



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO EM ENGENHARIA DE  
CONTROLE E AUTOMAÇÃO



# Método Implícito de Diferenças Finitas Aplicado ao Processo de Conformação Eletromagnética

*Autor: Arthur S. Fagundes*

*Orientador: Rodrigo Rossi*

Porto Alegre, 25 de julho de 2017

## Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Revisão bibliográfica</b>	<b>2</b>
2.1 O processo EMF . . . . .	2
2.2 Simulação numérica . . . . .	5
<b>3 Modelo matemático do sistema EMF</b>	<b>7</b>
3.1 Circuito elétrico . . . . .	10
3.1.1 Modelagem do circuito . . . . .	10
3.2 Campo magnético . . . . .	11
3.2.1 Modelagem do campo . . . . .	12
3.3 Condições de contorno . . . . .	16
3.4 Sistema linear . . . . .	18
3.5 Ciclo de iteração e variáveis de pós-processamento . . . . .	21
<b>4 Resultados</b>	<b>23</b>
4.1 Comparação com solução analítica . . . . .	23
4.2 Comparação com método numérico . . . . .	25
4.3 Comparação com experimento prático . . . . .	31
<b>5 Conclusões</b>	<b>33</b>
<b>6 Referências</b>	<b>34</b>

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Rodrigo Rossi pela visão em idealizar este estudo, pelas lucidez de suas ideias e pela sua atenção em acompanhar de perto o seu desenvolvimento, e ao meu colega Eduardo Varriale por ter sido meu companheiro de pesquisa durante a bolsa de iniciação científica que originou este trabalho.

Também agradeço aos amigos de sempre, que em raros e valiosos momentos vejo neste ano final de graduação, e, com muito afeto, ao meu pai, e à minha mãe, por seu esforço diário em me guiar o caminho.

---

## Resumo

O processo de estampagem magnética, conhecido pela sigla EMF (do inglês *electromagnetic forming*), é um método avançado de conformação de peças feitas de metal condutor. Nele, uma corrente de descarga de um banco de capacitores percorre uma bobina, que gera um campo magnético variável e conseqüentemente forças repulsivas pela interação deste com a peça de trabalho, que propõem a mesma contra um molde. Neste trabalho são desenvolvidas equações de corrente e campo magnético para a criação de um algoritmo que usa o método das diferenças finitas implícita capaz de simular a propagação do campo magnético no interior de uma peça de trabalho axissimétrica, a fim de prever a chamada "pressão eletromagnética" gerada sobre ela pela descarga elétrica. Como verificação do código implementado, são feitas comparações com resultados analíticos, numéricos e experimentais.

## Lista de Figuras

1	Diferentes bobinas . . . . .	3
2	Foto de um banco de capacitores (Balanethiram et al., 1996). . . . .	3
3	Algumas aplicações da EMF. Foto de Siddiqui (2009). . . . .	4
4	Distribuição do campo magnético obtido no estudo de Takatsu et al. (1988). Curvas contínuas são valores calculados, enquanto os pontos dados pelos marcadores triangulares e quadrados são dados experimentais. . . . .	4
5	Exemplo de malha. . . . .	6
6	Diagrama da EMF. . . . .	7
7	Diferentes modos de operação da EMF. . . . .	7
8	Fluxograma da simulação. . . . .	9
9	O circuito elétrico da EMF. . . . .	10
10	Linhas de campo magnético na EMF. . . . .	11
11	Discretização da peça de trabalho. . . . .	14
12	Enumeração dos nós. . . . .	14
13	Ilustração da condição de simetria para o campo magnético na peça de trabalho. . . . .	17
15	Matrizes $\tilde{M}$ na configuração planar. . . . .	20
16	Matrizes $\tilde{N}$ na configuração planar. . . . .	20
17	Matrizes $\tilde{M}$ para configuração tubular. . . . .	21
18	Matrizes $\tilde{N}$ para configuração tubular. . . . .	21
19	Gráfico de campo magnético resultante de solução analítica e numérica entre os instantes de 2 e 57 ms, em intervalos de 5 ms. . . . .	24
20	estêncis dos métodos implícito e explícito . . . . .	25
21	Ilustração baseada na descrição de Siddiqui (2009) para cálculo do campo magnético no ponto $P$ . . . . .	27
22	Gráfico da descarga de corrente em função do tempo. . . . .	28
23	Gráfico do campo magnético na peça plana obtido dos métodos implícito e explícito 16,2 $\mu s$ após a comutação da chave. . . . .	28
24	Gráfico da descarga de corrente em função do tempo. . . . .	29
25	Gráfico do campo magnético resultante dos métodos implícito e explícito no processo de expansão 15,1 $\mu s$ após a comutação da chave. . . . .	29
26	Gráfico da descarga de corrente em função do tempo. . . . .	30
27	Gráfico do campo magnético resultante dos métodos implícito e explícito no processo de compressão 20 $\mu s$ após a comutação da chave. . . . .	30
28	Tabela de parâmetros do ensaio. Adaptada de Takatsu et al. (1988). . . . .	31
29	Distribuição do campo magnético obtido no estudo de Takatsu et al. (1988). . . . .	32
30	Distribuição do campo magnético axial comparado com medidas . . . . .	32
31	Distribuição do campo magnético radial comparado com medidas . . . . .	32
1		

<sup>1</sup>Todas as figuras que não são fotografias foram criadas pelo autor.

---

## Lista de Tabelas

1	Parâmetros da comparação entre o algoritmo e a solução analítica. . . . .	24
2	Parâmetros da comparação entre os métodos explícito e implícito em configuração planar. . .	28
3	Parâmetros da comparação entre os métodos explícito e implícito em configuração tubular (expansão). . . . .	29
4	Parâmetros da comparação entre os métodos explícito e implícito em configuração tubular (compressão). . . . .	30



# 1 Introdução

Processos de conformação por explosão e estampagem magnética são exemplos de "conformação em alta velocidade". Estes métodos aplicam em um curto intervalo de tempo elevadas quantidades de energia cinética em uma peça de trabalho, causando o seu movimento principalmente por inércia. É observado que estes métodos possibilitam uma maior deformação de materiais condutores, como ligas de alumínio. As indústrias automotivas e espaciais mostram particular interesse nestas técnicas, beneficiando-se com o trabalho de materiais mais leves, como o exemplo de ligas de alumínio.

O processo de estampagem magnética funciona com base na força de repulsão gerada por campos magnéticos opostos que surgem quando a intensidade de um campo magnético através de um condutor é aumentada. Suas características são uma maior conformabilidade, alta taxa de deformação e ausência de contato entre prensa e peça, o que elimina a necessidade de lubrificação. Sua operação, contudo, não permite que a conformação seja executada gradativamente até a deformação desejada, e exige portanto um conhecimento prévio da energia empregada, para evitar deformação insuficiente ou a ponto de romper o material.

Muitos estudos sobre este processo já foram conduzidos, e o foco deste trabalho é o desenvolvimento de um método numérico para calcular a propagação do campo magnético no interior da peça de trabalho, utilizando o método implícito das diferenças finitas. O método implícito das diferenças finitas tem por característica a estabilidade numérica independente da discretização do tempo que é feita, em contraste com o método explícito, que tem um determinado limite de estabilidade para o incremento de tempo, determinado pela maior frequência observada. Assim, se a solução do problema variar muito rapidamente com o tempo, mas este último for dividido em poucos incrementos, a solução pode vir a divergir.

Este estudo foi baseado em um trabalho que tem como um dos objetivos desacoplar os estágios da simulação numérica, reduzindo o número de instruções processadas em cada iteração da solução e tornando-o menos custoso em termos computacionais. Em concordância com essa ideia, este trabalho é focado no emprego do esquema implícito de diferenças finitas por ser um método sem requisito mínimo de resolução da discretização, o que o aperfeiçoa neste sentido e permite que mesmo máquinas com quantidade reduzida de memória possam executá-lo sem divergir, mesmo quando empregada uma resolução de tempo menor.



---

## 2 Revisão bibliográfica

### 2.1 O processo EMF

O processo de estampagem magnética, traduzido de forma literal como conformação eletromagnética (do inglês *electromagnetic forming*, cuja sigla EMF será usada daqui em diante para se referir a ele), é um método de alta velocidade de conformação de chapas e tubos metálicos, cuja montagem é composta por um banco de capacitores ligado por uma chave (centelhador ou ignitrão) a uma bobina. Quando o banco de capacitores está carregado e a chave é fechada, um campo magnético intenso gerado pela descarga do banco de capacitores na bobina induz correntes parasitas na peça a ser deformada, que pela lei de Lenz geram um campo magnético com sentido oposto ao primeiro.

Segundo Siddiqui (2009), em seu trabalho "*Numerical Modelling and Simulation of Electromagnetic Forming Process*", o processo pode ser descrito por uma lista de passos fundamentais:

1. O banco de capacitores é carregado até atingir uma tensão inicial;
2. Fecha-se a chave de alta velocidade, e uma descarga de corrente elétrica flui pela bobina;
3. Um campo magnético transiente é produzido pela bobina devido à corrente de descarga;
4. O campo magnético penetra em uma peça de trabalho posicionada próximo da bobina;
5. Correntes de parasitas são induzidas na peça de trabalho devido ao campo magnético transiente gerado pela bobina;
6. As correntes parasitas geram seu próprio campo magnético na direção oposta do campo magnético gerado pela bobina;
7. Os campos magnéticos opostos resultam em forças de corpo denominadas forças de Lorentz, que atuam no volume da peça.
8. Se as forças de corpo causarem tensões maiores que o limite de escoamento do material da peça, ocorre uma deformação permanente (plástica);

O autor ainda descreve as características dos principais componentes que formam o sistema EMF, que são o banco de capacitores e a bobina.

A bobina é selecionada para transferir o máximo de energia para a peça de trabalho colocada nas proximidades. Tipicamente, a bobina está sujeita às mesmas pressões que a peça de trabalho, e portanto deve suportar as elevadas forças sem falhar. A bobina também deve resistir à alta tensão elétrica, fluxo magnético e ao aquecimento. Assim, um composto de materiais é comumente aplicado usando fio de cobre para o enrolamento, para garantir a condutividade, e *epoxy* para a armação, para garantir a resistência mecânica.

O desenho da bobina depende da operação a ser executada. Para elementos tubulares, uma bobina helicoidal é usada. Esta bobina pode ser colocada no interior ou exterior da peça de

trabalho para a expansão ou compressão, respectivamente. Para a conformação de chapas planas, bobinas em espiral são as mais usadas. As diferentes geometrias de bobinas são mostradas nas figuras 1a e 1b.



(a) Bobina espiral. Foto do trabalho de Paese et al. (2011).



(b) Bobinas helicoidais. Foto do trabalho de Siddiqui (2009).

Figura 1: Diferentes bobinas

No processo EMF, o banco de capacitores é usado para armazenar e descarregar energia elétrica. O banco de capacitores é geralmente a parte mais dispendiosa de uma máquina EMF. O banco de capacitores é submetido a altas tensões e correntes elétricas durante o processo de conformação. A Fig. 2 mostra um banco de capacitores reservado especificamente para o processo. A razão de o banco de capacitores ser parte crítica do sistema EMF é que ele deve ser capaz de se descarregar de forma suficientemente rápida. Um banco de capacitores com elevada capacitância e tensão admissíveis não é o suficiente se não for capaz de proporcionar determinado pico de corrente ao ser ligado a um circuito de baixa impedância.

Além dos componentes principais mencionados, há mais elementos que entram na construção de uma máquina EMF, como o molde, os fios, a chave de alta velocidade, entre outros. Uma revisão completa da máquina pode ser encontrada em Balanethiram et al. (1996).



Figura 2: Foto de um banco de capacitores (Balanethiram et al., 1996).

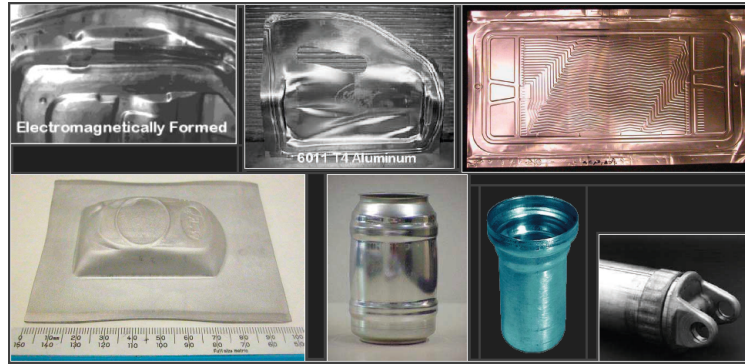


Figura 3: Algumas aplicações da EMF. Foto de Siddiqui (2009).

