UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

103664

Representação Geométrica de Intervalos

por

BEATRIZ REGINA TAVARES
FRANCIOSI

SABi
UFRGS
05229479

Tese submetida à avaliação,
como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor
em Ciência da Computação

Prof. Dalcidio Moraes Claudio
Prof. Carla Maria Dal Sasso Freitas
Orientadores

Porto Alegre, março de 1999.

UFRGS
Instituto de Informática
Biblioteca

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

FRANCIOSI , BEATRIZ REGINA TAVARES

Representação Geométrica de Intervalos / por BEATRIZ REGINA TAVARES FRANCIOSI . — Porto Alegre: PPGC da UFRGS, 1999.
108 f.: il.

Tese (doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Computação, Porto Alegre, BR-RS, 1999. Orientadores: Claudio, Dalcidio Moraes; Freitas, Carla Maria Dal Sasso.

1. Intervalos. 2. Representação Gráfica. 3. Operações Intervalares. 4. Exploração Visual. I. Claudio, Dalcidio Moraes II. Freitas, Carla Maria Dal Sasso III. Título.

INSTITUTO DE INFORMÁTICA
BIBLIOTECA
N.º CHAMADA
518.8(043)
F817R
N.º REG.:
39762
DATA:
09.10.2001
ORIGEM: 1
DATA: 25.09.01
PREÇO: R$ 20,00
FUNDO: II
FORN.: II

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Reitora: Wrana Panizzi
Pró-Reitor de Pós-graduação: Franz Rainer Semmelmann
Diretor do Instituto de Informática: Philippe Olivier Alexandre Navauxx
Coordenador do PPGC: Carla Maria Dal Sasso Freitas
Bibliotecária-chefe do Instituto de Informática: Beatriz Regina Bastos Haro

Sumário

Lista de Figuras **6**
Lista de Tabelas **8**
Resumo **11**
Abstract **12**
1 Introdução **13**
2 Conceitos preliminares **16**
2.1 Conjunto ordenado 16
2.2 Reticulado 19
2.3 Ordenação de intervalos 21
2.4 Resumo 21
3 Teoria dos intervalos **23**
3.1 Espaços de ocorrência da computação numérica 23
3.2 Propriedades características de um intervalo 24
3.3 Intervalos especiais 26
3.4 Operações intervalares 26
3.4.1 Operações lógicas 27
3.4.2 Operações aritméticas 27
3.4.2.1 Operação intervalar unária 27
3.4.2.2 Operação intervalar binária 28
3.5 Propriedades do conjunto $I\Re$ 30
3.5.1 Propriedades características 30
3.5.2 Propriedades aritméticas 31
3.5.2.1 Propriedades referentes a operações unárias 31
3.5.2.2 Propriedades referentes a operações binárias 31
3.5.3 Propriedades topológicas 32
3.6 Resumo 32
4 Representação gráfica de intervalos **34**
4.1 Histórico 34
4.2 Caracterização do plano cartesiano 36
4.3 Representação gráfica proposta 37
4.3.1 Plano $I\Re$ 38
4.3.2 Propriedades do plano $I\Re$ 39
4.4 Primitivas da representação gráfica 43
4.4.1 Vetor 43
4.4.2 Subregião 44
4.4.3 Reta 44
4.4.4 Semi-reta 44
4.4.5 Segmento de reta 46

4.5 Propriedades da representação gráfica 46
4.5.1 Conjunto de intervalos de mesmo diâmetro 47
4.5.2 Conjuntos de intervalos de mesmo diâmetro 50
4.5.3 Conjunto de intervalos de mesmo ponto médio 51
4.5.4 Conjunto dos intervalos simétricos 52
4.5.5 Conjunto de intervalos de mesmo extremo inferior 53
4.5.6 Conjunto de intervalos de mesmo extremo superior 53
4.5.7 Conjunto de intervalos de mesmo valor absoluto 54
4.5.8 Conjunto de intervalos de mesma distância com relação a $[x]$ 56
4.5.9 Conjunto de inclusões de um intervalo 58
4.5.10 Seqüência monotônica de inclusões 60
4.6 Resumo 61
5 Representação gráfica das operações intervalares 63
5.1 Considerações iniciais 63
5.2 Operações lógicas 64
5.2.1 Intersecção 64
5.2.2 União 66
5.3 Operações aritméticas 67
5.3.1 Soma 68
5.3.2 Subtração 69
5.3.3 Multiplicação 69
5.4 Resumo 79
6 Análise visual de intervalos 80
6.1 Ordenação do conjunto $(I\Re, \subseteq)$ 80
6.2 Implicações da adição de um menor elemento em $(I\Re, \subseteq)$ 81
6.3 Álgebra booleana associada a intervalos 82
6.4 Cálculo gráfico do valor absoluto do intervalo 83
6.5 Geometria da operação entre conjuntos de intervalos 85
7 Equações intervalares 88
7.1 Definições iniciais 88
7.1.1 Extensão intervalar 88
7.1.2 Avaliação intervalar 88
7.1.3 Função intervalar 89
7.1.4 Equação intervalar 91
7.2 Solução gráfica da equação intervalar afim 92
7.2.1 Condição para existência de solução 92
7.2.2 Construção da solução 92
7.2.3 Solução gráfica da equação intervalar afim 93
7.3 Contribuição efetiva da solução proposta no contexto de intervalos . . . 96
8 Conclusões 99
8.1 Pergunta fundamental 99
8.2 Resultados obtidos 99
8.2.1 Representação geométrica de intervalos 99
8.2.2 Dedução de propriedades da representação geométrica de intervalos . 100
8.2.3 Dedução de intervalos a partir de características 100
8.2.4 Dedução de propriedades do conjunto $I\Re$ baseada na representação gráfica 101

8.2.5 Dedução de algoritmos que calculam os limites do conjunto solução . 101
8.2.6 Análise visual de intervalos 101
8.2.7 Ferramenta para o ensino de computação de intervalos 102
8.3 Limitações do trabalho 103
8.4 Prosseguimento do trabalho 103
Anexo 1 Soma de vetores **105**
Bibliografia **107**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Sistema de Bibliotecas da UFRGS

F 39762

Lista de Figuras

FIGURA 4.1 — Representação do intervalo como segmento de reta 35
FIGURA 4.2 — Representação de dois intervalos como segmentos de reta . 35
FIGURA 4.3 — Representação do intervalo como número 36
FIGURA 4.4 — Relacionamento entre quadrantes e octantes do plano cartesiano 38
FIGURA 4.5 — Representação do plano $I\Re$ 38
FIGURA 4.6 — Representação de quadrantes opostos do plano cartesiano . 39
FIGURA 4.7 — Representação de octantes opostos do plano cartesiano . . 40
FIGURA 4.8 — Representação do intervalo como ponto 43
FIGURA 4.9 — Representação do intervalo como número 43
FIGURA 4.10 — Representação do intervalo como conjunto 44
FIGURA 4.11 — Representação de um conjunto infinito de intervalos 45
FIGURA 4.12 — Representação de um conjunto infinito de intervalos limitados superiormente 45
FIGURA 4.13 — Representação de um conjunto infinito de intervalos limitado superior e inferiormente 46
FIGURA 4.14 — Representação do conjunto de intervalos de mesmo diâmetro 48
FIGURA 4.15 — Representação do intervalo e de seu pseudo-oposto em função do conjunto de intervalos de mesmo diâmetro 48
FIGURA 4.16 — Representação do intervalo e do seu pseudo-oposto 49
FIGURA 4.17 — Representação do valor absoluto do intervalo 55
FIGURA 4.18 — Representação do conjunto dos intervalos de mesmo valor absoluto 56
FIGURA 4.19 — Representação do conjunto intervalo de mesma distância de $[x]$ 57
FIGURA 4.20 — Representação do conjunto de inclusões de um intervalo $[x]$ 59
FIGURA 4.21 — Representação da seqüência monotônica de inclusões de um intervalo $[x]$ 61
FIGURA 5.1 — Representação da subregião $I\Re_{[x]}$ 64
FIGURA 5.2 — Representação dos operandos como segmentos de reta . . . 65
FIGURA 5.3 — Representação da intersecção de intervalos 65
FIGURA 5.4 — Representação dos operandos como segmentos de reta . . . 66
FIGURA 5.5 — Representação da soma de intervalos 68
FIGURA 5.6 — Representação da soma $[3;5]+[-4;6]$ 69
FIGURA 5.7 — Representação da subtração de intervalos 70
FIGURA 5.8 — Representação da multiplicação entre reais 71
FIGURA 5.9 — Representação da multiplicação entre real e intervalo . . . 71
FIGURA 5.10 — Representação da multiplicação entre intervalos (caso 1) . 77

FIGURA 5.11 — Representação da multiplicação entre intervalos (caso 2) . 77
FIGURA 5.12 — Representação da multiplicação entre intervalos (caso 3) . 78
FIGURA 5.13 — Representação da multiplicação entre intervalos (caso 6) . 78
FIGURA 6.1 — Representação da ordenação do conjunto $(I\Re, \subseteq)$ 81
FIGURA 6.2 — Representação do conjunto $\overline{I\Re}$ 82
FIGURA 6.3 — Representação do reticulado distributivo 83
FIGURA 6.4 — Representação do reticulado distributivo 84
FIGURA 6.5 — Representação do reticulado complementado 84
FIGURA 6.6 — Representação da operação de soma de conjuntos 86
FIGURA 6.7 — Representação gráfica da operação de soma de conjuntos . 87
FIGURA 7.1 — Representação gráfica da avaliação intervalar 90
FIGURA 7.2 — Representação da função intervalar sob o ponto de vista de conjuntos 91
FIGURA 7.3 — Solução gráfica da equação intervalar afim (parte 1/4) . . . 93
FIGURA 7.4 — Solução gráfica da equação intervalar afim (parte 2/4) . . . 94
FIGURA 7.5 — Solução gráfica da equação intervalar afim (parte 3/4) . . . 94
FIGURA 7.6 — Solução gráfica da equação intervalar afim (parte 4/4) . . . 95
FIGURA 7.7 — Solução gráfica da equação intervalar afim 96
FIGURA 1.1 — Representação da soma de vetores 106

Lista de Tabelas

TABELA 3.1 — Conjuntos de ocorrência de computações numéricas 24
TABELA 3.2 — Fórmulas das operações aritméticas entre intervalos 28
TABELA 3.3 — Fórmulas da multiplicação de intervalos 28
TABELA 3.4 — Fórmulas da divisão de intervalos 29
TABELA 4.1 — Descrição do quadrantes do plano cartesiano em função da variação de θ 37
TABELA 4.2 — Descrição dos octantes do plano cartesiano em função de φ 37
TABELA 5.1 — Multiplicação de intervalos em termos do conjunto de cotas superiores/inferiores 76

Notação

Para simplificar a escrita, utilizou-se as seguintes convenções:

$\emptyset$:	conjunto vazio.
$[x]$:	intervalo de extremo inferior x_1 e extremo superior x_2.
$[x][y]$:	multiplicação entre intervalos, ou seja, $[x] \times [y]$.
$< [x] >$:	norma do mínimo.
$\|[x]\|$:	norma do máximo ou valor absoluto do intervalo $[x]$.
$-[x]$:	intervalo pseudo-oposto de $[x]$.
$[x]^{-1}$:	intervalo pseudo-inverso de $[x]$.
$\vec{x}$:	vetor associado ao ponto (x_1, x_2).
C:	conjunto dos números complexos.
CR:	conjunto dos números complexos em ponto flutuante.
D_δ:	conjunto dos intervalos de mesmo valor absoluto δ.
$d([x],[y])$:	distância do entre os intervalos $[x]$ e $[y]$.
$i(M)$:	maior elemento do conjunto M.
$Inf(T)$:	*Ínfimo* do conjunto ordenado T.
IC:	conjuntos dos intervalos de complexos.
IMC:	conjunto das matrizes de intervalos de complexos.
$IMCR$:	conjunto das matrizes números complexos em ponto flutuante.
IMR:	conjunto das matrizes de intervalos de números em ponto flutuante.
$IM\Re$:	conjunto das matrizes de intervalos de reais.
$I\Re$:	conjunto dos intervalos de reais.
$\overline{I\Re}$:	conjunto dos intervalos de reais incluindo o conjunto *vazio*.
IR:	conjunto dos intervalos em ponto flutuante.
$I\Re_{[x]}$:	conjunto de inclusões do intervalo $[x]$.
$IV\Re$:	conjunto dos vetores de intervalos de reais.
IVC:	conjunto dos vetores de intervalos de complexos.
IVR:	conjunto dos vetores de intervalos em ponto flutuante.
ICR:	conjunto dos intervalos de números complexos em ponto flutuante.
IVR:	conjunto dos intervalos de vetores em ponto flutuante.
$IVCR$:	conjunto dos vetores de números complexos em ponto flutuante.
$L(I\Re_{k\downarrow})$:	conjunto dos intervalos de mesmo extremo inferior.
$L(T)$:	conjunto das cotas inferiores do conjunto ordenado T.

PLANO $I\Re$:	região do plano cartesiano cujos pontos correspondem a intervalos.
$m([x])$:	ponto médio do intervalo $[x]$.
M_φ:	conjunto dos intervalos de mesmo ponto médio φ.
M_0 :	conjunto dos intervalos simétricos.
MC:	conjunto das matrizes de números complexos.
MCR:	conjunto das matrizes de números complexos em ponto flutuante.
MR:	conjunto das matrizes de números em ponto flutuante.
$M\Re$:	conjunto das matrizes de números reais.
$o(M)$:	menor elemento do conjunto M.
PMC:	conjunto das partes de MC.
$P\Re$:	conjunto das partes de $\Re$.
PVC:	conjunto das partes de VC.
$PV\Re$:	conjunto das partes de $V\Re$.
$PM\Re$:	conjunto das partes de $M\Re$.
PC:	conjunto das partes de C.
$r([x])$:	raio do intervalo $[x]$.
$\Re$:	conjunto dos números reais.
$\Re^-$:	conjunto números reais negativos.
S_α:	conjunto de intervalos de mesmo diâmetro α.
$Sup(T)$:	*Supremo* do conjunto ordenado T.
$U(I\Re_{k\uparrow})$:	conjunto dos intervalos de mesmo extremo superior.
$U(T)$:	conjunto das cotas superiores do conjunto ordenado T.
VC:	conjunto dos vetores de números complexos.
VCR:	conjunto dos vetores de números complexos em ponto flutuante.
VR:	conjunto dos vetores de números em ponto flutuante.
$V\Re$:	conjunto dos vetores de números reais.
$w([x])$:	diâmetro do intervalo $[x]$.
$\wp(M)$:	conjunto das partes do conjunto M.
(x_1, x_2):	mapeamento em $\Re x \Re$ do intervalo $[x_1; x_2]$.

Resumo

Neste trabalho é apresentada uma nova abordagem para a representação gráfica de intervalos. Segundo esta abordagem é possível realizar a análise visual de intervalos a partir da associação entre propriedades geométricas do plano cartesiano e de conjuntos de intervalos representados como pontos desse plano.

Esta nova abordagem possibilita a representação da interpretação dual de intervalos, assim como a análise visual de relacionamentos em $(I\Re, \leq)$ e $(I\Re, \subseteq)$. Neste contexto, a representação gráfica do conjunto de intervalos degenerados, representado pela reta $y = x$, constitui um caso especial desta representação. Por sua vez, a relação $(I\Re, \subseteq)$ é representada pelo semiplano superior a reta $y = x$, denotado plano $I\Re$.

A interpretação visual de operações intervalares é obtida diretamente através da aplicação da representação gráfica proposta. Além disto, operandos e operadores podem ser estudados diretamente a partir desta representação.

Foram desenvolvidos experimentos de análise visual de intervalos utilizando a abordagem proposta e resultados bastante promissores foram obtidos. Estes experimentos possibilitaram a identificação de novas propriedades de intervalos assim como interpretações não usuais para operações intervalares.

Esta representação pode ser utilizada também para observar o comportamento de seqüências de intervalos gerados a partir de programas baseado na aplicação da aritmética intervalar. Nesta caso, pode ser observado como os intervalos desta seqüência variam com relação ao seu ponto médio e o raio, assim como a relação entre eles.

Esta representação foi utilizada com sucesso para obter a solução geométrica da equação intervalar afim e efutuando sua validação. Finalmente, analisamos a contribuição efetiva deste trabalho no contexto da aritmética intervalar.

Palavras-chave: Intervalos; Representação Gráfica; Operações Intervalares.

TITLE: "GRAPHICAL APPROACH TO INTERVALS"

Abstract

This thesis presents a framework enabling the visual analysis of intervals, obtained by mapping geometric properties of the cartesian plane into interval sets to obtain a graphical representation.

This new approach makes possible a dual interval representation and the immediate visual analysis of several relationships in $(I\Re, \leq)$ and $(I\Re, \subseteq)$. In this sense, the set of degenerated intervals is a special case of this approach as they are represented by the straight line $y = x$. In turn, the order relation in $(I\Re, \subseteq)$ is represented through the half-plane above the straight line $y = x$, denoted $I\Re$ *plane*.

Applying this framework, the visual interpretation of most interval operations is obtained directly from the graphical representation of the operands and the operations being studied. On the other hand, some experiments on interval visual analysis were developed with good final results. Thus, new properties and unusual interpretations for known operations can be developed with rather small effort. Moreover, this representation can be easily embedded into a running algorithm, to observe convergence and behavior of interval iterations, as one can easily see how intervals change with respect to midpoint and radius, as well as with respect to each other.

The validation of this new approach was carried through the geometric solution of linear interval equations. This result was analyzed in order to verify the effective contribution of this geometrical representation in the context of interval arithmetic.

Keywords : Intervals; Graphical Representation; Interval Operations.

1 Introdução

A Teoria dos Intervalos apresenta um novo tipo de dado numérico, denominado *intervalo*, que é uma extensão do número de ponto flutuante padrão. Um dos possíveis usos da aritmética associada a intervalos (*aritmética intervalar*) refere-se ao controle do erro de arredondamento do processamento numérico usual.

Kulisch[KUL 92] apresenta um exemplo bastante convincente quanto à utilidade da aritmética intervalar para controle do erro de arredondamento. Neste exemplo é considerada uma função real com raízes reais em um certo intervalo $[a; b]$. Esta função é então avaliada segundo a aritmética padrão de ponto flutuante e segundo a aritmética intervalar. Na avaliação segundo a aritmética padrão de ponto flutuante pode acontecer que em algum cálculo seja produzido um resultado positivo em vez do resultado correto negativo ou até mesmo que para valores que não foram os escolhidos a avaliação seja negativa. Nestes casos, o intervalo resultante não inclui o *zero* e por isto não fica evidente a existência de raízes em $[a; b]$. Por sua vez, a avaliação intervalar desta função produz como resultado um intervalo que contém o *zero* e assim tem-se a certeza de que existem raízes em $[a; b]$.

No que se refere ao controle do erro de arredondamento, a aritmética intervalar oferece uma contribuição inequívoca para a *Computação Científica* e seu uso possibilita obter o comportamento genuíno de modelos matemáticos.

Historicamente, o uso sistemático de intervalos não se tornou uma realidade por pelo menos dois motivos: exigência de hardware especial para a execução da aritmética intervalar; problemas intrinsecamente associados ao uso da aritmética intervalar. O primeiro motivo já não existe, pois atualmente a aritmética intervalar não exige hardware especial e está disponível na maioria das linguagens para computação científica (tanto compiladas, quanto interpretadas). O segundo motivo, no entanto, ainda existe e é o mais difícil de ser superado, pois implica em contornar limitações e superar deficiências da teoria que embasa este tipo de aritmética.

Uma das limitações da aritmética intervalar refere-se ao rápido aumento dos limites de erro dos resultados produzidos.

Exemplo 1.1 :[COM 93] *Considere a função* $f(x) = x(10 - x)$, $Dom(f) = [4; 6]$. *A imagem desta função é dada por* $Im(f, [4; 6]) = [24; 25]$ *e a sua avaliação intervalar é dada por*

$$[4; 6](10 - [4; 6]) = [4; 6](10 + [-6; -4]) = [4; 6][4; 6] = [16; 36].$$

Como pode ser observado, o intervalo produzido pela avaliação intervalar não só contém a imagem da função como tem 20 *vezes o comprimento do resultado exato.*

O problema do rápido aumento dos limites de erro do resultado pode ser amplificado quando confrontado com o fato de que diferentes extensões intervalares podem produzir diferentes resultados.

Exemplo 1.2 : *Considere a função* $f(x) = 10x - x^2$, $Dom(f) = [4;6]$ *e duas extensões intervalares,* f_1 *e* f_2, *desta função.*

$$f_1(x) = f(x), \qquad f_2(x) = x(10 - x).$$

A avaliação intervalar a partir destas extensões produz como resultado:

$$f_1([4;6]) = 10[4;6] - [4;6]^2 = [40;60] - [16;36] = [40;60] + [-36;-16] = [4;44],$$
$$f_2([4;6]) = [4;6](10 - [4;6]) = [4;6](10 + [-6;-4]) = [4;6][4;6] = [16;36].$$

Tem-se então que $f_1([4;6]) \neq f_2([4;6])$ *e, além disso, um resultado tem 40 vezes o comprimento da imagem da função e o outro 20 vezes.*

No exemplo anterior, os resultados diferentes são uma decorrência do fato do conjunto $I\Re$ munido das operações aritméticas não dispor da propriedade distributiva, ou seja, em intervalos $[a]([b] + [c]) \subseteq [a][b] + [a][c]$.

Apesar das limitações, a aritmética intervalar constitui a única opção numérica disponível para implementar a aritmética real em precisão finita e por isso compreender seu funcionamento e contornar suas limitações é um desafio importante a ser superado.

De fato, o uso de intervalos em técnicas numéricas só tem sentido em conjunto com outras técnicas e/ou ferramentas, pois os intervalos não constituem um universo autocontido. Seu uso oferece expressiva contribuição para: análise de erro; verificação de condições suficientes para a existência de solução e de convergência; construção dos limites do conjunto solução; disponibilização de um critério de parada natural para métodos iterativos.

Este trabalho pretende contribuir para o entendimento sobre o funcionamento da aritmética intervalar. Para isso, é proposta uma nova abordagem para a representação gráfica de intervalos. Esta abordagem é baseada na representação de intervalos no plano cartesiano e é orientada para a interpretação das operações intervalares.

O objetivo desta nova abordagem é possibilitar a análise visual de intervalos e assim disponibilizar uma alternativa para a solução de problemas intervalares baseada na geometria do plano.

A apresentação desta nova abordagem observa a seguinte estrutura:

- No **capítulo 2** apresentam-se os conceitos de *conjunto ordenado* e *reticulado* que são fundamentais para a Teoria dos Intervalos. Esta apresentação é importante na medida em que a nomenclatura utilizada no trabalho é introduzida, os conceitos matemáticos apresentados de forma dispersa na bibliografia são reunidos e a ordenação do conjunto dos intervalos é apresentada.

- No **capítulo 3** apresenta-se uma visão geral da Teoria dos Intervalos. Além de apresentar o contexto do trabalho, o objetivo deste capítulo é possibilitar a conexão de conceitos desta teoria com a abordagem gráfica introduzida neste

trabalho, assim como reunir propriedades do conjunto $I\Re$ que serão analisadas visualmente a partir do capítulo seguinte.

- No **capítulo 4** é proposta uma nova abordagem para a representação de intervalos no plano cartesiano. Para isto, o formalismo necessário, em termos de propriedades da representação, é introduzido e exemplos de aplicação são apresentados.

- No **capítulo 5** apresenta-se a representação gráfica das operações intervalares segundo a nova abordagem proposta. Esta representação é baseada nas primitivas gráficas definidas no capítulo anterior, nos conceitos da Teoria dos Intervalos apresentados no capítulo 3 e nos conceitos matemáticos apresentados no capítulo 2.

- No **capítulo 6** são apresentados alguns resultados obtidos a partir da análise visual de intervalos. Estes resultados referem-se a operações com conjuntos de intervalos, "*cálculo gráfico*", à adição de um menor elemento à estrutura $(I\Re, \subseteq)$, representação gráfica da ordenação da estrutura $(I\Re, \subseteq)$ e à álgebra booleana obtida a partir da inclusão de um menor elemento ao conjunto $I\Re$.

- No **capítulo 7** é apresentada a aplicação da análise visual de intervalos na resolução de equações intervalares. Esta aplicação além de contribuir para a resolução de problemas numéricos visa ilustrar as potencialidades de uso desta nova abordagem para a representação gráfica de intervalos.

- Finalmente, no **capítulo 8**, são apresentadas as conclusões do trabalho. Também são apresentadas limitações do trabalho assim como algumas possibilidades de continuação deste estudo.

O principal desafio que este trabalho se propõe a superar é oferecer uma forma alternativa de "*pensar*" sobre intervalos, baseada em formas gráficas que quando operadas geometricamente reproduzem as operações intervalares. Abre-se, assim, a possibilidade de analisar visualmentemente intervalos a fim de superar suas limitações a partir da compreensão de sua estrutura.

2 Conceitos preliminares

Os conceitos de *conjunto ordenado* e *reticulado* são fundamentais para a Teoria dos Intervalos. Neste capítulo estes conceitos são apresentados formalmente e as provas dos teoremas citados podem ser obtidas em Kulisch [KUL 79].

Esta apresentação é importante na medida em que a nomenclatura utilizada no trabalho é introduzida, os conceitos matemáticos apresentados de forma dispersa na bibliografia são reunidos e uma ordenação do conjunto dos intervalos é apresentada.

2.1 Conjunto ordenado

Definição 2.1 :(RELAÇÃO)
Sejam A e B conjuntos. Chama-se relação de A em B qualquer subconjunto do produto cartesiano de $A \times B$:

$$R \text{ é relação de } A \text{ em } B \Leftrightarrow R \subseteq A \times B.$$

Um caso especial de relação é obtido quando elementos de um mesmo conjunto estão relacionados entre si. Neste caso, tem-se uma relação que associa um elemento de um certo conjunto A com outro(s) elemento(s) do próprio conjunto A. Relações deste tipo são denominadas relações de A em A ou, simplesmente, relações em A.

Definição 2.2 :(RELAÇÃO EM A)
Seja A um conjunto. Então, R é relação em $A \Leftrightarrow R \subseteq A \times A$.

Considere, por exemplo, o conjunto M. Pode-se criar o conjunto das partes de M, denotado por $\wp(M)$, que é formado por todos os subconjuntos de M. Este conjunto é importante, pois permite definir relações entre subconjuntos de M. Assim, definem-se, por exemplo, as relações:

- $R \subseteq \wp(M) \times \wp(M)$, $xRy \Leftrightarrow x \subseteq y$;
- $S \subseteq \wp(M) \times \wp(M)$, $xSy \Leftrightarrow x = y$;
- $T \subseteq \wp(M) \times \wp(M)$, $xTy \Leftrightarrow x \neq y$.

Observa-se que, no caso destas relações, as variáveis "x" e "y" representam conjuntos pertencentes a $\wp(M)$.

As relações em A são importantes por possuírem diversas propriedades interessantes.

Estas propriedades estão listadas a seguir.

Definição 2.3 :(PROPRIEDADE REFLEXIVA)
Seja R uma relação definida em um conjunto A.
Então, R é reflexiva em $A \Leftrightarrow \forall x \in A, xRx$.

Definição 2.4 :(PROPRIEDADE SIMÉTRICA)
Seja R uma relação definida em um conjunto A.
Então, R é simétrica em $A \Leftrightarrow \forall x, y \in A, xRy \rightarrow yRx$.

Definição 2.5 :(PROPRIEDADE ANTI-SIMÉTRICA)
Seja R uma relação definida em um conjunto A.
Então, R é anti-simétrica em $A \Leftrightarrow \forall x, y \in A$, $(xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y$.

Definição 2.6 :(PROPRIEDADE TRANSITIVA)
Seja R uma relação definida em um conjunto A.
Então, R é transitiva em $A \Leftrightarrow \forall x, y, z \in A$, $(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$.

Através das propriedades que uma determinada relação possui pode-se definir tipos especiais de relações de acordo com finalidades particulares. Dentre estes tipos, as relações mais usuais são a de ordem parcial, total e de equivalência.

Definição 2.7 :(RELAÇÃO DE ORDEM)
Seja $R \subseteq A \times A$.
Então, R é relação de ordem $\Leftrightarrow$ R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Definição 2.8 :(CONJUNTO ORDENADO)
Seja $R \subseteq M \times M$ uma relação de ordem. Então, (M, R) é um conjunto ordenado.

Conjuntos ordenados são também chamados de *conjuntos parcialmente ordenados*. Como os conjuntos ordenados considerados aqui são bastante específicos, a palavra parcialmente será suprimida a fim de sintetizar a escrita.

Teorema 2.1 : *Se $(M, \leq)$ é um conjunto ordenado e $T \subseteq M$, então $(T, \leq)$ é também um conjunto ordenado.*

(a prova deste teorema pode ser obtida em Kulisch [KUL 79])

Teorema 2.2 : *Se $(M, \subseteq)$ é um conjunto ordenado e $T \subseteq M$, então $(T, \subseteq)$ é também um conjunto ordenado.*

(a prova deste teorema pode ser obtida em Kulisch [KUL 79])

Definição 2.9 :(RELAÇÃO DE ORDEM TOTAL)
Seja $R \subseteq A \times A$ uma relação de ordem.
Então, R é relação de ordem total $\Leftrightarrow (\forall x, y \in M)(xRy \vee yRx)$.

Definição 2.10 :(CONJUNTO TOTALMENTE ORDENADO)
Seja $R \subseteq M \times M$ uma relação de ordem total.
Então, (M, R) é um conjunto totalmente ordenado.

Teorema 2.3 : *Se $(M, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado e $T \subseteq M$, então $(T, \leq)$ é também um conjunto totalmente ordenado.*

(a prova deste teorema pode ser obtida em Kulisch [KUL 79])

Teorema 2.4 : *Se $(M, \subseteq)$ é um conjunto totalmente ordenado e $T \subseteq M$, então $(T, \subseteq)$ é também um conjunto totalmente ordenado.*

(a prova deste teorema pode ser obtida em Kulisch [KUL 79])

Um conjunto ordenado pode ser descrito através das características de seus elementos, ou seja, quem é vizinho (superior/inferior) de quem, os elementos (maximal/minimal) com relação a subconjuntos deste conjunto, o maior/menor elemento de subconjuntos deste conjunto, etc. Para isso é importante introduzir as definições associadas a estas características.

Definição 2.11 :(VIZINHO INFERIOR)
Seja (M, R) um conjunto ordenado.
$x \in M$ é vizinho inferior de $y \in M \Leftrightarrow xRy$ e nenhum outro elemento de M está entre eles, ou seja, $\nexists z \in M$ tal que $xRzRy$.

O conceito de vizinho inferior é usado, por exemplo, para representar graficamente um conjunto ordenado finito. Para isto, assume-se simplesmente que todo elemento de M é um ponto do plano cartesiano e coloca-se x abaixo de y sempre que xRy. Então, conecta-se cada ponto com seu vizinho inferior por uma linha reta. A figura resultante é dita *diagrama de ordem* do conjunto ordenado (M, R).

Definição 2.12 :(ELEMENTO MAXIMAL/MINIMAL)
Seja (M, R) um conjunto ordenado.
$x \in M$ é elemento minimal de $M \Leftrightarrow (\forall y \in M)(\neg(yRx))$.
$x \in M$ é elemento maximal de $M \Leftrightarrow (\forall y \in M)(\neg(xRy))$.

Um conjunto ordenado (M, R) pode ter mais de um elemento maximal/minimal, entretanto, conjuntos ordenados infinitos nem sempre possuem esses elementos.

Definição 2.13 :(MAIOR/MENOR ELEMENTO)
Seja (M, R) um conjunto ordenado.
x é o menor elemento de $M \Leftrightarrow (x \in M) \wedge (\forall y \in M)(xRy)$. O menor elemento de M é denotado por $o(M)$.
x é o maior elemento de $M \Leftrightarrow (x \in M) \wedge (\forall y \in M)(yRx)$. O maior elemento de M é denotado por $i(M)$.

