A REGRA DOS SINAIS
DE DESCARTES

COLÓQUIO SBM/UFRGS

Oclide José Dotto

Série C14/ABR/89

A Regra dos Sinais de Descartes

Oclide José Dotto

1. Introdução. Todo matemático puro ou aplicado sabe quão importante é a determinação das raízes dum polinômio, além de constituir isso um problema que empolgou os matemáticos desde sempre. Com a pesquisa sobre o assunto obtiveram-se vários resultados como

- a fórmula para o polinômio de 2º grau (Bâskara);
- a fórmula para o polinômio de 3º grau (Cardano, Florido, Scipio del Ferro, Tartaglia);
- a solução trigonométrica para o polinômio de 3º grau;
- a solução para o polinômio de 4º grau (Ferrari);
- a impossibilidade de solução em termos dos coeficientes para polinômios de grau igual ou superior ao 5º (Abel, Galois);
- o teorema fundamental da álgebra (Gauss);
- a condição necessária para uma raiz ser racional;
- a condição necessária e suficiente para um número real ser um limitante superior, ou um limitante inferior do conjunto das raízes reais;
- o teorema do zero (Weierstrass);
- processos númericos aproximados;
- a regra dos sinais (Descartes).

Nosso objetivo aqui é apresentar e justificar este último resultado do qual apenas a idéia parece ser devida a Descartes. É um resultado pouco conhecido ou ensinado, apesar de sua fácil aplicabilidade e importância.

2. Apresentação da Regra dos Sinais de Descartes. Esta regra fornece valiosas informações sobre o número de raízes reais dum polinômio e seu sinal a partir dos sinais dos coeficientes desse polinômio. Ela é importante por si mesma, ou em conjunção com outros fatos, na pesquisa de raízes polinomiais, tendo em mente que, para fins práticos, muitas vezes, quer-se saber apenas da existência e sinal duma raiz real. Por exemplo, o mero conhecimento do número de raízes reais e, conseqüentemente, do número de raízes complexas do polinômio característico duma equação diferencial linear, permite saber a forma da solução geral dessa equação e obter inúmeras informações sobre o problema modelado pela equação.

A observação dos sinais dos coeficientes dum polinômio é muito útil com relação às suas raízes. Por exemplo, um fato óbvio é que não há raízes reais positivas quando todos os coeficientes possuem o mesmo sinal. Mas examinaremos algo mais profundo.

Nesta exposição

- os polinômios têm coeficientes reais;
- os polinômios são escritos de modo que os graus de seus termos estejam em ordem decrescente;
- ignoramos os termos dos polinômios com coeficiente nulo.

Dizemos que um polinômio têm uma variação de sinal quando dois de seus coeficientes consecutivos tem sinal diferente.

Para exemplificar, o polinômio

$$p(x) = x^5 - 3x^3 - 4x + 1$$

tem duas variações do sinal.

Seja p(x) um polinômio de coeficientes reais. Indicaremos com v^+, v^-, P e N, respectivamente, o número de variações de sinal de p(x), de variações de sinal de p(-x), de raízes positivas de p(x) e de raízes negativas de p(x). A Regra dos Sinais de Descartes se enuncia

$$\boxed{\begin{array}{ll} P = v^+ - 2j & \text{para certo } j \in \{0, 1, 2, \ldots\} \\ N = v^- - 2k & \text{para certo } k \in \{0, 1, 1, \ldots\} \end{array}}$$

Ela expressa simplesmente que o número de variações de sinal dum polinômio e o numero de suas raízes positivas é par, e que o mesmo ocorre com o número de raízes negativas.

Exemplo 1. Para $p(x) = x^3 - 2x^2 - 3$ tem-se $v^+ = 1$, logo $P = 1 - 2j$; A única possibiliade para j é $j = 0$; logo $P = 1$. Como $p(-x) = -x^3 - 2x^2 - 3$, tem-se $v^- = 0$ e $N = -2k$; o único valor possível para k é zero, que leva a $N = 0$. Concluímos que p(x) tem uma raiz real (positiva) e 2 complexas (conjugadas).

