

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MODELOS CONSTITUTIVOS HIPERELÁSTICOS PARA ELASTÔMEROS  
INCOMPRESSÍVEIS: AJUSTE, COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO E PROPOSTA DE UM  
NOVO MODELO

por

Leonardo Hoss

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Março de 2009.

**MODELOS CONSTITUTIVOS HIPERELÁSTICOS PARA ELASTÔMEROS  
INCOMPRESSÍVEIS: AJUSTE, COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO E PROPOSTA  
DE UM NOVO MODELO.**

por

Leonardo Hoss  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. D.Sc. Eduardo Alberto Fancello

Prof. Dr. Eduardo Bittencourt

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Prof. Dr. Horácio Antonio Vielmo  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 26 de Março de 2009.

*Aos meus pais*  
*Renato e Ilse*

## **AGRADECIMENTOS**

Em especial ao meu orientador e eterno amigo, o professor Dr. Rogério José Marczak, pelo incentivo, confiança e apoio incondicional.

À minha namorada Roberta Perini, pelo seu carinho, apoio e compreensão.

## RESUMO

Este trabalho apresenta inicialmente um estudo sobre diversos modelos constitutivos para elastômeros incompressíveis disponíveis na literatura, sendo considerados tanto modelos clássicos quanto contribuições mais recentes. As respectivas expressões para energia de deformação são implementadas em um código computacional que permite a obtenção das constantes constitutivas de cada modelo através da otimização do erro das tensões teóricas em relação aos valores experimentais (calibração) obtidos em ensaios de tração uniaxial, cisalhamento puro e tração biaxial. As predições teóricas são comparadas com os resultados experimentais para três tipos de materiais elastoméricos em diversas faixas de deformação, permitindo uma análise comparativa subjetiva de todos os modelos, bem como inferir sobre o desempenho de cada um.

A seguir é proposto um estimador que permite avaliar quantitativamente a qualidade com que as curvas teóricas se ajustam às curvas experimentais, em substituição à coeficientes de correlação que não se adaptam adequadamente à ajustes não-lineares. Este estimador é testado para as amostras analisadas em diversas faixas de deformação, e sua eficiência em apontar os melhores modelos para cada caso é demonstrada.

Tendo em vista que muitos dos modelos estudados não geram predições teóricas satisfatórias para outros modos de deformação que não o empregado na calibração, investiga-se um esquema de otimização de compromisso com o intuito de melhorar a qualidade dessas predições sem comprometer a predição correspondente à calibração.

A partir de uma análise crítica dos termos governantes nas expressões da energia de deformação dos modelos que apresentam melhor desempenho geral, propõe-se uma família de modelos hiperelásticos. A família proposta mantém na sua equação constitutiva tanto os termos que sabidamente representam o enrijecimento dos elastômeros sob altas deformações, quanto os responsáveis por capturar a oscilação característica da curva tensão x deformação em baixas deformações. Resultados são apresentados para diversas faixas de deformação, e comparados com outros modelos consagrados da literatura.

## ABSTRACT

“Hyperelastic Constitutive Models for Incompressible Elastomers: Fitting, Performance Comparison and Proposal of a New Model”

The present work presents initially a study on several constitutive models for incompressible elastomers published in the technical literature. Classical models are considered as well as recent contributions to the field. The corresponding expressions for the strain energy are implemented in a computational code to recover the constitutive constants for each model through the optimization of the differences between theoretical and experimental stress (calibration), the later obtained from uniaxial tensile, pure shear and biaxial tensile testings. The theoretical stress predictions are compared against experimental values for three samples of elastomers under different strain ranges, allowing a subjective analysis comparing all models, and a discussion about the performance of each one.

Next, a estimator is proposed to evaluate quantitatively the goodness of fit of the theoretical predictions with the experimental curves, as a substitute for correlation coefficients which are not suited to non-linear curve fitting. The proposed estimator is tested for the samples under several strain ranges, and is shown its efficiency as an aid to select the best models for a given application.

Many of the models studied here cannot deliver satisfactory theoretical predictions for deformation modes different from the used in the calibration. Therefore, a compromise optimization scheme is investigated in order to improve the quality of faulty predictions without destroying the good ones.

Finally, departing from a critical analysis of the key terms in the strain energy expressions of those models which showed the best overall performance, a new family of hyperelastic models is proposed. The proposed strain energy function keeps both, the terms responsible for capturing the stiffening under high strains, and the terms which represent the characteristic oscillation in the stress x strain curve under small strains. Results are presented for several strain regimes, and compared with other well known models.

# ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Introdução .....	1
1.2. Revisão Bibliográfica .....	3
1.3. Objetivos do Trabalho .....	7
1.4. Descrição do Trabalho .....	8
2. REVISÃO DE ELASTICIDADE NÃO-LINEAR .....	10
2.1. Descrição do Movimento .....	10
2.2. Medidas de Deformação .....	12
2.2.1. Tensor Gradiente de Deformação.....	12
2.2.2. Tensores de Deformação de Cauchy-Green .....	14
2.2.3. Tensores de Deformação de Green-Lagrange e Almansi .....	15
2.2.4. <i>Stretch</i> (Alongamento) .....	16
2.2.5. Tensor Deformação Infinitesimal.....	17
2.3. Medidas de Tensão .....	17
2.3.1. Tensor Tensão de Cauchy .....	18
2.3.2. Tensores de Piola-Kirchhoff .....	19
2.4. Relações Constitutivas.....	21
2.4.1. Relação Constitutiva Linear para Material Isotrópico Elástico .....	22
2.4.2. Equação Constitutiva Não-Linear para Material Isotrópico Elástico .....	22
2.4.3. Particularização para Material Isotrópico Elástico Incompressível.....	24
2.4.4. Algumas Soluções Analíticas para Sólidos Incompressíveis .....	25
2.4.4.1. Deformação Homogênea Pura de uma Lâmina Fina Incompressível .....	26
2.4.4.2. Tração de uma Lâmina Fina Incompressível .....	27
2.4.4.3. Cisalhamento Puro de uma Lâmina Fina Incompressível.....	28
2.4.4.4. Cisalhamento Simples de um Bloco Hexaédrico Incompressível.....	29
2.4.4.5. Extensão Biaxial de uma Lâmina Fina Incompressível .....	30
2.4.4.6. Resumo .....	31
3. MODELOS HIPERELÁSTICOS .....	32
3.1. Modelo de Mooney-Rivlin.....	34
3.2. Modelo Neo-Hookeano.....	35
3.3. Modelo de Gent-Thomas .....	35
3.4. Modelo de Hart-Smith Aprimorado.....	36
3.5. Modelo de Hart-Smith .....	36
3.6. Modelo de Fung.....	36
3.7. Modelo de Veronda-Westmanns.....	37
3.8. Modelo de Ogden .....	37
3.9. Modelo de Peng-Landel.....	38
3.10. Modelo de Knowles .....	38
3.11. Modelo de Kilian .....	38

3.12.	Modelo de Van der Waals.....	39
3.13.	Modelo de Humphrey-Yin .....	39
3.14.	Modelo de Edwards-Vilgis .....	40
3.15.	Modelo de Takamizawa-Hayashi.....	40
3.16.	Modelo de Yeoh.....	41
3.17.	Modelo de Yeoh-Modificado.....	41
3.18.	Modelo de Arruda-Boyce.....	42
3.19.	Modelo de Yamashita-Kawabata .....	42
3.20.	Modelo de Davis-De-Thomas .....	43
3.21.	Modelo de Gent.....	43
3.22.	Modelo de Gregory .....	44
3.23.	Modelo de Yeoh-Fleming .....	44
3.24.	Modelo de Martins .....	45
3.25.	Modelo de Gent de 03 Parâmetros .....	45
3.26.	Modelo de Pucci-Saccomandi.....	46
3.27.	Modelo de Amin .....	46
3.28.	Modelo de Hartmann-Neff.....	47
3.29.	Modelo de Horgan-Saccomandi.....	47
3.30.	Modelo de Bechir.....	48
3.31.	Modelo Polinomial.....	49
3.32.	Modelo Hyperfoam.....	50
3.33.	Modelo de Blatz-Ko.....	50
4.	AJUSTE DE CONSTANTES CONSTITUTIVAS .....	51
4.1.	Verificando a Hipótese se Incompressibilidade.....	51
4.2.	Obtendo a Curva Tensão x Deformação .....	52
4.2.1.	Preparação dos Dados do Ensaio de Tração Uniaxial .....	52
4.2.2.	Preparação dos Dados do Ensaio de Compressão Uniaxial.....	54
4.2.3.	Preparação dos Dados do Ensaio de Cisalhamento Puro .....	55
4.2.4.	Preparação dos Dados do Ensaio de Cisalhamento Simples .....	55
4.2.5.	Preparação dos Dados do Ensaio de Tração Biaxial .....	56
4.3.	Fórmulas para Ajuste dos Modelos.....	56
4.3.1.	Ajustando o Modelo de Mooney-Rivlin (MRIn).....	57
4.3.2.	Ajustando o Modelo Neo-Hookeano (NHI) .....	58
4.3.3.	Ajustando o Modelo de Gent-Thomas (GTI) .....	58
4.3.4.	Ajustando o Modelo de Hart-Smith Aprimorado (HSAI) .....	59
4.3.5.	Ajustando o Modelo de Hart-Smith (HSI) .....	59
4.3.6.	Ajustando o Modelo de Fung (FI).....	60
4.3.7.	Ajustando o Modelo de Veronda-Westmanns (VWI) .....	60
4.3.8.	Ajustando o Modelo de Peng-Landel (PLI) .....	61
4.3.9.	Ajustando o Modelo de Ogden (OIn).....	62
4.3.10.	Ajustando o Modelo de Knowles (KI) .....	62



4.3.11.	Ajustando o Modelo de Kilian (KLI) .....	63
4.3.12.	Ajustando o Modelo de Van der Waals (VDWI) .....	63
4.3.13.	Ajustando o Modelo de Humphrey-Yin (HYI) .....	63
4.3.14.	Ajustando o Modelo de Edwards-Vilgis (EVI) .....	64
4.3.15.	Ajustando o Modelo de Takamizawa-Hayashi (THI) .....	65
4.3.16.	Ajustando o Modelo de Yeoh (YIn).....	65
4.3.17.	Ajustando o Modelo de Yeoh-Modificado (YMI) .....	66
4.3.18.	Ajustando o Modelo de Arruda-Boyce (ABI5) .....	66
4.3.19.	Ajustando o Modelo de Yamashita-Kawabata (YKI) .....	67
4.3.20.	Ajustando o Modelo de Davis-De-Thomas (DDTI).....	68
4.3.21.	Ajustando o Modelo de Gent (GI).....	68
4.3.22.	Ajustando o Modelo de Gregory (GYI) .....	69
4.3.23.	Ajustando o Modelo de Yeoh-Fleming (YFI) .....	69
4.3.24.	Ajustando o Modelo de Martins (MI) .....	70
4.3.25.	Ajustando o Modelo de Gent de Três Parâmetros (G3I) .....	71
4.3.26.	Ajustando o Modelo de Pucci-Saccomandi (PSI) .....	71
4.3.27.	Ajustando o Modelo de Amin (AI) .....	71
4.3.28.	Ajustando o Modelo de Hartmann-Neff (HNIn) .....	72
4.3.29.	Ajustando o Modelo de Bechir (HBII).....	73
4.3.30.	Ajustando o Modelo de Horgan-Saccomandi (CHGSIn).....	73
4.3.31.	Ajustando o Modelo Polinomial (PI3) .....	75
5.	AJUSTANDO AS CURVAS .....	76
5.1.	Caso de Estudo: Borracha Natural – Grandes Deformações.....	81
5.1.1.	Ajuste para Ensaio de Tração.....	82
5.1.2.	Ajuste para Cisalhamento Puro .....	84
5.1.3.	Ajuste para Tração Biaxial.....	87
5.2.	Caso de Estudo: Borracha Natural – Pequenas Deformações.....	90
5.2.1	Ajuste para Tração .....	91
5.2.2	Ajuste para Cisalhamento Puro.....	93
5.2.3	Ajuste para Tração Biaxial.....	96
5.3.	Caso de Estudo: Silicone .....	99
5.3.1.	Ajuste para Tração Uniaxial.....	100
5.3.2.	Ajuste para Tração Biaxial.....	103
5.4.	Conclusões.....	106
5.4.1.	Modelo de Mooney-Rivlin (MRIn).....	108
5.4.2.	Modelo de Hartmann-Neff (HNIn) .....	109
5.4.3.	Modelo Polinomial (PI).....	109
5.4.4.	Modelo Neo-Hookeano (NHI) .....	110
5.4.5.	Modelo de Gent-Thomas (GTI) .....	110
5.4.6.	Modelo de Hart-Smith Aprimorado (HSAI) .....	111
5.4.7.	Modelo de Hart-Smith (HSI).....	111

5.4.8.	Modelo de Fung (FI) .....	111
5.4.9.	Modelo de Veronda-Westmanns (VWI) .....	112
5.4.10.	Modelo de Knowles (KI).....	112
5.4.11.	Modelo de Hunphrey-Yin (HYI).....	113
5.4.12.	Modelo de Ogden (OIn) .....	113
5.4.13.	Modelo de Bechir (HBIn) .....	114
5.4.14.	Modelo de Peng-Landel (PLI).....	114
5.4.15.	Modelo de Martins (MI).....	115
5.4.16.	Modelo de Kilian (KLI) .....	116
5.4.17.	Modelo de Van der Waals (VDWI) .....	116
5.4.18.	Modelo de Yeoh (YIn) .....	116
5.4.19.	Modelo de Yeoh-Modificado (YMI).....	117
5.4.20.	Modelo de Yamashita-Kawabata (YKI).....	117
5.4.21.	Modelo de Amin (AI).....	117
5.4.22.	Modelo de Davis- De-Thomas (DDTI) .....	118
5.4.23.	Modelo de Gregory (GYI).....	118
5.4.24.	Modelo de Takamizawa-Hayashi (THI).....	119
5.4.25.	Modelo de Edwards-Vilgis (EVI) .....	119
5.4.26.	Modelo de Arruda-Boyce (ABI5) .....	119
5.4.27.	Modelo de Gent (GI).....	119
5.4.28.	Modelo de Yeoh-Fleming (YFI) .....	120
5.4.29.	Modelo de Gent de 03 Parâmetros (G3I) .....	120
5.4.30.	Modelo de Pucci-Saccomandi (PSI).....	120
5.4.31.	Modelo de Horgan.....	121
6.	PROPOSTA DE ESTIMADOR DE QUALIDADE DOS AJUSTES .....	122
6.1.	Estimador $R^2$ Não-Linear .....	125
6.2.	Caso de Estudo: Borracha Natural – Grandes Deformações.....	128
6.2.1.	Ajuste para Tração Uniaxial.....	128
6.2.2.	Ajuste para Tração Biaxial .....	133
6.3.	Caso de Estudo: Borracha Natural – Pequenas Deformações .....	137
6.3.1.	Ajuste para Tração Uniaxial.....	137
6.3.2.	Ajuste para Tração Biaxial .....	141
6.4.	Caso de Estudo: Silicone .....	145
6.4.1.	Ajuste para Tração Uniaxial.....	145
6.4.2.	Ajuste para Tração Biaxial .....	149
6.5.	Conclusões.....	153
7.	AJUSTE MULTI-CRITÉRIO .....	154
7.1.	Caso de Estudo: Borracha Natural – Grandes Deformações.....	156
7.1.1.	Mooney-Rivlin – MRI9.....	156
7.1.2.	Fung – FI.....	157
7.1.3.	Ogden – OI2.....	158

7.1.4.	Yeoh – YI3 .....	159
7.1.5.	Gent – GI.....	160
7.1.6.	Pucci-Saccomandi – PSI .....	161
7.2.	Estudo de Caso: Borracha Natural – Pequenas Deformações.....	162
7.2.1.	Mooney-Rivlin – MRI9.....	162
7.2.2.	Fung – FI.....	163
7.2.3.	Ogden – OI2.....	164
7.2.4.	Yeoh – YI3.....	165
7.2.5.	Gent – GI.....	166
7.2.6.	Pucci-Saccomandi - PSI.....	167
7.3.	Estudo de Caso: Silicone .....	168
7.3.1.	Mooney-Rivlin – MRI9.....	168
7.3.2.	Fung – FI.....	169
7.3.3.	Ogden – OI2.....	170
7.3.4.	Yeoh – YI3.....	171
7.3.5.	Gent – GI.....	172
7.3.6.	Pucci-Saccomandi – PSI .....	173
7.4.	Conclusões.....	174
8.	PROPOSTA DE UM MODELO HIPERELÁSTICO .....	175
8.1.	O Modelo Proposto.....	176
8.2.	Ajuste das Constantes Constitutivas .....	177
8.2.1.	Hoss-Marczak (HMLSI) .....	178
8.2.2.	Hoss-Marczak (HMHSI).....	178
8.3.	Validação do Modelo Constitutivo .....	180
8.3.1.	Caso de Estudo: Borracha Natural – Grandes Deformações .....	180
8.3.1.1.	Ajuste para Tração Uniaxial .....	180
8.3.1.2.	Ajuste para Cisalhamento Puro.....	181
8.3.1.3.	Ajuste para Tração Biaxial .....	182
8.3.2.	Caso de Estudo: Borracha Natural – Pequenas Deformações .....	186
8.3.2.1.	Ajuste para Tração Uniaxial .....	186
8.3.2.2.	Ajuste para Cisalhamento Puro.....	186
8.3.2.3.	Ajuste para Tração Biaxial .....	187
8.3.3.	Caso de Estudo: Silicone.....	191
8.3.3.1.	Ajuste para Tração Uniaxial .....	191
8.3.3.2.	Ajuste para Tração Biaxial .....	192
8.4.	Conclusões .....	195
9.	CONCLUSÕES .....	196
9.1.	Temas Abordados/Conclusões.....	197
9.2.	Sugestões para a Continuidade do Trabalho .....	198
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	201
	APÊNDICE A.....	209

A.	Fórmulas para Ajuste dos Modelos .....	209
A.1.	Ajustando o Modelo de Mooney-Rivlin (MRIn) .....	209
A.2.	Ajustando o Modelo Neo-Hookeano (NHI).....	210
A.3.	Ajustando o Modelo de Gent-Thomas (GTI).....	211
A.4.	Ajustando o Modelo de Hart-Smith Aprimorado (HSAI).....	212
A.5.	Ajustando o Modelo de Hart-Smith (HSI).....	213
A.6.	Ajustando o Modelo de Fung (FI) .....	214
A.7.	Ajustando o Modelo de Veronda-Westmanns (VWI).....	214
A.8.	Ajustando o Modelo de Ogden (OIn) .....	215
A.9.	Ajustando o Modelo de Peng-Landel (PLI).....	219
A.10.	Ajustando o Modelo de Knowles (KI) .....	222
A.11.	Ajustando o Modelo de Kilian (KLI).....	222
A.12.	Ajustando o Modelo de Van der Waals (VDWI).....	223
A.13.	Ajustando o Modelo de Humphrey-Yin (HYI).....	225
A.14.	Ajustando o Modelo de Edwards-Vilgis (EVI).....	225
A.15.	Ajustando o Modelo de Takamizawa-Hayashi (THI) .....	226
A.16.	Ajustando o Modelo de Yeoh (YIn).....	227
A.17.	Ajustando o Modelo de Yeoh-Modificado (YMI) .....	228
A.18.	Ajustando o Modelo de Arruda-Boyce (ABI5).....	229
A.19.	Ajustando o Modelo de Yamashita-Kawabata (YKI) .....	230
A.20.	Ajustando o Modelo de Davis-De-Thomas (DDTI).....	231
A.21.	Ajustando o Modelo de Gent (GI) .....	232
A.22.	Ajustando o Modelo de Gregory (GYI) .....	232
A.23.	Ajustando o Modelo de Yeoh-Fleming (YFI).....	233
A.24.	Ajustando o Modelo de Martins (MI) .....	234
A.25.	Ajustando o Modelo de Gent de Três Parâmetros (G3I).....	236
A.26.	Ajustando o Modelo de Pucci-Saccomandi (PSI) .....	237
A.27.	Ajustando o Modelo de Amin (AI) .....	238
A.28.	Ajustando o Modelo de Hartmann-Neff (HNIn).....	239
A.29.	Ajustando o Modelo de Horgan-Saccomandi (CHGSI).....	240
A.30.	Ajustando o Modelo de Bechir (HBIn).....	241
A.31.	Ajustando o Modelo Polinomial (PI3) .....	245
APÊNDICE B	.....	247
B.	Ajustando as Curvas .....	247
B.1.	Caso de Estudo: Borracha Natural – Grandes Deformações .....	248
B.1.1.	Ajuste para Ensaio de Tração .....	248
B.1.2.	Ajuste para Cisalhamento Puro.....	253
B.1.3.	Ajuste para Tração Biaxial .....	258
B.2.	Caso de Estudo: Borracha Natural – Pequenas Deformações.....	263
B.2.1.	Ajustando para Tração Uniaxial.....	263
B.2.2.	Ajuste para Cisalhamento Puro .....	268

B.2.3.	Ajuste para Tração Biaxial .....	273
B.3.	Caso de Estudo: Silicone – MED4950.....	278
B.3.1.	Ajuste para Tração Uniaxial.....	278
B.3.2.	Ajuste para Tração Biaxial.....	283
APÊNDICE C	.....	288
C.1.	Ajuste para Tração Uniaxial .....	288

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Caracteres Romanos

$a_i$	Funções escalares.	
$A^0$	Área de seção transversal de referência.	$[m^2]$
$A_i$	Fatores das expressões para tensão nominal; Constante Constitutiva.	
$A$	Área de seção transversal instantânea.	$[m^2]$
$a, b, h$	Dimensões nominais.	$[m]$
$b$	Centro de rotação de um corpo; Constante constitutiva.	
$b_i$	Força de corpo na direção $i$ ; Funções escalares.	
$B$	Ensaio de tração biaxial.	
$B_i$	Fatores das expressões para tensão nominal.	
$\mathbf{B}, \mathbf{B}_{ij}$	Tensor de Cauchy-Green à esquerda.	
$C^0$	Configuração de referência do processo de deformação.	
$C$	Configuração instantânea do processo de deformação; Constante constitutiva; Ensaio de compressão uniaxial.	
$C_i, c$	Constantes constitutivas	
$\mathbf{C}, \mathbf{C}_{ij}$	Tensor de Cauchy-Green à direita; Constantes constitutivas do material.	
$\bar{C}$	Conjunto de constantes constitutivas otimizadas.	
$e$	Deformação.	
$\mathbf{e}_i$	Direções cartesianas.	
$E$	Módulo de Young; Tensor de Green-Lagrange.	$[GPa]$
$\mathbf{E}, \mathbf{E}_{ij}$	Tensor de Green-Lagrange.	
$F$	Vetor de funções objetivo.	
$\mathbf{F}, \mathbf{F}_{ij}$	Tensor gradiente de deformações.	
$g_j$	Vetor de restrições.	
$\mathbf{G}, \mathbf{G}_{ij}$	Tensor deformação de Almansi.	
$\mathbf{I}$	Matriz identidade.	
$I_1$	1º invariante de deformações.	

$I_2$	2° invariante de deformações.	
$I_L$	Valor limite para $I_1$ .	
$J$	Jacobiano da transformação.	
$k$	Constante constitutiva.	
$K$	Módulo de compressibilidade do material.	[MPa]
$m$	Constante constitutiva.	
$\mathbf{n}$	Vetor normal na configuração $C$ .	
$\mathbf{n}^0$	Vetor normal na configuração $C^0$ .	
$N, n$	Constantes constitutivas.	
$P$	Ensaio de cisalhamento puro.	
$\mathbf{R}$	Matriz de rotação.	
$R^2$	Coefficiente de correlação.	
$S$	Ensaio de cisalhamento simples.	
$\mathbf{t}^0$	Vetor tração na configuração $C^0$ .	
$\mathbf{t}$	Vetor tração na configuração $C$ .	
$t$	Constante de tempo.	
$t_T$	Tensão nominal para o ensaio de tração uniaxial.	
$t_C$	Tensão nominal para o ensaio de compressão uniaxial.	
$t_P$	Tensão nominal para o ensaio de cisalhamento puro.	
$t_S$	Tensão nominal para o ensaio de cisalhamento simples.	
$t_B$	Tensão nominal para o ensaio de tração biaxial.	
$T$	Ensaio de tração uniaxial.	
$T_{ij}$	Tensor tensão.	[MPa]
$\mathbf{T}^0$	1° tensor de Piola-Kirchhoff.	[MPa]
$\mathbf{T}$	2° tensor de Piola-Kirchhoff.	[MPa]
$\mathbf{u}$	Deslocamento do ponto nas direções cartesianas $e_i$ .	
$V^0$	Volume de referência.	[m <sup>3</sup> ]
$V$	Volume instantâneo.	[m <sup>3</sup> ]
$\mathbf{x}$	Vetor posição de um ponto em $C$	
$\mathbf{X}$	Vetor posição de um ponto em $C^0$ ; Vetor com as variáveis de projeto.	

$W$	Energia de deformação absorvida pelo corpo por unidade de volume.
$w_T$	Peso do ensaio de tração uniaxial.
$w_P$	Peso do ensaio de cisalhamento puro.
$w_B$	Peso do ensaio de tração biaxial.

### Caracteres Gregos

$\alpha$	Constante constitutiva; Constante de proporcionalidade.	
$\beta$	Constante constitutiva.	
$\sigma_{ij}$	Tensor de Cauchy-Green.	[MPa]
$\sigma_{esc}$	Tensão de escoamento do material.	[MPa]
$\sigma_{RUP}$	Tensão de ruptura do material.	[MPa]
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformações infinitesimais.	
$\mu$	Constante constitutiva; Módulo de Cisalhamento; Constante de Lamé.	
$\Delta F_n$	Componente normal da força $\Delta F$ no plano de corte.	
$\Delta F_t$ e $\Delta F_s$	Componentes tangenciais da força $\Delta F$ no plano de corte.	
$\rho$	Densidade do material	[Kg/m <sup>3</sup> ]
$\lambda_i$	Alongamentos nas direções principais; Constante de Lamé.	
$\nu$	Coefficiente de Poisson.	
$\theta$	Variável angular.	[rad]

### Símbolos e operadores matemáticos

$(\cdot)^{-1}$	Matriz inversa.
$\cdot^{-1}$	Matriz transposta.
$\delta_{ij}$	Operador delta de Kronecker.
$\cdot_{,j} = \frac{\partial \cdot}{\partial x_j}$	Operador derivada com respeito à variável $x_j$ .
$ \cdot $	Determinante
$\ \cdot\ $	Norma euclidiana



## **Sub-índices e super-índices**

$i, j$  Índices variam de 1 a 3.

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. 1 – Diagramas $\sigma \times \epsilon$ típicos: (a) material metálico dúctil; (b) material polimérico hiperelástico.....	2
Figura 1. 2 – Principais famílias hiperelásticas.....	2
Figura 2. 1 – Cinemática do processo de deformação.....	11
Figura 2. 2 – Secção de um corpo em equilíbrio estático.....	18
Figura 2. 3 – Trações sobre as configurações $C^0$ e $C$ .....	19
Figura 2. 4 – Extensão em duas direções de uma lâmina incompressível.....	26
Figura 2. 5 – Extensão axial de uma lâmina incompressível.....	27
Figura 2. 6 – Cisalhamento puro de uma lâmina fina incompressível.....	29
Figura 2. 7 - Cisalhamento Simples de um bloco incompressível.....	29
Figura 2. 8 – Extensão Biaxial de uma Lâmina Fina Incompressível.....	31
Figura 3. 1 - Classificação básica de alguns modelos hiperelásticos clássicos.....	32
Figura 4. 1 - Comparação entre diagramas tensão $\times$ deformação verdadeiros ( $\sigma \times \epsilon$ ) e nominais ( $t \times e$ ) obtidos para o ensaio de tração uniaxial.....	54
Figura 5. 1 - Forma típica das curvas $t \times \lambda$ obtidas em ensaios experimentais de borrachas (Muhr, 2005).....	76
Figura 5. 2 - Excitação dos invariantes de deformação para cada modo de deformação.....	79
Figura 5. 3 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $T$ na faixa $0 \leq e \leq 700\%$ .....	83
Figura 5. 4 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $T$ na faixa $0 \leq e \leq 700\%$ .....	83
Figura 5. 5 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $T$ na faixa $0 \leq e \leq 700\%$ .....	84
Figura 5. 6 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $P$ na faixa $0 \leq e \leq 400\%$ .....	85
Figura 5. 7 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $P$ na faixa $0 \leq e \leq 400\%$ .....	86
Figura 5. 8 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $P$ na faixa $0 \leq e \leq 400\%$ .....	86
Figura 5. 9 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $B$ na faixa $0 \leq e \leq 350\%$ .....	88
Figura 5. 10 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $B$ na faixa $0 \leq e \leq 350\%$ .....	88
Figura 5. 11 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $B$ na faixa $0 \leq e \leq 350\%$ .....	89
Figura 5. 12 - Borracha natural (NR55). Ajuste para $T$ na faixa $0 \leq e \leq 100\%$ .....	92
Figura 5. 13 - Borracha natural (NR55). Ajuste para $T$ na faixa $0 \leq e \leq 100\%$ .....	92
Figura 5. 14 - Borracha natural (NR55). Ajuste para $T$ na faixa $0 \leq e \leq 100\%$ .....	93
Figura 5. 15 - Borracha natural (NR55). Ajuste para $P$ na faixa $0 \leq e \leq 130\%$ .....	94
Figura 5. 16 - Borracha natural (NR55). Ajuste para $P$ na faixa $0 \leq e \leq 130\%$ .....	95
Figura 5. 17 - Borracha natural (NR55). Ajuste para $P$ na faixa $0 \leq e \leq 130\%$ .....	95
Figura 5. 18 - Borracha natural (NR55). Ajuste para $B$ na faixa $0 \leq e \leq 70\%$ .....	97
Figura 5. 19 - Borracha natural (NR55). Ajuste para $B$ na faixa $0 \leq e \leq 70\%$ .....	97
Figura 5. 20 - Borracha natural (NR55). Ajuste para $B$ na faixa $0 \leq e \leq 70\%$ .....	98
Figura 5. 21 – Silicone (MED4950). Ajuste para $T$ na faixa $0 \leq e \leq 600\%$ .....	101
Figura 5. 22 - Silicone (MED4950). Ajuste para $T$ na faixa $0 \leq e \leq 600\%$ .....	102

Figura 5. 23 - Silicone (MED4950). Ajuste para $T$ na faixa $0 \leq e \leq 600\%$ .....	102
Figura 5. 24 - Silicone (MED4950). Ajuste para $B$ na faixa $0 \leq e \leq 300\%$ .....	104
Figura 5. 25 - Silicone (MED4950). Ajuste para $B$ na faixa $0 \leq e \leq 300\%$ .....	104
Figura 5. 26 - Silicone (MED4950). Ajuste para $B$ na faixa $0 \leq e \leq 300\%$ .....	105
Figura 5. 27 – Diagramas $t \times e$ típicos do modelo de Mooney-Rivlin: (a) 2 e 3 termos; (b) 5 termos; (c) 9 termos.	109
Figura 5. 28 – Demonstração dos limites do modelo de PLI. ....	115
Figura 6. 1 – Avaliação dos modelos utilizando a eq.(6.1). ....	123
Figura 6. 2 – Comparação das previsões numéricas com as curvas experimentais.....	123
Figura 6. 3 - Avaliação dos modelos utilizando o estimador da eq.(6.2). ....	125
Figura 6. 4 – Variáveis envolvidas no cálculo do $R^2$ . (a) - $S_{Stot}$ . (b) - $S_{reg}$ .....	126
Figura 6. 5 – Influência da média ( $S_{Stot}$ ) no cálculo do $R^2$ .....	127
Figura 6. 6 – Comportamento do modelo PSI.....	129
Figura 6. 7 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 100\%$ . (b) - $e = 300\%$ . (c) - $e = 500\%$ . (d) - $e = 700\%$ .....	130
Figura 6. 8 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 100\%$ . (b) - $e = 300\%$ . (c) - $e = 500\%$ . (d) - $e = 700\%$ .....	131
Figura 6. 9 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 100\%$ . (b) - $e = 300\%$ . (c) - $e = 500\%$ . (d) - $e = 700\%$ .....	132
Figura 6. 10 – Comportamento do modelo PSI.....	133
Figura 6. 11 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $B$ . (a) - $e = 100\%$ . (b) - $e = 300\%$ . (c) - $e = 500\%$ . (d) - $e = 700\%$ .....	134
Figura 6. 12 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $B$ . (a) - $e = 100\%$ . (b) - $e = 300\%$ . (c) - $e = 500\%$ . (d) - $e = 700\%$ .....	135
Figura 6. 13 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $B$ . (a) - $e = 100\%$ . (b) - $e = 300\%$ . (c) - $e = 500\%$ . (d) - $e = 700\%$ .....	136
Figura 6. 14 – Borracha natural (NR55). –Ajuste para $T$ ( $e = 50\%$ ) .....	137
Figura 6. 15 - Borracha Natural (NR55). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 30\%$ . (b) - $e = 50\%$ . (c) - $e = 80\%$ . (d) - $e = 130\%$ .....	138
Figura 6. 16 - Borracha Natural (NR55). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 30\%$ . (b) - $e = 50\%$ . (c) - $e = 80\%$ . (d) - $e = 130\%$ .....	139
Figura 6. 17 - Borracha Natural (NR55). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 30\%$ . (b) - $e = 50\%$ . (c) - $e = 80\%$ . (d) - $e = 130\%$ .....	140
Figura 6. 18 - Borracha natural (NR55). –Ajuste para $B$ ( $e = 50\%$ ) .....	141
Figura 6. 19 - Borracha Natural (NR55). Ajuste para $B$ . (a) - $e = 30\%$ . (b) - $e = 50\%$ . (c) - $e = 80\%$ . (d) - $e = 130\%$ .....	142

Figura 6. 20 - Borracha Natural (NR55). Ajuste para $B$ . (a) - $e = 30\%$ . (b) - $e = 50\%$ . (c) - $e = 80\%$ . (d) - $e = 130\%$ .....	143
Figura 6. 21 - Borracha Natural (NR55). Ajuste para $B$ . (a) - $e = 30\%$ . (b) - $e = 50\%$ . (c) - $e = 80\%$ . (d) - $e = 130\%$ .....	144
Figura 6. 22 - Comportamento do modelo PSI .....	145
Figura 6. 23 - Silicone (MED4950). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 100\%$ . (b) - $e = 200\%$ . (c) - $e = 400\%$ . (d) - $e = 600\%$ .....	146
Figura 6. 24 - Silicone (MED4950). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 100\%$ . (b) - $e = 200\%$ . (c) - $e = 400\%$ . (d) - $e = 600\%$ .....	147
Figura 6. 25 - Silicone (MED4950). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 100\%$ . (b) - $e = 200\%$ . (c) - $e = 400\%$ . (d) - $e = 600\%$ .....	148
Figura 6. 26 – Comportamento do modelo PSI.....	149
Figura 6. 27 - Silicone (MED4950). Ajuste para $B$ . (a) - $e = 100\%$ . (b) - $e = 200\%$ . (c) - $e = 400\%$ . (d) - $e = 600\%$ .....	150
Figura 6. 28 - Silicone (MED4950). Ajuste para $B$ . (a) - $e = 100\%$ . (b) - $e = 200\%$ . (c) - $e = 400\%$ . (d) - $e = 600\%$ .....	151
Figura 6. 29 - Silicone (MED4950). Ajuste para $B$ . (a) - $e = 100\%$ . (b) - $e = 200\%$ . (c) - $e = 400\%$ . (d) - $e = 600\%$ .....	152
Figura 7. 1 – Borracha natural (Treloar). (a) Tração Uniaxial ( $e = 700\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 400\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 350\%$ ). (f) Caso 2.....	156
Figura 7. 2 – Borracha natural (Treloar). (a) Tração Uniaxial ( $e = 700\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 400\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 350\%$ ). (f) Caso 2.....	157
Figura 7. 3 - Borracha natural (Treloar). (a) Tração Uniaxial ( $e = 700\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 400\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 350\%$ ). (f) Caso 2.....	158
Figura 7. 4 - Borracha natural (Treloar). (a) Tração Uniaxial ( $e = 700\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 400\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 350\%$ ). (f) Caso 2.....	159
Figura 7. 5 - Borracha natural (Treloar). (a) Tração Uniaxial ( $e = 700\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 400\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 350\%$ ). (f) Caso 2.....	160
Figura 7. 6 - Borracha natural (Treloar). (a) Tração Uniaxial ( $e = 700\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 400\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 350\%$ ). (f) Caso 2.....	161
Figura 7. 7 - Borracha natural (NR55). (a) Tração Uniaxial ( $e = 100\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 130\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 70\%$ ). (f) Caso 2.....	162

Figura 7. 8 - Borracha natural (NR55). (a) Tração Uniaxial ( $e = 100\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 130\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 70\%$ ). (f) Caso 2.....	163
Figura 7. 9 - Borracha natural (NR55). (a) Tração Uniaxial ( $e = 100\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 130\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 70\%$ ). (f) Caso 2.....	164
Figura 7. 10 - Borracha natural (NR55). (a) Tração Uniaxial ( $e = 100\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 130\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 70\%$ ). (f) Caso 2.....	165
Figura 7. 11 - Borracha natural (NR55). (a) Tração Uniaxial ( $e = 100\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 130\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 70\%$ ). (f) Caso 2.....	166
Figura 7. 12 - Borracha natural (NR55). (a) Tração Uniaxial ( $e = 100\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 130\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 70\%$ ). (f) Caso 2.....	167
Figura 7. 13 - Silicone (MED4950). (a) Tração Uniaxial ( $e = 600\%$ ). (b) Caso 3. (c) Tração Biaxial ( $e = 300\%$ ). (d) Caso 2. (e) Caso 1. (f) Caso 4.....	168
Figura 7. 14 - Silicone (MED4950). (a) Tração Uniaxial ( $e = 600\%$ ). (b) Caso 3. (c) Tração Biaxial ( $e = 300\%$ ). (d) Caso 2. (e) Caso 1. (f) Caso 4.....	169
Figura 7. 15 - Silicone (MED4950). (a) Tração Uniaxial ( $e = 600\%$ ). (b) Caso 3. (c) Tração Biaxial ( $e = 300\%$ ). (d) Caso 2. (e) Caso 1. (f) Caso 4.....	170
Figura 7. 16 - Silicone (MED4950). (a) Tração Uniaxial ( $e = 600\%$ ). (b) Caso 3. (c) Tração Biaxial ( $e = 300\%$ ). (d) Caso 2. (e) Caso 1. (f) Caso 4.....	171
Figura 7. 17 - Silicone (MED4950). (a) Tração Uniaxial ( $e = 600\%$ ). (b) Caso 3. (c) Tração Biaxial ( $e = 300\%$ ). (d) Caso 2. (e) Caso 1. (f) Caso 4.....	172
Figura 7. 18 - Silicone (MED4950). (a) Tração Uniaxial ( $e = 600\%$ ). (b) Caso 3. (c) Tração Biaxial ( $e = 300\%$ ). (d) Caso 2. (e) Caso 1. (f) Caso 4.....	173
Figura 8. 1 – Famílias hiperelásticas situadas cronologicamente.....	175
Figura 8. 2 – Comparação dos modelos PSI e HMHSI. Ajuste para $T$ na faixa $0 \leq e \leq 600\%$ .....	181
Figura 8. 3 - Comparação dos modelos PSI e HMHSI. Ajuste para $P$ na faixa $0 \leq e \leq 400\%$ .....	182
Figura 8. 4 - Comparação dos modelos PSI e HMHSI. Ajuste para $B$ na faixa $0 \leq e \leq 700\%$ .....	182
Figura 8. 5 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 100\%$ . (b) - $e = 300\%$ . (c) - $e = 500\%$ . (d) - $e = 700\%$ .....	183

Figura 8. 6 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $P$ . (a) - $e = 100%$ . (b) - $e = 300%$ . (c) - $e = 500%$ . (d) - $e = 700%$ .....	184
Figura 8. 7 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $B$ . (a) - $e = 100%$ . (b) - $e = 300%$ . (c) - $e = 500%$ . (d) - $e = 700%$ .....	185
Figura 8. 8 - Comparação dos modelos YMI, YFI e HMLSI. Ajuste para $T$ ( $0 \leq e \leq 700%$ ) .....	186
Figura 8. 9 - Comparação dos modelos YMI, YFI, PSI e HMLSI. Ajuste para $P$ ( $0 \leq e \leq 130%$ ) .....	187
Figura 8. 10 - Comparação dos modelos YMI, YFI, PSI e HMLSI. Ajuste para $B$ ( $0 \leq e \leq 70%$ ) .....	187
Figura 8. 11 - Borracha natural (NR55). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 30%$ . (b) - $e = 50%$ . (c) - $e = 80%$ . (d) - $e = 130%$ .....	188
Figura 8. 12 - Borracha natural (NR55). Ajuste para $P$ . (a) - $e = 30%$ . (b) - $e = 50%$ . (c) - $e = 80%$ . (d) - $e = 130%$ .....	189
Figura 8. 13 - Borracha natural (NR55). Ajuste para $B$ . (a) - $e = 30%$ . (b) - $e = 50%$ . (c) - $e = 80%$ . (d) - $e = 130%$ .....	190
Figura 8. 14 - Comparação dos modelos YMI, YFI, PSI, HMLSI. Ajuste para $T$ ( $0 \leq e \leq 400%$ ) .....	191
Figura 8. 15 - Comparação dos modelos YMI, YFI, PSI, HMLSI. Ajuste para $T$ ( $0 \leq e \leq 600%$ ) .....	192
Figura 8. 16 - Comparação dos modelos YMI, YFI, PSI, HMLSI. Ajuste para $B$ ( $0 \leq e \leq 600%$ ) .....	192
Figura 8. 17 - Silicone (MED4950). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 100%$ . (b) - $e = 200%$ . (c) - $e = 400%$ . (d) - $e = 600%$ .....	193
Figura 8. 18 - Silicone (MED4950). Ajuste para $B$ . (a) - $e = 100%$ . (b) - $e = 200%$ . (c) - $e = 400%$ . (d) - $e = 600%$ .....	194
Figura 9. 1 - Comparação entre alguns modelos hiperelásticos quanto à faixa de deformações máxima. ....	200
Figura B. 1 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 01 e grupo 02. ....	248
Figura B. 2 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 03 e grupo 04. ....	249
Figura B. 3 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 05 e grupo 06. ....	250
Figura B. 4 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 07 e grupo 08. ....	251
Figura B. 5 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 09 e grupo 10. ....	252
Figura B. 6 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 01 e grupo 02. ....	253
Figura B. 7 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 03 e grupo 04. ....	254
Figura B. 8 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 05 e grupo 06. ....	255
Figura B. 9 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 07 e grupo 08. ....	256
Figura B. 10 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 09 e grupo 10. ....	257
Figura B. 11 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 01 e grupo 2. ....	258
Figura B. 12 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 03 e grupo 04. ....	259
Figura B. 13 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 05 e grupo 06. ....	260
Figura B. 14 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 07 e grupo 08. ....	261
Figura B. 15 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 09 e grupo 10. ....	262

Figura B. 16 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 01 e grupo 02. ....	263
Figura B. 17 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 03 e grupo 04. ....	264
Figura B. 18 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 05 e grupo 06. ....	265
Figura B. 19 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 07 e grupo 08. ....	266
Figura B. 20 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 09 e grupo 10. ....	267
Figura B. 21 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 01 e grupo 02. ....	268
Figura B. 22 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 03 e grupo 04. ....	269
Figura B. 23 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 05 e grupo 06. ....	270
Figura B. 24 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 07 e grupo 08. ....	271
Figura B. 25 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 09 e grupo 10. ....	272
Figura B. 26 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 01 e grupo 02. ....	273
Figura B. 27 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 03 e grupo 04. ....	274
Figura B. 28 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 05 e grupo 06. ....	275
Figura B. 29 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 07 e grupo 08. ....	276
Figura B. 30 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 09 e grupo 10. ....	277
Figura B. 31 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 01 e grupo 02. ....	278
Figura B. 32 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 03 e grupo 04. ....	279
Figura B. 33 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 05 e grupo 06. ....	280
Figura B. 34 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 07 e grupo 08. ....	281
Figura B. 35 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 09 e grupo 10. ....	282
Figura B. 36 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 01 e grupo 02. ....	283
Figura B. 37 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 03 e grupo 04. ....	284
Figura B. 38 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 05 e grupo 06. ....	285
Figura B. 39 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 07 e grupo 08. ....	286
Figura B. 40 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 01 e grupo 02. ....	287
Figura C. 1 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 100%$ . (b) - $e = 300%$ . (c) - $e = 500%$ . (d) - $e = 700%$ . ....	288
Figura C. 2 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 100%$ . (b) - $e = 300%$ . (c) - $e = 500%$ . (d) - $e = 700%$ . ....	289
Figura C. 3 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para $T$ . (a) - $e = 100%$ . (b) - $e = 300%$ . (c) - $e = 500%$ . (d) - $e = 700%$ . ....	290

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2. 1 – Resumo das soluções analíticas para modos de deformação homogêneos.....	31
Tabela 4. 1 - Tensões nominais para os modelos de Mooney-Rivlin ( $n = 2, 3, 5$ ou $9$ ).....	58
Tabela 4. 2 - Tensões nominais para o modelo Neo-Hookeano.....	58
Tabela 4. 3 - Tensões nominais para o modelo de Gent-Thomas.....	59
Tabela 4. 4 - Tensões nominais para o modelo de Hart-Smith Aprimorado.....	59
Tabela 4. 5 - Tensões nominais para o modelo de Hart-Smith.....	60
Tabela 4. 6 - Tensões nominais para o modelo de Fung.....	60
Tabela 4. 7 - Tensões nominais para o modelo de Veronda-Westmann.....	61
Tabela 4. 8 - Tensões nominais para o modelo de Peng-Landel.....	61
Tabela 4. 9 - Tensões nominais para o modelo de Ogden.....	62
Tabela 4. 10 - Tensões nominais para o modelo de Knowles.....	62
Tabela 4. 11 - Tensões nominais para o modelo de Kilian.....	63
Tabela 4. 12 - Tensões nominais para o modelo de Van der Waals.....	64
Tabela 4. 13 - Tensões nominais para o modelo de Humphrey-Yin.....	64
Tabela 4. 14 - Tensões nominais para o modelo de Edwards-Vilgis.....	65
Tabela 4. 15 - Tensões nominais para o modelo de Takamizawa-Hayashi.....	66
Tabela 4. 16 - Tensões nominais para o modelo de Yeoh ( $n = 2, 3$ , ou $5$ ).....	66
Tabela 4. 17 - Tensões nominais para o modelo de Yeoh-Modificado.....	67
Tabela 4. 18 - Tensões nominais para o modelo de Arruda-Boyce de 5 termos.....	67
Tabela 4. 19 - Tensões nominais para o modelo de Yamashita-Kawabata.....	68
Tabela 4. 20 - Tensões nominais para o modelo de Davis-De-Thomas.....	68
Tabela 4. 21 - Tensões nominais para o modelo de Gent.....	69
Tabela 4. 22 - Tensões nominais para o modelo de Gregory.....	69
Tabela 4. 23 - Tensões nominais para o modelo de Yeoh-Fleming.....	70
Tabela 4. 24 - Tensões nominais para o modelo de Martins.....	70
Tabela 4. 25 - Tensões nominais para o modelo de Gent de 03 Parâmetros.....	71
Tabela 4. 26 - Tensões nominais para o modelo de Pucci-Saccomandi.....	72
Tabela 4. 27 - Tensões nominais para o modelo de Amin.....	72
Tabela 4. 28 - Tensões nominais para os modelos de Hartmann-Neff ( $n = 1, 2, 3$ ).....	73
Tabela 4. 29 - Tensões nominais para o modelo de Bechir.....	74
Tabela 4. 30 - Tensões nominais para o modelo de Horgan-Saccomandi.....	74
Tabela 4. 31 - Tensões nominais para o modelo Polinomial de 3 termos.....	75
Tabela 5. 1 - Constantes necessárias para os diversos modelos hiperelásticos.....	77
Tabela 5. 2 – Borracha natural (Treloar). Ajustes: $T$ ( $0 \leq e \leq 700\%$ ), $P$ ( $0 \leq e \leq 400\%$ ) e $B$ ( $0 \leq e \leq 350\%$ ).....	90



Tabela 5. 3 - Borracha natural (NR55). Ajustes: $T$ ( $0 \leq e \leq 100\%$ ), $P$ ( $0 \leq e \leq 130\%$ ) e $B$ ( $0 \leq e \leq 70\%$ ).	99
Tabela 5. 4 - Silicone (MED4950). Ajustes: $T$ ( $0 \leq e \leq 600\%$ ) e $B$ ( $0 \leq e \leq 300\%$ )	106
Tabela 8. 1 - Tensões nominais para o modelo HMLSI.	178
Tabela 8. 2 - Tensões nominais para o modelo HMHSI.	179
Tabela 8. 3 - Constantes necessárias para ajustar os modelos hiperelásticos.	179
Tabela A. 1 - Tensões nominais para os modelos de Mooney-Rivlin ( $n = 2, 3, 5$ ou $9$ ).	210
Tabela A. 2 - Tensões nominais para o modelo Neo-Hookeano.	211
Tabela A. 3 - Tensões nominais para o modelo de Gent-Thomas.	212
Tabela A. 4 - Tensões nominais para o modelo de Hart-Smith Aprimorado.	212
Tabela A. 5 - Tensões nominais para o modelo de Hart-Smith.	213
Tabela A. 6 - Tensões nominais para o modelo de Fung.	214
Tabela A. 7 - Tensões nominais para o modelo de Veronda-Westmann.	215
Tabela A. 8 - Tensões nominais para o modelo de Ogden.	218
Tabela A. 9 - Tensões nominais para o modelo de Peng-Landel.	221
Tabela A. 10 - Tensões nominais para o modelo de Knowles.	222
Tabela A. 11 - Tensões nominais para o modelo de Kilian.	223
Tabela A. 12 - Tensões nominais para o modelo de Van der Waals.	224
Tabela A. 13 - Tensões nominais para o modelo de Humphrey-Yin.	225
Tabela A. 14 - Tensões nominais para o modelo de Edwards-Vilgis.	226
Tabela A. 15 - Tensões nominais para o modelo de Takamizawa-Hayashi.	227
Tabela A. 16 - Tensões nominais para o modelo de Yeoh ( $n = 2, 3$ , ou $5$ ).	228
Tabela A. 17 - Tensões nominais para o modelo de Yeoh-Modificado.	229
Tabela A. 18 - Tensões nominais para o modelo de Arruda-Boyce de 5 termos.	230
Tabela A. 19 - Tensões nominais para o modelo de Yamashita-Kawabata.	230
Tabela A. 20 - Tensões nominais para o modelo de Davis, De e Thomas.	231
Tabela A. 21 - Tensões nominais para o modelo de Gent.	232
Tabela A. 22 - Tensões nominais para o modelo de Gregory.	233
Tabela A. 23 - Tensões nominais para o modelo de Yeoh-Fleming.	234
Tabela A. 24 - Tensões nominais para o modelo de Martins.	236
Tabela A. 25 - Tensões nominais para o modelo de Gent de 03 Parâmetros.	237
Tabela A. 26 - Tensões nominais para o modelo de Pucci-Saccomandi.	238
Tabela A. 27 - Tensões nominais para o modelo de Amin.	238
Tabela A. 28 - Tensões nominais para os modelos de Hartmann-Neff ( $n = 1, 2, 3$ ).	240
Tabela A. 29 - Tensões nominais para o modelo de Horgan-Saccomandi.	241
Tabela A. 30 - Tensões nominais para o modelo de Bechir.	244
Tabela A. 31 - Tensões nominais para o modelo Polinomial de 3 termos.	246

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Introdução

O uso de elastômeros como material de engenharia, em substituição aos materiais mais convencionais como aço e alumínio, cresceu abruptamente nas últimas décadas (Marczak et al., 2006). Em parte, isso se deve às características únicas das borrachas, mas também na possibilidade de uso – hoje em dia bastante generalizado – de técnicas numéricas como o método de elementos finitos e elementos de contorno para a simulação de seu comportamento.

Materiais como as borrachas possuem uma relação não-linear entre tensão e deformação independentemente do nível de sollicitação, caracterizando uma não-linearidade quanto à relação constitutiva do material. Estes materiais são denominados *hiperelásticos* porque manifestam grandes deformações elásticas, bem maiores que as encontradas em materiais mais convencionais. Nestes casos, a Lei de Hooke não é aplicável, isto é, não é possível relacionar tensão com deformação utilizando apenas duas constantes do material. A forma mais comum de relacionar uma medida apropriada de tensão ( $T_{ij}$ ) e uma medida de deformação ( $E_{ij}$ ) nestes casos é através de uma função energia de deformação (MSC, 2000; Bonnet *et al.*, 1997; Drozdov, 2007):

$$T_{ij} = f \left( \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \right) \quad (1.1)$$

onde  $W$  é a energia de deformação absorvida pelo corpo por unidade de volume. Relações constitutivas hiperelásticas como as da eq.(1.1) geram diagramas tensão×deformação muito distintos daqueles obtidos para materiais usuais. A Figura 1.1 compara esquematicamente os diagramas tensão×deformação para materiais dúcteis e materiais hiperelásticos. Note-se que enquanto em materiais usuais é possível determinar propriedades características como tensão de escoamento ou módulo de elasticidade diretamente desses diagramas, para materiais hiperelásticos esses parâmetros tornam-se variáveis a cada ponto da curva (ou mesmo sem sentido físico).

Por ser um material de comportamento inerentemente não-linear, o entendimento das relações constitutivas desses materiais é fundamental para a correta utilização de programas de simulação na solução de problemas práticos.

A consideração ou seleção errônea de um modelo constitutivo tem como consequência, simulações incorretas ou interpretações equivocadas de problemas reais de engenharia, o que têm se tornado muito – às vezes de maneira excessiva – comum. E o que é pior, raramente os usuários conseguem identificar ou analisar a fonte de erro.

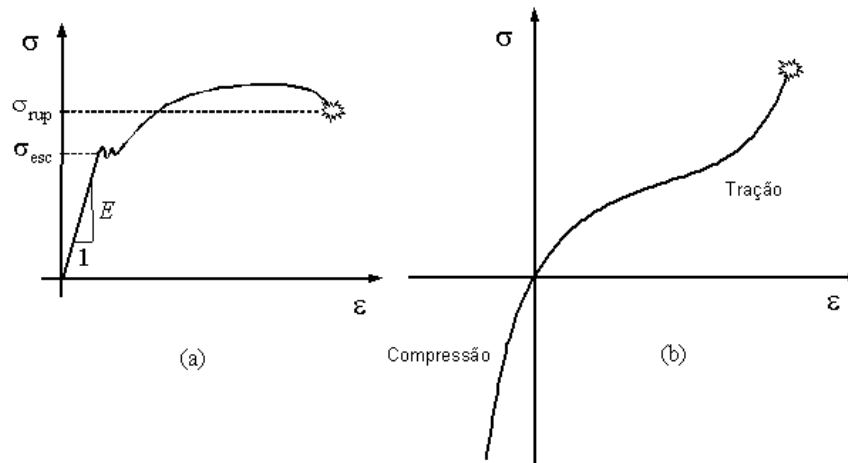


Figura 1. 1 – Diagramas  $\sigma \times \varepsilon$  típicos: (a) material metálico dúctil; (b) material polimérico hiperelástico.

A evolução das relações constitutivas para materiais hiperelásticos é marcada fortemente pela proliferação de modelos, os quais podem ser agrupados de acordo com sua genealogia e cronologia. Este último fator é muito expressivo, uma vez que cada época apresenta traços bem característicos às expressões para a energia de deformação. Quanto à genealogia podemos subdividir os modelos em cinco grandes famílias postadas em ordem cronológica de surgimento conforme apresentado na Figura 1.2.

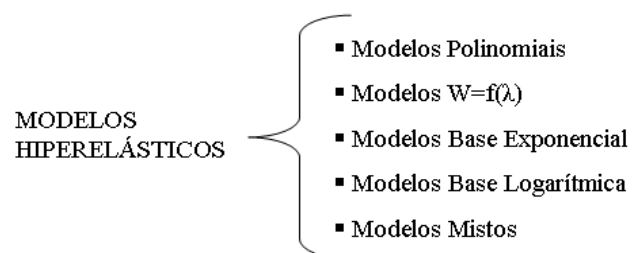


Figura 1. 2 – Principais famílias hiperelásticas.

Definem-se como modelos polinomiais, as relações constitutivas que utilizam como base para a energia de deformação polinômios dependentes dos invariantes de deformação. Já os modelos  $f(\lambda)$ , são expressos diretamente em função dos alongamentos principais.

Os modelos de base exponencial ou logarítmica empregam respectivamente funções exponenciais e logarítmicas como base para a sua expressão para energia de deformação. Os modelos mistos apresentam formulação híbrida, utilizando termos característicos de duas ou mais bases em sua relação constitutiva.

Um objetivo comum buscado por inúmeros autores de diferentes gerações é uma expressão generalizada para a energia de deformação que consiga capturar com fidelidade o efeito de enrijecimento do material observado em grandes deformações. Esta característica atribuída aos modelos induz discrepâncias e ressalta o comportamento espúrio manifestado por modelos hiperelásticos distintos quando ajustados para diferentes faixas de deformações e/ou materiais atípicos, diferentes do para o qual foi desenvolvido. Uma situação ímpar envolvendo modelos que exibem este tipo de comportamento é na análise de componentes com comportamento histerético e peças com regiões que apresentem campo de deformações distintas. Remete-se o seguinte caso, um componente submetido à grandes deformações, possui regiões internas menos solicitadas, em casos como este certamente o emprego dos modelos referidos acima levarão a previsões errôneas do campo de tensões em regiões distantes do modo de deformação predominante. Vale mencionar que se o componente analisado desempenhar função estrutural, as conseqüências podem ser de grande magnitude.

Uma lacuna na validação dos modelos hiperelásticos é a ausência de critérios de classificação, o que aliado a grande variedade de modelos torna o processo de seleção lento, subjetivo e o pior, susceptível a erros. As formas mais usuais adotadas pelos autores para aferir a qualidade de seus ajustes são através do cálculo do erro relativo entre a predição numérica e os dados experimentais, ou ainda, diretamente a partir de análises gráficas visuais. Qualquer uma dessas metodologias empregadas se mostra ineficiente quando se busca uma análise mais profunda de cada modelo, como por exemplo a compreensão sobre a influência de cada termo em específico da energia de deformação. Um parâmetro mais significativo e útil é o coeficiente de regressão, que carrega informações a respeito do ajuste realizado: quanto mais próximo da unidade, melhor é o ajuste. Este conceito será a base para o desenvolvimento de um parâmetro de aferição específico para os modelos hiperelásticos.

## **1.2. Revisão Bibliográfica**

O ponto principal na modelagem de um material hiperelástico está na seleção de uma relação constitutiva apropriada. Esta seção apresenta uma revisão em ordem cronológica dos modelos e fundamentos utilizados neste trabalho.

A descrição de cada modelo constitutivo em específico é detalhada no Capítulo 3, reservado especificamente para o tema, dado a sua relevância para este trabalho. Existe um número razoável de modelos hiperelásticos disponíveis na literatura, mas de modo geral todos podem ser agrupados em duas categorias principais, sendo elas: modelos fenomenológicos e modelos micromecânicos.

Mooney (1940) propôs um modelo fenomenológico com dependência linear do primeiro e segundo invariante de deformação,  $I_1$  e  $I_2$  respectivamente, sendo este talvez o mais celebrado de todos os modelos hiperelásticos clássicos. O modelo micromecânico Neo-Hookeano (Treloar, 1943) consiste na primeira parcela do modelo de Mooney, 1940, função apenas de  $I_1$ . A partir da análise do desempenho das expressões para energia de deformação propostas até então (Mooney, 1940; Treloar, 1943) para diferentes tipos de elastômeros, Rivlin e Saunders (1951) propuseram um novo modelo constitutivo em termos de  $I_1$  e  $I_2$ , formalmente conhecido como modelo de Mooney-Rivlin.

Gent e Thomas (1958) modificaram o modelo de Rivlin e Saunders (1951), considerando um termo logarítmico dependente de  $I_2$ . Propostos em 1966, a família de modelos Hart-Smith apresentaram de forma pioneira uma função mista para a energia de deformação, mesclando uma base exponencial com uma logarítmica (Smith *et al.*, 1966). Seguindo a mesma linha de pensamento, Fung (1967) introduziu uma relação constitutiva exponencial para a modelagem de tecidos biológicos. Atualmente o seu emprego é ainda muito popular na análise de artérias humanas (Delfino *et al.*, 1997).

Alexander (1968) buscando melhorar a precisão na predição teórica do comportamento do material para diferentes faixas de deformações propôs uma expressão para a energia de deformação combinando as relações constitutivas dos modelos Hart-Smith e Rivlin-Saunders estendido. Este trabalho constitui um paralelo muito interessante com a linha de investigação aqui desenvolvida. Veronda e Westmann (1970), baseados na observação da pele de gatos submetida à tração uniaxial, modificaram o modelo de Fung adicionando um termo linear função de  $I_2$ .

Visto como um dos modelos de maior potencial na caracterização de materiais hiperelásticos, Ogden (1972) introduziu um novo conceito, propondo uma expressão para a energia de deformação baseada diretamente nos alongamentos principais ( $\lambda_i$ ). Peng e Landel (1972) geraram um modelo simplificado com o uso de apenas uma única constante constitutiva, empregando o mesmo conceito.

Precursor da família de modelos *power-law*, o modelo de Knowles (1977) teve como premissa representar elastômeros e tecidos biológicos que exibissem enrijecimento elevado na curva tensão×deformação ( $t \times e$ ) para deformações elevadas, (ver, Dorfmann e Muhr, 1999; Boast e Covenei, 1999; Holzapfel, 2001).

Em 1981, Kilian propôs uma expressão com base logarítmica para a energia de deformação, correlacionando elastômeros com a equação de gás perfeito (Kilian, 1981). Mais tarde este modelo foi modificado através da consideração da contribuição do  $I_2$ , denominado então, modelo de Van de Waals. Humphrey (1987), baseado no modelo de Veronda e Westmann (Veronda e Westmann, 1970), propôs um modelo para o estudo do miocárdio passivo. Foi empregada uma relação constitutiva de base exponencial, cuja versão isotrópica é função apenas do  $I_1$ .

Edwards e Vilgis (1987), juntamente com Takamizawa e Hayashi (1987), propuseram modelos independentes, que embora não reconhecidos pela literatura (mérito este dado ao modelo de Gent (Gent, 1996), lançado anos mais tarde) formam a base da família *limiting chain extensibility*. O conceito de *limiting chain extensibility* para a expressão energia de deformação incitou uma motivação ímpar dos autores modernos, dado o potencial de aplicação dos modelos desta família em problemas biomecânicos com enrijecimento pronunciado em grandes deformações (ver, Horgan e Saccomandi, 2003b; Holzapfel, 2005). Humphrey (2002, 2003) e Taber (2004) fazem várias discussões em torno da aplicação da teoria da elasticidade não linear voltada a problemas de mecânica cardiovascular.

Em alguns estudos recentes Yeoh (1990,1993) e Boyce e Arruda (1993) mostraram que a energia de deformação pode ser escrita como uma função apenas do primeiro invariante de deformação. A partir deste postulado, estes autores generalizaram o modelo Neo-Hookeano, propondo a seguinte decomposição da expressão para energia de deformação  $W$ .

$$W = W_{NH} + \gamma(I_1 - 3) \quad (1.2)$$

onde  $W_{NH}$  é a expressão constitutiva do modelo Neo-Hookeano e  $\gamma(I_1 - 3)$  representa uma energia de deformação genérica que depende do estado de deformação. Usando termos de alta ordem de  $I_1$  para o termo  $\gamma(I_1 - 3)$ , tem sido mostrado que o mesmo captura bem o comportamento do material para grandes deformações. Yeoh (1990) propôs uma forma polinomial para  $\gamma(I_1 - 3)$  que corresponde a uma forma truncada do modelo de Mooney-Rivlin (1951).

O modelo de Yeoh mais tarde foi modificado através da adição de um termo exponencial (Yeoh, 1993), visando proporcionar precisão aos ajustes e previsões para pequenas deformações. Um modelo alternativo com potências de alta ordem de  $I_1$  foi proposto por Arruda e Boyce (1993), conhecido também como *eight chain model*, e apresenta boas previsões para tração biaxial em regiões submetidas a pequenos alongamentos.

Com o intuito de descrever o fenômeno de amolecimento para pequenos alongamentos Yamashita e Kawabata (1993) seguido por Davis *et al.*, (1994), Gregory (1997) e Amin *et al.*, (2002) propuseram para o termo  $\gamma(I_1 - 3)$  uma função polinomial de potências a ajustar, função do material analisado. Em seus estudos, Amin *et al.*, (2002) utilizaram os resultados de compressão uniaxial para os ajustes dos parâmetros do material, verificando as previsões dos demais ensaios para grandes deformações. Entretanto, discrepâncias significantes entre os resultados numéricos e experimentais foram encontradas.

Postado pela literatura como precursor da família *limiting chain extensibility*, o modelo de Gent (1996) consiste em uma modificação do modelo de Takamizawa e Hayashi (1987). A relação constitutiva mantém a base logarítmica e caracteriza-se em geral pelas boas previsões para todas as faixas de deformações. Yeoh e Fleming (1997), mesclando os conceitos estudados por Yeoh (1990) e Gent (1996), propuseram uma nova expressão para a energia de deformação visando melhorar a qualidade dos ajustes e previsões em pequenas deformações.

Como enfatizado nos estudos de Humphrey (2002, 2003), para a modelagem de tecidos biológicos com enrijecimento elevado da curva  $t \times e$  verificado em deformações moderadas, os modelos clássicos da hiperelasticidade se mostram inadequados. Buscando modelar de forma condizente este fenômeno, no final da década de 1990 surge, a partir da modificação do modelo de Gent, uma grande variedade de modelos constitutivos. Gent (1999) propôs o modelo de Gent de três parâmetros, o qual incorporou à expressão original a participação do  $I_2$  através do termo  $(1 - \alpha)(I_2 - 3)$ , onde  $\alpha$  é uma constante adimensional ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ). Outros modelos mais elaborados dependentes de  $I_2$  foram discutidos e apresentados por Pucci e Saccomandi (2002) e em Ogden *et al.*, (2004). Um modelo alternativo desta família, empregando apenas dois parâmetros foi proposto por Horgan e Saccomandi (2004) para descrever o efeito de Mullins em elastômeros. É destacado naquele trabalho que a ausência de  $I_2$  na expressão base de energia de deformação proposta por Gent (1996) impõem algumas limitações físicas ao modelo. Destaca-se também as vantagens de tomar o limite do  $I_1$  diretamente em função dos alongamentos principais. Esta alternativa de modelo constitutivo foi estudada por Horgan e Saccomandi (2002a), Murphy (2006) e Horgan e Murphy (2007).

Kanner *et al.*, (2007) observaram que embora os modelos de base exponencial capturem o fenômeno de enrijecimento, eles não exibem o rápido endurecimento apresentado pelos modelos da família de base logarítmica. Ressalta-se que este fato é uma diferença muito importante entre as duas categorias de modelos. O estudo recente apresentado por Chagnon *et al.*, (2004) enfatiza que os dois tipos de modelos são essencialmente equivalentes.

Entretanto, segundo Horgan e Saccomandi (2006), prevalecem diferenças significativas nos resultados de suas previsões. Destacam-se os estudos de Horgan e Schwartz (2005) empregando os modelos desta família na solução de problemas fracto-mecânicos.

Hartmann e Neff (2003) propuseram uma função policonvexa para a energia de deformação em termos dos invariantes  $I_1$  e  $I_2$ , buscando garantir a solução de problemas sob conjuntos específicos de condições de contorno. Foi concluído que o polinômio generalizado descrito por Rivlin (1956) pode não ser policonvexo, pois para que fosse deveria haver uma dependência explícita entre os dois primeiros invariantes.

Bechir *et al.*, (2005), através da generalização da eq. (1.2), propuseram uma relação constitutiva com base polinomial, consistindo na superposição do modelo Neo-Hookeano à uma função não linear de um novo conjunto de invariantes. A idéia de generalização da energia de deformação não é nova. Baltz *et al.*, (1974) aplicaram com sucesso medidas alternativas de deformação para vários tipos de elastômeros, considerando parâmetros do material determinados experimentalmente. Destaque-se que esse novo modelo possui a vantagem de empregar um número reduzido de constantes constitutivas, sendo determinadas facilmente pelo método dos mínimos quadrados empregando somente o ensaio de tração uniaxial.

Recentemente Sussman e Bathe (2008) propuseram um novo modelo para a análise de materiais isotrópicos incompressíveis empregando splines, juntamente com uma proposta de um indicador numérico de estabilidade dos ajustes baseado nos autovalores da matriz de rigidez. Embora os resultados apresentados demonstrem a potencialidade da metodologia no ajuste das curvas experimentais, deve-se avaliar o comportamento das previsões para os ensaios diferentes do da calibração, fator não avaliado em seus estudos.

### **1.3. Objetivos do Trabalho**

O presente trabalho tem por objetivo estudar e comparar alguns dos modelos constitutivos disponíveis na literatura, bem como as peculiaridades envolvidas nas suas caracterizações para diferentes materiais avaliados.



Com base nessas análises, propõe-se essencialmente um estimador de qualidade de ajuste para todas as faixas de deformações de trabalho. Finalmente, um novo modelo hiperelástico é proposto, testado e comparado com os modelos existentes. Como objetivos específicos definem-se:

- Avaliar os modelos hiperelásticos estudados para três tipos distintos de materiais (amostras de borracha natural e silicone) frente a diferentes faixas de deformação. Pretende-se com isso expor os modelos a situações atípicas, buscando-se assim determinar os limites de aplicação e peculiaridades de cada modelo. A qualidade dos ajustes e previsões será verificada em função da análise gráfica visual direta e através de uma planilha de conceitos que, embora subjetiva, permite confrontar de forma simples e rápida os diferentes modelos quanto ao tipo de ensaio e faixa de deformação empregada para realizar o ajuste.
- Propor um estimador que afira com clareza e de forma eficiente a qualidade dos ajustes e previsões retirando a subjetividade e susceptibilidade a erros das metodologias de avaliação tradicionais hoje comumente empregadas.
- Desenvolver e implementar de forma simplificada um algoritmo de otimização multi-critério no ajuste das constantes constitutivas. Deseja-se com isso ratificar que as previsões obtidas a partir de ajustes multi-objetivos fornecem melhores resultados que para ajustes realizados univocamente por um único ensaio experimental.
- Propor uma nova família de modelos hiperelásticos focada no conceito de generalização da expressão da energia de deformação, buscado por vários autores ao longo da evolução da hiperelasticidade. A premissa da proposta foi elaborar um modelo constitutivo aplicável a materiais elastoméricos e/ou tecidos biológicos que representasse com fidelidade para ambos os casos o comportamento do material para diferentes faixas de deformações.

#### **1.4. Descrição do Trabalho**

O texto aborda apenas materiais incompressíveis e sem comportamento histerético, sendo dividido em 9 capítulos.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão de elasticidade não linear, apresentando as medidas clássicas de tensão e deformação, assim como, um resumo sobre as relações constitutivas. É assumido o domínio dos fundamentos básicos sobre a elasticidade. Já o Capítulo 3 apresenta as equações para 33 modelos hiperelásticos disponíveis na literatura, considerando tanto modelos consagrados como propostas menos conhecidas. Não houve nenhum esforço para deduzir as equações destes modelos, eles são simplesmente apresentados da forma como postados nas respectivas referências. O Capítulo 4 explica como os resultados de ensaios são usados para calibrar as equações teóricas. O Capítulo 5 apresenta um grande número de testes realizados com amostras reais de borracha, com o objetivo de ilustrar os limites, vantagens e desvantagens dos vários modelos estudados.

Como uma das contribuições deste trabalho, é apresentada no Capítulo 6 uma proposta para um novo coeficiente de regressão aplicado à classificação e seleção dos modelos hiperelásticos, juntamente com os resultados obtidos com aplicação da mesma para os modelos avaliados anteriormente no Capítulo 5. O Capítulo 7 ilustra de forma sucinta, empregando a metodologia do Capítulo 6, a influência do ajuste multi-critério na obtenção das constantes hiperelásticas, focado no resultado das predições para os ensaios que não os da calibração.

Em função dos conceitos desenvolvidos ao longo do trabalho, o Capítulo 8 apresenta uma proposta para uma nova família de modelos hiperelásticos, aplicável a materiais distintos (elastômeros e tecidos biológicos) e com a capacidade de representar com fidelidade o comportamento da curva tensão deformação ( $t \times e$ ) tanto para pequenas como grandes deformações. Finalmente o Capítulo 9 traz as conclusões, nas quais são feitas algumas recomendações e observações bastante gerais, porém de suma importância para a escolha e seleção de um modelo constitutivo antes de se proceder uma simulação.

## 2. REVISÃO DE ELASTICIDADE NÃO-LINEAR

Conforme foi destacado no Capítulo 1, o comportamento de peças e componentes manufaturados a partir de materiais poliméricos como a borracha não segue uma relação linear entre tensão e deformação. Assim, torna-se necessário aplicar medidas de tensão e deformação adequadas.

Este capítulo aborda uma revisão resumida de elasticidade não-linear, com ênfase em hiperelasticidade. A teoria básica pode ser encontrada em livros de Mecânica de Meios Contínuos (Green e Adkins, 1960; Malvern, 1969; Atkin e Fox, 1980; Lai e Krempl, 1993), e o assunto não será tratado aqui em detalhes. O objetivo é revisar a mecânica do processo de deformação e as medidas de deformação e tensão que serão utilizadas nos capítulos seguintes. Para tanto, é suposto um conhecimento básico da teoria da elasticidade.

### 2.1. Descrição do Movimento

Para efeito de análise, um corpo é sempre idealizado como um conjunto de partículas de tal modo que em qualquer instante  $t$ , cada partícula do conjunto ocupa um ponto de uma região fechada  $C$  em um espaço euclidiano tridimensional e que, reciprocamente, cada ponto desta região seja ocupado por somente uma partícula. A configuração  $C$  é definida como a configuração do corpo no tempo  $t$ , ou configuração instantânea. Para descrever o movimento do corpo ao longo do processo de deformação, torna-se necessária uma forma conveniente de se especificar a posição de cada partícula ao longo do tempo. Normalmente isto é feito selecionando-se uma configuração de referência  $C^0$ . As coordenadas  $(X_1, X_2, X_3)$  determinam unicamente o vetor posição  $\mathbf{X}$  de um ponto de  $C$ , e podem ser usadas para identificá-lo em qualquer instante (Figura 2.1). É mais comum empregar-se a configuração inicial do processo como  $C^0$ . O movimento do corpo pode ser descrito então como sendo a posição  $\mathbf{x}$  (em  $C$ ) da partícula  $\mathbf{X}$  (em  $C^0$ ) no instante  $t$ , através de uma equação:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

onde:

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$$

onde  $\mathbf{e}_i$  são os vetores de base do sistema de coordenadas.

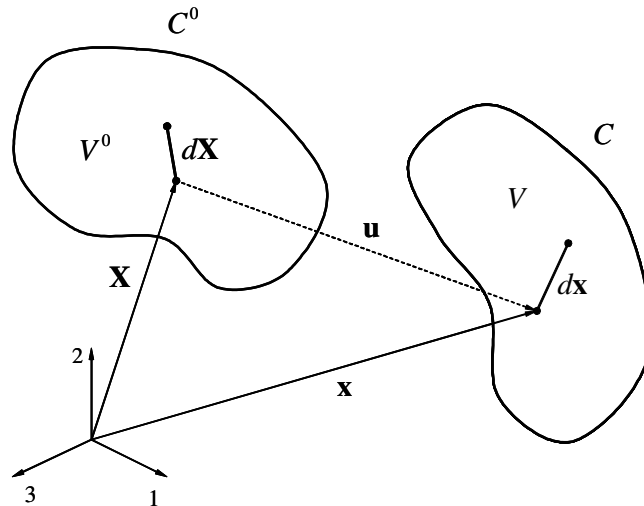


Figura 2. 1 – Cinemática do processo de deformação.

A eq.(2.1) representa um mapeamento da configuração de referência para a configuração atual. Este mapeamento é chamado de movimento de corpo. Em aplicações simples como estática, requer-se apenas a configuração inicial e final para definir a deformação. Em problemas mais complexos torna-se necessário dividir o processo em uma série de incrementos, cada um representando um processo de deformação seqüencial. É importante notar que pela eq.(2.1) a configuração  $C$  é obtida a partir do conhecimento da configuração  $C^0$ . Este tipo de mapeamento é chamado de *descrição Lagrangiana* (ou descrição de referência) do movimento. Uma outra forma de descrever o processo é através de uma *descrição Euleriana* (ou instantânea ou ainda espacial), onde a configuração atual é utilizada para descrever as variáveis (Malvern, 1969):

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

onde:

$$\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i$$

Evidentemente, ambas as descrições fornecem o mesmo resultado, mas a descrição Lagrangiana é normalmente de emprego mais direto. Observe-se que o mapeamento  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$  é apenas uma transformação matemática, e portanto implica em um *Jacobiano* correspondente:

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|$$

Como não pode haver superposição ou desaparecimento de matéria, a condição para que o processo  $\chi$  exista é dada por  $J > 0$ , o que implica em uma *deformação contínua*.

Em problemas de Mecânica dos Sólidos, tradicionalmente se trabalha com os deslocamentos sofridos pelo corpo. Da Figura 2.1, é fácil verificar que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.3)$$

onde as componentes de  $\mathbf{u}$  são os deslocamentos do ponto nas direções cartesianas:

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$$

Os processos de deformação que não provocam alteração de forma ou volume são os deslocamentos de corpo rígido, caracterizados por translação e rotação do corpo, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{X} + \mathbf{c}(t) \\ \mathbf{x} - \mathbf{b} &= \mathbf{R}(t)(\mathbf{X} - \mathbf{b}) \end{aligned}$$

No primeiro caso, percebe-se que todos os pontos do corpo sofrem o mesmo deslocamento em cada direção  $\mathbf{c}$ , enquanto no segundo caso todos os pontos giram em relação ao centro de rotação  $\mathbf{b}$ , através da matriz de rotação  $\mathbf{R}$ .

## 2.2. Medidas de Deformação

Existem várias formas de se medir deformação em um ponto. No contexto da Mecânica dos Sólidos, no entanto, deve-se compreender deformação como uma medida de alteração de forma e/ou volume do corpo, já que isto estará mais tarde relacionado ao nível de solitação ao qual o material está submetido.

### 2.2.1. Tensor Gradiente de Deformação

A forma mais direta de se medir deformações consiste em analisar o comportamento de uma fibra infinitesimal de material, inicialmente de comprimento  $d\mathbf{X}$ , que se deforma em  $d\mathbf{x}$  na configuração final. Da Figura 2.1, verifica-se que:

$$d\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \chi(\mathbf{X}, t) = (\nabla_{\mathbf{x}}) d\mathbf{X}$$

ou

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.4)$$

Logo:

$$\boxed{\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}}} \quad (2.5)$$

ou

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

Substituindo-se a eq.(2.3) em (2.5), reescreve-se  $\mathbf{F}$  em termos dos deslocamentos:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (2.6)$$

O tensor  $\mathbf{F}$  é uma medida primária de deformação, chamada *gradiente de deformação*, o qual possui duas grandes desvantagens como medida pura de deformação: é não-simétrico e não é invariante com movimentos de corpo rígido. No entanto, por ser de fácil avaliação, é bastante empregado na definição de medidas de deformação alternativas.

A expressão (2.4) relaciona os comprimentos indeformado e deformado de uma fibra infinitesimal de material. Também é interessante estudar o processo de mudança de área. Partindo-se das definições de área infinitesimal nas duas configurações:

$$\begin{aligned} dA^0 &= d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2 \\ dA &= d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

pode-se provar que:

$$dA = |\mathbf{F}| \mathbf{F}^{-T} dA^0$$

De forma similar, pode-se partir dos volumes infinitesimais:

$$\begin{aligned} dV &= d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 d\mathbf{X}_3 \\ dv &= d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 \end{aligned}$$

para deduzir que:

$$dv = |\mathbf{F}| dV \quad (2.7)$$

Ou seja,  $|\mathbf{F}| = J$ , o que explica porque o Jacobiano da deformação deve obedecer  $J > 0$  para um processo válido. Em função desta restrição, o tensor  $\mathbf{F}$  é não singular e permite a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{R}\mathbf{U} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{V}\mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são tensores simétricos positivos definidos denominados como tensores de *alongamento à direita e à esquerda* respectivamente,  $\mathbf{R}$  define uma matriz ortogonal ( $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$  e  $|\mathbf{R}| = 1$ ) que descreve as rotações de corpo rígido. A decomposição polar é multiplicativa, podendo-se demonstrar sua unicidade. Para problemas submetidos a *deformações homogêneas extensionais*, tem-se  $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$ , isto é a  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ .

### 2.2.2. Tensores de Deformação de Cauchy-Green

A fim de eliminar a inconveniente falta de simetria de  $\mathbf{F}$  e a variância com rotações, podem-se definir duas novas medidas de deformação a partir do cálculo dos comprimentos inicial e final de uma fibra infinitesimal de material. Reescrevendo (2.4):

$$d\mathbf{x}^2 = (\mathbf{F} d\mathbf{X})^2 = d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \mathbf{C} d\mathbf{X}$$

da mesma forma podemos definir:

$$d\mathbf{X}^2 = (\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x})^2 = d\mathbf{x}^T (\mathbf{F} \mathbf{F}^T)^{-1} d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1} d\mathbf{x}$$

Os tensores

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{B} &= \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

são chamados tensor de *deformação de Cauchy-Green à direita* e tensor de *deformação de Cauchy-Green à esquerda*, respectivamente. Embora sejam simétricos, eles mantêm a característica de  $\mathbf{F}$ , de não se anular quando o corpo é submetido a deslocamentos de corpo rígido (Note-se que na ausência de deformação  $\mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{I}$ ). Utilizando (2.6), reescreve-se (2.9) em notação indicial como:

$$C_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j}$$

$$B_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

onde:

$$I_1 = C_{ii} = \text{tr } \mathbf{C}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(C_{ii}C_{jj} - C_{ij}C_{ji}) = \frac{1}{2}(\text{tr } \mathbf{C})^2 - \frac{1}{2}(\text{tr } \mathbf{C}^2)$$

$$I_3 = |\mathbf{C}|$$
(2.10)

representam os *invariantes* de  $\mathbf{C}$ .

### 2.2.3. Tensores de Deformação de Green-Lagrange e Almansi

A fim de prover uma medida de deformação que se anule quando existem apenas movimentos de corpo rígido, define-se o tensor de *deformação de Green-Lagrange* a partir do alongamento da fibra:

$$d\mathbf{x}^2 - d\mathbf{X}^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) d\mathbf{X}$$

$$= d\mathbf{X}^T (2\mathbf{E}) d\mathbf{X}$$

onde:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})}$$
(2.11)

Em termos dos deslocamentos, o tensor  $\mathbf{E}$  assume a conhecida forma:



$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

que é, como se pode inferir, uma medida Lagrangina de deformação. O equivalente Euleriano de  $\mathbf{E}$  é o *tensor de deformação de Almansi*  $\mathbf{G}$ , obtido de forma similar:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^2 - d\mathbf{X}^2 &= d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} = d\mathbf{x}^T (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) d\mathbf{x} \\ &= d\mathbf{x}^T (2\mathbf{G}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

onde

$$\boxed{\mathbf{G} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})} \quad (2.12)$$

ou, em notação indicial:

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

#### 2.2.4. *Stretch* (Alongamento)

Ainda uma outra medida de deformação que será empregada neste texto é o que se chama de alongamento (ou simplesmente *stretch*), correspondendo a razão entre os comprimentos de uma fibra de material nas duas configurações:

$$\left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} \right\| = \text{stretch} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{E} + \mathbf{I}$$

Para casos de deformações homogêneas, o alongamento em cada direção pode ser obtido diretamente dos valores principais de  $\mathbf{F}$  (Atkin e Fox, 1980):

$$\begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

e, neste caso:

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

### 2.2.5. Tensor Deformação Infinitesimal

Foram definidas cinco medidas de deformação ( $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{G}$ ), dadas pelas eqs.(2.6), (2.9)<sub>1</sub>, (2.9)<sub>2</sub>, (2.11), e (2.12). Formalmente, não foram impostas quaisquer limitações sobre a magnitude dessas deformações. Na solução de diversos problemas práticos, é comum a adoção da hipótese de deslocamentos infinitesimais. Segundo esta hipótese, a magnitude dos deslocamentos é muito menor que as dimensões do corpo, de forma que pode-se confundir as configurações  $C^0$  e  $C$ . Nestes casos, os termos de ordem superior do gradiente do campo de deslocamentos se tornam desprezáveis:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + \underbrace{(\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u}}_{\ll 1}$$

e as seguintes relações são verificadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{C} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \equiv \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{G} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Quando as eqs.(2.14) são verificadas, o tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é chamado de *tensor deformação infinitesimal* ou simplesmente *tensor deformação de Green*. Note-se que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  utiliza apenas a parte simétrica de  $\nabla \mathbf{u}$  (Malvern, 1969).

### 2.3. Medidas de Tensão

Assim como existem diversas formas de se medir deformação, também existem mais de uma medida de tensão, ao contrário do que muitos textos elementares pregam. Tensão expressa uma densidade de forças por unidade de área, entretanto, deve-se levar em conta tanto a orientação da força quanto da superfície sobre a qual ela atua. Sua importância é evidente, pois permite comparar o nível de sollicitação do material com valores de referência obtidos em testes de laboratório. Neste texto serão revisados apenas dois tipos de tensão: a tensão de Cauchy e as tensões de Piola-Kirchhoff.

### 2.3.1. Tensor Tensão de Cauchy

Seja um corpo em equilíbrio estático de seção  $\Delta A$  sujeita a um diferencial de força  $\Delta \mathbf{F}$ . Dividindo-se o módulo da força  $\Delta \mathbf{F}$  pela área correspondente obtém-se a intensidade de força que atua sobre o incremento de área  $\Delta A$ . Realizando-se o limite  $\Delta A \rightarrow 0$ , obtém-se uma quantidade definida como vetor tração  $\mathbf{t}$  no ponto:

$$\mathbf{t}(x, \mathbf{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \mathbf{F}\|}{\Delta A} = \mathbf{t}(x, e_1)\mathbf{n}_1 + \mathbf{t}(x, e_2)\mathbf{n}_2 + \mathbf{t}(x, e_3)\mathbf{n}_3 \quad (2.15)$$

Salienta-se que  $\mathbf{t}$  atua na mesma direção que  $\Delta \mathbf{F}$ . Além disto, é função tanto da posição do ponto no corpo como da orientação da área  $\Delta A$  (dada pelo vetor normal  $\mathbf{n}$ ). É mais conveniente decompor a força  $\Delta \mathbf{F}$  em uma componente normal  $\Delta F_n$  e suas componentes tangenciais  $\Delta F_t$  e  $\Delta F_s$  ao plano de corte (isto é  $\Delta \mathbf{F} = \Delta F_n \mathbf{e}_n + \Delta F_t \mathbf{e}_t + \Delta F_s \mathbf{e}_s$ ) como ilustrado na Figura 2.2.

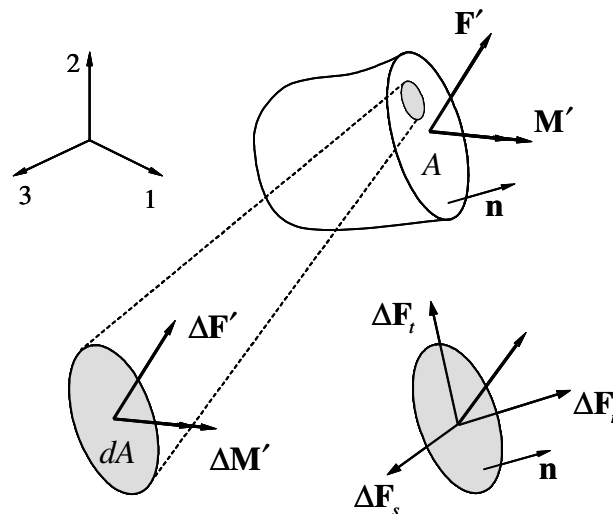


Figura 2. 2 – Secção de um corpo em equilíbrio estático.

Definem-se então as seguintes componentes de tensão:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \mathbf{F}_n\|}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA} \\ \sigma_{nt} &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \mathbf{F}_t\|}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA} \\ \sigma_{ns} &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \mathbf{F}_s\|}{\Delta A} = \frac{dF_s}{dA} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Generalizando para um contorno qualquer com normal exterior  $\mathbf{n}$ , escrevem-se as relações entre trações e as componentes de tensão como as chamadas equações de Cauchy:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \\ t_i &= \sigma_{ij} n_j \end{aligned} \quad (2.17)$$

A definição (2.17) implica no uso da configuração atual para o cômputo das tensões. A tensão de Cauchy ou tensão verdadeira é, portanto uma medida Euleriana e possui a vantagem de ser simétrico, o que lhe garante autovalores reais e autovetores mutuamente ortogonais. E como as relações constitutivas são geralmente escritas em termos de tensões Eulerianas, o uso de  $\boldsymbol{\sigma}$  como medida de tensão torna-se a escolha natural. No entanto, em problemas de engenharia é mais fácil trabalhar com a configuração de referência  $C^0$  do que com a configuração atual  $C$ , já que a última não é conhecida a priori, em geral.

### 2.3.2. Tensores de Piola-Kirchhoff

Duas outras medidas de tensão conhecidas são os chamados tensores de Piola-Kirchhoff, que propõem uma definição Lagrangiana para o cálculo das tensões. Seja então um diferencial de força aplicado em um diferencial de área durante o processo de deformação (Figura 2.3), tal que:

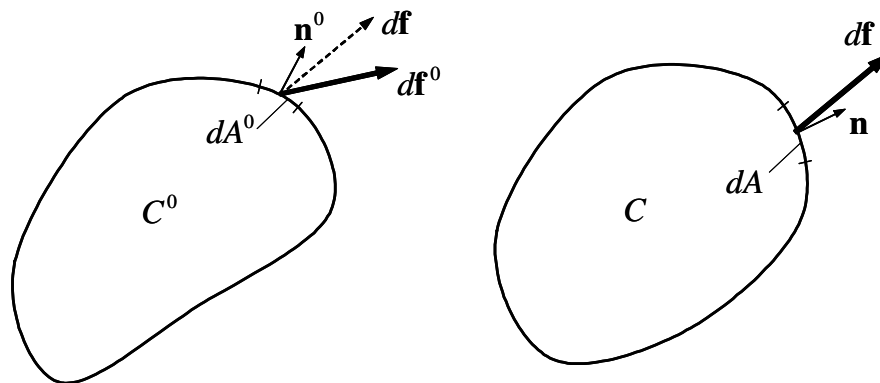


Figura 2. 3 – Trações sobre as configurações  $C^0$  e  $C$ .

Então, a tração na configuração de referência pode ser avaliada por:

$$\mathbf{t}^0 = \frac{dA}{dA^0} \mathbf{t} \quad (2.18)$$

definindo um tensor tensão  $\mathbf{T}^0$  sobre  $C^0$ , as condições de contorno em ambas as configurações ficam:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^0 &= \mathbf{T}^0 \mathbf{n}^0 \\ \mathbf{t} &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}\end{aligned}$$

que substituídas em (2.18) levam a:

$$\mathbf{T}^0 \mathbf{n}^0 = \frac{dA}{dA^0} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

Uma relação útil de mecânica do contínuo pode ser aproveitada aqui é a fórmula de Nanson:

$$dA \mathbf{n} = |\mathbf{F}| dA^0 (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{n}^0$$

o que resulta

$$\boxed{\mathbf{T}^0 = |\mathbf{F}| \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T} \quad (2.19)$$

e  $\mathbf{T}^0$  é o 1º *tensor de Piola-Kirchhoff*. Este tensor fornece a força instantânea  $d\mathbf{f}$  na área atual  $dA$ , mas calculada por unidade de área de referência  $dA^0$ , e expressa em termos da normal  $\mathbf{n}^0$ . A relação entre  $\mathbf{T}^0$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  fica evidente da eq.(2.19):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{|\mathbf{F}|} \mathbf{T}^0 \mathbf{F}^T$$

Embora sua definição seja simples,  $\mathbf{T}^0$  não é simétrico, o que leva a equações constitutivas muito complexas. Uma forma de resolver o problema da falta de simetria é definir uma força que seja transformada da mesma forma que na eq.(2.4):

$$d\mathbf{f}^0 = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f}$$

e conseqüentemente o tensor  $\mathbf{T}^0$  segue a mesma transformação:

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}^0$$

Usando a definição (2.19) resulta:

$$\mathbf{T} = |\mathbf{F}| \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T$$

O tensor  $\mathbf{T}$  é chamado 2º *tensor de Piola-Kirchhoff*. Note-se que, em lugar de conjugar  $d\mathbf{f}$  na área  $dA$ , ele fornece uma força  $d\mathbf{f}^0$ , em  $dA^0$ , relacionada com  $d\mathbf{f}$  da mesma forma que  $d\mathbf{X}$  se relaciona com  $d\mathbf{x}$ . Portanto, trata-se de uma medida Lagrangiana. A principal vantagem de  $\mathbf{T}$  está no fato deste tensor ser simétrico sempre que  $\boldsymbol{\sigma}$  o for. Por outro lado, é de difícil interpretação física e leva a equações de equilíbrio mais complexas que (2.19). Utilizando-se o princípio da conservação da massa e a eq.(2.7), obtém-se as relações usuais entre  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}^0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^0 &= \frac{\rho^0}{\rho} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} & \text{ou} & & T_{ij}^0 &= \frac{\rho^0}{\rho} X_{j,r} \sigma_{ri} \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}^0 (\mathbf{F}^{-1})^T & \text{ou} & & T_{ij} &= X_{j,i} T_{ji}^0 \\ \mathbf{T}^0 &= \mathbf{T} \mathbf{F}^T & \text{ou} & & T_{ij}^0 &= T_{jk} x_{i,k} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\rho}{\rho^0} \mathbf{F} \mathbf{T} \mathbf{F}^T & \text{ou} & & \sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho^0} x_{i,k} T_{kl} x_{j,l} \end{aligned}$$

## 2.4. Relações Constitutivas

Na análise estrutural, relações constitutivas compreendem as equações que relacionam tensão com deformação. Desta forma, a obtenção de uma permite o cômputo da outra e vice-versa. Relações constitutivas não-lineares para plasticidade não serão abordadas aqui, sendo dada ênfase em materiais elásticos, lineares ou não-lineares. Por definição, um material elástico segue duas regras (Atkin e Fox, 1980; Ogden, 1984):

- O material é perfeitamente reversível. Isto é, se um corpo é submetido à um ciclo de deformação fechado à temperatura constante, o trabalho realizado pelo corpo é nulo.
- O estado de tensões em um ponto do corpo depende apenas de uma medida apropriada de deformação naquele ponto.

Esta seção apresenta um resumo de hiperelasticidade aplicada a materiais isotrópicos incompressíveis, com vistas à sua utilização em borrachas. O interesse está na obtenção de relações gerais que não imponham limites sobre a magnitude das deformações. Antes, porém, é recomendável relembrar um pouco de elasticidade linear.

#### 2.4.1. Relação Constitutiva Linear para Material Isotrópico Elástico

Uma vez conhecidas as propriedades módulo de elasticidade ( $E$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) do material, estas são suficientes para descrever o comportamento de um material elástico linear sob um estado de tensões tridimensional. A generalização da lei unidimensional para estados triaxiais é feita com base em conceitos termodinâmicos e utilizando hipóteses de simetria do material, e é comumente escrita em notação indicial como (Lai e Krempl, 1993):

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.20)$$

onde  $\sigma$  é o tensor tensão de Cauchy e  $\varepsilon$  é o tensor deformação infinitesimal da eq.(2.14). A eq.(2.20) é tradicionalmente chamada de *Lei de Hooke*. É interessante ainda notar que todo processo de deformação implica na realização de trabalho ( $W > 0$ ). A partir deste postulado, podem-se estabelecer as restrições teóricas para que a eq.(2.20) tenha validade. São elas:

$$E > 0 \quad \text{e} \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

O módulo de compressibilidade é dado por:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.21)$$

#### 2.4.2. Equação Constitutiva Não-Linear para Material Isotrópico Elástico

Como já foi discutido no Capítulo 1, uma relação constitutiva como a eq.(2.20) possui duas grandes limitações: (a) só pode ser empregada para modelar fenômenos com pequenas deformações, porque utiliza medidas linearizadas de deformação (tipicamente o tensor  $\varepsilon$ ); e (b) mesmo se as deformações forem pequenas, essa teoria só pode modelar comportamentos tensão  $\times$  deformação lineares.

Boa parte dos polímeros (plásticos e borrachas), incluindo os tecidos biológicos não se encaixam nestas limitações. Além da existência de grandes deformações em regime elástico, esses materiais manifestam relações tensão×deformação complexas. Estabelecidas outras medidas de tensão e deformação, é possível introduzir formas mais gerais para as relações constitutivas<sup>1</sup>. Existem três grandes tipos de lei constitutiva não-linear (Lai e Krempl, 1993; Bonnet *et al.*, 1997):

- 1) **Hipoelasticidade:** dedicada a modelar comportamento tensão × deformação escritas em termos de taxas ( $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = f(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})$ ). Sua principal aplicação são as teorias aproximadas de plasticidade.
- 2) **Materiais Hookeanos:** é empregada para estender os modelos lineares elásticos para situações envolvendo deformações finitas.
- 3) **Hiperelasticidade:** inclui tanto cinemática não-linear quanto comportamento tensão × deformação não-linear. Sua principal aplicação está na construção de modelos para borrachas, espumas e tecidos biológicos.

Uma relação constitutiva aceitável para um material elástico pressupõe que a tensão em um ponto pode ser obtida tão somente a partir das deformações no ponto. Isto pode ser feito através da chamada elasticidade de Cauchy ou através da elasticidade de Green. A primeira trabalha com medidas Eulerianas enquanto a segunda utiliza medidas Lagrangianas. Generalizando-se uma equação constitutiva para elasticidade de Cauchy tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\mathbf{B})$$

onde  $f$  é uma função isotrópica do tensor deformação de Cauchy-Green à esquerda. Pode-se demonstrar que o caso tridimensional mais geral é representado por uma função do tipo (Atkin e Fox, 1980):

$$\boldsymbol{\sigma} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{B} + a_2 \mathbf{B}^2 \quad (2.22)$$

---

<sup>1</sup>Não serão aqui considerados efeitos de temperatura, histerese ou comportamento viscoelástico.



onde  $a_i$  são funções escalares dos invariantes de  $\mathbf{B}$ . Uma forma alternativa pode ser obtida aplicando o teorema de Cayley-Hamilton para  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B}^3 - I_1\mathbf{B}^2 + I_2\mathbf{B} - I_3\mathbf{I} = 0$$

Multiplicando por  $\mathbf{B}^{-1}$  e rearranjando os termos obtêm-se:

$$\mathbf{B}^2 = I_1\mathbf{B} - I_2\mathbf{I} + I_3\mathbf{B}^{-1}$$

Substituindo-se este resultado em (2.22) resulta:

$$\boldsymbol{\sigma} = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{B} + b_2\mathbf{B}^{-1} \quad (2.23)$$

A eq.(2.23) é a forma mais geral de relação constitutiva para um material isotrópico elástico sob grandes deformações.

### 2.4.3. Particularização para Material Isotrópico Elástico Incompressível

Boa parte das borrachas pode ser considerada incompressível. Isto simplifica as equações constitutivas, mas tem a desvantagem das tensões não poderem ser determinadas univocamente a partir das deformações devido ao aparecimento de uma pressão hidrostática  $p$  indeterminada (Atkin e Fox, 1980; Bonnet *et al.*, 1997):

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + b_1\mathbf{B} + b_2\mathbf{B}^{-1} \quad (2.24)$$

Ainda assim, é possível considerar algum grau de compressibilidade em (2.24) desde que o módulo de compressibilidade ( $K$ ) seja comparável ao dos metais ou sólidos de ligação covalente. Se as funções  $b_i$  podem ser derivadas de uma função potencial  $W$  dos invariantes  $I_1$  e  $I_2$  do tensor  $\mathbf{B}$  (Atkin e Fox, 1980) tal que:

$$b_1 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad b_2 = -2 \frac{\partial W}{\partial I_2}$$

então a relação (2.24) se torna:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1}} \quad (2.25)$$

A eq.(2.25) é portanto uma relação constitutiva para um material sólido hiperelástico isotrópico. O problema agora passa a ser o estabelecimento de uma função  $W$  apropriada para cada material.

#### 2.4.4. Algumas Soluções Analíticas para Sólidos Incompressíveis

A determinação completa da função  $W$  na eq.(2.25) implica na realização de ensaios experimentais característicos. Por serem simples, estes ensaios correspondem a uma classe de problemas que possuem solução analítica porque trata-se de problemas submetidos a *deformações homogêneas* ( $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$ ), dadas por:

$$x_i = \lambda_i X_i \quad i \text{ não-soma} \quad (2.26)$$

Então o tensor  $\mathbf{B}$  é facilmente obtido ( $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$ ):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

e, portanto as eqs (2.10) resultam:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}$$

Devido à condição de incompressibilidade, o alongamento  $\lambda_3$  pode ser eliminado das equações:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad \therefore \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (2.28)$$

Para que (2.25) satisfaça as equações de equilíbrio  $\left( \frac{\Delta \sigma_{ji}}{\Delta x_j} + b_i = \rho a_i \right)$ , necessariamente

$p_{,j} = 0$ , o que é obtido com:

$$p = \text{constante} = p_0 \quad (2.29)$$

Combinando as eqs. (2.25), (2.27), (2.28) e (2.29), o campo de tensões resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p_0 + 2\lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{2}{\lambda_1^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \\ \sigma_{22} &= -p_0 + 2\lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{2}{\lambda_2^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \\ \sigma_{33} &= -p_0 + \frac{2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} - \lambda_1^2 \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

sendo as demais tensões nulas. Com estas simplificações, pode-se explorar agora um número de soluções analíticas para casos simples de geometria e carregamento.

#### 2.4.4.1. Deformação Homogênea Pura de uma Lâmina Fina Incompressível

Seja uma lâmina retangular inicialmente de dimensões  $a \times b$  e espessura  $2h^0$ , conforme ilustrado na Figura 2.4. A configuração de equilíbrio é dada pela eq.(2.31):

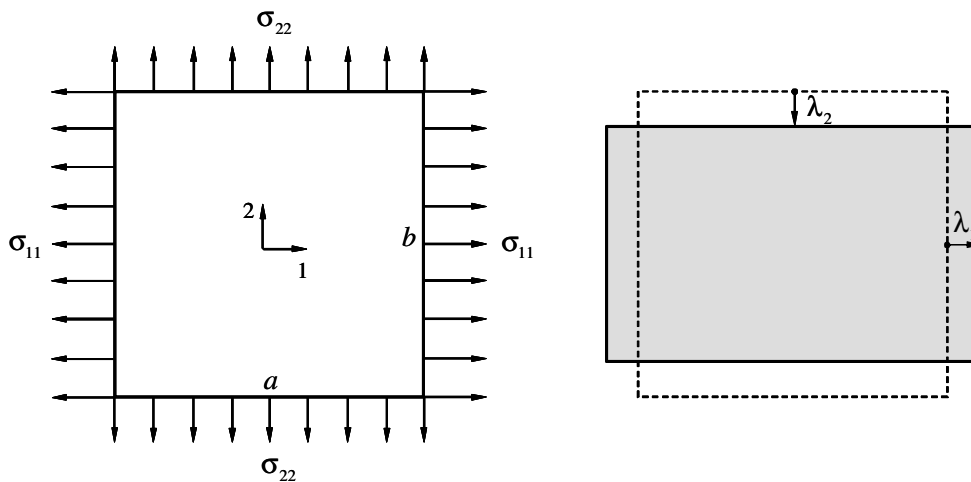


Figura 2. 4 – Extensão em duas direções de uma lâmina incompressível.

$$x_1 = \lambda_1 X_1 \quad x_2 = \lambda_2 X_2 \quad x_3 = \lambda_2 X_3 \quad (2.31)$$

onde foi usada (2.28):

$$\lambda_1 \lambda_2^2 = 1$$

Utilizando (2.27):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_2^2} \end{bmatrix}$$

e então

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2$$

Como as superfícies  $X_3 = \pm h^0$  estão livre de tensões,  $\sigma_{33} = 0$ , e a terceira das eqs.(2.30) fornece:

$$p_0 = 2 \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} - 2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2}$$

e as tensões não nulas ficam:

$$\sigma_{11} = 2 \left( \lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)$$

$$\sigma_{22} = 2 \left( \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)$$
(2.32)

#### 2.4.4.2. Tração de uma Lâmina Fina Incompressível

Este caso pode ser obtido particularizando-se as eqs.(2.30) com  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ . O campo de alongamentos (Figura 2.5) resulta:

$$\lambda_1 = \lambda \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$
(2.33)

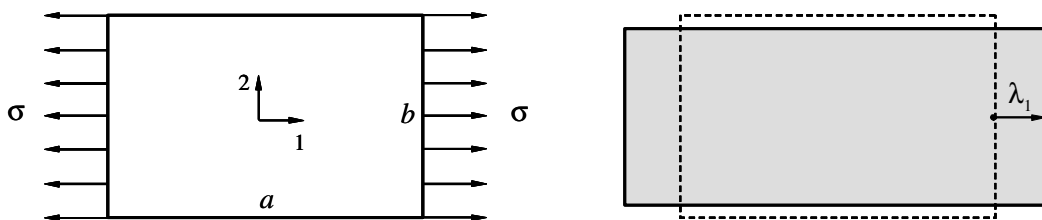


Figura 2. 5 – Extensão axial de uma lâmina incompressível.

Logo

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \\ I_2 &= 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

o que resulta:

$$p_0 = 2 \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_1} - 2\lambda \frac{\partial W}{\partial I_2}$$

e a tensão axial é dada por:

$$\sigma = \sigma_{11} = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.35)$$

#### 2.4.4.3. Cisalhamento Puro de uma Lâmina Fina Incompressível

Se o campo de deslocamentos (2.31) é particularizado de modo que  $\lambda_3 = 1$  e mantida a hipótese de incompressibilidade, denomina-se a deformação resultante como *cisalhamento puro*. Uma forma conveniente de produzir experimentalmente este tipo de deformação é tracionar uma fita larga de material de forma que sua largura não se altere muito (Figura 2.6). Se a largura  $a$  da fita é suficientemente grande comparada com o comprimento  $b$ , a não-uniformidade na deformação resultante das arestas livres (efeito de bordo) pode ser desprezada. Fazendo-se:

$$\lambda_1 = \lambda \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda} \quad \lambda_3 = 1 \quad (2.36)$$

os invariantes ficam:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + 1 \\ I_2 &= I_1 \end{aligned} \quad (2.37)$$

e as eqs.(2.30) se reduzem a:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{11} = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \\ \sigma_{22} &= 2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

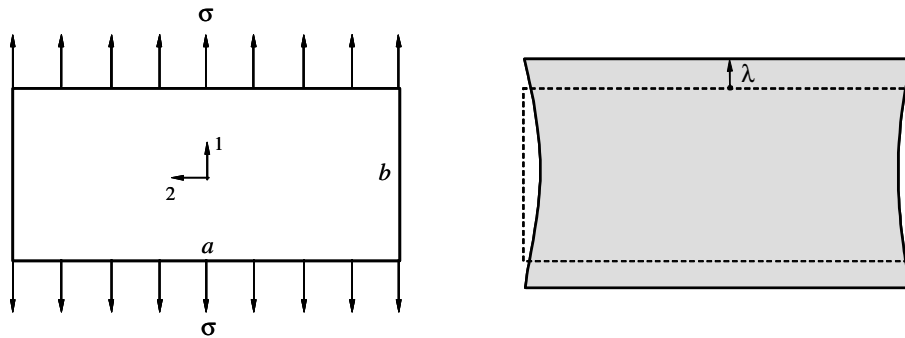


Figura 2. 6 – Cisalhamento puro de uma lâmina fina incompressível.

#### 2.4.4.4. Cisalhamento Simples de um Bloco Hexaédrico Incompressível

Se um bloco é submetido a um cisalhamento como na Figura 2.7, a configuração de equilíbrio é dada pela eq. (2.39).