Os conceitos de elemento maximal/minimal e de maior/menor elemento são muito parecidos. A diferença fundamental entre estes conceitos é que um conjunto ordenado pode ter mais de um elemento maximal/minimal, mas terá no máximo um elemento satisfazendo a definição de maior/menor elemento.

Neste contexto, Kulisch [KUL 79] apresentou o seguinte teorema.

Teorema 2.5 : *Um conjunto ordenado tem pelo menos um menor elemento e um maior elemento.*

(a prova deste teorema pode ser obtida em Kulisch [KUL 79])

Exemplo 2.1 : *O conjunto das partes* $\wp(M) = (\wp(M), \subseteq)$ *é um exemplo importante de conjunto ordenado que contém um menor elemento* $o(\wp(M))$ *e um maior elemento* $i(\wp(M))$*:*

$$o(\wp(M)) = \emptyset, \qquad i(\wp(M)) = M.$$

Definição 2.14 :(COTA SUPERIOR/INFERIOR)
Seja (M, R) *um conjunto ordenado e* $T \subseteq M$.
$a \in M$ *é cota inferior de* $T \Leftrightarrow (\forall x \in T)(aRx)$.
$a \in M$ *é cota superior de* $T \Leftrightarrow (\forall x \in T)(xRa)$.

As cotas superiores/inferiores do conjunto T são, usualmente, reunidas em conjuntos
CONJUNTO DAS COTAS INFERIORES: $U(T) = \{a \in M \mid \forall x \in T,\ aRx\}$
CONJUNTO DAS COTAS SUPERIORES: $L(T) = \{a \in M \mid \forall x \in T,\ xRa\}$
e elas são limites deste conjunto, segundo o critério de ordenação definido pela relação de ordem.

Definição 2.15 :(CONJUNTO LIMITADO)
Um conjunto $T \subseteq M$ *ordenado é dito* conjunto limitado $\Leftrightarrow L(T) \neq \emptyset \wedge U(T) \neq \emptyset$.

Deve-se observar que as cotas inferiores e superiores nem sempre existirão.

Definição 2.16 :(ÍNFIMO/SUPREMO)
$a \in M$ *é Ínfimo de* $T \Leftrightarrow a$ *é a maior das cotas inferiores de* T.
$a \in M$ *é Supremo de* $T \Leftrightarrow a$ *é a menor das cotas superiores de* T.

Com relação ao *Ínfimo/Supremo* de um conjunto, é importante enfatizar que estes elementos são, respectivamente, a maior cota inferior e a menor cota superior do conjunto, mas não possuem a restrição de pertencerem a este conjunto. Outra característica importante é o fato de que nem todo subconjunto de um conjunto ordenado tem *Ínfimo* e *Supremo*, mas se existirem eles são unicamente determinados (Teorema 2.5). Tem-se ainda que o caso de T ser vazio não está excluído da Definição 2.16, pois nesta situação os limites não requerem coisa alguma, ou seja, um elemento a de M é *Ínfimo* e *Supremo* de T, pois para todo elemento de T ele é tanto a maior das cotas inferiores quanto a menor das cotas superiores.

2.2 Reticulado

Uma relação de ordem em um conjunto M define um *reticulado* quando para cada dois elementos deste conjunto sempre é possível identificar o *Ínfimo* e o *Supremo* destes elementos.

Definição 2.17 :(RETICULADO)
Seja (M, R) *um conjunto ordenado.*
Então, R *define um reticulado em* $M \Leftrightarrow (\forall x, y \in M)(\exists Inf\{x, y\} \wedge \exists Sup\{x, y\})$.

Uma outra forma de definir um reticulado é a partir das propriedades de um conjunto ordenado. Esta outra forma de definir um reticulado é apresentada a seguir.

Definição 2.18 :(RETICULADO)
Seja (M, R) um conjunto ordenado.
Então, R define um reticulado em $M \Leftrightarrow \forall x, y, z \in M$ valem as seguintes propriedades:

(1)	$Sup\{x, x\} = x$	(IDEMPOTÊNCIA)
(2)	$Inf\{x, x\} = x$	(IDEMPOTÊNCIA)
(3)	$Sup\{x, y\} = Sup\{y, x\}$	(COMUTATIVIDADE)
(4)	$Inf\{x, y\} = Inf\{y, x\}$	(COMUTATIVIDADE)
(5)	$Sup\{x, Sup\{y, z\}\} = Sup\{Sup\{x, y\}, z\}$	(ASSOCIATIVIDADE)
(6)	$Inf\{x, Inf\{y, z\}\} = Inf\{Inf\{x, y\}, z\}$	(ASSOCIATIVIDADE)
(7)	$Sup\{x, Inf\{x, y\}\} = x$	(ABSORÇÃO)
(8)	$Inf\{x, Sup\{x, y\}\} = x$	(ABSORÇÃO)

Se além destas propriedades um conjunto observar mais algumas propriedades, então ele pode constituir um: *reticulado distributivo*; *reticulado limitado*; *reticulado complementado*; *reticulado condicionalmente completo.* Isto é melhor explicado a seguir.

Definição 2.19 :(RETICULADO DISTRIBUTIVO)
Um reticulado (M, R) é distributivo se e somente se $\forall x, y, z \in M$:
(*i*) $Sup\{x, Inf\{y, z\}\} = Inf\{Sup\{x, y\}, Sup\{x, z\}\}$
(*ii*) $Inf\{x, Sup\{y, z\}\} = Sup\{Inf\{x, y\}, Inf\{x, z\}\}$

Definição 2.20 :(RETICULADO LIMITADO)
Um reticulado (M, R) é limitado se e somente se existir máximo e mínimo para M.

Considerando-se que o mínimo do conjunto M é denotado por 0 e que o máximo é denotado por 1, ou seja:

$$o(M) = 0, \quad i(M) = 1,$$

tem-se a seguinte definição de reticulado complementado.

Definição 2.21 :(RETICULADO COMPLEMENTADO)
Seja (M, R) um reticulado limitado.
Então, M é complementado $\Leftrightarrow (\forall x \in M)(\exists u \in M)(Inf\{x, u\} = 0 \wedge Sup\{x, u\} = 1)$.

Definição 2.22 :(CONJUNTO CONDICIONALMENTE COMPLETO)
Seja (M, R) um conjunto ordenado.
Então, (M, R) é chamado de conjunto condicionalmente completo se e somente se $(\forall T \subseteq M)(T \neq \emptyset) \rightarrow (\exists Inf(T) \wedge \exists Sup(T))$.

Definição 2.23 :(RETICULADO COMPLETO)
Seja (M, R) um conjunto ordenado.
Então, M é chamado de reticulado completo se e somente se $(\forall T \subseteq M)(\exists Inf(T) \wedge \exists Sup(T))$.

2.3 Ordenação de intervalos

Um intervalo tem natureza dual e um dos desdobramentos disto refere-se à relação de ordem associada a intervalos.

Segundo a interpretação de intervalo como conjunto, tem-se que:

Definição 2.24 : (INTERVALO)
Para cada dois elementos x_1, x_2 do conjunto ordenado $(\Re, \leq)$ com $x_1 \leq x_2$, tem-se definido o conjunto de reais denotado por $[x_1; x_2]$ e denominado por intervalo*:*

$$[x] = [x_1; x_2] = \{x \in \Re \mid x_1 \leq x \leq x_2\}.$$

Sendo assim, um intervalo é entendido como subconjunto do conjunto ordenado $(\Re, \leq)$ e por conseguinte ele também é um conjunto ordenado. Além disto, um intervalo é um *reticulado completo*, pois qualquer subconjunto deste conjunto tem um limite superior e um inferior.

Assim interpretado, o conjunto de intervalos, denotado por $I\Re$, é um conjunto de conjuntos e as seguintes relações estão definidas em $I\Re$:

INCLUSÃO:	$(\forall [x_1; x_2], [y_1; y_2] \in I\Re)([x_1; x_2] \subseteq [y_1; y_2] \Leftrightarrow y_1 \leq x_1 \wedge x_2 \leq y_2)$,
INCLUSÃO PRÓPRIA:	$(\forall [x_1; x_2], [y_1; y_2] \in I\Re)([x_1; x_2] \subset [y_1; y_2] \Leftrightarrow y_1 < x_1 \wedge x_2 < y_2)$,
IGUALDADE:	$(\forall [x_1; x_2], [y_1; y_2] \in I\Re)([x_1; x_2] = [y_1; y_2] \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2)$,
DESIGUALDADE ESTRITA:	$(\forall [x_1; x_2], [y_1; y_2] \in I\Re)([x_1; x_2] < [y_1; y_2] \Leftrightarrow x_2 < y_1)$,
DESIGUALDADE:	$(\forall [x_1; x_2], [y_1; y_2] \in I\Re)([x_1; x_2] \leq [y_1; y_2] \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2)$.

A relação $\leq$ quando aplicada sobre $I\Re$ resulta na estrutura $(I\Re, \leq)$ cuja relação de ordem é definda pela relação $\leq$. Isto foi provado por Kulisch [KUL 81], assim como o fato de que $(I\Re, \leq)$ constitui um reticulado completo.

Por sua vez, a relação $\subseteq$ quando aplicada sobre $I\Re$ resulta a estrutura $(I\Re, \subseteq)$. A prova de que $(I\Re, \subseteq)$ é conjunto ordenado foi apresentada por Nickel [NIC 75] e baseia-se no fato de que o conjunto $I\Re$ é um subconjunto do conjunto das partes de $\Re$ que, por sua vez, é um conjunto ordenado:

$$I\Re \subset \wp(\Re).$$

Sendo assim, se $I\Re$ for escrito em termos de *Ínfimo* e *Supremo*, o maior elemento de $(I\Re, \subseteq)$ é $\Re$, porém $(I\Re, \subseteq)$ não possui limite inferior. Este limite é necessário se desejarmos provar que $(I\Re, \subseteq)$ é um reticulado. Para adicionar um menor elemento a $(I\Re, \subseteq)$, primeiro é preciso provar que este conjunto é condicionalmente completo e então um menor elemento $\emptyset$ pode ser adicionado. Tem-se então definido uma nova estrutura, denotado por $\overline{I\Re}$, obtida a partir de $I\Re \cup \emptyset$ e cuja relação de ordem é definida pela relação $\subseteq$. Então, $(\overline{I\Re}, \subseteq)$ é um reticulado completo.

2.4 Resumo

Neste capítulo foram apresentados os conceitos de conjunto ordenado e reticulado que são fundamentais para a Teoria dos Intervalos.

A aplicação deste conceitos no conjunto $I\Re$, considerando das relações $\leq$ e $\subseteq$, resulta que:

(i) $[x]$ é um conjunto ordenado (este resultado baseia-se no fato de que o conjunto $\{x \in \Re \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$ é um subconjunto de $(I\Re, \leq)$);

(ii) $(I\Re, \leq)$ é um conjunto ordenado;

(iii) $(I\Re, \leq)$ é um reticulado completo;

(iv) $(I\Re, \subseteq)$ é um conjunto ordenado.

Tem-se assim caracterizada a estrutura do conjunto $I\Re$.

A nova abordagem para a representação gráfica de intervalos que será introduzida nos próximos capítulos possibilitará a verificação visual desta estrutura assim como será utilizada para fundamentar a análise visual subjacente.

3 Teoria dos intervalos

Neste capítulo apresenta-se uma visão geral da Teoria dos Intervalos cujo detalhamento pode ser obtido nos livros de Moore[MOO 66], Alefeld e Herzberger[ALE 83], e Neumaier[NEU 90].

O objetivo desta apresentação é possibilitar a conexão de conceitos desta teoria com a nova abordagem para a representação gráfica de intervalos que é introduzida neste trabalho, assim como reunir propriedades do conjunto dos intervalos ($I\Re$) que serão analisadas visualmente a partir do próximo capítulo.

Antes de começar esta apresentação é importante introduzir o conceito de intervalo utilizado na Teoria dos Intervalos. Segundo esta teoria, um intervalo é interpretado tanto como um *conjunto* de números reais limitado superior e inferiormente, quanto como um tipo especial de *número* que constitui uma extensão do número real. Esta dualidade de interpretação é conveniente, pois as provas da teoria são facilmente obtidas via Teoria dos Conjuntos (interpretação de intervalo como conjunto) e sua aplicação é viabilizada a partir da aritmética intervalar cujos operandos são intervalos (interpretação do intervalo como número). Assim colocado, é de fundamental importância para o entendimento da Teoria dos Intervalos ter sempre em mente este conceito de intervalo.

3.1 Espaços de ocorrência da computação numérica

A Teoria dos Intervalos possibilita definir a aritmética intervalar, a qual está estritamente relacionada à aritmética de computadores. Esta aritmética é baseada no conjunto de números de ponto flutuante e orientada a algoritmos numéricos.

Algoritmos numéricos são usualmente definidos no conjunto $\Re$ dos números reais, vetores de números reais ($V\Re$) e matrizes de números reais ($M\Re$). Os espaços correspondentes dos números complexos: números complexos (C), vetores de números complexos (VC) e matrizes de números complexos (MC) são também utilizados. Todos estes espaços são ordenados pela relação de ordem $\leq$.

Em todos os produtos cartesianos entre estes conjuntos, uma relação de ordem é definida conjunto-a-conjunto. Esta relação é de ordem parcial.

Se o conjunto dos intervalos for definido tomando por base o conjunto ordenado $(M, \leq)$, tem-se definido o conjunto IM e obtém-se os espaços $I\Re$, $IV\Re$, $IM\Re$, IC, IVC, IMC (segunda coluna da Tabela 3.1).

A maioria dos algoritmos numéricos é definida em um destes espaços. Entretanto, nos computadores está disponível somente um subconjunto R dos números reais $\Re$, onde R é o conjunto de números de ponto flutuante. Vetores (n-tuplas),

TABELA 3.1 — Conjuntos de ocorrência de computações numéricas

		$\Re$	$\supset$	R
		$V\Re$	$\supset$	VR
		$M\Re$	$\supset$	MR
$P\Re$	$\supset$	$I\Re$	$\supset$	IR
$PV\Re$	$\supset$	$IV\Re$	$\supset$	IVR
$PM\Re$	$\supset$	$IM\Re$	$\supset$	IMR
		C	$\supset$	CR
		VC	$\supset$	VCR
		MC	$\supset$	MCR
PC	$\supset$	IC	$\supset$	ICR
PVC	$\supset$	IVC	$\supset$	$IVCR$
PMC	$\supset$	IMC	$\supset$	$IMCR$

matrizes ($m \times n$-tuplas), números complexos (duplas), vetores e matrizes de números complexos, assim como o conjunto de intervalos correspondente têm de ser definidos em termos de R. Fazendo isto, obtém-se os espaços

$$VR, MR, IR, IVR, IMR, CR, VCR, MCR, ICR, IVR, IMCR,$$

os quais estão listados na terceira coluna da Tabela 3.1. As relações de inclusão são expressas pelo símbolo $\supset$.

Tendo descrito os conjuntos listados na terceira coluna da Tabela 3.1, é possível definir operações aritméticas sobre estes conjuntos. A definição destas operações é essencialmente diferente da convencional. Estas operações supostamente aproximam as operações dos conjuntos correspondentes listados na segunda coluna da Tabela 3.1.

É importante observar que a primeira coluna da Tabela 3.1 apresenta o conjunto das partes dos respectivos conjuntos da segunda coluna.

3.2 Propriedades características de um intervalo

Uma particularidade de intervalos é a sua interpretação tanto como conjunto quanto como tipo especial de número. Esta dualidade de interpretação é fundamental para a Teoria dos Intervalos, pois a interpretação como conjunto representa a definição matemática de intervalo e ela possibilita a definição de propriedades específicas do intervalo. Da mesma forma, a interpretação de intervalo como número possibilita a definição de relacionamentos entre elementos do conjunto dos intervalos.

Sendo assim, um intervalo é um *conjunto* limitado de reais, caracterizado através de seu diâmetro, raio, ponto médio e valor absoluto.

Definição 3.1 : (DIÂMETRO DO INTERVALO)
Seja $[x]$ um intervalo.
O diâmetro de $[x]$ é denotado por $w([x])$ e definido como $w([x]) = x_2 - x_1 \geq 0$.

Definição 3.2 : (RAIO DO INTERVALO)
Seja $[x]$ *um intervalo.*
O raio de $[x]$ *é denotado por* $r([x])$ *e definido como* $\frac{x_2-x_1}{2}$.

Definição 3.3 : (PONTO MÉDIO DO INTERVALO)
Seja $[x]$ *um intervalo.*
O ponto médio de $[x]$ *é denotado por* $m([x])$ *e definido como* $\frac{x_2+x_1}{2}$.

Pela definição de ponto médio, os elementos da relação $x \in [x]$ podem ser expressos como o conjunto dos x tais que $|x - m([x])| \leq r([x])$, ou seja, utilizando-se a notação de raio e ponto médio. Visto desta forma, o raio de $[x]$ é um limite superior para o erro absoluto do ponto médio $m([x])$ que é considerado como uma aproximação do número desconhecido $x \in [x]$.

Por sua vez, o *menor* e o *maior valor absoluto* de um intervalo $[x]$ são denotados por:

$$< [x] >= \min\{|x| \mid x \in [x]\} = \min\{|x_1|, |x_2|\} \quad \text{(NORMA DO MÍNIMO)},$$
$$|[x]| = \max\{|x| \mid x \in [x]\} = \max\{|x_1|, |x_2|\} \quad \text{(NORMA DO MÁXIMO)},$$

onde $< [x] >, |[x]|$ são números reais.

A partir da *norma do máximo* define-se o *valor absoluto* de um intervalo $[x]$, ou seja:

Definição 3.4 : (VALOR ABSOLUTO DO INTERVALO)
Seja $[x]$ *um intervalo.*
O valor absoluto de $[x]$ *é denotado por* $|[x]|$ *e definido como* $|[x]| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

Estas definições consideram a definição matemática de intervalo e não constituem uma novidade. As contribuições realmente interessantes são obtidas quando é utilizada a definição de intervalo como número, pois neste caso são exploradas as relações entre intervalos.

Enquanto número, um intervalo está relacionado com outros intervalos e desta relação decorre a definição de distância entre intervalos.

Definição 3.5 : (DISTÂNCIA ENTRE INTERVALOS)
Sejam $[x], [y]$ *intervalos.*
A distância entre $[x]$ *e* $[y]$ *é denotada por* $d([x], [y])$ *e definida como*

$$d([x], [y]) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

A definição de distância entre intervalos introduz uma métrica para o conjunto $I\Re$, pois:
(*i*) $d([x], [y]) \geq 0$,
(*ii*) $d([x], [y]) = 0 \Leftrightarrow [x] = [y]$,
(*iii*) $d([x], [z]) + d([y], [z] \geq d([x], [y]))$, para qualquer $[x], [y], [z]$ deste conjunto.

A *métrica* do conjunto $I\Re$ é a de *Hausdorff*[1] e ela constitui uma generalização da distância entre dois pontos de um espaço métrico para o espaço de todos os *subconjuntos compactos*[2] não vazios do espaço.

A introdução de uma métrica em $I\Re$ transforma esse conjunto em um *espaço topológico*. Então, os conceitos de convergência e continuidade podem ser usados na maneira usual como em um espaço métrico qualquer. Através desta conexão obtém-se que uma seqüência de intervalos $[x_k]_{k=0}^{\infty}$ converge para um intervalo $[x]$ se e somente se as seqüências de limites dos membros individuais da seqüência convergem para os limites correspondentes de $[x]$. Isto é formalizado pelo seguinte teorema.

Teorema 3.1 : *Toda seqüência de intervalos* $[x_k]_{k=0}^{\infty}$ *onde vale* $\ldots \subseteq [x_1] \subseteq [x_0]$ *converge para o intervalo* $[x] = \bigcap_{k=0}^{\infty}[x_k]$.

(a prova deste teorema pode ser obtida em Alefeld [ALE 83])

3.3 Intervalos especiais

Alguns intervalos caraterizam-se por possuir uma característica particular em comum.

Tome, por exemplo, o intervalo de ponto médio igual a *zero*. Este intervalo é denominado *intervalo simétrico*.

Definição 3.6 : (INTERVALO SIMÉTRICO)
Seja $[x]$ *um intervalo.* $[x]$ *é dito* intervalo simétrico *se e somente se* $m([x]) = 0$.

Em especial, intervalos simétricos possuem extremos de mesmo valor absoluto, porém com sinais opostos.

Outro tipo especial de intervalo é denominado *intervalo degenerado* e caracterizado por possuir extremos coincidentes, ou seja, raio igual a *zero*.

Definição 3.7 : (INTERVALO DEGENERADO)
Seja $[x]$ *um intervalo.* $[x]$ *é dito* intervalo degenerado *se e somente se* $w([x]) = 0$.

O intervalo degenerado é particularmente importante, pois ele possibilita a conexão entre o conjunto $\Re$ e o conjunto $I\Re$. Ou seja, se um número real for interpretado como um intervalo degenerado, o conjunto $\Re$ é tido como um caso particular do conjunto $I\Re$.

3.4 Operações intervalares

A dualidade de interpretação associada a intervalos possibilita a definição tanto de operações lógicas (operação definida entre conjuntos) quanto de operações aritméticas (operações definidas entre números) entre intervalos.

---

[1] No espaço de Hausdorff para todo par de elementos f e g existe uma vizinhança $\bigcup f$ e $\bigcup g$ de f e g respectivamente, cuja intersecção $(\bigcup f) \bigcap (\bigcup g) = \emptyset$. Neste caso é demonstrado que cada elemento $f \in \Re$ é fechado.

[2] O conjunto A, $A \subseteq X$ é compacto se toda cobertura aberta de A tem uma subcobertura finita. A é uma cobertura de X se A é uma família de conjuntos cuja união contém X.

3.4.1 Operações lógicas

Considere a definição matemática de intervalo, ou seja, um intervalo $[x]$ é entendido como um conjunto de reais limitado inferiormente por x_1 e superiormente por x_2 (definição 2.24). Neste caso, um intervalo é um conjunto e entre conjuntos são definidas as operações lógicas de união e intersecção.

Definição 3.8 :[MOO 79] (INTERSECÇÃO)
Sejam $[x], [y]$ *intervalos.*
(i) $(x_1 > y_2) \vee (y_1 > x_2) \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$,
(ii) *caso contrário,* $[x] \cap [y] = [\max\{x_1, y_1\}; \min\{x_2, y_2\}]$.

Por sua vez, a *união* de intervalos é não vazia quando a intersecção destes intervalos também é não vazia, ou seja:

Definição 3.9 : (UNIÃO)
Sejam $[x], [y]$ *intervalos.*
(i) $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] \cup [y] = [\min\{x_1, y_1\}; \max\{x_2, y_2\}]$,
(ii) *caso contrário,*$[x] \cup [y] = \emptyset$.

É importante destacar aqui que as definções 3.8 e 3.9 (definição de operações na forma de casos) não possibilitam a resolução algébrica de problemas e, assim, na medida do possível elas devem ser transformadas em definições de funções totais.

A definição da operação de união como função total é denominada *união convexa* e definida como:

Definição 3.10 : (UNIÃO CONVEXA)
Sejam $[x], [y]$ *intervalos.*
$[x] \underline{\cup} [y] = [\min\{x_1, y_1\}; \max\{x_2, y_2\}]$.

3.4.2 Operações aritméticas

A definição das operações aritméticas entre intervalos é baseada na definição de intervalo como número. Estas operações são classificadas em dois tipos: operações unárias; operações binárias.

3.4.2.1 Operação intervalar unária

Definição 3.11 : (OPERAÇÃO INTERVALAR UNÁRIA)
Seja $[x]$ *um intervalo.*
Uma operação unária δ *é denotada por* $\delta[x]$ *e definida por* $\delta[x] = [\min S; \max S]$, *onde* $S = \{\delta x \mid x \in [x]\}$.

Exemplo 3.1 : *Valendo-se da propriedade da monotonicidade das funções reais correspondentes, onde* $[x]$ *é um intervalo do conjunto* $I\Re$, *temos:*

$$\exp^{[x]} = [\exp^{x_1}; \exp^{x_2}],$$
$$\ln[x] = [\ln x_1; \ln x_2] \text{ para } x_1 > 0,$$
$$[x]^2 = [< [x] >^2; |[x]|^2].$$

Estas funções são exemplos de operações intervalares unárias.

TABELA 3.2 — Fórmulas das operações aritméticas entre intervalos

$[x]+[y]=[x_1+y_1;x_2+y_2]$
$[x]-[y]=[x]+(-1)[y]=[x_1-y_2;x_2-y_1]$
$[x]\times[y]=[\min M;\max M],\ M=\{x_1y_1,x_1y_2,x_2y_1,x_2y_2\}$
$[x]\div[y]=[x]\times[y]^{-1}=[x]\times\frac{1}{[y]},\ 0\notin[y]$

TABELA 3.3 — Fórmulas da multiplicação de intervalos

$[x][y]$	$y_1>0$	$0\in[y]$	$y_2<0$
$x_1>0$	$[x_1y_1;x_2y_2]$	$[x_2y_1;x_2y_2]$	$[x_2y_1;x_1y_2]$
$0\in[x]$	$[x_1y_2;x_2y_2]$	$[\min\{x_1y_2,x_2y_1\};\max\{x_1y_1,x_2y_2\}]$	$[x_2y_1;x_1y_1]$
$x_2<0$	$[x_1y_2;x_2y_1]$	$[x_1y_2;x_1y_1]$	$[x_2y_2;x_1y_1]$

3.4.2.2 Operação intervalar binária

Definição 3.12 : (OPERAÇÃO INTERVALAR BINÁRIA)
Sejam $[x]$ e $[y]$ intervalos.
Uma operação aritmética $*\in\{+,-,\times,\div\}$, cujos operandos são intervalos, é definida por

$$[x]*[y]=\{x*y\mid x_1\le x\le x_2,\ y_1\le y\le y_2\}$$

e referida por operação intervalar binária.

A definição das *operações aritméticas fundamentais*[3] entre intervalos foi introduzida por Young ([YOU 31] apud [ALE 83]) que apresentou também algumas propriedades algébricas elementares destas operações. Sunaga ([SUN 58] apud [ALE 83]) introduziu uma outra notação para intervalos baseada em um par de números (x,r), o qual corresponde ao intervalo $[x-r;x+r]$. Usando esta representação as operações intervalares apresentadas na Definição 3.12 foram explicitamente descritas e usadas por Sunaga. No estudo de Moore[MOO 66] um intervalo é associado a um ponto de $\Re^2$ e, então, as operações intervalares são definidas para elementos de $\Re^2$. Uma extensão das operações intervalares definidas por Young foi descrita por Kahan ([KAH 68] apud [ALE 83]). Nesta extensão, as operações intervalares são completadas pelo uso dos argumentos $+\infty$ e $-\infty$, onde, em certos casos, o resultado de uma operação é um intervalo que tem um desses argumentos (ou ambos) como limite. Kulisch[KUL 81] investigou propriedades aritméticas (definidas sobre um conjunto M) que são preservadas no conjunto das partes (conjunto $\wp(M)$). Nesta investigação as operações intervalares estão incluídas como caso especial.

A Definição 3.12 é orientada a conjuntos e enfatiza o fato de que a soma, a diferença, a multiplicação e o quociente de dois intervalos é tão somente o conjunto de somas, diferenças, produtos e quocientes, respectivamente, de pares de números reais.

[3]soma, subtração, multiplicação e divisão.

TABELA 3.4 — Fórmulas da divisão de intervalos

$[x]/[y]$	$y_1 > 0$	$y_2 < 0$
$x_1 > 0$	$[x_1/y_2; x_2/y_1]$	$[x_2/y_2; x_1/y_1]$
$0 \in [x]$	$[x_1/y_1; x_2/y_1]$	$[x_2/y_2; x_1/y_2]$
$x_2 < 0$	$[x_1/y_1; x_2/y_2]$	$[x_2/y_1; x_1/y_2]$

Um conjunto equivalente de definições de caráter algébrico, em termos de fórmulas para cálculo dos extremos do intervalo resultante, é descrito pelas Tabelas 3.2, 3.3, 3.4.

Para cada operação fundamental em $I\Re$, os limites do intervalo resultante podem ser expressos em termos dos limites, esquerdo e direito, de seus operandos. Assim, estas operações constituem extensões exatas das operações equivalentes em $\Re$.

Pela Definição 3.12 é evidente que a aritmética intervalar com intervalos puntuais se reduz à aritmética real usual. Então, a aritmética intervalar é uma generalização ou extensão da aritmética real.

Exemplo 3.2 : *Considere a função* $f(x) = x + 2$, *onde* $x \in [-1; 2]$.
A Imagem *desta função é dada por* $Im(f, [-1, 2]) = \{y \in \Re \mid 1 \leq y \leq 4\}$.
Utilizando-se a aritmética intervalar, é possível assumir diretamente que $[x] = [-1; 2]$ *e a avaliação intervalar* $f([x]) = [x] + 2$ *produz , através de uma única avaliação, um conjunto de resultados. Ou seja,* $f([-1; 2]) = [-1; 2] + 2 = [1; 4]$.

Finalmente, a partir das definições anteriores (em especial, da definição de operação unária), é possível definir o *pseudo-oposto* e o *pseudo-inverso* de um intervalo.

Definição 3.13 : (INTERVALO PSEUDO-OPOSTO)
Considere $[x] = [x_1; x_2]$. *Então,* $(\forall [x] \in I\Re)(\exists(-[x]) \in I\Re)(0 \in [x] - [x])$.

Exemplo 3.3 : *Considere o intervalo* $[1; 2]$. *O pseudo-oposto deste intervalo é dado por* $-[1; 2] = [-2; -1]$.

O intervalo pseudo-oposto de $[x]$ é representado também como $(-1)[x]$. Esta notação foi introduzida por Sunaga [SUN 58].

Definição 3.14 : (INTERVALO PSEUDO-INVERSO)
Considere $[x] = [x_1; x_2]$. *Então,* $(\forall [x] \in I\Re)(0 \notin [x])(\exists [x]^{-1} \in I\Re)(1 \in [x][x]^{-1})$.

Exemplo 3.4 : *Considere o intervalo* $[1; 2]$. *O pseudo-inverso deste intervalo é dado por* $[1; 2]^{-1} = [\frac{1}{2}; 1]$.

A explicação do porquê da denominação destes intervalos é obtida a partir das definições de oposto e inverso de um número real. Segundo a definição da aritmética real, o oposto de número é aquele número que adicionado a ele produz *zero* como resultado.

$$(\forall x \in \Re)(\exists(-x) \in \Re)(x - x = 0)$$

No caso de intervalos, a operação $[x] - [x]$ não produz *zero* como resultado, mas apenas um intervalo que contém o *zero*:

$$0 \in ([x] - [x]).$$

Então, o intervalo $-[x]$ é denominado *intervalo pseudo-oposto* já que ele satisfaz parcialmente a condição original. O mesmo acontece no caso do *intervalo pseudo-simétrico*, onde

$$1 \in [x][x]^{-1}, 0 \notin [x]^{-1}.$$

3.5 Propriedades do conjunto $I\Re$

A partir de Alefeld [ALE 83] e Kulisch [KUL 81] é possíivel obter as principais propriedades do conjunto $I\Re$. Estas propriedades são apresentadas a seguir considerando a seguinte classificação:

- PROPRIEDADE CARACTERÍSTICA:
  propriedades referentes a características particulares de um intervalo (diâmetro, ponto médio, raio e valor absoluto).
- PROPRIEDADE ARITMÉTICA:
  propriedades referentes a operações aritméticas entre intervalos. Incluam-se aqui aquelas propriedades referentes à intervalos especiais.
- PROPRIEDADE LÓGICA:
  propriedades referentes a operações lógicas entre intervalos.
- PROPRIEDADE TOPOLÓGICA:
  propriedades que referentes ao espaço métrico definido em $I\Re$.

