalizada	Funcional	Equações	Estrutural	
Usiskin	Aritmética generalizada	Estudo de relações entre grandezas	Estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas	Estudo das estruturas	
Approaches	Generalização	Funcional	Resolução de problemas		Modelagem

Tabela 4 – diferentes dimensões da Álgebra

A dimensão algébrica de "aritmética generalizada" encontra seu paralelo na definição de Usiskin e também surge como proposta de enfoque do ensino. O mesmo ocorre com as duas categorias seguintes, funcional e de resolução de problemas. A quarta dimensão, a estrutural, não está diretamente relacionada com a abordagem da modelagem matemática. A dimensão estrutural trabalha mais na manipulação algébrica, na habilidade em operar com expressões na obtenção de expressões equivalentes, enquanto a modelagem se trata de uma atividade prática, podendo ser utilizada na introdução algébrica. A modelagem está muito ligada à perspectiva funcional. As diferentes dimensões apresentadas no quadro devem ser colocadas em estreita relação no processo de ensino e aprendizagem; a explicitação destas dimensões tem como propósito, sobretudo, tornar claro as diferentes perspectivas que podem ser contempladas no processo de ensino e aprendizagem da álgebra escolar. Neste sentido, temos nos PCNs:

> *Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constróem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. Pg. 116*

Orientações similares têm sido dadas em outros países. Nos "*Principles and Standards*" do National Council of Teachers of Mathematics [20], uma publicação com orientações para os professores de escolas dos Estados Unidos, temos que:

> [...] *A álgebra engloba as relações entre quantidades, o uso de símbolos, a modelagem de fenômenos, bem como o estudo matemático da variação. ...Os conceitos algébricos são relacionados a todas as áreas da matemática. Uma grande parte da álgebra é construída sobre a grande experiência dos alunos com números. A álgebra também é estreitamente ligada à geometria e à análise de dados. As idéias algébricas são um dos principais componentes do currículo matemático escolar e ajudam a unificá-lo. Ao final da oitava série os alunos devem ter uma forte base algébrica, e metas ambiciosas devem ser perseguidas por todos os estudantes do Ensino Médio.*

De acordo com esta publicação, ao final da sexta série, os alunos devem estar aptos a:

- representar, analisar, e generalizar uma variedade de padrões com tabelas, gráficos, palavras, e, quando possível, com regras simbólicas;
- desenvolver uma compreensão inicial dos diferentes usos de variáveis;

[20] http://standards.nctm.org/document/chapter3/alg.htm

- usar a linguagem algébrica para representar situações e resolver problemas, especialmente aqueles que envolvem relações lineares;
- reconhecer e gerar formas equivalentes de expressões algébricas simples e resolver equações lineares;
- modelar e resolver problemas contextualizados usando várias representações (gráficos, tabelas e equações)

Ainda segundo os "*Principles and Standards"*, os programas educativos, do jardim da infância até o final do Ensino Médio, devem desenvolver habilidades para:

- compreender padrões, relações, e funções;
- representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- usar modelos matemáticos para representar e compreender as relações entre quantidades;
- analisar variações entre grandezas, em diferentes contextos.

Na Holanda, Reeuwijk (1995) destaca os princípios da filosofia da Educação Matemática Realista (RME)[21] e os princípios traçados no NCTM Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics[22] como sendo os pilares para o ensino da álgebra no projeto "*Mathematics in Context*" (MiC)[23]. Neste projeto, a álgebra é caracterizada como:

> *[...] o estudo das relações entre variáveis. Os estudantes aprendem como descrever essas relações com uma variedade de representações, e serão capazes de fazer conexões entre as representações. A álgebra é utilizada para resolver problemas, e os estudantes aprendem como usar álgebra de uma maneira apropriada. Isso inclui fazer escolhas inteligentes a respeito de qual representação usar (se usar) para resolver um problema. Álgebra (sua estrutura e símbolos) não é uma meta em si mesma. Álgebra é uma ferramenta para resolver problemas. Os problemas que surgem do mundo real são seguidamente apresentados em contextos, e são problemas realísticos..."(p. 142)*

---

[21] RME – Realistic Mathematic Education: filosofia de ensino de matemática desenvolvida pelo Instituto Freudenthal, da Universidade de Utretch, Holanda.

[22] NCTM Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics – documento buscando a qualificação da educação matemática, desenvolvido pelo NCTM em 1989. Traz parâmetros para avaliar a qualidade de currículos e do grau atingido pelos alunos.

[23] MiC – "Mathematicas in Context é um programa de ensino de Matemática desenvolvido pelo Instituto Freudenthal, da Holanda, em parceria com a Universidade de Wisconsin, nos EUA, dirigido para as turmas de 5ª a 8ª série, onde basicamente se partem de situações do mundo real para se desenvolver conceitos matemáticos.

As questões relativas ao ensino da Matemática, e em particular relativas ao ensino da álgebra, têm um caráter universal, conforme apontam as orientações dadas nos diferentes documentos referidos acima. No que diz respeito a nossa realidade, a pergunta que colocamos é: o quanto o ensino nas escolas brasileiras se aproxima das diretrizes traçadas nos PCNs? Já nos próprios Parâmetros Curriculares temos uma resposta:

> *[...] É fato conhecido que os professores não desenvolvem todos esses aspectos da Álgebra no ensino fundamental, pois privilegiam fundamentalmente o estudo do cálculo algébrico e das equações, muitas vezes descoladas dos problemas. Apesar de esses aspectos serem necessários, eles não são, absolutamente, suficientes para a aprendizagem desses conteúdos. Para a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos é necessário um trabalho articulado com essas quatro dimensões ao longo dos terceiro e quarto ciclos. (p. 117)*

Os PCNs reforçam a importância da álgebra no currículo escolar, como uma ferramenta, como espaço para desenvolver a generalização e a abstração, e destacam as diferentes dimensões da álgebra, chamando a atenção ao fato de que o professor deve buscar articular estas diferentes dimensões, e ter clareza sobre o papel da álgebra na formação do conhecimento matemático do aluno. Há crítica explícita quanto ao ensino puramente mecânico de resolução de equações, e também quanto à tentativa de solucionar as dificuldades no ensino de álgebra apenas pela repetição de exercícios, sem mudar o enfoque de ensino.

Na próxima sessão tratamos, com mais detalhe, das diferentes dimensões da álgebra que deveriam estar presentes no processo de ensino e aprendizagem, já referidas nesta sessão.

3.2 Sobre as possibilidades de escolhas didáticas

Conforme já mencionado, as diferentes dimensões da álgebra estão em estreita relação. Ao olhar com mais atenção para cada uma delas, temos como propósito evidenciar as suas características específicas.

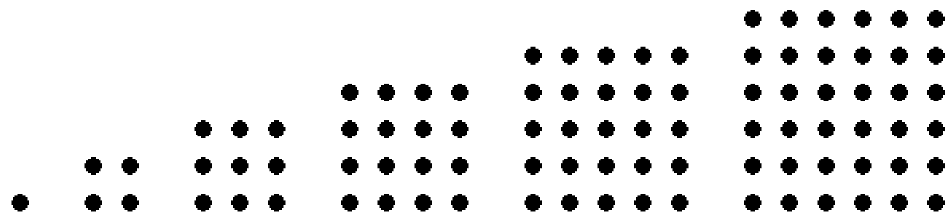
Tomando como referência o livro “Approaches to Algebra”, de Bednarz e outros (1996), vamos olhar para quatro possíveis perspectivas para a introdução a álgebra na escola: a generalização; a resolução de problemas; a modelagem; a perspectiva das relações funcionais.

Ênfase especial será dada a perspectiva que trata da resolução de problemas, visto que em muitos de nosso livros didáticos é via a resolução de problemas que procura-se justificar a introdução a linguagem da álgebra. Mas muitos destes problemas, conforme os exemplos discutidos na seção 2.2.3 do capítulo 2, são “problemáticos”, pois não conseguem justificar a necessidade da álgebra.

3.2.1 O pensamento algébrico na generalização.

O enfoque através da generalização busca o reconhecimento de um padrão, seja em seqüências numéricas ou geométricas, e a posteriormente busca a representação deste padrão em linguagem simbólica. Por exemplo, observando a seqüência “*1, 4, 9, 16, 25,........*”, os alunos são provocados a reconhecer um padrão e prever o próximo número da seqüência. Alguns alunos identificam que a seqüência alterna termos pares e ímpares, o que de fato está correto, mas é insuficiente para prever o próximo número. Alguns conseguem observar a variação entre um número e o próximo, e vêem que a diferença é dada pela seqüência “*3, 5, 7, 9.....*” Assim, se na seqüência “*1, 4, 9, 16, 25,........*” a diferença entre dois números consecutivos é sempre um número ímpar, cada vez maior, o aluno conclui, corretamente, que basta acrescentar 11 para chegar ao próximo número, a saber 36.

Este método indutivo exige, inicialmente, conhecer um número para poder determinar o seguinte. Para determinar o 20º termo da seqüência é um tanto trabalhoso prosseguir com este raciocínio indutivo. Isto justificativa plenamente a representação do padrão da seqüência em linguagem simbólica, o que aparece, de forma mais natural no reconhecimento do padrão, também possível de ser evidenciado pelos alunos: o primeiro número equivale a 1^2, o segundo equivale a 2^2, o terceiro a 3^2, e assim por diante. Assim, seria fácil descobrir o 20º termo. Seria interessante salientar a riqueza do processo de generalização da regularidade. Analisando geometricamente, por que as duas soluções funcionam?



1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2

Figura 13 – a seqüência dos quadrados dos números naturais

Observando a seqüência de “quadrados” acima (figura 3.1) o aluno perceber a relação entre o “número” da figura e quantidade de círculos que compõem o correspondente "quadrado". Por exemplo, fica fácil generalizar e ver então que o 20º "quadrado" tem $20^2 = 400$ círculos.

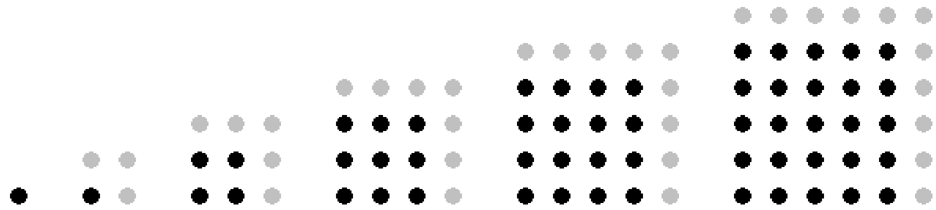


Figura 14 – a seqüência das diferenças dos quadrados de dois números consecutivos

Na seqüência acima (figura 3.2), onde a quantidade de círculos em cada "quadrado" corresponde aos termos da seqüência "*1, 4, 9, 16, 25, ...*", podemos observar que cada termo é obtido a partir da adição de mais alguns círculos ao quadrado correspondente ao termo anterior. Nesta leitura, temos na seqüência cinza de círculos "3, 5, 7, 9, ..." a variação dos termos da seqüência "*1, 4, 9, 16, 25, ...*". O processo de generalização, portanto, reserva algumas riquezas que, se passarem despercebidas ao olhar dos alunos, não podem permanecer escondidas, com a conivência do professor.

Na transição da aritmética para a álgebra é o pensamento generalizador que produz relações de regularidades entre números, permitindo conclusões para além do alcance da aritmética. Um exemplo interessante está na história de vida do matemático Gauss [24]: quando criança viu seu professor lançar uma questão para toda a turma – "*calcular a soma de todos os números naturais de 1 até 100*". Enquanto seus colegas buscavam resolver a questão somando todos os números, um após o outro, Gauss buscou realizar a soma de outra forma. Somando o primeiro e o último número, obteve como resultado o número 101; da mesma forma obteve 101, somando os segundo e penúltimo números da seqüência. O raciocínio generalizador levou-o a conclusão de que todas as somas de pares de números, efetuadas dessa forma, resultariam no número 101 e assim efetuou a multiplicação de 101 (total de cada soma) por 50 (total de somas), chegando na resposta de 5050, de forma rápida e econômica.

É interessante observar que raciocínios generalizadores podem ser trabalhados já nas séries inicias, em diferentes situações aritméticas, mas sem a preocupação com as expressões simbólicas.

[24] Gauss – Matemático, astrônomo e físico alemão (1777-1855).

3.2.2 O pensamento algébrico na resolução de problemas.

Como vimos na seção 2.2.3, muitos dos problemas que são utilizados, nos livros didáticos, para motivar a introdução da álgebra na escola podem ser resolvidos com raciocínios de natureza aritmética. Com certeza, com este tipo de problema, o professor se coloca em dificuldades para motivar os alunos e justificar a importância da linguagem algébrica. Um bom problema motivador deve ter uma estrutura que provoque, de fato, o uso da álgebra.

Uma interessante pesquisa feita por Bednarz e Janvier (1996) trata das diferentes estruturas dos problemas, classificando-as em estruturas aritméticas e algébricas. Este trabalho[25] nos ajuda a entender sobre os "bons" problemas quando se quer fazer a introdução ao pensamento algébrico via a resolução de problemas. A pesquisa também observou o desempenho dos alunos que ainda não tiveram uma introdução formal à linguagem algébrica, ao resolverem estes problemas; e fica claro, como veremos, que é nos problemas onde os alunos encontram dificuldades que se tem a estrutura que pode bem justificar a introdução a linguagem da álgebra. .

Os problemas 1 e 2, transcritos abaixo, são classificados como problemas com estrutura aritmética, pois apresentam uma conexão evidente entre o valor conhecido e os valores demandados, e assim podem ser resolvidos facilmente com um raciocínio aritmético. As figuras 3.3 e 3.4 ilustram esta conexão evidente, ao colocar em destaque o valor conhecido e a direta relação exigida para determinar os valores desconhecidos solicitados.

> **Problema 1** - *André tem 27 figurinhas a mais que Bruno, enquanto Carlos tem o triplo de figurinhas que André. Se André tem 138 figurinhas, quantas cartas os três têm juntos?*
>
> **Problema 2** – *Ana tem o quádruplo do número de selos de Júlia, e sete vezes a quantidade de selos de Sofia. Se Ana tem 504 selos, quantos selas as três têm juntas?*

[25] Os problemas e esquemas que ilustram as relações entre as operações que devem ser efetuadas para sua resolução apresentados nesta seção são do artigo de Bednarz e Janvier: "Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuites with arithmetic", publicado no livro Approaches to Algebra.

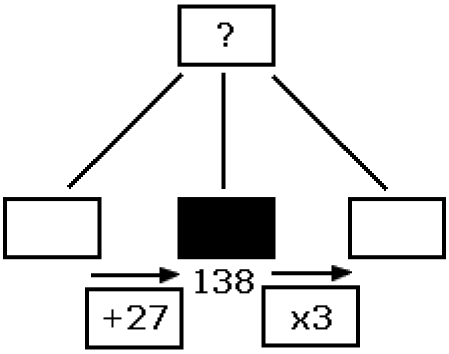


Figura 15 – estrutura do problema 1

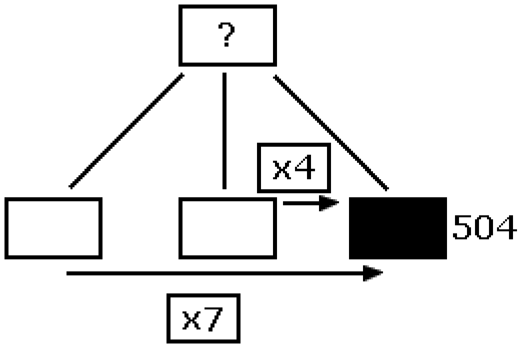


Figura 16 – estrutura do problema 2

Para solucionar o primeiro problema, parte-se do valor conhecido 138, e subtraindo-se 27 encontra-se a quantidade de figurinhas de Bruno (111). Triplicando 138 teremos a quantidade de figurinhas de Carlos (414). Somando as três quantidades teremos o total de figurinhas (111+138+414=663).

No segundo problema, realizando as operações inversas chegamos às quantidades de selos que devem ser determinadas. Efetuamos 504:4=126 (quantidade de selos de Júlia). Efetuamos também 504:7=72 (numero de selos de Sofia). E na soma 126+72+504=702 temos a quantidade de selos das três juntas.

Já o problema 3, dado abaixo, apresenta uma estrutura diferente, representada na figura 3.5.

Problema 3 - *Três crianças jogavam bolinhas de gude. Juntos eles tinham 198 bolinhas. Pedro tinha seis vezes a quantidade de bolinhas de Daniel e três vezes a quantidade de bolinhas de Jorge. Quantas bolinhas cada um possui?*

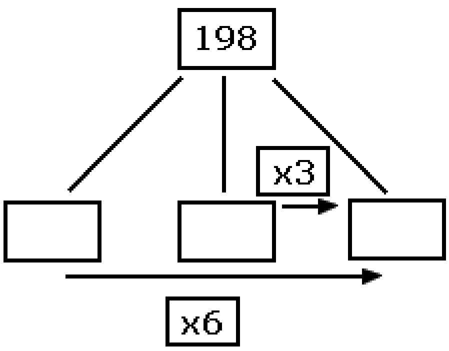


Figura 17 – estrutura sem conexão direta com o valor conhecido

Nesse caso, não há uma ligação direta entre o valor conhecido e os valores desconhecidos. Para resolver o problema, o aluno precisa trabalhar com uma estrutura mais complexa. Nesse caso não há uma ligação direta entre os valores desconhecidos e o conhecido. O aluno deve montar uma estrutura de resolução.

A pesquisa registra que alguns alunos resolvem este tipo de problema através de tentativas, atribuindo um valor inicial para a quantidade de bolinhas de um dos jogadores, e refinando os valores depois de analisar os resultados obtidos. Outro registro na pesquisa: a resolução inicia com a divisão das bolinhas em três partes iguais e toma, de forma equivocada, o resultado como o número de bolinhas de um dos jogadores e segue então com as operações que calculam o número de bolinhas dos demais jogadores.

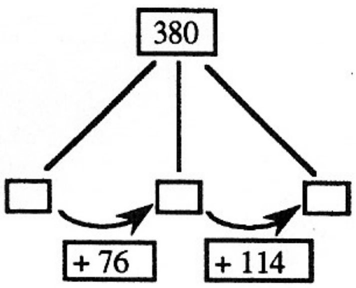
Um raciocínio interessante para este tipo de problema, registrado na pesquisa: partir do valor desconhecido que estava conectado aos outros dois. A quantidade de figurinhas de Pedro era o sêxtuplo da quantidade de Daniel. Podemos imaginar, até agora, uma parte para Daniel e seis para Pedro. Mas Pedro tem o triplo de Jorge. Se Pedro tem 6 partes, Jorge tem então 2 partes. Então as 198 bolinhas são divididas em 9 partes (1+2+6=9).

Em outros três problemas, todos tratando da mesma situação (38 alunos preferem patinação, 114 alunos preferem basquete e 228 alunos preferem natação, num total de 380 alunos), mas diferenciados na maneira de relacionar as quantidades conhecidas e desconhecidas, são registradas diferenças sensíveis no desempenho dos alunos, de acordo com os esquemas dados nas figuras 3.6, 3.7 e 3.8.

.

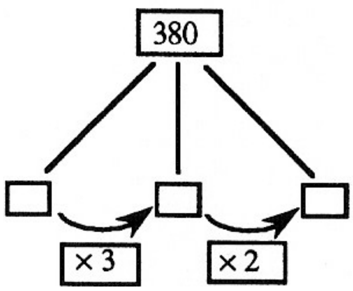
> **Problema 4** – *380 estudantes se matricularam em atividades esportivas para a temporada. Basquete tem 76 estudantes a mais que patinação, e natação tem 114 estudantes a mais que basquete. Quantos estudantes há em cada atividade?*
>
> **Problema 5** – *380 estudantes se matricularam em atividades esportivas para a temporada. Basquete tem o triplo de estudantes do que há na patinação, e a natação tem o dobro da quantidade de estudantes do basquete. Quantos estudantes há em cada atividade?*

Problema 6 – *380 estudantes se matricularam em atividades esportivas para a temporada. Basquete tem o triplo de estudantes do que há na patinação, e natação tem 114 alunos a mais do que a quantidade de alunos no basquete. Quantos estudantes há em cada atividade?*



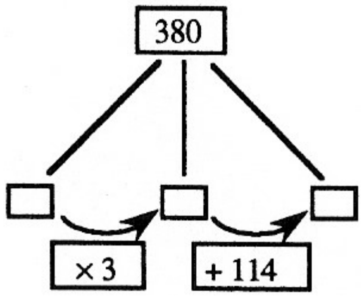
5,21%

Figura 18 – estrutura do problema 4



15,16%

Figura 19 – estrutura do problema 5



2,78%

Figura 20 – estrutura do problema 6

Os percentuais abaixo de cada esquema indicam os índices de acertos de 132 alunos, entre 12 e 13 anos de idade, participantes de pesquisa realizada em Quebec. Vê-se que o índice de acertos nestes problemas é muito pequeno, especialmente no último caso, quando diferentes operações fazem parte da estrutura do problema. No segundo caso, onde só há a operação de multiplicação, o índice de acertos melhora, mas ainda se mantém bastante baixo.

Tomando o Problema 6 (enunciado acima), de baixo índice de acertos, como exemplo ilustrativo, vemos que é a introdução de uma letra "x" para representar o valor ponto de partida (agora desconhecido, diferentemente do valor conhecido que é tomado como ponto de partida nos problemas de estrutura aritmética) que vai facilitar expressar a estrutura do problema, na forma de uma equação, conforme esquema e sua transcrição na forma de equação dada no figura 21.

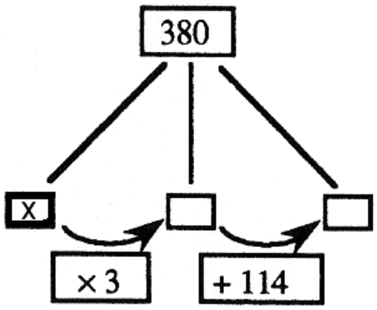


Figura 21 – Uso de letra na representação.