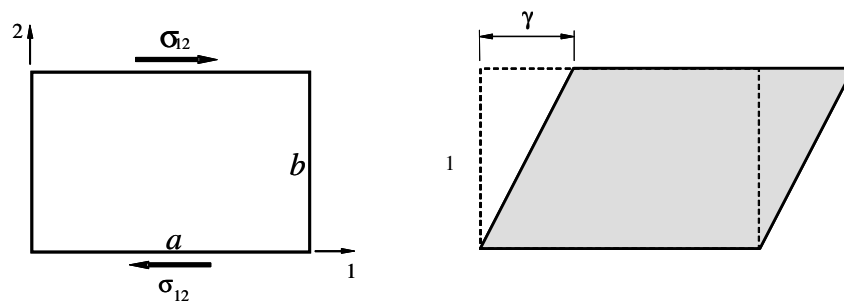


Figura 2. 7 - Cisalhamento Simples de um bloco incompressível.

$$x_1 = X_1 + \gamma X_2 \quad x_2 = X_2 \quad x_3 = X_3 \quad (2.39)$$

Utilizando (2.27):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ -\gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

logo as eqs.(2.10) resultam:

$$\begin{aligned} I_1 &= 3 + \gamma^2 \\ I_2 &= 3 + \gamma^2 \\ I_3 &= 1 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Das eqs.(230),

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p_0 + 2(1 + \gamma^2) \frac{\partial W}{\partial I_1} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} & \sigma_{22} &= -p_0 + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - 2(1 + \gamma^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} \\ \sigma_{33} &= -p_0 + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \\ \sigma_{12} &= \gamma \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) & \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0\end{aligned}$$

Seja

$$P = -p_0 + 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)$$

Com a condição  $\sigma_{33} = 0$  em  $X_3 = \pm h^0$ , obtém-se:

$$P = 0 \quad p_0 = 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)$$

e as tensões não nulas ficam:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\gamma^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \\ \sigma_{22} &= -2\gamma^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \\ \tau = \sigma_{12} &= 2\gamma \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)\end{aligned} \tag{2.41}$$

#### 2.4.4.5. Extensão Biaxial de uma Lâmina Fina Incompressível

Se no campo de deslocamentos (2.31)  $\lambda_1 = \lambda_2$  e  $(\lambda_1, \lambda_2 > 1)$ , obtém-se a extensão homogênea de uma lâmina (Figura 2.8). Neste caso:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} \\
 I_2 &= \lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

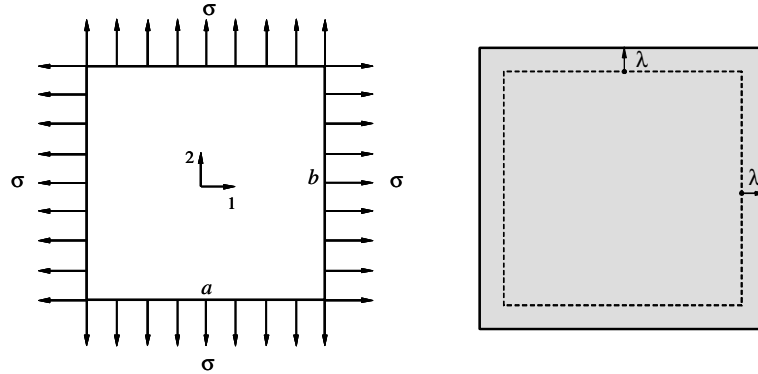


Figura 2. 8 – Extensão Biaxial de uma Lâmina Fina Incompressível.

Fazendo-se  $\sigma_{33} = 0$ , como antes, e as tensões não nulas ficam:

$$\sigma = \sigma_{11} = \sigma_{22} = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)
 \tag{2.43}$$

#### 2.4.4.6. Resumo

Finalmente, resume-se as expressões mais relevantes para cada modo de deformação na Tabela 2.1. Os índices T, C, P, S e B indicam, respectivamente, ensaio de tração uniaxial, compressão uniaxial, cisalhamento puro, cisalhamento simples e tração biaxial, respectivamente.

Equação	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Tensão na direção de $\lambda$
(2.35)	$\lambda, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$\sigma_{T,C} = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)$
(2.38) <sub>1</sub>	$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1$	$\sigma_P = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)$
(2.41) <sub>3</sub>	$\frac{1}{2} (\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4}), \lambda_2, \lambda_3$	$\sigma_S = 2\gamma \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)$
(2.43)	$\lambda, \lambda, \frac{1}{\lambda^2}$	$\sigma_B = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)$

Tabela 2. 1 – Resumo das soluções analíticas para modos de deformação homogêneos.



### 3. MODELOS HIPERELÁSTICOS

Conforme mencionado no capítulo 1, o principal ponto na modelagem de um material hiperelástico está na seleção apropriada da relação constitutiva. Este capítulo apresenta de forma detalhada algumas relações disponíveis na literatura que têm sido utilizadas nas mais variadas aplicações dentro da engenharia e da biomecânica. De forma geral podemos agrupar estas teorias constitutivas em duas categorias, conforme ilustrado na Figura 3.1.

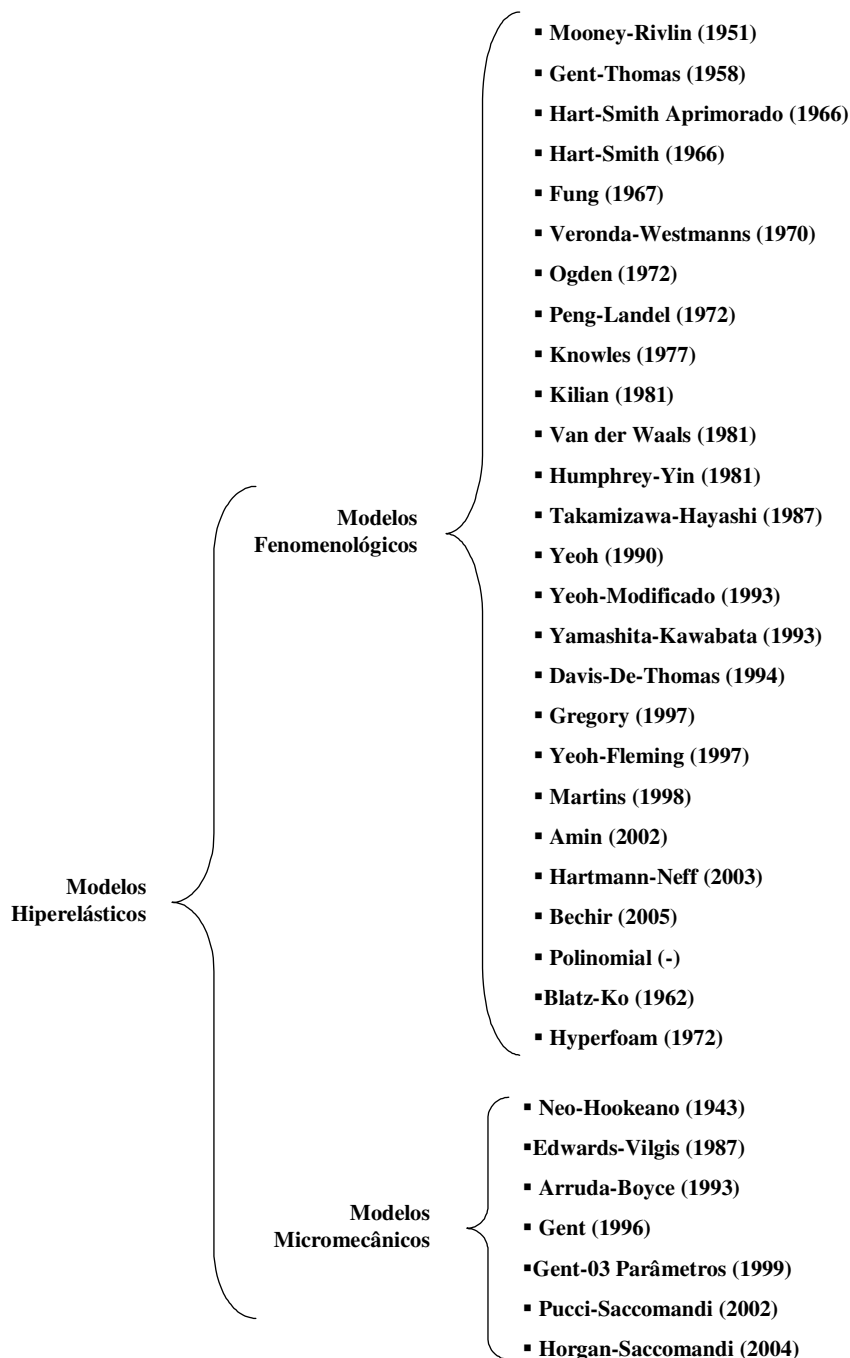


Figura 3. 1 - Classificação básica de alguns modelos hiperelásticos clássicos.

Os modelos podem ser expressos como uma função polinomial dos invariantes de deformação,  $W = W(I_1, I_2, I_3)$ , ou diretamente em termo dos alongamentos principais,  $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . A vantagem de se expressar em função dos invariantes é que se dissocia as equações de um sistema de coordenadas particular.

Ao contrário da não linearidade do material, as equações da hiperelasticidade não são escritas em termo de taxas, sendo que a relação constitutiva geralmente pondera tensão verdadeira com deformação verdadeira através de uma função de densidade de energia de deformação,  $W$ . Deve ser enfatizado que as propriedades mecânicas das borrachas compreendem fenômenos elásticos e de histerese (não reversíveis), sendo que os extremos não serão considerados neste trabalho.

As expressões apresentadas neste trabalho mapeiam o comportamento instantâneo da borracha sendo independente do caminho de deformação. Assim as funções estão confinadas na parte elástica (efeitos puramente reversíveis). Há um razoável número de modelos hiperelásticos disponíveis na literatura (Treloar, 1975; Ogden, 1984; Miller, 1995), entretanto, todos podem ser agrupados em duas categorias principais (Marczak, *et al.*, 2006):

- **MODELOS FENOMENOLÓGICOS:** são baseados na observação do comportamento do material durante testes experimentais. Portanto, os modelos desta categoria ponderam o papel das diversas variáveis de acordo com a sua importância durante o processo de deformação. Variáveis como deformações hidrostáticas ou distorcionais, incompressibilidade e forma das curvas obtidas em experimentos têm sua importância majorada ou reduzida de acordo com cada modelo. Em virtude disto é que os modelos apresentam uma faixa de aplicação bem definida. Vale salientar que modelos fenomenológicos assumem que a borracha é um material isotrópico na sua forma fundamental, ou seja, uma longa cadeia de moléculas de elastômeros randomicamente orientadas.

- **MODELOS MICROMECAÑICOS:** são modelos estatísticos desenvolvidos a partir de informações sobre as ligações químicas do material. Comprimento de cadeias moleculares, número e/ou tipo de ligações químicas e variáveis termodinâmicas são dados tipicamente empregados na construção destes modelos. A palavra micromecânica empregada aqui, não deve ser confundida com o contexto de sólidos multifásicos.

Além desta classificação, os modelos podem ser agrupados de acordo com a medida de deformação empregada, grau de compressibilidade permitido ou densidade aparente do material.

A seguir serão abordados alguns modelos hiperelásticos clássicos que possuem documentação disponível e já foram suficientemente testados e aplicados em situações práticas, nas últimas décadas. Qualquer que seja o modelo, sempre que é adotada a hipótese da incompressibilidade ou quase-incompressibilidade o módulo de compressibilidade ( $K$ ) do material passa a ter um papel importante nas equações:

$$W = \underbrace{f(I_1, I_2)}_{\text{parte incompressível}} + \underbrace{g(K, I_3, \dots)}_{\text{parte compressível}} \quad (3.1)$$

Neste capítulo, as expressões para a energia de deformação destes modelos em sua maioria estão escritas em sua forma mais geral, o que possibilita sua aplicação tanto para casos incompressíveis quanto compressíveis. Nos capítulos seguintes estas expressões serão particularizadas para o caso incompressível.

### 3.1. Modelo de Mooney-Rivlin

O modelo de Mooney-Rivlin (ou Polinomial Reduzido), talvez seja o mais celebrado de todos os modelos hiperelásticos clássicos. Existem muitas versões deste modelo, sendo a inicial publicada por Mooney (1940). Versões mais gerais da equação básica, baseadas no 1º e 2º invariantes de deformação foram propostas por Rivlin e Saunders (1951):

- 2 termos (equivale ao modelo polinomial com  $N=1$ ):

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + \frac{1}{D}(J - 1)^2 \quad (3.2)$$

- 3 termos (equivale ao modelo polinomial com  $N = 2$  e  $C_{20} = C_{02} = 0$ ):

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + \frac{1}{D}(J - 1)^2 \quad (3.3)$$

- 5 termos (equivale ao modelo polinomial com  $N = 2$ ):

$$W = \sum_{i+j=1}^2 C_{ij}(I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j + \frac{1}{D}(J - 1)^2 \quad (3.4)$$

- 9 termos (equivale ao modelo polinomial com  $N = 3$ ):

$$W = \sum_{i+j=1}^3 C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j + \frac{1}{D} (J - 1)^2 \quad (3.5)$$

onde

$$D = \frac{2}{K} \quad \mu = 2(C_{10} + C_{01})$$

### 3.2. Modelo Neo-Hookeano

Proposto por Treloar (1943) é um caso particular do modelo de Mooney-Rivlin de dois termos, fazendo-se  $C_{01} = 0$  e  $C_{10} = \mu/2$ . Na realidade este modelo surgiu antes do trabalho de Rivlin e Saunders (1951), razão pela qual o modelo de Mooney-Rivlin é às vezes referenciado como modelo Neo-Hookeano generalizado. A função energia de deformação (3.2) fica então baseada apenas no 1º invariante de deformações:

$$W = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) + \frac{1}{D} (J - 1)^2 \quad (3.6)$$

onde

$$D = \frac{2}{K}$$

### 3.3. Modelo de Gent-Thomas

O modelo de Gent-Thomas (1958) (Gent e Thomas, 1958), precursor do modelo de Hart-Smith-Aprimorado, possui a vantagem de empregar apenas duas constantes constitutivas. Baseado nos 1º e 2º invariantes de deformação apresenta a seguinte expressão para a energia de deformação:

$$W = C_1 (I_1 - 3) + 3C_2 \ln(I_2) + \frac{1}{2} \lambda \{ (\ln J)^2 + (J - 1)^2 \} \quad (3.7)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$  são as constantes do material,  $J$  é o determinante do tensor gradiente de deformações  $F$  e  $\lambda$  aqui é empregado como um coeficiente de penalidade.

### 3.4. Modelo de Hart-Smith Aprimorado

Proposto em 1966 por Hart e Smith (Smith *et al.*, 1966), consiste em uma modificação do modelo de Gent e Thomas pela substituição do termo  $C_1(I_1 - 3)$  por uma expressão exponencial função de potências do 1º invariante de deformação. Baseado nos 1º e 2º invariantes de deformação, apresenta a seguinte expressão para a energia de deformação (Rozenwald, 1993):

$$W = \frac{C_1 e^{C_3(I_1-3)^n}}{n} + 3C_2 \ln(I_2) + \frac{1}{2} \lambda (\ln(J))^2 + (J-1)^2 \quad (3.8)$$

onde  $\lambda$  é o coeficiente de penalidade da compressibilidade e  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $n$  representam as constantes constitutivas do material.

### 3.5. Modelo de Hart-Smith

O modelo de Hart-Smith (Rozenwald, 1993) é obtido por simplificação do Hart-Smith Aprimorado assumindo-se um valor fixo para uma das constantes do material  $n = 2$  na eq. (3.8).

$$W = \frac{C_1 e^{C_3(I_1-3)^2}}{2} + 3C_2 \ln(I_2) + \frac{1}{2} \lambda (\ln(J))^2 + (J-1)^2 \quad (3.9)$$

onde as constantes permanecem com o mesmo significado que na eq. (3.8).

### 3.6. Modelo de Fung

O modelo foi proposto por Fung (1967) para descrever o comportamento de materiais biológicos. Baseado apenas no 1º invariante de deformações, emprega a seguinte relação constitutiva:

$$W = \frac{\mu}{2b} (e^{b(I_1-3)} - 1) \quad (3.10)$$

onde  $\mu$  representa o módulo de cisalhamento inicial e  $b$  uma constante do material. Tomando-se o limite  $b \rightarrow 0$ , a expressão (3.10) recai no modelo Neo-Hookeano.

### 3.7. Modelo de Veronda-Westmanns

Proposto em 1970, Veronda e Westmann (Veronda e Westmann, 1970) apresentaram um modelo biológico hiperelástico baseado no estudo da pele de gatos submetida a ensaios de tração uniaxial. Na sua forma mais geral a energia de deformação depende dos três invariantes de deformação (Martins *et al.*, 2006).

$$W = C_1 \left[ e^{\alpha(I_1-3)} - 1 \right] - C_2 [I_2 - 3] + g(I_3) \quad (3.11)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$  e  $\alpha$  são as constantes constitutivas do material. Assumindo-se  $C_1 = \frac{\mu}{2b}$ ,  $C_2 = 0$  e  $g(I_3) = 0$  recai-se no modelo de Fung.

### 3.8. Modelo de Ogden

O modelo hiperelástico de Ogden (1972) é possivelmente o modelo mais conhecido depois do Mooney-Rivlin (Ogden, 1984). Este modelo é baseado diretamente nas deformações principais, ao invés dos invariantes de deformação:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{D_k} (J - 1)^{2k} \quad (3.12)$$

onde

$$D_1 = \frac{2}{K}$$

e a seguinte restrição teórica deve ser respeitada:

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i$$

Este modelo é bastante geral, e permite a obtenção de outros por simplificação. Por exemplo, o modelo Neo-Hookeano é obtido com  $N = 1$ ,  $\mu_1 = \mu$  e  $\alpha_1 = 2$ , enquanto o modelo de Mooney-Rivlin de 2 termos é obtido com  $N = 2$ ,  $\mu_1 = 2C_{10}$ ,  $\mu_2 = -2C_{01}$  e  $\alpha_1 = -\alpha_2 = 2$ .

Os coeficientes  $\alpha_i$  e  $\mu_i$  não precisam ser inteiros ou positivos, mas valores muito particulares podem gerar instabilidades numéricas (Marczak, *et al.*, 2006).

### 3.9. Modelo de Peng-Landel

Proposto por Peng e Landel (1972), este modelo hiperelástico é semelhante ao de Ogden, por assumir a energia de deformação como uma função separável dos alongamentos principais.

$$W = \sum_{i=1}^3 C_1 (\lambda_i - 1 - \ln(\lambda_i) - \frac{1}{6} \ln(\lambda_i)^2 + \frac{1}{18} \ln(\lambda_i)^3 - \frac{1}{216} \ln(\lambda_i)^4) \quad (3.13)$$

onde  $(\lambda_i, i=1..3)$  são os alongamentos principais e  $C_1$  é a única constante constitutiva do material. Se o material for compressível, o módulo inicial de compressibilidade deve ser incorporado na expressão (3.13).

### 3.10. Modelo de Knowles

Proposto por Knowles (1977), foi o precursor dos modelos *power-law*. Baseado em potências do 1º invariante de deformações, apresenta a seguinte expressão para a energia de deformação:

$$W = \frac{\mu}{2b} \left( \left( 1 + \frac{b(I_1 - 3)}{n} \right)^n - 1 \right) \quad (3.14)$$

onde  $\mu, b, n$  são as constantes do material. Fisicamente,  $\mu$  representa o módulo de cisalhamento. Tomando-se o limite de  $n \rightarrow \infty$  da expressão (3.14), recai-se no modelo de Fung. Adotando-se  $n = 1$ , obtém-se o modelo Neo-Hookeano.

### 3.11. Modelo de Kilian

Kilian (1981) propôs uma correlação entre as equações constitutivas da hiperelasticidade, com a equação de estado para gases de Van der Waals. Baseado apenas no 1º invariante de deformações, foi o primeiro modelo a empregar uma base logarítmica para a energia de deformação:

$$W = -\mu J_L \left[ \ln\left(1 - \sqrt{\frac{I_1 - 3}{J_L}}\right) + \sqrt{\frac{I_1 - 3}{J_L}} \right] \quad (3.15)$$

onde  $\mu$  e  $J_L$  são as constantes constitutivas do material.

### 3.12. Modelo de Van der Waals

Este modelo consiste em uma atualização do modelo base proposto por Kilian (1981). Expresso em termos do 1° e 2° invariantes de deformações, apresenta a seguinte expressão para a energia de deformação:

$$W = \mu \left[ -(\lambda_m^2 - 3)(\ln(1 - \eta) + \eta) - \frac{2}{3} a \left( \frac{1}{2} I_1 - \frac{3}{2} \right)^{3/2} \right] \quad (3.16)$$

onde:

$$\eta = \sqrt{\frac{I_1 - 3}{\lambda_m^2 - 3}} \quad I_1 = (1 - \beta)I_1 + \beta I_2$$

e  $\mu$ ,  $\lambda_m$ ,  $a$  e  $\beta$  são parâmetros do material, sendo que  $\beta$  controla as mudanças de curvatura na curva  $t \times e$  para os diferentes modos de deformação. Tomando-se  $\beta = 0$ , a expressão (3.16) fica função apenas do 1° invariante de deformação.

### 3.13. Modelo de Humphrey-Yin

Proposto por Humphrey e Yin em 1987 (Humphrey e Yin, 1987), é um modelo biomecânico dedicado ao estudo do miocárdio passivo. Na sua forma mais geral, a função energia de deformação é expressa como:

$$W = c(e^Q - 1) \quad (3.17)$$

onde  $Q$  é função das componentes do tensor de Cauchy-Green à direita. Quando particularizado para um meio isotrópico, a expressão (3.17) fica baseada apenas no 1° invariante de deformação:

$$W = C_1 (e^{C_2(I_1 - 3)} - 1) \quad (3.18)$$



onde  $C_1$  e  $C_2$  são as constantes do material. A expressão particularizada (3.18) corresponde à primeira parcela do modelo de Veronda-Westmanns descrito na seção (3.7).

### 3.14. Modelo de Edwards-Vilgis

Edwards e Vilgis (1987) propuseram um modelo micro mecânico dependente apenas do 1° invariante de deformação. A relação constitutiva é dada por:

$$W = \frac{\mu}{2} \left[ \frac{(J_L + 2)(J_L - 3)(I_1 - 3)}{J_L(J_L - I_1 + 3)} + \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_L}\right) \right] \quad (3.19)$$

onde  $\mu$  é o módulo de cisalhamento e  $J_L$  está associado ao valor limite do 1° invariante de deformação através da inequação  $I_1 < J_L + 3$ . Tomando-se o limite  $J_L \rightarrow \infty$  da equação (3.19), resulta o modelo Neo-Hookeano.

### 3.15. Modelo de Takamizawa-Hayashi

Proposto por Takamizawa e Hayashi (1987), é outro modelo biomecânico, porém, aplicado ao estudo de artérias humanas. O modelo apresentado consiste em uma forma anisotrópica para função densidade de energia de deformação.

$$W = -c \ln(1 - Q) \quad (3.20)$$

com

$$Q = \frac{1}{2} c_1 E_{\Theta\Theta}^2 + \frac{1}{2} c_2 E_{ZZ}^2 + c_3 E_{\Theta\Theta} E_{ZZ} \quad (3.21)$$

onde  $c$  é um parâmetro do material com dimensão de tensão,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são constantes adimensionais,  $E_{\Theta\Theta}$  e  $E_{ZZ}$  são componentes do tensor de Green-Lagrange na direção circunferencial e axial respectivamente. A versão isotrópica das eqs.(3.20) e eq.(3.21) são obtidas fazendo-se  $c_1 = c_2 = c_3 = \frac{8}{J_L^2}$ :

$$W = -c \ln \left[ 1 - \left( \frac{I_1 - 2}{J_L} \right)^2 \right] \quad (3.22)$$

É interessante notar que este modelo é um precursor do modelo de Gent (1996) (ver seção 3.21), embora  $J_L$  não tenha sido identificado como limite de extensibilidade em Takamizawa e Hayashi (1987). Entretanto, na conclusão do artigo é mencionado (inadvertidamente) o fato que os materiais descritos a partir das eqs.3.20 e 3.21 tornavam-se muito rígidos à medida que a energia de deformação aumentava.

### 3.16. Modelo de Yeoh

O modelo de Yeoh proposto em 1990 (Yeoh, 1990) é similar ao modelo polinomial (seção 3.31), mas sendo baseado apenas no 1º invariante de deformação:

$$W = \sum_{i=1}^N C_{i0} (I_1 - 3)^i + \sum_{k=1}^N \frac{1}{D_k} (J - 1)^{2k} \quad (3.23)$$

onde

$$D = \frac{2}{K}, \quad \mu = 2C_{10}$$

O modelo apresenta bom desempenho para borrachas naturais, sendo que a versão de três termos ( $N=3$ ) é a de emprego mais comum, e geralmente se ajusta bem à faixas de grandes deformações.

### 3.17. Modelo de Yeoh-Modificado

Proposto por Yeoh (1993), este modelo consiste em uma modificação do modelo de Yeoh ( $N=3$ ) através da adição de um termo exponencial com o objetivo de melhorar a precisão dos ajustes em baixas deformações:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta(I_1 - 3)}) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{D_k} (J - 1)^{2k} \quad (3.24)$$

onde  $C_{10}$ ,  $C_{20}$ ,  $C_{30}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  são as constantes do material, sendo  $D = 2/K$  e  $\mu = 2C_{10}$ .

### 3.18. Modelo de Arruda-Boyce

O modelo micromecânico de Arruda-Boyce foi proposto em 1993, e é um caso particular de Yeoh com  $N=5$  e constantes pré-definidas, baseado apenas no 1º invariante de deformações (Arruda e Boyce, 1993; Boyce e Arruda, 2000; Bergstrom *et al.*, 2001). Também é conhecido como *eight-chain model*, e emprega a seguinte relação constitutiva:

$$W = \mu \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{\lambda_L^{2i-2}} (I_1^i - 3^i) + \frac{1}{D} \left[ \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right] \quad (3.25)$$

A versão mais conhecida utiliza  $N=5$ . As constantes  $C_i$  do modelo de Arruda-Boyce são obtidas a partir da expansão em séries de uma função de Langevin inversa.

$$C_1 = \frac{1}{2} \quad C_2 = \frac{1}{20} \quad C_3 = \frac{11}{1050} \quad C_4 = \frac{19}{7050} \quad C_5 = \frac{519}{673750} \quad (3.26)$$

onde

$$D = \frac{2}{K}$$

É interessante perceber que o módulo de cisalhamento inicial  $\mu$  é obtido por meio de uma equação química:

$$\mu = \eta \kappa_B T \quad (3.27)$$

onde  $\eta$  é uma função da densidade de cadeias elastoméricas,  $\kappa_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura. A constante  $\lambda_L$  é um dado estatístico proveniente da análise micromecânica. Fisicamente  $\lambda_L$  representa o alongamento máximo que uma molécula permite (*limiting network stretch*). Se  $\lambda_L \rightarrow \infty$ , o modelo de Arruda-Boyce recai no modelo Neo-Hookeano.

### 3.19. Modelo de Yamashita-Kawabata

Apresentado por Yamashita e Kawabata (1993), este modelo é similar ao modelo de Yeoh (1990). Também baseado apenas no 1º invariante de deformação, a expressão para a energia de deformação proposta é:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + \frac{C_3}{N+1}(I_1 - 3)^{N+1} \quad (3.28)$$

onde  $C_{10}$ ,  $C_3$ ,  $N$  são parâmetros do material com  $N \geq 1$ . Para  $N = 1$  e  $C_{20} = \frac{C_3}{2}$  recaí-se no modelo de Yeoh de dois termos.

### 3.20. Modelo de Davis-De-Thomas

Davis, De e Thomas (1994) propuseram uma função para a energia de deformação dependente apenas do 1º invariante de deformação na forma:

$$W = \frac{A}{2(1-n/2)}(I_1 - 3 + C^2)^{(1-n/2)} + k(I_1 - 3)^2 \quad (3.29)$$

onde  $A$ ,  $n$ ,  $C$ ,  $k$  são as constantes do material. O primeiro termo é capaz de capturar o amolecimento com o aumento da deformação observado em baixas deformações. O segundo termo é responsável pelo enrijecimento em altas deformações. A constante  $C$  é incorporada ao modelo para assegurar um valor finito para o módulo de cisalhamento em situações de deformação nula. Substituindo-se  $n = m = 0$ ,  $\frac{A}{2} = C_{10}$  e  $C_{20} = \frac{B}{2}$ , obtém-se o modelo de Yeoh de dois termos.

### 3.21. Modelo de Gent

Proposto em 1996, é outro modelo micromecânico, muito similar ao de Arruda-Boyce e, portanto, também dependente apenas de  $I_1$ . A relação constitutiva é dada por (Gent, 1996):

$$W = -\frac{\mu}{2}(I_L - 3) \ln \left[ 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right] + \frac{1}{D} \left[ \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right] \quad (3.30)$$

onde  $\mu$  é o módulo de cisalhamento inicial e  $I_L$  é o valor limite (máximo possível) de  $I_1$ , análogo a  $\lambda_L$  do modelo de Arruda-Boyce. Tipicamente,  $I_L$  vale aproximadamente 100.

Se o primeiro termo logaritmo é expandido, a eq.(3.30) se torna muito similar ao modelo de Yeoh, mas com coeficientes dependentes de  $I_L$ . Para pequenas deformações, o modelo de Gent se reduz ao modelo Neo-Hookeano. Ainda,

$$D_1 = \frac{2}{K}$$

e a relação (3.27) permanece válida para este modelo.

### 3.22. Modelo de Gregory

Gregory *et al.*, (1997) propuseram uma forma modificada da função de Davis *et al.*, (1994) adicionando um segundo termo de potência à função original, buscando melhorar a flexibilidade dos ajustes em deformações moderadas. É baseado apenas no 1º invariante de deformação:

$$W = \frac{A}{(2-n)} (I_1 - 3 + C^2)^{(1-n/2)} + \frac{B}{(2+m)} (I_1 - 3 + C^2)^{(1+m/2)} \quad (3.31)$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $m$ ,  $n$  são constantes do material. Semelhante a função de Davis *et al.*, (1994) é possível incorporar ao modelo uma constante  $C$  caso um valor finito para o módulo de cisalhamento seja necessário para deformações nulas (por exemplo, em aplicações empregando elementos finitos). Substituindo-se  $n = m = 0$ ,  $C = 0$ ,  $C_{10} = A/2$  e  $C_{10} = B/2$ , resulta no modelo de Yeoh de dois termos.

### 3.23. Modelo de Yeoh-Fleming

Yeoh e Fleming (1997) através da combinação dos modelos apresentados por Yeoh (1990) e Gent (1996), propuseram um novo modelo hiperelástico para a solução de problemas envolvendo grandes deformações. Baseado apenas no 1º invariante de deformação, o modelo emprega a seguinte relação constitutiva:

$$W = \frac{A}{B} \left[ 1 - e^{-B(I_1-3)} \right] - C_{10} (I_L - 3) \ln \left[ 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right] \quad (3.32)$$

onde  $A$  e  $B$  são as constantes do material e  $I_L$  é o máximo valor teórico para  $I_1$ . O termo exponencial foi incorporado ao modelo a fim de melhorar os ajustes em baixas deformações.

### 3.24. Modelo de Martins

Martins *et al.*, (1998) propuseram este modelo para o estudo de músculos do corpo humano. Baseado no modelo hiperelástico de Humphrey-Yin (Humphrey *et al.*, 1987), este modelo apresenta uma dependência explícita do alongamento das fibras:

$$W = W_{Material} + W_{Fibras} \quad (3.33)$$

onde:

$$\begin{aligned} W_{Material} &= C_1(e^{C_2(I_1-3)} - 1) \\ W_{Fibras} &= C_3(e^{C_4(\lambda_f-1)^2} - 1) \end{aligned}$$

Logo,

$$W = C_1(e^{C_2(I_1-3)} - 1) + C_3(e^{C_4(\lambda_f-1)^2} - 1) \quad (3.34)$$

onde  $W_{Material}$  representa a energia de deformação armazenada no material,  $W_{Fibras}$  é a energia de deformação armazenada nas fibras,  $\lambda_f$  é o alongamento observado na direção das fibras.  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  são as constantes do material, sendo que  $C_1$  e  $C_3$  têm unidades de pressão.

### 3.25. Modelo de Gent de 03 Parâmetros

Uma evolução do modelo de Gent (1996, 1999) é o modelo de Gent de três parâmetros (Gent, 1999). Emprega uma função para a energia de deformação do tipo  $W(I_1, I_2, I^*)$ , sendo que  $I^*$  representa o limite para  $I_1$ .

$$W = \frac{\mu}{2} \left[ -\alpha(I_L - 3) \ln \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right) + (1 - \alpha)(I_2 - 3) \right] + \frac{1}{D} \left[ \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right] \quad (3.35)$$

$\mu$  representa o módulo de cisalhamento infinitesimal,  $\alpha$  é uma constante adimensional ( $0 < \alpha \leq 1$ ),  $I_L$  representa o valor limite para  $I_1$ . Tomando-se o limite  $I_L \rightarrow \infty$  em (3.35) e fazendo-se  $C_{10} = \frac{-\mu\alpha}{2}$ ,  $C_{01} = (1 - \alpha)$  recai-se no modelo de Mooney-Rivlin de dois termos.

Para o caso em que  $\alpha = 1$ , primeira proposta feita por Gent (1996) e tomando-se o limite  $I_L \rightarrow \infty$  em (3.35) recai-se no modelo Neo-Hookeano.

É curioso notar que para elastômeros,  $I_L$  varia tipicamente entre 30 e 100, entretanto para tecidos biológicos  $I_L$  assume valores muito menores e característicos. Por exemplo, para o tecido da parede de artérias humanas os valores são da ordem de 0.4 – 2.3 (Landon *et al.*, 2007).

### 3.26. Modelo de Pucci-Saccomandi

O modelo de Pucci e Saccomandi (2002) é uma modificação do modelo de Gent, com a adição de um termo logarítmico função do segundo invariante de deformação.

$$W = -\frac{1}{2}\mu J_L \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_L}\right) + C_2 \ln\left(\frac{1}{3}I_2\right) + \frac{1}{D} \left[ \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right] \quad (3.36)$$

onde  $J_L$  é uma constante positiva do material que estabelece o valor limite para o 1º invariante de deformação ( $I_1 < J_L + 3$ ), estando associada ao alongamento máximo que uma molécula permite dentro de uma cadeia polimérica.

$C_2$  é uma constante do material associada a contribuição do 2º invariante de deformação, enquanto  $D$  é o módulo de compressibilidade do material ( $D = 2/K$ ). Note-se que agora  $\mu + 2C_2/3$  corresponde ao módulo de cisalhamento inicial, o que originalmente no modelo de Gent ( $C_2 = 0$ ) era expresso apenas por  $\mu$ .

### 3.27. Modelo de Amin

A fim de modelar os efeitos de amolecimentos manifestados em pequenas deformações Amin *et al.*, (2002) propuseram a adição de dois coeficientes ( $C_4$  e  $M = 0.25$ ) na expressão para a energia de deformação proposta inicialmente por Yamashita e Kawabata (1993):

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + \frac{C_3}{N+1} (I_1 - 3)^{N+1} + \frac{C_4}{M+1} (I_1 - 3)^{M+1} \quad (3.37)$$

onde  $C_{10}$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $N$  e  $M$  são parâmetros do material com  $N \geq 1$  e  $0 \leq M \leq 1$ . Para  $N = 1$ ,  $C_{20} = C_3/2$  e  $C_4 = 0$  obtém-se o modelo de Yeoh de dois termos.

### 3.28. Modelo de Hartmann-Neff

Hartmann e Neff (2003) propuseram uma função policonvexa<sup>2</sup>. para a energia de deformação a partir da investigação de vários modelos hiperelásticos existentes na literatura. Expresso em termos do 1º e 2º invariantes de deformações, apresenta a seguinte relação constitutiva:

$$W = \alpha(I_1^3 - 3^3) + \sum_{i=1}^N C_{i0}(I_1 - 3)^i + \sum_{j=1}^M C_{0j}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3})^j \quad (3.38)$$

onde  $\alpha$ ,  $C_{i0}$ ,  $C_{0j}$  representam as constantes do material. São particularizações possíveis para (3.38):

- 3 termos ( $N = M = 1$ ):

$$W = \alpha(I_1^3 - 3^3) + C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}) \quad (3.39)$$

- 5 termos ( $N = M = 2$ ):

$$W = \alpha(I_1^3 - 3^3) + C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{01}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}) + C_{02}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3})^2 \quad (3.40)$$

- 7 termos ( $N = M = 3$ ):

$$W = \alpha(I_1^3 - 3^3) + \sum_{i=1}^3 C_{i0}(I_1 - 3)^i + \sum_{j=1}^3 C_{0j}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3})^j \quad (3.41)$$

### 3.29. Modelo de Horgan-Saccomandi

Horgan e Saccomandi (2004) propuseram um modelo hiperelástico semelhante ao modelo de Gent (1996) capaz de prever o comportamento de materiais hiperelásticos em grandes deformações.

---

<sup>2</sup>Denominam-se funções policonvexas (Hartmann *et al.* 2003), as expressões para a energia de deformação cuja parcela volumétrica  $W(I_3)$  respeita as seguintes restrições:  $W(1) = 0$ ,  $W'(1) = 0$  e  $W''(I_3) > 0$  (condição de convexidade).



$$W = -\frac{\mu}{2} J_L \ln \left[ \frac{J_L^3 - J_L^2 I_1 + J_L I_2 - 1}{(J_L - 1)^3} \right] \quad (3.42)$$

Uma expressão equivalente, mas escrita em termos dos alongamentos principais é:

$$W = -\frac{\mu}{2} J_L \ln \left[ \frac{(1 - (\lambda_1^2 / J_L))(1 - (\lambda_2^2 / J_L))(1 - (\lambda_3^2 / J_L))}{(1 - (1 / J_L))^3} \right] \quad (3.43)$$

as seguintes restrições teóricas devem ser respeitadas:

$$\begin{aligned} J_L &> 1 \\ \max(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2) &< J_L \end{aligned} \quad (3.44)$$

As duas constantes de material do modelo de Horgan e Saccomandi são o módulo de cisalhamento  $\mu$  e o parâmetro  $J_L$  que está relacionado ao máximo alongamento de uma molécula na cadeia polimérica. A principal diferença deste modelo em relação ao modelo de Gent está na consideração, na expressão da energia de deformação, do segundo invariante de deformação. Isto reveste o modelo de Horgan e Saccomandi de uma maior sensibilidade e precisão na predição do comportamento do material para outros modos de deformação.

É interessante notar que a restrição  $I_1 < J_L + 3$  do modelo de Gent envolve o primeiro invariante de deformação enquanto a restrição do modelo de Horgan e Saccomandi, eq.(3.44) envolve apenas os alongamentos principais (que possuem significado físico de fácil compreensão). Novamente, tomando-se o limite  $J_L \rightarrow \infty$  nas equações (3.42 e 3.43) se obtém o modelo Neo-Hookeano.

### 3.30. Modelo de Bechir

O modelo hiperelástico de Bechir *et al.*, (2005) foi apresentado como uma proposta de generalização da expressão para a energia de deformação apresentada na eq.3.45. Possui a forma polinomial, consistindo no somatório do modelo Neo-Hookeano com uma função não linear dependente dos invariantes de deformação ( $I_{(n)}(C)$ ) obtidos utilizando medidas de deformação de Seth-Hill (Seth, 1964).

$$\begin{aligned}
W &= W_{NH} + \gamma(I_1 - 3) \\
W &= C_{10}(I_1 - 3) + \gamma(I_1 - 3)
\end{aligned}
\tag{3.45}$$

onde  $W_{NH}$  é a função energia de deformação do modelo Neo-Hookeano e  $\gamma(I_1 - 3)$  representa uma função energia de deformação que depende do estado de deformações estudado. A expressão final para  $W$  é expressa diretamente em função dos alongamentos principais, resultando em uma expressão semelhante à do modelo de Ogden (1972):

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} C_n^r (\lambda_1^{2n} + \lambda_2^{2n} + \lambda_3^{2n} - 3)^r
\tag{3.46}$$

sendo que  $C_n^r$  são as constantes do material e  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  são os alongamento principais. As versões mais conhecidas são a de quatro termos ( $n = r = 2$ ) e seis termos ( $n = 3, r = 2$ ).

### 3.31. Modelo Polinomial

É um modelo fenomenológico baseado no 1° e 2° invariantes de deformações, que tenta ajustar um polinômio de grau desejado ao diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  do material:

$$W = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^N \frac{1}{D_k} (J - 1)^{2k}
\tag{3.47}$$

onde

$$D_1 = \frac{2}{K}, \quad \mu = 2(C_{10} + C_{01})$$

Vale salientar que o modelo polinomial é um dos mais recentes modelos baseados em potências de  $I_1$  e  $I_2$ . Embora vários dos modelos aqui apresentados possam ser obtidos a partir deste por particularização, o modelo polinomial surgiu de um processo inverso, isto é, após verificar-se que muitos modelos propostos na literatura eram baseados em polinômios incompletos. Este feito torna o modelo polinomial interessante do ponto de vista computacional, pois permite aos fabricantes de programas de elementos finitos implementar uma única rotina, que pode ser configurada para gerar vários outros modelos por particularização. Efetivamente, tem-se observado isso em versões recentes de programas comerciais populares (Abaqus, Ansys, Nastran).

### 3.32. Modelo Hyperfoam

O Hyperfoam também é conhecido como modelo de espuma de borracha de Ogden (Ogden, 1984), e tem uma forma muito similar àquele modelo para materiais incompressíveis:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left[ J^{\frac{\alpha_i}{3}} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \right] + \sum_{k=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i \beta_i} (J^{-\alpha_i \beta_i} - 1)^{2k} \quad (3.48)$$

sujeita às restrições:

$$K = \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i \left( \frac{1}{3} + \beta_i \right)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i$$

Por ser mais adaptado à materiais compressíveis, este modelo não será utilizado nos capítulos seguintes, sendo incluído aqui por sua importância no contexto dos modelos hiperelásticos disponíveis na literatura.

### 3.33. Modelo de Blatz-Ko

Este modelo foi desenvolvido especificamente para espumas de borracha de poliuretano (Blatz, 1962). Sua função energia de deformação é:

$$W = \frac{\mu}{2} \left( \frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right) \quad (3.49)$$

que corresponde a um caso particular de Hyperfoam com  $N=1$ ,  $\mu_1 = -\mu$ ,  $\alpha_2 = -2$  e  $\beta_1 = 1/2$ , o que leva à seguinte forma para  $W$ :

$$W = -\frac{\mu}{2} (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) - \mu(\sqrt{J} - 1) \quad (3.50)$$

Sendo mais aplicável a um tipo específico de espuma, este modelo também não será utilizado nos capítulos seguintes. Em aplicações práticas, tem sido preterido em relação ao modelo Hyperfoam, que é mais geral. Historicamente, no entanto, este foi um dos primeiros modelos de espuma a ser amplamente empregado (Marczak, *et al.*, 2006).

## 4. AJUSTE DE CONSTANTES CONSTITUTIVAS

Os principais dados provenientes dos ensaios experimentais de elastômeros são as curvas força  $\times$  deslocamento obtidas para cada ensaio específico. Estes dados não apenas são os mais simples de se monitorar durante os ensaios, como também fornecem um excelente ponto de partida para obtenção de diversas variáveis físicas. Dados como tensão de ruptura, dureza, entre outros, assim como as propriedades do material (módulo de elasticidade  $E$ , módulo de cisalhamento  $G$ , módulo de compressibilidade  $K$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ ) representam alguns exemplos práticos. No presente contexto, deseja-se converter estas curvas em dados que permitam calibrar os modelos constitutivos descritos no Capítulo 3 e posteriormente verificar a validade dos mesmos. Neste capítulo, este procedimento será detalhado passo a passo para cada tipo de ensaio, considerando-se que o material seja incompressível. Portanto, apenas o primeiro termo à direita da eq.(3.1) será considerado aqui em diante.

### 4.1. Verificando a Hipótese de Incompressibilidade

O primeiro passo para caracterização de um material hiperelástico é verificar qual o seu nível de compressibilidade. As equações constitutivas para materiais incompressíveis são bem mais simples que aquelas para materiais que apresentam compressibilidade significativa. Por outro lado, não se requer absoluta incompressibilidade do material. Os modelos descritos no Capítulo 3 serão aqui particularizados sob a hipótese da incompressibilidade, mas felizmente todos eles permitem que essa hipótese seja relaxada dentro de certos limites.

O maior objetivo do ensaio de compressão volumétrica (Marczak, *et al.*, 2006) é justamente verificar qual o valor de  $K$  para o material. Um material incompressível sob pequenas deformações é caracterizado por  $\nu = \frac{1}{2}$ . Portanto, da eq.(2.21), este material deve ter um módulo de compressibilidade teórico infinito, o que equivale à curva  $\sigma \times \varepsilon$  vertical. Na prática, sempre há algum grau de compressibilidade. A título de ilustração, se um material possui  $\nu = 0,498$  e um módulo de elasticidade inicial  $E = 3,9$  MPa, a eq.(2.21) fornece  $K = 325$  MPa, que representa um valor quase cem vezes superior ao módulo de elasticidade. Como recomendação prática, pode-se considerar o material incompressível quando a condição  $K > 10^4 G$  for obedecida (Ogden, 1984; Gent, 2001). Embora a maior parte das borrachas comercialmente disponíveis possa ser considerada incompressível como material sólido, deve-se ter em mente que isto também depende da forma como o produto é manufaturado.

Por exemplo, um composto de borracha sólida incompressível perde esta condição se for empregada na forma de espuma.

## 4.2. Obtendo a Curva Tensão x Deformação

Todas as soluções analíticas descritas na seção (2.4.4) partem de uma relação constitutiva do tipo dado pela eq.(2.25) - onde a incompressibilidade é assumida, e posteriormente dão origem às eqs.(2.30), válidas para *deformações homogêneas* (que é o caso dos ensaios experimentais de tração e compressão uniaxial, cisalhamento simples, cisalhamento puro e tração biaxial, comumente empregados para a caracterização de elastômeros). Conseqüentemente é necessário ajustar os modelos hiperelásticos desejados aos dados experimentais obtidos *empregando-se a mesma medida de tensão e deformação da eq.(2.25)*.

Esta é a primeira dificuldade a ser superada na preparação dos dados para calibrar os modelos. A curva  $F \times u$  obtida nos ensaios permite sua transformação direta para tensões e deformações de engenharia, porque neste caso basta dividir a força por uma área (geralmente uma área do corpo de prova) e o deslocamento por uma dimensão (comprimento ou altura do corpo de prova) tomadas com o corpo de prova indeformado. Isto equivale a dizer que está se obtendo um diagrama  $t \times e$ , onde  $t$  é uma tensão de engenharia e  $e$  é uma deformação de engenharia. Para empregar uma relação constitutiva como a eq.(2.25) de forma consistente, então, deve-se transformar as expressões da Tabela 2.1 de  $\sigma \times \lambda$  para  $t \times \lambda$  (ou  $t \times e$ ).

### 4.2.1. Preparação dos Dados do Ensaio de Tração Uniaxial

As definições usuais para tensão e deformação de engenharia (Miller, 1995) são dadas por:

$$e = \frac{u}{L^0} \quad t = \frac{F}{A^0}$$

onde  $u$  e  $F$  são o deslocamento e a carga medidos durante o ensaio,  $L^0$  e  $A^0$  representam respectivamente o comprimento e a área inicial do corpo de prova. Primeiramente, deve-se destacar que a deformação foi obtida através de:

$$e = \frac{L - L^0}{L^0} = \int_{L^0}^L de = \frac{1}{L^0} \int_{L^0}^L \frac{dL}{L^0} \quad (4.1)$$

Para obter-se uma deformação real, que é uma medida instantânea de deformação, pode-se empregar a tradicional *deformação logarítmica*, dada por:

$$\varepsilon = \frac{u}{L} = \int_{L^0}^L d\varepsilon = \int_{L^0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L^0} \quad (4.2)$$

Então, a relação entre  $e$  e  $\varepsilon$  é obtida comparando-se (4.1) com (4.2):

$$\varepsilon = \ln(1 + e) \quad (4.3)$$

A deformação logarítmica não será de grande valia aqui porque ela não corresponde diretamente a nenhuma das definições de tensão apresentadas no Capítulo 2, mas pode ser útil para apresentação dos resultados. Por outro lado, levando-se em conta que a eq.(2.25) utiliza o tensor deformação  $\mathbf{B}$ , e seus valores principais são os alongamentos  $\lambda_i$  (ver eq.(2.13)), é mais conveniente transformar os deslocamentos em alongamentos. Como neste caso  $\lambda_1 = \lambda$  (observando-se que  $\lambda > 1$ ) e  $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ , então:

$$\lambda = \frac{L}{L^0} = \frac{u + L^0}{L^0} = 1 + e \quad (4.4)$$

e

$$\varepsilon = \ln \lambda$$

Quanto à tensão, é possível transformá-la para tensão de Cauchy facilmente quando o material é incompressível. Já que o volume da parte útil do corpo de prova não muda, então:

$$AL = A^0 L^0$$

Como a tensão de Cauhy é referente à área deformada, pode-se escrever:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{A^0} \frac{A^0}{A} = \frac{F}{A^0} \frac{L}{L^0} \quad (4.5)$$

Comparando (4.4) com (4.5) resulta:

$$\sigma = t(1 + e) = t \lambda \quad (4.6)$$

Usualmente se utiliza os diagramas  $t \times e$ , já que estes dispensam o uso de instrumentos de medição complicados. Outra forma de apresentação dos resultados, embora menos encontrada na prática, são os diagramas  $\sigma \times \varepsilon$ . É claro que o primeiro é mais empregado pela sua facilidade de obtenção. A Figura 4.1 compara estes dois tipos de diagramas, gerados a partir dos dados de um ensaio de tração uniaxial. Em se tratando de elastômeros, o diagrama  $t \times e$  também é o mais empregado, mas deve-se notar que a eq.(2.35) utiliza a tensão verdadeira  $\sigma$  e o alongamento  $\lambda$ . Da eq.(4.6), obtém-se diretamente a relação teórica entre  $t$  e  $\lambda$  para este modo de deformação.

$$t_T = 2 \left( \lambda_T - \frac{1}{\lambda_T^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda_T} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (4.7)$$

onde  $\lambda_T$  é calculado de  $e$  através de (4.4).

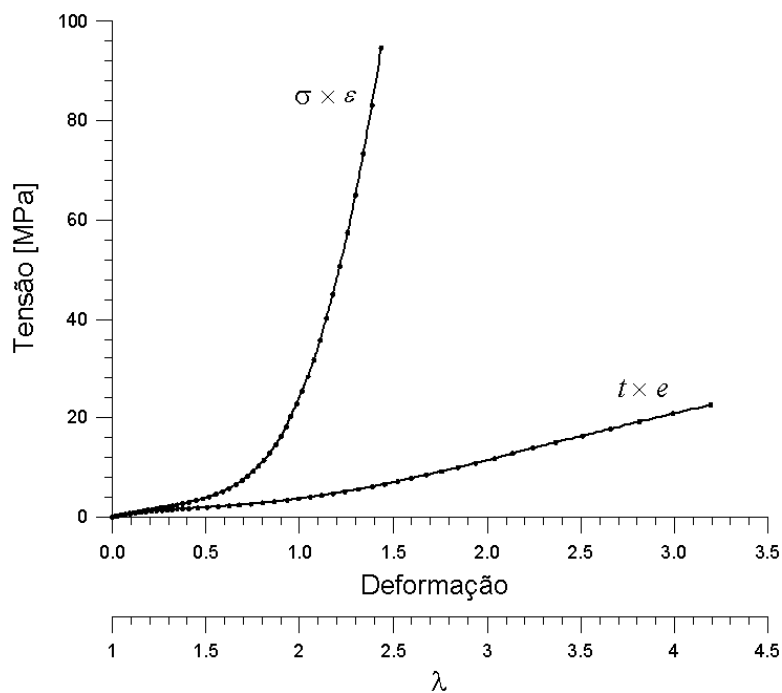


Figura 4. 1 - Comparação entre diagramas tensão  $\times$  deformação verdadeiros ( $\sigma \times \varepsilon$ ) e nominais ( $t \times e$ ) obtidos para o ensaio de tração uniaxial.

#### 4.2.2. Preparação dos Dados do Ensaio de Compressão Uniaxial

Segue exatamente o mesmo procedimento do ensaio de tração, apenas observando-se que  $\lambda \leq 1$ .

$$t_c = 2 \left( \lambda_c - \frac{1}{\lambda_c^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda_c} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (4.8)$$

#### 4.2.3. Preparação dos Dados do Ensaio de Cisalhamento Puro

Neste caso,  $\lambda_1 = \lambda$  (observando-se que  $\lambda > 1$ ),  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda}$  e  $\lambda_3 = 1$ . Devem ser utilizadas as eqs.(2.38) para o cálculo da tensão nominal:

$$t_1 = \frac{\sigma_{11}}{\lambda_1} = \frac{\sigma_{11}}{\lambda}$$

$$t_2 = \frac{\sigma_{22}}{\lambda_2} = \lambda \sigma_{22}$$

o que fornece:

$$t_1 = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (4.9)$$

$$t_2 = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (4.10)$$

Como monitora-se apenas a tensão na direção de aplicação da carga, a relação relevante entre  $t$  e  $\lambda$  para este modo de deformação é:

$$t_p = 2 \left( \lambda_p - \frac{1}{\lambda_p^3} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (4.11)$$

onde  $\lambda_p$  é calculado através de (4.4).

#### 4.2.4. Preparação dos Dados do Ensaio de Cisalhamento Simples

As definições usuais para tensão cisalhante e deformação cisalhante neste caso são dadas por:

$$\gamma = \frac{u}{b} \quad t = \frac{F}{A^0}$$



Como a deformação cisalhante independe da área, a eq.(2.41)<sub>3</sub> pode ser usada diretamente, sem necessidade de conversão:

$$\boxed{t_s = 2\gamma \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)} \quad (4.12)$$

Os ensaios de cisalhamento puro e simples excitam o mesmo modo de deformação e podem ser convertidos um para o outro. É possível demonstrar que a deformação  $\gamma$  de (4.12) e o alongamento  $\lambda$  de (4.11) estão relacionados por:

$$\lambda_p = \frac{1}{2} \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4} \right)$$

Das eqs.(4.12) e (4.11), a tensão nominal  $t_s$  no ensaio de cisalhamento simples, atuando na mesma direção de  $t_p$  resulta:

$$t_p = \frac{t_s}{\gamma} \left( \lambda_p - \frac{1}{\lambda_p^3} \right)$$

de forma que os dados  $(\gamma, t_s)$  pode ser convertidos para  $(\lambda_p, t_p)$  e vice-versa.

#### 4.2.5. Preparação dos Dados do Ensaio de Tração Biaxial

Aqui,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  (observando-se que  $\lambda > 1$ ) e  $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda^2}$ . Deve ser utilizada a eq.(2.43) para o cálculo da tensão nominal:

$$\boxed{t_B = 2 \left( \lambda_B - \frac{1}{\lambda_B^5} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_B^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)} \quad (4.13)$$

#### 4.3. Fórmulas para Ajuste dos Modelos

Uma vez realizados os ensaios experimentais e o tratamento dos dados, pode-se proceder o ajuste das curvas para o modelo hiperelástico selecionado.

As expressões para o cômputo das tensões  $(t_T, t_C, t_S, t_P, t_B)$  particularizadas para cada modelo são obtidas a partir da substituição das derivadas da função energia de deformação  $\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}, \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)$  nas equações (2.35), (2.38)<sub>1</sub>, (2.41)<sub>3</sub> e (2.43) respectivamente. Este capítulo apresenta na forma de tabelas as expressões  $(t_T, t_C, t_S, t_P, t_B)$  na sua forma final particularizadas para materiais incompressíveis, prontas para serem ajustadas aos dados experimentais. O procedimento em detalhes de obtenção destas expressões com as respectivas ressalvas para cada modelo listado no Capítulo 3 é apresentado no Apêndice A.

#### 4.3.1. Ajustando o Modelo de Mooney-Rivlin (MRIn)

A Tabela 4.1 apresenta as expressões relevantes  $(t_T, t_C, t_S, t_P, t_B)$  parametrizadas para  $n = 2, 3, 5$  ou 9. As eqs.(3.2–3.5) no caso incompressível resultam:

- 2 termos – **MRI2:**

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (4.14)$$

- 3 termos – **MRI3:**

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \quad (4.15)$$

- 5 termos – **MRI5:**

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 \quad (4.16)$$

- 9 termos – **MRI9:**

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (4.17)$$

Mooney-Rivlin - MRIn	Fatores
$t_T, t_C = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(A_n + \frac{B_n}{\lambda}\right)$	$A_2 = C_{10}$ <span style="float: right;"><math>B_2 = C_{01}</math></span>
$t_P = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)(A_n + B_n)$	$A_3 = A_2 + C_{11}(I_2 - 3)$ <span style="float: right;"><math>B_3 = B_2 + C_{11}(I_1 - 3)</math></span> $A_5 = A_3 + 2C_{20}(I_1 - 3)$ <span style="float: right;"><math>B_5 = B_3</math></span>
$t_S = 2\gamma(A_n + B_n)$	$A_9 = A_5 + 3C_{30}(I_1 - 3)^2$ <span style="float: right;"><math>B_9 = B_5</math></span>
$t_B = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)(A_n + \lambda^2 B_n)$	

Tabela 4. 1 - Tensões nominais para os modelos de Mooney-Rivlin ( $n = 2, 3, 5$  ou  $9$ ).

### 4.3.2. Ajustando o Modelo Neo-Hookeano (NHI)

A Tabela 4.2 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.6) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \quad (4.18)$$

Neo-Hookeano – NHI	Fatores
$t_T, t_C = \mu\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)$	
$t_P = \mu\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)$	-
$t_S = \mu\gamma$	
$t_B = \mu\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)$	

Tabela 4. 2 - Tensões nominais para o modelo Neo-Hookeano.

### 4.3.3. Ajustando o Modelo de Gent-Thomas (GTI)

A Tabela 4.3 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.7) no caso incompressível resulta:

$$W = C_1(I_1 - 3) + 3C_2 \ln(I_2) \quad (4.19)$$

Gent-Thomas - GTI	Fatores
$t_T, t_C = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(A_2 + \frac{B_2}{\lambda}\right)$	$A_2 = C_1$ $B_2 = \frac{3C_2}{I_2}$
$t_P = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)(A_2 + B_2)$	
$t_S = 2\gamma(A_2 + B_2)$	
$t_B = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)(A_2 + \lambda^2 B_2)$	

Tabela 4. 3 - Tensões nominais para o modelo de Gent-Thomas.

#### 4.3.4. Ajustando o Modelo de Hart-Smith Aprimorado (HSAI)

A Tabela 4.4 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.8) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{C_1 e^{C_3(I_1-3)^n}}{n} + 3C_2 \ln(I_2) \quad (4.20)$$

Hart-Smith Aprimorado – HSAI	Fatores
$t_T, t_C = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(A_3 + \frac{B_3}{\lambda}\right)$	$A_3 = C_1 C_3 (I_1 - 3)^{n-1} \left( e^{(C_3(I_1-3))^n} \right)$ $B_3 = \frac{3C_2}{I_2}$
$t_P = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)(A_3 + B_3)$	
$t_S = 2\gamma(A_3 + B_3)$	
$t_B = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)(A_3 + \lambda^2 B_3)$	

Tabela 4. 4 - Tensões nominais para o modelo de Hart-Smith Aprimorado.

#### 4.3.5. Ajustando o Modelo de Hart-Smith (HSI)

A Tabela 4.5 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.9) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{C_1 e^{C_3(I_1-3)^2}}{2} + 3C_2 \ln(I_2) \quad (4.21)$$

Hart-Smith – HSI	Fatores
$t_T, t_C = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(A_2 + \frac{B_2}{\lambda}\right)$	$A_2 = C_1 C_3 (I_1 - 3) \left( e^{(C_3(I_1-3))} \right)$ $B_2 = \frac{3C_2}{I_2}$
$t_P = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)(A_2 + B_2)$	
$t_S = 2\gamma(A_2 + B_2)$	
$t_B = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)(A_2 + \lambda^2 B_2)$	

Tabela 4. 5 - Tensões nominais para o modelo de Hart-Smith.

#### 4.3.6. Ajustando o Modelo de Fung (FI)

A Tabela 4.6 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.10) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{\mu}{2b} (e^{b(I_1-3)} - 1) \quad (4.22)$$

Fung - FI	Fatores
$t_T, t_C = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)A_2$	$A_2 = \frac{\mu}{2b} (e^{b(I_1-3)} - 1)$
$t_P = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)A_2$	
$t_S = 2\gamma A_2$	
$t_B = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)A_2$	

Tabela 4. 6 - Tensões nominais para o modelo de Fung.

#### 4.3.7. Ajustando o Modelo de Veronda-Westmanns (VWI)

A Tabela 4.7 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.11) incompressível resulta:

$$W = C_1 \left[ e^{\alpha(I_1-3)} - 1 \right] - C_2 [I_2 - 3] \quad (4.23)$$

Veronda-Westmann – VWI	Fatores
$t_T, t_C = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(A_2 + \frac{B_2}{\lambda}\right)$	$A_2 = C_1 C_2 \left(e^{C_2(t_1-3)}\right)$ $B_2 = -\frac{C_1 C_2}{2}$
$t_P = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)(A_2 + B_2)$	
$t_S = 2\gamma(A_2 + B_2)$	
$t_B = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)(A_2 + \lambda^2 B_2)$	

Tabela 4. 7 - Tensões nominais para o modelo de Veronda-Westmann.

#### 4.3.8. Ajustando o Modelo de Peng-Landel (PLI)

A Tabela 4.8 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.13) no caso incompressível resulta:

$$W = \sum_{i=1}^3 C_i (\lambda_i - 1 - \ln(\lambda_i)) - \frac{1}{6} \ln(\lambda_i)^2 + \frac{1}{18} \ln(\lambda_i)^3 - \frac{1}{216} \ln(\lambda_i)^4 \quad (4.24)$$

Peng-Landel - PLI	Fatores
$t_T, t_C = 2A_1$	$A_1 = c \left( 1 - \frac{1}{\lambda} - \ln(\lambda) - \frac{1}{3\lambda} (\ln(\lambda)) + \frac{1}{6\lambda} (\ln(\lambda))^2 - \frac{1}{54\lambda} (\ln(\lambda))^3 \right) +$ $+ c \left( -\frac{1}{\lambda^{3/2}} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\lambda} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{1}{12\lambda} \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)^2 + \frac{1}{108\lambda} \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)^3 \right)$
$t_P = 2B_1$	
$t_S = t_P \rightarrow \lambda_p = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$	$B_1 = c \left( 1 - \frac{1}{\lambda} - \ln(\lambda) - \frac{1}{3\lambda} (\ln(\lambda)) + \frac{1}{6\lambda} (\ln(\lambda))^2 - \frac{1}{54\lambda} (\ln(\lambda))^3 \right) +$ $+ c \left( -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\lambda} \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{6\lambda} \left(\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^2 + \frac{1}{54\lambda} \left(\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^3 \right)$
$t_B = C_1$	$C_1 = 2c \left( 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{3\lambda} (\ln(\lambda)) + \frac{1}{6\lambda} (\ln(\lambda))^2 - \frac{1}{54\lambda} (\ln(\lambda))^3 \right) +$ $+ c \left( -\frac{1}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda} + \frac{2}{3\lambda} \ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{1}{3\lambda} \left(\ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{27\lambda} \left(\ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)^3 \right)$

Tabela 4. 8 - Tensões nominais para o modelo de Peng-Landel.

#### 4.3.9. Ajustando o Modelo de Ogden (OIn)

A Tabela 4.9 apresenta as expressões relevantes  $(t_T, t_C, t_S, t_P, t_B)$ . A eq.(3.12) no caso incompressível resulta:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (4.25)$$

Ogden - OIn	Fatores
$t_T, t_C = 2A_n$	$A_2 = \mu_1 \left( \lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_1}{2}-1} \right) + \mu_2 \left( \lambda^{\alpha_2-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_2}{2}-1} \right)$
$t_P = 2B_n$	$A_3 = A_2 + \mu_3 \left( \lambda^{\alpha_3-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_3}{2}-1} \right)$ $B_2 = \mu_1 \left( \lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-\alpha_1-1} \right) + \mu_2 \left( \lambda^{\alpha_2-1} - \lambda^{-\alpha_2-1} \right)$
$t_S = t_P \rightarrow \lambda_P = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$	$B_3 = B_2 + \mu_3 \left( \lambda^{\alpha_3-1} - \lambda^{-\alpha_3-1} \right)$ $C_2 = \mu_1 \left( \lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-2\alpha_1-1} \right) + \mu_2 \left( \lambda^{\alpha_2-1} - \lambda^{-2\alpha_2-1} \right)$
$t_B = C_n$	$C_3 = C_2 + \mu_3 \left( \lambda^{\alpha_3-1} - \lambda^{-2\alpha_3-1} \right)$

Tabela 4. 9 - Tensões nominais para o modelo de Ogden.

#### 4.3.10. Ajustando o Modelo de Knowles (KI)

A Tabela 4.10 apresenta as expressões relevantes  $(t_T, t_C, t_S, t_P, t_B)$ . A eq.(3.14) no caso incompressível resulta na eq.(4.26):

Knowles – KI	Fatores
$t_T, t_C = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_2$	$A_2 = \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{b(I_1 - 3)}{n} \right)^{n-1}$
$t_P = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_2$	
$t_S = \gamma A_2$	
$t_B = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_2$	

Tabela 4. 10 - Tensões nominais para o modelo de Knowles.

$$W = \frac{\mu}{2b} \left( \left( 1 + \frac{b(I_1 - 3)}{n} \right)^n - 1 \right) \quad (4.26)$$

#### 4.3.11. Ajustando o Modelo de Kilian (KLI)

A Tabela 4.11 apresenta as expressões relevantes  $(t_T, t_C, t_S, t_P, t_B)$ . A eq.(3.15) no caso incompressível resulta:

$$W = -\mu J_L \left[ \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{I_1 - 3}{J_L}} \right) + \sqrt{\frac{I_1 - 3}{J_L}} \right] \quad (4.27)$$

Kilian – KLI	Fatores
$t_T, t_C = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_2$	$A_2 = \frac{-\mu J_L}{2} \left( \frac{1}{J_L \sqrt{\frac{(I_1 - 3)}{J_L}} \left( 1 - \sqrt{\frac{(I_1 - 3)}{J_L}} \right)} + \frac{1}{J_L \sqrt{\frac{(I_1 - 3)}{J_L}}} \right)$
$t_P = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_2$	
$t_S = 2 \gamma A_2$	
$t_B = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_2$	

Tabela 4. 11 - Tensões nominais para o modelo de Kilian.

#### 4.3.12. Ajustando o Modelo de Van der Waals (VDWI)

A Tabela 4.12 apresenta as expressões relevantes  $(t_T, t_C, t_S, t_P, t_B)$ . A eq.(3.16) no caso incompressível resulta:

$$W = \mu \left[ -(\lambda_m^2 - 3)(\ln(1 - \eta) + \eta) - \frac{2}{3} a \left( \frac{1}{2} I_1 - \frac{3}{2} \right)^{3/2} \right] \quad (4.28)$$

#### 4.3.13. Ajustando o Modelo de Humphrey-Yin (HYI)

A Tabela 4.13 apresenta as expressões relevantes  $(t_T, t_C, t_S, t_P, t_B)$ . A eq.(3.18) no caso incompressível resulta:

$$W = C_1 (e^{C_2(I_1 - 3)} - 1) \quad (4.29)$$



Van der Waals - VDWI	Fatores
$t_T, t_C = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(A_4 + \frac{B_4}{\lambda}\right)$	$A_4 = \mu \left( -\frac{\lambda_m^2 - 3}{2} \left( -\frac{1 - \beta}{\eta(\lambda_m^2 - 3)(1 - \eta)} + \frac{1 - \beta}{\eta(\lambda_m^2 - 3)(1 - \eta)} \right) \right)$ $B_4 = \mu \left( -\frac{a}{2}(1 - \beta) \sqrt{\frac{1}{2}((1 - \beta)I_1 + \beta I_2 - 3)} \right)$ $B_4 = \mu \left( -\frac{\lambda_m^2 - 3}{2} \left( -\frac{\beta}{\eta(\lambda_m^2 - 3)(1 - \eta)} + \frac{\beta}{\eta(\lambda_m^2 - 3)(1 - \eta)} \right) \right)$ $-\frac{a}{2}(\beta) \sqrt{\frac{1}{2}((1 - \beta)I_1 + \beta I_2 - 3)}$
$t_P = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)(A_4 + B_4)$	
$t_S = 2\gamma(A_4 + B_4)$	
$t_B = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)(A_4 + \lambda^2 B_4)$	

Tabela 4. 12 - Tensões nominais para o modelo de Van der Waals.

Humphrey-Yin – HYI	Fatores
$t_T, t_C = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)A_2$	$A_2 = C_1 C_2 (e^{C_2(I_1 - 3)})$
$t_P = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)A_2$	
$t_S = 2\gamma A_2$	
$t_B = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)A_2$	

Tabela 4. 13 - Tensões nominais para o modelo de Humphrey-Yin.

#### 4.3.14. Ajustando o Modelo de Edwards-Vilgis (EVI)

A Tabela 4.14 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.19) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{\mu}{2} \left[ \frac{(J_L + 2)(J_L - 3)(I_1 - 3)}{J_L(J_L - I_1 + 3)} + \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_L}\right) \right] \quad (4.30)$$

Edwards-Vilgis - EVI	Fatores
$t_T, t_C = \mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_2$	$A_2 = \left( \frac{(J_L^2 - J_L - 6) - 2J_L + 2I_1 - 6}{(J_L - I_1 + 3)^2} \right)$
$t_P = \mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_2$	
$t_S = \mu \gamma A_2$	
$t_B = \mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_2$	

Tabela 4. 14 - Tensões nominais para o modelo de Edwards-Vilgis.

#### 4.3.15. Ajustando o Modelo de Takamizawa-Hayashi (THI)

A Tabela 4.15 apresenta as expressões relevantes  $(t_T, t_C, t_S, t_P, t_B)$ . A eq.(3.22) no caso incompressível resulta:

$$W = -c \ln \left[ 1 - \left( \frac{I_1 - 2}{J_L} \right)^2 \right] \quad (4.31)$$

#### 4.3.16. Ajustando o Modelo de Yeoh (YIn)

A Tabela 4.16 apresenta as expressões relevantes  $(t_T, t_C, t_S, t_P, t_B)$ . A eq.(3.23) no caso incompressível resulta:

- 2 termos – **YI2**

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 \quad (4.32)$$

- 3 termos – **YI3**

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 \quad (4.33)$$

- 5 termos – **YI5**

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 + C_{40} (I_1 - 3)^4 + C_{50} (I_1 - 3)^5 \quad (4.34)$$

Takamizawa-Hayashi – THI		Fatores
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)A_2$	$A_2 = \frac{2c(I_1 - 2)}{J_L^2 \left(1 - \frac{(I_1 - 2)^2}{J_L^2}\right)}$
$t_P =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)A_2$	
$t_S =$	$2\gamma A_2$	
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)A_2$	

Tabela 4. 15 - Tensões nominais para o modelo de Takamizawa-Hayashi.

Yeoh – YIη		Fatores
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)A_n$	$A_2 = C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3)$ $A_3 = A_2 + 3C_{30}(I_1 - 3)^2$ $A_5 = A_3 + 4C_{40}(I_1 - 3)^3 + 5C_{50}(I_1 - 3)^4$
$t_P =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)A_n$	
$t_S =$	$2\gamma A_n$	
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)A_n$	

Tabela 4. 16 - Tensões nominais para o modelo de Yeoh ( $n = 2, 3$ , ou  $5$ ).

#### 4.3.17. Ajustando o Modelo de Yeoh-Modificado (YMI)

A Tabela 4.17 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.24) no caso incompressível resulta:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta(I_1 - 3)}) \quad (4.35)$$

#### 4.3.18. Ajustando o Modelo de Arruda-Boyce (ABI5)

A eq.(3.25) possui um número fixo de termos, e no caso de incompressibilidade resulta, já substituídas as constantes  $C_i$  da (3.25), em uma função  $W$  dependente de uma única constante ( $\lambda_L$ ):

$$W = \mu \left( \frac{1}{2} I_1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{20} \frac{I_1^2 - 9}{\lambda_L^2} + \frac{11}{1050} \frac{I_1^3 - 27}{\lambda_L^4} + \frac{19}{7050} \frac{I_1^4 - 81}{\lambda_L^6} + \frac{519}{673750} \frac{I_1^5 - 243}{\lambda_L^8} \right) \quad (4.36)$$

A Tabela 4.18 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ).

Yeoh-Modificado - YMI	Fatores
$t_T, t_C = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_3$	$A_5 = C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 2C_{30}(I_1 - 3)^2 + \alpha e^{-\beta(I_1 - 3)}$
$t_P = \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_3$	
$t_S = 2\gamma A_3$	
$t_B = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_3$	

Tabela 4. 17 - Tensões nominais para o modelo de Yeoh-Modificado.

Arruda-Boyce – ABI5	Fatores
$t_T, t_C = 2\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_5$	$A_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \frac{I_1}{\lambda_L^2} + \frac{11}{350} \frac{I_1^2}{\lambda_L^4} + \frac{38}{3525} \frac{I_1^3}{\lambda_L^6} + \frac{519}{134750} \frac{I_1^4}{\lambda_L^8}$
$t_P = 2\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_5$	
$t_S = 2\mu\gamma A_5$	
$t_B = 2\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_5$	

Tabela 4. 18 - Tensões nominais para o modelo de Arruda-Boyce de 5 termos.

#### 4.3.19. Ajustando o Modelo de Yamashita-Kawabata (YKI)

A Tabela 4.19 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.28) no caso incompressível resulta:

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + \frac{C_3}{N+1} (I_1 - 3)^{N+1} \quad (4.37)$$

Yamashita-Kawabata - YKI		Fatores
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)A_2$	$A_2 = C_{10} + C_3(I_1 - 3)$
$t_P =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)A_2$	
$t_S =$	$2\gamma A_2$	
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)A_2$	

Tabela 4. 19 - Tensões nominais para o modelo de Yamashita-Kawabata.

#### 4.3.20. Ajustando o Modelo de Davis-De-Thomas (DDTI)

A Tabela 4.20 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.29) incompressível resulta:

$$W = \frac{A}{2(1-n/2)} (I_1 - 3 + C^2)^{(1-n/2)} + k(I_1 - 3)^2 \quad (4.38)$$

Davis-De-Thomas - DDTI		Fatores
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)A_4$	$A_4 = \frac{A\left(1 - \frac{n}{2}\right)(I_1 - 3 + C^2)^{-n/2}}{2 - n} + 2k(I_1 - 3)$
$t_P =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)A_4$	
$t_S =$	$2\gamma A_4$	
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)A_4$	

Tabela 4. 20 - Tensões nominais para o modelo de Davis-De-Thomas.

#### 4.3.21. Ajustando o Modelo de Gent (GI)

A Tabela 4.21 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.30) no caso incompressível resulta:

$$W = -\frac{\mu}{2}(I_L - 3) \ln \left[ 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right] \quad (4.39)$$

Gent – GI	Fatores
$t_T, t_C = \mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1}$	-
$t_P = \mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1}$	
$t_S = \mu \gamma \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1}$	
$t_B = \mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1}$	

Tabela 4. 21 - Tensões nominais para o modelo de Gent.

#### 4.3.22. Ajustando o Modelo de Gregory (GYI)

A Tabela 4.22 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.31) incompressível resulta:

$$W = \frac{A}{(2-n)} (I_1 - 3)^{(1-n/2)} + \frac{B}{(2+m)} (I_1 - 3)^{(1+m/2)} \quad (4.40)$$

Gregory - GYI	Fatores
$t_T, t_C = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_4$	$A_5 = \frac{A \left( 1 - \frac{n}{2} \right) (I_1 - 3 + C^2)^{-n/2}}{2-n} + \frac{B \left( 1 + \frac{m}{2} \right) (I_1 - 3 + C^2)^{m/2}}{2+m}$
$t_P = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_4$	
$t_S = 2\gamma A_4$	
$t_B = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_4$	

Tabela 4. 22 - Tensões nominais para o modelo de Gregory.

#### 4.3.23. Ajustando o Modelo de Yeoh-Fleming (YFI)

A Tabela 4.23 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.32) incompressível resulta:

$$W = \frac{A}{B} \left[ 1 - e^{-B(I_1-3)} \right] - C_{10} (I_L - 3) \ln \left[ 1 - \frac{I_1-3}{I_L-3} \right] \quad (4.41)$$

Yeoh-Fleming - YFI	Fatores
$t_T, t_C = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_3$	$A_3 = A e^{-B(I_1-3)} + C_{10} \left( 1 - \frac{I_1-3}{I_L-3} \right)^{-1}$
$t_P = \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_3$	
$t_S = 2 \gamma A_3$	
$t_B = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_3$	

Tabela 4. 23 - Tensões nominais para o modelo de Yeoh-Fleming.

#### 4.3.24. Ajustando o Modelo de Martins (MI)

A Tabela 4.24 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.34) incompressível resulta:

$$W = C_1 (e^{C_2(I_1-3)} - 1) + C_3 (e^{C_4(\lambda-1)^2} - 1) \quad (4.42)$$

Martins- MI	Fatores
$t_T, t_C = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( A_{4T} + \frac{B_{4T}}{\lambda} \right)$	$A_{4T} = C_1 C_2 e^{C_2(I_1-3)} + C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$
$t_P = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) (A_{4P} + B_{4P})$	$B_{4T} = C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} (\lambda^2 - \lambda) e^{C_4(\lambda-1)^2}$ $A_{4P} = C_1 C_2 e^{C_2(I_1-3)} + C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$
$t_S = t_P \rightarrow \lambda_P = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$	$B_{4P} = C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$ $A_{4B} = C_1 C_2 e^{C_2(I_1-3)} + C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$
$t_B = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) (A_{4B} + \lambda^2 B_{4B})$	$B_{4B} = C_3 C_4 \left( \lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$

Tabela 4. 24 - Tensões nominais para o modelo de Martins.

#### 4.3.25. Ajustando o Modelo de Gent de Três Parâmetros (G3I)

A Tabela 4.25 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.35) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{\mu}{2} \left[ -\alpha(I_L - 3) \ln \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right) + (1 - \alpha)(I_2 - 3) \right] \quad (4.43)$$

Gent de 03 Parâmetros – G3I	Fatores
$t_T, t_C = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) (A_3 + B_3)$	$A_3 = \frac{\mu\alpha}{2} \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1}$ $B_3 = \frac{\mu(1 - \alpha)}{2}$
$t_P = \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) (A_3 + B_3)$	
$t_S = \gamma (A_3 + B_3)$	
$t_B = \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) (A_3 + B_3)$	

Tabela 4. 25 - Tensões nominais para o modelo de Gent de 03 Parâmetros.

#### 4.3.26. Ajustando o Modelo de Pucci-Saccomandi (PSI)

A Tabela 4.26 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.36) no caso incompressível resulta:

$$W = -\frac{1}{2} \mu J_m \ln \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right) + C_2 \ln \left( \frac{1}{3} I_2 \right) \quad (4.44)$$

#### 4.3.27. Ajustando o Modelo de Amin (AI)

A Tabela 4.27 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.37) no caso incompressível resulta:

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + \frac{C_3}{N+1} (I_1 - 3)^{N+1} + \frac{C_4}{M+1} (I_1 - 3)^{M+1} \quad (4.45)$$



Pucci-Sacomandi - PSI	Fatores
$t_T, t_C = 2\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1} + \frac{B_1}{\lambda} \right)$	$B_1 = \frac{C_2}{I_2}$
$t_P = 2\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1} + B_1 \right)$	
$t_S = 2\mu \gamma \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1} + B_1 \right)$	
$t_B = 2\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1} + \lambda^2 B_1 \right)$	

Tabela 4. 26 - Tensões nominais para o modelo de Pucci-Sacomandi.

Amin - AI	Fatores
$t_T, t_C = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_4$	$A_4 = C_{10} + C_3 (I_1 - 3)^N + C_4 (I_1 - 3)^M$
$t_P = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_4$	
$t_S = 2 \gamma A_4$	
$t_B = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_4$	

Tabela 4. 27 - Tensões nominais para o modelo de Amin.

#### 4.3.28. Ajustando o Modelo de Hartmann-Neff (HNIn)

A Tabela 4.28 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). As eqs.(3.38 - 3.40) no caso incompressível resultam:

- 3 termos ( $N = M = 1$ ):

$$W = \alpha(I_1^3 - 3^3) + C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}) \quad (4.46)$$

- 5 termos ( $N = M = 2$ ):

$$W = \alpha(I_1^3 - 3^3) + C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{01}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}) + C_{02}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3})^2 \quad (4.47)$$

- 7 termos ( $N = M = 3$ ):

$$W = \alpha(I_1^3 - 3^3) + C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}) + C_{02}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3})^2 + C_{03}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3})^3 \quad (4.48)$$

Hartmann-Neff - HNI $\eta$	Fatores
$t_T, t_C = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(A_n + \frac{B_n}{\lambda}\right)$	$A_1 = 3\alpha I_1^2 + C_{10}$ $B_1 = \frac{3}{2}C_{01}\sqrt{I_2}$
$t_P = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)(A_n + B_n)$	$A_2 = 3\alpha I_1^2 + C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3)$ $B_2 = \frac{3}{2}C_{01}\sqrt{I_2} + 3C_{02}\left(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}\right)\sqrt{I_2}$
$t_S = 2\gamma(A_n + B_n)$	$A_3 = 3\alpha I_1^2 + C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 2C_{30}(I_1 - 3)^2$ $B_3 = \frac{3}{2}C_{01}\sqrt{I_2} + 3C_{02}\left(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}\right)\sqrt{I_2} + \frac{9}{2}C_{03}\left(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}\right)^2\sqrt{I_2}$

Tabela 4. 28 - Tensões nominais para os modelos de Hartmann-Neff ( $n = 1, 2, 3$ ).

#### 4.3.29. Ajustando o Modelo de Bechir (HBII)

A Tabela 4.29 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.45) no caso incompressível resultam:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} C_n^r \left( \lambda_1^{2n} + \lambda_2^{2n} + \lambda_3^{2n} - 3 \right)^r \quad (4.49)$$

#### 4.3.30. Ajustando o Modelo de Horgan-Saccomandi (CHGSIn)

A Tabela 4.30 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). A eq.(3.42) incompressível resulta:

$$W = -\frac{\mu}{2} J \ln \left[ \frac{J^3 - J^2 I_1 + J I_2 - 1}{(J - 1)^3} \right] \quad (4.50)$$

Bechir - HBIn		Fatores
$t_T, t_C =$	$2A_n$	$A_2 = \left( \left( C_1^1 + 2C_1^2 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \right) \left( 2\lambda - \frac{2}{\lambda^2} \right) + \left( C_2^1 + 2C_2^2 \left( \lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2} - 3 \right) \right) \left( 4\lambda^3 - \frac{4}{\lambda^3} \right) \right)$
$t_P =$	$2B_n$	$A_3 = A_2 + \left( C_3^1 + 2C_3^2 \left( \lambda^6 + \frac{2}{\lambda^3} - 3 \right) \right) \left( 6\lambda^5 - \frac{6}{\lambda^4} \right)$ $B_2 = \left( \left( C_1^1 + 2C_1^2 \left( \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2 \right) \right) \left( 2\lambda - \frac{2}{\lambda^3} \right) + \left( C_2^1 + 2C_2^2 \left( \lambda^4 + \frac{1}{\lambda^4} - 2 \right) \right) \left( 4\lambda^3 - \frac{4}{\lambda^5} \right) \right)$
$t_S =$	$t_P \rightarrow \lambda_P = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$	$B_3 = B_2 + \left( C_3^1 + 2C_3^2 \left( \lambda^6 + \frac{1}{\lambda^6} - 2 \right) \right) \left( 6\lambda^5 - \frac{6}{\lambda^7} \right)$ $C_2 = \left( \left( C_1^1 + 2C_1^2 \left( 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) \right) \left( 4\lambda - \frac{4}{\lambda^5} \right) + \left( C_2^1 + 2C_2^2 \left( 2\lambda^4 + \frac{1}{\lambda^8} - 3 \right) \right) \left( 8\lambda^3 - \frac{8}{\lambda^9} \right) \right)$
$t_B =$	$C_n$	$C_3 = C_2 + \left( C_3^1 + 2C_3^2 \left( 2\lambda^6 + \frac{1}{\lambda^{12}} - 3 \right) \right) \left( 12\lambda - \frac{12}{\lambda^{13}} \right)$

Tabela 4. 29 - Tensões nominais para o modelo de Bechir.

Horgan-Saccomandi - CHGSI		Fatores
$t_T, t_C =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( A_1 + \frac{B_1}{\lambda} \right)$	$A_1 = \left( \frac{J_m^3}{J_m^3 - J_m^2 I_1 + J_m I_1 - 1} \right)$ $B_1 = \left( \frac{J_m^2}{J_m^3 - J_m^2 I_1 + J_m I_1 - 1} \right)$
$t_P =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) (A_1 + B_1)$	
$t_S =$	$\mu \gamma (A_1 + B_1)$	
$t_B =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) (A_1 + \lambda^2 B_1)$	

Tabela 4. 30 - Tensões nominais para o modelo de Horgan-Saccomandi.

### 4.3.31. Ajustando o Modelo Polinomial (PI3)

A Tabela 4.31 apresenta as expressões relevantes ( $t_T, t_C, t_S, t_P, t_B$ ). Para o caso de  $N=3$ , a eq.(3.47) se reduz a :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{21}(I_1 - 3)^2(I_2 - 3) + C_{12}(I_1 - 3)(I_2 - 3)^2 \quad (4.51)$$

Polinomial – PI3	Fatores
$t_T, t_C = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)(A_3 + \frac{B_3}{\lambda})$	$A_3 = \left( C_{10} + C_{11}(I_2 - 3) + 2C_{20}(I_1 - 3) + 2C_{21}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{12}(I_2 - 3)^2 \right)$ $B_3 = \left( C_{01} + C_{11}(I_1 - 3) + 2C_{02}(I_2 - 3) + C_{21}(I_1 - 3)^2 + 2C_{12}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \right)$
$t_P = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)(A_3 + B_3)$	
$t_S = 2\gamma(A_3 + B_3)$	
$t_B = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)(A_3 + \lambda^2 B_3)$	

Tabela 4. 31 - Tensões nominais para o modelo Polinomial de 3 termos.

## 5. AJUSTANDO AS CURVAS

Uma vez preparadas as equações de cada ensaio, para o modelo escolhido, deve-se realizar um ajuste de curvas. O ajuste é uma ferramenta amplamente empregada em engenharia e estatística, e pode ser realizado utilizando diversos critérios. O mais comum é minimizar o quadrado do erro entre a curva teórica procurada e os dados experimentais disponíveis.

A Tabela 5. 1 resume as constantes a serem determinadas pelo ajuste de curvas para os modelos hiperelásticos aqui estudados. Note-se que, enquanto alguns modelos dispensam o uso de uma única constante, outros podem exigir o ajuste de diversos parâmetros. No caso de modelos como NHI, ABI e GI, as constantes possuem significado físico, e podem ser comparadas com seus valores teóricos como medida de erro do ajuste. Na maior parte dos casos práticos, no entanto, os valores ajustados raramente se aproximam das suas estimativas teóricas baseadas, por exemplo, em informações de reações químicas do material (Marczak *et al.*, 2006).

As constantes são obtidas a partir do ajuste contra uma curva gerada experimentalmente. O objetivo é realizar o ajuste para um ensaio e obter uma predição satisfatória do comportamento para os demais modos de deformação. Portanto, é responsabilidade do analista escolher qual é o modo de deformação (ensaio) a ser empregado no ajuste, bem como julgar se a predição dos demais é aceitável. Para a grande maioria dos elastômeros existentes, deve-se esperar um comportamento similar ao ilustrado na Figura 5. 1. Note-se que, quando plotadas na mesma escala, os ensaios de cisalhamento e tração biaxial produzem tensões maiores que às obtida para o ensaio de tração uniaxial. É comum a curva de cisalhamento diferir pouco da curva de tração uniaxial para pequenas deformações, aumentando sua diferença para deformações maiores, mas a curva de tração biaxial produz tensões notadamente maiores.

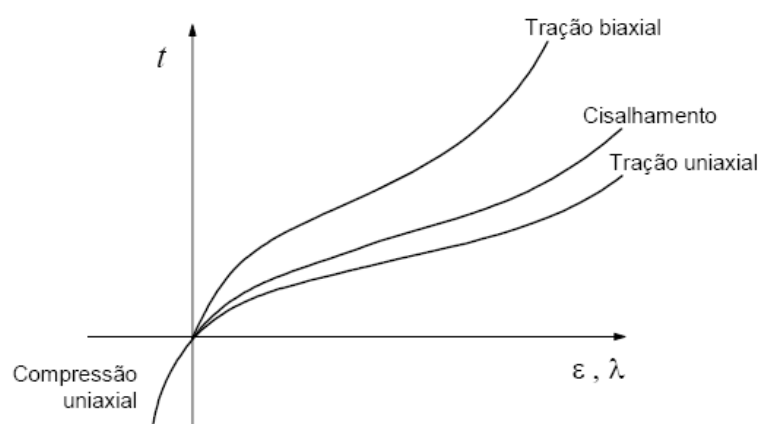


Figura 5. 1 - Forma típica das curvas  $t \times \lambda$  obtidas em ensaios experimentais de borrachas (Muhr, 2005).

<b>Modelo</b>	<b>Constantes</b>	<b>Modelo</b>	<b>Constantes</b>
<b>MRI2</b>	$C_{10}, C_{01}$	<b>YI3</b>	$C_{10}, C_{20}, C_{30}$
<b>MRI3</b>	$C_{10}, C_{01}, C_{11}$	<b>YI5</b>	$C_{10}, C_{20}, C_{30}, C_{40}, C_{50}$
<b>MRI5</b>	$C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}$	<b>YMI</b>	$C_{10}, C_{20}, C_{30}, \alpha, \beta$
<b>MRI9</b>	$C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{30}$	<b>ABI5</b>	$(\mu), \lambda_L$
<b>NHI</b>	$\mu$	<b>YKI</b>	$C_{10}, C_3, N$
<b>GTI</b>	$C_1, C_2$	<b>DDTI</b>	$A, C, k, n$
<b>HSAI</b>	$C_1, C_2, C_3, n$	<b>GI</b>	$(\mu), I_L$
<b>HSI</b>	$C_1, C_2, C_3$	<b>GYI</b>	$A, B, C, n, m$
<b>FI</b>	$(\mu), b$	<b>YFI</b>	$A, B, C_{10}, I_L$
<b>VWI</b>	$C_1, \alpha, C_2$	<b>MI</b>	$C_1, C_2, C_3, C_4$
<b>OI2</b>	$\mu_1, \mu_2, \alpha_1, \alpha_2$	<b>G3I</b>	$(\mu), I_L, \alpha$
<b>OI3</b>	$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	<b>PSI</b>	$(\mu), J_L, C_2$
<b>PLI</b>	$C_1$	<b>AI</b>	$C_{10}, C_3, N, C_4, M$
<b>KI</b>	$(\mu), b, n$	<b>HNI1</b>	$\alpha, C_{10}, C_{01}$
<b>KLI</b>	$\mu, J_L$	<b>HNI2</b>	$\alpha, C_{10}, C_{20}, C_{01}, C_{02}$
<b>VDWI</b>	$\mu, \lambda_L, a, \beta$	<b>HNI3</b>	$\alpha, C_{10}, C_{20}, C_{30}, C_{01}, C_{02}, C_{03}$
<b>HYI</b>	$C_1, C_2$	<b>CHGSI</b>	$(\mu), J_L$
<b>EVI</b>	$(\mu), J_L$	<b>HBI2</b>	$C_1^1, C_1^2, C_2^1, C_2^2$
<b>THI</b>	$J_L, c$	<b>HBI3</b>	$C_1^1, C_1^2, C_2^1, C_2^2, C_3^1, C_3^2$
<b>YI2</b>	$C_{10}, C_{20}$	<b>PI3</b>	$C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{21}, C_{12}$

Tabela 5. 1 - Constantes necessárias para os diversos modelos hiperelásticos.

Portanto, esta disposição geral depende também da faixa de deformações desejada, e é comum se atingir valores de deformação em tração uniaxial muito superiores aos demais ensaios. Além disso, deve-se perceber também que a curva de compressão segue as mesmas equações teóricas da tração uniaxial, mas exibe um gradiente muito mais agressivo (Charlton, 1994).

Quando os resultados obtidos não fornecem curvas similares às da Figura 5. 1, ou estas estão dispostas em ordem diversa, muito provavelmente as constantes obtidas são inadequadas ou então os dados experimentais não são confiáveis.

Alguns programas de elementos finitos realizam o ajuste para mais de uma curva simultaneamente. Deve-se compreender os detalhes do algoritmo utilizado, porque alguns programas simplesmente geram um arquivo de dados com os resultados experimentais de todos os ensaios sobrepostos. Argumenta-se que este procedimento deveria ser aplicado caso não haja conhecimento de qual é o modo de deformação predominante na aplicação desejada. Esta justificativa é altamente questionável, já que as curvas experimentais obtidas para cada ensaio podem diferir significativamente, de modo que o ajuste resultante irá se referir a uma curva experimental média que não representa nenhum dos ensaios em particular. Como consequência, não se pode esperar uma predição satisfatória dos modelos hiperelásticos assim ajustados. Então, se na aplicação real existirem regiões com um modo de deformação predominante, serão estimados níveis de tensão errôneos naquelas áreas. Para que o ajuste simultâneo de várias curvas seja realizado com sucesso, o algoritmo empregado deve considerar uma otimização multi-critério (tantos quantos os ensaios disponíveis) do erro.

Também é muito importante considerar que se o processo de obtenção das constantes de um dado modelo se baseia em um único ensaio, os demais ensaios fazem um papel complementar para verificação da qualidade do modelo adotado. Por exemplo, se um conjunto de constantes é obtido para um ensaio de tração uniaxial, é bastante recomendável que se disponha dos resultados experimentais para pelo menos mais um ou dois ensaios, por exemplo, cisalhamento puro e tração biaxial. Em uma segunda etapa, pode-se verificar como o modelo está estimando as tensões para esses ensaios, superpondo-se as curvas teóricas com as experimentais. Cabe ao analista decidir se há concordância suficiente entre as predições teóricas e os resultados experimentais. Caso não haja, deve-se tentar uma das seguintes alternativas:

1. Refinar o ajuste, alterando as constantes. Isto pode ser feito manualmente ou alterando-se a configuração do programa que realiza o ajuste das curvas. Por outro lado, esta opção requer alguma conhecimento sobre o comportamento das curvas de cada modelo hiperelástico.
2. Ajustar as constantes hiperelásticas com outro ensaio e repetir a verificação.

É fundamental, ainda, entender a relação entre o campo de deformação e a forma como ele é representado por um modelo hiperelástico em particular. Essa relação ajuda a decidir qual o ensaio experimental a ser realizado. Os ensaios mais simples como o de tração não excitam o segundo invariante de deformação, que normalmente se manifesta em problemas com modos de deformação mais complexos.

A Figura 5. 2 foi gerada incrementando-se as deformações na direção da carga ( $\lambda$ ) para cada uma as soluções apresentadas na seção 2.4.4, e calculando-se os valores correspondentes dos invariantes  $I_1$  e  $I_2$  .

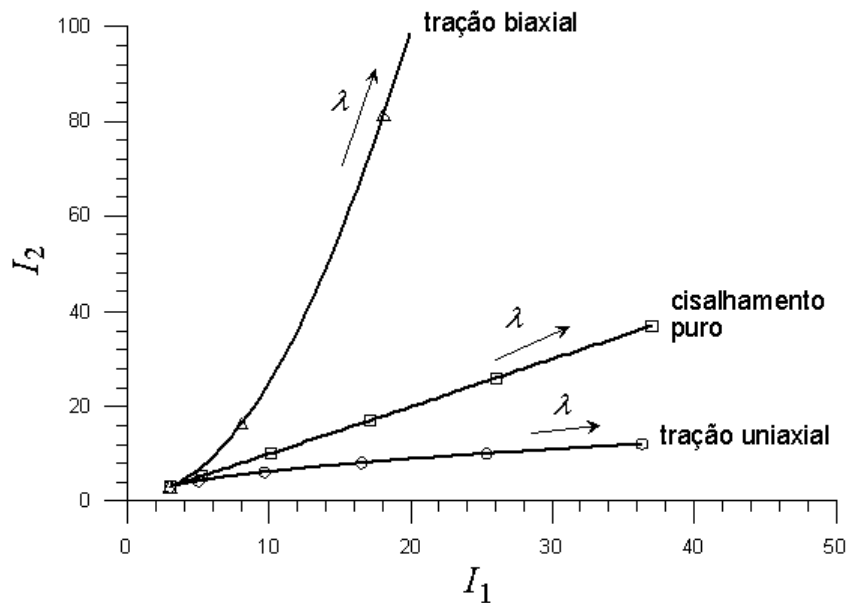


Figura 5. 2 - Excitação dos invariantes de deformação para cada modo de deformação.

Como pode-se visualizar nos gráficos da Figura 5. 2, os ensaios de tração biaxial e de cisalhamento normalmente ajustam constantes muito diferentes das obtidas através do ensaio de tração simples, porque este último não excita suficientemente o invariante  $I_2$  . Assim, o ensaio mais simples raramente fornece uma relação constitutiva que valha para problemas mais gerais (a menos que o analista saiba que a aplicação exige principalmente tensões uniaxiais). Este é um erro comumente cometido que, como consequência, gera níveis de tensões errôneos para o projetista. Caso não se possa inferir com confiança sobre quais são os invariantes de deformação característicos da aplicação, recomenda-se fortemente que se utilize constantes ajustadas para o ensaio de tração biaxial (ou, na impossibilidade deste, de cisalhamento). Como regra geral, os modelos ajustados para o ensaio biaxial reproduzem razoavelmente bem o comportamento dos outros ensaios, mas a recíproca não é – em boa parte dos casos – verdadeira.



Caso a alteração das constantes ou o ajuste para outros ensaios ainda não forneça previsões razoáveis, possivelmente o modelo hiperelástico escolhido não tem capacidade de descrever o comportamento da amostra de elastômero em questão. Nesta situação, não resta outra alternativa a não ser trocar de modelo hiperelástico e repetir o procedimento de ajuste. Não existem critérios exatos para decidir qual modelo a ser empregado, mas é possível se familiarizar com o tipo de resposta normalmente gerada por cada modelo, o que ajuda a reduzir o número de opções.

Por brevidade, os modelos serão doravante referenciados neste texto através das siglas apresentadas juntamente com os modelos no Capítulo 3 (ver Tabela 5.1). Os modelos hiperelásticos foram agrupados de forma que a apresentação dos resultados siga uma ordem genealógica e cronológica facilitando assim a comparação e avaliação dos modelos. Pretende-se com isto, também, acompanhar a evolução e as linhas de tendências de cada época, fato muito marcante observado no desenvolvimento de novos modelos hiperelásticos. O Apêndice B apresenta um fluxograma com a distribuição e organização dos grupos hiperelásticos aqui adotados, juntamente com todos os ajustes e previsões gerados neste capítulo. Os modelos foram agrupados em 10 famílias, sendo que os representantes de cada uma foram escolhidos por similaridades na sua formulação analítica, parentesco com demais modelos do grupo ou por proximidade cronológica.

Esta classificação – uma das contribuições do presente trabalho – é sugerida não apenas para reduzir a quantidade de resultados apresentados, mas principalmente por enquadrar os vários modelos em grupos com classes de aplicação potencialmente (mas não necessariamente) similares. Isto é, as vantagens e desvantagens, bem como padrões de ajuste e previsões compartilham alguma peculiaridade entre os membros de cada grupo, muito embora esta regra seja violada em vários casos (por exemplo, quando a associação é puramente cronológica).

O presente texto apresenta os gráficos apenas para os modelos mais representativos de cada família. Em função da gama de modelos avaliados e a fim de padronizar e tornar mais objetiva a interpretação dos resultados (ajustes e previsões), os mesmos serão apresentados na forma de tabelas seguindo a seguinte convenção de classificação:

- Conceito *A*: Excelente representatividade da curva  $t \times e$  capturando com fidelidade o efeito de enrijecimento do material. Apresenta erros pequenos no valor das tensões em toda a faixa de deformações fornecendo excelentes previsões para todos os ensaios, além dos da calibração;

- Conceito *B*: Embora não capture com fidelidade o efeito de enrijecimento do material, prepondera a boa representatividade da curva  $t \times e$  para todos os ensaios  $(T, S, B)$ , aliado a erros moderados no valor das tensões. Pode não fornecer boas previsões em alguns casos ou não se ajustar bem a toda à faixa de deformações;
- Conceito *C*: Boa representatividade da curva  $t \times e$  ajustada capturando com fidelidade o efeito de enrijecimento do material, fornecendo, entretanto, previsões ruins para os ensaios diferentes do da calibração;
- Conceito *D*: Má representatividade da curva  $t \times e$  se ajustando a faixas limitadas de deformação. Gera previsões estáveis para os três ensaios  $(T, S, B)$  com erros acentuados, podendo apresentar previsões rígidas. Este conceito corresponde a uma classe de modelos inferior aos modelos que possuem conceito *B* ou *C*. Assume-se para tanto, que seja melhor (do ponto de vista de simulação computacional) modelos que apresentem excelente comportamento para um dos ensaios, do que modelos com previsões estáveis para os três ensaios, porém sem conseguir representar bem a curva  $t \times e$ ;
- Conceito *E*: Ajustes e previsões errôneas. Apresenta instabilidades nas curvas;

Os ensaios experimentais serão referenciados através de siglas, sendo utilizado: *T* ou *C* para o ensaio de tração uniaxial, *P* ou *S* para o ensaio de cisalhamento e *B* para o ensaio de tração biaxial. Os gráficos das previsões seguirão a seguinte convenção:

- Azul (*S*), vermelho (*B*), preto (*T*) contínuas, representam as previsões teóricas;
- Azul (*S*), vermelho (*B*), preto (*T*) tracejadas, representam os dados experimentais;

### 5.1. Caso de Estudo: Borracha Natural – Grandes Deformações

A borracha natural é um dos elastômeros mais empregados em engenharia, e pode ser manufaturada em inúmeras combinações de composição química e aditivos. Para fins de validação dos modelos e de modo a confrontar os resultados obtidos com os apresentados na literatura será utilizado aqui o conjunto de dados de Treloar (Jones *et al.*, 1975). As faixas de deformação para cada ensaio são respectivamente:  $0 \leq e \leq 700\%$  para *T*,  $0 \leq e \leq 400\%$  para *P* e  $0 \leq e \leq 350\%$  para *B*.

### 5.1.1. Ajuste para Ensaio de Tração

Primeiramente, analisou-se como os diversos modelos hiperelásticos se ajustam ao ensaio  $T$ . As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 700\%$ , verificando-se as previsões para  $P$  e  $B$  na mesma faixa de deformações. As Figuras 5.3 a 5.5 ilustram os resultados para os modelos mais representativos de cada família entre os grupos 01 a 10.

Conforme Figura B.1, os modelos dos grupos 01 e 02 forneceram previsões ruins para os ensaios diferentes do da calibração, MRI2 e MRI3 não conseguiram se ajustar bem aos dados experimentais. Os grupos 03 e 04 (Figura B.2) com exceção dos modelos HSAI, KI, HYI, tiveram ajustes e previsões errôneas. O modelo power-law KI não conseguiu representar com precisão o comportamento da curva  $t \times e$  para os três ensaios  $(T, P, B)$ , manifestando um comportamento suave para a tensão. Sem dúvida o modelo AI teve problemas de convergência.

Contraopondo-se a resultados apresentados na literatura (Ogden, 1972; Bechir *et al.*, 2005), os modelos do grupo 05 (Figura B.3), dentre os quais se destacam os modelos OI2 (Figura 5.4a) e OI3, não tiveram o desempenho esperado, fornecendo boas previsões somente em alguns casos, ou se ajustando bem a faixas específicas de deformações. Claramente, o grupo 06 (Figura B.3) não apresentou bons resultados. Os modelos do grupo 07 (Figura B.4) forneceram excelentes previsões para todos os ensaios com erros pequenos para as tensões, com exceção do modelo YI2. O modelo YKI foi o único modelo do grupo 08 (Figura B.4) a apresentar resultados satisfatórios. Dentre os modelos da família *limiting-chain-extensibility* (Figura B.5) destacam-se os resultados dos modelos ABI5 e GI do grupo 09, com ênfase para YFI e PSI do grupo 10.

É notória a similaridade dos resultados entre os modelos MRI9 e HNI1 (Figura 5.3a e 5.3b), salienta-se os mesmos compartilham uma formulação analítica semelhante. O modelo KI (Figura 5.3d), ilustrou bom comportamento para grandes deformações, embora, erros consideráveis sejam encontrados na faixa entre  $0 \leq e \leq 200\%$ . Os modelos YMI e YKI (Figuras 5.4c e 5.4d), manifestaram o mesmo comportamento que o modelo YI3 (Figura 5.4b). Claramente o modelo GI (Figura 5.5b) apresentou instabilidades na previsão do ensaio  $B$ , fenômeno não encontrado nos resultados de seu precursor, o modelo EVI (Figura 5.5a). Dentre dos modelos da família, gerada a partir do modelo GI, destacam-se os excelentes resultados do modelo YFI (Figura 5.5c). Apesar de também apresentar melhores resultados, o modelo PSI (Figura 5.5d) manifestou a mesma instabilidade que o seu modelo de base (GI, Figura 5.5a).

A Tabela 5. 2 apresenta a avaliação para todos os modelos avaliados conforme o critério anteriormente especificado.

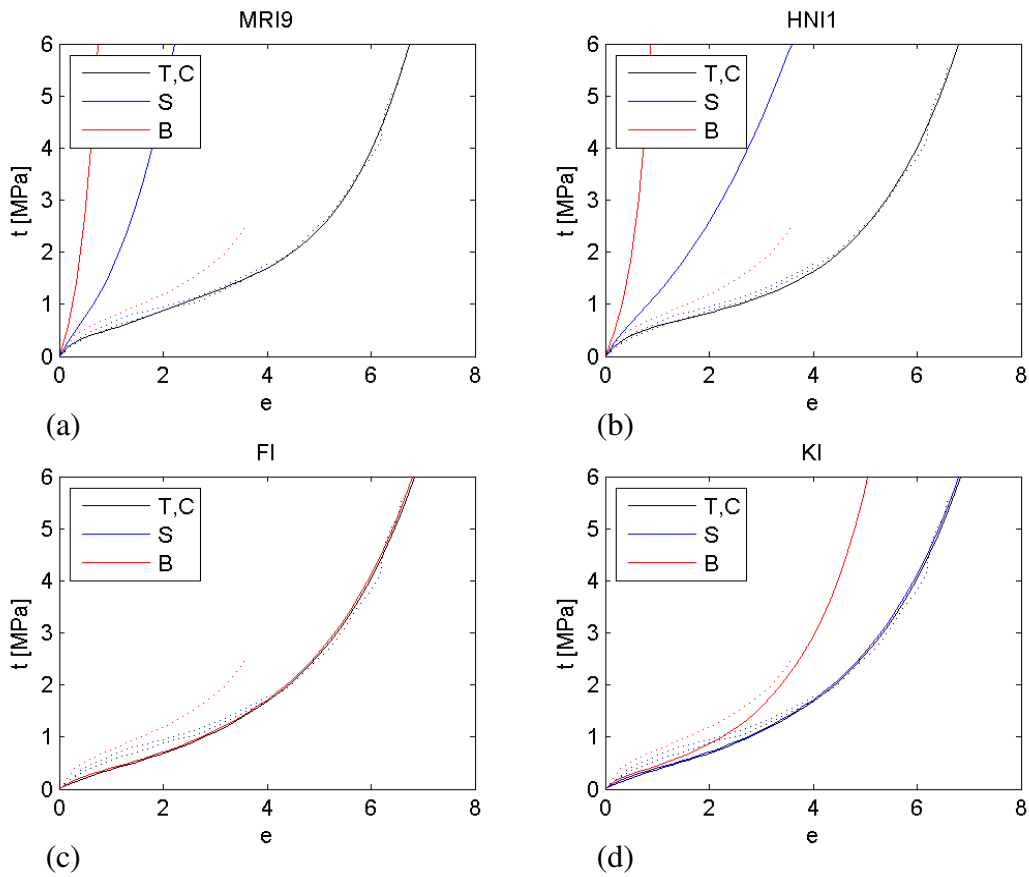


Figura 5.3 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $T$  na faixa  $0 \leq e \leq 700\%$ .

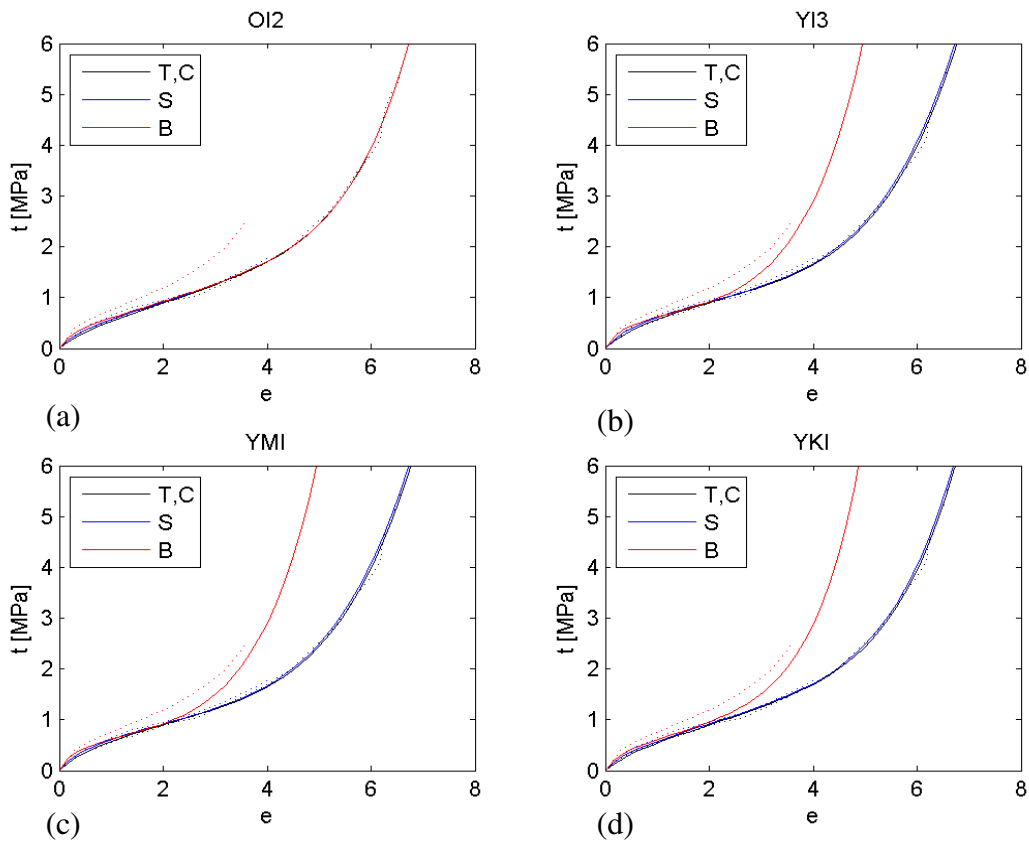


Figura 5.4 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $T$  na faixa  $0 \leq e \leq 700\%$ .