3.5.1 Propriedades características

Sejam $[x], [y]$ intervalos e x um número real.

Propriedade 3.1 :
(i) $w([x]) = 0 \Leftrightarrow ([x] - [x] = 0) \wedge ([x][x]^{-1} = 1)$ *onde* $0 \notin [x]$,
(ii) $w([x]) \neq 0 \Leftrightarrow [x] - [x] = w([x])[-1; 1]$.

Propriedade 3.2 : $w([x] + [y]) = w([x]) + w([y])$.

Propriedade 3.3 : $w([x] - [y]) = w([x]) + w([y])$.

Propriedade 3.4 : $w([x][y]) \leq w([x])|[y]| + |[x]|w([y])$.

Propriedade 3.5 : $w([x][y]) \geq \max\{|[x]|w([y]), |[y]|w([x])\}$.

Propriedade 3.6 : $w(x[y]) = |x|w([y])$.

Propriedade 3.7 : *Seja n um número natural diferente de zero. Tem-se então que:*

(i) $w([x]^n) \leq n|[x]|^{n-1}w([x])$,
(ii) $w(([x]-[x])^n) \leq 2w([x])^n$.

Entenda-se $[x]^n$ como a multiplicação de $[x]$ por ele mesmo n-vezes, ou seja, $[x]^n = \overbrace{[x][x]...[x]}^{n}$.

3.5.2 Propriedades aritméticas

As propriedades aritméticas podem ser classificadas em dois tipos: propriedades referentes às operações unárias; propriedades referentes às operações binárias.

Sejam $[x], [y], [z]$ intervalos e x, y números reais.

3.5.2.1 Propriedades referentes a operações unárias

Propriedade 3.8 : $x \in [x], \delta(x) \in \delta([x])$, *onde* δ *é uma operação unária.*

Propriedade 3.9 : $0 \in ([x]-[x])$.

Propriedade 3.10 : $1 \in [x][x]^{-1}$, *onde* $0 \notin [x]$.

3.5.2.2 Propriedades referentes a operações binárias

Propriedade 3.11 : $k \in [x], l \in [y] \Rightarrow (k * l) \in ([x] * [y])$, *onde* $* \in \{+, -, \times, \div\}$.

Propriedade 3.12 :
(i) $[x]+([y]+[z]) = ([x]+[y])+[z]$,
(ii) $[x]([y][z]) = ([x][y])[z]$.

Propriedade 3.13 :
(i) $[x]+[y] = [y]+[x]$,
(ii) $[x][y] = [y][x]$.

Propriedade 3.14 :
(i) $0+[x] = [x]+0 = [x]$,
(ii) $1[x] = [x]1 = [x]$.

Propriedade 3.15 : $I\Re$ *não tem divisores de zero.*

Propriedade 3.16 : $[x]([y]+[z]) \subseteq [x][y]+[x][z]$.

Propriedade 3.17 : $|[x]+[y]| \leq |[x]|+|[y]|$.

Propriedade 3.18 : $|y[x]| = |y||[x]|$.

Propriedade 3.19 : $|[x][y]| = |[x]||[y]|$.

Em particular, se os operandos são constituídos por intervalos simétricos, tem-se que:

Sejam $[x], [y], [s]$ intervalos simétricos e $[z]$ um intervalo qualquer.

Propriedade 3.20 : $|[x]| = \frac{w([x])}{2}$.

Propriedade 3.21 : $[x] = |[x]|[-1;1]$.

Propriedade 3.22 : $[x] = m([x]) + \frac{1}{2}w([x])[-1;1]$.

Propriedade 3.23 :
(i) $[x][z] = |[z]|[x]$,
(ii) $w([x][z]) = |[z]|w([x])$.

Propriedade 3.24 : $[x][z] = |[z]|[x]$.

Propriedade 3.25 :
(i) $[x] + [y] = [x] - [y] = (|[x]| + |[y]|)[-1;1]$,
(ii) $[x][y] = |[x]||[y]|[-1;1]$.

Propriedade 3.26 :
(i) $[x]([y] + [s]) = [x][y] + [x][s] = |[x]|(|[y]| + |[s]|)[-1;1]$,
(ii) $[x]([y] - [s]) = [x][y] + [x][s] = |[x]|(|[y]| + |[s]|)[-1;1]$.

3.5.3 Propriedades topológicas

Sejam $[x], [y], [z], [k]$ intervalos e x um número real.

Propriedade 3.27 : $d([x] + [y], [x] + [z]) = d([y], [z])$.

Propriedade 3.28 : $d([x] + [y], [z] + [k]) \leq d([x], [z]) + d([y], [k])$.

Propriedade 3.29 : $d(x[y], x[z]) = |x|d([y], [z])$.

Propriedade 3.30 : $d([x][y], [x][z]) \leq |[x]|d([y], [z])$.

Propriedade 3.31 : $[x] \subseteq [y] \Rightarrow |[x]| \leq |[y]|$.

Propriedade 3.32 : $[x] \subseteq [y] \Rightarrow w([x]) \leq w([y])$.

Propriedade 3.33 : $([x] \subseteq [y] \wedge [z] \subseteq [k]) \Rightarrow [x] * [z] \subseteq [y] * [k]$, *onde* $* \in \{+, -, \times, \div, \cap\}$.

Propriedade 3.34 : $[x] \subseteq [y] \Rightarrow \delta([x]) \subseteq \delta([y])$, *onde* δ *é uma operação intervalar unária.*

Propriedade 3.35 : $[x] \subseteq [y] \Rightarrow \frac{1}{2}(w([y]) - w([x])) \leq d([x], [y]) \leq w([y]) - w([x])$.

3.6 Resumo

Neste capítulo foi apresentada a interpretação dual de intervalo que tem caráter fundamental para a Teoria dos Intervalos.

A interpretação de intervalo como conjunto possibilita as provas matemáticas da teoria, assim como a dedução de propriedades. Por sua vez, a interpretação de intervalo como número possibilita a definição de uma métrica associada ao conjunto

$I\Re$ (métrica de Hausdorff) a qual transforma este conjunto em um espaço topológico. Então, os conceitos de convergência e continuidade podem ser usados da mesma maneira como são usados em um espaço métrico qualquer.

Uma vez apresentada a dualidade da interpretação de intervalos faz sentido definir operações intervalares unárias e binárias. Tem-se, então, seis operações intervalares ditas fundamentais: $+, -, \times, \div, \cap, \cup$.

Do estudo sistemático das operações intervalares obtém-se o conjunto de propriedades de $I\Re$, as quais podem ser classificadas em quatro tipos básicos: propriedades características; propriedades aritméticas; propriedades lógicas; propriedades topológicas.

A partir das propriedades da estrutura $(I\Re, +, \times)$ é possível concluir que esta estrutura não constitui um *corpo* [4], ou seja, neste conjunto não existem o elemento simétrico da soma nem o elemento inverso da multiplicação, além da multiplicação não ser distributiva com relação à soma. Uma implicação direta deste fato é que este conjunto não constitui um sistema algébrico.

Este é um problema que precisa ser contornado para o estabelecimento do uso sistemático de intervalos na resolução de problemas numéricos. Existem algumas tentativas neste sentido. Uma delas, por exemplo, tenta caracterizar $(I\Re, +, \times)$ como um *quasi-corpo* e então deverá ser possível resolver problemas intervalares algebricamente [MAR 98]. Sem a pretensão de questionar estas tentativas, os caminhos escolhidos são extremamente abstratos e de difícil compreensão para leitores não-matemáticos. Isto é um problema, na medida em que o uso adequado de um conhecimento é proporcional ao seu nível de entendimento. A apropriação deste conhecimento, na forma como está sendo colocada, não será simples nem imediata. Por outro lado, as pessoas pensam mais naturalmente através de formas gráficas e se este recurso puder ser utilizado ele será bem-vindo.

---

[4] A estrutura $(K, +, \times)$ é um corpo se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- com relação à operação de adição:
  - é associativa;
  - admite elemento neutro;
  - todo elemento de C está associado a um elemento simétrico;
  - é comutativa;
- com relação à operação de multiplicação:
  - é associativa;
  - admite elemento neutro;
  - todo elemento não nulo de C é inversível;
  - é comutativa;
- a multiplicação é distributiva com relação à adição.

4 Representação gráfica de intervalos

A representação gráfica pode ser usada tanto como ferramenta de ilustração quanto como ferramenta para análise de fatos e/ou idéias associadas a números e informações.

No que se refere a intervalos, sua representação gráfica tem sido utilizada somente como ferramenta de ilustração.

Neste capítulo é proposta uma nova abordagem para a representação gráfica de intervalos no plano cartesiano através da qual é possível realizar a análise visual de intervalos. Para isto, o formalismo necessário, em termos da representação de propriedades gráficas, é introduzido e exemplos de aplicação são apresentados.

A seguir, apresenta-se a caracterização do semi-plano de representação de intervalos, as primitivas da representação, bem como suas propriedades.

4.1 Histórico

Ao longo dos tempos, a representação gráfica tem sido utilizada como ferramenta para auxiliar na compreensão de fatos e/ou idéias associadas a números. De fato, não existe um histórico da representação gráfica de intervalos, mas sim de seu uso.

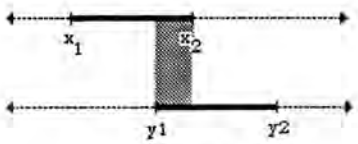
Sunaga [SUN 58] introduziu a representação gráfica de intervalos baseada na interpretação de conjunto. Segundo esta representação, os extremos do intervalo $[x_1; x_2]$ são representados na reta real e determinam o segmento de reta que representa graficamente esse intervalo. Esta representação é ilustrada pela Figura 4.1.

Se o objetivo é observar relacionamentos entre diversos intervalos, utiliza-se tantos segmentos de reta quantos forem os intervalos analisados. Assim como está ilustrado na Figura 4.2, estes segmentos são organizados como um feixe de retas paralelas a fim de possibilitar comparações.

Naturalmente, um segmento de reta pode ser interpretado como um diagrama de ordem através do qual é possível verificar os relacionamentos entre os elementos do conjunto $[x]$ com relação à relação de ordem $\leq$ ou $\subseteq$. Da mesma forma, um conjunto de segmentos de reta pode ser interpretado como um conjunto de diagramas de ordem, onde o relacionamento entre os diferentes intervalos pode ser observado a partir do relacionamento entre os diagramas de ordem.

Por sua vez, Moore [MOO 66] introduziu a representação gráfica de intervalos baseada na interpretação de número. Segundo esta representação, o intervalo $[x_1; x_2]$

FIGURA 4.1 — Representação do intervalo como segmento de reta



$[x_1, x_2] \cap [y_1, y_2]$

FIGURA 4.2 — Representação de dois intervalos como segmentos de reta

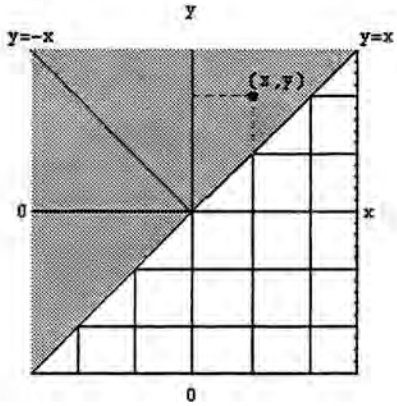


FIGURA 4.3 — Representação do intervalo como número

é mapeado no ponto (x_1, x_2) que é representado como um ponto do plano cartesiano:

$$[x] = [x_1; x_2] \mapsto (x_1, x_2).$$

Esta representação é ilustrada pela Figura 4.3.

Como os elementos de $I\Re$ satisfazem a condição:

$$[x] = [x_1; x_2] \in I\Re \Leftrightarrow x_1 \leq x_2,$$

os pontos do plano cartesiano que representam intervalos constituem o semi-plano superior à reta $y = x$.

Cabe salientar que estas representações têm sido amplamente utilizadas para ilustrar fatos e/ou idéias associadas a intervalos.

4.2 Caracterização do plano cartesiano

Em um *sistema de coordenadas cartesianas*, a posição de um ponto é dada pela sua distância das retas de referência (eixos). Em duas dimensões, são utilizadas duas retas cuja intersecção, usualmente, é caracterizada por um ângulo reto e cuja denominação é dada por *sistema de coordenadas retangulares.* O eixo horizontal é denominado por x e o vertical por y. O ponto de intersecção O é dito origem do sistema de coordenadas. As distâncias sobre o eixo x que estão a direita da origem são, usualmente, tomadas como distâncias positivas e as à esquerda como negativas. Da mesma forma, as distâncias sobre o eixo y que estão acima da origem são, usualmente, tomadas como distâncias positivas e as abaixo como negativas.

A posição de um ponto qualquer do plano pode ser especificada por dois números ditos *coordenadas* do ponto e escritos como (x, y). A coordenada x (ou *abcissa*) é a distância de um ponto do eixo y na direção paralela ao eixo x (isto é, horizontalmente). A coordenada y (ou *ordenada*) é a distância do eixo x na direção paralela do eixo y (verticalmente). A origem O é o ponto $(0, 0)$.

TABELA 4.1 — Descrição do quadrantes do plano cartesiano em função da variação de θ

QUADRANTE	VARIAÇÃO DE θ
I	$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$
II	$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$
III	$\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$
IV	$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$

TABELA 4.2 — Descrição dos octantes do plano cartesiano em função de φ

QUADRANTE	OCTANTE	VARIAÇÃO DE φ
I	VIII	$0 \leq \varphi < \frac{\pi}{4}$
	I	$\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$
II	II	$\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{3\pi}{4}$
	III	$\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$
III	IV	$\pi \leq \varphi < \frac{5\pi}{4}$
	V	$\frac{5\pi}{4} \leq \varphi < \frac{3\pi}{2}$
IV	VI	$\frac{3\pi}{2} \leq \varphi < \frac{7\pi}{4}$
	VII	$\frac{7\pi}{4} \leq \varphi \leq 2\pi$

Os dois eixos dividem o plano em quatro *quadrantes*, numerados no sentido anti-horário começando do quadrante do topo e mais a direita (positivo).

Considere o sistema de coordenadas cartesianas xy, onde um ponto p do plano tem coordenadas (x, y) e θ descreve o ângulo no sentido anti-horário a partir do eixo x. Se este sistema de coordenadas for associado a raios quadrantes, designados por I, II, III, IV, que estão associados à variação de θ, então sua descrição é dada pela Tabela 4.1.

Por sua vez, se este sistema de coordenadas for associado a raios octantes, um novo sistema cartesiano $x'y'$ é gerado a partir deste sistema, onde um ponto p do plano $x'y'$ tem coordenadas (x', y'). xy e $x'y'$ têm mesma origem, mas o eixo x' faz um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ com o eixo dos x e φ descreve o ângulo no sentido anti-horário a partir do eixo positivo dos x'.

Sem perda de generalidade, o mapeamento dos octantes deste novo sistema é descrito pela Tabela 4.2. Tem-se assim definido o relacionamento entre quadrantes e octantes do plano cartesiano.

4.3 Representação gráfica proposta

Neste trabalho está sendo proposto o uso da representação gráfica como ferramenta de análise visual de intervalos e isso implica em uma nova forma de representar graficamente intervalos ou na extensão de uma forma já existente. Isto porque esta representação deve possibilitar a verificação visual de ambas interpretações de intervalos, assim como dispor de uma convenção (obtida a partir de primitivas gráficas)

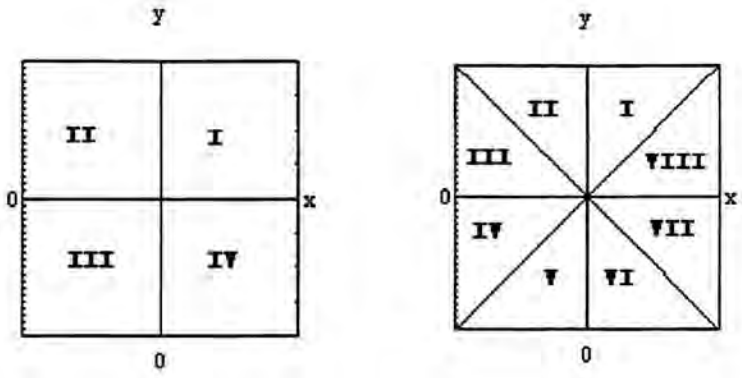


FIGURA 4.4 — Relacionamento entre quadrantes e octantes do plano cartesiano

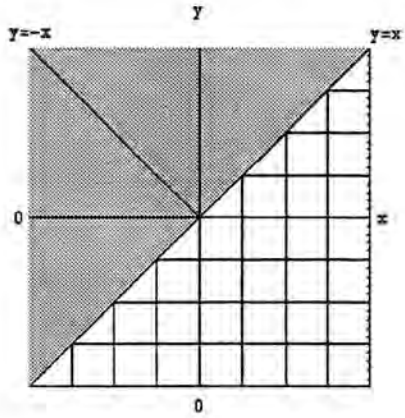


FIGURA 4.5 — Representação do plano $I\Re$

que suporte a extração de informação sobre os intervalos que estão sendo manipulados. Para isto, optou-se por estender a representação de intervalos no plano cartesiano a fim de que ela suportasse a análise visual de intervalos.

A seguir apresenta-se a construção da extensão desta representação.

4.3.1 Plano $I\Re$

Os intervalos são representados por pontos do semi-plano superior à reta $y = x$, ou seja, por pontos dos octantes I, II, III, IV do plano cartesiano (ver Figura 4.4). Então, estes octantes constituem o semi-plano denominado por *plano* $I\Re$ de representação dos intervalos (Figura 4.5).

Uma vez caracterizado o plano $I\Re$ a próxima etapa consiste em identificar suas propriedades geométricas. A descrição destas propriedades é apresentada a seguir.

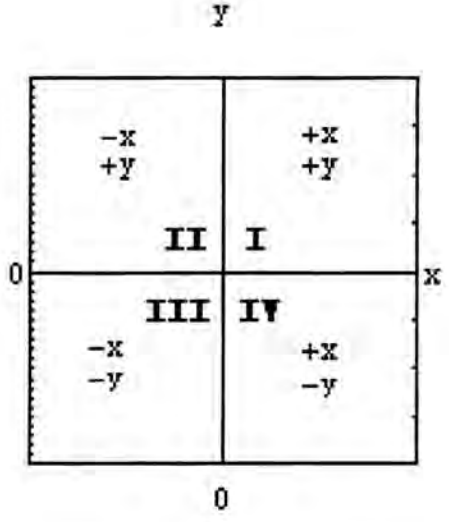


FIGURA 4.6 — Representação de quadrantes opostos do plano cartesiano

4.3.2 Propriedades do plano $I\Re$

A fim de suportar a análise visual de intervalos, a representação gráfica de intervalos no plano $I\Re$ precisa ser caracterizada quanto a propriedades que relacionam octantes entre si, ou seja, quanto a octantes opostos.

O plano cartesiano pode ser caracterizado em termos de sinal de seus quadrantes, ou seja, os quadrantes I e III assim como II e IV são opostos entre si (Figura 4.6). Fazendo-se a conexão entre quadrantes opostos e operações aritméticas, para cada ponto do plano cartesiano é possível identificar o seu oposto a partir da multiplicação das coordenadas por (-1). O ponto resultante pertence ao quadrante oposto e sua soma com o ponto original resulta em *zero*.

Da mesma forma, o plano $I\Re$ também pode ser caracterizado em termos do sinal de seus octantes. Quando um ponto do plano $I\Re$ é multiplicado por (-1), o ponto resultante representa também um intervalo. Este ponto pertence ao octante oposto a que pertence o ponto original. Sendo assim, um ponto no I octante quando multiplicado por (-1) resulta em um ponto no octante IV, assim como um ponto no octante II resulta em um ponto no octante III:

- Se (x_1, x_2) é um ponto no I octante, então $0 \leq x_1 \leq x_2$.
  Este ponto representa o intervalo $[x_1; x_2]$ cuja interpretação é dada por $\{x \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$. Multiplicando este conjunto por (-1), obtém-se o conjunto $\{x \mid -x_1 \geq x \geq -x_2\}$ que corresponde ao intervalo $[-x_2; -x_1]$, ou seja, ao ponto de coordenadas $(-x_2, -x_1)$.
  O ponto $(-x_2, -x_1)$ carateriza-se por $-x_2 \leq 0, -x_1 \leq 0$ e $-x_2 \leq -x_1$, assim ele é um ponto no IV octante.

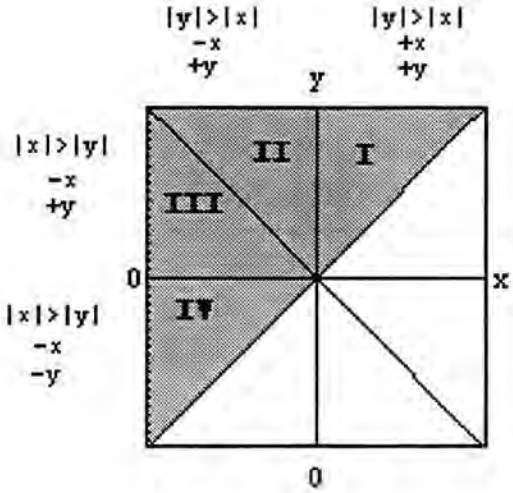


FIGURA 4.7 — Representação de octantes opostos do plano cartesiano

- Se (x_1, x_2) é um ponto no II octante, então $x_1 \leq x_2, x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$.
  Este ponto representa o intervalo $[x_1; x_2]$ cuja interpretação é dada por $\{x \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$. Multiplicando este conjunto por (-1), obtém-se o conjunto $\{x \mid -x_1 \geq x \geq -x_2\}$ que corresponde ao intervalo $[-x_2; -x_1]$, ou seja, ao ponto de coordenadas $(-x_2, -x_1)$.
  O ponto $(-x_2, -x_1)$ carateriza-se por $-x_2 \leq 0, -x_1 \geq 0$ e $-x_2 \leq -x_1$, assim ele é um ponto no II octante.

Este resultado é ilustrado pela Figura 4.7.

Lema 4.1 : *A reta $y = -x$ divide os octantes II e III do plano $I\Re$, onde $x \in \Re^-$.*

Demonstração:
Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1; x_2)$, $[x]$ no II octante.
Então, $(x_1 < 0) \ \wedge \ (x_2 > 0) \ \wedge \ (|x_1| \leq |x_2|)$.
Em particular, $(\exists x_1, x_2 \in \Re)(|x_1| = |x_2|)$. Neste caso, $x_2 = -x_1$.
Analogamente, para $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto [x_1; x_2]$, $[x]$ no III octante, $(\exists x_1, x_2 \in \Re)(|x_1| = |x_2|)$.
Logo, existem intervalos comuns aos octantes II e III.
O conjunto destes intervalos é representado graficamente pela reta $y = -x$, com $x \in \Re^-$, que divide os octantes II e III.

Lema 4.2 : *Os pontos do IV octante representam o pseudo-oposto de intervalos pertencentes ao I octante e os pontos pertencentes ao III octante corresponde ao pseudo-oposto de intervalos II do octante do plano $I\Re$.*

Demonstração:

(i) Caso $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1; x_2)$, $[x]$ no II octante.
Então, $(x_1 < 0) \wedge (x_2 > 0) \wedge (|x_1| \leq |x_2|)$.
Como $-[x] = [-x_2; -x_1]$, então $(-x_2 \leq 0) \wedge (-x_1 \geq 0) \wedge (|x_1| \leq |x_2|)$, que é a definição de um intervalo no III octante. Logo, $-[x]$ é um intervalo no III octante.

(ii) Caso $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto [x_1; x_2]$, $[x]$ no IV octante.
Então, $(x_1 < 0) \wedge (x_2 < 0)$.
Como $-[x] = [-x_2; -x_1]$, então $(-x_1 \geq 0) \wedge (-x_2 \geq 0)$, que é a definição de um intervalo no I octante.
Logo, $-[x]$ é um intervalo no I octante.

De (i) e (ii) pode-se concluir que os intervalos no I octante representam pseudo-opostos de intervalos no IV octante e que os intervalos no III octante representam pseudo-opostos de intervalos no II octante.

Exemplo 4.1 : *O intervalo* $[1; 5]$ *pertence ao octante I e seu pseudo-oposto* $(-1)[1; 5] = [-5; -1]$ *pertence ao octante IV.*

Teorema 4.1 : *Os octantes I e IV, assim como os octantes II e III, do plano* $I\Re$, *são opostos entre si.*

Demonstração:
Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1, x_2)$, $[x]$ no I octante.
Então $(x_1 \geq 0) \wedge (x_2 \geq 0) \wedge (|x_1| \leq |x_2|)$.
Multiplicando $[x]$ por (-1), obtém-se $(x_1 \leq 0) \wedge (x_2 \leq 0) \wedge (|x_1| \geq |x_2|)$, que é a definição de um intervalo no IV octante.
Logo, os octante I e IV são opostos entre si.
Analogamente, mostra-se que os octantes II e III são opostos entre si.

Além do sinal das coordenadas, a localização do intervalos em função de seu octante pode tomar por base o valor absoluto do intervalo. Este resultado é apresentado a seguir.

Lema 4.3 : *Seja* $[x] = [x_1; x_2]$ *um intervalo que pertence ao octante I ou II. Este intervalo tem valor absoluto igual a* $|x_2|$. *Por outro lado, se* $[y] = [y_1; y_2]$ *pertence ao octante III ou IV então ele tem valor absoluto igual a* $|y_1|$.

Demonstração:

(i) Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1; x_2)$, $[x]$ no I octante.
Então, $(x_1 \geq 0) \wedge (x_2 \geq 0) \wedge (|x_1| \leq |x_2|)$, ou seja, $x_1 \leq x_2$.
Mas, pela norma do máximo, $|[x]|$ é a distância de *zero* até o intervalo $[x]$.
Logo, $|[x]| = x_2 = |x_2|$.

(ii) Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1; x_2)$, $[x]$ no II octante.
Então, $(x_1 \leq 0) \wedge (x_2 \geq 0) \wedge (|x_1| \leq |x_2|)$, ou seja, $|x_1| \leq |x_2|$.
Logo, $|[x]| = |x_2|$.

(iii) Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1; x_2)$, $[x]$ no III octante.
Então, $(x_1 \leq 0) \wedge (x_2 \geq 0) \wedge (|x_1| \geq |x_2|)$, ou seja, $|x_1| \geq |x_2|$.
Logo, $|[x]| = |x_1|$.

(iv) Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1; x_2)$, $[x]$ no IV octante.
Então, $(x_1 \leq 0) \wedge (x_2 \leq 0) \wedge (|x_1| \geq |x_2|)$, ou seja, $x_2 \leq x_1$.
Logo, $|[x]| = x_1 = |x_1|$.

De (i) e (ii) pode-se concluir que para intervalos pertencentes ao I/II octante, $|[x]| = |x_2|$ e que para intervalos pertencentes ao III/IV octante, $|[x]| = |x_1|$.

Teorema 4.2 : *Existe um morfismo que relaciona octantes do plano $I\Re$ a quadrantes do plano cartesiano.*

Demonstração:
Seja (x, y) um ponto do plano cartesiano e θ o ângulo no sentido anti-horário a partir do eixo x.
Se este sistema de coordenadas for associado a raios quadrantes, designados por I, II, III, IV, que estão associados à variação de θ, então sua descrição é dada por:

QUADRANTE I : $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$
QUADRANTE II : $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$
QUADRANTE III : $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$
QUADRANTE IV : $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$.

Por sua vez, se este sistema de coordenadas for associado a raios octantes, um novo sistema cartesiano $x'y'$ é gerado a partir deste sistema, onde um ponto deste plano tem coordenadas (x', y').
xy e $x'y'$ têm mesma origem, mas o eixo x' faz um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ com o eixo dos x e φ descreve o sentido anti-horário a partir do eixo positivo dos x'.
Sem perda de generalidade, o mapeamento dos octantes deste novo sistema pode ser descrito por:

OCTANTE VIII : $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{4}$
OCTANTE I : $\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$
OCTANTE II : $\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{3\pi}{4}$
OCTANTE III : $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$
OCTANTE IV : $\pi \leq \varphi < \frac{5\pi}{4}$
OCTANTE V : $\frac{5\pi}{4} \leq \varphi < \frac{3\pi}{2}$
OCTANTE VI : $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi < \frac{7\pi}{4}$
OCTANTE VII : $\frac{7\pi}{4} \leq \varphi \leq 2\pi$.

Assim, um ponto (x', y'), do plano $I\Re$, pode ser representado em função de seu raio r e do ângulo α a partir do eixo x, ou seja, (x', y') é representado como (r, α). Este ponto é mapeado no plano cartesiano quando $(r, \alpha) = (r, 2(\alpha - \frac{\pi}{4})) = (r, 2\alpha - \frac{\pi}{2})$.
Da mesma forma, um ponto do plano cartesiano pode ser mapeado em um ponto de $I\Re$ e, assim, existe um morfismo que relaciona octantes do plano $I\Re$ a quadrantes do plano cartesiano.

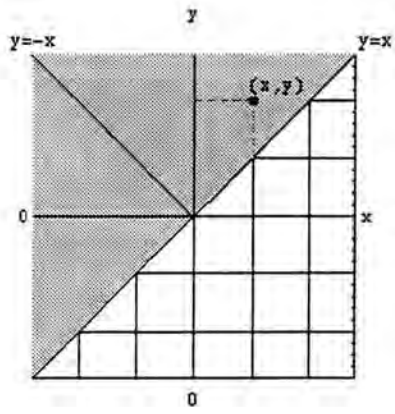


FIGURA 4.8 — Representação do intervalo como ponto

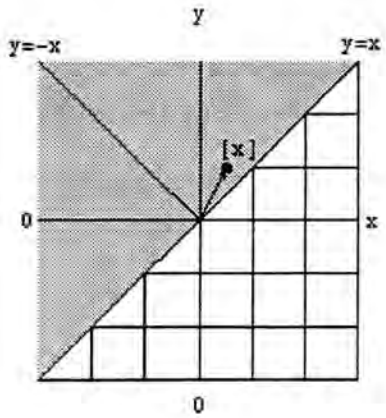


FIGURA 4.9 — Representação do intervalo como número

4.4 Primitivas da representação gráfica

A fim de possibilitar a análise visual de intervalos é necessário definir o conjunto de primitivas gráficas associadas ao plano $I\Re$. Estas primitivas estão baseadas no mapeamento $[x] = [x_1; x_2] \mapsto (x_1, x_2)$(Figura 4.8) e são descritas a seguir.

4.4.1 Vetor

A primitiva gráfica associado ao *número-intervalo* $[x]$ é dada pelo *vetor* $\vec{x}$ que informa a direção e o sentido do deslocamento do ponto (x_1, x_2) com relação à origem do sistema cartesiano (Figura 4.9).

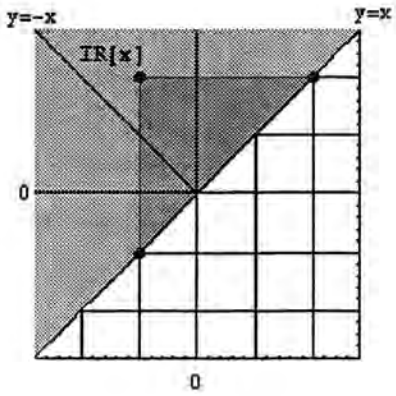


FIGURA 4.10 — Representação do intervalo como conjunto

4.4.2 Subregião

A primitiva gráfica associada ao intervalo $[x]$ enquanto *conjunto* é dada pela *subregião* do plano $I\Re$, denotada por $I\Re_{[x]}$ e constituída pelos pontos que representam os subconjuntos desse intervalo.

A subregião $I\Re_{[x]}$ é obtida a partir da projeção ortogonal do ponto (x_1, x_2) sobre a reta $y = x$. Esta projeção possibilita identificar tanto os pontos que correspondem aos reais associados aos extremos do intervalo, quanto os pontos que correspondem aos subconjuntos associados a este intervalo (Figura 4.10).