Vários estudos já exploraram o produto final da EMF em diferentes situações. Siddiqui (2009), em sua tese de doutorado, desenvolveu um algoritmo para simular a deformação de peças de trabalho, como as da Fig. 3. Takatsu et al. (1988) desenvolveram seu próprio método numérico e usaram magnetômetros em um experimento para capturar a intensidade do campo magnético em diferentes pontos de uma peça, para comparação. Um gráfico mostrando os resultados do experimento, que será explicado em detalhes na seção dos resultados, é mostrado na Fig. 4.

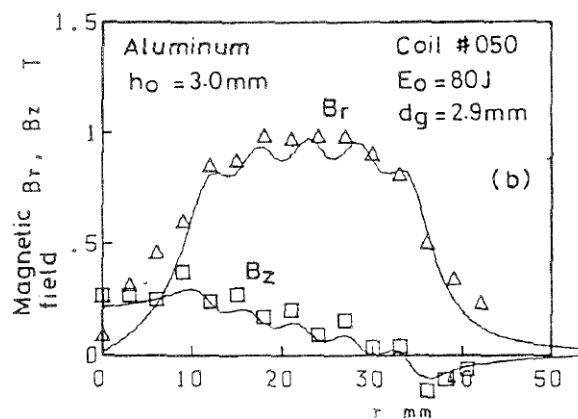


Figura 4: Distribuição do campo magnético obtido no estudo de Takatsu et al. (1988). Curvas contínuas são valores calculados, enquanto os pontos dados pelos marcadores triangulares e quadrados são dados experimentais.

## 2.2 Simulação numérica

Siddiqui (2009) fez um estudo aprofundado sobre o processo EMF, em que desenvolveu um algoritmo para a simulação do processo, usando diferenças finitas explícitas. A simulação numérica pode ser separada em três partes principais:

### *Pré-processamento*

Antes do início da simulação, todos os parâmetros presentes nas equações desenvolvidas devem ser especificados, como permeabilidade magnética, características do circuito elétrico e discretização da geometria. Então, a partir da leitura dos parâmetros todas as preparações necessárias para a execução da rotina principal são feitas.

### *Processamento*

Na rotina principal da simulação é realizado o cálculo iterativo da solução dos nós da malha. O cálculo é feito resolvendo-se as equações discretizadas por diferenças finitas, e cada iteração representa o estado do campo magnético em um instante do tempo.

### *Pós-processamento*

Nesta etapa a simulação já foi completada e as variáveis interesse que motivaram a execução da simulação, podem ser obtidas. Estas variáveis podem ser armazenadas na memória, para a qualquer momento serem consultadas, analisadas e exibidas em gráficos, ou mesmo usadas para calcular outras grandezas de interesse.

### *Método das diferenças finitas*

O método das diferenças finitas de Euler é usado na resolução de equações diferenciais pela aproximação do operador diferencial por uma diferença finita. Esta aproximação é obtida da série de Taylor da função derivada (Burden and Faires, 2010). As diferenças finitas podem ser feitas de maneiras distintas, dependendo da direção do incremento diferencial. As equações (1), (2) e (3) mostram os esquemas progressivo, central e regressivo de Euler, onde  $h$  é o incremento diferencial da variável independente  $x$ .

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (2)$$

---

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - h)}{h} \quad (3)$$

Em um dos estágios de seu algoritmo, no cálculo do campo magnético da peça de trabalho, Siddiqui (2009) utilizou o método explícito de diferenças finitas usando o esquema regressivo de Euler na derivada do tempo. O método é usado para a resolução das equações diferenciais parciais no espaço da geometria simples da peça de trabalho, que é dividida em nós de uma malha similar à da Fig. 5. Este método é menos custoso do que o seu equivalente em termos computacionais porque para se computar o valor de um nó em um próximo instante de tempo são necessários apenas os valores dos nós vizinhos no instante atual, em contraste com o método implícito, que requer que toda a malha seja resolvida. A sua desvantagem é que se ele é usado com um incremento de tempo maior que um valor crítico, a solução diverge.

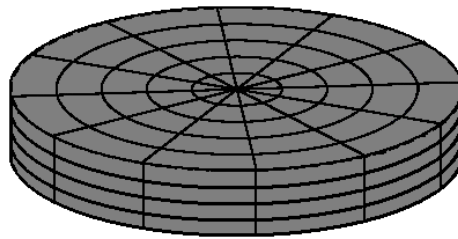


Figura 5: Exemplo de malha.

### 3 Modelo matemático do sistema EMF

A máquina de estampagem magnética opera com peças de metal condutor, mais comumente cobre ou alumínio. Ela consiste em um banco de capacitores ligado a uma bobina posicionada no mesmo eixo da peça de trabalho, de modo que quando o primeiro é descarregado ao se fechar um interruptor, um pico de corrente percorre a bobina indutora. O conjunto pode ser visto na Fig. 6. A configuração da peça e do molde nesta figura é uma das três possíveis, onde uma bobina espiral é posicionada abaixo de uma peça plana, e é caracterizada pela geometria planar. A posição da bobina em relação à peça é mostrada na Fig. 7a. As outras duas configurações possíveis são caracterizadas por geometria tubular, e executam a compressão ou expansão de um cilindro com uma bobina helicoidal. A seção longitudinal dos componentes nestas duas últimas configurações é exposta na Fig. 7b.

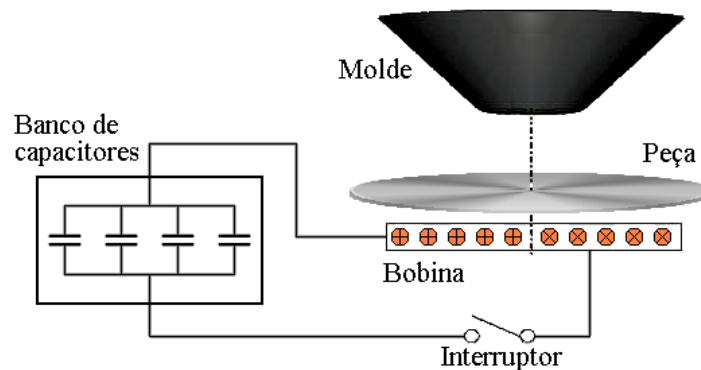


Figura 6: Diagrama da EMF.

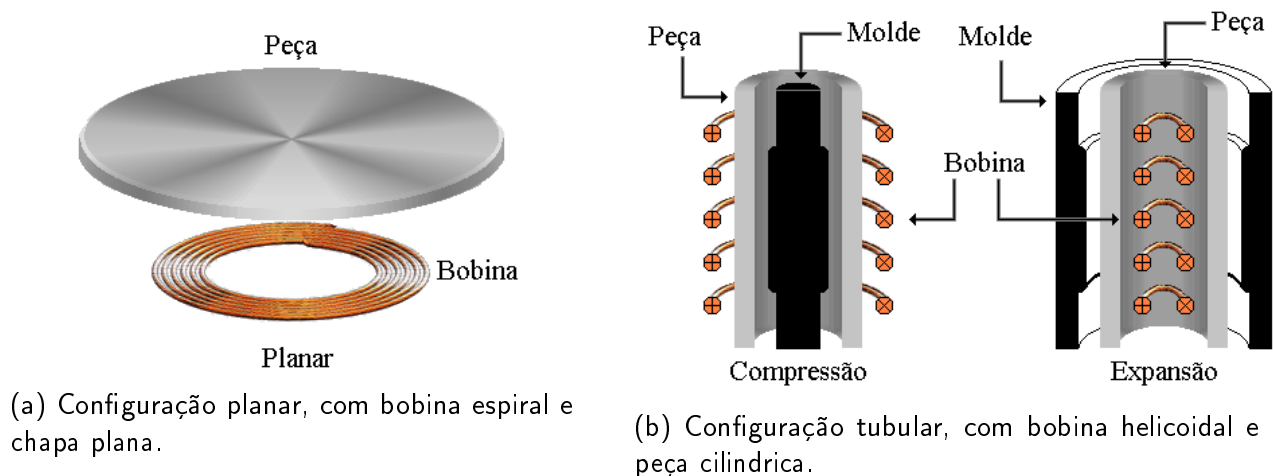


Figura 7: Diferentes modos de operação da EMF.

O circuito elétrico do processo da estampagem magnética pode ser descrito pela sua resistência, indutância e capacitância. O sistema em funcionamento pode ser descrito como um capacitor em descarga ligado a um atuador, que é o conjunto da bobina e peça de trabalho. Pelo fato de este modelo apresentar uma indutância variante em função do deslocamento da peça, ele requereria um acoplamento entre a corrente de descarga do circuito e o movimento da peça de trabalho, o que iria contra o propósito deste trabalho de desacoplar cada estágio da simulação. Então, o movimento da peça é considerado *quasi*-estacionário em relação à descarga do circuito, seguindo os resultados de um estudo conduzido por Manea et al. (2002) sobre este aspecto. Esta consideração proporciona a primeira hipótese simplificadora do modelo, que junto com outras é mostrada na lista de hipóteses que segue.

### *Hipóteses*

O modelo matemático do sistema EMF, que descreve a propagação do campo magnético no interior da peça de trabalho e a corrente de descarga, segue algumas suposições. Estas suposições são:

1. Durante o processo, a peça de trabalho é deslocada. Esse deslocamento causa uma variação na indutância mútua entre bobina e peça. Todavia, como a descarga de corrente no circuito é muito mais célere do que o movimento da peça, ela (e consequentemente o campo magnético) atingirá seu pico muito antes da peça se distanciar significativamente, o que permite se considerar *quasi*-estacionário o seu movimento e constante a indutância mútua entre bobina e peça.
2. A geometria do sistema é simétrica em torno de um eixo (axissimétrica). Para se descrever as coordenadas de qualquer ponto da bobina ou peça de trabalho, apenas são necessários a altura e o raio desde a origem do sistema de coordenadas, mesmo se tratando de um espaço tridimensional. O eixo de simetria é  $z$ , em  $r = 0$ .
3. A bobina é simplificada em um número de círculos fechados - fios concêntricos em formato de círculo em alturas iguais e raios igualmente espaçados entre si ou raios iguais e alturas igualmente espaçadas entre si, dependendo da configuração geométrica - cada um conduzindo a corrente de descarga calculada.
4. A simulação é dividida em duas partes, uma para componente do campo magnético. Os componentes são independentes entre si, e podem ser resolvidos separadamente.
5. A variação de temperatura é desconsiderada por não ser suficiente para alterar as propriedades do material.

Estas hipóteses serão referidas por seus números sempre que forem aplicáveis.

A execução da rotina segue estágios que podem ser representados por um fluxograma, como na Fig. 8. Nele, os processos da rotina e suas preparações são dispostos de forma sequencial.

Sumariamente, o fluxograma mostra a leitura de todos os parâmetros físicos pertinentes e a subsequente geração das preliminares da rotina principal, como a corrente de descarga, as matrizes de coeficientes e a discretização da peça de trabalho e do tempo, seguida pela rotina principal, que é onde a iteração começa e as equações são sistematicamente resolvidas "nit" vezes. Este estágio é expandido para mostrar os dois processos principais dentro de cada iteração, que são o cálculo das condições de contorno e sucessiva resolução dos nós restantes da malha. Os blocos deste fluxograma são organizados por cores no sentido que parâmetros de entrada (balões circulares) com a mesma cor de um processo (balões retangulares) são oriundos deste.