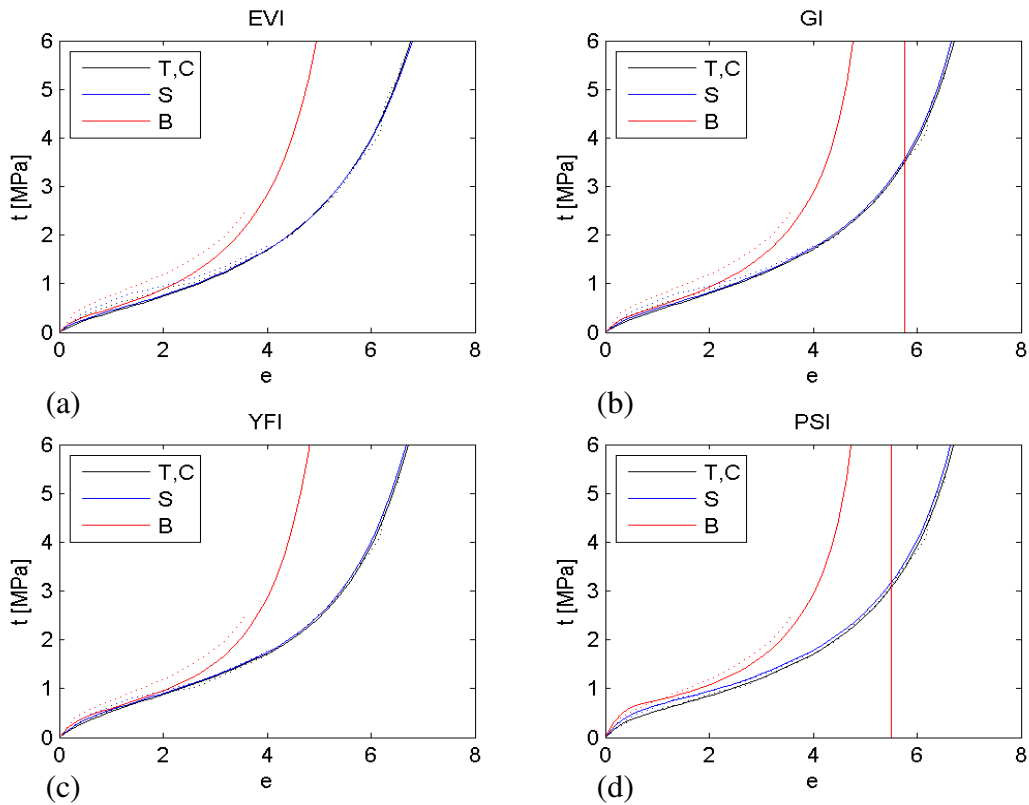


Figura 5. 5 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $T$  na faixa  $0 \leq e \leq 700\%$ .

### 5.1.2. Ajuste para Cisalhamento Puro

Uma análise com os diversos modelos hiperelásticos ajustados para o ensaio  $P$  permite verificar a asserção de que a predição do comportamento para os demais carregamentos é melhor que quando do ajuste para o ensaio de tração (Marczak, *et al.*, 2006).

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 400\%$ , verificando-se as predições correspondentes na faixa de  $0 \leq e \leq 700\%$ . As Figuras 5.6 a 5.8 ilustram os resultados para os modelos mais representativos de cada família entre os grupos 01 a 10.

Similar ao ensaio  $T$ , os grupos 01, 02, 03, 04, 05 e 06, salvo os modelos FI, KI, HYI, OI2, forneceram predições ruins para ensaios diferentes do da calibração (Figuras B.6–B.8). Dentre os grupos 07, 08, 09 e 10 (Figuras B.9 e B.10), os únicos modelos que conseguiram representar com fidelidade o comportamento do material foram YI3, YFI e PSI, os demais não apresentaram bons resultados. Cabe salientar que o ajuste para  $P$  forneceu resultados piores que o ajuste para  $T$  (seção 5.1.1). Claramente, verifica-se que os modelos YKI, YI5, YMI e PSI tiveram uma perda na qualidade de suas predições, isto se ratifica comparando as Figuras B.4 e B.5 com as Figuras B.9 e B.10. Enfatiza-se este fato comparando-se diretamente as Figuras 5.4 e 5.7 deste capítulo.

Novamente, os modelos MRI9 e HNI1 ilustraram o mesmo comportamento (Figuras 5.6a e 5.6b). Destaque-se que HNI1 apresentou instabilidade na predição do ensaio *B*. Os modelos FI e KI também tiveram predições similares (Figuras 5.6c e 5.6d), entretanto, não conseguiram capturar o fenômeno de enrijecimento, observado em grandes deformações ( $e \geq 400\%$ ). Verifica-se comportamento similar para os modelos YKI (Figura 5.7d), EVI (Figura 5.8a) e GI (Figura 5.8b). Os modelos OI2 e YI3 não conseguiram prever o comportamento do material para *T* e *B* em grades deformações, apresentando erros consideráveis no valor das tensões. O modelo YMI (Figura 5.7c) apresentou predições com instabilidades (derivada  $dt/de$  nula), comportamento não condizente com os dados experimentais. As predições de EVI e GI (Figuras 5.8a e 5.8b) foram similares para os três ensaios (*T, P, B*), apresentando erros acentuados para deformações superiores a 400%. Os modelos YFI e PSI (Figuras 5.8c e 5.8d) apresentaram bons resultados, embora, de qualidade inferior aos obtidos com o ajuste para *T*. PSI manifestou a mesma instabilidade para o ensaio *B*, verificada na seção 5.1.1 (ver Figuras 5.5d e 5.8d).

A Tabela 5.2 apresenta de forma sucinta e objetiva a avaliação para todos os modelos hiperelásticos avaliados.

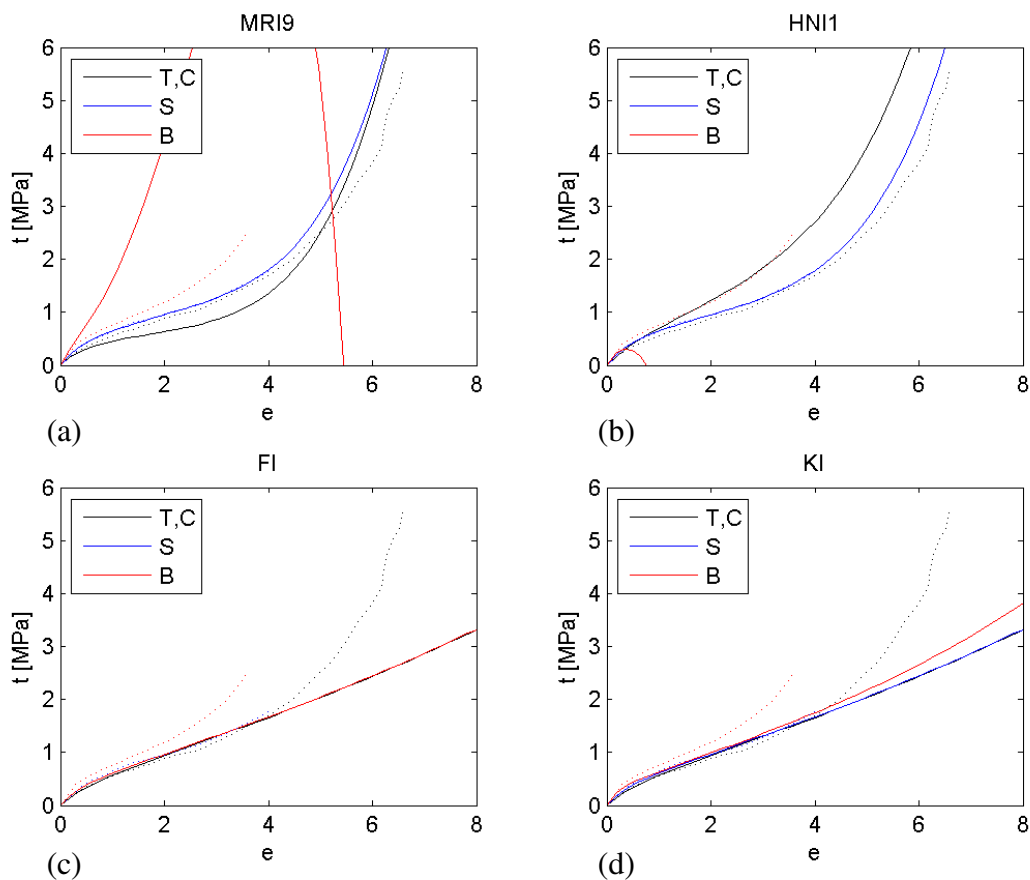


Figura 5. 6 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para *P* na faixa  $0 \leq e \leq 400\%$  .

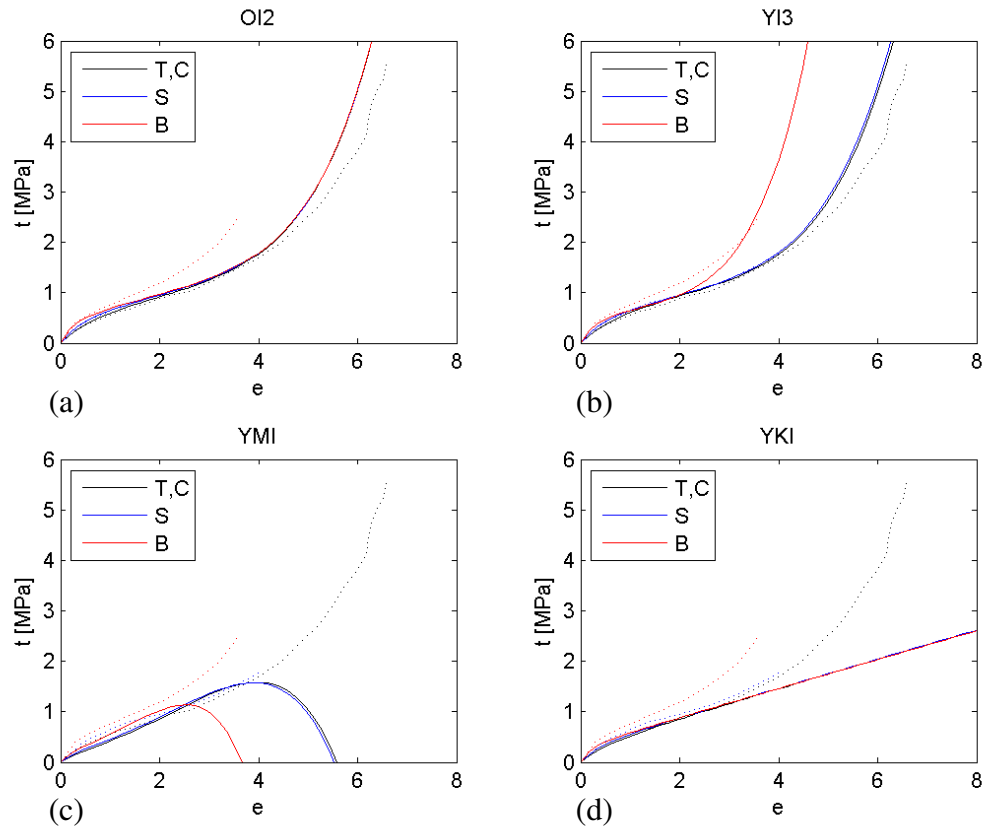


Figura 5. 7 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $P$  na faixa  $0 \leq e \leq 400\%$ .

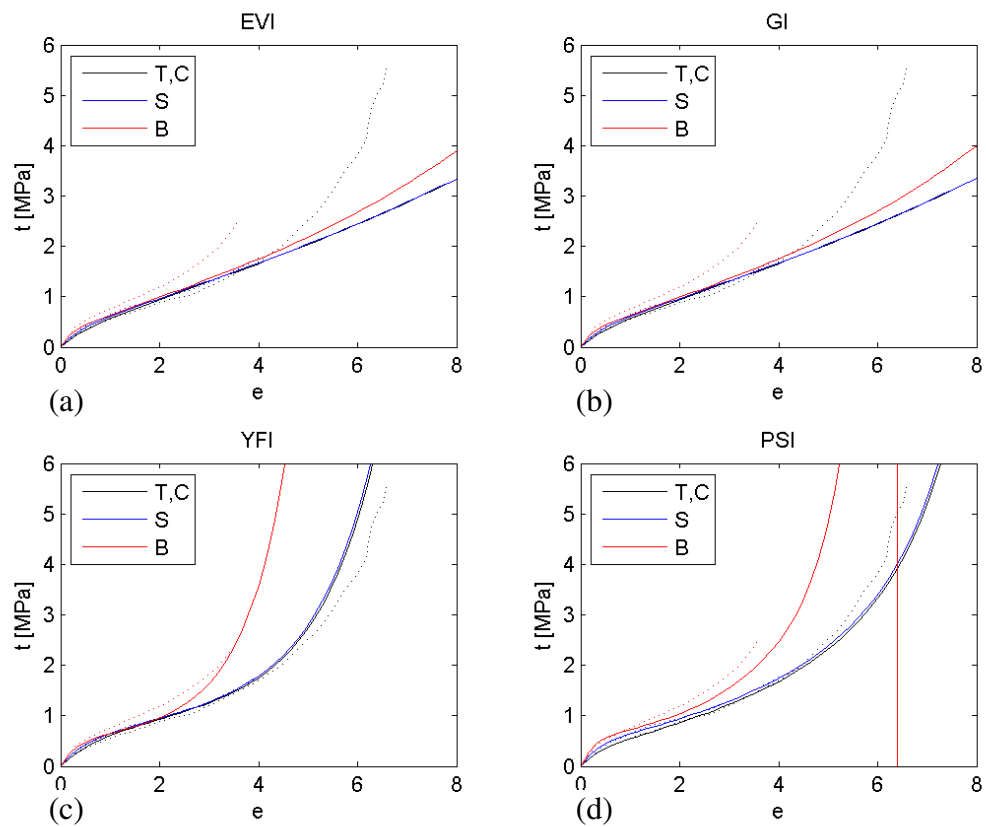


Figura 5. 8 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $P$  na faixa  $0 \leq e \leq 400\%$ .

### 5.1.3. Ajuste para Tração Biaxial

Embora o ensaio  $B$  seja o mais difícil de realizar, ele tem a característica de excitar padrões de deformação mais complexos (como ilustrado na Figura 5. 2), e geralmente sua predição do comportamento para os demais carregamentos é melhor que quando do ajuste para os ensaios de  $T$  e de  $P$ . É usual que as deformações máximas obtidas com este ensaio sejam menores que nos ensaios de  $T$  e  $P$ , o que contribui para o bom desempenho dos modelos de baixa ordem. As constantes aqui foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 350\%$  e verificadas as predições correspondentes na faixa  $0 \leq e \leq 700\%$ . As Figuras 5.9 a 5.11 ilustram os resultados para os modelos mais representativos de cada família entre os grupos 01 a 10.

Contraopondo-se a literatura (Marczak, *et al.*, 2006), nenhum dos ajustes/predições apresentaram resultados com qualidade superior aos obtidos para o ajuste a  $T$ , e modelos como YKI, YI3, YFI e PSI perderam qualidade e precisão em suas predições. Isto se ratifica, confrontando as Figuras 5.4 e 5.5 com as Figuras 5.10 e 5.11. Os grupos 01, 02, 03, 04, 05 e 06 (Figuras B.11 – B.13), não capturaram com fidelidade o efeito de enrijecimento do material, e/ou forneceram predições ruins ou errôneas para os ensaios diferentes do da calibração. Os grupos 07, 08, 09 e 10 (Figuras B.14 – B.15) tiveram bom comportamento, com exceção dos modelos DTI, GYI, THI, G3I e HGSI.

Similar aos ajustes para  $T$  e  $P$  (seções 5.1.1 e 5.1.2), os modelos polinomiais MRI9 e HNI1 (Figuras 5.9a e 5.9b) forneceram predições errôneas. Como regra geral, estes modelos apresentam um comportamento excessivamente rígido para os ensaios que não os da calibração (Marczak, *et al.*, 2006). As predições dos modelos FI, KI e OI2 (Figuras 5.9c e 5.9d e Figura 5.10a) apresentaram erros consideráveis em toda a faixa de deformações. Os modelos OI2, YI3, YMI, YKI (Figura 5.10) e os da família *limiting-chain-extensibility* (Figura 5.11), tiveram o mesmo comportamento verificado quando ajustados para  $T$  (ver seção 5.1.1), entretanto, prepondera erros maiores para a tensão em toda a faixa de alongamentos. Novamente, destaca-se a instabilidade na curva  $t \times e$  para o ensaio  $B$ , verificado para as predições dos modelos GI e PSI (Figuras 5.11b e 5.11d). Claramente, e de acordo com a literatura (Humphrey, 2002, 2003), os modelos YFI (Figura 5.11c) e PSI (Figura 5.11d) dentre os analisados, são os mais recomendados para analisar o fenômeno de enrijecimento observado em grandes deformações. Ratifica-se com isto a incapacidade dos modelos clássicos em modelar este fenômeno.

A Tabela 5.2 apresenta de forma sucinta e objetiva a avaliação para todos os modelos hiperelásticos avaliados.



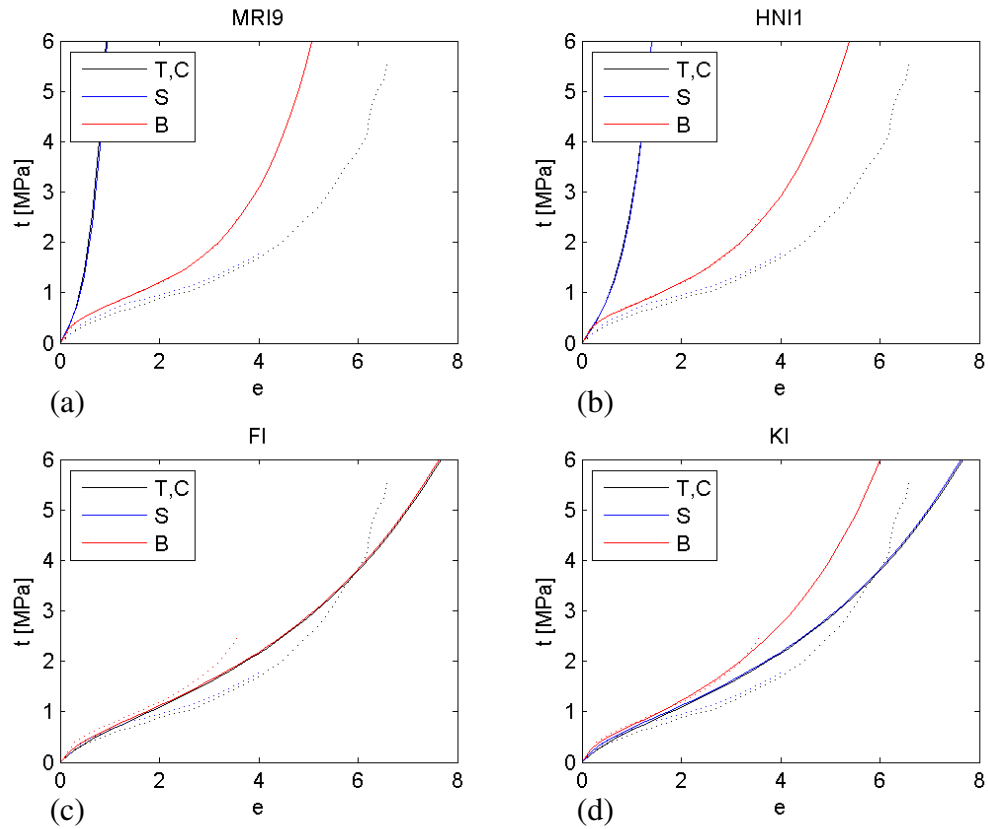


Figura 5. 9 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $B$  na faixa  $0 \leq e \leq 350\%$ .

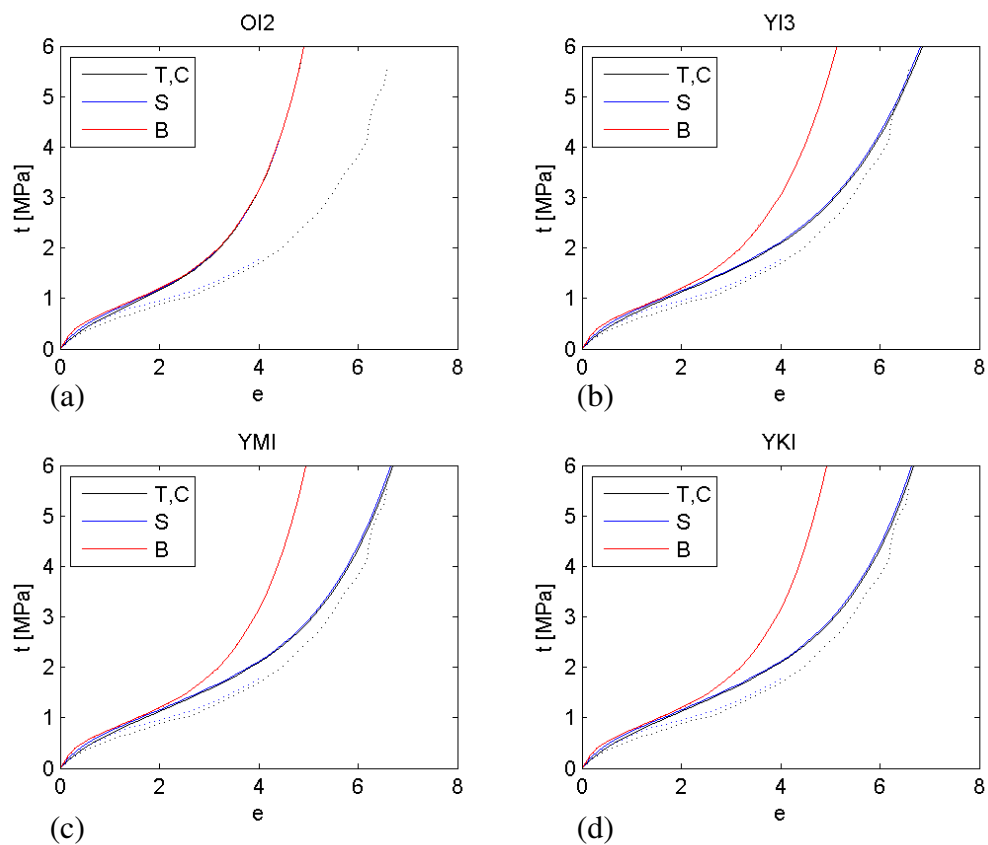


Figura 5. 10 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $B$  na faixa  $0 \leq e \leq 350\%$ .

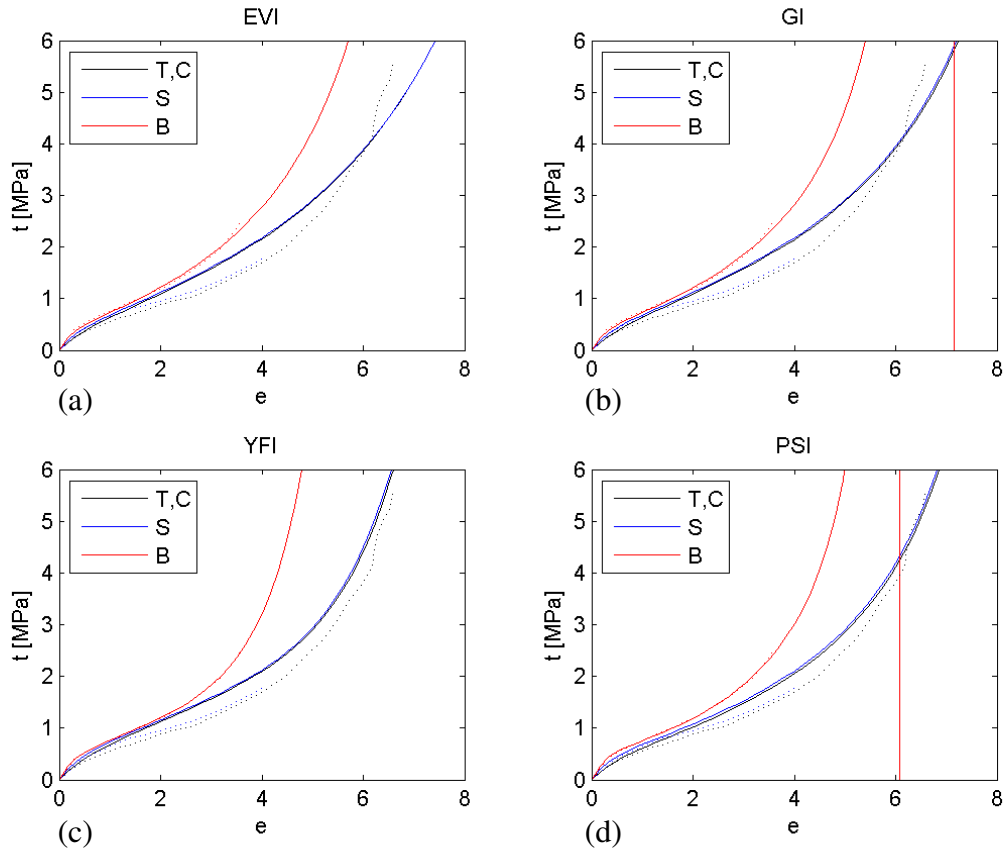


Figura 5. 11 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $B$  na faixa  $0 \leq e \leq 350\%$ .

Conforme resultados apresentados na Tabela 5. 2 e Figuras B.1 a B.30 do Apêndice B, os modelos polinomiais dos grupos 01, 02 forneceram previsões errôneas, na maioria dos casos demonstrando um comportamento excessivamente rígido para  $P$  e  $B$ , em alguns casos com comportamento instável. Os modelos KI e HYI apresentaram um comportamento muito suave para a curva  $t \times e$  frente aos três ensaios  $T$ ,  $P$  e  $B$  avaliados. Os demais modelos dos grupos 03 e 04 tiveram ajustes e ou previsões errôneas.

As previsões do grupo 05 e 06 foram insatisfatórias frente ao seu potencial mencionado pela literatura (Ogden, 1972; Bechir *et al.*, 2005). O grupo 07 apresentou excelentes resultados quando ajustado para  $T$ , com exceção do modelo YI2. Os modelos YKI e AI do grupo 08 tiveram resultados similares, apresentam, entretanto, problemas de convergência.

O grupo 09, base da família “*limiting chain extensibility*” teve um bom desempenho, com exceção do modelo THI. O grupo 10, promissor na modelagem de materiais com enrijecimento em deformações elevadas (com exceção dos modelos G3I e CHGSI), conseguiu capturar com fidelidade o comportamento do material fornecendo excelentes previsões, quando ajustados para  $T$  ou  $P$ .

<b>Modelo</b>	<b><i>T</i></b>	<b><i>P</i></b>	<b><i>B</i></b>	<b>Modelo</b>	<b><i>T</i></b>	<b><i>P</i></b>	<b><i>B</i></b>
<b>MRI2</b>	<i>E</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<b>PLI</b>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>E</i>
<b>MRI3</b>	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<b>MI</b>	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<b>MRI5</b>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<b>KLI</b>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
<b>MRI9</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>VDWI</b>	<i>C</i>	<i>E</i>	<i>D</i>
<b>HNI1</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>YI2</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
<b>HNI2</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>YI3</b>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
<b>HNI3</b>	<i>C</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	<b>YI5</b>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
<b>PI3</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>YMI</b>	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>A</i>
<b>NHI</b>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<b>YKI</b>	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
<b>GTI</b>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<b>AI</b>	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
<b>HSAI</b>	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	<b>DTI</b>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>E</i>
<b>HSI</b>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	<b>GYI</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>D</i>
<b>FI</b>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<b>THI</b>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>E</i>
<b>VWI</b>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<b>EVI</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
<b>KI</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>	<b>ABI5</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
<b>HYI</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>	<b>GI</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
<b>OI2</b>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<b>YFI</b>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<b>OI3</b>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>G3I</b>	<i>C</i>	<i>E</i>	<i>C</i>
<b>HBI2</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<b>PSI</b>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<b>HBI3</b>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<b>HGSI</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>

Tabela 5. 2 – Borracha natural (Treloar). Ajustes:  $T$  ( $0 \leq e \leq 700\%$ ),  $P$  ( $0 \leq e \leq 400\%$ ) e  $B$  ( $0 \leq e \leq 350\%$ ).

## 5.2.Caso de Estudo: Borracha Natural – Pequenas Deformações

A fim de avaliar o comportamento dos modelos hiperelásticos em faixas de trabalho com deformações distintas à estudada na seção 5.1, será analisada agora uma outra amostra de borracha natural (NR55) (Marczak, *et al.*, 2006). As faixas de deformação para cada ensaio são respectivamente:  $0 \leq e \leq 100\%$  para  $T$ ,  $0 \leq e \leq 130\%$  para  $P$  e  $0 \leq e \leq 70\%$  para  $B$ .

### 5.2.1 Ajuste para Tração

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 100\%$ , verificando-se as predições correspondentes na mesma faixa de deformações. As Figuras 5.12–5.14, ilustram os resultados para os modelos mais representativos de cada família entre os grupos 01 a 10. A Tabela 5.3 apresenta de forma sucinta e objetiva a avaliação para todos os modelos hiperelásticos aqui avaliados.

Os modelos polinomiais, grupos 01 e 02 (Figura B.16), forneceram ajustes e ou predições ruins para os ensaios diferentes do da calibração. De forma similar, os grupos 03 e 04 (Figura B.17) não capturaram com fidelidade o comportamento do material. Notoriamente, MI foi o único modelo dos grupos 05 e 06 (Figura B.18) a conseguir representar com precisão a curva  $t \times e$ , muito embora verificam-se erros expressivos na predição do ensaio  $B$  para  $e < 50\%$ . Os modelos do grupo 07 e 08 (Figuras B.19) forneceram excelentes predições para todos os ensaios, com exceção dos modelos YI2 e YKI que não conseguiram capturar o fenômeno de enrijecimento (embora o erro correspondente no valor das tensões possa ser considerado pequeno). DDTI foi o único modelo do grupo 08 a não apresentar bons resultados. O modelo YFI foi o único entre os modelos dos grupos 09 e 10, a fornecer bons resultados. Claramente, o modelo PSI não conseguiu capturar o comportamento do material, fornecendo ajuste e predições ruins, com instabilidades (derivada  $dt/de$  nula) dentro da faixa de trabalho. YKI foi o único modelo a apresentar problemas de convergência.

Similar aos resultados encontrados na seção 5.1, os modelos polinomiais MRI9 e HNI1 (Figuras 5.12a e 5.12b) apresentaram predições extremamente rígidas para os ensaios que não os da calibração. É interessante notar a semelhança dos resultados entre o modelo *power-law* KI (Figura 5.12d) e os modelos de base logarítmica EVI e GI (Figura 5.14a e 5.14b). Verifica-se com isto, o potencial da família de modelos *power-law*, hoje pouco empregados e praticamente em desuso. Os modelos OI2 (Figura 5.13a) e YKI (Figura 5.13d) forneceram bons resultados para pequenas deformações, sendo incapazes de capturar corretamente o enrijecimento do material para faixas maiores de deformação. O modelo FI (Figura 5.12c) não apresentou bons resultados.

Os melhores resultados foram encontrados para os modelos YMI (Figura 5.13c) (base polinomial e exponencial) e YFI (Figura 5.14c) (base exponencial e logarítmica), este último evolução do modelo GI. Isto mostra claramente o potencial dos modelos híbridos, entretanto, é necessário avaliar criteriosamente a influência de cada termo adicionado nas expressões de base, a fim de evitar comportamentos anômalos, como o verificado no modelo PSI (Figura 5.14d).

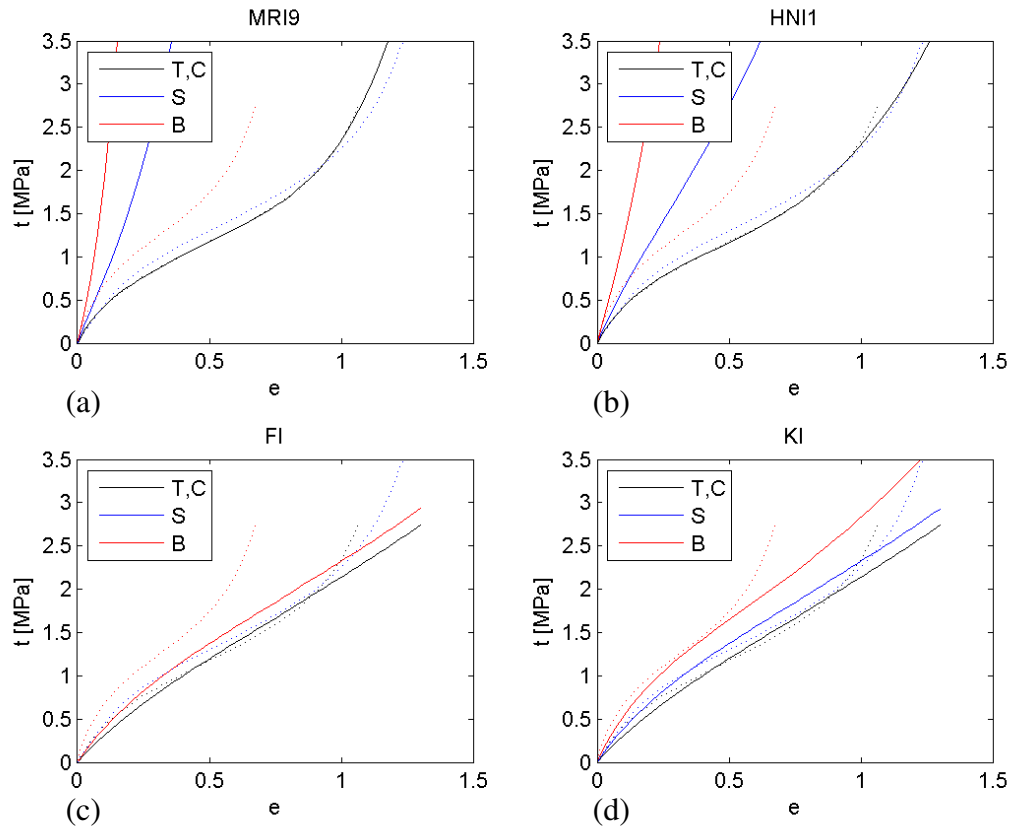


Figura 5. 12 - Borracha natural (NR55). Ajuste para  $T$  na faixa  $0 \leq e \leq 100\%$ .

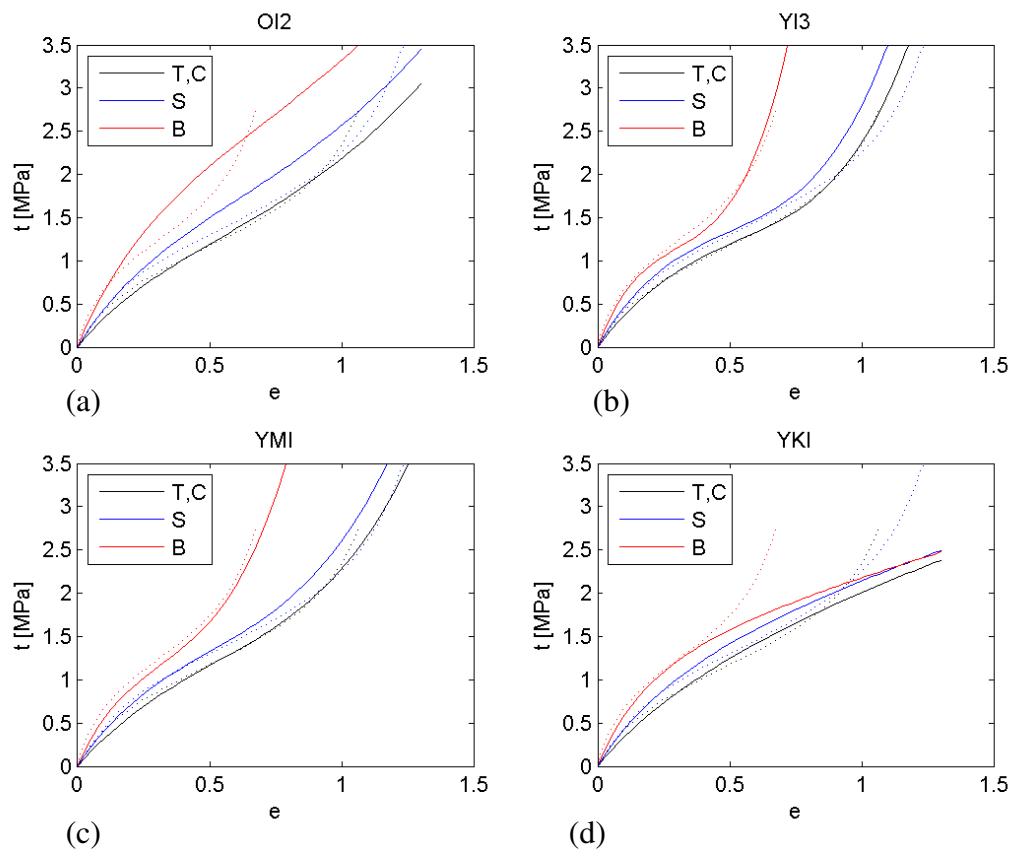


Figura 5. 13 - Borracha natural (NR55). Ajuste para  $T$  na faixa  $0 \leq e \leq 100\%$ .

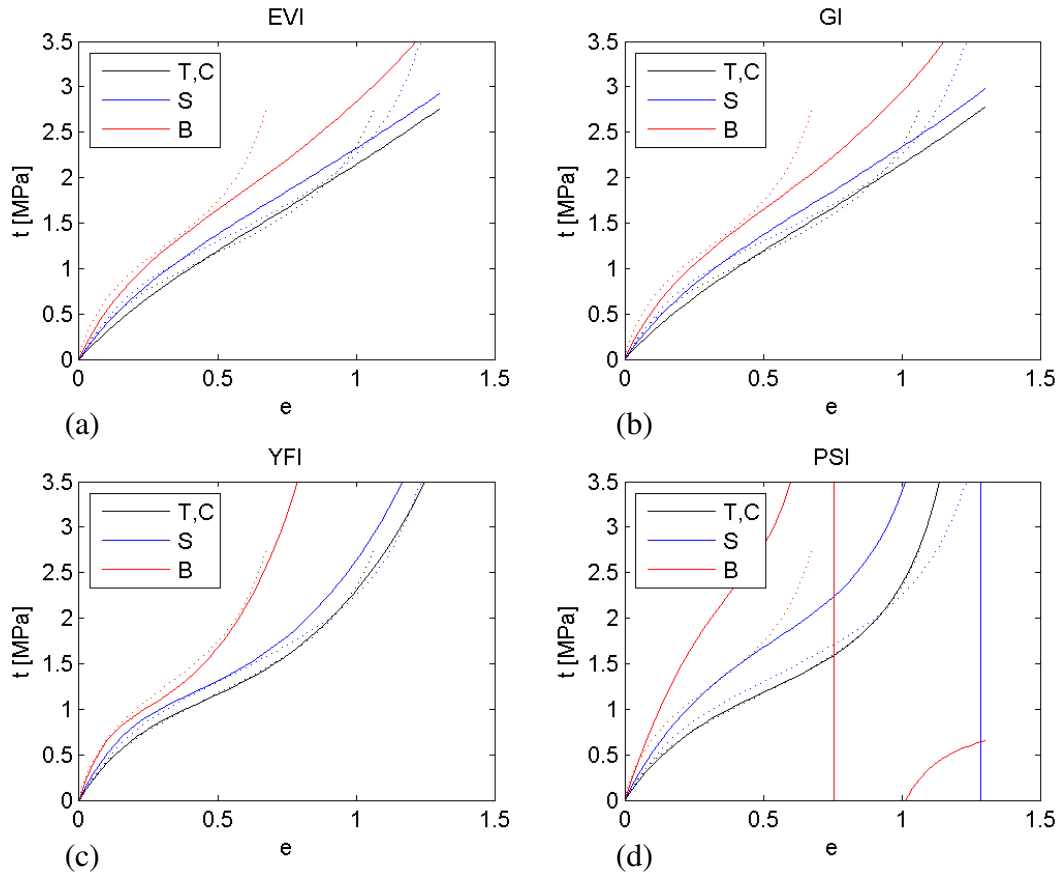


Figura 5. 14 - Borracha natural (NR55). Ajuste para  $T$  na faixa  $0 \leq e \leq 100\%$ .

## 5.2.2 Ajuste para Cisalhamento Puro

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 130\%$ , verificando-se as previsões correspondentes na mesma faixa de deformações. As Figuras 5.15 a 5.17 ilustram os resultados para os modelos mais representativos de cada família entre os grupos 01 a 10. A Tabela.3 apresenta de forma sucinta e objetiva a avaliação para todos os modelos hiperelásticos avaliados.

Os grupos 01, 02, 03 e 04 (Figuras B.21 – B.22) forneceram previsões ruins ou errôneas para os ensaios diferentes do da calibração. Os grupos 05 e 06 (Figura B.23) não capturam com fidelidade o efeito de enrijecimento do material, com exceção de OI2 (Figura 5.16a) que forneceu excelentes previsões para  $e \leq 60\%$ . Estranhamente, o modelo OI3 não foi capaz de prever corretamente o comportamento para  $T$  e  $B$ . Os grupos 07 e 08 (Figura B.24) apresentaram excelentes resultados, com exceção de YI2, YMI, AI e DDTI. Os modelos do Grupo 09 (Figura B.25) geraram estimativas aceitáveis, entretanto, o grupo 10 (Figura B.25) teve resultados abaixo do esperado.

Curiosamente, o modelo MRI9 (Figura 5.15a) não apresentou previsões extremamente rígidas para os ensaios que não os da calibração. Contudo, HNI1 (Figura 5.15b) manifestou este comportamento, já verificado para no ajuste para  $T$  (seção 5.2.1).

Similar ao ajuste para  $T$  (seção 5.2.1), o modelo *power-law* KI teve resultados semelhantes ao modelo GI, entretanto, sem apresentar instabilidades na predição do ensaio  $B$ . Este fato reforça o potencial de aplicação dos modelos desta família. Outro ponto importante é a comparação dos resultados do modelo GI (Figura 5.17b) com os de seu antecessor EVI (Figura 5.17a). Além da similaridade dos resultados, o modelo EVI possui a vantagem de não apresentar instabilidades em suas previsões. Chama-se atenção para as semelhanças em suas formulações analíticas (ver eqs.(3.19) e (3.30)). Comparando as Figuras (5.13d e 5.16d), fica clara a melhora nos resultados do modelo YKI em relação ao ajuste para  $T$ . O modelo YI3 (Figura 5.16b) também forneceu excelentes resultados. É interessante notar, que os modelos YMI e YFI (Figuras 5.16c e 5.17c) que tiveram excelente desempenho quando ajustados para  $T$  (Figuras 5.13c e 5.14c), não conseguiram capturar o efeito de enrijecimento do material, manifestando um comportamento suave para a curva  $t \times e$ . O modelo PSI (Figura 5.17d) não teve bom desempenho, embora melhor que quando ajustado para  $T$  (seção 5.2.1).

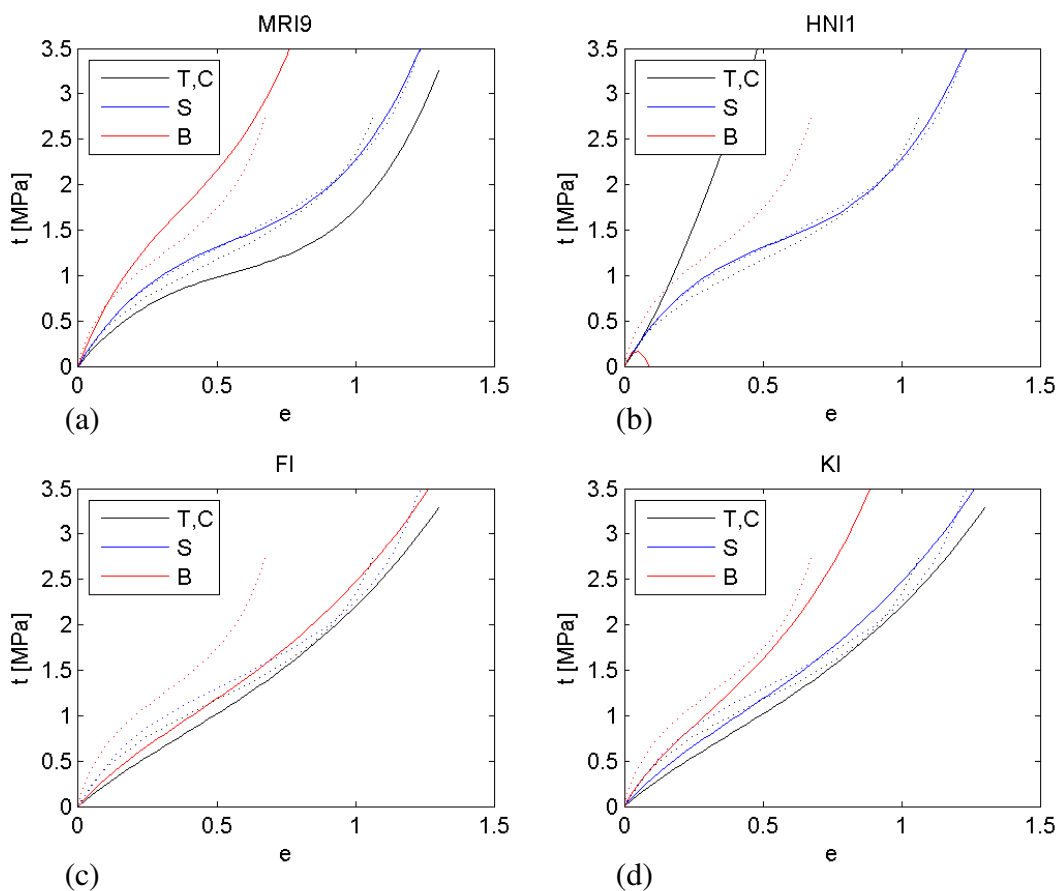


Figura 5. 15 - Borracha natural (NR55). Ajuste para  $P$  na faixa  $0 \leq e \leq 130\%$ .

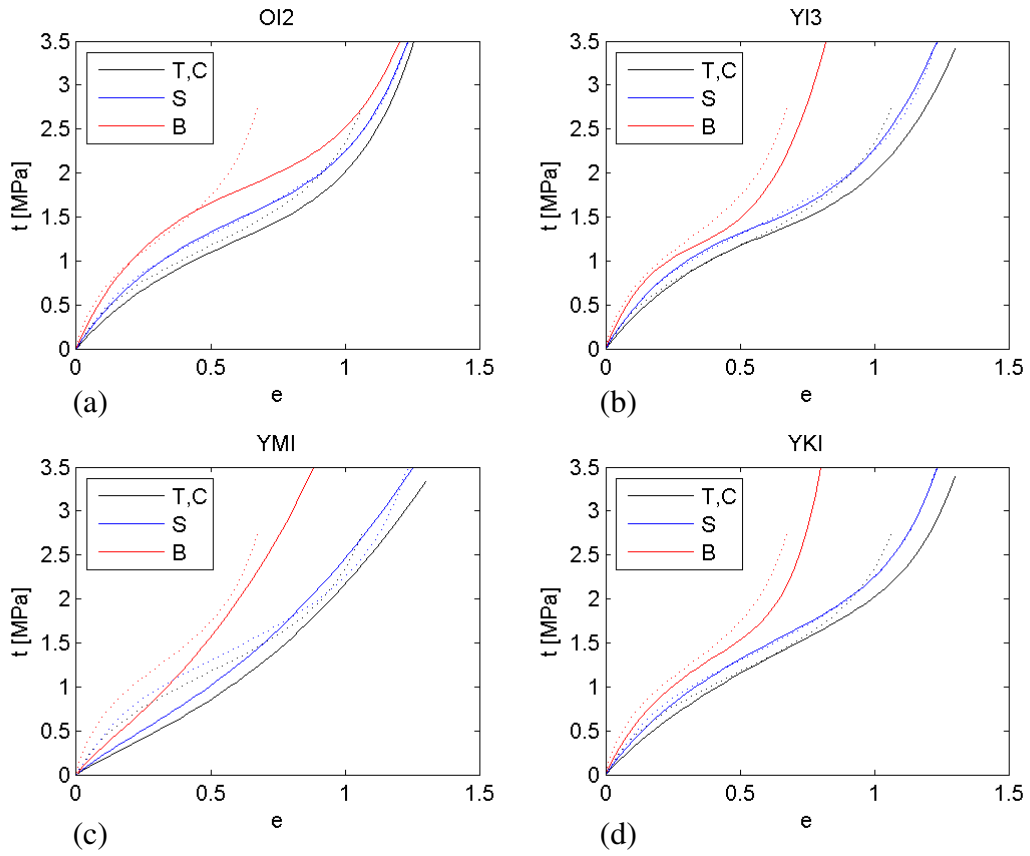


Figura 5. 16 - Borracha natural (NR55). Ajuste para  $P$  na faixa  $0 \leq e \leq 130\%$ .

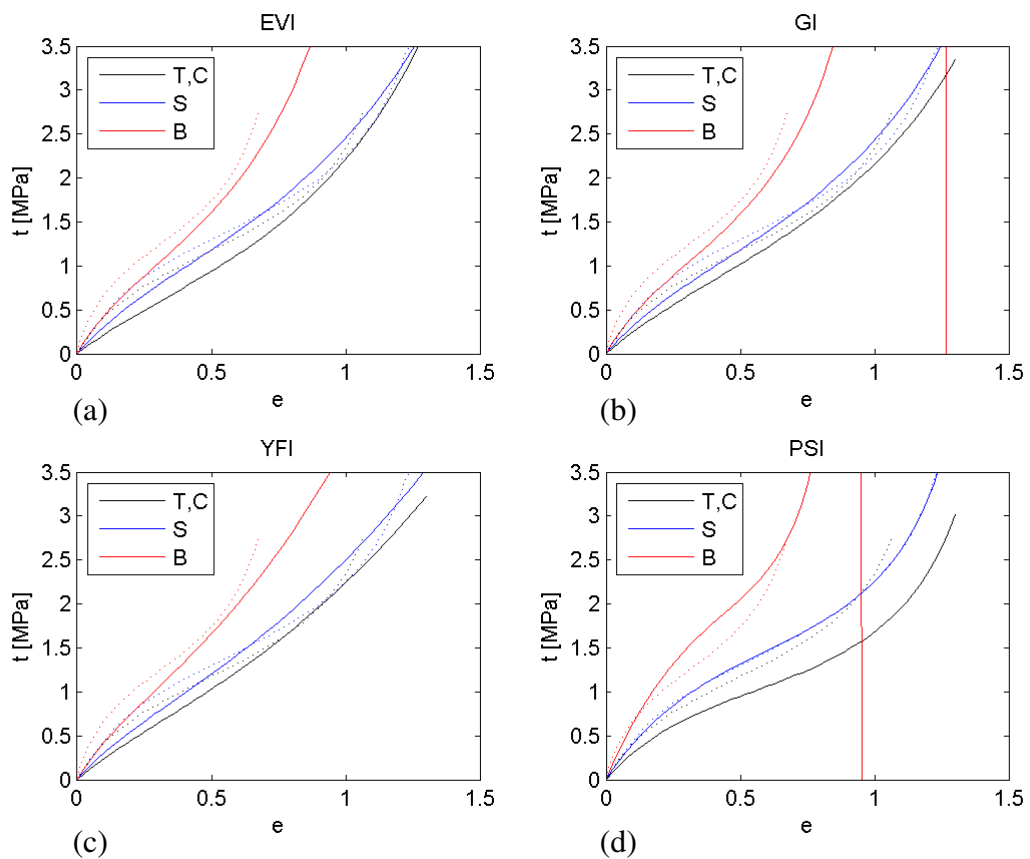


Figura 5. 17 - Borracha natural (NR55). Ajuste para  $P$  na faixa  $0 \leq e \leq 130\%$ .



### 5.2.3 Ajuste para Tração Biaxial

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 70\%$ , verificando-se as predições correspondentes entre  $0 \leq e \leq 130\%$ . As Figuras (5.18–5.20) ilustram os resultados para os modelos mais representativos de cada família entre os grupos 01 a 10.

Similar ao ajuste para  $T$  (seção 5.2.1), os grupos 01 e 02 (Figura B.26) manifestaram um comportamento extremamente rígido para as suas predições, MRI2 foi o único a ter um comportamento suave para a curva  $t \times e$ . Os grupos 03 e 04 (Figura B.27) não apresentaram bom comportamento, salvo os modelos KI e HYI, que apesar de não representarem com fidelidade o efeito de enrijecimento do material, apresentaram um erro pequeno no valor nominal das tensões.

Os grupos 05 e 06 tiveram comportamento insatisfatório frente ao seu potencial destacado na literatura (Ogden, 1975; Bechir *et al.*, 2005). Comparando as Figuras (B.18 e B.28), fica clara, a perda de qualidade tanto do ajuste como das predições do modelo MI em relação ao ajuste realizado com o ensaio de  $T$  (seção 5.2.1). Os grupos 07 e 08 (Figura B.29) apresentaram excelentes resultados (capturaram com fidelidade o fenômeno de enrijecimento para os três ensaios), com exceção dos modelos YI2, DDTI, GYI que exibiram um comportamento extremamente suave para a curva  $t \times e$ . YMI apresentou instabilidades na predição do ensaio  $B$ . O grupo 09 (Figura B.30) teve um bom desempenho para pequenas deformações, embora, não represente com precisão o fenômeno de enrijecimento. Destaca-se que YFI foi o único modelo do grupo 10 (Figura B.30) a apresentar bons resultados.

As Figuras (5.18a e 5.18b) confirmam o comportamento extremamente rígido das predições dos modelos MRI9 e HNI1. O modelo OI2 (Figura 5.19a) forneceu excelentes predições para  $e \leq 50\%$ . Similar ao ajuste para  $P$ , os modelos YI3 (Figura 5.19b) e YKI (Figura 5.19d) forneceram excelentes resultados. Novamente, o modelo YMI (Figura 5.19c) não teve bom comportamento, entretanto, curiosamente, o modelo YFI (Figura 5.20c) apresentou excelentes resultados. Aspectos como estes reforçam a necessidade de uma avaliação criteriosa da influência dos termos híbridos inseridos na expressão para a energia de deformação. Através das Figuras (5.20a e 5.20b) fica clara a semelhança entre os modelos EVI e GI, já ressaltada nas seções 5.2.1 e 5.2.2. Comparando as Figuras 5.14d, 5.17d e 5.20d, ressalta-se a incapacidade do modelo PSI em representar o comportamento material. Neste Caso, salienta-se que para cada tipo de ajuste  $T$ ,  $P$  ou  $B$ , o modelo ilustrou um comportamento bem distinto. Os resultados aqui apresentados contrapõem-se aos ilustrados na seção 5.1.1 deste trabalho. A Tabela 5.3 apresenta de forma sucinta e objetiva a avaliação para todos os modelos hiperelásticos avaliados.

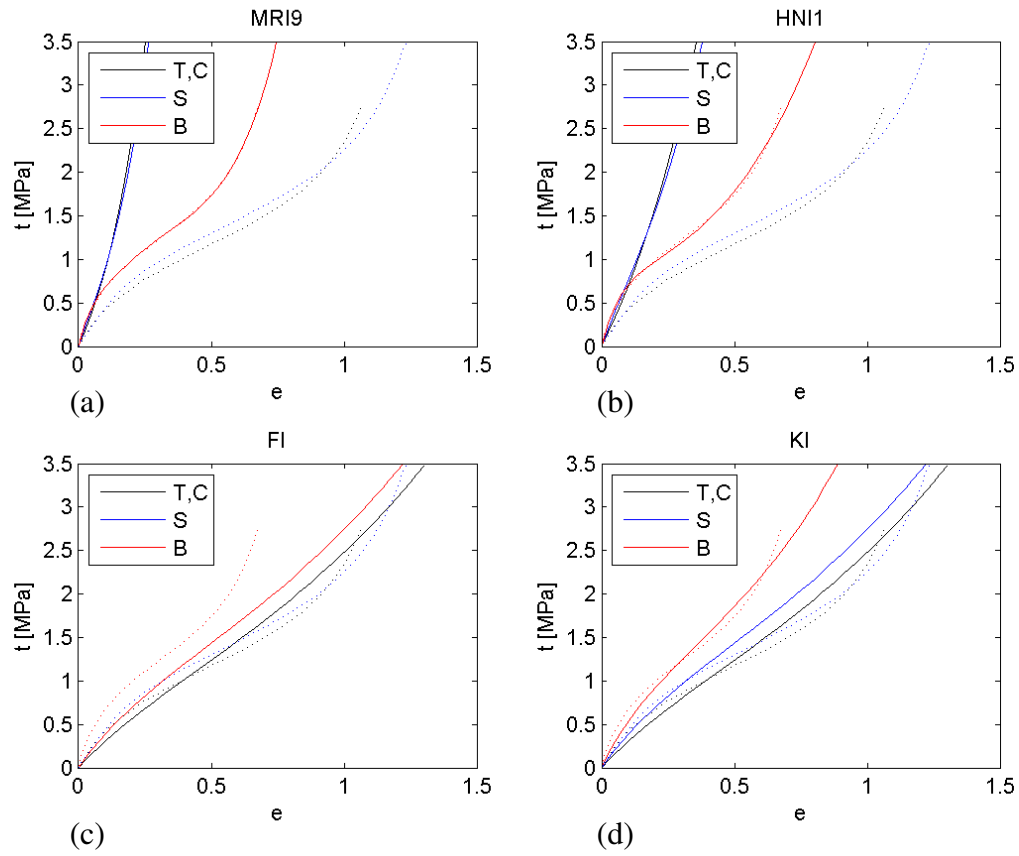


Figura 5. 18 - Borracha natural (NR55). Ajuste para  $B$  na faixa  $0 \leq e \leq 70\%$ .

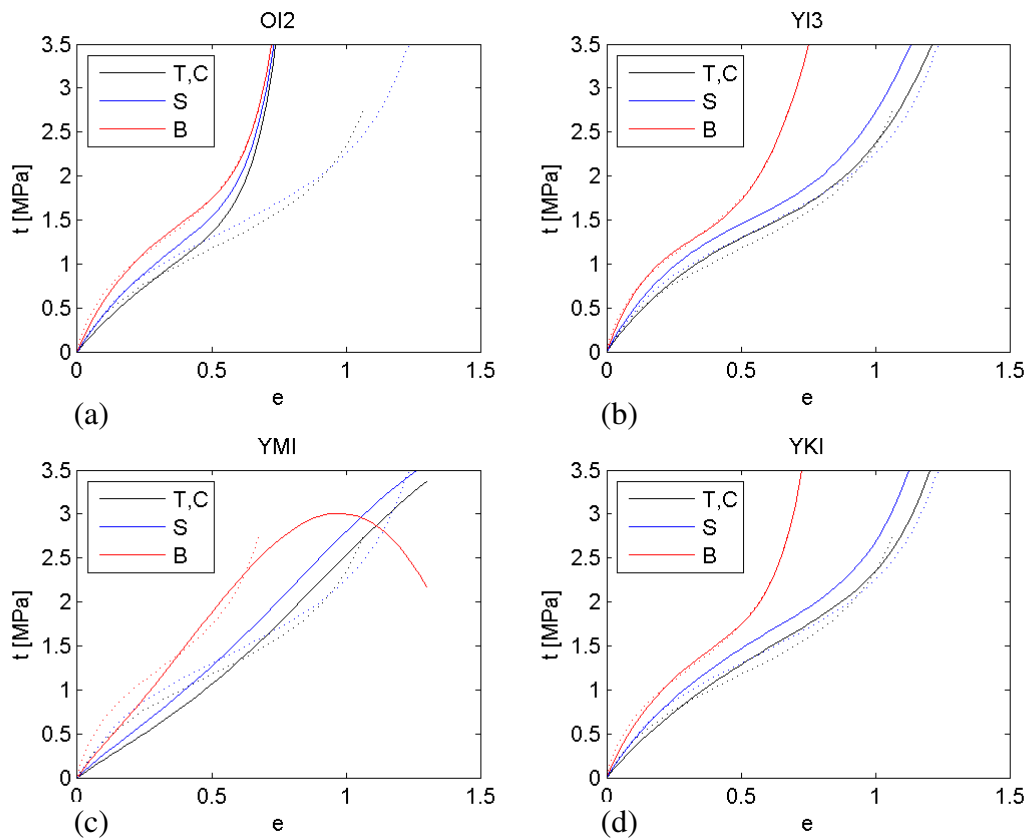


Figura 5. 19 - Borracha natural (NR55). Ajuste para  $B$  na faixa  $0 \leq e \leq 70\%$ .

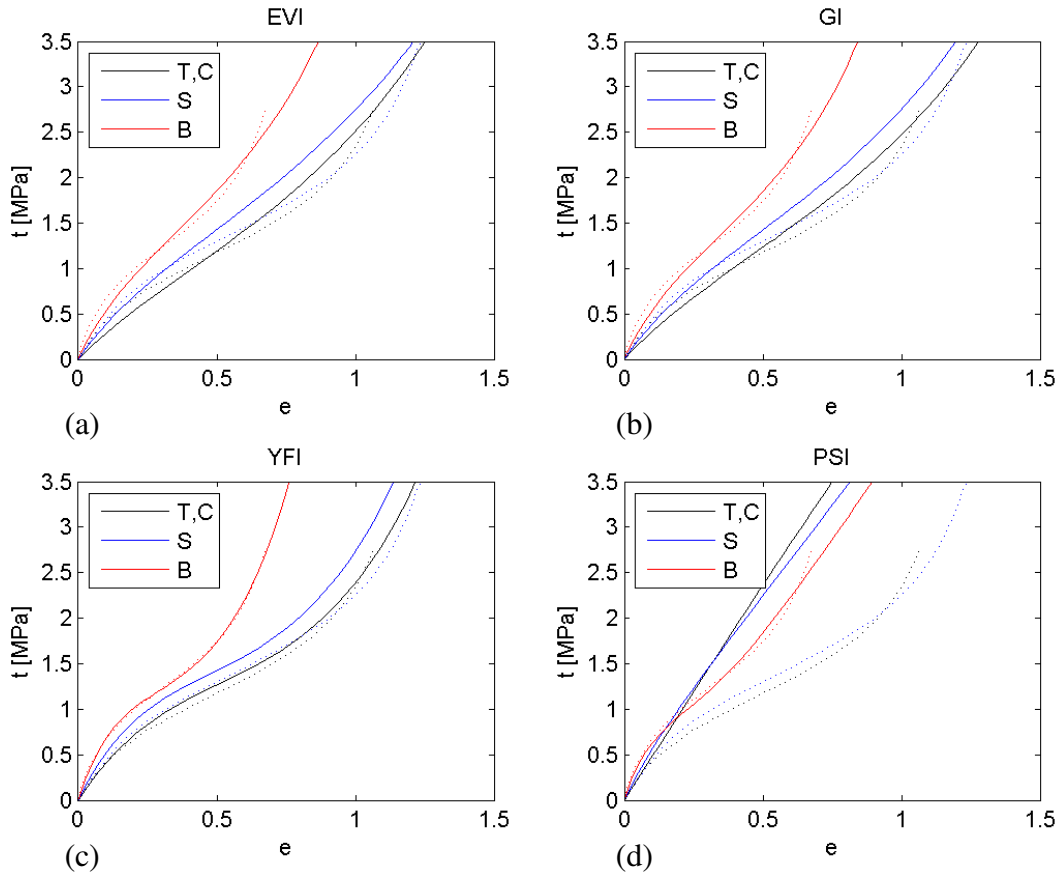


Figura 5. 20 - Borracha natural (NR55). Ajuste para  $B$  na faixa  $0 \leq e \leq 70\%$ .

Conforme resultados apresentados na Tabela 5. 3 e Figuras B.16 a B.30 do Anexo deste trabalho, ratifica-se que os melhores resultados foram encontrados para os ajustes realizados com os dados do ensaio de  $T$ . No âmbito global, todos os modelos polinomiais dos grupos 01 e 02 apresentaram previsões com comportamento excessivamente rígido para os ensaios diferentes dos da calibração. Verificou-se o mesmo comportamento para os grupos 05 e 10, com exceção de YFI. Os grupos 04 e 05 (salvo KI e HYI ajustados para  $T$ ) não conseguiram representar o comportamento da curva ( $t \times e$ ) para nenhum ensaio experimental ( $T, S, B$ ), preponderando ajustes/previsões ruins e/ou errôneas para as mesmas. Os grupos 05 e 06 tiveram comportamento abaixo do esperado. Destacam-se os resultados fornecidos pelos modelos YI3 e YI5 do grupo 07 e YKI e AI do grupo 08 respectivamente.

O grupo 09 ajustado para  $T$ , embora não tenha capturado fielmente o comportamento da curva ( $t \times e$ ) forneceu previsões aceitáveis para os três ensaios ( $T, P, B$ ). YFI foi o único modelo do grupo 10 com ajustes e previsões excelentes. O modelo PSI, ao contrário do verificado para os ajustes realizados com os dados de Treloar (seção 5.1.1) não teve bom desempenho.

<b>Modelo</b>	<b><i>T</i></b>	<b><i>P</i></b>	<b><i>B</i></b>	<b>Modelo</b>	<b><i>T</i></b>	<b><i>P</i></b>	<b><i>B</i></b>
<b>MRI2</b>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<b>PLI</b>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>E</i>
<b>MRI3</b>	<i>C</i>	<i>E</i>	<i>C</i>	<b>MI</b>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>E</i>
<b>MRI5</b>	<i>C</i>	<i>E</i>	<i>C</i>	<b>KLI</b>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>
<b>MRI9</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>VDWI</b>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>E</i>
<b>HNI1</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>YI2</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
<b>HNI2</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>YI3</b>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
<b>HNI3</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>YI5</b>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
<b>PI3</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>YMI</b>	<i>A</i>	<i>E</i>	<i>E</i>
<b>NHI</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<b>YKI</b>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<b>GTI</b>	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>C</i>	<b>AI</b>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
<b>HSAI</b>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	<b>DDTI</b>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>D</i>
<b>HSI</b>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<b>GYI</b>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<b>FI</b>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<b>THI</b>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>E</i>
<b>VWI</b>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<b>EVI</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>D</i>
<b>KI</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<b>ABI5</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>D</i>
<b>HYI</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<b>GI</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>D</i>
<b>OI2</b>	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<b>YFI</b>	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>A</i>
<b>OI3</b>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<b>G3I</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<b>HBI2</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>E</i>	<b>PSI</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>
<b>HBI3</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>E</i>	<b>CHGSI</b>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>

Tabela 5. 3 - Borracha natural (NR55). Ajustes:  $T$  ( $0 \leq e \leq 100\%$ ),  $P$  ( $0 \leq e \leq 130\%$ ) e  $B$  ( $0 \leq e \leq 70\%$ ).

### 5.3. Caso de Estudo: Silicone

Com o intuito de avaliar o comportamento dos modelos frente a outro tipo de borracha, será analisada nesta seção, uma amostra de silicone. As faixas de deformação para cada ensaio são respectivamente:  $0 \leq e \leq 600\%$  para  $T$  e  $0 \leq e \leq 300\%$  para  $B$ . Para a amostra de silicone analisado não se dispõem dos dados do ensaio de cisalhamento, ensaio atípico para esta família de materiais e não documentado na maioria dos casos. Assim os ajustes serão realizados considerando apenas os ensaios  $T$  e  $B$ . Todavia, a título de ilustração serão apresentadas as predições obtidas para o ensaio de cisalhamento embora a mesma não possa ser confrontada com os dados experimentais.

### 5.3.1. Ajuste para Tração Uniaxial

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 600\%$ , verificando-se as predições correspondentes na mesma faixa de deformações. As Figuras (5.21 – 5.24) ilustram os resultados para os modelos mais representativos de cada família entre os grupos 01 a 10. A Tabela 5.4 apresenta de forma sucinta e objetiva a avaliação para todos os modelos hiperelásticos avaliados.

O material analisado difere dos anteriores, pois a curva  $t \times e$  para este caso exibe um comportamento mais suave e similar para ambos os ensaios  $(T, B)$ , não apresentando um amolecimento visível para nenhuma faixa de deformações.

Os grupos polinomiais clássicos 01 e 02 (Figura B.31) forneceram predições excessivamente rígidas para os ensaios diferentes do da calibração, com exceção do modelo de baixa ordem MRI2 que não conseguiu capturar o comportamento do material. Os grupos 03 e 04 (Figura B.32) não apresentaram bons resultados, com exceção dos modelos KI e HYI. Cabe ressaltar que o modelo FI, modelo base da biomecânica e também muito popular no estudo de tecidos biológicos, apresentou erros consideráveis para pequenas deformações, não capturando o enrijecimento manifestado pelo ensaio de tração biaxial para  $e > 200\%$ .

Os grupos 05 e 06 (Figura B.33) não apresentaram bom comportamento. O modelo OI2 (Figura 5.22a) apresentou predições similares para os três ensaios, não capturando corretamente o fenômeno de enrijecimento para o ensaio  $B$ . Os resultados dos grupos 07 e 08 (Figura B.34), com exceção dos modelos AI, DDTI e YMI, apresentaram erros consideráveis no valor das tensões. O modelo YI5 apresentou instabilidades para o ensaio  $B$  dentro da faixa de predição, entretanto, chama-se a atenção para os excelentes resultados fornecidos pelo mesmo, dentro da sua faixa de trabalho ( $0 \leq e \leq 300\%$ ). Fenômenos como estes estão diretamente relacionados com a extrapolação dos dados experimentais. Através da Figura B.24 fica claro que se deve evitar este procedimento a qualquer custo, uma vez que os resultados não são nada confiáveis.

O grupo 09 (Figura B.25) teve dificuldade em capturar o comportamento do material para baixas deformações, fornecendo predições com erros consideráveis para o ensaio  $B$ . O modelo THI, precursor do grupo 09, não se ajustou bem aos dados experimentais.

Notoriamente, YFI foi o único modelo do grupo 10 (Figura B.25) a representar fielmente a curva  $t \times e$  do material para ambos os ensaios  $T$  e  $B$ . Os demais modelos do grupo manifestaram comportamento errôneo para o material analisado.

Característica comum na família de modelos polinomiais clássicos, o modelo MRI9 (Figura 5.21a) apresentou previsões excessivamente rígidas para os ensaios que não os da calibração. Destaca-se que o modelo HNI1 (Figura 5.21b) manifestou instabilidade no ajuste para pequenas deformações, não conseguindo prever o comportamento do material para os demais modos de deformação. O modelo *power-law* KI (Figura 5.21d) apresentou melhores resultados que os modelos de base logarítmica EVI (Figura 5.23a) e GI (Figura 5.23b). Salienta-se que o modelo GI apresentou instabilidades na predição do ensaio *B*. Os modelos YI3 (Figura 5.22b) e YKI (Figura 5.22d) tiveram bom desempenho. É interessante comparar o comportamento dos modelos YMI (base polinomial e exponencial, Figura 5.22c) e YFI (base exponencial e logarítmica, Figura 5.23c), ambos modelos híbridos, porém, com resultados bem distintos. Destaca-se também, o comportamento do modelo PSI (Figura 5.23d), que apresentou instabilidades para pequenas deformações. Comparando com o modelo GI, e analisando as eqs.(3.30 e 3.36), fica claro a influência do termo  $\ln(I_2)$  na expressão para a energia de deformação do modelo PSI. Problemas como este são comuns nos modelos GG (modelos cuja equação constitutiva consiste em uma evolução do modelo de GI), sendo verificado também nos modelos G3I e CHGSI (Figura B.35).

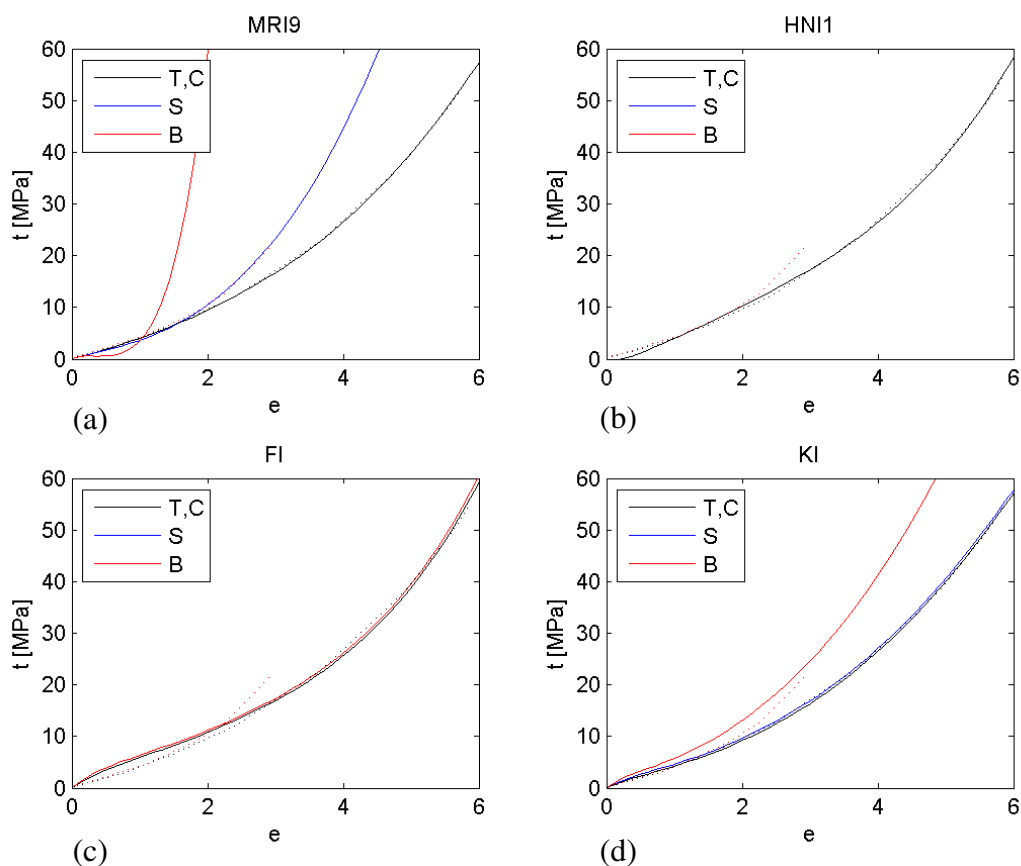


Figura 5. 21 – Silicone (MED4950). Ajuste para  $T$  na faixa  $0 \leq e \leq 600\%$ .

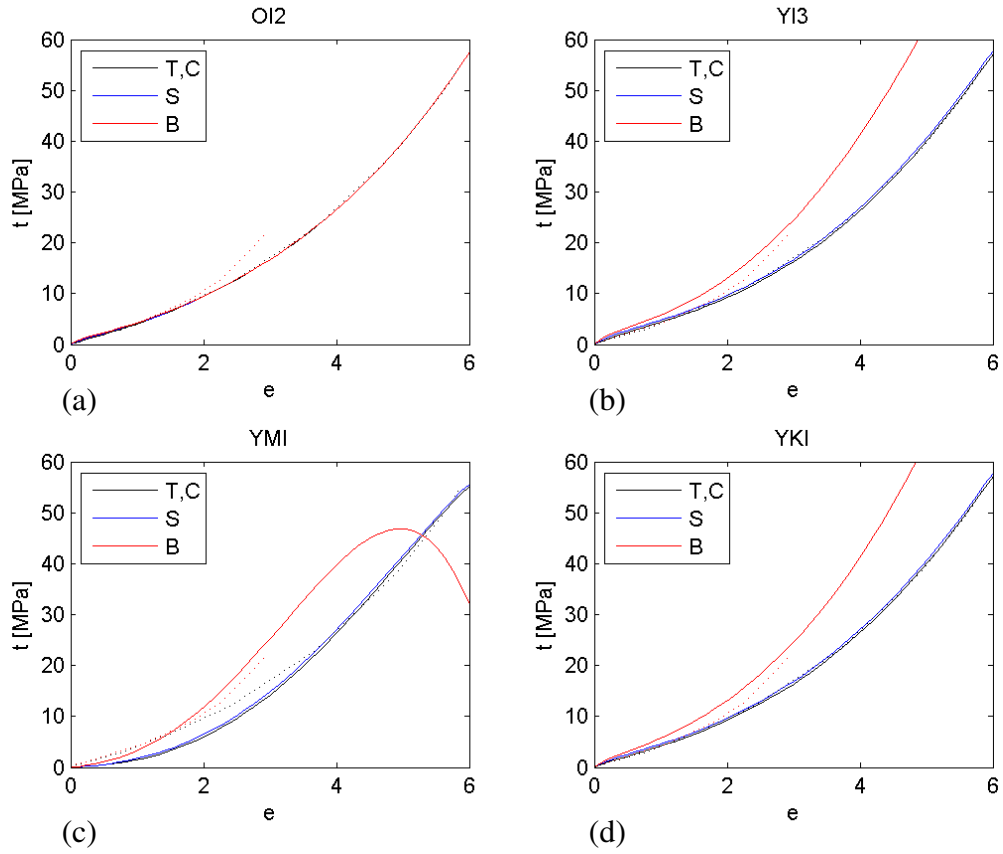


Figura 5. 22 - Silicone (MED4950). Ajuste para  $T$  na faixa  $0 \leq e \leq 600\%$ .

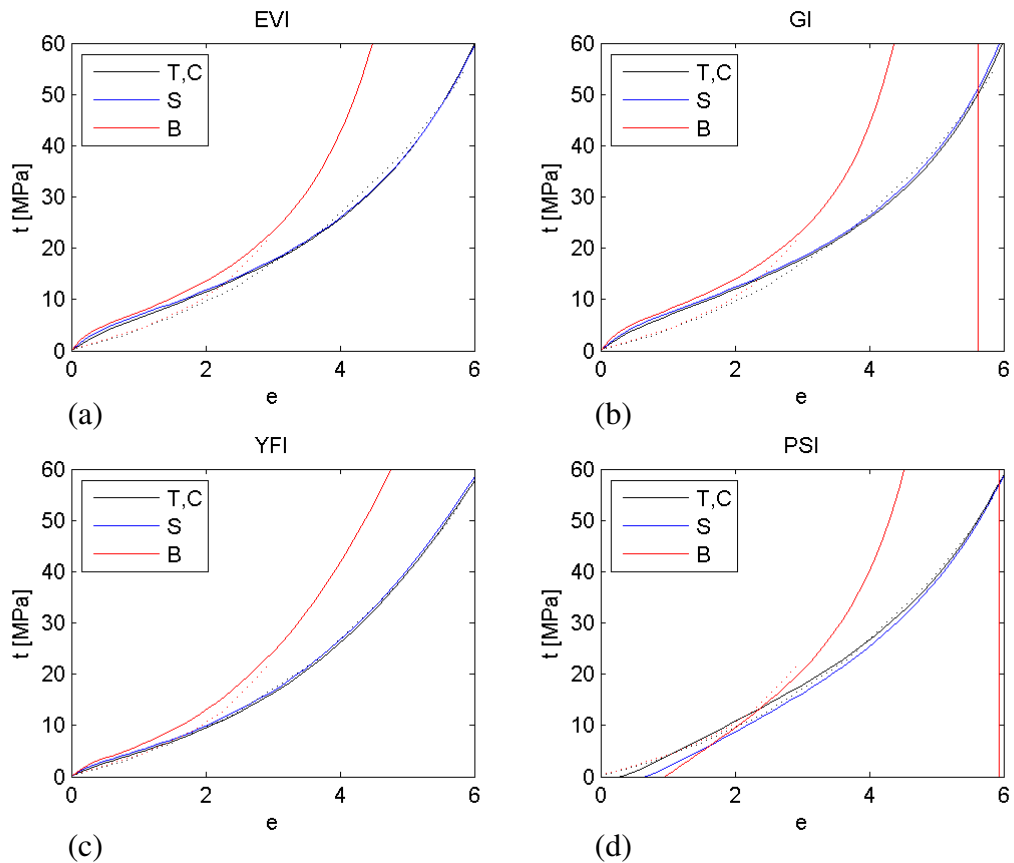


Figura 5. 23 - Silicone (MED4950). Ajuste para  $T$  na faixa  $0 \leq e \leq 600\%$ .

### 5.3.2. Ajuste para Tração Biaxial

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 300\%$ , verificando-se as predições correspondentes na faixa  $0 \leq e \leq 600\%$ . As Figuras (5.24–5.26) ilustram os resultados para os modelos mais representativos de cada família entre os grupos 01 a 10. A Tabela 5.4 apresenta de forma sucinta e objetiva a avaliação para todos os modelos hiperelásticos avaliados.

Similar ao ajuste para  $T$  (seção 5.3.1), todos os modelos dos grupos 01 e 02 (Figura B.36) não forneceram boas predições, embora os ajustes representaram com fidelidade o comportamento da curva  $t \times e$ . Os modelos dos grupos 03 e 04 (Figura B.37) exibiram um comportamento anômalo, com exceção de KI e HYI que tiveram resultados aceitáveis.

Recomendados na literatura para o emprego em grandes deformações (Ogden, 1975, Bechir *et al.*, 2005), os modelos dos grupos 05 e 06 (Figura B.38) tiveram desempenho ruim, exibindo predições e/ou ajustes errôneos. Os grupos 07 e 08 (Figura B.39) apresentaram um bom comportamento, com exceção dos modelos YI5, AI e DDTI que apresentaram bons resultados para uma faixa específica de deformação. Destaca-se que o modelo YI5, além de fornecer predições ruins, apresentou instabilidades dentro da faixa de trabalho. Os modelos do grupo 09 (Figura B.40), com exceção do modelo THI, capturaram com fidelidade o comportamento do material, entretanto apresentaram boas predições para faixas específicas de deformações. Os modelos YFI e PSI do grupo 10 (Figura B.40) exibiram comportamento similar ao de seu precursor GI do grupo 09. Os demais modelos do grupo 10 forneceram predições ruins para os ensaios diferentes do da calibração.

Similar ao ajuste para  $T$  os modelos MRI9 (Figura 5.24a) e HNI1 (Figura 5.24b) não apresentaram bons resultados para suas predições. Através das Figuras (5.24d, 5.26a e 5.26b) confirma-se o melhor comportamento do modelo *power-law* de KI em relação aos modelos EVI e GI de base logarítmica. O modelo FI, característico na modelagem de tecidos biológicos, não conseguiu representar com fidelidade o comportamento da curva  $t \times e$  (resultados limitados para  $e < 150\%$ ), manifestando um comportamento similar para os três ensaios. Ao contrário do verificado para o ajuste para  $T$  (seção 5.3.1), os modelos YMI (Figura 5.25c) e YFI (Figura 5.26c) apresentaram o mesmo comportamento. É interessante notar, que o modelo híbrido YFI não apresentou as instabilidades verificadas no comportamento de seu precursor, o modelo de GI, possivelmente devido ao termo exponencial adicionado em sua expressão constitutiva (ver eqs. 3.30 e 3.32). O modelo PSI (Figura 5.26d) apresentou o mesmo comportamento que o modelo GI.



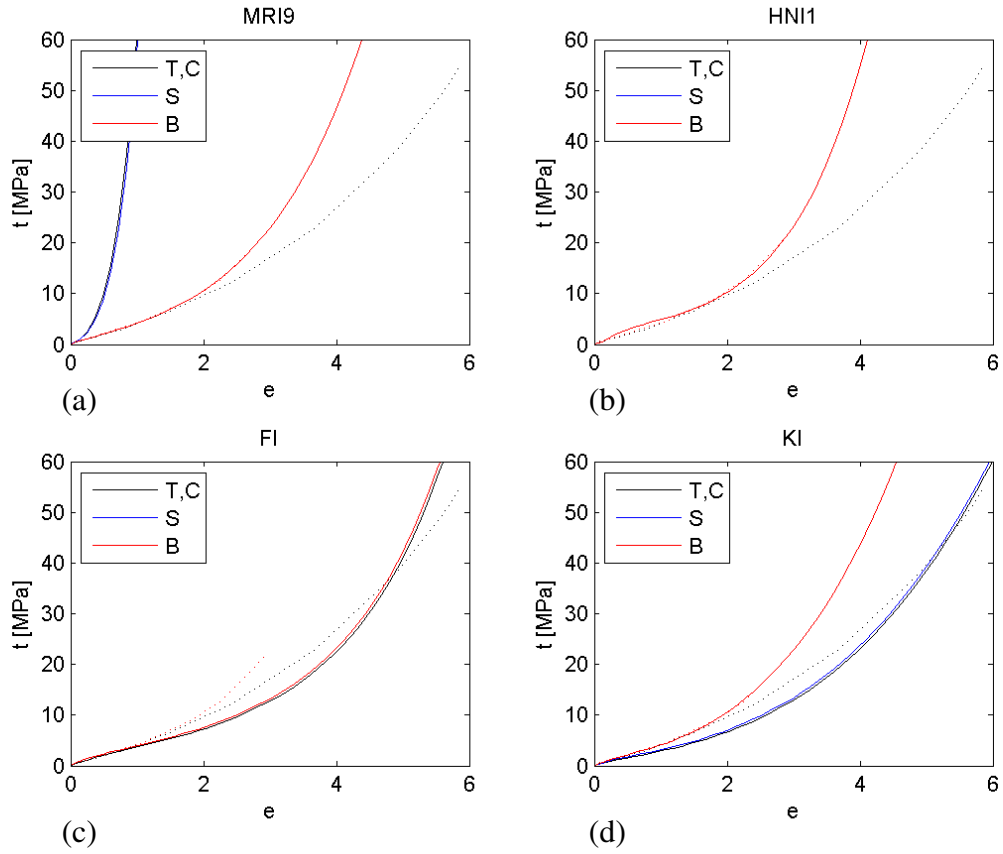


Figura 5. 24 - Silicone (MED4950). Ajuste para  $B$  na faixa  $0 \leq e \leq 300\%$ .

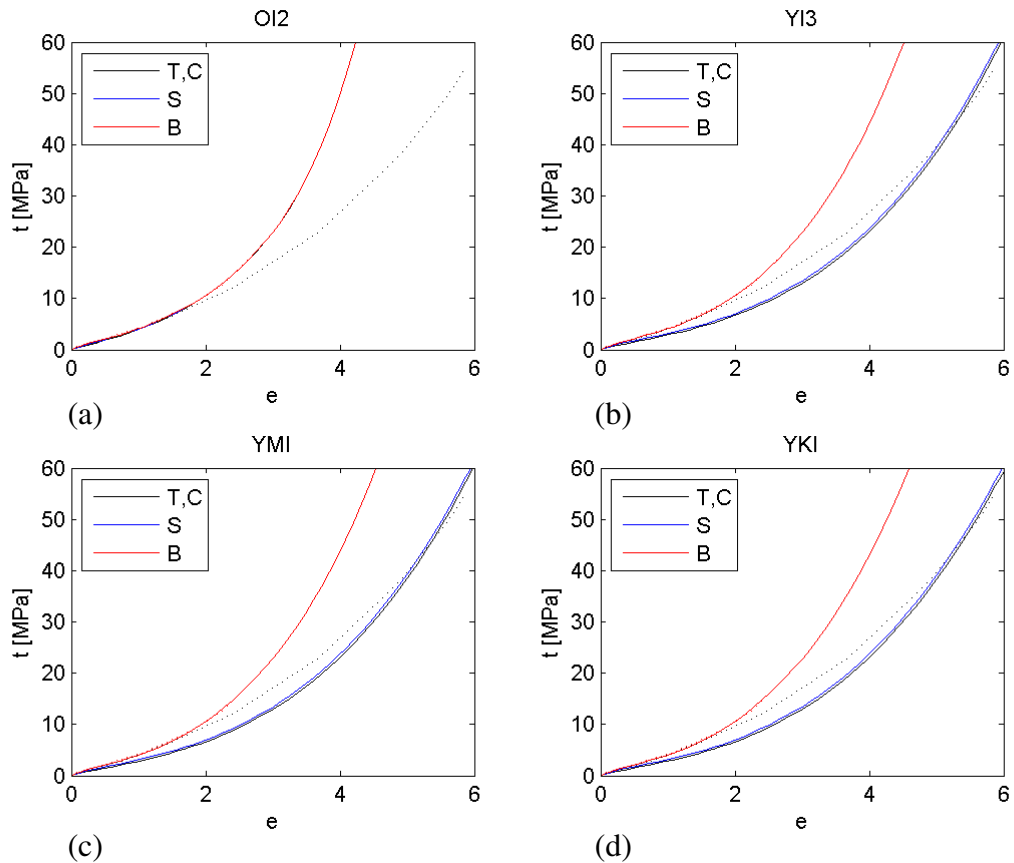


Figura 5. 25 - Silicone (MED4950). Ajuste para  $B$  na faixa  $0 \leq e \leq 300\%$ .

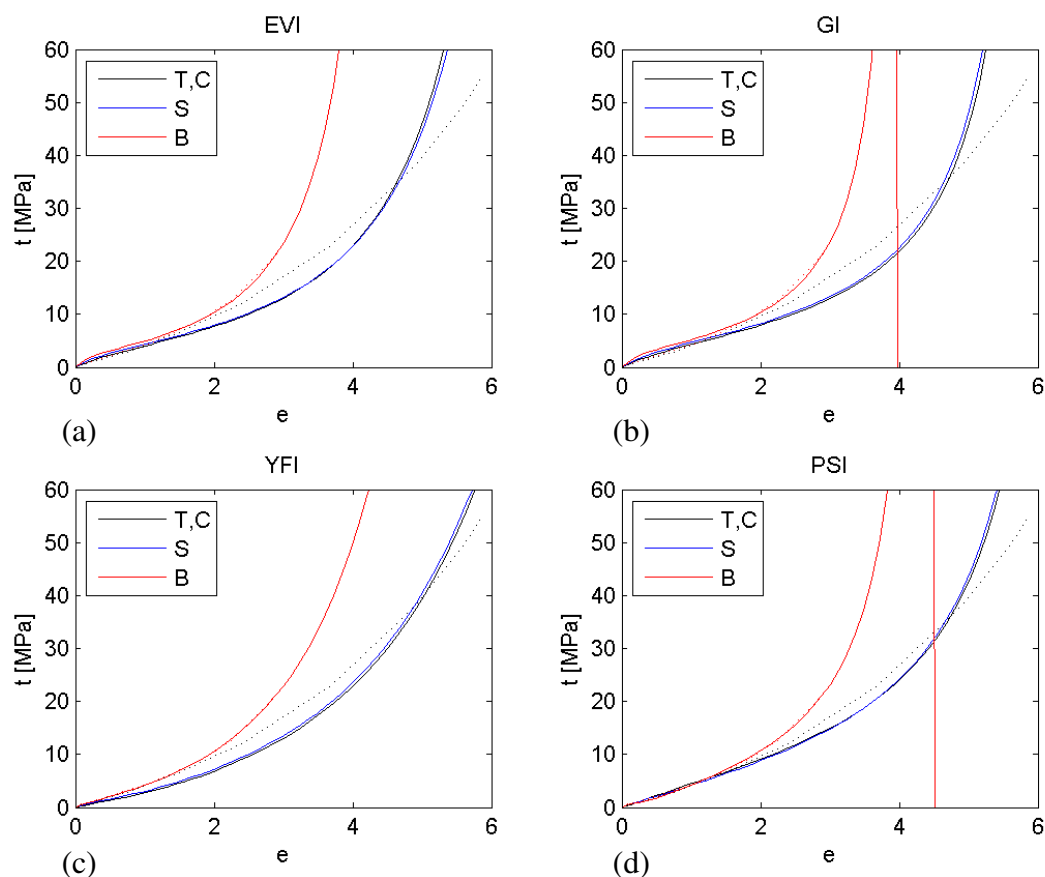


Figura 5. 26 - Silicone (MED4950). Ajuste para  $B$  na faixa  $0 \leq e \leq 300\%$ .

Conforme resultados apresentados na Tabela 5.4 e Figuras B.31 a B.40 do Apêndice B, novamente verifica-se que os melhores resultados foram encontrados para os ajustes realizados com os dados do ensaio  $T$ . De modo geral, os grupos 01 e 02, embora tenham ajustado com fidelidade a curva  $t \times e$  para ambos os ensaios  $(T, B)$ , exibiram previsões com comportamento excessivamente rígido para os ensaios diferentes do da calibração. Os grupos 03 e 04 não apresentaram bom comportamento, com exceção dos modelos KI e HYI. Ficou claro, o potencial de utilização dos modelos *power-law* como base de novos modelos a serem desenvolvidos, destinados à modelagem de materiais que exibam o fenômeno de enrijecimento em deformações elevadas (elastômeros e tecidos biológicos). Os modelos dos grupos 05 e 06 não tiveram bom desempenho, exibindo previsões e/ou ajustes errôneos. Destacam-se os excelentes resultados dos modelos YI2, YI3, YI5, YKI e GYI pertencentes aos grupos 07 e 08, ajustados para  $T$ . Os modelos do grupo 09 tiveram bons resultados para uma faixa específica de deformação ( $e < 200\%$ ), entretanto, a qualidade de suas previsões foi inferior ao modelo *power-law* de KI. Notoriamente YFI foi o único modelo híbrido do grupo 10 a apresentar bons resultados. Os demais modelos G3I, PSI e CHGSI exibiram ajustes e/ou previsões errôneas.

<b>Modelo</b>	<b><i>T</i></b>	<b><i>T</i></b>	<b>Modelo</b>	<b><i>T</i></b>	<b><i>T</i></b>
<b>MRI2</b>	<i>E</i>	<i>C</i>	<b>PLI</b>	<i>E</i>	<i>E</i>
<b>MRI3</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>MI</b>	<i>C</i>	<i>C</i>
<b>MRI5</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>KLI</b>	<i>C</i>	<i>C</i>
<b>MRI9</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>VDWI</b>	<i>C</i>	<i>E</i>
<b>HNI1</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>YI2</b>	<i>A</i>	<i>B</i>
<b>HNI2</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>YI3</b>	<i>A</i>	<i>B</i>
<b>HNI3</b>	<i>C</i>	<i>D</i>	<b>YI5</b>	<i>A</i>	<i>D</i>
<b>PI3</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>YMI</b>	<i>E</i>	<i>B</i>
<b>NHI</b>	<i>D</i>	<i>D</i>	<b>YKI</b>	<i>A</i>	<i>B</i>
<b>GTI</b>	<i>E</i>	<i>D</i>	<b>AI</b>	<i>D</i>	<i>D</i>
<b>HSAI</b>	<i>C</i>	<i>E</i>	<b>DDTI</b>	<i>E</i>	<i>E</i>
<b>HSI</b>	<i>E</i>	<i>D</i>	<b>GYI</b>	<i>A</i>	<i>B</i>
<b>FI</b>	<i>D</i>	<i>D</i>	<b>THI</b>	<i>E</i>	<i>E</i>
<b>VWI</b>	<i>C</i>	<i>E</i>	<b>EVI</b>	<i>B</i>	<i>B</i>
<b>KI</b>	<i>A</i>	<i>B</i>	<b>ABI5</b>	<i>B</i>	<i>B</i>
<b>HYI</b>	<i>B</i>	<i>B</i>	<b>GI</b>	<i>B</i>	<i>B</i>
<b>OI2</b>	<i>B</i>	<i>C</i>	<b>YFI</b>	<i>A</i>	<i>B</i>
<b>OI3</b>	<i>C</i>	<i>C</i>	<b>G3I</b>	<i>C</i>	<i>C</i>
<b>HBI2</b>	<i>C</i>	<i>E</i>	<b>PSI</b>	<i>E</i>	<i>B</i>
<b>HBI3</b>	<i>C</i>	<i>E</i>	<b>CHGSI</b>	<i>B</i>	<i>C</i>

Tabela 5. 4 - Silicone (MED4950). Ajustes:  $T$  ( $0 \leq e \leq 600\%$ ) e  $B$  ( $0 \leq e \leq 300\%$ ).

#### 5.4. Conclusões

As Tabelas 5.2–5.4 indicam que o ensaio de tração uniaxial pode ser usado “para tudo”, melhor até que o biaxial.

Isto contradiz parte da literatura (Marczak, *et al.*, 2006), mas aparentemente já tinha sido, ou intrinsecamente sugerido por muitos dos artigos publicados na última década, que insistem no uso generalizado do ensaio de tração uniaxial. Pode ter sido só conveniência, já que o ensaio de tração biaxial também é mais difícil de se realizar.

Por outro lado, como os ensaios biaxiais normalmente não vão além de aproximadamente 300%, permanece a dúvida quanto à possibilidade deste ensaio, se conduzido a deformações maiores, forneceria ajustes melhores que o uniaxial. Se isso fosse confirmado, os argumentos do início do Capítulo relacionados à Figura 5.2 se confirmariam completamente.

Como foi visto neste Capítulo, cada um dos modelos hiperelásticos possui suas peculiaridades, e devem ser escolhidos criteriosamente. É praticamente impossível fazer recomendações definitivas para o uso de cada um. Some-se a isso a enorme diversidade de variações químicas possíveis para compostos elastoméricos. A seguir destacam-se algumas das características gerais de cada modelo:

- Os modelos polinomiais, com exceção dos de baixa ordem, normalmente se ajustam bem à dados experimentais de um dado ensaio, capturando com fidelidade o comportamento da curva  $t \times e$ . Vale a ressalva, que os modelos que contemplam em sua energia de deformação o segundo invariante de deformação raramente fornecem previsões aceitáveis para os demais ensaios que não os da calibração, manifestando um comportamento excessivamente rígido para as suas previsões. Embora ainda pouco conhecidos, os modelos do grupo 08, que também fazem uso de funções polinomiais, além de apresentar melhores resultados, empregam um número reduzido de constantes em relação aos modelos polinomiais tradicionais de alta ordem.
- Os modelos de base exponencial (grupos 03 e 04), com ênfase para o modelo FI, apresentaram comportamento limitado a faixas específicas de deformação, fornecendo previsões ruins ou errôneas para os ensaios diferentes do da calibração. Destaca-se o potencial de utilização do modelo *power-law* de KI.
- A família de modelos cuja expressão para energia de deformação é escrita diretamente em função dos alongamentos principais (grupos 05 e 06), não apresentou bons resultados, exibindo previsões de baixa qualidade ou errôneas, com ênfase para pequenas deformações. Os resultados encontrados contrapõem-se aos da literatura (Ogden, 1975; Bechir *et al.*, 2005). PLI apresentou previsões errôneas para todos os ensaios, resultado já verificado por outros autores (Finney *et al.*, 1988).
- Os modelos da família *limiting chain extensibility* não capturaram com fidelidade o efeito de enrijecimento do material, manifestando um comportamento extremamente suave para a curva  $t \times e$ . Propostos como evolução do modelo GI, e lançados como promissores na modelagem de materiais com alto enrijecimento em deformações elevadas, os modelos do grupo 10, salvo YFI, não apresentaram resultados satisfatórios para todos os materiais avaliados. Em alguns casos verificou-se desempenho inferior ao exibido pelos modelos polinomiais e de base exponencial.

- Embora o ensaio de tração biaxial excite mais o segundo invariante de deformação, claramente os ajustes realizados à tração uniaxial forneceram melhores resultados, garantindo previsões de qualidade superior em todos os casos avaliados;

Os casos ilustrados neste Capítulo somados aos muitos resultados publicados na literatura indicam algumas características intrínsecas de cada modelo hiperelástico que parecem prevalecer. Os modelos serão apresentados em ordem genealógica e cronológica permitindo acompanhar a evolução e as tendências de cada época.

#### 5.4.1. Modelo de Mooney-Rivlin (MRIn)

- O modelo MRIn deve ser usado com atenção particular à forma da curva  $t \times e$  do material. As versões de 2 ou 3 termos são válidas até deformações da ordem de 30%-50%, mas os efeitos de enrijecimento comuns quando as deformações se tornam grandes não são levados em conta. O modelo de 2 termos tem mau desempenho em problemas dominados por compressão (Marczak, R *et al.*, 2006).
- As versões de 5 ou 9 termos mostram validade até deformações da ordem de 100%-200%, mas podem apresentar oscilações similares aos do modelo polinomial.
- A Figura 5.27a ilustra uma curva típica obtida com os modelos MRIn de 2 ou 3 termos. Como não ocorrem pontos de inflexão, o efeito de enrijecimento é perdido. As Figuras 5.27b e 5.27c ilustram que os modelos de 5 e 9 termos são capazes de capturar um ou mais pontos de inflexão.
- Os modelos MRIn raramente reproduzem corretamente o comportamento à compressão, a menos que sejam ajustados com o próprio ensaio de compressão. No entanto, não irão prever bem os demais ensaios (Marczak, R *et al.*, 2006).
- Os modelos MRIn - em particular os de 2 e 3 termos - são bastante populares no âmbito da engenharia, e têm sido muito empregados nas mais diversas situações. Suas constantes  $C_{01}$  e  $C_{10}$  são facilmente encontradas para vários compostos, mas isto não é garantia de bons resultados. O maior atrativo destes modelos é a sua simplicidade, mas deve-se escolher os modelos de 5 ou 9 termos sempre que possível, especialmente se o material é desconhecido ou a faixa de deformações de trabalho é significativamente grande ( $e > 300\%$ ).

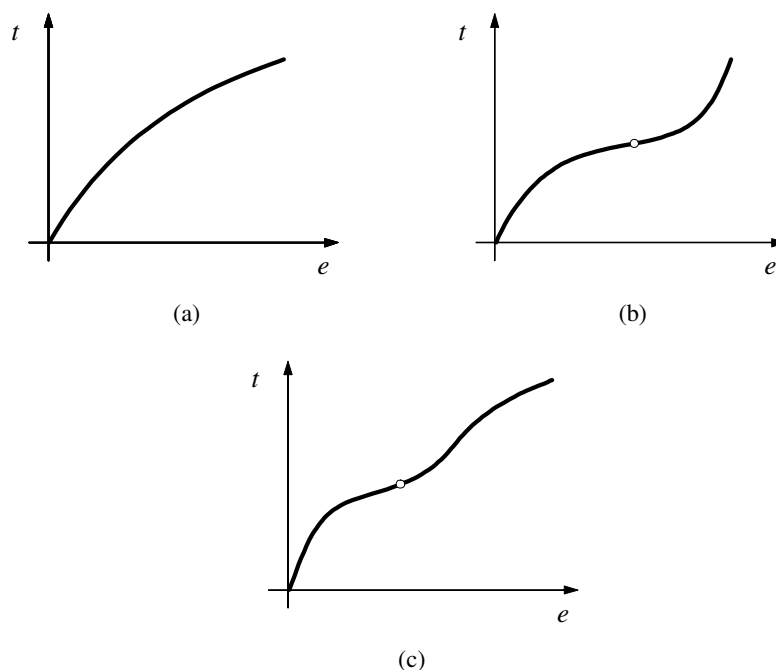


Figura 5. 27 – Diagramas  $t \times e$  típicos do modelo de Mooney-Rivlin: (a) 2 e 3 termos; (b) 5 termos; (c) 9 termos.

#### 5.4.2. Modelo de Hartmann-Neff (HNIn)

- Apresenta uma expressão para energia de deformação muito similar a do modelo MRIn. Entretanto, ajusta-se melhor para grandes deformações. Assim como o modelo MRIn, fornece predições excessivamente rígidas para os demais ensaios.
- Os modelos HNI2 e HNI3 apresentam desempenho inferior a HNI1, podendo produzir erros significativos para deformações moderadas ( $150\% \leq e \leq 400\%$ ).
- Recomenda-se utilizar o modelo HNI1 quando a aplicação desejada é governada principalmente por deformações do tipo usado no ajuste.
- Aplicável para deformações até 700% .

#### 5.4.3. Modelo Polinomial (PI)

- Em princípio, o modelo PI pode ser ajustado à uma diversidade de curvas experimentais, escolhendo-se o número de termos adequado. Portanto, para materiais desconhecidos, a escolha de um  $N$  apropriado deve ser feita depois de disponibilizados os resultados dos testes experimentais.

- Deve-se lembrar que o modelo PI é extremamente flexível, e esta é sua principal desvantagem: tem termos demais, todos ponderados de forma similar. Esta característica produz problemas similares aos encontrados quando se ajusta curvas polinomiais de alto grau, ou seja, uma ocorrência excessiva de picos e depressões nas predições.
- Pela razão acima, raramente se emprega  $N > 3$ .
- Embora este modelo normalmente se ajuste bem à dados experimentais de um dado ensaio, suas predições para os demais carregamentos raramente são boas. Então, deve-se reservar o modelo PI para casos em que a aplicação desejada é governada principalmente por deformações do tipo usado no ajuste.
- Aplicável para deformações até 300%. Acima disto, as curvas teóricas podem ocasionalmente apresentar oscilações.
- Deve-se evitar extrapolações a qualquer custo.

#### **5.4.4. Modelo Neo-Hookeano (NHI)**

- Este é provavelmente o mais simples de todos os modelos hiperelásticos, e pode ser utilizado como ponto de partida em análises-piloto, com módulo de cisalhamento constante. Deve-se limitar seu emprego a casos onde as deformações extensionais não ultrapassam 30-40%.
- Em problemas dominados por deformações cisalhantes, pode fornecer resultados bons para deformações até 80-90%, desde que pequenos desvios sejam tolerados.
- Este modelo não captura o efeito de enrijecimento.
- Não deve ser empregado para grandes deformações (superior a 100%).

#### **5.4.5. Modelo de Gent-Thomas (GTI)**

- Este modelo é uma modificação do modelo NHI, foi o pioneiro a empregar um termo logarítmico do segundo invariante de deformação na expressão para a energia de deformação.

- O modelo não captura o efeito de enrijecimento, fornecendo resultados piores que seu precursor, o modelo NHI.
- Não deve ser empregado para grandes deformações (superior a 100%).

#### 5.4.6. Modelo de Hart-Smith Aprimorado (HSAI)

- Este modelo é uma modificação do modelo GTI através da substituição da parcela NHI por um termo exponencial.
- Não se ajusta bem para pequenas deformações, fornecendo previsões ruins para os ensaios diferentes do da calibração.
- Recomenda-se utilizar o modelo HSAI para grandes deformações, calibrado para tração uniaxial.

#### 5.4.7. Modelo de Hart-Smith (HSI)

- É uma simplificação do modelo HSAI.
- Ao contrário de seu precursor, este modelo deve ser empregado para pequenas deformações ( $e \leq 100\%$ ).
- Geralmente apresenta boa qualidade no ajuste da curva  $t \times e$ , Por outro lado, suas previsões exibem comportamento errôneo.

#### 5.4.8. Modelo de Fung (FI)

- Predomina para este modelo, má representatividade da curva  $t \times e$ , se ajustando apenas a faixas limitadas de deformação. Gera previsões estáveis para os três ensaios  $T$ ,  $P$  e  $B$ , com erros acentuados para pequenas deformações.
- Destaque-se que se tomando o limite  $b \rightarrow 0$  na eq.(3.10), recai-se no modelo NHI, daí a similaridade de comportamento das curvas geradas por ambos.



- Seu uso deve ser limitado a problemas envolvendo pequenas deformações ( $e \leq 100\%$ ), devendo ser ajustado preferencialmente à tração uniaxial.
- Embora seja muito popular no ramo da biomecânica, pelos presentes resultados não se recomenda a utilização do mesmo, visto que o modelo não foi capaz de capturar o enrijecimento da curva  $t \times e$  pronunciado em grandes deformações. Exalta-se que a precisão na modelagem deste fenômeno é a chave para uma melhor compreensão das propriedades termomecânicas de elastômeros e biomecânicas das paredes de artérias, tendões e outros tecidos biológicos (Horgan *et al.*, 2002).

#### 5.4.9. Modelo de Veronda-Westmanns (VWI)

- Consiste em uma evolução do modelo FI pela adição de um termo dependente do segundo invariante de deformação na equação constitutiva.
- Não deve ser empregado para grandes deformações (superior a 100%), devendo ser ajustado exclusivamente para tração biaxial.

#### 5.4.10. Modelo de Knowles (KI)

- Knowles (1977) foi o precursor dos modelos *power-law* na modelagem do fenômeno de enrijecimento de material em grandes deformações. Para pequenos alongamentos, o modelo KI exibe comportamento similar ao modelo FI (vale lembrar que se tomando o limite  $n \rightarrow \infty$  na expressão (3.14), recai-se no modelo FI).
- Embora consiga representar o efeito de enrijecimento do material, este modelo apresenta maior dificuldade em capturar pontos de inflexão da curva  $t \times e$ , o que causa erros consideráveis para pequenas deformações.
- Claramente, o modelo *power-law* KI apresenta melhores resultados que os modelos EVI e GI que abrangem a mesma área de atuação.
- O modelo pode ser empregado para deformações até 700%, preferencialmente ajustados para  $T$ . Para amostras de materiais com faixas de deformação inferior a 100%, o ajuste utilizando os dados do ensaio  $T$  é mandatário.

#### 5.4.11. Modelo de Hunphrey-Yin (HYI)

- O modelo HYI, particularizado para problemas isotrópicos, consiste em uma simplificação do modelo FI através da flexibilização de uma constante, trazendo ao modelo ganhos significativos em relação ao seu precursor.
- Claramente, este modelo exibe performance superior a FI, fato ratificado pela sua faixa de abrangência. Para pequenas deformações (quando ajustado para  $T$ ), consegue representar com fidelidade o comportamento da curva  $t \times e$  para todos os ensaios  $(T, S, B)$ , embora não consiga capturar com fidelidade o efeito de enrijecimento do material. Exibe bom comportamento também para grandes deformações. Todavia, demonstra dificuldade em capturar pontos de inflexão da curva do material.
- Pode ser empregado para deformações até 700% .
- Embora consiga representar o efeito de enrijecimento do material, exibe maior dificuldade em capturar pontos de inflexão da curva  $t \times e$ , o que se reflete em erros consideráveis para pequenas deformações. Isto coincide com o documentado por Ogden *et al*, 2004 em seus estudos recentes.