4.4.3 Reta

A primitiva gráfica associada a um *conjunto infinito* de intervalos que possuem uma certa propriedade em comum é dada por uma *reta*.

Considere, por exemplo, a propriedade: "*ter o mesmo diâmetro*". O conjunto de intervalos definidos por esta propriedade é representado graficamente por uma reta. Isto é ilustrado pela Figura 4.11.

4.4.4 Semi-reta

A primitiva gráfica associada a um *conjunto de intervalos limitado superiormente* cujos elementos possuem uma certa propriedade em comum é dada por uma *semi-reta*.

Considere, por exemplo, a propriedade: "*ter mesmo extremo inferior*". O conjunto de intervalos definido por esta propriedade é representado graficamente pela porção da reta $x = k$, com $k \in \Re$, que pertence ao plano $I\Re$, ou seja, pela semi-reta limitada pelo ponto (k, k) (Figura 4.12).

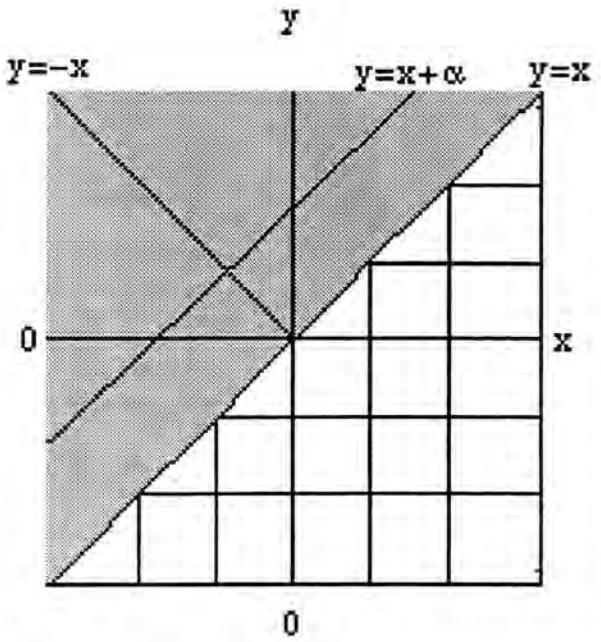


FIGURA 4.11 — Representação de um conjunto infinito de intervalos

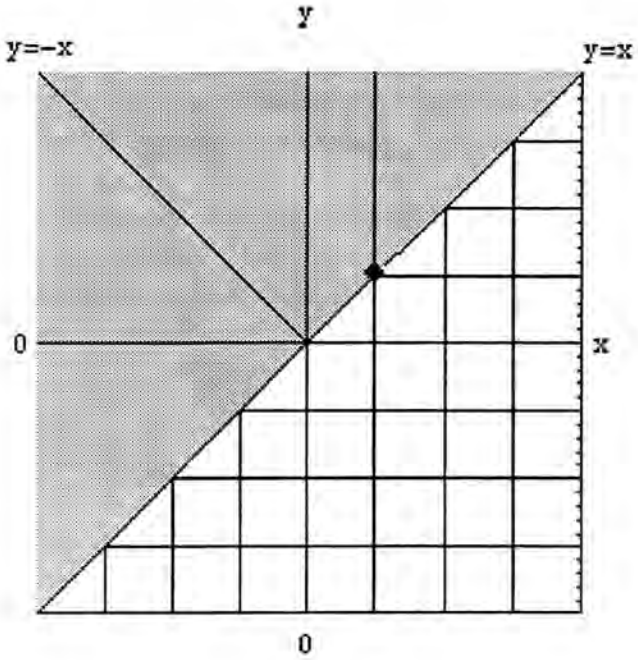


FIGURA 4.12 — Representação de um conjunto infinito de intervalos limitados superiormente

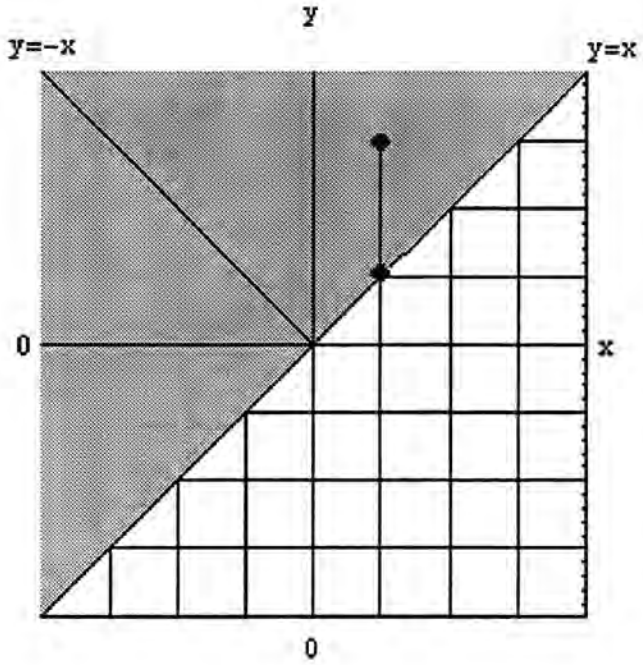


FIGURA 4.13 — Representação de um conjunto infinito de intervalos limitado superior e inferiormente

4.4.5 Segmento de reta

A primitiva gráfica associada a um *subconjunto* do conjunto de intervalos que possuem uma certa propriedade em comum e é *limitado superior e inferiormente* é dada por um *segmento de reta.*

Considere, por exemplo, a propriedade "*ter mesmo extremo inferior*" e a restrição "*o extremo superior não é maior do que* 3". O conjunto de intervalos definido por esta propriedade e que observam esta restrição é representado graficamente pelo segmento de reta que pertence ao plano $I\Re$, limitado pelos pontos (k, k) e $(k, 3)$.

Esta primitiva está apresentada na Figura 4.13.

4.5 Propriedades da representação gráfica

Considere o ponto de coordenadas (x_1, x_2) obtido a partir do mapeamento $[x] = [x_1, x_2] \mapsto (x_1, x_2)$, onde $[x] \in I\Re$. Então, a representação gráfica do conjunto $I\Re$ é obtida a partir deste mapeamento e é denominada *plano* $I\Re$. As propriedades de $I\Re$ são obtidas a partir de subconjunto de pontos do plano $I\Re$ os quais podem ser associados a propriedades geométricas do plano cartesiano. Estas propriedades constituem as propriedades da representação gráfica e estão listadas a seguir.

4.5.1 Conjunto de intervalos de mesmo diâmetro

Existem diferentes formas de escrever um intervalo $[x; y]$. Uma delas utiliza o diâmetro α do intervalo, ou seja, $[x] = [x_1; x_1 + \alpha]$. Neste caso, o extremo superior é obtido em função do extremo inferior. Escrevendo-se um intervalo desta forma, é possível definir o conjunto de intervalos de mesmo diâmetro.

Definição 4.1 : (INTERVALOS DE MESMO DIÂMETRO)
Seja $[x]$ um intervalo e α seu diâmetro. O conjunto dos intervalos de mesmo diâmetro α é denotado por S_α e descrito por $S_\alpha = \{[x] \mid w([x]) = \alpha\}$.

Exemplo 4.2 : *O conjunto de intervalos de diâmetro* 14 *é descrito por*

$$S_{14} = \{[x] \mid w([x]) = 14\}.$$

Teorema 4.3 : *O conjunto de intervalos de diâmetro α é representado graficamente pela reta $y = x + \alpha$.*

Demonstração:
Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1, x_2)$.
Por definição, $(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + \alpha)$ onde α é o diâmetro de $[x]$.
Então, o ponto (x_1, x_2) pode ser obtido a partir da aplicação da função $y = x + \alpha$, onde α é o diâmetro do intervalo $[x]$ e o coeficiente angular é 1, ou seja, a reta que passa por (x_1, x_2) e que tem coeficiente angular 1 é dada por:

$$\begin{array}{lll} y - x_2 = m(x - x_1) & \Rightarrow & y - x_2 = x - x_1 \quad \Rightarrow \\ y = x - x_1 + x_2 & \Rightarrow & y = x + (x_2 - x_1). \end{array}$$

Mas, $(x_2 - x_1)$ corresponde ao diâmetro do intervalo (x_1, x_2). Então, $y = x + (x_2 - x_1)$ pode ser escrito como $y = x + w([x])$ ou $y = x + \alpha$, onde $\alpha = w([x])$.
Ainda, $y = x$ e $y = x + \alpha$ são paralelas, pois possuem mesmo coeficiente angular $1 = \tan 45^0$.

O Teorema 4.3 é ilustrado pela Figura 4.14.

Exemplo 4.3 : *O conjunto S_{14} é representado graficamente pela reta $y = x + 14$.*

Pelo Teorema 4.3, o conjunto de números reais $\Re$ é representado pela reta $y = x$, pois neste caso o diâmetro de intervalos degenerados é igual a *zero*:

$$S_0 = \{[x] \mid w([x]) = 0\}.$$

Se considerarmos a representação gráfica de um intervalo e de seu pseudo-oposto, tem-se que esses intervalos têm o mesmo diâmetro

$$\begin{array}{rcl} [x] = [x_1; x_2] & \Rightarrow & w([x]) = x_2 - x_1 \\ -[x] = [-x_2; -x_1] & \Rightarrow & w(-[x]) = -x_1 - (x_2) = x_2 - x_1 \end{array}$$

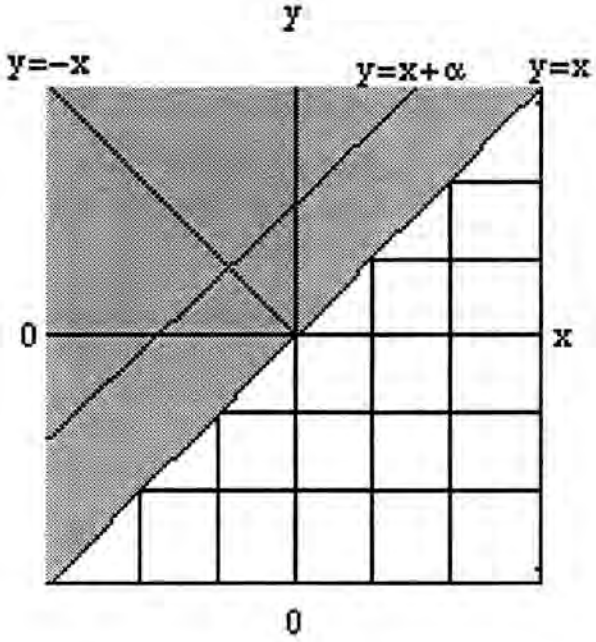


FIGURA 4.14 — Representação do conjunto de intervalos de mesmo diâmetro

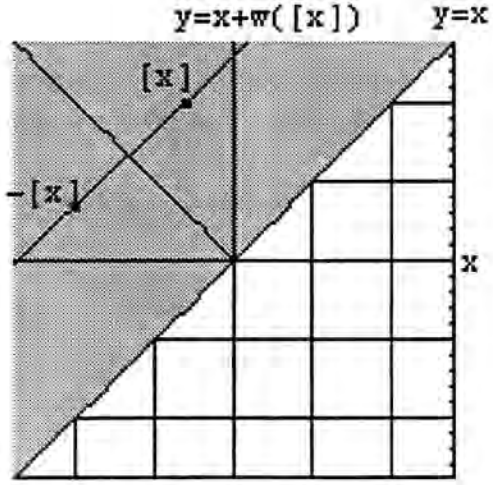


FIGURA 4.15 — Representação do intervalo e de seu pseudo-oposto em função do conjunto de intervalos de mesmo diâmetro

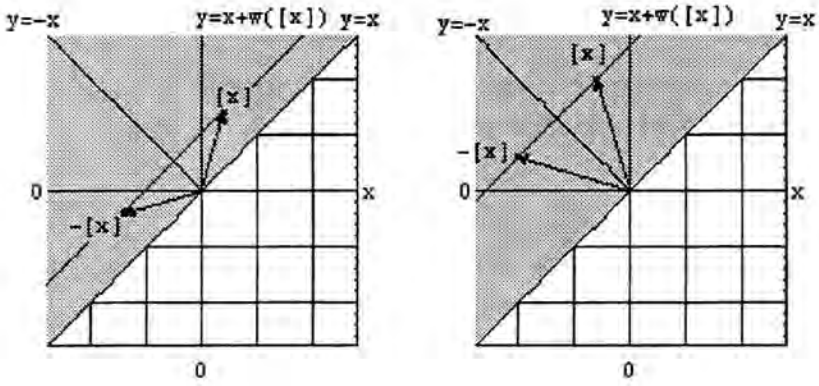


FIGURA 4.16 — Representação do intervalo e do seu pseudo-oposto

e portanto pertencem a mesma reta $y = x + \alpha$, onde $\alpha = w([x])$.

Esta propriedade está formalizada pelo Corolário 4.1 e é ilustrada pela Figura 4.15.

Corolário 4.1 : *Um intervalo de diâmetro α e seu pseudo-oposto são representados graficamente como pontos da reta $y = x + \alpha$.*

Demonstração:
Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1, x_2)$.
Pelo Teorema 4.3, (x_1, x_2) é um ponto na reta $y = x + \alpha$, com $\alpha = w([x])$.
Como $-[x] \mapsto (-x_2, -x_1)$ tem mesmo diâmetro de $[x]$

$$x_2 - x_1 = -x_1 - (-x_2) = -x_1 + x_2$$

$(-x_2, -x_1)$ também é um ponto da reta $y = x + \alpha$.
Logo, $[x]$ e $-[x]$ são pontos na reta $y = x + w([x])$.

Exemplo 4.4 : *Considere o intervalo $[-9; 8]$ cujo intervalo pseudo-oposto é dado por $(-1)[-9; 8] = [-8; 9]$.*

$$w([-9; 8]) = 8 - (-9) = 17 \Rightarrow [-9; 8] \in S_{17} = \{[x] \mid w([x]) = 17\}$$
$$w([-8; 9]) = 9 - (-8) = 17 \Rightarrow [8; -9] \in S_{17} = \{[x] \mid w([x]) = 17\}$$

Logo, $[-9; 8]$ e $[-8; 9]$ são representados graficamente por pontos da reta $y = x + 17$.

Um ponto do espaço pode ser associado a um vetor no espaço e neste trabalho utiliza-se vetores localizados (ou seja, vetor de origem $(0, 0)$) para representar intervalos enquanto números. A Figura 4.16 ilustra esta representação e possibilita a verificação visual do resultado anterior, ou seja, Corolário 4.1.

Sabe-se que a representação gráfica de intervalos se limita ao semi-plano superior à reta $y = x$, pois nesta região sempre é satisfeita a relação $x \leq y$. Desta forma, a relação entre o vetor que representa o intervalo $[x]$, denotado por $\vec{x}$, e o vetor que representa o intervalo $-[x]$ (pseudo-oposto de $[x]$) não é a mesma existente

UFRGS
Instituto de Informática
Biblioteca

entre um vetor e seu vetor oposto. No caso de intervalos, o vetor associado a $-[x]$ tem mesma direção e sentido do vetor associado a $[x]$, porém reta suporte diferente (Figura 4.16). Isto é apresentado pelo teorema a seguir.

Teorema 4.4 *Os vetores que correspondem ao intervalo $[x]$ e seu pseudo-oposto $-[x]$ pertencem a diferentes retas suporte, desde que $|x_1| \neq |x_2|$.*

Demonstração:
Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1, x_2)$.
A inclinação da reta suporte do vetor associado a este ponto, com relação ao eixo das abcissas, é calculada por $\frac{x_2}{x_1}$, com $x_1 \neq 0$.
Mas, o pseudo-oposto do intervalo $[x]$ é representado pelo ponto $(-x_2, -x_1)$ e a inclinação da reta suporte do vetor associado a esse ponto é calculada por $\frac{-x_1}{-x_2} = \frac{x_1}{x_2}$, com $x_2 \neq 0$.
Assim, o ângulo de inclinação da reta suporte do vetor associado ao ponto (x_1, x_2), com relação ao eixo das abcissas, é diferente da inclinação da reta suporte do vetor associado ao ponto $(-x_2, -x_1)$.

Corolário 4.2 : *A relação entre o vetor $\vec{x}$ associado ao intervalo $[x]$ e seu pseudo-oposto é dada por $|\alpha| + |\beta| = \frac{\pi}{2}$, onde α é o menor ângulo de $\vec{x}$ com relação ao eixo das abcissas e β é o menor ângulo do vetor associado ao pseudo-oposto com relação a esse mesmo eixo.*

Demonstração:
Considere que $\alpha = \arctan \frac{x_2}{x_1}$ e $\beta = \arctan \frac{x_1}{x_2}$.
Mas, $\arctan \frac{x_2}{x_1} + arccotan \frac{x_2}{x_1} = \frac{\pi}{2}$.
Então, $\arctan \frac{x_2}{x_1} + \arctan \frac{x_1}{x_2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Exemplo 4.5 : *Se $[x] = [1; 3]$, então $-[x] = [-3; -1]$ e o relacionamento entre os vetores que correspondem a esses intervalos é dado por $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \arctan 3$.*

4.5.2 Conjuntos de intervalos de mesmo diâmetro

Conjuntos de conjuntos de intervalos de mesmo diâmetro são representados graficamente por feixes de retas paralelas.

Exemplo 4.6 : *Considere os conjuntos S_i, onde $i \in \{14, 15, 16, 17\}$ e cada elemento de S_i é um conjunto de intervalos de mesmo diâmetro.*
Este conjunto é escrito explicitamente como $S_i = \{S_{14}, S_{15}, S_{16}, S_{17}\}$

$$\begin{aligned} S_{14} &= \{[x] \mid w([x]) = 14\} \\ S_{15} &= \{[x] \mid w([x]) = 15\} \\ S_{16} &= \{[x] \mid w([x]) = 16\} \\ S_{17} &= \{[x] \mid w([x]) = 17\} \end{aligned}$$

e representado graficamente pelas retas $y = x + 14, y = x + 15, y = x + 16, y = x + 17$.

A partir da representação gráfica do Exemplo 4.6, tem-se que cada reta $y = x + \alpha$, onde $14 \leq \alpha \leq 17$, representa um conjunto de intervalos de mesmo diâmetro.

Tem-se também, que a variação do coeficiente linear α possibilita representar o conjunto de retas que representam este conjunto. Assim, estas retas têm mesma inclinação e constituem um feixe de retas paralelas.

Esta propriedade da representação gráfica de conjuntos de intervalos de mesmo diâmetro é apresentada a seguir.

Teorema 4.5 : $\forall \alpha, \beta \in \Re^+, S_\alpha // S_\beta$.

Demonstração:
Sejam $[x], [y] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1, x_2)$, $[y] \mapsto (y_1, y_2)$.
Pelo Teorema 4.3, (x_1, x_2) é um ponto na reta $y = x + \alpha$ e (y_1, y_2) é um ponto na reta $y = x + \beta$, onde α, β correspondem aos diâmetros dos intervalos $[x]$ e $[y]$, respectivamente.
Mas estas retas têm coeficiente angular igual a $1 = \tan 45^0$. Logo, elas são paralelas entre si.
Tem-se ainda que todo ponto na reta $y = x+\alpha$ tem diâmetro α. Logo esta reta representa graficamente o conjunto, denotado por S_α, dos intervalos de mesmo diâmetro α, o mesmo valendo para S_β.
Assim, $S_\alpha // S_\beta$ com $\alpha, \beta \in \Re^+$.

4.5.3 Conjunto de intervalos de mesmo ponto médio

Existem inúmeras formas de escrever um intervalo $[x; y]$. Uma delas utiliza o ponto médio φ do intervalo, ou seja, $[x] = [x; -x + 2\varphi]$ com $x \leq \varphi$. Neste caso, o extremo superior é obtido em função do extremo inferior.

Definição 4.2 : (INTERVALOS DE MESMO PONTO MÉDIO)
Seja $[x]$ um intervalo e φ o seu ponto médio. O conjunto de intervalos de mesmo ponto médio φ é denotado por M_φ e descrito por $M_\varphi = \{[x] \mid m([x]) = \varphi\}$.

Exemplo 4.7 : *O conjunto de intervalos de ponto médio 4 é descrito por*

$$M_4 = \{[x] \mid m([x]) = 4\}.$$

Teorema 4.6 : *O conjunto de intervalos de mesmo ponto médio φ é representado graficamente pela semi-reta $y = -x + 2\varphi$, onde $x \in \Re^-$.*

Demonstração:
Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1, x_2)$.
A equação da reta que passa pelo ponto (x_1, x_2) e possui coeficiente angular igual a $(-1) = \tan 135^0$, é dada por:
$y - x_2 = (-1)(x - x_1) \Rightarrow y - x_2 = -x + x_1 \Rightarrow$
$y = -x + x_1 + x_2 \Rightarrow y = -x + (1)(x_1 + x_2) \Rightarrow$
$y = -x + \frac{2}{2}(x_1 + x_2) \Rightarrow y = -x + 2(\frac{x_1+x_2}{2})$.
Mas $\frac{x_1+x_2}{2}$ é o ponto médio do intervalo $[x]$.
Chamando $\varphi = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = -x + 2\varphi$.

Exemplo 4.8 : *O conjunto M_4 é representado graficamente pela semi-reta $y = -x + 8$, onde $x \in \Re^-$.*

4.5.4 Conjunto dos intervalos simétricos

Um intervalo simétrico caracteriza-se por ter extremos de mesmo valor absoluto porém de sinais opostos (Definição 3.6).

Definição 4.3 : (CONJUNTOS DOS INTERVALOS SIMÉTRICOS)
Seja $[x]$ um intervalo. O conjunto dos intervalos simétricos é descrito por

$$\{[x] \mid x_1 = -x_2\}.$$

Este conjunto é representado graficamente pela semi-reta $y = -x$ com $x \in \Re^-$ que igualmente é a bissetriz dos octantes II e III. Sendo assim, utilizando-se a notação introduzida anteriormente, esta semi-reta representa o conjunto M_0 e constitui uma instância do conjunto de intervalos de mesmo ponto médio. Neste caso, os intervalos associados aos pontos desta reta possuem ponto médio igual a *zero*:

$$M_0 = \{[x] \mid m([x]) = 0\}.$$

Corolário 4.3 : *O conjunto dos intervalos simétricos é representado graficamente pela semi-reta $y = -x$, onde $x \in \Re^-$.*

Demonstração:
Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1, x_2)$, $[x]$ intervalo simétrico.
Pelo Teorema 4.6, o ponto (x_1, x_2) pertence à reta $y = -x + 2\varphi$ com $x \in \Re^-$ e $\varphi = \frac{x_1+x_2}{2} = 0$ e portanto ele é um ponto na reta $y = -x$.
Ainda, os pontos na reta $y = -x$, com $x \in \Re^-$ têm ponto médio igual a *zero*. Logo, pela definição de intervalo simétrico, estes pontos representam intervalos simétricos e esta reta constitui a representação gráfica do conjunto de intervalos simétricos.

Considerando-se a representação gráfica do intervalo $[x]$ e de seu pseudo-oposto, tem-se que os pontos que correspondem a esses intervalos pertencem à reta $y = x + \alpha$, onde $\alpha = w([x])$, e estes pontos estão a uma mesma distância da reta $y = -x$. Isto é apresentado a seguir na forma de um corolário.

Corolário 4.4 : *Um intervalo de diâmetro α e seu pseudo-oposto estão a uma mesma distância da reta $y = -x$.*

Demonstração:
Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1, x_2)$.
O pseudo-oposto deste intervalo é denotado por $-[x] \mapsto (-x_2, -x_1)$.
Pelo Teorema 4.3, (x_1, x_2) é um ponto na reta $y = x + \alpha$ com $\alpha = w([x])$.
Mas pelo Corolário 4.1, o ponto $(-x_2, -x_1)$ também pertence à reta $y = x + \alpha$.
Tem-se ainda que, pelo Teorema 4.6, o ponto (x_1, x_2) pertence à reta $y = -x + 2\varphi_1$ e $(-x_2, -x_1)$ é um ponto na reta $y = -x + 2\varphi_2$, onde $\varphi_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$ e $\varphi_2 = \frac{-x_2-x_1}{2}$.
Então, a distância do ponto (x_1, x_2) até a reta $y = -x$ é dada pela distância entre este ponto e o ponto de intersecção da reta $y = x + \alpha$ com

a reta $y = -x$, ou seja:

$$x + \alpha = -x \Rightarrow x + x + \alpha = 0 \Rightarrow 2x + \alpha = 0 \Rightarrow x = -\frac{\alpha}{2}$$

$$y = -\frac{\alpha}{2} + \alpha \Rightarrow y = -\frac{\alpha + 2\alpha}{2} \Rightarrow y = \frac{\alpha}{2}.$$

Ou seja, pela distância do ponto (x_1, x_2) até o ponto $(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$.
Esta distância é calculada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2})^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \alpha^2} \tag{4.1}$$

Por sua vez, distância do ponto $(-x_2, -x_1)$ até a reta $y = -x$ é dada pela distância entre este ponto e o ponto de intersecção da reta $y = x + \alpha$ com a reta $y = -x$.
Mas este ponto é dado por $(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$.
Então, a distância entre eles é dada por

$$d = \sqrt{(-x_1 - (-x_2))^2 + (\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2})^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \alpha^2} \tag{4.2}$$

De (4.1) e (4.2) vem que os pontos (x_1, x_2) e $(-x_2, -x_1)$ estão a uma mesma distância da reta $y = -x$.

4.5.5 Conjunto de intervalos de mesmo extremo inferior

Definição 4.4 : (INTERVALOS DE MESMO EXTREMO INFERIOR)
O conjunto de intervalos de mesmo extremo inferior k é denominado por CONJUNTO DOS INTERVALOS DE MESMA COTA INFERIOR *e denotado por $L(I\Re_{k\downarrow})$.*

$$L(I\Re_{k\downarrow}) = \{[x] \in I\Re \mid [x] = [k; x_2], x_2 \in \Re\}.$$

Exemplo 4.9 : *O conjunto $L(I\Re_{-4\downarrow})$ é descrito por $\{[x] \in I\Re \mid [x] = [-4; x_2], x_2 \in \Re\}$ e referido como conjunto dos intervalos de mesma cota inferior -4.*

Lema 4.4 : *A representação gráfica do conjunto dos intervalos de mesma cota inferior é dada pela semi-reta obtida a partir de $x = k$ com $k \leq y$ e $x, y \in \Re$.*

Demonstração:
Seja $k \in \Re$. $\forall [x] \in L(I\Re_{k\downarrow})$, $[x] = [k; b], b \geq k, b \in \Re$. Mas, $[k; b] \mapsto (k, b)$ e $\{(k, b) \mid b \in \Re \text{ e } b \geq k\}$ é a semi-reta definida por $x = k$, no semi-plano que define $I\Re$.

Exemplo 4.10 : *O conjunto $I(I\Re_{-4\downarrow})$, do exemplo anterior, é representado graficamente pela semi-reta $x = -4$, onde $-4 \leq y$.*

4.5.6 Conjunto de intervalos de mesmo extremo superior

Analogamente define-se o conjunto de intervalos de mesmo extremo superior.

Definição 4.5 : (INTERVALOS DE MESMO EXTREMO SUPERIOR)
O conjunto de intervalos de mesmo extremo superior k é denominado por CONJUNTO DOS INTERVALOS DE MESMA COTA SUPERIOR *e denotado por* $U(I\Re_{k\uparrow})$.

$$U(I\Re_{k\uparrow}) = \{[x] \in I\Re \mid [x] = [x_1; k], x_1 \in \Re\}.$$

Exemplo 4.11 : *O conjunto* $U(I\Re_{-4\uparrow})$ *é descrito por* $\{[x] \in I\Re \mid [x] = [x_1; -4], x_1 \in \Re\}$ *e referido com conjunto dos intervalos de mesma cota superior* -4.

Lema 4.5 : *A representação gráfica do conjunto dos intervalos de mesma cota superior é dada pela semi-reta obtida a partir de* $y = k$ *com* $k \leq y$, $y \in \Re$.

Demonstração:
Seja $w \in \Re$. $\forall [x] \in U(I\Re_{k\uparrow})$, $[x] = [a; w], w \geq a, a \in \Re$. Mas, $[a; w] \mapsto (a, w)$ e $\{(a, w) \mid a \in \Re \text{ e } w \geq a\}$ é a semi-reta definida por $y = w$, no semi-plano que define $I\Re$.

Exemplo 4.12 : *O conjunto* $U(I\Re_{-4\uparrow})$, *do exemplo anterior, é representado graficamente pela semi-reta* $y = 4$.

4.5.7 Conjunto de intervalos de mesmo valor absoluto

Considere que o valor absoluto do intervalo $[x] = [x_1; x_2]$ é dado por δ. Como a definição de valor absoluto toma por base a norma do máximo, δ corresponde ao extremo de maior valor absoluto, ou seja,

$$\delta = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

δ representa a distância de um ponto do eixo y na direção paralela ao eixo x (se δ corresponde a coordenada x) ou a distância de um ponto do eixo x na direção paralela ao eixo y (se δ corresponde a coordenada y). Em termos da representação gráfica do valor absoluto de um intervalo, isto é representado por um ponto sobre a reta $y = x$. A Figura 4.17 ilustra esta representação gráfica. Nesta figura, pode-se observar as possibilidades do valor absoluto, ou seja, para pontos pertencentes aos octantes III/IV o valor absoluto é dado pelo valor absoluto do extremo x_1 e para pontos pertencentes aos octantes I/II o valor absoluto é dado pelo valor absoluto do extremo x_2.

As possibilidades do valor absoluto ilustradas na Figura 4.17 constituem um resultado importante que é apresentado a seguir como um teorema.

Teorema 4.7 : *O valor absoluto* δ *de um intervalo representa um ponto na reta* $y = x$.

Demonstração:
Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1, x_2)$,$\delta = |x_1|$ ou $\delta = |x_2|$. Mas x_1 é um número real e estes números podem ser interpretados com intervalos degenerados, ou seja, $x_1 = (x_1, x_1)$.
Sendo assim, x_1 é representado por um ponto na reta $y = x$, o mesmo valendo para x_2.
Logo, $|x_1|$ é um ponto na reta $y = x$, assim como $|x_2|$.

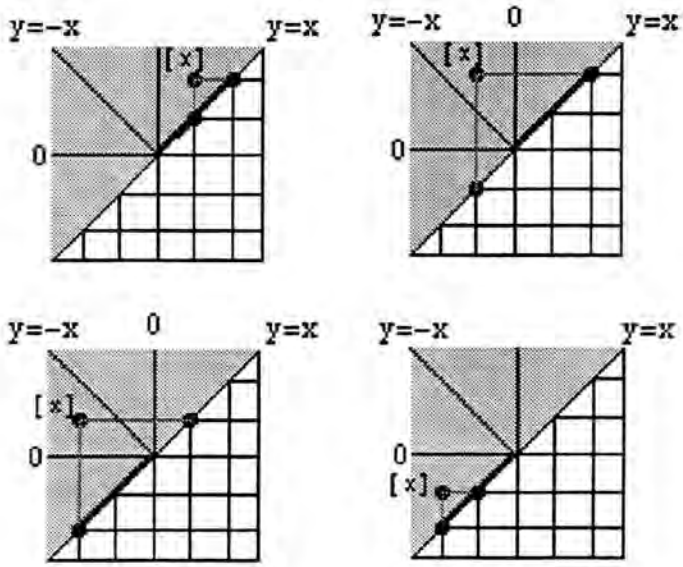


FIGURA 4.17 — Representação do valor absoluto do intervalo

Exemplo 4.13 : *Considere o intervalo* $[-9;8]$. *O valor absoluto deste intervalo é representado graficamente pelo ponto de coordenadas* $(9,9)$ *que pertence à reta* $y = x$.