Tomando x como valor ponto de partida, correspondente ao número de alunos na patinação temos que :

3 . x é o número de estudantes no basquete

3 . x + 114 é o número de estudantes na natação

e assim temos como equação, a ser resolvida,

X + 3 . x + 3 . x + 11 4 = 380

Com este estudo de estrutura dos problemas – aritmética ou algébrica – os autores sinalizam os problemas que podem se apresentar como motivadores para a introdução a linguagem algébrica:

> *Nosso estudo analítico (...) e nossos resultados experimentais mostram a diferença entre "relações de cálculos" que fundamentam um raciocínio aritmético e "relações de cálculos" que fundamentam um raciocínio algébrico. Nós podemos distinguir perfis aritméticos dentre os alunos resolvedores de problemas, baseado nos procedimentos que usam para resolverem seus primeiros problemas em álgebra, e problemas no corpo da álgebra que "quebram" estes procedimentos regulares. Estes últimos problemas (isto é, problemas envolvendo a composição de diferentes relações), nos quais os alunos encontram dificuldades para resolver de forma aritmética, podem ser de interessante uso para motivar a transição para álgebra* (p. 135)

Os problemas descritos acima, juntamente com os percentuais de acerto na pesquisa evidenciam que a forma de apresentação do problema, ou seja, a divulgação das relações entre os valores envolvidos tem influência direta no grau de dificuldade. Se os problemas trabalhados em álgebra podem ser criticados por não serem reais, alguns também podem ser criticados por serem facilmente resolvidos aritmeticamente. Os resultados encontrados nesta pesquisa se constituem em informação importante para a construção de bons problemas a serem resolvidos algebricamente.

3.2.3 O pensamento algébrico na modelagem

Podemos dizer que a modelagem busca a "matematização" de uma determinada situação, de um determinado fenômeno. De acordo com Janvier (1996), a modelagem consiste, basicamente, em duas etapas: a etapa de formulação e a etapa de validação. Na fase da formulação é feita a observação de um fenômeno e com base nesta observação busca-se encontrar um padrão de comportamento, uma relação entre as variáveis presentes no problema. Feito isto, é construído um modelo matemático que tentará expressar, o mais próximo possível, o comportamento do fenômeno. A fase de validação trata de confrontar o modelo com a realidade que está sendo modelada matematicamente.

Bassanezi (2002) apresenta a modelagem matemática tanto como uma metodologia científica de pesquisa, tanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem. E explica os princípios que a caracterizam, seja no contexto da matemática escolar, seja no contexto da pesquisa em matemática:

> *[...] A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. O objetivo fundamental do 'uso' de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar idéias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância.*
>
> *Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (p. 16)*

Em situação de ensino-aprendizagem em que se faz uso da modelagem matemática, de início, os alunos podem expressar, de forma qualitativa, o que acontece no fenômeno observado, sem utilizar maiores representações matemáticas. Com uma coleta de dados de diferentes instantes da ocorrência do fenômeno, podem organizar estes dados em uma tabela ou na forma de gráfico; e no estágio mais avançado da modelagem, vão tratar de relações entre variáveis, a ser expressa através de uma função. Na fase da validação, o aluno busca verificar se o modelo construído se aproxima de fato da realidade analisada. Nesta fase é interessante testar se os valores encontrados na coleta de dados se aproximam dos valores dados agora através do modelo, e também é interessante analisar as restrições do fenômeno para definir o alcance do modelo. Muitas vezes a função que modela o fenômeno deve ser tomada em domínio restrito, embora matematicamente não apresente esta necessidade de restrição; e mesmo neste domínio restrito, muitas vezes a realidade do fenômeno tem descontinuidades que não se refletem no modelo. Esta análise e confronto do modelo com a realidade ilustram, para o aluno, o quanto uma crescente fidelidade do modelo à realidade depende de crescente uso poderosas ferramentas matemáticas.

De acordo com Bednarz e outros (1996), o trabalho com modelagem, no que diz respeito à aprendizagem da álgebra escolar, tem seu ponto crucial na formulação do modelo:

> *[...] O reconhecimento precoce da pertinência e validade do novo objeto matemático, álgebra, requer que se coloquem os estudantes em situações que permitam que eles construam significado para várias representações (gráficos, equações, etc) e de usá-los com uma certa flexibilidade na descrição e interpretação de fenômenos físicos ou eventos. O ponto crucial do processo de modelagem é a fase de formulação que resulta na criação do modelo (expressão simbólica, gráfico, tabela de valores, etc) na base de hipóteses.* (p. 10)

Janvier, Claude (1996) descreve que a modelagem tem um status duplo: "*Ela tem um caráter abstrato, pois se situa em termos matemáticos e permanece independente da realidade da qual emerge, e um caráter concreto, pois sua função é representar objetos concretos ou relações que podem ser medidos*" (p. 228). Ainda de acordo com Janvier, a modelagem é uma atividade rara na álgebra escolar. Sendo uma atividade de experimentação, pode ser mais trabalhosa em seu desenvolvimento, necessitando constantemente de intervenções do professor, e de muita troca de idéias, de formulação de hipóteses e comprovação/refutação das mesmas. É uma atividade trabalhosa, mas que muito contribui para o entendimento e valorização da Matemática como uma ferramenta que ajuda a resolver problemas.

Finalizamos esta seção destacando que na escola, a modelagem exige matemática de natureza elementar, ao trabalhar com fenômenos que se explicam através de modelos lineares, quadráticos ou exponenciais. Mas mesmo na construção de modelos simples, grandes podem ser os ganhos formativos para os alunos que experienciam o processo de construção de um modelo matemático: a identificação das variáveis, o estabelecimento de relações, a explicitação de leis funcionais, a construção de tabelas e gráficos. Daí a importância de se contemplar o trabalho com modelagem na escola, desde muito cedo no Ensino Fundamental.

3.2.4 O pensamento algébrico nas relações funcionais

Iniciamos colocando em destaque as palavras de Félix Klein (1849-1925), matemático alemão, durante toda sua vida também preocupado com as questões de ensino e aprendizagem da matemática. No ano de 1907, já dizia Klein [26]:

> *[...] Só o precoce afeiçoamento à idéia de funcionalidade trará pleno benefício aos colegiais. Sem dúvida, não se cogita, naquelas primeiras séries, de um estudo completo, mas da idéia de uma natural associação de suas séries de valores numéricos determinados, da qual, como que nasce insensivelmente, a imagem da continuidade.*

Diferentes pesquisas apontam para o aspecto formativo, especialmente no contexto da álgebra, que pode estar presente no ensino de funções. Para Kieran et al (1996):

> [...] *um enfoque funcional para a álgebra não significa necessariamente o estudo de funções. Deve, entretanto, acarretar no uso de letras como variáveis, em oposição a incógnitas. Por exemplo, a expressão **3x+5** pode ser vista como uma função, que transforma cada número **x** em outro número. Assim, **x** é interpretado como uma variável, pois pode assumir uma amplitude de valores. Em outro sentido, quando duas funções como **3x+5** e **23** são igualadas (i.e., **3x+5=23**), **x** é claramente interpretado como uma incógnita – o valor pelo qual as duas funções se equivalem. Mas há mais num enfoque funcional do que ver letras como variáveis. Também implica em, por exemplo, ver uma função da perspectiva da relação entre os valores de **x** e os valores funcionais correspondentes, isto é, da perspectiva de como uma mudança em **x** produz uma variação particular nos valores da função*. (p.257)

O estudo de Kieran et al (1996, pág. 275), usando o ambiente computacional CARAPACE[27] para uma introdução funcional ao pensamento algébrico, e que utilizava letras como variáveis, indicou que os alunos que iniciavam seu contato com variáveis não apresentavam maiores dificuldades ao se defrontar com a idéia de letras como incógnitas. Segundo este estudo, parecem não haver obstáculos cognitivos na transição de variável para incógnita, diferente do que ocorre na transição de incógnita para variável.

---

[26] http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao_ciro_braga.pdf *(apud ROXO, 1937, apud Braga 2003)*

[27] CARAPACE – Software desenvolvido por um programa de pesquisa, em um ambiente de resolução de problemas funcionais que apresenta três representações: algoritmos, tabelas e gráficos. N. Bednarz et al, Approaches to Algebra, 257-293.

A idéia de função se torna interessante, não tanto no sentido da notação algébrica, mas porque estabelece uma relação entre variáveis. Quando o aluno identifica o que a mudança do valor de uma variável implica na alteração de outra variável, a representação desta relação se torna um aspecto interessante para justificar a introdução à linguagem algébrica.

Janvier (1996) destaca que muitos autores sugerem a introdução à álgebra através de uma perspectiva funcional. Porém, chama a atenção para algumas dificuldades presentes, especialmente quanto à notação, quando usamos $y=3x+2$ ou $y=f(x)=3x+2$ ou ainda $f: x \rightarrow 3x+2$, o que pode confundir o aluno. O mesmo autor chama a atenção que é que é importante bem distinguir variáveis e incógnitas, pois são dois modos diferentes de interpretar o uso das letras, quando se utiliza a perspectiva das relações funcionais para a introdução à álgebra.

Braga (2003[28], pág. 54) defende uma introdução gradual, ao longo da formação escolar, do conceito de função:

> *[...] O pensamento funcional... deveria ser cultivado desde as séries iniciais com a atuação do aluno sobre a idéia de variação e dependência. Aos poucos, com o progressivo e constante trânsito pelas representações tabular, gráfica e analítica de função, o educando caminharia em direção a sua formação funcional.*

Nas diferentes perspectivas analisadas podemos ver que a perspectiva da generalização, assim como a perspectiva da modelagem, também trabalha com a perspectiva das relações funcionais. A resolução de problemas também pode fazer uso de relações funcionais e de modelagem; assim como também pode ser decorrente de uma situação de generalização.

Bednarz, Kieran e Lee (1996, pág. 4) citam Bell e Vergnaud:

> *Somente um equilíbrio entre diferentes componentes e várias situações que dão significado a eles, podem capacitar os estudantes a compreender profundamente a pertinência da álgebra, sua estrutura, a significância de conceitos algébricos fundamentais como variável, e o uso de raciocínio algébrico.*

Em Tinoco (1995), temos uma pesquisa entre professores sobre qual seria o momento ideal para o início do trabalho com funções. O trabalho tem como um de seus

---

[28] http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao_ciro_braga.pdf

objetivos "despertar nos professores de Ensino Fundamental e Médio a consciência de que, ao longo do trabalho com os tópicos usualmente incluídos nos programas, é possível desenvolver as idéias essenciais à construção do conceito de função". Nosso trabalho não visa o estudo formal de funções na 6ª série, mas justamente trabalhar com algumas idéias essenciais das relações funcionais, e a partir disto introduzir noções algébricas.

Filloy e Sutherland (1996) ressaltam a importância de um currículo equilibrado. Contudo, apontam que o erro mais comum é tentar ser totalmente eclético, dando o mesmo peso para os diferentes componentes, para as diferentes visões de matemática. Neste sentido, na próxima seção vamos tratar de definir as nossas escolhas didáticas.

3.3 Nossas escolhas didáticas

Na seção anterior tratamos dos diferentes enfoques que podem se fazer presentes no ensino e aprendizagem da álgebra. E conforme já mencionado, esses enfoques não são, necessariamente, excludentes.

A análise dos livros didáticos, feita nas seções 2.2.1 e 2.2.2, nos mostrou que a resolução de problemas é um dos enfoques mais presentes na escola – inicia com a apresentação do enunciado de um problema, o qual o aluno deve transcrever para a linguagem algébrica na forma de uma equação, a ser então resolvida. O uso da resolução de problemas para motivar a iniciação algébrica se torna pertinente, desde que sejam tomados cuidados quanto à estrutura dos problemas, conforme discussão apresentada na seção 2.2.3.

Como vimos, a idéia da generalização pode ser trabalhada no contexto bem específico de determinação de regularidades em seqüências de números ou em seqüências geométricas de pontos. Mas também é uma idéia que se faz presente quando se buscam regularidades para construir um modelo matemático ou quando se estabelecem expressões algébricas que indicam a variação entre grandezas.

Nos parece que é a na perspectiva das relações funcionais que podemos contemplar de forma bastante equilibrada todas as demais perspectivas, em especial aquela voltada para modelagem. Assim sendo, fazemos a nossa primeira escolha didática: tomar a perspectiva das relações funcionais, aqui incluindo a modelagem, como um caminho para a introdução a álgebra na sexta séria do ensino fundamental.

A abordagem via modelagem, como já escrevemos anteriormente, é uma atividade prática, de experimentação, de coleta de dados, e proporciona momentos muito ricos para discussão em sala de aula. Para a execução de uma atividade de modelagem é necessário se fazer uma preparação, escolher alguma situação onde os alunos possam efetuar medições, organizando-as em uma tabela. Depois de trabalhar com a tabela, os alunos podem estabelecer relação entre os valores encontrados, descobrindo uma regra de comportamento, a ser expressa de forma algébrica.

Nossa segunda escolha didática se apóia em princípios tomados da "Educação Matemática Realista (EMR)"[29]. A EMR foi desenvolvida no Instituto Freudenthal da Universidade de Utretch - Holanda[30], nos meados da década de 70, como uma reação de educadores à matemática moderna, preocupados com a excessiva ênfase que começou a ser dada às estruturas e formalismos matemáticos no ensino da matemática escolar. A idéia central da EMR é que a matemática é uma atividade humana e, assim sendo, se apresenta em constante renovação. Um dos princípios da EMR é que a matemática, portanto, não deve ser transmitida, mas descoberta e reinventada pelos alunos, deve ser vivida como uma atividade humana, para que se torne então um conhecimento pleno de significado.

A EMR destaca, no processo de aprendizagem da matemática, dois componentes: o horizontal e o vertical. No horizontal, os alunos utilizam ferramentas matemáticas para organizar e resolver problemas. No vertical, há o processo de reorganização do conhecimento construído pelo aluno, dentro do sistema matemático, tais como a descoberta de atalhos e conexões entre conceitos e estratégias e a aplicação destas descobertas em outros problemas a serem resolvidos. A palavra "realista" pode ser interpretada de forma equivocada, no sentido de levar-nos a suposição de que a EMR advoga o ensino da matemática sempre a partir de situações-problemas tomadas da realidade. O sentido desta palavra é mais amplo, e significa trabalhar com situações matemáticas que o aluno possa imaginar, compreender. A palavra "imaginar", na Língua Holandesa, se escreve "zich REALISEren", o que pode causar a confusão. Assim, a EMR não aborda apenas a Matemática proveniente de situações reais, mas a Matemática que o aluno tem condições de compreender – a Matemática que faz sentido para o aluno.

Com o propósito de contemplar um processo de aprendizagem em contexto "realista", o Instituto Freudhental vem fazendo uso de tecnologia informática, especialmente na forma de "objetos de aprendizagem". Um "objeto de aprendizagem" se caracteriza por ser

---

[29] http://www.fi.uu.nl/en/projects/realme.html.

[30] O Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education tem como objetivo traçar diretrizes e produzir material visando a melhoria do ensino de matemática e de ciências. Site em http://www.fi.uu.nl/en/

um pequeno software (*applet*), de natureza interativa, voltado para um aprendizado de conteúdo bastante específico. O site do Instituto abriga uma extensa coletânea destes objetos [31], em tópicos de aritmética, álgebra, geometria, funções, matemática discreta, entre outros assuntos. A figura 22 traz alguns dos objetos disponibilizados para trabalhar com álgebra.

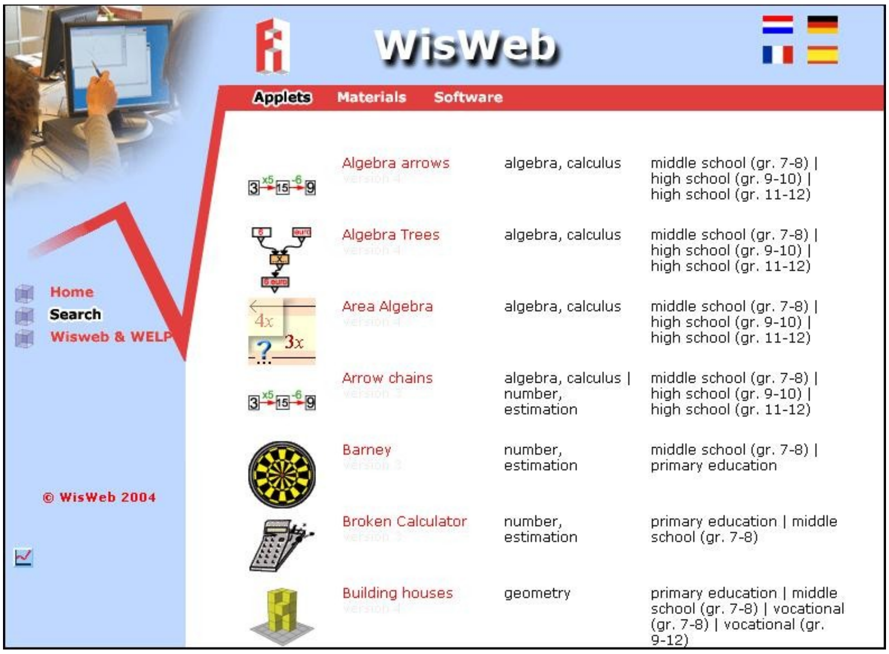


Figura 22 – Aplicativos desenvolvidos pelo Instituto Freudenthal

Com esta breve apresentação da EMR e dos objetos de aprendizagem explicitamos a nossa segunda escolha didática: tomando como princípios aqueles que definem a EMR, nisso fazendo uso de objeto de aprendizagem, diferentes situações problemas serão propostas aos alunos, tendo como objetivo a construção de relações funcionais e modelos matemáticos.

No que segue, apresentaremos o objeto de aprendizagem “Máquinas Algébricas”[32], por nós escolhido para ser usado na proposta didática porque dispõe de uma estrutura que provoca, de forma natural e portanto em contexto “realista”, a construção do conceito de função, nisso fazendo uso da linguagem algébrica.

O objeto apresenta uma área de trabalho, na região cinza da Figura 23, onde são disponibilizadas “caixas brancas” para entrada e de saída de dados e “caixas laranja” que disponibilizam diferentes operações (soma, diferença, multiplicação, divisão, elevar ao

[31] Em http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/

[32] Este objeto foi desenvolvido no Instituto Freudenthal e, através de uma parceria, estamos disponibilizando uma versão em português. A versão em português pode ser acessada no site EDUMATEC, em http://www.edumatec.mat.ufrgs.br, através dos links Atividades / Atividades Diversas de Funções e Gráficos / Máquinas Algébricas para o Ensino Fundamental

quadrado, extrair a raiz quadrada, operar com potências). As operações são implementadas na região branca e o aluno pode utilizar livremente as "caixas brancas e laranjas", ligando-as com setas conforme a ordem de operações a serem efetuadas.

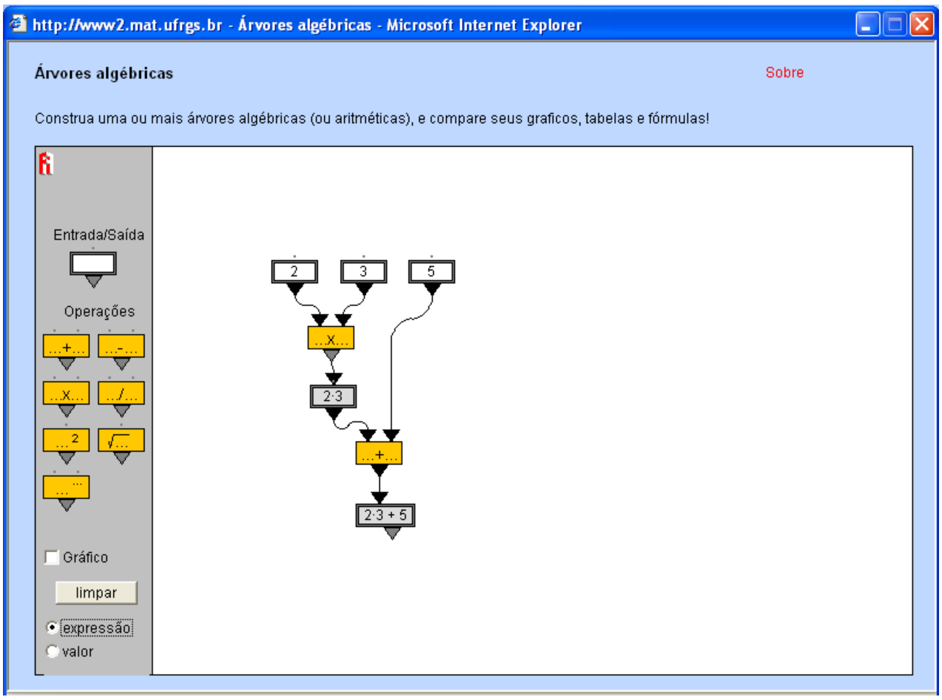


Figura 23 – Interface do objeto "Árvores algébricas"

Na figura 23 ilustramos o procedimento que implementa (2 x 3 + 5), nisso usando três "caixas brancas" onde são colocados os dados 2, 3 e 5, e duas "caixas laranjas" que indicam as operações de multiplicação e soma. Quando se trabalha somente com dados numéricos, tem-se a opção de resposta na forma "valor" ou na forma "expressão".

Usando as caixas brancas e laranjas podemos também obter expressões algébricas, associadas a representações em tabela e gráfico. A figura 24 ilustra a "máquina" que corresponde a expressão 2.a + 5, acompanhada de tabela de valores e de representação gráfica.

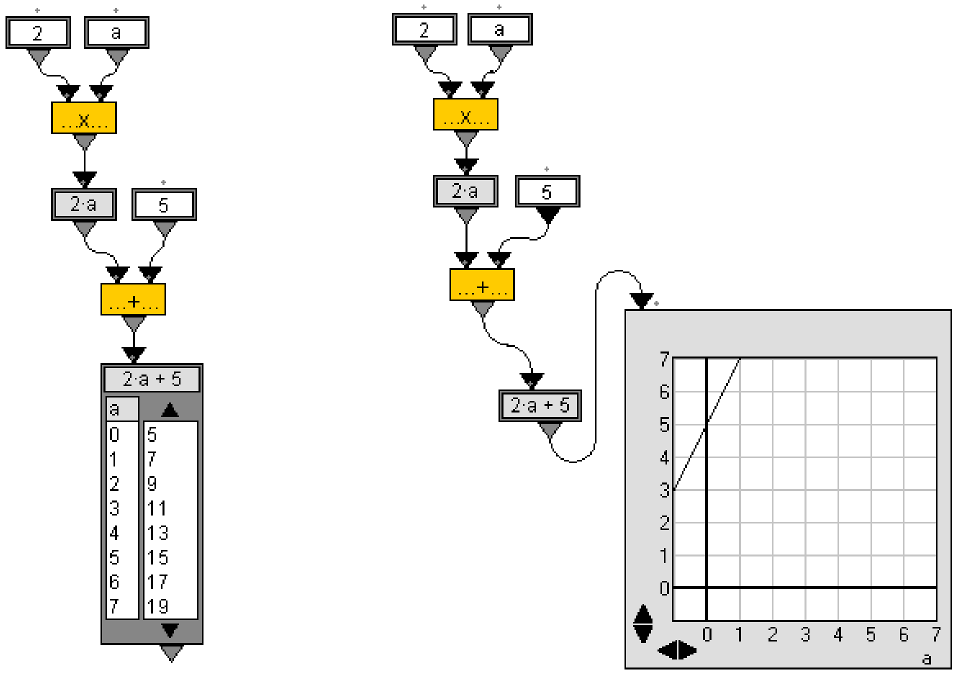


Figura 24 – Opções de tabela e de gráfico

Uma vez que a tabela e o gráfico de uma função estão visíveis, é possível também clicar em um determinado valor da tabela, e o aplicativo indica o ponto no gráfico. Várias funções podem ser plotadas ao mesmo tempo no gráfico (figura 25), mas é necessário que todas usem a mesma variável.