#### 5.4.12. Modelo de Ogden (OIn)

- O modelo OIn se ajusta mais facilmente aos dados experimentais, já que utiliza os valores de  $\lambda_i$  como parâmetros. Assim, ajustes não-lineares mais complexos podem ser obtidos.
- É um modelo computacionalmente mais caro que os demais, mas por outro lado, é aplicável para deformações de até 700%.
- O modelo de 2 termos é mais estável que o de 3 termos, e este último por vezes produz previsões muito rígidas para cisalhamento e tração biaxial.
- Raramente se emprega  $N > 3$ .
- É um dos poucos modelos capaz de se ajustar corretamente à tração e compressão axial. É o que melhor prediz o comportamento à compressão a partir do ajuste com os outros ensaios (Marczak, R *et al.*, 2006).

#### 5.4.13. Modelo de Bechir (HBIn)

- O modelo HBIn segue a linha de pensamento de OIn, porém desenvolvendo uma nova formulação baseada em um conjunto de invariantes de deformação fisicamente mais significativos (Seth, 1964). A vantagem deste novo modelo sobre seu precursor seria uma maior confiabilidade na modelagem de materiais que exibem comportamento altamente não-linear, caso dos elastômeros.
- Conforme mencionado por Bechir *et al*, 2005, o modelo proposto fornece excelentes ajustes para o ensaio  $T$ , com previsões aceitáveis para os ensaios  $P$  e  $B$ . Pelo presente trabalho ratifica-se parte da afirmação dos autores. Entretanto, cabe salientar que as previsões obtidas com este modelo para os materiais avaliados são insatisfatórias, apresentando comportamento excessivamente rígido para a curva  $t \times e$ .
- Similar ao modelo OI2, o modelo de 2 termos é mais estável.
- A vantagem da utilização do modelo HBIn (ressaltado pelos autores Bechir *et al*, 2005) em relação ao modelo OIn está no número reduzido de constantes constitutivas, o que implica em um menor custo computacional.
- O modelo pode ser empregado para deformações até 700%, sendo o ajuste para  $T$  mandatário. Deve-se verificar atentamente o comportamento das previsões.

#### 5.4.14. Modelo de Peng-Landel (PLI)

- Assim como o modelo OIn, PLI assume que a energia de deformação seja uma função separável dos alongamentos principais. É um dos modelos hiperelásticos mais simples (uma única constante de material).
- Fornece boas previsões para os três ensaios, entretanto, para uma faixa estreita de deformações.
- Pelo presente estudo, claramente o modelo não captura o efeito de enrijecimento de material, tampouco pontos de inflexão presentes na curva  $t \times e$ . Ao contrário do mencionado pela literatura (Peng *et al.*, 1972), recomenda-se empregar o modelo para deformações inferiores a 100%, ajustado na mesma faixa para o ensaio  $T$ .

- Peng *et al.*, 1972 em seus estudos originais, menciona que correlações consistentes empregando o seu modelo são obtidas para deformações até 150%. Os resultados encontrados neste trabalho estão de acordo com Finney *et al.*, 1988 que também avaliou o modelo PLI para os dados de Treloar. Segundo o autor (e implícito através da Figura 5.28) o modelo se ajusta bem aos dados experimentais para até deformações próximas a 150%, ponto a partir do qual predomina dificuldade em manter a convergência. Destaca-se que Finney *et al.* ao invés de realizar o ajuste, estimaram um módulo de rigidez inicial para o material, eliminando assim a única constante a determinar.

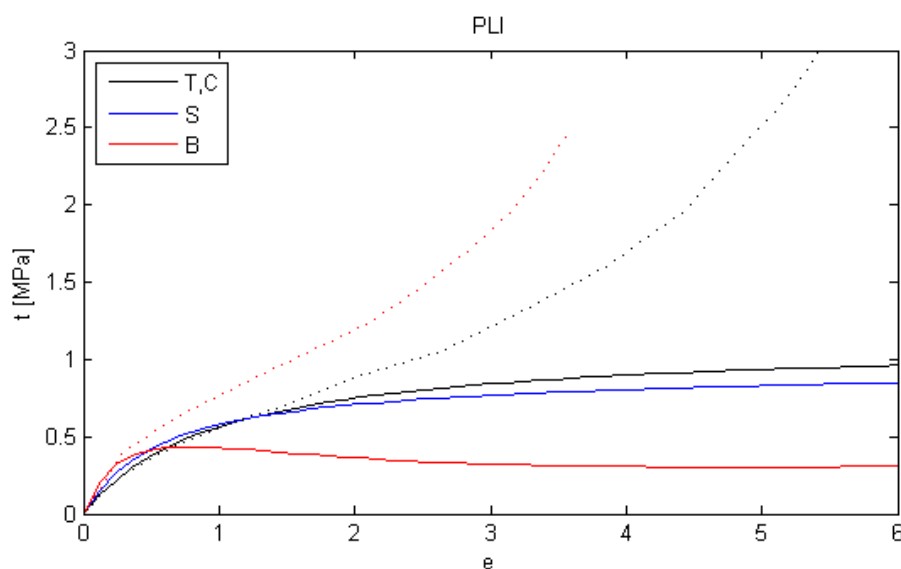


Figura 5. 28 – Demonstração dos limites do modelo de PLI.

#### 5.4.15. Modelo de Martins (MI)

- O modelo MI dedicado ao estudo de músculos envolve um conceito novo e interessante, já que se trata de um modelo misto. É uma modificação do modelo HYI, já que soma à energia de deformação um termo exponencial do alongamento na direção das fibras.
- Exibe comportamento distinto de seu precursor, apresentando previsões errôneas. A vantagem é que se consegue mapear com maior representatividade a curva ajustada  $t \times e$  para pequenas deformações.
- O modelo pode ser empregado para deformações até 700%. Para problemas envolvendo deformações inferiores a 100% recomenda-se empregar o modelo MI ao invés de seu precursor. O ajuste para o ensaio  $T$  é mandatário, sendo que casos específicos devem ser analisados separadamente;

#### 5.4.16. Modelo de Kilian (KLI)

- O modelo KLI foi o primeiro a utilizar uma base logarítmica para a energia de deformação.
- Com exceção da amostra de silicone, para os demais materiais avaliados o modelo KLI não teve bom desempenho, apresentando ajustes e/ou previsões errôneas.
- Recomenda-se utilizar o modelo KLI em aplicações governadas principalmente por deformações do tipo usado no ajuste.
- Aplicável para deformações até 700% , observando-se as ressalvas acima.

#### 5.4.17. Modelo de Van der Waals (VDWI)

- Evolução do modelo KLI, pondera na energia de deformação a contribuição do segundo invariante de deformação;
- Apresentou resultados similares ao seu precursor, entretanto o ajuste para o ensaio  $T$  é mandatário.

#### 5.4.18. Modelo de Yeoh (YIn)

- A versão de 3 termos ( $N = 3$ ) é a de emprego mais comum, e geralmente se ajusta bem à faixas de grandes deformações, mas pode apresentar desvios significativos para deformações pequenas.
- O uso de dois termos é recomendado apenas para deformações pequenas (não superiores a 20%), mas deve-se verificar como as previsões para os outros modos de deformação se apresentam, se possível.
- Os modelos de Yeoh de 3 e 5 termos se ajustam com extrema facilidade à todos os casos, e produzem boas previsões, em geral. É uma excelente escolha para a maioria das borrachas naturais.
- Deve-se evitar extrapolação.

#### 5.4.19. Modelo de Yeoh-Modificado (YMI)

- Consiste em uma evolução do modelo YI3 pela adição de um termo exponencial. Segundo o autor (Yeoh, 1996), esta mudança é responsável por melhorar a qualidade dos ajustes e previsões para pequenas deformações (problema crônico encontrado em YI3). Pelo presente estudo ratifica-se parte da afirmação, já que para vários casos de estudo (seções 5.1.2, 5.2.2, 5.2.3 e 5.3.2), os resultados foram insatisfatórios.
- O modelo YMI se ajusta bem à faixa de grandes deformações, entretanto, deve-se priorizar os ajustes para o ensaio  $T$ .
- A partir dos resultados obtidos, é preferível o emprego do modelo original YI3.

#### 5.4.20. Modelo de Yamashita-Kawabata (YKI)

- Consiste em uma modificação do modelo YI2 (substituição do expoente quadrático, por um coeficiente a ajustar). Foi o precursor de um novo grupo de modelos hiperelásticos característicos da década de 1990.
- Comparado com o seu precursor, o modelo YKI exibiu melhor comportamento. Todavia, confrontado com os resultados obtidos com o modelo de YI3, que emprega o mesmo número de constantes, o modelo YKI manifestou inferioridade na representação do material, com ênfase para os ensaios  $P$  e  $B$ .
- O modelo se ajusta bem à faixa de grandes deformações. Entretanto, deve-se priorizar os ajustes para  $T$ .
- Apresenta problemas de convergência em alguns casos.

#### 5.4.21. Modelo de Amin (AI)

- Consiste em uma modificação do modelo YKI para descrever o fenômeno de amolecimento em pequenas deformações. Isto justifica os melhores resultados encontrados para o modelo em relação ao seu precursor na análise da amostra de borracha natural ( $0 \leq e \leq 100\%$ ).

- Pode ser empregado para grandes deformações ( $e \leq 700\%$ ) desde que ajustado para  $T$ .
- Se ajustado para  $B$  não consegue capturar com fidelidade o efeito de enrijecimento do material, embora forneça uma boa representatividade da curva  $t \times e$  para todos os ensaios  $(T, S, B)$ .
- Deve ser utilizado com atenção à forma da curva do material, pode eventualmente apresentar problemas de convergência.

#### 5.4.22. Modelo de Davis- De-Thomas (DDTI)

- Emprega uma expressão para a energia de deformação similar ao modelo YKI.
- Não demonstrou bons resultados para nenhum dos materiais avaliados, prevalecendo a má representatividade da curva  $t \times e$ , aliada a ajustes e predições errôneas.
- Os resultados sugerem que o modelo seja empregado para pequenas deformações com extrema atenção a curva do material.
- Não obstante, não se recomenda a utilização deste modelo hiperelástico.

#### 5.4.23. Modelo de Gregory (GYI)

- Consiste em uma modificação do modelo de DDTI. Ao contrário de seu precursor, forneceu resultados satisfatórios para todos os materiais avaliados.
- Para a amostra de borracha natural ( $0 \leq e \leq 100\%$ ), reproduziu com fidelidade o comportamento da curva  $t \times e$ , fornecendo excelentes predições para os três ensaios  $(T, S, B)$ .
- Pode ser empregado para problemas envolvendo grandes deformações  $e = 700\%$ , devendo o ajuste ser realizado para tração uniaxial.

#### 5.4.24. Modelo de Takamizawa-Hayashi (THI)

- O modelo apresentou comportamento anômalo para todos os materiais avaliados, exibindo um comportamento extremamente suave para a curva  $t \times e$ .
- Os resultados obtidos sugerem aplicações bem específicas. Deve-se lembrar que o material foi desenvolvido para a modelagem de artérias humanas.

#### 5.4.25. Modelo de Edwards-Vilgis (EVI)

- Embora não capture com fidelidade o efeito de enrijecimento do material, é capaz de fornecer boa representatividade da curva  $t \times e$  para todos os ensaios  $(T, S, B)$ .
- O modelo se ajusta bem à faixa de grandes deformações. Para pequenas deformações deve-se preferir por ajustes para  $T$ .

#### 5.4.26. Modelo de Arruda-Boyce (ABI5)

- É o modelo mais indicado no caso de disponibilidade de apenas um único teste experimental, desde que as curvas não apresentem enrijecimento muito acentuado.
- É limitado para deformações até 300%, mas pode produzir erros significativos em pequenas deformações.
- Em boa parte dos casos práticos, o modelo de ABI5 fornece resultados muito similares ao modelo NHI, mas é capaz de capturar os efeitos de enrijecimento à grandes deformações, desde que não sejam muito acentuados.

#### 5.4.27. Modelo de Gent (GI)

- Aplica-se as mesmas recomendações do modelo de ABI5.
- Fornece uma forma muito efetiva de se modelar o comportamento de borrachas sob grandes deformações, ao custo de uma única (ou duas) constante(s).
- As predições deste modelo são curiosamente boas em toda a faixa de deformação ajustada.



#### 5.4.28. Modelo de Yeoh-Fleming (YFI)

- O modelo de YFI abre um novo grupo, que consiste em modelos desenvolvidos a partir de modificações do modelo GI, dada sua excelente capacidade de predição.
- Este modelo se ajusta com extrema facilidade à todos os casos e a todas as faixas de deformação, exibindo excelentes predições para os três ensaios  $(T, S, B)$ .
- É uma excelente escolha para a maioria das borrachas naturais e materiais biológicos que apresentam o fenômeno de enrijecimento em deformações elevadas.
- Pode ser empregado para deformações de até 700%. Os melhores resultados são encontrados para o ajuste realizado para  $T$ .

#### 5.4.29. Modelo de Gent de 03 Parâmetros (G3I)

- O modelo G3I apresenta boa representatividade da curva  $t \times e$  ajustada, capturando com fidelidade o efeito de enrijecimento do material. Entretanto, fornece predições ruins para os ensaios diferentes do da calibração.
- Pode ser empregado em todas as faixas de deformação.

#### 5.4.30. Modelo de Pucci-Saccomandi (PSI)

- Introduzido como promissor na modelagem de materiais que apresentam o fenômeno de enrijecimento em deformações elevadas, o modelo PSI apresentou comportamento insatisfatório. Ressalta-se que o mesmo consiste em uma modificação do modelo GI através da adição de um termo logarítmico dependente do segundo invariante de deformações.
- Para a amostra de materiais avaliados o modelo PSI apresentou excelente comportamento apenas para o conjunto de dados de Treloar, para os demais materiais avaliados o modelo apresentou ajustes/predições ruins e ou errôneas.
- Não se recomenda utilizar o modelo para problemas envolvendo pequenas deformações, visto que o modelo fornece predições ruins para os ensaios diferentes do da calibração.

- Pode ser empregado para deformações de até 700%, porém as curvas  $t \times e$  para os ensaios  $(T, S, B)$  devem apresentar comportamento similar aos dados de Treloar.

#### **5.4.31. Modelo de Horgan-Saccomandi (CHGSI)**

- O modelo CHCSI difere do modelo PSI na forma como o  $I_2$  é empregado na energia de deformação.
- Não apresenta bons resultados, se ajustando a faixas limitadas de deformação.
- Tabulando o custo computacional e a qualidade dos resultados obtidos, é preferível utilizar o modelo GI.

## 6. PROPOSTA DE ESTIMADOR DE QUALIDADE DOS AJUSTES

Conforme apresentado no Capítulo 5 a avaliação visual dos modelos constitutivos têm sido baseada em critérios subjetivos, o que torna o processo de seleção suscetível a erros e bastante questionável em alguns casos. Uma forma adotada por vários autores para verificar a qualidade dos ajustes e previsões é calcular o erro relativo das tensões entre as soluções teóricas e experimentais. Este erro, dado em percentual é definido por (Devore, 2008):

$$ERRO_{\%}(\lambda) = \frac{|t_e(\lambda) - t_i(\lambda)|}{t_e(\lambda)} \times 100 \quad (6.1)$$

onde  $t_e(\lambda)$  e  $t_i(\lambda)$  representam os valores de tensão experimental e numérico respectivamente.

A Figura 6.1, ilustra uma análise utilizando este conceito para quatro modelos constitutivos que ilustram algumas situações práticas encontradas na seleção dos modelos constitutivos. Os modelos foram ajustados à tração ( $0 \leq e \leq 700\%$ ), empregando o conjunto de dados experimentais de Treloar.

Claramente, o estimador da eq.(6.1) fornece erros muito elevados para pequenas deformações para todos os modelos avaliados na Figura 6.1. Do ponto de vista da seleção de modelos constitutivos, fica explícito, que o estimador empregado mede erros relativamente grandes, de forma imprópria, e até mesmo errônea para modelos que exibem um bom comportamento (salienta-se que em problemas hiperelásticos é comum encontrar erros da ordem de 30%). O primeiro ponto que chama a atenção é a incapacidade do medidor de erro em capturar o efeito de enrijecimento elevado das previsões dos modelos polinomiais clássicos (ver Figura 6.1a), onde as curvas para  $P$  e  $B$  sequer se enquadraram nos limites do gráfico. Através da Figura 6.1b, também se verifica a dificuldade do medidor em representar a divergência entre os resultados da previsão numérica em relação aos ensaios experimentais. Analisando o comportamento da previsão do ensaio de tração biaxial, constata-se que a medida empregada fornece erros aproximadamente iguais para toda a faixa de deformações, muito embora, o mesmo não se verifica na prática (Figura 6.2b). Outro aspecto relevante, é que para modelos que apresentem comportamento similar (Figuras 6.2c e 6.2d), não é possível aferir com exatidão qual o melhor modelo (Figuras 6.1c e 6.1d). Isto é ruim para a seleção dos modelos, e ocorre devido a baixa sensibilidade do medidor. Dado a disposição e forma como os resultados são ilustrados (Figura 6.1), somado a dificuldade de interpretação, e a grande gama de modelos a ser avaliada, a presente metodologia se mostra inadequada para os fins requeridos.

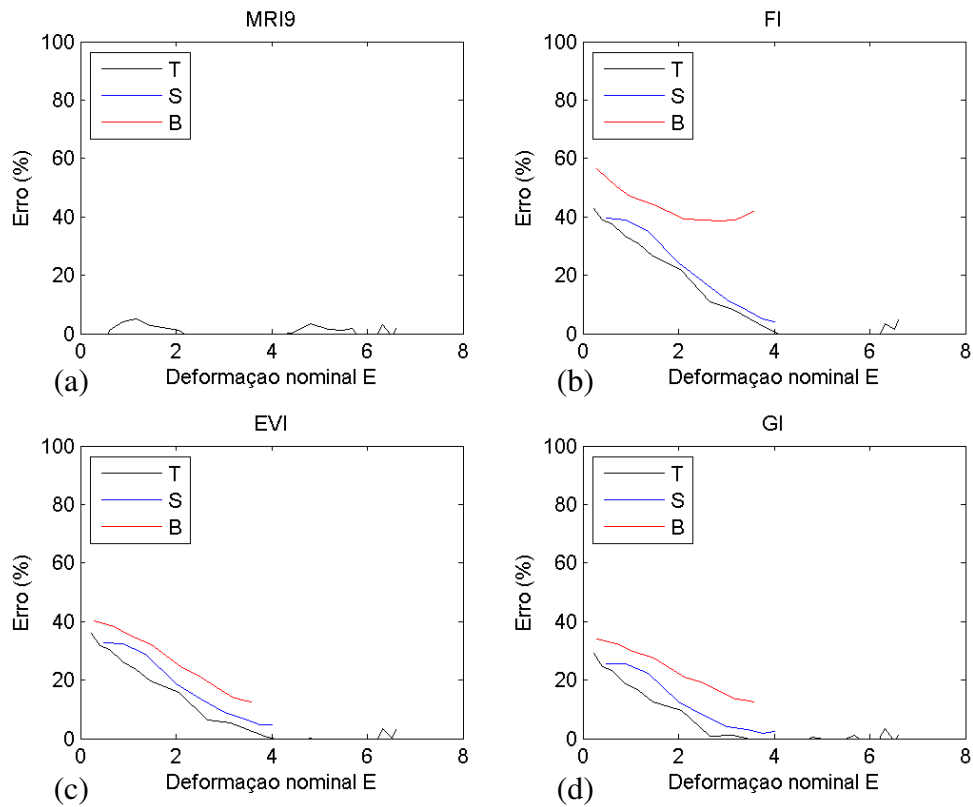


Figura 6. 1 – Avaliação dos modelos utilizando a eq.(6.1).

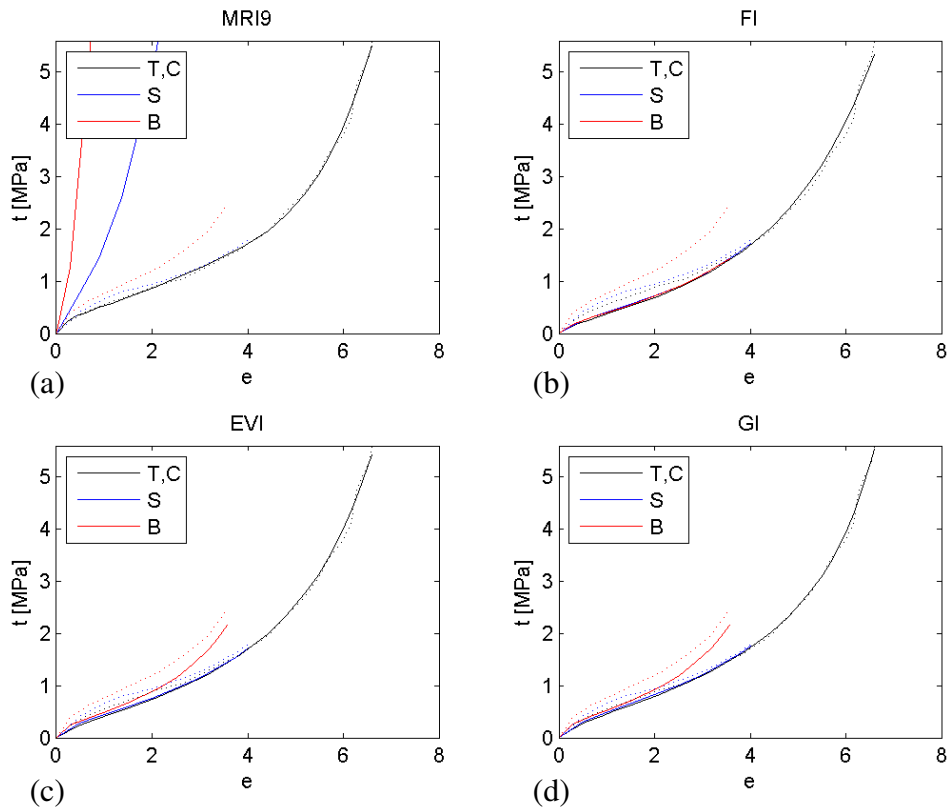


Figura 6. 2 – Comparação das previsões numéricas com as curvas experimentais.

A análise para os demais modelos avaliados neste Capítulo é apresentada no Apêndice C.

Atualmente os laboratórios desenvolvem uma variedade enorme de novos compostos elastoméricos, regido pelas necessidades do mercado. Em função disto é imprescindível se dispor de uma ferramenta eficaz para verificar e qualificar o comportamento dos diversos modelos hiperelásticos. Medidas como a da eq.(6.1) não permitem ao analista discernir sobre os diversos modelos comparados.

Uma forma muito comum de avaliar a qualidade das predições é através do cálculo do coeficiente de correlação entre as soluções numérica e experimental. No entanto, remete-se ao fato de que a grande maioria dos ajustes é não-linear (modelos e formulações complexas para o cálculo do coeficiente de correlação), inviabilizando assim o emprego direto do  $R^2$  na sua forma convencional e mais conhecida aplicada para ajustes lineares (Devore, 2008). Para ajustes lineares,  $R^2$  é definido como (Devore, 2008):

$$R^2 = 1 - \frac{S_{Se}}{S_{Stot}}$$

$$S_{reg} = \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t}_e)^2$$

$$S_{Stot} = \sum_{i=1}^n (t_e - \bar{t}_e)^2$$
(6.2)

onde  $S_{Stot}$  e  $S_{reg}$  representam o somatório dos quadrados em torno da média,  $S_{Stot} = S_{reg} + S_{Se}$ . O coeficiente  $R^2$  pode assumir qualquer valor entre 0 e 1, sendo que o valor 1 indica que o valor integral da variância é contemplado pelo modelo. Por exemplo, um valor de 0.8234 para  $R^2$  significa que o ajuste mapeia 82.34% da variação de valores em torno da média.

Esta característica do coeficiente de regressão é muito atrativa para a classificação e seleção de modelos constitutivos, sendo que será a base do desenvolvimento de um novo índice para a apreciação dos modelos hiperelásticos. Entretanto, cabem algumas considerações sobre o emprego direto de medidas lineares do coeficiente de correlação.

Fica implícito a partir da Figura 6.3 que a medida  $R^2$  linear apresenta erros muito grandes para as curvas ajustadas, não condizendo com a realidade (Figura 6.2). Nota-se também, que a medida fornece valores errôneos para  $R^2$  em casos em que a predição da curva  $t \times e$  diverge da experimental (ver predição do ensaio biaxial Figura 6.3b). Apesar destas particularidades, verificam-se resultados mais coerentes para o comportamento dos modelos em pequenas deformações. Destaca-se também, que o comportamento extremamente rígido das predições dos modelos polinomiais clássicos foi mapeado com êxito (Figura 6.3a).

Outro aspecto interessante e atrativo para os fins requeridos neste trabalho, é que ao contrário de medidas convencionais como a da eq.(6.1), o emprego de um coeficiente de correlação permite ao analista discernir de forma clara sobre o comportamento dos modelos, facilitando assim o processo de seleção.

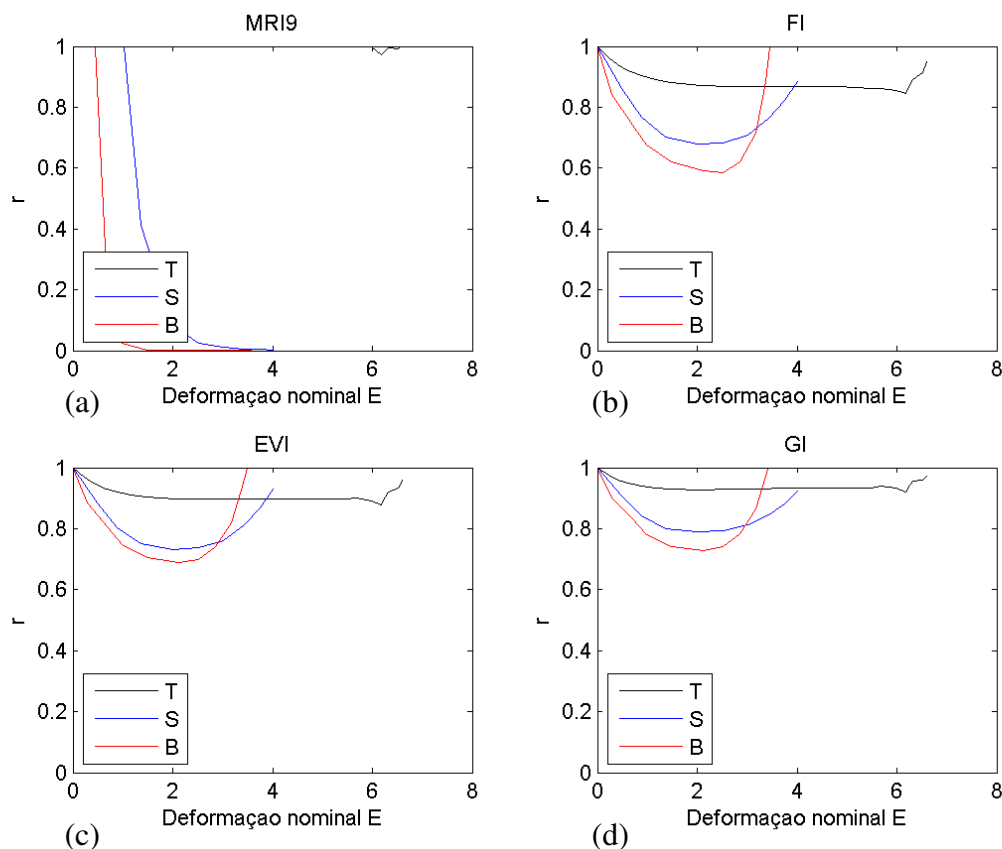


Figura 6.3 - Avaliação dos modelos utilizando o estimador da eq.(6.2).

### 6.1. Estimador $R^2$ Não-Linear

Claramente, a partir da Figura 6.3 constata-se a necessidade de um  $R^2$  específico para ajustes não-lineares. Entretanto, deve-se considerar a complexidade de avaliação e implementação computacional dos modelos clássicos, hoje existentes para coeficientes de regressão não-lineares. Em função disso, tem-se como premissa neste trabalho o emprego de uma medida que atenda aos seguintes critérios: Em primeiro lugar, é imprescindível que o  $R^2$  proposto seja compatível com ajustes não-lineares, uma vez que a maioria dos modelos hiperelásticos emprega expressões deste tipo. Em segundo, a medida deve ser de fácil implementação computacional, de forma a viabilizar o seu emprego em softwares de simulação, que atualmente não possuem um algoritmo específico para a avaliação da qualidade dos seus ajustes e previsões.

Por fim, a medida deve ser matematicamente consistente, e retratar com fidelidade o comportamento dos ajustes e previsões para as várias situações encontradas no Capítulo 5.

A partir dos critérios de seleção utilizados no Capítulo 5, é imperativo a necessidade de uma nova forma de avaliação dos modelos constitutivos entre si. Têm-se como premissa para tal, o desenvolvimento de uma medida simples e prática, que forneça resultados confiáveis e permita classificar e selecionar de forma rápida e concisa os diversos modelos hiperelásticos a serem avaliados. Baseado nos critérios especificados acima, no conceito do  $R^2$  linear e na teoria geral para ajustes não-lineares de curvas, propõe-se a seguinte expressão para o coeficiente de regressão:

$$R^2 = 1 - \frac{S_{reg}}{S_{Stot}} \quad (6.3)$$

$$S_{reg} = \sum_{i=1}^n (t_e - t_t)^2$$

$$S_{Stot} = \sum_{i=1}^n w_i (t_e - \bar{t}_e)^2$$

onde  $t_e$  e  $t_t$  representam respectivamente os valores de tensão experimental e numérico. De maneira geral, o coeficiente  $R^2$  é calculado a partir do somatório do quadrado das distâncias entre os pontos de tensão experimental e ajustados pela regressão não-linear. Este valor resultante será doravante denominado  $S_{reg}$ . Para tornar  $R^2$  adimensional o resultado é normalizado pelo somatório do quadrado das distâncias de todos os pontos experimentais em relação a sua própria média, denominado  $S_{Stot}$ . Se o modelo se ajusta bem aos dados experimentais,  $S_{reg}$  assume valores muito menores que  $S_{Stot}$ . A Figura 6.4 ilustra o significado geométrico de seus termos  $S_{reg}$  e  $S_{Stot}$  da eq.(6.3).

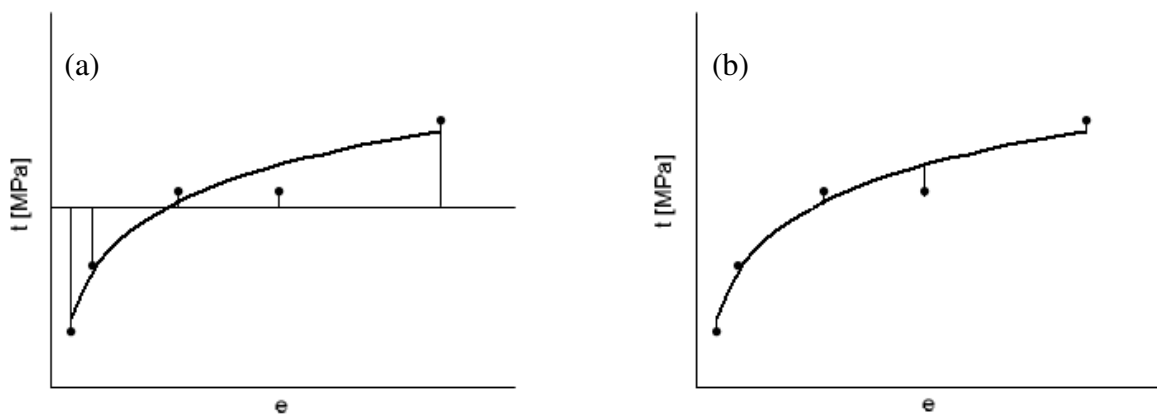


Figura 6. 4 – Variáveis envolvidas no cálculo do  $R^2$ . (a) -  $S_{Stot}$ . (b) -  $S_{reg}$ .

Salienta-se para a função da média ( $S_{Stot}$ ), responsável por levar em conta a faixa de abscissas (deformações) utilizadas no ajuste. O seu emprego na formulação do coeficiente de regressão é de suma importância, pois pondera  $S_{reg}$  em função da faixa de deformações e da magnitude das tensões experimentais, influenciando assim diretamente no valor do  $R^2$ . Sua influência fica evidente através da Figura 6.5, em que o caso (a) ilustra um ajuste para  $e = 400\%$ , e o caso (b) simula um ajuste para  $e = 600\%$ . Esta evidente que o caso (a) apresentou um valor menor para  $R^2$ , estando diretamente associado ao valor da média  $S_{Stot}$ . Isto se ratifica, analisando a eq.(6.3) em conjunto com os valores de  $S_{Stot}$  para ambos os casos, que foram respectivamente de 370.8 para o caso (a) e 4434.6 para o caso (b). Fica assim implícito para  $R^2$  dado pela eq.(6.3) uma forte dependência da faixa de deformações.

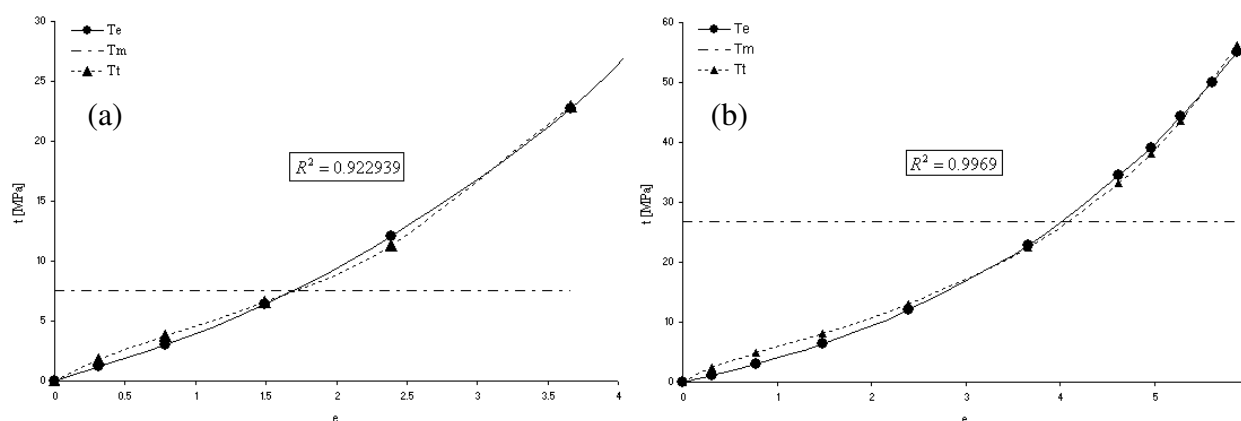


Figura 6. 5 – Influência da média ( $S_{Stot}$ ) no cálculo do  $R^2$ .

Note que na realidade  $R^2$  não representa o quadrado de nenhuma variável intrínseca do problema. Se  $S_{reg}$  é muito maior que  $S_{Stot}$ ,  $R^2$  fornece valores negativos. Este fato pode representar uma surpresa para o leitor desapercebido uma vez que uma medida que faz alusão ao termo quadrático venha a apresentar valores negativos. Note-se, entretanto, que  $R^2$  não representa o quadrado de  $R$ . Valores negativos podem ser interpretados como fortes indícios de que o modelo hiperelástico selecionado não se ajusta bem ao conjunto de dados experimentais empregado.

A fim de validar a eq.(6.3), a mesma será empregada para os modelos ilustrados no Capítulo 5. Pretende-se com isto formalizar uma metodologia, retirando a subjetividade usada na classificação sugerida no Capítulo 5 (ver Tabelas 5.2, 5.3 e 5.4). Pretende-se mostrar que o uso da medida de erro da eq.(6.3) pode ser efetivamente empregada, não apenas como critério para selecionar modelos constitutivos, mas também como um parâmetro de comparação unívoco entre dois ou mais modelos.



Com o intuito de evitar a proliferação de gráficos, os ajustes e previsões serão realizados apenas para o ensaio de tração uniaxial e biaxial, uma vez que os resultados mais expressivos foram obtidos empregando estes ensaios. Os resultados serão apresentados através de um diagrama de barras que ilustra o valor mínimo do coeficiente de regressão, correlacionado a um gráfico que explicita o comportamento dos ajustes e previsões dentro da faixa de deformações de obtenção das constantes hiperelásticas.

## 6.2. Caso de Estudo: Borracha Natural – Grandes Deformações

### 6.2.1. Ajuste para Tração Uniaxial

Semelhante ao Capítulo 5, as constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 700\%$ , entretanto, a cada incremento de 100% nos alongamentos era ajustado um novo grupo de constantes, verificando-se as previsões para os casos de cisalhamento puro ( $P$ ) e tração biaxial ( $B$ ) na mesma faixa de deformações.

As Figuras 6.7 a 6.9 apresentam uma análise gráfica do coeficiente de correlação. Para o material avaliado, claramente dentre os modelos hiperelásticos e faixas de deformações avaliadas destacam-se os resultados obtidos com o modelo PSI ajustado na faixa  $0 \leq e \leq 500\%$ . Esta avaliação por si só valida a metodologia proposta, se mostrando uma ferramenta com um vasto potencial para a seleção de modelos constitutivos. Nota-se que a subjetividade da análise foi retirada, uma vez que a escolha ficou ponderada em função de um número real.

Facilmente a partir da Figura 6.7 verifica-se que os modelos polinomiais MRI9 e HNI1 forneceram previsões ruins para todas as faixas de ajuste para os ensaios diferentes do da calibração. Os modelos biomecânicos FI e KI não exibiram bom comportamento para grandes deformações com ênfase para a previsão do ensaio de tração biaxial ( $B$ ).

O modelo de KI ajustado para  $e = 700\%$  (Figura 6.7d) exprime um comportamento anômalo para a curva  $t \times e$  (previsões  $P, B$ ), em que para faixas moderadas de deformações verificam-se erros maiores em relação à deformações mais elevadas. Considera-se como exemplo para o caso, um componente com regiões submetidas a um campo distinto de deformações variando de  $0 \leq e \leq 700\%$ . Para as regiões expostas a grandes deformações teremos previsões aceitáveis de tensão, entretanto para faixas moderadas de alongamento serão preditos níveis errôneos de tensão, ocasionando o mau dimensionamento da peça.

O modelo OI2 (Figura 6.8) teve excelente comportamento para ajustes até 300%, acima deste valor, o modelo fornece previsões ruins para o ensaio de tração biaxial. Os modelos YI3 e YMI apresentaram bons resultados para tração uniaxial e cisalhamento puro, entretanto, o modelo YMI exibiu comportamento espúrio para a predição do ensaio de tração biaxial. O modelo YKI teve os melhores resultados quando ajustado na faixa  $0 \leq e \leq 100\%$  (Figura 6.8a).

Os modelos EVI e GI, não conseguiram representaram com fidelidade a predição do ensaio de tração biaxial para deformações superiores a 100%, como mostrado nas Figuras 6.9b, 6.9c e 6.9d. O modelo YFI apresentou melhor comportamento quando ajustado para  $e = 700\%$  (Figura 6.9d). Com exceção do ajuste para  $e = 300\%$ , Figura 6.9c, o modelo PSI conseguiu representar com fidelidade o comportamento da curva  $t \times e$  para os três ensaios ( $T, P, B$ ). A Figura 6.6 compara a qualidade dos ajustes e previsões para o modelo PSI para quatro faixas distintas de deformação, ficando implícitos os excelentes resultados do modelo. Destaque-se que, através de gráficos como o da Figura 6.6, qualquer analista, mesmo sem formação profunda em hiperelasticidade, apontaria o ajuste  $e = 100\%$  como sendo o melhor, de forma muito rápida e sem gerar dúvidas. É esta característica, somada à correta caracterização dos modelos, que torna o estimador proposto uma medida de qualidade de ajuste atrativa para seleção e classificação de modelos constitutivos.

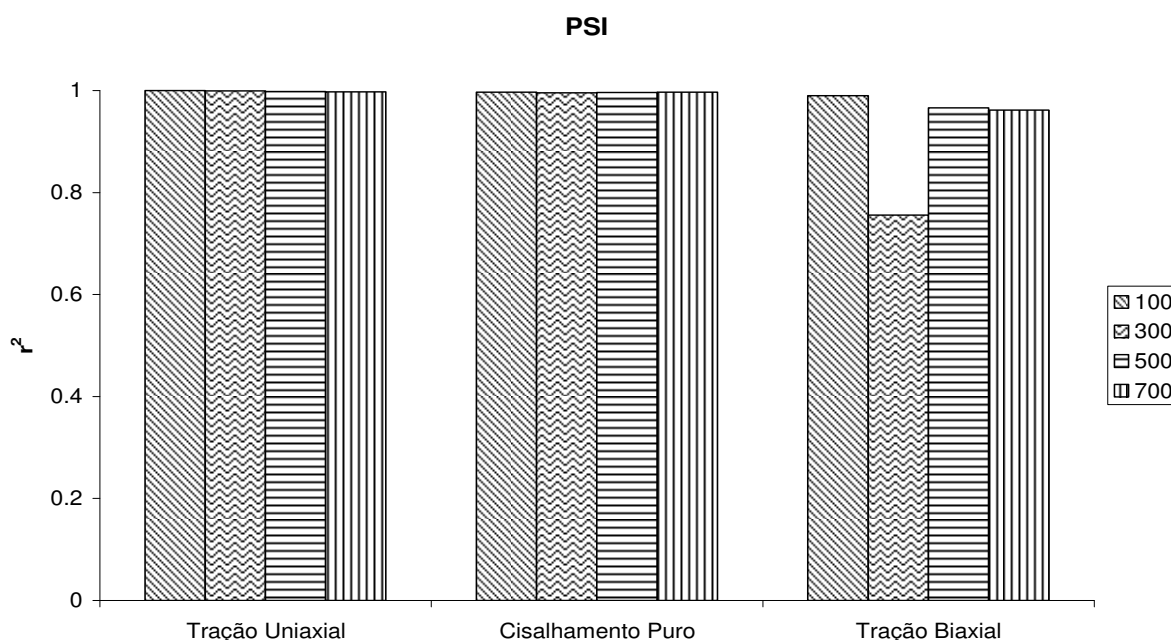


Figura 6. 6 – Comportamento do modelo PSI.

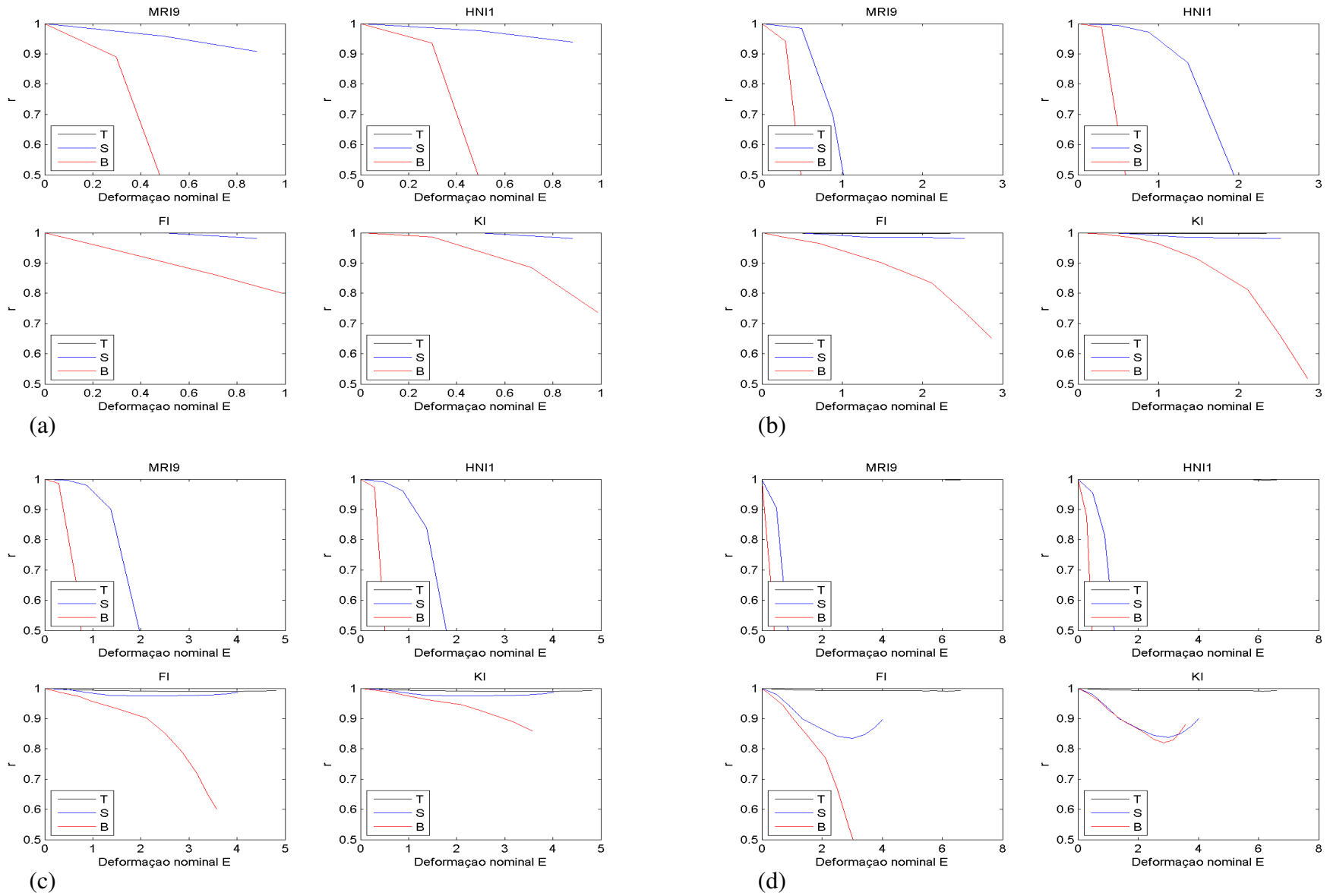


Figura 6. 7 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $T$  . (a) -  $e = 100\%$  . (b) -  $e = 300\%$  . (c) -  $e = 500\%$  . (d) -  $e = 700\%$  .

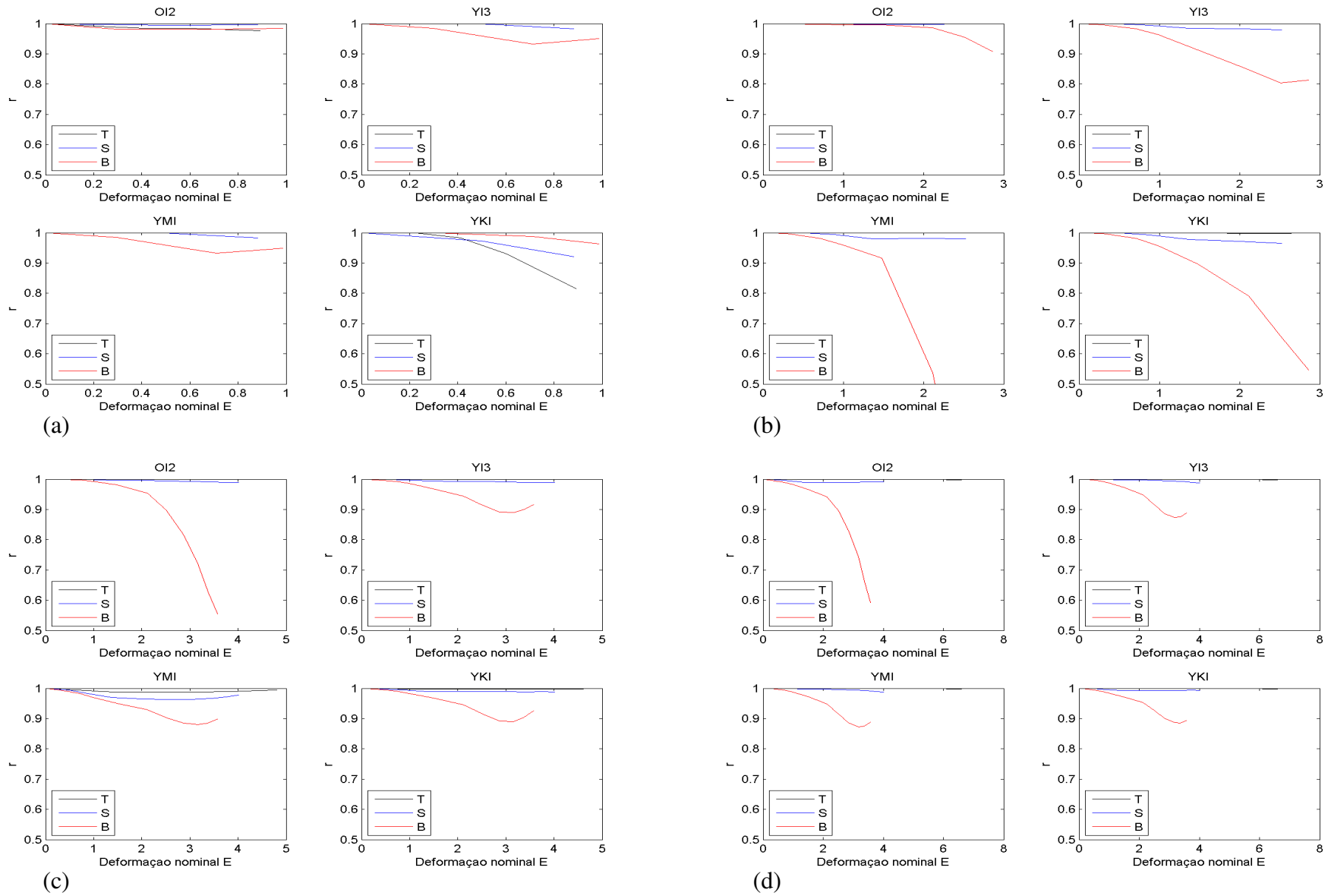
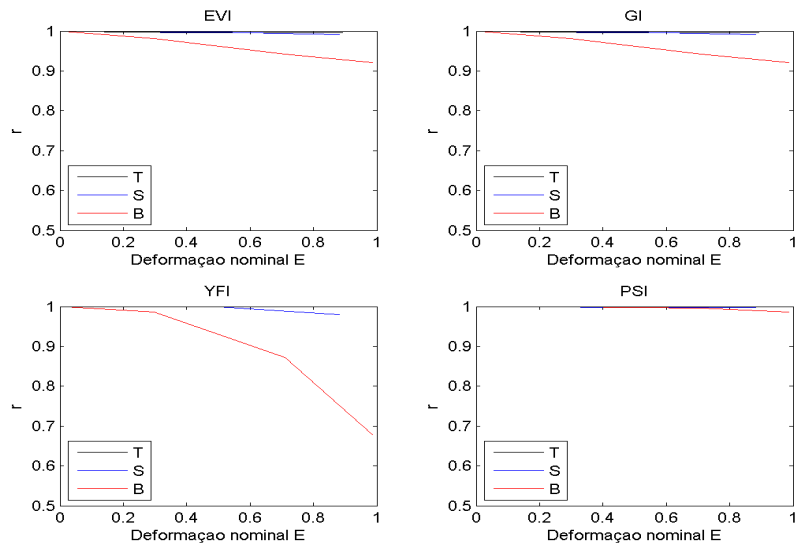
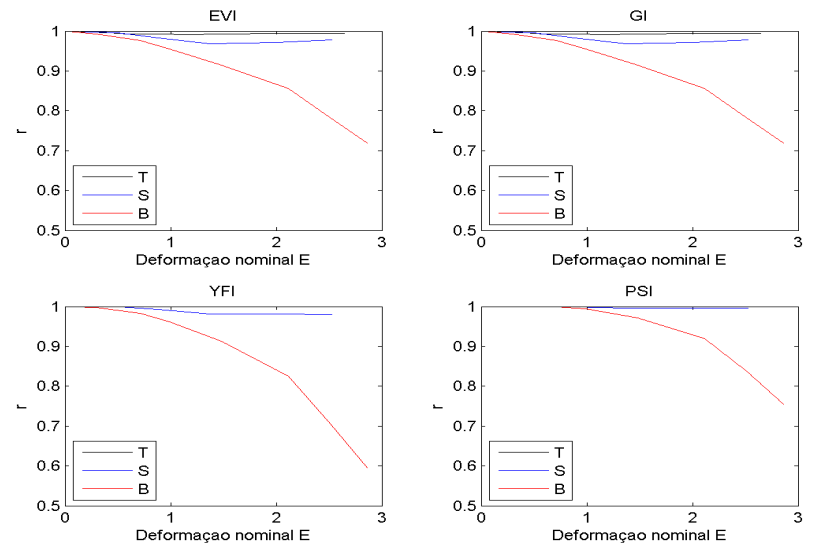


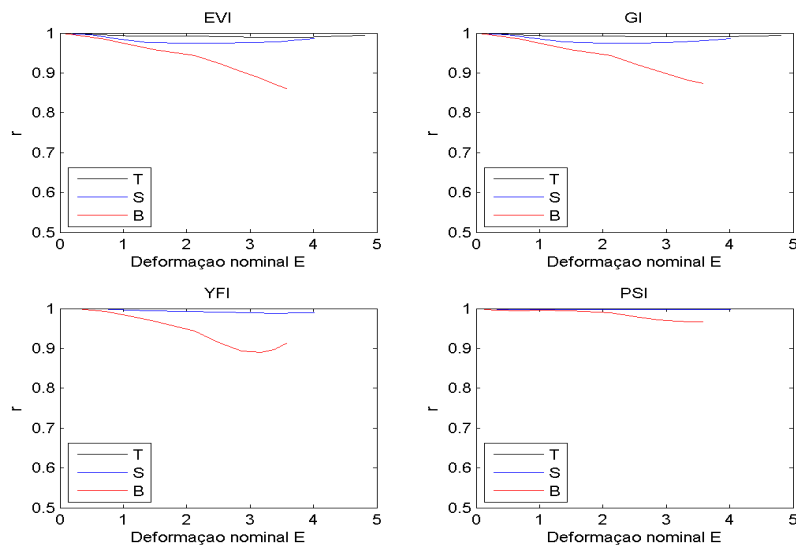
Figura 6. 8 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $T$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 300\%$ . (c) -  $e = 500\%$ . (d) -  $e = 700\%$ .



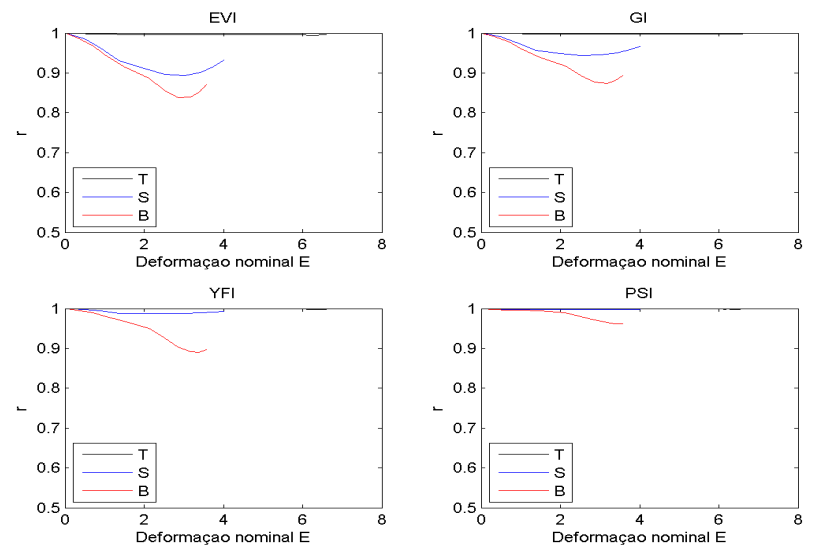
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6. 9 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $T$  . (a) -  $e = 100\%$  . (b) -  $e = 300\%$  . (c) -  $e = 500\%$  . (d) -  $e = 700\%$  .

## 6.2.2. Ajuste para Tração Biaxial

As constantes hiperelásticas foram aqui obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 350\%$ . A cada incremento de 100% nos alongamentos era ajustado um novo grupo de constantes, verificando-se as previsões para os casos de cisalhamento puro ( $P$ ) e tração biaxial ( $B$ ) na mesma faixa de deformações. As Figuras 6.11 a 6.13 apresentam uma análise gráfica do coeficiente de correlação, destaca-se que para deformações superiores a 400% os ajustes são tomados sempre em relação ao mesmo referencial, entretanto as previsões dos demais ensaios ( $T, P$ ) são extrapoladas até a sua faixa nominal de trabalho.

Os ajustes realizados com o ensaio de tração uniaxial forneceram melhores resultados, com ênfase para deformações superiores a 300%. Para este caso, notoriamente o modelo PSI, Figura 6.13d, ajustado para  $e = 500\%$  apresentou os melhores resultados para grandes deformações. Os modelos polinomiais MRI9 e HNI1 (Figura 6.11) exibiram um comportamento extremamente rígido. Enfatiza-se os resultados do modelo OI2, Figura 6.12, pelos excelentes resultados para  $e = 100\%$ , porém, com previsões errôneas para os ensaios diferentes do da calibração para deformações superiores a 300%.

Ressaltando o propósito da metodologia apresentada, é fácil verificar através das Figuras 6.12a e 6.12b que o modelo YMI é uma boa opção para deformações na faixa  $0 \leq e \leq 300\%$ , em função do comportamento suave e homogêneo de suas previsões. A fim de comparação com os resultados da seção 6.2.1, a Figura 6.10 compara a qualidade das previsões para o modelo PSI para as diferentes faixas de ajuste. Fica evidente que para problemas envolvendo grandes deformações é mandatório o emprego do ensaio de tração uniaxial para o ajuste das constantes constitutivas.

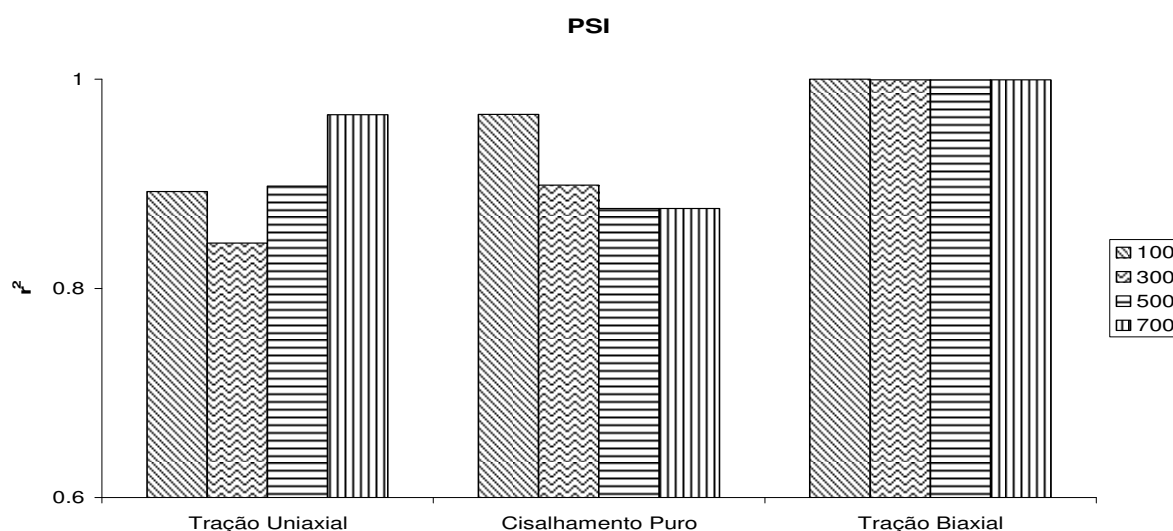


Figura 6. 10 – Comportamento do modelo PSI.

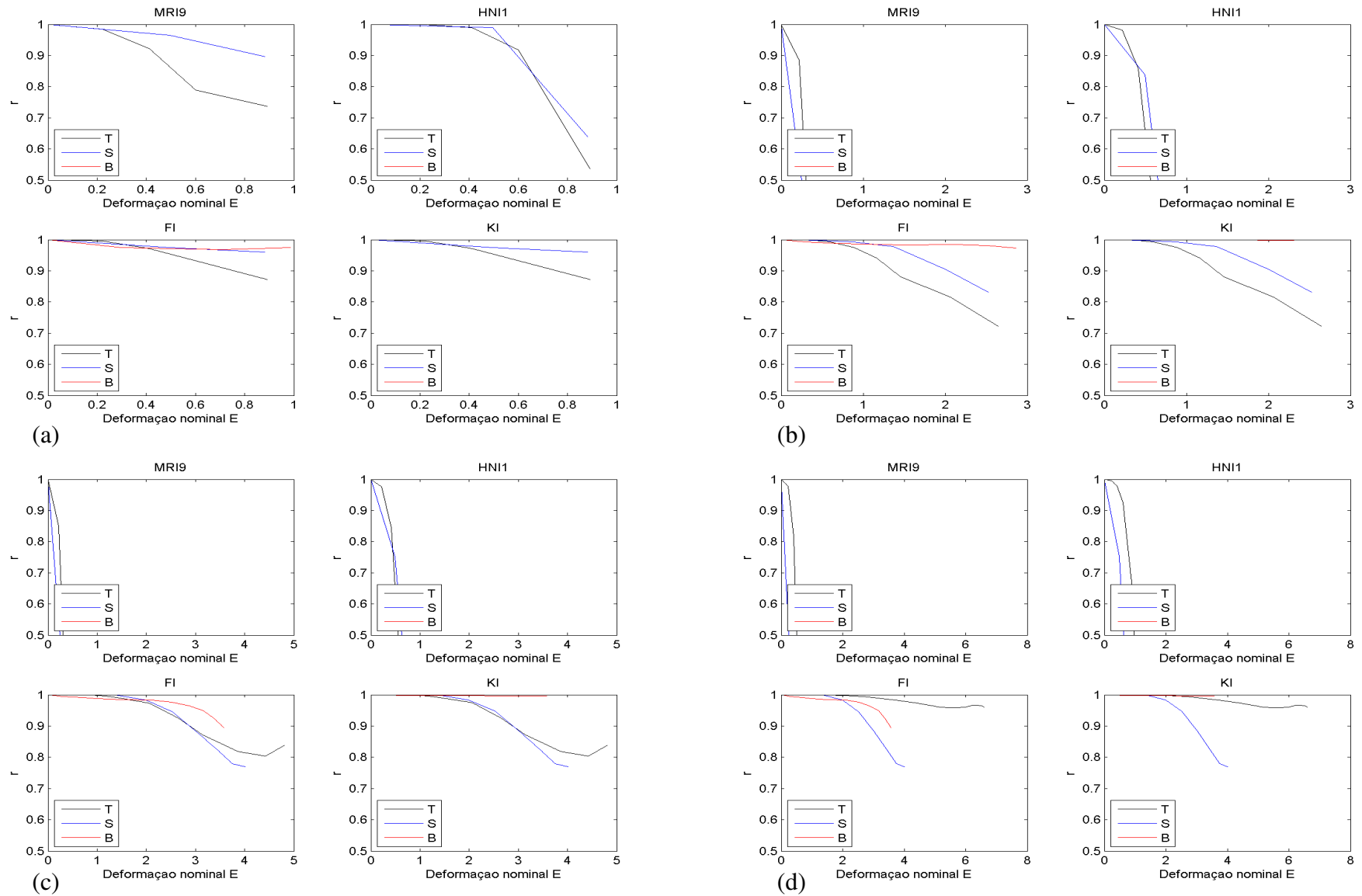


Figura 6. 11 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $B$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 300\%$ . (c) -  $e = 500\%$ . (d) -  $e = 700\%$ .

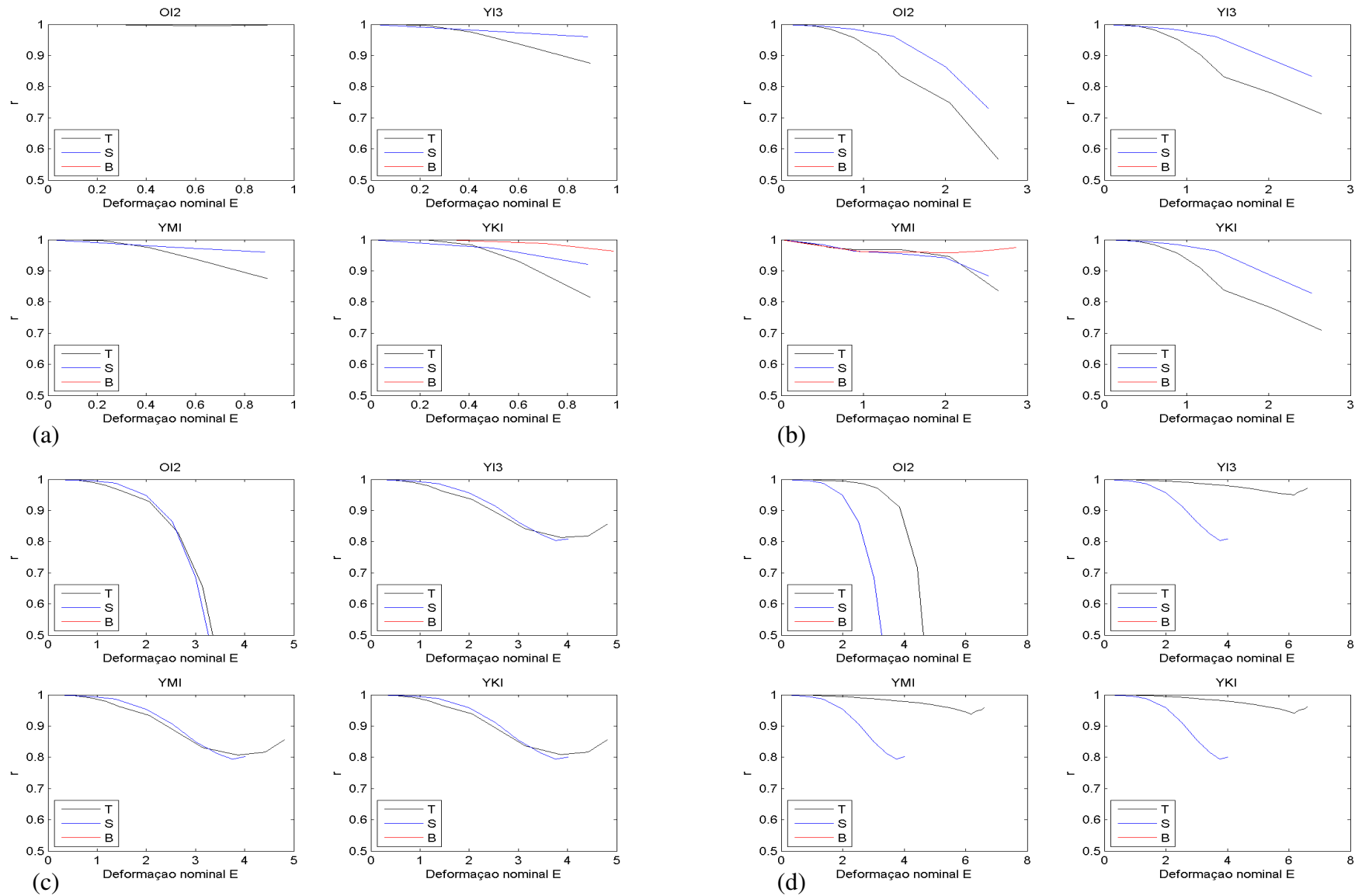


Figura 6. 12 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $B$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 300\%$ . (c) -  $e = 500\%$ . (d) -  $e = 700\%$ .



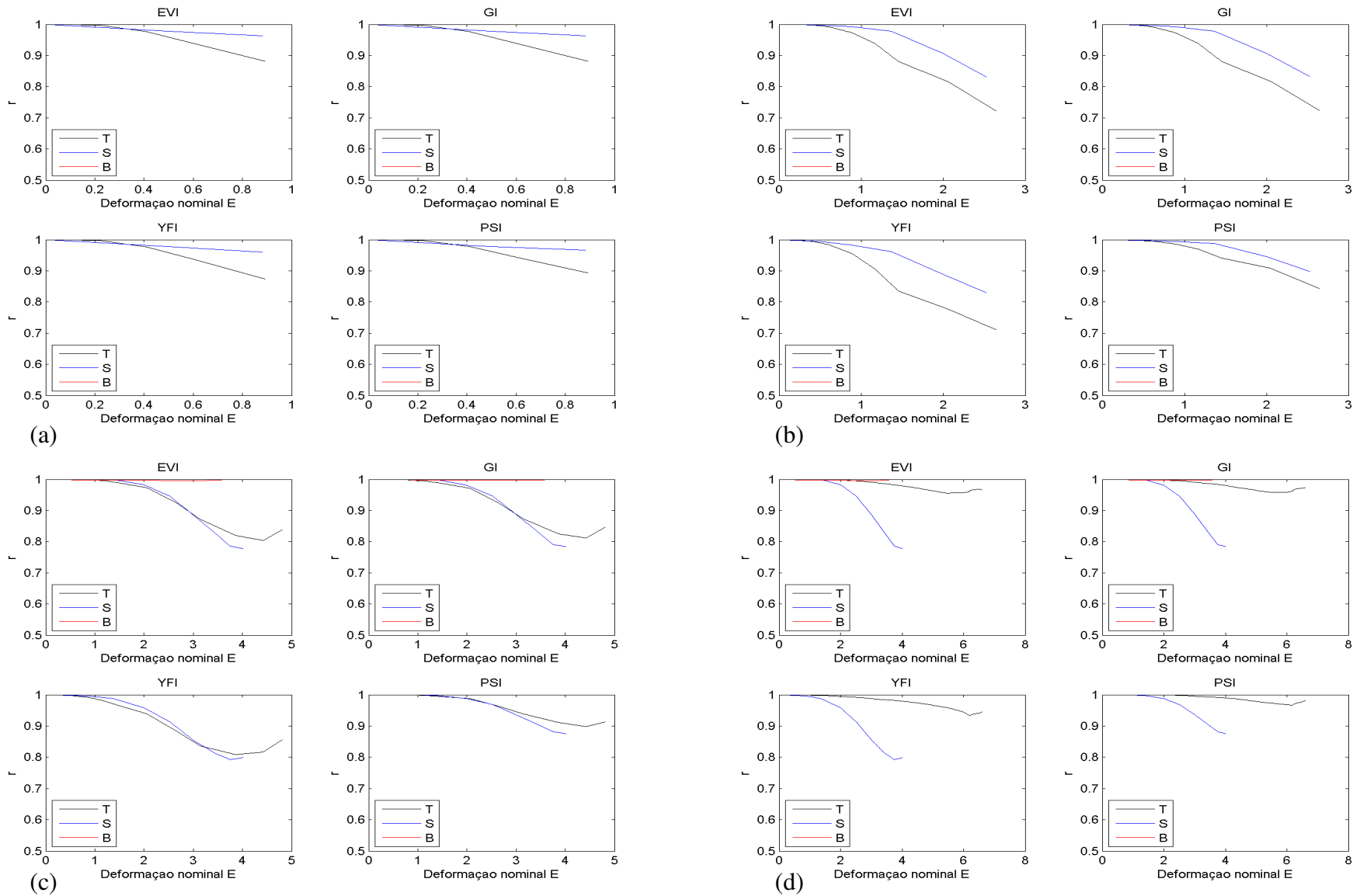


Figura 6. 13 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $B$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 300\%$ . (c) -  $e = 500\%$ . (d) -  $e = 700\%$ .

### 6.3. Caso de Estudo: Borracha Natural – Pequenas Deformações

#### 6.3.1. Ajuste para Tração Uniaxial

Aqui, as constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 130\%$ . A cada incremento de 10% nos alongamentos era ajustado um novo grupo de constantes, verificando-se as previsões para os casos de cisalhamento puro ( $P$ ) e tração biaxial ( $B$ ) na mesma faixa de deformações.

As Figuras 6.15 a 6.17 apresentam uma análise gráfica do coeficiente de correlação. O modelo YFI ajustado para  $e = 50\%$ , Figura 6.17b, apresentou os melhores resultados. Desenvolvido com o intuito de melhorar a representatividade dos ajustes e previsões em baixas deformações, o modelo YMI teve resultados muito similares ao seu modelo de base (YI3), desvalorizando assim o seu emprego, uma vez que o mesmo utiliza duas constantes constitutivas a mais. O modelo de PSI (Figura 6.17) apresentou previsões espúrias para todos os ajustes, mostrando-se muito sensível em relação ao tipo de material e faixa de deformações empregada. De forma a salientar estas diferenças, a Figura 6.14 apresenta um diagrama comparando quantitativamente os modelos YI3, YMI GI, YFI e PSI. Fica explícito, que o modelo YFI com melhores resultados, prepondera sobre os demais. O modelo de GI apesar dos bons resultados, teve dificuldade em capturar o comportamento do material para pequenas deformações, com ênfase para o ensaio de tração uniaxial.

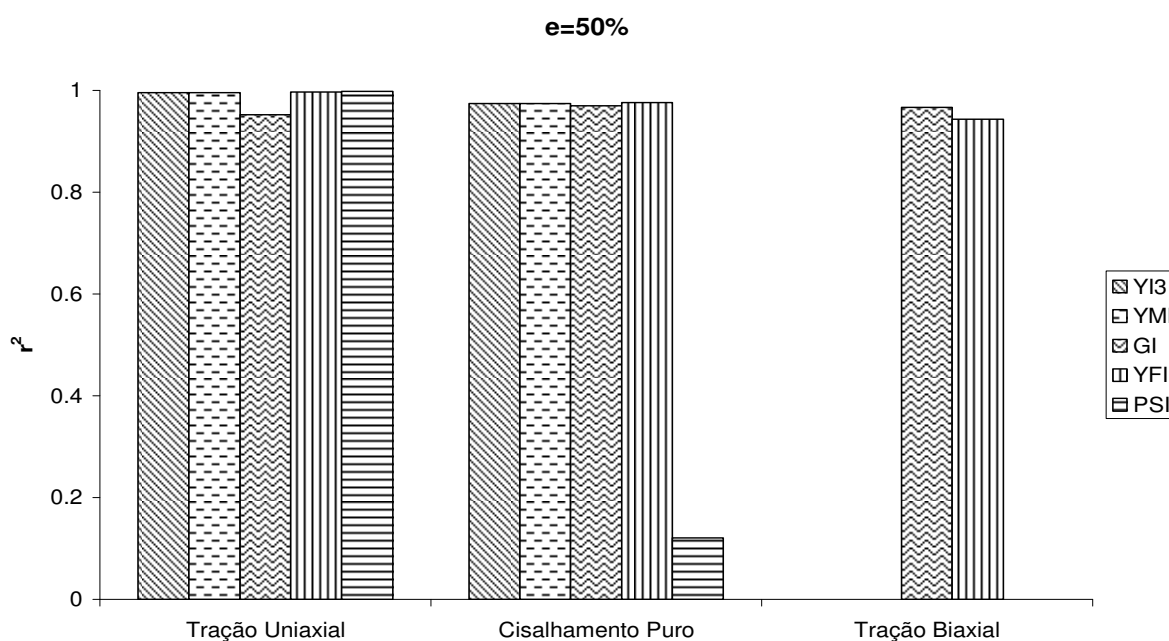


Figura 6. 14 – Borracha natural (NR55). –Ajuste para  $T$  ( $e = 50\%$ ).

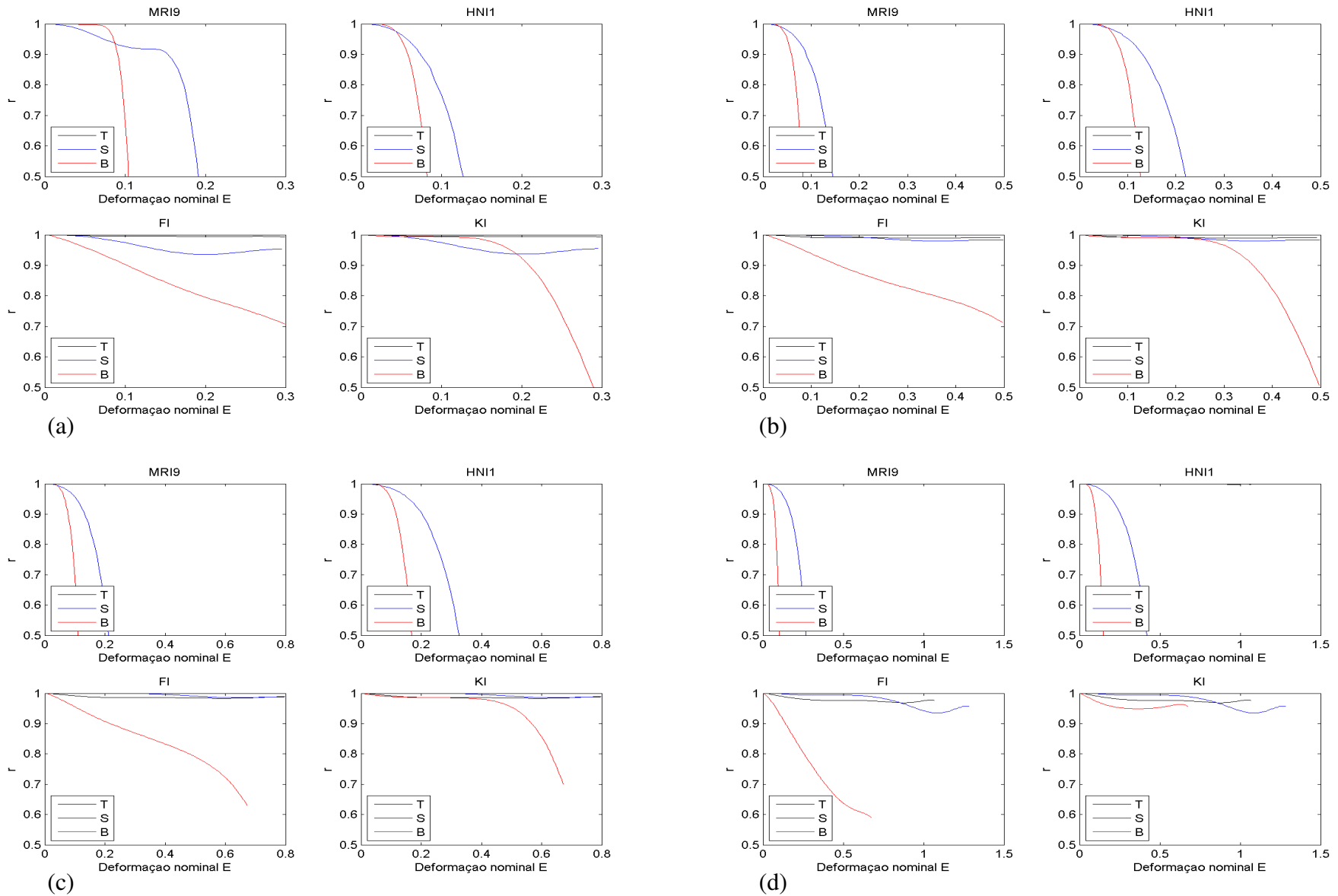


Figura 6. 15 - Borracha Natural (NR55). Ajuste para  $T$ . (a) -  $e = 30\%$ . (b) -  $e = 50\%$ . (c) -  $e = 80\%$ . (d) -  $e = 130\%$ .

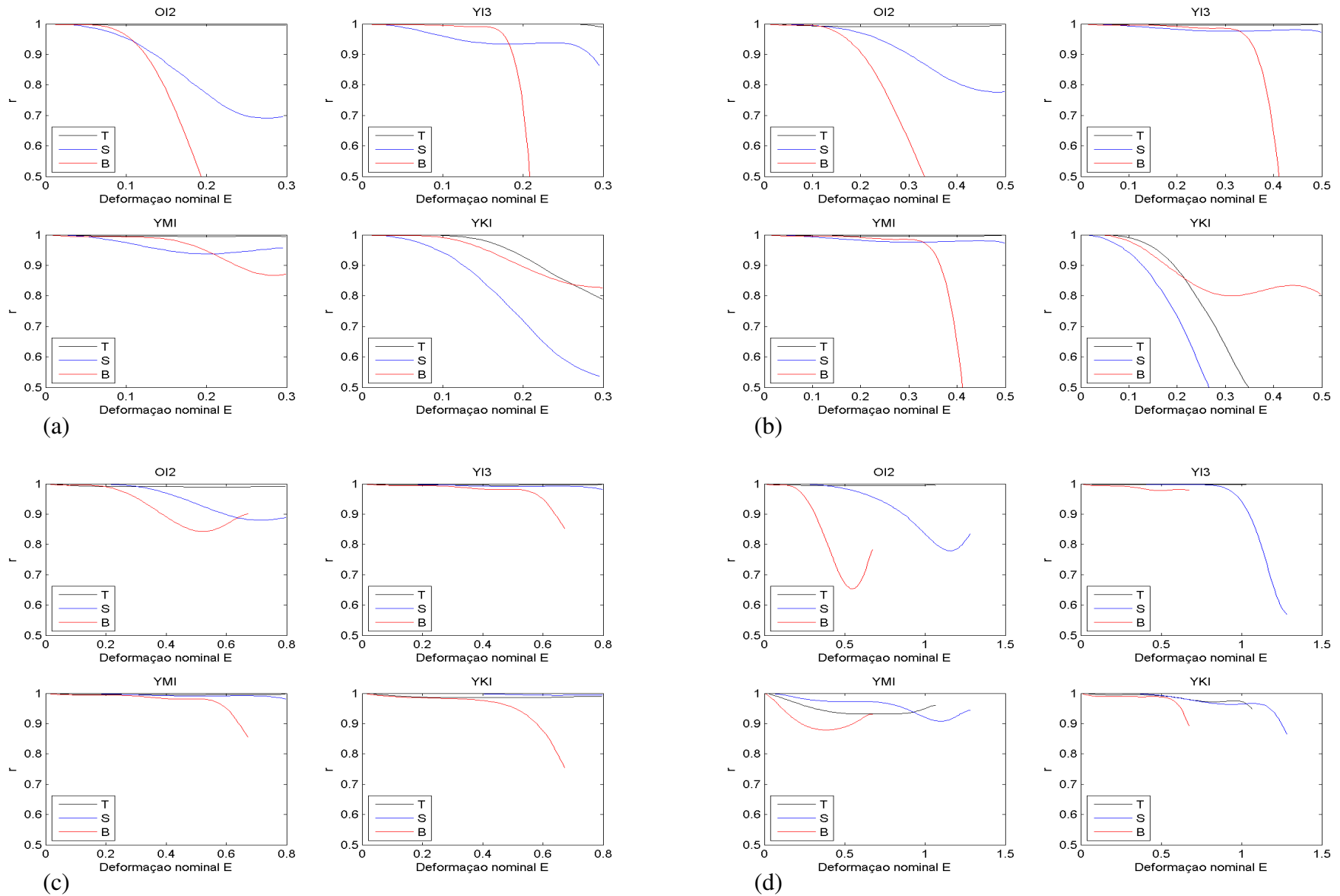


Figura 6. 16 - Borracha Natural (NR55). Ajuste para  $T$ . (a) -  $e = 30\%$ . (b) -  $e = 50\%$ . (c) -  $e = 80\%$ . (d) -  $e = 130\%$ .

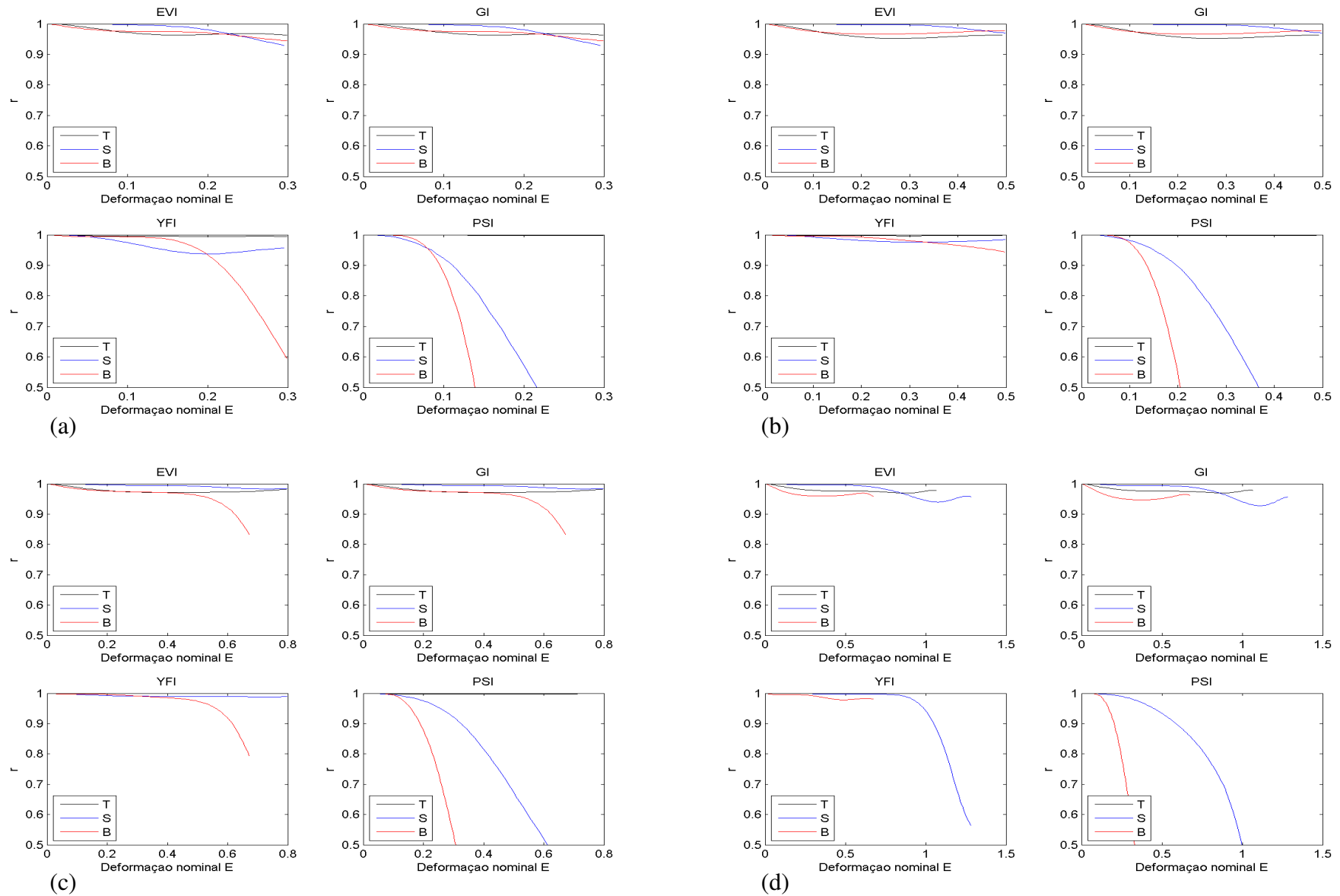


Figura 6. 17 - Borracha Natural (NR55). Ajuste para  $T$ . (a) -  $e = 30\%$ . (b) -  $e = 50\%$ . (c) -  $e = 80\%$ . (d) -  $e = 130\%$ .

### 6.3.2. Ajuste para Tração Biaxial

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 70\%$ , e aqui também, a cada incremento de 10% nos alongamentos era ajustado um novo grupo de constantes, verificando-se as previsões para os casos de tração uniaxial ( $T$ ) e cisalhamento puro ( $P$ ) na mesma faixa de deformações.

As Figuras 6.19 a 6.21 apresentam uma análise gráfica do coeficiente de correlação, destaca-se que para deformações superiores a 70% os ajustes são tomados sempre em relação ao mesmo referencial, entretanto as previsões dos demais ensaios ( $T, P$ ) são extrapoladas até a sua faixa nominal de trabalho.

Ratifica-se através deste estudo de caso que para o material avaliado, o modelo YFI (Figura 6.21) se mostra como a melhor opção. Ressalte-se o mau desempenho dos modelos YMI (Figura 6.20) e PSI (Figura 6.21) em relação aos seus precursores. É notório o mau comportamento dos modelos polinomiais MRI9 e HNI1 (Figuras 6.19). OI2 não conseguiu prever o comportamento para ensaios diferentes do da calibração para deformações superiores a 60% (Figura 6.20c e 6.20d). Os modelos FI, KI, YMI, EVI, GI (Figuras 6.19 a 6.21) apresentaram um comportamento anômalo para a curva  $t \times e$  para alongamentos superiores a 50%, exibindo erros mais elevados para faixas intermediárias de deformações. A Figura 6.18 apresenta um diagrama comparando quantitativamente os modelos YI3, YMI GI, YFI e PSI. Claramente o modelo YFI destaca-se novamente sobre os demais.

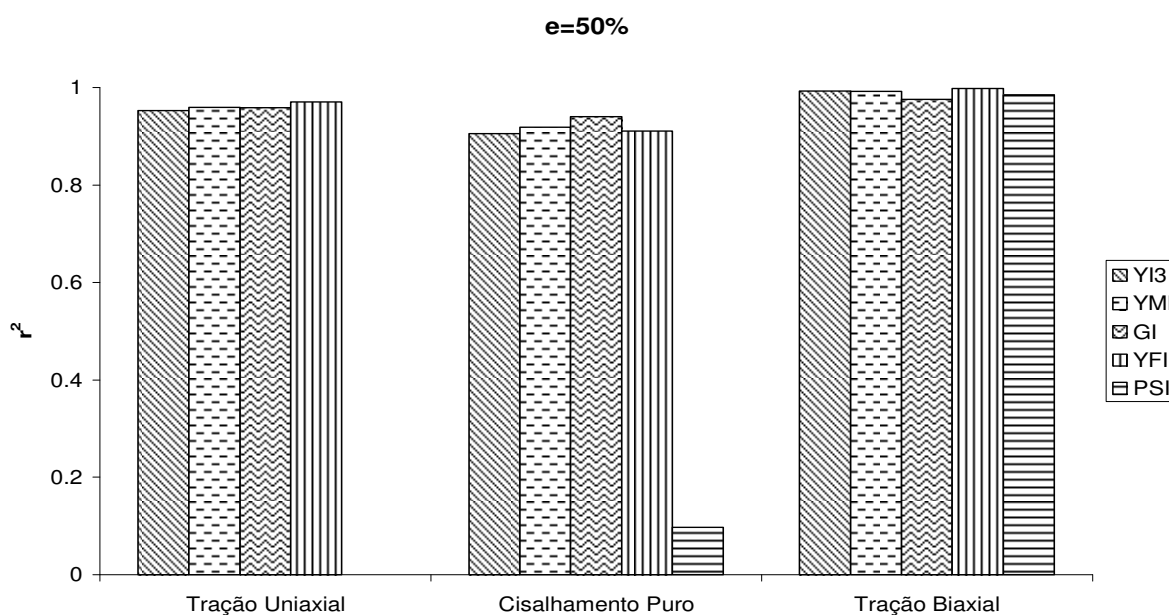


Figura 6. 18 - Borracha natural (NR55). –Ajuste para  $B$  ( $e = 50\%$ ).

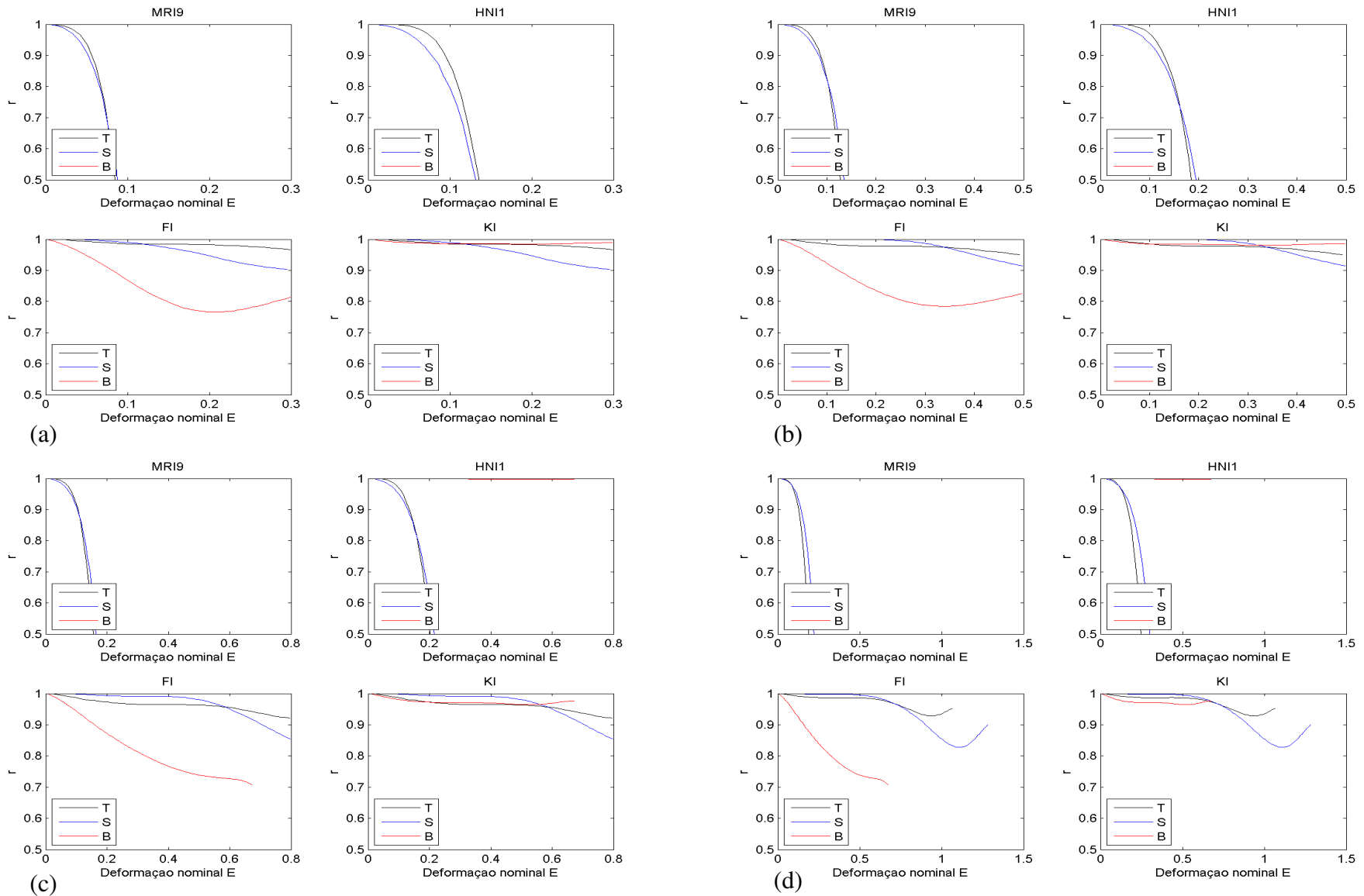


Figura 6. 19 - Borracha Natural (NR55). Ajuste para  $B$ . (a) -  $e = 30\%$ . (b) -  $e = 50\%$ . (c) -  $e = 80\%$ . (d) -  $e = 130\%$ .

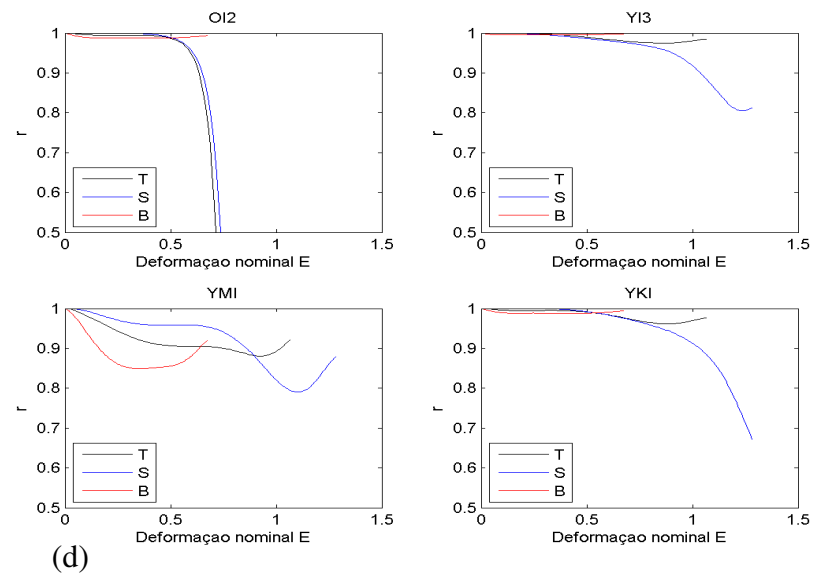
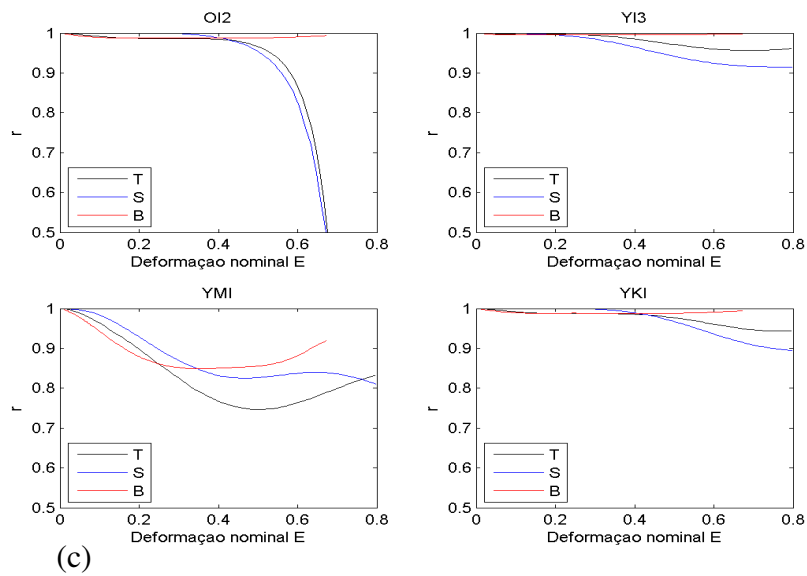
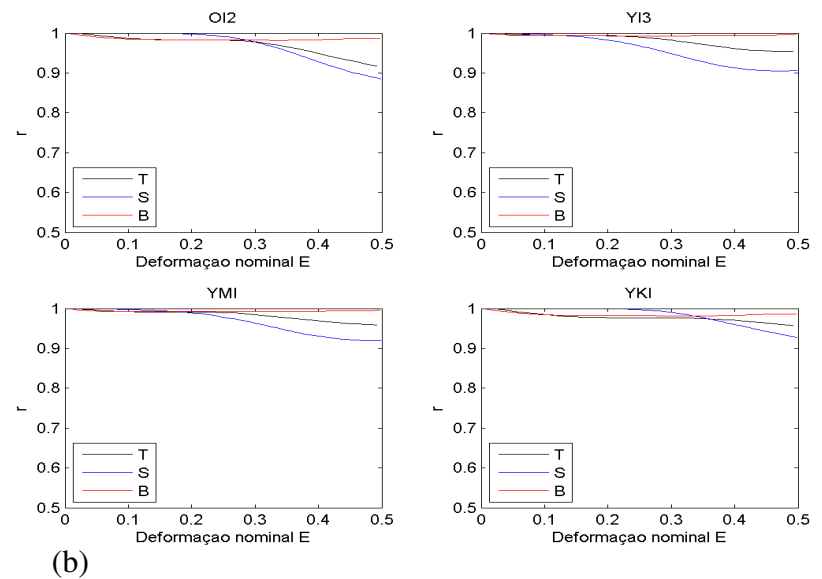
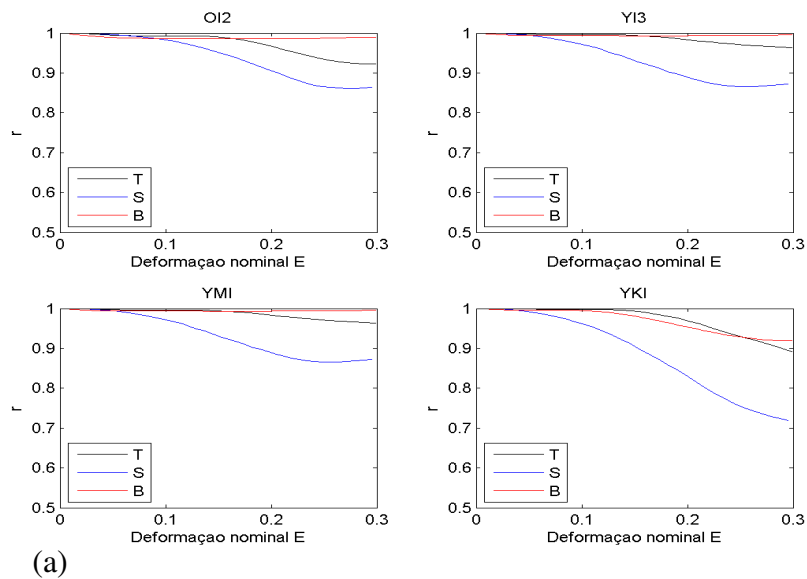


Figura 6. 20 - Borracha Natural (NR55). Ajuste para  $B$ . (a) -  $e = 30\%$ . (b) -  $e = 50\%$ . (c) -  $e = 80\%$ . (d) -  $e = 130\%$ .



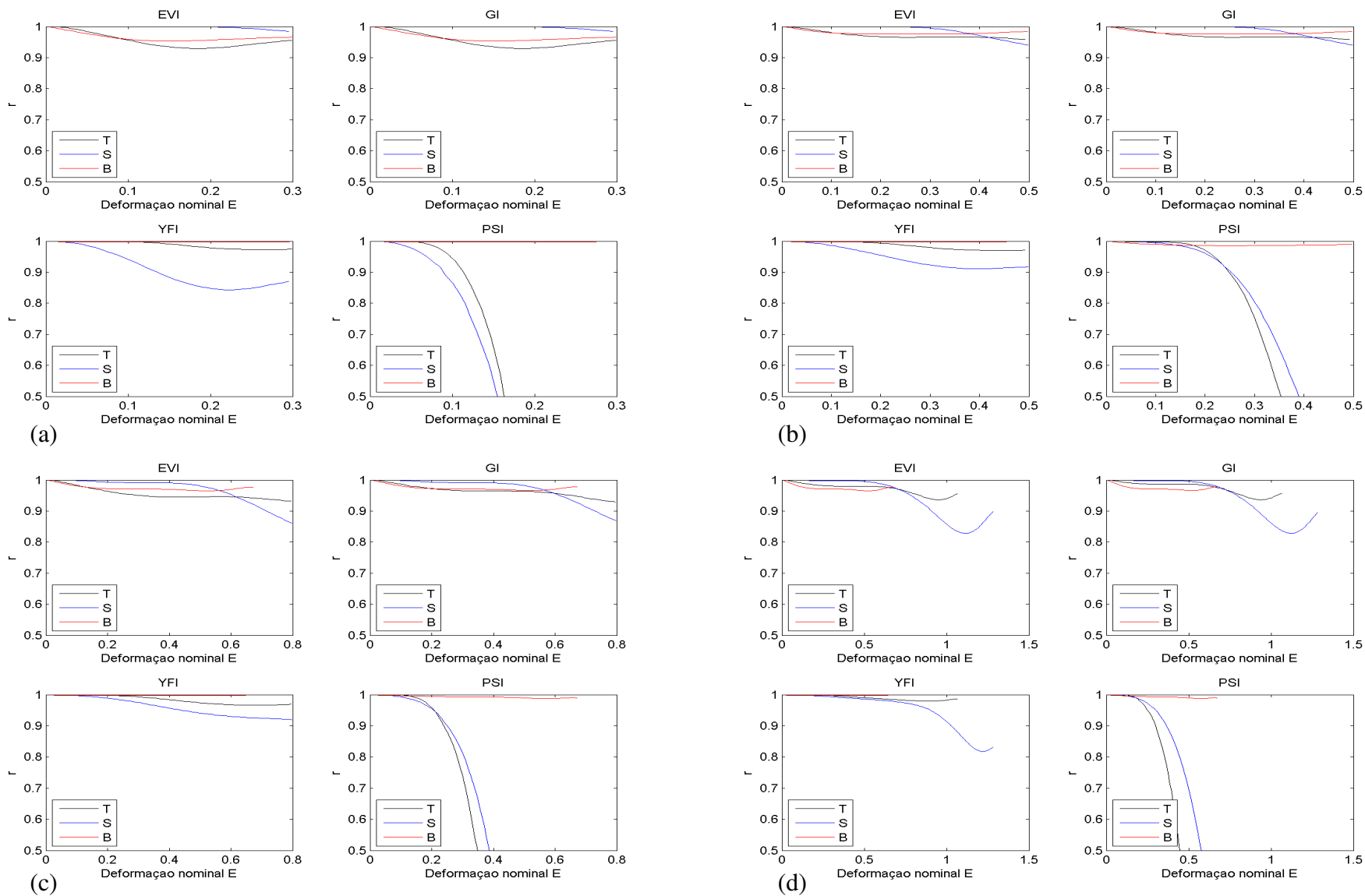


Figura 6. 21 - Borracha Natural (NR55). Ajuste para  $B$ . (a) -  $e = 30\%$ . (b) -  $e = 50\%$ . (c) -  $e = 80\%$ . (d) -  $e = 130\%$ .

## 6.4. Caso de Estudo: Silicone

### 6.4.1. Ajuste para Tração Uniaxial

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 600\%$ , com as constantes sendo calibradas novamente a cada incremento de  $100\%$ , e verificando-se as previsões para o caso de tração biaxial ( $B$ ) na mesma faixa de deformações.

As Figuras 6.23 a 6.25 apresentam uma análise gráfica do coeficiente de correlação. Aplicando a metodologia proposta, fica implícito o emprego dos modelos OI2 (Figura 6.24b) e FI (Figura 6.23b) para problemas com alongamentos inferiores a  $200\%$ , enquanto, para deformações moderadas é quase que mandatório o emprego do modelo PSI (Figura 6.25c) ajustado para  $0 \leq e \leq 400\%$ . Para grandes deformações ( $e \geq 400\%$ ) é imperativo o uso dos modelos YMI e YFI (Figuras 6.24d e 6.25e).

A figura 6.22 compara a qualidade dos ajustes e previsões para o modelo PSI para as diferentes faixas de ajuste. Em conjunto com a Figura 6.25b, fica implícito o mau comportamento do modelo ajustado para  $e = 200\%$ . Esta verificação reforça a relevância do estimador proposto, uma vez que facilmente identifica-se a melhor faixa de deformações para realizar o ajuste das constantes constitutivas. Isto é fundamental para simulações numéricas, pois garante uma boa representatividade do material empregado, diminuindo assim, a magnitude dos erros já intrínsecos à análise.

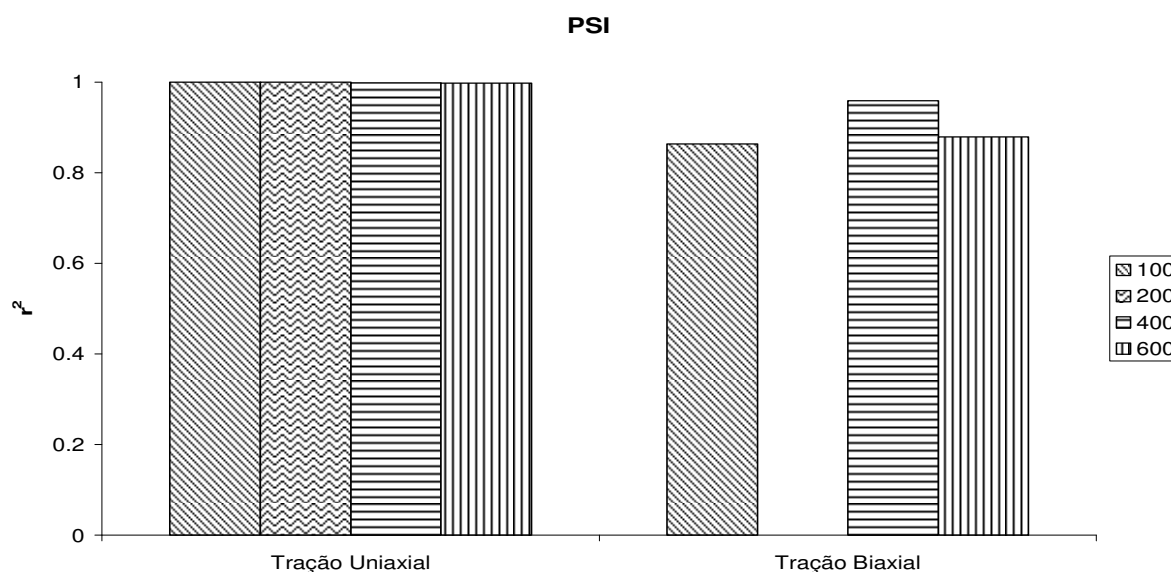


Figura 6. 22 - Comportamento do modelo PSI.

