

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

CAROLINA DE ABREU PEREIRA

OBTENÇÃO DO PROPAGADOR DE FEYNMAN EM
TEORIAS QUÂNTICAS RELATIVÍSTICAS E
NÃO-RELATIVÍSTICAS

PORTO ALEGRE

2017

CAROLINA DE ABREU PEREIRA

OBTENÇÃO DO PROPAGADOR DE FEYNMAN EM
TEORIAS QUÂNTICAS RELATIVÍSTICAS E
NÃO-RELATIVÍSTICAS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como requisito necessário para obtenção do
grau de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Magno Valério Trindade
Machado

Porto Alegre, julho de 2017

Agradecimentos

Primeiramente, devo agradecer à toda minha família por ninguém duvidar de mim ou tentar me desencorajar quando decidi cursar Física. Vocês são incríveis!!!

Em especial, agradeço aos meus pais, Batata e Clari, e aos meus irmãos, Camila e Augusto, por sempre incentivar minha curiosidade e por nunca duvidar da minha capacidade, e, principalmente, pelo apoio incansável durante estes 4 anos e meio. Sei que não foi fácil para vocês.

Meu maior *muito obrigada* vai para três das minhas tias: à Gê, que abriu sua casa e seu coração para me acolher; à Sandrinha (Iaiá), que me apresentou desde muito cedo ao mundo acadêmico, me dando a chance de não só presenciar de perto, como também participar, da sua trajetória profissional, e que, além de tudo isso, sempre me deu total apoio quando necessitei; e à Angel (Teté), que esteve sempre presente.

À Camila, Natália, Marjana, Lisandra, Bruna e Luan: Obrigada pela amizade e companheirismo, mesmo de longe, durante estes anos de faculdade, mas tenho que aproveitar a oportunidade para agradecer mesmo é pelos anos anteriores, pois esses foram os mais difíceis, e graças à vocês eu sobrevivi.

Ao meu namorado Guilherme, obrigada pela compreensão e amor, tua presença foi crucial para que eu tenha conseguido aguentar firme.

Agradeço também ao Magno, pela orientação e pelas respostas rápidas e atenciosas.

Não posso deixar de agradecer ao pessoal da FURG: Jhordan, Geferson, Dani e Bruno, não sei se teria continuado sem a amizade do início do curso.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo calcular exemplos de Propagadores de Feynman na Mecânica Quântica (MQ) não-relativística e relativística. O papel do propagador é dar a amplitude de transição de uma partícula de um ponto à outro do espaço-tempo. No caso não relativístico, o propagador, também chamado de *kernel*, é a Função de Green da Equação de Schrödinger referente à partícula. Na Teoria Quântica de Campos, ele é a Função de Green da equação do campo. No presente trabalho iremos apresentar o cálculo dos propagadores não-relativísticos da partícula livre e do oscilador harmônico de duas maneiras diferentes. No contexto da MQ relativística, iremos mostrar o cálculo do propagador do campo escalar livre, referente à Equação de Klein-Gordon, e do campo do elétron livre, que corresponde à Equação de Dirac.

Palavras-chave: Mecânica Quântica, Propagadores, Teoria Quântica de Campos, Klein-Gordon, Dirac.

Abstract

The main objective of this work is to calculate examples of Feynman propagators in non-relativistic and relativistic Quantum Mechanics (QM). The propagator gives the amplitude for a particle to travel from a point in space-time to another. In non-relativistic QM, the propagator, also known as kernel, is the Green's function of the particle's Schrödinger equation. In Quantum Field Theory, the kernel is the Green's function of the field equation. This work will present the calculation of the non-relativistic propagator for the cases of a free particle and the harmonic oscillator. Regarding relativistic QM, we will calculate the propagator of the free scalar field and the free electron field.

Keywords: Quantum Mechanics, Propagators, Quantum Field Theory, Klein-Gordon, Dirac.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	7
2	PROPAGADORES NÃO-RELATIVÍSTICOS	9
2.1	Mecânica Quântica e Funções de Green	9
2.2	Solução Perturbativa para Espalhamento	12
2.3	Propagador da Partícula Livre	13
2.4	Propagador do Oscilador Harmônico	14
2.5	Método das Integrais de Caminho de Feynman	15
2.5.1	Partícula Livre	15
2.5.2	Oscilador Harmônico	17
3	PROPAGADORES RELATIVÍSTICOS	19
3.1	Propagador do Campo Escalar Livre	19
3.2	Propagador de Dirac	24
3.2.1	Cálculo do Propagador	24
3.2.2	Espalhamento Compton:	26
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	30
	REFERÊNCIAS	31

1 Introdução

Quando estamos tratando de Mecânica Quântica (MQ) não-relativística, o propagador nos dá a amplitude de transição da partícula de um ponto do espaço à outro em um dado intervalo de tempo. O propagador de uma partícula é a Função de Green da Equação de Schrödinger, que é independente da função de onda inicial do sistema. Tendo conhecimento do propagador e do estado inicial da partícula, podemos descrever completamente a evolução temporal desta partícula, a menos que o sistema sofra uma perturbação [1].

As Funções de Green foram apresentadas por George Green em 1828, em seu primeiro trabalho publicado [2]. Estas funções são muito utilizadas na resolução de equações diferenciais não-homogêneas, e na física desempenham um grande papel na solução de problemas de eletrodinâmica, por exemplo. Neste tipo de problema costumamos calcular o efeito de uma carga pontual sobre o sistema, calculando-se a Função de Green, e então podemos obter o efeito da corrente total. Semelhante à isto ocorre na MQ não-relativística, quando utilizamos as funções de Green para resolver problemas de espalhamento através de uma solução iterativa da função de onda, onde podemos decompor o potencial espalhador como sucessivas perturbações.

No Capítulo 2, tratamos dos propagadores não-relativísticos, onde primeiramente apresentaremos os conceitos básicos de MQ e Funções de Green, e obteremos a forma genérica do propagador da Equação de Schrödinger. A seguir, calcularemos o propagador para casos menos complexos como a partícula livre e o oscilador harmônico de uma forma simples a partir das funções de onda. Há diferentes métodos de se calcular propagadores, três deles são aplicados ao oscilador harmônico em [3]: entre eles está o método de Schwinger [4], o método algébrico [5], e o método das integrais de caminho de Feynman [6]. Usaremos este último para calcular novamente os propagadores da partícula livre e do oscilador harmônico. Este método é importante por estar mais próximo da Mecânica Clássica e por ser usado também na Teoria Quântica de Campos (TQC).

Tratando de MQ Relativística, os propagadores aparecem na Teoria Quântica de Campos. Eles são usados nos cálculos dos diagramas de Feynman, onde são as amplitudes de transição de partículas virtuais, representadas por linhas internas nos diagramas. O propagador de Feynman é importante pois ele representa tanto uma partícula quanto uma antipartícula, também existem outros tipos de propagadores, como o retardado e o avançado. Uma partícula propagando-se do passado para o futuro é descrita pelo propagador retardado, já uma antipartícula propagando-se do futuro para o passado é representada por um propagador avançado, considerando que ambas possuam energia total positiva.

Neste trabalho, exploraremos duas equações de campo importantes historicamente: a equação de Klein-Gordon e a equação de Dirac. Em 1926, Klein e Gordon, independentemente, desenvolveram a conhecida equação de Klein-Gordon, que tem como principal característica ser a primeira equação da MQ invariante frente as transformações de Lorentz. Esta equação também é famosa pelo suposto problema que surge na sua resolução, a solução com energia negativa, que na época foi vista como uma solução não-física, e consequentemente um problema na teoria. Outro problema com a equação de Klein-Gordon é a densidade de probabilidade negativa [7].

