Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

Anais

VII SEMANÍSTICA

VII Semana Acadêmica do Departamento de Estatística

da UFRGS

http://www.ufrgs.br/semanistica

Porto Alegre - 12 a 14 de setembro de 2016

Uso do MCMC para Estimação dos Parâmetros dos Processos ARFIMA(p, d, q)

Letícia Menegotto [1]
Cleber Bisognin[2]

Resumo: Neste trabalho estamos interessados em estudar os processos ARFIMA(p, d, q), mais especificamente comparamos alguns métodos de estimação dos parâmetros destes processo. Utilizamos o estimador proposto por Fox e Taqqu (1986) e Whittle (1951), o estimador proposto por Beran (1995), o estimador proposto por Shimotsu e Phillips (2005). Além disso, também propomos, para os processos ARFIMA(p, d, q), um novo estimador utilizado o método MCMC. Para comparação dos estimadores utilizamos o vício, erro quadrático médio e variância. Na maioria dos casos estudados e simulados o estimador MCMC apresentou desempenho tão bom quanto ou melhor comparado com os estimadores Whittle, Beran e LW.

Palavras-chave: *Processos ARFIMA, Longa Dependência, Estimação, Simulações de Monte Carlo*.

1 Introdução

O principal objetivo de se estudar uma série temporal é encontrar um modelo que nos possibilite fazer previsões sobre os futuros valores dessa série. Um dos modelos, amplamente utilizado com este objetivo, é o proposto por G. E. P. Box e G. M. Jenkins na década de 70, que sugerem descrever uma série temporal na forma de polinômios: são os chamados modelos autoregressivo integrado média móvel, denotado por ARIMA(p, d, q). A metodologia proposta consiste em identificar (estimar) os parâmetros do modelo e, posteriormente, analisar a adequação desse ajuste através da análise dos resíduos.

Neste trabalho estamos interessados em estudas séries temporais que apresentam a característica de longa dependência. A longa dependência é uma característica onde valores observados, de uma série temporal, em momentos distantes, são correlacionados. Esta característica foi identificada inicialmente por Hurst (1956) em seus estudos sobre a influência dos nível do Rio Nilo na fertilidade de suas margens. Também podemos encontrar esta característica em séries temporais de diversas áreas como Economia, Genoma, entre outras. Vários processos foram propostos afim de modelar séries temporais com esta característica. Mandelbrot e Ness (1968) apresentou o fractional Brownian motion e o fractional Gaussian noise process. Hosking (1981) apresentou uma generalização do modelo ARIMA(p, d, q), o chamado modelo autoregressivo fracionário integrado de m édia móvel, denotado por ARFIMA(p, d, q). No caso dos modelos ARIMA(p, d, q), o parâmetro $d \in \mathbb{N}$, para os modelos ARFIMA(p, d, q), o parâmetro $d \in \mathbb{R}$. Neste trabalho, estamos interessados em estudar os modelos ARFIMA(p, d, q) com o parâmetro $d \in (0, 0.5)$. Quando $d \in (0, 0.5)$, o modelo ARFIMA(p, d, q) é utilizado para analisar séries temporais com longa dependência, quando $d \in (0.5, 0)$ estamos na região de curta dependência e quando $d \in (0.5, 1)$, estamos na região de dependência intermediária.

2 Processos ARFIMA(p, d, q)

Nesta seção definimos os processos *Auto-regressivos fracionariamente integrados de médias móveis* denotados por ARFIMA (p, d, q) e apresentamos algumas de suas propriedades.