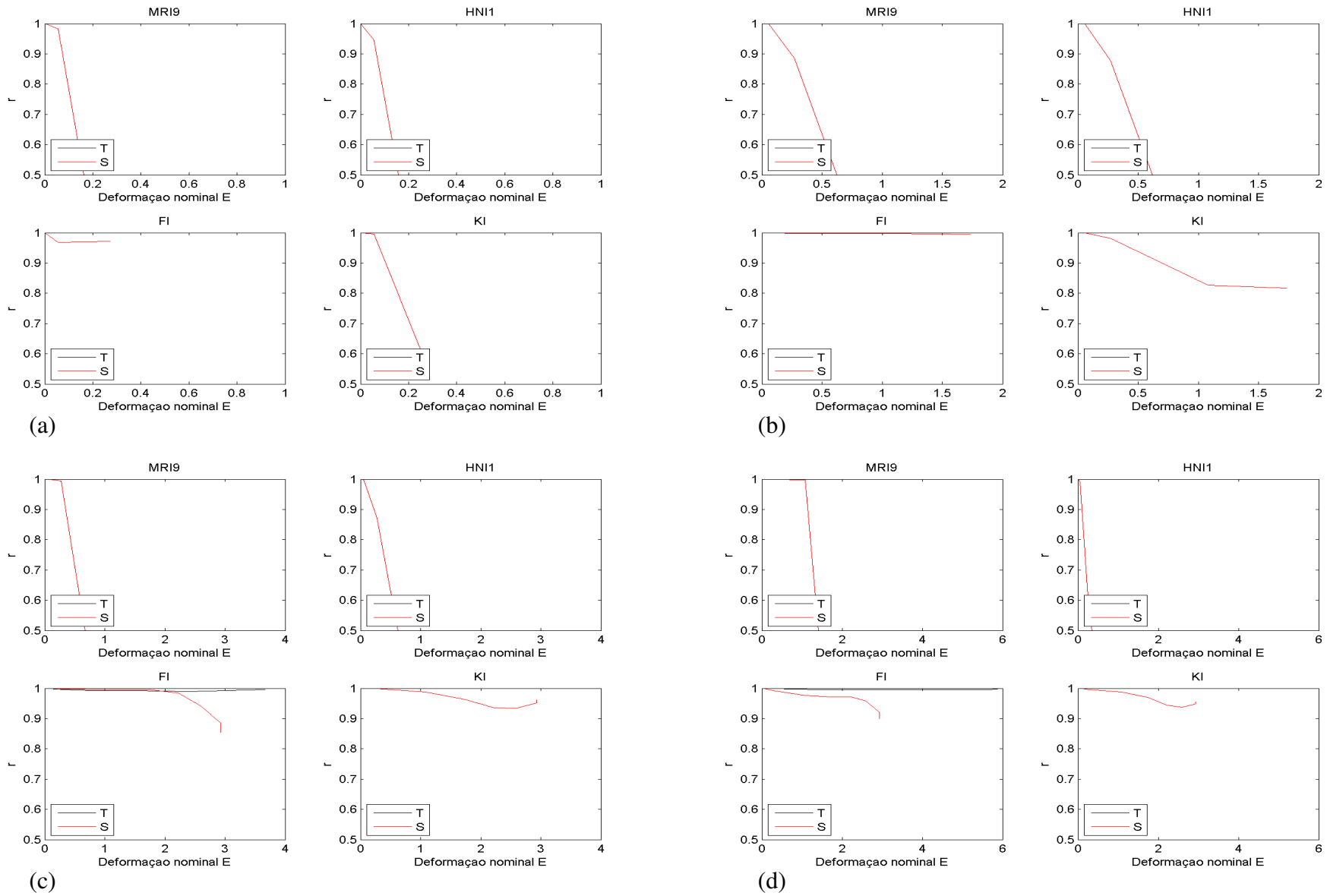


Figura 6. 23 - Silicone (MED4950). Ajuste para  $T$  . (a) -  $e = 100\%$  . (b) -  $e = 200\%$  . (c) -  $e = 400\%$  . (d) -  $e = 600\%$  .

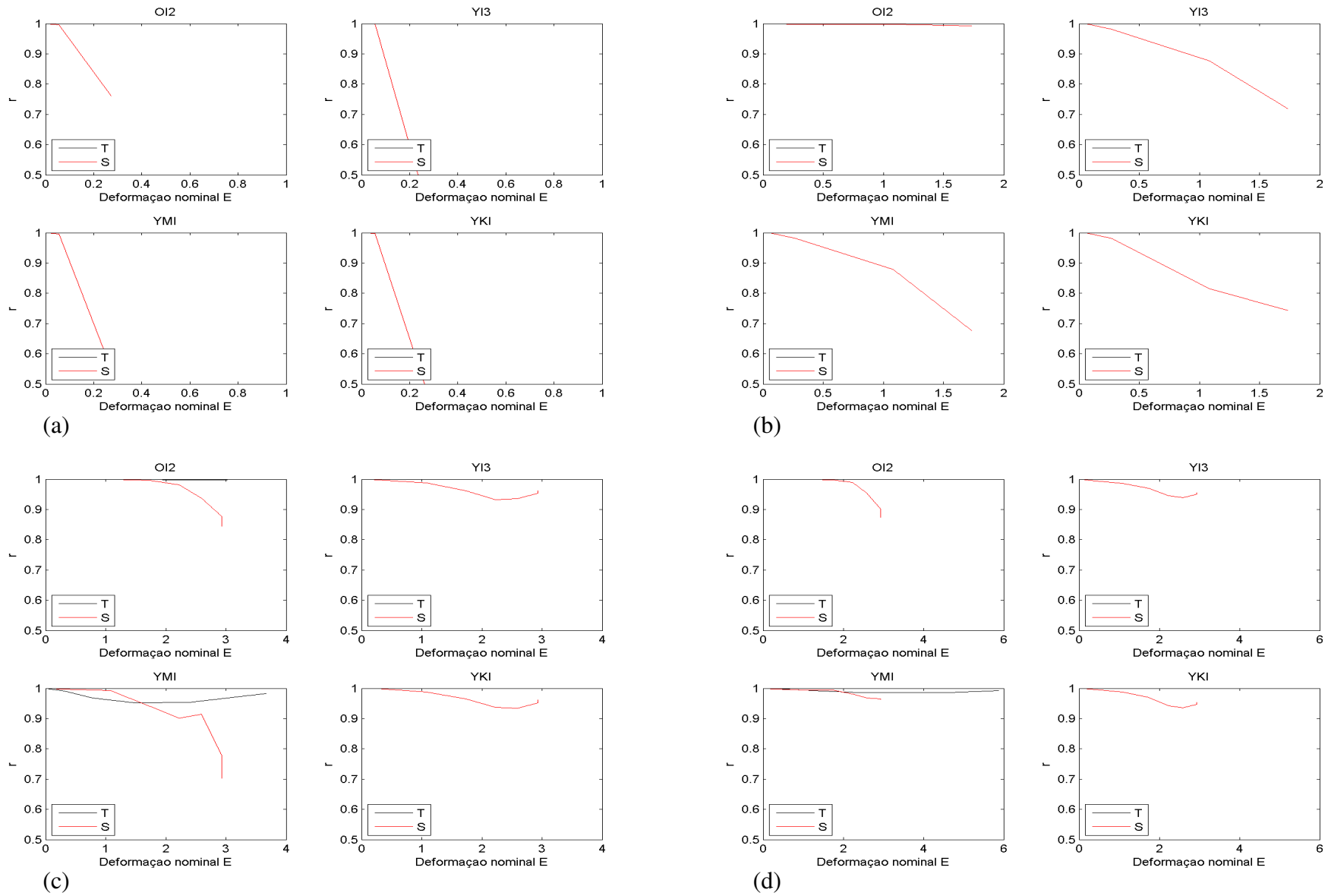


Figura 6. 24 - Silicone (MED4950). Ajuste para  $T$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 200\%$ . (c) -  $e = 400\%$ . (d) -  $e = 600\%$ .

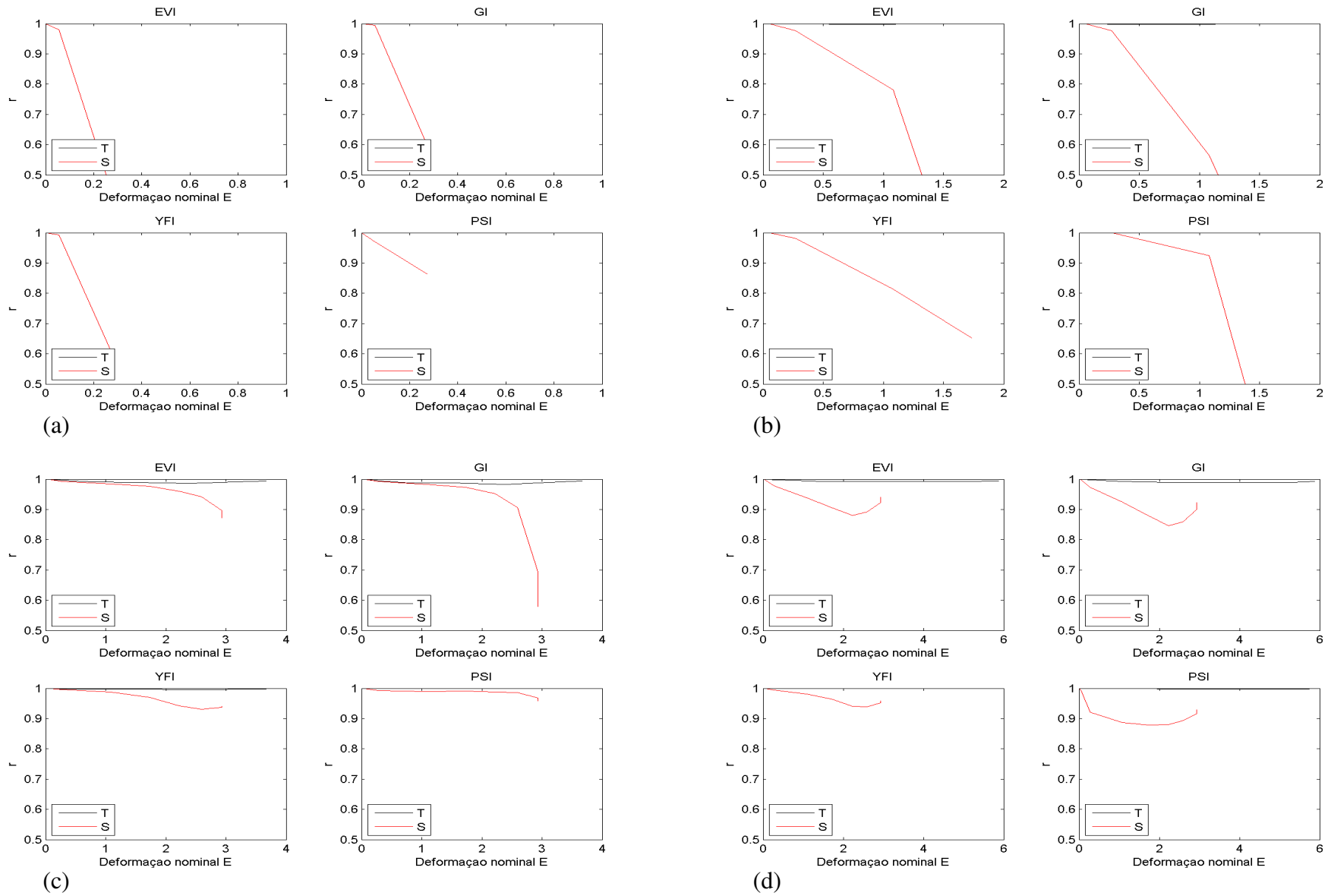


Figura 6. 25 - Silicone (MED4950). Ajuste para  $T$  . (a) -  $e = 100\%$  . (b) -  $e = 200\%$  . (c) -  $e = 400\%$  . (d) -  $e = 600\%$  .

### 6.4.2. Ajuste para Tração Biaxial

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 300\%$ . A cada incremento de 100% nos alongamentos era ajustado um novo grupo de constantes, verificando-se a predição exclusivamente para o caso de tração uniaxial ( $T$ ) na mesma faixa de deformações.

As Figuras 6.27 a 6.29 apresentam uma análise gráfica do coeficiente de correlação, destaca-se que para deformações superiores a 300% os ajustes são tomados sempre em relação ao mesmo referencial. Entretanto a predição do ensaio de tração uniaxial ( $T$ ) foi extrapolada até a sua faixa de trabalho.

Em problemas envolvendo pequenas deformações, o emprego do modelo OI2 (Figura 6.28b) ajustado para  $e = 200\%$ , é mandatório. Os modelos KI (Figura 6.27d), YI3, YMI e YKI (Figura 6.28d) apresentaram excelentes resultados para grandes deformações. Destaque-se que estes modelos não apresentaram instabilidades na predição do ensaio de tração uniaxial, como verificado nos modelos de base logarítmica (Figura 6.29d), com exceção do modelo YFI. Este fato é interessante, pois reforça a possibilidade de emprego de outras bases além da logarítmica para a energia de deformação (*power-law*, por exemplo) para a caracterização de elastômeros e tecidos biológicos. A Figura 6.26 compara a qualidade dos ajustes e predições para o modelo PSI para as várias faixas de deformações. Destacam-se os excelentes resultados do modelo na faixa entre  $200 \leq e \leq 400\%$ .

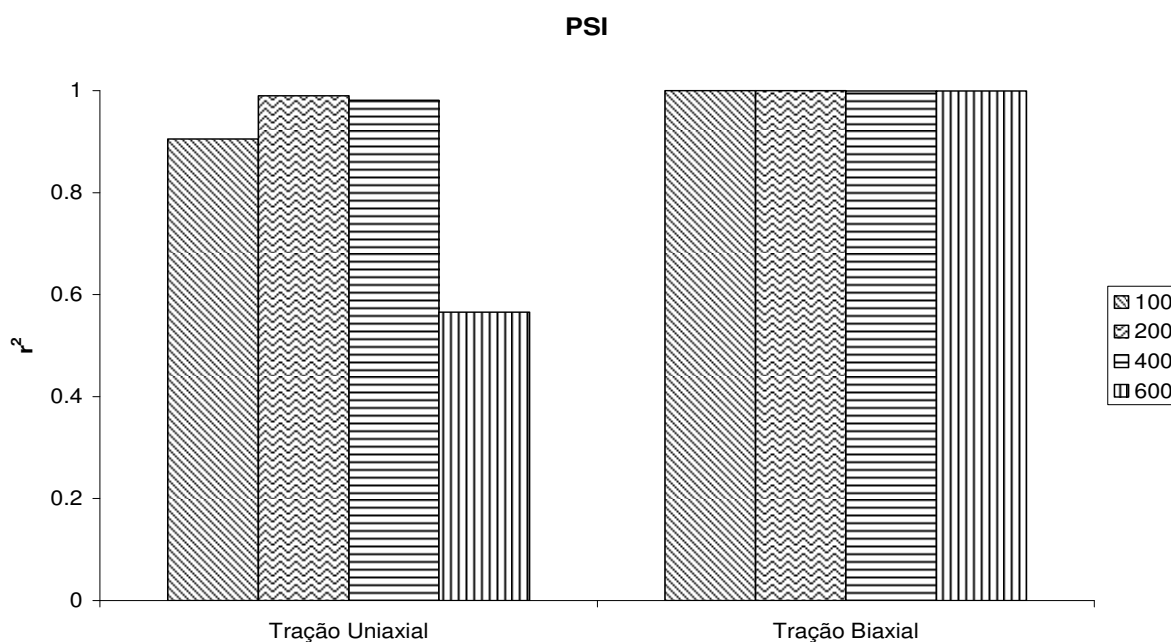


Figura 6. 26 – Comportamento do modelo PSI.

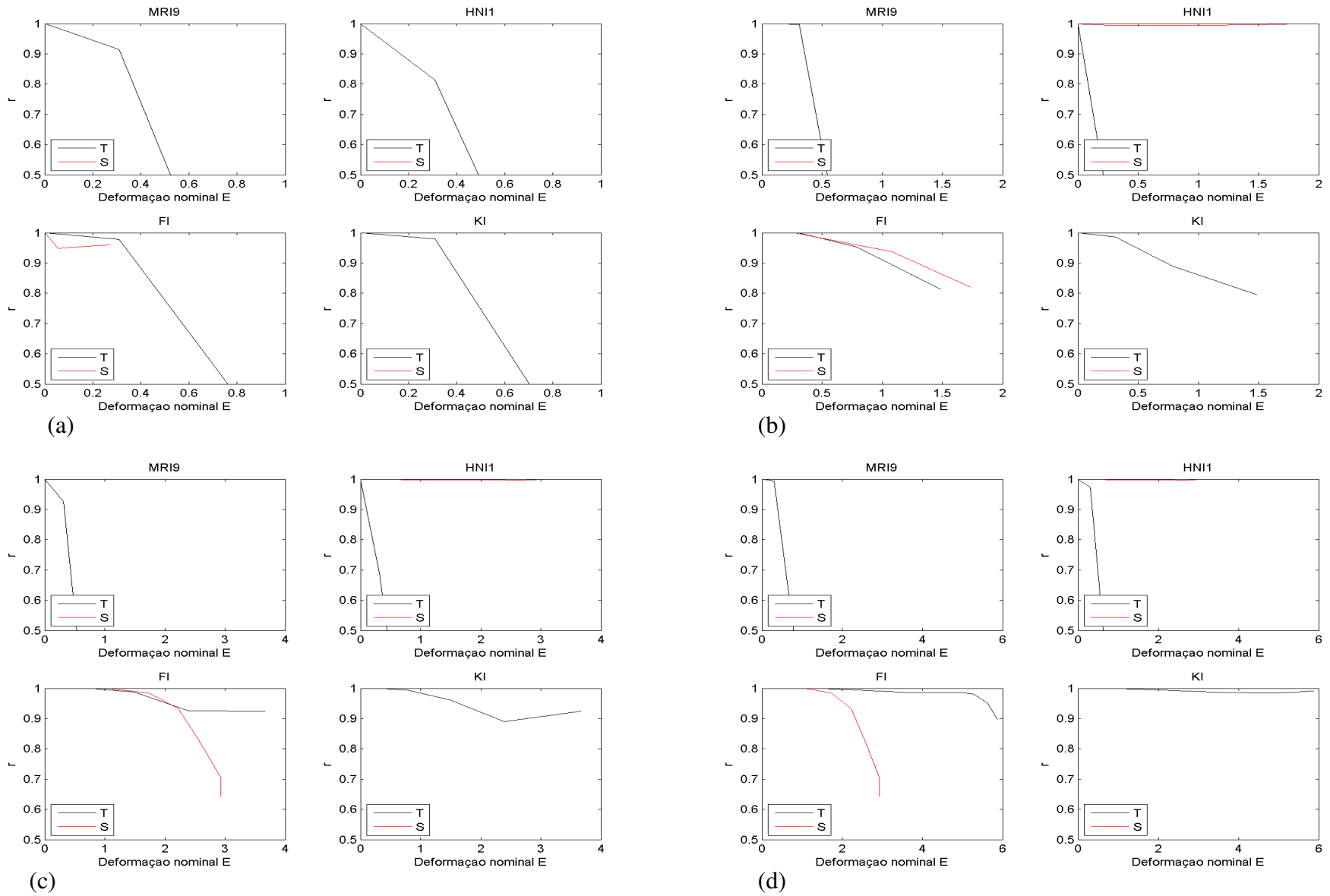


Figura 6. 27 - Silicone (MED4950). Ajuste para  $B$  . (a) -  $e = 100\%$  . (b) -  $e = 200\%$  . (c) -  $e = 400\%$  . (d) -  $e = 600\%$  .

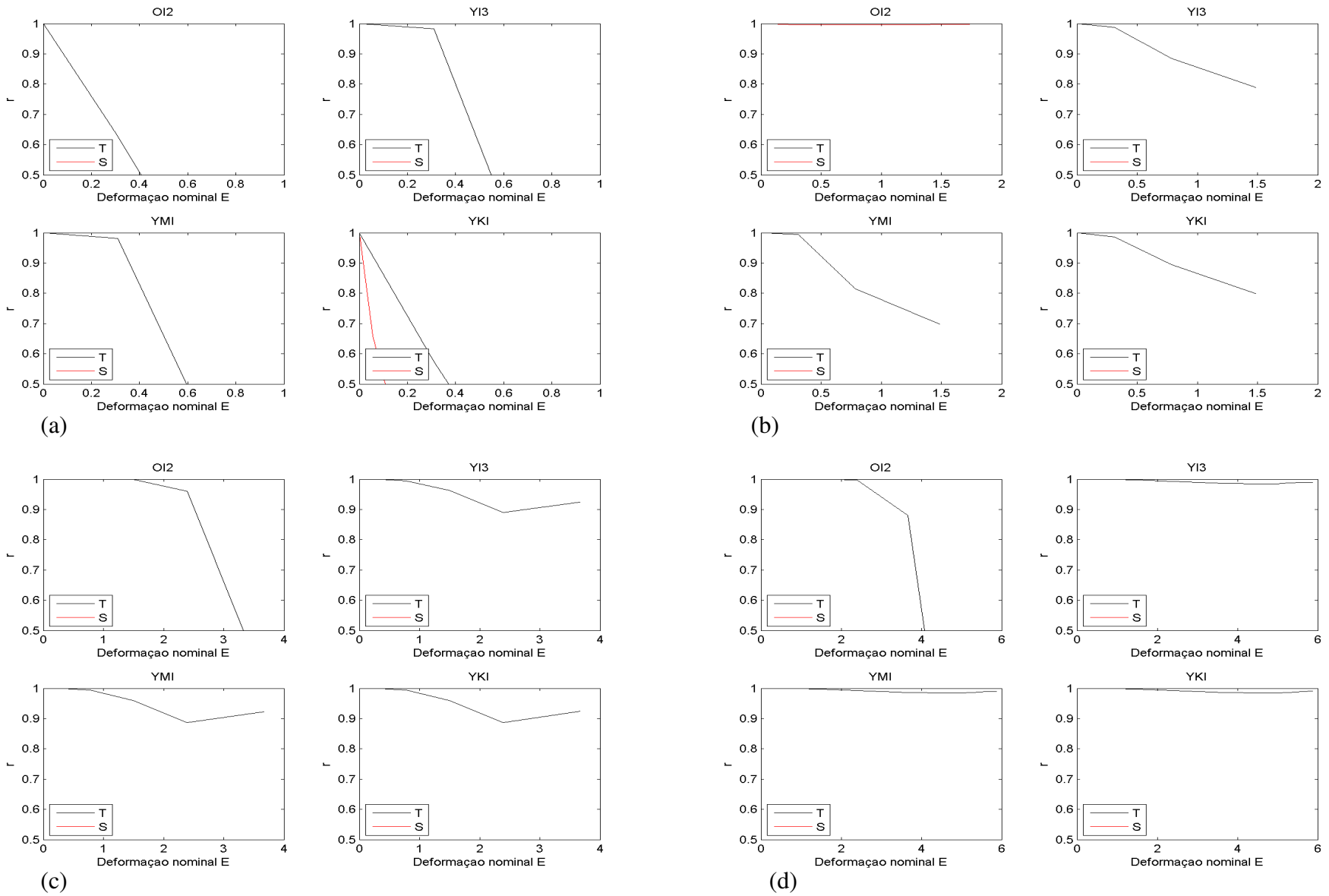


Figura 6. 28 - Silicone (MED4950). Ajuste para  $B$  . (a) -  $e = 100\%$  . (b) -  $e = 200\%$  . (c) -  $e = 400\%$  . (d) -  $e = 600\%$  .



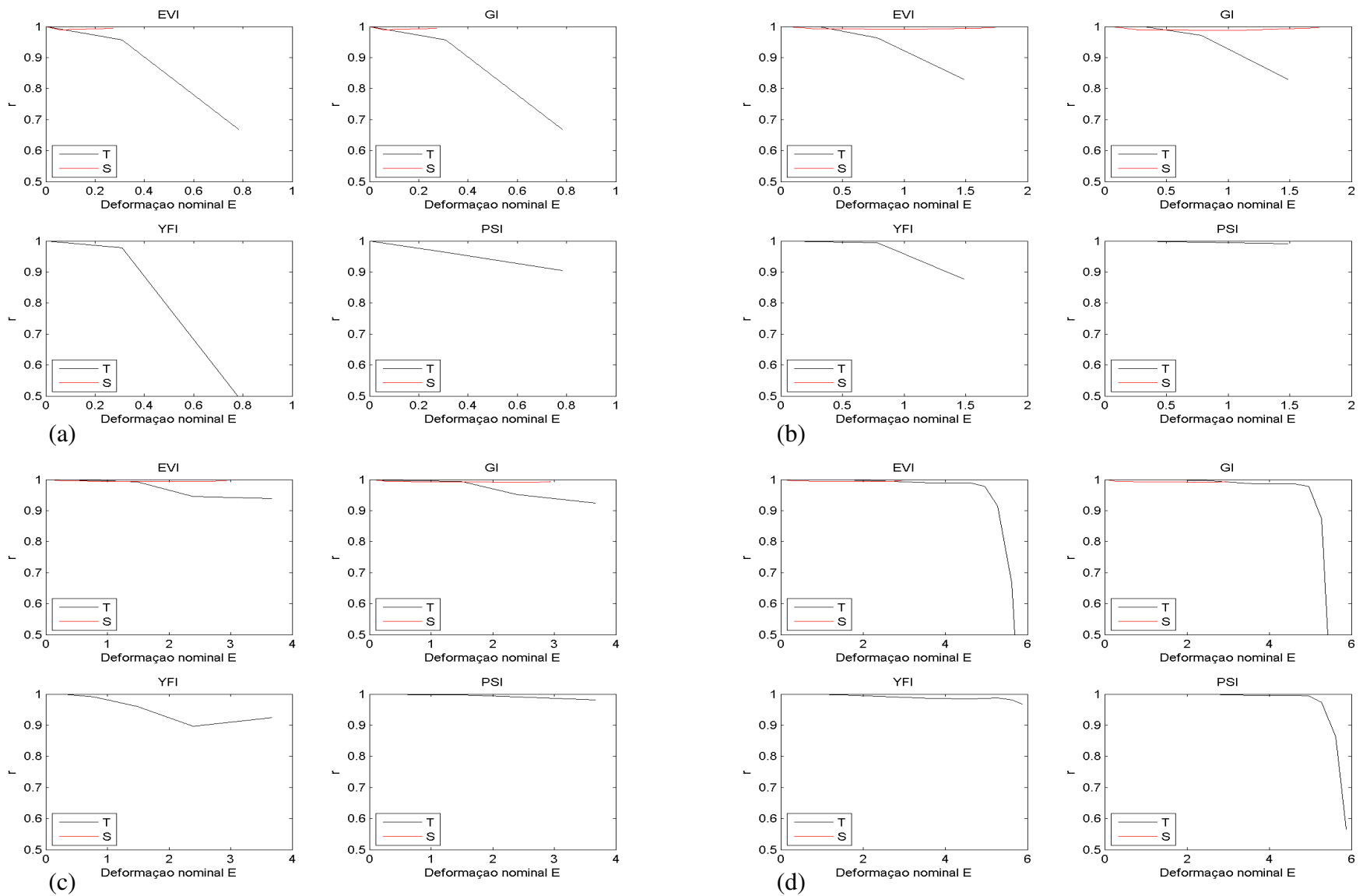


Figura 6. 29 - Silicone (MED4950). Ajuste para  $B$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 200\%$ . (c) -  $e = 400\%$ . (d) -  $e = 600\%$ .

## 6.5. Conclusões

Através dos estudos de caso apresentados certifica-se, embora ainda em um estágio inicial de desenvolvimento, o potencial da metodologia proposta para a avaliação e seleção dos modelos constitutivos. Além do notório ganho em agilidade na seleção, é explícito o aumento na confiabilidade e precisão dos resultados. À estas vantagens, soma-se a possibilidade de se avaliar simultaneamente várias predições para diferentes faixas de ajuste, o que permite determinar a melhor faixa de trabalho para um dado conjunto de dados experimentais.

Em conjunto com a análise gráfica visual foram apresentados diagramas comparativos para os modelos mais representativos, explicitando os seus comportamentos para diferentes faixas de ajuste.

A formulação proposta conseguiu quantificar um estimador de qualidade de ajuste para todas as situações possíveis encontradas no ajuste de constantes hiperelásticas. São considerados aos casos extremos de enrijecimento observado nas predições dos modelos polinomiais, ou ainda o efeito de amolecimento manifestado pelos modelos biológicos e a variação na qualidade dos ajustes empregando ensaios e faixas de deformações distintas. Ponderando estes exemplos com as metodologias de avaliação empregadas atualmente pela literatura (cálculo do erro relativo numérico/experimental e análise gráfica direta), a presente proposta se mostra viável e eficaz na seleção e comparação de modelos constitutivos. Isto se ratifica comparando a análise dos modelos constitutivos feita na seção 6.2.1 empregando o novo estimador proposto, com a análise utilizando diretamente o erro relativo entre os valores de tensão numérico e experimental apresentados no Apêndice C. Fica explícita dessa análise, a efetividade do novo estimador proposto. Deve-se salientar que para a homologação da mesma, mais testes comparativos devem ser realizados, já que foram avaliados apenas três amostras de material. Uma evolução do método seria a introdução de funções pesos priorizando determinadas faixas de deformação de acordo com a aplicação do componente em que esta sendo aplicado o material avaliado.

## 7. AJUSTE MULTI-CRITÉRIO

A geração de um grupo de constantes hiperelásticas a partir da ponderação de dois ou mais ensaios experimentais é muito atrativa para a análise de componentes submetidos a esforços diversos. A título de ilustração, seja uma peça com predominância do esforço biaxial. As constantes a serem ajustadas deverão priorizar o ensaio de tração biaxial juntamente com a faixa de deformação de trabalho, garantindo assim uma boa representatividade do material ao longo de todo o campo de deslocamentos. Por outro lado, raramente o analista pode afirmar com segurança qual o modo de deformação predominante no componente. Em outros casos, ainda, sequer existe um modo predominante. Nestas situações é particularmente necessário dispor de um conjunto de constantes constitutivas que apresentem bom desempenho em todos os modos de deformação.

A otimização multi-critério corresponde a uma área de pesquisa muito promissora, sendo uma ferramenta eficiente na solução de uma vasta gama de problemas estruturais. Atualmente existem uma variedade de métodos e algoritmos para a solução de problemas de otimização multi-objetivo, exemplos detalhados podem ser encontrados em (Miettinen, 1999; Ehrgott, 2000; Deb, 2001; Coello *et al.*, 2002). Basicamente os métodos podem ser divididos em duas categorias (Shukla, 2006): (i) - métodos clássicos regidos por princípios matemáticos e (ii) - métodos não clássicos baseados em princípios naturais e físicos. Para satisfazer diferentes requisitos de projeto, ou solicitações multidisciplinares, um conjunto de funções objetivo conflitantes são minimizadas a fim de encontrar uma solução de compromisso, levando à definição de ótimo de Pareto (Zhang, 2002). Matematicamente um problema genérico de otimização multi-critério pode ser descrito como (Arora, 1989):

$$\begin{aligned} \text{Min } F(X) \\ g_j(X) \leq 0 \quad j=1, m, \end{aligned} \tag{7.1}$$

onde  $F(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_r(X)]^T$  representa o vetor composto pelo conjunto de funções objetivos a ser minimizado e  $g_j(X)$  denota as restrições. O vetor  $X$  contém as variáveis de projeto.

Idealmente, a melhor maneira de calibrar as constantes constitutivas para uma aplicação genérica seria a de otimizar as mesmas em um único passo, empregando a otimização multi-critério.

Entretanto, a faixa de alongamentos para cada modo de deformação geralmente distinguem-se significativamente, sendo que uma otimização considerando a menor faixa de deformação dos três ensaios, tração biaxial, por exemplo, negligenciaria uma parte significante dos ensaios de tração uniaxial e cisalhamento puro. Uma solução possível é empregar uma otimização de compromisso, baseada na combinação linear das constantes calibradas para cada modo de deformação específico:

$$\bar{C} = w_T C_T + w_P C_P + w_B C_B \quad (7.2)$$

onde  $\bar{C}$  é novo conjunto de constantes constitutivas,  $w_T$ ,  $w_P$  e  $w_B$  representam os pesos para os grupos de constantes dos ensaios de tração uniaxial ( $C_T$ ), cisalhamento puro ( $C_P$ ) e tração biaxial ( $C_B$ ) respectivamente. Para o presente estudo serão avaliados os seguintes casos:

Caso 1: Pesos iguais para todos os ensaios ( $w_T = w_P = w_B = 1/3$ );

Caso 2: Priorizando o ensaio de tração biaxial ( $w_T = w_P = 1/4, w_B = 1/2$ );

Caso 3: Priorizando o ensaio de tração uniaxial ( $w_T = 1/2, w_P = w_B = 1/4$ );

Os resultados serão avaliados segundo a metodologia proposta no Capítulo 6, empregando o coeficiente de correlação. Por brevidade, será avaliado apenas um modelo para cada família hiperelástica estudada no Capítulo 5. Os modelos foram selecionados em função de sua representatividade dentro de cada grupo, ficando subdivididos da seguinte maneira:

- Família Polinomial – MRI9, YI3.
- Família Biológica (Base Exponencial) – FI.
- Família Alongamentos ( $\lambda$ ) – OI2.
- Família Logarítmica – GI.
- Família GG – PSI.

Com o objetivo de avaliar a efetividade do ajuste das constantes constitutivas empregando a otimização de compromisso, nas seções seguintes serão apresentados os resultados utilizando o estimador proposto no Capítulo 6 ( $r \times$  Deformação nominal E) para os ajustes originais, lado a lado com os respectivos resultados obtidos com as ponderações dos casos 1, 2 e 3 (Figuras 7.1 a 7.18).

## 7.1. Caso de Estudo: Borracha Natural – Grandes Deformações

### 7.1.1. Mooney-Rivlin – MRI9

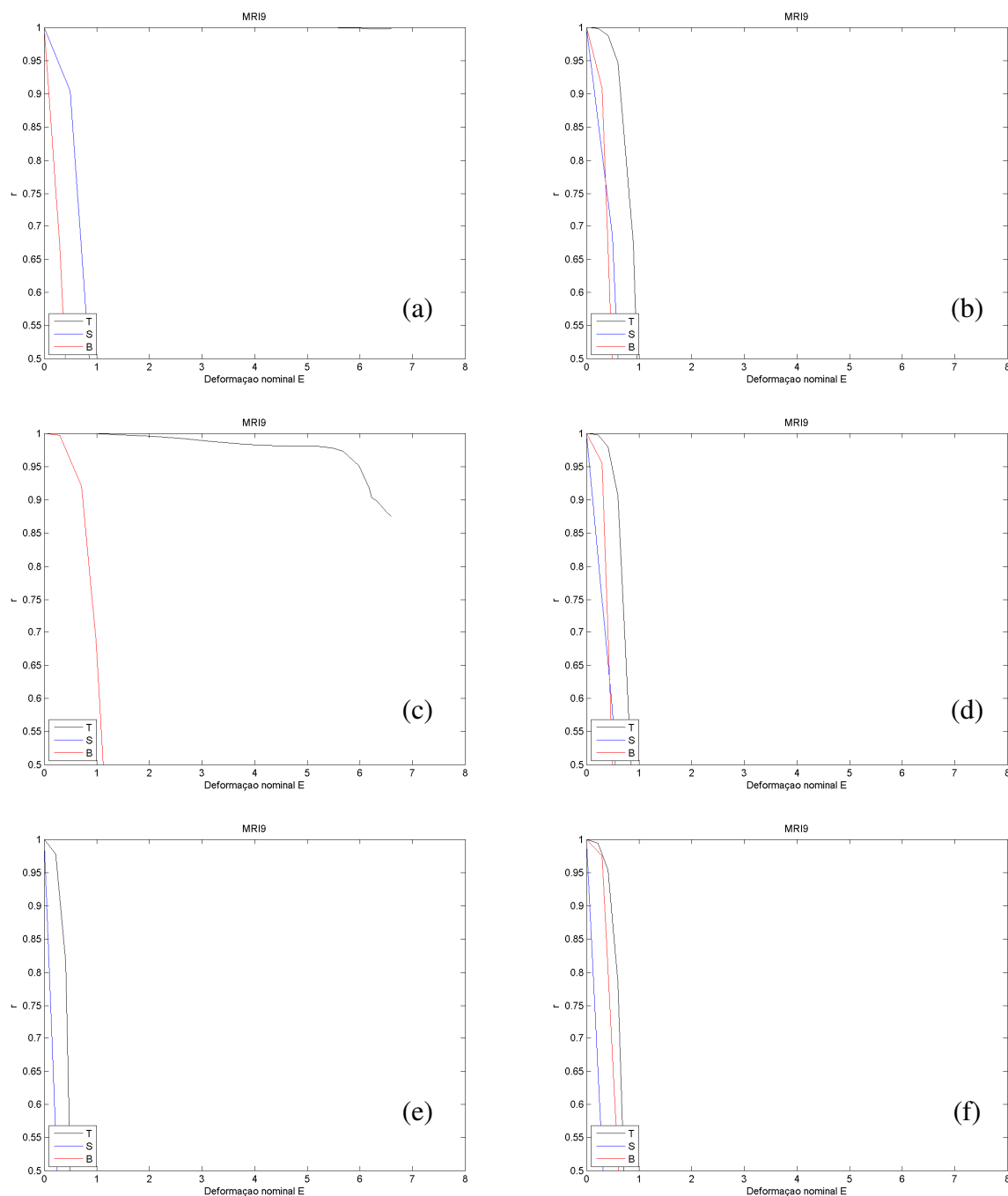


Figura 7. 1 – Borracha natural (Treloar). (a) Tração Uniaxial ( $e = 700\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 400\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 350\%$ ). (f) Caso 2.

Observa-se que para as três configurações de pesos analisadas não se obteve uma melhora na qualidade das predições. Confrontando as Figuras 7.1e com 7.1b, d e f verifica-se a forte influência do ensaio de tração biaxial na ponderação dos ensaios.

### 7.1.2. Fung – FI

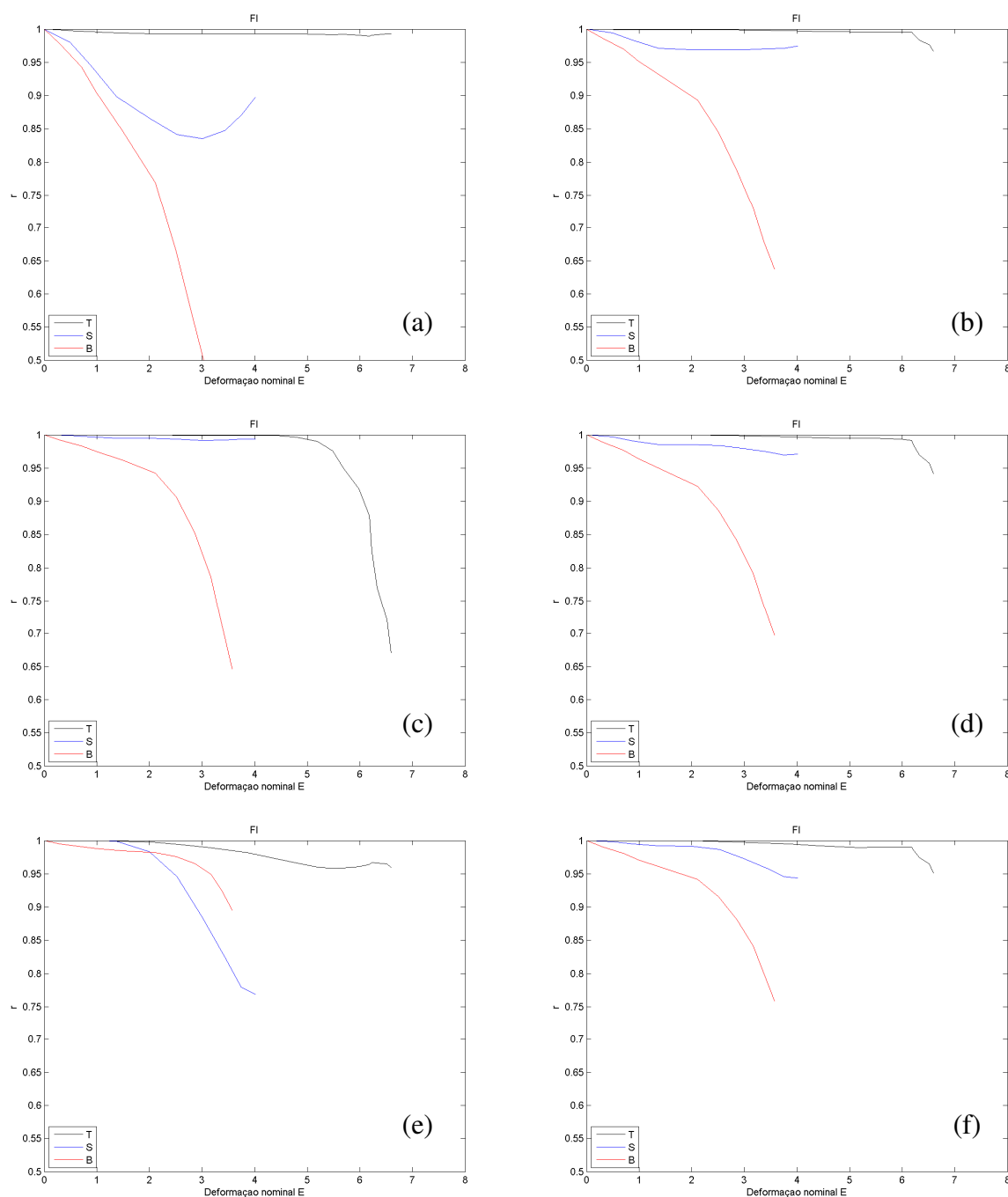


Figura 7. 2 – Borracha natural (Treloar). (a) Tração Uniaxial ( $e = 700\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 400\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 350\%$ ). (f) Caso 2.

A ponderação dos ensaios trouxe uma melhora no comportamento da curva  $t \times e$  para os três ensaios. Removeu-se o comportamento anômalo da predição do ensaio de cisalhamento quando ajustado para tração uniaxial (Figura 7.2a). A Figura (7.2d) sugere que os ensaios de tração uniaxial e cisalhamento devem ser ter os seus pesos ( $w_T, w_P$ ) privilegiados.

### 7.1.3. Ogden – OI2

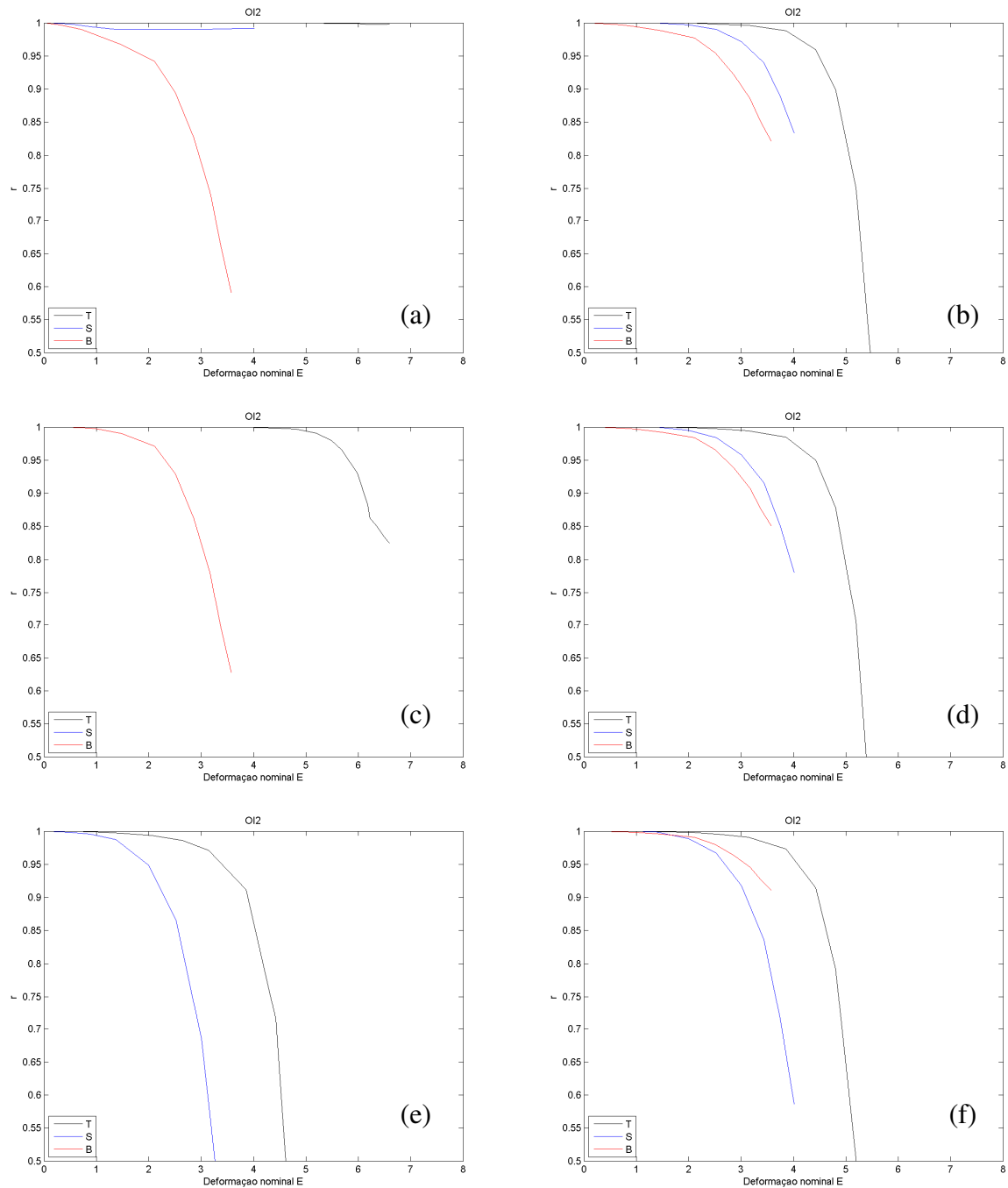


Figura 7. 3 - Borracha natural (Treloar). (a) Tração Uniaxial ( $e = 700\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 400\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 350\%$ ). (f) Caso 2.

Através da comparação da Figura 7.3c com as Figuras 7.3b, d, f é nítida a expressiva influência do ensaio de tração biaxial na predição dos ensaios  $T$  e  $P$ . Entretanto, tem-se uma perda de qualidade em relação ao ajuste de calibração original. Para o material e faixa de deformação analisado é imperativo o emprego do ensaio de tração uniaxial.

### 7.1.4. Yeoh – YI3

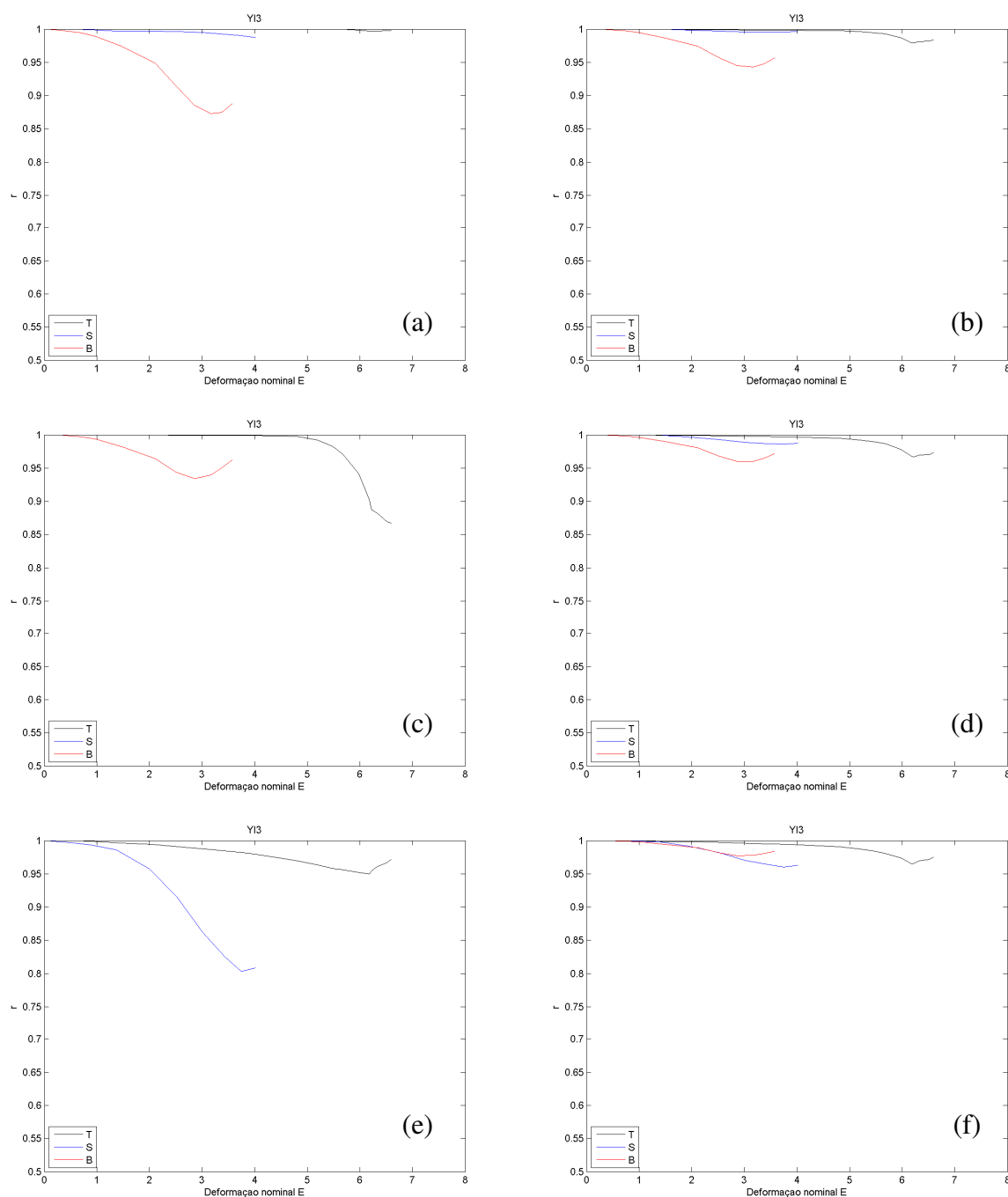


Figura 7. 4 - Borracha natural (Treloar). (a) Tração Uniaxial ( $e = 700\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 400\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 350\%$ ). (f) Caso 2.

Fica implícito a partir da Figura 7.4f que o ajuste multi-critério melhorou a predição do ensaio de tração biaxial (comportamento anômalo), gerando curvas aceitáveis para os três ensaios ( $T, P, B$ ). Para o modelo avaliado, Figura 7.4b, a priorização do ensaio de tração uniaxial ( $T$ ) traz uma melhor representatividade para os ensaios  $T$  e  $P$ .



### 7.1.5. Gent – GI

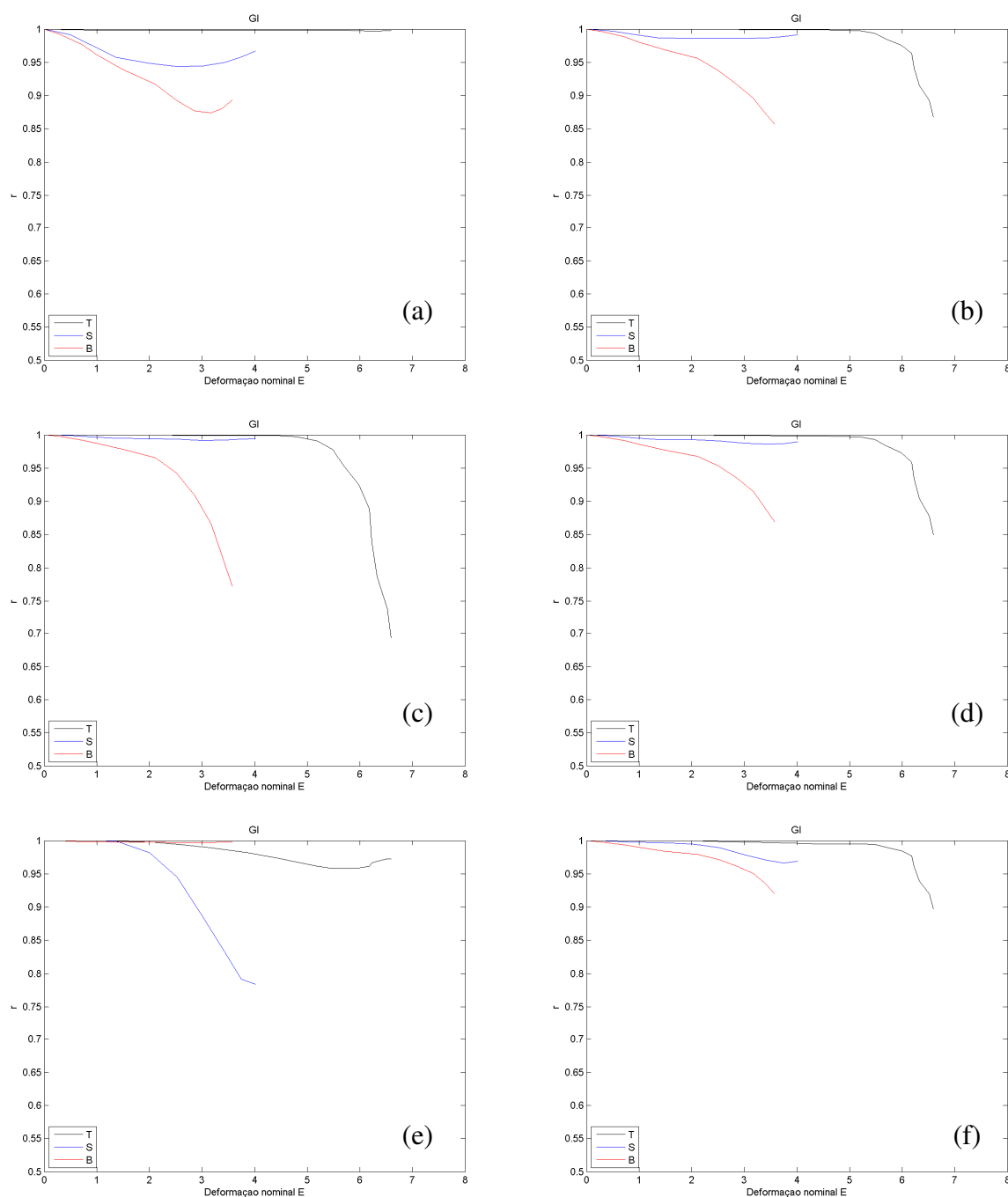


Figura 7.5 - Borracha natural (Treloar). (a) Tração Uniaxial ( $e = 700\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 400\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 350\%$ ). (f) Caso 2.

Claramente, comparando-se as Figuras (7.5a, 7.5c e 7.5e) com a Figura 7.5f, verifica-se uma melhora no comportamento das previsões ( $P, B$ ), mantendo-se a qualidade do ensaio de tração uniaxial. Os resultados sugerem que seja majorado o ensaio de tração biaxial (Caso 2), e também que os modelos de base logarítmica se adaptam bem à otimização multi-critério.

### 7.1.6. Pucci-Saccomandi – PSI

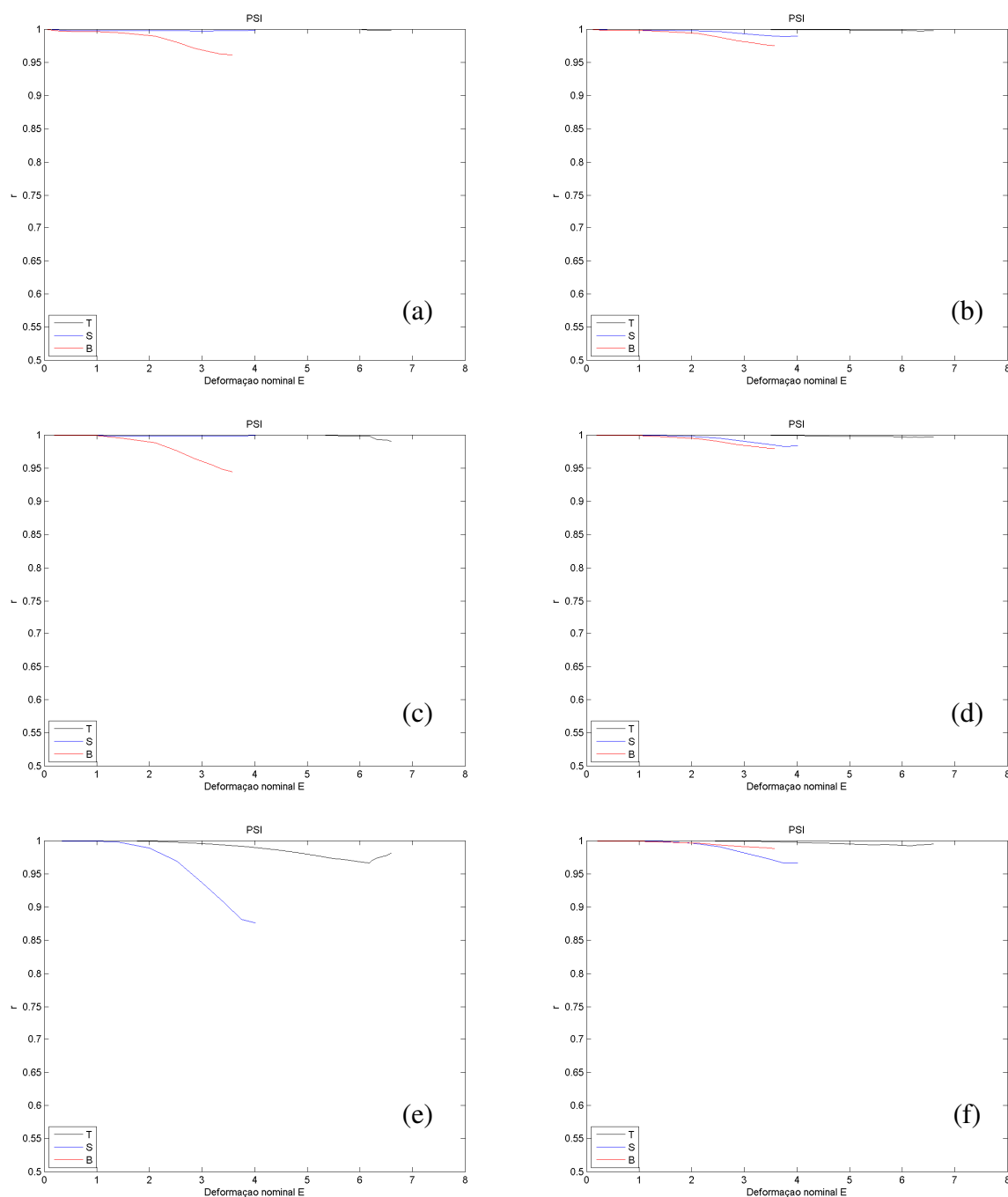


Figura 7. 6 - Borracha natural (Treloar). (a) Tração Uniaxial ( $e = 700\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 400\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 350\%$ ). (f) Caso 2.

Comparando a Figura 7.6e com as Figuras (7.5b, d, f), ratificam-se para todos os conjuntos de fatores avaliados (casos 1, 2 e 3) uma melhora nos resultados, com ênfase na predição do ensaio de cisalhamento ( $P$ ). Para o modelo constitutivo e material avaliado recomenda-se majorar o ensaio de tração uniaxial (ver Figura 7.6a).

## 7.2. Estudo de Caso: Borracha Natural – Pequenas Deformações

### 7.2.1. Mooney-Rivlin – MRI9

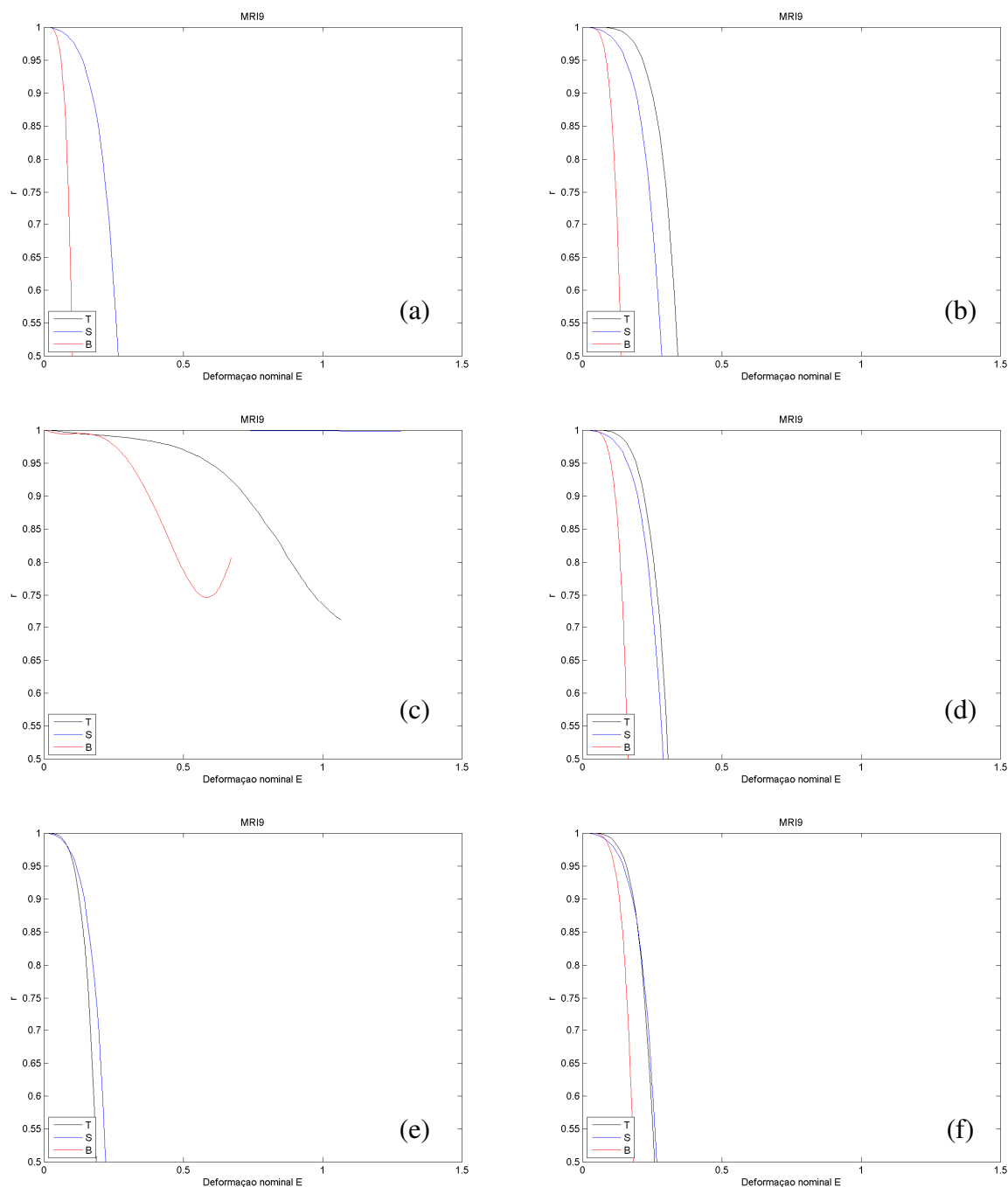


Figura 7. 7 - Borracha natural (NR55). (a) Tração Uniaxial ( $e = 100\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 130\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 70\%$ ). (f) Caso 2.

Os resultados foram similares aos da seção 7.1.1. A otimização não conseguiu remover o comportamento extremamente rígido das predições dos ajustes originais (Figuras 7.7a, e). Comparando a Figura 7.7e com as Figuras (7.7b, d, f) fica clara, a influência do ensaio *B*.

### 7.2.2. Fung – FI

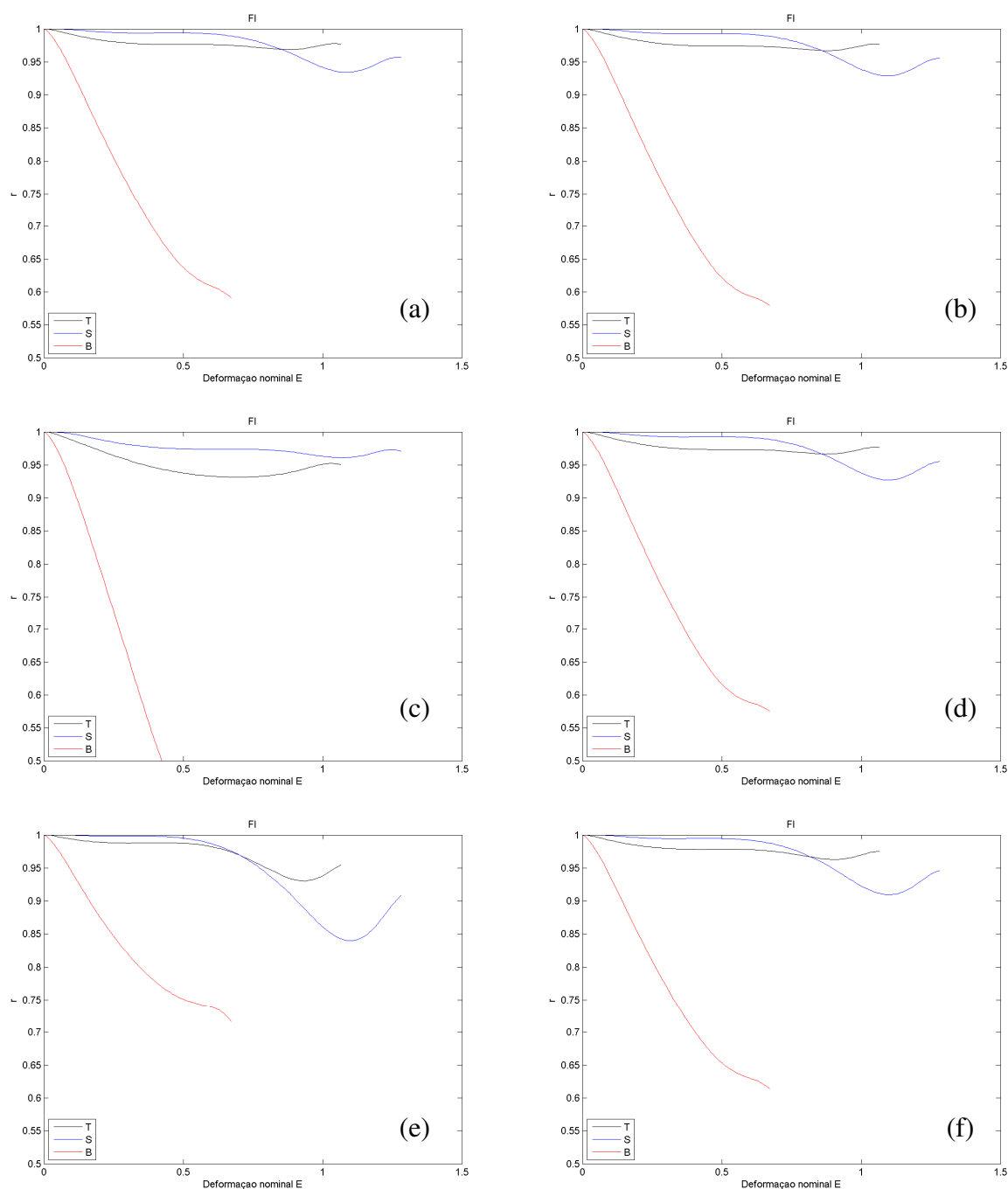


Figura 7. 8 - Borracha natural (NR55). (a) Tração Uniaxial ( $e = 100\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 130\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 70\%$ ). (f) Caso 2.

Para o material avaliado, a otimização multi-objetivo (Figuras 7.8b, d, f) não trouxe nenhum ganho adicional devido à má qualidade obtida originalmente para as predições (Figuras 7.8a, c, e). Para este caso, é imperativo o uso do ensaio de tração uniaxial (Figura 7.8a) no ajuste das constantes constitutivas.

### 7.2.3. Ogden – OI2

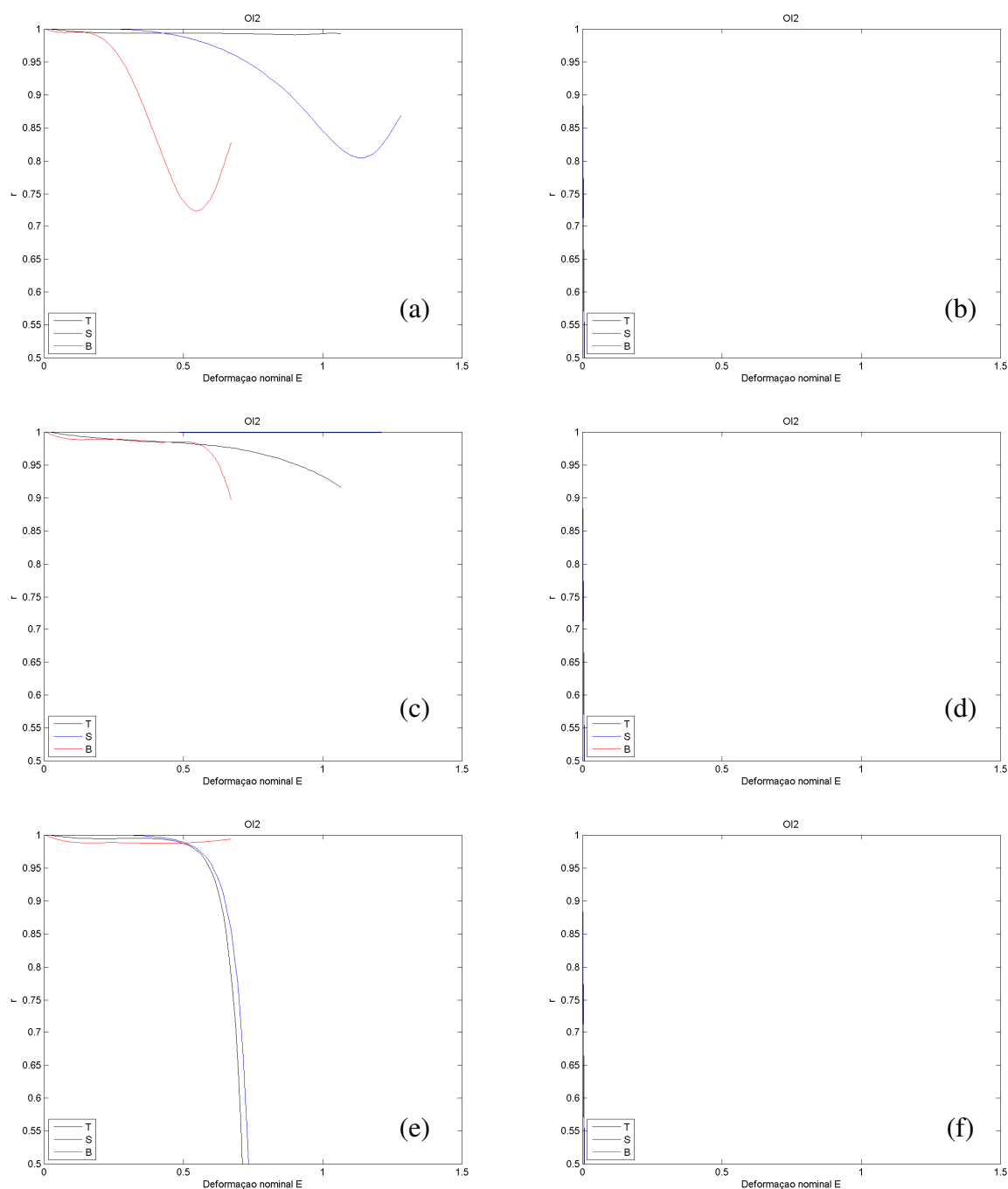


Figura 7. 9 - Borracha natural (NR55). (a) Tração Uniaxial ( $e = 100\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 130\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 70\%$ ). (f) Caso 2.

Comparando a Figura 7.9e com as Figuras (7.9b, d, f), verifica-se a forte influência do ensaio de tração biaxial na predição dos ensaios  $T$  e  $P$ . Para o material e faixa de deformações analisado é imperativo o emprego do ensaio de cisalhamento puro para o ajuste das constantes constitutivas, o que remete a sua majoração na faturação dos ensaios.

### 7.2.4. Yeoh – Y13

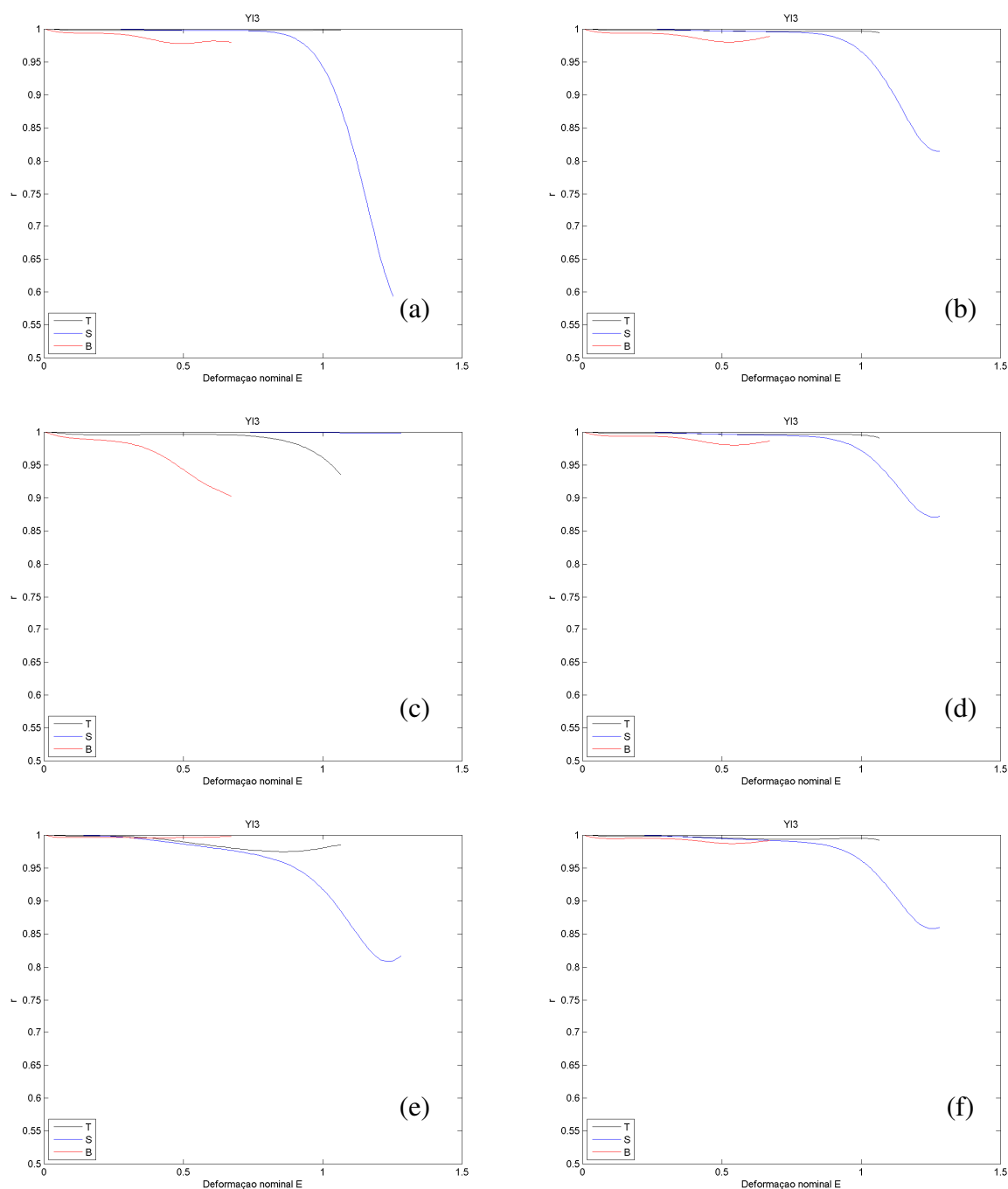


Figura 7. 10 - Borracha natural (NR55). (a) Tração Uniaxial ( $e = 100\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 130\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 70\%$ ). (f) Caso 2.

Fica implícito através das Figuras (7.10b, d, f) que o ajuste multi-objetivo melhorou as predições para os três ensaios, com ênfase para os ensaios de tração uniaxial e tração biaxial (Figuras 7.10c, e). Os resultados encontrados sugerem que seja majorado o ensaio de tração biaxial.

## 7.2.5. Gent – GI

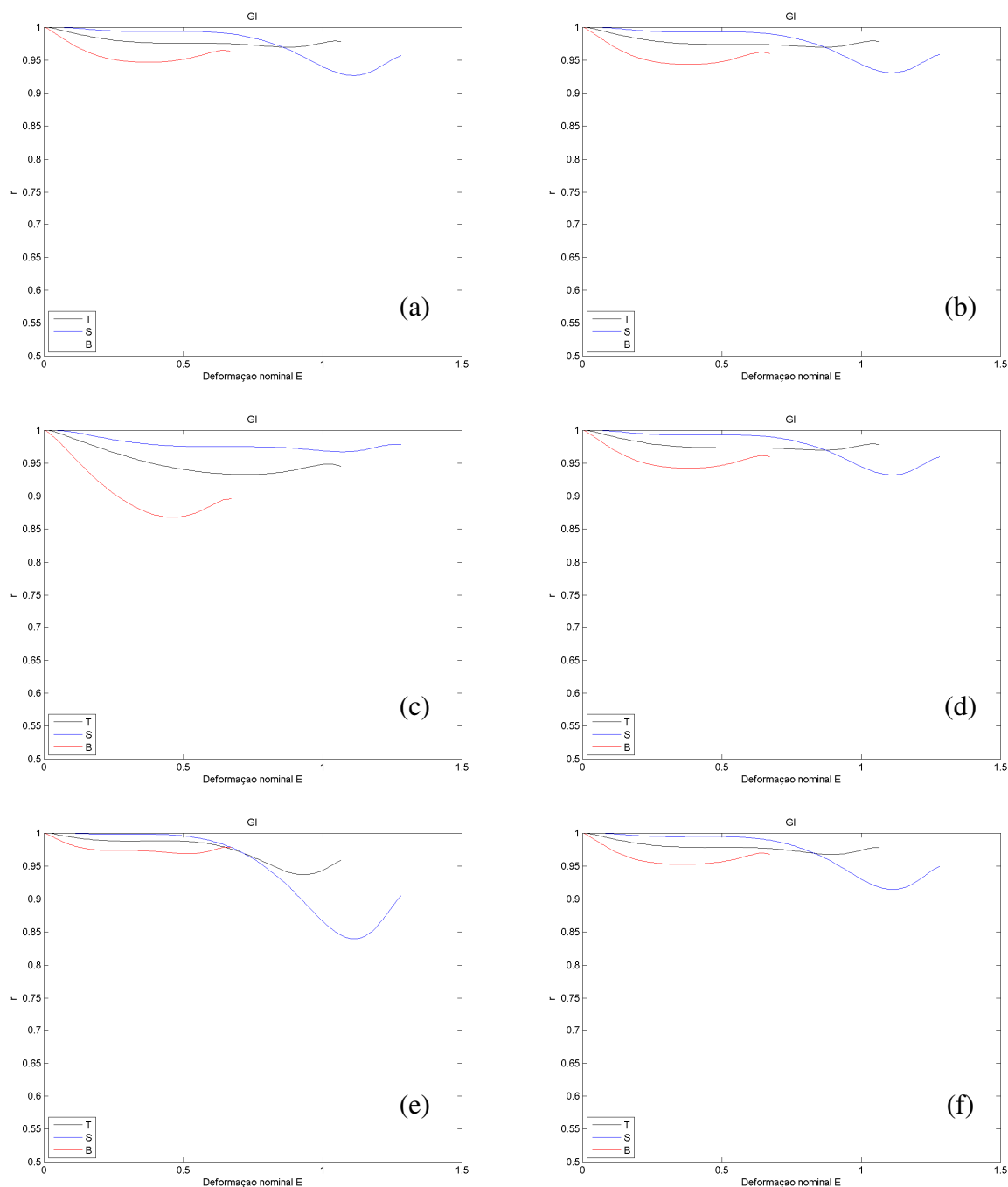


Figura 7. 11 - Borracha natural (NR55). (a) Tração Uniaxial ( $e = 100\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 130\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 70\%$ ). (f) Caso 2.

Através das Figuras (7.11b, d, f) verifica-se uma melhoria no comportamento da curva  $t \times e$  para os três ensaios. Claramente, somado a boa qualidade das predições otimizadas, conseguiu-se diminuir as instabilidades nas predições dos ensaios  $T$  e  $P$  para deformações superiores a  $90\%$  (Figura 7.11e). Para o material analisado recomenda-se priorizar o ensaio de tração biaxial.

### 7.2.6. Pucci-Saccomandi - PSI

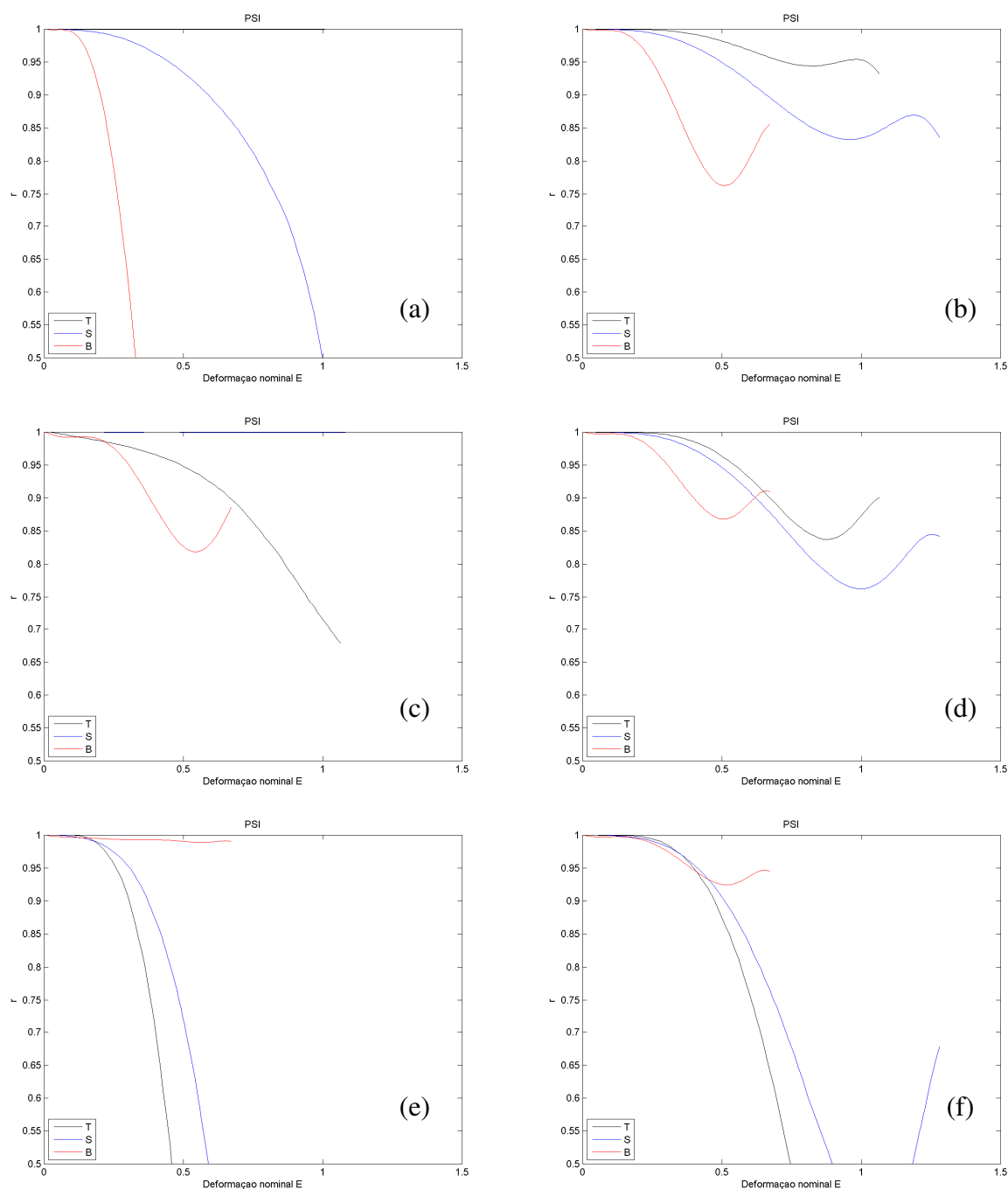


Figura 7. 12 - Borracha natural (NR55). (a) Tração Uniaxial ( $e = 100\%$ ). (b) Caso 3. (c) Cisalhamento Puro ( $e = 130\%$ ). (d) Caso 1. (e) Tração Biaxial ( $e = 70\%$ ). (f) Caso 2.

É notória para este caso, a melhora nos resultados obtida empregado o ajuste multi-objetivo. Claramente, através das Figuras (7.12b, d), removeram-se as instabilidades das predições originais, entretanto, teve-se uma perda de qualidade em relação ao ajuste de calibração original. Conforme Figura 7.12b, sugere-se que seja majorado o ensaio de tração uniaxial.



### 7.3. Estudo de Caso: Silicone

Para a amostra de material avaliado não se dispõem dos dados do ensaio de cisalhamento puro. Assim, neste caso de estudo, serão adotados os seguintes fatores: Caso 1: ( $w_T = w_B = 1/2$ ), Caso 2: ( $w_T = 1/4, w_B = 3/4$ ), Caso 3: ( $w_T = 3/4, w_B = 1/4$ ) e Caso 4: ( $w_T = 7/10, w_B = 3/10$ ).

#### 7.3.1. Mooney-Rivlin – MRI9

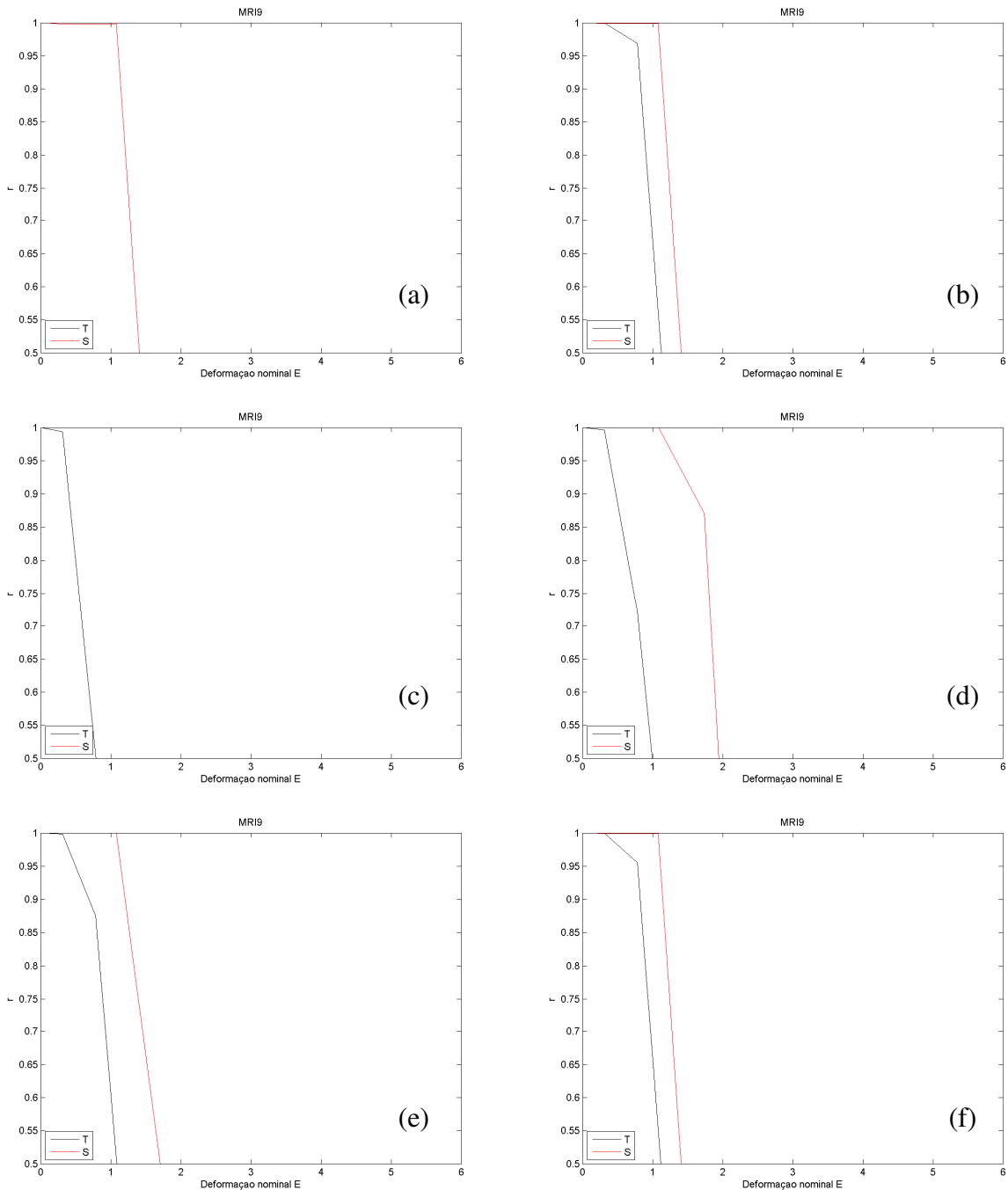


Figura 7. 13 - Silicone (MED4950). (a) Tração Uniaxial ( $e = 600%$ ). (b) Caso 3. (c) Tração Biaxial ( $e = 300%$ ). (d) Caso 2. (e) Caso 1. (f) Caso 4.

Para o modelo avaliado a otimização multi-objetivo não deve ser empregada, devido à perda de qualidade em relação ao ajuste de calibração original (Figuras 7.13b, d, e, f).

### 7.3.2. Fung – FI

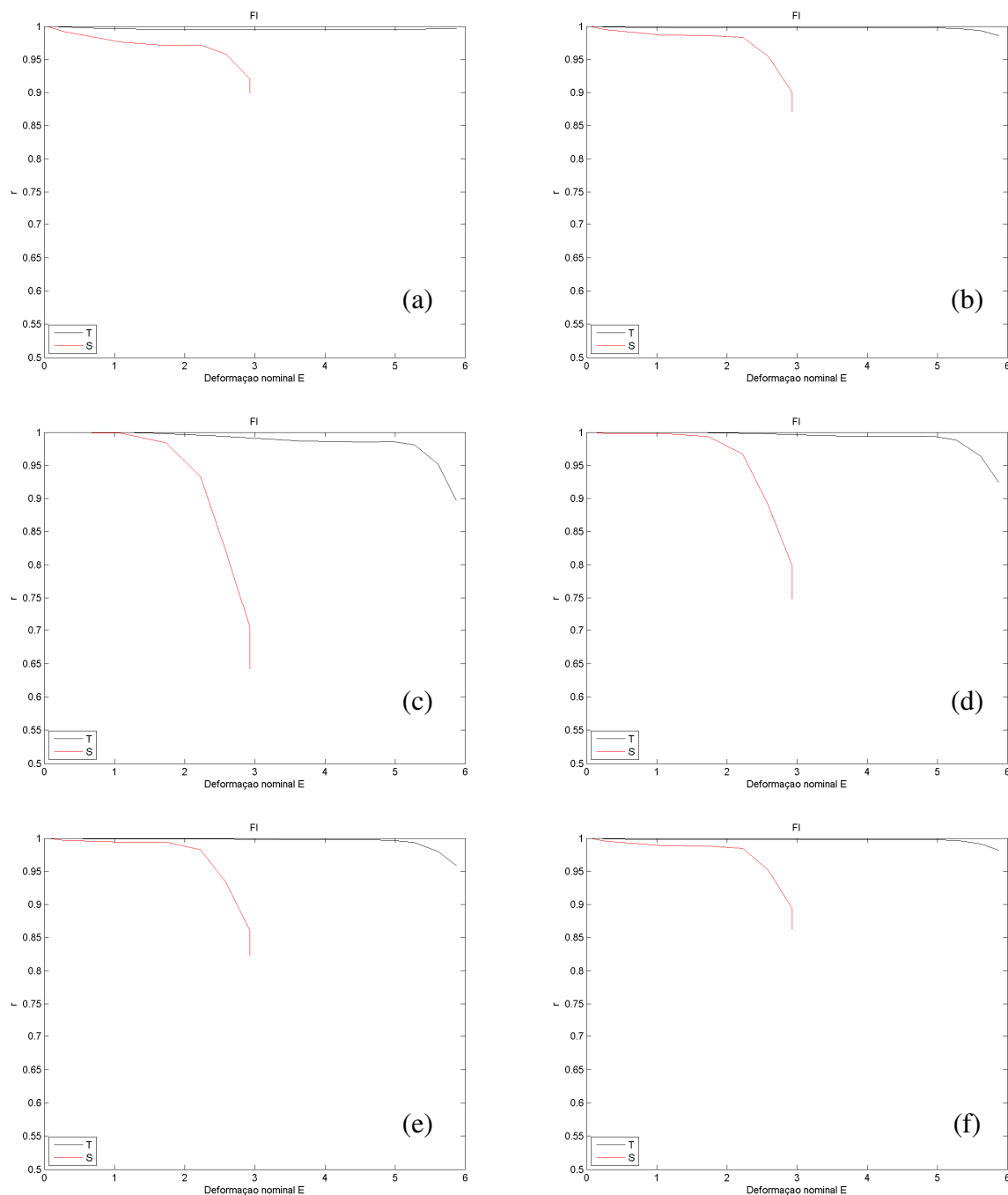


Figura 7. 14 - Silicone (MED4950). (a) Tração Uniaxial ( $e = 600\%$ ). (b) Caso 3. (c) Tração Biaxial ( $e = 300\%$ ). (d) Caso 2. (e) Caso 1. (f) Caso 4.

Fica clara através das Figuras (7.14b, d e, f) a expressiva a melhora nos resultados. Destaca-se que além de melhorar qualidade do ensaio  $B$ , manteve-se a qualidade do ensaio  $T$ .

### 7.3.3. Ogden – OI2

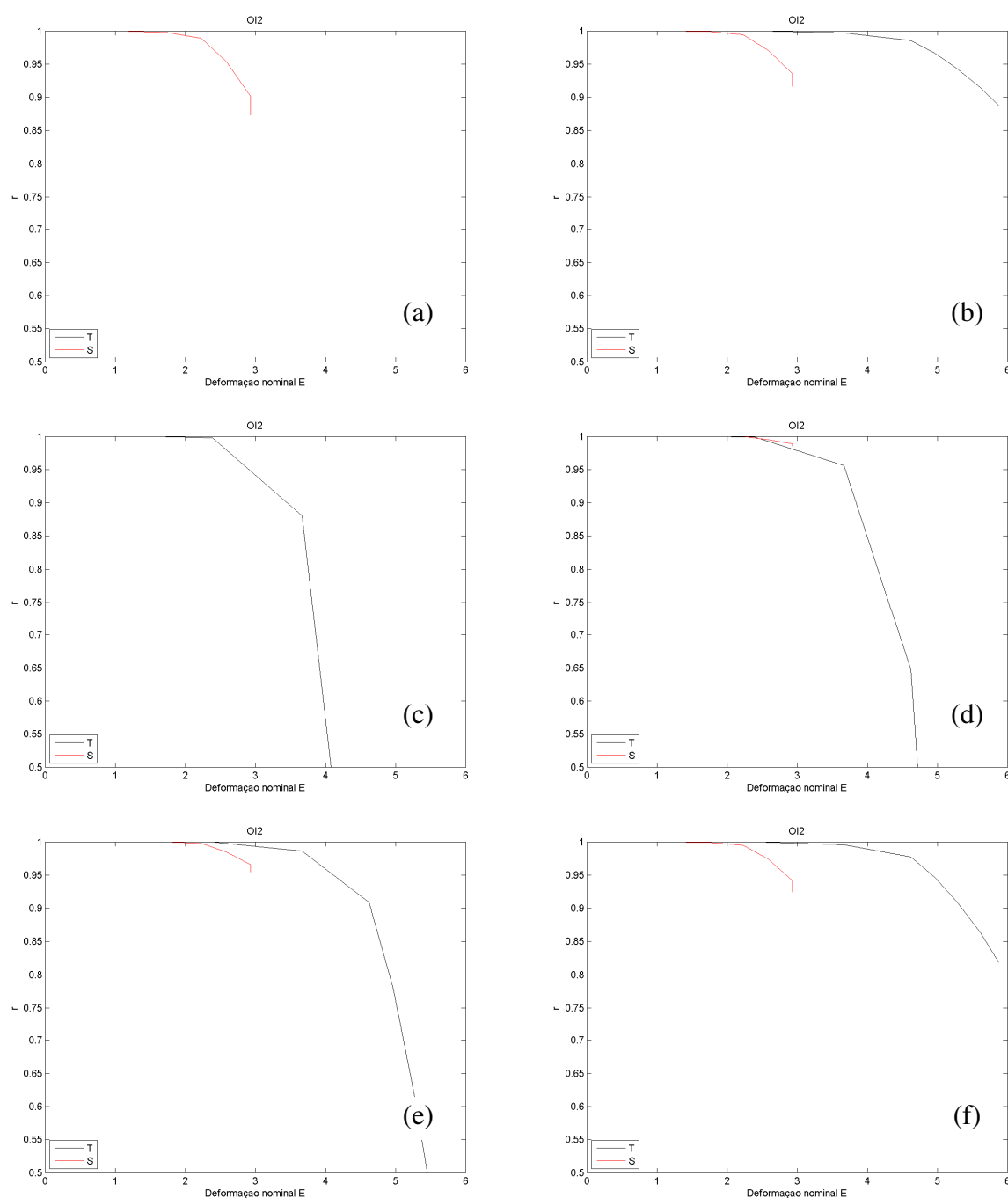


Figura 7. 15 - Silicone (MED4950). (a) Tração Uniaxial ( $e = 600\%$ ). (b) Caso 3. (c) Tração Biaxial ( $e = 300\%$ ). (d) Caso 2. (e) Caso 1. (f) Caso 4.

Conforme Figura (7.15b, f) verifica-se uma melhora nas predições para os dois ensaios, entretanto, destaca-se a perda de qualidade em relação ao ajuste de calibração original. É notória, Figura 7.15c, a influência do ensaio de tração biaxial no processo de fatoração das constantes constitutivas. Para o modelo avaliado, recomenda-se majorar a influência do ensaio de tração uniaxial (Figura 7.15b).

### 7.3.4. Yeoh – YI3

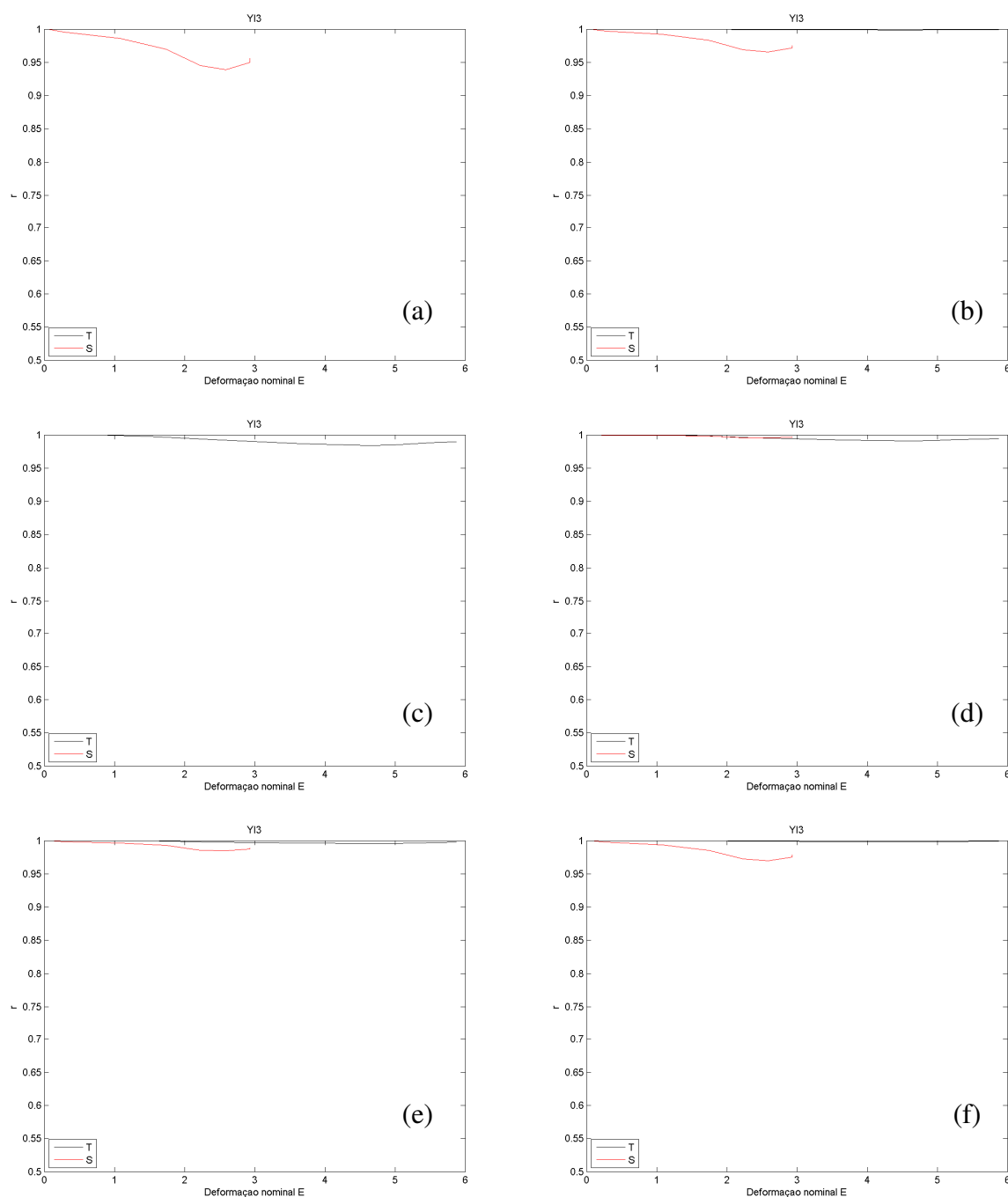


Figura 7. 16 - Silicone (MED4950). (a) Tração Uniaxial ( $e = 600\%$ ). (b) Caso 3. (c) Tração Biaxial ( $e = 300\%$ ). (d) Caso 2. (e) Caso 1. (f) Caso 4.

São expressivos, os excelentes resultados obtidos para este modelo empregando o ajuste multi-objetivo. Verifica-se uma melhora na predição dos dois ensaios (Figura 7.16d, e), com ênfase para o de tração biaxial (Figura 7.16a). Destaca-se que a qualidade das predições em relação ao ajuste original foi mantida. Para o material avaliado, a majoração do ensaio de tração biaxial traz uma melhor representatividade para a curva  $t \times e$

### 7.3.5. Gent – GI

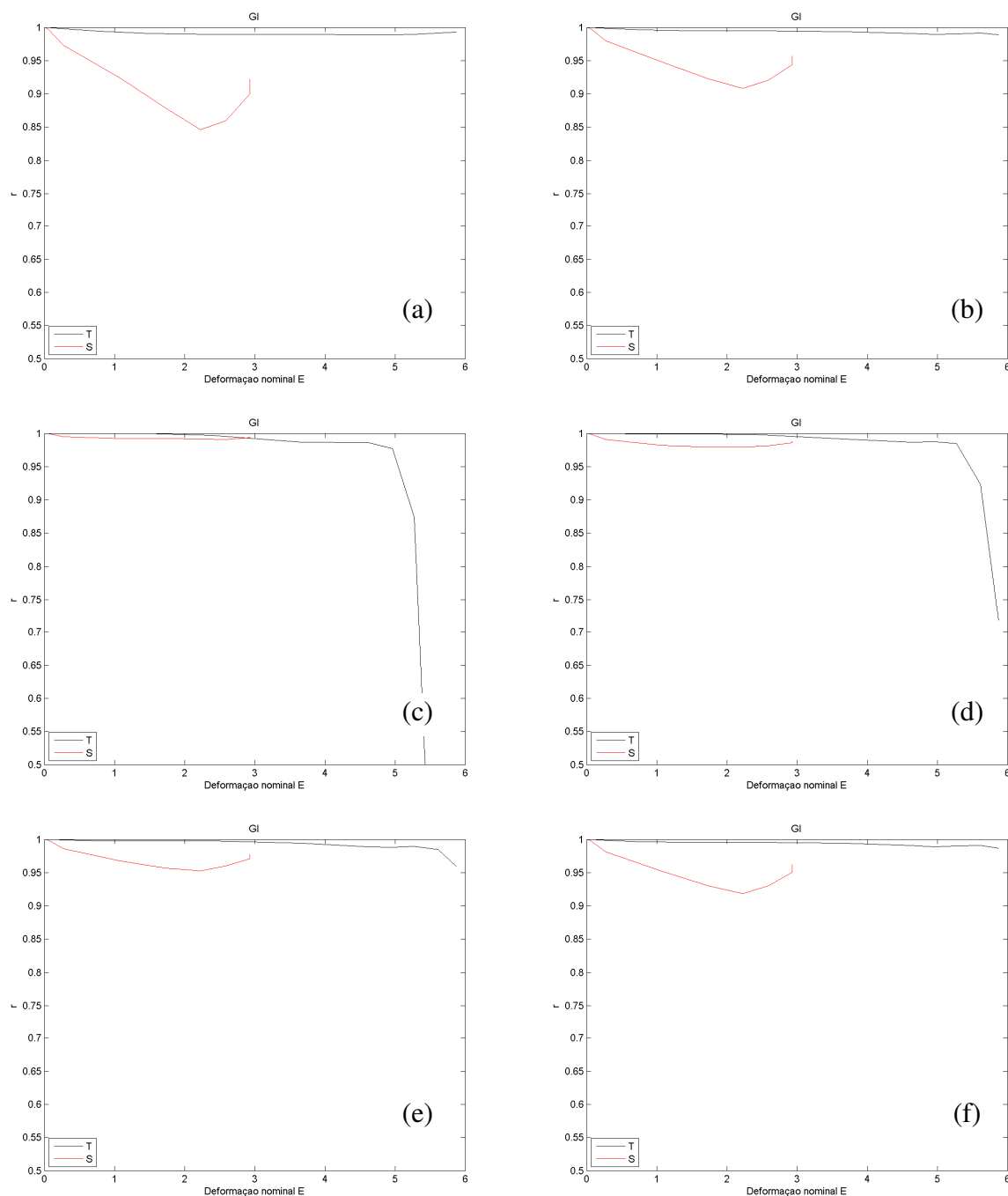


Figura 7. 17 - Silicone (MED4950). (a) Tração Uniaxial ( $e = 600\%$ ). (b) Caso 3. (c) Tração Biaxial ( $e = 300\%$ ). (d) Caso 2. (e) Caso 1. (f) Caso 4.

Neste caso, frente as instabilidades na predição do ensaio de tração uniaxial (Figura 7.17c) em relação ao ajuste de calibração original, a otimização multi-objetivo é mandatória. Claramente, através da Figura 7.17e verifica-se que, além de remover a instabilidade do ensaio de tração uniaxial, obteve-se uma melhora na predição do ensaio de tração biaxial (Figura 7.17a). Os resultados sugerem um grupo de fatores com pesos balanceados entre os dois ensaios.

### 7.3.6. Pucci-Saccomandi – PSI

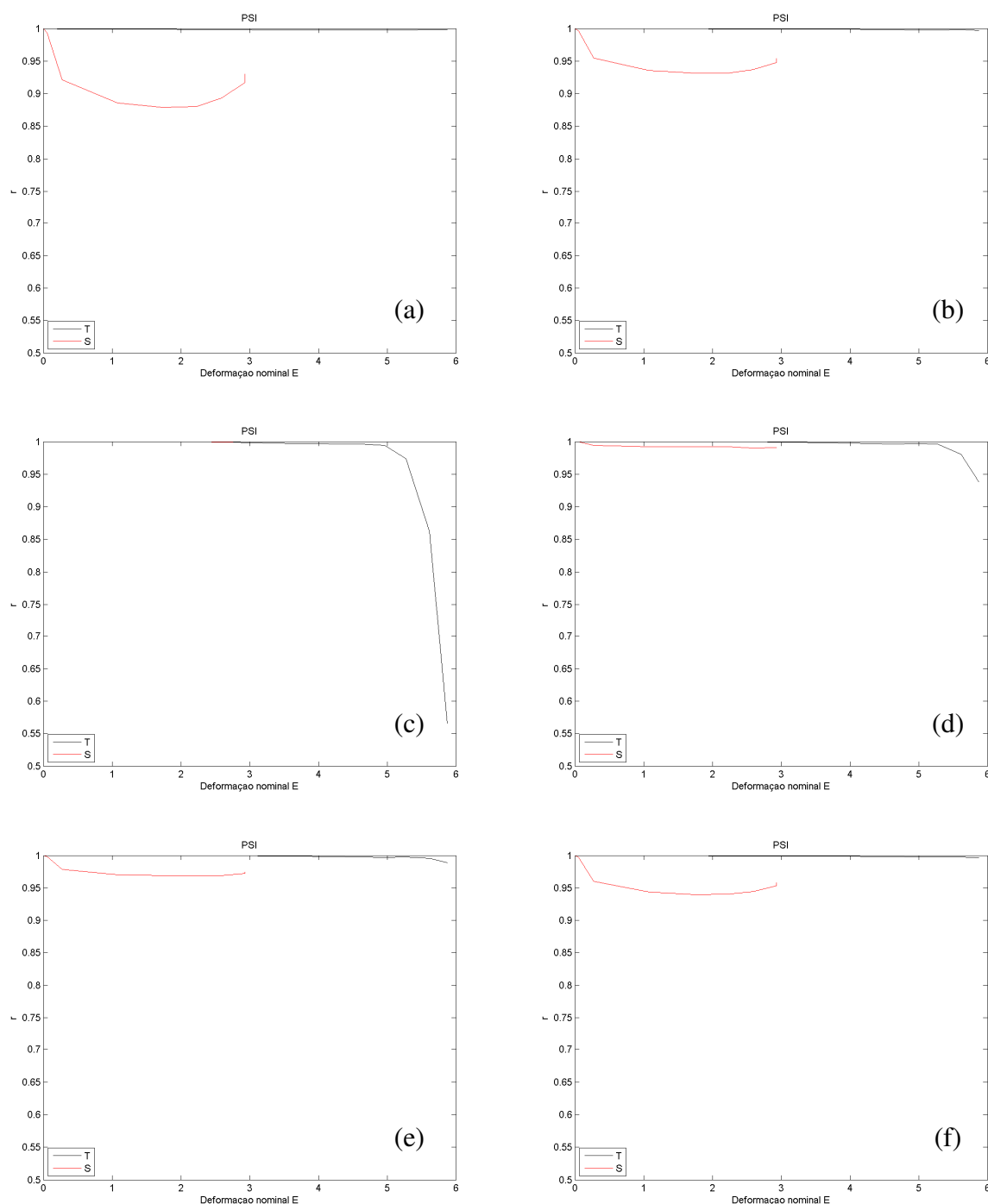


Figura 7. 18 - Silicone (MED4950). (a) Tração Uniaxial ( $e = 600\%$ ). (b) Caso 3. (c) Tração Biaxial ( $e = 300\%$ ). (d) Caso 2. (e) Caso 1. (f) Caso 4.

A Figura 7.18d ilustra o bom desempenho do modelo PSI obtido com as constantes otimizadas. Obteve-se uma melhora expressiva no comportamento da curva  $t \times e$ , destacando-se a melhora na qualidade do ensaio de tração biaxial (Figura 7.18a) e a remoção da instabilidade da predição do ensaio de tração uniaxial (Figura 7.18c).