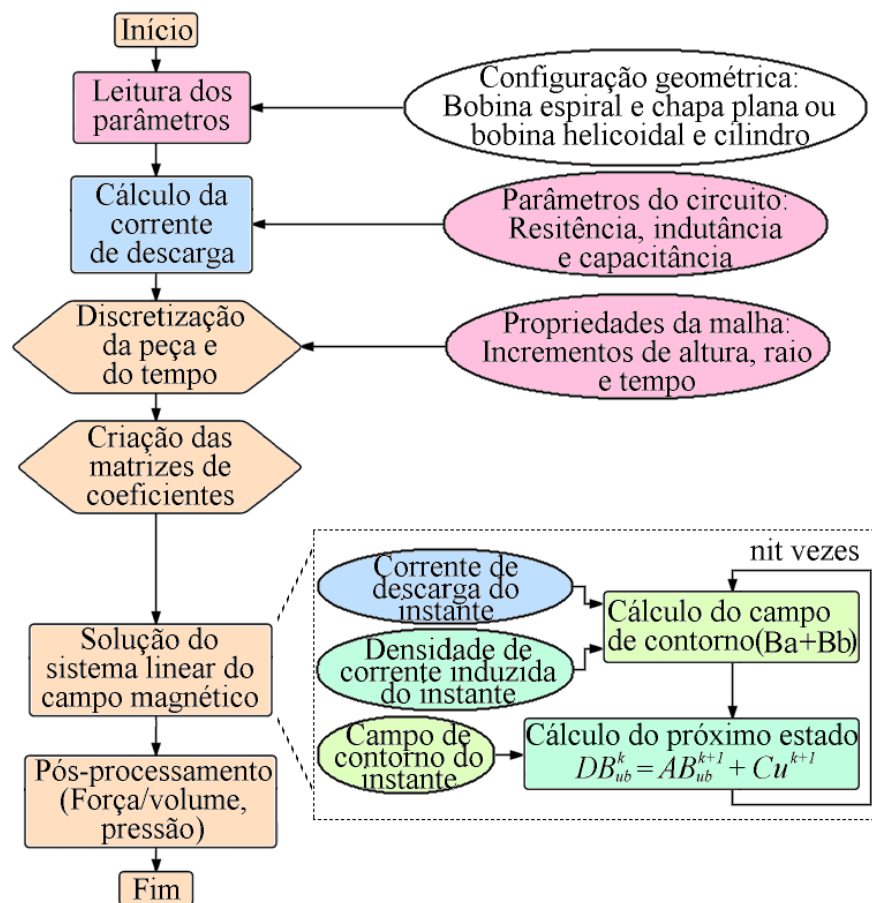


Figura 8: Fluxograma da simulação.



### 3.1 Circuito elétrico

O circuito elétrico da EMF é o primeiro estágio a ser modelado matematicamente, e também o mais simples, pois possui apenas os três componentes passivos básicos. O circuito elétrico aproximado que sofre a descarga do capacitor é composto de duas malhas acopladas magneticamente: a malha do circuito de descarga, e a malha equivalente da peça de trabalho. Nesta seção será relatado o cálculo da corrente de descarga.

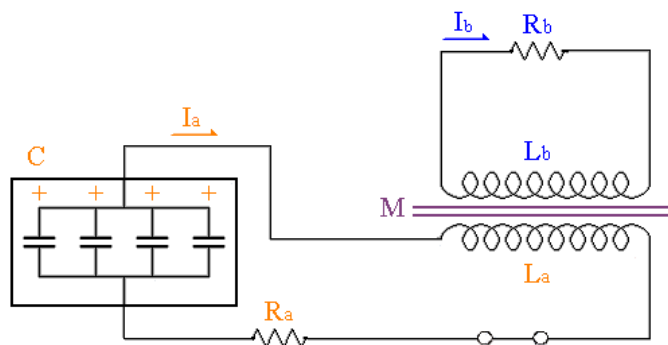


Figura 9: O circuito elétrico da EMF.

#### 3.1.1 Modelagem do circuito

Originalmente, as equações que descrevem o circuito elétrico do sistema são divididas em circuito primário e secundário, que são acoplados magneticamente por indutância mútua. Aplicando-se a lei de Kirchhoff das tensões, obtém-se as equações (4) e (5), que descrevem os circuitos primário e secundário do sistema EMF da Fig. 9.

$$L_a \frac{dI_a}{dt} + \frac{d(MI_b)}{dt} + R_a I_a + \frac{1}{C} \int I_a dt = 0 \quad (4)$$

$$L_b \frac{dI_b}{dt} + \frac{d(MI_a)}{dt} + R_b I_b = 0 \quad (5)$$

Nas equações,  $C$  é a capacitância do banco de capacitores;  $L_a$  e  $R_a$  são a indutância e resistência total do circuito primário: a soma das indutâncias e resistências da bobina e do fio, respectivamente.  $M$  é a indutância mútua entre a bobina e a peça de trabalho;  $I_a$  e  $I_b$  são as correntes dos circuitos primário e secundário: a corrente na bobina e a corrente induzida na peça, respectivamente; e  $L_b$  e  $R_b$  são a indutância e resistência equivalente do circuito secundário, respectivamente.

Considerando-se a hipótese #1, o circuito elétrico da EMF se comporta como um circuito RLC, uma vez que o termo  $M$  de indutância mútua permanece constante. A resposta do circuito

segue então a do circuito RLC, dada pela Eq. (6)

$$L \frac{dI_a}{dt} + RI_a + \frac{1}{C} \int I_a dt = 0 \quad (6)$$

onde  $L$  é a soma da indutância primária com a indutância secundária refletida, e  $R$  a soma da resistência primária com a resistência secundária refletida.

A resposta natural da Eq. (6) é da forma da Eq. (7), uma senoide sub-amortecida. A corrente máxima de circuito não amortecido é função da tensão inicial de carregamento dos capacitores,  $V$ , de sua capacitância e da indutância equivalente do sistema, e indicaria a corrente de pico em um quarto do período da onda de frequência  $\omega$ , dado pela Eq. (10), caso não houvesse o amortecimento causado pela resistência equivalente  $R$  a uma taxa de  $1/e$  a cada  $\tau$  de tempo, dado pela Eq. (9).

$$I_a(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} I_{a0} \text{sen}(\omega t) \quad (7)$$

$$I_{a0} = V \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (8)$$

$$\tau = 2 \frac{L}{R} \quad (9)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10)$$

## 3.2 Campo magnético

Enquanto o circuito da EMF segue um modelo a parâmetros concentrados, o volume da peça de trabalho é um espaço contínuo e portanto deve ser retratado por um modelo a parâmetros distribuídos, que é representado por equações diferenciais parciais em vez de ordinárias. Nesta seção, serão relatados o cálculo da corrente induzida e do campo magnético propagado no interior da peça a partir do campo magnético de contorno, e o cálculo do campo magnético de contorno a partir da corrente de descarga e da corrente induzida.



Figura 10: Linhas de campo magnético na EMF.

### 3.2.1 Modelagem do campo

A base para o desenvolvimento de modelos baseados na teoria do eletromagnetismo são as equações de Maxwell. As equações de Maxwell formam um conjunto que, de forma bastante concisa, fundamentam o comportamento dos campos elétrico e magnético, e como eles são gerados. As equações são mostradas no conjunto de equações (11).

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (11).1 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & (11).2 \\ \vec{B} = \mu \vec{H} & (11).3 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} & (11).4 \\ \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) & (11).5 \end{cases} \quad (11)$$

Considerando-se novamente a suposição #1, a Eq. (11).5 pode ser simplificada com  $\vec{v} = 0$ . Combinando-a com as Equações (11).4 e (11).3, obtém-se a Eq. (12). Aplicando o operador rotacional em ambos os lados desta equação, a variável do campo elétrico  $\vec{E}$  pode ser substituída pela derivada do campo magnético da Eq. (11).1, enquanto que no outro lado da equação a propriedade vetorial do duplo rotacional pode ser usada para substituí-lo pela subtração de um operador Laplaciano de um gradiente de divergente, resultando na Eq. (13). Como o divergente de  $\vec{B}$  é nulo pela Eq. (11).2, a equação do campo magnético é finalmente dada pela Eq. (14). Esta é a equação do campo magnético  $\vec{B}$ , descrevendo-o em qualquer meio de condutividade elétrica  $\sigma$  e permeabilidade magnética  $\mu$ .

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} = \sigma \vec{E} \quad (12)$$

$$\frac{1}{\mu} (\nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}) = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (13)$$

$$-\frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

É possível separar esta equação nos componentes de um sistema de coordenadas cilíndrico; de fato, pela hipótese #4 cada componente pode ser tratado em uma equação separada. O operador laplaciano da Eq. (14) é expandido em suas componentes usando-se a identidade do Laplaciano para vetores, que resulta na Eq. (15), e então os componentes de  $\vec{B}$  são expandidos nas equações (16) e (17) usando-se a identidade do Laplaciano para escalares. A derivada do tempo de  $\vec{B}$  em coordenadas cilíndricas é dada pela Eq. (18), onde  $\hat{r}$  é o raio,  $\hat{\phi}$  é o ângulo e  $\hat{z}$  é a altura.

$$\nabla^2 \vec{B} = \left( \nabla^2 B_r - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \left( \nabla^2 B_\phi - \frac{B_\phi}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} \right) \hat{\phi} + \nabla^2 B_z \hat{z} \quad (15)$$

$$\nabla^2 B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \quad (16)$$

$$\nabla^2 B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left( \frac{\partial B_r}{\partial t} - B_\phi \frac{d\phi}{dt} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial B_\phi}{\partial t} + B_r \frac{d\phi}{dt} \right) \hat{\phi} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \hat{z} \quad (18)$$

Após se aplicar as substituições na Eq. (14), o resultado é uma equação de três componentes. Contudo, ao se olhar a hipótese #2, não há variação na direção do componente  $\hat{\phi}$ , como formalizado pela Eq. (19). Removendo todos os termos nulos, os termos axial e radial são dados pelas equações (20) e (21)

$$\begin{cases} B_\phi = 0 \\ \frac{\partial B_r}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{d\phi}{dt} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$-\frac{1}{\mu\sigma} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) B_z + \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad (20)$$

$$-\frac{1}{\mu\sigma} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \right) B_r + \frac{\partial B_r}{\partial t} = 0 \quad (21)$$

O modelo contínuo obedece às equações (20) e (21). Em suas formas originais, elas descrevem o campo magnético de qualquer arranjo físico, mas não podem ser resolvidas quando não delimitadas por condições de contorno, e mesmo com condições de contorno sendo impostas, há apenas um número limitado de cenários que podem ser satisfeitos por soluções analíticas.

Para resolvê-las numericamente, o esquema de diferenças implícitas é utilizado em conjunto com condições de contorno e condições iniciais. Este esquema, sendo uma aproximação numérica, requer discretizações no domínio do tempo e do espaço para que o problema do campo magnético seja resolvido em cada ponto do espaço discretizado, em cada instante de tempo, por um sistema de equações lineares.

### Discretização das variáveis

A discretização do modelo deve ser feita para se montar um sistema linear de equações. A geometria da peça e o tempo devem ser discretizados para que se possa usar um esquema de diferenças nas Equações (20) e (21) e transformá-las em um conjunto de equações que possam ser resolvidas numericamente.

Para tanto, primeiramente um sistema de coordenadas deve ser criado como referência espacial. Contemplando-se novamente a hipótese #2, o sistema de coordenadas de duas dimensões  $r \times z$

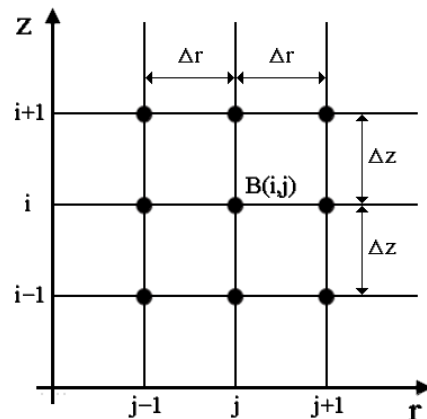


Figura 11: Discretização da peça de trabalho.

presente na Fig. 11, cujas coordenadas se alinham respectivamente ao raio e à altura da peça de trabalho, é fixado no centro da peça, em seu limite inferior. A peça é dividida em uma malha de nós que são separados entre si por incrementos de  $\Delta z$  de altura e  $\Delta r$  de raio e aos quais são atribuídos os índices  $i$  e  $j$  que estão relacionados aos valores reais dos eixos de coordenadas pelas equações (22).1 e (22).2 do conjunto de equações (22), mas que assumem valores inteiros dados por  $i = 0, 1, 2, \dots, n_z$  e  $j = 0, 1, 2, \dots, n_r$ . Os nós são enumerados em ordem crescente desde o mínimo até o máximo raio e altura, como mostra o exemplo da Fig. 12 para uma peça com malha de  $4 \times 6$  incrementos (a convenção neste trabalho é *altura*  $\times$  *raio*), e são chamados por seus números. Assim, neste exemplo particular, pode-se dizer que o nó 18 é adjacente aos nós 11, 17, 19 e 25.