[1]UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Bolsista de Iniciação Científica - BIC/UFRGS.
Email: *leticia.menegotto@gmail.com*
[2]UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Email: *cbisognin@ufrgs.br*

Definição 2.1. Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo estocástico que satisfaz a equação

$$\phi(\mathcal{B})(1-\mathcal{B})^d(X_t-\mu)=\theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \qquad t\in\mathbb{Z} \tag{2.1}$$

onde μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco, $\mathcal{B}$ é o operador defasagem ou de retardo, isto é, $\mathcal{B}^kX_t=X_{t-k}$, d é o *parâmetro ou grau de diferenciação*, $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são polinômios de ordem p e q, respectivamente dados por

$$\phi(z)=\sum_{i=0}^{p}\phi_i z^i \quad \text{e} \quad \theta(z)=\sum_{j=0}^{q}\theta_j z^j, \tag{2.2}$$

com ϕ_i, $1\leq i\leq p$, e θ_j, $1\leq j\leq q$ pertencentes ao reais e $\phi_0=1=\theta_0$. Então o processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é chamado de *processo auto-regressivo fracionariamente integrado de média móvel de ordem* (p,d,q), denotado por ARFIMA (p,d,q).

A seguir vamos apresentar propriedades fundamentais dos modelos ARFIMA (p,d,q). A prova do teorema a seguir pode ser encontrada em Brockwell e Davis (1991). Sem perda de generalidade utilizamos $\mu\equiv 0$.

Teorema 2.1. *Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo ARFIMA(p,d,q), dado pela Definição 2.1. Suponha que $d\in(-0.5,0.5)$ e que as equações $\phi(z)=0$ e $\theta(z)=0$ não possuem raízes em comum e as suas raízes estão fora do círculo unitário. Então valem as seguintes afirmações.*

(i) O processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é estacionário e inversível e possui representações autoregressiva e média móvel infinitas dadas, respectivamente, por

$$\sum_{k\geq 0}\pi_k X_{t-k}=\varepsilon_t \quad e \quad X_t=\sum_{k\geq 0}\psi_k\varepsilon_{t-k}$$

onde π_k e ψ_k são os coeficientes de $\mathcal{B}^k$ nas expensões

$$\pi(B)=\frac{\phi(\mathcal{B})}{\theta(\mathcal{B})}(1-\mathcal{B})^d \quad e \quad \psi(B)=\frac{\theta(\mathcal{B})}{\phi(\mathcal{B})}(1-\mathcal{B})^{-d},$$

respectivamente.

(ii) A função densidade espectral do $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é dada por

$$f_X(\omega)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{|\theta(e^{-i\omega})|^2}{|\phi(e^{-i\omega})|^2}\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{-2d}, \quad \textit{para todo} \quad 0<\omega\leqslant\pi. \tag{2.3}$$

Além disso, $\lim_{w\to 0} f_X(\omega)=\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\dfrac{|\theta(1)|^2}{|\phi(1)|^2}|w|^{-2d}$.

(iii) Quando $0<d<0.5$, as funções de autocovariância e autocorrelação assintóticas do processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ são dadas, respectivamente, por (quando $|k|\to\infty$)

$$\gamma_X(k)\sim c_\gamma(d,\phi,\theta)|k|^{2d-1},$$

onde

$$c_\gamma(d,\phi,\theta)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi}\frac{|\theta(1)|^2}{|\phi(1)|^2}\Gamma(1-2d)\operatorname{sen}(\pi d)$$

e

$$\rho_X(k) \sim c_\rho(d,\phi,\theta)|k|^{2d-1},$$

onde

$$c_\rho(d,\phi,\theta) = \frac{c_\gamma(d,\phi,\theta)}{\int_\pi^\pi f_X(\omega)dw}.$$

Maiores detalhes sobre os processos ARFIMA(p,d,q) podem ser encontrados em Hosking (1981) e Brockwell e Davis (1991).

3 Estimação de Parâmetros

Na literatura de séries temporais com propriedade de longa dependência existem diversos métodos para a estimação dos parâmetros. Em geral, os estimadores podem ser semi-paramétricos e paramétricos. Neste trabalho utilizaremos o estimador proposto por Fox e Taqqu (1986) e Whittle (1951) na qual utiliza o método da função de máxima verossimilhança aproximada e é denotado por Whittle, o estimador proposto por Beran (1995) que utiliza a representação autoregressiva infinita do processo e o estimador proposto por Shimotsu e Phillips (2005) que utiliza o comportamento da função densidade espectral próximo da origem, denotado por LW (*local Whittle*). Também propomos um novo estimador utilizado o método MCMC para estimar os parâmetros do processo ARFIMA(p,d,q) via estimador de Whittle. Por serem estimadores bastante conhecidos na literatura de séries temporais com longa dependência apresentamos apenas o estimador MCMC.