Fazendo-se a conexão entre o valor absoluto e *Ínfimo/Supremo* de um intervalo tem-se que o valor absoluto é obtido a partir do *Ínfimo* de $[x]$ quanto este intervalo pertence ao III/IV octante e a partir do *Supremo* quando este intervalo pertence ao I/II octante. Sendo assim, quando se conhece somente o valor absoluto δ do intervalo, tem-se que este valor pode referir-se tanto ao *Ínfimo* deste intervalo quanto ao *Supremo*.

Definição 4.6 : (INTERVALOS DE MESMO VALOR ABSOLUTO)
O conjunto de intervalos de mesmo valor absoluto δ *é denotado por* D_δ *e descrito por*

$$D_\delta = \{[x] \mid |[x]| = \delta\}.$$

Suponha que o valor absoluto do intervalo $[x] = [x_1; x_2]$ é dado por δ. Então, se $\delta = |x_1|$, x_1 pode ser tanto um número positivo quanto um número negativo, o mesmo valendo para o caso de $\delta = |x_2|$. Então,

$$\delta \mapsto (-x_1, x_1) \quad \text{ou } \delta \mapsto (-x_2, x_2),$$

onde $\delta = -x_1$ ou $\delta = x_1$, o mesmo valendo para x_2. Graficamente, isto é representado pela projeção do ponto $(-\delta, \delta)$ sobre a reta $y = x$. A partir desta projeção tem-se um par de segmentos de reta, cujos pontos constituintes estão a um mesma distância δ da origem do sistema de coordenadas. Estes segmentos constituem a representação

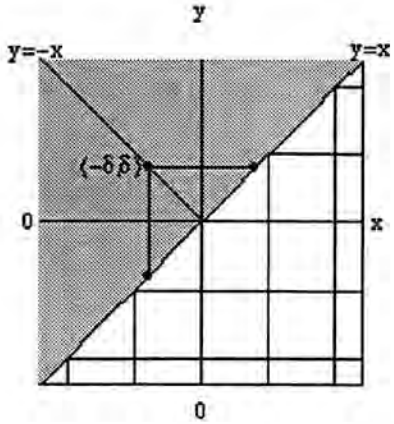


FIGURA 4.18 — Representação do conjunto dos intervalos de mesmo valor absoluto

gráfica do conjunto de intervalos de mesmo valor absoluto δ. O teorema a seguir apresenta este resultado.

Teorema 4.8 : *A representação gráfica do conjunto dos intervalos de mesmo valor absoluto δ é dada por um par de segmentos de reta do plano $I\Re$.*

Demonstração:
Seja $[x] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1, x_2)$.
Suponha que $\delta = |[x]| = x_1$. Então, $\max\{|x_1|, |x_2|\} = x_1$, ou seja, $|x_2| \leq x_1 \Leftrightarrow -x_1 \leq x_2 \leq x_1$.
Por outro lado, se $\delta = |[x]| = x_2$, $\max\{|x_1|, |x_2|\} = x_2$, ou seja, $|x_1| \leq x_2 \Leftrightarrow -x_2 \leq x_1 \leq x_2$.
Desta forma, os pontos do plano $I\Re$ que representam intervalos de mesmo valor absoluto x_1 ou x_2 são representados pelos segmentos de extremos $(-x_1, -x_1), (-x_1, x_1)$ e $(-x_1, x_1), (x_1, x_1)$.

O Teorema 4.8 é ilustrado pela Figura 4.18.

Exemplo 4.14 : *O conjunto de intervalos de valor absoluto 4 é descrito como*

$$D_4 = \{[x] \mid |[x]| = 4\}$$

e representado graficamente pelo par de segmentos de reta resultantes da projeção do ponto $(-4, 4)$ sobre a reta $y = x$.

4.5.8 Conjunto de intervalos de mesma distância com relação a $[x]$

Definição 4.7 : (conjunto de intervalos de mesma distância com relação a $[x]$)
Seja $[x]$ um intervalo e ϵ um número real. O conjunto de intervalos cuja distância de $[x]$ é dada por ϵ é descrito por $\{[a] \mid d([a], [x]) = \epsilon\}$.

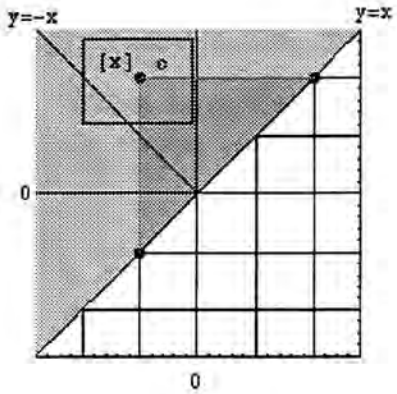


FIGURA 4.19 — Representação do conjunto intervalo de mesma distância de $[x]$

Exemplo 4.15 : *O conjunto de intervalos cuja distância de* $[2;3]$ *é* 6 *é descrito por*

$$\{[a] \mid d([a],[2;3]) = 6\}.$$

A representação gráfica do conjunto de intervalos de mesma distância com relação a $[x]$ está apresentada na Figura 4.19 e é formalizada pelo lema seguir.

Lema 4.6 : *A representação gráfica do conjunto de intervalos de mesma distância* ϵ *de* $[x]$, *com* $[x] \in I\Re$, *é dada pelos lados do quadrado de lado* 2ϵ *e cujo centro é o ponto associado a* $[x]$, $\epsilon \in \Re^+$.

Demonstração:
Sejam $[x],[y] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1, x_2)$, $[y] \mapsto (y_1, y_2)$.
Se $d([x],[y]) = \epsilon$, pela definição de distância entre intervalos, $\epsilon = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

(i) Se $\epsilon = |x_1 - y_1|$, tem-se que:

- para $(x_1 - y_1) \geq 0$, $\epsilon = x_1 - y_1 \Rightarrow x_1 = y_1 + \epsilon$,
- para $(x_1 - y_1) \leq 0$, $\epsilon = y_1 - x_1 \Rightarrow x_1 = y_1 - \epsilon$.

Mas, se $x_1 = \epsilon + y_1$ então (x_1, x_2) é um ponto do subconjunto associado ao conjunto de intervalos de mesmo extremo inferior $y_1 + \epsilon$, ou seja, (x_1, x_2) é um ponto de $L(I\Re_{y_1+\epsilon\downarrow})$. Da mesma forma, (x_1, x_2) é um ponto do subconjunto associado ao conjunto de intervalos de mesmo extremo inferior $y_1 - \epsilon$, ou seja, (x_1, x_2) é um ponto de $L(I\Re_{y_1-\epsilon\downarrow})$.
Por construção,

$$L(I\Re_{y_1+\epsilon\downarrow})//L(I\Re_{y_1-\epsilon\downarrow}).$$

Tem-se ainda que se $\epsilon = |x_1 - y_1|$ então $|x_2 - y_2| \leq |x_1 - y_1|$, ou seja, $-(x_1 - y_1) \leq (x_2 - y_2) \leq (x_1 - y_1)$.
Graficamente, isto é representado por um par de segmentos de reta

de $L(I\Re_{y_1+\epsilon\downarrow})$ e $L(I\Re_{y_1-\epsilon\downarrow})$, cujos extremos são $(y_2+\epsilon), (y_2-\epsilon)$ e um par de segmentos de reta cujos extremos são $y_1+\epsilon$ e $y_1-\epsilon$.

(ii) Se $\epsilon = |x_2 - y_2|$, isto é analogamente demonstrado.

Logo, a representação gráfica dos intervalos de mesma distância ϵ de $[x]$ é dada pelos lados do quadrado de lado 2ϵ e cujo centro é o ponto associado a $[x]$.

4.5.9 Conjunto de inclusões de um intervalo

Definição 4.8 : (CONJUNTO DE INCLUSÕES DE UM INTERVALO)
Seja $[x]$ um intervalo. O conjunto de inclusões deste intervalo é denotado por $I\Re_{[x]}$ e representado por $I\Re_{[x]} = \{[x_i] \mid [x_i] \subseteq [x]\}$.

Com relação à representação gráfica do conjunto $I\Re_{[x]}$ tem-se que este conjunto é limitado superior e inferiormente por segmentos de reta, constituindo assim uma subregião do plano $I\Re$. Estes segmentos de reta representam subconjunto dos conjuntos $L(I\Re_{x_1\downarrow})$ (conjunto de intervalos de mesma cota inferior x_1) e $U(I\Re_{x_2\uparrow})$ (conjunto de intervalos de mesma cota superior x_2).

Teorema 4.9 : *A representação gráfica do conjunto $I\Re_{[x]}$ é obtida a partir da projeção dos pontos pertencentes ao segmento de reta de extremos (x_1, x_2), $(m([x]), m([x]))$ sobre a reta $y = x$.*

Demonstração:
Seja $\overline{AB}$ o segmento de reta de extremos (x_1, x_2), $(m([x]), m([x]))$.
$\overline{AB}$ representa um subconjunto de M_φ, ou seja, do conjunto de intervalos de mesmo ponto médio $\varphi = m([x])$:

$$\overline{AB} \subseteq M_\varphi.$$

Mas, $\overline{AB}$ é limitado por (x_1, x_2) e este ponto pertence ao conjunto de intervalos de mesma cota inferior x_1, assim como ele pertence ao conjunto de intervalos de mesma cota superior x_2.

$$(x_1, x_2) \in L(I\Re_{x_1\downarrow}) \quad (x_1, x_2) \in U(I\Re_{x_2\uparrow})$$

Assim, (x_1, x_2) é o ponto de intersecção entre $U(I\Re_{x_2\uparrow})$ e $L(I\Re_{x_1\downarrow})$, onde

$$U(I\Re_{x_2\uparrow}) = \{[x] \mid x_2 \text{ é constante}\},$$
$$L(I\Re_{x_1\downarrow}) = \{[x] \mid x_1 \text{ é constante}\}.$$

Segundo o Lema 4.4 e o Lema 4.5, estes conjuntos são representados por semi-retas cujos limites são os pontos (x_1, x_1), (x_2, x_2) da reta $y = x$.
Em especial, o subconjunto de $L(I\Re_{x_1\downarrow})$ é representado pelo segmento de extremos (x_1, x_2), (x_1, x_1) e é constituído por subconjunto de $[x]$, o mesmo valendo para o subconjunto $U(I\Re_{x_2\uparrow})$ representado pelo segmento de extremos (x_1, x_2), (x_2, x_2).

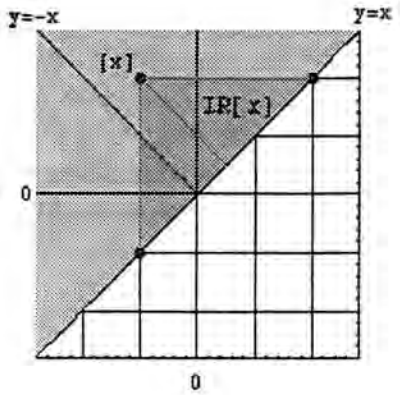


FIGURA 4.20 — Representação do conjunto de inclusões de um intervalo $[x]$

Então, os segmentos de extremos (x_1, x_2), (x_1, x_1) e (x_1, x_2), (x_2, x_2) definem uma subregião do plano $I\Re$.
Denominando-se esta subregião por $I\Re_{[x]}$, tem-se que um ponto $(y_1, y_2) \in \overline{AB}$ também pertence à subregião $I\Re_{[x]}$.
Se considerarmos que (y_1, y_2) é o ponto de intersecção entre $U(I\Re_{y_2\uparrow})$ e $L(I\Re_{y_1\downarrow})$, tem-se que esse ponto está associado a uma subregião de $I\Re_{[x]}$ delimitada pelos segmentos $(y_1, y_2), (y_1, y_1)$ e $(y_1, y_2), (y_2, y_2)$.
Então, analisando-se a relação entre os pontos (x_1, x_2) e (y_1, y_2), a partir de suas projeções sobre a reta $y = x$, obtém-se:

$$(y_1 \geq x_1) \wedge (y_2 \leq x_2).$$

Mas, pela definição de inclusão, só podemos ter que $[y] \subseteq [x]$.
Logo, qualquer ponto de $\overline{AB}$ está contido $[x]$ e a projeção dos pontos de $\overline{AB}$ sobre a reta $y = x$ define uma subregião de inclusões de $[x]$.

A representação gráfica do conjunto $I\Re_{[x]}$ está apresentada na Figura 4.20.

Exemplo 4.16 : *Considere o intervalo* $[3; 4]$, *cujo ponto médio é* $3,5$. *O conjunto de inclusões deste intervalo é dado por*

$$I\Re_{[3;4]} = \{[x_i] \mid [x_i] \subseteq [3; 4]\}$$

e é representado graficamente a partir da projeção dos pontos do segmento de reta de extremos $(3, 4)$, $(3,5; 3,5)$ *sobre a reta* $y = x$.

Uma progressão natural deste desenvolvimento aponta para a representação gráfica de uma seqüência monotônica de inclusões.

Instituto de Informática
Biblioteca

4.5.10 Seqüência monotônica de inclusões

Um conjunto de intervalos $[a_1], [a_2], ...$ definido a partir de uma certa regra/lei e que possui um limite $[x]$ é denominado *seqüência convergente* para um certo $[x]$ e denotado por $([a_n])$, onde $[a_n] = [\bigtriangledown a_n; \bigtriangleup a_n]$. Nesta seqüência, quando n tende ao infinito, o limite de $\bigtriangledown a_n$ é dado por x_1 e de $\bigtriangleup a_n$ por x_2.

Se a relação de inclusão ($\subset$ ou $\subseteq$) é quem determina a conexão entre os elementos de $([a_n])$, então essa seqüência representa um subconjunto do conjunto $I\Re_{[x]}$, tal que

$$[a_1] \supset [a_2] \supset ... \supset [a_n] \supset [a_{n+1}] \supset ... \supset [x].$$

Esta seqüência é denominada *seqüência monotônica de inclusões* e, independente da forma como ela é definida, na medida em que aumenta o índice do termo da seqüência então o intervalo correspondente está mais próximo de $[x]$, ou seja,

$$[a_n] \supset [a_{n+1}] \rightarrow d([a_n], [x]) \geq d([a_{n+1}], [x]).$$

Yang (apud [MOO 66]) foi quem apresentou pela primeira vez a conexão da definição de *distância*, *seqüência convergente* e *diâmetro* de intervalos. Segundo ele, uma seqüência convergente de intervalos representa uma seqüência de números reais cujas distâncias $d([a_n], [x])$ convergem para *zero*. Em especial, a seqüência

$$[a_1] \supset [a_2] \supset ... \supset [a_n] \supset [a_{n+1}] \supset ... \supset [x],$$

satisfaz a seguinte condição:

$$\text{Se } [a_{n+1}] \subset [a_n] \text{ e } d([a_n], [a_{n+1}]) \leq \epsilon, \text{ então } w([a_{n+1}]) \leq w([a_n]) + 2\epsilon.$$

Esta condição define uma propriedade importante de seqüências convergentes de intervalos, cuja demonstração pode ser obtida em Moore [MOO 66].

Pelo que está apresentado, tem-se que a representação gráfica de uma seqüência monotônica de inclusões pode ser obtida a partir da representação gráfica da distância entre intervalos (Lema 4.6).

Por exemplo, o conjunto de intervalos simétricos referentes ao intervalo $[x]$ é dado pelo segmento de extremos (x_1, x_2), $(m([x]), m([x]))$ (Figura 4.21).

Outra forma de representar graficamente este mesmo resultado pode ser obtida a partir da definição de função. Ou seja, algumas das seqüências monotônicas de inclusões, com relação a um ponto do plano $I\Re$, podem ser representadas por funções cujo gráfico não possui ponto de máximo ou mínimo local. Este resultado está formalizado a seguir.

Teorema 4.10 : *Seja f uma função real estritamente decrescente e tal que $\forall x \in Dom(f), f(x) \geq x$. Seja $\{x_i\}_{i \in N}, x_i \leq x_{i+1}, \forall i, x_i \in Dom(f)$. Então $\{[x_i; f(x_i)]\}_{i \in N}$ representa uma seqüência monotônica de inclusões.*

Demonstração:
Seja f nas condições acima.

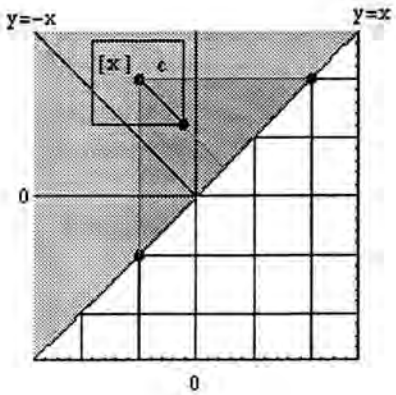


FIGURA 4.21 — Representação da seqüência monotônica de inclusões de um intervalo $[x]$

Então, $\forall x_1, x_2 \in Dom(f)$:

$$\begin{aligned} &x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \\ &f(x_1) \geq x_1, \\ &f(x_2) \geq x_2. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} &[x_1; f(x_1)] \in I\Re, \\ &[x_2; f(x_2)] \in I\Re, \\ &[x_1; f(x_1)] \supset [x_2; f(x_2)]. \end{aligned}$$

Então, escolhendo $\{x_i\}_{i \in N}, x_i \in Dom(f), x_i < x_{i+1}, \forall i$:

$$[x_i; f(x_i)] \supset [x_{i+1}; f(x_{i+1})], \forall i.$$

Logo, $\{[x_i; f(x_i)]\}_{i \in N}$ é uma seqüência monotônica de inclusões.

Esta representação gráfica pode ser obtida de muitas outras formas, mas optou-se por utilizar funções a fim de possibilitar a conexão deste resultado com a ANÁLISE REAL.

4.6 Resumo

Neste capítulo apresentou-se a estruturação de uma nova abordagem para a representação gráfica de intervalos. Esta representação é baseada no plano cartesiano e orientada à análise visual de intervalos a partir de propriedades geométricas do plano cartesiano. Ela favorece a representação da dualidade de interpretação associada a intervalos e possibilita a verificação visual de relacionamentos em $(I\Re, \leq)$ e $(I\Re, \subseteq)$. Um caso especial da representação gráfica da ordenação do conjunto $(I\Re, \leq)$ é obtida no caso dos intervalos degenerados. Nesta situação, tem-se que a ordem do conjunto $(\Re, \leq)$ pode ser visualizada a partir da reta $y = x$, cujos pon-

tos têm coordenadas de mesmo valor (números reais $\leftrightarrow$ intervalo degenerado). Por sua vez, a representação gráfica da ordenação do conjunto $(I\Re, \subseteq)$ é obtida através do semi-plano superior à reta $y = x$, onde os intervalos são representados. Neste semi-plano tem-se um conjunto de primitivas gráficas as quais possibilitam a representação de propriedades dos intervalos. Estas propriedades constituem as regras da representação. O conjunto de primitivas associado ao conjunto de regras produzem o *vocabulário gráfico* da representação.

O vocabulário gráfico permite a análise visual de intervalos, a qual é baseada na geometria do plano cartesiano.

A partir da verificação visual de $(I\Re, \subseteq)$ é possível deduzir intervalos a partir da descrição de suas características.

Exemplo 4.17 : *Deseja-se obter um intervalo de diâmetro α que possua valor absoluto δ e ponto médio φ.*
Este intervalo é representado pelo ponto de intersecção entre:

- *a reta associada ao conjunto S_α (conjunto de intervalos de mesmo diâmetro α),*
- *o segmento de reta associado ao conjunto D_δ (conjunto de intervalos de mesmo valor absoluto δ),*
- *a semi-reta associada ao conjunto M_φ (conjunto de intervalos de mesmo ponto médio φ).*

Exemplo 4.18 : *Tem-se que $[2; 22]$ foi obtido a partir da computação de intervalos, mas o critério para aceitação do resultado foi estabelecido como limite de erro menor do que 2 unidades.*
Então, o intervalo $[2; 22]$ não atende ao critério de aceitação, mas ele contém intervalos que atendem a este critério. Estes intervalos são representados graficamente como uma subregião do plano $I\Re$ contida em $I\Re_{[2;22]}$ e limitada superiormente pela reta $y = x + 2$.

A representação gráfica proposta pode ser tanto para a dedu ção de propriedades de conjuntos de intervalos, quanto no estudo de algoritmos. Em especial, no estudo de algoritmos que se propõem a calcular a solução de um problema numérico.

5 Representação gráfica das operações intervalares

Neste capítulo apresenta-se a representação gráfica das operações intervalares. Esta representação utiliza a nova abordagem para a representação gráfica de intervalos, descrita no capítulo 4, e possibilita a representação de operações a partir da combinação de vetores (intervalo enquanto número) e semi-retas que limitam subregiões (intervalo enquanto conjunto).

5.1 Considerações iniciais

Segundo a abordagem proposta, a representação gráfica de $[x] = [x_1; x_2]$ enquanto número é dada pelo vetor $\vec{x}$ e enquanto conjunto pela subregião $I\Re_{[x]}$.

A subregião $I\Re_{[x]}$ possibilita a identificação de propriedades características do conjunto $(I\Re_{[x]}, \subseteq)$, ou seja:

- o conjunto $(I\Re_{[x]}, \subseteq) \subseteq (I\Re, \subseteq)$ é ordenado.
- os pontos $[x_i] \in I\Re_{[x]}$ constituem a representação gráfica do conjunto de inclusões do intervalo $[x]$, ou seja, $(\forall [x_i] \in I\Re_{[x]})([x_i] \subset [x])$.
- o *Supremo* do conjunto $(I\Re_{[x]}, \subseteq)$ é representado graficamente pelo ponto (x_1, x_2).
- o segmento $\overline{AB}$, onde $A = (x_1, x_1)$ e $B = (x_1, x_2)$, representa graficamente o conjunto de intervalos que satisfazem a relação de inclusão em $[x]$, cujo *Ínfimo* é (x_1, x_1) e o *Supremo* é (x_1, x_2).
- o segmento $\overline{AB}$ representa um subconjunto do conjunto de intervalos de mesma cota inferior $L(I\Re_{x_1\downarrow})$ que é a representado pela semi-reta $x = x_1$, $\forall y \in \Re$.
- o segmento $\overline{BC}$, onde $B = (x_1, x_2)$ e $C = (x_2, x_2)$, representa graficamente o conjunto de intervalos que satisfazem a relação de inclusão em $[x]$, cujo *Ínfimo* é (x_2, x_2) e o *Supremo* é (x_1, x_2).
- o segmento $\overline{BC}$ representa um subconjunto do conjunto de intervalos de mesma cota superior $U(I\Re_{x_2\uparrow})$ que é representado pela semi-reta $y = x_2$, $\forall x \in \Re$.
- $(x_1, x_2) = L(I\Re_{x_1\downarrow}) \cap U(I\Re_{x_2\uparrow})$

Da mesma forma, a subregião $I\Re_{[x]}$ possibilita a identificação de propriedades características do conjunto $([x], \leq)$, ou seja:

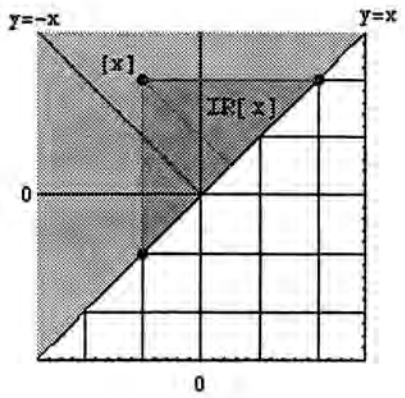


FIGURA 5.1 — Representação da subregião $I\Re_{[x]}$

- $(\Re, \leq) \supseteq ([x], \leq)$, onde $([x], \leq)$ é um reticulado.
- o *Ínfimo* de $[x]$ é x_1: $Inf([x]) = x_1$.
- o *Supremo* de $[x]$ é x_2: $Sup([x]) = x_2$.
- o segmento de reta $\overline{AC}$, onde $A = (x_1, x_1)$ e $C = (x_2, x_2)$, representa graficamente o reticulado $([x], \leq)$.
- o segmento $\overline{AC}$ representa um subconjunto do conjunto $\Re$ que é representado pela reta $y = x$.

Assim, a representação gráfica de operandos de operações intervalares possibilitam tanto a verificação visual da estrutura do número intervalo $[x]$, enquanto reticulado, quanto do conjunto associado ao intervalo $[x]$, enquanto conjunto ordenado. Esta representação está apresentada na Figura 5.1.

5.2 Operações lógicas

Os operandos das operações intervalares lógicas são conjuntos e, então, a representação destas operações é baseada em subregiões do plano $I\Re$.

5.2.1 Intersecção

A representação gráfica usual da operação de intersecção $[x] \cap [y]$ foi proposta por Sunaga [SUN 58] e baseia-se na justaposição de segmentos de reta que representam os intervalos $[x]$ e $[y]$. Segundo esta representação, é possível visualizar somente o conjunto ordenado pela relação $\leq$ associado aos operandos $[x]$ e $[y]$ (diagrama de ordem do reticulado) e a representação gráfica da intersecção é obtida a partir da projeção dos limites dos segmentos de reta sobre um segmento de referência (Figura 5.2).

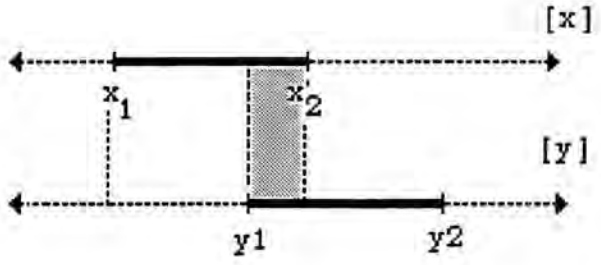


FIGURA 5.2 — Representação dos operandos como segmentos de reta

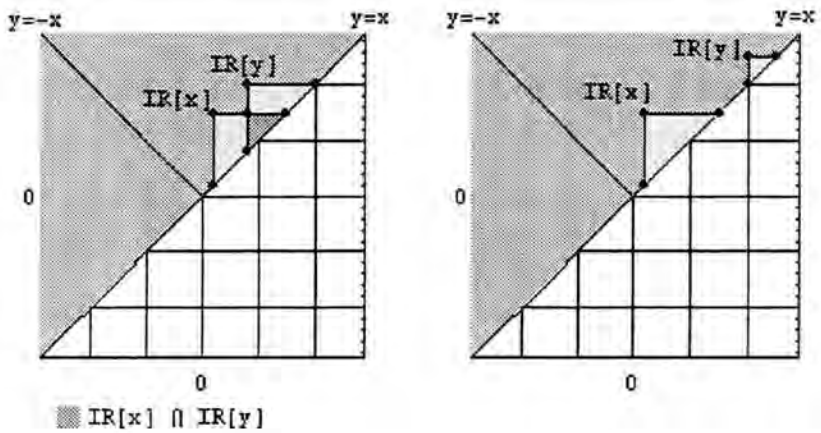


FIGURA 5.3 — Representação da intersecção de intervalos

Por sua vez, a representação gráfica proposta neste trabalho possibilita visualizar tanto o conjunto ordenado pela relação $\leq$, quanto o conjunto ordenado pela relação $\subseteq$, associados aos operandos $[x]$ e $[y]$, respectivamente.

Teorema 5.1 *A representação gráfica da intersecção de intervalos, denotada por $I\Re_{[x]} \cap I\Re_{[y]}$, é representada pela subregião do plano $I\Re$ que corresponde à intersecção das subregiões definidas por $I\Re_{[x]}$ e $I\Re_{[y]}$, onde:*

$$I\Re_{[x]} \cap I\Re_{[y]} = \begin{cases} I\Re_{[max\{Inf([x]),Inf([y])\};min\{Sup([x]);Sup([y])\}]}, & se\ Sup([x]) \geq Inf([y]), \\ \emptyset, & caso\ contrário. \end{cases}$$

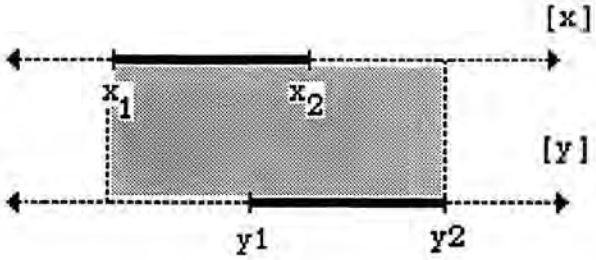


FIGURA 5.4 — Representação dos operandos como segmentos de reta

Demonstração:
Sejam $[x], [y] \in I\Re$ tais que $Sup([x]) \geq Inf([y])$. Seja $[a] \in I\Re$. Então:

$$[a] \in I\Re_{[x]} \Leftrightarrow Sup([a]) \leq Sup([x]) \text{ e } Inf([a]) \geq Inf([x]),$$
$$[a] \in I\Re_{[y]} \Leftrightarrow Sup([a]) \leq Sup([y]) \text{ e } Inf([a]) \geq Inf([y]).$$

Como $[a] \in I\Re_{[x]} \cap I\Re_{[y]} \Leftrightarrow [a] \in I\Re_{[x]}$ e $[a] \in I\Re_{[y]}$. Então, $Sup([a]) \leq Sup([x])$ e $Sup([a]) \leq Sup([y])$ e $Inf([a]) \geq Inf([x])$ e $Inf([a]) \geq Inf([y]) \Leftrightarrow Sup([a]) \leq min\{Sup([x]), Sup([y])\}$ e $Inf([a]) \geq max\{Inf([x]), Inf([y])\}$.
Como $Sup([x]) \geq Inf([y])$ então $min\{Sup([x]), Sup([y])\} \geq max\{Inf([x]), Inf([y])\}$.

Isto é ilustrado pela Figura 5.3.
A visualização da ordenação $\leq$ é obtida a partir da reta $y = x$ e da relação $\subseteq$ a partir da subregião resultante da intersecção entre $I\Re_{[x]}$ e $I\Re_{[y]}$.

Exemplo 5.1 : *Considere a operação* $[2;4] \cap [3;7]$.
Mas, $Inf([2;4]) = 2$, $Sup([2;4]) = 4$, $Inf([3;7]) = 3$ *e* $Sup([3;7]) = 7$. *Então, esta operação é representada graficamente pela subregião definida por:*

$$I\Re_{[2;4]} \cap I\Re_{[3;7]} = I\Re_{[max\{2,3\};min\{4;7\}]} = I\Re_{[3;4]}.$$

5.2.2 União

Da mesma forma como a operação de intersecção, a representação gráfica usual da operação de união $[x] \cup [y]$ foi proposta por Sunaga [SUN 58] e baseia-se na justaposição de segmentos de reta que representam os intervalos $[x]$ e $[y]$. Segundo esta representação, é possível visualizar somente o conjunto ordenado pela relação $\leq$, associado aos operandos $[x]$ e $[y]$. Esta representação é obtida a partir da projeção dos limites dos segmentos de reta sobre um segmento de reta de referência (Figura 5.4). É importante lembrar que esta operação só está definida se $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

Por sua vez, a representação gráfica proposta neste trabalho possibilita visualizar tanto o conjunto ordenado pela relação $\leq$, quanto o conjunto ordenado pela relação $\subseteq$, associados aos operandos $[x]$ e $[y]$, respectivamente.