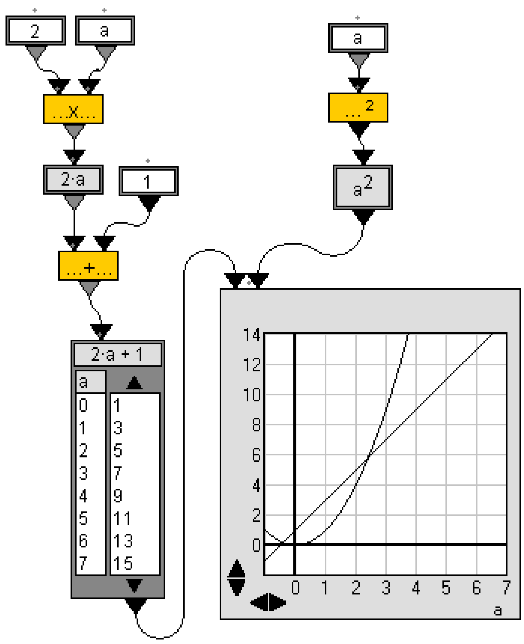


Figura 25 – diferentes funções no mesmo gráfico

Nós acreditamos que o aplicativo oferece um ganho no aprendizado. Além de todas as ferramentas que ele oferece, cremos que o essencial é a possibilidade de trabalhar com a estrutura de um problema. Ao invés de iniciar a introdução algébrica já introduzindo o uso de letras, desejamos propiciar ao aluno situações onde ele perceba a necessidade ou utilidade de operar com valores desconhecidos.

O aplicativo permite que se monte toda a estrutura de resolução de um problema, sem que se tenham todos os valores envolvidos. Esse ponto é um dos principais pontos de nosso trabalho. Queremos que o aluno consiga, diante de um determinado problema, relatar todos os passos, todos os cálculos necessários para a resolução do problema, mesmo que alguns valores não estejam disponíveis. Nossa idéia é de partir de situação onde certos valores são informados, para que o aluno chegue à estrutura necessária, ou seja, as operações necessárias para resolver o problema. Com o aplicativo "Árvores Algébricas", o aluno pode entender o processo de resolução do problema. A habilidade do aluno de representar essa estrutura pode ser o início ao pensamento algébrico.

As escolhas didáticas feitas nesta seção serão o ponto de partida para a construção da proposta didática, assunto do próximo capitulo.

4 CONSTRUÇÃO, REALIZAÇÃO E AVALIAÇÃO DE UMA PROPOSTA PARA INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA NA ESCOLA

Neste capítulo apresentaremos a nossa proposta para introdução à álgebra na sexta série do ensino fundamental e a sua implementação, acompanhada de nossas expectativas e avaliações, de modo a fundamentar a sua viabilidade. Como metodologia de investigação escolhemos a Engenharia Didática, porque julgamos ferramenta apropriada para nosso estudo, visto estar focada diretamente na prática didática. Esta metodologia, além de orientar as diferentes etapas do trabalho, também permite que ao final tenha-se um produto didático organizado, testado e ajustado, de modo que possa ser utilizado por outros professores. Na seção 4.1 faremos considerações sobre a engenharia didática; na seção 4.2 faremos considerações sobre a proposta concebida. A parte experimental da proposta, acompanhada de análises, é apresentada na seção 4.3.

4.1 Sobre a Engenharia Didática

Escolhemos a engenharia didática como metodologia de pesquisa e justificamos com as palavras de Artigue (1996):

> A engenharia didática vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais nada por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de seqüências de ensino. (p. 196)

O desenrolar da Engenharia Didática se constitui a partir da escolha de um ponto problemático do sistema didático. Segundo Artigue (1996):

> Considera-se um ponto do sistema didático, cujo funcionamento parece, por razões que podem ser de natureza diversa, pouco satisfatório. Analise-se este ponto do funcionamento e os constrangimentos (condições) que tendem a fazer dele um ponto de equilíbrio do sistema e depois, jogando com estes constrangimentos (condições), procura-se determinar as condições de existência de um ponto de funcionamento mais satisfatório.

A partir da escolha do problema para investigação, acontecem as quatro fases da Engenharia: análises prévias; concepção da situação didática, análise *a priori* e formulação de hipótese; experimentação; análise *a posteriori* e validação de hipóteses.

Na fase das "Análises Prévias" são considerados diferentes aspectos: o ensino habitual e seus efeitos; as concepções dos alunos, suas dificuldades e obstáculos que marcam o processo de aprendizagem; os aspectos epistemológicos relativos aos conteúdos de Matemática.

Na segunda fase, da "Concepção da situação didática, análise *a priori* e formulação de hipótese*",* ocorre a tomada de decisões pelo investigador. É a concepção da seqüência de atividades que vão subsidiar a situação didática a ser implementada. Além da descrição da concepção das atividades que compõem a seqüência didática, também há uma projeção, uma previsão sobre a experiência a ser realizada, seu impacto no ensino, e também uma previsão sobre o comportamento do aluno, suas estratégias de resolução – esta é a análise *a priori*. Esta análise fundamenta a pertinência da seqüência didática e a formulação de hipótese a ser colocada sob validação ao longo da fase de experimentação.

A **"**Experimentação**",** a terceira fase, é o momento de execução da seqüência de atividades concebida. Durante o desenvolvimento da experiência o professor documenta e analisa o seu desenrolar e desta forma constitui a sua **"**Análise *a posteriori***"** de forma a validar ou refutar a hipótese formulada. Na Engenharia Didática a validação da experiência não se dá na comparação com outros grupos que não foram submetidos à seqüência de atividades proposta, como em outras metodologias, mas na confrontação das análises *a priori* e a *posteriori.*

No nosso trabalho o ponto problemático escolhido, já anunciado anteriormente, é a dificuldade dos alunos no entendimento da linguagem algébrica, no momento da introdução ao assunto na escola, o que é feito geralmente na sexta série do Ensino Fundamental.

Nos capítulos 2 e 3 foram feitas as **"***Analises prévias*" visando **"***determinar as condições de existência de um ponto de funcionamento mais satisfatório",* conforme colocado em destaque por Artigue (1996). No capítulo 2 tratamos: das características do ensino da álgebra praticado na escola, no momento de introdução, que acontece geralmente na sexta série; das dificuldades enfrentadas pelos alunos e dos seus fracos desempenhos nos exames do SAEB. No capítulo 3, tratamos: das diretrizes para o ensino da álgebra, dadas em diferentes documentos; das diferentes possibilidades para a introdução ao pensamento algébrico; das nossas primeiras decisões didáticas, a serem retomadas na próxima seção.

Tendo como propósito facilitar a leitura deste trabalho, adiantamos que:

- na seção 4.2 tratamos da "Concepção da situação didática e análise *a priori"* nos seus aspectos mais gerais e enunciamos a hipótese a ser validada no momento da experiência;

- na seção 4.3, tratamos do desenrolar da experiência, integrando as Fases 2, 3 e 4 da Engenharia Didática. São apresentadas, encontro a encontro, as atividades concebidas acompanhadas de análises *a priori* específicas (fase 2), seguidas de análise *a posteriori* da experiência vivenciada pelos alunos (fases 3 e 4).

4.2 A concepção da situação didática[33]

Nossas escolhas didáticas iniciais já foram explicitadas no capítulo anterior, na seção 3.3, e aqui relembramos:

- a primeira escolha é trabalhar com a perspectiva das relações funcionais, aqui incluindo a modelagem matemática, na introdução à álgebra na sexta série do ensino fundamental;

- a segunda escolha, tomando como princípios aqueles que caracterizam a Educação Matemática Realista, é propor situações-problema que provoquem a construção de relações funcionais e modelos matemáticos, nisso usando o aplicativo "Árvores Algébricas".

Nos apoiando na educação matemática realista, tomamos como pressuposto que, no processe de ensino/aprendizagem, o aluno deve explorar a matemática e inventá-la, e desta forma o conteúdo matemático se torna compreensível.

Assim sendo, vamos propor uma seqüência de atividades que proporcione um aprendizado significativo da idéia de variável, da escrita algébrica, das diferentes formas (tabelas, gráficos, expressões algébricas) de representar uma situação-problema. A utilização do aplicativo "Árvores Algébricas" vai permitir que o aluno expresse, de uma maneira diferente, as etapas de resolução de um dado problema. Um aspecto interessante do aplicativo é que o aluno não precisa se preocupar em efetuar cálculos, sendo apenas necessário que identifique as etapas de resolução do problema, deixando para o computador o cálculo, quando for o caso. Portanto, o foco não é o cálculo em si, mas a estrutura de resolução do problema.

A seqüência de atividades preparadas para o uso do aplicativo "Árvores Algébricas", detalhadas na próxima seção, foram projetadas da seguinte forma: inicialmente buscam a familiarização do aluno com o aplicativo, para depois tentar levar o aluno à

[33] Segundo Brousseau (1986) , "situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição".

percepção de que a estrutura por ele montada serve para a resolução de diferentes instâncias do problema, sendo que alguns dos valores com os quais trabalha são fixos, enquanto outros variam. O reconhecimento, por parte do aluno, de que o valor particular da instância do problema pode variar é passo importante para a idéia de expressão algébrica. A partir das diferentes ”máquinas” construídas para resolver instâncias particulares do problema, quer-se que o aluno entenda que existe uma "máquina generalizadora" guardando a relação funcional presente no problema, a ser então expressa com a linguagem da álgebra. Esse enfoque que pode ser dado no aplicativo à estrutura do problema afasta um pouco o aluno da visão puramente aritmética do problema, buscando a identificação dos componentes envolvidos na situação e as relações entre eles, direcionando para a idéia generalizadora. Assim, o aluno cria uma máquina que funciona automaticamente, dados os valores de entrada, deixando de lado neste momento o cálculo, preocupando-se apenas com a estrutura.

Uma atividade de modelagem matemática faz parte da seqüência proposta: os alunos realizam uma experiência prática, fazendo medições, coletando informações, construindo tabelas e gráficos, representando a modelagem do problema de diferentes formas, formulando hipóteses e respondendo a determinados questionamentos. Essa atividade de modelagem também levará à noção de relação entre variáveis, culminando com a introdução do uso da letra na representação de uma quantidade variável.

A seqüência proposta contempla um processo de aprendizagem com crescente exigência quanto ao uso da linguagem algébrica. De início cria-se a necessidade da generalização, ainda que de forma intuitiva; depois vem a exigência de expressar as relações funcionais através da linguagem matemática, usando diferentes representações – expressão algébrica, tabelas, gráficos.

Como vimos no capítulo 3, diferentes podem ser as perspectivas para introduzir o aluno ao pensamento algébrico - a generalização, a resolução de problemas, a modelagem, a relação funcional. Nossa proposta trabalha com o enfoque funcional, aqui incluindo a modelagem. Contudo, podemos reconhecer a presença dos outros dois enfoques. A partir desta escolha didática e da análise *a priori* feita acima, ainda que de forma bastante ampla, enunciamos a hipótese a ser validada no desenrolar da experimentação: acreditamos que ao desenvolver no aluno a habilidade de expressar relações entre variáveis estamos propiciando uma introdução ao pensamento algébrico de forma tal que o "uso das letras" se torna significativo e traz a compreensão da necessidade e da importância da álgebra. Para avaliar a possibilidade de validação desta hipótese, as análise a posteriores relativas as aprendizagens dos alunos serão feitas a luz dos seguintes critérios:

1. Análise do processo de construção de máquinas algébricas generalizadas.
2. Análise do processo de expressão de máquinas algébricas em linguagem algébrica.
3. Análise do processo de construção e interpretação de gráficos.

4.3 A experimentação

A seqüência de atividades concebida foi implementada com uma turma de 6ª série, do turno da tarde do Centro de Ensino Médio Pastor Dohms, escola privada de Porto Alegre. A turma tinha um total de 30 alunos, com idades variando entre 11 e 13 anos. O professor da turma era o autor desta investigação.

As atividades foram realizadas durante duas semanas de aula, no período de 16 a 27 de outubro de 2006. Na semana havia quatro períodos de matemática, cada um com duração de 55 minutos. Nas terças e quartas havia apenas um período, e na sexta havia dois períodos conjugados.

A dinâmica de trabalho foi a seguinte:

- cinco dos encontros aconteceram no Laboratório de Informática da Escola, com os alunos trabalhando em duplas, na sua grande maioria, e alguns poucos trabalhando individualmente. O Laboratório utilizado dispunha de 20 computadores e um projetor multimídia.

- um encontro foi reservado para a atividade de modelagem matemática e, dada a sua natureza aconteceu em sala de aula, com os alunos dispostos em grupos de pelo menos quatro, em torno da mesa onde foi feita a experiência de medição, coleta de dados, construção de tabela, construção do modelo matemático.

- em todas as atividades os alunos receberam uma “folha guia de atividade”, com a situação-problema a ser explorada e com espaços em branco para escreverem suas respostas, muitas delas a serem transcrições das “Máquinas Algébricas” construídas no aplicativo. A coletânea de “folha guia de atividade” está no Anexo 1.

- ao final de cada encontro o professor (autor deste trabalho) conduziu momentos de discussão coletiva, de forma a sistematizar e “matematizar” o conhecimento produzido pelos alunos nos momentos de trabalho em grupo (no sentido de aproximá-lo do conhecimento matemático socialmente determinado);

A concepção inicial da seqüência de atividades foi readaptada ao longo da experimentação, com a reestruturação de algumas atividades, isto porque sentimos a necessidade de intervir em momentos que não estavam previstos, de forma a esclarecer as dúvidas e questionamentos que se apresentavam nos grupos. O quadro a seguir (tabela 5) sumariza os seis encontros que constituíram a fase de experimentação da Engenharia Didática.

Encontro	Atividades	Duração	Local
1	Parque de Diversões Arco-íris Posto de Gasolina do Darci	55 min	Lab. Inf.
2	Máquinas impressoras	55 min	Lab. Inf.
3	Bolinhas na água (modelagem matemática)	110 min	Sala de aula
4	Máquinas impressoras (finalização) Bolinhas na água com “Máquinas Algébricas”	55 min	Lab. Inf.
5	Pizzaria Sabor Jovem	55 min	Lab. Inf.
6	Discussão e Máquinas Algébricas	110 min	Lab. Inf.

Tabela 5 - relação das atividades por encontro

A análise *a posteriori* foi subsidiada pela coletânea de “folha guia de atividade” e pelo registro de observações feitas pelo professor durante os momentos de trabalho dos alunos. A seguir apresentamos o desenrolar dos seis encontros. As figuras ao longo do texto correspondem a produção de duplas, e foram escolhidas por ilustrarem bem o pensamento do aluno.

Encontro 1

Atividade: “Parque de diversões Arco-íris”

Análise *a priori* - esta atividade visa, também, a familiarização com o aplicativo “Máquinas Algébricas”, e assim sendo a situação-problema é bastante simples:

“Um parque de diversões cobra R$5,00 pelo ingresso e R$3,00 por brinquedo.

(1) Quanto Carla gastará se andar em 7 brinquedos? E se andar em 12?

(2) Se Vitor gastou R$ 56,00, em quantos brinquedos andou? E se Daniela tinha R$ 40,00, em quantos brinquedos poderia andar?”

Para responder as perguntas em (1), as quais exigem raciocínios aritméticos idênticos, espera-se que após a construção da primeira “máquina” os alunos entendam que existe uma “máquina generalizadora” que responde a segunda pergunta e todas as demais similares as duas perguntas. As perguntas em (2) provocam para construção da “máquina inversa”, e de novo espera-se que os alunos entendam que existe uma “máquina generalizadora”. A observar: será que os alunos montarão repetidas vezes “máquinas” de mesma estrutura ou utilizarão a “máquina generalizadora”? Na construção da “máquina” vão considerar o valor do ingresso? Como vão lidar com a última pergunta onde (40-5)/3 não é um número inteiro?

Análise *a posteriori:* o encontro, no Laboratório de Informática, iniciou com uma breve explicação sobre o funcionamento do aplicativo “Máquinas Algébricas”, o qual foi logo bem entendido pelos alunos. Na explicação foi ressaltado que deveriam sempre fazer a construção das máquinas e fazer o desenho da máquina na “folha guia de atividade”, e que os cálculos para a resposta final deveriam ficar por conta do computador.

Apesar da estrutura para responder as perguntas em (1) ser a mesma, a maioria dos alunos apagou a primeira “máquina” feita, antes de ler a segunda pergunta. Alguns alunos fizeram os cálculos na folha, na forma usual já conhecida para resolver problemas aritméticos ($5 + 7 \cdot 3 = 26$), mesmo tendo sido solicitado que deixassem o cálculo com computador. A grande maioria construiu, corretamente, a “máquina” com a estrutura dada na figura 26.

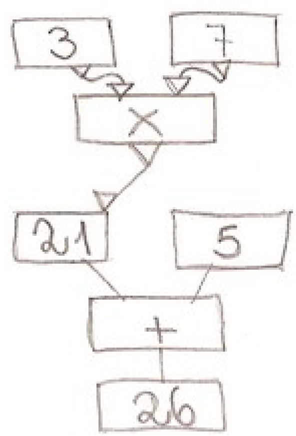


Figura 26 – resolução com máquina algébrica do problema 1 do parque de diversões

Para responder a terceira pergunta (*Se Vitor gastou R$ 56,00, em quantos brinquedos andou?*) nem todos os alunos construíram a “máquina inversa”, dada na figura 27. Cerca de um terço dos alunos utilizou a máquina criada para responder a pergunta inicial e testou com alguns valores até chegar à resposta (figura 28).

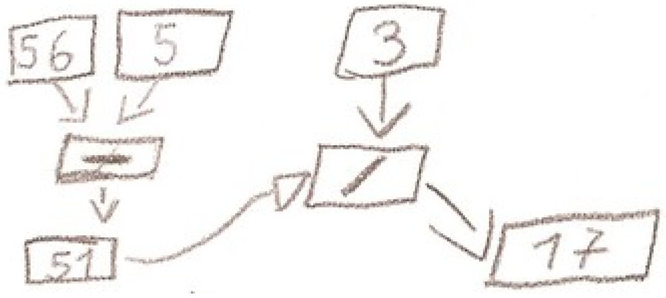


Figura 27 – problema 3 resolvido por máquina inversa

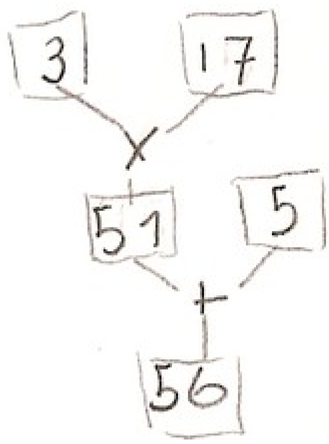


Figura 28 – problema 3 resolvido por tentativas

Na quarta questão (*E se Daniela tinha R$ 40,00, em quantos brinquedos poderia andar*?), a maioria construiu a máquina com operações inversas chegando na resposta 11,667, e interpretando corretamente que Daniela poderia andar em 11 brinquedos (figura 29). Três duplas resolveram por tentativas, sem construir a máquina inversa, como mostra a figura 30; foram testados diferentes valores para a quantidade de brinquedos até encontrar o maior valor inteiro inferior a 40 na caixa de resposta final.

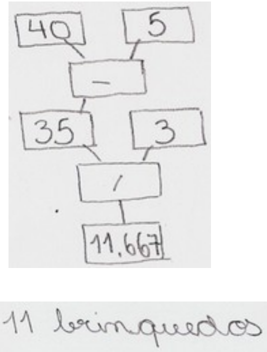


Figura 29 – problema 4 resolvido pela máquina inversa

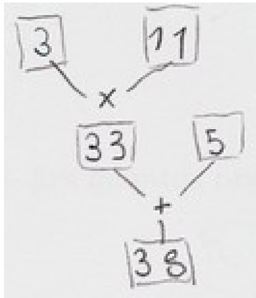


Figura 30 – problema 4 resolvido por tentativas

A resolução por tentativas foi eficiente, mas não eficaz, pois necessita a constante troca de valores até chegar-se à resposta. Já a resolução pelas operações inversas traz apenas a necessidade de que o aluno monte a estrutura, deixando o cálculo para o computador, com resultado a ser então analisado.

Atividade "Posto de Gasolina do Darci"

Análise *a priori*: a atividade, de inicio, guarda estrutura de resolução similar à atividade do Encontro 1, mas depois exige raciocínios mais complexos, ao aumentar os dados de informação que fazem parte das perguntas colocadas. Nesta atividade os alunos precisam trabalhar com números decimais, o que inibe a tentativa do aluno de realizar os cálculos diretamente na folha. São perguntas envolvendo: o preço do litro de combustível, volume, distância percorrida e consumo do veículo (aqui uma taxa de variação). O início da atividade é:

> (1) "*Um posto de gasolina vende combustível a R$2,75 o litro. Quanto um cliente vai pagar se comprar 6 litros? E se comprar 12 litros? E se for abastecer 30 litros*"?
>
> (2) "*E se tiver R$10,00 para abastecer, quantos litros vai comprar? E com R$60,00? E com R$95,00*"?

Como antes, cada grupo de três perguntas (1 e 2) é respondido, respectivamente, com a mesma estrutura de raciocínio, sendo que os itens 1 e 2 envolvem relações uma a inversa da outra. A observar: os alunos construirão, sucessivamente, três máquinas ou utilizarão apenas uma para efetuar os três cálculos correspondentes às perguntas similares?