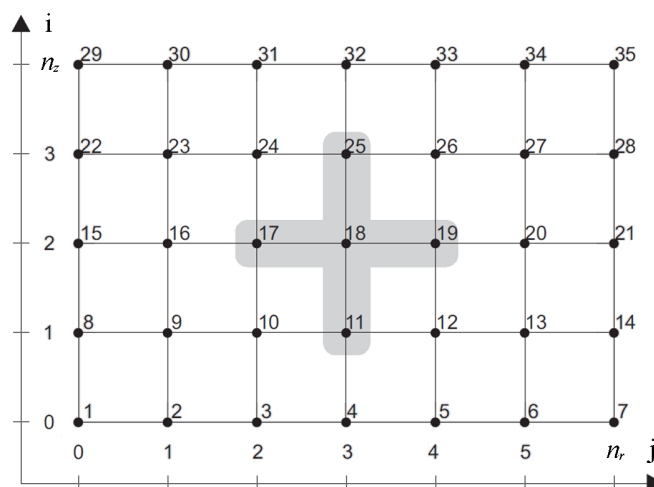


Figura 12: Enumeração dos nós.

Ainda no conjunto de equações (22), há também a relação dos operadores diferenciais com os espaços discretizados. As equações (22).4, (22).5 e (22).6 estabelecem que uma quantidade

infinitesimal das variáveis de tempo e espaço é tão pequena quanto o incremento de suas discretizações. Para a Equação (22).7, deve ser usado o esquema de diferenças finitas de Euler.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z}{\Delta z} = i \quad (22).1 \\ \frac{r}{\Delta r} = j \quad (22).2 \\ \frac{t}{\Delta t} = k \quad (22).3 \\ \partial z \rightarrow \Delta z \quad (22).4 \\ \partial r \rightarrow \Delta r \quad (22).5 \\ \partial t \rightarrow \Delta t \quad (22).6 \\ \partial B \rightarrow \Delta B \quad (22).7 \end{array} \right. \quad (22)$$

No domínio do espaço é usado o esquema de diferenças centrais de Euler. Isto significa que o termo  $\Delta B$  da equação (22).6 é obtido da diferença entre seus valores em dois pontos da dimensão em que é feita a diferença, como nas equações (23).1 a (23).8. No domínio do tempo é usado o esquema implícito de diferenças regressivas de Euler, dado pelas equações (23).9 e (23).10, onde o sobrescrito  $k$  indica o instante de tempo da variável como na Eq. (22).3.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_z}{\partial z} \approx \frac{\Delta B_z(i,j)}{\Delta z} = \frac{B_z(i+1,j) - B_z(i-1,j)}{2\Delta z} \quad (23).1 \\ \frac{\partial B_z}{\partial r} \approx \frac{\Delta B_z(i,j)}{\Delta r} = \frac{B_z(i,j+1) - B_z(i,j-1)}{2\Delta r} \quad (23).2 \\ \frac{\partial B_r}{\partial z} \approx \frac{\Delta B_r(i,j)}{\Delta z} = \frac{B_r(i+1,j) - B_r(i-1,j)}{2\Delta z} \quad (23).3 \\ \frac{\partial B_r}{\partial r} \approx \frac{\Delta B_r(i,j)}{\Delta r} = \frac{B_r(i,j+1) - B_r(i,j-1)}{2\Delta r} \quad (23).4 \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \approx \frac{\Delta \frac{\Delta B_z(i,j)}{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{B_z(i+1,j) - 2B_z(i,j) + B_z(i-1,j)}{\Delta z^2} \quad (23).5 \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \approx \frac{\Delta \frac{\Delta B_z(i,j)}{\Delta r}}{\Delta r} = \frac{B_z(i,j+1) - 2B_z(i,j) + B_z(i,j-1)}{\Delta r^2} \quad (23).6 \\ \frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} \approx \frac{\Delta \frac{\Delta B_r(i,j)}{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{B_r(i+1,j) - 2B_r(i,j) + B_r(i-1,j)}{\Delta z^2} \quad (23).7 \\ \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} \approx \frac{\Delta \frac{\Delta B_r(i,j)}{\Delta r}}{\Delta r} = \frac{B_r(i,j+1) - 2B_r(i,j) + B_r(i,j-1)}{\Delta r^2} \quad (23).8 \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} \approx \frac{\Delta B_z^k}{\Delta t} = \frac{B_z^{k+1} - B_z^k}{\Delta t} \quad (23).9 \\ \frac{\partial B_r}{\partial t} \approx \frac{\Delta B_r^k}{\Delta t} = \frac{B_r^{k+1} - B_r^k}{\Delta t} \quad (23).10 \end{array} \right. \quad (23)$$

## Equações discretizadas

Usar as discretizações apresentadas no conjunto de equações (23) nas equações (20) e (21) resulta em duas equações que podem ser organizadas unindo-se as constantes e termos não homogêneos que multiplicam cada coordenada do termo  $B$  em coeficientes. Esta equação, dada pela Eq. (24), é o resultado da aplicação do esquema implícito na equação do campo magnético e forma a base do sistema de equações que deve ser resolvido para a obtenção valores de  $B^{k+1}$ . Os coeficientes invariantes no tempo de  $a$  a  $f$  são listados no conjunto de equações (25).

$$a(i, j)B^{k+1}(i, j) + b(i, j)B^{k+1}(i, j + 1) + c(i, j)B^{k+1}(i, j - 1) + d(i, j)B^{k+1}(i + 1, j) + e(i, j)B^{k+1}(i - 1, j) = f(i, j)B^k \quad (24)$$

$$\begin{cases} a_r = 2\sigma\mu(j\Delta r\Delta z)^2 + 2\Delta t(\Delta z^2(1 + 2j^2) + 2(j\Delta r)^2) & (25).1 \\ a_z = 2\sigma\mu(j\Delta r\Delta z)^2 + 4\Delta t(\Delta z^2j^2 + (j\Delta r)^2) & (25).2 \\ b_r = b_z = -\Delta t\Delta z^2(2j^2 + j) & (25).3 \\ c_r = c_z = -\Delta t\Delta z^2(2j^2 - j) & (25).4 \\ d_r = d_z = -2(\Delta t)(j\Delta r)^2 & (25).5 \\ e_r = e_z = -2(\Delta t)(j\Delta r)^2 & (25).6 \\ f_r = f_z = -\Delta t\Delta z^2(2j^2 - j) & (25).7 \end{cases} \quad (25)$$

Com os coeficientes  $a$  a  $e$  determinados, pode ser gerada uma matriz que multiplica  $B^{k+1}$ , que é chamada de  $\tilde{M}$ . Os coeficientes que multiplicam  $B^k$  formam a matriz  $\tilde{N}$  de forma similar. Então, são escritas as equações (26) e (27).

$$\tilde{M}_z B_z^{k+1} = \tilde{N}_z B_z^k \quad (26)$$

$$\tilde{M}_r B_r^{k+1} = \tilde{N}_r B_r^k \quad (27)$$

Como  $B^k$  e  $B^{k+1}$  são vetores que carregam os valores de campo magnético instantâneos e sucessivos de todos nós da malha, e se deseja computar os valores sucessivos a partir de valores instantâneos, a solução para obtenção destes valores é isolar  $B^{k+1}$ . Mas alguns pontos contidos por  $B^{k+1}$  são predeterminados, por serem condições de contorno; isto significa que apenas a porção desvinculada a valores de contorno deve ser isolada e resolvida. Antes de prosseguir para isolar os nós desvinculados em um novo vetor - que será chamado de  $B_{ub}$  (*ub*: *unbound*) - a seção a seguir define as condições de contorno mencionadas.

### 3.3 Condições de contorno

As equações diferenciais levantadas devem ter limites espaciais definidos por condições de contorno para serem resolvidas, e também condições iniciais pelo fato de ser analisada a resposta transiente. Os sistemas EMF de geometria plana e tubular das figuras 7a e 7b contam com condições que aproximam o que é observado em suas superfícies.

O conjunto de equações (28) mostra as condições de contorno e iniciais do sistema EMF de geometria planar para as equações dos componentes axial e radial do campo magnético. Estas condições são baseadas em aproximações físicas: as condições (28).3 a (28).6 se baseiam no efeito pelicular - *skin effect*, que caracteriza a tendência de um campo magnético de se concentrar na superfície de um condutor (mesmo não ferromagnético) quando sua intensidade varia muito rapidamente, em vez de permeá-lo. Então, elas impõem que tanto a componente radial como a axial são nulas nas superfícies que não a mais próxima da bobina. As equações (28).7 e (28).8 tratam da condição de simetria. A Fig. 13 permite visualizar melhor esta condição, que não é baseada em um fenômeno físico, mas simplesmente em geometria. Por último, as equações (28).9 e (28).10 evidenciam a condição inicial da peça em repouso, em que há ausência de alinhamento do campo magnético. As condições de contorno do sistema EMF em geometria tubular podem ser vistas no conjunto de equações (29), para o modo de expansão, e (30), para o modo de compressão.

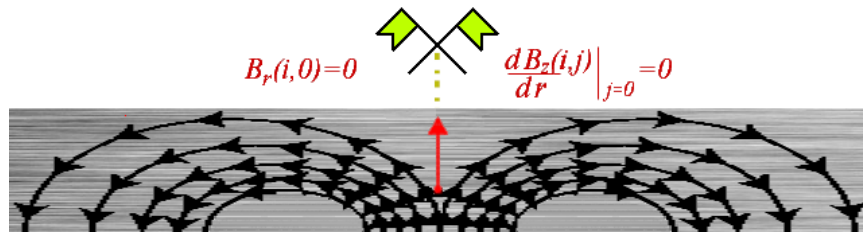


Figura 13: Ilustração da condição de simetria para o campo magnético na peça de trabalho.

As equações (28).1 e (28).2 impõem à entrada do sistema uma excitação, que é o campo de contorno. No primeiro instante de tempo, existe apenas o campo de contorno na peça de trabalho; a sua propagação é calculada nos instantes seguintes por meio das equações levantadas. Visando validar o método proposto neste trabalho, um campo em forma de degrau será imposto em  $B_s$  para a comparação com uma solução analítica de mesma entrada. O cálculo do campo de contorno no caso da excitação da EMF por uma descarga elétrica é apresentado na Seção 4.2.

$$\begin{cases}
 B_z^k(0, j) = B_{sz}^k & (28).1 \\
 B_r^k(0, j) = B_{sr}^k & (28).2 \\
 B_z^k(n_i, j) = 0 & (28).3 \\
 B_r^k(n_i, j) = 0 & (28).4 \\
 B_z^k(i, n_j) = 0 & (28).5 \\
 B_r^k(i, n_j) = 0 & (28).6 \\
 \frac{\partial B_z^k(i, j)}{\partial r} \Big|_{j=0} = 0 & (28).7 \\
 B_r^k(i, 0) = 0 & (28).8 \\
 B_z^0(i, j) = 0 & (28).9 \\
 B_r^0(i, j) = 0 & (28).10
 \end{cases} \quad (28)$$



$$\begin{cases}
B_z^k(0, j) = 0 & (29).1 \\
B_r^k(0, j) = 0 & (29).2 \\
B_z^k(n_i, j) = 0 & (29).3 \\
B_r^k(n_i, j) = 0 & (29).4 \\
B_z^k(i, n_j) = 0 & (29).5 \\
B_r^k(i, n_j) = 0 & (29).6 \\
B_z^k(i, 0) = B_{sz}^k & (29).7 \\
B_r^k(i, 0) = B_{sr}^k & (29).8 \\
B_z^0(i, j) = 0 & (29).9 \\
B_r^0(i, j) = 0 & (29).10
\end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases}
B_z^k(0, j) = 0 & (30).1 \\
B_r^k(0, j) = 0 & (30).2 \\
B_z^k(n_i, j) = 0 & (30).3 \\
B_r^k(n_i, j) = 0 & (30).4 \\
B_z^k(i, n_j) = B_{sz}^k & (30).5 \\
B_r^k(i, n_j) = B_{sr}^k & (30).6 \\
B_z^k(i, 0) = 0 & (30).7 \\
B_r^k(i, 0) = 0 & (30).8 \\
B_z^0(i, j) = 0 & (30).9 \\
B_r^0(i, j) = 0 & (30).10
\end{cases} \quad (30)$$