Exemplo 2. Seja agora $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3$. Aqui $v^+ = 2$, logo $P = 2 - 2j$ e as possibilidades para j são $j = 0$ ou $j = 1$; então $P = 2$ ou $P = 0$. Além disso, $p(-x) = -x^3 - 2x^2 + 3$ e vê-se que $v^- = 1$ e daí que $N = 1 - 2K$; usando o único valor possível para k, isto é, $k = 0$, obtém-se $N = 1$. Consequentemente p(x) tem ou 3 raízes reais (2 positivas e uma negativa) ou uma raiz real (negativa) e 2 complexas (conjugadas).

É claro que as alternativas aumentam com o número de variações de sinal.

Exemplo 3. Consideremos $p(x) = 25x^5 + 21x^3 + 11x - 6$. Procedendo como acima vê-se que $p(x)$ tem uma raiz real (positiva) e 2 pares de raízes complexas conjugadas. Tentemos determinar a raiz real. Se for racional, será um dos números ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, $\pm\frac{1}{5}$, $\pm\frac{2}{5}$, $\pm\frac{3}{5}$, $\pm\frac{6}{5}$, $\pm\frac{1}{25}$, $\pm\frac{2}{25}$, $\pm\frac{3}{25}$, $\pm\frac{6}{25}$. Já sabemos que a raiz é positiva. Tentemos 1. A divisão de $p(x)$ por $x-1$ pelo dispositivo de Ruffini fornece:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 25 & 0 & 21 & 0 & 11 & -6 \\
 & & 25 & 25 & 46 & 46 & 57 \\
\hline
 & 25 & 25 & 46 & 46 & 57 & 51
\end{array}
$$

Isso mostra que 1 não é raiz, mas é um limitante superior para as raízes de $p(x)$. Se tentássemos $1/5$, verificaríamos que também não é raiz. O algoritmo de Ruffini para $2/5$ é

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\frac{2}{5} & 25 & 0 & 21 & 0 & 11 & -6 \\
 & & 10 & 4 & 10 & 4 & 6 \\
\hline
 & 25 & 10 & 25 & 10 & 15 & 0
\end{array}
$$

o que mostra que $2/5$ é raiz de $p(x)$. Eis, portanto, a única raiz real de $p(x)$.

O exemplo 3 teve a finalidade de mostrar como o concurso da Regra dos Sinais de Descartes pode poupar muito trabalho na pesquisa das raízes racionais.

3. <u>Demonstração da Regra dos Sinais de Descartes.</u> Seja um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a.$$

Podemos supor $a_n > 0$ e $a_0 \neq 0$. Como r é raiz de $p(x)$ se e só se $-r$ é raiz de $p(-x)$, basta demonstrar a primeira parte da regra, isto é, que $P = v^+ - 2j$ para algum $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ em outras palavras, que $v^+ - P$, a diferença entre o número de variações de sinal de $p(x)$ e o das raízes positivas, é um número par não negativo.

Seja então r uma raiz positiva de $p(x)$. Logo $p(x) = (x-r)\,q(x)$ com $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$. Escrevamos o algoritmo de Ruffini para r:

$$\begin{array}{c|cccccc} r & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & r\,a_n & r\,b_{n-2} & \cdots & r\,b_1 & r\,b_0 \\ \hline & a_n = b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & 0 \end{array}$$

Esse dispositivo nos permite ver os três fatos seguintes:

(a) nenhuma mudança de sinal pode ocorrer na 3ª linha antes que ocorra uma na 1ª linha;

(b) ocorrida uma mudança de sinal na 3º linha, este se mantém constante pelo menos até a próxima mudança de sinal na 1º linha;

(c) a_0 e b_0 têm sinal diferente.