A atividade avança com perguntas mais complexas, pois agora a constante no problema é a razão "9 km por litro":

> (3) *O carro de Jairo faz 9 quilômetros com um litro de combustível. Quantos quilômetros o carro dele faz com 7 litros? E com 12 litros? E com 33 litros?*
>
> (4) *Se Jairo fizer uma viagem de 90 quilômetros, quantos litros vai gastar? E quantos reais vai gastar*?
>
> (5) *Se a viagem for de 330 quilômetros, quantos reais vai gastar?*

Em (3) ainda temos uma situação de repetição já conhecida. Já em (4) tem uma provocação para construção de máquinas interligadas: a partir da distância, calcular o volume de combustível e depois o valor gasto. Em (5) é a provocação para a máquina generalizadora que integra todos os dados do problema.

A atividade finaliza com perguntas que tem como propósito provocar uma ampla generalização, usando novamente relações inversas uma da outra:

> *(6) Se o preço do litro cair para R$2,63, e Bruna fizer uma viagem de 400 km com seu carro que faz 10,5 km por litro, quanto ela vai gastar?*
>
> (7) *Tiago quer passear com seu Fusca 68, que faz 12 km por litro. O carro estava com tanque vazio, então ele gastou R$90,00 para abastecê-lo em um posto em que a gasolina comum custa R$2,40 o litro. Assim, se Tiago ficar dirigindo até acabar o combustível, qual deve ser a distância percorrida pelo Fusca*?

A seqüência de perguntas, de (1) à (7), foi pensada de forma a ser provocadora de raciocínios generalizadores, em situações gradativamente mais complexas quanto à quantidade de informação. O propósito é fazer com que os alunos entendam a versatilidade das máquinas algébricas quando caixas de entrada são tratadas como variáveis. Queremos levar o aluno a essa percepção, através do uso de máquina já criada.

<u>Análise *a posteriori:*</u> como a atividade trazia números decimais, os alunos deixaram com o computador os cálculos a serem efetuados. Os alunos, na grande maioria, iniciam criando várias máquinas no computador para responder perguntas de (1), conforme o registro feito na figura 4.6. Mas alguns alunos já estruturam máquinas com princípios generalizadores, conforme indica a organização de caixas de entrada dos valores 6,12 e 30, nas máquinas interligadas registradas na figura 4.7.

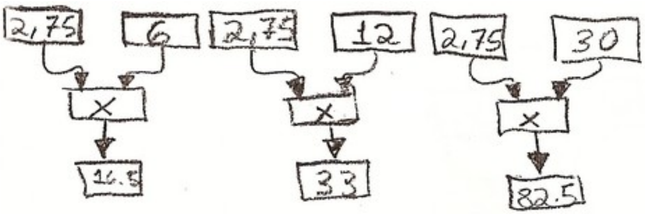


Figura 31 – problema 1 resolvido por várias máquinas

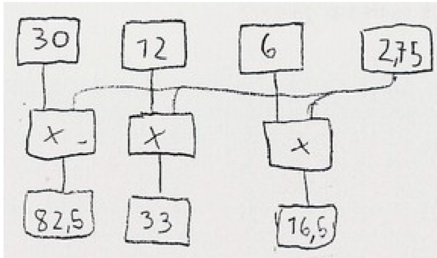


Figura 32 – problema 1 resolvido por máquinas interligadas

Novamente, para responder o grupo de perguntas de (2), onde era necessário dividir o valor gasto, em reais, pelo valor de um litro de gasolina, a maioria desenhou três máquinas; ainda são poucos os alunos que trabalharam com idéias generalizadoras, como a registrada na máquina da figura 33.

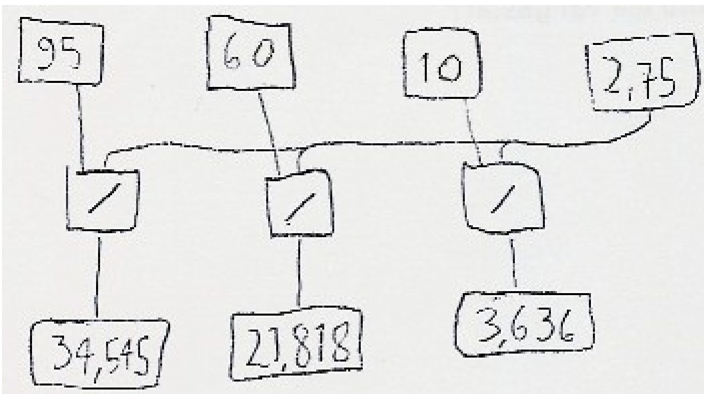


Figura 33 – máquinas interligadas para resolver problemas

Os alunos avançam nas respostas à seqüência de perguntas, construindo no computador máquinas algébricas ainda de forma repetitiva, mas começam a apresentar questionamentos que indicam idéias generalizadoras. Trabalhando em (3), um aluno perguntou: "*sendo sempre a mesma máquina, é necessário desenhar todas, ou basta colocar o modelo de máquina e as respostas?*" Sua resolução de (3) está registrada na figura 34.

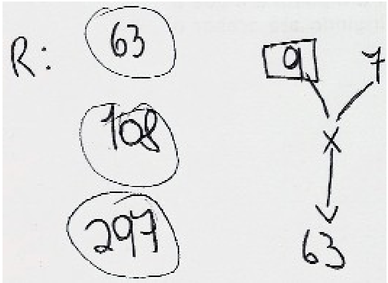


Figura 34 – uma única máquina para resolver problemas semelhantes

Para responder as perguntas de (4) a grande maioria construiu as máquinas inversas corretamente, conforme registrado na figura 35. Registramos somente um caso em que a dupla de alunos resolveu (4) por tentativas, usando a máquina direta construída para resolver (3), conforme figura 36. O aumento de informações nos dados dos problemas não apresentou maiores dificuldades para os alunos.

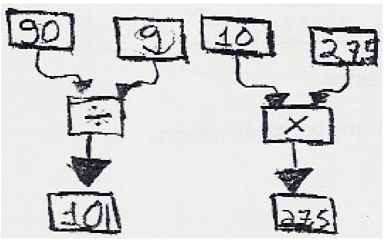


Figura 35 – máquinas inversas

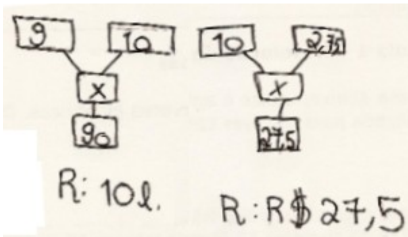


Figura 36 – máquinas no processo direto - tentativas

Máquinas interligadas foram construídas por muitas duplas para resolver (4) e (5), conforme registrado nas figuras 37 e 38.

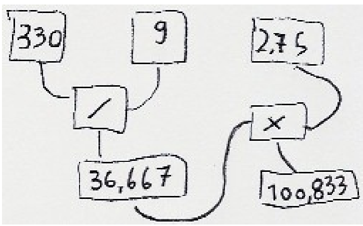


Figura 37 – máquinas interligadas

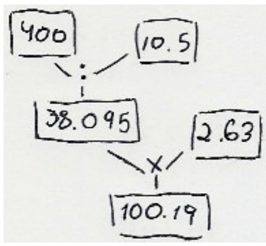


Figura 38 – máquinas interligadas

Neste ponto do trabalho se tornou muito clara a atitude de muitos alunos quanto a observar se para responder a nova pergunta poderia ser utilizada a estrutura de máquina já construída. Podemos dizer que, via trabalho com variadas situações de relações funcionais, estava se instalando na turma o pensamento de natureza algébrica ao atribuírem para caixas de entrada o significado de “lugar para receber um dado valor numérico”.

Resumindo o comportamento dos alunos ao final do Encontro 1:

Ao final do primeiro encontro a grande maioria dos alunos tratou cada pergunta da situação-problema como um novo problema, refazendo a construção de máquinas com estruturas idênticas. Foram raras as situações de alunos que trabalharam com a mesma máquina para responder as perguntas similares. A primeira atividade proposta foi bastante simples, envolvendo somente duas variáveis. Já a segunda atividade foi de maior complexidade ao colocar na situação-problema três variáveis: distância, taxa de consumo e custo. Alguns alunos já utilizaram máquinas interligadas para esta situação.

Encontro 2

Atividade: “Impressoras”[34]

Análise *a priori*: esta atividade continua dentro do propósito de provocar nos alunos a idéia de que uma mesma estrutura de resolução poder ser usada em vários casos de um mesmo problema. A situação-problema se desdobra através de uma seqüência de perguntas, agrupadas pela similaridade:

O laboratório de informática da escola tem duas impressoras: uma jato de tinta e outra a laser. A jato de tinta imprime 12 páginas por minuto e a laser imprime 18 páginas por minuto.

(1) Quantas páginas a jato de tinta imprime em 2 minutos? E em 5 minutos? E em 13 minutos?

(2) *E quantas páginas a laser imprime em 3 minutos? E em 7 minutos? E em 12 minutos*?

(3) *As duas impressoras juntas conseguirão imprimir quantas páginas em 6 minutos? E em 9 minutos*?

[34] Este problema foi inspirado no problema questionado por Usiskin (pág. 31)

As perguntas de (1) e (2), como antes, exigem máquinas generalizadoras bastante simples, e neste ponto do trabalho não devem apresentar maiores dificuldades para os alunos, mesmo quanto ao raciocínio generalizador. Em (3) a idéia é que os alunos integrem as máquinas já construídas.

A atividade avança com as relações inversas, esperando-se novamente a integração de máquinas:

> *(4) Quanto tempo a jato de tinta leva para imprimir 900 páginas*? Q*uanto tempo a laser leva para imprimir 900 páginas*?
>
> (5) Q*uanto tempo as duas juntas levam para imprimir 900 páginas*? *E quantas páginas imprime cada uma das impressoras?*

As perguntas em (4) podem ainda apresentar dificuldades aos alunos por tratarem de relações inversas. A estrutura a ser montada para resolver a pergunta (5) pode ser mais difícil do que o aluno espera (é equivalente ao clássico problema das duas torneiras). Se em (3) basta somar a quantidade de páginas de cada impressora em certo intervalo de tempo, em (5) tem-se um total de cópias produzidas por duas impressoras com ”taxas de produção” distintas em tempo desconhecido a ser determinado. Esta pergunta é complexa nos seus dados e é ilustrativa de situação que não pode ser resolvida via “operações inversas”. Aqui a linguagem da álgebra pode ajudar na estruturação do raciocínio que responde à pergunta. Resolvida a primeira pergunta de (5), imaginamos que a segunda não deve apresentar maiores problemas.

Análise *a posteriori*: as perguntas iniciais foram resolvidas corretamente pela grande maioria dos alunos. Enquanto trabalhando no aplicativo, os alunos já criavam apenas uma máquina e mudavam os valores de entrada conforme os dados da pergunta. A idéia de que uma máquina era suficiente para resolver vários problemas já estava presente, mas não se refletiu na solução transcrita na “folha guia de atividade”. Apenas uma dupla desenhou apenas uma máquina como a solução de um conjunto de atividades semelhantes. Na sua grande maioria, os alunos transcreveram as máquinas particulares, o que realmente foi trabalhoso[35].

Nas figuras 39 e 40 temos diferentes soluções para as perguntas em (1), (2) e (3): alguns calcularam a quantidade de impressões em cada impressora, e depois somaram os resultados; outros somaram as "velocidades de impressão" das duas impressoras, concluindo que juntas imprimiam 30 páginas por minuto, para depois multiplicar pelo tempo.

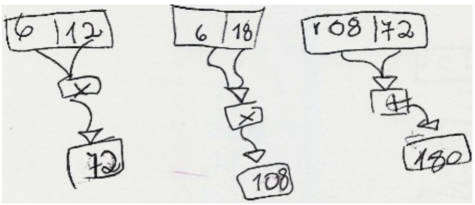


Figura 39 – resultado de cada impressora

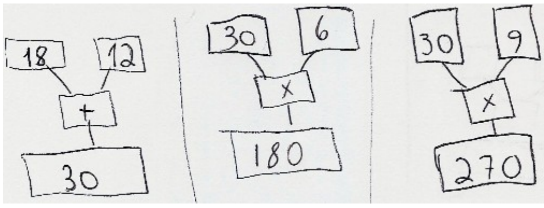


Figura 40 – somando as velocidades das impressoras

As perguntas correspondentes à relação inversa, em (4), foram resolvidas sem maiores problemas pelos alunos. Já as soluções erradas apresentadas para (6) confirmam o que imaginávamos quanto a sua complexidade. Houve quem dividisse a quantidade de páginas por 2, desconsiderando que impressoras trabalhando juntas significa que trabalharão o mesmo tempo, e não que imprimirão o mesmo número de páginas (figura 41).

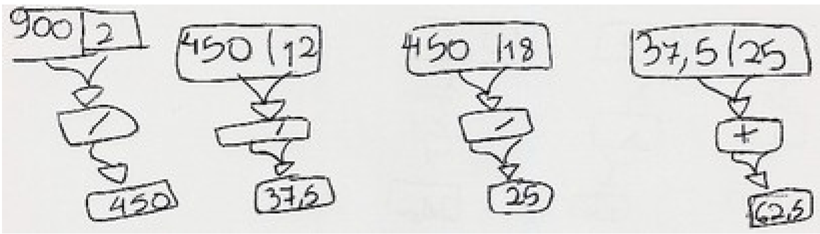


Figura 41 – mesma quantidade por impressora, ao invés de mesmo tempo

Houve também os que calcularam a média dos tempos encontrados nos item (4) (figura 42). Os alunos que apresentaram soluções corretas, o fizeram de forma muito similar: somaram a "velocidade de produção" das impressoras concluindo que, juntas, imprimem "30 páginas por minuto", e então dividiram as 900 páginas por 30 para determinar os 30 minutos (figura 43).

[35] Talvez tenham feito isto por acreditar que era isso que se esperava deles. Isto nos indica que a situação-problema deve ser colocada no sentido de direcionar o aluno ao reconhecimento de que basta uma máquina só satisfaz a vários problemas.

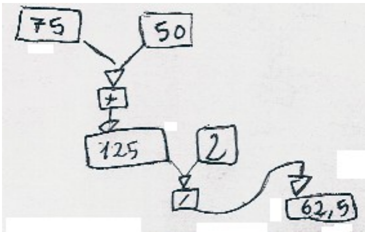


Figura 42 – calculando pela “média dos tempos”

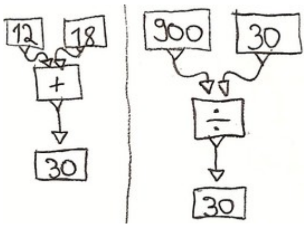


Figura 43 – somando a velocidade

Resumindo o comportamento dos alunos ao final do Encontro 2:

Muitos alunos mostraram raciocínios claramente generalizadores ao resolverem as perguntas de (1), (2) e (3). As máquinas inversas foram construídas sem maiores dificuldades. Neste encontro já foi preciso lidar com os diferentes ritmos dos alunos. Alguns avançaram mais rápido e outros com maiores dificuldades, sendo que alguns alunos não conseguiram finalizar a atividade no tempo previsto. Ao final do encontro registramos quanto às perguntas colocadas em (5): quatro duplas chegaram à resposta correta. Seis duplas deixaram a questão em branco, duas duplas cometeram erro dividindo a quantidade de páginas igualmente entre as duas impressoras e uma dupla errou partindo da divisão de 30 por 18, encontrando 1.667 como resposta e interpretando como sendo 16 páginas para a impressora a laser e 14 páginas para a jato de tinta.

Encontro 3

Atividade de modelagem matemática - “Bolinhas na água”[36]

Esta atividade foi realizada em sala de aula, com os alunos organizados em grupos de pelo menos quatro, em torno de mesas retangulares. O material para a atividade, distribuído para os grupos, consistia de:

- garrafa plástica com marcações horizontais espaçadas por 1 cm (PET 2 litros), com água até a primeira marcação (figura 44);

- 100 bolinhas de vidro;

- “folha guia de atividade” e folha com sistema de coordenadas.

[36] Esta atividade de modelagem foi inspirada no livro Algebra Experiment I – Exploring Linear Functions, de Mary Jean Winter e Ronald J. Carlson. – Addison-Wesley Publishing Company

Figura 44 – garrafa graduada

Análise *a priori*: a atividade consiste na observação da elevação do nível da água em função do número de bolinhas que são colocadas dentro da garrafa. Os alunos são provocados a fazer a coleta de dados, com as orientações e perguntas dadas na "folha guia da atividade":

(1) Adicione bolinhas de vidro, uma a uma, até que o nível da água suba exatamente 1 cm. Marque essas informações na tabela.

Bolinhas	cm

(2) Quantas bolinhas precisamos para o nível da água subir: 1cm? 3 cm? 7 cm? (3) *Se não colocamos nenhuma bolinha, o nível da água sobe quantos cm?*

Após esta coleta de dados, já provocativa na pergunta "quantas *bolinhas para o nível de água subir 7 cm?"*, segue-se um momento de discussão coletiva para comparação de resultados e prováveis causas das diferenças entre os dados coletados.

Um dos objetivos da atividade é levar os alunos à situação concreta onde observam que um fator tem direta influência sobre outro – no caso, a quantidade de bolinhas influencia a altura do nível da água – e desta forma ajudá-los na compreensão do conceito de variáveis independente e dependente.

Os alunos serão desafiados a levantar hipóteses e a fazer raciocínios generalizadores: eles até podem consultar a tabela para responder algumas das perguntas, mas eles não têm a quantidade de bolinhas necessárias para chegar a 7 cm e, mais, a garrafa também não tem esta marca. Deverão buscar, no grupo, a melhor solução para as perguntas colocadas. Após a elaboração das soluções nos grupos, prevemos novo momento de discussão coletiva.

A segunda parte da atividade tem como objetivo trabalhar outras maneiras de representar matematicamente a mesma situação-problema – via gráfico e via relação funcional:

(4) Marque todos os pontos da tabela na folha quadriculada.

(5) Os pontos que você marcou estão alinhados?

(6) Há um ponto que podemos marcar no gráfico que não depende de medição. Qual é este ponto?

(7) Trace uma reta que passe o mais próximo possível de todos os pontos.

(8) Observe o gráfico e responda: quantas bolinhas são necessárias para que o nível da água suba: 1 cm? 4 cm? 0,5 cm?

(9) Como seria uma máquina algébrica que resolve os três itens acima?

Na seqüência de perguntas (4) à (8) os alunos devem perceber uma regularidade na disposição dos pontos no sistema de coordenadas, e assim poderão estimar "quantidade de bolinhas x nível da água", independente de medições via experiência concreta. O item (9) retoma as máquinas algébricas com o propósito de trabalhar com a representação funcional.

A atividade finaliza com perguntas correspondentes às situações em que a medição é impossível de ser realizada, aqui provocando no uso da relação funcional que responde qualquer pergunta que possa ser formulada, no contexto da situação problema:

(10) Se colocamos apenas uma bolinha é possível observar o quanto sobe o nível de água? É possível calcular ou ver isto ao observar no gráfico?

(11) Quanto o nível da água sobe quanto acrescentamos: 1 bolinha? 2 bolinhas? 7 bolinhas? 30 bolinhas?

(12) Como seria a máquina que responde estas perguntas?

Para o final do encontro está previsto um momento de institucionalização dos os diferentes tipos de representação para o problema (tabela, gráfico, máquina algébrica), e em particular será institucionalizado o uso da letra para representar relação entre variáveis. Acreditamos que a atividade de modelagem facilita ao aluno na compreensão de que um fenômeno com o qual interage ou observe pode ser representado em uma linguagem matemática. Acreditamos que a atividade de modelagem vai contribuir para a compreensão do sentido de variável e do conceito de função: quando os alunos fazem medições, coletam dados, estabelecem relações, estão trabalhando com o conceito de variável e de função. O conceito de função nos parece vir de encontro à necessidade de que o aluno trabalhe com algo que faça sentido, que ele vivencie, e não apenas receba a informação do professor de que uma letra pode representar um número.

<ins>Análise *a posteriori*</ins>: inicialmente todos os grupos contaram quantas bolinhas eram necessárias para deslocar 1 cm de água, como mostra a figura 45. Na continuação do preenchimento da tabela, muitos grupos dispensaram o processo de colocar bolinhas na garrafa com o seguinte argumento: *"se já sei quantas bolinhas deslocam a água em 1 cm, para saber as outras quantidades basta multiplicar"*.

Figura 45 – garrafa graduada com bolinhas de vidro

Com o propósito de discutir aspectos relativos a coleta de dados em uma situação de modelagem, o professor solicitou que os alunos realizassem as medições e que registrassem na tabela os valores encontrados. A figura 46 registra esta coleta de dados.

Bolinhas	centímetros
17	1
0	0
37	2
56	3
75	4

Bolinhas	centímetros
15	1
34	2
51	3
70	4
89	5

Bolinhas	centímetros
17	1 cm
0	0
38	2 cm
77	4 cm
95	5 cm

Bolinhas	centímetros
18	1
92	5
37	2
56	3
76	4

Bolinhas	centímetros
14	1
35	2
54	3
75	4
96	5
0	0

Bolinhas	centímetros
15	1
35	2
54	3
74	4
93	5
0	0

Figura 46 – dados coletados pelos alunos na atividade das bolinhas na garrafa

A diversidade de valores (por exemplo, os valores 70, 74, 75, 75, 76, e 77, correspondentes aos 4 cm) produziu uma interessante discussão coletiva com a formulação de várias hipóteses: as bolinhas de vidro poderiam ter tamanhos diferentes; os recipientes eram garrafas plásticas marcadas pelo professor, não sendo muito precisos; dificuldade em medir o nível d'água. Voltamos então à idéia inicial de medir apenas o primeiro deslocamento de água, e depois calcular os outros, e os alunos concordaram que seria melhor fazer mais medições para entender como subia o nível de água.

Para determinar a quantidade de bolinhas necessárias para que o nível de água subisse 7 cm, última pergunta da primeira parte da atividade, os grupos apresentaram uma riqueza de idéias:

- um grupo pegou bolinhas de vidro emprestadas de outro grupo para continuar a medição

- outro grupo, para alcançar 7 cm, somou a quantidade de bolinhas no deslocamento em 2 cm + 2 cm + 3 cm (37 + 37 + 56 = 130 bolinhas). De forma semelhante, outro grupo somou a quantidade de bolinhas necessárias para o deslocamento de 2 cm e de 5 cm e as somou (35 + 96 = 131)

- observamos também um raciocínio fazendo uso de média aritmética: para o deslocamento de 1 cm foram usadas 17 bolinhas; para 2 cm, o total de bolinhas foi 38 cm. Com a diferença de 21 bolinhas da segunda medição para a primeira foi calculada então a média (17 + 21) / 2 = 19. E para determinar o número de bolinhas correspondente à 7 cm foi feita a multiplicação 19 . 7 = 133 bolinhas.