3.1 Estimator Whittle MCMC

Neste método para calcular o estimador de verossimilhança utlizando a aproximação de Whittle utilizamos o método de Monte Carlo baseado em Cadeias de Markov. Seja C uma constante tal que $C = \int_{-\pi}^{\pi} I_n(\lambda)d\lambda$. Assim, assim temos que a equação

$$\sigma_n^2(\boldsymbol{\eta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_n(\lambda)}{f_X(\lambda,\boldsymbol{\eta})}d\lambda, \tag{3.4}$$

por ser reescrita como

$$\sigma_n^2(\boldsymbol{\eta}) = C\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda)}{f_X(\lambda,\boldsymbol{\eta})}d\lambda = C\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{f_X(\lambda,\boldsymbol{\eta})}\right), \tag{3.5}$$

onde $f(\lambda) = \frac{1}{C}I_n(\lambda)$ é a função densidade em $[-\pi,\pi]$, $I_n(\cdot)$ é a função periodograma e $f_X(\lambda,\cdot)$ é a função densidade espectral dos processos ARFIMA(p,d,q) dada pela equação (2.3). O valor esperado em (3.5) pode ser aproximado pela média empírica

$$\overline{\sigma}_n^2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{f_X(\lambda_j,\boldsymbol{\eta})}, \tag{3.6}$$

onde N é suficientemente grande para satisfazer a lei dos grandes números. Aqui consideramos $N = 10000$ e o algoritmo de Metropolis-Hastings para gerar a amostra $(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$ como segue

i) Gerar λ_k, para $k \in \{1,\cdots,N\}$;

ii) Gerar Y_k de uma distribuição uniforme no intervalo $[-\pi,\pi]$ e denote o valor obtido por y_k, para $k \in \{1,\cdots,N\}$;

iii) Tome

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} y_k, & \text{com probabilidade } p(\lambda_k,y_k), \\ \lambda_k, & \text{com probabilidade } 1-p(\lambda_k,y_k), \end{cases}$$

onde $p(\lambda_k, y_k) = \min\left\{\frac{f(y_k)}{f(\lambda_k)}, 1\right\} = \min\left\{\frac{I_n(y_k)}{I_n(\lambda_k)}, 1\right\}$. Então, o estimador para $\boldsymbol{\eta}$, denotado por MCMC, é o valor $\widehat{\boldsymbol{\eta}}$ o qual minimiza (3.6) com respeito a $\boldsymbol{\eta}$. Maiores detalhes sobre o algoritmo de Metropolis-Hastings ver Gilks et al. (1998). Ndongo et al. (2010) consideram este método para estimar os parâmetros dos processos ARFISMA$(0, d, 0) \times (0, D, 0)_s - S\alpha S$.

4 Simulações de Monte Carlo

Nesta subseção apresentamos os resultados de simulações de Monte Carlo, mais especificamente da estimação dos parâmetros do processo ARFIMA(p, d, q). Todas as simulações realizadas neste trabalho foram realizadas através do software estatístico R. Cada estatística provem de $re = 500$ replicações com $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$, $d \in \{0.05, 0.3, 0.45\}$, $p \in \{0, 1\}$, $q \in \{0, 1\}$, $\phi_1 \in \{-0.5, 0.5\}$ e $\theta_1 \in \{-0.5, 0.5\}$. No caso do estimador de Shimotsu e Phillips (2005), necessitamos especificar o número de frequências de Fourier serão utilizadas na estimação dos parâmetros. O número de frequências utilizadas é dada por $m = n^\beta$. Nestas simulações utilizamos $\beta \in \{0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85\}$.