Posteriormente, em 1928, Dirac buscou obter uma equação relativística para a MQ que não envolvesse segundas derivadas no tempo, ou seja, ele buscou uma forma de "tirar a raiz" da equação de Klein-Gordon. A equação obtida por Dirac não tinha como solução uma função escalar, e sim um spinor de 4 componentes. Como consequência, a propriedade spin das partículas surge naturalmente na solução da equação. No Capítulo 3, calcularemos os propagadores dos campos associados às equações de Klein-Gordon e de Dirac, também usaremos o propagador no elétron no cálculo da seção de choque do espalhamento Compton.

2 Propagadores Não-Relativísticos

2.1 Mecânica Quântica e Funções de Green

Serão apresentados aqui alguns conceitos básicos de Mecânica Quântica e de Funções de Green, assim como será definido o conceito de propagadores.

Na Mecânica Quântica lidamos com problemas de autovalores, nos quais as grandezas observáveis são operadores hermitianos e as medidas obtidas são seus respectivos autovalores. Os autoestados do sistema são dados pelos autovetores do operador em questão, que formam um conjunto completo ortonormal genérico $\{\phi\}$. O espectro de autovalores de um operador pode ser discreto e/ou contínuo. Quando associado à um espectro de autovalores discreto, um estado pode ser caracterizado somente por seu número quântico n , independente de representações, para isso utilizamos a notação de *bra* e *ket* de Dirac. As representações das autofunções que utilizaremos neste texto são no espaço de coordenadas espaciais e no espaço de momento.

Como nosso principal objetivo na Mecânica Quântica é resolver problemas envolvendo a Equação de Schrödinger, vamos definir o operador de Schrödinger e seus autoestados, então definiremos o propagador especialmente para a equação de Schrödinger com espectro discreto de autoenergias [8].

$$\begin{aligned}\hat{H}|\psi(t)\rangle &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle \\ \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right]|\psi(t)\rangle &= 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

Aqui $|\psi(t)\rangle$ é uma autofunção do Hamiltoniano evoluída no tempo através do operador unitário de evolução temporal \hat{U} . Este operador \hat{U} leva um estado arbitrário $|t'\rangle$ à $|t\rangle$, com $t' < t$ [9]:

$$|t\rangle = \hat{U}|t'\rangle \quad (2.2)$$

Este operador é também a solução da Equação de Schrödinger, para quando é \hat{H} independente do tempo.

$$i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t} = \hat{H}\hat{U} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}\hat{U} &= e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^t \hat{H}d\bar{t}} \\ \hat{U} &= e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t')\hat{H}}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Ainda para \hat{H} independente do tempo, podemos escrever qualquer estado $|\psi(t)\rangle$ que satisfaça a equação (2.1) como uma combinação linear das soluções da Equação de

Schrödinger independente do tempo.

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (2.5)$$

Onde o operador \hat{H} no caso unidimensional é:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \\ \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (2.7)$$

os coeficientes c_n são amplitudes de probabilidade com o vínculo $\sum_n |c_n|^2 = 1$, visto que o conjunto $\{n\}$ dos autoestados de \hat{H} satisfaz as condições de ortonormalidade e completiza:

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \quad (2.8)$$

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = 1, \quad (2.9)$$

c_n é, portanto, um coeficiente complexo que necessita ser encontrado. Para tanto, multiplicamos a expressão anterior por $\langle m|$.

$$\begin{aligned} \langle m|\psi(t)\rangle &= \sum_n c_n \langle m|n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} \\ &= \sum_n c_n \delta_{nm} e^{-iE_n t/\hbar} \\ &= c_m e^{-iE_m t/\hbar} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Portanto, podemos obter c_m pela seguinte expressão:

$$c_m = e^{iE_m t/\hbar} \langle m|\psi(t)\rangle \quad (2.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.7) obtivemos a expressão completa para uma autofunção do Hamiltoniano.

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \langle n|\psi(t')\rangle e^{-iE_n(t-t')/\hbar} |n\rangle \quad (2.12)$$

Agora representaremos este estado nas autofunções do operador posição \hat{x} , o qual possui um espectro contínuo. Suas autofunções também obedecem às condições de ortonormalidade e completiza:

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}'\rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.13)$$

$$\int d^3x |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}| = 1 \quad (2.14)$$

Multiplicamos a equação (2.12) pelo lado esquerdo por $\langle \mathbf{x} |$ e inserindo a identidade (2.14):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle &= \sum_n \langle n | \psi(t') \rangle \langle \mathbf{x} | n \rangle e^{-iE_n(t-t')/\hbar} \\ &= \int d^3x' \sum_n \langle n | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | \psi(t') \rangle \langle \mathbf{x} | n \rangle e^{-iE_n(t-t')/\hbar} \\ &= \int d^3x' \left(\sum_n \langle n | \mathbf{x}' \rangle e^{-iE_n(t-t')/\hbar} \langle \mathbf{x} | n \rangle \right) \langle \mathbf{x}' | \psi(t') \rangle \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nesta expressão podemos identificar o *kernel* (núcleo) $K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ da função de onda como a quantidade contida entre parênteses.

$$K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \sum_n \langle n | \mathbf{x}' \rangle e^{-iE_n(t-t')/\hbar} \langle \mathbf{x} | n \rangle \quad (2.16)$$

$$= \sum_n \phi_n(\mathbf{x}')^* e^{-iE_n(t-t')/\hbar} \phi_n(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

Em (2.17) mudamos a notação, fazendo $\phi_n(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{x} | n \rangle$.

De uma forma mais geral, o *kernel* também pode ser escrito somente em função dos autoestados de \hat{x} , independente do tipo de espectro do Hamiltoniano.

$$K(x, t; x', t') = \langle x | e^{-i\hat{H}(t-t')/\hbar} | x' \rangle \quad (2.18)$$

O *kernel* é o propagador da partícula, o que nada mais é do que a Função de Green do operador Hamiltoniano.

Uma Função de Green é a solução de uma equação diferencial não-homogênea correspondente a um "impulso". A solução de um problema pode então ser obtida se tivermos conhecimento da Função de Green do operador [10]. Exemplificamos, a seguir, a solução de uma equação definida pelo operador diferencial \hat{L} , que atua sobre variável t , com parte não-homogênea $f(t)$ e solução $x(t)$:

$$\hat{L} x(t) = f(t) \quad (2.19)$$

$$\hat{L} G(t, u) = \delta(t - u), \quad (2.20)$$

onde $G(t, u)$ é a solução da equação para o impulso $\delta(t - u)$, com u sendo uma variável auxiliar. Podemos construir a solução $x(t)$ como uma integral da solução de vários impulsos, tendo como peso a função $f(u)$.

$$x(t) = \int du G(t, u) f(u) \quad (2.21)$$

Podemos demonstrar que (2.21) é solução de (2.19):

$$\hat{L} x(t) = \hat{L} \int du G(t, u) f(u) \quad (2.22)$$

$$= \int du (\hat{L} G(t, u)) f(u), \quad (2.23)$$

agora substituímos (2.20) em (2.23):

$$\hat{L}x(t) = \int du \delta(t-u) f(u) \quad (2.24)$$

$$\hat{L}x(t) = f(t). \quad (2.25)$$

A função de Green de um problema é referente tanto ao operador linear quanto às condições de contorno. No caso dos propagadores, a condição de contorno é a de que $K(\mathbf{x}', \mathbf{x}; t = t') = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$. Isto é devido ao propagador ser a amplitude da partícula estar em certa posição no tempo $t = t'$, a qual deve ser a posição inicial x' com probabilidade igual à 1.