Teorema 5.2 : *A representação gráfica da união de intervalos, denominada por* $I\Re_{[x]} \cup I\Re_{[y]}$, *é obtida a partir da representação dos conjuntos das* cotas inferiores *e* superiores *de* $[x]$, *ou seja:*

$$I\Re_{[x]} \cup I\Re_{[y]} \;=\; I\Re_{[min\{Inf([x]),Inf([y])\};max\{Sup([x]),Sup([y])\}]}.$$

Demonstração:
Seja $[x], [y] \in I\Re$. Seja $[a] \in I\Re$. Então:

$$[a] \in I\Re_{[x]} \Leftrightarrow Sup([a]) \leq Sup([x]) \wedge Inf([a]) \geq Inf([x]),$$
$$[a] \in I\Re_{[y]} \Leftrightarrow Sup([a]) \leq Sup(y]) \wedge Inf([a]) \geq Inf([y]).$$

Como $[a] \in I\Re_{[x]} \cup I\Re_{[y]} \Leftrightarrow [a] \in I\Re_{[x]} \vee a \in I\Re_{[y]}$. Então:

$$(Sup([a]) \leq Sup([x]) \wedge Inf([a]) \geq Inf([x])) \vee (Sup([a]) \leq Sup([y]) \wedge Inf([a]) \geq Inf([y])).$$

CASO 1: $Sup([x]) < Sup([y]) \wedge Inf([x]) < Inf([y])$.
$Sup([a]) \leq Sup([y]) \wedge Inf([a]) \geq Inf([x]) \Leftrightarrow$
$Sup([a]) \leq max\{Sup([x]), Sup([y])\} \wedge Inf([a]) \geq min\{Inf([x]), Inf([y])\}$.
Logo, $[a] \in I\Re_{[min\{Inf([x]),Inf([y])\};max\{Sup([x]),Sup([y])\}]}$
CASO 2: $Sup([x]) < Sup([y]) \wedge Inf([x]) > Inf([y])$.
$Sup([a]) \leq Sup([y]) \wedge Inf([a]) \geq Inf([y]) \Leftrightarrow$
$Sup([a]) \leq max\{Sup([x]), Sup([y])\} \wedge Inf([a]) \geq min\{Inf([x]), Inf([y])\}$.
Logo, $[a] \in I\Re_{[min\{Inf([x]),Inf([y])\};max\{Sup([x]),Sup([y])\}]}$
CASO 3: $Sup([x]) \geq Sup([y]) \wedge Inf([x]) \leq Inf([y])$.
Este caso se reduz a união de conjuntos e portanto vale a igualdade.

Da mesma forma como na operação de intersecção, a representação gráfica da ordenação em $(\Re, \leq)$ é obtida a partir da reta $y = x$ e da relação $\subseteq$ a partir da subregião resultante da união entre $I\Re_{[x]}$ e $I\Re_{[y]}$.

Exemplo 5.2 : *Considere a operação* $[2;4] \cup [3;7]$.
$(Sup([3;7]) \geq Sup([2;4])) \wedge (Inf([2;4]) \leq Inf(3;7]))$, *esta operação é representada graficamente pela subregião definida por:*

$$I\Re_{[2;4]} \cup I\Re_{[3;7]} = I\Re_{[min\{2,3\};max\{4,7\}} = I\Re_{[2;7]}.$$

5.3 Operações aritméticas

Em princípio, os operandos de operações intervalares aritméticas são números. Isto porque estes números são constituídos por um par de números que representam os limites de um conjunto. Então estes operandos são literalmente do tipo número-conjunto e, desta forma, a representação destas operações é baseada em subregiões e vetores.

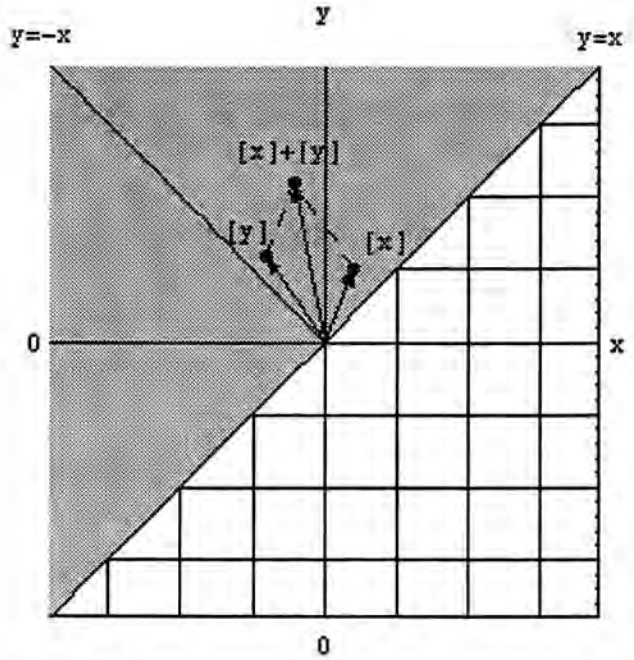


FIGURA 5.5 — Representação da soma de intervalos

5.3.1 Soma

A soma de intervalos é representada graficamente da mesma forma como a soma de vetores, ou seja, cada operando é associado a um vetor e estes vetores são colocados extremo-a-extremo. Assim, a representação gráfica da soma é dada pelo vetor que conecta o ponto inicial do primeiro vetor ao ponto final do segundo vetor. No caso de dois vetores isto equivale a *lei do paralelogramo*[1] para a adição de vetores.

Então, a representação gráfica da soma de intervalos é denominada por $\vec{x} + \vec{y}$ e representada pelo vetor $x \vec{+} y$. Para mostrar que a definição geométrica da soma de intervalos é consistente com a definição algébrica, procede-se na mesma maneira como na prova da soma de vetores (ver Anexo 2). Esta representação é ilustrada pela Figura 5.5.

Exemplo 5.3 : *A representação gráfica da soma* $[3;5]+[-4;6]=[-1;11]$ *é obtida a partir dos vetores* $\overrightarrow{(3,5)}$ *e* $\overrightarrow{(-4,6)}$, *ou seja, pelo deslizamento do vetor* $\overrightarrow{(3,5)}$ *sobre a reta suporte do vetor* $\overrightarrow{(-4,6)}$ *até que a origem desse vetor coincida com o ponto* $(-4,6)$. *Assim obtém-se a identificação do ponto* $(-1,11)$ *que corresponde ao resultado da soma destes vetores.*

O Exemplo 5.3 é ilustrado pela Figura 5.6.

[1]Se os lados de um paralelogramo representam a direção e o comprimento de dois vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, então a soma destes vetores é representada pela diagonal do paralelogramo.

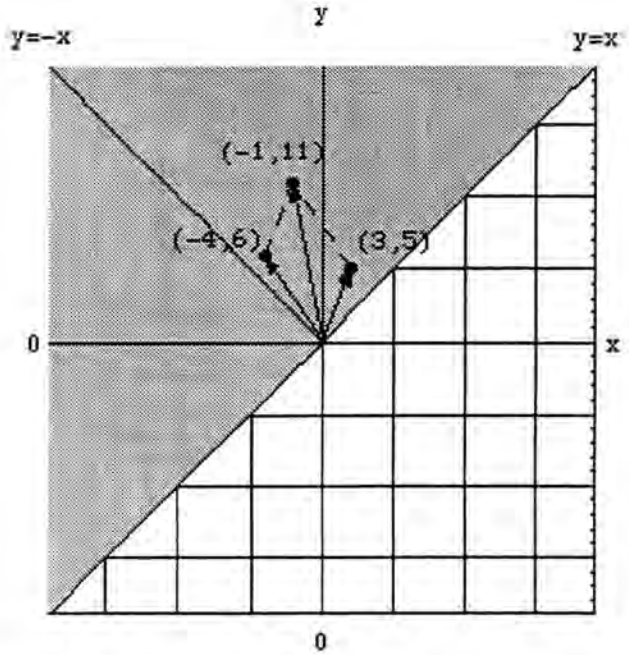


FIGURA 5.6 — Representação da soma $[3;5]+[-4;6]$

5.3.2 Subtração

A subtração de intervalos $[x]-[y]$ pode ser escrita como a soma de um intervalo com o pseudo-oposto de outro intervalo, ou seja $[x]+(-[y])$. Assim, ela é representada graficamente da mesma forma como a soma de intervalos, porém utilizando o pseudo-oposto do segundo operando.

Então, a representação gráfica da subtração de intervalos é representada pelo vetor $x \vec{-} y$ (Figura 5.7).

Nesta representação é possível observar que os pontos que correspondem aos intervalos $[y]$ e $-[y]$ pertence à reta $y = x+w([y])$ (Corolário 4.1), a octantes opostos (Lema 4.2) e estão a uma mesma distância da reta $y = -x$ (Corolário 4.4).

5.3.3 Multiplicação

Em geral, operações intervalares são mais naturalmente compreendidas quando os operandos são associados a números sem sinal.

Tome, por exemplo, a operação $[-2;-1]+[3;4]$. Esta operação pode ser reescrita como $(-1)[1;2]+[3;4]$ e assim podemos mais facilmente observar que esta operação consiste em adicionar $[3;4]$ ao pseudo-oposto de $[1;2]$ que corresponde a $[-2;-1]$.

Em um primeiro momento, isto pode parecer irrelevante, mas, de fato, se o objetivo é compreender como a operação é executada, esta forma de escrever tem importância fundamental.

UFRGS
Instituto de Informática
Biblioteca

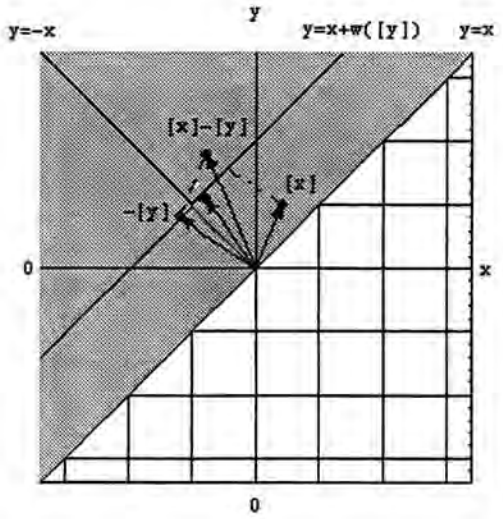


FIGURA 5.7 — Representação da subtração de intervalos

Este recurso é utilizado por Markov [MAR 98] para resolver alguns problemas de construção da Teoria dos Intervalos e neste trabalho ele é utilizado na representação gráfica da operação de multiplicação entre intervalos.

A multiplicação de intervalos pode referir-se à multiplicação entre: *reais*, *real e intervalo* e *intervalos*.

Se um número real é interpretado como intervalo degenerado, então a multiplicação entre reais xy pode ser interpretada como a multiplicação entre intervalos degenerados.

Desta forma, a representação gráfica desta operação xy é obtida a partir de mudanças de comprimento e sentido do vetor associado a um dos operandos, ou seja, suponha que a multiplicação xy seja re-escrita como $[x;x][y;y]$, onde $[x;x] \mapsto (x,x)$ e $[y;y] \mapsto (y,y)$. Então, estes operandos são pontos na reta $y = x$. Se (y,y) for associado ao vetor $\vec{y}$ e x a um escalar, então o resultado da multiplicação xy é representada graficamente pela mudança do comprimento do vetor $\vec{y}$ em x-vezes, e o sentido do vetor resultante é determinado pelo sinal de x. Este mesmo raciocínio é usado no caso de (x,x) ser o operando associado ao vetor e y ao escalar. Assim, o resultado da multiplicação é representado por um vetor que pertence à reta $y = x$ e cujo sentido é definido a partir do sinal do escalar. Isto é ilustrado pela Figura 5.8.

Assim, a multiplicação $x[y]$ pode ser interpretada como a multiplicação de um vetor por um escalar e isso é representado graficamente pela mudança de comprimento e, algumas vezes, do sentido do vetor associado a um dos operandos, ou seja, suponha que a multiplicação $x[y]$, onde $[y] \mapsto (y_1, y_2)$ é associado ao vetor $\vec{y}$ e x a um escalar. Então, o resultado da multiplicação $x[y]$ é representada graficamente pela mudança do comprimento do vetor $\vec{y}$ em x-vezes, onde o sentido do vetor resultante é definido pelo do sinal do escalar. Assim, o resultado da multiplicação é representado por um vetor que pertence ao plano $I\Re$. Isto é ilustrado pela Figura 5.9.

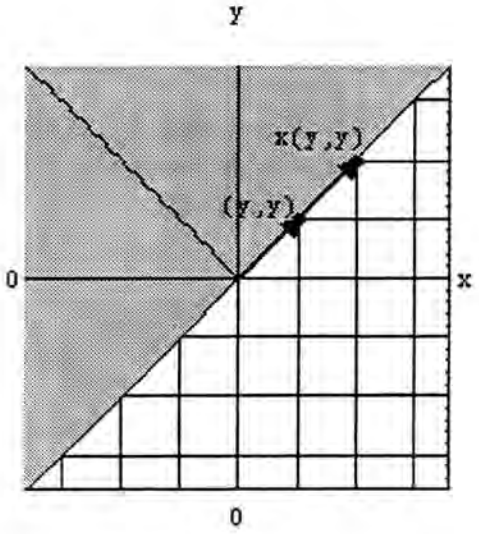


FIGURA 5.8 — Representação da multiplicação entre reais

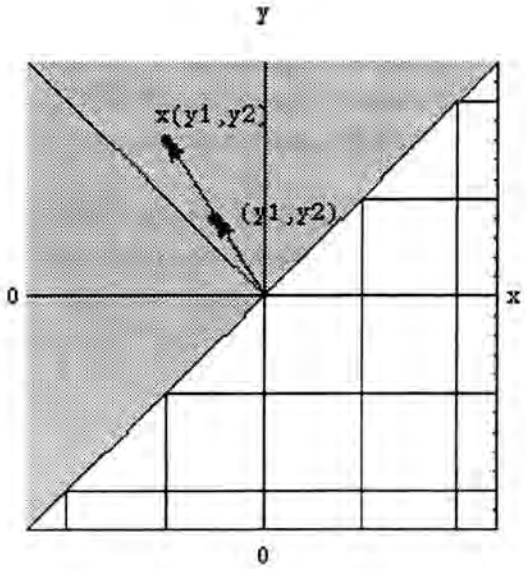


FIGURA 5.9 — Representação da multiplicação entre real e intervalo

A generalização da multiplicação é obtida quando ambos operandos são intervalos. Neste caso, a interpretação é obtida seguindo o mesmo raciocínio utilizado nas situações anteriores, porém utilizando-se também a idéia de *Ínfimo* e *Supremo*.

$$[x][y] = [Inf([x][y]); Sup([x][y])]$$

Teorema 5.3 : *A representação gráfica de $[x][y]$ é dada pelo vetor associado ao ponto que representa a união convexa de subregiões referentes ao produto de um escalar por um vetor, definidos apropriadamente.*

Demonstração:
Sejam $[x], [y] \in I\Re$, $[x] \mapsto (x_1, x_2)$, $[y] \mapsto (y_1, y_2)$.
A representação da multiplicação $[x][y]$ é obtida a partir da representação gráfica da definição da operação intervalar, ou seja, pelo ponto obtido a partir da intersecção das semi-retas que representam o conjunto de cotas superiores e inferiores de $\{xy \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$.
Se considerarmos que $[x][y]$ pode ser re-escrito como a multiplicação de um escalar por um vetor, então este ponto é obtido por:

- CASO1: $x_1 \geq 0$ e $y_1 \geq 0$
  Neste caso, (x_1, x_2), (y_1, y_2) pertencem ao I octante e

  $$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)).$$

  Como $x_1 \geq 0$, $x_1(y_1, y_2)$ e $x_2(y_1, y_2)$ são representados graficamente por um par de vetores colineares, de extremos $x_1(y_1, y_2)$ e $x_2(y_1, y_2)$ e pertencentes ao I octante.
  Estes vetores estão associados a intervalos que, por sua vez, estão associados à subregiões de inclusão, ou seja, o intervalo associado ao ponto $x_1(y_1, y_2)$ também é representado graficamente pela subregião do plano $I\Re$ que corresponde ao conjunto $I\Re_{x_1[y]}$ de inclusões deste intervalo, o mesmo valendo para o ponto $x_2(y_1, y_2)$ que corresponde ao conjunto $I\Re_{x_2[y]}$.
  Então, a partir da representação gráfica das subregiões $I\Re_{x_1[y]}$ e $I\Re_{x_2[y]}$, tem-se que $I\Re_{x_1[y]}$ está sempre à esquerda de $I\Re_{x_2[y]}$ e, então, o ponto que representa a intersecção do conjunto de cotas superiores e inferiores de $\{xy \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$ é dado por:

  $$L(I\Re_{x_1[y]}) \cap U(I\Re_{x_2[y]}) = I\Re_{x_1[y]} \underline{\cup} I\Re_{x_2[y]}$$

  (ver Figura 5.10).

- CASO 2: $x_1 \geq 0$ e $0 \in [y]$
  Neste caso, (x_1, x_2) pertence ao I octante e (y_1, y_2) ao II ou III octante.
  Como $x_1 \geq 0$, esta multiplicação pode ser re-escrita como

  $$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)).$$

Então, $x_1(y_1, y_2)$ e $x_2(y_1, y_2)$ são representados graficamente por um par de vetores colineares, de extremos $x_1(y_1, y_2)$ e $x_2(y_1, y_2)$ e pertencentes ao II ou III octante.
Estes vetores estão associados a intervalos que, por sua vez, estão associados à subregiões de inclusão, ou seja, o intervalo associado ao ponto $x_1(y_1, y_2)$ também é representado graficamente pela subregião $I\Re_{x_1[y]}$, o mesmo valendo para o ponto $x_2(y_1, y_2)$ que corresponde à subregião $I\Re_{x_2[y]}$.
Então, a partir da representação gráfica destas subregiões, tem-se que $I\Re_{x_1[y]}$ está sempre contida em $I\Re_{x_2[y]}$ e, então, o ponto que representa a intersecção do conjunto de cotas superiores e inferiores de $\{xy \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$ é dado por:

$$L(I\Re_{x_2[y]}) \cap U(I\Re_{x_2[y]}) = I\Re_{x_2[y]}$$

(ver Figura 5.11).

- CASO 3: $x_1 \geq 0$ e $y_2 \leq 0$
  Neste caso, (x_1, x_2) pertence ao I octante, (y_1, y_2) pertence ao IV octante.
  Como $x_1 \geq 0$ e (y_1, y_2) pode ser re-escrito em função de seu pseudo-oposto, esta multiplicação pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned}(x_1, x_2)(y_1, y_2) &= (x_1, x_2)(-1)(y_2, y_1) \\ &= (-1)(x_1, x_2)(y_2, y_1) \\ &= (-1)(x_1(y_2, y_1), x_2(y_2, y_1)).\end{aligned}$$

  Então, o resultado desta multiplicação é dado pelo intervalo que corresponde ao pseudo-oposto associado ao ponto $(x_1(y_2, y_1), x_2(y_2, y_1))$.
  Mas os pontos $x_1(y_2, y_1)$, $x_2(y_2, y_1)$ pertencem ao I octante e assim sua representação gráfica é obtida da mesma forma como no CASO 1, onde $x_1 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$.
  Então, a representação gráfica de $[x][y]$ é dada pelo ponto que corresponde ao pseudo-oposto de

$$L(I\Re_{x_1(-[y])}) \cap U(I\Re_{x_2(-[y])}) = I\Re_{x_1(-[y])} \underline{\cup} I\Re_{x_2(-[y])},$$

  ou seja, por $(-1)(I\Re_{x_1(-[y])} \underline{\cup} I\Re_{x_2(-[y])})$ (ver Figura 5.12).

- CASO 4: $0 \in [x]$ e $y_1 \geq 0$
  Neste caso, utiliza-se a propriedade comutativa da multiplicação de intervalos para escrever

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (y_1, y_2)(x_1, x_2).$$

  Então, como $y_1 \geq 0$, esta multiplicação pode ser re-escrita como

$$(y_1, y_2)(x_1, x_2) = (y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)).$$

Mas $y_1(x_1, x_2)$ pertence ao I octante e $y_2(x_1, x_2)$ ao II ou III octante. Assim, esta multiplicação é representada graficamente da mesma forma como no CASO 2, tomando por base as subregiões $I\Re_{y_1[x]}$ e $I\Re_{y_2[x]}$.
Ou seja, $[x][y]$ é representada pelo ponto

$$L(I\Re_{y_2[x]}) \cap U(I\Re_{y_2[x]}) = I\Re_{y_2[x]}.$$

- CASO 5: $0 \in [x]$ e $0 \in [y]$
  Neste caso (x_1, x_2), (y_1, y_2) pertencem ao II ou III octante e

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)).$$

  Como $x_1 \leq 0$, este número pode ser escrito em função do seu oposto. Assim,

$$(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2) = ((-1)x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)).$$

  Então, a representação gráfica da multiplicação é dada pelo ponto que corresponde à intersecção

$$L(I\Re_{-x_1[y]}) \cap U(I\Re_{x_2[y]}) = I\Re_{-x_1[y]} \underline{\cup} I\Re_{x_2[y]}.$$

- CASO 6: $0 \in [x]$ e $y_2 \leq 0$
  Neste caso, (x_1, x_2) pertencem ao II ou III octante e (y_1, y_2) pertence ao IV octante.
  Como (y_1, y_2) pode ser re-escrito em função de seu pseudo-oposto, tem-se que

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1, x_2)(-1)(y_2, y_1) = (-1)(x_1, x_2)(y_2, y_1).$$

  Mas como (x_1, x_2) pertence ao II ou III octante e (y_2, y_1) pertence ao I octante, aplicando-se a propriedade comutativa da multiplicação de intervalos podemos re-escrever esta multiplicação como

$$(-1)(x_1, x_2)(y_2, y_1) = (-1)(y_2, y_1)(x_1, x_2).$$

  Assim, esta multiplicação é representada graficamente da mesma forma como no CASO 2, onde $y_2 \geq 0$ e $0 \in [x]$.
  Então, a representação gráfica de $[x][y]$ é dada pelo ponto que corresponde ao pseudo-oposto de

$$L(I\Re_{y_2[x]}) \cap U(I\Re_{y_2[x]}) = I\Re_{y_2([x])},$$

  ou seja, por $(-1)I\Re_{y_2([x])}$ (ver Figura 5.13).

- CASO 7: $x_2 \leq 0$ e $y_1 \geq 0$
  Nete caso, (x_1, x_2) pertence ao IV octante e (y_1, y_2) pertence ao I octante.
  Como (x_1, x_2) pode ser escrito em função de seu pseudo-oposto, esta

multiplicação pode ser escrita como

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (-1)(x_2, x_1)(y_1, y_2).$$

Mas, (x_2, x_1) e (y_1, y_2) pertencem ao I octante.
Então, a representação gráfica da multiplicação destes pontos é obtida da mesma forma como no CASO 1, onde $x_2 \geq 0$ e $y_1 \geq 0$.
Então, a representação gráfica de $[x][y]$ é dada pelo ponto que corresponde ao pseudo-oposto de

$$L(I\Re_{x_2[y]}) \cap U(I\Re_{x_1[y]}) = I\Re_{x_2[y]} \underline{\cup} I\Re_{x_1[y]},$$

ou seja, por $(-1)(I\Re_{x_2[y]} \underline{\cup} I\Re_{x_1[y]})$.

- CASO 8: $x_2 \leq 0$ e $0 \in [y]$
  Neste caso, (x_1, x_2) pertence ao IV octante e (y_1, y_2) pertence ao II ou III octante.
  Como (x_1, x_2) pode ser re-escrito em função de seu pseudo-oposto, esta multiplicação pode ser escrita como

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (-1)(x_2, x_1)(y_1, y_2).$$

  Mas, (x_2, x_1) e (y_1, y_2) pertencem ao I octante.
  Então, a representação gráfica destes pontos é obtida da mesma forma como no CASO 2, onde $x_2 \geq 0$.
  Então, a representação gráfica de $[x][y]$ é dada pelo ponto que corresponde ao pseudo-oposto de

$$L(I\Re_{x_1[y]}) \cap U(I\Re_{x_1[y]}) = I\Re_{x_1[y]},$$

  ou seja, por $(-1)(I\Re_{x_1[y]})$.

- CASO 9: $x_2 \leq 0$ e $y_2 \leq 0$
  Neste caso, (x_1, x_2) e (y_1, y_2) pertencem ao IV octante.
  Como, estes pontos podem ser re-escritos em função de seus pesudo-opostos então esta multiplicação pode ser escrita por

$$\begin{aligned}(x_1, x_2)(y_1, y_2) &= (-1)(x_2, x_1)(-1)(y_2, y_1) \\ &= (-1)(-1)(x_2, x_1)(y_2, y_1) \\ &= (x_2, x_1)(y_2, y_1).\end{aligned}$$

  Mas (x_2, x_1) e (y_2, y_1) pertencem ao I octante.
  Então a multiplicação destes pontos é obtida da mesma forma como no CASO 1, onde $x_2 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$.
  Ou seja, a representação gráfica de $[x][y]$ é dada pelo ponto

$$L(I\Re_{x_2(-[y])}) \cap U(I\Re_{x_1(-[y])}) = I\Re_{x_2(-[y])} \underline{\cup} I\Re_{x_1(-[y])}.$$

TABELA 5.1 — Multiplicação de intervalos em termos do conjunto de cotas superiores/inferiores

CASO 1: $[x][y]$ no I octante $L(I\Re_{x_1[y]\downarrow}) \cap U(I\Re_{x_2[y]\uparrow})$ $I\Re_{x_1[y]} \underline{\cup} I\Re_{x_2[y]}$	CASO 2: $[x][y]$ no II /III octante $L(I\Re_{x_2[y]\downarrow}) \cap U(I\Re_{x_2[y]\uparrow})$ $I\Re_{x_2[y]}$
CASO 3: $[x][y]$ no IV octante $(-1)(L(I\Re_{x_1(-[y])\downarrow}) \cap U(I\Re_{x_2(-[y])\uparrow})$ $(-1)(I\Re_{x_1(-[y])} \underline{\cup} I\Re_{x_2(-[y])})$	CASO 4: $[x][y]$ no II/III octante $L(I\Re_{y_2[x]\downarrow}) \cap U(I\Re_{y_2[x]\uparrow})$ $I\Re_{y_2[x]}$
CASO 5: $[x][y]$ no II/III octante $L(I\Re_{-x_1[y]\downarrow}) \cap U(I\Re_{x_2[y]\uparrow})$ $I\Re_{-x_1[y]} \underline{\cup} I\Re_{x_2[y]}$	CASO 6: $[x][y]$ no II/III octante $(-1)(L(I\Re_{y_2[x]\downarrow}) \cap U(I\Re_{y_2[x]\uparrow}))$ $(-1)I\Re_{y_2[x]}$
CASO 7: $[x][y]$ no IV octante $(-1)(L(I\Re_{x_2[y]\downarrow}) \cap U(I\Re_{x_1[y]\uparrow}))$ $(-1)(I\Re_{x_2[y]} \underline{\cup} I\Re_{x_1[y]})$	CASO 8: $[x][y]$ no II/III octante $(-1)(L(I\Re_{x_1[y]\downarrow}) \cap U(I\Re_{x_1[y]\uparrow}))$ $(-1)I\Re_{x_1[y]}$
CASO 9: $[x][y]$ no I octante $L(I\Re_{x_2(-[y])\downarrow}) \cap U(I\Re_{x_1(-[y])\uparrow})$ $I\Re_{x_2(-[y])} \underline{\cup} I\Re_{x_1(-[y])}$	

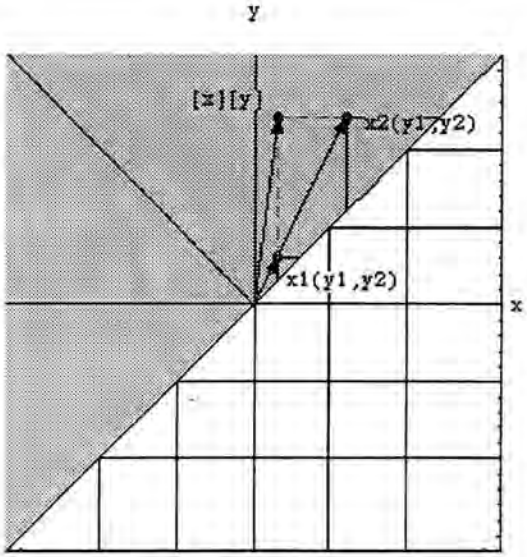


FIGURA 5.10 — Representação da multiplicação entre intervalos (caso 1)

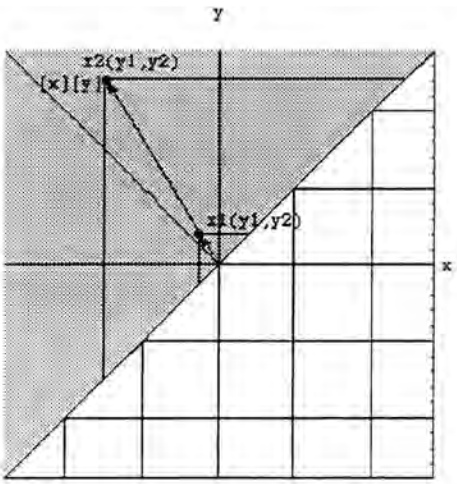


FIGURA 5.11 — Representação da multiplicação entre intervalos (caso 2)

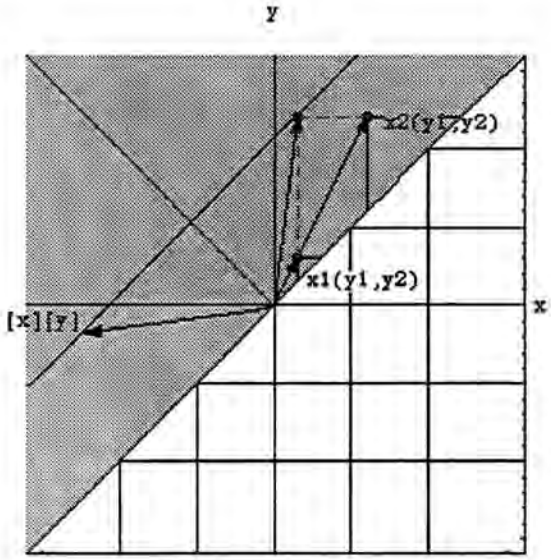


FIGURA 5.12 — Representação da multiplicação entre intervalos (caso 3)

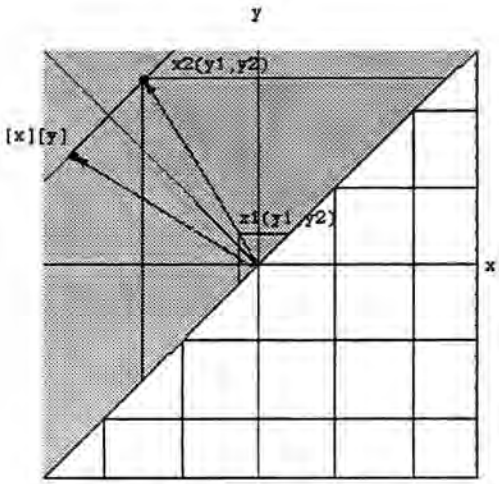


FIGURA 5.13 — Representação da multiplicação entre intervalos (caso 6)

5.4 Resumo

Neste capítulo foi apresentada a representação gráfica das operações intervalares. Esta apresentação foi baseada, fundamentalmente, no uso de número sem sinal e na dualidade da interpretação de intervalo.

Markov [MAR 98] estende a idéia de número sem sinal, utilizada nos reais, para intervalos e assim, por exemplo, o intervalo $[-3; -2]$ é escrito como $(-1)[2; 3]$.

Neste trabalho, inspirado no trabalho de Markov, utiliza-se o recurso de número sem sinal a fim de simplificar a *compreensão sobre a forma como as operações intervalares são executadas*, assim como das limitações decorrentes dessa forma.

A análise da dualidade da interpretação associada a intervalos mostrou ser fundamental para a *compreensão da estrutura das operações intervalares*, assim como das limitações decorrentes dessa estrutura. Isto é notado especialmente na representação gráfica da multiplicação de intervalos onde utiliza-se a dualidade da interpretação para associar um vetor a um conjunto.

A reunião da forma como as operações são executadas com a estrutura das operações intervalares, tornou possível a representação gráfica dessas operações e por conseguinte a sua análise visual. A partir desta análise, é possível observar a análise pessimista de erro associada à operações aritméticas e especular sobre formas alternativas de executar estas operações.

UFRGS
Instituto de Informática
Biblioteca

6 Análise visual de intervalos

Durante o desenvolvimento da representação gráfica das operações intervalares foi possível explorar visualmente o conjunto dos intervalos e assim obter um conhecimento mais aprofundado da estrutura e da forma como as operações intervalares são executadas. Disto resultou, por exemplo, a definição de operações intervalares *não usuais*.