Tabela 4.1: Resultados de estimação para um processo ARFIMA(p, d, q) utilizando o Estimador LW, quando $p = 0 = q$, $d \in \{0.05, 0.3, 0.45\}$, $\beta \in \{0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85\}$ e $n \in \{250, 500, 1000\}$.

		$d = 0.05$				$d = 0.3$				$d = 0.45$			
β	n	Média	Vício	EQM	VAR	Média	Vício	EQM	VAR	Média	Vício	EQM	VAR
0.60	250	0.1094	0.0594	0.0098	0.0063	0.2878	-0.0122	0.0137	0.0136	0.4213	-0.0287	0.0098	0.0090
	500	0.0888	0.0388	0.0052	0.0037	0.2969	-0.0031	0.0081	0.0081	0.4376	-0.0124	0.0052	0.0050
	1000	0.0746	0.0246	0.0031	0.0025	0.2994	-0.0006	0.0052	0.0052	0.4452	-0.0048	0.0029	0.0029
0.65	250	0.0948	0.0448	0.0063	0.0043	0.2896	-0.0104	0.0104	0.0103	0.4260	-0.0240	0.0070	0.0064
	500	0.0819	0.0319	0.0040	0.0030	0.2970	-0.0030	0.0062	0.0062	0.4418	-0.0082	0.0039	0.0038
	1000	0.0663	0.0163	0.0021	0.0018	0.3001	0.0001	0.0032	0.0032	0.4468	-0.0032	0.0024	0.0024
0.70	250	0.0830	0.0330	0.0043	0.0033	0.2874	-0.0126	0.0078	0.0077	0.4289	-0.0211	0.0056	0.0051
	500	0.0727	0.0227	0.0028	0.0023	0.2967	-0.0033	0.0041	0.0041	0.4422	-0.0078	0.0030	0.0029
	1000	0.0621	0.0121	0.0015	0.0014	0.3003	0.0003	0.0021	0.0021	0.4477	-0.0023	0.0019	0.0019
0.75	250	0.0760	0.0260	0.0032	0.0025	0.2869	-0.0131	0.0056	0.0055	0.4305	-0.0195	0.0044	0.0040
	500	0.0644	0.0144	0.0018	0.0016	0.2948	-0.0052	0.0029	0.0029	0.4423	-0.0077	0.0023	0.0022
	1000	0.0561	0.0061	0.0011	0.0011	0.2980	-0.0020	0.0016	0.0016	0.4469	-0.0031	0.0015	0.0015
0.80	250	0.0683	0.0183	0.0023	0.0019	0.2819	-0.0181	0.0044	0.0041	0.4264	-0.0236	0.0039	0.0033
	500	0.0594	0.0094	0.0014	0.0013	0.2902	-0.0098	0.0021	0.0020	0.4387	-0.0113	0.0019	0.0018
	1000	0.0524	0.0024	0.0008	0.0008	0.2935	-0.0065	0.0012	0.0011	0.4429	-0.0071	0.0011	0.0011
0.85	250	0.0595	0.0095	0.0015	0.0014	0.2716	-0.0284	0.0037	0.0029	0.4121	-0.0379	0.0043	0.0028
	500	0.0540	0.0040	0.0010	0.0010	0.2807	-0.0193	0.0018	0.0015	0.4257	-0.0243	0.0021	0.0015
	1000	0.0490	-0.0010	0.0006	0.0006	0.2865	-0.0135	0.0010	0.0008	0.4315	-0.0185	0.0012	0.0008

Tabela 4.2: Resultados de estimação para um processo ARFIMA(p, d, q) utilizando os estimador Whittle, Beran e MCMC, quando $p = 0 = q$, $d \in \{0.05, 0.30, 0.45\}$ e $n \in \{250, 500, 1000\}$.