Também devemos impor que soluções para $t' > t$ não sejam válidas, pois isso significaria que a partícula está voltando no tempo. Portanto, adicionamos a função degrau de Heaviside em nosso propagador, a qual é definida abaixo.

$$\Theta(t - t') = \begin{cases} 1 & t \geq t' \\ 0 & t < t' \end{cases} \quad (2.26)$$

Então nosso propagador retardado $G^+(x, x'; t, t')$ fica:

$$G^+(x, x'; t, t') = \Theta(t - t')K(x, t; x', t'). \quad (2.27)$$

2.2 Solução Perturbativa para Espalhamento

Podemos resolver um problema de espalhamento considerando o potencial espalhador como sucessivas pequenas perturbações. Vamos considerar a equação de Schrödinger, com a parte não homogênea $V(\mathbf{r})$ sendo o potencial espalhador [11]:

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar} V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), \quad (2.28)$$

onde $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, sendo E a energia da partícula livre. Temos que $G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é a função de Green retardada desta equação:

$$(\nabla^2 + k^2) G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.29)$$

A solução da equação de Schrödinger pode ser escrita como:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{2m}{\hbar} \int d^3r' G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'), \quad (2.30)$$

aqui, $\psi^{(0)}(\mathbf{r})$ é a solução da equação homogênea.

A equação (2.30) é a forma integral da Equação de Schrödinger, que pode ser resolvida de maneira iterativa. Sua solução é chamada solução de Lippman-Schwinger, e o termo de primeira ordem da solução fica:

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = \psi^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{2m}{\hbar} \int d^3r' G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi^{(0)}(\mathbf{r}'), \quad (2.31)$$

então usa-se este termo como solução para obter o termo de segunda ordem e assim sucessivamente, por quantas ordens for desejado. A solução completa é:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) = & \psi^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{2m}{\hbar} \int d^3r' G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi^{(0)}(\mathbf{r}') \\ & + \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^2 \iint d^3r' d^3r'' G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') G^+(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') V(\mathbf{r}'') \psi^{(0)}(\mathbf{r}'') + \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.3 Propagador da Partícula Livre

Para ilustrar a obtenção de propagadores vamos, primeiramente, calculá-los para problemas simples da Mecânica Quântica não-relativística.

Combinando as equações (2.1) e (2.6), com $V(x) = 0$, temos a equação para a partícula livre:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \psi(x, t) = 0 \quad (2.33)$$

Podemos obter o propagador da partícula livre diretamente da definição do propagador [1]. Neste caso, o operador Hamiltoniano comuta com o operador momento \hat{p} , ou seja, eles possuem a mesma base de autovetores de estado:

$$\hat{p} |p\rangle = p |p\rangle \quad \hat{H} |p\rangle = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} \right) |p\rangle \quad (2.34)$$

Inserimos agora a condição de completeza de $\{p\}$ em (2.18):

$$\begin{aligned} K(x, t; x', t') &= \int dp' \langle x|p'\rangle \langle p'| e^{-i\hat{H}(t-t')/\hbar} |x'\rangle \\ &= \int dp' \langle x|p'\rangle e^{-ip'^2(t-t')/2m\hbar} \langle p'|x'\rangle \end{aligned} \quad (2.35)$$

Para calcular K precisamos conhecer os termos $\langle x|p'\rangle$ e $\langle p'|x'\rangle$. Eles nada mais são que o coeficiente da Transformada de Fourier do espaço de coordenadas para o espaço de momento [1]:

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ixp/\hbar} \quad (2.36)$$

Inserindo (2.36) em (2.35):

$$K(x, t; x', t') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp' e^{ixp'/\hbar} e^{-ip'^2(t-t')/2m\hbar} e^{ix'p'/\hbar} \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp' \exp\left\{ \frac{ip'(x-x')}{\hbar} - \frac{ip'^2(t-t')}{2m\hbar} \right\} \quad (2.38)$$

Integrando esta equação encontramos o propagador para a partícula livre:

$$K(x, x'; t, t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t-t')}} \exp\left\{ \frac{im(x-x')^2}{2\hbar(t-t')} \right\} \quad (2.39)$$

2.4 Propagador do Oscilador Harmônico

Outro exemplo de propagador é o problema do oscilador harmônico, cujo Hamiltoniano é:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2 \quad (2.40)$$

As autofunções do oscilador harmônico são

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right); \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.41)$$

onde H_n são os polinômios de Hermite:

$$H_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad (2.42)$$

e as autoenergias são

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.43)$$

Usando (2.41) em (2.17), o propagador para o problema do oscilador harmônico fica:

$$K(x, x'; t, t') = \sum_n e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})(t-t')} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2 + x'^2)\right) \times \\ \times H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x'\right). \quad (2.44)$$

Podemos identificar parte desta expressão como o Kernel de Mehler [1], que nos possibilita "eliminar" os polinômios de Hermite do propagador.

$$\exp[-(k^2 + l^2)] \sum_n \frac{\rho^n}{2^n n!} H_n(k) H_n(l) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{-(k^2 + l^2 - 2\rho kl)}{1-\rho^2}\right] \quad (2.45)$$

Para utilizar esta relação fazemos $k = x(m\omega/\hbar)^{1/2}$, $l = x'(m\omega/\hbar)^{1/2}$ e $\rho = e^{-i\omega(t-t')}$; então reescrevemos o kernel como:

$$K(x, x'; t, t') = \sum_n e^{-i\omega(t-t')/2} \frac{\rho^n}{2^n n!} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(k^2 + l^2)\right) H_n(k) H_n(l). \quad (2.46)$$

O propagador resultante é:

$$K(x, x'; t, t') = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin[\omega(t-t')]} \exp\left[\left\{\frac{im\omega}{2\hbar \sin[\omega(t-t')]} \right\} \{(x^2 + x'^2) \cos[\omega(t-t')] - 2x'x\}\right]}. \quad (2.47)$$

Nas duas últimas sessões, obtivemos os propagadores para a partícula livre e para o oscilador harmônico a partir de suas funções de onda, de acordo com a definição do kernel (2.17). A seguir calcularemos os propagadores para ambos casos partindo de integrais de caminho.

2.5 Método das Integrais de Caminho de Feynman

No formalismo de integrais de caminho temos como objetivo calcular as quantidades físicas de um sistema a partir da ação, esta sendo a integral da Lagrangiana no tempo:

$$S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_N} \mathcal{L}(t) dt \quad (2.48)$$

$$= \int_{t_0}^{t_N} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - V(x(t)) \right] dt. \quad (2.49)$$

Nesta abordagem, a expressão para o propagador se dá na forma de uma integral de caminho em função da ação [12]:

$$K(x_N, t_N; x_0, t_0) = \int_{x_0}^{x_N} \exp\{iS[x(t)]/\hbar\} [Dx], \quad (2.50)$$

onde definimos $x_j \equiv x(t_j)$ e temos que $[Dx]$ é chamado medida funcional [3]:

$$\int_{x_0}^{x_N} [Dx] \equiv \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon i} \right)^{1/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon i} \right)^{1/2} dx_j \quad (2.51)$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon i} \right)^{N/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j, \quad (2.52)$$

o qual indica a integração sobre todos os caminhos possíveis, pois, para cada ponto do caminho associado a um tempo infinitesimal t_j , integra-se sobre todo o espaço, considerando assim todas as possibilidades de valores para cada ponto.

A ação $S[x(t)]$ é um funcional do caminho $x(t)$, e então para calcular o propagador levamos em conta todos os caminhos que levam de $x(t_0)$ a $x(t_N)$, discretizando ambas coordenadas. Nesta aproximação o caminho passa a ser especificado pelos valores $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_N)$, com $t_n = t_0 + n\varepsilon$, onde $n = 0, 1, \dots, N$ e $\varepsilon = (t_N - t_0)/N$ [12]. A seguir iremos obter os propagadores para os problemas da partícula livre e do oscilador harmônico utilizando o método das integrais de caminho, o primeiro pode ser encontrado em [12] e o segundo em [3].