Neste capítulo, apresenta-se estes resultados assim como discute-se a adequação e potencialidades da análise visual decorrente da representação gráfica proposta.

6.1 Ordenação do conjunto $(I\Re, \subseteq)$

Da forma como a representação gráfica de intervalos está estruturada, a representação gráfica da ordenação do conjunto $(I\Re, \subseteq)$ é obtida a partir da intersecção de regiões de inclusões referentes a pontos do plano $I\Re$, ou seja:

- $(I\Re, \subseteq)$ é reflexivo, pois
  $I\Re_{[x]} \cap I\Re_{[x]} = I\Re_{[x]}$, $I\Re_{[x]} \subseteq I\Re_{[x]}$,

- $(I\Re, \subseteq)$ é anti-simétrico, pois
  se $I\Re_{[x]} \subseteq I\Re_{[y]}$ e $I\Re_{[y]} \subseteq I\Re_{[x]}$, então $I\Re_{[x]} \cap I\Re_{[y]} = I\Re_{[x]}$ e $I\Re_{[x]} \cap I\Re_{[y]} = I\Re_{[y]}$.
  Logo, $I\Re_{[x]} = I\Re_{[y]}$.

- $(I\Re, \subseteq)$ é transitivo, pois
  se $I\Re_{[x]} \subseteq I\Re_{[y]}$ e $I\Re_{[y]} \subseteq I\Re_{[z]}$, então:
  $$\begin{aligned} I\Re_{[x]} \cap I\Re_{[z]} &= (I\Re_{[x]} \cap I\Re_{[y]}) \cap I\Re_{[z]} \\ &= I\Re_{[x]} \cap (I\Re_{[y]} \cap I\Re_{[z]}) \\ &= I\Re_{[x]} \cap I\Re_{[y]} \\ &= I\Re_{[x]}. \end{aligned}$$

Assim, a partir da intersecção de regiões de inclusão referentes a pontos do plano $I\Re$, tem-se que a representação gráfica da ordenação do conjunto $I\Re$, com relação à relação de inclusão. Isto está apresentado na Figura 6.1.

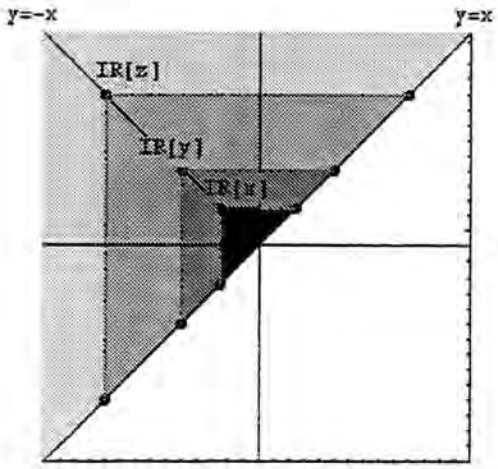


FIGURA 6.1 — Representação da ordenação do conjunto $(I\Re, \subseteq)$

6.2 Implicações da adição de um menor elemento em $(I\Re, \subseteq)$

Matematicamente, demonstra-se que $(I\Re, \subseteq)$ é um reticulado acrescentando-se um menor elemento a este conjunto. Embora este seja um procedimento válido, no contexto de intervalos ele remete para a seguinte questão:

Qual o significado da inclusão deste elemento no conjunto $I\Re$?

Teoricamente, o menor elemento que será adicionado ao conjunto $(I\Re, \subseteq)$ é representado pelo conjunto *vazio*. Este conjunto pode ser interpretado tanto como um intervalo que tem tanta informação que não serve para coisa alguma, quanto como um intervalo que não pode ser representado neste conjunto $I\Re$. Então, os candidatos naturais para o conjunto vazio são intervalos de extremos $-\infty$, ∞.

Suponha que $\emptyset = (-\infty, \infty)$. Mas isto não pode ser, pois $(-\infty, \infty)$ pertence ao plano $I\Re$ e então ele não precisa ser incluído. Além disso ele não pode representar o menor elemento do conjunto $(I\Re, \subseteq)$, pois a subregião do plano $I\Re$ associada a esse ponto representa graficamente o conjunto $\Re$. Então, o menor elemento só pode representado pelo ponto $(\infty, -\infty)$ que está associado à subregião $I\Re_{(\infty,-\infty)}$ e representa o conjunto dos pontos do plano que não admitem representação via intervalos. Então, este é o menor elemento que deve ser adicionado ao conjunto $(I\Re, \subseteq)$.

$$\overline{I\Re} = I\Re \cup (\infty, -\infty)$$

A adição deste menor elemento ao conjunto $(I\Re, \subseteq)$ implica em admitir que no conjunto $\overline{I\Re}$ existem elementos da forma $[x_1; x_2]$, onde $x_1 \geq x_2$ e que a representação gráfica de intervalos pode ser desvinculada do plano cartesiano uma vez que podemos considerar que o plano inferior à reta $y = x$ é simétrico do plano $I\Re$ e por isso ele

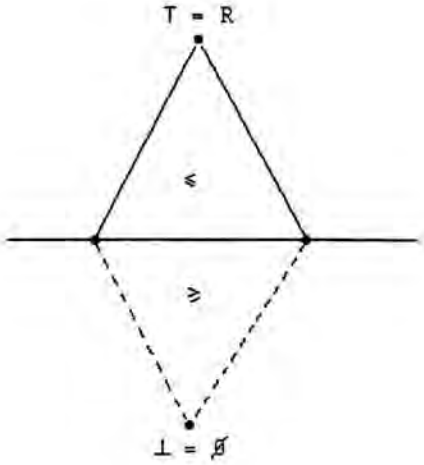


FIGURA 6.2 — Representação do conjunto $\overline{I\Re}$

representa apenas uma cópia do plano $I\Re$ com o sinal invertido (Figura 6.2).

$$I\Re_{(-\infty,\infty)} = (-1)I\Re_{(\infty,-\infty)}$$

6.3 Álgebra booleana associada a intervalos

A partir da representação gráfica do conjunto $(\overline{I\Re}, \subseteq)$ no plano $I\Re$ tem-se que para cada dois pontos deste plano, sempre existe um *Ínfimo* e um *Supremo*. Então, este conjunto representa um reticulado. As figuras 6.3 e 6.4 possibilitam constatar visualmente que este reticulado é distributivo, e a Figura 6.5 que este reticulado é também complementado. Como resultado, tem-se que o conjunto $(\overline{I\Re}, \subseteq)$ define

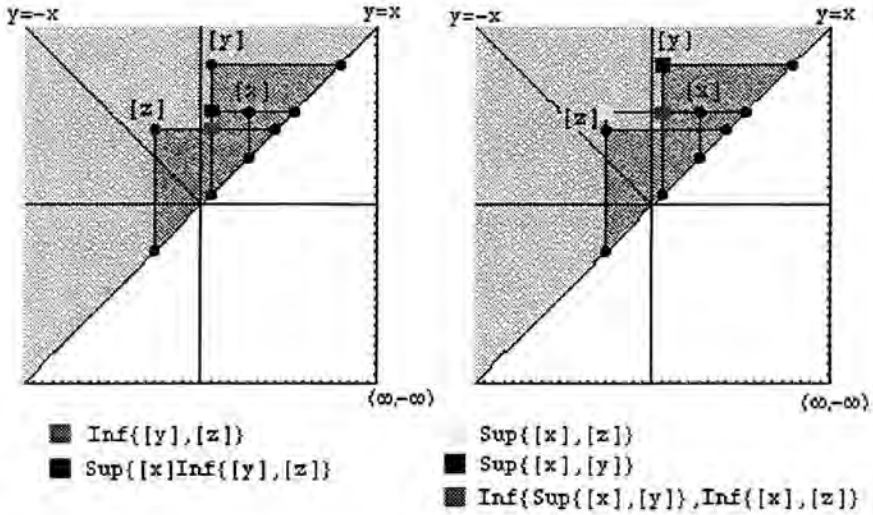


FIGURA 6.3 — Representação do reticulado distributivo

uma álgebra booleana, ou seja, $\forall [x],[y],[z] \in \overline{I\Re}$:

(1) $[x] \cup [x] = [x]$
(2) $[x] \cap [x] = [x]$
(3) $[x] \cup [y] = [y] \cup [x]$
(4) $[x] \cap [y] = [y] \cap [x]$
(5) $[x] \cup ([y] \cup [z]) = ([x] \cup [y]) \cup [z]$
(6) $[x] \cap ([y] \cap [z]) = ([x] \cap [y]) \cap [z]$
(7) $[x] \cup ([x] \cap [y]) = [x]$
(8) $[x] \cap ([x] \cup [y]) = [x]$
(9) $[x] \cup ([y] \cap [z]) = ([x] \cup [y]) \cap ([x] \cup [z])$
(10) $[x] \cap ([y] \cup [z]) = ([x] \cap [y]) \cup ([x] \cap [z])$
(11) $[x] \cup \emptyset = [x]$
(12) $[x] \cap \emptyset = \emptyset$
(13) $[x] \cup \Re = \Re$
(14) $[x] \cap \Re = [x]$
(15) $[x] \cup [x]' = \Re$
(16) $[x] \cap [x]' = \emptyset$
(17) $([x]')' = [x]$
(18) $([x] \cup [y])' = [x]' \cap [y]'$
(19) $([x] \cap [y])' = [x]' \cup [y]'$

6.4 Cálculo gráfico do valor absoluto do intervalo

Assim como foi apresentado anteriormente, um intervalo pode ser associado a um vetor e neste caso é possível calcular o valor absoluto do intervalo a partir do

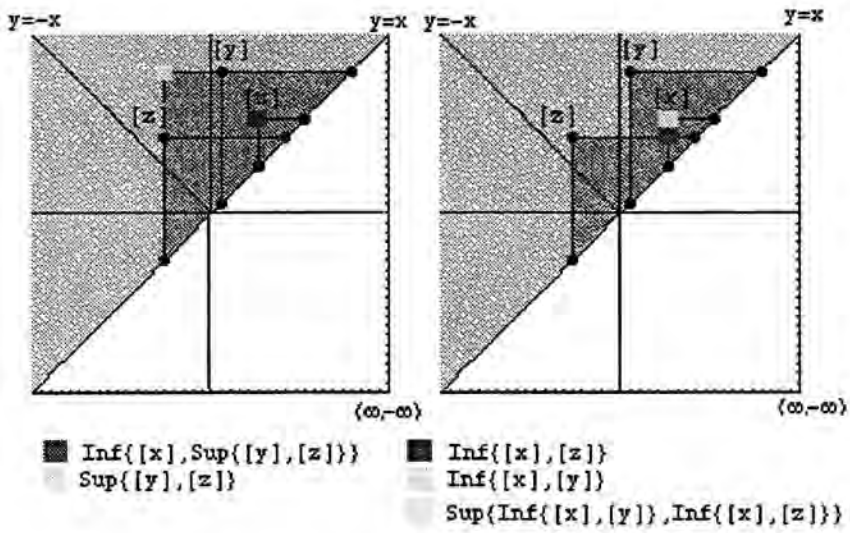


FIGURA 6.4 — Representação do reticulado distributivo

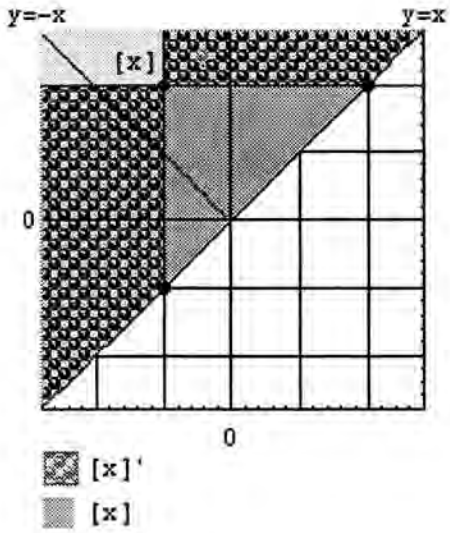


FIGURA 6.5 — Representação do reticulado complementado

ângulo formado entre a reta suporte do vetor representa o intervalo e o eixo das abcissas.

Este resultado é apresentado pelo teorema a seguir.

Teorema 6.1 : *O valor absoluto de* $[x]$ *é* "calculado graficamente" *a partir da inclinação* θ *entre a reta suporte do vetor* $\vec{x}$ *e o eixo das abcissas.*

$$|[x]| = \begin{cases} |x_2|, & se\ 45^0 < \theta < 135^0 \\ |x_1| = |x_2|, & se\ \theta \in \{45^0, 135^0, 225^0\} \\ |x_1|, & se\ 135^0 < \theta < 225^0 \end{cases}$$

Demonstração:
Por definição, $|[x]| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.
Então:

- $\theta = 45^0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow |[x]| = x_1 = |x_1| = x_2 = |x_2|$.
- $45^0 < \theta \leq 90^0 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow |[x]| = x_2 = |x_2|$.
- $90^0 < \theta < 135^0 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow |[x]| = x_2 = |x_2|$.
- $\theta = 135^0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow |[x]| = x_1 = |x_1| = x_2 = |x_2|$.
- $135^0 < \theta \leq 180^0 \Rightarrow x_2 < x_1 \Rightarrow |[x]| = x_1 = |x_1|$.
- $180^0 < \theta \leq 225^0 \Rightarrow x_2 < x_1 \Rightarrow |[x]| = x_1 = |x_1|$.
- $\theta = 225^0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow |[x]| = x_1 = |x_1| = x_2 = |x_2|$.

Assim, o "*cálculo gráfico*" intervalar é uma possibilidade de uso da representação gráfica proposta.

Independente das restrições matemáticas associadas a este tipo de cálculo, sua importância neste contexto está baseada no fato de que é possível pensar em intervalos como formas gráficas com significado, a partir das quais podem ser definidos processos construtivos baseados na geometria do plano cartesiano.

6.5 Geometria da operação entre conjuntos de intervalos

As operações aritméticas intervalares podem ser estendidas para conjuntos de intervalos e assim, $[x] * [y]$, onde $* \in \{+, -, \times, \div\}$, é interpretada como

$$A * B, \text{ onde } A, B \in I\Re.$$

A representação gráfica destas operações possibilita definir o relacionamento entre formas geométricas, ou seja, dependendo da forma geométrica do conjunto de pontos que constituem os operandos, o resultado terá uma ou outra forma.

Um exemplo deste tipo de operação é dada pela adição de conjuntos de intervalos, cujos operandos possuem a mesma forma geométrica.

Na Figura 6.6 é ilustrada uma operação deste tipo. Neste caso, a partir de um conjunto de características dos conjuntos de intervalos que constituirão os operandos é possível definir subregiões do plano $I\Re$ que representam esses operandos.

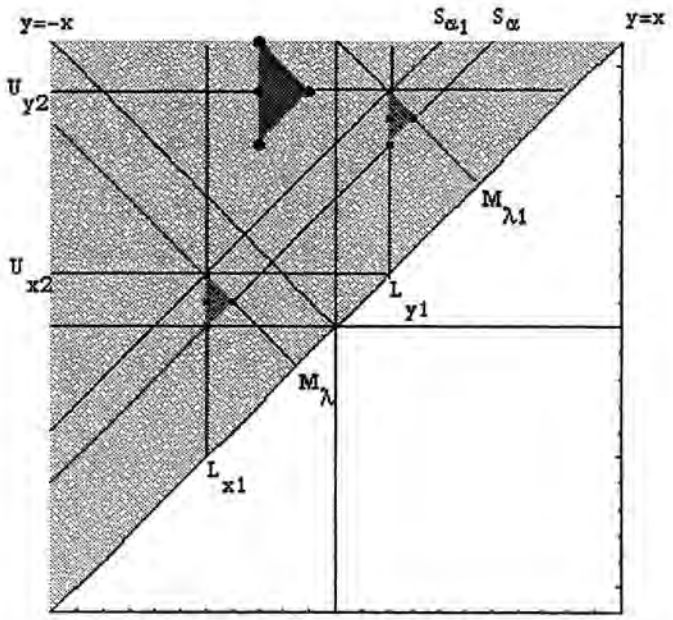


FIGURA 6.6 — Representação da operação de soma de conjuntos

Exemplo 6.1 : *Considere as subregiões que correspondem aos operandos da operação soma:*

- OPERANDO $[x]$:
  conjunto dos intervalos de mesmo extremo inferior -5 :
  $L(I\Re_{-5\downarrow}) = \{[x] \in I\Re \mid x_1 = -5\}$
  conjunto dos intervalos de mesmo extremo superior 1 :
  $U(I\Re_{1\uparrow}) = \{[x] \in I\Re \mid x_2 = 1\}$
  conjunto dos intervalos de mesmo ponto médio -2 :
  $M_{-2} = \{[x] \in I\Re \mid m([x]) = -2\}$
  conjunto dos intervalos de mesmo diâmetro 4 :
  $S_4 = \{[x] \in I\Re \mid w([x]) = 4\}$

- OPERANDO $[y]$:
  conjunto dos intervalos de mesmo extremo inferior $k-5$:
  $L(I\Re_{k-5\downarrow}) = \{[x] \in I\Re \mid x_1 = k-5\}$
  conjunto dos intervalos de mesmo extremo superior $1+k$:
  $U(I\Re_{1+k\uparrow}) = \{[x] \in I\Re \mid x_2 = 1+k\}$
  conjunto dos intervalos de mesmo ponto médio $k-2$:
  $M_{k-2} = \{[x] \in I\Re \mid m([x]) = k-2\}$
  conjunto dos intervalos de mesmo diâmetro $4+k$:
  $S_{4+k} = \{[x] \in I\Re \mid w([x]) = 4+k\}$

A soma $[x]+[y]$ *é representada por um terceira subregião cujas características podem ser deduzidas a partir de características geométricas da subregiões que rep-*

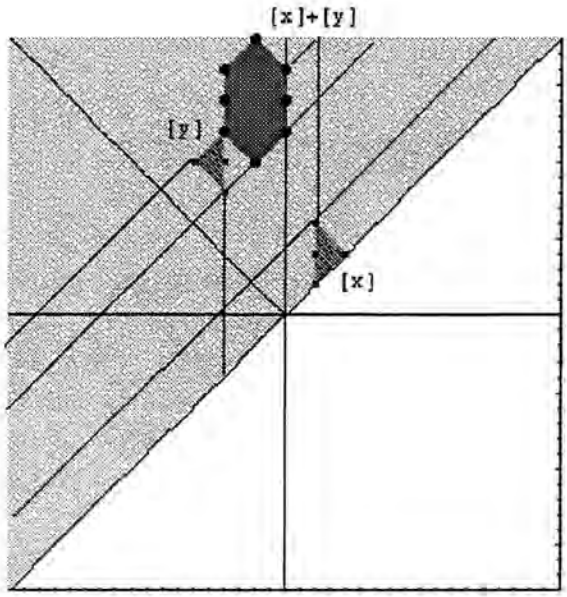


FIGURA 6.7 — Representação gráfica da operação de soma de conjuntos

resentam os operandos. Em especial, a soma $[x] + [y]$ *é denominada* soma de Minkowski.

A subregião que representa o resultado desta operação contém todos os possíveis resultados da aplicação da operação $*$ elemento-a-elemento destes conjuntos.

Quanto a forma desta subregião, em alguns casos é possível conhecer previamente a sua forma mesmo sem conhecer características geométricas das subregiões que representam os operandos. Este é o caso da soma de dois conjuntos de intervalos de forma triangular idêntica. No entanto, esta relação entre a forma dos operandos e a forma do resultado só é válida para alguns poucos casos. Em geral, os resultados são representados por formas irregulares que só podem ser deduzidas a partir de características geométricas dos operandos. Este é o caso ilustrado pela Figura 6.7.

7 Equações intervalares

Neste capítulo apresenta-se um exemplo de aplicação da análise visual de intervalos cujo objetivo é validar a nova abordagem para a representação gráfica de intervalos. O exemplo consiste na solução gráfica da equação intervalar.

A seguir, apresenta-se os passos da construção desta solução e posiciona-se esta abordagem frente às técnicas de solução existentes.

7.1 Definições iniciais

Equações intervalares são obtidas a partir de funções intervalares que, por sua vez, tomam por base extensões intervalares que são avaliadas segundo a aritmética intervalar. Sendo assim, antes de mais nada, as definições de extensão, avaliação e função intervalar devem ser apresentadas. Isto é feito a seguir.

7.1.1 Extensão intervalar

Definição 7.1 : (EXTENSÃO INTERVALAR) *Seja f uma função real de n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Uma* extensão intervalar *desta função é denotada por $\overline{f}$ e obtida a partir da substituição de todas as variáveis reais por intervalos e todas as operações reais por operações intervalares.*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto \overline{f}([x_1], [x_2], ..., [x_n], a_1, a_2, ..., a_n),$$

onde $x_i, a_i \in \Re$, $[x_i] \in I\Re$ para $i = 1..n$.

Uma função real está associada a infinitas extensões intervalares, dentre as quais uma delas é referida por *extensão intervalar natural.* Esta extensão é obtida substituindo-se diretamente na função todas as variáveis reais por intervalos e de todas as operações reais por operações intervalares.

7.1.2 Avaliação intervalar

Definição 7.2 : (AVALIAÇÃO INTERVALAR) *Seja $\overline{f}$ uma extensão intervalar de n variáveis intervalares $[x_1], [x_2], ..., [x_n]$. A avaliação intervalar desta extensão é obtida quando substituímos as variáveis por intervalos numéricos e efetuamos as operações intervalares indicadas na função.*

A imagem real de uma função e o resultado da avaliação intervalar sempre estão relacionados e esta garantia é fundamental para a aritmética intervalar. O

teorema a seguir apresenta esta propriedade e sua demonstração pode ser obtida em Moore [MOO 79].

Teorema 7.1 : [MOO 79] *Seja f uma função real e $\overline{f}$ uma extensão intervalar desta função. Se todos os argumentos $x_1, x_2, ..., x_n$ da função real pertencem ao intervalo $[x]$, então $f(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \overline{f}([x])$.*

Exemplo 7.1 : *Considere a função $f(x) = x - x^2$ e $\overline{f}_1$ a extensão intervalar natural dessa função.*
Como $\overline{f}_1([4;6]) = [-60;-10]$ e $Im(f_1, [4;6]) = [-30;-12]$,

$$Im(f, [4;6]) \subseteq Im(\overline{f}_1, [4;6]).$$

Se considerarmos o exemplo anterior e a extensão intervalar $\overline{f}_2(x) = [x](1-[x])$, tem-se que $\overline{f}_2([4;6]) = [-30;-12]$. Assim, embora $\overline{f_1}$ e $\overline{f_2}$ sejam referentes a mesma função real os resultados obtidos a partir da avaliação intervalar dessas funções não são iguais.

Esta é uma característica da avaliação intervalar, ou seja, operações algebricamente equivalentes nos reais podem não ser equivalentes em $I\Re$. No caso do exemplo supracitado, o que acontece é que $[x](1-[x]) \subset [x] - [x]^2$.

Outra característica importante que diferencia as extensões intervalares de uma função diz respeito aos limites do erro associado ao resultado obtido. No exemplo anterior, $\overline{f}_1([4;6])$ produz um resultado que tem 40 vezes o comprimento da imagem real e $\overline{f}_2([4;6])$, 28 vezes. Assim, a extensão intervalar $\overline{f}_2$ possibilita obter um resultado de melhor qualidade do que a extensão $\overline{f}_1$. Ainda,

$$Im(f, [x]) \subseteq Im(\overline{f}_1, [x]) \subseteq Im(\overline{f}_2, [x]).$$

No que se refere à representação gráfica da avaliação intervalar de funções a uma variável, tem-se que, usualmente, ela é apresentada no plano cartesiano como um retângulo (ou um conjunto de retângulos) cujos lados representam o intervalo de entrada (eixo das abcissas) e resultado da avaliação intervalar (eixo das ordenadas) (Figura 7.1).

7.1.3 Função intervalar

Definição 7.3 : (FUNÇÃO INTERVALAR) *Seja f uma função real de n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Uma função intervalar associada a esta função é denotada por F e obtida a partir da substituição de todas as variáveis reais por intervalos, de todas as constantes reais por intervalos e de todas as operações reais por operações intervalares.*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, x_1, a_2, ..., a_n) \mapsto F([x_1], [x_2], ..., [x_n], [a_1], [a_2], ..., [a_n]),$$

onde $x_i, a_i \in \Re$, $[x_i], [a_i] \in I\Re$ para $i = 1..n$.

Um exemplo de uso da função intervalar é na modelagem matemática onde as constantes do modelo são representadas por intervalos. Estes modelos são utilizados principalmente em Engenharia, onde as constantes do modelo são associadas a limites de variação (ou tolerância).

UFRGS
Instituto de Informática
Biblioteca

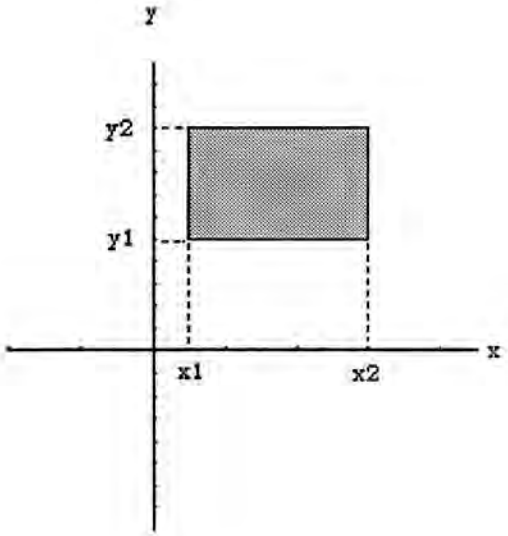


FIGURA 7.1 — Representação gráfica da avaliação intervalar

Teorema 7.2 :[MOO 79] *Seja $\overline{f}$ uma extensão intervalar de uma função real f e F uma função intervalar associada a esta mesma função. Então*

$$\overline{f}([x_1],[x_2],...,[x_n]) \subseteq F([x_1],[x_2],...,[x_n]).$$

O Teorema anterior apresenta a conexão entre o resultado obtido via avaliação da extensão intervalar e via avaliação da função intervalar (sua demonstração está em Moore [MOO 79]). Esta conexão é igualmente fundamental para a aritmética intervalar, pois ela relaciona a extensão intervalar com função intervalar.

Exemplo 7.2 : *Considere a função $f(x) = 10x - x^2$, $\overline{f}_1(x)$ como a extensão intervalar natural desta função e a função intervalar $F([x]) = [9,9;10,1][x] - [x]^2$.*
Se $[x] = [4;6]$, $Im(f,[4;6]) = [-30;-12]$, $\overline{f}_1([4;6]) = [4;44]$ e $F[4;6] = [3,6;44,6]$.
Então, $\overline{f}_1([4;6]) \subseteq F([4;6])$.

Assim como o intervalo, a função intervalar tem interpretação dual, ou seja, ela pode ser interpretada tanto como um conjunto de funções reais, quanto como uma função cujas constantes estão associadas a limites de tolerância. A primeira interpretação remete para uma família de funções reais (Figura 7.2). Neste caso, o problema é viabilizar a obtenção dos limites da região que representa o conjunto de funções de mesmo comportamento que esta função representa e só para lembrar, no início deste trabalho este problema foi utilizado como justificativa para o uso de intervalos. Por sua vez, a segunda interpretação está associada à avaliação intervalar e à propagação da incerteza da entrada associada à incerteza do modelo sobre o resultado (erro resultante da co-relação).

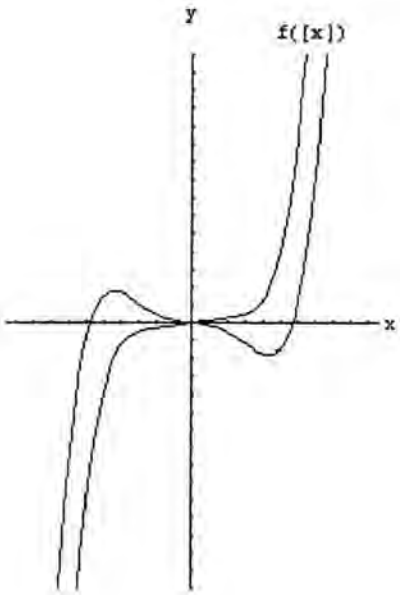


FIGURA 7.2 — Representação da função intervalar sob o ponto de vista de conjuntos

7.1.4 Equação intervalar

Definição 7.4 : *Uma sentença composta por duas expressões matemáticas definidas em termos de intervalos e operações intervalares, que é verdadeira somente para certos valores das variáveis é denominada por* equação intervalar.

Basicamente, a diferença entre uma equação intervalar e uma *identidade* é que a primeira tem que ser resolvida e a segunda tem que ser provada matematicamente, pois ela é verdadeira para qualquer que sejam os valores assumidos para as variáveis.

Tome, por exemplo, a equação $[x] + [y] = [y] + [x]$. Independente dos valores assumidos para $[x]$ e $[y]$, esta igualdade sempre é satisfeita e por isso ela constitui uma identidade. Este não é o caso da equação $[x] + [1; 4] = [3; 7]$, onde somente $[x] = [2; 3]$ satisfaz essa igualdade.

Assim, uma equação intervalar é uma função onde o objetivo é identificar os intervalos que satisfazem a igualdade. O conjunto destes intervalos é denominado por *conjunto solução* da equação intervalar.

Em geral, o conjunto solução de uma equação é constituído pelas *soluções próprias* da equação, ou seja, por aquelas soluções que satisfazem estritamente a relação de igualdade. Também é aceitável que o conjunto solução seja constituído por *soluções gerais*, ou seja, por aquelas soluções que contêm soluções próprias.

No que se refere à resolução de uma equação intervalar, as possibilidades atualmente disponíveis resumem-se à utilização de métodos intervalares.

Este é um tema de pesquisa bastante interessante, pois é extremante necessário dispor de uma outra forma, se possível mais simples, de resolver estas equações.

Neste trabalho, propõe-se o uso da representação gráfica de intervalos para obter uma estratégia geométrica de solução para equações intervalares. Esta solução está apresentada a seguir.

7.2 Solução gráfica da equação intervalar afim

A estratégia de solução apresentada a seguir utiliza propriedades da representação gráfica proposta para intervalos e do plano cartesiano a fim de deduzir a solução da equação intervalar.

7.2.1 Condição para existência de solução

Considere a equação intervalar afim

$$[a][x] + [b] = [c], \tag{7.1}$$

com $[a], [b], [c] \in I\Re$ conhecidos.

Se $w([b]) \leq w([c])$, então existe solução para esta equação, sob o ponto de vista de intervalos. Esta solução é descrita a seguir.

7.2.2 Construção da solução

Assumindo que $[a][x] = [d]$, a equação (7.1) pode ser re-escrita como

$$[d] + [b] = [c]. \tag{7.2}$$

A solução gráfica desta equação é obtida a partir da propriedade do diâmetro da soma de intervalos e da representação gráfica da operação de soma de intervalos.

A partir da propriedade que relaciona o diâmetro de operações intervalares com o diâmetro dos operandos, tem-se que o diâmetro da soma é a soma dos diâmetros. Então, como $[b], [c]$ são intervalos conhecidos, é possível calcular o diâmetro de $[d]$ da equação(7.2), ou seja:

$$w([d] + [b]) = w([d]) + w([b]) \Rightarrow w([d]) = w([c]) - w([b]).$$

Uma vez conhecido $w([d])$, é possível representar graficamente o conjunto de intervalos que contém $[d]$. Esta representação é dada pela reta $y = x + w([d])$ (Teorema 4.3).

Mas, a soma de intervalos é representada graficamente pela soma de vetores. Assim, na equação(7.2), $[d]$ é representado graficamente pelo vetor que aponta para um ponto da reta $y = x + w([d])$ e que pertence à reta que passa pelo ponto (c_1, c_2). Por construção, esta reta é paralela à reta suporte do vetor associado a $[b]$. Logo, este ponto é determinado pela intersecção entre a reta $y = x + w([d])$ e a reta $y = \frac{b_2}{b_1}x - c_1\frac{b_2}{b_1} + c_2$.