	Whittle				Beran				MCMC			
					$d = 0.05$							
n	Média	Vício	EQM	VAR	Média	Vício	EQM	VAR	Média	Vício	EQM	VAR
250	0.0632	0.0132	0.0017	0.0015	0.0475	-0.0025	0.0006	0.0006	0.0611	0.0111	0.0015	0.0014
500	0.0556	0.0056	0.001	0.001	0.0481	-0.0019	0.0003	0.0003	0.0562	0.0062	0.001	0.001
1000	0.0496	-0.0004	0.0005	0.0005	0.0461	-0.0039	0.0005	0.0005	0.0500	0.000	0.0006	0.0006
					$d = 0.3$							
n	Média	Vício	EQM	VAR	Média	Vício	EQM	VAR	Média	Vício	EQM	VAR
250	0.2954	-0.0046	0.0031	0.0031	0.2798	-0.0202	0.0034	0.003	0.2981	-0.0019	0.0028	0.0028
500	0.2993	-0.0007	0.0014	0.0014	0.2906	-0.0094	0.0015	0.0014	0.2992	-0.0008	0.0015	0.0015
1000	0.3009	0.0009	0.0007	0.0007	0.296	-0.004	0.0007	0.0007	0.3011	0.0011	0.0008	0.0008
					$d = 0.45$							
n	Média	Vício	EQM	VAR	Média	Vício	EQM	VAR	Média	Vício	EQM	VAR
250	0.4442	-0.0058	0.0024	0.0024	0.4304	-0.0196	0.003	0.0026	0.4508	0.0008	0.0023	0.0023
500	0.4519	0.0019	0.0012	0.0012	0.4429	-0.0071	0.0013	0.0012	0.4539	0.0039	0.0013	0.0013
1000	0.4533	0.0033	0.0007	0.0007	0.4473	-0.0027	0.0007	0.0007	0.4535	0.0035	0.0008	0.0008

Tabela 4.3: Resultados de estimação para um processo ARFIMA(p, d, q) utilizando os estimador Whittle, Beran e MCMC, quando $p = 1$ e $q = 0$, $d = 0.30$, $\phi_1 \in \{-0.5, 0.5\}$ e $n \in \{250, 500, 1000\}$.

$n = 250$												
	$\phi_1 = 0.5$						$\phi_1 = -0.5$					
	Whittle		Beran		MCMC		Whittle		Beran		MCMC	
	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$
Média	0.5081	0.2809	0.4295	0.2620	0.5083	0.2850	-0.4944	0.2937	-0.4855	0.2724	-0.4947	0.2980
Vício	0.0081	-0.0191	-0.0705	-0.0380	0.0083	-0.0150	0.0056	-0.0063	0.0145	-0.0276	0.0053	-0.0020
EQM	0.0169	0.0165	0.1366	0.0245	0.0164	0.0146	0.0046	0.0046	0.0049	0.0054	0.0046	0.0043
VAR	0.0168	0.0162	0.1319	0.0231	0.0164	0.0144	0.0046	0.0046	0.0047	0.0047	0.0046	0.0043
$n = 500$												
	Whittle		Beran		MCMC		Whittle		Beran		MCMC	
	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$
Média	0.4985	0.2929	0.4122	0.2800	0.4982	0.2950	-0.4948	0.2947	-0.4898	0.2830	-0.4949	0.2969
Vício	-0.0015	-0.0071	-0.0878	-0.0200	-0.0018	-0.0050	0.0052	-0.0053	0.0102	-0.0170	0.0051	-0.0031
EQM	0.0122	0.0119	0.1410	0.0190	0.0134	0.0113	0.0024	0.0022	0.0025	0.0025	0.0026	0.0022
VAR	0.0122	0.0118	0.1336	0.0186	0.0134	0.0113	0.0024	0.0022	0.0024	0.0022	0.0026	0.0022
$n = 1000$												
	Whittle		Beran		MCMC		Whittle		Beran		MCMC	
	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$
Média	0.5066	0.2896	0.4576	0.2856	0.5032	0.2945	-0.4993	0.2994	-0.4971	0.2904	-0.4992	0.2998
Vício	0.0066	-0.0104	-0.0424	-0.0144	0.0032	-0.0055	0.0007	-0.0006	0.0029	-0.0096	0.0008	-0.0002
EQM	0.0081	0.0075	0.0659	0.0126	0.0089	0.0075	0.0011	0.0009	0.0010	0.0010	0.0013	0.0011
VAR	0.0081	0.0074	0.0647	0.0125	0.0089	0.0075	0.0011	0.0009	0.0010	0.0009	0.0013	0.0011