2.5.1 Partícula Livre

O primeiro passo para calcular o propagador é discretizar a ação. No caso da partícula livre, a única contribuição para a lagrangiana do sistema é a energia cinética, portanto, a ação discretizada fica

$$S \cong \sum_{j=0}^{N-1} \frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\varepsilon} \right)^2 \varepsilon. \quad (2.53)$$

Para o propagador teremos:

$$K(x_N, t_N; x_0, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon i} \right)^{N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{\varepsilon} \right\} dx_1 \dots dx_{N-1}. \quad (2.54)$$

Agora, faremos a seguinte mudança de variáveis:

$$x_i = \left(\frac{2\hbar\varepsilon}{m} \right)^{1/2} y_i, \quad (2.55)$$

de tal forma que (2.54) fica

$$K(x_N, t_N; x_0, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\frac{m}{2\hbar\varepsilon} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{i\pi} \right)^{N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \sum_{j=0}^{N-1} (y_{j+1} - y_j)^2 \right\} dy_1 \dots dy_{N-1}. \quad (2.56)$$

Primeiramente resolveremos a integral para y_1 e em seguida para y_2 , a fim de encontrar um padrão no resultado das integrais. A contribuição de y_1 é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left[(y_1 - y_0)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right] \right\} dy_1 = \left(\frac{i\pi}{2} \right)^{1/2} e^{i(y_2 - y_0)^2/2}. \quad (2.57)$$

A contribuição de y_2 , levando em conta o resultado da integral anterior, é:

$$\left(\frac{i\pi}{2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left[\frac{(y_2 - y_0)^2}{2} + (y_3 - y_2)^2 \right] \right\} dy_2 = \left(\frac{(i\pi)^2}{3} \right)^{1/2} e^{i(y_3 - y_0)^2/3}. \quad (2.58)$$

Comparando (2.58) com (2.57), podemos deduzir que o resultado da integral do propagador será

$$\frac{(i\pi)^{(N-1)/2}}{N^{1/2}} e^{i(y_N - y_0)^2/N}, \quad (2.59)$$

e o propagador completo:

$$K(x_N, t_N; x_0, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\frac{m}{2\hbar\varepsilon} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{i\pi} \right)^{N/2} \frac{(i\pi)^{(N-1)/2}}{N^{1/2}} \exp \left\{ i \frac{(y_N - y_0)^2}{N} \right\} \quad (2.60)$$

$$= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon N} \right)^{1/2} \exp \left\{ i \left(\frac{m}{2\hbar\varepsilon N} \right) (x_N - x_0)^2 \right\}. \quad (2.61)$$

Nos limites $N \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que manter a relação $\varepsilon N = (t_N - t_0)$, portanto:

$$K(x_N, t_N; x_0, t_0) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_N - t_0)} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im(x_N - x_0)^2}{2\hbar(t_N - t_0)} \right\}, \quad (2.62)$$

que coincide com o resultado obtido em (2.39).

2.5.2 Oscilador Harmônico

Nesta subseção, iremos calcular mais uma vez o propagador do oscilador harmônico unidimensional, agora usando o método das integrais de caminho. Faremos algumas modificações em relação à abordagem usada para calcular o propagador da partícula livre. Definimos $\tau \equiv (t_N - t_0) = N\varepsilon$, assim como o j -ésimo intervalo de tempo infinitesimal $\tau = \sum_{j=1}^N \tau_j$. A ação discretizada fica:

$$S \cong \sum_{j=1}^N \frac{m(x_j - x_{j-1})^2}{2\tau_j} - \frac{\tau_j}{2} [V(x_j) + V(x_{j-1})]. \quad (2.63)$$

Agora iremos expressar o propagador total como um produto de propagadores, um para cada intervalo infinitesimal τ_j .

$$K(x_N, x_0; \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N K(x_j, x_{j-1}; \tau_j) \prod_{k=1}^{N-1} dx_k. \quad (2.64)$$

Cada propagador infinitesimal para o oscilador harmônico tem a forma:

$$K(x_N, x_0; \tau) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \tau_j} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m}{2\tau_j} (x_j - x_{j-1})^2 - \frac{\tau_j m \omega^2}{4} (x_j^2 + x_{j-1}^2) \right] \right\}. \quad (2.65)$$

Escreveremos o propagador de tal forma que, em seguida, possamos identificar uma fórmula de recorrência.

$$K(x_N, x_0; \tau) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\omega \tau_j} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar} \frac{1}{\omega \tau_j} \left[\left(1 - \frac{\tau_j^2 \omega^2}{2} \right) (x_j^2 + x_{j-1}^2) - 2x_j x_{j-1} \right] \right\}. \quad (2.66)$$

Nosso objetivo é fazer uma transformação de coordenadas para colocar (2.66) na seguinte forma [3]:

$$F(\eta, \eta'; \phi) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\sin \phi} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar} \frac{1}{\sin \phi} [\cos \phi (\eta^2 + \eta'^2) - 2\eta \eta'] \right\}, \quad (2.67)$$

pois esta função possui a propriedade de que a integral da convolução de várias F resulta em uma função do mesmo formato:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\eta'', \eta; \phi'') F(\eta, \eta'; \phi') d\eta = F(\eta'', \eta'; \phi'' + \phi'), \quad (2.68)$$

o que viabiliza o cálculo do propagador total do oscilador harmônico.

Podemos fazer a transformação:

$$\sin \phi_j = \omega \tau_j, \quad (2.69)$$

como τ_j é infinitesimal podemos usar as aproximações $\cos \phi_j \cong 1 - \frac{\omega^2 \tau_j^2}{2}$ e $\phi_j \cong \omega \tau_j$. Então o propagador total se torna:

$$K(x_N, x_0; \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N F(x_j, x_{j-1}; \phi_j) \prod_{k=1}^{N-1} dx_k, \quad (2.70)$$

usando (2.68) obtemos a expressão final para $K(x_N, x_0; \tau)$:

$$K(x_N, x_0; \tau) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega\tau)} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar \sin(\omega\tau)} [\cos(\omega\tau)(x_N^2 + x_0^2) - 2x_N x_0] \right\}, \quad (2.71)$$

que também coincide com o valor obtido anteriormente em (2.47).

Nesta sessão calculamos o propagador de uma partícula através de uma integral funcional, somando todas as possibilidades de caminhos para uma partícula viajar de um ponto do espaço a outro em um determinado tempo. O formalismo de integrais de caminho de Feynman também desempenha um importante papel na teoria quântica de campos, onde também é utilizado no cálculo dos propagadores. No próximo capítulo iremos introduzir o assunto da teoria quântica de campos e calcularemos dois exemplos de propagadores.

3 Propagadores Relativísticos

A Teoria Quântica de Campos surgiu como a solução para incorporar a Relatividade Especial à Mecânica Quântica. Ao tentar somente inserir os operadores da MQ na relação de energia, momento e massa da Relatividade Restrita, encontramos estados de energia negativa e a densidade de probabilidade não é conservada.

As soluções para as equações da MQ em forma de função de onda para uma única partícula são substituídas por campos, uma quantidade que possui um valor para cada ponto do espaço. Para quantizar os campos realiza-se a "segunda quantização", processo no qual os campos são transformados em operadores de campo, onde são impostas novamente relações de comutação (ou anti-comutação).

Neste capítulo serão calculados alguns propagadores da TQC, como o propagador do campo escalar livre e do elétron, referentes à equação de Klein-Gordon e de Dirac, respectivamente.