Assim, tem-se $[a][x] = [d]$, onde $[a], [d]$ são intervalos conhecidos. Então, o valor de $[x]$ é obtido a partir da representação gráfica da multiplicação de intervalos, ou seja, os vetores associados aos intervalos $[a], [d]$ são representados graficamentes

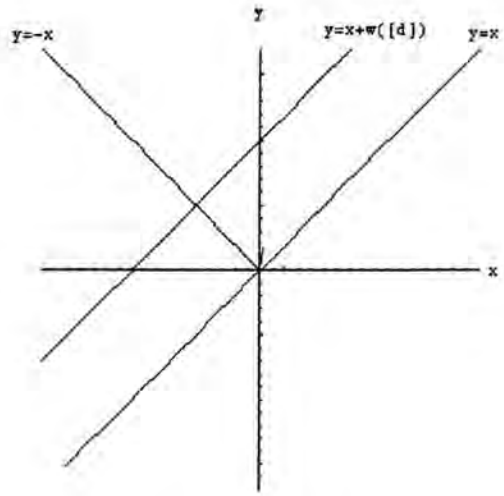


FIGURA 7.3 — Solução gráfica da equação intervalar afim (parte 1/4)

e o valor $[x]$ é obtido a partir da identificação do operado $I\Re_{[x]}$ da união convexa $I\Re_{[a]} \underline{\cup} I\Re_{[x]} = I\Re_{[d]}$.

7.2.3 Solução gráfica da equação intervalar afim

- **Rotina**: GSolve
- **Tarefa**: implementa a solução gráfica da equação intervalar afim.
- **Parâmetros**: $[a]$, $[b]$: (coeficientes da equação); e $[c]$ (termo independente).
- **Descrição**:

  1. identifica $y = x + w([d])$ (Figura 7.3);
  2. representa graficamente os vetores associados aos intervalos $[b]$ e $[c]$ (Figura 7.4);
  3. calcula o coeficiente angular α da reta suporte de $\vec{b}$:
  $$y = \frac{b_2}{b_1}x \Rightarrow \alpha\frac{b_1}{b_2};$$
  4. identifica a reta que passa no ponto (c_1, c_2) de inclinação α, com relação ao eixo das abcissas:
  $$y = \frac{b_2}{b_1}x - c_1\frac{b_2}{b_1} + c_2;$$
  5. representa graficamente esta reta (Figura 7.5);
  6. calcula o ponto de intersecção das retas
  $$y = x + w([x]), \quad y = \tfrac{b_2}{b_1}x - c_1\tfrac{b_2}{b_1} + c_2,$$

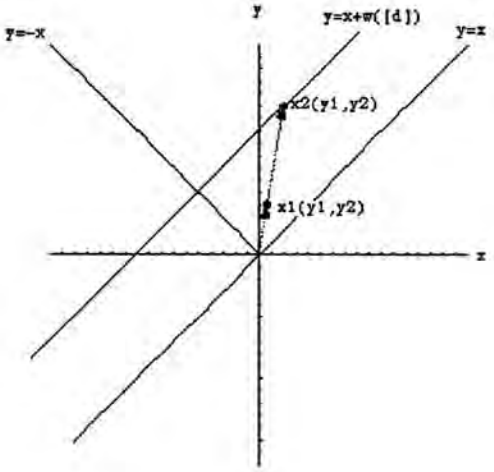


FIGURA 7.4 — Solução gráfica da equação intervalar afim (parte 2/4)

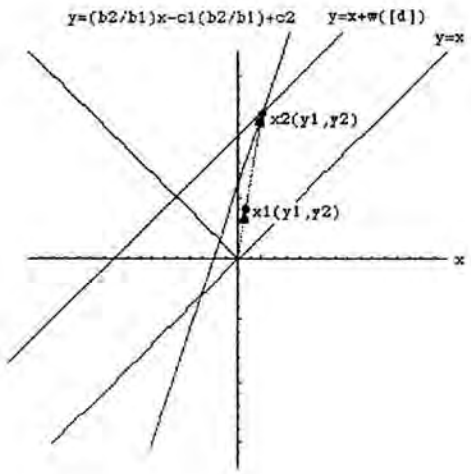


FIGURA 7.5 — Solução gráfica da equação intervalar afim (parte 3/4)

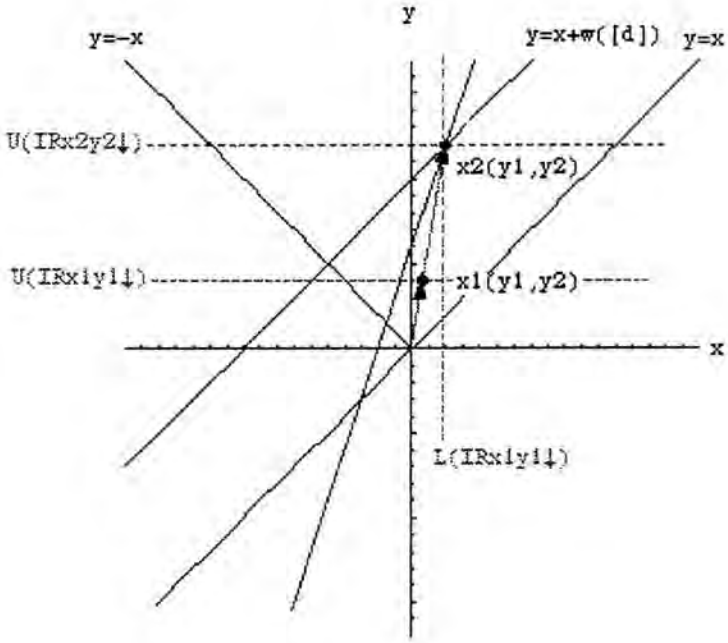


FIGURA 7.6 — Solução gráfica da equação intervalar afim (parte 4/4)

ou seja, o ponto de coordenadas

$$\left(\frac{b_1c_2 - c_1b_2 - b_1w([x])}{b_1 - b_2}, x + w([x])\right) \tag{7.3}$$

7. representa graficamente o vetor associado a $[d]$ (Figura 7.5);
8. identifica octante de ocorrência do intervalo $[a]$ e do vetor $[d]$ (Figura 7.6);
9. deduz $[x]$ a partir da união conexa $I\Re_{[a]} \underline{\cup} I\Re_{[x]} = I\Re_{[d]}$.

Exemplo 7.3 : *Considere a equação* $[1;3][x] + [1;3] = [3;15]$ *e que* $[1;3][x] = [d]$. *Então, tem-se que* $[d] + [1;3] = [3;15]$.
Como $w([d]) = w([3;15]) - w([1;3]) = 12 - 2 = 10$, *então* $y = x + 10$.
Mas a reta que passa pelo ponto $(3, 15)$ *e que possui coeficiente angular* $\alpha = \frac{3}{1}$, *é dada por*

$$y = 3x - (3)(3) + 15 \Rightarrow y = 3x + 6.$$

Então, o ponto de intersecção entre estas retas é dado por

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) &= \left(\tfrac{(1)(15)-(3)(3)-(1)(10)}{3-1}, x + 10\right) \\ &= (2, x + 10) \\ &= (2, 12).\end{aligned}$$

A partir da representação gráfica do vetor associado ao intervalo $[d] = [2;12]$, *tem-se que o ponto que corresponde a este intervalo pertence ao I octante.*

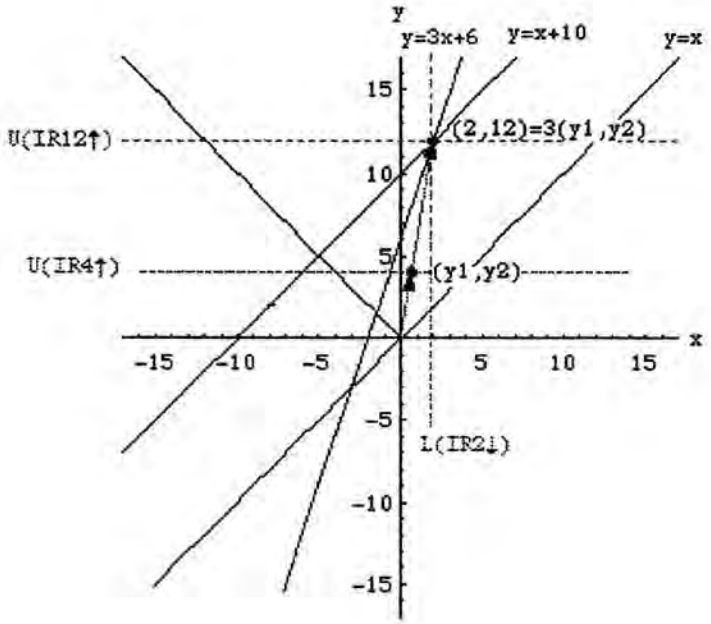


FIGURA 7.7 — Solução gráfica da equação intervalar afim

Como $[a] = [1;3]$ *também pertence ao I octante, então* $[a][x]$ *representa a multiplicação de dois intervalos do I octante.*

Neste caso, o ponto $(2,12)$ *corresponde a intersecção do conjunto de intervalos de mesmo extremo superior/inferior, ou seja:*

$$L(I\Re_{(1)[x]\downarrow}) \cap U(I\Re_{(3)[x]\uparrow}) = (2,12) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} L(I\Re_{1[x]\downarrow}) = L(I\Re_{x_1\downarrow}) = \{[x] \mid x_1 = 2\}. \\ U(I\Re_{3[x]\uparrow}) = U(I\Re_{3x_2\uparrow}) = \{[x] \mid 3x_2 = 12\}. \end{cases}$$

Então, $[x] = [2;4]$.

Este exemplo é ilustrado pela Figura 7.7.

7.3 Contribuição efetiva da solução proposta no contexto de intervalos

O procedimento GSOLVE resolve equações intervalares do tipo afim. Este algoritmo é importante na medida em que apresenta uma forma alternativa bastante simples de resolver equações intervalares deste tipo, além de ser a única que não é baseda em *métodos aproximativos* [KUL 81], [MOO 79], [NEU 90].

Em um primeiro momento, o número de passos associados a solução gráfica apresentada pode ser apontado como uma desvantagem desta solução. De fato, a importância da solução gráfica reside na possibilidade de deduzir soluções a partir da geometria do plano $I\Re$.

Tome, por exemplo, o caso da resolução de equações intervalares. Até o momento, as técnicas intervalares disponíveis baseiam-se em métodos aproximativos do tipo "*caixa preta*". Nestes métodos, são obtidas sucessivas aproximações $[x_0], [x_1], [x_2], ...$ da solução α da equação e o intervalo $[x_n]$ assumido como resultado nem sempre constitui uma solução para o problema, sob o ponto de vista da matemática. Isto porque, quando estamos utilizando métodos aproximativos, tem-se que optar por uma das seguintes interpretações de solução:

- INTERPRETAÇÃO 1:
  $[x_n]$ é o resultado procurado se $|f([x_n])| \leq \epsilon$, onde ϵ é informado *a priori*.
- INTERPRETAÇÃO 2:
  $[x_n]$ é o resultado procurada se $d([x_{n-1}], [x_n]) \leq \epsilon$.
- INTERPRETAÇÃO 3:
  $[x_n]$ é o resultado procurado se $[x_{n-1}] \cap [x_n] = \emptyset$.
- INTERPRETAÇÃO 4:
  $[x_n]$ é o resultado procurado se $w([x_n])$ é menor ou igual do que o limite de erro admitido.
- INTERPRETAÇÃO 5:
  $[x_n]$ é o resultado procurado se verificar os critérios das interpretações 1 e 2, simultaneamente.

Tem-se ainda que considerar o caso em que o resultado obtido não satisfaz a nenhuma desta interpretações. Nesta situação, a única alternativa é tomar um outro chute inicial e torcer para que tudo dê certo, pois não existe como garantir a convergência para a resposta desejada, nem como garantir que o resultado obtido está dentro dos limites de erro desejado.

É importante lembrar que nem sequer estamos considerando situações patológicas como: baixa velocidade de convergência; aumento exagerado dos limites de erro; problemas mal condicionados; etc.

Quanto a solução gráfica proposta, ela é importante não só para a solução de problemas lineares, mas também para problemas não lineares que possam ser linearizados.

Tem-se também que destacar o fato da solução gráfica ser *construída*. Isto confere à ela um caráter dinâmico, singular e de extrema importância para a exploração de intervalos. Através desta exploração é possível, por exemplo, o aprimoramento de técnicas intervalares já existentes, o desenvolvimento de novas estratégias de solução e de métodos intervalares adaptativos personalizados a problemas.

Tome, por exemplo, problemas de engenharia que são modelados matematicamente através de funções intervalares. Em geral, os coeficientes destas funções variam um certo valor fixado $\pm\epsilon$ bastante pequeno e o que se deseja é obter o resultado de menor diâmetro possível, nos casos em que existem somente variáveis positivas. Então, não existe a necessidade de utilizar um modelo genérico de resolução

e pode ser desenvolvida uma estratégia de solução particular para este problema, baseada na geometria do plano $I\Re$.

É importante perceber que esta estratégia de solução não é auto-contida e seu uso só tem sentido em conjunto com outras técnicas ou ferramentas a fim de viabilizar o uso de intervalos.

8 Conclusões

O trabalho apresentado oferece uma alternativa para a análise visual de intervalos. Esta alternativa foi obtida a partir da extensão da representação gráfica de intervalos no plano cartesiano.

O escasso material disponível sobre representação gráfica de intervalos e o fato dessa representação ser utilizada apenas para ilustrar verdades matemáticas tornou este trabalho um verdadeiro desafio.

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos sobre a análise visual de intervalos, discutem-se as limitações desta análise, assim como apresentam-se algumas possibilidades para continuação deste trabalho.

8.1 Pergunta fundamental

Assim como foi colocado anteriormente, este trabalho tem por objetivo oferecer uma alternativa para a análise visual de intervalos. Mas isto remete para a seguinte questão:

O que se quer extrair da análise visual de intervalos?

Esta foi a questão norteadora do trabalho.

A resposta para esta questão está estritamente vinculada à aplicação. Neste trabalho, o que se quer extrair é a interpretação gráfica para operações intervalares, pois a lógica dessas operações, em geral, não fica evidente e, assim, é difícil compreender o que de fato está acontecendo.

Para obter esta interpretação foi explorada visualmente a dualidade associada a intervalos (número e conjunto). De fato, utilizou-se a interpretação ternária de intervalos (número, conjunto e vetor).

8.2 Resultados obtidos

8.2.1 Representação geométrica de intervalos

Na geometria, as proposições que caracterizam a reta e o plano são chamadas de *postulados* da reta e do plano.

A representação gráfica de intervalos apresentada neste trabalho baseia-se nestes postulados, ou seja:

Postulados da reta

1. A reta é ilimitada.

UFRGS
Instituto de Informática
Biblioteca

2. Por um ponto pode-se traçar uma infinidade de retas.

3. Por dois pontos distintos do espaço passa uma única reta. Ou seja, dois pontos distintos do espaço determinam uma reta.

4. Um ponto de uma reta divide-a em duas partes chamadas semi-retas.

Postulados do plano

1. O plano é ilimitado.

2. Por uma reta pode-se traçar uma infinidade de planos.

3. Por três pontos distintos do espaço e não colineares passa um só plano. Ou seja, três pontos distintos não em linha reta determinam um plano.

4. A reta que passa por dois pontos distintos de um plano está inteiramente contida nesse plano.

5. Toda reta que pertence a um plano divide-o em duas regiões chamadas semi-planos. Esta reta chama-se *origem* dos dois semi-planos.

6. Todo plano divide o espaço em duas regiões chamadas *semi-espaço*.

Desta forma, o semi-plano $I\Re$ é determinado, assim como a intersecção, o paralelismo e a perpendicularidade de retas representam convenções que codificam mensagens sobre propriedades dos intervalos.

8.2.2 Dedução de propriedades da representação geométrica de intervalos

No capítulo 4 foram apresentadas propriedades da representação gráfica proposta. Estas propriedades foram deduzidas a partir da geometria do plano cartesiano.

Algumas delas foram utilizadas na solução geométrica da equação intervalar afim. Outras, disponibilizam resultados intermediários para a obtenção de resultados "*mais fortes*" (apresentados aqui como teoremas). Mas o que estas propriedades têm em comum é a forma extremamente simples de expressar graficamente idéias bastante abstratas.

Assim, sempre que uma nova propriedade é necessária, ela pode ser deduzida a partir da geometria do plano cartesiano.

8.2.3 Dedução de intervalos a partir de características

A representação gráfica proposta neste trabalho suporta a dedução de intervalos a partir da descrição de características, ou seja, identifica-se um conjunto de características, representa-se graficamente essas características e um intervalo ou um conjunto de intervalos é obtido.

8.2.4 Dedução de propriedades do conjunto $I\Re$ baseada na representação gráfica

Propriedades do conjunto $I\Re$ podem também ser deduzidas a partir da representação gráfica proposta. Este é o caso da propriedade:

Propriedade 8.1 : *Sejam* $[a], [b] \in I\Re$, $|[a][b]| \cap m([a][b]) = [a][b]$.

Esta propriedade é deduzida a partir do seguinte raciocínio. Considere a multiplicação $[1;2][3;4]$. A representação gráfica desta operação pode ser obtida de muitas formas. Uma delas é a partir do conjunto de intervalos de mesmo valor absoluto $D_8 = \{[x] \in I\Re \mid |[x]| = 8\}$ e do conjunto dos intervalos de mesmo ponto médio $M_{5.5} = \{[x] \in I\Re \mid m([x]) = 5.5\}$. Estes conjuntos são representados graficamente por um par de segmentos de extremos $(-8,-8),(-8,8)$ e $(8,8),(-8,8)$, e pela semi-reta $y = -x + 7$, respectivamente. Então, o ponto de intersecção entre esta semi-reta e um dos segmentos de reta representa o resultado da multiplicação.

Este é apenas um exemplo do conjunto de propriedades do conjunto $I\Re$ que podem ser disponibilizadas a partir da análise da representação gráfica proposta.

8.2.5 Dedução de algoritmos que calculam os limites do conjunto solução

Um algoritmo pode ser definido como

um procedimento constituído por um conjunto finito de regras que especificam uma seqüência finita de operações e cuja execução possibilita a solução para um problema ou uma classe de problemas.

Sendo assim, a solução da equação intervalar afim, apresentada no capítulo 7, constitui um exemplo de algoritmo que calcula os limites do conjunto solução. Este algoritmo foi construído a partir da geometria da representação gráfica de intervalos.

A possibilidade de *construir* soluções confere à representação gráfica um caráter dinâmico, singular e de extrema importância para a análise visual de intervalos.

8.2.6 Análise visual de intervalos

Em geral, representações visuais de informações numéricas são mais fáceis de entender do que tabelas, por exemplo. Isto porque a habilidade humana de compreender a partir de "*fatos concretos*" é bem mais desenvolvida do que a de compreender "*fatos abstratos*". A álgebra pura constitui um bom exemplo disto. A abstração associada às construções algébricas são mais fáceis de entender sempre que é possível utilizar como suporte uma representação visual qualquer.

A representação visual contém informação semântica que comunica uma mensagem gráfica. Convenções codificam a mensagem desta representação, a qual deve ser decodificada sempre que seja desejado extrair seu conhecimento. Então, representações visuais são formas de representar um conhecimento cujo significado depende da aplicação do processo de decodificação que as interpretam.

Segundo Freitas [FRE 94], as representações visuais podem ser classificadas segundo o tipo de conhecimento que elas transportam e segundo essa classificação a

representação visual mais adequada para o problema em questão (representação de intervalos) é obtida através de *gráficos*[1].

Sendo assim, neste trabalho o termo *análise visual* é utilizada como sinônimo de análise baseada em gráficos.

Pelo que está apresentado no capítulo 4, um intervalo pode ser associado a: segmento de reta/subregião (intervalo enquanto conjunto); ponto/vetor (intervalo enquanto número). Então, estas representações podem ser exploradas individualmente ou em conjunto e, assim, a extração da informação transportada por intervalos é realizada através da leitura complementar de propriedades do conjunto $I\Re$, sua representação gráfica e a geometria do plano.

8.2.7 Ferramenta para o ensino de computação de intervalos

O ensino de computação numérica requer, além de competência técnica, o uso de ferramentas computacionais adequadas para suportar necessidades específicas. Este ensino deve, por exemplo, possibilitar a distinção entre algoritmo e *algoritmo numérico* [2] que não é usual e nem simples de ser apresentada. Uma forma de introduzir esta discussão é implementar diversos algoritmos que executam a mesma tarefa numérica e analisar pontos específicos de sua execução como, por exemplo, ocorrência de *overflow*.

Neste ensino, o ponto central é a solução numérica de problemas, especialmente aqueles para os quais a solução analítica inexiste ou ainda não foi desenvolvida. Muitos dos métodos correntemente utilizados dependem fortemente dos conceitos de interpolação, *iteração* [3] e diferenças finitas. A iteração é a base de muitos *métodos aproximativos* da análise numérica, cuja aplicação pode ser melhor entendida através da representação gráfica.

Quando o ensino de computação numérica inclui intervalos, tem-se uma série de desdobramentos de caráter não trivial e cujo entendimento é determinante para o uso adequado de intervalos.

A representação gráfica proposta neste trabalho pode ser usada como ferramenta de apoio ao ensino de intervalos. Por exemplo, a convergência de uma seqüência de intervalos, gerada a partir de uma fórmula iterativa, pode ser facilmente verificada através da geometria de um conjunto de pontos que progressivamente estão mais próximos de um ponto de referência. Esta análise visual pode utilizar a representação gráfica da distância e do conjunto de inclusões de um intervalo.

---

[1] gráficos demonstram dados numéricos, onde dimensão e características visuais como cor, ângulo, área, orientação e inclinação são utilizadas para expressar um significado.

[2] Procedimento constituído de um conjunto finito de regras não ambíguas o qual especifica uma seqüência de operações que fornece a solução para um problema ou classe de problemas numéricos. Um algoritmo numérico produz algumas saídas, as quais representam uma solução computada para o correspondente problema numérico.

[3] Repetição sucessiva de um processo matemático, usando o resultado de um estágio como entrada para o próximo.

8.3 Limitações do trabalho

O objetivo de uma representação gráfica é facilitar a interpretação de dados numéricos.

Sendo assim, a representação gráfica apresentada aqui não é adequada para suportar processos automáticos de refinamento de resultados associados a limites de erro excessivamente grandes.

Este é o caso, por exemplo, do processo de *validação automática* baseada em intervalos. Este processo consiste da implementação de técnicas especiais que utilizam o produto escalar ótimo para a obtenção de operações de alta exatidão e da aritmética intervalar para obter a garantia de exatidão do resultado. Uma das principais críticas do uso de intervalos neste processo diz respeito ao aumento excessivo dos limites de erro dos resultados fornecidos. Assim, um recurso como o que está sendo proposto neste trabalho só contribui no aprimoramento deste processo na medida em que ele pode ser usado para a tomada de decisão sobre qual técnica intervalar será utilizada.

8.4 Prosseguimento do trabalho

A análise visual de intervalos, apresentada e discutida neste trabalho, é adequada para todo e qualquer problema que exija a análise de fatos inter-relacionados. Sendo assim, existem muitas aplicações igualmente interessantes para este tipo de análise.

Durante o desenvolvimento do trabalho surgiram algumas idéias de uso da análise visual de intervalos. Estas idéias estão listadas a seguir e constituem o conjunto de sugestões para futuras investigações:

- REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA AVALIAÇÃO INTERVALAR:
  Segundo esta nova abordagem, para a representação gráfica de um intervalo são necessárias duas dimensões. Se este mesmo raciocínio for utilizado para representar o resultado proveniente da avaliação intervalar, serão necessárias quatro dimensões para representar graficamente a avaliação intervalar.
  Tem-se então o problema de como representar a avaliação intervalar segundo esta nova abordagem de tal forma que ainda seja possível a análise visual de intervalos.
  Sendo assim, é necessário definir uma estratégia de representação em três dimensões.
  Tem-se como sugestão representar o ponto $([x],[y])$ como um par de pontos (x_1, x_2, y_1) e (x_1, x_2, y_2) e assim a avaliação intervalar é representada por um par de superfícies.
  Desta forma, é necessário definir uma estratégia de representação da avaliação intervalar que suporte igualmente a análise visual.

- ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE PARÂMETROS DA FUNÇÃO INTERVALAR:
  Análise da correlação entre a variação de um ou mais parâmetros com relação ao resultado final. Esta análise deverá ser suportada pela representação gráfica da avaliação intervalar. Se, por exemplo, for utilizada a sugestão de representar o ponto $([x],[y])$ como um par de pontos (x_1, x_2, y_1) e (x_1, x_2, y_2) e assim a

avaliação intervalar ser representada por um par de superfícies, então na malha associada a essas superfícies serão colocadas marcas que irão codificar o que realmente está acontecendo com a função.

- ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DA AVALIAÇÃO INTERVALAR EM DIFERENTES REGIÕES DO SEMI-PLANO:
  Esta análise deverá ser suportada pela representação gráfica da avaliação intervalar.
  Para a análise de comportamento da avaliação intervalar serão informadas as coordenadas de um ponto e o comportamento das superfícies associadas à avaliação intervalar será visualizado.

- VISUALIZAÇÃO DE FUNÇÕES SOB O PONTO DE VISTA DE INTERVALOS:
  Elaboração de um paralelo entre visualização de funções intervalares de uma variável e, por exemplo, funções complexas de uma variável ou funções do plano no plano.

- VISUALIZAÇÃO DA ANÁLISE DE ERRO DO PROCESSAMENTO NUMÉRICO:
  Análise da correlação entre o aumento do diâmetro do intervalo e a natureza das operações executadas.

- ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA DE MÉTODOS APROXIMATIVOS:
  Análise das condições necessárias para a convergência de seqüências de intervalos para um certo intervalo [ALE 98].

- REDEFINIÇÃO DE OPERAÇÕES INTERVALARES:
  A razão para a obtenção de intervalos de limites excessivamente grandes é a forma como as operações aritméticas estão definidas. Em especial, a definição da operação de multiplicação. A análise gráfica desta operação deve possibilitar a sua redefinição em função de operações não usuais como complemento da soma, aplicação das leis De Morgan, etc.

- EXPLORAÇÃO DA ÁLGEBRA BOOLEANA ASSOCIADA A INTERVALOS:
  Exploração do conjunto de propriedades da álgebra booleana a fim de deduzir propriedades do conjunto $\overline{I\Re}$ e da representação gráfica.

- CÁLCULO GRÁFICO:
  Deduzir fórmulas de cálculo a partir de relações de semelhança entre polígonos.

- GEOMETRIA DA OPERAÇÃO ENTRE CONJUNTOS DE INTERVALOS:
  Análise do relacionamento entre a forma geométrica da representação de conjuntos de pontos que representam operandos e a forma geomérica do resultado.

Anexo 1

Soma de vetores

Para mostrar que a soma de vetores é consistente como a definição algébrica, demonstra-se que

$$[x] + [y] = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Isto é provado no plano, da mesma forma como na soma usual de vetores.

Considere a Figura 1.1. Seja $[x] = [x_1; x_2]$ o vetor de extremo no ponto $X = (x_1, x_2)$ e $[y] = [y_1; y_2]$ o vetor de extremo no ponto $Y = (y_1, y_2)$. Pela definição, o vetor que representa $X + Y$ tem extremo no ponto Z do paralelogramo $OYZX$.

Para mostrar que $[x] + [y] = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ é suficiente mostrar que as coordenadas de z são $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$.

Então, mostra-se primeiro que a coordenada x de Z é dada por $x_1 + y_1$:

> Como os lados do triângulo OXA e YZD são paralelos, os lados OX e YZ têm igual comprimento, ou seja, $OX = YZ$. Tem-se ainda que estes triângulos são congruentes. Então, $YD = OA$. Por sua vez, como $YDCB$ é um retângulo, $BC = YD$. Além disto, $OA = x_1$ e $OB = y_1$. Então, $BC = YD = OA = a_1$. Como $OC = BC + OB$ segue que $OC = x_1 + y_1$.

Analogamente prova-se que a coordenada y de Z é dada por $x_2 + y_2$.

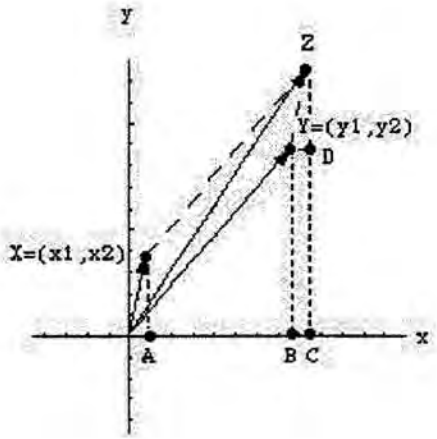


FIGURA 1.1 — Representação da soma de vetores

Bibliografia

[ALE 83] ALEFELD, G. **Introduction to Interval Computation**. New York:Academic Press, 1983.

[ALE 98] ALEFELD, G. The basis properties of interval arithmetic, its software realizations and soma applications. **Computers and Structures**, [S.l.], v.67, p.3–8, 1998.

[COM 93] COMBA, J. Affine arithmetic and its applications to computer graphics. 1993. **Proceedings...** Recife/PE:[s.n.], 1993. p.9–18.

[FRE 94] FREITAS, C. **Uma Abordagem Unificada Para a Análise Exploratória e Simulação Interativa Visual**. Porto Alegre:CPGCC/UFRGS, 1994. 128p. Tese de Doutorado.

[KAH 68] KAHAN, W. **A More Complete Interval Arithmetic**. Toronto/Canadá:Universidade de Toronto, 1968. Relatório Técnico4.

[KUL 79] KULISCH, U. **Computer Arithmetic in Theory and Practice**. New York:IBM Research Division, 1979. Relatório técnico.

[KUL 81] KULISCH, U. **Computer Arithmetic Theory and Practice**. New York:Academic Press, 1981.

[KUL 92] KULISCH, U. Numerical algorithms with automatic result verification. **Lecture Notes in Applied Mathematics**, [S.l.], v.32, p.471–502, 1992.

[MAR 98] MARKOV, S. An iteractive method for algebric solution to interval equations, 1998. (submited to Elsevier Science).

[MOO 66] MOORE, R. E. **Interval Analysis**. New Jersey:Prentice-Hall, 1966.

[MOO 79] MOORE, R. **Methods and Applications of Interval Analysis**. Philadelphia/USA:SIAM, 1979.

[NEU 90] NEUMAIER, A. **Interval Methods for System of Equations**. Cambridge:Cambridge University Press, 1990.

[NIC 75] NICKEL, K. Verbandstheoretische grunlangen der interval-mathematik. 1975. **Proceedings...** Karlsrhue/Germany:[s.n.], 1975. p.251–262.

[SUN 58] SUNAGA, T. Theory of an interval algebra and its applications to numerical analysis. **RAAG Memoirs**, [S.l.], v.2, p.547–564, 1958.

[YOU 31] YOUNG, R. The alegebra of many-valuated quantitaties. **Math. Annalen**, [S.l.], v.104, p.260–290, 1931.

Informática *UFRGS*

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

"Representação Geométrica de Intervalos"
por

Beatriz Regina Tavares Franciosi

Tese apresentada aos Senhores:

Prof. Dr. Rudnei Dias de Cunha (IM-UFRGS)

Prof. Dr. João Batista de Oliveira (PUCRS)

Laira Vieira Toscani

Profa. Dra. Laira Vieira Toscani

Prof. Dr. Luiz Henrique Figueiredo (IMPA)

Vista e permitida a impressão.
Porto Alegre, 26/04/2000.

Prof. Dr. Dalcídio Moraes Claudio,
Orientador.

UFRGS
Instituto de Informática
Biblioteca