No trabalho com o gráfico da situação-problema os alunos marcaram os pontos encontrados na tabela, sem maiores dificuldades. Os grupos perceberam que os pontos estavam próximos de estar alinhados. Para o traçado da reta, o professor chamou atenção ao ponto que não depende de medida e os alunos logo concluíram que se tratava do ponto (0,0). Levando em consideração o ponto (0,0), traçaram a reta solicitada (figura 47). Apenas um grupo teve dificuldades, traçando uma reta que não passava, de forma satisfatória, perto dos pontos.

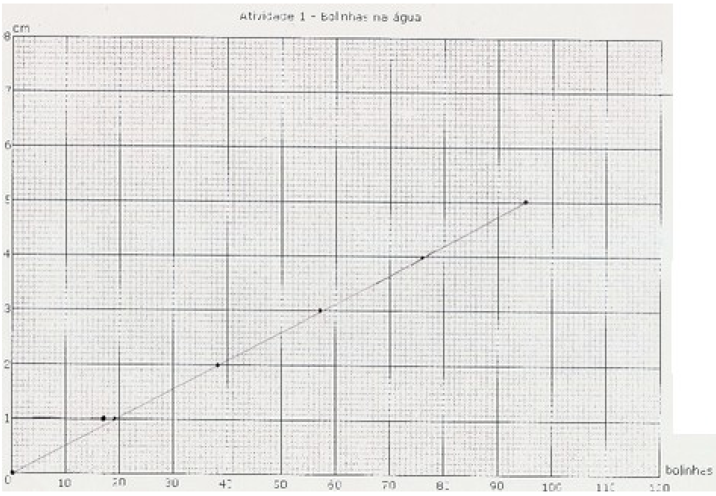


Figura 47 – gráfico do deslocamento da água em função da quantidade de bolinhas

Observando o gráfico era esperado que os alunos respondessem aos demais itens (*Quantas bolinhas são necessárias para que o nível da água suba: a) 1 cm? b) 4 cm? c) 0,5 cm*?), mas muitos fizeram uso dos dados que estavam na tabela.

Para aqueles que fizeram uso do gráfico, a visualização auxiliou na idéia de que a quantidade de bolinhas necessárias para deslocar 1 cm não precisa ser necessariamente um número inteiro. Assim, grupo que encontrou 19 bolinhas para o deslocamento de 1 cm no momento de medição, ao analisar o gráfico observou que a reta passava um pouco acima do ponto (1, 19), aproximadamente no ponto (1, 19.5). Com este novo valor explicaram porque para 4 cm haviam encontrado 78 bolinhas e não 4x19.

Tendo em vista que nem todos os grupos responderam às perguntas usando o gráfico, houve um momento coletivo de discussão sobre a representação gráfica.

É interessante lembrar que no procedimento adotado foram colocadas bolinhas na garrafa, uma a uma, o que corresponde a processo de modelagem discreta. Ao utilizar o sistema de coordenadas para marcar os pontos representantes das situações medidas, os alunos identificaram um conjunto de pontos aproximadamente alinhados. A partir destes dados, foram solicitados a traçar uma reta que "*ficasse muito próxima dos pontos marcados*". Neste momento estava sendo iniciada a transição do modelo discreto para o modelo contínuo e isto foi trabalhado pelo professor no momento de discussão coletiva

Neste momento de discussão, após a comparação das medidas encontradas pelos grupos, buscou-se observar que não existem apenas números inteiros para representar a quantidade de bolinhas e deslocamento do nível de água. Apesar de terem sido colocadas sempre quantidades inteiras de bolinhas, os grupos concluíram, por exemplo que "*sendo preciso 41 bolinhas para que a água suba 2 cm, então para cada 20,5 bolinhas tem-se a águas subindo aproximadamente 1 cm*". E mais, quebrando-se as bolinhas, isso também causaria um deslocamento, menos perceptível do que o deslocamento da água com uma bolinha inteira. Os próprios alunos também observaram que as bolinhas tem diâmetros diferentes, o que torna muito difícil fugir de aproximações e arredondamentos.

Por fim, chegou-se à criação da máquina algébrica (*Como seria uma máquina algébrica que resolve os três itens acima?)*: dois grupos criaram uma única máquina, deixando-a com espaços em aberto, como mostra a figura 48; os outros grupos criaram uma máquina para cada caso, como mostra a figura 49.

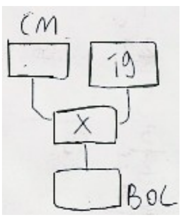


Figura 48 – caixa com valor em aberto

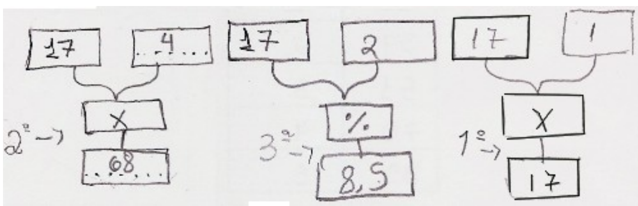


Figura 49 – uma máquina para cada caso

Mesmo que todas as perguntas pudessem ser resolvidas por uma máquina de multiplicação, alguns grupos criaram uma máquina de divisão para o caso da altura 0,5cm (ao invés de multiplicar por 0. 5 fizeram a divisão por 2).

Quanto às perguntas colocadas em (10), (11) e (12), no final da atividade proposta, os alunos não chegaram a construir a máquina correspondente à função y=a.x com a= 0.05 sendo o deslocamento de água ao colocar-se 1 bolinha (se são necessárias 20 bolinhas para deslocar 1 cm, cada bolinha deslocará 0,05 cm). Fizeram os cálculos via divisão, como o registrado na figura 50.

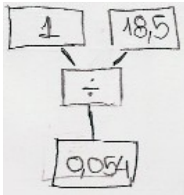


Figura 50 – divisão para descobrir o deslocamento com 1 bolinha

Ao terminar a atividade, discutimos com os grupos sobre as diferentes formas de representação de uma situação (tabela, gráfico, máquina algébrica). Salientamos a estrutura das máquinas generalizadoras das duas relações - “nº. de bolinhas x cm” e “cm x nº. de bolinhas”. Inicialmente destacamos que a caixa de entrada poderia receber diferentes valores, e depois usamos a letra como uma entrada para a caixa de entrada. Neste momento institucionalizamos o uso da letra no contexto da álgebra - se a água se deslocava em 1 cm para cada 19 bolinhas, para saber a quantidade de bolinhas necessária para deslocar uma certa quantidade “x” de cm bastava fazer multiplicação 19 . x.

Finalizamos esta aula com um debate sobre a utilização da linguagem algébrica em diferentes situações de relações funcionais. Também falamos de planilhas eletrônicas, mostrando que as máquinas algébricas nada mais são do que planilhas bastante simplificadas.[4]

Resumindo o comportamento dos alunos ao final do Encontro 3:

Os alunos realizaram um experimento e modelaram uma função que reproduz o que ocorre no experimento. A comparação entre as diferentes representações fez com que os alunos percebessem as relações entre essas representações. Durante a atividade houve muita troca de idéias, muitos questionamentos, muitas hipóteses foram levantadas, e ao final, de

[4] Em uma breve apresentação do funcionamento de programas de planilhas, trouxemos a importância da álgebra na elaboração das mesmas, com alguns exemplos: o cálculo de notas dos alunos, a máquina-registradora no supermercado que calcula o gasto total sabendo o preço e a quantidade do produto.

forma bastante natural foi feita a institucionalização do uso da letra para representar relações entre variáveis.

Encontro 4

Retomando as Atividades "Impressoras" e "Bolinhas na água"

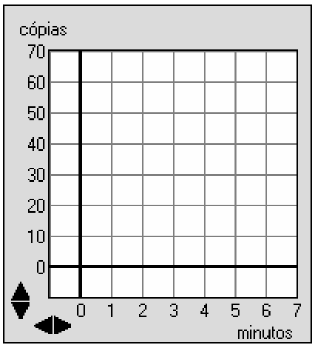
Para o quarto encontro havíamos previsto um trabalho com expressões algébricas (simplificações, agrupamento de termos semelhantes), mas decidimos retomar as atividades realizadas anteriormente, a das impressoras e a das bolinhas na água. Dado que na institucionalização feita ao final do encontro 3, muitas idéias novas estavam presentes - tabelas, gráficos, máquinas algébricas, representação simbólica de relações funcionais – sentimos a necessidade de desenvolver uma atividade que trabalhasse na direção de consolidação das idéias novas. Manter a atividade no mesmo cenário das atividades anteriores foi uma escolha no sentido de concentrar nos aspectos relevantes aos nossos propósitos.

Análise *a priori:* *a* atividade preparada busca trabalhar com as diferentes formas de representação de uma situação-problema (tabela, gráfico, máquina algébrica, expressão algébrica).

Na situação-problema das impressoras os novos encaminhamentos são:

(1) Para a impressora a jato de tinta que imprime "12 cópias por minuto":
a) construa a máquina que, a partir dos minutos de funcionamento, informa o nº. de páginas impressas;
b) complete a tabela correspondente à máquina;
c) faça o gráfico correspondente à máquina.

Tempo (min)	Cópias
5	
40	
	120
	900



Tendo feito a máquina, os alunos devem trabalhar na tabela incompleta, onde intencionalmente ora é apresentado o tempo de impressão, ora é apresentada a quantidade de folhas impressas. A tabela foi pensada de modo que apenas um dos pontos pode ser marcado no gráfico, o que provoca os alunos na determinação de um segundo ponto.

A atividade avança na direção de explicitação da expressão algébrica da situação-problema:

(2) Quantas cópias a impressora produz em duas horas?

(3) Se a letra "m" representa o "número de minutos de funcionamento da impressora", então podemos escrever:

número de cópias = ...

E como sempre, seguem-se as perguntas relativas à relação inversa:

(4) Desenhe a máquina que, informando o número de cópias feitas, calcula o tempo de impressão.

(5) Quanto tempo a impressora leva para produzir 330 cópias?

(6) Se a letra ***"c"*** *representa o número de cópias feitas pela impressora, então podemos escrever:*

tempo em minutos de funcionamento da impressora= ....

Na segunda parte da atividade voltamos à experiência das bolinhas na água, também provocando os alunos para expressarem a situação-problema através de diferentes representações - tabelas, gráficos, máquinas algébricas, expressões algébricas:

(7) *A experiência da medição do nível de água na garrafa, com bolinhas, foi realizada com os recipientes abaixo. Os dados foram registrados em três tabelas diferentes, uma para cada recipiente.*

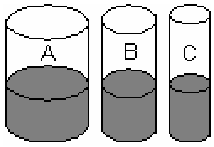


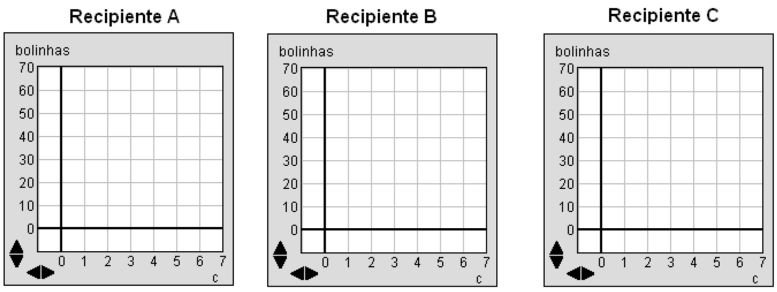
Tabela 1	
bolinhas	cm
30	3
60	6
90	9

Tabela 2	
bolinhas	cm
30	2
60	4
90	6

Tabela 3	
bolinhas	cm
12	1
36	3
60	5

a) *Qual é a tabela correspondente a cada recipiente?*

b) *Faça o gráfico correspondente a cada recipiente.*



c) *Desenhe a máquina que, informando o quanto sobe em cm o nível de água, calcula o número de bolinhas.*

d) *Se a = número de cm que subiu o nível de água então podemos escrever:*

- para o recipiente A *número de bolinhas =............*

- para o recipiente B *número de bolinhas =...........*

- para o recipiente C *número de bolinhas =...........*

Análise *a posteriori:* após a institucionalização do uso da letra para representar relações entre variáveis, no Encontro 3, nossa expectativa quanto à construção de máquina generalizadora para resolver (1), primeira parte da atividade, se concretizou: 10 alunos deixaram a caixa-entrada em branco e 7 alunos utilizaram uma letra. Mas 8 alunos ainda construíram máquinas numéricas. Algumas das máquinas construídas são registradas na figura 51.

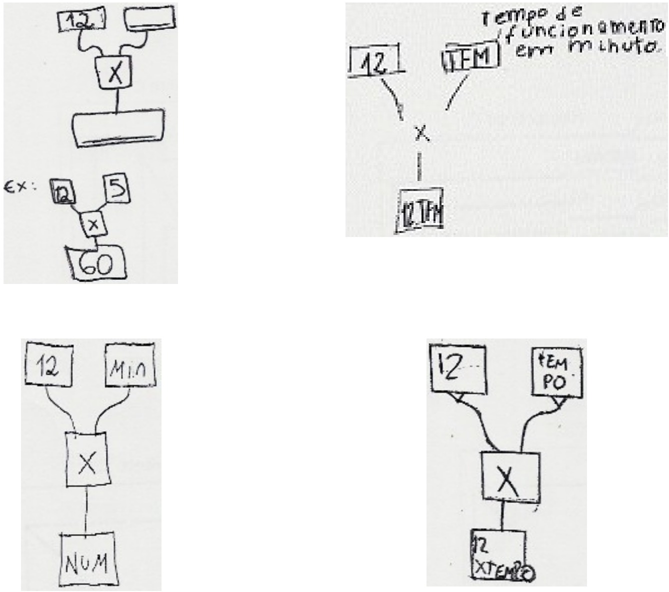


Figura 51 – diferentes resoluções dos alunos

Na atividade de completar a tabela, todos resolveram corretamente. Doze alunos construíram o gráfico da reta que representa a situação; nove marcaram os pontos corretamente, mas não chegaram a traçar a reta; quatro alunos tiveram dificuldades em marcar os pontos corretamente.

Quanto ao item (3) referente à expressão algébrica que representa “tempo de funcionamento da impressora x nº. de cópias”, com “m” representando o tempo em minutos: 14 alunos indicaram “12. m” como o número de cópias. Alguns indicaram apenas “12” e outros utilizaram a letra “c” para representar o total de cópias. Para alguns alunos ainda não parece claro que se não sabemos o tempo e o representamos por “m”, então a quantidade de cópias, ao invés de ser descrita por “c”, seria melhor descrita por “12.m”, ao estabelecer a relação entre as variáveis tempo e nº. de cópias.

Quanto à máquina que expressa a relação inversa, “nº. de cópias x tempo de impressão”, a ser trabalhada nos itens (4), (5) e (6) , o desempenho dos alunos foi similar ao apresentado na máquina da relação inicial: 18 alunos construíram máquinas com caixas de entrada em branco ou preenchendo-as com uma variável, conforme registro na figura 52. O erro mais freqüente foi usar máquina de multiplicação, ao invés da divisão.

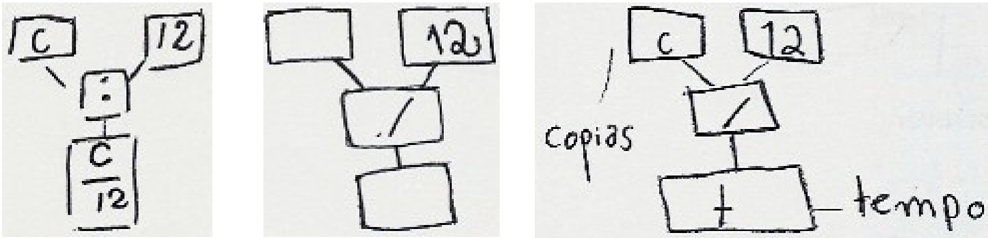


Figura 52 – idéia algébrica – uso de letra ou de caixa em branco

Quanto à expressão algébrica da relação “nº. de cópias x tempo” onde “c” é o nº. de cópias, solicitada no item (6), o último da primeira parte da atividade: 11 escreveram a expressão esperada “c/12”; 5 deixaram a questão em branco; 4 escreveram “TFIM”, e perguntados sobre o significado responderam que era *“Tempo de Funcionamento da Impressora”.*

Na segunda parte da atividade, que trata da relação “nº. de bolinhas x nível da água”, quanto ao item (7) que solicita a associação ente recipientes e tabelas: 22 alunos fizeram a associação correta (figura 53). Pensávamos que poderia haver casos em que os alunos associassem corretamente o recipiente “médio”, mas poderiam se confundir com a relação “quanto maior o recipiente menos sobe a água” e concluíssem que “o maior recipiente é o que tem o maior deslocamento de água”. Mas este erro não foi significativo.

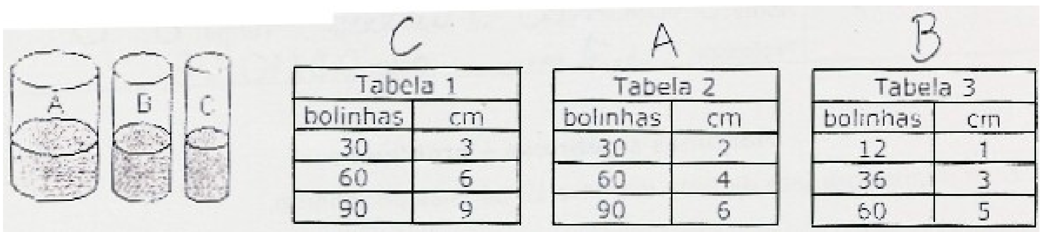


Tabela 1	
bolinhas	cm
30	3
60	6
90	9

Tabela 2	
bolinhas	cm
30	2
60	4
90	6

Tabela 3	
bolinhas	cm
12	1
36	3
60	5

Figura 53 – associando tabelas com os cilindros

Na construção do gráfico: 15 alunos marcaram todos os pontos corretamente e, destes, 6 não chegaram a traçar a reta (figura 54). A partir deste item, muitos alunos não concluíram a atividade por falta de tempo.

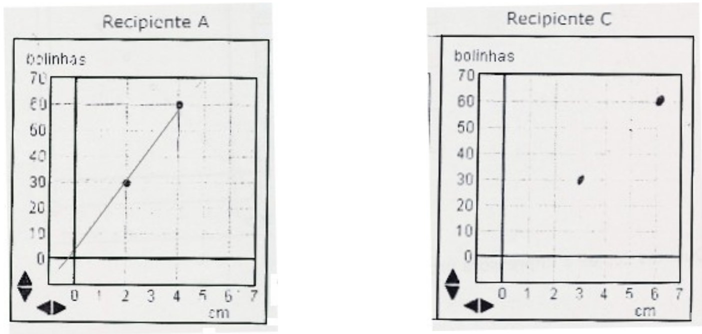


Figura 54 – construindo gráficos

Quanto aos itens (7 c) e (7 e), dos 15 alunos que chegaram até o final da atividade: 10 alunos apresentaram máquinas generalizadoras corretas para representar a relação “nível da água x nº. de bolinhas” (figura 55) e escreveram as expressões que calculam o nº. de bolinhas em função da altura do nível de água. Os outros 5 não chegaram a apresentar soluções de natureza algébrica ou corretas.

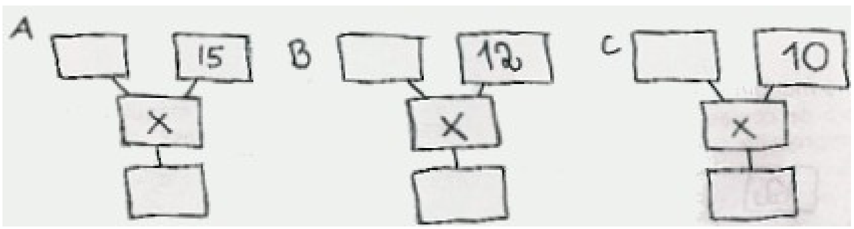


Figura 55 – máquinas algébricas – nº de bolinhas em função do deslocamento

Resumindo o comportamento dos alunos ao final do Encontro 4:

Nesta atividade foi preciso lidar com os diferentes ritmos dos alunos. Metade da turma não conseguiu finalizar a atividade, enquanto outros 10 alunos concluíram a atividade de forma plenamente satisfatória. Na primeira parte da atividade, 17 alunos construíram máquinas algébricas plenamente satisfatórias. Pode-se sentir na grande maioria da turma uma apropriação da linguagem algébrica, o que se revela na habilidade em justificar oralmente questões sobre o funcionamento das máquinas, especificamente sobre a questão da variável, e também na habilidade para escrever expressões algébricas que colocam variáveis em relação. Contudo, alguns alunos ainda encontram dificuldade em montar uma expressão algébrica. Quando se pede para que se represente uma determinada quantidade por uma letra, e depois que expresse uma outra quantidade relacionada com a anterior, o aluno muitas vezes cria uma nova letra, ao invés de escrever a relação entre as quantidades.

Encontro 5

Devido os diferentes ritmos da turma para chegar ao final da atividade proposta no encontro anterior, decidimos reservar a primeira parte do quinto encontro à discussão coletiva de retomada da institucionalização das diferentes formas de representar a situação-problema "Impressoras", no contexto da álgebra. Tabelas, gráficos, máquinas e expressões algébricas foram os tópicos da discussão coletiva. No segundo momento do encontro foi trabalhada a nova atividade.

Atividade: "Pizzaria Sabor Jovem"

<u>Análise *a priori:*</u> tendo em vista que os alunos neste momento já estavam incorporando o uso de letras para representar relação entre variáveis, nesta nova atividade nosso propósito foi a introdução de situação-problema envolvendo mais do que 2 variáveis:

No cardápio da pizzaria "Sabor Jovem" tem-se

pizza brotinho	*R$3,00*
refrigerante	*R$1,50*
sorvete	*R$1,20*

(1) João, muito faminto, pediu 3 pizzas, 1 refrigerante e 2 sorvetes. Quanto gastou?

(2) João pagou a conta com 20,00. Quanto recebeu de troco?

(3) O dono da pizzaria quer uma máquina que calcula os gastos do freguês. Construa esta máquina.

*(4) Usando as letras **p**, **r** e **s** para representar as quantidades de pizza, de refrigerante e de sorvete que alguém comprou, podemos escrever:*

gasto total = ...