3.1 Propagador do Campo Escalar Livre

O exemplo mais simples de um campo com o qual podemos lidar é o campo escalar livre, ou o campo de Klein-Gordon, que trata de partículas de spin-0 e é descrito pela Equação de Klein-Gordon.

$$(\partial^2 + m^2) \phi(x) = 0 \quad (3.1)$$

Trataremos do campo escalar livre complexo, o qual pode ser expandido em seus modos de oscilação [7]:

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^+(x) + \hat{\phi}^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2E_{\mathbf{p}})^{1/2}} (\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}); \quad (3.2)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \hat{\phi}^{\dagger+}(x) + \hat{\phi}^{\dagger-}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2E_{\mathbf{p}})^{1/2}} (\hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}). \quad (3.3)$$

Onde x e p são vetores no espaço de Minkowski, com o produto xp definido como $\sum_{\mu} x_{\mu}p^{\mu}$, e os operadores são:

- $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ e $\hat{b}_{\mathbf{p}}$: operadores de aniquilação de uma partícula e de uma antipartícula com momento \mathbf{p} , respectivamente;
- $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$ e $\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger$: operadores de criação de uma partícula e de uma antipartícula com momento \mathbf{p} , respectivamente;

Estes operadores agem sobre estados de muitas partículas no espaço de Fock ¹, onde o estado de menor energia $|0\rangle$ simboliza o vácuo. Então a ação dos operadores de aniquilação sobre este estado fica $\hat{a}_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$ e $\hat{b}_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$.

Os comutadores entre os operadores de criação e aniquilação serão importantes ao longo da derivação do propagador:

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger\right] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}'}^\dagger\right] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (3.4)$$

O propagador de Feynman pode ser obtido a partir do valor esperado no vácuo do produto ordenado dos operadores de campo [13],

$$\Delta_F(x - y) = \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle , \quad (3.5)$$

lembrando que ele é também uma Função de Green da Equação de Klein-Gordon e é uma quantidade invariante de Lorentz. É importante notar que o propagador pode ser definido com um fator i multiplicado pela sua esquerda em vários textos, embora não haja um padrão de notação.

Para dois vetores \hat{A} e \hat{B} dependentes do tempo, o símbolo do produto ordenado de Wick é definido como [10]:

$$T\hat{A}(x)\hat{B}(y) = \Theta(x^0 - y^0)\hat{A}(x)\hat{B}(y) \pm \Theta(y^0 - x^0)\hat{B}(y)\hat{A}(x) ; \quad (3.6)$$

Onde o sinal “ \pm ” em (3.6) depende do caráter bosônico (sinal positivo) ou fermiônico (sinal negativo) das partículas. Neste caso estamos tratando de bósons. Após o ordenamento temporal e o cancelamento de termos devido aos operadores de aniquilação, o que resta é:

$$\Delta_F(x - y) = \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \hat{\phi}^\dagger(y) \hat{\phi}(x) | 0 \rangle . \quad (3.7)$$

Para prosseguir o cálculo, vamos definir as funções Δ^+ e Δ^- , as quais serão relacionadas com Δ_F em seguida [14].

$$\Delta^\pm(x - y) \equiv \left[\phi^\pm(x), \phi^{\dagger\mp}(y) \right] , \quad (3.8)$$

onde $\phi^+(x)$ e $\phi^{\dagger+}(x)$ são, respectivamente, proporcionais a $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ e $\hat{b}_{\mathbf{p}}$. Já $\phi^-(x)$ e $\phi^{\dagger-}(x)$ são proporcionais a $\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger$ e $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$.

Calculamos agora o comutador positivo, o qual é referente aos operadores \hat{a} , onde usaremos as relações de comutação (3.4).

$$\Delta^+(x - y) = \left[\phi^+(x), \phi^{\dagger-}(y) \right] = \iint \frac{d^3p d^3p'}{2(2\pi)^3(E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'})^{1/2}} \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] e^{-ipx} e^{ip'y} \quad (3.9)$$

$$= \int \left(\int \frac{d^3p'}{2(2\pi)^3(E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'})^{1/2}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') e^{ip'y} \right) e^{-ipx} d^3p \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{e^{-ip(x-y)}}{E_{\mathbf{p}}} d^3p . \quad (3.11)$$

¹ Espaço de Fock é definido como a soma direta de todos espaços de Hilbert de n -partículas.

O cálculo para $\Delta^-(x-y)$ é análogo ao anterior.

$$\Delta^-(x-y) = [\phi^-(x), \phi^{\dagger+}(y)] = \iint \frac{d^3p d^3p'}{2(2\pi)^3 (E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'})^{1/2}} [\hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger}, \hat{b}_{\mathbf{p}'}] e^{-ipx} e^{ip'y} \quad (3.12)$$

$$= \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int \frac{e^{ip(x-y)}}{E_{\mathbf{p}}} d^3p. \quad (3.13)$$

Por fim temos que:

$$\Delta^{\pm} = \frac{\pm 1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{\mp ip(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}} d^3p. \quad (3.14)$$

Para manter a clareza, faremos a substituição de $\hat{\phi}(x) \rightarrow \hat{\phi}_x$. Voltando para o propagador de Feynman, vamos abrir as expressões para $(x-y) > 0$ e depois para $(x-y) < 0$. Para o primeiro caso, a expansão em operadores de frequência positiva e negativa é:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\phi}_x \hat{\phi}_y^{\dagger} | 0 \rangle &= \langle 0 | (\hat{\phi}_x^+ + \hat{\phi}_x^-) \times (\hat{\phi}_y^{\dagger+} + \hat{\phi}_y^{\dagger-}) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (\hat{\phi}_x^+ \hat{\phi}_y^{\dagger+} + \hat{\phi}_x^+ \hat{\phi}_y^{\dagger-} + \hat{\phi}_x^- \hat{\phi}_y^{\dagger+} + \hat{\phi}_x^- \hat{\phi}_y^{\dagger-}) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Analizando os termos um a um, teremos que os operadores $\hat{\phi}_x^{\dagger+}$ e $\hat{\phi}_x^+$ sempre aniquilam o estado de vácuo à sua direita, e os operadores $\hat{\phi}_x^-$ e $\hat{\phi}_x^{\dagger-}$ aniquilam o estado de vácuo à sua esquerda. Os termos restantes serão:

$$\langle 0 | \hat{\phi}_x \hat{\phi}_y^{\dagger} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}_x^+ \hat{\phi}_y^{\dagger-} | 0 \rangle, \quad (3.16)$$

onde podemos adicionar um termo nulo :

$$\langle 0 | \hat{\phi}_x \hat{\phi}_y^{\dagger} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}_x^+ \hat{\phi}_y^{\dagger-} | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{\phi}_y^{\dagger-} \hat{\phi}_x^+ | 0 \rangle \quad (3.17)$$

$$= \langle 0 | [\hat{\phi}_x^+, \hat{\phi}_y^{\dagger-}] | 0 \rangle \quad (3.18)$$

$$= \Delta^+(x-y). \quad (3.19)$$

Obtivemos uma relação entre o propagador de Feynman e a função Δ^+ que havíamos definido. Podemos fazer o mesmo procedimento com o segundo termo de $\Delta_F(x-y)$.

$$\langle 0 | \hat{\phi}_y^{\dagger} \hat{\phi}_x | 0 \rangle = \langle 0 | [\hat{\phi}_y^{\dagger+}, \hat{\phi}_x^-] | 0 \rangle \quad (3.20)$$

$$= -\Delta^-(x-y). \quad (3.21)$$

Agora possuímos uma relação direta entre a propagação do futuro para o passado e as antipartículas, estas sendo representadas por Δ^- . Então o propagador de Feynman pode ser escrito como

$$\Delta_F(x-y) = \Theta(x-y)\Delta^+(x-y) - \Theta(y-x)\Delta^-(x-y). \quad (3.22)$$

O propagador agora é formado por duas integrais no espaço separadas por Funções de Heaviside. Podemos expressá-lo como uma só integral em quatro dimensões no espaço-tempo, dependendo da escolha de contorno apropriado no plano complexo.

$$\Delta_F(x-y) = \int_{C_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (3.23)$$