## 7.4. Conclusões

A partir dos resultados apresentados, ficou claro a potencialidade de aplicação da otimização multi-critério no ajuste de constantes hipereásticas. Entretanto algumas peculiaridades devem ser observadas:

- Para os modelos da família polinomial clássica (1940-1960), a otimização multi-objetivo não deve ser empregada, dada a perda de qualidade dos resultados para os ajustes originais. Este comportamento se verifica devido à má qualidade obtida originalmente para as suas predições.
- A família de modelos de base exponencial gerou resultados melhores que os originais, sendo que os ensaios de tração uniaxial e cisalhamento devem ser ter os seus pesos  $(w_T, w_P)$  privilegiados no processo de obtenção das constantes constitutivas.
- Os modelos cuja energia de deformação é baseada diretamente nos alongamentos principais não mostraram bons resultados para todos os casos avaliados, pela mesma razão da família polinomial clássica. Conforme já destacado no Capítulo 6, para os modelos desta família é imperativo o emprego do ensaio de tração uniaxial para o ajuste das constantes constitutivas.
- Os modelos polinomiais mais recentes (1990-2000) tiveram uma razoável melhora na predição do ensaio de tração biaxial, gerando curvas aceitáveis para os três ensaios  $(T, P, B)$ .
- A família de modelos logarítmica apresentou excelentes resultados, em que verificou-se uma melhora no comportamento das predições, mantendo-se a qualidade do ensaio de tração uniaxial original.

Destaca-se que os resultados apresentados neste capítulo podem ser melhorados. Conforme visto no Capítulo 6, os modelos hiperelásticos exibem um comportamento específico para cada faixa de deformação. Sendo assim, o ajuste multi-objetivo deverá considerar a melhor faixa de trabalho de cada modelo, garantindo assim boas predições para todos os ensaios, mantendo a qualidade em relação aos ajustes originais. Outra avaliação possível seria empregar a mesma faixa de deformações para todos os ensaios.

## 8. PROPOSTA DE UM MODELO HIPERELÁSTICO

O presente trabalho analisou grande parte dos modelos hiperelásticos que possuem documentação disponível na literatura. É imperativo destacar a atual proliferação de modelos, muitos dos quais de desempenho questionável, sendo aplicado à nichos muito específicos de materiais. Um traço perspicaz manifestado na evolução dos modelos constitutivos hiperelásticos são as linhas de tendência, as quais originam uma família de modelos a partir de um modelo precursor. Pondera-se a utopia buscada por inúmeros autores da generalização de uma expressão para a energia de deformação que consiga capturar com fidelidade o comportamento do material para todas as faixas de deformações, se aplicável a materiais com características bem distintas (elastômeros, tecidos biológicos, etc.).

O presente estudo identificou cinco famílias base, remetidas à épocas bem distintas. A Figura 8.1 situa cronologicamente, destacando o período de maior manifestação de cada família.

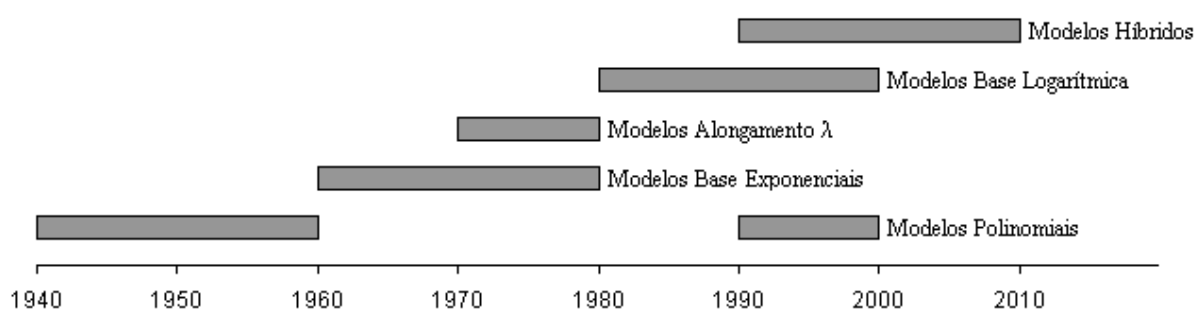


Figura 8. 1 – Famílias hiperelásticas situadas cronologicamente.

Através da metodologia de avaliação dos modelos constitutivos proposta no Capítulo 06, ficou explícito o comportamento de cada modelo em toda a sua faixa de deformação. Pode-se aferir com exatidão a partir da mesma a contribuição e eficiência de cada termo específico nas expressões para a energia de deformação. Cita-se por exemplo o caso do termo  $\ln(I_2)$ , empregado pela primeira vez no modelo de Gent e Thomas (1958), com o intuito de melhorar a representatividade da curva  $t \times e$ .

Seu emprego deve ser muito bem avaliado, uma vez que mau alocado pode vir a produzir resultados não condizentes com a realidade física do material. Um exemplo recente é o modelo de Pucci-Saccomandi (Saccomandi *et at.*, 2002) que fornece bons resultados para nichos específicos de materiais.

A partir do estudo dos modelos hiperelásticos e tomando por base os resultados e conceitos desenvolvidos neste trabalho, propõem-se uma família de modelos hiperelásticos, doravante denominados HOSS e MARCZAK, para análise de elastômeros e tecidos biológicos.



## 8.1. O Modelo Proposto

A família de modelos HMI (Hoss e Marczak incompressível) foi desenvolvida com o intuito de generalizar uma expressão para energia de deformação que fosse aplicável a uma apreciável gama de elastômeros, representando com fidelidade o comportamento da curva  $t \times e$  tanto para pequenas como grandes deformações. Alexander (1968) empregou o mesmo conceito aqui proposto, para o desenvolvimento de seu modelo constitutivo. Trata-se de um modelo heurístico, gerado com base na observação do desempenho dos modelos estudados no Capítulo 06. A idéia básica foi manter os termos, na expressão de  $W$ , que sabidamente reproduziam bem a forma geral da curva  $t \times e$ , ou seja, capazes de representar amolecimento a médias deformações e enrijecimento pronunciado em altas deformações. Então foram identificados quais termos presentes nos diversos modelos hiperelásticos eram responsáveis por reproduzir bem efeitos secundários, em particular a significativa mudança de rigidez em pequenas deformações ( $0 \leq e \leq 100\%$ ). A base da família é modelo *power-law* de Knowles (1977), ao qual são somados termos responsáveis por conferir ao modelo as características desejadas para toda a faixa de alongamentos. Propõem-se duas versões para este modelo, ambas geradas por modificações das equações básicas do modelo de Knowles:

- HMLSI – Pequenas Deformações:

O modelo HMLSI possui formulação híbrida, e consiste na adição de um termo exponencial ao modelo *power-law* KI, responsável por melhorar a qualidade dos ajustes e predições em pequenas deformações (Yeoh, 1993). Sua formulação é bastante geral, e permite a obtenção de outros modelos por simplificação. Baseado no 1º invariante de deformações, apresenta a seguinte expressão para a energia de deformação:

$$W = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(I_1-3)}) + \frac{\mu}{2b} \left( \left(1 + \frac{b(I_1-3)}{n}\right)^n - 1 \right) \quad (7.3)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $b$  e  $n$  são as constantes do material. Adotando-se  $\alpha = 0$  obtém-se o modelo KI, tomando-se o limite de  $n \rightarrow \infty$  da expressão (8.1), com  $\alpha = 0$ , recai-se no modelo FI.

- HMHSI – Grandes Deformações:

A principal diferença deste modelo em relação ao modelo HMLSI está na consideração, na expressão da energia de deformação (eq.8.1), do 2º invariante de deformações. Isto reveste o modelo HMHSI de uma maior sensibilidade e precisão na predição do comportamento de materiais com enrijecimento pronunciado em grandes deformações. Manteve-se o termo exponencial responsável por conferir precisão às predições em baixa deformação. Expresso em termos do 1º e 2º invariantes de deformações, apresenta a seguinte expressão para a energia de deformação:

$$W = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(I_1-3)}) + \frac{\mu}{2b} \left( \left( 1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^n - 1 \right) + C_2 \ln\left(\frac{1}{3} I_2\right) \quad (7.4)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $b$ ,  $n$  e  $C_2$  representam as constantes constitutivas do material. Adotando-se  $\alpha = C_2 = 0$ , obtém-se o modelo KI, tomando-se o limite de  $n \rightarrow \infty$  da expressão (8.2), com  $\alpha = C_2 = 0$ , recai-se no modelo FI.

Os modelos propostos empregam uma formulação híbrida, entretanto, em função do termo dominante na expressão para energia de deformação ser o modelo KI, pode-se considerar os modelos como sendo *power-law*. Elegeu-se esta base devido aos bons resultados encontrados para o modelo de KI no Capítulo 6, e também pelo fato do modelo ser um dos precursores na modelagem do fenômeno de enrijecimento elevado em grandes deformações. Os termos somados a base original têm por objetivo reproduzir os efeitos secundários, como por exemplo, a significativa mudança de rigidez em pequenas deformações. A parcela exponencial, responsável por conferir precisão em baixas deformações, foi empregada a partir da análise dos resultados dos ajustes e predições do modelo de YFI, que possui formulação semelhante (ver eq.(3.32)). Já o termo logarítmico da eq.(8.2) foi agregado em função dos excelentes resultados, embora para um nicho específico de material, encontrados para o modelo PSI no Capítulo 6.

## 8.2. Ajuste das Constantes Constitutivas

A seguir será detalhada a particularização das expressões para as tensões  $T, P, B$ , de modo que juntamente com os dados experimentais disponíveis, as mesmas possam ser empregadas para a calibração e validação a posteriori dos modelos numéricos.

### 8.2.1. Hoss-Marczak (HMLSI)

Partindo-se da eq.(8.1) tem-se:

$$W = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(I_1-3)}) + \frac{\mu}{2b} \left[ \left( 1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^n - 1 \right] \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \alpha e^{(-\beta(I_1-3))} + \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^{n-1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = 0$$

A Tabela 8. 1 apresenta estas expressões para serem utilizadas com os dados experimentais.

<b>Hoss-Marczak – HMLSI</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_5$
$t_P =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_5$
$t_S =$	$\gamma A_5$
$t_B =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_5$

Tabela 8. 1 - Tensões nominais para o modelo HMLSI.

O único fator empregado na Tabela 8. 1 é dado por:

$$A_5 = \alpha e^{(-\beta(I_1-3))} + \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^{n-1}$$

### 8.2.2. Hoss-Marczak (HMHSI)

Partindo-se da eq.(8.2) tem-se:

$$W = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(I_1-3)}) + \frac{\mu}{2b} \left[ \left( 1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^n - 1 \right] + C_2 \ln \left( \frac{1}{3} I_2 \right) \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \alpha e^{(-\beta(I_1-3))} + \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^{n-1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{C_2}{I_2}$$

A Tabela 8. 1 apresenta estas expressões para serem utilizadas com os dados experimentais.

<b>Hoss-Marczak – HMHSI</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( A_6 + \frac{B_6}{\lambda} \right)$
$t_P =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) (A_6 + B_6)$
$t_S =$	$\gamma (A_6 + B_6)$
$t_B =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) (A_6 + \lambda^2 B_6)$

Tabela 8. 2 - Tensões nominais para o modelo HMHSI.

Os fatores empregados na Tabela 8. 2 são:

$$A_6 = \alpha e^{(-\beta(I_1-3))} + \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^{n-1}$$

$$B_6 = \frac{C_2}{I_2}$$

A Tabela 8.3 resume as constantes a serem determinadas pelo ajuste de curvas para os modelos hiperelásticos aqui apresentados.

<b>Modelo</b>	<b>Constantes</b>
<b>HMLS</b>	$\alpha, \beta, \mu, b, n$
<b>HMHS</b>	$\alpha, \beta, \mu, b, n, C_2$

Tabela 8. 3 - Constantes necessárias para ajustar os modelos hiperelásticos.

### 8.3. Validação do Modelo Constitutivo

A validação do modelo constitutivo será feita considerando os mesmos materiais, ensaios e faixas de deformação analisados no Capítulo 05. A metodologia de análise empregada será a desenvolvida no Capítulo 06. Busca-se com isso poder comparar diretamente os resultados obtidos com a resposta fornecida pelos modelos anteriormente analisados, de forma a comparar o desempenho da nova família de modelos que está sendo proposta.

Neste capítulo, os resultados serão apresentados comparando o modelo proposto com os modelos YMI, YFI e PSI, tendo em vista as similaridades desses com o modelo desenvolvido.

#### 8.3.1. Caso de Estudo: Borracha Natural – Grandes Deformações

As faixas de deformação para cada ensaio são respectivamente:  $0 \leq e \leq 700\%$  para tração uniaxial,  $0 \leq e \leq 400\%$  para cisalhamento puro e  $0 \leq e = 350\%$  para tração biaxial. Conforme apresentado anteriormente neste caso é imperativo o uso do modelo HMI para grandes deformações.

##### 8.3.1.1. Ajuste para Tração Uniaxial

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 700\%$ , verificando-se as previsões para os casos de cisalhamento puro ( $P$ ) e tração biaxial ( $B$ ) na mesma faixa de deformações. A Figura 8.5 apresenta uma análise gráfica do coeficiente de correlação.

Os melhores resultados para o modelo HMHSI, foram encontrados para o ajuste na faixa  $0 \leq e \leq 600\%$ . A Figura 8.2 apresenta uma comparação direta com o modelo PSI, que também teve bom comportamento. Ficam implícitos a partir da comparação os excelentes resultados do novo modelo. Pode-se também verificar através da Figura 8.5 que o modelo HMHS se ajusta bem a todas as faixas de deformações, apresentando previsões semelhantes ao modelo PSI, tido como referência na modelagem de materiais que apresentam enrijecimento pronunciado em grandes deformações. Os modelos YMI e YFI demonstram uma qualidade inferior tanto nos ajustes como para as previsões da curva  $t \times e$ , o que já foi comentado nos Capítulos 5 e 6 deste trabalho.

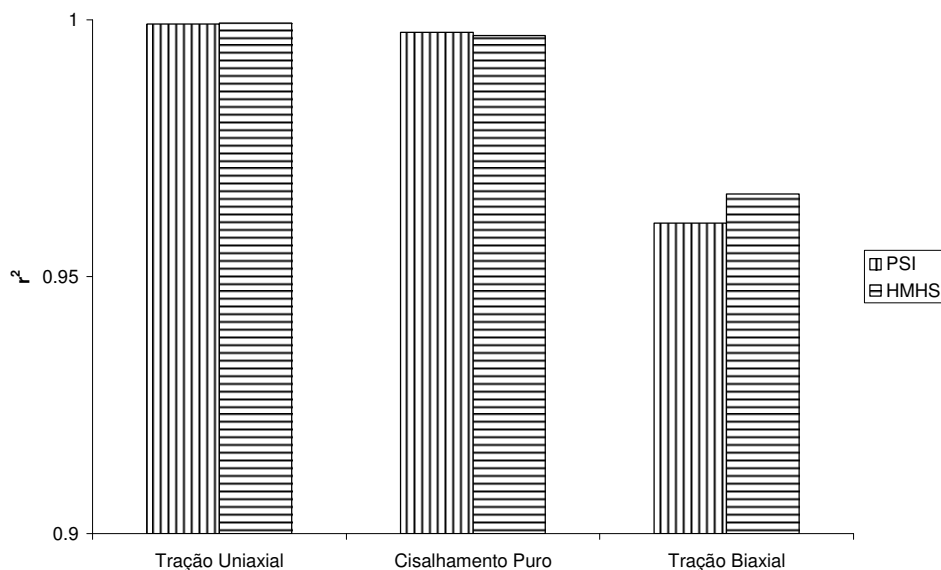


Figura 8. 2 – Comparação dos modelos PSI e HMHSI. Ajuste para  $T$  na faixa  $0 \leq e \leq 600\%$ .

### 8.3.1.2. Ajuste para Cisalhamento Puro

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 400\%$ , entretanto, a cada incremento de  $100\%$  nos alongamentos era ajustado um novo grupo de constantes, verificando-se as predições para os casos de tração uniaxial ( $T$ ) e cisalhamento puro ( $P$ ) na mesma faixa de deformações. A Figura 8.6 apresenta uma análise gráfica do coeficiente de correlação, destaca-se que para deformações superiores a  $400\%$  os ajustes são tomados sempre em relação ao mesmo referencial, entretanto as predições dos demais ensaios ( $T, B$ ) são extrapoladas até a sua faixa nominal de trabalho.

Verifica-se a partir das Figuras 8.6a e 8.6b que para deformações até  $300\%$  os modelos HMHSI e PSI exibiram um comportamento muito similar. Para grandes deformações, o modelo PSI apresentou predições mais estáveis para os ensaios  $T$  e  $B$ , representando uma melhor opção caso seja necessário realizar uma extrapolação. Entretanto, restringindo-se à faixa de aplicação do modelo  $0 \leq e \leq 400\%$ , verificam-se resultados para o modelo HMHSI dentro da faixa de ajuste superiores aos do modelo PSI. Destaca-se também para a qualidade superior da curva ajustada. Isto é reforçado através da Figura 8.3, que ilustra a comparação direta entre os dois modelos ajustados para  $e = 400\%$ . Confirma-se através dessa, a possibilidade de ajustar o modelo proposto para ensaios diferentes do de tração uniaxial. Salienta-se, que a maioria dos modelos hiperelásticos avaliados no Capítulo 6, como por exemplo, YMI e YFI (Figura 8.6), não apresentaram bons resultados quando ajustado com os dados de cisalhamento.

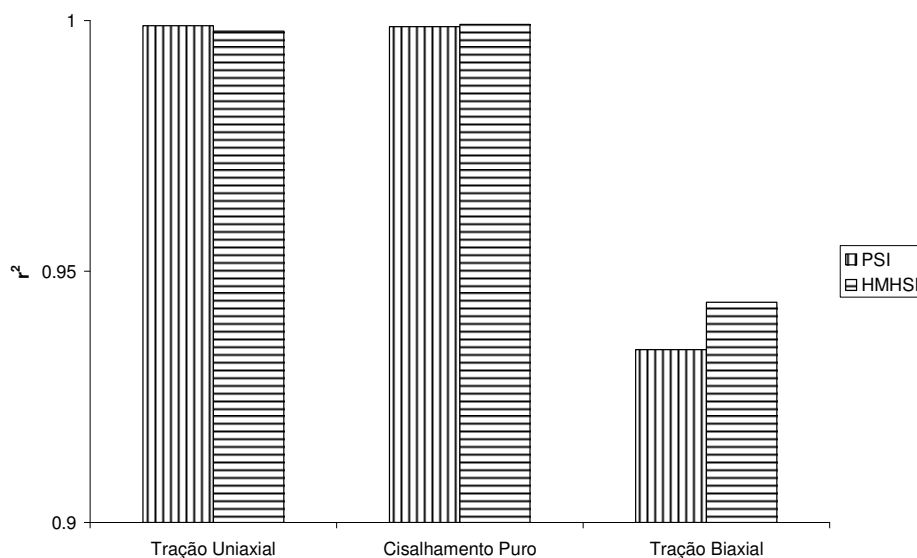


Figura 8. 3 - Comparação dos modelos PSI e HMHSI. Ajuste para  $P$  na faixa  $0 \leq e \leq 400\%$  .

### 8.3.1.3. Ajuste para Tração Biaxial

. As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 350\%$  . A Figura 8.7 apresenta uma análise gráfica do coeficiente de correlação. Destaca-se que para deformações superiores a  $350\%$  os ajustes são tomados sempre em relação ao mesmo referencial, entretanto as previsões dos demais ensaios  $T$  e  $P$  são extrapoladas até a sua faixa nominal de trabalho. Verifica-se a partir das Figuras 8.4 e 8.7 que os resultados do modelo PSI sobrepõem-se aos do novo modelo proposto, com ênfase para deformações superiores a  $300\%$  . Isso se deve possivelmente ao fato, de que acima desta faixa de deformações os resultados consistem em extrapolações. Para este ensaio, os resultados obtidos com o modelo HMHSI foram muito similares aos do modelo YFI (Figura 8.7).

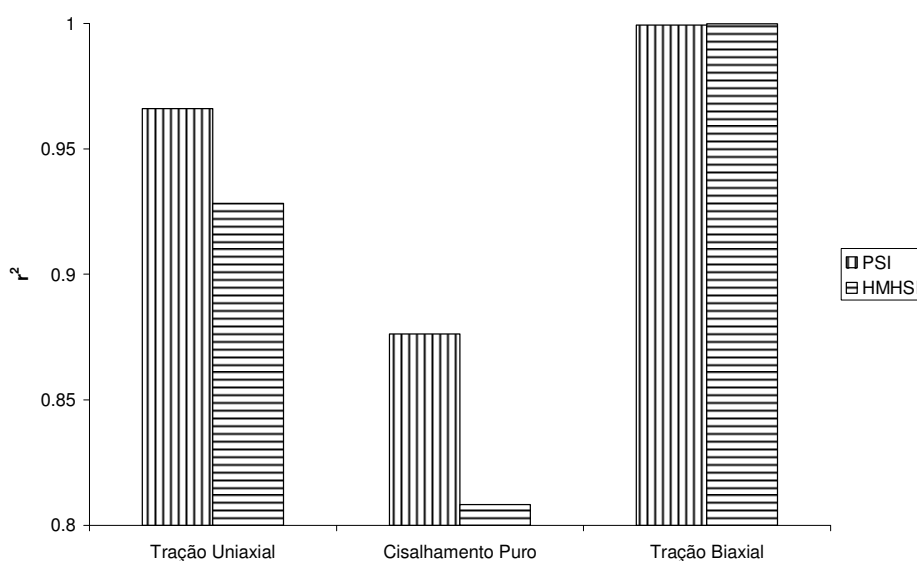


Figura 8. 4 - Comparação dos modelos PSI e HMHSI. Ajuste para  $B$  na faixa  $0 \leq e \leq 700\%$  .

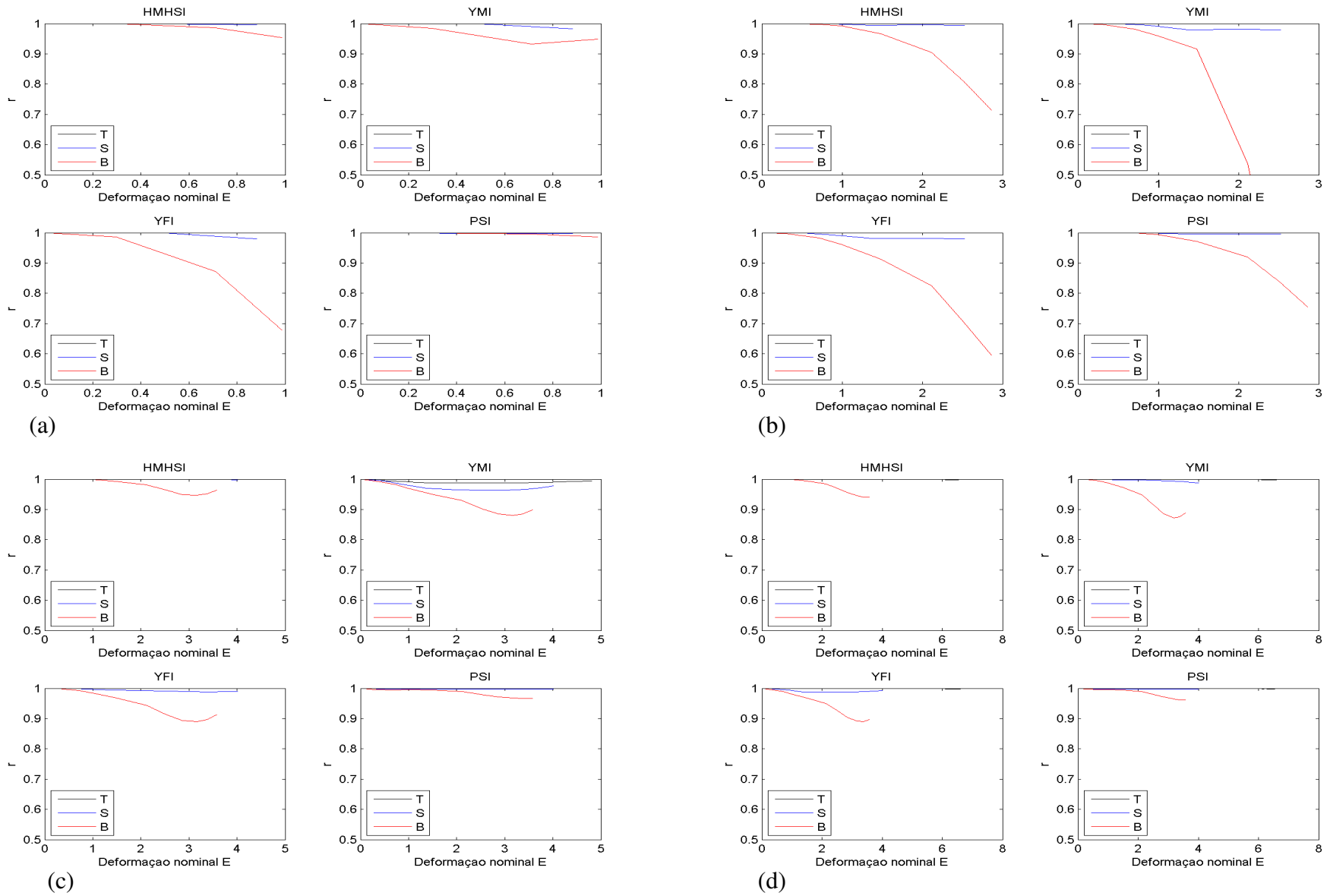


Figura 8. 5 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $T$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 300\%$ . (c) -  $e = 500\%$ . (d) -  $e = 700\%$ .



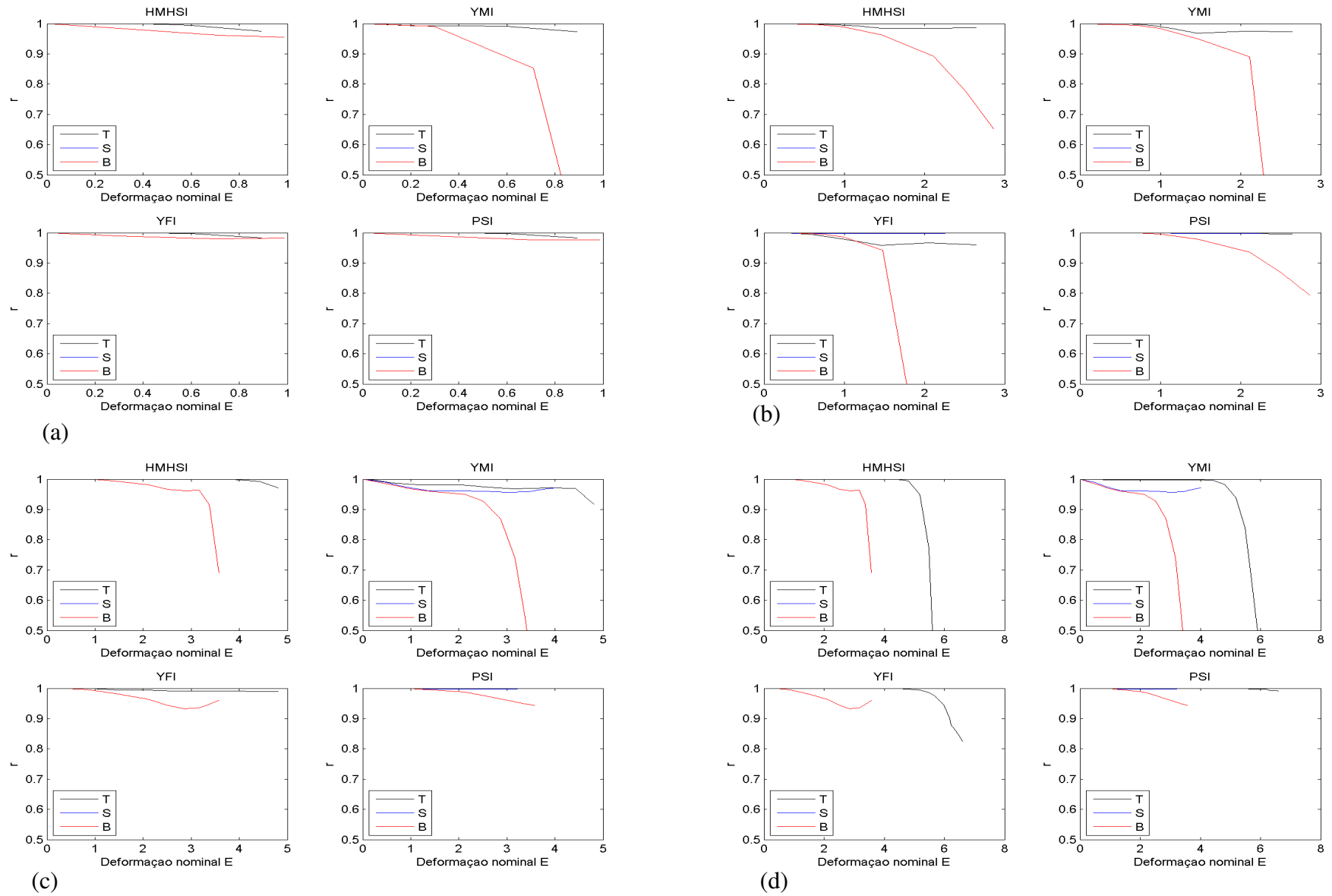


Figura 8. 6 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $P$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 300\%$ . (c) -  $e = 500\%$ . (d) -  $e = 700\%$ .

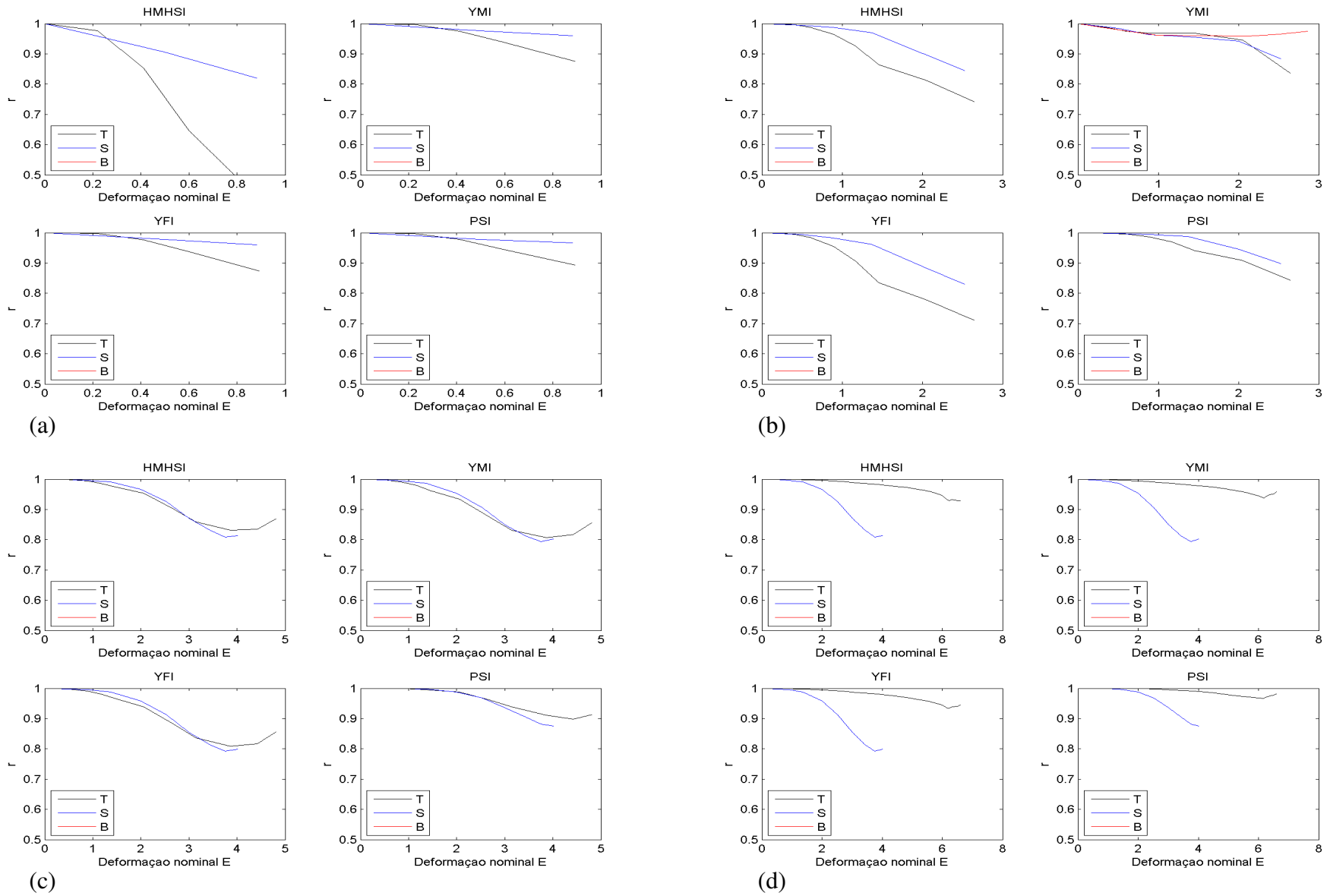


Figura 8. 7 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $B$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 300\%$ . (c) -  $e = 500\%$ . (d) -  $e = 700\%$ .

### 8.3.2. Caso de Estudo: Borracha Natural – Pequenas Deformações

#### 8.3.2.1. Ajuste para Tração Uniaxial

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 100\%$ , verificando-se as predições para os casos de cisalhamento puro ( $P$ ) e tração biaxial ( $B$ ) na mesma faixa de deformações. A Figura 8.11 apresenta uma análise gráfica para o coeficiente de correlação. Note-se o excelente comportamento do modelo HMLSI, com ênfase para grandes deformações (Figura 8.11c), faixa na qual prepondera sobre os demais modelos. A Figura 8.8 compara os modelos HMLSI, YMI e YFI ajustados para  $e = 80\%$ . É interessante ressaltar as semelhanças em suas formulações, entretanto, claramente o modelo HMLSI apresenta melhores resultados. O modelo PSI apresentou predições errôneas para os ensaios  $P$  e  $B$  para todas as faixas de deformações.

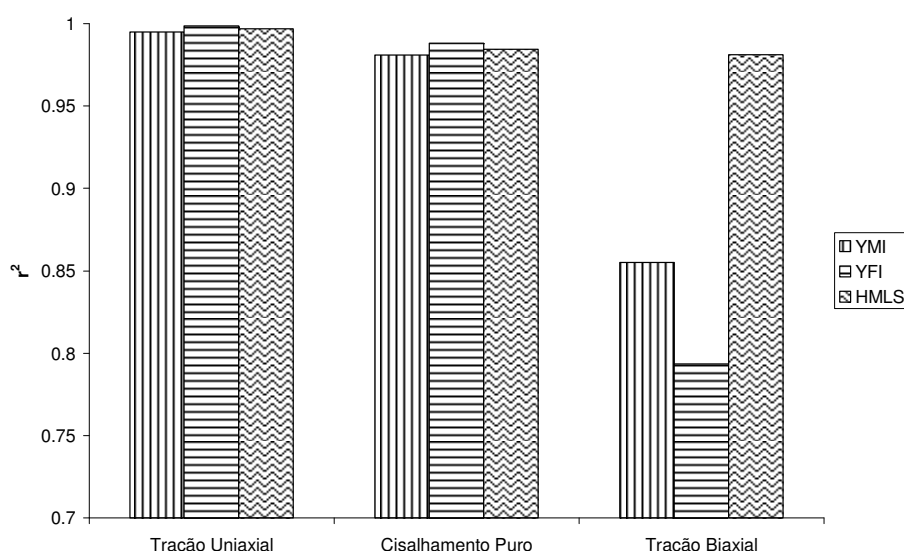


Figura 8. 8 - Comparação dos modelos YMI, YFI e HMLSI. Ajuste para  $T$  ( $0 \leq e \leq 700\%$ ).

#### 8.3.2.2. Ajuste para Cisalhamento Puro

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 130\%$ , verificando-se as predições para os casos de tração uniaxial ( $T$ ) e tração biaxial ( $B$ ) na mesma faixa de deformações. A Figura 8.12 apresenta uma análise gráfica para o coeficiente de correlação. Similar ao ajuste realizado para tração uniaxial (seção 8.3.2.1), o modelo HMLSI teve bons resultados (Figura 8.21). A Figura 8.9 compara os modelos YMI, YFI, PSI e HMLSI ajustados para  $e = 130\%$ , fica explícito o excelente comportamento do modelo proposto.

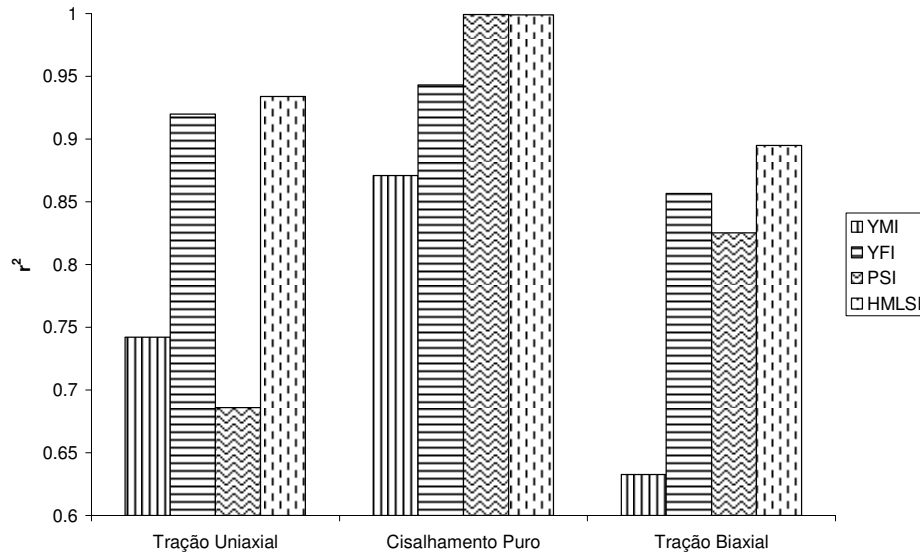


Figura 8. 9 - Comparação dos modelos YMI, YFI, PSI e HMLSII. Ajuste para  $P$  ( $0 \leq e \leq 130\%$ ).

### 8.3.2.3. Ajuste para Tração Biaxial

As constantes foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 70\%$ . As predições para os casos de tração uniaxial ( $T$ ) e cisalhamento puro ( $P$ ) foram verificadas na mesma faixa, entretanto, para deformações superiores a  $70\%$  as predições são extrapoladas até a sua faixa nominal de trabalho. Notoriamente para pequenas deformações, o modelo HMLSII exibiu um comportamento muito similar à YMI e YFI. Ratifica-se a partir da Figura 8.13 o bom comportamento do modelo para todas as faixas de deformações. A Figura 8.10 compara as predições para  $e = 80\%$  dos modelos YMI, YFI, PSI e HMLSII. Enfatiza-se o bom comportamento do modelo proposto e a similaridade dos resultados com YFI.

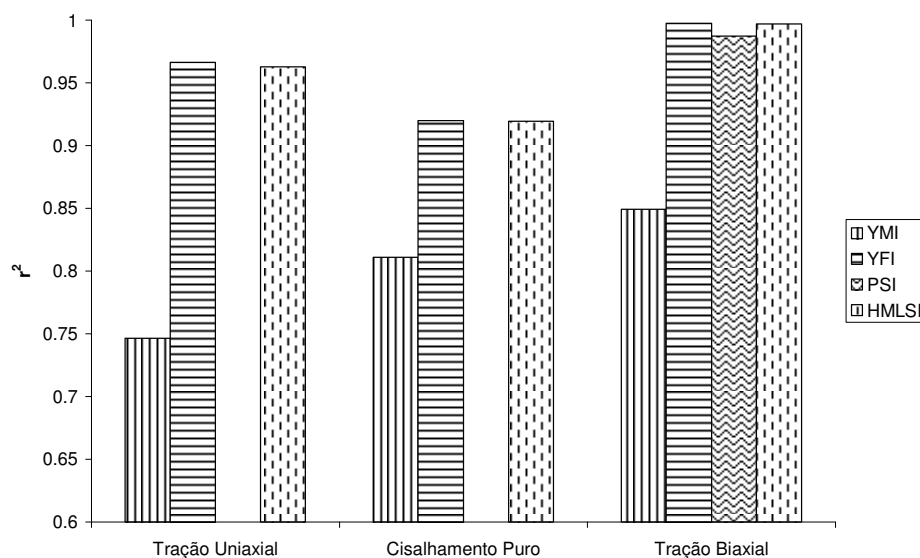


Figura 8. 10 - Comparação dos modelos YMI, YFI, PSI e HMLSII. Ajuste para  $B$  ( $0 \leq e \leq 70\%$ ).

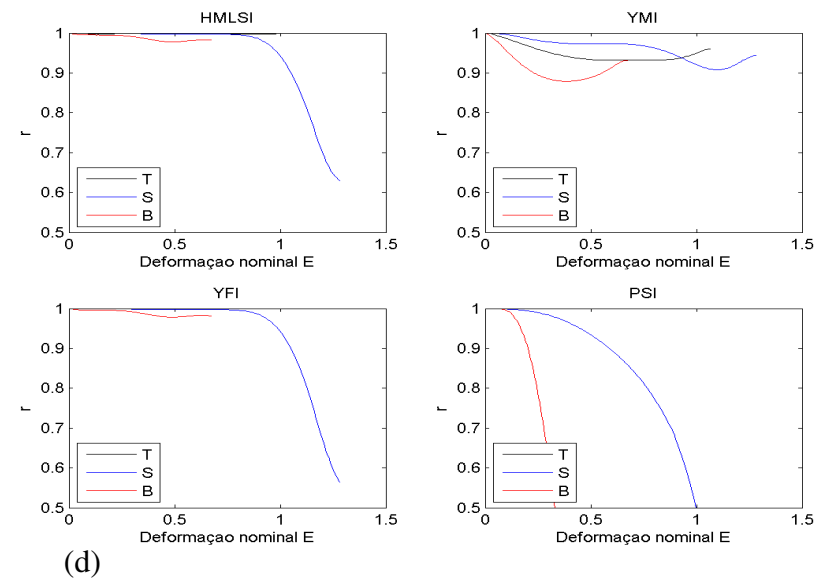
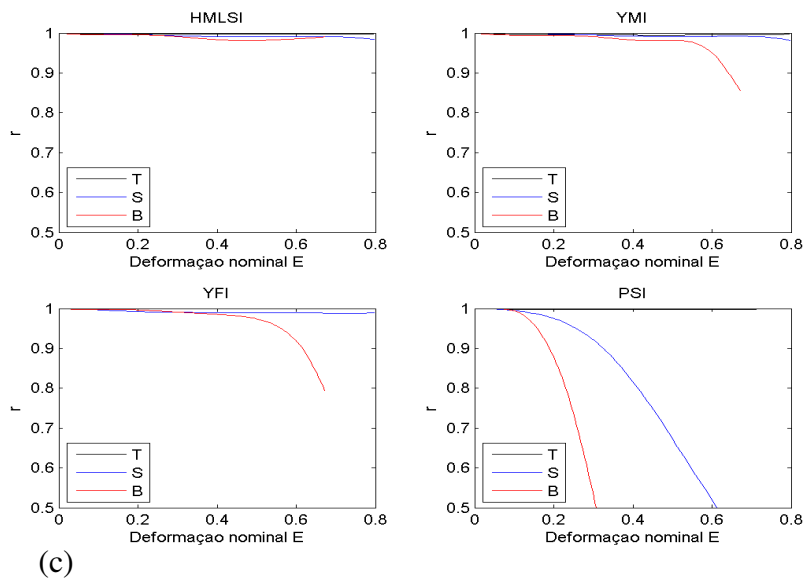
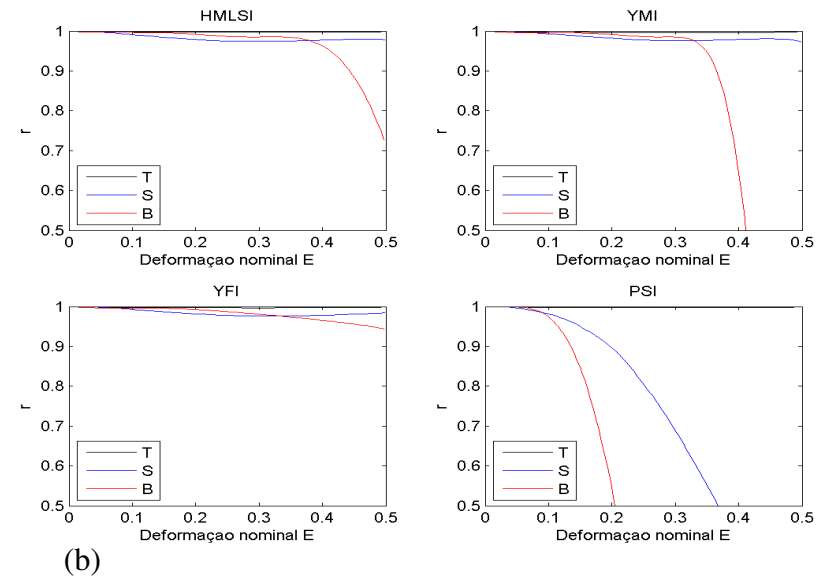
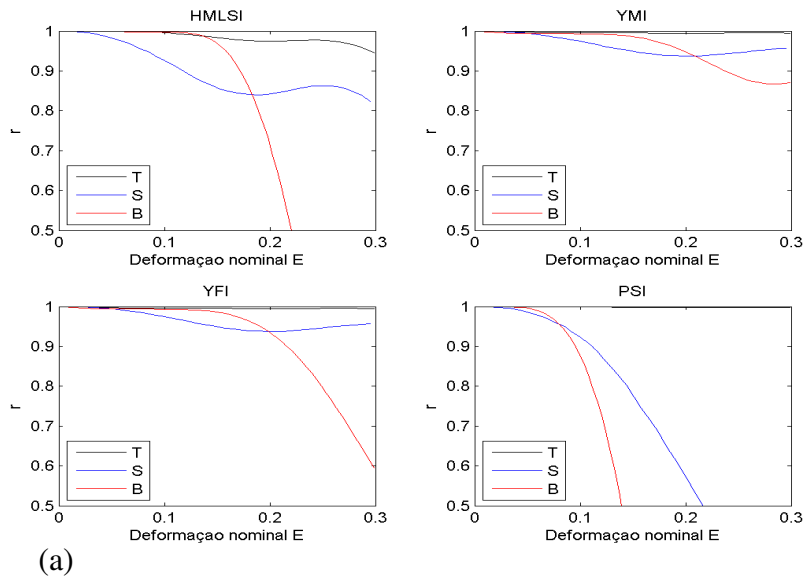


Figura 8. 11 - Borracha natural (NR55). Ajuste para  $T$ . (a) -  $e = 30\%$ . (b) -  $e = 50\%$ . (c) -  $e = 80\%$ . (d) -  $e = 130\%$ .

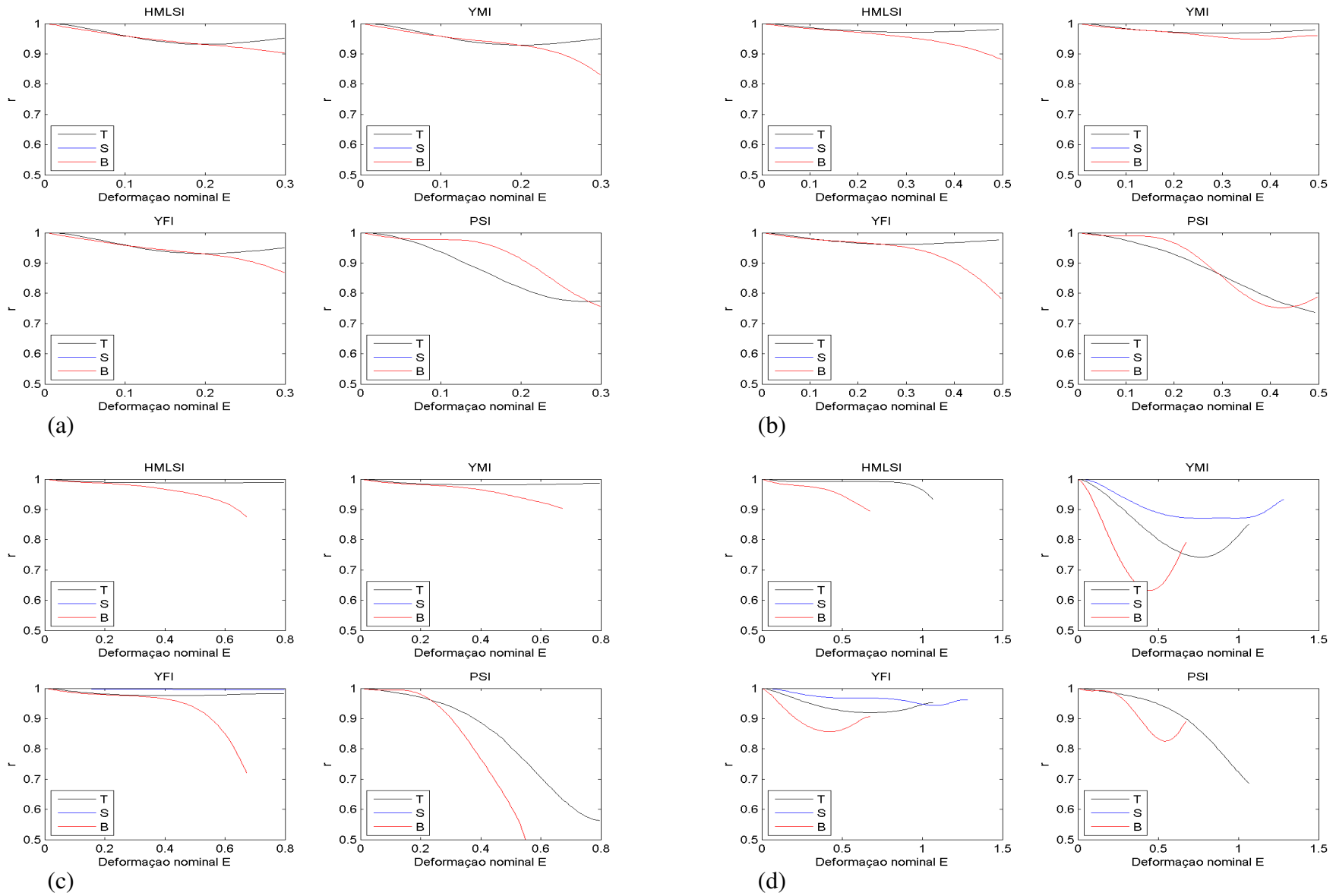


Figura 8. 12 - Borracha natural (NR55). Ajuste para  $P$ . (a) -  $e = 30\%$ . (b) -  $e = 50\%$ . (c) -  $e = 80\%$ . (d) -  $e = 130\%$ .

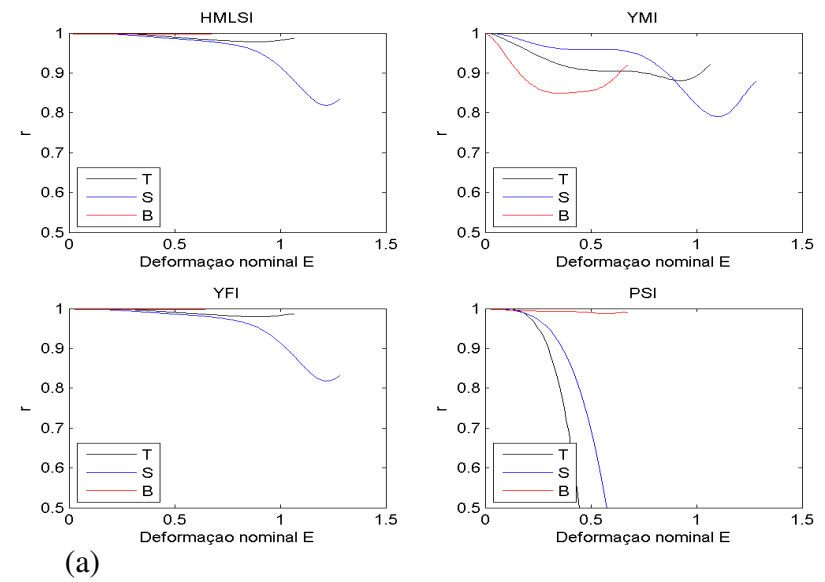
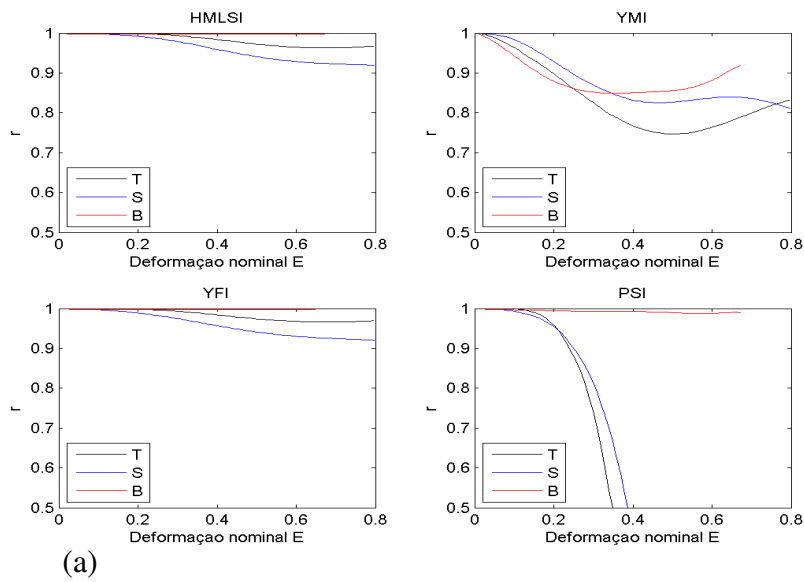
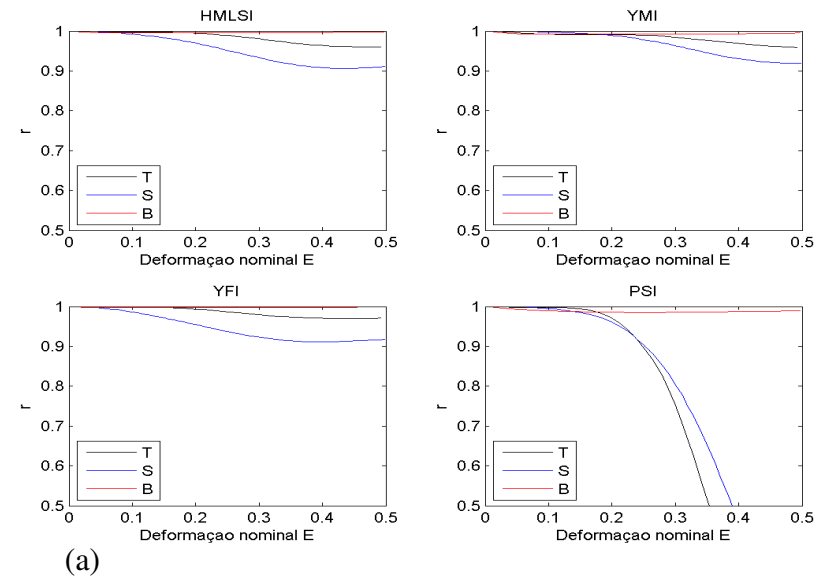
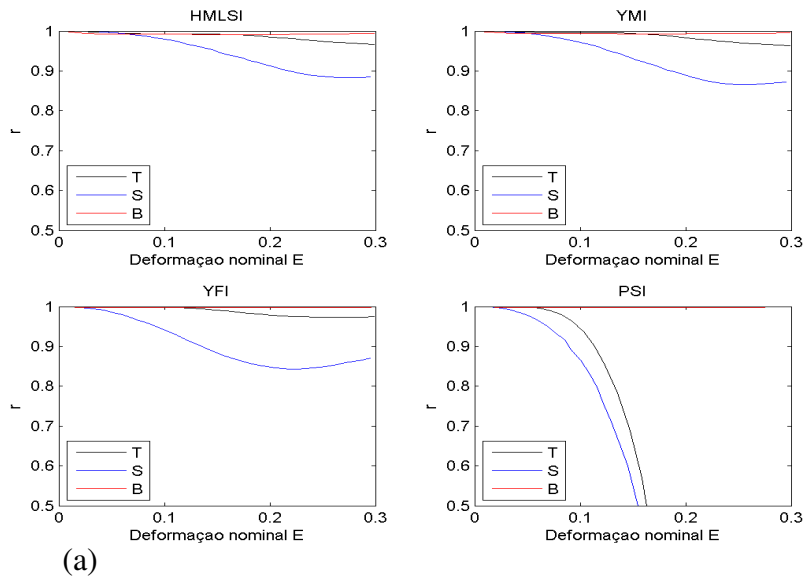


Figura 8. 13 - Borracha natural (NR55). Ajuste para  $B$  . (a) -  $e = 30\%$  . (b) -  $e = 50\%$  . (c) -  $e = 80\%$  . (d) -  $e = 130\%$  .

### 8.3.3. Caso de Estudo: Silicone

#### 8.3.3.1. Ajuste para Tração Uniaxial

As constantes hiperelásticas foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 600\%$ , verificando-se as previsões para tração biaxial ( $B$ ) na mesma faixa de deformações. A Figura 8.17 apresenta uma análise gráfica para o coeficiente de correlação.

Fica intrínseco a partir da Figura 8.17, os excelentes resultados do modelo HMHSI para grandes deformações ( $e \geq 200\%$ ). Ressalta-se também a estabilidade de suas previsões frente aos demais modelos avaliados (Figura 8.17c e 8.17d). São essas características, somado ao bom comportamento em pequenas deformações, que tornam os modelos HMI promissores na modelagem de elastômeros e tecidos biológicos. Este estudo de caso, em conjunto com os das seções 8.3.1 e 8.3.2 validam o modelo frente as premissas impostas na seção 8.1.

As Figuras 8.14 e 8.15 comparam os modelos YMI, YFI, PSI e HMLSI ajustados para  $e = 400\%$  e  $e = 600\%$  respectivamente. Para grandes deformações (Figura 8.15), verifica-se um comportamento similar ao modelo YFI. Entretanto, o modelo HMHSI apresenta um valor de  $R^2$  superior para a curva ajustada. À médias deformações, Figura 8.14, fica evidente o melhor comportamento do modelo HMHSI frente a predição do ensaio de tração biaxial. Os modelos YMI e PSI apresentaram instabilidades na predição do ensaio de tração biaxial. Destaca-se que eram esperados bons resultados para o modelo PSI, em função do mesmo ser referenciado pela literatura como um dos modelos promissores na modelagem de materiais com enrijecimento pronunciado em grandes deformações (Saccomandi, 2002).

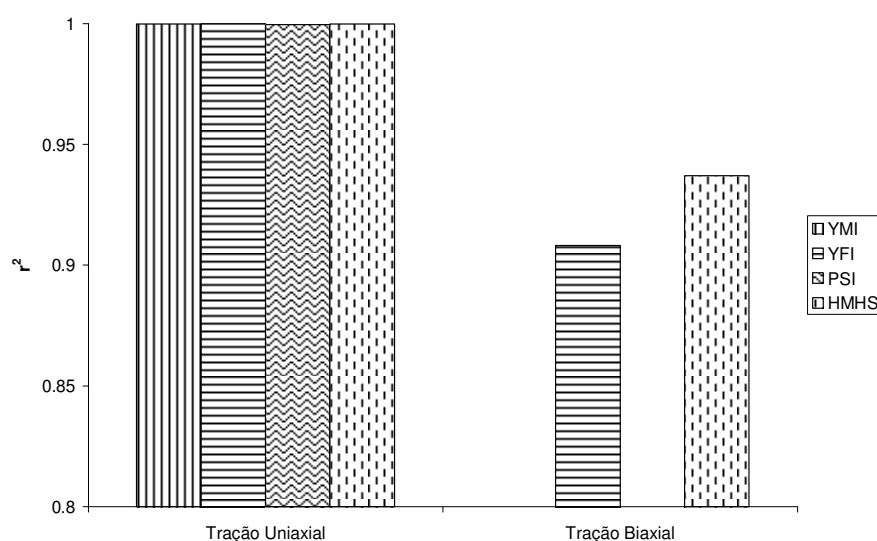


Figura 8. 14 - Comparação dos modelos YMI, YFI, PSI, HMLSI. Ajuste para  $T$  ( $0 \leq e \leq 400\%$ ).



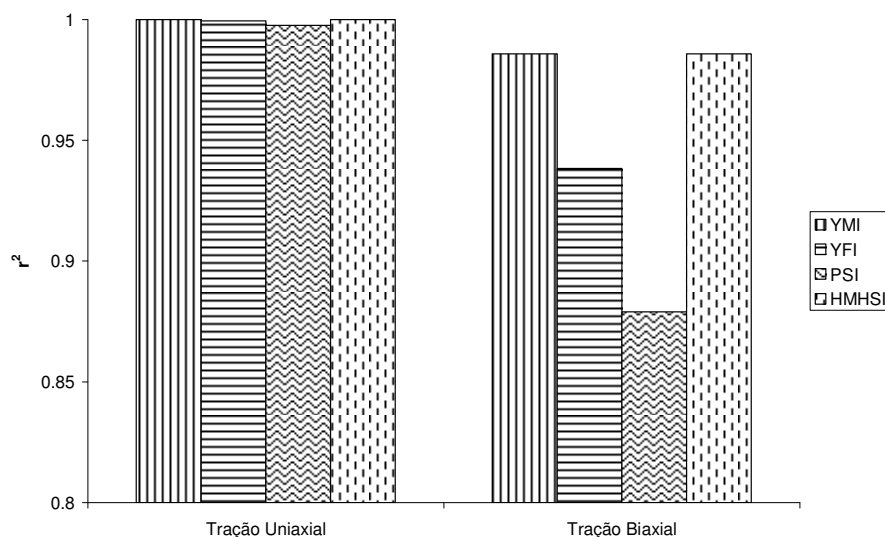


Figura 8. 15 - Comparação dos modelos YMI, YFI, PSI, HMLSI. Ajuste para  $T$  ( $0 \leq e \leq 600\%$ ).

### 8.3.3.2. Ajuste para Tração Biaxial

As constantes foram obtidas com os dados experimentais na faixa  $0 \leq e \leq 300\%$ . As predições para tração uniaxial ( $T$ ) foram verificadas na mesma faixa, entretanto, para deformações superiores a  $300\%$  as predições são extrapoladas até a sua faixa nominal de trabalho. Similar ao ajuste para tração uniaxial, o modelo HMHSI apresentou excelentes resultados, com ênfase para grandes deformações, sobrepondo-se sobre aos demais. Claramente através das Figuras 8.16 e 8.18d é recomendável a escolha do modelo HMHSI dado o seu excelente comportamento em toda a faixa de deformações. Destaca-se o comportamento dos modelos YMI e YFI, o modelo PSI apresentou instabilidade na predição do ensaio de tração uniaxial para grandes deformações.

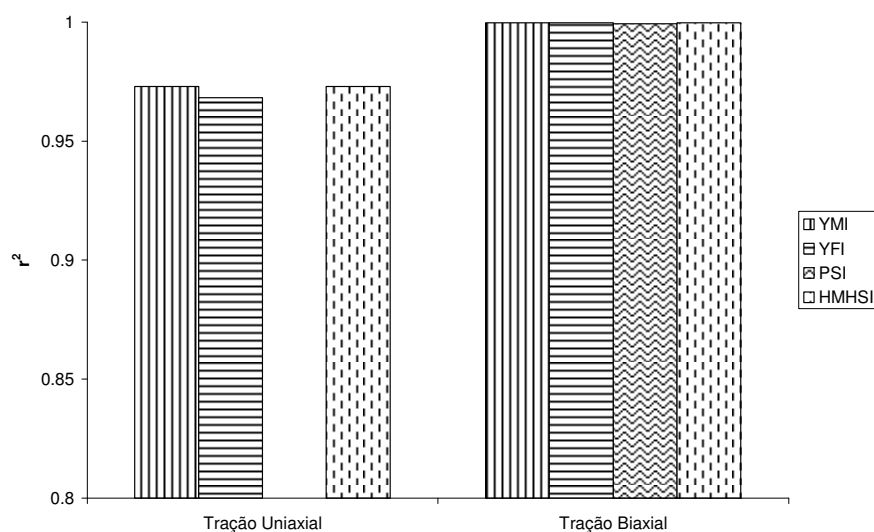


Figura 8. 16 - Comparação dos modelos YMI, YFI, PSI, HMLSI. Ajuste para  $B$  ( $0 \leq e \leq 600\%$ ).

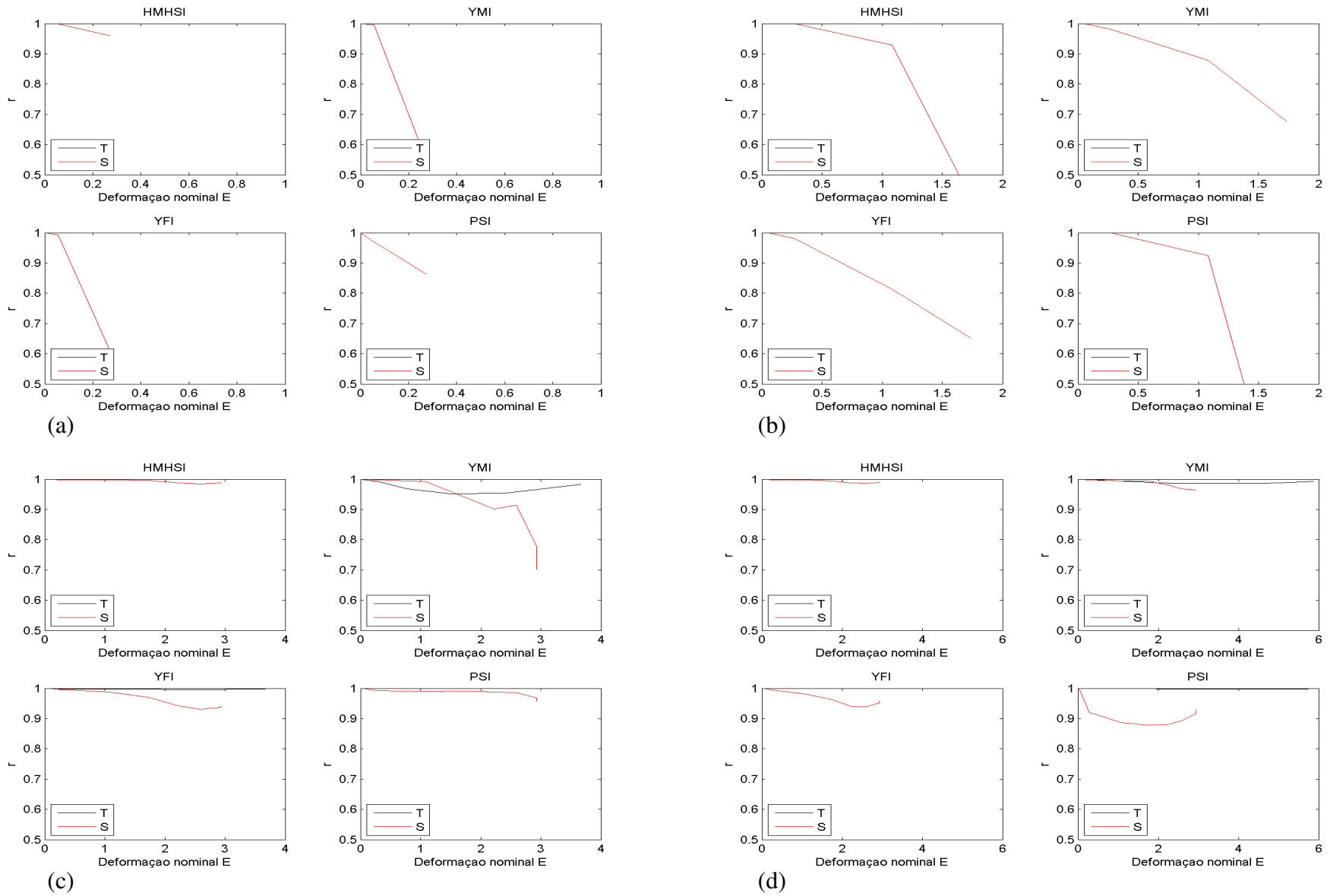


Figura 8. 17 - Silicone (MED4950). Ajuste para  $T$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 200\%$ . (c) -  $e = 400\%$ . (d) -  $e = 600\%$ .

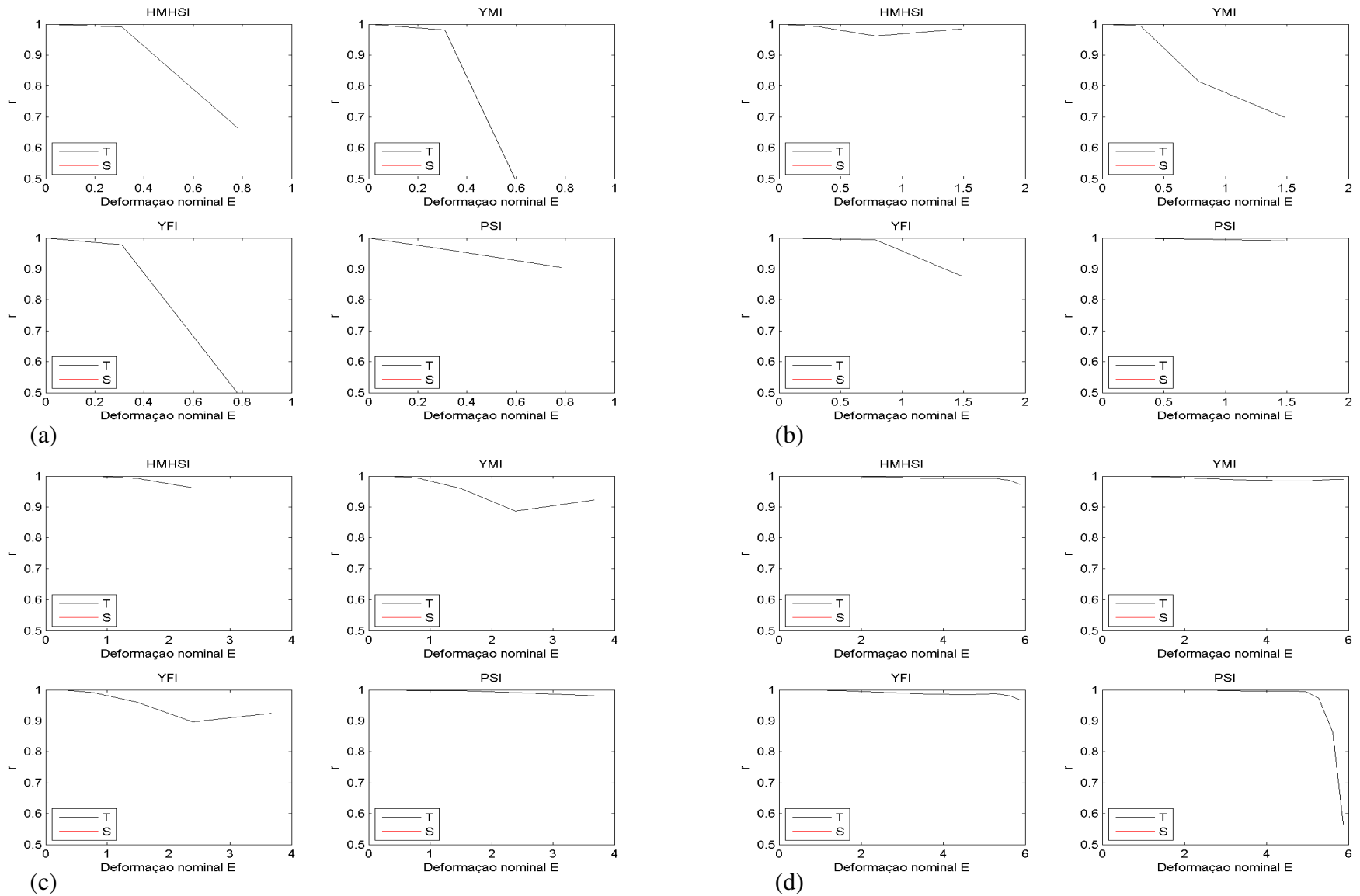


Figura 8. 18 - Silicone (MED4950). Ajuste para  $B$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 200\%$ . (c) -  $e = 400\%$ . (d) -  $e = 600\%$ .

#### 8.4. Conclusões

A partir dos resultados das seções 8.3.1, 8.3.2 e 8.3.3 fica explícito o potencial de aplicação dos modelos HMI. Os estudos de caso realizados ressaltam a versatilidade e a capacidade dos modelos propostos em representar com fidelidade o comportamento da curva  $t \times e$  para diferentes faixas de deformação.

A generalização de uma única expressão para a energia de deformação é algo complexo e representa um ideal ainda buscado por inúmeros autores. É de suma importância observar que cada termo alocado na relação constitutiva exprime um comportamento bem característico para cada faixa de deformação, o que dificulta, ou de certa forma inviabiliza, o conceito de generalização através de uma única função constitutiva. Cita-se, por exemplo, o modelo PSI, caracterizado pelo termo  $\ln(I_2)$ , que apresentando excelentes resultados para grandes deformações, porém, ajustes errôneos para materiais com alongamentos até 200%. Conforme Humphrey (2002, 2003), ratifica-se a incapacidade dos modelos clássicos em representar os efeitos de enrijecimento manifestado em grandes deformações.

Todos estes fatores, juntamente com o estudo da influência de cada termo nas expressões para energia de deformação, culminaram na proposta da família de modelos HMI. Destaque-se que a mesma, rompe com alguns conceitos e premissas tradicionais da hiperelasticidade. Primeiro, dissocia-se o pressuposto do conceito de generalização a partir de uma única função. E segundo, não se empregou uma base logarítmica para a modelagem do efeito de enrijecimento em grandes deformações, conforme destacado pelos autores (Saccomandi *et al.*, 2002; Saccomandi *et al.*, 2004) como sendo mandatório. São essas características, somado ao bom comportamento em pequenas deformações, que tornam os modelos HMI promissores na modelagem de elastômeros e tecidos biológicos.

Embora os resultados encontrados até aqui demonstrem a viabilidade de aplicação da família de modelos propostos, devem ser realizados mais testes comparativos, avaliando outros materiais com características distintas. Por fim, para a completa caracterização é mandatório que seja verificado se os modelos constitutivos apresentados, dependendo da escolha dos parâmetros constitutivos e restrições do problema não violam nenhuma lei ou princípio da termodinâmica (Bergstrom, 1999), tópico não abordado neste trabalho.

## 9. CONCLUSÕES

Como foi visto no Capítulo 5, cada um dos modelos hiperelásticos possui suas peculiaridades, e devem ser escolhidos criteriosamente. É praticamente impossível fazer recomendações definitivas para o uso de cada um. Some-se a isso a enorme diversidade de variações químicas possíveis para compostos elastoméricos.

Os casos estudados no Capítulo 5 são uma amostra muito pequena do que pode ser encontrado em problemas práticos. Além disso, as constantes dos casos ali ilustrados foram obtidas automaticamente com o uso de um programa de computador especialmente desenvolvido para esse fim. Na maioria das vezes, é perfeitamente possível realizar um *ajuste fino* no valor numérico das constantes para melhorar a concordância das curvas teóricas em faixas específicas de deformação. Deve-se destacar ainda que procedimentos de ajuste de curvas como o método dos mínimos quadrados e suas variações são, estritamente falando, processos de otimização. É imperativo, portanto, que se acompanhe e se verifique o processo, estando atento para eventual perda de convergência, valores de tolerância numérica utilizados e outros aspectos que podem culminar em um conjunto de constantes constitutivas que não necessariamente é o melhor para uso prático. Um parâmetro útil proposto no Capítulo 6 é o coeficiente de regressão do ajuste, que contém informações a respeito da qualidade do ajuste: quanto mais próximo da unidade, melhor é o ajuste. E por se tratar de curvas de comportamento muito complexo, conjuntos diversos de constantes podem gerar aproximadamente a mesma resposta para um dado caso.

De uma forma bastante geral, o analista deve tentar dispor do maior número de resultados experimentais possível. Na situação ideal, deve-se dispor de resultados para os ensaios de tração uniaxial, cisalhamento, biaxial e, se a aplicação exigir, compressão uniaxial. É muito conveniente dispor de resultados para pelo menos dois destes ensaios. Ainda que se utilize apenas um deles para ajustar as constantes, o outro pode ser usado para verificar a qualidade das predições e qualificar ou desqualificar o modelo usado. Caso haja necessidade de se optar por um único ensaio, que este forneça dados para uma grande faixa de deformações pois, conforme destacado no Capítulo 5, isto ajuda a evitar os problemas relacionados à extrapolação e predição dos demais ensaios. Também é importante que se verifique se as predições apresentam o aspecto geral da Figura 5.1. As curvas podem até apresentar uma certa sobreposição, mas a ordem das curvas deve respeitar aquela disposição básica (a menos que se trate de um composto ortotrópico). Deve-se, ainda, descartar os casos que apresentem predições com instabilidades (derivada  $dt/de$  nula), uma vez que este comportamento não condiz com os experimentos e gera matrizes singulares nos programas de simulação numérica.

Quanto à validade dos modelos, cabem as considerações finais feitas no Capítulo 5 que servem como indicação inicial para seleção do(s) mais adequado(s).

A escolha de um modelo em particular para solução de problemas práticos depende fundamentalmente das respostas para três perguntas:

- 1) Qual a magnitude de deformações na aplicação?**
- 2) Que dados experimentais do material estão disponíveis?**
- 3) Qual software de simulação numérica será empregado?**

O presente trabalho propõe algumas respostas às duas primeiras. Embora não seja possível, como já destacado, ter recomendações definitivas para cada caso, os resultados aqui obtidos fornecem um panorama razoável sobre a faixa de aplicação de cada modelo. Esse panorama está ilustrado esquematicamente na Figura 9.1.

Além disso, o comportamento de polímeros é muito dependente da sua composição química, que pode variar bastante de um fabricante para outro. Portanto, não existem muitas tabelas contendo constantes constitutivas desses materiais publicamente disponíveis (nem seus resultados experimentais), como ocorre com outros materiais.

### **9.1. Temas Abordados/Conclusões**

De forma resumida esse trabalho abordou os seguintes temas:

- Fez-se uma revisão genealógica e cronológica de um razoável número de modelos hiperelásticos disponíveis na literatura. O Capítulo 4 apresentou um estudo detalhado das relações constitutivas o que, em conjunto com os Capítulos 5 e 6, permitiu avaliar a influência e participação de cada termo em específico da energia de deformação em função de materiais e faixas de deformações distintas.
- O Capítulo 5 apresentou a avaliação dos modelos constitutivos abordados empregando análise gráfica visual e uma planilha de conceitos. A planilha de conceitos proposta, embora subjetiva, permitiu confrontar de forma simples os diferentes modelos quanto ao tipo de ensaio e faixa de deformação empregada para realizar o ajuste.

- Foi proposta no Capítulo 6, baseado no conceito do coeficiente de correlação, um novo estimador de qualidade de ajuste para avaliar e selecionar os modelos constitutivos. Através dos estudos de caso realizados ratificou-se a representatividade dos resultados utilizando a nova metodologia quando comparados diretamente com as curvas  $t \times e$ . A nova medida é quantitativa, o que permite aferir com clareza e de forma eficiente a qualidade dos ajustes e previsões retirando a subjetividade e susceptibilidade a erros das metodologias de avaliação tradicionais hoje empregadas;
- O Capítulo 7, embora de forma simplificada, avaliou o comportamento dos principais modelos hiperelásticos frente ao ajuste multi-critério das constantes constitutivas, hoje ainda pouco conhecido neste contexto. A partir dos estudos de caso realizados, ratificou-se a melhora no desempenho dos modelos para as previsões dos ensaios  $(T, P, B)$ . Observa-se que o emprego do ajuste multi-critério, além de melhorar o comportamento da curva  $t \times e$  teórica em todas as faixas de deformações, remove os comportamentos anômalos (ver Capítulo 6) verificados em alguns modelos quando ajustados para um modo de deformação isolado. É óbvio, que como contra partida, tem-se uma perda pontual na qualidade das previsões em relação aos ajustes e previsões originais. Deve-se observar também que modelos que exibem comportamento muito peculiar, seja pelos seus excelentes ou maus resultados, não manifestaram alterações no seu comportamento. Recomenda-se assim atenção no emprego de constantes melhoradas uma vez que dependendo do conjunto de constantes obtidos, o mesmo não conseguirá representar nenhum dos ensaios em particular.
- O Capítulo 8, embasado nos resultados deste trabalho apresentou uma nova família de modelos hiperelásticos para a análise de elastômeros e materiais biológicos incompressíveis. Os resultados obtidos com o novo modelo demonstram a sua potencialidade, dado sua capacidade em representar com fidelidade o comportamento da curva  $t \times e$  para os três materiais avaliados, com excelentes previsões em todas as faixas de deformações.

## 9.2. Sugestões para a Continuidade do Trabalho

- Complementar o estudo feito no Capítulo 3 e 4 incorporando os modelos compressíveis, além dos apresentados.

- Avaliar o comportamento dos modelos hiperelásticos frente ao ensaio de compressão uniaxial. Este tema constitui um caso interessante de estudo quando se dispões de dados experimentais para os ensaios de tração e compressão uniaxial, já que os dois produzem curvas com gradientes muito distintos.
- Testar os modelos hiperelásticos aqui analisados com outros tipos de materiais, seguindo a metodologia adotada. O emprego de materiais especiais pode revelar outras características dos modelos não identificadas aqui.
- Avaliar o comportamento dos ajustes e predições dos modelos constitutivos frente a materiais que apresentem efeito de histerese.
- Estudar a possibilidade do ajuste dos modelos constitutivos utilizando ensaios experimentais com singularidades, por exemplo, corpos de prova trincados. Deve-se analisar o quão representativo são estes ensaios em função dos invariantes de deformação  $(I_1, I_2)$ , avaliando sua capacidade na predição dos ensaios tradicionais  $(T, P, B)$ , hoje comumente empregados.
- Efetuar a implementação da família de modelos HMI em um software comercial de elementos finitos, bem como a realização de mais testes comparativos avaliando o comportamento do modelo para outros materiais que detêm características distintas das já avaliadas. Também deve ser verificado se os novos modelos constitutivos propostos não violam nenhuma lei ou princípio da termodinâmica.
- Estender e testar a família de modelos proposta considerando compressibilidade e efeitos dissipativos.



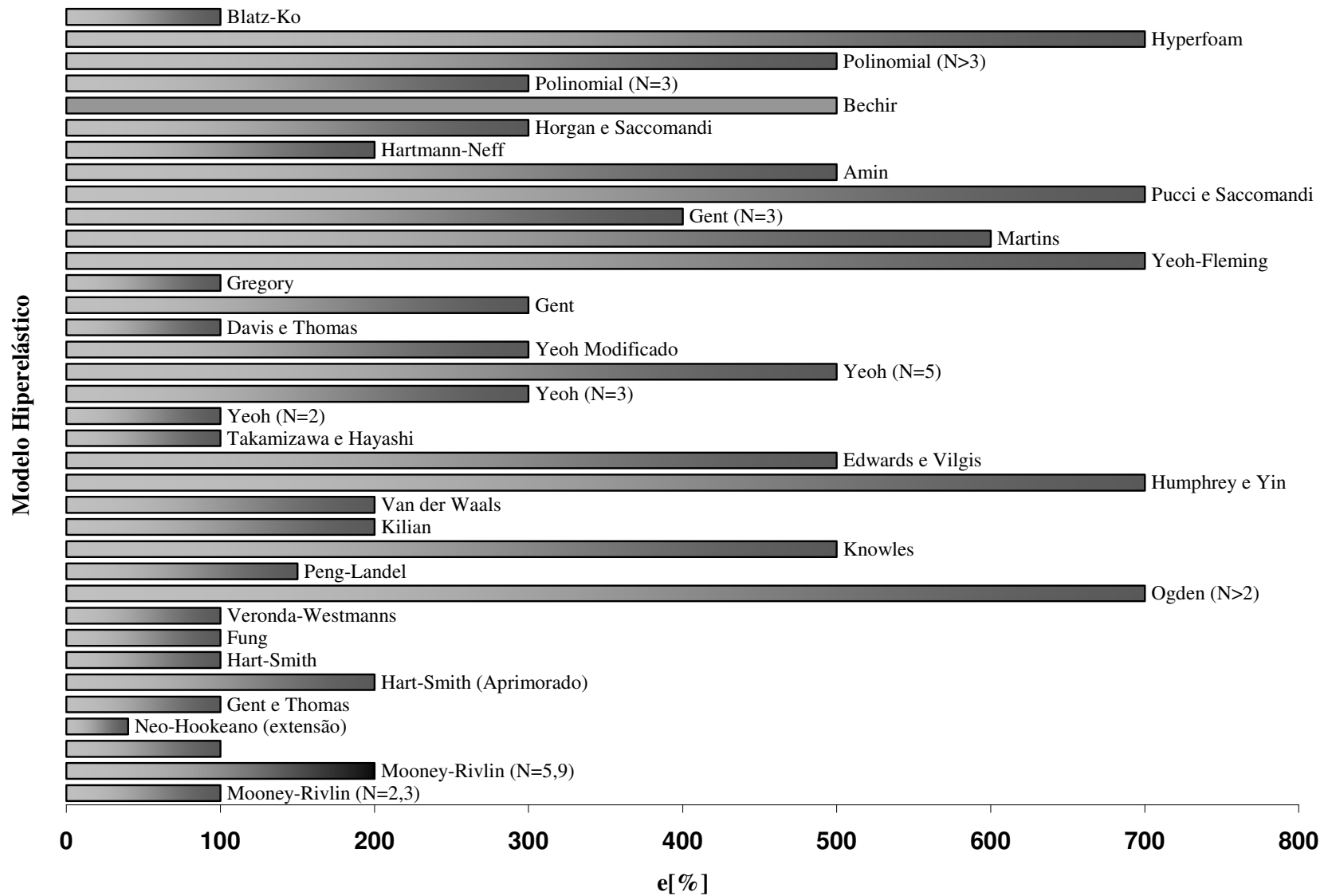


Figura 9. 1 - Comparação entre alguns modelos hiperelásticos quanto à faixa de deformações máximas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

When does  $f \neq ku$ . Technical white paper, MSC Software, 1999.

**NONLINEAR FINITE ELEMENT ANALYSIS OF ELASTOMERS.** Tech. rep., MSC Software, 2000.

Verification of analysis methods for predicting the behaviour of seismically isolated nuclear structures. Tech. Rep. IAEA-TECDOC-1288, International Atomic Energy Agency, 2002.

ALEXANDER, H, 1968. A constitutive relation for rubber-like materials. **International Journal of Engineering Science**, vol, 6, pp.549-563.

AMIN, A.F.M.S., *et al.*, 2006. Hyperelasticity model for finite element analysis of natural and high damping rubbers in compression and shear. **Journal of Engineering Mechanics**, University of Colorado, Boulder, vol. 132, n. 1, pp. 54-64.

ARORA, J.S., 1989. **Introduction to Optimal Design.** McGraw-Hill.

ARRUDA, E.M., BOYCE, M.C., 1993 A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. **Journal of the mechanics and physics of solids**, vol. 41, pp. 389-412.

ATKIN, R., FOX, N., 1980 **An Introduction to the Theory of Elasticity.** Longman, 1980.

BALTZ, P.J., SHARDA, S.C., TSCHOEGL, N.W., 1974. Strain energy function for rubber-like materials based on a generalized measure of strain. **Trans. Soc. Rheol.** 18 (1), pp. 145-161.

BECHIR, H., CHEVALIER, L., CHAOUICHE, M., BOUFALA, K., 2006. Hyperelastic constitutive model for rubber-like materials based on the first Seth strain measures invariant. **European Journal of Mechanics A/Solids**, vol. 25, pp.110-124.

BERGSTROM, J.S., BOYCE, M.C., 2001. Deformation of elastomeric networks: relation between molecular level deformation and classical statistical mechanics models of rubber elasticity. **Macromolecules**, vol. 34, n. 3, pp. 614-626.

BLATZ, P., KO, W., 1962. Application of Finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. **Transactions of the Society of Rheology**, vol.1, pp. 223-251.

BOAST, D., COVENEY, V.A., 1999. **Finite Element Analysis of Elastomers**. Professional Engineering Publishing. London.

BONNET, J., WOOD, R., 1997. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. Cambridge University Press.

BOYCE, M.C., ARRUDA, E.M., 2000. Constitutive models of rubber elasticity: a review. **Rubber Chemistry and Technology**, vol. 73, n. 3, pp. 504-523.

CHAGNON, G., MARCKHAM, G., VERROM, E., 2004. Equivalence of the Hart-Smith model with Arruda-Boyce and Gent formulations of rubber elasticity. **Rubber Chemistry and Technology Journal**, vol. 77, pp.724-735.

CHARLTON, D., YANG, J., 1994. A review of methods to characterize rubber elastic behavior for use in Finite element analysis. **Rubber chemistry and technology**, vol. 67, n. 3, pp. 481-503.

COELLO, C.A.C., VAN VELDHUIZEN, A.D., LAMONT, G., 2002. **Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems**. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.

CURRIE, P.K, 2005. Comparison of Incompressible Elastic Strain Energy Functions over the Attainable Region of Invariant Space. **Mathematics and Mechanics of Solids**, vol. 10, pp.559-574

DAVIES, C.K.L., DE, D.K., THOMAS, A.G., 1994. Characterization of the behavior of rubber for engineering design purposes (1) Stress and strain relations. **Rubber chemistry and technology**, vol. 67, pp.716.

DEB, K., 2001. **Multi-objective Optimization Using Evolutionary Algorithms**. Wiley, Chichester, UK.

DEVORE, J.L., 2007. **Probability and Statistics for Engineering and the Sciences**. Thompson, 7<sup>a</sup> edition.

DORFMANN, A., MUHR, A., 1999. **Constitutive models for rubbers**. Balkema, Rotterdam, 1999.

DROZDOV, A., 2007. Constitutive equations in Finite elasticity of rubbers. **International Journal of Solids and Structures**, vol. 44, pp. 272-297.

EHRGOTT, M., 2000. **Multicriteria Optimization**. Springer. Berlin.

FINNEY, R.H., KUMAR, A., 1988. Development of material constants for nonlinear Finite-element analysis. **Rubber chemistry and technology**, vol. 61, n. 5, pp. 879-891.

FUNG, Y.C.B., 1967. Elasticity of soft tissues in sample elongation. **American Journal of Physiology**, vol. 213, pp. 1532-1544.

GENT, A.N., THOMAS, A.G. J., 1958. **Polymer Science**, vol. 28, pp. 625.

GENT, A.N., 1996. A new constitutive relation for rubber. **Rubber chemistry and technology**, vol. 69, pp. 59-61.

GENT, A.N., 1999. Elastic Instabilities of inflated rubber shells. **Rubber chemistry and technology**, vol. 72, pp. 263-268.

GENT, A.N., 2001. **How to Design Rubber Components**. Hanser Publishers.

GREEN, A., ADKINS, J., 1960. Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics. Clarendon Press.

GREGORY, I.H., MUHR, A.H., STEPHENS, I.J., 1997. Engineering applications of rubber in simple extension. **Plastics, Rubber and Composites: Processing and Applications**, vol. 26, pp. 118, 1997.

HART-SMITH, L.J., CRISP, J.D.C., 1967. **International Journal of Engineering Science**, Eng. Sci. 5, 1.

HARTMANN, S., NEFF, P., 2003. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain functions for near-incompressibility. **International Journal of Solids and Structures**, vol. 40, pp. 2767-2791.

HILL, J.M., 2001. A review of partial solutions of Finite elasticity and their applications. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, vol.36, pp. 447-463.

HOLZAPFEL, G.A., 2001. Biomechanics of soft tissues. **In Handbook of Material Behavior Models III** (J Lemaitre ed.), Academic, New York, pp. 1049-1063.

HOLZAPFEL, G.A., 2005. Similarities between soft biological tissues and rubber like materials. **Constitutive Models for Rubber IV**, pp. 607-607.

HORGAN, C.O., MURPHY, J.G., 2007. Limiting chain extensibility constitutive models of Valanis-Landel type. **Journal of Elasticity**, vol. 86, pp. 101-111.

HORGAN, C.O., SACCOMANDI, G., 2002a. Constitutive modeling of rubber-like and biological materials with limiting chain extensibility. **Mathematics and Mechanics of Solids**, vol. 7, pp. 353-371.

HORGAN, C.O., SACCOMANDI, G., 2002b. A molecular-statistical basis for the Gent Constitutive model of rubber elasticity. **Journal of Elasticity**, vol. 68, pp. 167-176.

HORGAN, C.O., SACCOMANDI, G., 2002b. A description of arterial wall mechanics using limiting chain extensibility models. **Biomechanics and Modeling in Mechanobiology**, vol.1, pp. 251-266.

HORGAN, C.O., SACCOMANDI, G., 2004. Constitutive models for atactic elastomers. **World Scientific Singapore**, pp. 281-293.

HORGAN, C.O., SACCOMANDI, G., 2006. Phenomenological hyperelastic strain-stiffening constitutive models for rubber. **Rubber chemistry and technology**, vol. 79, pp. 152-169.

HORGAN, C.O., SCHWARTZ, J.G., 2005. Constitutive modeling and the trousers test for fracture of rubber-like materials. **Journal of the mechanics and physics of solids**, vol. 53, pp. 545-564.

HUMPHREY, J.D., YIN, F.C.P., 1987. On Constitutive relations and finite deformations of passive cardiac tissue: I. A pseudostrain energy function ASME. **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 109, pp. 298-304.

HUMPHREY, J.D., 2002. **Cardiovascular Solid Mechanics**. Springer, New York.

HUMPHREY, J.D., 2003. Continuum biomechanics of soft biological tissues. **Proc. R. Soc. Lond. A** 459, pp. 1-44.

JONES, D., TRELOAR, L., 1975. The properties of rubber in pure homogeneous strain. **J. Phys. D: Appl. Phys.** V. 8, p.1285-1304.

KANNER, L.M., HORGAN, C.O., 2007. Elastic instabilities for strain-stiffening rubber-like spherical and cylindrical thin shells under inflation. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, vol. 42, pp. 204-215.

KILIAN, H.G., 1981. Equation of state of real networks. **Polymer**, vol. 22, pp. 209-217.

KNOWLES, J.K., 1977. The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids. **International Journal of Fracture**, vol.13, pp. 611-639.

LAI, W., RUBIN, D., KREMPL, E., 1993. **Introduction to Continuum Mechanics**. Pergamon Press.

MALVERN, L.E., 1969. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. Prentice-Hall.

MARCZAK, R., HOSS, L. GHELLER, J.J., 2006. **Caracterização de Elastômeros para Simulação Numérica**. Centro Tecnológico de Polímeros SENAI, São Leopoldo-RS.

MARTINS, J.A.C., PIRE, E.B., SALVADO, R., DINIS, P.B., 1998. A numerical model of passive and active behavior of skeletal muscles. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 151, pp. 419-433.

MARTINS, P.A.L.S., JORGE NATAL, R.M., FERREIRA, A.J.M., 2006. A comparative study of several materials models for prediction of hyperelastic properties: Application to silicone-rubber and soft tissues. **Blackwell Publishing**, vol. 42, p.135-147.

MIETTINEN, K., 1999. **Nonlinear Multi-objective Optimization**. Kluwer, Boston.

MILLER, K., 1995. **Measuring material properties to build material models in FEA**. Technical report, Axel Physical Testing Services.

MOONEY, M., 1940. A theory of large elastic deformation. **Journal of Applied Physics**, vol. 11, pp. 582-592.

MUHR, A. H., 2005. Modeling the stress-strain behavior of rubber. **Rubber Chemistry and Technology**, vol.78, pp. 391-425.

MURPHY, J.G., 2006. Some remarks on Kinematic modeling of limiting chain extensibility. **Mathematics and Mechanical of Solids**, vol. 11, pp. 629-641.

OGDEN, R., 1984. **Non-Linear Elastic Deformations**. Dover Publications.

OGDEN, RW., SACCOMANDI, G., SGURA, I., 2004. Fitting hyperelastic models to experimental data. **Journal of Computer Mechanics**, vol. 34, pp. 484-502.

PENG, S.T.J., LANDEL, R.F., 1972. **Journal of Applied Physics**, vol. 43, pp. 3064.

PUCCI, E., SACCOMANDI, G., 2002. A note on the Gent model for rubber-like materials. **Rubber chemistry and technology**, at press.

RIVLIN, R.S., 1948. Large elastic deformation of isotropic materials: I. Fundamental concepts. II. Some uniqueness theorem for pure homogeneous deformation. **Philos. Trans. R. Soc. Ser. A** 240, pp.459-508.

RIVLIN, R.S., SAUNDERS, D.W. Phil., 1951. **Trans. R. Soc.** A243, pp. 251.

ROZENWALD, D., 1993. **Modelisation thermomecannique des grandes deformations. Application aux problemes de mise a forme a haute temperature, aux elastomeres et aux structures mixtes acier-elastomere.** Rapport d'activités IRSIAa 910530, Université de Liège : Institut de Mécanique.

SHUKLA, P.K., DEB, K., 2006. On finding multiple Pareto-optimal solutions using classical and evolutionary generating methods. **European Journal of Operational Research**, vol. 181, pp. 1630-1652.

TABER, L.A., 2004. **Nonlinear Theory of Elasticity: Applications in Biomechanics.** World Scientific Publishing Co, Singapore.

TAKAMIZAWA, K., HAYASHI, K., 1987. Strain energy density function and uniform strain hypothesis for arterial mechanics. **Journal of Biomechanics**, vol. 20, pp. 7-17.

TRELOAR, L.R.G, 1973. The elasticity and related properties of rubbers. **Reports on Progress in Physics**, vol. 36, pp. 755-829.

TRELOAR, L., 1975. **The Physics of Rubber Elasticity.** Oxford: Clarendon Press.

VERONDA, D.R., WESTMANN, R.A., 1970. Mechanical characterization of skin-finite deformations. **Journal of Biomechanics**, vol. 3, pp. 111-124.

ZHANG, W.H., 2002. Pareto optimum sensitivity analysis in multicriteria optimization. **Finite Element Analysis and Design**, vol. 39, pp. 505-520.



YAMASHITA, Y., KAWABATA, S., 1993. Approximated form of the strain energy-density function of carbon black filled rubbers for industrial application. **International Polymer Science Technology**, vol. 20 (2), pp.52-64.

YEOH, O.H., 1990. Characterization of elastic properties of carbon black filled rubber vulcanizates. **Rubber chemistry and technology**, vol. 63, pp.792-805.

YEOH, O.H., 1993. Some forms of the strain energy function for rubber. **Rubber chemistry and technology**, vol. 66, pp. 754-771.

YEOH, O.H., FLEMING, P.H., 1997. A new attempt to reconcile the statistical and phenomenological theories of rubber elasticity. **Journal of Polymer Science, B: Polymer Physics**, vol. 35, pp.1919-1931.

## APÊNDICE A

### A. Fórmulas para Ajuste dos Modelos

Uma vez realizados os ensaios e realizado o tratamento dos dados experimentais, pode-se proceder o ajuste das curvas para o modelo hiperelástico selecionado. O procedimento empregado para cada modelo abordado no Capítulo 3 será detalhado a seguir, considerando-se a hipótese de incompressibilidade.

#### A.1. Ajustando o Modelo de Mooney-Rivlin (MRIn)

As eqs.(3.2) a (3.5) para o caso incompressível ficam particularizadas como:

- 2 termos – **MRI2:**

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = C_{10}$$

$$\frac{dW}{dI_2} = C_{01}$$

- 3 termos – **MRI3:**

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = C_{10} + C_{11}(I_2 - 3)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = C_{01} + C_{11}(I_1 - 3)$$

- 5 termos – **MRI5:**

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = C_{10} + C_{11}(I_2 - 3) + 2C_{20}(I_1 - 3)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = C_{01} + C_{11}(I_1 - 3)$$

• 9 termos – **MRI9**:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = C_{10} + C_{11}(I_2 - 3) + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2$$

$$\frac{dW}{dI_2} = C_{01} + C_{11}(I_1 - 3)$$

A substituição das eqs.(4.14) a (4.17) em (2.35), (2.38a), (2.41e) e (2.43) leva às expressões de  $t_T$  (ou  $t_C$ ),  $t_P$ ,  $t_S$  e  $t_B$  particularizadas para este modelo. A Tabela A.1 apresenta estas expressões, agora prontas para serem ajustadas com os dados experimentais, parametrizadas para  $n = 2, 3, 5$  ou  $9$ . Os fatores a serem empregados nessa tabela são:

$$\begin{aligned} A_2 &= C_{10} & B_2 &= C_{01} \\ A_3 &= A_2 + C_{11}(I_2 - 3) & B_3 &= B_2 + C_{11}(I_1 - 3) \\ A_5 &= A_3 + 2C_{20}(I_1 - 3) & B_5 &= B_3 \\ A_9 &= A_5 + 3C_{30}(I_1 - 3)^2 & B_9 &= B_5 \end{aligned}$$

<b>Mooney-Rivlin - MRI<math>n</math></b>	
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(A_n + \frac{B_n}{\lambda}\right)$
$t_P =$	$\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)(A_n + B_n)$
$t_S =$	$2\gamma(A_n + B_n)$
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)(A_n + \lambda^2 B_n)$

Tabela A. 1 - Tensões nominais para os modelos de Mooney-Rivlin ( $n = 2, 3, 5$  ou  $9$ ).

## A.2. Ajustando o Modelo Neo-Hookeano (NHI)

A eq.(3.6) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{\mu}{2}$$

$$\frac{dW}{dI_2} = 0$$

Portanto, este modelo é fechado, e não admitiria ajustes, mas o módulo de cisalhamento  $\mu$  pode ser empregado como (único) fator de ajuste. A Tabela A.2 apresenta estas expressões para serem verificadas com os dados experimentais.

<b>Neo-Hookeano – NHI</b>	
$t_T, t_C =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)$
$t_P =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)$
$t_S =$	$\mu \gamma$
$t_B =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right)$

Tabela A. 2 - Tensões nominais para o modelo Neo-Hookeano.

### A.3. Ajustando o Modelo de Gent-Thomas (GTI)

A eq.(3.7) no caso incompressível resulta:

$$W = C_1(I_1 - 3) + 3C_2 \ln(I_2) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 = A_2$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{3C_2}{I_2} = B_2$$

Os fatores empregados nessa tabela são:

$$A_2 = C_1$$

$$B_2 = \frac{3C_2}{I_2}$$

A Tabela A.3 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais:

<b>Gent-Thomas - GTI</b>	
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(A_2 + \frac{B_2}{\lambda}\right)$
$t_P =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)(A_2 + B_2)$
$t_S =$	$2\gamma(A_2 + B_2)$
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)(A_2 + \lambda^2 B_2)$

Tabela A. 3 - Tensões nominais para o modelo de Gent-Thomas.

#### A.4. Ajustando o Modelo de Hart-Smith Aprimorado (HSAI)

A eq.(3.8) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{C_1 e^{C_3(I_1-3)^n}}{n} + 3C_2 \ln(I_2) \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 C_3 (I_1 - 3) \left( e^{(C_3(I_1-3))} \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{3C_2}{I_2}$$

A Tabela A.4 apresenta as expressões para  $t_T, t_C, t_S, t_P$  e  $t_B$ :

<b>Hart-Smith Aprimorado – HSIA</b>	
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(A_3 + \frac{B_3}{\lambda}\right)$
$t_P =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)(A_3 + B_3)$
$t_S =$	$2\gamma(A_3 + B_3)$
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)(A_3 + \lambda^2 B_3)$

Tabela A. 4 - Tensões nominais para o modelo de Hart-Smith Aprimorado.

Os fatores empregados Tabela A.4 são respectivamente:

$$A_3 = C_1 C_3 (I_1 - 3)^{n-1} \left( e^{(C_3(I_1-3))^n} \right)$$

$$B_3 = \frac{3C_2}{I_2}$$

### A.5. Ajustando o Modelo de Hart-Smith (HSI)

Obtido a partir de uma simplificação ( $n = 2$ ) do modelo de Hart Smith Aprimorado, a eq.(3.9) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{C_1 e^{C_3(I_1-3)^2}}{2} + 3C_2 \ln(I_2) \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 C_3 (I_1 - 3) \left( e^{(C_3(I_1-3))^2} \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{3C_2}{I_2}$$

A Tabela A.5 apresenta as expressões para  $t_T, t_C, t_S, t_P$  e  $t_B$ . Os fatores empregados nessa tabela são:

$$A_2 = C_1 C_3 (I_1 - 3) \left( e^{(C_3(I_1-3))} \right)$$

$$B_2 = \frac{3C_2}{I_2}$$

<b>Hart-Smith - HSI</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( A_2 + \frac{B_2}{\lambda} \right)$
$t_P =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) (A_2 + B_2)$
$t_S =$	$2 \gamma (A_2 + B_2)$
$t_B =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) (A_2 + \lambda^2 B_2)$

Tabela A. 5 - Tensões nominais para o modelo de Hart-Smith.

### A.6. Ajustando o Modelo de Fung (FI)

A eq.(3.10) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{\mu}{2b} (e^{b(I_1-3)} - 1) \quad (\text{A.9})$$

$\mu$ , pode ser considerado uma constante adicional caso não haja uma estimativa para o mesmo. A Tabela A.6 apresenta as expressões  $t_T, t_C, t_S, t_P$  e  $t_B$  prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. Um único fator é empregado nessa tabela:

$$A_2 = \frac{\mu}{2b} (e^{b(I_1-3)} - 1)$$

<b>Fung- FI</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) (A_2)$
$t_P =$	$\left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) (A_2)$
$t_S =$	$2 \gamma (A_2)$
$t_B =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) (A_2)$

Tabela A. 6 - Tensões nominais para o modelo de Fung.

### A.7. Ajustando o Modelo de Veronda-Westmanns (VWI)

A eq.(3.11) no caso incompressível resulta:

$$W = C_1 [e^{\alpha(I_1-3)} - 1] - C_2 [I_2 - 3] \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 C_2 (e^{C_2(I_1-3)})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = -\frac{C_1 C_2}{2}$$

A Tabela A.7 apresenta as expressões  $t_T, t_C, t_S, t_P$  e  $t_B$  prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. Os fatores empregados nessa tabela são:

$$A_2 = C_1 C_2 \left( e^{C_2(I_1-3)} \right)$$

$$B_2 = -\frac{C_1 C_2}{2}$$

<b>Veronda-Westmann – VWI</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( A_2 + \frac{B_2}{\lambda} \right)$
$t_P =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) (A_2 + B_2)$
$t_S =$	$2 \gamma (A_2 + B_2)$
$t_B =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) (A_2 + \lambda^2 B_2)$

Tabela A. 7 - Tensões nominais para o modelo de Veronda-Westmann.

### A.8. Ajustando o Modelo de Ogden (OIn)

A eq.(3.12), no caso incompressível, pode ser particularizada com  $\lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}$ :

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left( \lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_i} - 3 \right) \quad (\text{A.11})$$

Como este modelo depende diretamente dos alongamentos, as derivadas de  $W$  devem ser obtidas através da regra da cadeia:

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dI_1}$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dI_2}$$

e, portanto, resultam expressões diferentes para cada modo de deformação. As duas versões mais empregadas deste modelo são:



- 2 termos – **O12**:

- Tração Uniaxial:

$$W = \frac{\mu_1 \left( \lambda^{\alpha_1} + 2\lambda^{-\frac{\alpha_1}{2}} - 3 \right)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2 \left( \lambda^{\alpha_2} + 2\lambda^{-\frac{\alpha_2}{2}} - 3 \right)}{\alpha_2} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} \left( \mu_1 \left( \lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_1}{2}-1} \right) + \mu_2 \left( \lambda^{\alpha_2-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_2}{2}-1} \right) \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{dW}{dI_1}$$

- Cisalhamento Puro:

$$W = \frac{\mu_1 \left( \lambda^{\alpha_1} + \lambda^{-2\alpha_1} - 2 \right)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2 \left( \lambda^{\alpha_2} + \lambda^{-2\alpha_2} - 2 \right)}{\alpha_2} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} \left( \mu_1 \left( \lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_1}{2}-1} \right) + \mu_2 \left( \lambda^{\alpha_2-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_2}{2}-1} \right) \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{dW}{dI_1}$$

- Cisalhamento Simples:

$$W = \frac{\mu_1 \left( \lambda_p^{\alpha_1} + \lambda_p^{-2\alpha_1} - 2 \right)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2 \left( \lambda_p^{\alpha_2} + \lambda_p^{-2\alpha_2} - 2 \right)}{\alpha_2} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda_p - \frac{1}{\lambda_p^3} \right)^{-1} \left( \mu_1 \left( \lambda_p^{\alpha_1-1} - \lambda_p^{-\frac{\alpha_1}{2}-1} \right) + \mu_2 \left( \lambda_p^{\alpha_2-1} - \lambda_p^{-\frac{\alpha_2}{2}-1} \right) \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{dW}{dI_1}$$

onde  $\lambda_p = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$ .