(5) O dono da pizzaria também quer que a máquina calcule o troco do freguês. Construa esta máquina.

(6) Confira se a máquina está funcionando legal! Para isto calcule no papel e na máquina o gasto e troco para :

5 pizzas , 3 refrigerantes, 2 sorvetes e pagamento com 30,00

Intencionalmente a atividade tem estrutura algébrica simples, ficando a exigência maior por conta do número de variáveis a serem organizadas. Com esta atividade pensamos que os alunos vão passar a ter pleno domínio no uso da letra para indicar um processo dado por relação funcional.

Análise *a posteriori:* Usamos o recurso de projeção multimídia para conduzir a discussão coletiva sobre a atividade "Impressoras", onde foram retomados os itens listados abaixo.

Para a impressora a jato de tinta que imprime "12 cópias por minuto":

a) construa a máquina que, a partir dos minutos de funcionamento, informa o nº. de páginas impressas;

b) complete a tabela (figura 56) correspondente à máquina;

c) faça o gráfico (figura 57) correspondente à máquina.

Tempo (min)	Cópias
5	
40	
	120
	900

Figura 56 – tabela tempo x nº de cópias

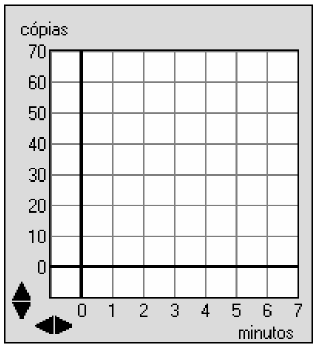


Figura 57 – gráfico referente à situação da tabela da figura 4.31

Os alunos se mostraram bastante participativos (em muitos momentos da discussão foi ouvida a expressão "q*ue bala*!"):

- um aluno apresentou máquina algébrica da relação "tempo x nº. de cópias" deixando vazia a caixa de entrada correspondente à variável tempo;

- outros alunos sugeriram colocar uma letra na caixa de entrada.

Procuramos ressaltar que o uso de letras, nas aulas de matemática, vai se tornar mais freqüente para eles. Houve um aluno que colocou na caixa de entrada um valor arbitrário para o tempo e comentamos então sobre a diferença entre termos um caso específico numérico e um caso genérico algébrico.

Para preencher a tabela, nos dois primeiros valores, utilizamos a máquina já construída. Nos dois valores seguintes, um aluno explicou que deveria ser criada uma máquina inversa, e assim a tabela foi preenchida.

Na discussão sobre o gráfico da relação, o professor apresentou no telão o sistema de coordenadas com o desenho da reta correspondente à situação-problema e questionou sobre pontos que poderiam ser facilmente identificados no gráfico. Vários alunos identificaram de imediato o ponto (5,60) dado na tabela; um aluno também identificou logo o ponto (0,0), dizendo que *"se a impressora não funcionou por nenhum tempo, não imprimiu nenhuma cópia"*. Estes pontos foram marcados no gráfico (figura 58).

Figura 58 – gráfico traçado a partir dos dois pontos

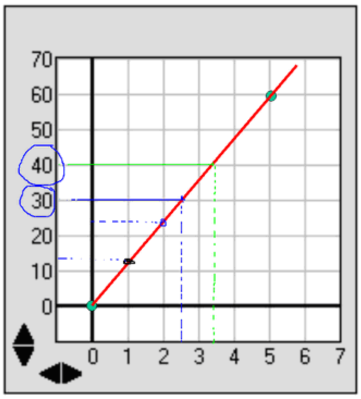


Figura 59 – interpretação da reta do gráfico

A partir de leitura no gráfico outras questões foram abordadas (figura 59):

- usando movimentos vertical e depois horizontal, a partir do eixo x na marca "1 cm", localizamos o ponto correspondente no gráfico, e então foi localizado o valor correspondente no eixo y, este um pouco acima do 10, que foi logo identificado pelos alunos como as *"12 cópias quando a máquina funciona 1 minuto";*

- para 2 minutos de funcionamento, da mesma forma, identificamos um valor entre 20 e 30, mais precisamente o valor 24 que não está explicitamente marcado no eixo y;

- quanto ao tempo para imprimir 30 cópias, foi feito o caminho inverso de leitura gráfica – partindo do eixo y, indo ao ponto correspondente no gráfico e finalmente localizando no eixo x o tempo, verbalizado pelos alunos como "*dois minutos e meio*".

Após a discussão coletiva, os alunos iniciaram a segunda parte do trabalho: a atividade Pizzaria Sabor Jovem. Os itens (1) e (2), de cálculos numéricos, foram respondidos sem problemas. No item (3) relativo à construção da máquina algébrica: 16 alunos utilizaram letras, 6 deixaram o espaço em branco e 5 ainda apresentaram máquinas numéricas. Dentre estes cinco, alguns justificaram que o item pedia a máquina que calculava os gastos do freguês, e que o freguês era o João, do item (1) (diga-se que uma justificativa mais do que pertinente).

Na figura 60 temos um exemplar de máquina construída, plenamente satisfatória:

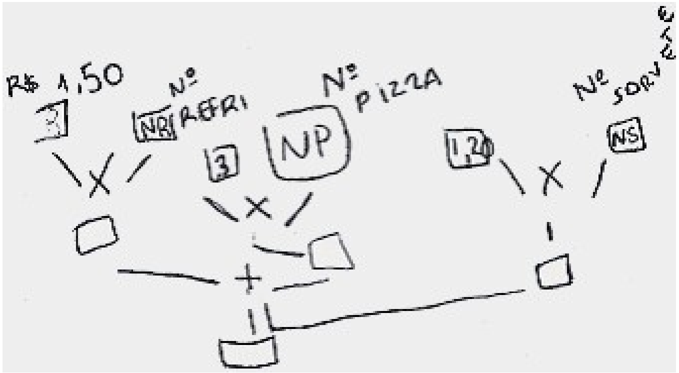


Figura 60 – Construção da máquina da pizzaria

Registramos pequenos problemas em algumas das máquinas apresentadas: esquecer de somar as parcelas (figura 61); utilizar a mesma letra para representar variáveis diferentes em um mesmo contexto (figura 62); esquecer de multiplicar uma das variáveis pelo preço do produto.

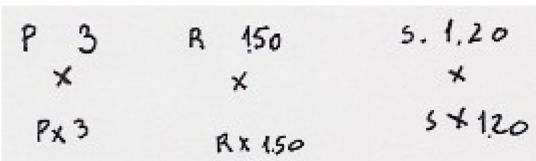


Figura 61 – Máquinas parciais, sem conexão

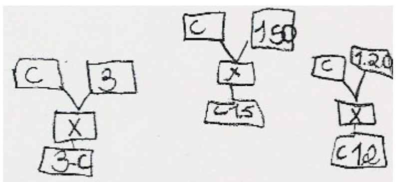


Figura 62 – uso de mesma letra para diferentes elementos

No item (4), muitos alunos não conseguiram montar a expressão desejada. Esperávamos pela expressão *"3,00 . p + 1,50 . r + 1,20 . s", m*as respostas diferentes surgiram:

- *"p + r + s"*, onde o aluno parece interpretar que "**p**" é que se gastou com pizza, e não a quantidade de pizzas;

- resposta numérica ao invés de expressão algébrica;

- uso de letras diferentes das que foram indicadas para representar as variáveis.

Resumindo o comportamento dos alunos ao final do Encontro 5:

O momento inicial da aula, principalmente pela tomada de significado da reta no gráfico, foi bem recebido pelos alunos. Eles participaram efetivamente, reconhecendo na reta traçada no gráfico uma representação da situação trabalhada, e responderam a perguntas referentes a pontos do gráfico. Outro objetivo da aula, que era de trabalhar com uma atividade envolvendo diferentes variáveis, acabou evidenciando uma dificuldade na habilidade do aluno em lidar com várias variáveis em uma mesma expressão.

As respostas dadas pelos alunos, registradas ao final da análise a posteriori, evidenciam que, se a habilidade de reconhecer as diferentes formas de representação está sendo atingida, a habilidade da escrita da expressão algébrica é uma idéia que ainda está em processo de amadurecimento para muitos alunos.

Encontro 6

Máquinas algébricas

Análise *a priori*: Para este encontro programamos, inicialmente, mostrar para os alunos que as “Máquinas Algébricas” constroem, automaticamente, os gráficos correspondentes às expressões algébricas indicadas através das caixas brancas e caixas laranjas. Para isso foi preparado material para projeção no telão, a partir da atividade “Bolinhas na água”, para subsidiar discussão coletiva de re-construção dos gráficos correspondentes à situação já discutida anteriormente (figura 63):

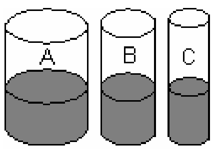


Tabela 1	
bolinhas	cm
30	3
60	6
90	9

Tabela 2	
bolinhas	cm
30	2
60	4
90	6

Tabela 3	
bolinhas	cm
12	1
36	3
60	5

Figura 63 – Tabelas referentes ao deslocamento de água em função do acréscimo de bolinhas

Tivemos como propósito ter o pleno entendimento dos alunos quanto à construção de gráficos, para então introduzir o “processo automático” do aplicativo, daí ter reservado a apresentação deste recurso para o sexto encontro. Os alunos serão convidados a marcar pontos, correspondentes às diferentes situações de reservatórios, no sistema de coordenadas. A partir destes pontos devem traçar a reta correspondente. É após a re-construção das retas-gráficos que mostraremos que o aplicativo também constrói estas retas, automaticamente, a partir da expressão algébrica correspondente. Nosso propósito com esta atividade é preparar os alunos para um trabalho com "máquinas e gráficos" de forma a usar a versatilidade do aplicativo para o desenvolvimento de habilidades para reconhecer "efeitos no gráfico" resultante de modificações nas expressões algébricas.

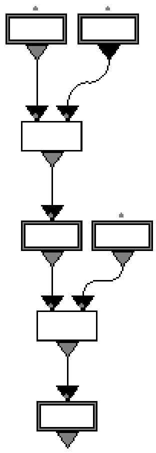
A segunda parte do encontro está reservada à atividade com expressões algébricas, agora em contexto abstrato, que tem como foco o desenvolvimento de habilidades para:

- transcrever "expressões em linguagem corrente" em "expressões algébricas" e vice-versa;

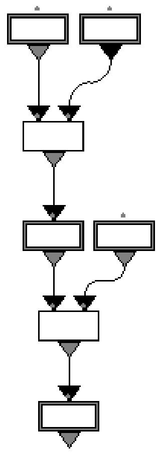
- saber identificar expressões algébricas equivalentes, este um primeiro passo para o entendimento da necessidade das manipulações algébricas[38].

Neste sentido propomos como primeiras atividades:

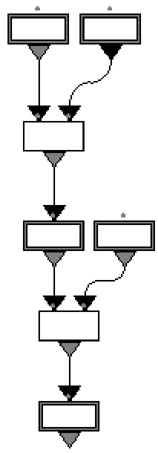
1. Complete a máquina: ela dobra um número e depois adiciona 3 ao resultado.



2. Complete a máquina: ela adiciona 3 ao número e depois dobra o resultado.



3. Complete a máquina: ela dobra um número e depois adiciona 6 ao resultado



[38] Sobre as manipulações algébricas: não tivemos como objetivo neste trabalho o desenvolvimento de habilidades para manipular expressões algébricas. Este é, com certeza, um aspecto importante na formação dos alunos, mas a ser trabalhado após o pleno entendimento do uso de letras no contexto da álgebra.

4. Associe a cada máquina a sua expressão algébrica:

Máquina 1 ( ) *2 . (x + 3)*

Máquina 2 ( ) *2 . x + 6*

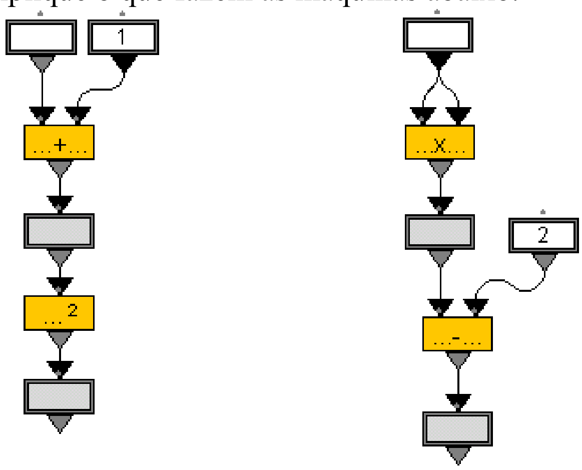
Máquina 3 ( ) *2 . x + 3*

5. Nas três máquinas acima tem duas máquinas que são iguais! Descubra quais são estas duas! Como você descobriu isto?

Ao preencherem as máquinas algébricas, utilizando letras, os alunos encontram três expressões algébricas diferentes, que serão exatamente as três expressões dadas no item (4), onde se pede para relacionar a árvore algébrica com sua expressão algébrica. O objetivo da seqüência de itens é evidenciar que a ordem em que são efetuadas as operações se reflete na escrita da expressão algébrica. No item 5 pedimos que os alunos busquem reconhecer quais são as duas máquinas equivalentes.

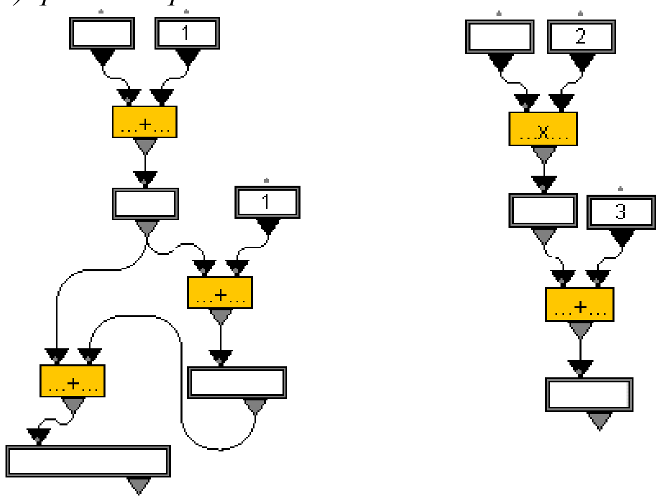
O item (6) da atividade, provoca os alunos para transformarem "expressões algébricas", dadas por máquina algébrica, em "expressões em linguagem corrente". Criamos máquinas com números, operações e espaços em branco, que representam variáveis. Nosso objetivo é que o aluno explique o funcionamento da máquina, e queremos observar como ele se refere a estes espaços em branco.

(6) Explique o que fazem as máquinas abaixo.



O Item (7) provoca no reconhecimento de expressões algébricas equivalentes, estas mais elaboradas que as anteriores. São duas máquinas com estruturas diferentes, mas que resultam em expressões equivalentes. O aluno perceberá que as máquinas são equivalentes? Escolherá alguma máquina como sendo melhor que a outra?

(7) Compare as duas máquinas e decida:
a) o que há de diferente entre os resultados das duas máquinas;
b) qual a máquina e' a melhor?



<u>*Análise a posteriori*</u> – Na primeira parte do encontro de discussão coletiva, utilizamos o projetor multimídia. Os alunos participaram ativamente, sendo chamados, um a um, para marcar no sistema de coordenadas os pontos das três tabelas que mostravam a relação "deslocamento de água x nº. de bolinhas". A partir deste pontos foram construídas as correspondentes retas-gráficos (figura 64)

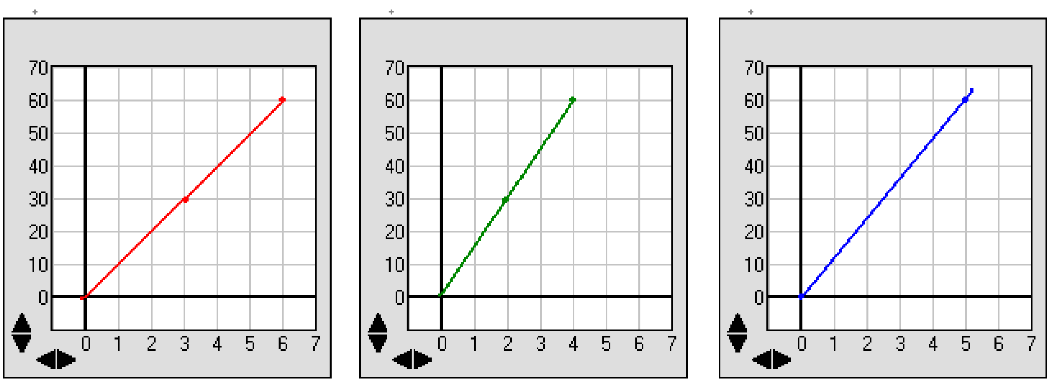


Figura 64 – retas traçadas pelos alunos

Algumas questões foram respondidas, corretamente, a partir dos gráficos:

- se o deslocamento foi de 40 cm, qual a quantidade de bolinhas?

- quanto à associação entre recipientes e gráficos responderam que *"se o recipiente é mais largo, o nível da água sobe menos"*

Neste momento partimos para o uso do aplicativo, e mostramos que, se até então para montar um gráfico eles precisavam de dados que tomavam de uma tabela, no aplicativo bastava informar a máquina algébrica para que ele fizesse automaticamente o gráfico. Foram então construídas as máquinas correspondentes aos três recipientes, aqui usando-se letras como variáveis e num simples clicar de mouse foram obtidos ao gráficos correspondentes[39] (figura 65), idênticos aos que haviam produzido utilizando os dados das tabelas (figura 66).

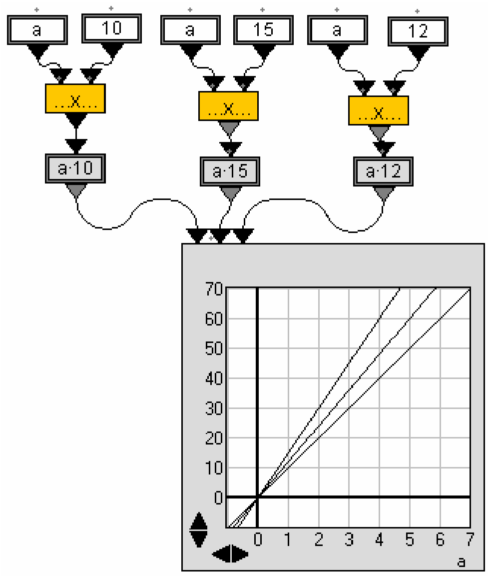


Figura 65 – retas criadas pelo aplicativo, a partir das expressões

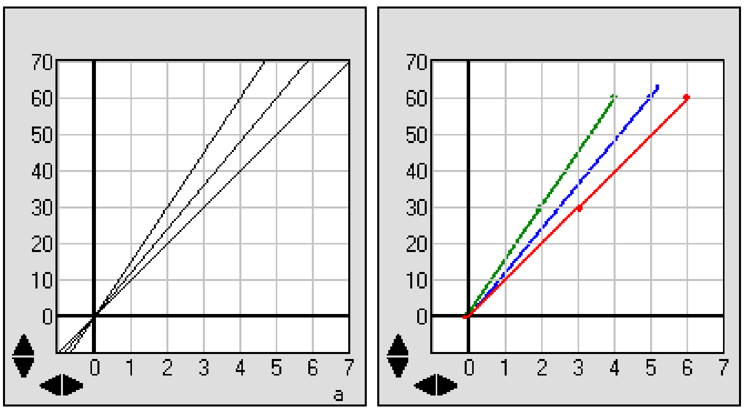


Figura 66 – comparação das retas criadas pelo aplicativo e pelos alunos

A atenção da turma era geral. Os alunos estavam realmente entusiasmados com este recurso, o que se registrou no momento de exploração livre eu foi contemplado no final da discussão – fizeram muitas experiências de modificar a expressão algébrica e ver o

[39] Para isto basta direcionar a "seta" da caixa-saída com a expressão algébrica para janela "gráfico", localizando a seta no pequeno ponto na parte superior esquerda desta janela.

resultado no gráfico, e com isto as diferentes representações de uma situação-problema em linguagem algébrica foram ficando cada vez mais claras para os alunos.

Na segunda parte do Encontro, quanto às máquinas algébricas a serem preenchidas nos itens (1), (2) e (3):

- a maioria dos alunos deixou as caixas-entrada de variável em branco ou usou uma letra. Mas alguns poucos ainda fizeram exemplos numéricos

Quanto ao item (4):

- três quartos dos alunos relacionaram corretamente as máquinas com as expressões. Mas apenas a metade dos alunos identificou as duas máquinas que eram iguais. Entre os erros, houve um aluno que disse: *"a ordem dos fatores não altera o produto"* querendo dizer que não importa se primeiro dobramos o valor de um número e depois adicionamos 3, ou se primeiro adicionamos 3 para depois dobrar este resultado, revelando uma precária habilidade com manipulações algébricas. Assim, demonstraram uma compreensão equivocada da propriedade citada.

Quanto ao item (6):

- dois terços da turma usaram o termo "um número" para se referir as caixas-brancas e assim verbalizaram a máquina: "*ela adiciona 1 a um número, e depois eleva o resultado ao quadrado".*

No último item, tratando da igualdade de máquinas aparentemente diferentes, as manifestações dos alunos indicam que há uma diferença entre o que o professor espera a partir de uma certa redação da atividade e aquilo que o aluno entende que deva ser feito. Quando solicitamos que informassem "*o que há de diferente entre os resultados das duas máquinas*", alguns alunos responderam que "*na primeira só tem adição*" e "*na segunda tem adição e multiplicação*". De qualquer forma, dois terços dos alunos identificaram que "*as máquinas eram iguais, mas que a segunda era a mais simples nas contas*".

Resumindo o comportamento dos alunos ao final do Encontro 6:

O momento inicial da 6ª aula, de discussão da atividade das bolitas, foi de grande valia no que diz respeito à institucionalização dos conceitos e idéias que vinham até então sendo trabalhadas. Os alunos participaram intensamente, se oferecendo para realizar a construção dos gráficos das retas no sistema de coordenadas. Ao serem apresentados ao recurso de construção de gráfico a partir da expressão algébrica, os alunos reforçaram a idéia que já vinha sendo trabalhada – de que as duas representações, expressão algébrica e gráfico, estão interligadas.

Na segunda parte do encontro, onde a intenção era trabalhar em contexto mais abstrato, identificamos em boa parte da turma desenvoltura para transcrever expressões dadas em linguagem corrente para "máquinas algébricas" e vice-versa. Na atividade que tratava de provocar o entendimento de que expressões diferentes podem representar uma mesma função – o item (7) perguntava "*o que há de diferente entre os resultados das duas máquinas?"* – boa parte dos alunos entendeu a pergunta colocada de uma forma diferente daquela que estava sendo proposta.