Independente do contorno escolhido, esta integral é uma Função de Green da Equação de Klein-Gordon. Mostraremos a seguir como as equações (3.22) e (3.23) são equivalentes. Podemos notar que durante a integração encontraremos pólos em $p = \pm m$, a escolha em como deformar estes pólos é que irá resultar no ordenamento temporal desejado. Podemos reescrevê-los partindo da relação de dispersão da Relatividade Restrita e a definição de quadrimomento:

$$E_{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2; \quad p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2. \quad (3.24)$$

Então substituímos p^2 e m^2 no denominador de (3.23).

$$\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{p_0^2 - E_{\mathbf{p}}^2} = \frac{1}{(p_0 + E_{\mathbf{p}})(p_0 - E_{\mathbf{p}})} \quad (3.25)$$

Agora, temos os pólos localizados em $p_0 = \pm E_{\mathbf{p}}$. Para obter o propagador de Feynman escolhemos deslocar os polos da seguinte maneira:

$$p_0 = -E_{\mathbf{p}} \quad \rightarrow \quad p_0 = -E_{\mathbf{p}} + i\epsilon \quad (3.26)$$

$$p_0 = +E_{\mathbf{p}} \quad \rightarrow \quad p_0 = E_{\mathbf{p}} - i\epsilon \quad (3.27)$$

Separamos a integral $\Delta_F(x-y)$ na parte espacial e temporal:

$$\Delta_F(x-y) = \int_{C_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p_0 + E_{\mathbf{p}} - i\epsilon)(p_0 - E_{\mathbf{p}} + i\epsilon)} e^{-ip(x-y)} \quad (3.28)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \oint_{C_F} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}}{(p_0 + E_{\mathbf{p}} - i\epsilon)(p_0 - E_{\mathbf{p}} + i\epsilon)} \quad (3.29)$$

Quando $x_0 > y_0$, para que a integral convirja, o contorno passando pela reta real deve ser fechado por um semi-círculo no eixo negativo de $\text{Im}\{p_0\}$ com raio $R \rightarrow \infty$, como mostra a Figura 1. Este contorno (C_R) somente engloba o polo $p_0 = +E_{\mathbf{p}}$, então de acordo com o Teorema dos Resíduos temos que a integral em p_0 é igual à $-2\pi i \times \text{Resíduo}(+E_{\mathbf{p}})$, o sinal negativo é devido ao sentido do contorno. Então, para $x_0 > y_0$, fazendo $\epsilon \rightarrow +0$:

$$\oint_{C_R} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}}{(p_0 + E_{\mathbf{p}} - i\epsilon)(p_0 - E_{\mathbf{p}} + i\epsilon)} = \frac{e^{-iE_{\mathbf{p}}(x_0-y_0)} e^{-\epsilon(x_0-y_0)}}{2(E_{\mathbf{p}} - i\epsilon)} \quad (3.30)$$

$$= \frac{e^{-iE_{\mathbf{p}}(x_0-y_0)}}{2E_{\mathbf{p}}} \quad (3.31)$$

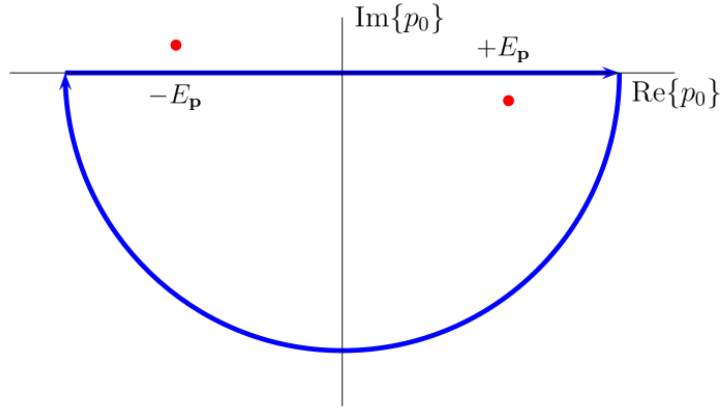


Figura 1 – Contorno para $x_0 > y_0$, onde deslocamos o polo $-E_p$ em $+i\epsilon$ e o polo $+E_p$ em $-i\epsilon$ e fechamos o contorno na parte negativa do eixo imaginário. Imagem adaptada de [15].

Quando $x_0 < y_0$, teremos que tomar o contorno da Figura 2 (C_A), englobando o polo $p_0 = -E_p$. Como no processo anterior, também tomando $\epsilon \rightarrow +0$, a integral em p_0 tem como resultado:

$$\oint_{C_A} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}}{(p_0 + E_p - i\epsilon)(p_0 - E_p + i\epsilon)} = -\frac{e^{iE_p(x_0-y_0)}e^{\epsilon(x_0-y_0)}}{2(-E_p + i\epsilon)} \quad (3.32)$$

$$= \frac{e^{iE_p(x_0-y_0)}}{2E_p} \quad (3.33)$$

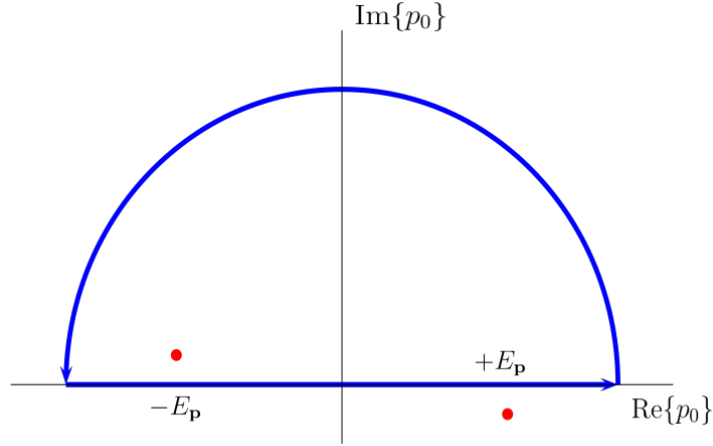


Figura 2 – Contorno para $x_0 < y_0$, onde fechamos o contorno na parte positiva do eixo imaginário. Imagem adaptada de [15].

Inserindo ambos resultados em (3.29), e denotando a dependência do ordenamento temporal com as funções de Heaviside, temos:

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left\{ \Theta(x-y)e^{-iE_p(x_0-y_0)+i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + \Theta(y-x)e^{iE_p(x_0-y_0)+i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right\} \quad (3.34)$$

A expressão (3.34) assemelha-se muito à (3.22), a diferença entre elas está no expoente do segundo termo, que deveria ser $iE_{\mathbf{p}}(x_0 - y_0) - i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, formando $ip(x - y)$. Isto pode ser resolvido se levarmos em conta que o propagador é um invariante de Lorentz, e então ele possui a propriedade de invariância frente à uma transformação $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$. O que resulta em:

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \{ \Theta(x - y)e^{-ip(x-y)} + \Theta(y - x)e^{ip(x-y)} \} \quad (3.35)$$

$$= \Theta(x - y)\Delta^+(x - y) - \Theta(y - x)\Delta^-(x - y). \quad (3.36)$$

Como era o objetivo, voltamos ao propagador de Feynman em função de $\Delta^\pm(x - y)$.

3.2 Propagador de Dirac

O segundo campo para o qual iremos calcular o propagador é o campo de Dirac, referente a férmions, partículas de spin fracionário. O exemplo mais comum é o elétron e sua antipartícula pósitron, ambos com spin 1/2.

A equação de Dirac para um elétron livre em notação covariante [8] é

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (3.37)$$

onde as matrizes de Dirac γ^μ satisfazem

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (3.38)$$

sendo $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}$ o anticomutador das matrizes gamma, e $\eta^{\mu\nu}$ a métrica de Minkowski com assinatura $(+, -, -, -)$ [13].