### 3.4 Sistema linear

As equações (26) e (27), quando reescritas levando em conta a diferença entre os nós desvinculados e os com valores de contorno, resultam nas equações (31) e (32). Ao se realizar a separação do vetor de campo magnético  $\vec{B}$  em vetor de nós desvinculados  $\vec{B}_{ub}$  e vetor de nós da superfície mais próxima da bobina  $\vec{B}_s$ , as matrizes  $\tilde{M}$  e  $\tilde{N}$  também são particionadas para que suas colunas multipliquem seus respectivos nós nos novos vetores. Surgem então as submatrizes de  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{A}$  e  $\tilde{C}$ , com as colunas dos nós de  $B_{ub}^{k+1}$  e  $B_s^{k+1}$ , e a submatriz de  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{D}$ , com as colunas dos nós de  $B_{ub}^{k+1}$ .

$$\tilde{A}_z B_{ubz}^{k+1} + \tilde{C}_z B_{sz}^{k+1} = \tilde{D}_z B_{ubz}^k \quad (31)$$

$$\tilde{A}_r B_{ubr}^{k+1} + \tilde{C}_r B_{sr}^{k+1} = \tilde{D}_r B_{ubr}^k \quad (32)$$

Resolvendo-se os sistemas das equações (31) e (32) na configuração geométrica da situação, o vetor  $B_{ub}^{k+1}$  pode ser calculado se isolando os demais termos em um lado da equação, e então multiplicando ambos os lados pela inversa de  $\tilde{A}$ , como nas equações (33) e (34). Esta inversão é a razão deste método ser computacionalmente exigente; contudo, como as equações (26) e (27) são sistemas de coeficientes invariantes no tempo, a inversão é realizada apenas uma vez por simulação, e não a cada iteração, o que reduz significativamente o tempo de processamento.

$$B_{ubz}^{k+1} = \tilde{A}_z^{-1} (\tilde{D}_z B_{ubz}^k - \tilde{C}_z B_{sz}^{k+1}) \quad (33)$$

$$B_{ubr}^{k+1} = \tilde{A}_r^{-1} (\tilde{D}_r B_{ubr}^k - \tilde{C}_r B_{sr}^{k+1}) \quad (34)$$

### Partição das matrizes

A partição das matrizes é uma etapa que depende da configuração geométrica em uso. Para a configuração planar representada pela Fig. 7a, as partições das matrizes  $\tilde{M}_r$  e  $\tilde{M}_z$  são ilustradas nas figuras 15a e 15b, respectivamente. A região azul das matrizes representa as submatrizes  $\tilde{C}_z$  e  $\tilde{C}_r$  e a região verde representa as submatrizes  $\tilde{A}_z$  e  $\tilde{A}_r$ , apresentadas na mesma ordem.  $n_b$  é o número de nós com valores de contorno, e  $n_t$  é o número total de nós da malha.

As matrizes definem a iteração dos nós em uma malha. Cada linha  $l$  e coluna  $m$  determina a interação entre os nós  $l$  e  $m$  no instante  $k + 1$ . Então, seguindo a Eq. (24), os coeficientes  $a(i, j)$  preenchem a diagonal  $m = l$ , os coeficientes  $b(i, j)$  preenchem a diagonal  $m = l + 1$ ,  $c(i, j)$  preenchem a diagonal  $m = l - 1$ ,  $d(i, j)$  preenchem a diagonal  $m = l + n_b$ , e  $e(i, j)$  preenchem a diagonal  $m = l - n_b$ , onde as coordenadas dos nós se relacionam com as linhas da matriz pelas equações do conjunto de equações (35), em que  $\text{floor}$  é a função piso de arredondamento para o menor inteiro.

$$\begin{cases} i = \text{floor}\left(\frac{l}{n_b}\right) \\ j = (l - 1) - \text{floor}\left(\frac{l - 1}{n_b}\right) n_b \end{cases} \quad (35)$$

Os coeficientes, apesar de dispostos em diagonais na matriz, ocupam apenas linhas correspondentes a nós desvinculados, uma vez que nós de contorno não podem ter seu valor afetado pela vizinhança. Então, no caso da geometria planar, as linhas de 1 a  $n_b$  são desconsideradas por corresponderem aos nós da superfície mais próxima à bobina, que já são precalculados, e as linhas  $hn_b$  (onde  $h \in \mathbb{N}$ ) e de  $n_t - n_b$  a  $n_b$  contêm apenas 1 em  $m = l$ , mantendo constantes os valores dos seus nós a cada iteração, que são zero pelas condições das Eq. (28).3 a (28).6. Ainda na geometria planar, a única diferença entre as matrizes  $\tilde{M}_z$  e  $\tilde{M}_r$  são as linhas  $hn_b + 1$ , o que reflete a diferença entre as condições de contorno das equações (28).7 e (30).7.

Similarmente, as matrizes  $\tilde{N}_z$  and  $\tilde{N}_r$ , ambas representadas pela Fig. 16a, determinam a interação entre os nós  $l$  e  $m$  no instante  $k$ , e têm sua diagonal  $m = l$  preenchida pelos coeficientes  $f(i, j)$ . Da mesma forma que  $\tilde{A}$  foi originada de  $\tilde{M}$ , a submatriz  $\tilde{D}$  é originada da região verde de  $\tilde{N}$ .

Para o caso da configuração tubular, as partições feitas devem compreender os modos de compressão e expansão da peça. Nesta configuração, as matrizes  $\tilde{M}_z$  e  $\tilde{M}_r$  são iguais, pelo fato das equações de ambas componentes compartilharem as mesmas condições de contorno, e têm suas partições ilustradas na Fig. 17a para o modo de expansão e na Fig. 17b para o de compressão. Nestas figuras, é possível se observar as mesmas regiões azuis e verdes das quais se originam as submatrizes  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{C}$  e  $\tilde{D}$ , apenas distribuídas de maneira diferente em função da diferente enumeração dos nós vinculados e desvinculados. Da mesma forma, nas figuras 18b e 18a a submatriz  $\tilde{D}$  é gerada da região verde da matriz  $\tilde{N}$ .

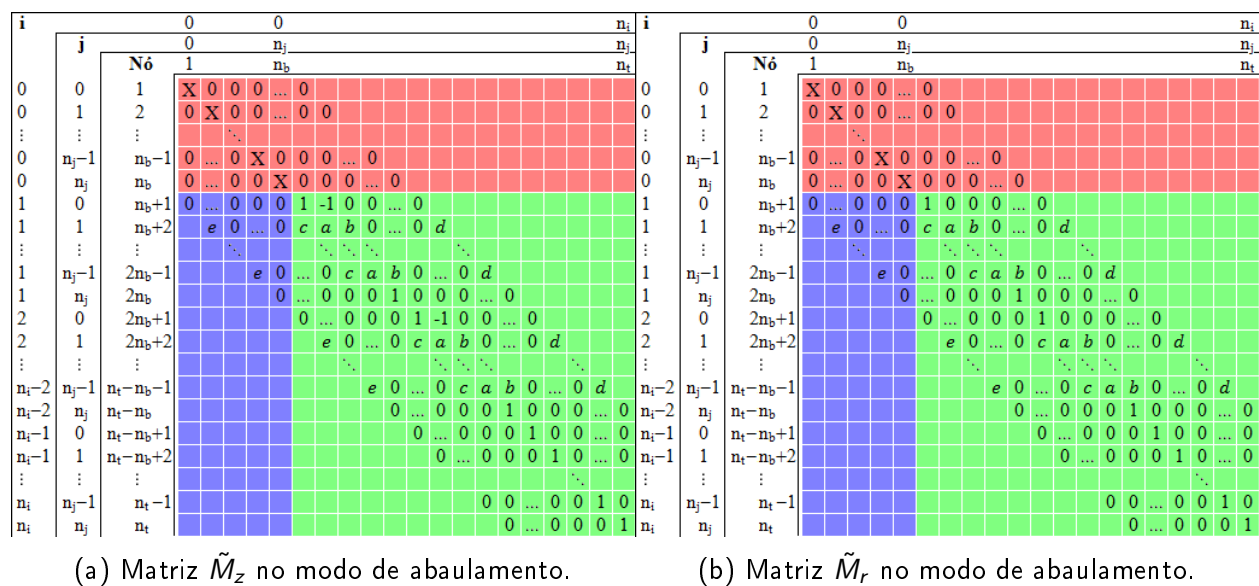


Figura 15: Matrizes  $\tilde{M}$  na configuração planar.

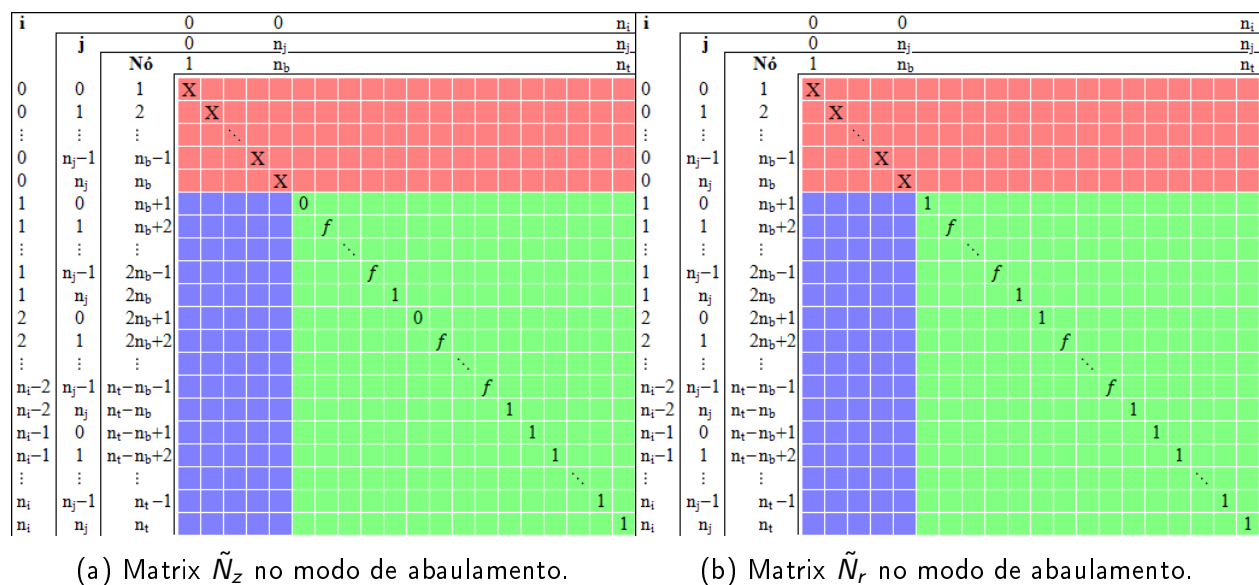
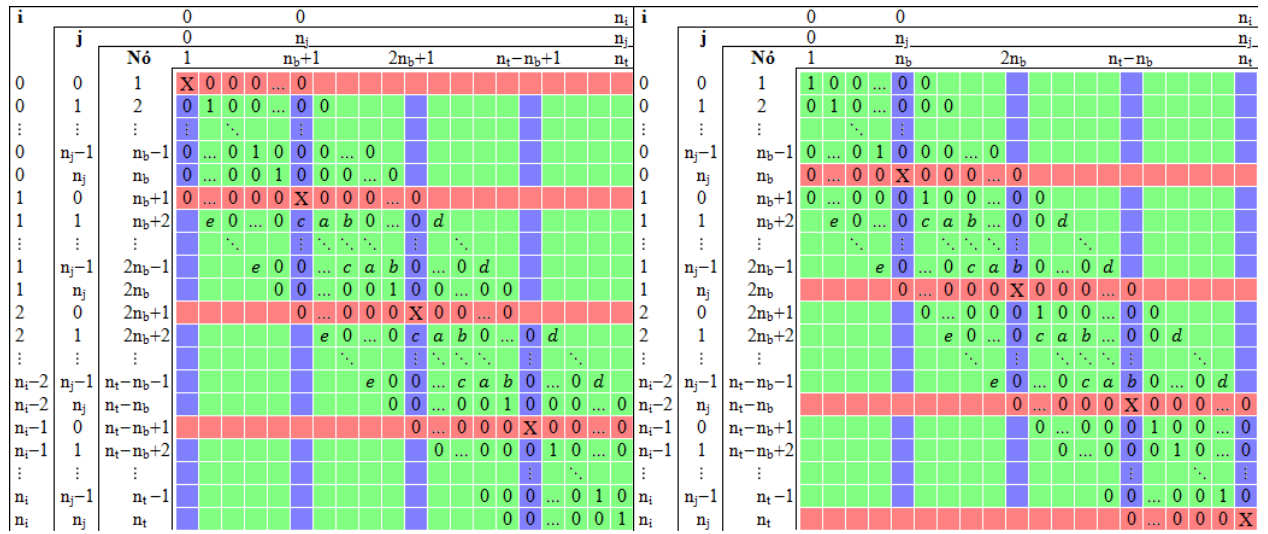
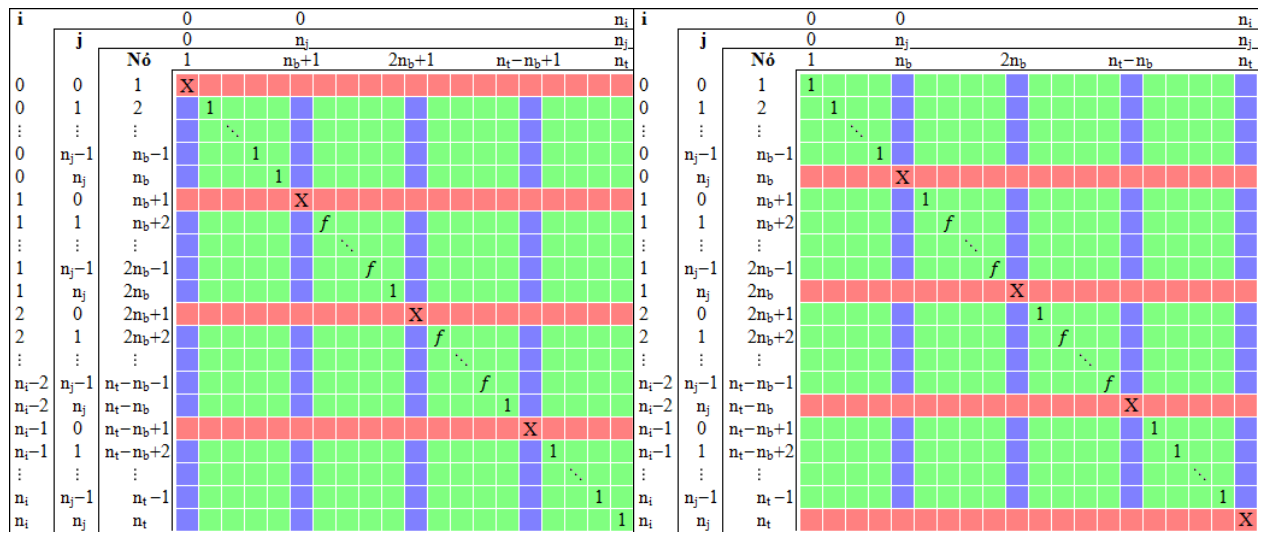