Os dois primeiros fatos são óbvios e o terceiro vem de que $r>0$ e $a_0+rb_0=0$. Claramente

$$(a) \text{ e } (b) \implies v_q^+ \leq v^+,$$

onde v_q^+ indica o número de variações de sinal de $q(x)$. Mas também

$$(c) \implies v^+ \neq v^+$$

Logo $v_q^+ < v^+$, isto é, $q(x)$ tem menos variações de sinal que $p(x)$, no mínimo uma a menos.

Para compreender a última implicação em destaque, observamos que $a_0 > 0$ se e só se v^+ é par, pois $a_n > 0$ (note que é um fato geral, logo também $b_0 > 0$ se e só se v^+ é par). Como a_0 e b_0 têm sinal oposto (observação (c)), v^+ e v^+ têm paridade diferente, isto é, se um é par o outro é ímpar. Portanto são diferentes.

Sejam agora $r_1, \ldots r_p$ as raízes positivas de $p(x)$. Então

$$p(x) = (x-r_1) \ldots (x-r_p)\, q_p(x),$$

onde $q_p(x)$ é um conveniente polinômio. Pelo visto acima, $q_1(x)$ tem uma variação de sinal a menos que $p(x)$ no mínimo, $q_2(x)$ tem 2 variações de sinal a menos que $p(x)$ no mínimo, assim por diante, até concluirmos que $q_p(x)$ tem P variações de sinal a menos que $p(x)$ no mínimo. Como $v^+ \geq 0$, vem

$$P \leq v^+,$$

que traduz o fato de que o número de raízes positivas de $p(x)$ é menor ou igual ao número de variações de sinal de $p(x)$.

Sejam $-s_1, \ldots, -s_N$ as raízes negativas e $c_1 \pm d_1 i, \ldots, c_I \pm d_I i$ as raízes complexas de $p(x)$. Claro, $P+N+2I = n$. Notando que

$$[x - (c+di)]\,[x-(c-di)] = x^2 - 2cx+(c^2+d^2),$$

$p(x)$ se fatora da seguinte maneira:

$$p(x) = a_n(x-r_1)\ldots(x-r_P)\quad (x+s_1)\ldots(x+s_N)\quad [x^2-2c_1x+(c_1^2+d_1^2)]\ldots[x^2-2c_Ix+(c_I^2+d_I^2)].$$

Usando agora a lei da multiplicação, obtemos

$$a_0 = a_n(-r_1)\ldots(-r_P)\; s_1 \ldots s_N\; (c_1^2+d_1^2)\ldots(c_I^2+d_I^2).$$

Isso mostra que:

se $a_0>0$, P é par e se $a_0<0$, P e ímpar.

Já sabemos também que, se $a_0>0$, ambos P e v^+ são pares e, em conseqüência, v^+-P é par; e se $a_0<0$, ambos P e v^+ são ímpares, o que acarreta de novo que v^+-P é par.

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

01. Marcos Sebastiani - Palestra Inaugural - MAR/88.
02. José Francisco Porto da Silveira - A Fatorial no Infinito - MAR/88
03. Miguel A. Ferrero - Um Problema em Aberto em Algebra - MAI/88
04. Willy G. Engel - Problemas da História da Matemática Antiga - JUN/88.
05. Cydara C. Ripoll - A Série $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ converge!!!. - JUL/88.
06. Vera Clotilde G.Carneiro - O Caos na Natureza: Uma Interpretação a Luz dos Sistemas Dinâmicos - SET/88.
07. Ada Maria de S. Doering - A Conjectura de Fermat - SET/88.
08. Elsa Mundstock - Microinformática Aplicada as Áreas de Matemática e Estatística - SET/88.
09. Léa Fagundes - Psicologia Cognitiva e Edúcação Matemática - OUT/88..
10. Maria Luisa Souza - Breve Relato Sobre o Ensino de Matemática - OUT/ 88.
11. João Luis Becker - Teoria Axiomática da Utilidade Esperada - NOV/88.
12. Ary Tietböhl - Criação do Instituto de Matemática da UFRGS - MAR/89.