Tabela 4.4: Resultados de estimação para um processo ARFIMA(p, d, q) utilizando os estimador Whittle, Beran e MCMC, quando $p = 0$ e $q = 1$, $d = 0.3$, $\theta_1 \in \{-0.5, 0.5\}$ e $n \in \{250, 500, 1000\}$.

$n = 250$												
	$\theta_1 = 0.5$						$\theta_1 = -0.5$					
	Whittle		Beran		MCMC		Whittle		Beran		MCMC	
	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$
Média	0.2606	0.4577	0.2266	0.4335	0.2672	0.4610	0.2998	-0.4959	0.2961	-0.4342	0.3013	-0.4942
Vício	-0.0394	-0.0423	-0.0734	-0.0665	-0.0328	-0.0390	-0.0002	0.0041	-0.0039	0.0658	0.0013	0.0058
EQM	0.0163	0.0191	0.0223	0.0252	0.0142	0.0173	0.0042	0.0051	0.0076	0.0766	0.0044	0.0060
VAR	0.0148	0.0174	0.0170	0.0208	0.0132	0.0158	0.0042	0.0051	0.0076	0.0724	0.0044	0.0059
$n = 500$												
	Whittle		Beran		MCMC		Whittle		Beran		MCMC	
	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$
Média	0.2821	0.4777	0.2551	0.4569	0.2852	0.4798	0.2991	-0.4980	0.3059	-0.4360	0.3020	-0.4983
Vício	-0.0179	-0.0223	-0.0449	-0.0431	-0.0148	-0.0202	-0.0009	0.0020	0.0059	0.0640	0.0020	0.0017
EQM	0.0110	0.0126	0.0142	0.0172	0.0089	0.0109	0.0023	0.0025	0.0055	0.0657	0.0025	0.0033
VAR	0.0107	0.0121	0.0122	0.0154	0.0087	0.0105	0.0023	0.0025	0.0055	0.0617	0.0025	0.0033
$n = 1000$												
	Whittle		Beran		MCMC		Whittle		Beran		MCMC	
	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$
Média	0.2932	0.4921	0.2717	0.4740	0.2921	0.4898	0.2993	-0.4993	0.3120	-0.4264	0.2992	-0.5015
Vício	-0.0068	-0.0079	-0.0283	-0.0260	-0.0079	-0.0102	-0.0007	0.0007	0.0120	0.0736	-0.0008	-0.0015
EQM	0.0059	0.0069	0.0068	0.0082	0.0056	0.0068	0.0010	0.0012	0.0046	0.0729	0.0013	0.0020
VAR	0.0059	0.0068	0.0061	0.0075	0.0056	0.0067	0.0010	0.0012	0.0044	0.0676	0.0013	0.0020

5 Conclusões

No casos da estimação do parâmetro d dos processos ARFIMA(p, d, q), com $p = 0 = q$, o estimador LW (*Local Whittle*), ver Tabela 4.1, obteve os melhores resultados $d = 0.05$ quando $\beta \in \{0.8, 0.85\}$, independente do tamanho de n. Para $d = 0.3$ todas as simulações apresentam bons resultados. Para $d = 0.45$, as estimativas apresentam um vício maior, independente do tamanho amostral e de β. Comparando as estimativas de LW com os outros estimadores, quando $\beta \in \{0.8, 0.85\}$, as estimativas são equivalentes e apresentem semelhante EQM e VAR.