Figura 16: Matrizes  $\tilde{N}$  na configuração planar.



(a) Matrizes  $\tilde{M}_z$  e  $\tilde{M}_r$  no modo de expansão. (b) Matrizes  $\tilde{M}_z$  e  $\tilde{M}_r$  no modo de compressão.

Figura 17: Matrizes  $\tilde{M}$  para configuração tubular.



(a) Matrizes  $\tilde{N}_z$  e  $\tilde{N}_r$  no modo de expansão. (b) Matrizes  $\tilde{N}_z$  e  $\tilde{N}_r$  no modo de compressão.

Figura 18: Matrizes  $\tilde{N}$  para configuração tubular.

### 3.5 Ciclo de iteração e variáveis de pós-processamento

Após o cálculo dos campos magnéticos, deve-se obter a distribuição de corrente induzida na peça. A Eq. (37) é o resultado da expansão do operador rotacional da Eq. (11).4 em coordenadas cilíndricas, como na Eq. (36), após a eliminação de todos os termos cuja existência dependia

de variações na coordenada  $\phi$ , da mesma forma que foi feito na Seção 3.2.1, e é usada para se calcular o campo magnético  $B_1$  no próximo instante.

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu} \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \left( \frac{\partial r B_\phi}{\partial r} - \frac{B_r}{\partial \phi} \right) \hat{z} \right) \quad (36)$$

$$J_\phi = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \quad (37)$$

O resultado da densidade de corrente também é usado no cálculo das grandezas de pós-processamento. As forças de Lorentz produzidas pela interação do campo com a corrente são dadas pelas equações (38) e (39), que são integradas em "pressões magnéticas", dadas pelas equações (40) e (41).

$$f_z = -J_\phi B_r \quad (38)$$

$$f_r = J_\phi B_z \quad (39)$$

$$P_z = \int_{z=0}^{z=h} f_z dz \quad (40)$$

$$P_r = \int_{z=0}^{z=h} f_r dz \quad (41)$$

A Eq. (37) é implementável no algoritmo usando-se os esquemas das equações (23).2 e (23).3, e resulta na Eq. (42). Depois de resolvida, essa equação alimentará a equação do campo magnético gerado por corrente induzida, fechando o ciclo da iteração do fluxograma da Fig. 8.

$$J_b^k(i, j) = \frac{1}{\mu} \left( \frac{B_r^k(i+1, j) - B_r^k(i-1, j)}{2\Delta z} - \frac{B_z^k(i+1, j) - B_z^k(i-1, j)}{2\Delta r} \right) \quad (42)$$

## 4 Resultados

### 4.1 Comparação com solução analítica

Para a validação do método desenvolvido, é importante a sua comparação com resultados analíticos. A comparação com um outro método numérico comprova a convergência de ambos para uma mesma solução a partir das equações discretizadas, mas não das operações realizadas nas equações antes de serem discretizadas, uma vez que as operações foram realizadas da mesma forma nos dois métodos. Para tanto, deve-se buscar um problema com topologia tratável pelo algoritmo, e para o qual já se tenha desenvolvido uma solução analítica.

No livro *Magnetic Fields: A Comprehensive Theoretical Treatise for Practical Use* de Knoepfel (2000), a propagação do campo magnético em um cilindro sólido de comprimento infinito, submetido a um campo magnético em sua superfície cuja magnitude segue uma função degrau de amplitude  $B_0$  e cuja direção é paralela ao eixo do cilindro, é descrita pela Eq. (43), onde  $S_0$  e  $S_1$  são funções de Bessel de ordens zero e um,  $q$  é o raio do cilindro e os valores de  $\alpha_n$  podem ser encontrados por meio da Eq. (44).

$$B_z(r, t) = B_0 \left( 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_0(r\alpha_n)}{q\alpha_n S_1(r\alpha_n)} e^{-\frac{\alpha_n^2 t}{\mu\sigma}} \right) \quad (43)$$

$$S_0(q\alpha_n) = 0 \quad (44)$$

#### Simulação

O algoritmo é adaptado para a comparação definindo-se sua configuração geométrica para o modo de compressão, como na Fig. 7b, mas com a diferença de a peça em questão ser sólida e infinita, e a excitação ser um campo magnético constante. Este último detalhe faz com que o campo magnético não se concentre na superfície, e se propague no interior do cilindro até estar uniformemente distribuído em regime permanente. A amplitude do campo de excitação foi arbitrada em um degrau unitário, de modo que a função do campo de excitação implementado no algoritmo segue as componentes do Conjunto (45).

$$\begin{cases} B_{sr} = 0 & (45).1 \\ B_{sz} = step(k) & (45).2 \end{cases} \quad (45)$$

Após a execução do algoritmo, os resultados são gerados e comparados com a solução analítica executada no computador. A comparação de ambos os gráficos de campo pode ser vista na Fig. 19, com os resultados numérico e analítico em traço pontilhado e linha contínua, obtidos aos pares em diferentes instantes de tempo. Os parâmetros da simulação são listados na Tabela 1. Como a peça não pode ter comprimento infinito no método numérico, lhe foi atribuído um valor muito maior que o do raio.

Tabela 1: Parâmetros da comparação entre o algoritmo e a solução analítica.

Propriedades físicas	
Raio da peça	55 mm
Altura (numérico)	9999 m
Condutividade elétrica	36 MS/m
Permeabilidade magnética	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m
Incrementos de malha ( $n_r$ )	20

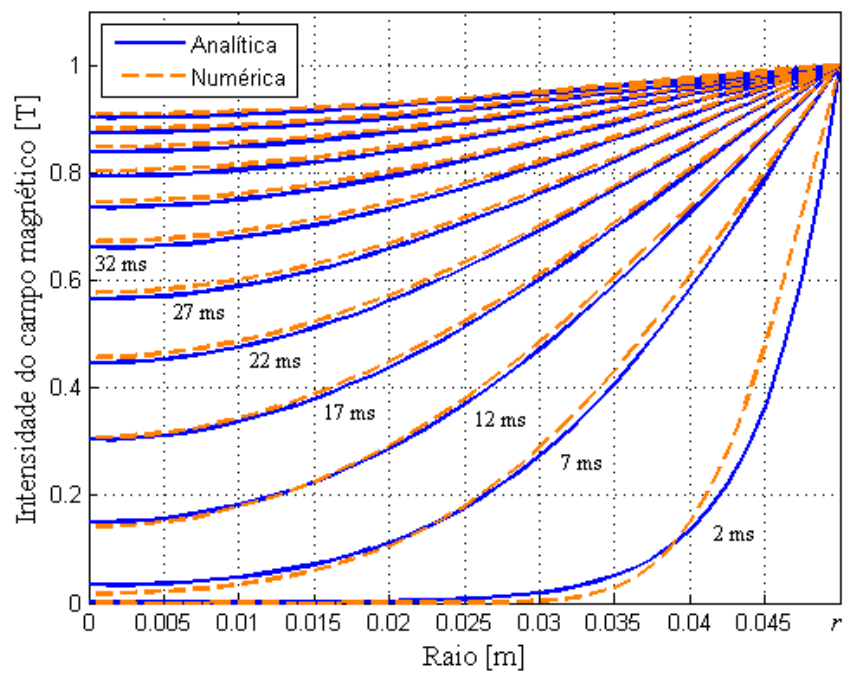


Figura 19: Gráfico de campo magnético resultante de solução analítica e numérica entre os instantes de 2 e 57 ms, em intervalos de 5 ms.

## 4.2 Comparação com método numérico

No estudo dirigido por Siddiqui (2009), o modelo de diferenças finitas desenvolvido para este problema usa o esquema explícito de Euler. Basicamente, a diferença entre o método explícito e implícito é a maneira como é feita a discretização do operador diferencial, e surge do fato de a primeira se basear no esquema regressivo, e da última, no progressivo, como explicado na seção 2.2. No método explícito, a derivada do tempo é discretizada como na Eq. (46). A diferença entre a Eq. (46) e as equações (23).9 e (23).10 reside no sobrescrito do instante de tempo. Na Eq. (46), o termo do lado esquerdo se situa no instante  $k + 1$ , enquanto que nas equações do conjunto (23) o termo do lado esquerdo está no instante  $k$ . O *estêncil* de cada método, um diagrama usado para mostrar os pontos envolvidos na solução de cada equação, é mostrado na Fig. 20. Os experimentos realizados serão uma comparação entre os dois métodos, simulando-se o mesmo problema com os mesmos parâmetros, em cada configuração geométrica.

$$\frac{\partial B^k(i, j)}{\partial t} \approx \frac{B^{k+1}(i, j) - B^k(i, j)}{\Delta t} \quad (46)$$

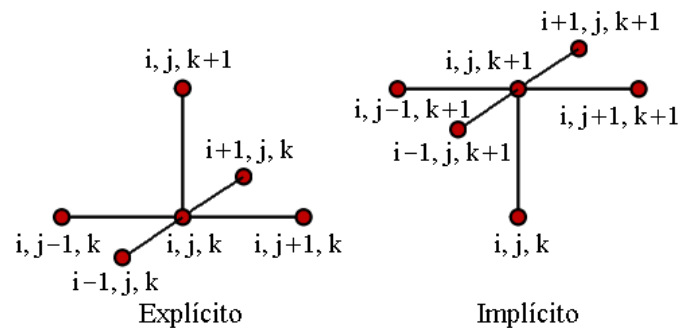


Figura 20: estêncis dos métodos implícito e explícito

O campo magnético presente na superfície mais próxima da bobina é uma composição de dois campos magnéticos,  $B_a$  e  $B_b$ , que têm origem no circuito primário e secundário, respectivamente.  $B_a$  é o campo magnético gerado pela corrente da bobina, enquanto  $B_b$  é o campo gerado por correntes induzidas de Eddy em oposição à variação do primeiro, conforme a lei de Lenz. O campo resultante é a sua soma, como na Eq. (47).