Conclusões sobre o desenrolar da seqüência de atividades

De um modo geral, acompanhando a evolução do desempenho dos alunos ao longo dos diferentes encontros e das diferentes atividades, foi possível identificar um crescimento na compreensão da linguagem algébrica. Nas primeiras atividades, havia apenas resoluções de natureza aritmética. Se inicialmente os alunos construíam para cada caso particular do problema uma "máquina algébrica", no decorrer das atividades passaram a utilizar a "máquina algébrica" genérica que resolvia o problema em todos os casos particulares. Os alunos entenderam que algumas das caixas de entrada tinham valores fixos, enquanto que outras caixas mudavam de valores de entrada, várias vezes no mesmo problema. Este comportamento indica a compreensão da idéia de variabilidade.

Todas as atividades por nós escolhidas se enquadram no modelo linear. E isso não poderia levar o aluno a crer que todas as situações podem ser enquadradas desta forma? Na verdade, os alunos foram inicialmente provocados a explorar e refletir sobre a pertinência do modelo linear. Em algumas situações, usamos problemas em que o gráfico era uma reta passando na origem (0,0); em outras situações a reta já se apresentava deslocada da origem. E mais, dada a versatilidade do aplicativo, em um dos encontros no laboratório de informática os alunos exploraram livremente outras possibilidades de Máquinas Algébricas e seus correspondentes gráficos. Em resposta a pergunta do professor: "*Alguém consegue construir, usando as operações disponíveis no aplicativo, uma expressão cujo gráfico não seja uma reta?*". Aos poucos os alunos chegaram em expressões diferentes das lineares, usando potenciações ou raízes quadradas. Após este momento de exploração livre, foi retomado o trabalho com os modelos lineares, mas salientando-se a importância de modelos mais complexos dependendo da situação sob estudo.

5 CONCLUSÃO

Se a álgebra é ensinada simplesmente como sendo constituída de procedimentos mecânicos de aplicação de formulas, é natural que se torne desprovida de maior significado para os alunos, e é assim que para uma grande maioria este assunto se apresenta como algo difícil e incompreensível.

Trazemos novamente o questionamento de Wheeler (1996): será que não é possível ensinarmos álgebra de uma maneira diferente? É verdade que ensinar um conteúdo de um modo diferente exige um complexo processo de reestruturação. Não temos a pretensão de termos a resposta desta pergunta, nem de trazer a solução dos problemas no ensino de álgebra. O que temos, depois de alguma reflexão sobre nossa prática, sobre nossas leituras e também sobre a experimentação realizada como parte deste trabalho de dissertação, são algumas contribuições que se direcionam para a validação da hipótese formulada no capítulo 3: acreditamos que ao desenvolver no aluno a habilidade de expressar relações entre variáveis estamos propiciando uma introdução ao pensamento algébrico de forma tal que o “uso das letras” se torna significativo e traz a compreensão da necessidade e da importância da álgebra.

Conforme apresentado neste mesmo capítulo 3, é importante conhecer as diferentes facetas da álgebra, pois isto nos auxiliará no enfoque a ser trabalhado com nossos alunos. Das abordagens analisadas, cremos que, em nossos livros didáticos, os enfoques mais presentes são aqueles que tratam da generalização e da resolução de problemas. A generalização, no geral, procura provocar os alunos na observação de regularidades em determinadas seqüências numéricas ou seqüências de figuras. A resolução de problemas muitas das vezes recai em falsa contextualização, quando o professor afirma que a razão do ensino de álgebra é resolver determinados tipos de problemas – problemas que, como vimos, muitas vezes o aluno resolve através de raciocínios aritméticos.

Das perspectivas apresentadas no capítulo 3, identificamos que muito pouco, ou até mesmo nunca, estão presentes nos livros didáticos os enfoques das relações funcionais e da modelagem. No entanto, são estas duas perspectivas que nos parecem bastante interessantes para uma introdução ao pensamento algébrico.

Neste sentido, em nossa proposta didática tratamos de provocar nos alunos a necessidade da estruturação de um problema através da explicitação de uma relação funcional, nisso fazendo uso do aplicativo “Máquinas Algébricas”. Este aplicativo permitiu que os alunos fizessem esta estruturação de forma muito concreta, e é assim que a “caixa de entrada” vazia foi o primeiro passo no entendimento do uso da letra para expressar algebricamente relações entre variáveis. A exploração de situações-problema usando o aplicativo possibilitou, aos alunos, a transição do raciocínio de natureza aritmética àquele de natureza algébrica, sem que houvesse a necessidade de apresentar formalmente a noção de variável e função.

A maneira como introduzimos a linguagem algébrica nos parece ter sido significativa aos alunos. A eles não foram simplesmente apresentadas as letras como um valor desconhecido, como incógnita a ser descoberta em uma equação. Os alunos trabalharam com a idéia de "valor desconhecido", mas sem o propósito de fazer um cálculo, mas com a idéia de que este valor pode variar, influenciando outros valores dependentes. Além da idéia de variabilidade e de dependência entre variáveis, os alunos demonstraram assimilar as diferentes formas de representação de uma situação que envolve uma relação funcional – tabelas, gráficos, leis da função.

É verdade que só trabalhamos com situações-problema cujas representações gráficas eram retas (funções lineares ou afins). Mas julgamos que isto já foi o suficiente para introduzir o significado e a necessidade da linguagem da álgebra.

Em relação à representação de situações-problema que dependiam de várias variáveis, vimos que os alunos apresentaram dificuldade para escrever uma expressão de natureza mais complexa. Só relembrando: um erro recorrente na atividade "Pizzaria Sabor Jovem" ocorreu em relação à esperada expressão 3.p + 1,50.r + 1,20.s para representar a "máquina" que calcula o gasto de um determinado cliente. Alguns alunos escreveram a expressão p + r + s, o que indica que a letra "p", que deveria representar a quantidade de pizzas, foi interpretada como valor gasto em pizzas. Esse foi um dos pontos de maior dificuldade quanto ao uso da letra para representar um processo. A proposta de trabalhar com expressões algébricas para representar determinadas situações trabalha com a idéia da ausência de fechamento. Contudo, a dificuldade em aceitar a ausência de fechamento pode ter sido uma das razões pelas quais os alunos não tenham utilizado 3.p para o valor gasto em pizza, mas apenas "p", para deixar menos operações "suspensas". Essa dificuldade na transcrição de uma situação para a linguagem algébrica já estava prevista anteriromente, conforme o estudo de Clements, item 2.3.

A iniciação ao pensamento algébrico através de relações funcionais requer um bom planejamento quanto à continuidade do trabalho. Após o uso da letra como variável, da representação de situações-problema em linguagem algébrica, chega-se à necessidade de trabalhar com equações. Ao longo das atividades, perguntas do tipo "*Se Vitor gastou R$ 56,00, em quantos brinquedos andou?*" ou "*E se tiver R$10,00 para abastecer, quantos litros vai comprar?*" foram intencionalmente colocadas para provocar a necessidade de resolução de equações. Mas não foi nosso propósito de investigação o desenvolvimento e a implementação de atividades voltadas para o aprendizado de procedimentos algébricos de resolução de equações.

O progresso de nossos alunos nos faz julgar que a seqüência de atividades proposta tenha ido ao encontro da necessidade de abordar a introdução à álgebra de um modo mais significativo, no sentido de que aquilo tem de fato um significado para ele, que faz sentido, não sendo apenas uma habilidade mecânica. É assim que, ao final deste nosso trabalho de dissertação, temos um produto didático, que foi preparado e testado para ser utilizado na introdução de um conteúdo matemático que não tem sido trabalhado satisfatoriamente em nossas salas de aula.

Este **produto didático** se constitui em:

a) S**eqüência de Atividades**, preparada tendo em vista os seguintes objetivos:

- introduzir o uso da letra de uma forma mais significativa;
- desenvolver a idéia de que podemos expressar as etapas de resolução de um problema mesmo sem ter conhecimento de todos os dados do problema;
- auxiliar na transcrição de uma situação da em linguagem corrente para àquela que faz uso da linguagem algébrica;
- familiarizar o aluno com as diferentes formas de representação de uma relação funcional.

A seqüência de atividades, disponível integralmente no anexo I, assim se constitui:

1. Parque de Diversão
2. Posto de Gasolina
3. Impressoras
4. Bolitas na Água
5. Impressoras e Bolitas
6. Pizzaria
7. Máquinas Algébricas

b) **objeto de aprendizagem “Máquinas Algébricas**[40]”, fundamental no suporte à complexa transição que leva do raciocínio de natureza aritmética para o raciocínio de natureza algébrica;

c) **objeto de aprendizagem “Balanças Algébricas**[41]” (traduzido para o português pelo autor deste trabalho). Este aplicativo, apresentado no anexo II, pode ser uma interessante ferramenta de apoio no desenvolvimento das primeiras manipulações algébricas, necessárias à resolução de uma equação.

Entendemos que o produto apresentado não é definitivo, podendo ser aprimorado em diversos aspectos. Mas traz a idéia, a ser ajustada conforme o público-alvo em questão, de que é possível trabalhar com os alunos de 6ª série, de forma mais significativa, a introdução ao pensamento algébrico via relações entre variáveis.

Convém ao professor analisar as atividades propostas, e avaliar a viabilidade de implementação em sua turma. Estas atividades foram realizadas com uma turma de 30 alunos, de uma específica 6ª série, em escola com disponibilidade de laboratório de Informática para bem atender todos os alunos. Variações nas atividades podem e devem ser realizadas pelo professor que pretenda usá-las, nisso sempre levando em consideração o perfil da turma de alunos com a qual pretende trabalhar. Sempre é importante lembrar que não existem regras que possam garantir, de antemão, o sucesso de uma experiência de ensino. O que temos na literatura, na pesquisa, em particular nesta dissertação de Mestrado, são orientações e idéias que podem ajudar os professores no interessante e complexo processo de ensinar Matemática. É dentro deste espírito que trazemos a nossa contribuição.

[40],[41] Traduzidos para o português pelo autor deste trabalho e disponíveis em http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/maquina/arvore.htm. Vale mencionar que este aplicativo foi utilizado pela turma de alunos que participou da experiência, mas não no âmbito da pesquisa que constitui essa dissertação.

[41]

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Miguel. (1996). **Didática das Matemáticas**. Brun, J. (org). Lisboa, Instituto Piaget, pp 193-217.

BASSANEZI, Rodeny Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. Editora Contexto – 2002

BOOTH, Lesley R. (1997) Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: A. Coxford, & A. Shulte,A. (Org.). **As idéias da álgebra**. pp 23-37. São Paulo: Atual.

BEDNARZ, Nadine e Janvier, Bernadette. Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuites with arithmetic. **Approaches to Algebra**. pp 115-136. Kluwer Academic Publishers.

BRAGA, Ciro. (2003) **O processo inicial de disciplinarização de função matemática no ensino secundário brasileiro**. Disponível em: www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao_ciro_braga.pdf. Acesso em 15 de outubro de 2007.

BROUSSEAU, Guy. *Les obstacles épistémologiques et les problèmes em mathématiques.* **Recherches en Didatiques des Mathématiques**, v. 4.2, p. 164-168, 1983.

BROUSSEAU, Guy. 1986. Fondments et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. França: **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Vol 7, nº 2, pp. 33=115.

CHARBORNNEAU, Loius (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its Relation to Geometry. N. Bednarz et al. (eds.), **Approaches to Algebra**, pp 15-37. Kluwer Academic Publishers.

FILLOY, Eugenio e Sutherland, Rosamund. (1996). Designing Curricula for Teaching and Learning Algebra. in **International Handbook of Mathematics Education** (Bishop et.al. eds) Kluwer Academic Publishers, pp.139-160

HERSCOVICS, Nicolas. (1989). Cognitives Obstacles Encountered in the Learning of Algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), **Research issues in the learning and teaching of algebra** (pp. 60-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

JANVIER, Claude. Modeling And The Initiation Into Algebra. N. Bednarz et al. (eds.), **Approaches to Algebra**, pp 225-236. Kluwer Academic Publishers.

KIERAN, Carolyn e Chalouh, Louise. (1993). Prealgebra: The Transition from Arithmetic to Algebra. PROCESS AND CONTENT. **Research Ideas for the Classroom**: Middle Grades Mathematics.

LEE, Lesley (1996). An Initiation Into Algebraic Culture Through Generalization Activities. N. Bednardz et al (eds.), **Approaches to Algebra**, pp 87-106, Kluwer Academic Publishers.

REEUWIJK, M. van (1995). Students' Knowledge of Algebra. In: L. Meira & D. Carraher (Eds.), **Proceedings of the 19th international conference for the psychology of mathematics education**, 1, Recife, Brazil: Universidade Federal de Pernambuco, pp. 135-150.

REEUWIJK, M. van (2001) **Algebra**: A tool for solving problems? http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/4763.pdf Acesso em 11 de novembro de 2006.

TINOCO, Lucia A. A. (1995). Construindo o conceito de função no 1º grau. V Encontro Nacional de Educação Matemática – Aracaju, SE. Projeto Fundão – IM – UFRJ.

USISKIN, Zalman. (1997). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis – In: A. Coxford, & A. Shulte,A. (Org.). **As Idéias da Álgebra**, pp 9-22. São Paulo: Atual.

USISKIN, Zalman. "Doing Algebra in Grades K-4." In Algebraic Thinking, Grades K-12: **Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications**, edited by Bárbara Moses, pp. 5-6. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1999.

USISKIN, Zalman. (1980). What Should Not Be in the Algebra and Geometry Curricula of Average College-Bound Students? **Mathematics Teacher** 73, pp 413-24. http://understanding.mindtangle.net/wp-content/uploads/2007/04/mt2006-12-68a.pdf Acesso em 25 de outubro de 2007.

VERSCHAFFEL, Lieven e De Corte, Erik. (1997) Teaching Realistic Mathematical Modeling in the Elementary School: A Teaching Experiment With Fifth Graders. **Journal for Research in mathematics Education**, vol. 28, nº 5, pp 577-601.

WHEELER, David. (1996). Backwards and Forwards: Reflections on Different Approaches to Algebra. **Approaches to Algebra**. Kluwer Academic Publishers. pp. 317-325.

http://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra. Acesso em 21 de maio de 2007.

Mini Aurélio – 6ª edição revista e atualizada – Editora Positivo – 2004

<u>Coleções analisadas no capítulo 2</u>

BARROSO, Juliana Matsubara. **Projeto Araribá**. São Paulo: Editora Moderna – 2005.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática Hoje é Feita Assim**. São Paulo: FTD, 2000.

BONJORNO, José Roberto; Bonjorno, Regina Azenha & Olivares, Ayrton. **Fazendo a Diferença**. São Paulo: FTD, 2006.

CENTURIÓN, Marília; Jakubovic, José & Lellis, Marcelo. **Matemática na Medida Certa**. São Paulo: Scipione, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática**. São Paulo, Ática, 2005.

IMENES, Luiz Márcio & Lellis, Marcelo. **Matemática Para Todos.** São Paulo: Scipione, 2002.

LONGEN, Adilson. **Matemática em Movimento**. São Paulo: Editora do Brasil, 1999.

MORI, Iracema & Onaga, Dulce Satiko. **Matemática – Idéias e Desafios**. São Paulo: Saraiva, 2005.

TOSATTO, Cláudia Miriam; Peracchi, Edilaine do Pilar Fernandes; Estephan, Violeta Maria. **Idéias e Relações**. Curitiba: Positivo, 2005.

ANEXO 1

Todas as atividades realizadas em nossa prática fazem parte do anexo 1.

Atividades	Duração
Atividade 1. Parque de Diversão – com o aplicativo Atividade 2. Posto de Gasolina – com o aplicativo	Um período de aula (55 minutos)
Atividade 3. Impressoras – com o aplicativo	Um período de aula (55 minutos)
Atividade 4. Experiência - Bolitas na Água – atividade de modelagem matemática	Dois períodos de aula (110 minutos)
Atividade 5. Impressoras e Bolitas – com o aplicativo.	Um período de aula (55 minutos)
Atividade 6. Pizzaria – com o aplicativo.	Um período de aula (55 minutos)
Atividade 7. Máquinas Algébricas – com o aplicativo.	Dois períodos de aula (110 minutos)

Convém lembrar que nos períodos em que as atividades 5, 6 e 7 foram executadas, houve também um momento de discussão, de retomada sobre pontos importantes trabalhados até então.

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2" align="center">ESCOLA
Área de matemática</td></tr>
<tr><td>Nome:</td><td>Turma:</td></tr>
<tr><td>Professor:</td><td>Data:</td></tr>
</table>

Atividade 1 – Resolução de problemas

Para resolver cada problema abaixo, utilize o aplicativo árvores algébricas. Desenhe nesta folha a máquina utilizada para resolver cada item.

Parque de Diversões

Um parque de diversões cobra $ 5,00 o ingresso e R$ 3,00 por brinquedo. Qual o valor gasto por Carla se ela andar em 7 brinquedos?

E se ela andar em 12?

Vitor gastou R$ 56,00. Em quantos brinquedos Vitor andou?

Se a mãe de Daniela deu a ela R$ 40,00, em quantos brinquedos poderá andar?

	ESCOLA Área de matemática	
	Nome:	Turma:
	Professor: Data:	

Atividade 2 – Resolução de problemas

Para resolver cada problema abaixo, utilize o aplicativo árvores algébricas. Desenhe nesta folha a máquina utilizada para resolver cada item.

Posto de Gasolina

Um posto de gasolina vende o combustível a R$ 2,75 o litro. Quanto um cliente vai pagar se comprar 6 litros? E se comprar 12 litros? E se for abastecer 30 litros?

E se tiver R$10,00 para abastecer, quantos litros vai comprar? Com R$ 60,00, quantos litros se pode comprar? Se alguém gastou R$ 95,00 para completar o tanque, quantos litros gastou?

O carro de Jairo faz 9 quilômetros com um litro de combustível. Quantos quilômetros o carro dele faz com 7 litros? E com 12 litros? E com 33 litros?

Se Jairo fizer uma viagem de 90 quilômetros, quantos litros vai gastar? E quantos reais vai gastar?

Se a viagem for de 330 quilômetros, quantos reais vai gastar?

Se o preço do litro cair para R$2,63, e Bruna fizer uma viagem de 400km com seu carro que faz 10,5 km por litro, quanto ela vai gastar?

Tiago quer passear com seu Fusca 68, que faz 12 km por litro. O carro estava com o tanque vazio, então ele gastou R$ 90,00 para abastecê-lo em um posto em que a gasolina comum custa R$ 2,40 o litro. Assim, se Tiago ficar dirigindo até acabar o combustível, qual deve ser a distância percorrida pelo Fusca?

	ESCOLA Área de matemática	
	Nome:	Turma:
	Professor:	Data:

Atividade 3 – Resolução de problemas

Para resolver cada problema abaixo, utilize o aplicativo árvores algébricas. Desenhe nesta folha a máquina utilizada para resolver cada item.

<u>Impressoras</u>

O laboratório de informática da escola tem duas impressoras: uma jato de tinta e outra a laser. A jato de tinta imprime 12 páginas por minuto, e a laser imprime 18 páginas por minuto.
Quantas páginas a jato de tinta imprime em 2 minutos? E em 5 minutos? E em 13 minutos?

E quantas páginas a laser imprime em 3 minutos? E em 7 minutos? E em 12 minutos?

As duas impressoras juntas conseguirão imprimir quantas páginas em 6 minutos? E em 9 minutos?

Quanto tempo a de jato de tinta leva para imprimir 900 páginas?

E quanto tempo a laser levaria para imprimir 900 páginas?

E quanto tempo as duas juntas levariam para imprimir 900 páginas?

No caso do tem anterior, quantas folhas cada máquina imprimiu?

	ESCOLA Área de matemática Nome: Turma: Professor: Data:

Atividade 4 - Experiência – Bolinhas na água

Material:

- garrafa plástica graduada (1 cm entre cada marca),
- 100 bolinhas de vidro,
- água,
- folha guia da atividade,
- folha para gráfico.

Etapas:

Experimento - medições

Complete a garrafa com água até a primeira marca.

Adicione bolinhas de vidro, uma a uma, até que o nível da água suba exatamente 1 cm. Marque essas informações na tabela abaixo.

Bolinhas	centímetros

Se não colocarmos nenhuma bolinha, o nível da água subirá quantos centímetros? Marque esse ponto na tabela também.

Adicione mais bolinhas para que a altura da água suba mais um centímetro. Complete a tabela algumas quantidades de bolinhas com a altura correspondente.

Quantas bolinhas devemos adicionar para que o nível da água suba:

a) 1 centímetro?

b) 3 centímetros?

c) 7 centímetros?

Experimento - Gráfico
Marque todos os pontos da tabela na folha do gráfico.

Os pontos que você marcou no gráfico estão alinhados, ou próximo de estarem alinhados? Quanto melhor a precisão de suas medições, mais alinhados estarão os pontos. Entretanto, há um ponto que podemos marcar na tabela e no gráfico que não depende de medição. Qual seria esse ponto?

Passando por esse ponto, trace uma reta que passe o mais próximo possível de todos os pontos.

Observe o gráfico e responda:
Quantas bolinhas são necessárias para que o nível da água suba:
a) 1 cm?

b) 4 cm?

c) 0,5 cm?

É possível criar uma máquina no aplicativo Árvores Algébricas que resolva os três itens acima? Como ela seria?

Se adicionarmos apenas uma bolinha não será possível observar no nível da água quanto subiu. Mas seria possível calcular quanto subiu, ou observar no gráfico quanto subiu?
Quanto o nível da água sobe quanto acrescentamos:
a) uma bolinha?