- Tração Biaxial;

$$W = \frac{\mu_1 \left( 2\lambda^{\alpha_1} + \lambda^{-2\alpha_1} - 3 \right)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2 \left( 2\lambda^{\alpha_2} + \lambda^{-2\alpha_2} - 3 \right)}{\alpha_2} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right)^{-1} \left( \mu_1 (\lambda^{\alpha_1} - \lambda^{-2\alpha_1}) + \mu_2 (\lambda^{\alpha_2} - \lambda^{-2\alpha_2}) \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{dW}{dI_1}$$

- 3 termos – OI3

- Tração Uniaxial:

$$W = \frac{\mu_1 \left( \lambda^{\alpha_1} + 2 \lambda^{-\frac{\alpha_1}{2}} - 3 \right)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2 \left( \lambda^{\alpha_2} + 2 \lambda^{-\frac{\alpha_2}{2}} - 3 \right)}{\alpha_1} + \frac{\mu_3 \left( \lambda^{\alpha_3} + 2 \lambda^{-\frac{\alpha_3}{2}} - 3 \right)}{\alpha_3} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} \left( \mu_1 \left( \lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_1}{2}-1} \right) + \mu_2 \left( \lambda^{\alpha_2-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_2}{2}-1} \right) + \right.$$

$$\left. + \mu_3 \left( \lambda^{\alpha_3-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_3}{2}-1} \right) \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \lambda \frac{dW}{dI_1}$$

- Cisalhamento Puro:

$$W = \frac{\mu_1 \left( \lambda^{\alpha_1} + \lambda^{-2\alpha_1} - 2 \right)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2 \left( \lambda^{\alpha_2} + \lambda^{-2\alpha_2} - 2 \right)}{\alpha_2} + \frac{\mu_3 \left( \lambda^{\alpha_3} + \lambda^{-2\alpha_3} - 2 \right)}{\alpha_3} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} \left( \mu_1 \left( \lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_1}{2}-1} \right) + \mu_2 \left( \lambda^{\alpha_2-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_2}{2}-1} \right) + \right.$$

$$\left. + \mu_3 \left( \lambda^{\alpha_3-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_3}{2}-1} \right) \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{dW}{dI_1}$$

- Cisalhamento Simples:

$$W = \frac{\mu_1 \left( \lambda_p^{\alpha_1} + \lambda_p^{-2\alpha_1} - 2 \right)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2 \left( \lambda_p^{\alpha_2} + \lambda_p^{-2\alpha_2} - 2 \right)}{\alpha_2} + \frac{\mu_3 \left( \lambda_p^{\alpha_3} + \lambda_p^{-2\alpha_3} - 2 \right)}{\alpha_3} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda_p - \frac{1}{\lambda_p^3} \right)^{-1} \left( \mu_1 \left( \lambda_p^{\alpha_1-1} - \lambda_p^{-\frac{\alpha_1}{2}-1} \right) + \mu_2 \left( \lambda_p^{\alpha_2-1} - \lambda_p^{-\frac{\alpha_2}{2}-1} \right) + \mu_3 \left( \lambda_p^{\alpha_3-1} - \lambda_p^{-\frac{\alpha_3}{2}-1} \right) \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{dW}{dI_1}$$

onde  $\lambda_p = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$ .

- Tração Biaxial:

$$W = \frac{\mu_1 (2\lambda^{\alpha_1} + \lambda^{-2\alpha_1} - 3)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2 (2\lambda^{\alpha_2} + \lambda^{-2\alpha_2} - 3)}{\alpha_2} + \frac{\mu_3 (2\lambda^{\alpha_3} + \lambda^{-2\alpha_3} - 3)}{\alpha_3} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right)^{-1} \left( \mu_1 (\lambda^{\alpha_1} - \lambda^{-2\alpha_1}) + \mu_2 (\lambda^{\alpha_2} - \lambda^{-2\alpha_2}) + \mu_3 (\lambda^{\alpha_3} - \lambda^{-2\alpha_3}) \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{dW}{dI_1}$$

A Tabela A.8 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais, para 2 e 3 termos.

<b>Ogden - OIn</b>	
$t_T, t_C =$	$2A_\eta$
$t_P =$	$2B_\eta$
$t_S =$	$t_P \rightarrow \lambda_p = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$
$t_B =$	$C_\eta$

Tabela A. 8 - Tensões nominais para o modelo de Ogden.

Os fatores empregados na Tabela A.8 são respectivamente:

$$A_2 = \mu_1 \left( \lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_1}{2}-1} \right) + \mu_2 \left( \lambda^{\alpha_2-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_2}{2}-1} \right)$$

$$A_3 = A_2 + \mu_3 \left( \lambda^{\alpha_3-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_3}{2}-1} \right)$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \mu_1 (\lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-\alpha_1-1}) + \mu_2 (\lambda^{\alpha_2-1} - \lambda^{-\alpha_2-1}) \\
B_3 &= B_2 + \mu_3 (\lambda^{\alpha_3-1} - \lambda^{-\alpha_3-1}) \\
C_2 &= \mu_1 (\lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-2\alpha_1-1}) + \mu_2 (\lambda^{\alpha_2-1} - \lambda^{-2\alpha_2-1}) \\
C_3 &= C_2 + \mu_3 (\lambda^{\alpha_3-1} - \lambda^{-2\alpha_3-1})
\end{aligned}$$

### A.9. Ajustando o Modelo de Peng-Landel (PLI)

A eq.(3.13) no caso incompressível resulta:

$$W = \sum_{i=1}^3 C_i (\lambda_i - 1 - \ln(\lambda_i) - \frac{1}{6} \ln(\lambda_i)^2 + \frac{1}{18} \ln(\lambda_i)^3 - \frac{1}{216} \ln(\lambda_i)^4) \quad (\text{A.20})$$

Como este modelo também depende diretamente dos alongamentos, as derivadas de  $W$  devem ser obtidas novamente através da regra da cadeia:

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dI_1} &= \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dI_1} \\
\frac{dW}{dI_2} &= \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dI_2}
\end{aligned}$$

e, portanto, resultam expressões diferentes para cada modo de deformação.

- Tração Uniaxial:

$$\begin{aligned}
W &= c \left( \lambda - 1 - \ln(\lambda) - \frac{1}{6} (\ln(\lambda))^2 + \frac{1}{18} (\ln(\lambda))^3 - \frac{1}{216} (\ln(\lambda))^4 \right) + \\
&+ 2c \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{1}{6} \left( \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right)^2 + \frac{1}{18} \left( \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right)^3 - \frac{1}{216} \left( \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right)^4 \right) \quad (\text{A.21}) \\
\frac{\partial W}{\partial I_1} &= \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} \left[ c \left( 1 - \frac{1}{\lambda} - \ln(\lambda) - \frac{1}{3\lambda} (\ln(\lambda)) + \frac{1}{6\lambda} (\ln(\lambda))^2 - \frac{1}{54\lambda} (\ln(\lambda))^3 \right) + \right. \\
&\left. + c \left( -\frac{1}{\lambda^{3/2}} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\lambda} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{1}{12\lambda} \left( \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right)^2 + \frac{1}{108\lambda} \left( \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right)^3 \right) \right] \\
\frac{\partial W}{\partial I_2} &= \lambda \frac{\partial W}{\partial I_1}
\end{aligned}$$

- Cisalhamento Puro:

$$\begin{aligned}
 W &= c \left( \lambda - 1 - \ln(\lambda) - \frac{1}{6} (\ln(\lambda))^2 + \frac{1}{18} (\ln(\lambda))^3 - \frac{1}{216} (\ln(\lambda))^4 \right) + \\
 &+ c \left( \frac{1}{\lambda} - 1 - \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{6} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)^2 + \frac{1}{18} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)^3 - \frac{1}{216} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)^4 \right) \quad (\text{A.22}) \\
 \frac{\partial W}{\partial I_1} &= c \left( 1 - \frac{1}{\lambda} - \ln(\lambda) - \frac{1}{3\lambda} (\ln(\lambda)) + \frac{1}{6\lambda} (\ln(\lambda))^2 - \frac{1}{54\lambda} (\ln(\lambda))^3 \right) + \\
 &+ c \left( -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\lambda} \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{6\lambda} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)^2 + \frac{1}{54\lambda} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)^3 \right) \\
 \frac{\partial W}{\partial I_2} &= \frac{\partial W}{\partial I_1}
 \end{aligned}$$

- Cisalhamento Simples:

$$\begin{aligned}
 W &= c \left( \lambda_p - 1 - \ln(\lambda_p) - \frac{1}{6} (\ln(\lambda_p))^2 + \frac{1}{18} (\ln(\lambda_p))^3 - \frac{1}{216} (\ln(\lambda_p))^4 \right) + \\
 &+ c \left( \frac{1}{\lambda_p} - 1 - \ln\left(\frac{1}{\lambda_p}\right) - \frac{1}{6} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda_p}\right) \right)^2 + \frac{1}{18} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda_p}\right) \right)^3 - \frac{1}{216} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda_p}\right) \right)^4 \right) \quad (\text{A.23}) \\
 \frac{\partial W}{\partial I_1} &= \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} \left[ c \left( 1 - \frac{1}{\lambda_p} - \ln(\lambda_p) - \frac{1}{3\lambda_p} (\ln(\lambda_p)) + \frac{1}{6\lambda_p} (\ln(\lambda_p))^2 - \frac{1}{54\lambda_p} (\ln(\lambda_p))^3 \right) + \right. \\
 &\left. + c \left( -\frac{1}{\lambda_p^2} + \frac{1}{\lambda_p} + \frac{1}{3\lambda_p} \ln\left(\frac{1}{\lambda_p}\right) - \frac{1}{6\lambda_p} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda_p}\right) \right)^2 + \frac{1}{54\lambda_p} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda_p}\right) \right)^3 \right) \right] \\
 \frac{\partial W}{\partial I_2} &= \frac{\partial W}{\partial I_1}
 \end{aligned}$$

onde  $\lambda_p = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$ .

- Tração Biaxial

$$\begin{aligned}
 W &= 2c \left( \lambda - 1 - \ln(\lambda) - \frac{1}{6} (\ln(\lambda))^2 + \frac{1}{18} (\ln(\lambda))^3 - \frac{1}{216} (\ln(\lambda))^4 \right) + \\
 &+ c \left( \frac{1}{\lambda^2} - 1 - \ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{1}{6} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right)^2 + \frac{1}{18} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right)^3 - \frac{1}{216} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right)^4 \right) \quad (\text{A.24})
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{1}{4} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right)^{-1} \left[ 2c \left( 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{3\lambda} (\ln(\lambda)) + \frac{1}{6\lambda} (\ln(\lambda))^2 - \frac{1}{54\lambda} (\ln(\lambda))^3 \right) + \right. \\ \left. + c \left( -\frac{1}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda} + \frac{2}{3\lambda} \ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{1}{3\lambda} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right)^2 + \frac{1}{27\lambda} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right)^3 \right) \right]$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial I_1}$$

A Tabela A.9 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais.

Os fatores empregados nessa tabela são respectivamente:

$$A_{1T} = c \left( 1 - \frac{1}{\lambda} - \ln(\lambda) - \frac{1}{3\lambda} (\ln(\lambda)) + \frac{1}{6\lambda} (\ln(\lambda))^2 - \frac{1}{54\lambda} (\ln(\lambda))^3 \right) + \\ + c \left( -\frac{1}{\lambda^{3/2}} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\lambda} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{1}{12\lambda} \left( \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right)^2 + \frac{1}{108\lambda} \left( \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right)^3 \right)$$

$$A_{1S} = c \left( 1 - \frac{1}{\lambda} - \ln(\lambda) - \frac{1}{3\lambda} (\ln(\lambda)) + \frac{1}{6\lambda} (\ln(\lambda))^2 - \frac{1}{54\lambda} (\ln(\lambda))^3 \right) + \\ + c \left( -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\lambda} \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{6\lambda} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)^2 + \frac{1}{54\lambda} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)^3 \right)$$

$$A_{1B} = 2c \left( 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{3\lambda} (\ln(\lambda)) + \frac{1}{6\lambda} (\ln(\lambda))^2 - \frac{1}{54\lambda} (\ln(\lambda))^3 \right) + \\ + c \left( -\frac{1}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda} + \frac{2}{3\lambda} \ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{1}{3\lambda} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right)^2 + \frac{1}{27\lambda} \left( \ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right)^3 \right)$$

<b>Peng-Landel – PLI</b>	
$t_T, t_C =$	$2A_1$
$t_P =$	$2B_1$
$t_S =$	$t_P \rightarrow \lambda_P = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$
$t_B =$	$C_1$

Tabela A. 9 - Tensões nominais para o modelo de Peng-Landel.

### A.10. Ajustando o Modelo de Knowles (KI)

A eq.(3.14) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{\mu}{2b} \left( \left( 1 + \frac{b(I_1 - 3)}{n} \right)^n - 1 \right) \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{b(I_1 - 3)}{n} \right)^{n-1}$$

$$\frac{dW}{dI_2} = 0$$

A Tabela A.10 apresenta estas expressões prontas para serem utilizadas com os dados experimentais.

<b>Knowles – KI</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_2$
$t_P =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_2$
$t_S =$	$\gamma A_2$
$t_B =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_2$

Tabela A. 10 - Tensões nominais para o modelo de Knowles.

Um único fator é empregado na Tabela A.10:

$$A_2 = \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{b(I_1 - 3)}{n} \right)^{n-1}$$

### A.11. Ajustando o Modelo de Kilian (KLI)

A eq.(3.15) no caso incompressível resulta:

$$W = -\mu J_L \left[ \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{I_1 - 3}{J_L}} \right) + \sqrt{\frac{I_1 - 3}{J_L}} \right] \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{-\mu J_L}{2} \left( \frac{1}{J_L \sqrt{\frac{(I_1-3)}{J_L}} \left( 1 - \sqrt{\frac{(I_1-3)}{J_L}} \right)} + \frac{1}{J_L \sqrt{\frac{(I_1-3)}{J_L}}} \right)$$

A Tabela A.11 apresenta as expressões  $t_T, t_C, t_S, t_P$  e  $t_B$  prontas para serem ajustadas com os dados experimentais.

<b>Kilian - KLI</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_2$
$t_P =$	$\left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_2$
$t_S =$	$2 \gamma A_2$
$t_B =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_2$

Tabela A. 11 - Tensões nominais para o modelo de Kilian.

O fator empregado nessa tabela é:

$$A_2 = \frac{-\mu J_L}{2} \left( \frac{1}{J_L \sqrt{\frac{(I_1-3)}{J_L}} \left( 1 - \sqrt{\frac{(I_1-3)}{J_L}} \right)} + \frac{1}{J_L \sqrt{\frac{(I_1-3)}{J_L}}} \right)$$

### A.12. Ajustando o Modelo de Van der Waals (VDWI)

A eq.(3.16) no caso incompressível resulta:

$$W = \mu \left[ -(\lambda_m^2 - 3)(\ln(1-\eta) + \eta) - \frac{2}{3} a \left( \frac{1}{2} I_1 - \frac{3}{2} \right)^{3/2} \right] \quad (\text{A.27})$$



onde:

$$\eta = \sqrt{\frac{I_l - 3}{\lambda_m^2 - 3}}, \quad I_l = (1 - \beta)I_1 + \beta I_2$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \mu \left( -\frac{\lambda_m^2 - 3}{2} \left( -\frac{1 - \beta}{\eta(\lambda_m^2 - 3)(1 - \eta)} + \frac{1 - \beta}{\eta(\lambda_m^2 - 3)(1 - \eta)} \right) - \frac{a}{2}(1 - \beta) \sqrt{\frac{1}{2}((1 - \beta)I_1 + \beta I_2 - 3)} \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \mu \left( -\frac{\lambda_m^2 - 3}{2} \left( -\frac{\beta}{\eta(\lambda_m^2 - 3)(1 - \eta)} + \frac{\beta}{\eta(\lambda_m^2 - 3)(1 - \eta)} \right) - \frac{a}{2}(\beta) \sqrt{\frac{1}{2}((1 - \beta)I_1 + \beta I_2 - 3)} \right)$$

A Tabela A.12 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais:

<b>Van der Waals- VDWI</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( A_4 + \frac{B_4}{\lambda} \right)$
$t_P =$	$\left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) (A_4 + B_4)$
$t_S =$	$2\gamma(A_4 + B_4)$
$t_B =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) (A_4 + \lambda^2 B_4)$

Tabela A. 12 - Tensões nominais para o modelo de Van der Waals.

Os fatores empregados na Tabela A.12 são:

$$A_4 = \mu \left( -\frac{\lambda_m^2 - 3}{2} \left( -\frac{1 - \beta}{\eta(\lambda_m^2 - 3)(1 - \eta)} + \frac{1 - \beta}{\eta(\lambda_m^2 - 3)(1 - \eta)} \right) - \frac{a}{2}(1 - \beta) \sqrt{\frac{1}{2}((1 - \beta)I_1 + \beta I_2 - 3)} \right)$$

$$B_4 = \mu \left( -\frac{\lambda_m^2 - 3}{2} \left( -\frac{\beta}{\eta(\lambda_m^2 - 3)(1 - \eta)} + \frac{\beta}{\eta(\lambda_m^2 - 3)(1 - \eta)} \right) - \frac{a}{2}(\beta) \sqrt{\frac{1}{2}((1 - \beta)I_1 + \beta I_2 - 3)} \right)$$

### A.13. Ajustando o Modelo de Humphrey-Yin (HYI)

A eq.(3.18) no caso incompressível resulta:

$$W = C_1(e^{C_2(I_1-3)} - 1) \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 C_2 (e^{C_2(I_1-3)})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = 0$$

A Tabela A.13 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. Um único fator é empregado nessa tabela:

$$A_2 = C_1 C_2 (e^{C_2(I_1-3)})$$

<b>Humphrey-Yin – HYI</b>	
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) A_2$
$t_P =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right) A_2$
$t_S =$	$2\gamma A_2$
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right) A_2$

Tabela A. 13 - Tensões nominais para o modelo de Humphrey-Yin.

### A.14. Ajustando o Modelo de Edwards-Vilgis (EVI)

A eq.(3.19) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{\mu}{2} \left[ \frac{(J_L + 2)(J_L - 3)(I_1 - 3)}{J_L(J_L - I_1 + 3)} + \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_L}\right) \right] \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{(J_L^2 - J_L - 6) - 2J_L + 2I_1 - 6}{(J_L - I_1 + 3)^2} \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = 0$$

Novamente,  $\mu$  é considerado uma constante adicional caso não haja uma estimativa para o mesmo. A Tabela A.14 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. Um único fator é empregado nessa tabela:

$$A_2 = \left( \frac{(J_L^2 - J_L - 6) - 2J_L + 2I_1 - 6}{(J_L - I_1 + 3)^2} \right)$$

<b>Edwards-Vilgis- EVI</b>	
$t_T, t_C =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_2$
$t_P =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_2$
$t_S =$	$\mu \gamma A_2$
$t_B =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_2$

Tabela A. 14 - Tensões nominais para o modelo de Edwards-Vilgis.

### A.15. Ajustando o Modelo de Takamizawa-Hayashi (THI)

A eq.(3.22) no caso incompressível resulta:

$$W = -c \ln \left[ 1 - \left( \frac{I_1 - 2}{J_L} \right)^2 \right] \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{2c(I_1 - 2)}{J_L^2 \left( 1 - \frac{(I_1 - 2)^2}{J_L^2} \right)}$$

$$\frac{dW}{dI_2} = 0$$

A Tabela A.15 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. Um único fator é empregado nessa tabela:

$$A_2 = \frac{2c(I_1 - 2)}{J_L^2 \left( 1 - \frac{(I_1 - 2)^2}{J_L^2} \right)}$$

<b>Takamizawa-Hayashi – THI</b>	
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)A_2$
$t_P =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)A_2$
$t_S =$	$2\gamma A_2$
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)A_2$

Tabela A. 15 - Tensões nominais para o modelo de Takamizawa-Hayashi.

**A.16. Ajustando o Modelo de Yeoh (YIn)**

A eq.(3.23) no caso incompressível resulta:

- 2 termos – **YI2**

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = 0$$

- 3 termos – **YI3**

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2$$

$$\frac{dW}{dI_2} = 0$$

- 5 termos – **YI5**

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{40}(I_1 - 3)^4 + C_{50}(I_1 - 3)^5 \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2 + 4C_{40}(I_1 - 3)^3 + 5C_{50}(I_1 - 3)^4$$

$$\frac{dW}{dI_2} = 0$$

Substituindo-se as eqs.(4.32) a (4.34) em (2.35), (2.38a), (2.41e) e (2.43) leva às expressões de  $t_T$  (ou  $t_C$ ),  $t_P$ ,  $t_S$  e  $t_B$  particularizadas para este modelo. A Tabela A.16 apresenta estas expressões, agora prontas para serem ajustadas com os dados experimentais, parametrizada para 2, 3 e 5 termos. Os fatores a serem empregados na Tabela A.16 são:

$$A_2 = C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3)$$

$$A_3 = A_2 + 3C_{30}(I_1 - 3)^2$$

$$A_5 = A_3 + 4C_{40}(I_1 - 3)^3 + 5C_{50}(I_1 - 3)^4$$

<b>Yeoh - YIn</b>	
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)A_n$
$t_P =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)A_n$
$t_S =$	$2\gamma A_n$
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)A_n$

Tabela A. 16 - Tensões nominais para o modelo de Yeoh ( $n = 2, 3$ , ou  $5$ ).

### A.17. Ajustando o Modelo de Yeoh-Modificado (YMI)

A eq.(3.24) no caso incompressível resulta:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta(I_1 - 3)}) \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 2C_{30}(I_1 - 3)^2 + \alpha e^{-\beta(I_1 - 3)}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = 0$$

A Tabela A.17 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. Um único fator é empregado nessa tabela:

$$A_5 = C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 2C_{30}(I_1 - 3)^2 + \alpha e^{-\beta(I_1 - 3)}$$

<b>Yeoh-Modificado- YMI</b>	
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)A_3$
$t_P =$	$\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)A_3$
$t_S =$	$2\gamma A_3$
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)A_3$

Tabela A. 17 - Tensões nominais para o modelo de Yeoh-Modificado.

### A.18. Ajustando o Modelo de Arruda-Boyce (ABI5)

A eq.(3.25) possui um número fixo de termos, e no caso de incompressibilidade resulta, já substituídas as constantes  $C_i$  da (310), em uma função  $W$  dependente de uma única constante ( $\lambda_L$ ):

$$W = \mu \left( \frac{1}{2} I_1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{20} \frac{I_1^2 - 9}{\lambda_L^2} + \frac{11}{1050} \frac{I_1^3 - 27}{\lambda_L^4} + \frac{19}{7050} \frac{I_1^4 - 81}{\lambda_L^6} + \frac{519}{673750} \frac{I_1^5 - 243}{\lambda_L^8} \right) \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \mu \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \frac{I_1}{\lambda_L^2} + \frac{11}{350} \frac{I_1^2}{\lambda_L^4} + \frac{38}{3525} \frac{I_1^3}{\lambda_L^6} + \frac{519}{134750} \frac{I_1^4}{\lambda_L^8} \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = 0$$

A Tabela A.18 apresenta estas expressões para serem ajustadas com os dados experimentais. Um único fator é empregado nessa tabela:

$$A_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \frac{I_1}{\lambda_L^2} + \frac{11}{350} \frac{I_1^2}{\lambda_L^4} + \frac{38}{3525} \frac{I_1^3}{\lambda_L^6} + \frac{519}{134750} \frac{I_1^4}{\lambda_L^8}$$

Caso  $\mu$  não seja estimado via eq.(3.27), este é tratado como uma constante adicional.

<b>Arruda-Boyce – ABI5</b>	
$t_T, t_C =$	$2\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_5$
$t_P =$	$2\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_5$
$t_S =$	$2\mu \gamma A_5$
$t_B =$	$2\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_5$

Tabela A. 18 - Tensões nominais para o modelo de Arruda-Boyce de 5 termos.

**A.19. Ajustando o Modelo de Yamashita-Kawabata (YKI)**

A eq.(3.28) no caso incompressível resulta:

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + \frac{C_3}{N+1} (I_1 - 3)^{N+1} \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = C_{10} + C_3 (I_1 - 3)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = 0$$

A Tabela A.19 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais:

<b>Yamashita-Kawabata - YKI</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_2$
$t_P =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_2$
$t_S =$	$2 \gamma A_2$
$t_B =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_2$

Tabela A. 19 - Tensões nominais para o modelo de Yamashita-Kawabata.

Um único fator é empregado na Tabela A.19:

$$A_2 = C_{10} + C_3 (I_1 - 3)$$

### A.20. Ajustando o Modelo de Davis-De-Thomas (DDTI)

A eq.(3.29) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{A}{2(1-n/2)} (I_1 - 3 + C^2)^{(1-n/2)} + k(I_1 - 3)^2 \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{A \left(1 - \frac{n}{2}\right) (I_1 - 3 + C^2)^{-n/2}}{2-n} + 2k(I_1 - 3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = 0$$

A Tabela A.20 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. Um único fator é empregado nessa tabela:

$$A_4 = \frac{A \left(1 - \frac{n}{2}\right) (I_1 - 3 + C^2)^{-n/2}}{2-n} + 2k(I_1 - 3)$$

<b>Davis, De e Thomas– DDTI</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_4$
$t_P =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_4$
$t_S =$	$2\gamma A_4$
$t_B =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_4$

Tabela A. 20 - Tensões nominais para o modelo de Davis,De e Thomas.



### A.21. Ajustando o Modelo de Gent (GI)

A eq.(3.30) exige uma única constante ( $I_L$ ) a ser determinada ou especificada. No caso de incompressível:

$$W = -\frac{\mu}{2}(I_L - 3) \ln \left[ 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right] \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{\mu}{2} \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1}$$

$$\frac{dW}{dI_2} = 0$$

Assim como no modelo de Arruda-Boyce e Knowles,  $\mu$  é considerado uma constante adicional caso não haja uma estimativa para o mesmo. A Tabela A.21 apresenta estas expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais.

<b>Gent - GI</b>	
$t_T, t_C =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1}$
$t_P =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1}$
$t_S =$	$\mu \gamma \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1}$
$t_B =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1}$

Tabela A. 21 - Tensões nominais para o modelo de Gent.

### A.22. Ajustando o Modelo de Gregory (GYI)

A eq.(3.31) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{A}{(2-n)} (I_1 - 3)^{(1-n/2)} + \frac{B}{(2+m)} (I_1 - 3)^{(1+m/2)} \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{A\left(1-\frac{n}{2}\right)(I_1-3+C^2)^{-n/2}}{2-n} + \frac{B\left(1+\frac{m}{2}\right)(I_1-3+C^2)^{m/2}}{2+m}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = 0$$

A Tabela A.22 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. O fator empregado nessa tabela é:

$$A_5 = \frac{A\left(1-\frac{n}{2}\right)(I_1-3+C^2)^{-n/2}}{2-n} + \frac{B\left(1+\frac{m}{2}\right)(I_1-3+C^2)^{m/2}}{2+m}$$

<b>Gregory - GYI</b>	
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)A_4$
$t_P =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)A_4$
$t_S =$	$2\gamma A_4$
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)A_4$

Tabela A. 22 - Tensões nominais para o modelo de Gregory.

### A.23. Ajustando o Modelo de Yeoh-Fleming (YFI)

A eq.(3.32) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{A}{B}\left[1 - e^{-B(I_1-3)}\right] - C_{10}(I_L-3)\ln\left[1 - \frac{I_1-3}{I_L-3}\right] \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = Ae^{-B(I_1-3)} + C_{10}\left(1 - \frac{I_1-3}{I_L-3}\right)^{-1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = 0$$

A Tabela A.23 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. Um único fator é empregado nessa tabela:

$$A_3 = Ae^{-B(I_1-3)} + C_{10} \left(1 - \frac{I_1-3}{I_L-3}\right)^{-1}$$

<b>Yeoh-Fleming - YFI</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_3$
$t_P =$	$\left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_3$
$t_S =$	$2 \gamma A_3$
$t_B =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_3$

Tabela A. 23 - Tensões nominais para o modelo de Yeoh-Fleming.

#### A.24. Ajustando o Modelo de Martins (MI)

A eq.(3.34) no caso incompressível resulta:

$$W = C_1(e^{C_2(I_1-3)} - 1) + C_3(e^{C_4(\lambda-1)^2} - 1) \quad (\text{A.41})$$

Este modelo apresenta uma expressão para a energia de deformação mista função do 1º invariante de deformação e do alongamento principal na direção do carregamento ( $W = W(I_1) + W(\lambda)$ ). Logo as derivadas de  $W$  devem ser obtidas através da regra da cadeia somando-se as parcelas de cada termo:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dI_1} &= \frac{dW}{dI_1} + \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dI_1} \\ \frac{dW}{dI_2} &= \frac{dW}{dI_2} + \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dI_2} \end{aligned}$$

e, portanto, resultam expressões diferentes para cada modo de deformação.

- Tração Uniaxial:

$$W = C_1(e^{C_2(I_1-3)} - 1) + C_3(e^{C_4(\lambda-1)^2} - 1) \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 C_2 e^{C_2(I_1-3)} + C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} (\lambda^2 - \lambda) e^{C_4(\lambda-1)^2}$$

- Cisalhamento Puro:

$$W = C_1 \left( e^{C_2(I_1-3)} - 1 \right) + C_3 \left( e^{C_4(\lambda-1)^2} - 1 \right) \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 C_2 e^{C_2(I_1-3)} + C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$$

- Cisalhamento Simples:

$$W = C_1 \left( e^{C_2(I_1-3)} - 1 \right) + C_3 \left( e^{C_4(\lambda_p-1)^2} - 1 \right) \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 C_2 e^{C_2(I_1-3)} + C_3 C_4 \left( \lambda_p - \frac{1}{\lambda_p^3} \right)^{-1} (\lambda_p - 1) e^{C_4(\lambda_p-1)^2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = C_3 C_4 \left( \lambda_p - \frac{1}{\lambda_p^3} \right)^{-1} (\lambda_p - 1) e^{C_4(\lambda_p-1)^2}$$

onde  $\lambda_p = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$ .

- Tração Biaxial:

$$W = C_1 \left( e^{C_2(I_1-3)} - 1 \right) + C_3 \left( e^{C_4(\lambda-1)^2} - 1 \right) \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 C_2 e^{C_2(I_1-3)} + C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = C_3 C_4 \left( \lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$$

A Tabela A.24 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. Os fatores empregados nessa tabela são:

$$A_{4T} = C_1 C_2 e^{C_2(I_1-3)} + C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$$

$$B_{4T} = C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} (\lambda^2 - \lambda) e^{C_4(\lambda-1)^2}$$

$$A_{4P} = C_1 C_2 e^{C_2(I_1-3)} + C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$$

$$B_{4P} = C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$$

$$A_{4B} = C_1 C_2 e^{C_2(I_1-3)} + C_3 C_4 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$$

$$B_{4B} = C_3 C_4 \left( \lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} (\lambda - 1) e^{C_4(\lambda-1)^2}$$

<b>Martins - MI</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( A_{4T} + \frac{B_{4T}}{\lambda} \right)$
$t_P =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) (A_{4P} + B_{4P})$
$t_S =$	$t_P \rightarrow \lambda_P = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$
$t_B =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) (A_{4B} + \lambda^2 B_{4B})$

Tabela A. 24 - Tensões nominais para o modelo de Martins.

### A.25. Ajustando o Modelo de Gent de Três Parâmetros (G3I)

A eq.(3.35) no caso incompressível resulta:

$$W = \frac{\mu}{2} \left[ -\alpha(I_L - 3) \ln \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right) + (1 - \alpha)(I_2 - 3) \right] \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{\mu\alpha}{2} \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1}$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{\mu(1 - \alpha)}{2}$$

A Tabela A.25 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. Os fatores empregados nessa tabela são respectivamente:

$$A_3 = \frac{\mu\alpha}{2} \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1}$$

$$B_3 = \frac{\mu(1-\alpha)}{2}$$

<b>Gent de 03 Parâmetros – G3I</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) (A_3 + B_3)$
$t_P =$	$\left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) (A_3 + B_3)$
$t_S =$	$\gamma (A_3 + B_3)$
$t_B =$	$\left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) (A_3 + B_3)$

Tabela A. 25 - Tensões nominais para o modelo de Gent de 03 Parâmetros.

### A.26. Ajustando o Modelo de Pucci-Saccomandi (PSI)

A eq.(3.36) no caso incompressível resulta:

$$W = -\frac{1}{2} \mu J_m \ln \left( 1 - \frac{(I_1 - 3)}{J_m} \right) + C_2 \ln \left( \frac{1}{3} I_2 \right) \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{\mu}{2} \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1}$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{C_2}{I_2}$$

O modelo de Pucci e Saccomandi consiste em uma modificação do modelo de Gent, novamente  $\mu$  é considerado uma constante adicional caso não haja uma estimativa para o mesmo. A Tabela A.26 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. Um único fator é empregado nessa tabela:

$$B_1 = \frac{C_2}{I_2}$$

<b>Pucci-Sacomandi - PSI</b>	
$t_T, t_C =$	$2\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1} + \frac{B_1}{\lambda} \right)$
$t_P =$	$2\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1} + B_1 \right)$
$t_S =$	$2\mu \gamma \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1} + B_1 \right)$
$t_B =$	$2\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3} \right)^{-1} + \lambda^2 B_1 \right)$

Tabela A. 26 - Tensões nominais para o modelo de Pucci-Sacomandi.

**A.27. Ajustando o Modelo de Amin (AI)**

A eq.(3.37) no caso incompressível resulta:

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + \frac{C_3}{N+1} (I_1 - 3)^{N+1} + \frac{C_4}{M+1} (I_1 - 3)^{M+1} \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = C_{10} + C_3 (I_1 - 3)^N + C_4 (I_1 - 3)^M$$

$$\frac{dW}{dI_2} = 0$$

A Tabela A.27 apresenta as expressões  $t_T, t_C, t_S, t_P$  e  $t_B$  prontas para serem ajustadas:

<b>Amin - AI</b>	
$t_T, t_C =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) A_4$
$t_P =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) A_4$
$t_S =$	$2 \gamma A_4$
$t_B =$	$2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) A_4$

Tabela A. 27 - Tensões nominais para o modelo de Amin.

Um único fator é empregado nessa tabela:

$$A_4 = C_{10} + C_3 (I_1 - 3)^N + C_4 (I_1 - 3)^M$$

### A.28. Ajustando o Modelo de Hartmann-Neff (HNIn)

As eqs.(3.39) a (3.41) no caso incompressível ficam particularizadas como:

- 3 termos ( $N = M = 1$ ):

$$W = \alpha(I_1^3 - 3^3) + C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}) \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = 3\alpha I_1^2 + C_{10}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{3}{2} C_{01} \sqrt{I_2}$$

- 5 termos ( $N = M = 1$ ):

$$W = \alpha(I_1^3 - 3^3) + C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{01}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}) + C_{02}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3})^2 \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = 3\alpha I_1^2 + C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{3}{2} C_{01} \sqrt{I_2} + 3C_{02} (I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}) \sqrt{I_2}$$

- 7 termos ( $N = M = 1$ ):

$$W = \alpha(I_1^3 - 3^3) + C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}) + C_{02}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3})^2 + C_{03}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3})^3 \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = 3\alpha I_1^2 + C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 2C_{30}(I_1 - 3)^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{3}{2} C_{01} \sqrt{I_2} + 3C_{02} (I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}) \sqrt{I_2} + \frac{9}{2} C_{03} (I_2^{3/2} - 3\sqrt{3})^2 \sqrt{I_2}$$

A substituição das eqs.(4.45) a (4.47) em (2.35), (2.38a), (2.41e) e (2.43) leva às expressões de  $t_T$  (ou  $t_C$ ),  $t_P$ ,  $t_S$  e  $t_B$  particularizadas para este modelo. A Tabela A.28 apresenta estas expressões, agora prontas para serem ajustadas com os dados experimentais, parametrizadas para  $n = 1, 2, 3$ .



<b>Hartmann-Neff - HNIn</b>	
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(A_n + \frac{B_n}{\lambda}\right)$
$t_P =$	$\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)(A_n + B_n)$
$t_S =$	$2\gamma(A_n + B_n)$
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)(A_n + \lambda^2 B_n)$

Tabela A. 28 - Tensões nominais para os modelos de Hartmann-Neff ( $n = 1, 2, 3$ ).

Os fatores a serem empregados nessa tabela são:

$$A_1 = 3\alpha I_1^2 + C_{10}$$

$$B_1 = \frac{3}{2} C_{01} \sqrt{I_2}$$

$$A_2 = 3\alpha I_1^2 + C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3)$$

$$B_2 = \frac{3}{2} C_{01} \sqrt{I_2} + 3C_{02} \left( I_2^{3/2} - 3\sqrt{3} \right) \sqrt{I_2}$$

$$A_3 = 3\alpha I_1^2 + C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 2C_{30}(I_1 - 3)^2$$

$$B_3 = \frac{3}{2} C_{01} \sqrt{I_2} + 3C_{02} \left( I_2^{3/2} - 3\sqrt{3} \right) \sqrt{I_2} + \frac{9}{2} C_{03} \left( I_2^{3/2} - 3\sqrt{3} \right)^2 \sqrt{I_2}$$

### A.29. Ajustando o Modelo de Horgan-Saccomandi (CHGSI)

Baseado no modelo de Gent, a eq.(3.42) no caso incompressível resulta:

$$W = -\frac{\mu}{2} J \ln \left[ \frac{J^3 - J^2 I_1 + J I_2 - 1}{(J-1)^3} \right] \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{J_m^3}{J_m^3 - J_m^2 I_1 + J_m I_1 - 1} \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = -\frac{\mu}{2} \left( \frac{J_m^2}{J_m^3 - J_m^2 I_1 + J_m I_1 - 1} \right)$$

Novamente,  $\mu$  é considerado uma constante adicional caso não haja uma estimativa para o mesmo. A Tabela A.29 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. Um único fator é empregado nessa tabela:

$$A_1 = \left( \frac{J_m^3}{J_m^3 - J_m^2 I_1 + J_m I_1 - 1} \right)$$

$$B_1 = \left( \frac{J_m^2}{J_m^3 - J_m^2 I_1 + J_m I_1 - 1} \right)$$

<b>Horgan-Saccomandi - CHGSI</b>	
$t_T, t_C =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( A_1 + \frac{B_1}{\lambda} \right)$
$t_P =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) (A_1 + B_1)$
$t_S =$	$\mu \gamma (A_1 + B_1)$
$t_B =$	$\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) (A_1 + \lambda^2 B_1)$

Tabela A. 29 - Tensões nominais para o modelo de Horgan-Saccomandi.

### A.30. Ajustando o Modelo de Bechir (HBIn)

As eq.(3.45) no caso incompressível é dada por:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} C_n^r \left( \lambda_1^{2n} + \lambda_2^{2n} + \lambda_3^{2n} - 3 \right)^r \quad (\text{A.53})$$

Semelhante ao modelo de Ogden, como a expressão para a energia de deformação é expressa diretamente em função dos alongamentos, as derivadas de  $W$  devem ser obtidas através da regra da cadeia:

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dI_1}$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dI_2}$$

e, portanto, resultam expressões diferentes para cada modo de deformação. As duas versões mais empregadas deste modelo são:

- 4 termos – **HBI2**:

- Tração Uniaxial:

$$W = C_1^1 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + C_1^2 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^2 + C_2^1 \left( \lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2} - 3 \right) + C_2^2 \left( \lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2} - 3 \right)^2 \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} \left( \left( C_1^1 + 2C_1^2 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \right) \left( 2\lambda - \frac{2}{\lambda^2} \right) + \left( C_2^1 + 2C_2^2 \left( \lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2} - 3 \right) \right) \left( 4\lambda^3 - \frac{4}{\lambda^3} \right) \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \lambda \frac{dW}{dI_1}$$

- Cisalhamento Puro:

$$W = C_1^1 \left( \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2 \right) + C_1^2 \left( \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2 \right)^2 + C_2^1 \left( \lambda^4 + \frac{1}{\lambda^4} - 2 \right) + C_2^2 \left( \lambda^4 + \frac{1}{\lambda^4} - 2 \right)^2 \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{\frac{1}{2} \left( \left( C_1^1 + 2C_1^2 \left( \lambda_p^2 + \frac{1}{\lambda_p^2} - 2 \right) \right) \left( 2\lambda_p - \frac{2}{\lambda_p^3} \right) + \left( C_2^1 + 2C_2^2 \left( \lambda_p^4 + \frac{1}{\lambda_p^4} - 2 \right) \right) \left( 4\lambda_p^3 - \frac{4}{\lambda_p^5} \right) \right)}{\lambda_p - \frac{1}{\lambda_p^3}}$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{dW}{dI_1}$$

- Cisalhamento Simples:

$$W = C_1^1 \left( \lambda_p^2 + \frac{1}{\lambda_p^2} - 2 \right) + C_1^2 \left( \lambda_p^2 + \frac{1}{\lambda_p^2} - 2 \right)^2 + C_2^1 \left( \lambda_p^4 + \frac{1}{\lambda_p^4} - 2 \right) + C_2^2 \left( \lambda_p^4 + \frac{1}{\lambda_p^4} - 2 \right)^2 \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{\frac{1}{2} \left( \left( C_1^1 + 2C_1^2 \left( \lambda_p^2 + \frac{1}{\lambda_p^2} - 2 \right) \right) \left( 2\lambda_p - \frac{2}{\lambda_p^3} \right) + \left( C_2^1 + 2C_2^2 \left( \lambda_p^4 + \frac{1}{\lambda_p^4} - 2 \right) \right) \left( 4\lambda_p^3 - \frac{4}{\lambda_p^5} \right) \right)}{\lambda_p - \frac{1}{\lambda_p^3}}$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{dW}{dI_1}$$

onde  $\lambda_p = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$ .

- Tração Biaxial;

$$W = C_1^1(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3) + C_1^2(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3)^2 + C_2^1(2\lambda^4 + \frac{1}{\lambda^8} - 3) + C_2^2(2\lambda^4 + \frac{1}{\lambda^8} - 3)^2 \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{\frac{1}{2} \left( \left( C_1^1 + 2C_1^2 \left( 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) \right) \left( 4\lambda - \frac{4}{\lambda^5} \right) + \left( C_2^1 + 2C_2^2 \left( 2\lambda^4 + \frac{1}{\lambda^8} - 3 \right) \right) \left( 8\lambda^3 - \frac{8}{\lambda^9} \right) \right)}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4}}$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{dW}{dI_1}$$

- 6 termos – **HBI3**:

- Tração Uniaxial:

$$W = C_1^1(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3) + C_1^2(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3)^2 + C_2^1(\lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2} - 3) + C_2^2(\lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2} - 3)^2 + \\ + C_3^1(\lambda^6 + \frac{2}{\lambda^3} - 3) + C_3^2(\lambda^6 + \frac{2}{\lambda^3} - 3)^2 \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} \left( A_2 + \left( C_3^1 + 2C_3^2 \left( \lambda^6 + \frac{2}{\lambda^3} - 3 \right) \right) \left( 6\lambda^5 - \frac{6}{\lambda^4} \right) \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \lambda \frac{dW}{dI_1}$$

- Cisalhamento Puro:

$$W = C_1^1(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2) + C_1^2(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2)^2 + C_2^1(\lambda^4 + \frac{1}{\lambda^4} - 2) + C_2^2(\lambda^4 + \frac{1}{\lambda^4} - 2)^2 + \\ + C_3^1(\lambda^6 + \frac{1}{\lambda^6} - 2) + C_3^2(\lambda^6 + \frac{1}{\lambda^6} - 2)^2 \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)^{-1} \left( B_2 + \left( C_3^1 + 2C_3^2 \left( \lambda^6 + \frac{1}{\lambda^6} - 2 \right) \right) \left( 6\lambda^5 - \frac{6}{\lambda^7} \right) \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{dW}{dI_1}$$

- Cisalhamento Simples:

$$W = C_1^1(\lambda_p^2 + \frac{1}{\lambda_p^2} - 2) + C_1^2(\lambda_p^2 + \frac{1}{\lambda_p^2} - 2)^2 + C_2^1(\lambda_p^4 + \frac{1}{\lambda_p^4} - 2) + C_2^2(\lambda_p^4 + \frac{1}{\lambda_p^4} - 2)^2 + C_3^1(\lambda_p^6 + \frac{1}{\lambda_p^6} - 2) + C_3^2(\lambda_p^6 + \frac{1}{\lambda_p^6} - 2)^2 \quad (\text{A.60})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda_p - \frac{1}{\lambda_p^3} \right)^{-1} \left( B_2 + \left( C_3^1 + 2C_3^2 \left( \lambda_p^6 + \frac{1}{\lambda_p^6} - 2 \right) \right) \left( 6\lambda_p^5 - \frac{6}{\lambda_p^7} \right) \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{dW}{dI_1}$$

onde  $\lambda_p = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$ .

- Tração Biaxial;

$$W = C_1^1(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3) + C_1^2(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3)^2 + C_2^1(2\lambda^4 + \frac{1}{\lambda^8} - 3) + C_2^2(2\lambda^4 + \frac{1}{\lambda^8} - 3)^2 \quad (\text{A.61})$$

$$\frac{dW}{dI_1} = \frac{1}{2} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right)^{-1} \left( C_2 + \left( C_3^1 + 2C_3^2 \left( 2\lambda^6 + \frac{1}{\lambda^{12}} - 3 \right) \right) \left( 12\lambda - \frac{12}{\lambda^{13}} \right) \right)$$

$$\frac{dW}{dI_2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{dW}{dI_1}$$

A Tabela A.30 apresenta as expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais, para 2 e 3 termos.

<b>Bechir - HBIn</b>	
$t_T, t_C =$	$2A_\eta$
$t_P =$	$2B_\eta$
$t_S =$	$t_P \rightarrow \lambda_p = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4}$
$t_B =$	$C_\eta$

Tabela A. 30 - Tensões nominais para o modelo de Bechir.

Os fatores empregados nessa tabela são:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \left( \left( C_1^1 + 2C_1^2 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \right) \left( 2\lambda - \frac{2}{\lambda^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left( C_2^1 + 2C_2^2 \left( \lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2} - 3 \right) \right) \left( 4\lambda^3 - \frac{4}{\lambda^3} \right) \right) \\
A_3 &= A_2 + \left( C_3^1 + 2C_3^2 \left( \lambda^6 + \frac{2}{\lambda^3} - 3 \right) \right) \left( 6\lambda^5 - \frac{6}{\lambda^4} \right) \\
B_2 &= \left( \left( C_1^1 + 2C_1^2 \left( \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2 \right) \right) \left( 2\lambda - \frac{2}{\lambda^3} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left( C_2^1 + 2C_2^2 \left( \lambda^4 + \frac{1}{\lambda^4} - 2 \right) \right) \left( 4\lambda^3 - \frac{4}{\lambda^5} \right) \right) \\
B_3 &= B_2 + \left( C_3^1 + 2C_3^2 \left( \lambda^6 + \frac{1}{\lambda^6} - 2 \right) \right) \left( 6\lambda^5 - \frac{6}{\lambda^7} \right) \\
C_2 &= \left( \left( C_1^1 + 2C_1^2 \left( 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) \right) \left( 4\lambda - \frac{4}{\lambda^5} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left( C_2^1 + 2C_2^2 \left( 2\lambda^4 + \frac{1}{\lambda^8} - 3 \right) \right) \left( 8\lambda^3 - \frac{8}{\lambda^9} \right) \right) \\
C_3 &= C_2 + \left( C_3^1 + 2C_3^2 \left( 2\lambda^6 + \frac{1}{\lambda^{12}} - 3 \right) \right) \left( 12\lambda - \frac{12}{\lambda^{13}} \right)
\end{aligned}$$

### A.31. Ajustando o Modelo Polinomial (PI3)

O modelo polinomial coincide com o modelo de Mooney-Rivlin de 2 termos, eq.(4.14). Para o caso de  $N = 3$ , a eq.(3.47) se reduz a (foi utilizado  $C_{03} = C_{30} = 0$ ):

$$\begin{aligned}
W &= C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{11} (I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{02} (I_2 - 3)^2 + \\
&\quad + C_{21} (I_1 - 3)^2 (I_2 - 3) + C_{12} (I_1 - 3)(I_2 - 3)^2
\end{aligned} \tag{A.62}$$

$$\frac{dW}{dI_1} = C_{10} + C_{11} (I_2 - 3) + 2C_{20} (I_1 - 3) + 2C_{21} (I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{12} (I_2 - 3)^2$$

$$\frac{dW}{dI_2} = C_{01} + C_{11} (I_1 - 3) + 2C_{02} (I_2 - 3) + C_{21} (I_1 - 3)^2 + 2C_{12} (I_1 - 3)(I_2 - 3)$$

A substituição da eq.(4.50) em (2.35), (2.38a), (2.41e) e (2.43) leva às expressões de  $t_r$  (ou  $t_c$ ),  $t_p$ ,  $t_s$  e  $t_b$  particularizadas para este modelo. A Tabela A.31 apresenta estas expressões prontas para serem ajustadas com os dados experimentais. Os fatores empregados nessa tabela são:

$$A_3 = C_{10} + C_{11}(I_2 - 3) + 2C_{20}(I_1 - 3) + 2C_{21}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{12}(I_2 - 3)^2$$

$$B_3 = C_{01} + C_{11}(I_1 - 3) + 2C_{02}(I_2 - 3) + C_{21}(I_1 - 3)^2 + 2C_{12}(I_1 - 3)(I_2 - 3)$$

<b>Polinomial – PI3</b>	
$t_T, t_C =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(A_3 + \frac{B_3}{\lambda}\right)$
$t_P =$	$\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)\left(A_3 + B_3\right)$
$t_S =$	$2\gamma\left(A_3 + B_3\right)$
$t_B =$	$2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)\left(A_3 + \lambda^2 B_3\right)$

Tabela A. 31 - Tensões nominais para o modelo Polinomial de 3 termos.

## APÊNDICE B

### B. Ajustando as Curvas

Este anexo apresenta os resultados dos ajustes e predições para todos os casos avaliados no Capítulo 5. Os modelos hiperelásticos foram agrupados conforme a proposta da Tabela B.1, de forma que a apresentação dos resultados siga uma ordem genealógica e cronológica facilitando assim a comparação e avaliação dos modelos. Pretende-se com isto também, acompanhar a evolução e destacar as tendências de cada época, características marcantes observadas no desenvolvimento de novos modelos hiperelásticos. Foram analisadas três amostras de materiais: Treloar (Jones *et al.*, 1975), NR55 (Marczak, R *et al.*, 2006), MED4950 (Meier *et al.*, 2003).

GRUPOS HIPERELÁSTICOS			
GRUPO <sub>1</sub>	MRI2 <i>Mooney Rivlin (N=2)</i>	GRUPO <sub>6</sub>	PLI <i>Peng e Landel</i>
	MRI3 <i>Mooney Rivlin (N=3)</i>		MI <i>Martins</i>
	MRI5 <i>Mooney Rivlin (N=5)</i>		KLI <i>Kilian</i>
	MRI9 <i>Mooney Rivlin (N=9)</i>		VDWI <i>Van der Waals</i>
GRUPO <sub>2</sub>	HNI1 <i>Hartmann e Neff (N=1)</i>	GRUPO <sub>7</sub>	YI2 <i>Yeoh (N=2)</i>
	HNI2 <i>Hartmann e Neff (N=9)</i>		YI3 <i>Yeoh (N=3)</i>
	HNI3 <i>Hartmann e Neff (N=9)</i>		YI5 <i>Yeoh (N=5)</i>
	PI3 <i>Polinomial (N=9)</i>		YMI <i>Yeoh Modificado</i>
GRUPO <sub>3</sub>	NHI <i>Neo-Hookeano</i>	GRUPO <sub>8</sub>	YKI <i>Yamashita e Kawabata</i>
	GTI <i>Gent e Thomas</i>		AI <i>Amin</i>
	HSAI <i>Hart e Smith Aprimor.</i>		DTI <i>Davis e Thomas</i>
	HSI <i>Hart e Smith</i>		GYI <i>Gregory</i>
GRUPO <sub>4</sub>	FI <i>Fung</i>	GRUPO <sub>9</sub>	THI <i>Takamizawa e Hayashi</i>
	VWI <i>Veronda e Westmanns</i>		EVI <i>Edwards e Vilgis</i>
	KI <i>Knowles</i>		ABI5 <i>Arruda e Boyce</i>
	HYI <i>Humphrey e Yin</i>		GI <i>Gent</i>
GRUPO <sub>5</sub>	OI2 <i>Ogden (N=2)</i>	GRUPO <sub>10</sub>	YFI <i>Yeoh Fleming</i>
	OI3 <i>Ogden (N=3)</i>		G3I <i>Gent a 03 Parâmetros</i>
	HBI2 <i>Bechir (N=2)</i>		PSI <i>Pucci e Saccomandi</i>
	HBI3 <i>Bechir (N=3)</i>		HGSI <i>Horgan e Saccomandi</i>

Tabela B. 1 – Categorias de modelos hiperelásticos propostas no presente trabalho.



## B.1. Caso de Estudo: Borracha Natural – Grandes Deformações

### B.1.1. Ajuste para Ensaio de Tração

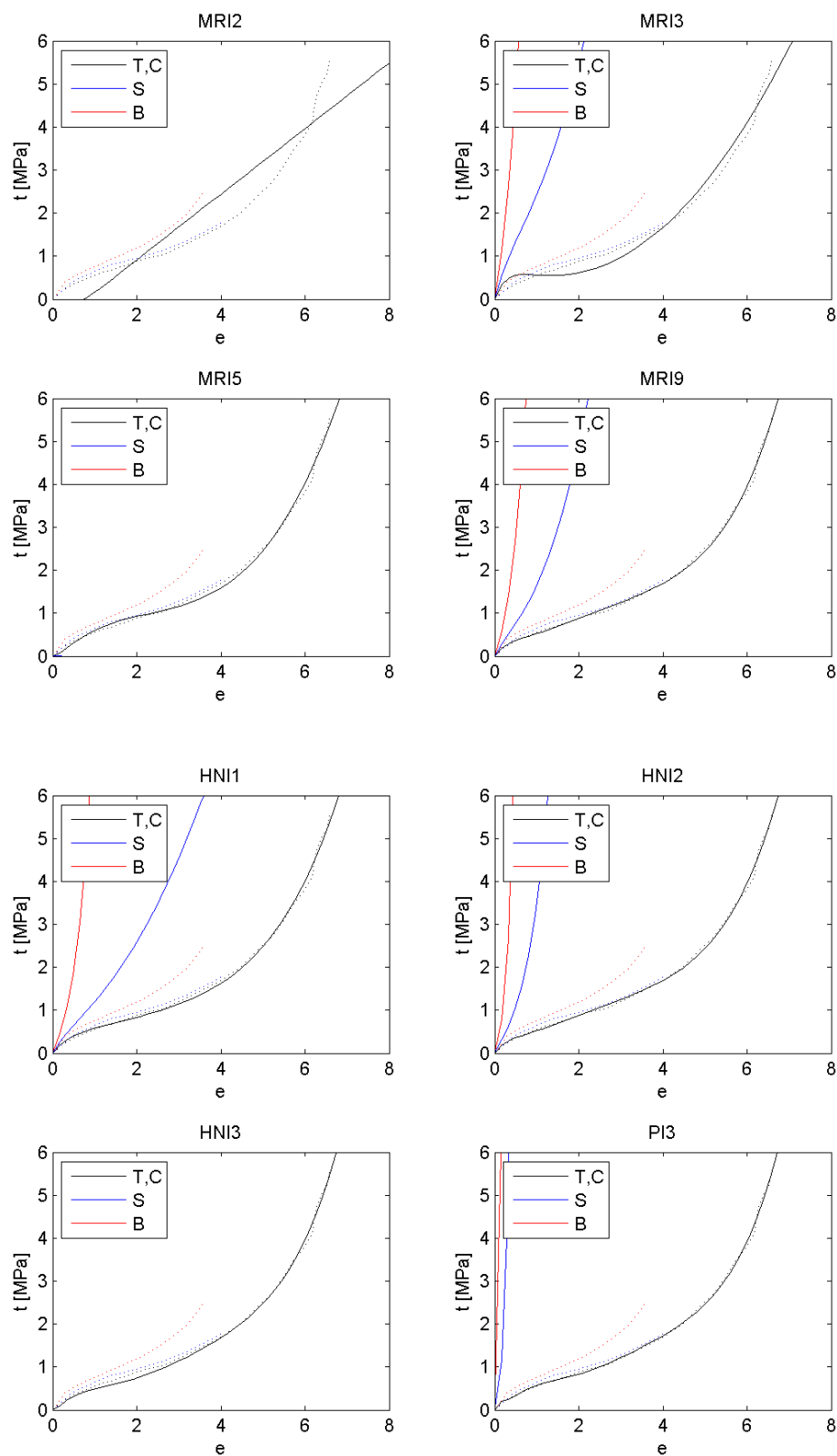


Figura B. 1 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 01 e grupo 02.

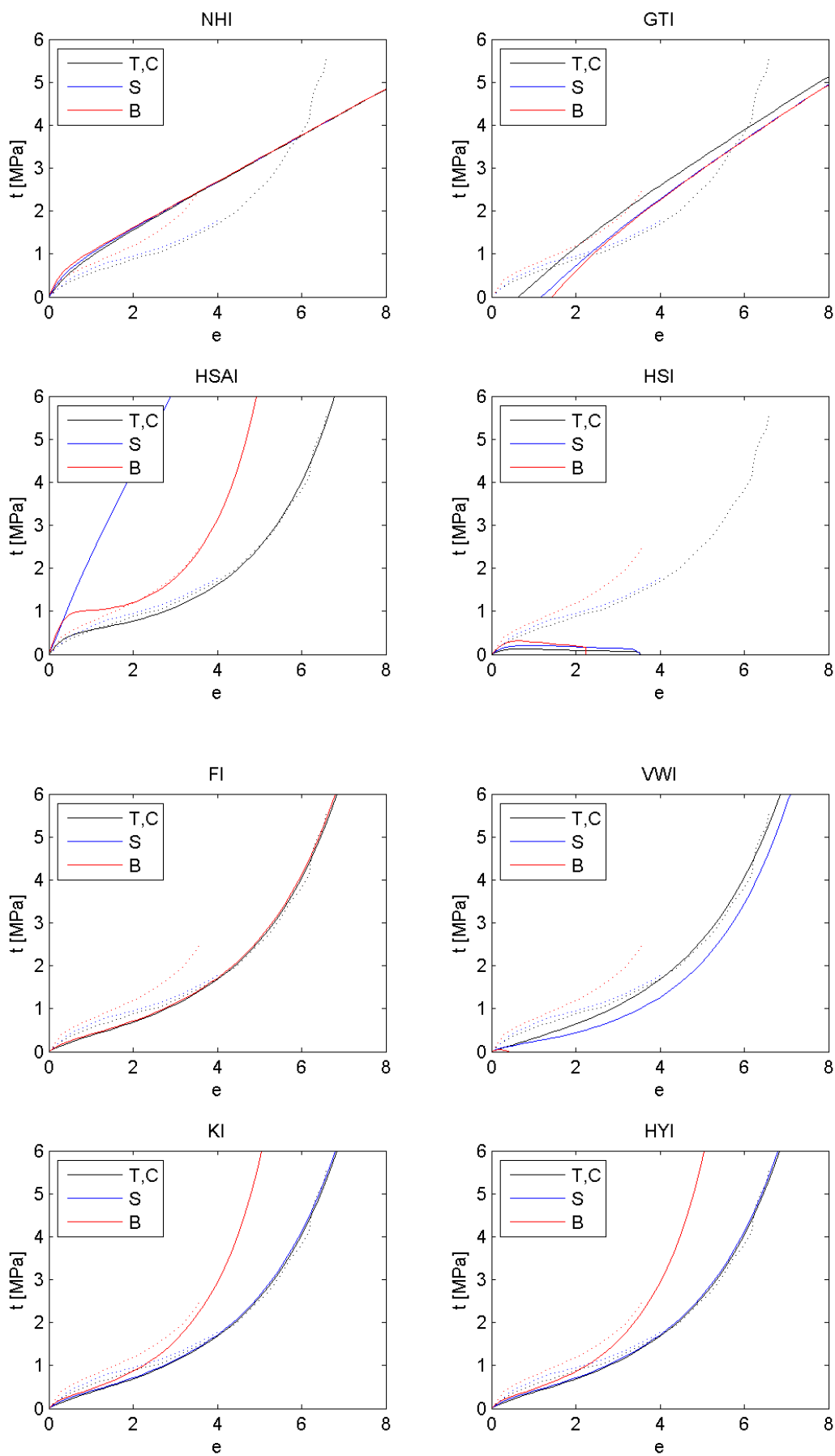


Figura B. 2 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 03 e grupo 04.

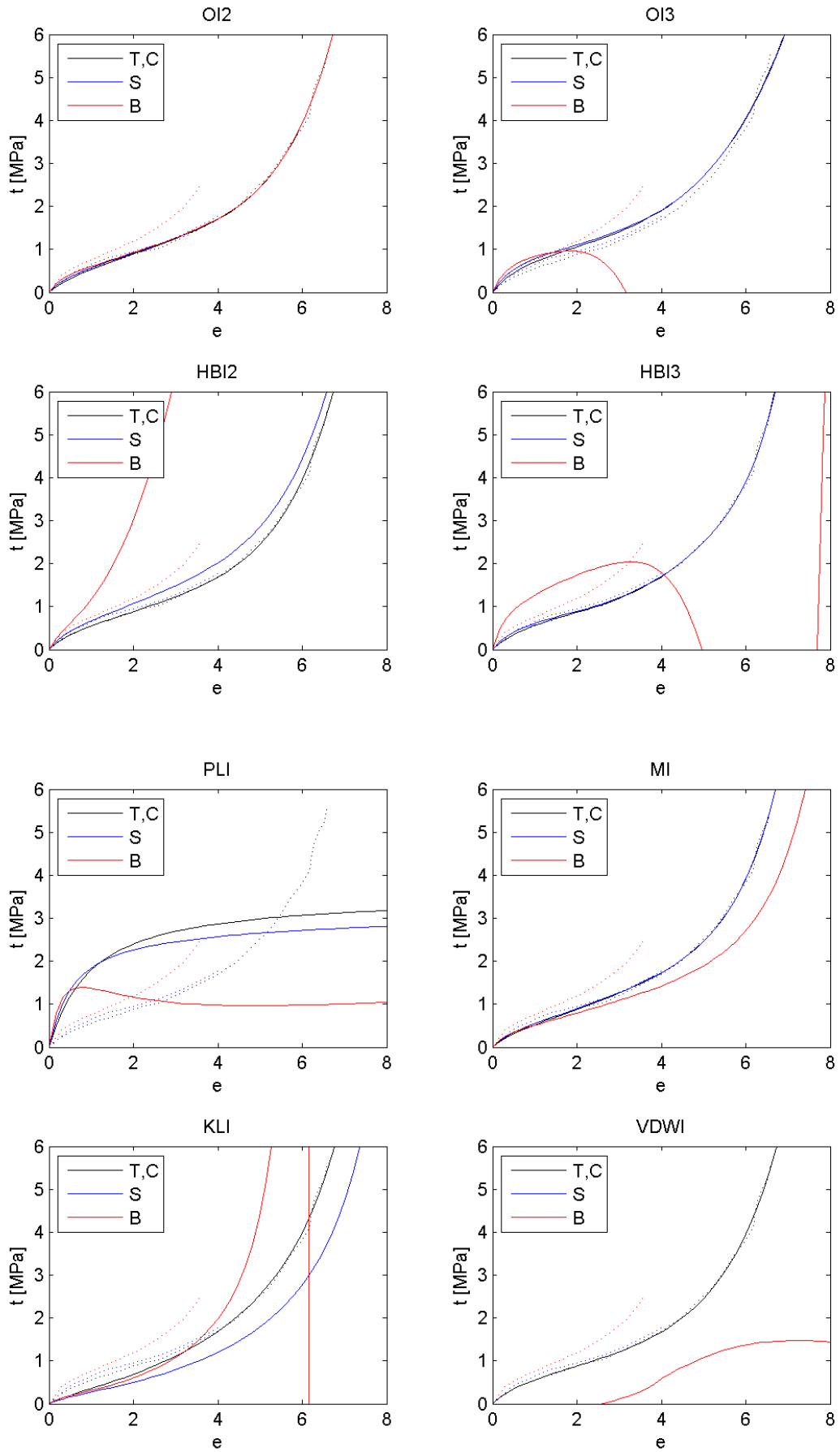


Figura B. 3 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 05 e grupo 06.

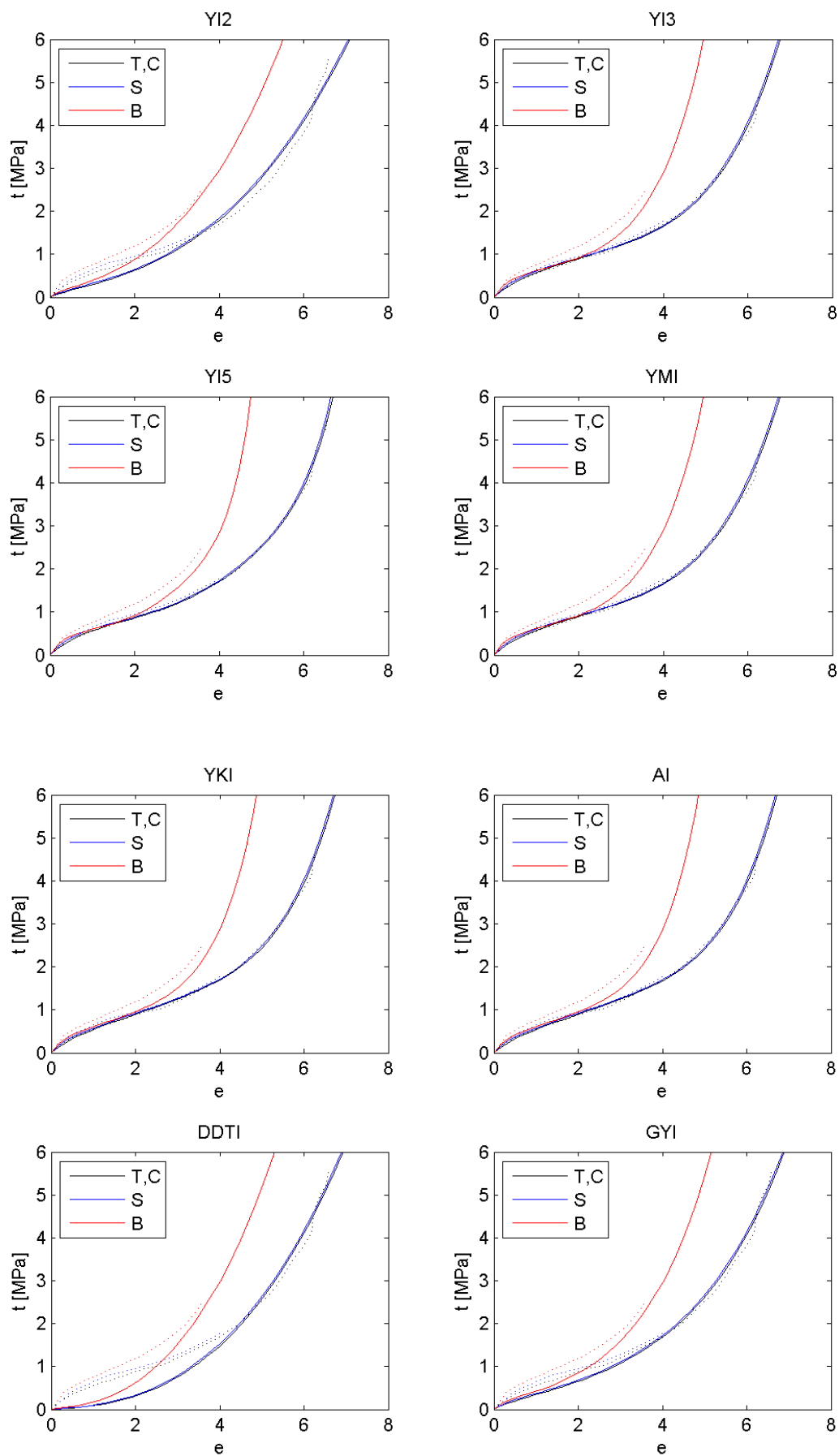


Figura B. 4 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 07 e grupo 08.

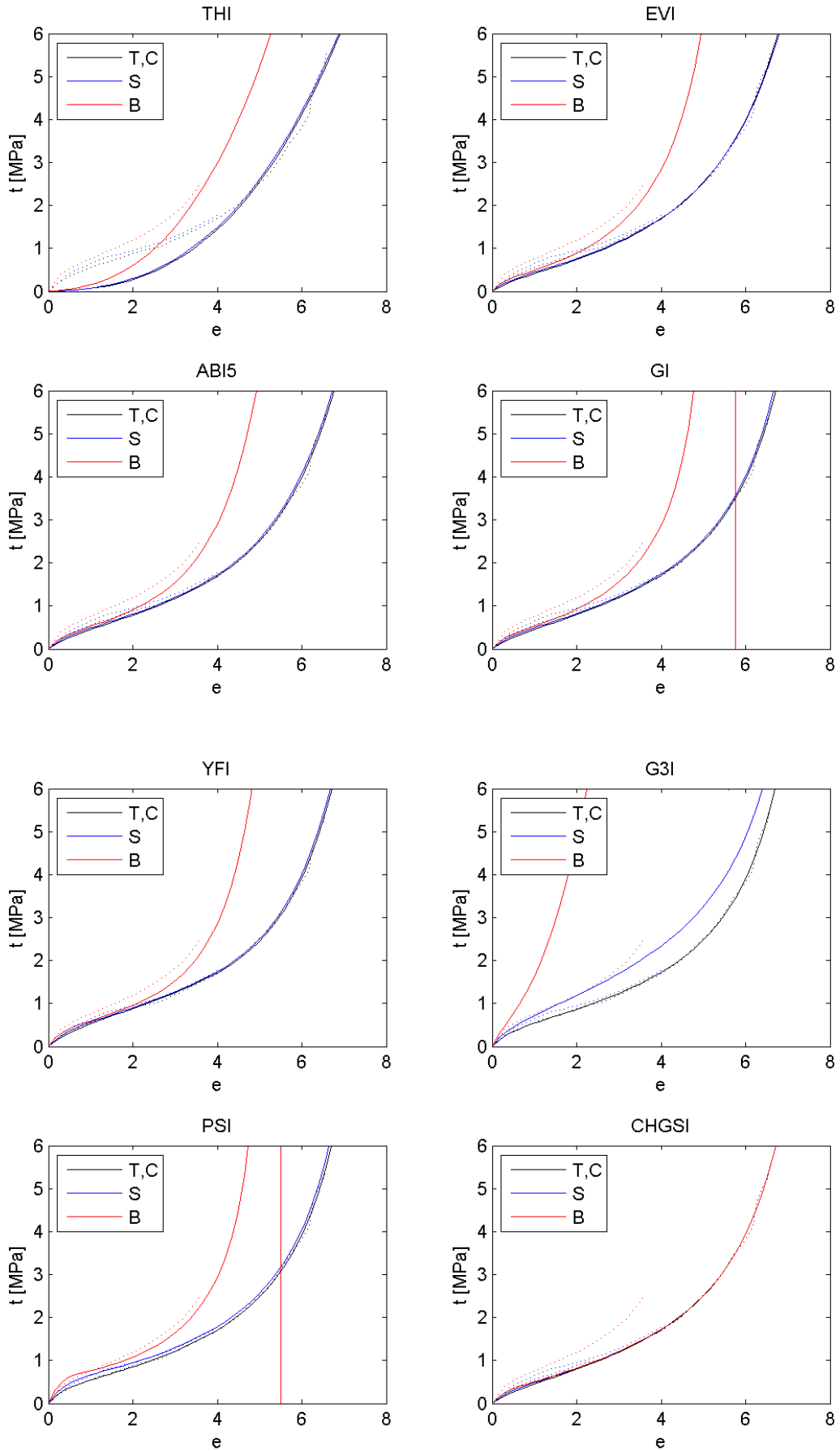


Figura B. 5 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 09 e grupo 10.

### B.1.2. Ajuste para Cisalhamento Puro

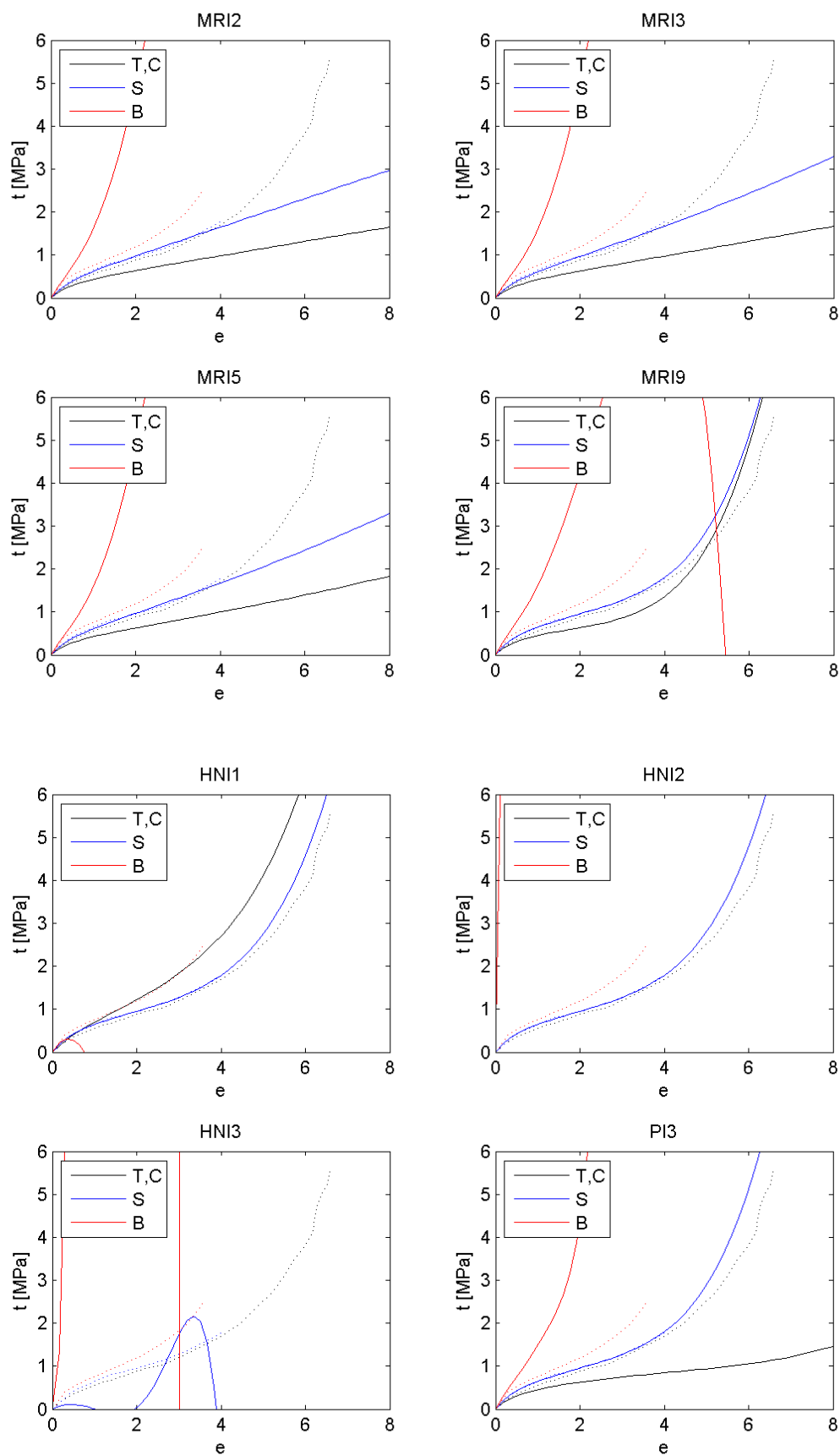


Figura B. 6 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 01 e grupo 02.

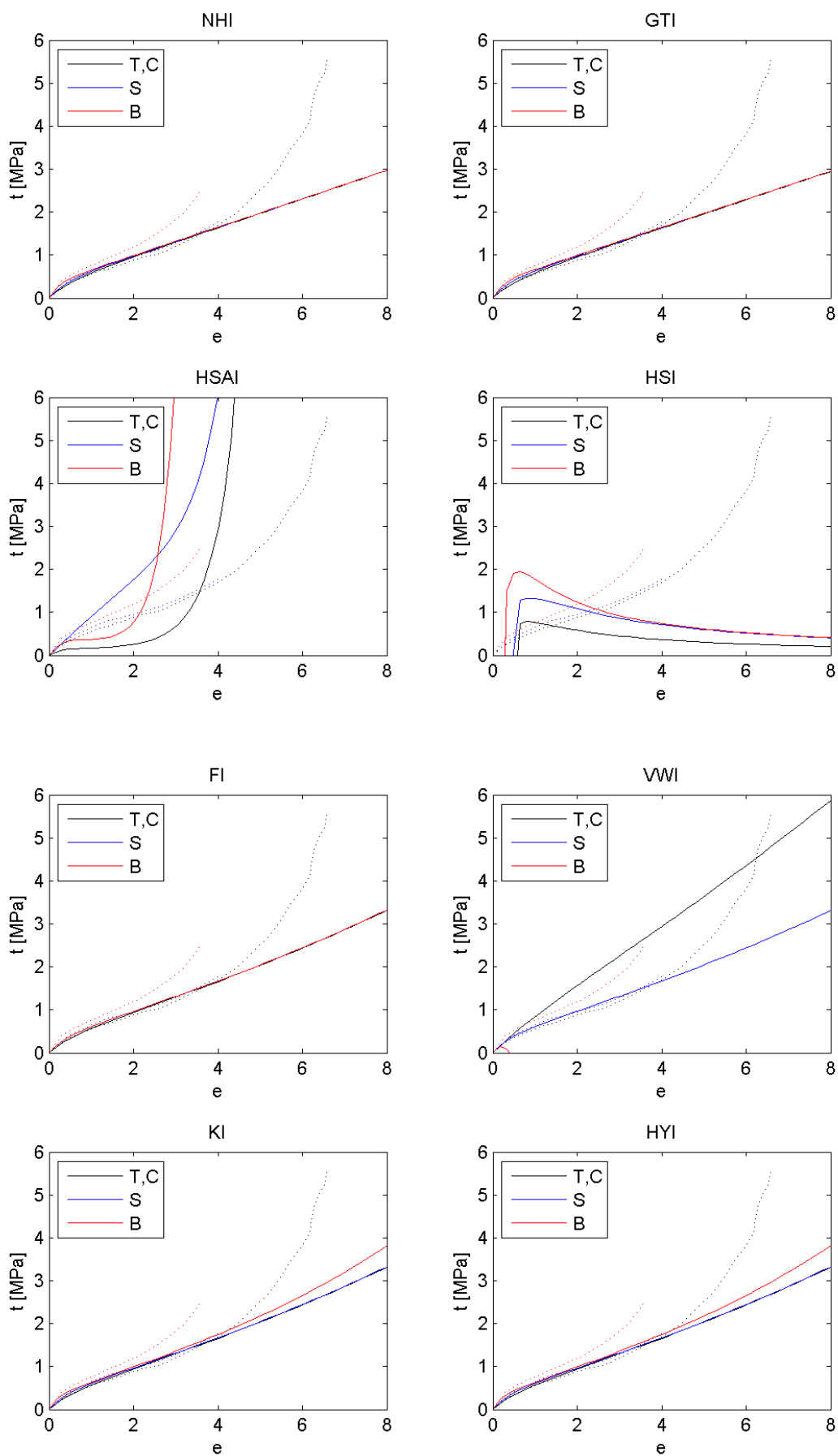


Figura B. 7 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 03 e grupo 04.

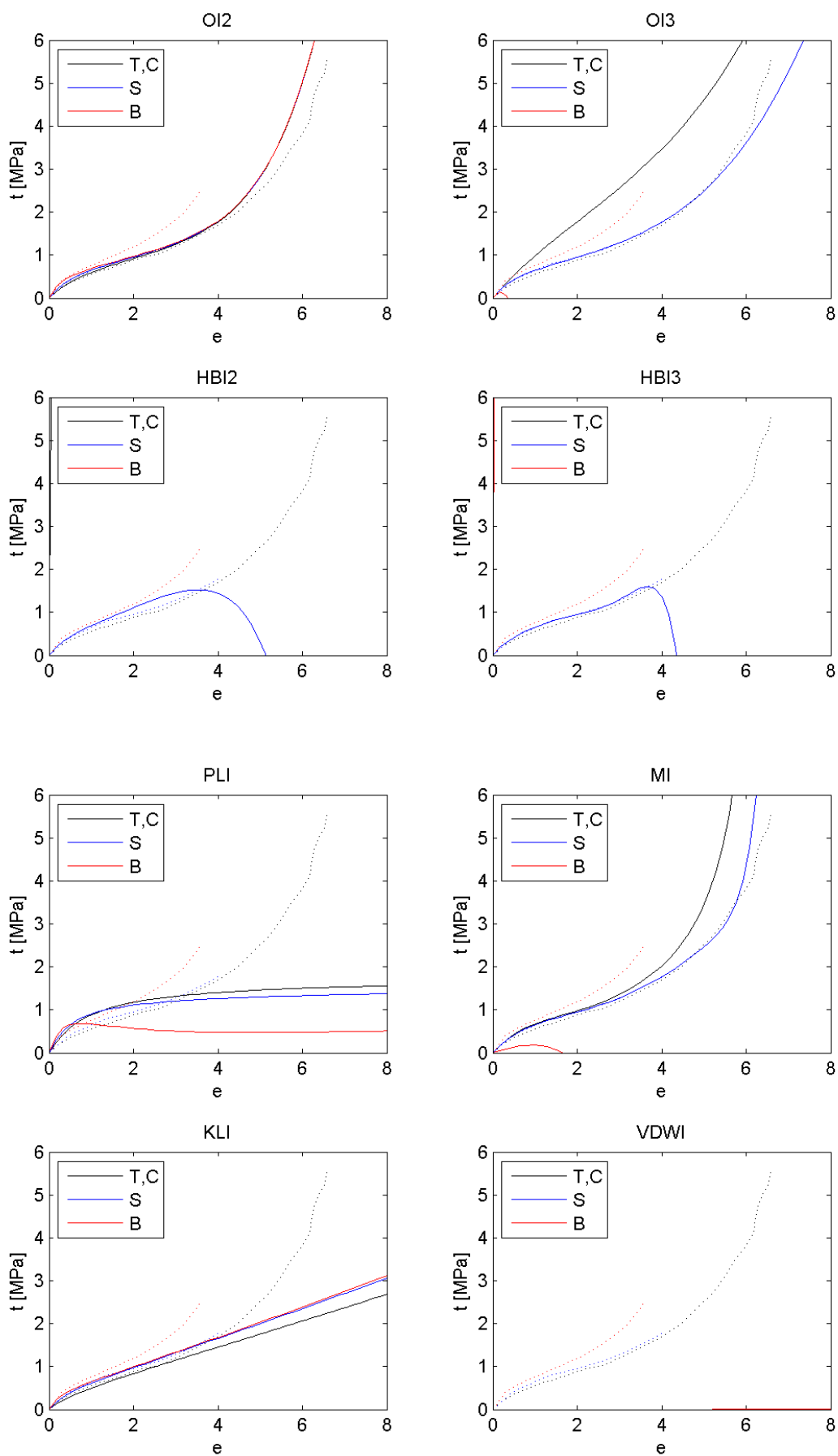


Figura B. 8 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 05 e grupo 06.



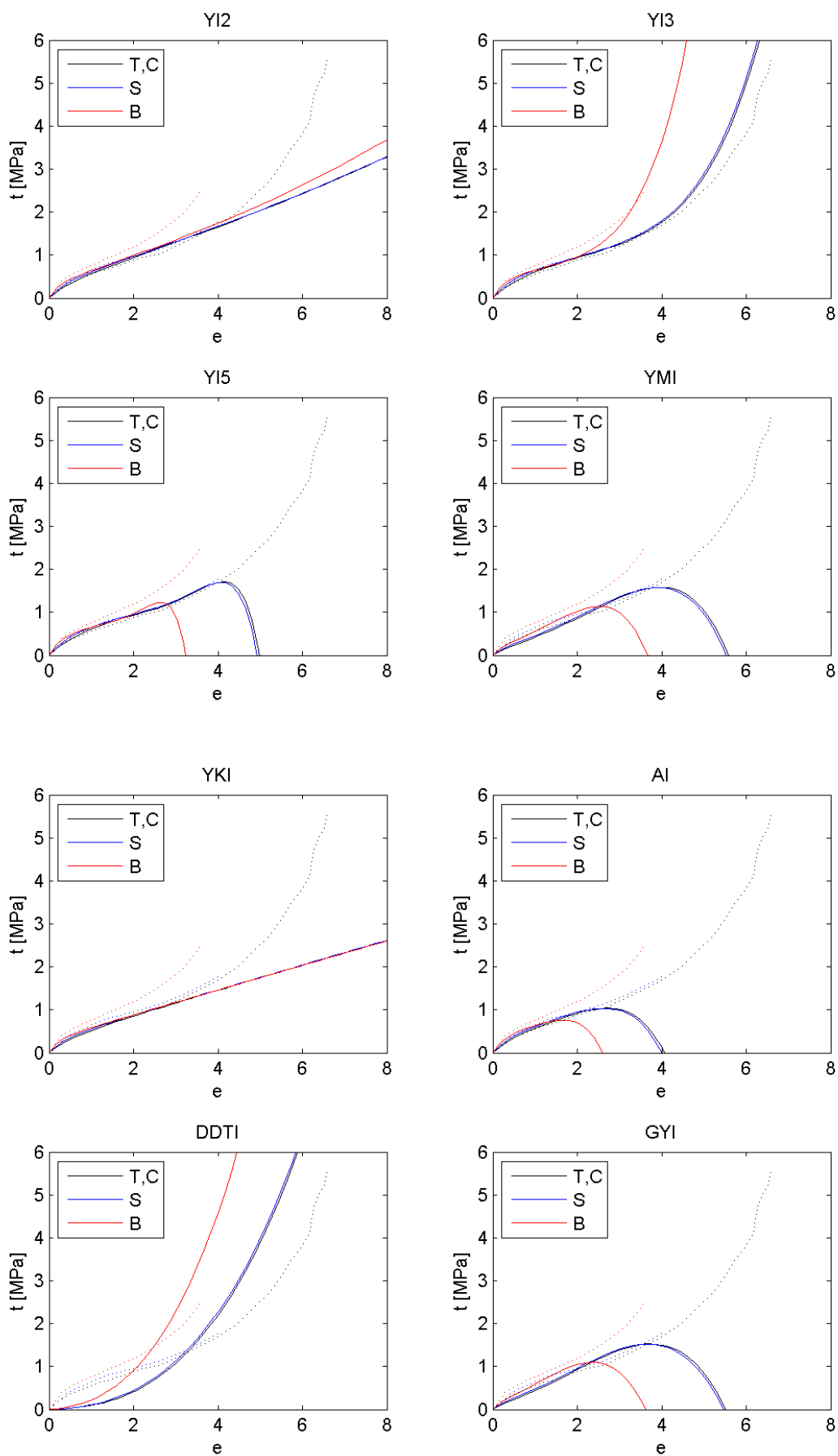


Figura B. 9 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 07 e grupo 08.

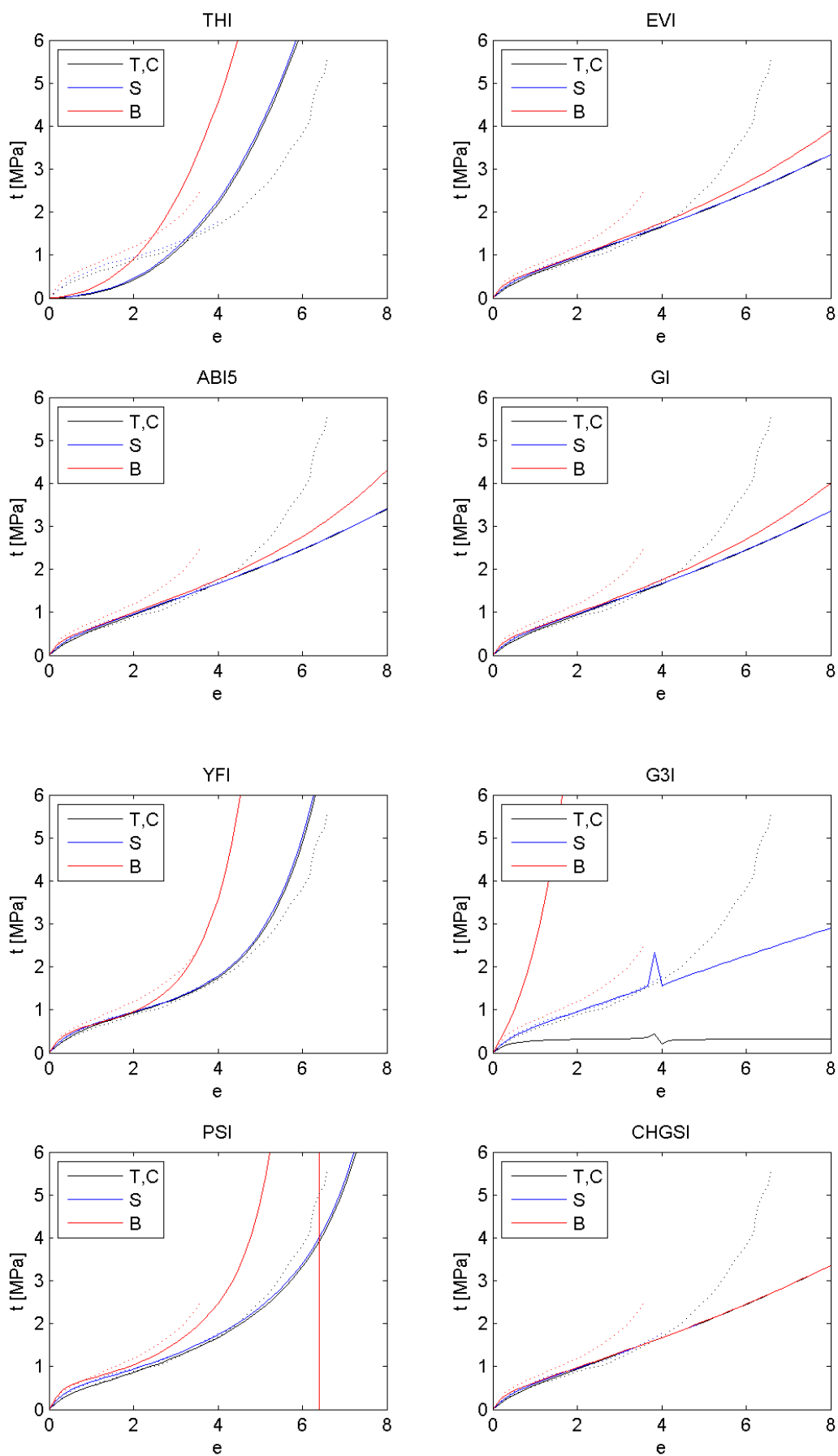


Figura B. 10 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 09 e grupo 10.

### B.1.3. Ajuste para Tração Biaxial

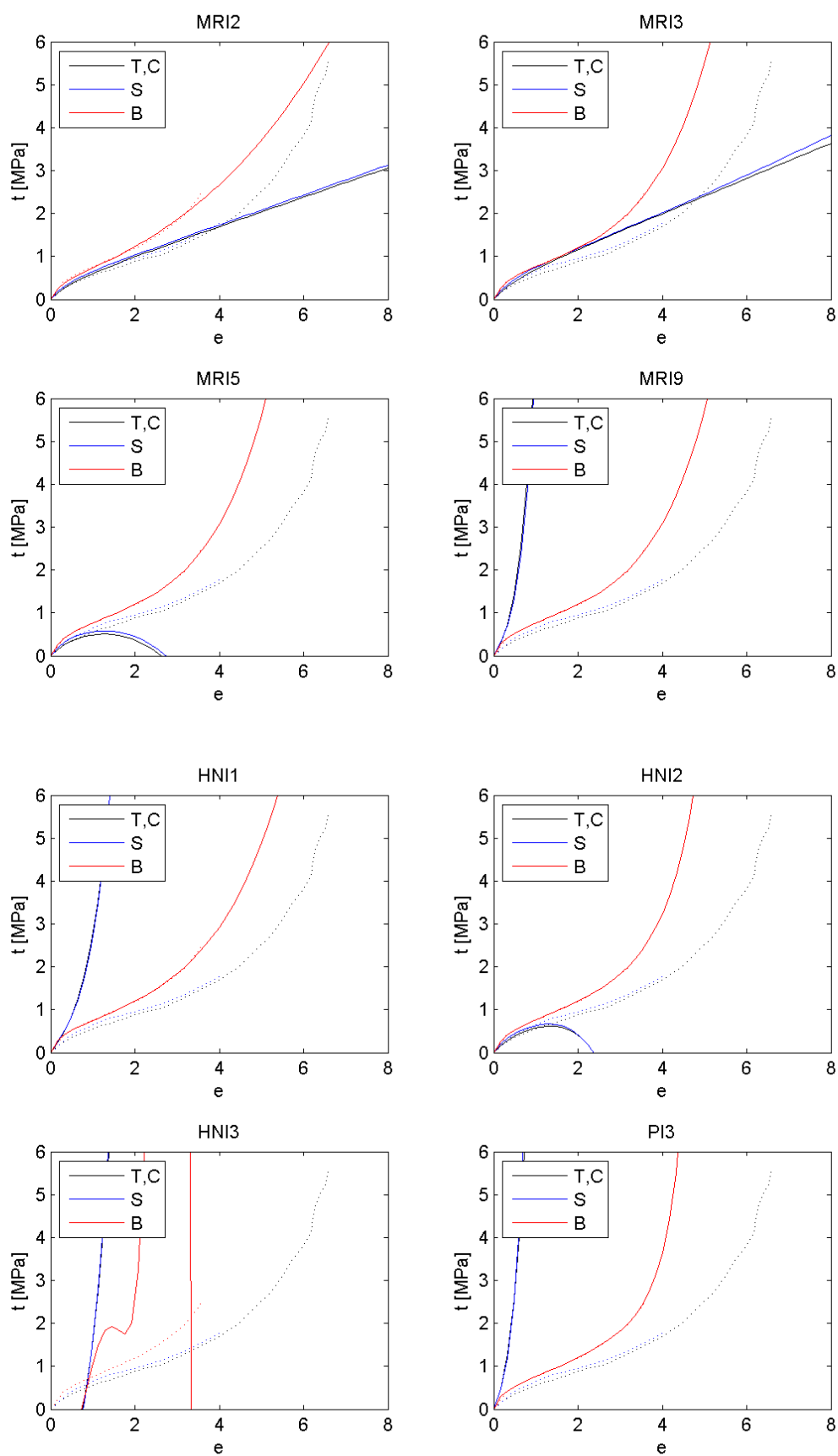


Figura B. 11 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 01 e grupo 2.

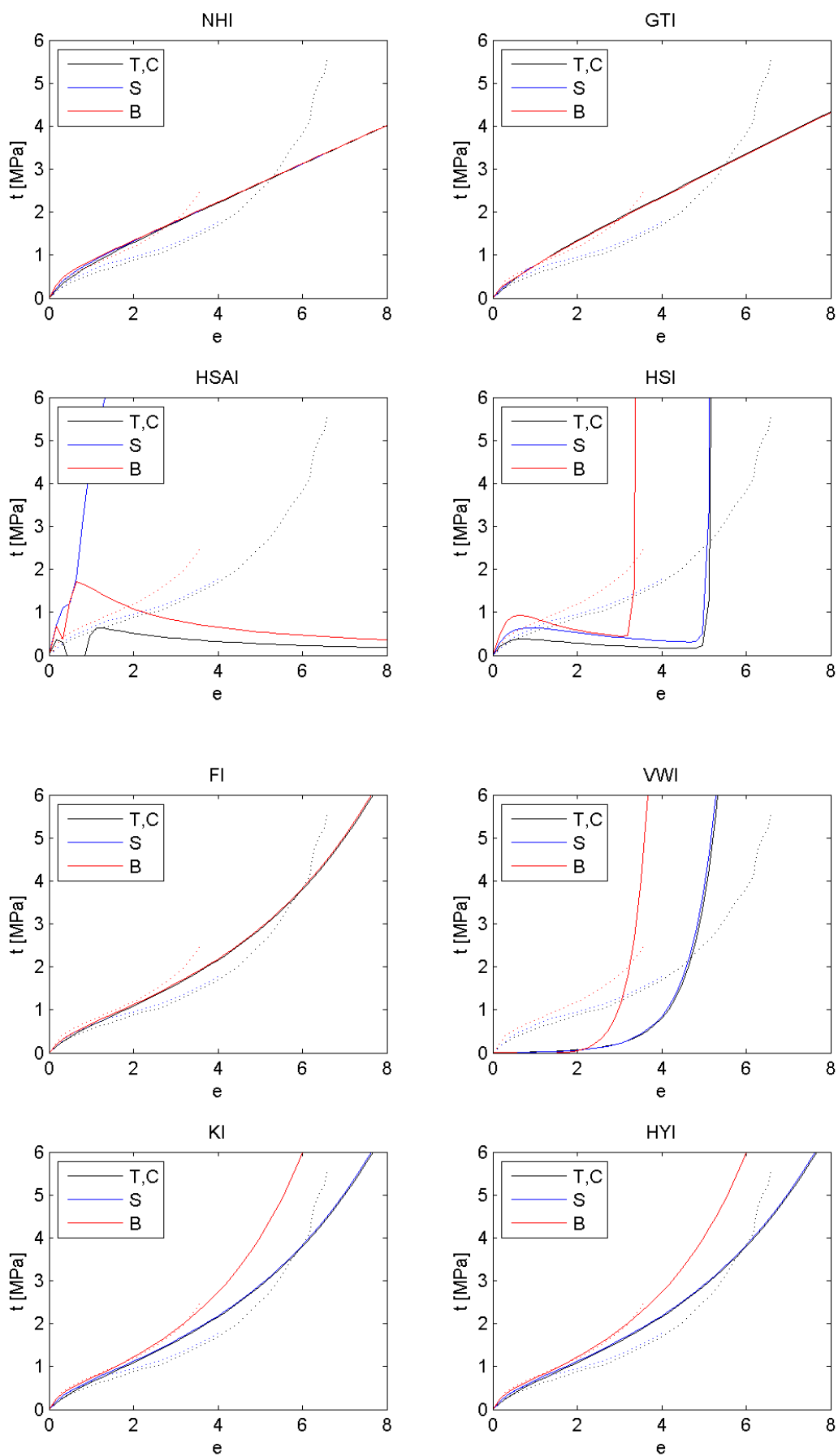


Figura B. 12 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 03 e grupo 04.

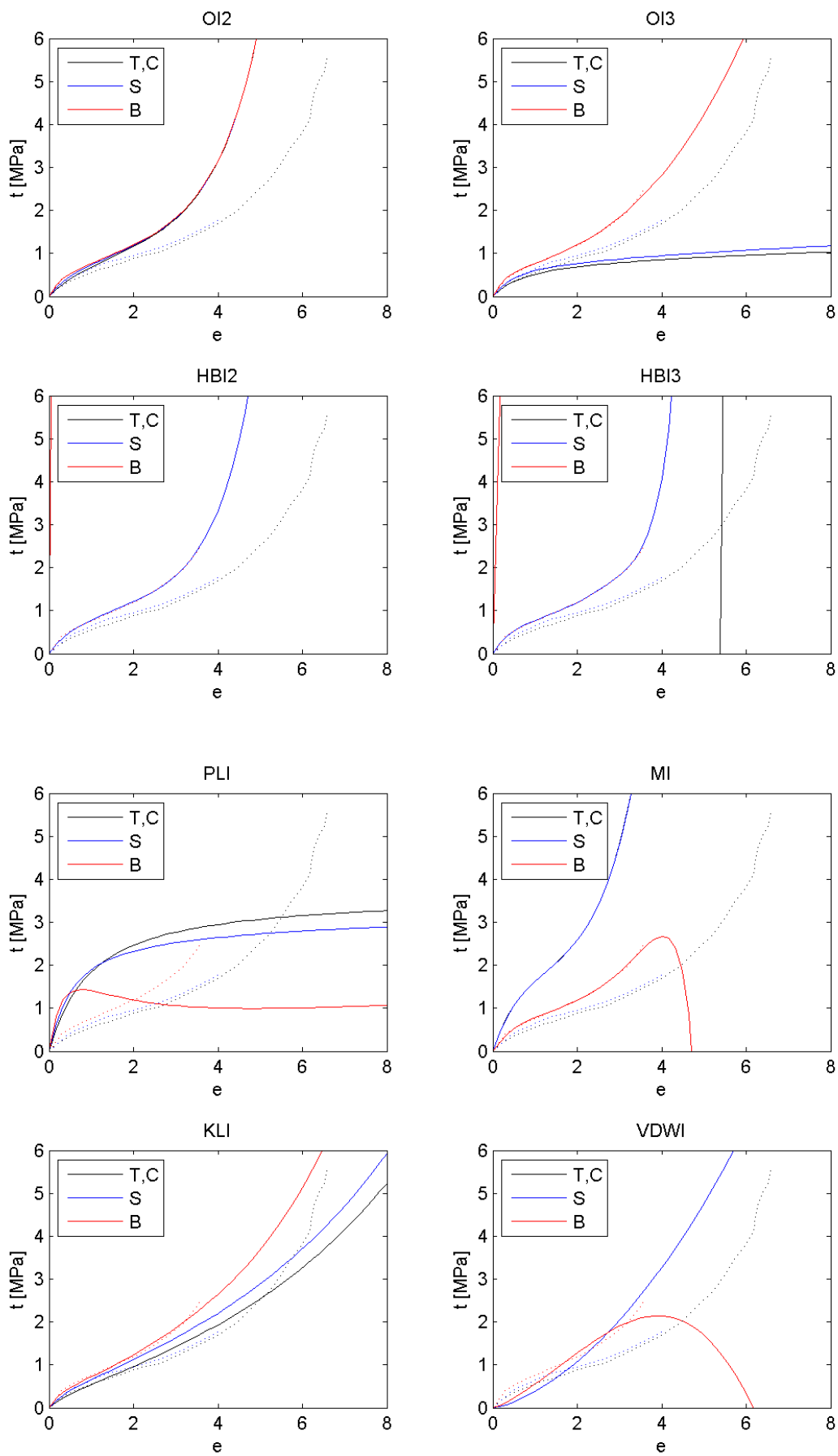


Figura B. 13 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 05 e grupo 06.

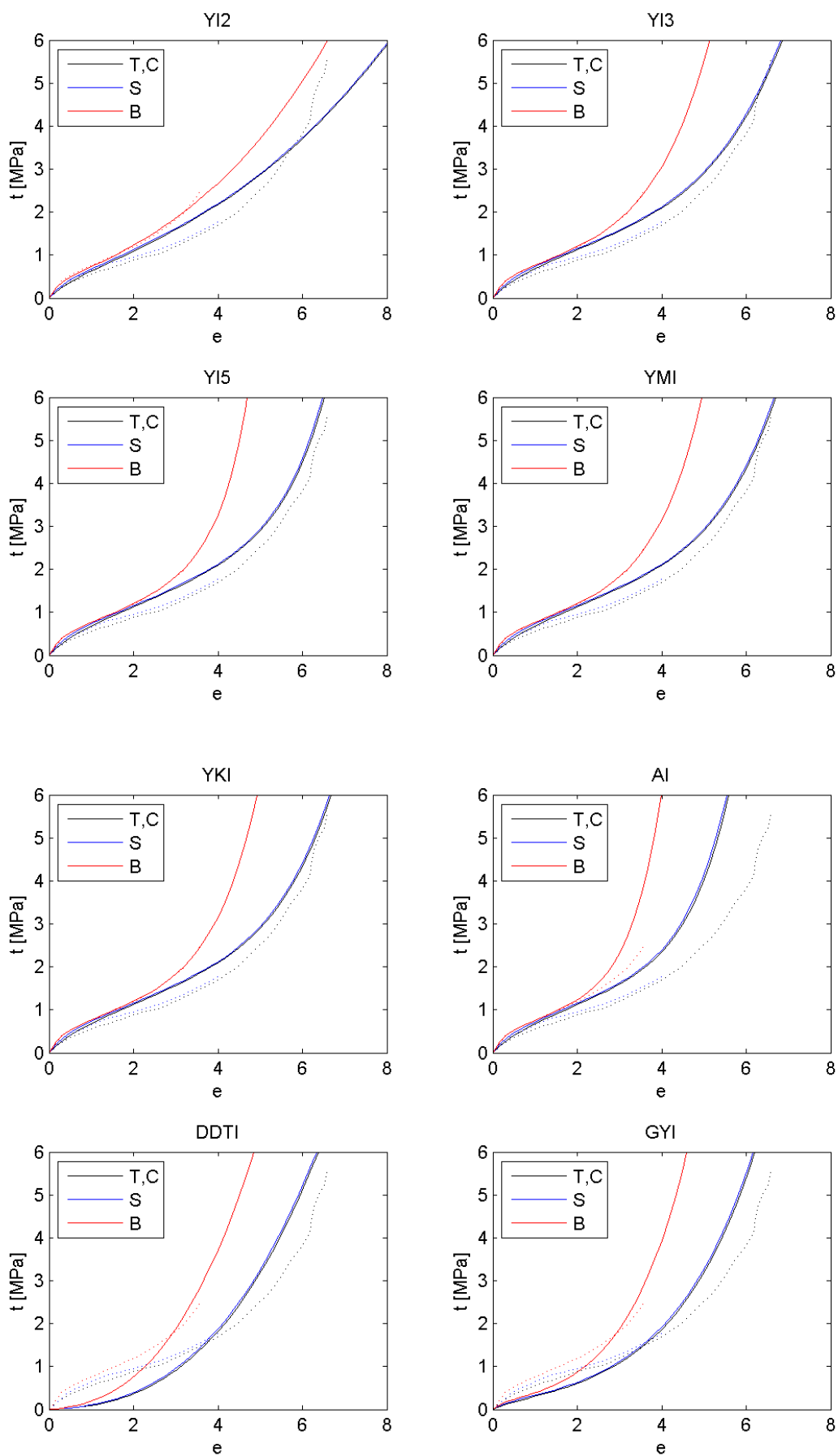


Figura B. 14 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 07 e grupo 08.

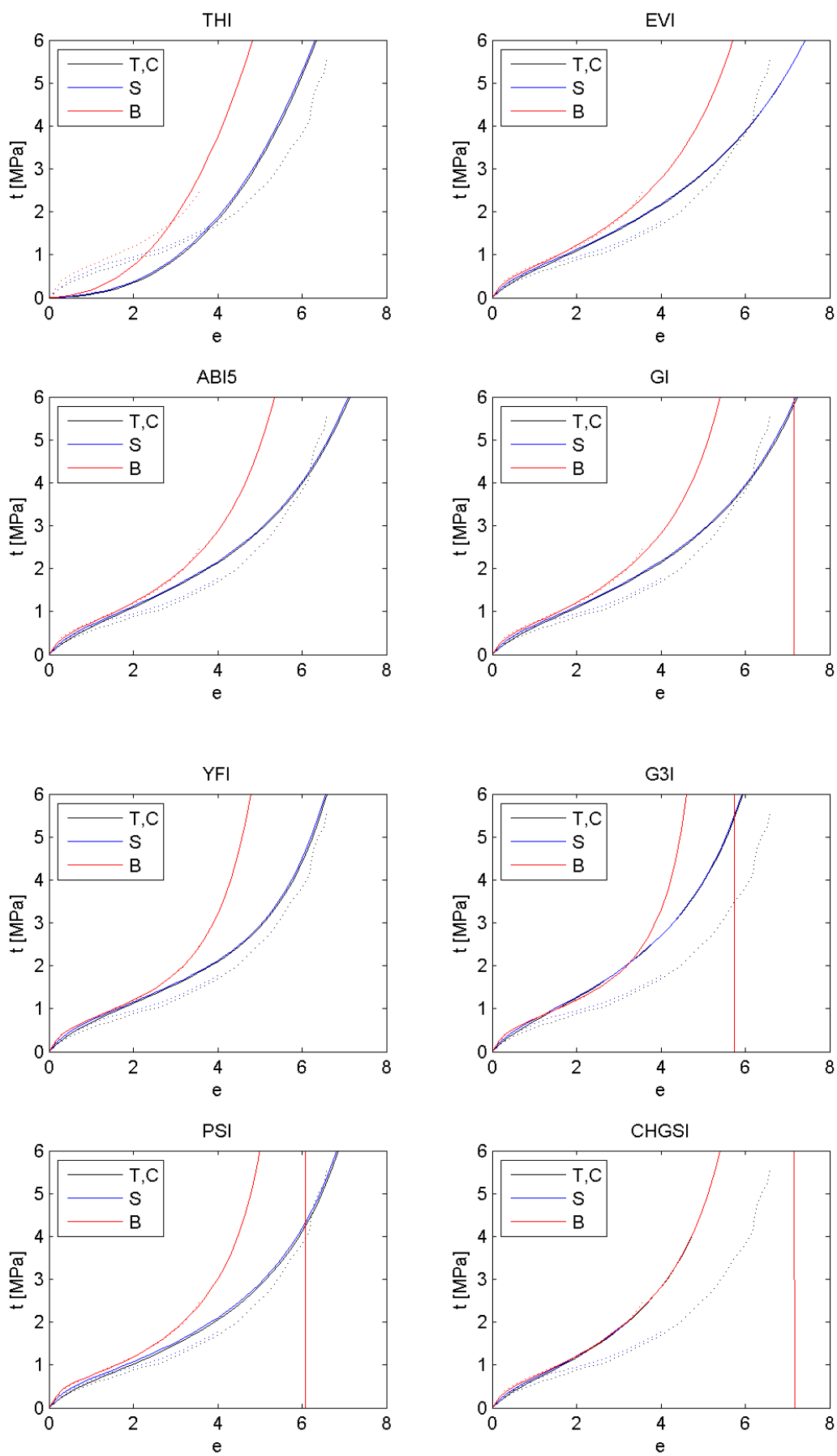


Figura B. 15 - Borracha natural (Treloar). Modelos grupo 09 e grupo 10.