O campo magnético produzido pela bobina precisa ser imposto ao modelo como uma condição de contorno, para que o campo resultante no interior da peça possa ser calculado. Siddiqui (2009) usou um cálculo resultante do uso de integrais elípticas para resolver o problema do campo magnético em pontos superficiais da peça de trabalho. As componentes axial e radial do campo  $B_a$  são obtidas do campo magnético resultante de um círculo fechado de corrente, de raio  $r_0$ , no ponto  $P$  de coordenadas  $(z, r)$ , como na Fig. 21. As equações (50) e (49) mostram o uso das integrais elípticas  $K()$  e  $E()$  de primeira e segunda ordem, alimentadas por um fator geométrico  $g$ , da equação (48). Então, para uma bobina aproximada por vários círculos de corrente, é feita



uma superposição dos efeitos com um somatório da contribuição de cada espira, nas equações (54) e (55).

As componentes do campo  $B_b$  estão nas equações (52) e (53) são obtidas de forma similar, com a diferença de que o círculo de corrente que gera este campo está dentro da peça, cuja geometria foi discretizada, logo não está concentrada em uma dimensão, como no circuito primário, mas distribuída em uma densidade de corrente  $J_b$ . Portanto a equação tem as suas variáveis substituídas pelos incrementos do conjunto (23), e o campo resultante é o produto da integração da densidade de corrente com respeito às dimensões da peça realizada em dois somatórios, mostrados nas equações (56) e (57).

$$B_s = B_a + B_b \quad (47)$$

$$g = \sqrt{\frac{4r_0 r_P}{(r_0 + r_P)^2 + z_P^2}} \quad (48)$$

$$B'_{az} = \frac{\mu}{2\pi} I_a(t) \frac{1}{[(r_0 + r_P)^2 + z^2]^{1/2}} \left[ E(g) \frac{r_0^2 - r_P^2 - z_P^2}{(r_0 - r_P)^2 + z_P^2} + K(g) \right] \quad (49)$$

$$B'_{ar} = \frac{\mu}{2\pi} I_a(t) \frac{z_P}{r_P} \frac{1}{[(r_0 + r_P)^2 + z_P^2]^{1/2}} \left[ E(g) \frac{r_0^2 + r_P^2 + z_P^2}{(r_0 - r_P)^2 + z_P^2} - K(g) \right] \quad (50)$$

$$g = \sqrt{\frac{4(j_0 \Delta r)(j_P \Delta r)}{(j_0 \Delta r + j_P \Delta r)^2 + ((i_P - i_0) \Delta z)^2}} \quad (51)$$

$$B'_{bz} = \frac{\mu}{2\pi} J_b^{k-1}(i_0, j_0) \Delta z \Delta r \dots \frac{1}{\dots [(j_0 \Delta r + j_P \Delta r)^2 + ((i_P - i_0) \Delta z)^2]^{1/2} \dots} \dots \left[ E(g) \frac{(j_0 \Delta r)^2 - (j_P \Delta r)^2 - ((i_P - i_0) \Delta z)^2}{(j_0 \Delta r - j_P \Delta r)^2 + ((i_P - i_0) \Delta z)^2} + K(g) \right] \quad (52)$$

$$B'_{br} = \frac{\mu}{2\pi} J_b^{k-1}(i_0, j_0) \Delta z \Delta r \left( \frac{(i_P - i_0) \Delta z}{j_P \Delta r} \right) \dots \frac{1}{\dots [(j_0 \Delta r + j_P \Delta r)^2 + ((i_P - i_0) \Delta z)^2]^{1/2} \dots} \dots \left[ E(g) \frac{(j_0 \Delta r)^2 + (j_P \Delta r)^2 + ((i_P - i_0) \Delta z)^2}{(j_0 \Delta r - j_P \Delta r)^2 + ((i_P - i_0) \Delta z)^2} - K(g) \right] \quad (53)$$

$$B_{az}(i_P, j_P) = \sum_{c=1}^{nc} B'_{az}(z_P(i_P, c), r_P(j_P), r_0(c)) \quad (54)$$

$$B_{ar}(i_P, j_P) = \sum_{c=1}^{nc} B'_{ar}(z_P(i_P, c), r_P(j_P), r_0(c)) \quad (55)$$

$$B_{bz}(i_P, j_P) = \sum_{j_0=1}^{n_j} \sum_{i_0=1}^{n_i} B'_{bz}(i_0, j_0, i_P, j_P) \quad (56)$$

$$B_{br}(i_P, j_P) = \sum_{j_0=1}^{n_j} \sum_{i_0=1}^{n_i} B'_{ar}(i_0, j_0, i_P, j_P) \quad (57)$$

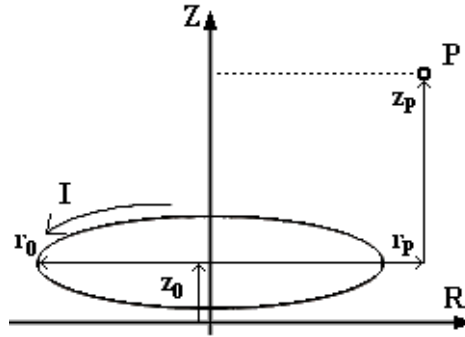


Figura 21: Ilustração baseada na descrição de Siddiqui (2009) para cálculo do campo magnético no ponto  $P$ .

Nas seções a seguir, são mostrados os resultados da simulação de ambos os métodos no software Matlab<sup>®</sup> 2012b. São testados todos os três modos de operação aludidos no Capítulo 3. Na primeira simulação, o sistema EMF é colocado em configuração planar, em modo de abaulamento, com parâmetros que são mostrados na Tabela 2. A bobina é dividida em 5 anéis concêntricos, com raios em intervalos regulares de 5,5 mm, localizados 2,9 mm abaixo da peça de trabalho. O tempo total de simulação foi programado em 20  $\mu\text{s}$ , divididos em incrementos de tempo de 0,1  $\mu\text{s}$ . Após o fim da simulação, o gráfico de corrente da Fig. 22 é obtido, e com ele, na Fig. 25, a distribuição do campo magnético na superfície inferior da peça, em  $B(0, j)$ , obtida em ambos os métodos. O gráfico do campo magnético está no instante de corrente mais alta, em 16,2  $\mu\text{s}$ , ou seja, no incremento  $k = 162$ . Na segunda simulação, o sistema EMF é colocado em configuração tubular, em modo de expansão, com parâmetros que são mostrados na Tabela 3. O incremento de tempo é novamente de 0,1  $\mu\text{s}$ . Após o fim da simulação, o gráfico de corrente é exibido na Fig. 24, e com ele, na Fig. 25, a distribuição do campo magnético na superfície inferior da peça, em  $B(i, 0)$ , obtida em ambos os métodos. O gráfico do campo magnético está no instante de corrente mais alta, em 15,1  $\mu\text{s}$ , ou seja, no incremento  $k = 151$ . Na terceira simulação, o sistema EMF é colocado novamente em configuração tubular, desta vez em modo de compressão, com parâmetros que são mostrados na Tabela 4. O incremento de tempo continua o de 0,1  $\mu\text{s}$ . Após o fim da simulação, o gráfico de corrente é exibido na Fig. 26, e com ele, na Fig. 27, a distribuição do campo magnético na superfície inferior da peça, em  $B(i, n_j)$ , obtida em ambos os métodos. O gráfico do campo magnético está no instante de corrente mais alta, em 20  $\mu\text{s}$ , ou seja, no incremento  $k = 200$ .

## Abaulamento

Tabela 2: Parâmetros da comparação entre os métodos explícito e implícito em configuração planar.

Circuito elétrico		Peça de Al 1050	
Numero de enrolamentos	5	Espessura	3 mm
Menor raio da bobina	10 mm	Raio	55 mm
Maior raio da bobina	32 mm	Condutividade elétrica	36 MS/m
Passo do enrolamento	5.5 mm	Permeabilidade magnética	$1,257 \times 10^{-6} \text{ N/A}^2$
Espaço entre bobina e peça	2,9 mm	Incrementos de malha ( $n_r \times n_z$ )	110x6
Indutância equivalente	$2.86 \mu\text{H}$		
Resistência equivalente	$28.5 \text{ m}\Omega$		
Capacitância	$40 \mu\text{F}$		
Tensão inicial	2000 V		

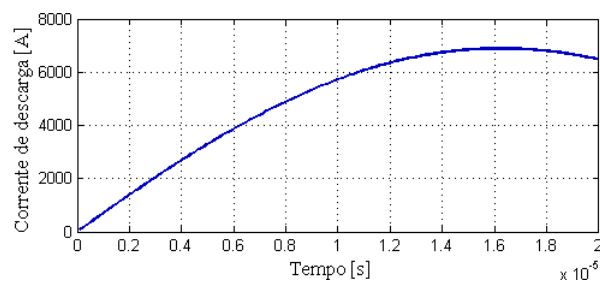


Figura 22: Gráfico da descarga de corrente em função do tempo.

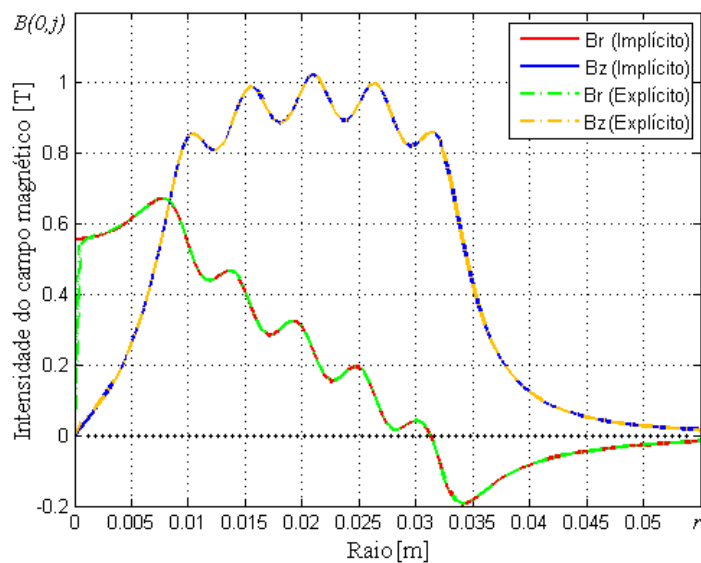


Figura 23: Gráfico do campo magnético na peça plana obtido dos métodos implícito e explícito  $16,2 \mu\text{s}$  após a comutação da chave.

## Expansão

Tabela 3: Parâmetros da comparação entre os métodos explícito e implícito em configuração tubular (expansão).

Circuito elétrico		Peça de Al 1050	
Numero de enrolamentos	33	Altura	140 mm
Limite inferior da bobina	20,5 mm	Raio interno	20 mm
Limite superior da bobina	116,5 mm	Raio externo	21 mm
Passo do enrolamento	3 mm	Condutividade elétrica	36 MS/m
Raio da bobina	17,5 mm	Permeabilidade magnética	$1,257 \times 10^{-6} \text{ N/A}^2$
Indutância equivalente	$5 \mu\text{H}$	Incrementos de malha ( $n_r \times n_z$ )	$6 \times 140$
Resistência equivalente	$60 \text{ m}\Omega$		
Capacitância	$20 \mu\text{F}$		
Tensão inicial	5000 V		

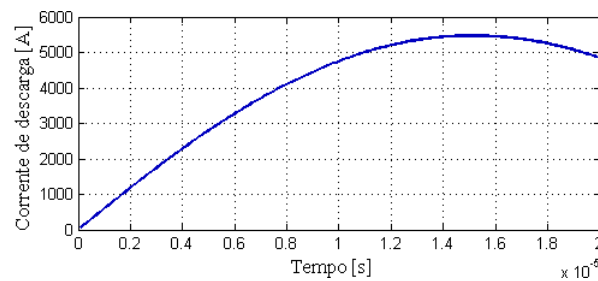
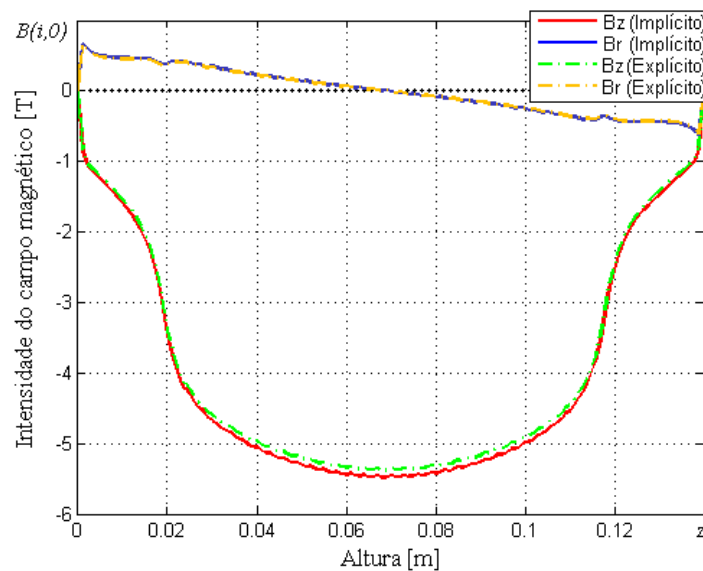


Figura 24: Gráfico da descarga de corrente em função do tempo.