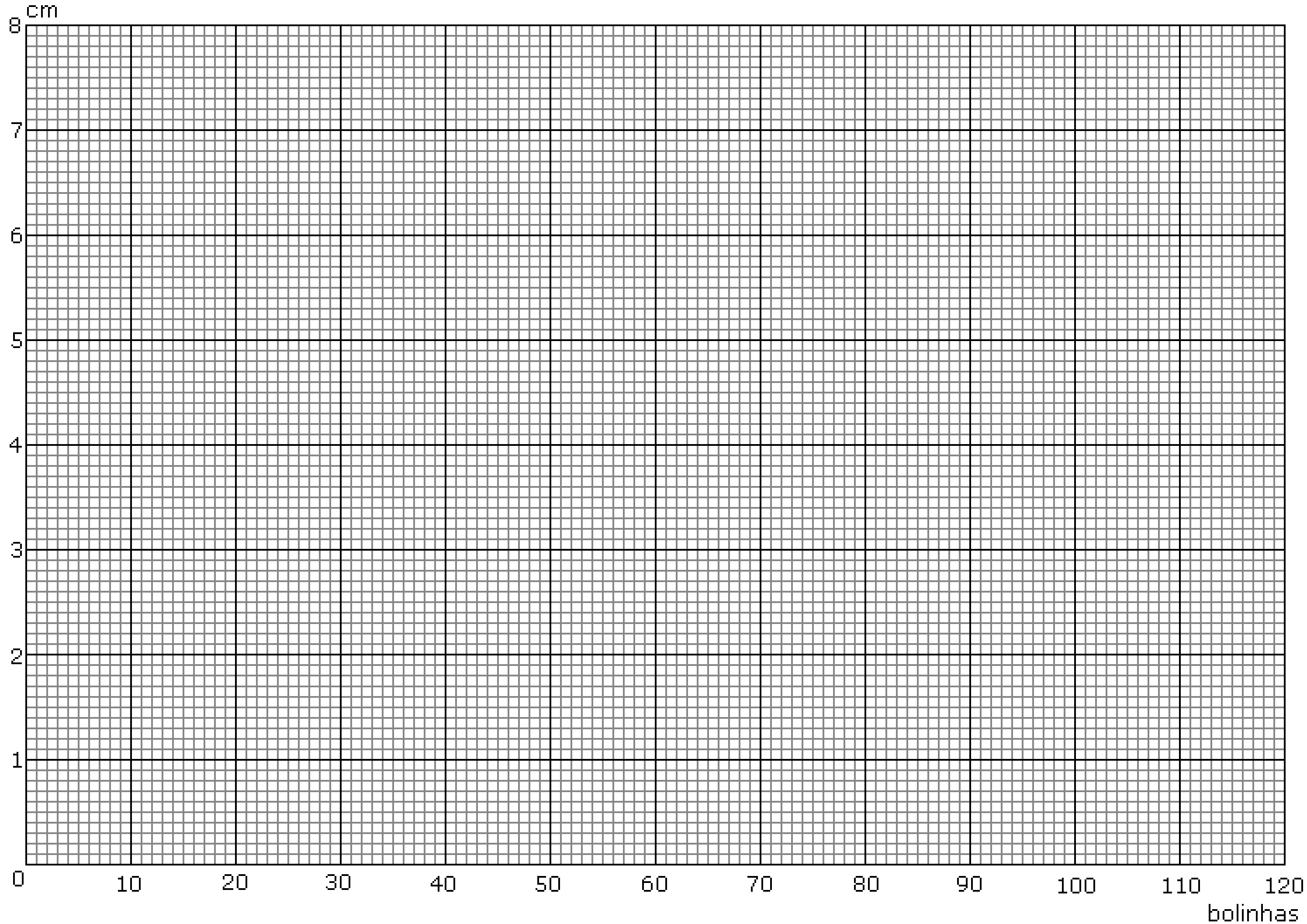
b) duas bolinhas?

c) sete bolinhas?

d) trinta bolinhas?

É possível montar no aplicativo Árvores Algébricas uma máquina que resolva os quatro itens anteriores? Como ela seria?

Atividade 1 - Bolinhas na água



	ESCOLA Área de matemática Nome: Turma: Professor: Data:

Atividade 5 - Máquinas algébricas – problemas

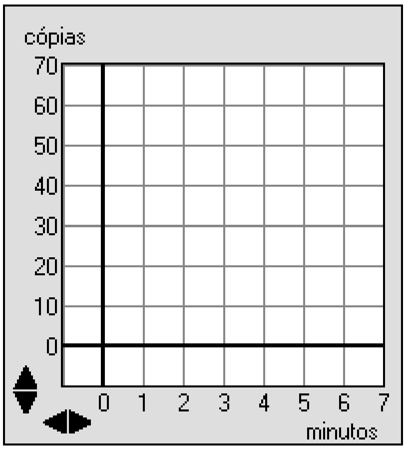
1. A impressora jato de tinta imprime 12 páginas por minuto.

a. Desenhe a máquina que calcula quantas páginas foram impressas a partir do tempo de funcionamento da impressora.

b. Complete a tabela abaixo:

Tempo (min)	Cópias
5	
40	
	120
	900

c. Construa o gráfico que corresponde à máquina do item **a**.



d. Quantas cópias a impressora produz em duas horas?

e. Se a letra "**m**" representa o "número de minutos", então podemos escrever:

número de cópias = ...

f. Desenhe a máquina que, informando-se o número de cópias feitas, calcula o tempo de impressão.

g. Quanto tempo a máquina leva para produzir 330 cópias?

h. Se a letra "**c**" representa o número de cópias feitas pela impressora, então podemos escrever:

tempo de funcionamento da impressora (em minutos) = ...

2. A experiência da medição da água na garrafa com bolinhas de vidro foi realizada com os recipientes abaixo. Os dados foram registrados em três tabelas diferentes, uma para cada recipiente.

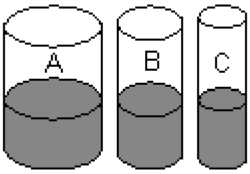


Tabela 1	
bolinhas	cm
30	3
60	6
90	9

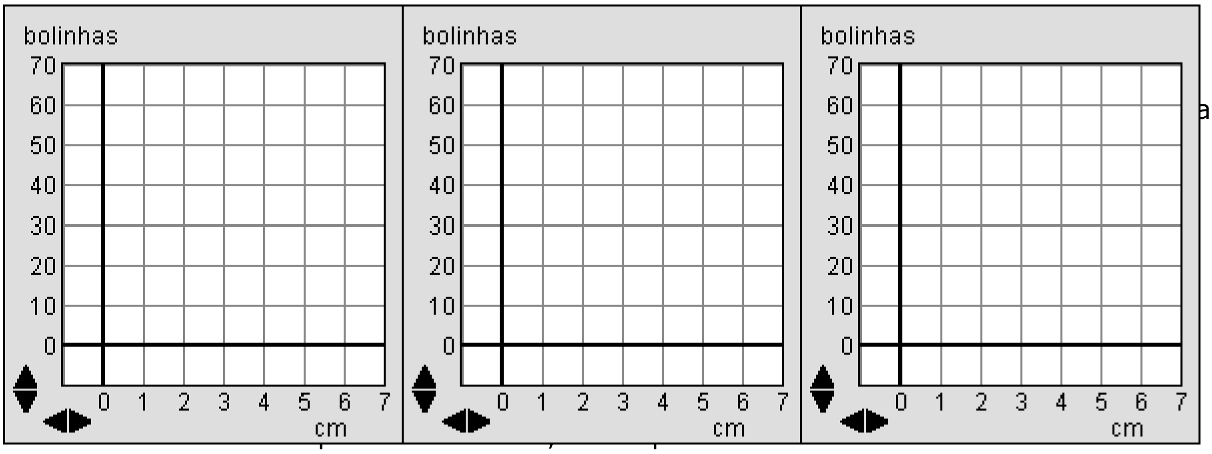
Tabela 2	
bolinhas	cm
30	2
60	4
90	6

Tabela 3	
bolinhas	cm
12	1
36	3
60	5

a. Qual é a tabela correspondente a cada recipiente?

b. Desenhe o gráfico de cada recipiente.

Recipiente A Recipiente B Recipiente C



Quantidade de bolinhas = ?

Recipiente A Recipiente B Recipiente C

	ESCOLA Área de matemática Nome: Turma: Professor: Data:

Atividade 6 - Máquinas que calculam!

<u>Olha a fome! Pizzaria "Sabor Jovem"</u>

No cardápio da pizzaria "Sabor Jovem" tem-se

pizza brotinho	R$3,00
refrigerante	R$1,50
sorvete	R$1,20

1. João, muito faminto, pediu 3 pizzas, 1 refrigerante e 2 sorvetes. Quanto gastou?

2. João pagou a conta com R$20,00. Quanto recebeu de troco?

3. O dono da pizzaria quer uma máquina que calcula os gastos do freguês. Faça esta máquina e desenhe ao lado.

4. Usando as letras p, r e s para representar as quantidades de pizza, de refrigerante e de sorvete que alguém comprou, podemos escrever:

gasto total = ...

5. O dono da pizzaria também quer que a máquina calcule o troco do freguês. Faça esta máquina e desenhe ao lado.

6. Confira se a máquina está funcionando legal! Para isto calcule no papel e na máquina o gasto e troco para:

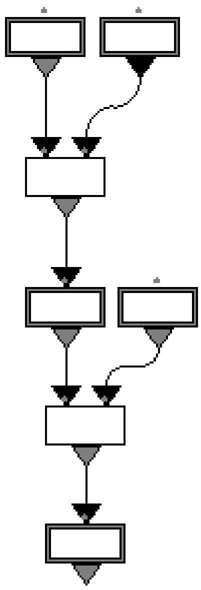
5 pizzas, 3 refrigerantes, 2 sorvetes e pagamento com R$30,00

-Resposta na máquina -Resposta no papel

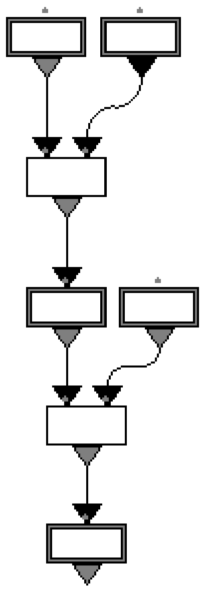
	ESCOLA Área de matemática Nome: Turma: Professor: Data:

Atividade 7 - Máquinas algébricas

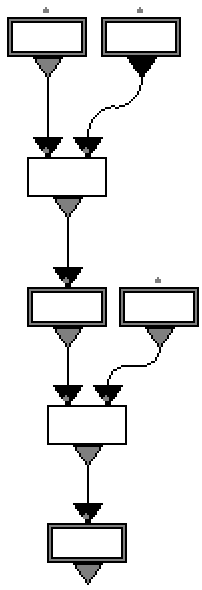
1. Complete a máquina: ela dobra um número e depois adiciona 3 ao resultado.



2. Complete a máquina: ela adiciona 3 ao número e depois dobra o resultado.



3. Complete a máquina: ela dobra um número e depois adiciona 6 ao resultado

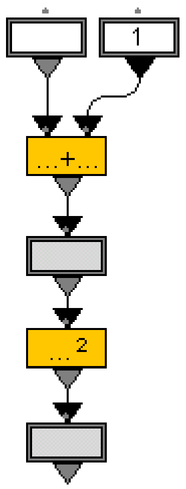


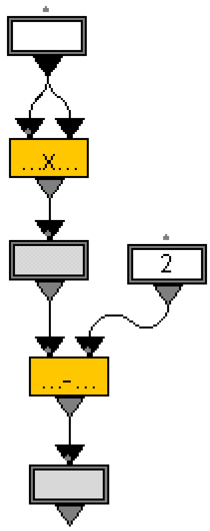
4. Associe a cada máquina a sua expressão algébrica:

Máquina 1	2 . (x + 3)
Máquina 2	2 . x + 6
Máquina 3	2 . x + 3

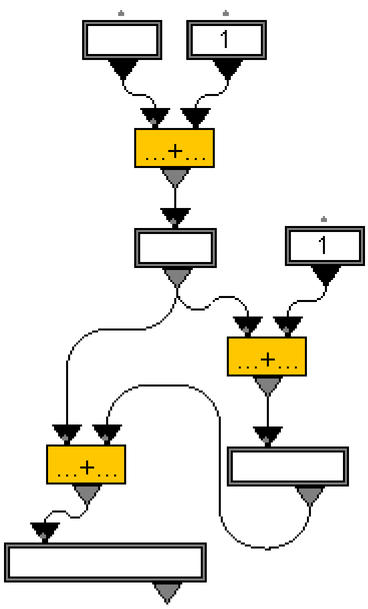
5. Nas três máquinas acima tem duas máquinas que são iguais! Descubra quais são estas duas! Como você descobriu isto?

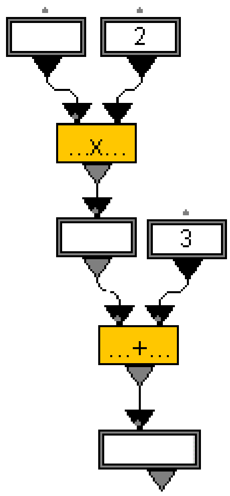
6.Explique o que as máquinas abaixo fazem.





7. Compare as duas máquinas e decida: a) o que há de diferente entre o resultado das duas máquinas; b) qual a máquina e' a melhor?





Explicação:

Anexo 2 – Aplicativos Máquinas Algébricas e "Balança Algébrica"

Sobre as **Maquinas Algébricas**

O objeto apresenta uma área de trabalho, na região cinza da abaixo 67, onde são disponibilizadas "caixas brancas" para entrada e de saída de dados e "caixas laranja" que disponibilizam diferentes operações (soma, diferença, multiplicação, divisão, elevar ao quadrado, extrair a raiz quadrada, operar com potências). As operações são implementadas na região branca e o aluno pode utilizar livremente as "caixas brancas e laranjas", ligando-as com setas conforme a ordem de operações a serem efetuadas.

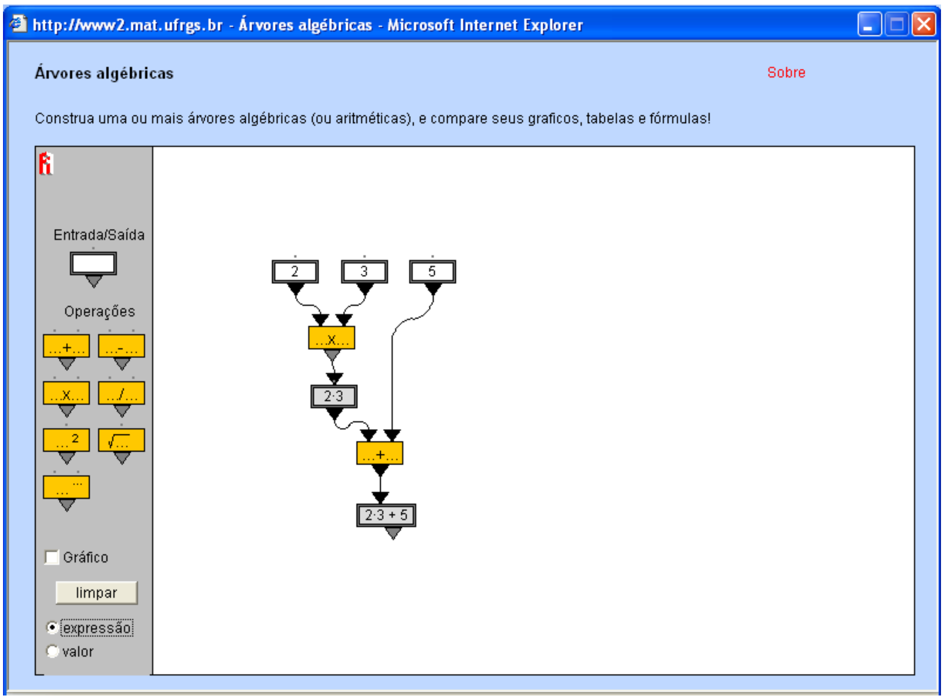


Figura 67 – Interface do aplicativo Árvores Algébricas

Na figura 67 ilustramos o procedimento que implementa (2 x 3 + 5), nisso usando três "caixas brancas" onde são colocados os dados 2, 3 e 5, e duas "caixas laranjas" que indicam as operações de multiplicação e soma. Quando se trabalha somente com dados numéricos, tem-se a opção de resposta na forma "valor" ou na forma "expressão".

Usando as caixas brancas e laranjas podemos também obter expressões algébricas, associadas a representações em tabela e gráfico. A figura 24 ilustra a "máquina" que corresponde a expressão 2.a + 5, acompanhada de tabela de valores e de representação gráfica.

A utilização do aplicativo árvores algébricas tem como objetivo auxiliar o aluno na compreensão da noção de variável, na transcrição de algumas situações problemas para a linguagem algébrica, na relação entre as diferentes formas de expressar um determinado fenômeno. O aplicativo, contudo, não foi utilizado com a idéia de auxiliar no processo de resolução de equações.

Entre os aplicativos oferecidos pelo Instituto Freudenthal, há aplicativos que auxiliam neste objetivo, como o "Solving equations with balance-strategy demo" (Resolvendo equações com o método da balança DEMO, ou balanças algébricas – figura 68), e o "Solving equations with balance-strategy: game" (Resolvendo equações com o método da balança: jogo). Estes aplicativos surgem como uma alternativa para trabalhar com a resolução de equações. Esses aplicativos se encontram em inglês no site do IF, mas, assim como o Árvores Algébricas, o "Solving equations with balance strategy DEMO" também foi traduzido para o Português.

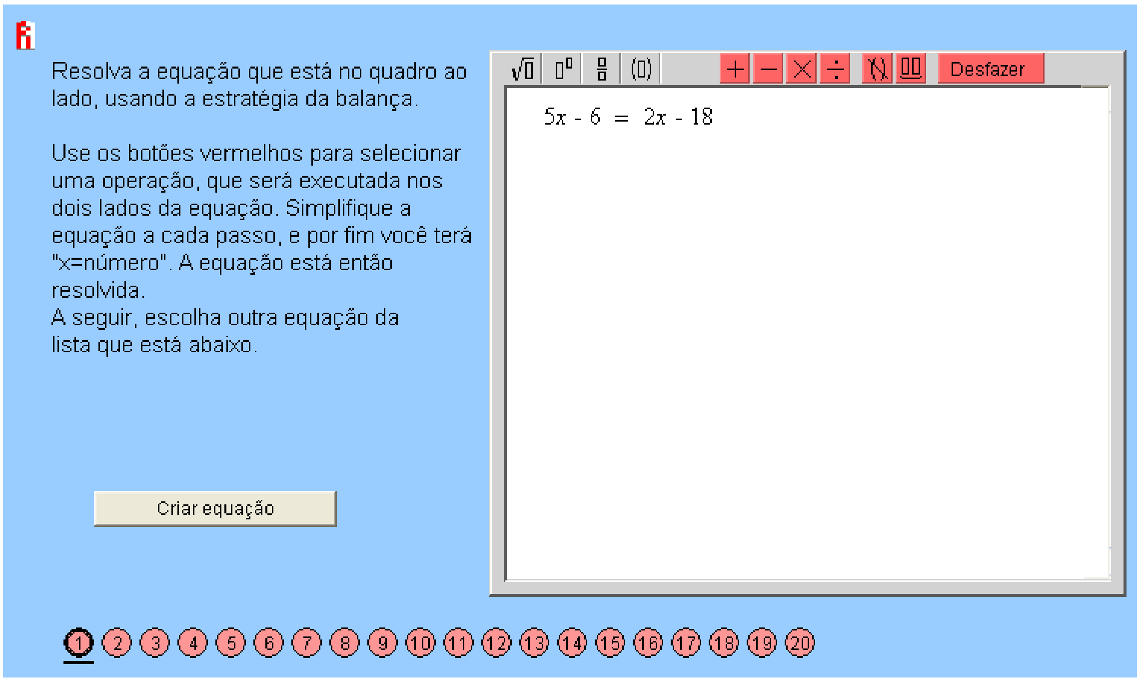


Figura 68 – layout do aplicativo balanças algébricas

A figura acima mostra o layout do aplicativo. São oferecidas 20 equações (outras podem ser criadas), onde o aluno deve usar os botões vermelhos para selecionar a ação que deverá ser feita nos dois lados da igualdade (figura 69), até que o valor de **x** seja encontrado.

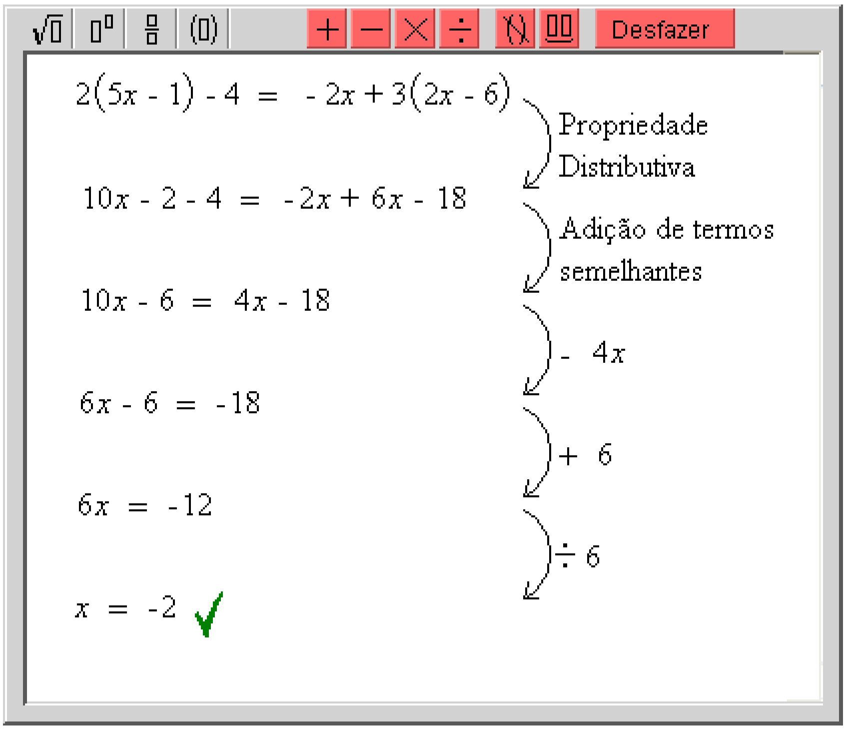
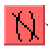
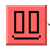


Figura 69 – exemplo de resolução no balanças algébricas

Além das quatro operações fundamentais, existem outras opções: propriedade distributiva (representado por ), adição de termos semelhantes (representado por ), além de desfazer uma operação. A diferença entre a versão DEMO e a versão GAME é que, na versão DEMO o aluno só indica a operação a ser efetuada, e o computador efetua a operação indicada nos dois lados. Já na versão GAME o aluno, além de informar a operação que deseja realizar, o aluno deve escrever como fica a equação após a operação indicada ser efetuada nos dois lados.

O aplicativo acima descrito não fez parte das aulas selecionadas para análise. Mas, tendo sido traduzido ao Português como parte da parceria com a Universidade de Utretch, e como trabalha com a resolução de equações, fica como sugestão, para a análise do professor.