Para os processos ARFIMA(p, d, q), com $p = 0 = q$, ver Tabela 4.2, comparando os estimador MCMC

Tabela 4.5: Resultados de estimação para um processo ARFIMA(p, d, q) utilizando os estimador Whittle, Beran e MCMC, quando $p = 1 = q$, $d = 0.3$, $\phi_1 = -0.5$ e $\theta_1 = 0.5$ e $n \in \{250, 500, 1000\}$.

$n = 250$									
	Whittle			Beran			MCMC		
	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$
Média	-0.5023	0.2505	0.4359	-0.5024	0.2265	0.4252	-0.5023	0.2709	0.4543
Vício	-0.0023	-0.0495	-0.0641	-0.0024	-0.0735	-0.0748	-0.0023	-0.0291	-0.0457
EQM	0.0052	0.0167	0.0256	0.0053	0.0231	0.0314	0.0051	0.0144	0.0227
VAR	0.0052	0.0143	0.0215	0.0053	0.0177	0.0259	0.0051	0.0136	0.0206
$n = 500$									
	Whittle			Beran			MCMC		
	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$
Média	-0.4974	0.2730	0.4694	-0.4997	0.2452	0.4472	-0.4977	0.2838	0.4780
Vício	0.0026	-0.0270	-0.0306	0.0003	-0.0548	-0.0528	0.0023	-0.0162	-0.0220
EQM	0.0028	0.0107	0.0148	0.0028	0.0142	0.0180	0.0031	0.0108	0.0148
VAR	0.0028	0.0100	0.0139	0.0028	0.0112	0.0152	0.0031	0.0106	0.0143
$n = 1000$									
	Whittle			Beran			MCMC		
	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$
Média	-0.4999	0.2881	0.4865	-0.5013	0.2668	0.4679	-0.5016	0.2931	0.4897
Vício	0.0001	-0.0119	-0.0135	-0.0013	-0.0332	-0.0321	-0.0016	-0.0069	-0.0103
EQM	0.0012	0.0057	0.0075	0.0017	0.0067	0.0090	0.0015	0.0062	0.0087
VAR	0.0012	0.0056	0.0073	0.0017	0.0056	0.0080	0.0015	0.0062	0.0087

Tabela 4.6: Resultados de estimação para um processo ARFIMA(p, d, q) utilizando os estimador Whittle, Beran e MCMC, quando $p = 1 = q$, $d = 0.3$, $\phi_1 = 0.5$ e $\theta_1 = -0.5$ e $n \in \{250, 500, 1000\}$.

$n = 250$									
	Whittle			Beran			MCMC		
	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$
Média	0.5111	0.2711	-0.4890	0.3556	0.2885	-0.4681	0.5124	0.2755	-0.4876
Vício	0.0111	-0.0289	0.0110	-0.1444	-0.0115	0.0319	0.0124	-0.0245	0.0124
EQM	0.0196	0.0187	0.0062	0.2045	0.0272	0.0774	0.0186	0.0140	0.0112
VAR	0.0195	0.0179	0.0061	0.1841	0.0272	0.0765	0.0184	0.0134	0.0110
$n = 500$									
	Whittle			Beran			MCMC		
	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$
Média	0.5127	0.2759	-0.4927	0.3890	0.2884	-0.4866	0.5002	0.2867	-0.5040
Vício	0.0127	-0.0241	0.0073	-0.1110	-0.0116	0.0134	0.0002	-0.0133	-0.0040
EQM	0.0144	0.0130	0.0029	0.1590	0.0213	0.0450	0.0176	0.0111	0.0095
VAR	0.0143	0.0125	0.0029	0.1470	0.0212	0.0449	0.0176	0.0110	0.0095
$n = 1000$									
	Whittle			Beran			MCMC		
	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\phi}_1$	$\widehat{d}$	$\widehat{\theta}_1$
Média	0.5086	0.2856	-0.4978	0.4327	0.2848	-0.4703	0.4950	0.2966	-0.5076
Vício	0.0086	-0.0144	0.0022	-0.0673	-0.0152	0.0297	-0.0050	-0.0034	-0.0076
EQM	0.0077	0.0071	0.0013	0.1189	0.0144	0.0533	0.0114	0.0072	0.0071
VAR	0.0077	0.0069	0.0013	0.1145	0.0142	0.0526	0.0114	0.0072	0.0070