## B.2. Caso de Estudo: Borracha Natural – Pequenas Deformações

### B.2.1. Ajustando para Tração Uniaxial

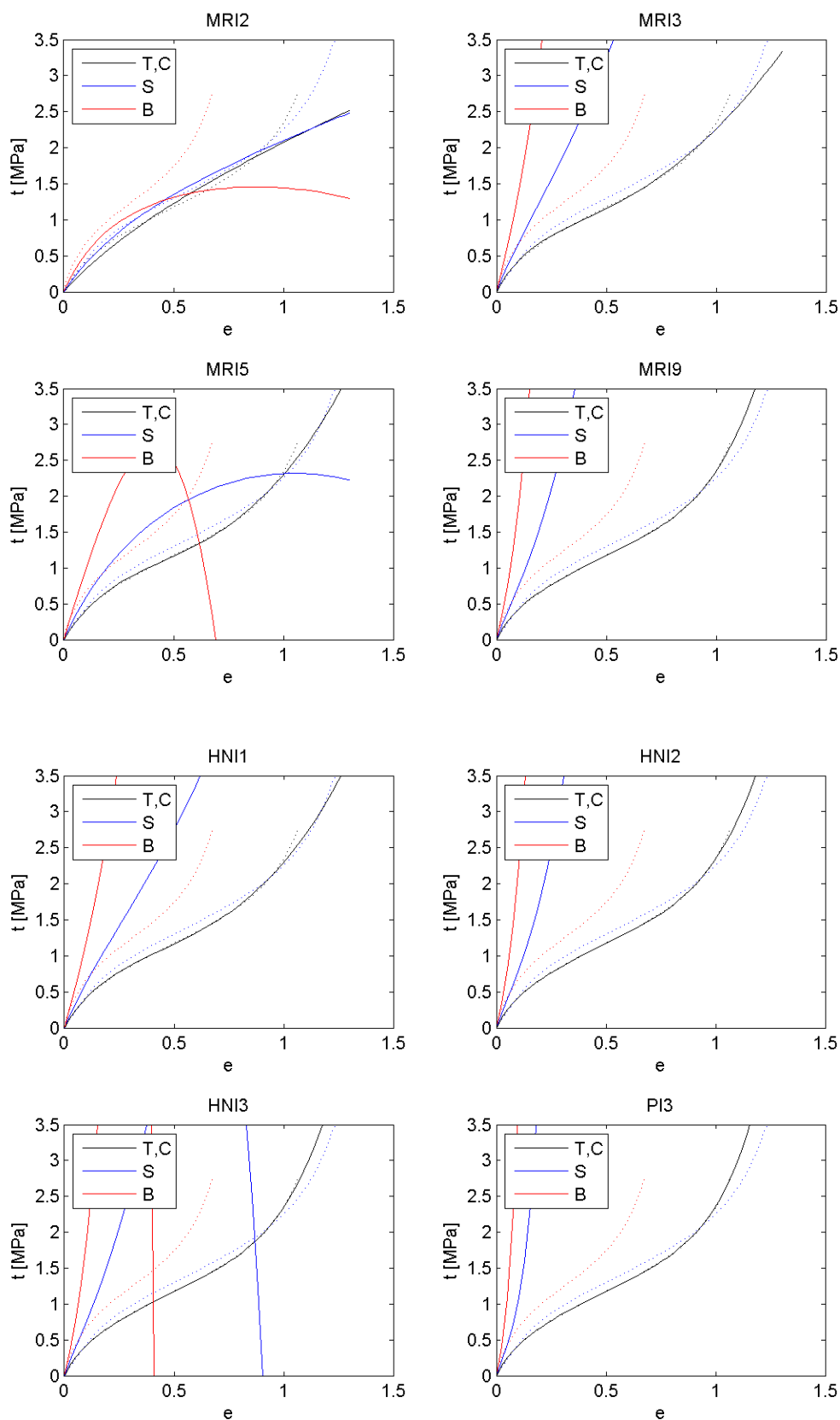


Figura B. 16 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 01 e grupo 02.



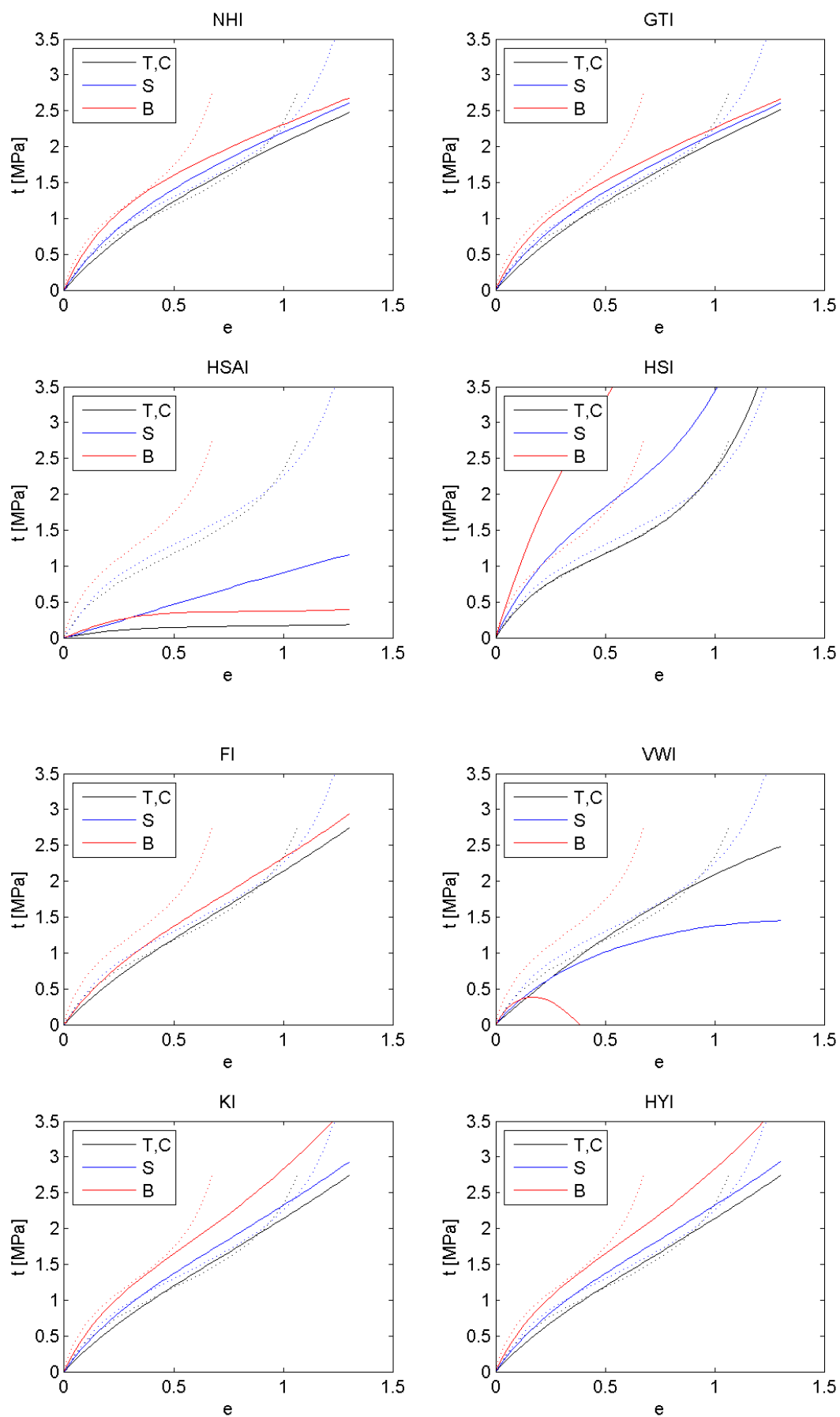


Figura B. 17 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 03 e grupo 04.

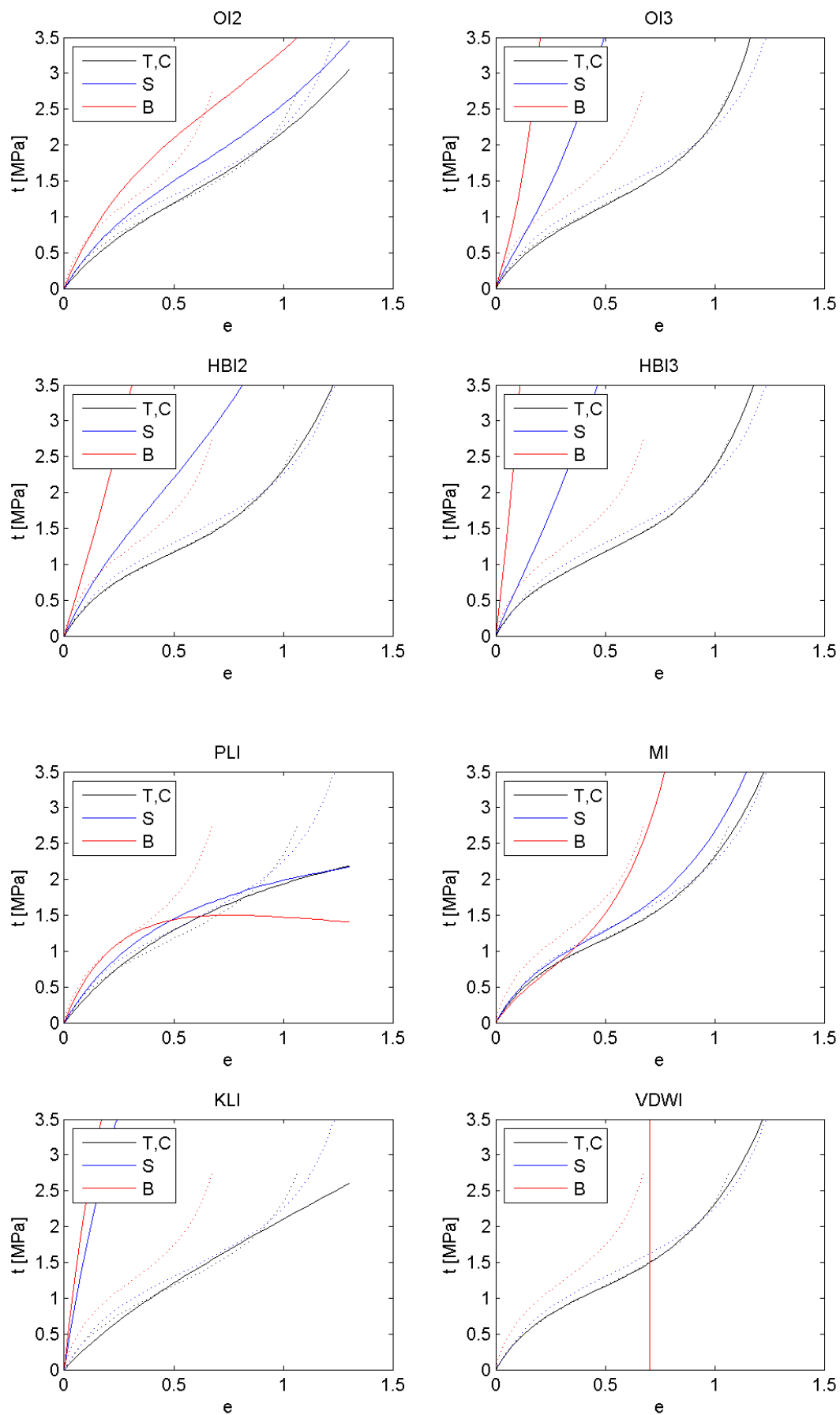


Figura B. 18 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 05 e grupo 06.

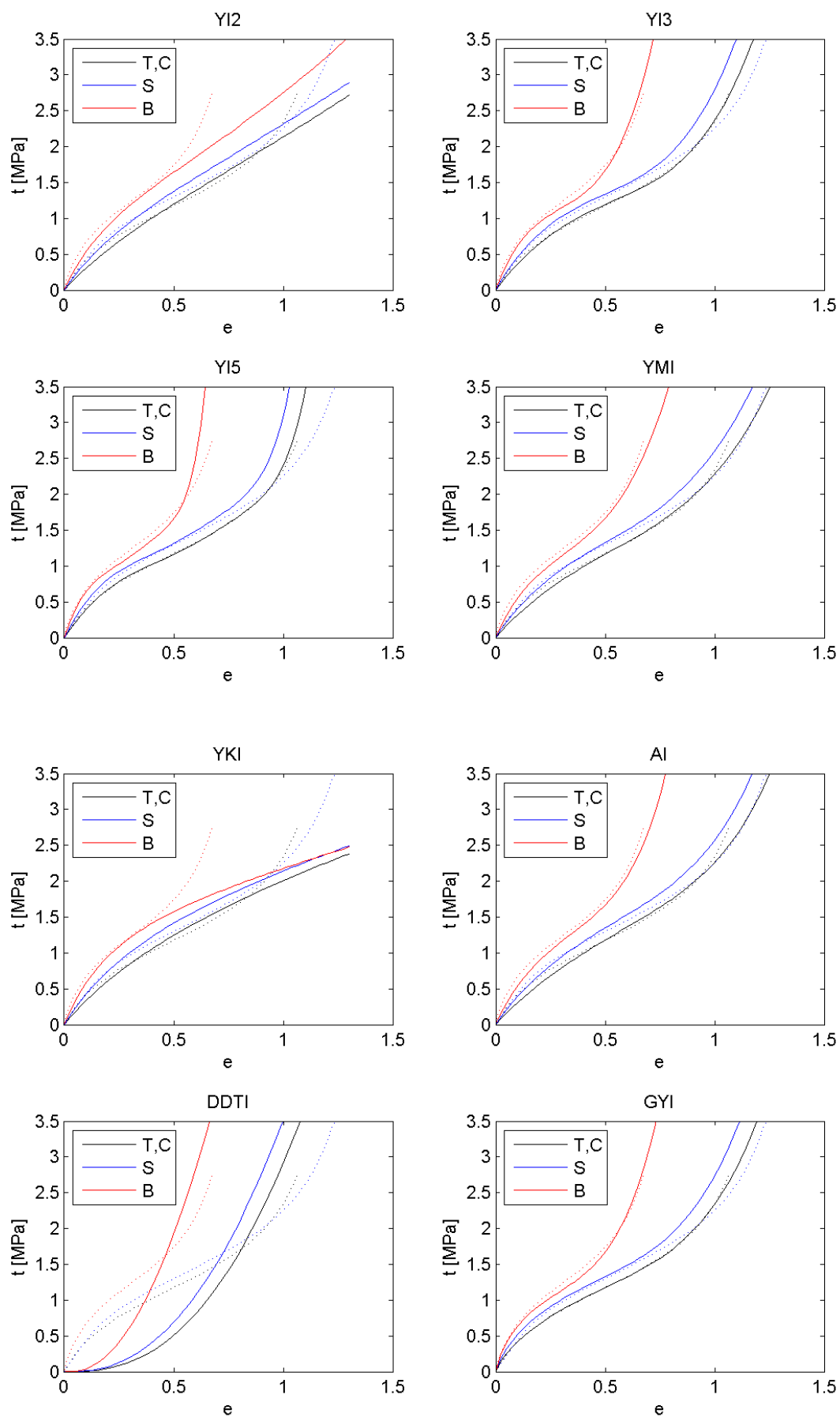


Figura B. 19 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 07 e grupo 08.

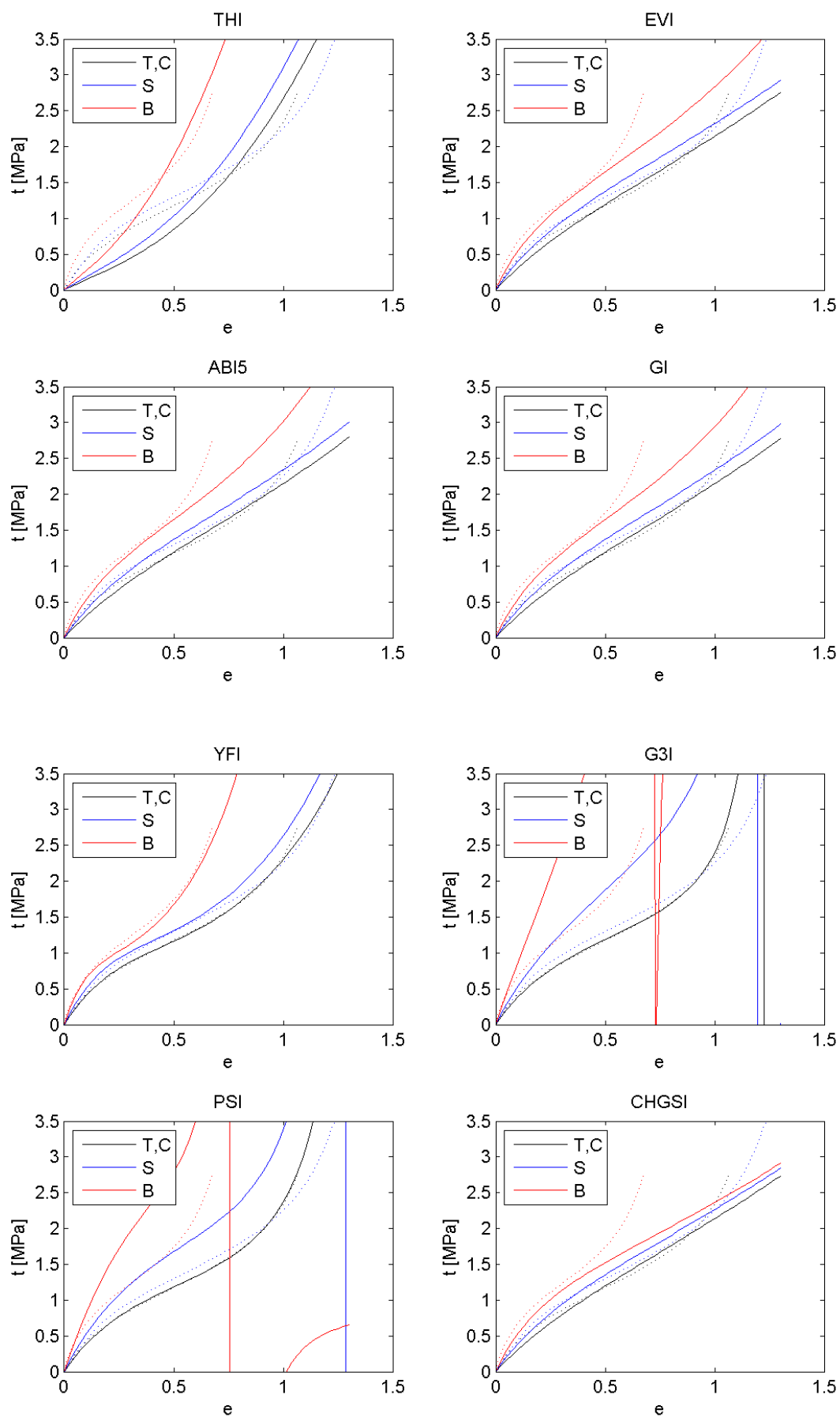


Figura B. 20 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 09 e grupo 10.

## B.2.2. Ajuste para Cisalhamento Puro

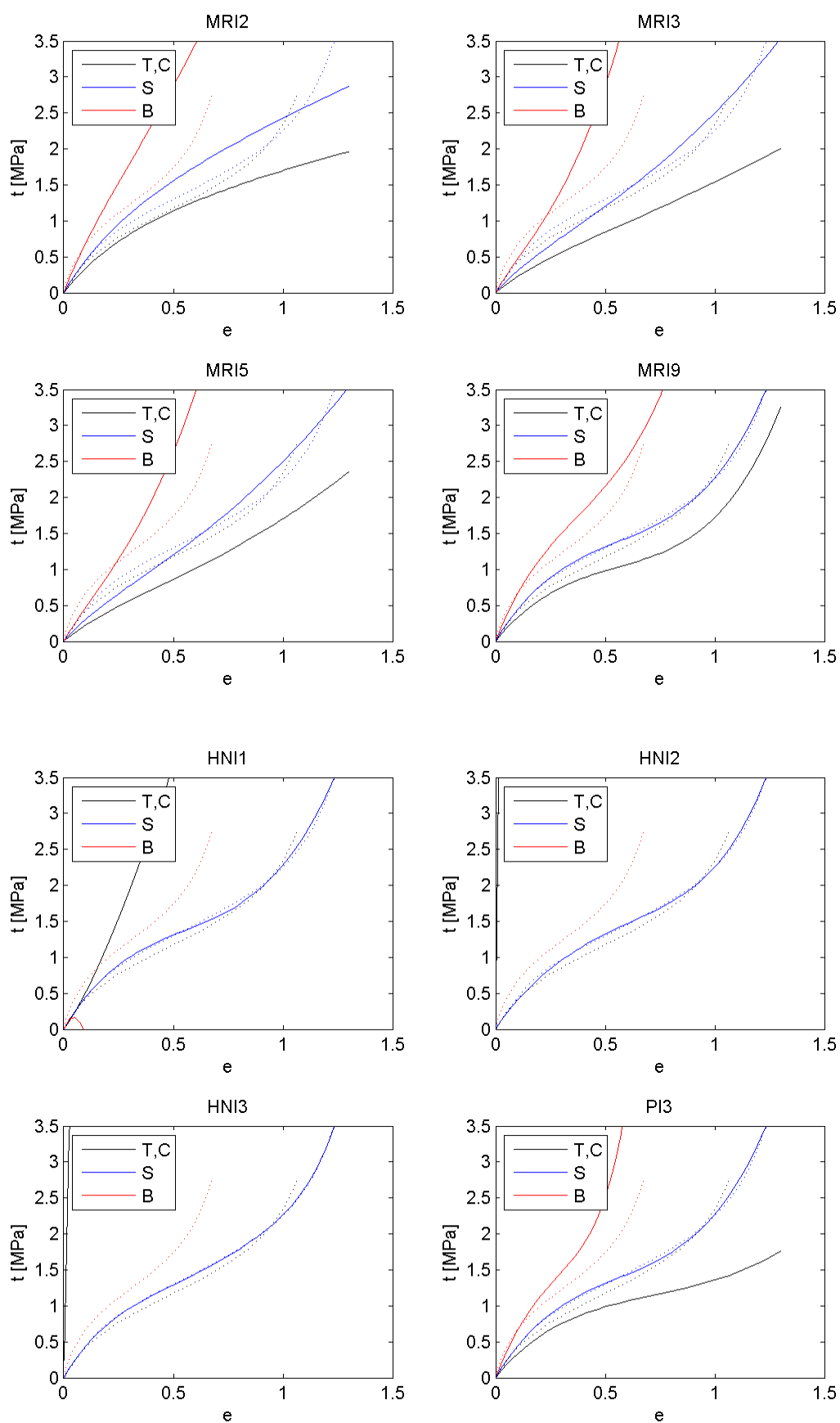


Figura B. 21 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 01 e grupo 02.

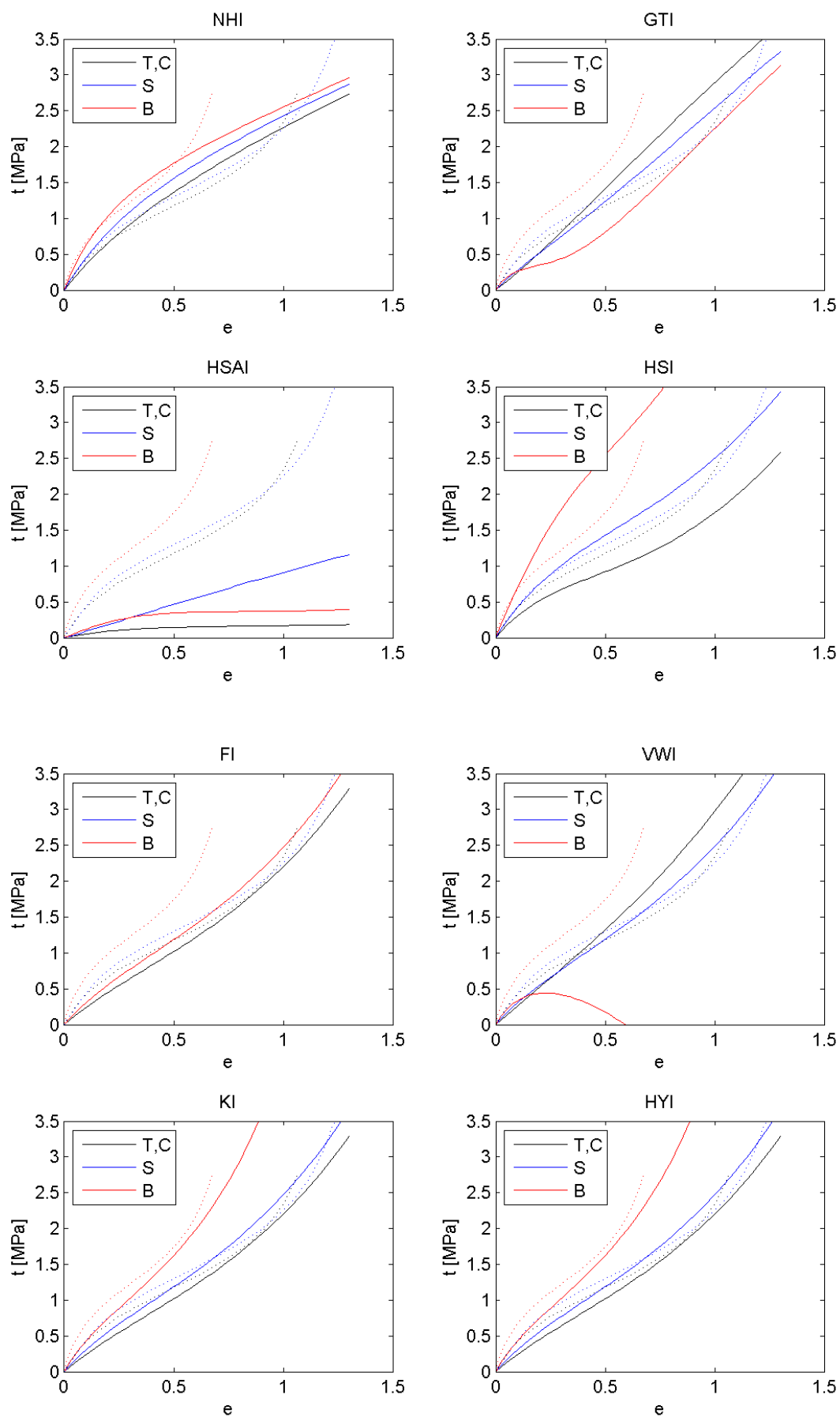


Figura B. 22 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 03 e grupo 04.

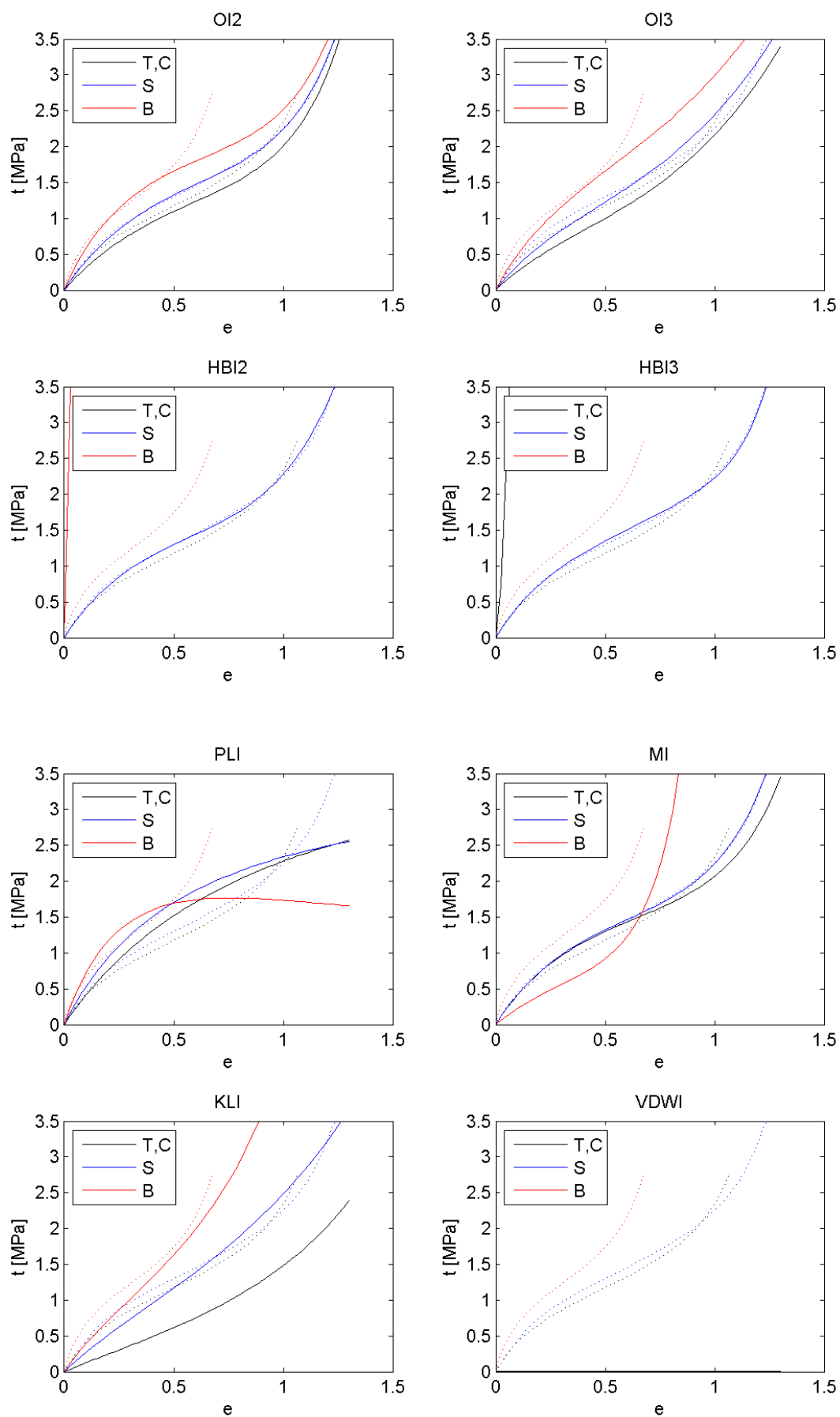


Figura B. 23 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 05 e grupo 06.

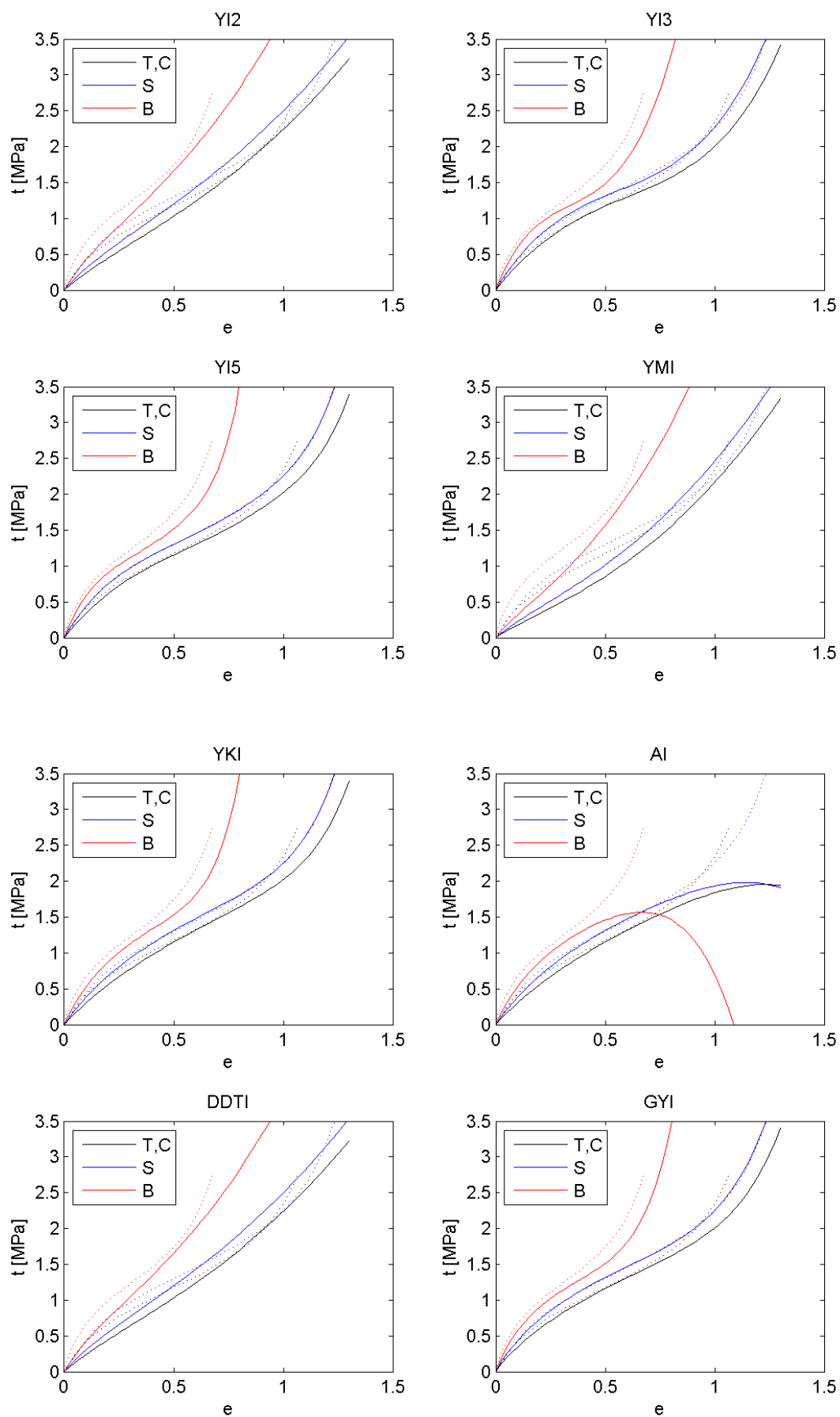


Figura B. 24 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 07 e grupo 08.



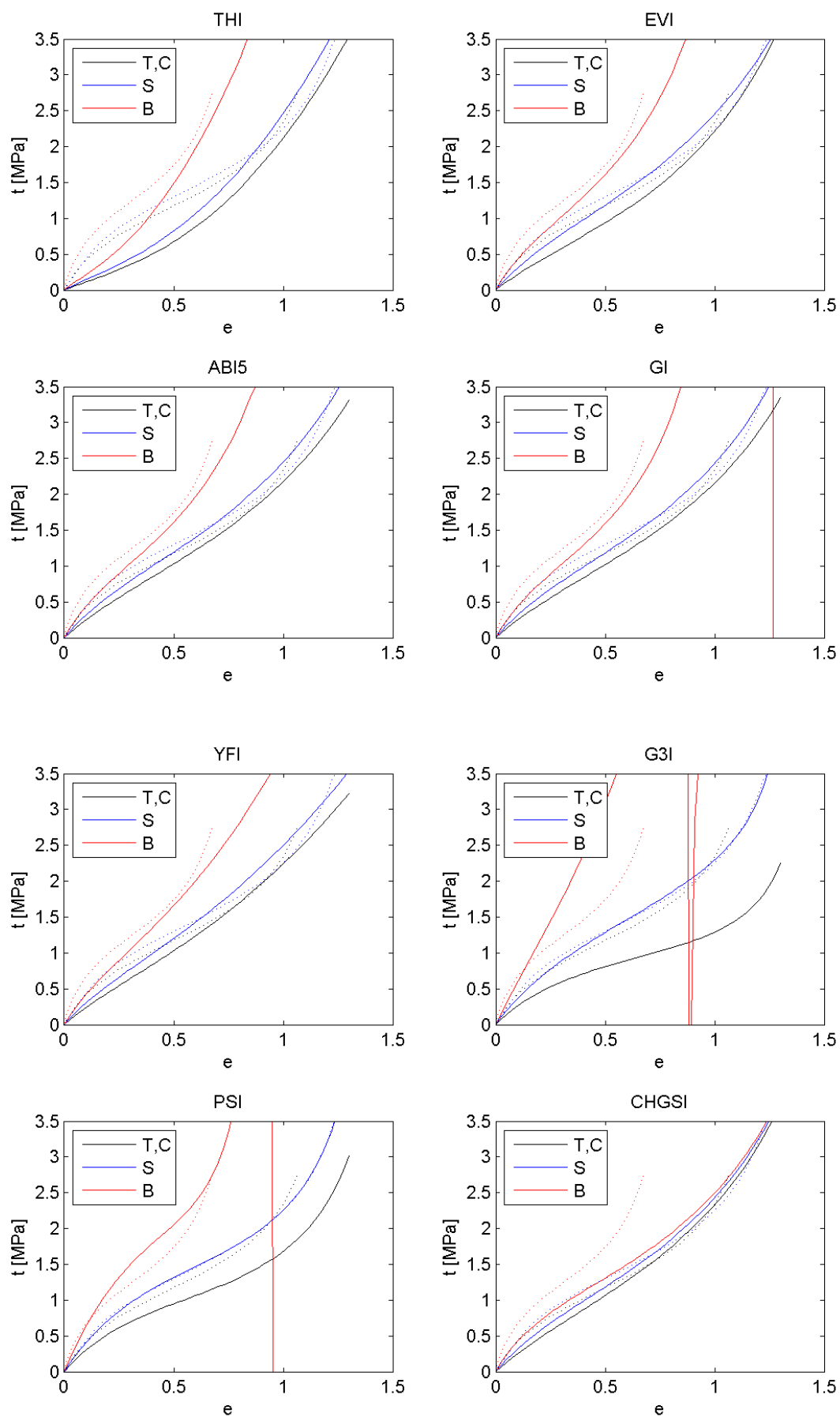


Figura B. 25 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 09 e grupo 10.

### B.2.3. Ajuste para Tração Biaxial

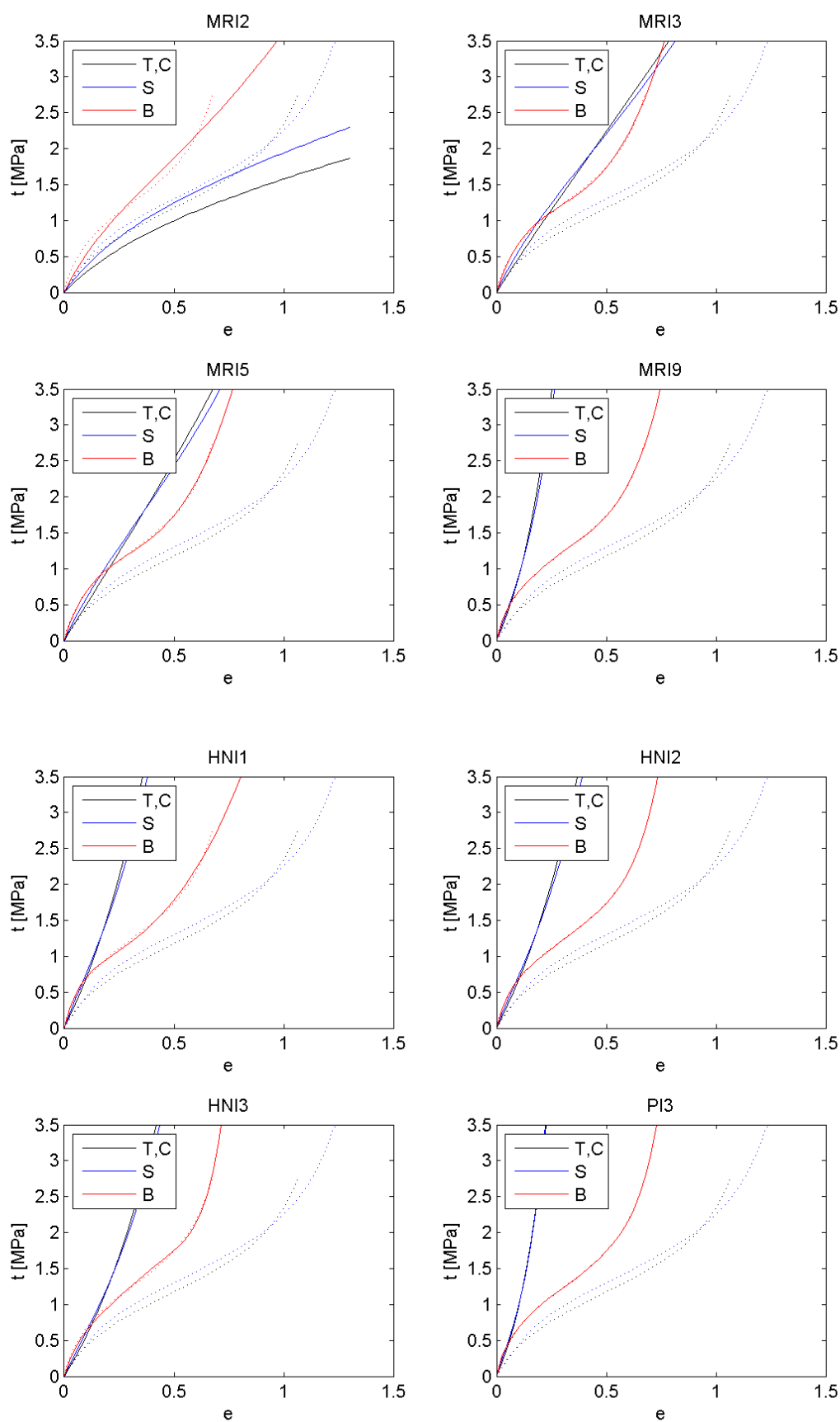


Figura B. 26 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 01 e grupo 02.

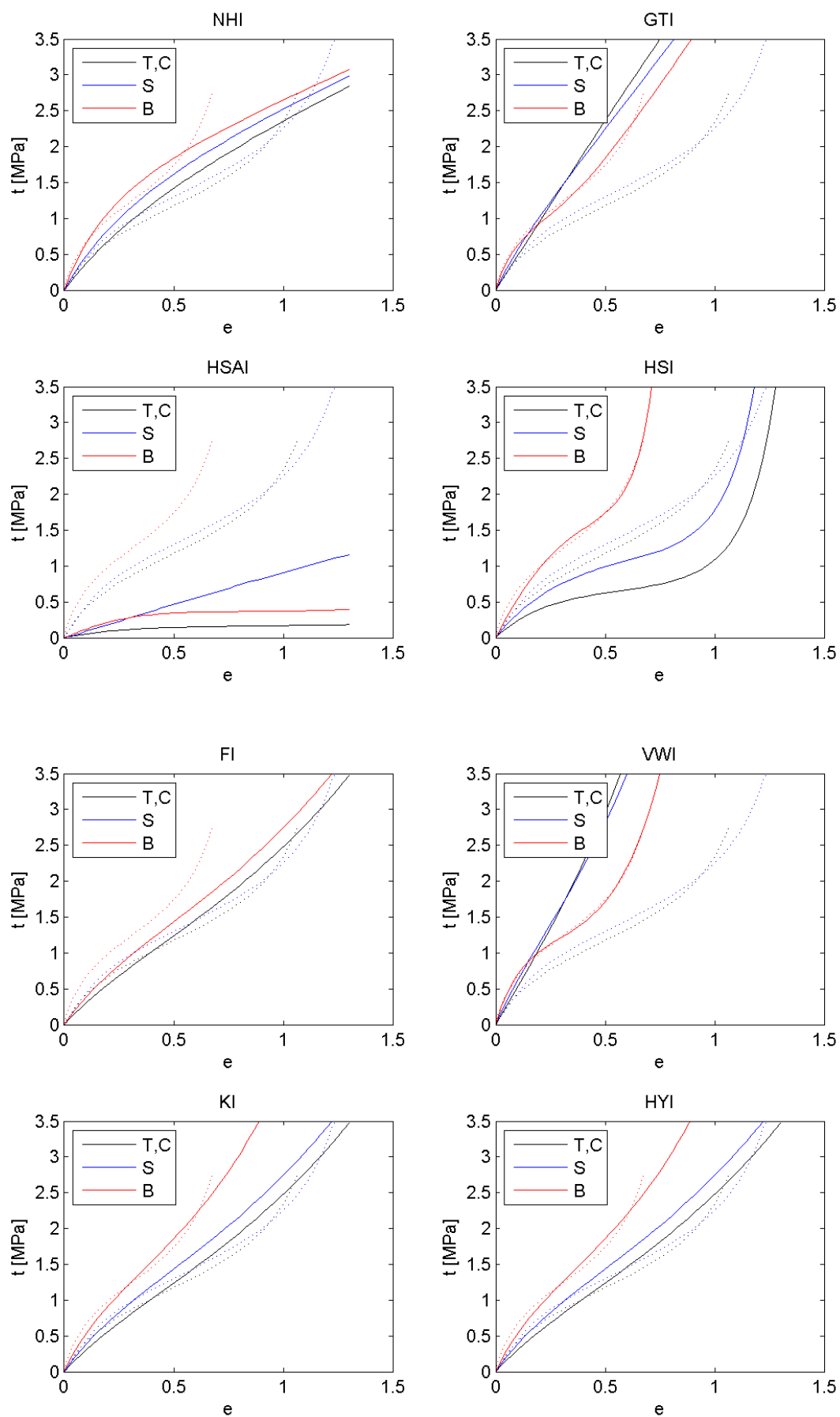


Figura B. 27 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 03 e grupo 04.

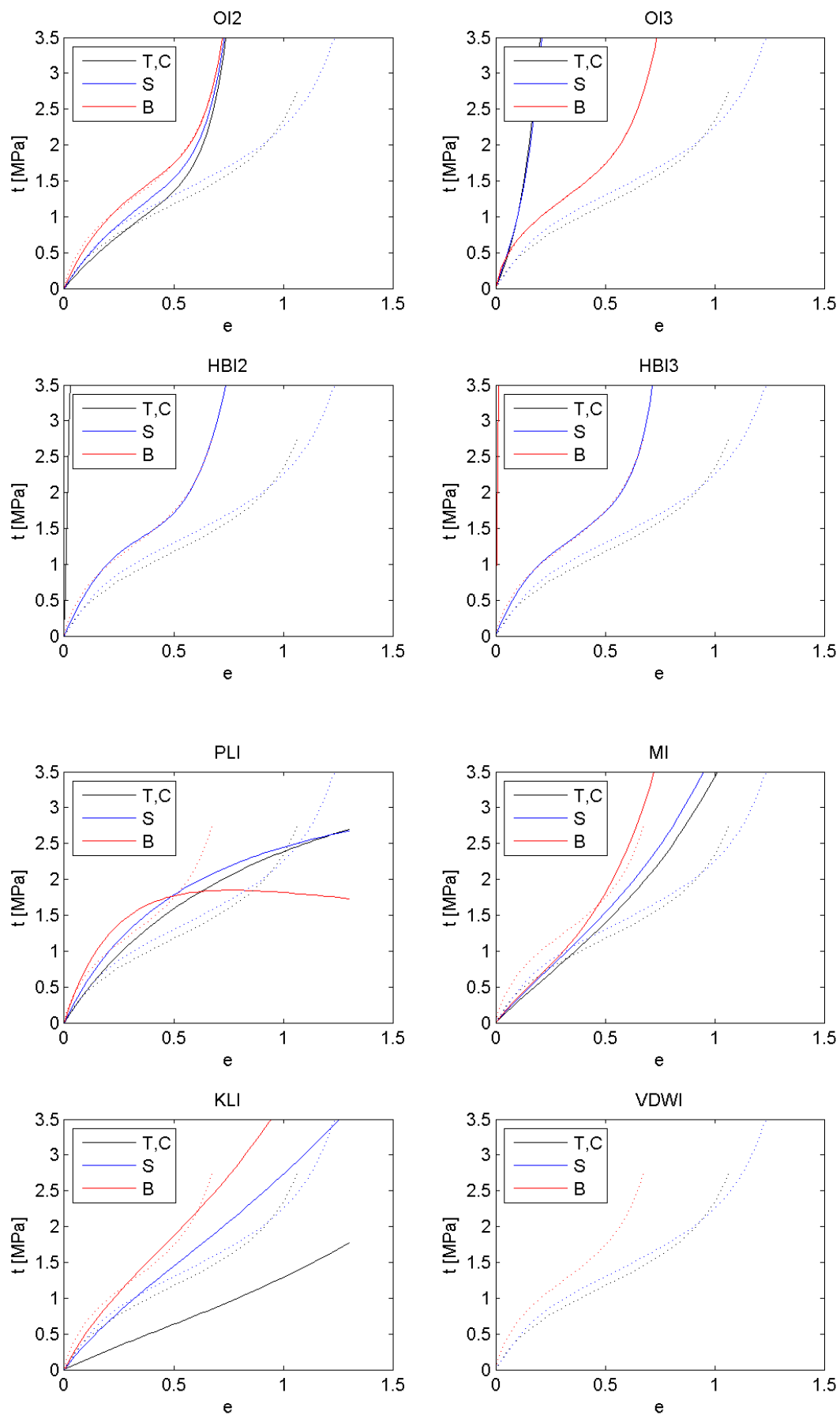


Figura B. 28 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 05 e grupo 06.

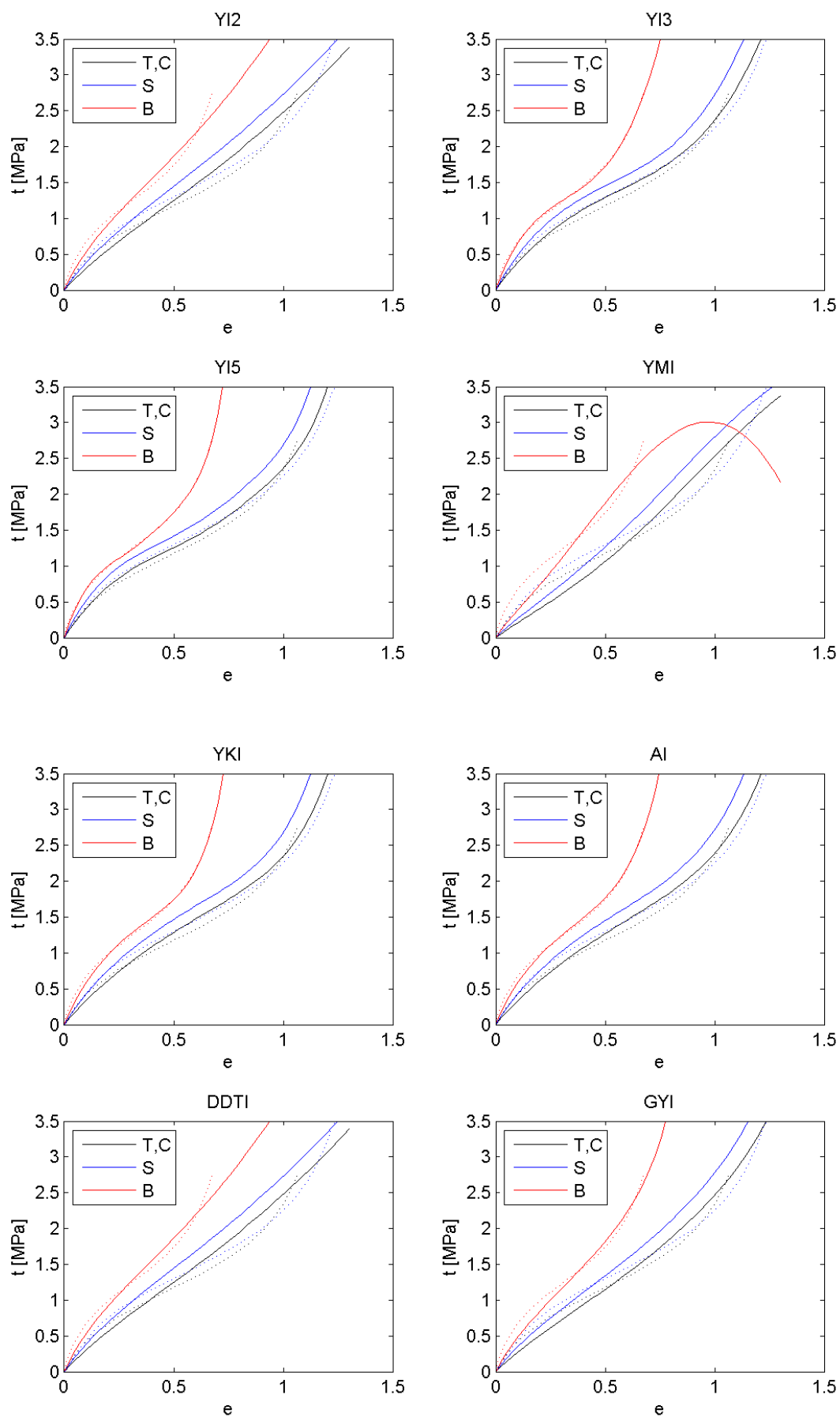


Figura B. 29 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 07 e grupo 08.

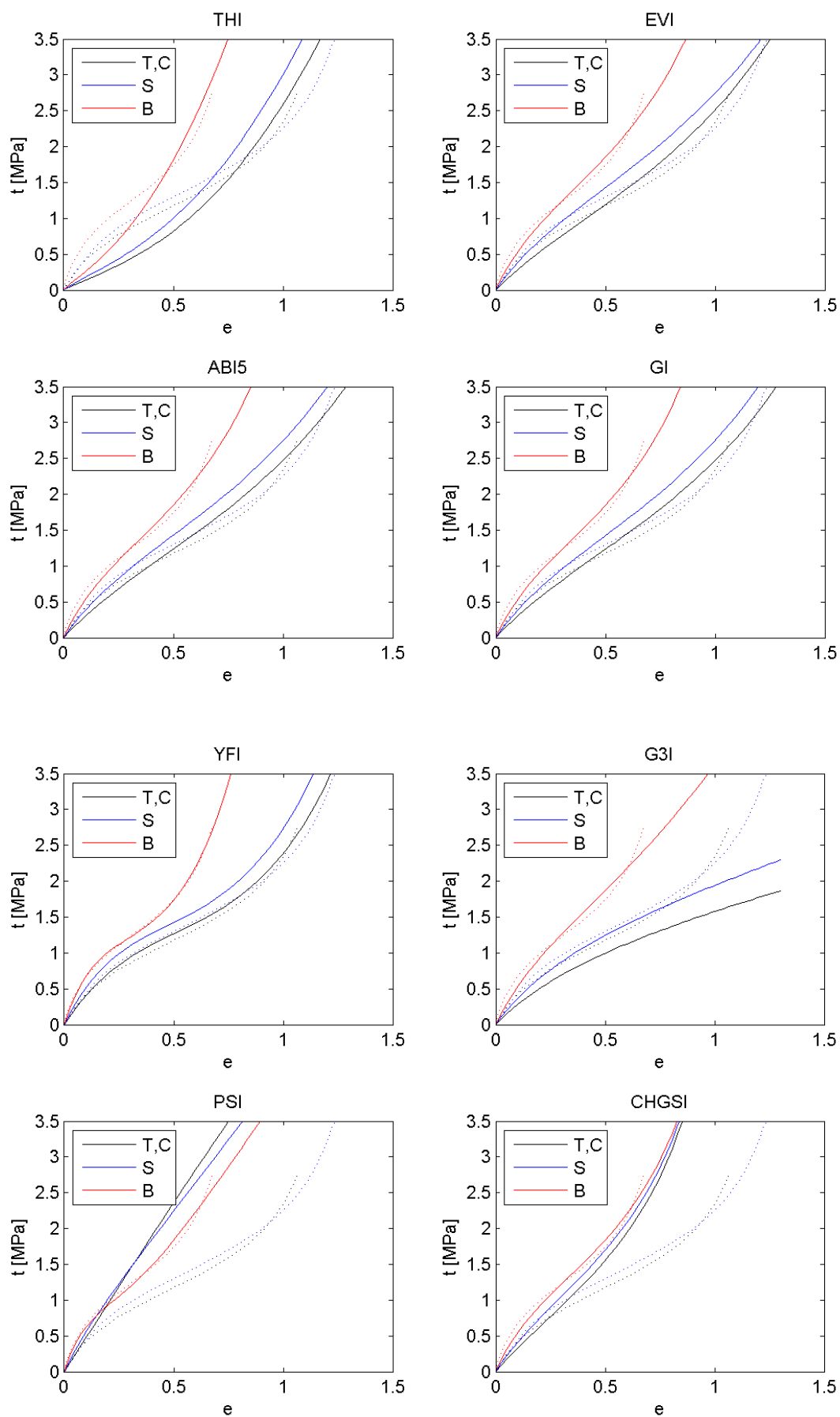


Figura B. 30 - Borracha natural (NR55). Modelos grupo 09 e grupo 10.

### B.3. Caso de Estudo: Silicone – MED4950

#### B.3.1. Ajuste para Tração Uniaxial

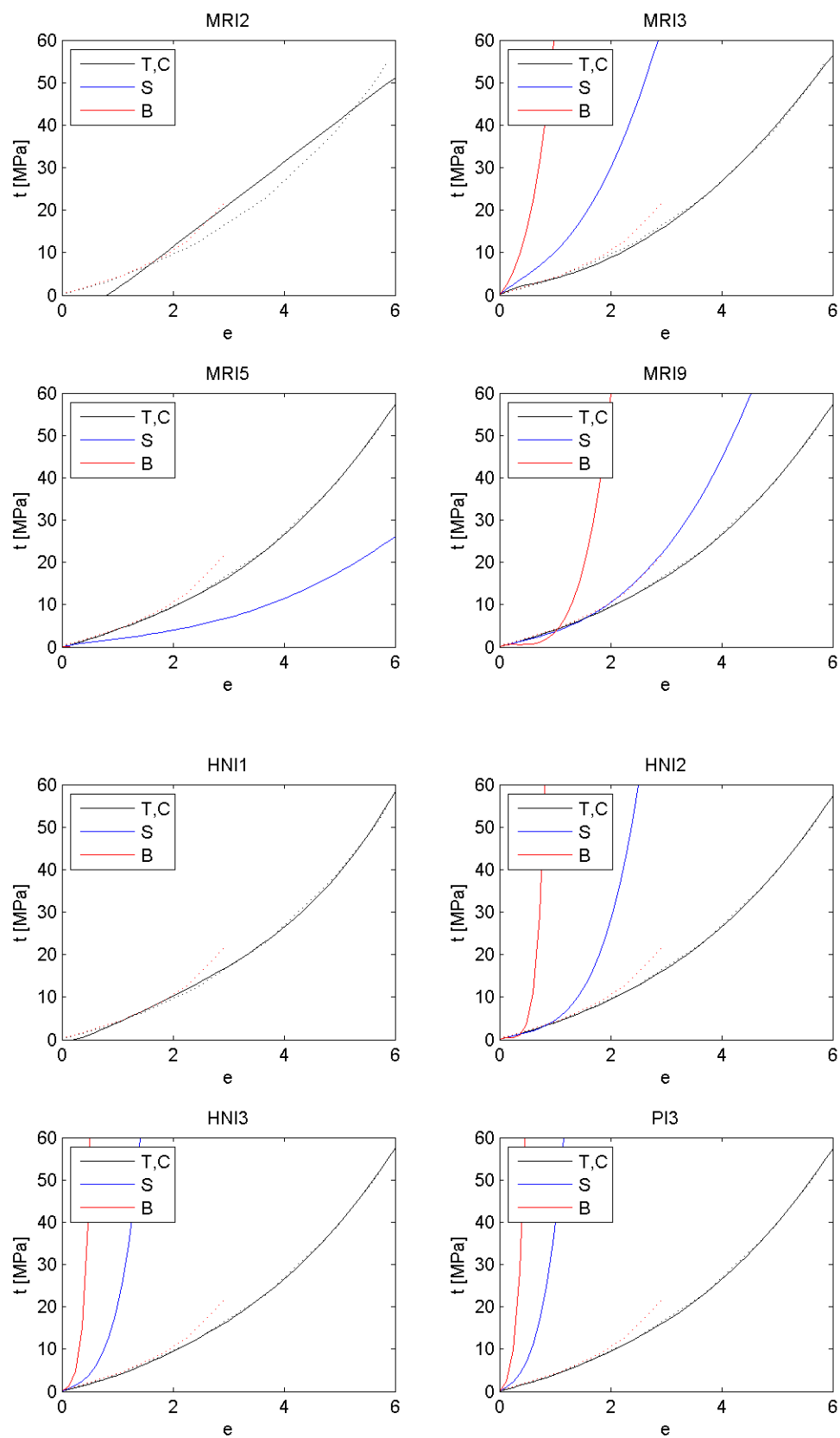


Figura B. 31 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 01 e grupo 02.

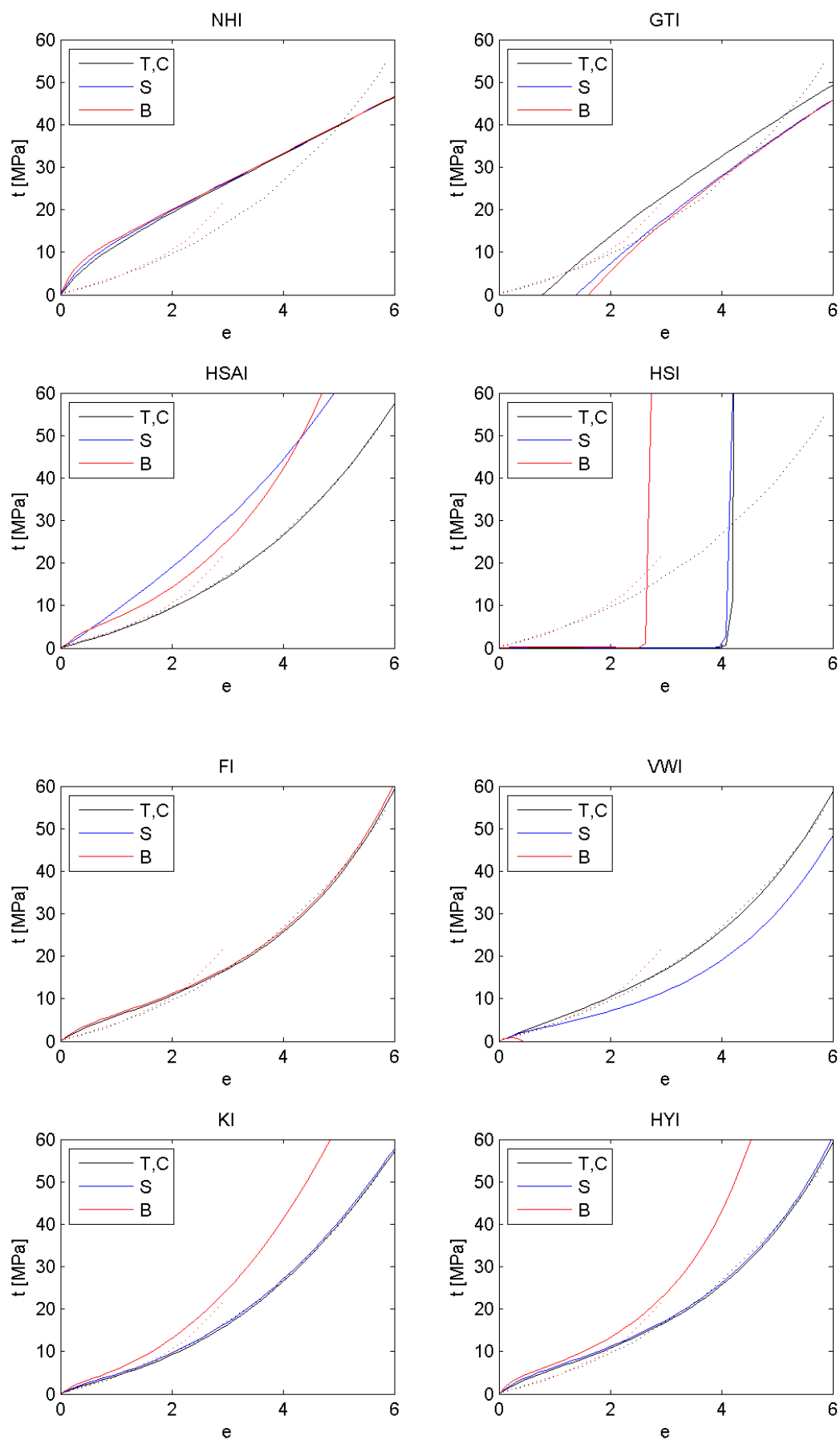


Figura B. 32 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 03 e grupo 04.



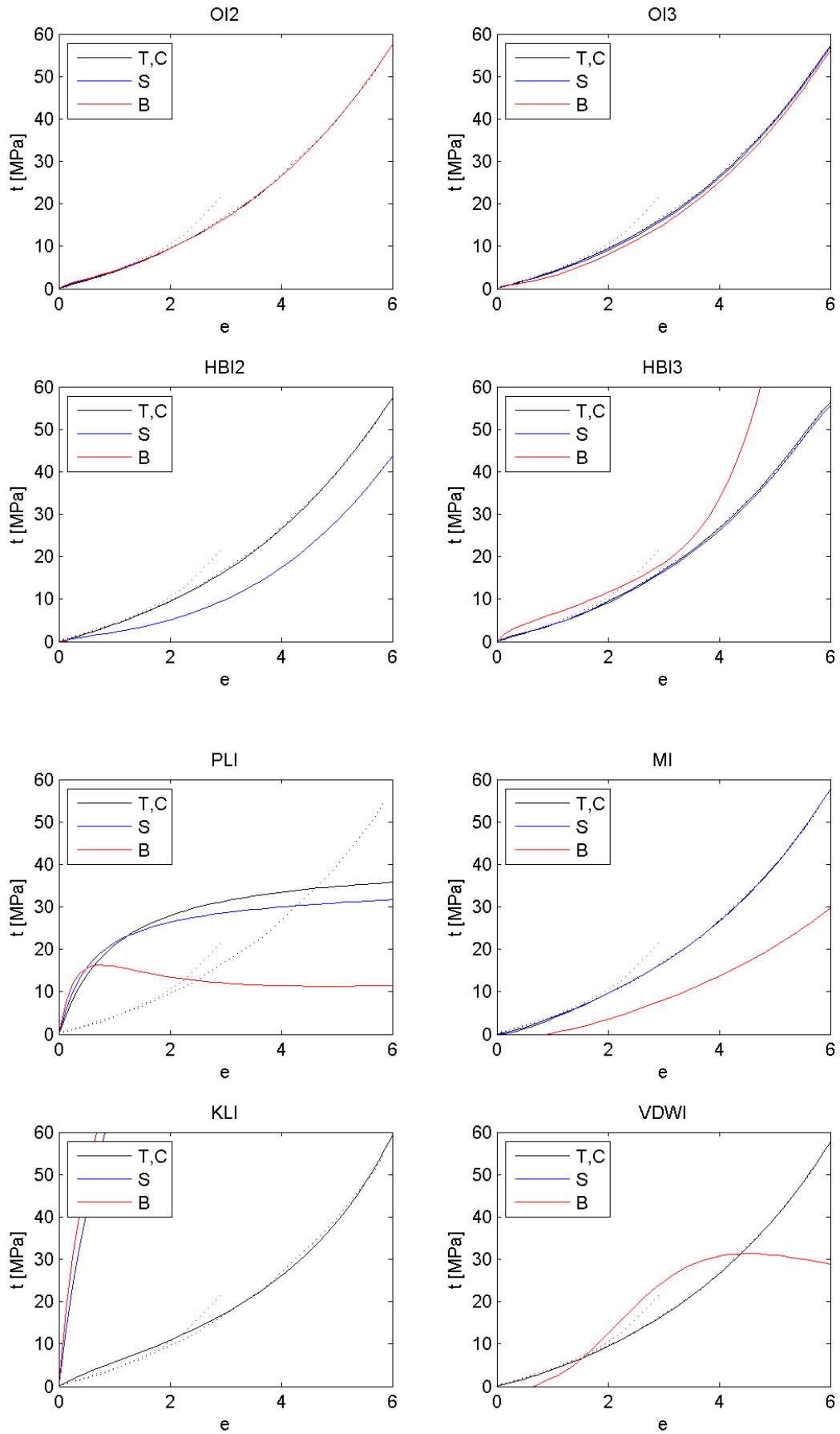


Figura B. 33 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 05 e grupo 06.

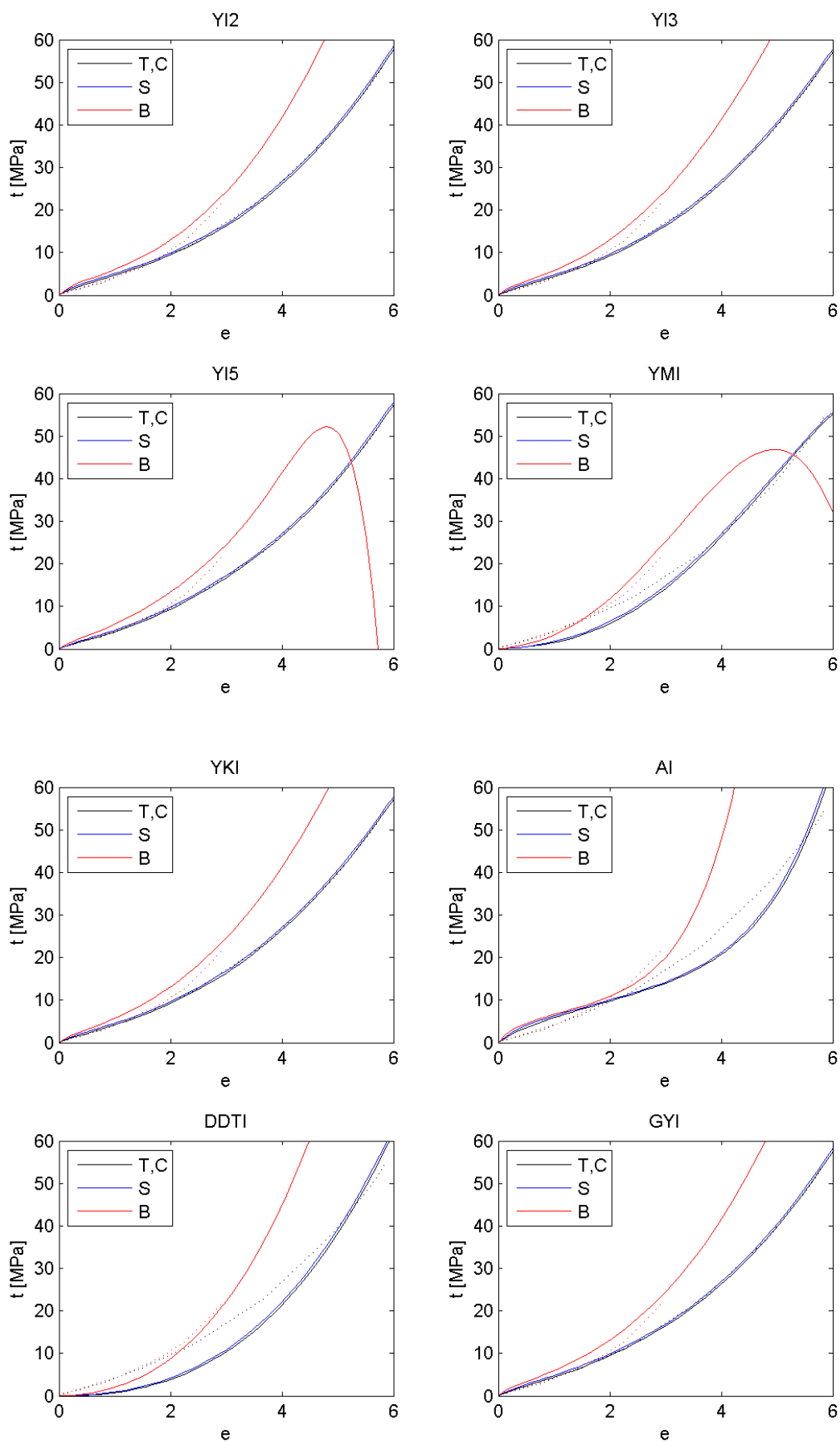


Figura B. 34 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 07 e grupo 08.

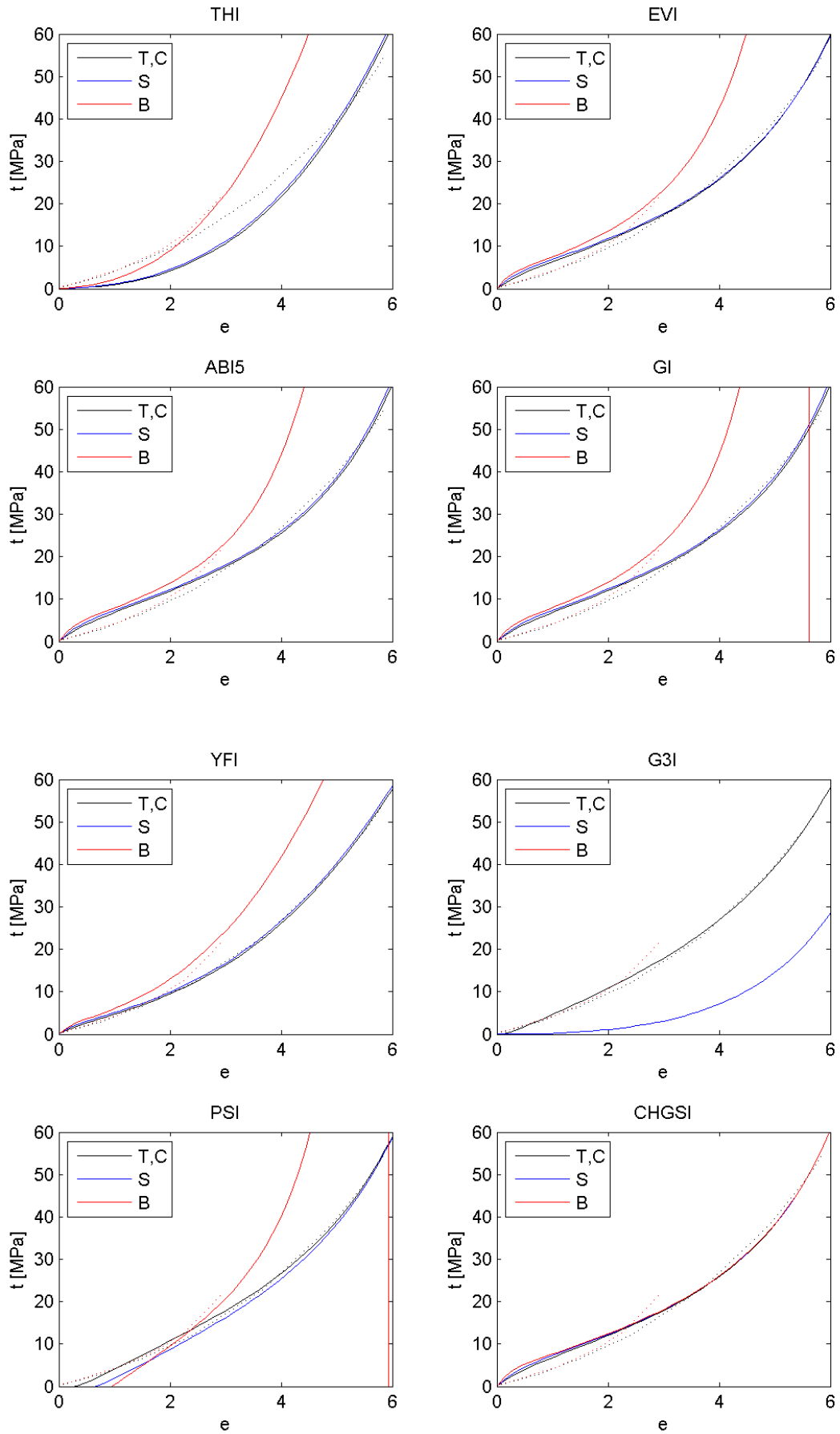


Figura B. 35 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 09 e grupo 10.

### B.3.2. Ajuste para Tração Biaxial

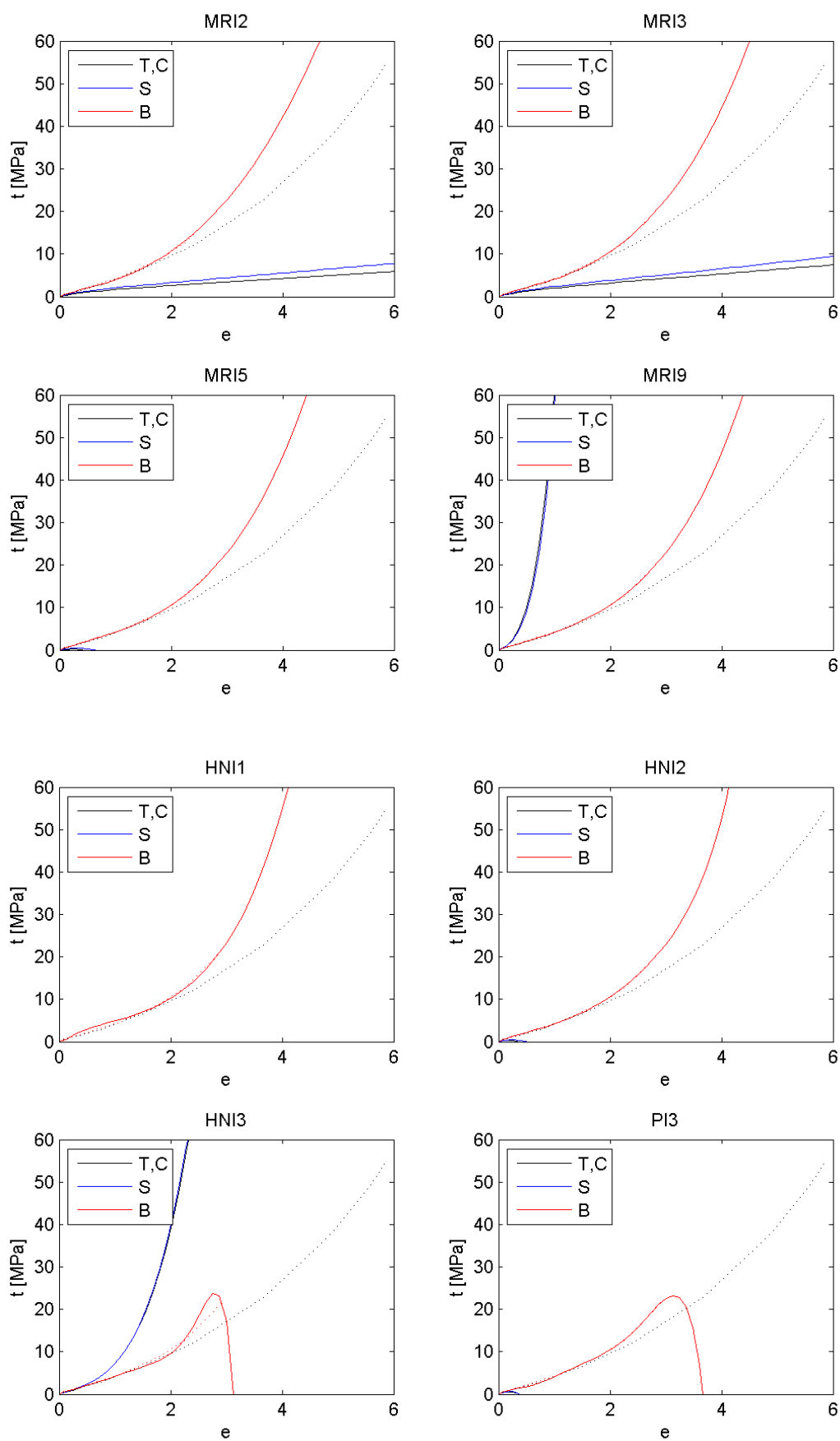


Figura B. 36 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 01 e grupo 02.

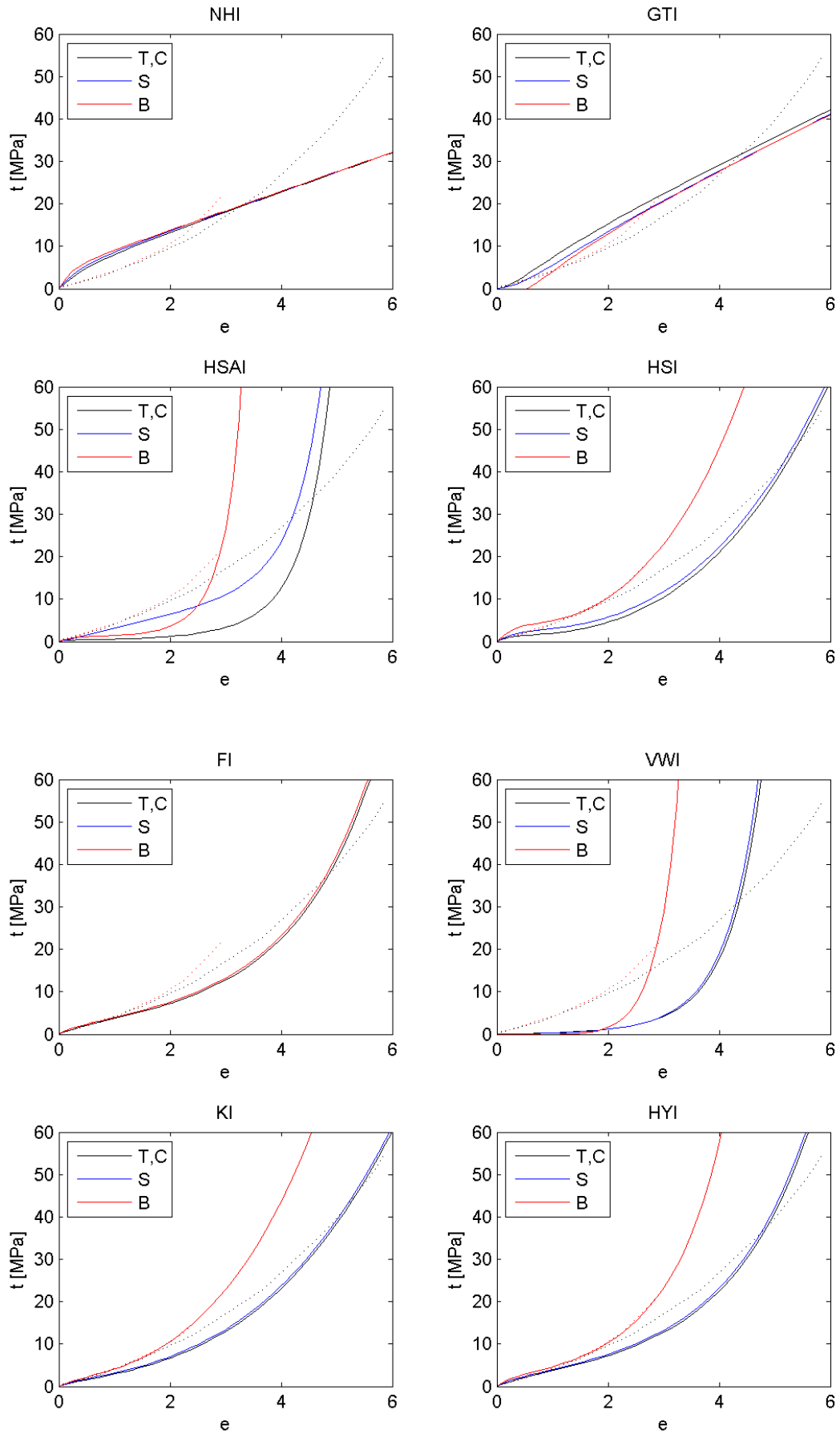


Figura B. 37 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 03 e grupo 04.

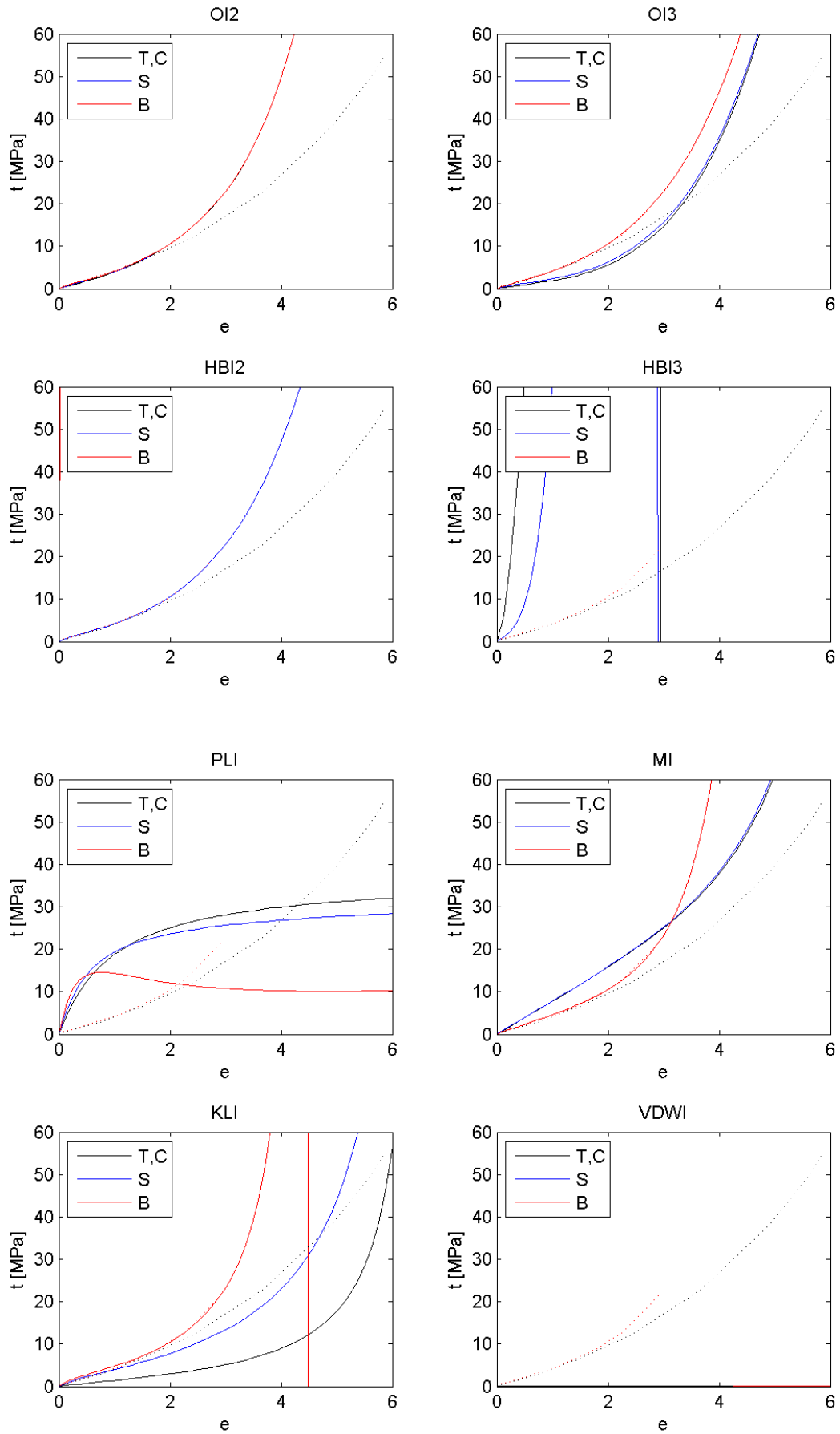


Figura B. 38 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 05 e grupo 06.

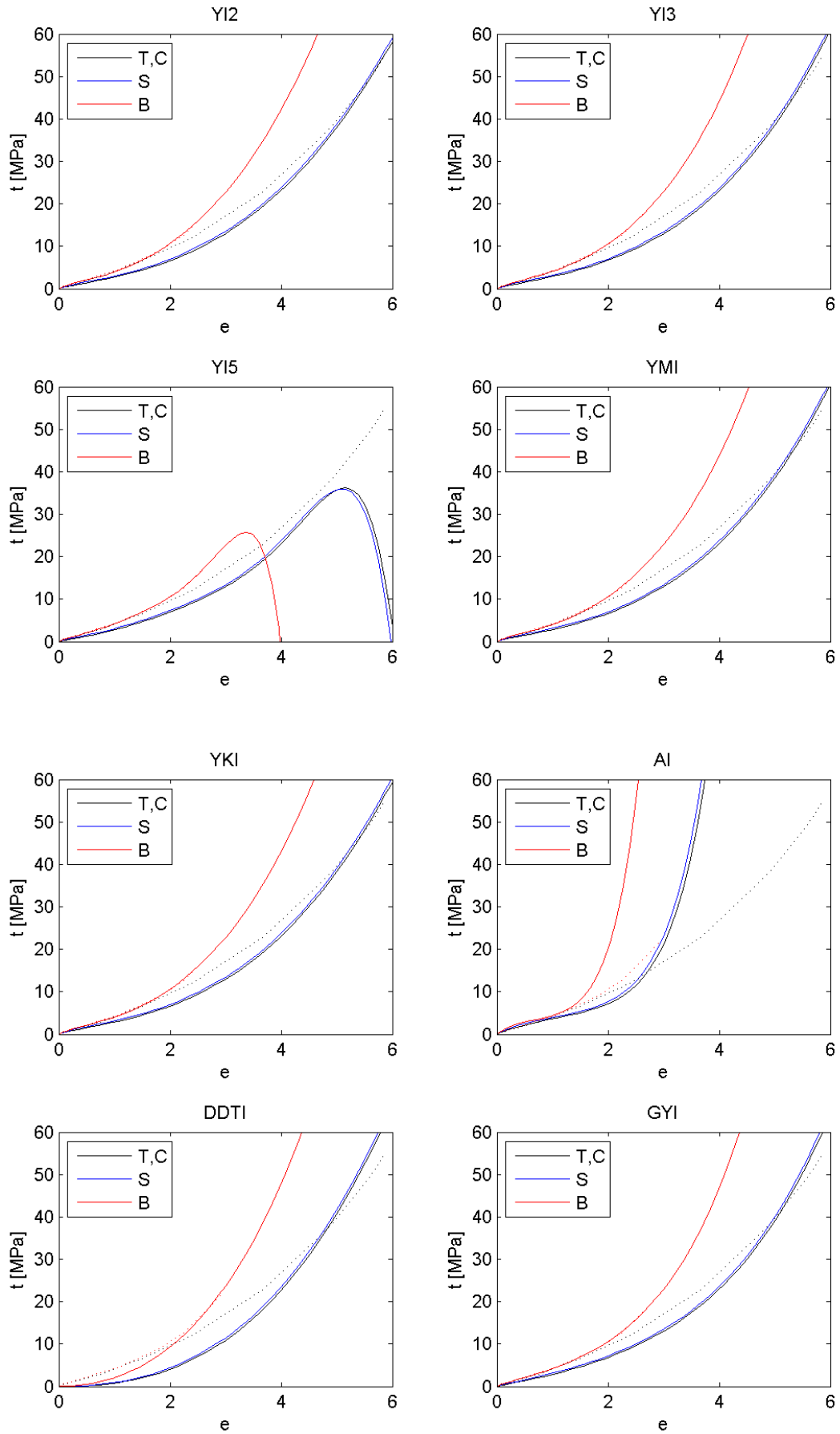


Figura B. 39 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 07 e grupo 08.

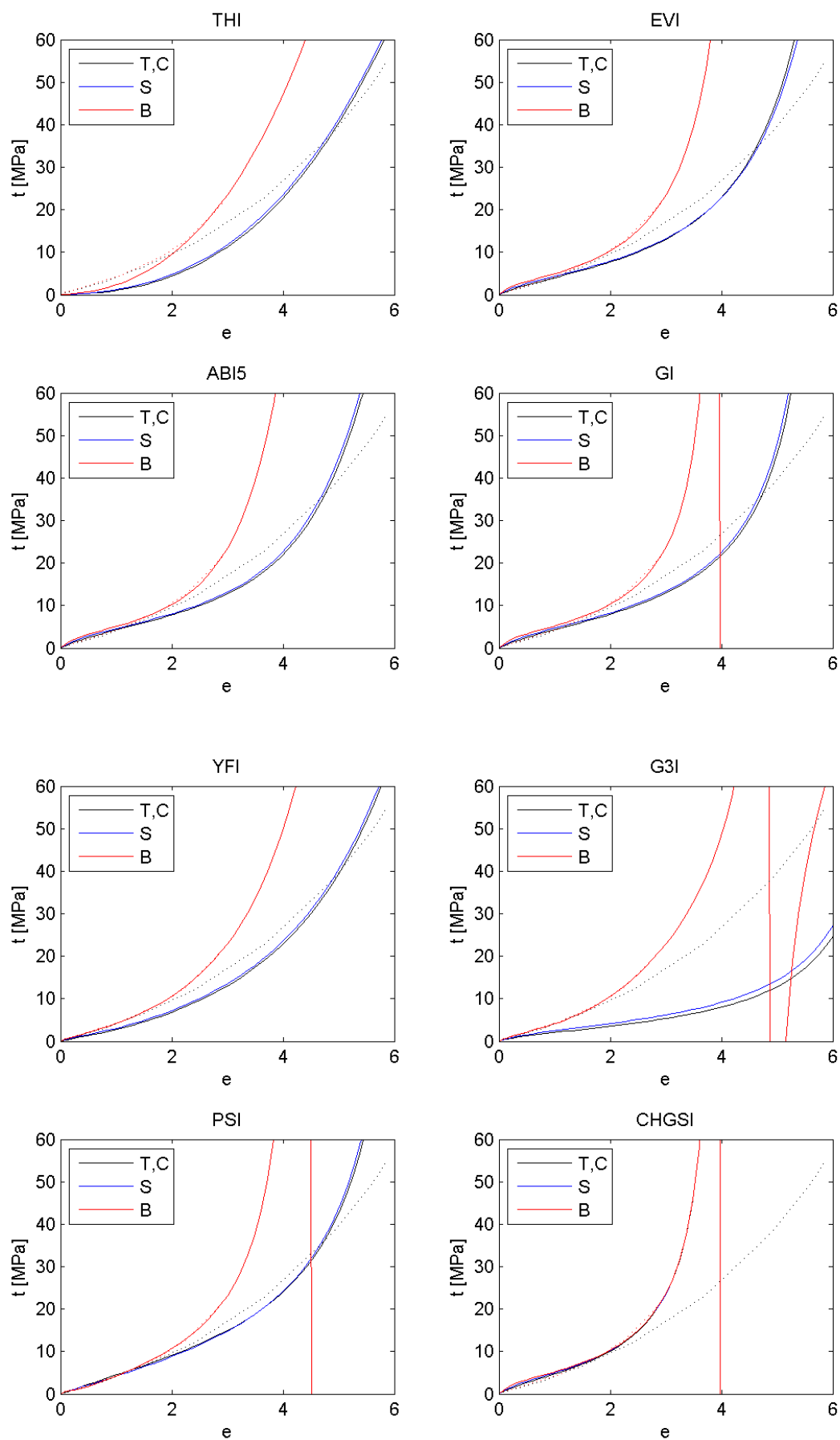


Figura B. 40 - Silicone (MED4950). Modelos grupo 01 e grupo 02.



## APÊNDICE C

Este anexo apresenta os resultados dos ajustes e previsões para os modelos avaliados no Capítulo 6, entretanto, empregando a formulação da eq.(6.1) como medida de qualidade de ajuste. O ajuste das constantes hiperelásticas será realizado univocamente para os dados experimentais de Treloar a partir do ensaio de tração uniaxial ( $T$ ).

### C.1. Ajuste para Tração Uniaxial

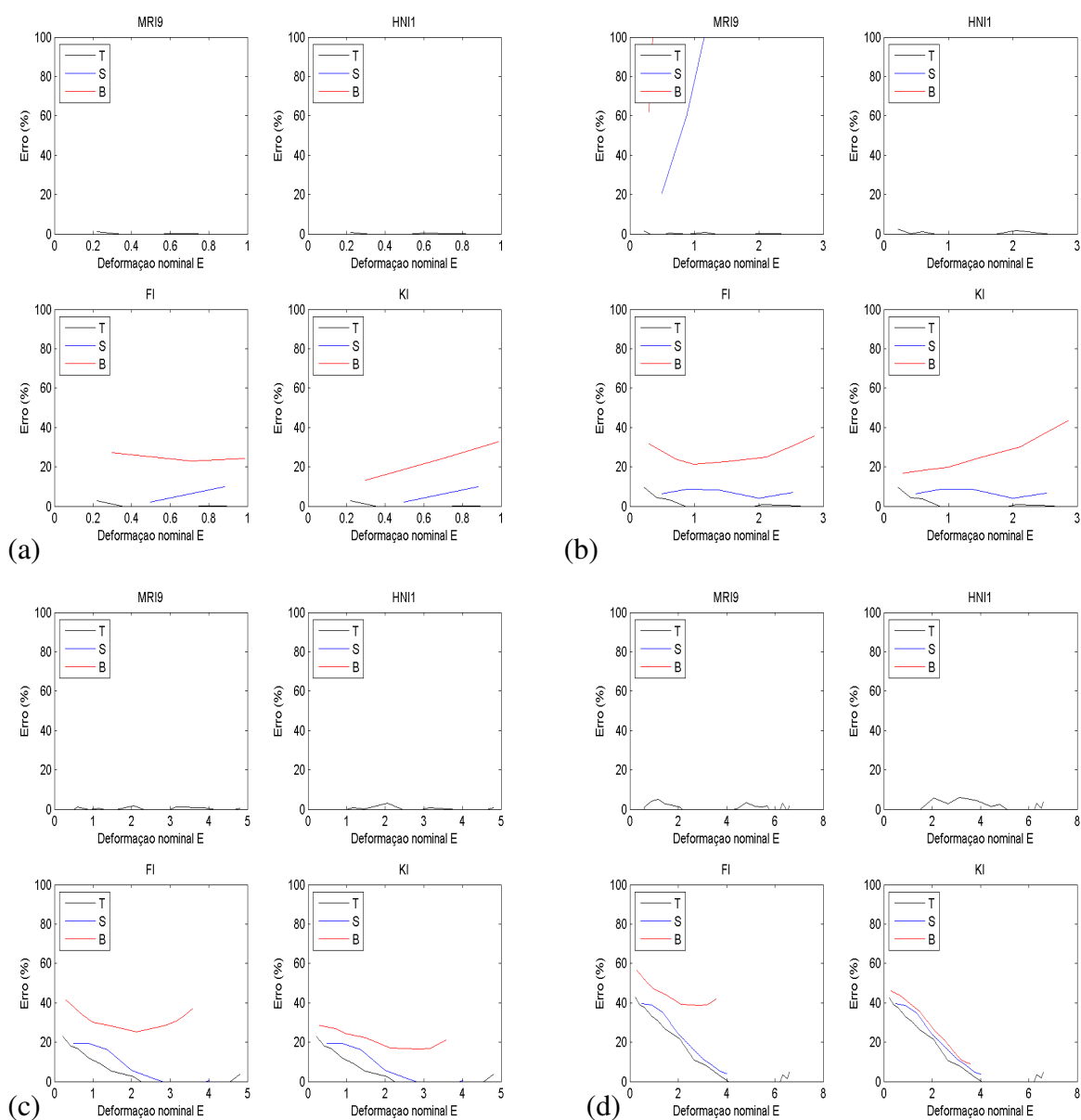
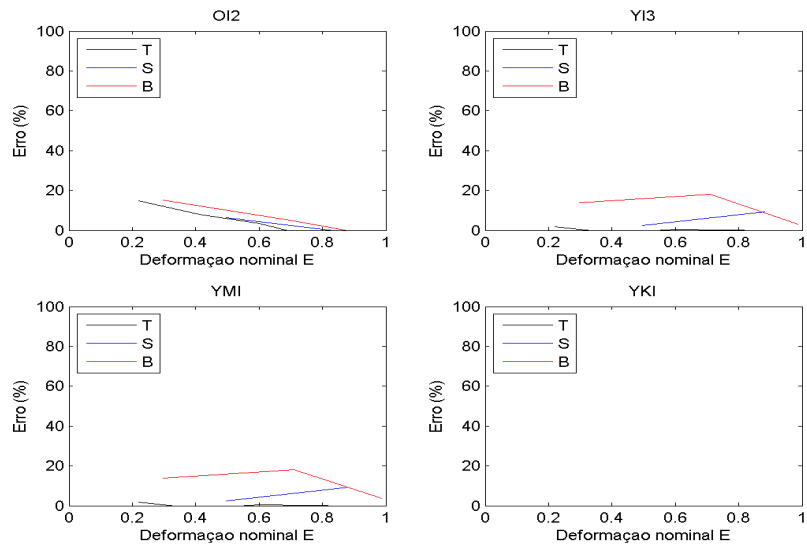
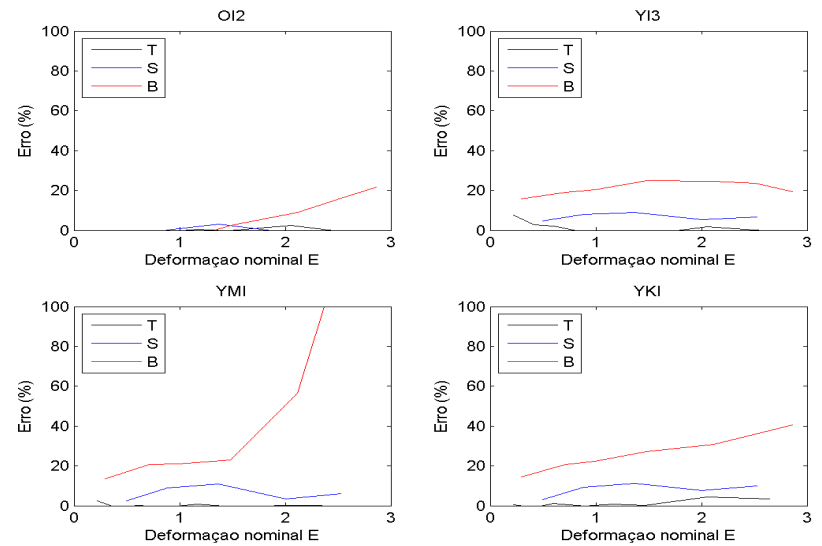


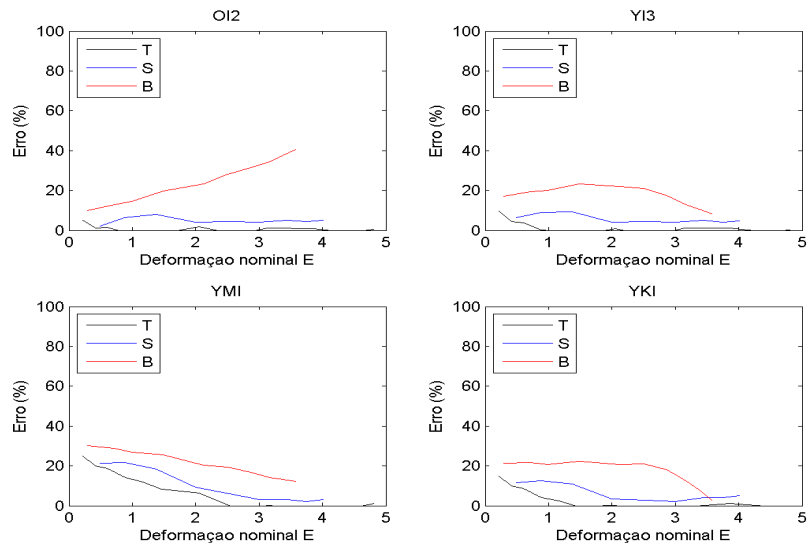
Figura C. 1 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $T$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 300\%$ . (c) -  $e = 500\%$ . (d) -  $e = 700\%$ .



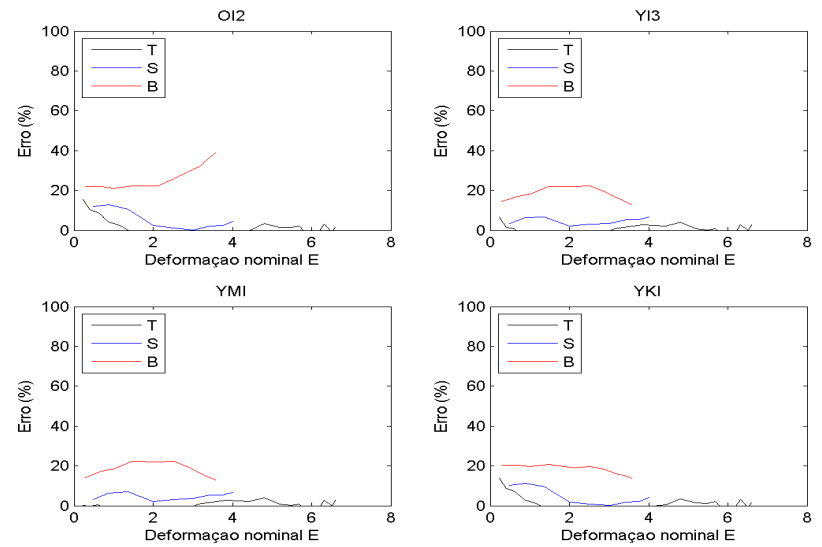
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura C. 2 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $T$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 300\%$ . (c) -  $e = 500\%$ . (d) -  $e = 700\%$ .

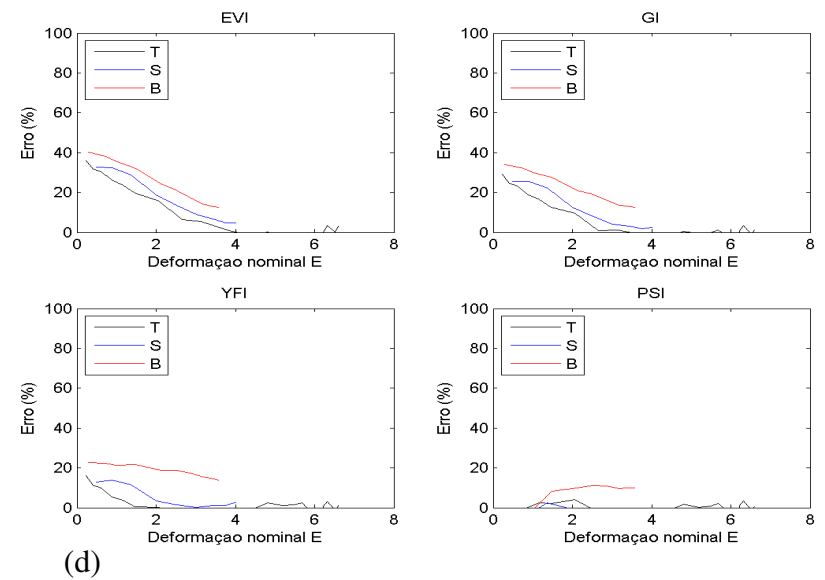
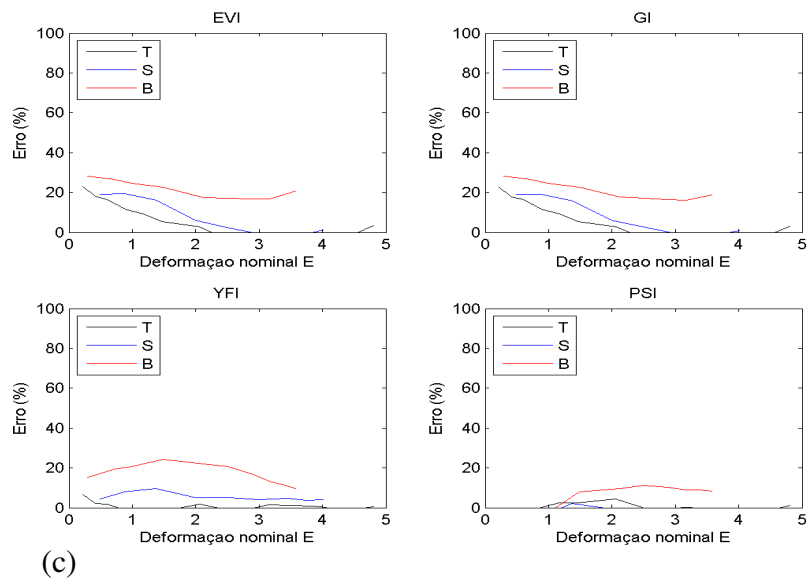
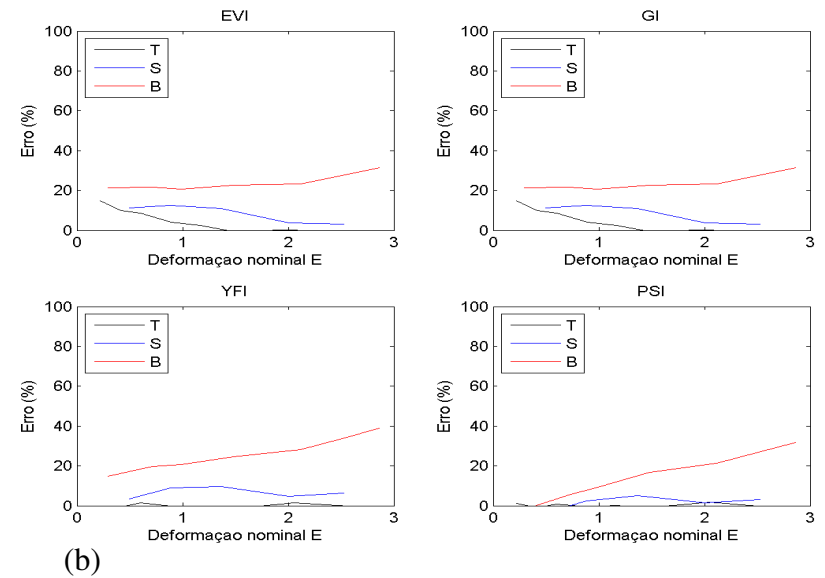
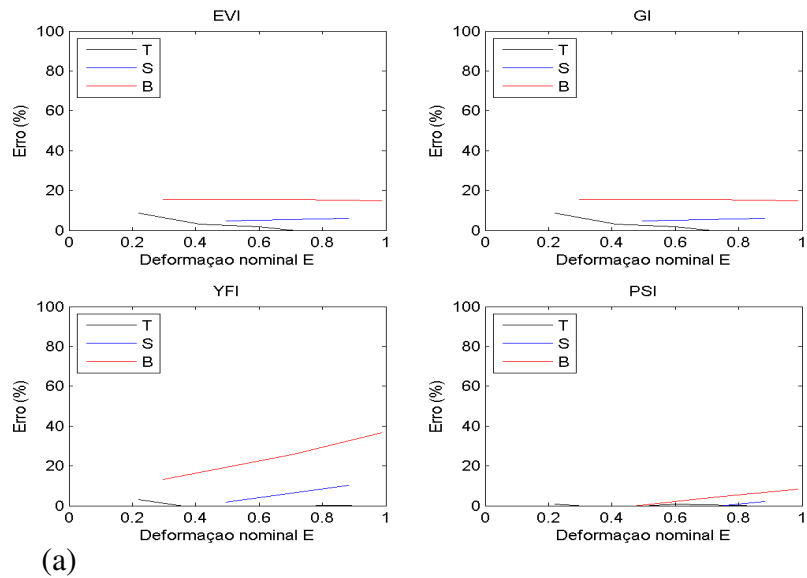


Figura C. 3 - Borracha natural (Treloar). Ajuste para  $T$ . (a) -  $e = 100\%$ . (b) -  $e = 300\%$ . (c) -  $e = 500\%$ . (d) -  $e = 700\%$ .