Figura 25: Gráfico do campo magnético resultante dos métodos implícito e explícito no processo de expansão  $15,1 \mu\text{s}$  após a comutação da chave.

## Compressão

Tabela 4: Parâmetros da comparação entre os métodos explícito e implícito em configuração tubular (compressão).

Circuito elétrico		Peça de Al 1050	
Numero de enrolamentos	33	Altura	140 mm
Limite inferior da bobina	20,5 mm	Raio interno	20 mm
Limite superior da bobina	116,5 mm	Raio externo	21 mm
Passo do enrolamento	3 mm	Condutividade elétrica	36 MS/m
Raio da bobina	23 mm	Permeabilidade magnética	$1,257 \times 10^{-6} \text{ N/A}^2$
Indutância equivalente	$8,6 \mu\text{H}$	Incrementos de malha ( $n_r \times n_z$ )	6x140
Resistência equivalente	$60 \text{ m}\Omega$		
Capacitância	$20 \mu\text{F}$		
Tensão inicial	5000 V		

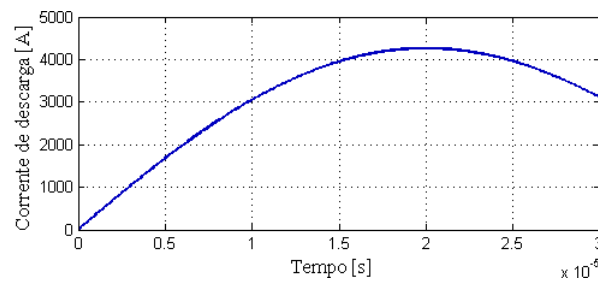


Figura 26: Gráfico da descarga de corrente em função do tempo.

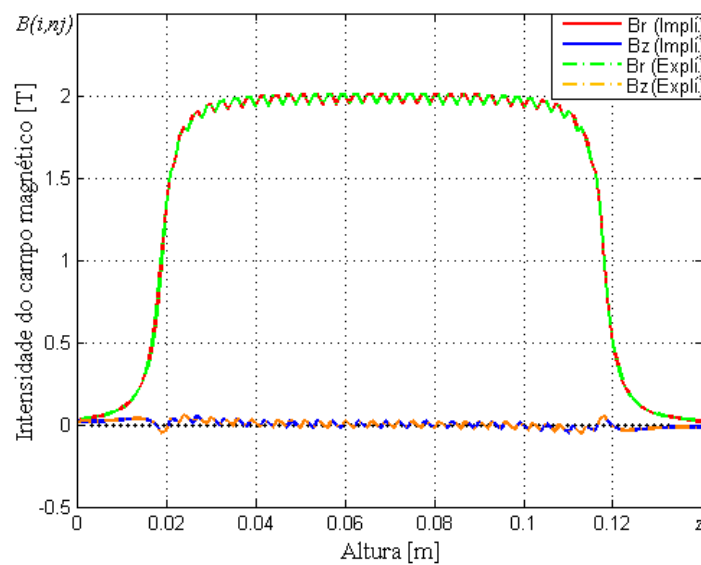


Figura 27: Gráfico do campo magnético resultante dos métodos implícito e explícito no processo de compressão  $20 \mu\text{s}$  após a comutação da chave.

### 4.3 Comparação com experimento prático

O algoritmo de diferenças finitas é comparado com o experimento conduzido por Takatsu et al. (1988), citado na seção 2.1 da revisão bibliográfica. A Fig. 29 mostra um ensaio realizado pelo autor que é muito proveitoso como fonte de comparação. Os parâmetros do ensaio são todos expostos no seu artigo, em uma tabela que é exibida na Fig. 28. Em seu trabalho, sensores magnéticos foram usados para captar o campo magnético gerado por uma EMF no instante do pico mais alto de corrente em um ensaio que Siddiqui (2009) aproveitou para validar o seu método.

Tabela 1 Parâmetros do sistema

Bobina (#050)	No. de enrolamentos $N_t$	5
	Raio do maior anel	32 mm
	Passo $p_c$	5.5 mm
	Indutância própria $L_1$	0.86 $\mu$ H
Condições do circuito	Capacitância do banco de capacit. $C_o$	40 $\mu$ F
	Tensão inicial $V_o$	6.0 kV
	Indutância do circuito	2.0 $\mu$ H
	Resistência do circuito	25.5 m $\Omega$
Peça de Trabalho	Material	Alumínio (recozido)
	Espessura $h_o$	3 mm
	Diâmetro $2r_t$	$\phi$ 110 mm
	" (abaulado) $2r_b$	$\phi$ 80 mm
	Condutividade $\sigma_w$	36 MS/m
	Permeabilidade $\mu_o$	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m
	Densidade $\rho_o$	$2.75 \times 10^3$ kg/m <sup>3</sup>
	Módulo de elastic.	80.7 GPa
	Constante $\sigma_o^*$	118 MPa
	" $n$	0.27
	" $\sigma_1^*$	15.7 MPa
	" $m$	0.54
	" $\epsilon_{ef,o}^p$	$10^{-3}$
Distância	$d_g$ 1.6 mm	

Figura 28: Tabela de parâmetros do ensaio. Adaptada de Takatsu et al. (1988).

Os parâmetros expostos na tabela da Fig. 28, são os mesmos do ensaio feito neste estudo para comparar o método implícito com o explícito do autor, em configuração planar, na Seção 4.2. A indutância equivalente é aproximada por Siddiqui (2009) como a indutância do circuito somada à indutância própria da chapa, e à resistência do circuito é somado um valor estimado da resistência da chapa. A resistência do circuito, da ordem de dezenas de miliohms, é tão pequena que variações em sua medida praticamente não afetam a corrente de pico da descarga, que ocorre em 16,2  $\mu$ s pela simulação, contra uma constante de tempo  $\tau$  de 200  $\mu$ s para os 28.5 m $\Omega$  considerados.

Os resultados são expostos nas figuras 30 e 31, em que foram impressas as marcações de medida dos sensores magnéticos da Fig. 29. Esta transposição foi feita colocando a figura do gráfico do estudo de Takatsu et al. (1988) em um scanner e marcando as posições das medidas em um software de recriação de gráficos, para uma maior precisão.

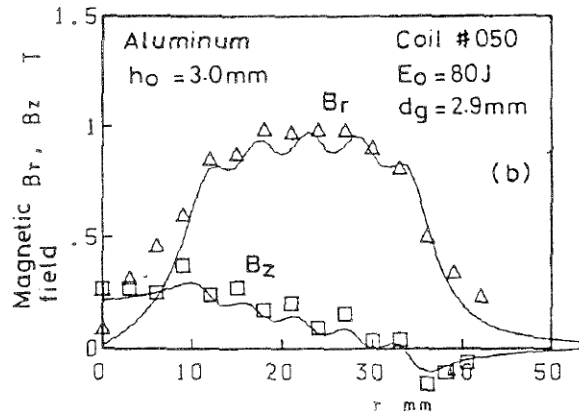


Figura 29: Distribuição do campo magnético obtido no estudo de Takatsu et al. (1988).

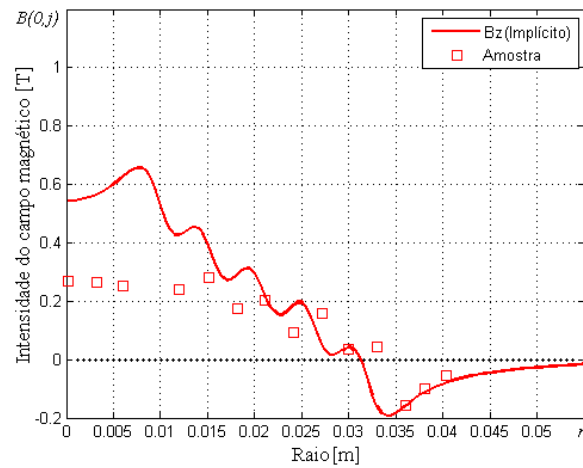


Figura 30: Distribuição do campo magnético axial comparado com medidas

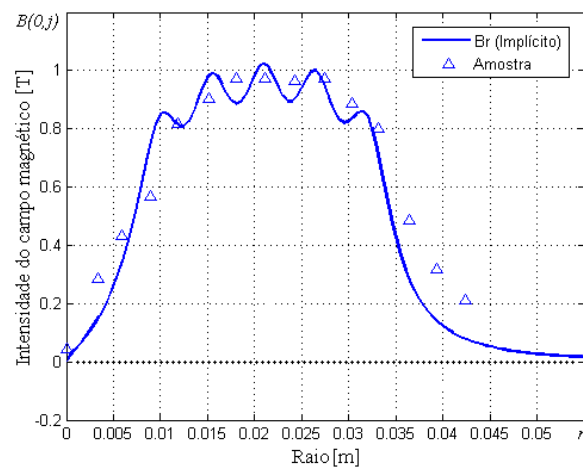


Figura 31: Distribuição do campo magnético radial comparado com medidas

## 5 Conclusões

Neste estudo, pôde-se descrever de maneira aprofundada uma aplicação prática do método das diferenças finitas para a resolução de equações diferenciais. A requisição de uma mudança no algoritmo do cálculo do campo magnético para uma versão incondicionalmente estável impulsionou o desenvolvimento e implementação do novo algoritmo em uma rotina de software de cálculo numérico. A separação do algoritmo em estágios facilitou a documentação deste, que envolve um elevado conteúdo de matemática, especialmente nas áreas de equações diferenciais, matemática aplicada, e, naturalmente, cálculo numérico, e que na ausência de um documento explicativo seria de difícil ou impossível compreensão.

Um ponto a ser dado destaque é a comparação do algoritmo com uma solução analítica. Isto lhe concedeu uma verificação inédita em outros estudos, que usaram experimentos práticos e métodos numéricos para evidenciar seu funcionamento, comprovando-o como ferramenta prática, mas não como uma aplicação válida de fundamentos matemáticos a um problema real.

Como trabalho futuro, uma continuação do trabalho seguindo a modelagem da EMF para o estágio da conformação mecânica é a opção mais evidente. Se for mantido o princípio de desacoplamento entre os estágios do modelo, as pressões magnéticas obtidas no pós-processamento podem ser importadas em um software de elementos finitos, a fim de se realizar a análise da deformação dinâmica da peça. Isto abriria a possibilidade de mais um trabalho futuro, a construção de uma máquina de estampagem magnética e sua parametrização no modelo completo, tornando possível se ter uma prévia da quantidade de deformação causada por qualquer configuração, dispensando a necessidade de numerosos testes.



---

## 6 Referências

- Balanethiram, V. S., B.Tech., and M.S. 1996. Hyperplasticity: enhanced formability of sheet metals at high workpiece velocity. Technical report, Universidade de Ohio.
- Burden, R. L. and Faires, J. D. 2010. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole.
- Knoepfel, H. E. 2000. *Magnetic Fields: A Comprehensive Theoretical Treatise for Practical Use*. John Wiley & Sons.
- Manea, T., Verweij, M., and Blok, H. 2002. The importance of the velocity term in the electromagnetic forming process. In *Proceedings of 27th General Assembly of the International Union of Radio Science, URSI 2002*.
- Paese, E. 2014. *Conformação Eletromagnética de Chapas Finas Usando Bobina Espiral Plana: Modelagem com Acoplamento Eletromagnético*. PhD thesis.
- Paese, E., Geier, M., Homrich, R. P., and Pacheco, J. L. 2011. Simplified mathematical modeling for an electromagnetic forming system with flat spiral coil as actuator. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 33(3).
- Siddiqui, M. A. 2009. *Numerical Modelling and Simulation of Electromagnetic Forming Process*. PhD thesis.
- Takatsu, N., Kato, M., Sato, K., and Tobe, T. 1988. High-speed forming of metal sheets by electromagnetic force. *The Japan Society of Mechanical Engineers*, 31(1).