com os estimadores Beran, Whittle, em relação ao EQM, o estimador MCMC possui EQM muito semelhante aos estimadores Whittle e Beran. Em relação ao vício, na maioria dos casos possui o vício um pouco menor em relação ao Whittle. Em comparação com o estimador Beran, para d pequeno possui vício um pouco maior, mas quando d cresce, o estimador MCMC possui menor vício.

Para os processos ARFIMA(p, d, q), com $p = 1 = q$, nos casos em que $\phi_1 = -0.5$ e $\theta_1 = 0.5$, ver Tabela 4.5, o estimador MCMC apresenta melhores resultados, no sentido de menor vício, EQM e VAR, que o estimador BERAN, para todos os tamanhos amostrais, resultados melhores que o estimador Whittle para amostras de tamanho $n \in \{250, 500\}$ e resultados semelhantes aos do Whittle quando $n = 1000$.

Analisando a estimação dos parâmetros dos processos ARFIMA(p, d, q), com $p = 1$, $q = 0$ e $d = 0.3$, nos casos em que $\phi_1 = 0.5$, ver Tabela 4.3, o estimador MCMC apresenta melhores resultados, no sentido de menor vício, EQM e VAR, que o estimador BERAN, para todos os tamanhos amostrais, e resultados

semelhantes aos do Whittle para todos os tamanhos amostrais. Para $\phi_1 = -0.5$, o estimador MCMC apresenta melhores resultados que BERAN para todos os tamanhos amostrais no sentido de menor vício, e resultados parecidos aos obtidos com o estimador de Whittle em todos os quesitos e em todos os tamanhos amostrais. Para os processos ARFIMA(p, d, q), com $p = 0$, $q = 1$ e $d = 0.3$, nos casos em que $\theta_1 = 0.5$, ver Tabela 4.4, o estimador MCMC apresenta melhores resultados, no sentido de menor vício, EQM e VAR, que o estimador BERAN, para todos os tamanhos amostrais. Quando comparado com o estimador de Whittle, MCMC é melhor estimador no sentido de menor vício, EQM e variância quando $n \in \{250, 500\}$ e resultados semelhantes aos do Whittle quando $n = 1000$. Quando $\theta_1 = -0.5$, o estimador MCMC é melhor em todos os sentidos e tamanhos amostrais que o BERAN, e possui resultados parecidos com os de Whittle para todos os tamanhos amostrais. Para os processos ARFIMA(p, d, q), com $p = 1 = q$, nos casos em que $\phi_1 \in \{-0.5, 0.5\}$ e $\theta_1 \in \{-0.5, 0.5\}$, ver Tabela 4.5 e 4.6, o estimador MCMC, em geral, apresenta melhores resultados, no sentido de menor vício, EQM e VAR, que o estimador BERAN, para todos os tamanhos amostrais e resultados semelhantes que o estimador Whittle para amostras de todos os tamanhos.

Referências

[1] Beran, J. (1995). "Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models". *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, Vol. **57**(4), pp. 659-672.

[2] Brockwell, P.J. e R.A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.

[3] Fox, R. e M.S. Taqqu (1986). "Large-sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series". *The Annals of Statistics*, Vol. **14**, pp. 517-532.

[4] Hosking, J.R.M. (1981). "Fractional Differencing". *Biometrika*, Vol. **68**(1), pp. 165-176.

[5] Shimotsu, K. e P.C.B. Phillips (2005). "Exact Local Whittle Estimation o Fractional Integration". *The Annals of Statistics*, Vol. **33**(4), pp. 1890-1933.