3.2.1 Cálculo do Propagador

Ao derivar a equação (3.37), o intuito de Dirac era obter uma equação relativística da MQ que fosse linear no tempo, diferentemente da equação de Klein-Gordon (3.1). Esta última pode ser fatorada em dois termos

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = -(\partial^2 + m^2)\psi(x), \quad (3.39)$$

onde usamos a propriedade das matrizes gamma (3.38). O que fizemos foi multiplicar a equação de Dirac por seu operador conjugado.

Usaremos a partir de agora a notação "slash", $\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu$ onde a é um operador, por esta ser mais concisa. Nesta notação a equação (3.37) fica

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0, \quad (3.40)$$

A equação (3.37) tem como solução um spinor $\psi(x)$ com 4 componentes $\psi_r(x)$, onde $r = 1, 2$ corresponde às soluções de energia positiva e $r = 3, 4$ à energia negativa. Há duas soluções para cada valor de energia devido ao spin das partículas, que pode tomar os valores $+1/2$ ou $-1/2$. É importante notar que só é possível quantizarmos o campo de Dirac impondo relações de anticomutação entre os operadores de campo, o que tem como consequência as partículas do campo obedecerem a Estatística de Fermi-Dirac:

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.41)$$

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta(\mathbf{y}, t)\} = \{\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = 0. \quad (3.42)$$

É possível definir um propagador de Feynman para o campo do elétron analogamente à definição para o campo de Klein-Gordon

$$S_{F\alpha\beta}(x - y) = \langle 0 | T \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle, \quad (3.43)$$

onde $S_F(x - y)$ é uma matriz 4×4 e $\hat{\psi} \equiv \hat{\psi}^\dagger \gamma^0$ é o campo adjunto de Dirac [13]. Porém para obter este propagador iremos usar o fato de que o propagador de Feynman é a função de Green da Equação de Dirac (3.40):

$$(i\cancel{\partial}_x - m)S_F(x - y) = \delta^{(4)}(x - y). \quad (3.44)$$

Como já mostrado na equação (3.39), se multiplicarmos (3.45) pelo conjugado da equação de Dirac obteremos a equação de Klein-Gordon:

$$(i\cancel{\partial}_x + m)(i\cancel{\partial}_x - m) S_F(x - y) = (i\cancel{\partial}_x + m)\delta^{(4)}(x - y). \quad (3.45)$$

Voltando para o propagador de Feynman do campo escalar, sabemos que ele é uma Função de Green da Equação de Klein-Gordon:

$$(\partial_x^2 + m^2) \Delta_F(x - y) = \delta^{(4)}(x - y), \quad (3.46)$$

então usamos (3.46) substituindo $\delta^{(4)}(x - y)$ em (3.45) :

$$(i\cancel{\partial}_x + m)(i\cancel{\partial}_x - m) S_F(x - y) = (i\cancel{\partial}_x + m)(\partial_x^2 + m^2) \Delta_F(x - y) \quad (3.47)$$

$$= - (i\cancel{\partial}_x + m)(i\cancel{\partial}_x - m)(i\cancel{\partial}_x + m) \Delta_F(x - y) \quad (3.48)$$

Portanto, conseguimos identificar:

$$S_F(x - y) = - (i\cancel{\partial}_x + m) \Delta_F(x - y). \quad (3.49)$$

Aplicando o operador conjugado da equação de Dirac na expressão para $\Delta_F(x - y)$ obtida na sessão anterior, temos:

$$S_F(x - y) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(i\cancel{\partial}_x + m)e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.50)$$

$$= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\cancel{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}, \quad (3.51)$$

aqui o fator $i\epsilon$ representa o deslocamento dos pólos no plano complexo. No espaço de momento o propagador tem uma forma muito mais singela:

$$S_F(p) = \frac{-i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.52)$$

a qual simplificando, temos:

$$S_F(p) = \frac{-i}{\not{p} - m + i\epsilon}. \quad (3.53)$$

Nesta seção obtivemos o propagador do elétron, um férmion de spin-1/2, o qual é representado por linhas internas nos diagramas de Feynman. Estas linhas internas simbolizam partículas virtuais, e seus propagadores são levados em conta no cálculo das amplitudes de transição em espalhamentos. A seguir usaremos este propagador no cálculo do espalhamento Compton.

3.2.2 Espalhamento Compton:

Um exemplo bem conhecido no qual podemos mostrar o uso do propagador é a predição da Eletrodinâmica Quântica (QED, em inglês) para o espalhamento Compton, que ocorre quando um elétron é espalhado por um fóton ($\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$). Usando cinemática simples, Compton conseguiu prever a mudança na frequência do fóton devido à colisão:

$$\Delta\lambda = \frac{1}{m}(1 - \cos\theta). \quad (3.54)$$

No limite clássico, J.J. Thomson derivou uma fórmula para seção de choque do espalhamento da radiação por elétrons:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}(1 + \cos^2\theta), \quad (3.55)$$

onde α é a constante de acoplamento da interação eletromagnética. Em $(1 + \cos^2\theta)$, o termo 1 é devido a radiação polarizada no plano do espalhamento, e o termo $\cos^2\theta$ a radiação polarizada fora do plano. Usando a Eletrodinâmica Quântica, deve ser possível reproduzir esta fórmula. O cálculo mais detalhado pode ser encontrado em [16].

Na QED, calculamos as amplitudes de um espalhamento através de diagramas de Feynman, eles representam graficamente a interação entre partículas. Nestes diagramas, o eixo horizontal é referente ao tempo e o vertical ao espaço. As linhas externas correspondem a partículas incidentes e partículas espalhadas, as linhas internas são correspondentes a partículas virtuais que intermediam a interação, além disso, temos a diferença da forma das linhas, as retas são férmions e as onduladas bósons [10]. Cada linha no diagrama simboliza um termo multiplicado para obter a amplitude \mathcal{M} , usada no cálculo da seção de choque. É importante salientar que os propagadores são termos que representam somente as partículas virtuais de um diagrama.

Para este espalhamento, consideraremos dois diagramas de Feynman: um referente à variável de Mandelstam s , e outro à t . Estas variáveis são definidas como:

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 \quad (3.56)$$

$$t \equiv (p_2 - p_4)^2, \quad (3.57)$$

aqui p_1 é referente ao fóton incidente, p_2 ao elétron incidente, p_3 ao elétron espalhado e p_4 ao fóton espalhado. Os dois diferentes diagramas representam duas formas possíveis do espalhamento ocorrer, pelo canal- s (*space-channel*), ou pelo canal- t (*time-channel*), onde s e t representam o momento carregado pela partícula intermediadora da interação [16]. O cálculo dos dois diagramas é mostrado a seguir:

$$i\mathcal{M}_s = (-ie)^2 \varepsilon_\mu^{in} \varepsilon_\nu^{out} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu \frac{i(\not{p}_1 + \not{p}_2 + m)}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} \gamma^\mu u(p_2) \quad (3.58)$$

$$i\mathcal{M}_t = (-ie)^2 \varepsilon_\mu^{in} \varepsilon_\nu^{out} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu \frac{i(\not{p}_2 - \not{p}_4 + m)}{(p_2 - p_4)^2 - m^2} \gamma^\nu u(p_2) \quad (3.59)$$

Nestas expressões, as polarizações do fóton incidente e o fóton espalhado são levadas em consideração no termo $\varepsilon_\mu^{in} \varepsilon_\nu^{out}$, e os elétrons externos são representados pelos spinores $\bar{u}(p_3)$ e $u(p_2)$. Representando o elétron virtual temos o propagador. Por exemplo, no primeiro caso ele é $i(\not{p}_1 + \not{p}_2 + m)/((p_1 + p_2)^2 - m^2)$.

A amplitude total é a soma dos dois diagramas:

$$\mathcal{M} = e^2 \varepsilon_\mu^{in} \varepsilon_\nu^{out} \bar{u}(p_3) \left[\frac{\gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\mu (\not{p}_2 - \not{p}_4 + m) \gamma^\nu}{(p_2 - p_4)^2 - m^2} \right] u(p_2) \quad (3.60)$$

Para calcular a seção de choque, precisamos elevar \mathcal{M} ao quadrado e somar sobre todas polarizações. Para um elemento de matriz na física, podemos usar a soma sobre as polarizações da luz como:

$$\sum_{i=1}^2 \varepsilon_\mu^i \varepsilon_\nu^{i*} = -\eta_{\mu\nu}. \quad (3.61)$$

A soma sobre spins e polarizações completa de \mathcal{M} , considerando ambos canais s e t , fica [16]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{pols} \mathcal{M} = e^2 \text{Tr} \left\{ (p_3 + m) \left[\frac{\gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\mu (\not{p}_2 - \not{p}_4 + m) \gamma^\nu}{(p_2 - p_4)^2 - m^2} \right] \right. \\ \left. \times (\not{p}_2 + m) \left[\frac{\gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\mu (\not{p}_2 - \not{p}_4 + m) \gamma^\nu}{(p_2 - p_4)^2 - m^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Avaliando esta expressão, fazendo $p_{ij} = p_i \cdot p_j$, temos como resultado:

$$\frac{1}{4} \sum_{pols} \mathcal{M}^2 = 2e^4 \left[\frac{p_{24}}{p_{12}} + \frac{p_{12}}{p_{24}} + 2m^2 \left(\frac{1}{p_{12}} - \frac{1}{p_{24}} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p_{12}} - \frac{1}{p_{24}} \right)^2 \right] \quad (3.63)$$

Usaremos este resultado para calcular a seção de choque no limite de baixas energias, no qual vamos trabalhar usando o referencial do laboratório. Então temos os momentos das 4 partículas:

$$p_1 = (\omega, 0, 0, \omega) \quad p_2 = (m, 0, 0, 0) \quad (3.64)$$

$$p_3 = (E', \vec{p}') \quad p_4 = (\omega', \omega' \sin \theta, 0, \omega' \cos \theta) \quad (3.65)$$

Estas relações resultam na fórmula do deslocamento da frequência em função do ângulo de espalhamento, que nada mais é do que a conservação de momento:

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m} (1 - \cos \theta). \quad (3.66)$$

Temos também as relações: $p_{12} = \omega m$ e $p_{24} = \omega' m$. Então, neste caso, podemos escrever (3.63) de uma forma bem simples:

$$\frac{1}{4} \sum_{pols} \mathcal{M}^2 = 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 2(1 - \cos \theta) + (1 - \cos \theta)^2 \right] \quad (3.67)$$

$$= 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right] \quad (3.68)$$

A seção de choque diferencial para o espalhamento Compton é:

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |\mathcal{M}|^2 d\Pi \quad (3.69)$$

$$= \frac{1}{4\omega m} |\mathcal{M}|^2 d\Pi \quad (3.70)$$

Precisamos saber a forma de $\int d\Pi$:

$$\int d\Pi = \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E'} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega'} [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1^\mu + p_2^\mu + p_3^\mu + p_4^\mu)] \quad (3.71)$$

Usando as restrições para o valor da energia do elétron, esta integral se torna [16]:

$$\int d\Pi = \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta \frac{(\omega')^2}{\omega m}. \quad (3.72)$$

Usamos este resultado e a equação (3.63) para calcular a seção de choque:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{4\omega m} \frac{1}{8\pi} \frac{(\omega')^2}{\omega m} 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right] \quad (3.73)$$

Então, obtemos a fórmula de Klein-Nishina, que foi primeiramente calculada por Klein e Nishina em 1929.

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \frac{(\omega')^2}{\omega m} 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right]. \quad (3.74)$$

Em outras variáveis:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left(1 + \cos^2\theta - \frac{2\omega}{m}(1 + \cos^2\theta)(1 - \cos\theta) + \mathcal{O}(1/m^2) \right) \quad (3.75)$$

Para baixas energias, quando $m \rightarrow \infty$, podemos desconsiderar os termos de ordem maior ou igual que $\mathcal{O}(1/m^3)$:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} (1 + \cos^2\theta). \quad (3.76)$$

Esta expressão, que é a mesma encontrada por J.J. Thomson para o espalhamento de radiação eletromagnética clássica por um elétron livre, foi um dos primeiros resultados obtidos a partir da QED.

4 Considerações Finais

Neste trabalho tivemos como objetivo apresentar os cálculos de vários exemplos de propagadores, tanto na Mecânica Quântica não-relativística quanto na relativística.

No escopo da MQ não-relativística, foi mostrada a definição do conceito de propagador, e foi demonstrado como um propagador, ou *kernel*, é a função de Green da equação de Schrödinger para o problema em questão. Então calculamos o propagador, a partir das funções de onda, para os casos da partícula livre e do oscilador harmônico. Em seguida foi apresentado o método das integrais de caminho de Feynman, e então calculamos mais uma vez o propagador para estes dois casos, desta vez utilizando um conceito bem mais próximo da Mecânica Clássica, que também é muito utilizado na Teoria Quântica de Campos.

Tratando de Mecânica Quântica Relativística, primeiramente, o conceito de quantização de campos foi apresentado. Em seguida, foi mostrada a obtenção do propagador do campo escalar livre complexo, pois, justamente por ter soluções escalares, é um bom exemplo para demonstrar com clareza o cálculo do propagador em teorias de campos. O próximo exemplo calculado é o propagador do campo do elétron livre, que é caracterizado pela Equação de Dirac. Neste caso obtivemos o propagador utilizando o fato de que eles são também as Funções de Green da equação de campo do problema. Também foi calculada a seção de choque do espalhamento Compton, onde utilizamos o propagador do elétron no cálculo dos diagramas de Feynman.

Em geral, os propagadores dão a amplitude de transição de uma partícula de um ponto a outro do espaço-tempo. Os propagadores relativísticos calculados contribuem nos cálculos dos diagramas de Feynman, pois eles representam as partículas virtuais nas interações.

Referências

- [1] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Mecânica Quântica Moderna*. Bookman, 2013.
- [2] G. Green, “An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism,” 1828.
- [3] F. A. Barone, H. Boschi-Filho, and C. Farina, “Three methods for calculating the feynman propagator,” *American Journal of Physics*, vol. 71, no. 5, 2003.
- [4] J. Schwinger, “Gauge invariance and vacuum polarization,” *Physical Review*, vol. 82, no. 5, 1951.
- [5] R. M. Wilcox, “Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 8, no. 4, 1967.
- [6] R. P. Feynman, “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 20, no. 2, 1948.
- [7] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*. John Wiley and Sons, 1988.
- [8] J. M. F. Bassalo, *Eletrodinâmica Quântica*. Editora Livraria da Física, 2006.
- [9] L. A. Beauregard, “Propagators in nonrelativistic quantum mechanics,” *American Journal of Physics*, vol. 34, no. 324, 1966.
- [10] T. Lancaster and S. J. Blundell, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2014.
- [11] A. Das, *Lectures on quantum mechanics*. Hindustan Book Agency.
- [12] R. Shankar, *Principles of Quantum Mechanics*. Plenum Press, 1994.
- [13] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*. Springer-Verlag, 1996.
- [14] R. D. Klauber, *Student Friendly Quantum Field Theory*. Sandtrove Press, 2013.
- [15] V. Kaplunovsky, “Feynman propagator of a scalar field.” <http://bolvan.ph.utexas.edu/~vadim/classes/2015f/propagator.pdf>. [Acessado em 02/07/2017].
- [16] M. Schwartz, “Introduction to quantum field theory.” <http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic521209.files/QFT-Schwartz.pdf>. [Acessado em 27/07/2017].