UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

GUSTAVO QUEVEDO CARVALHO

O USO DE JOGOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM

Um Estudo de Caso em uma turma do 8º ano do Colégio Militar de Porto Alegre

Porto Alegre

2009

GUSTAVO QUEVEDO CARVALHO

O USO DE JOGOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM

Um Estudo de Caso em uma turma do 8º ano do Colégio Militar de Porto Alegre

Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática
Para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Faculdade de Matemática

Orientador: Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Porto Alegre

2009

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C331u Carvalho, Gustavo Quevedo

O uso de jogos na resolução de problemas de contagem: um estudo de caso em uma turma do 8º ano do Colégio Militar de Porto Alegre / Gustavo Quevedo Carvalho ; orientação de Eduardo Henrique de Mattos Brietzke. – Porto Alegre, 2009.

194 p. il.

1. Matemática. 2. Ensino. 3. Problemas de Contagem. 4. Jogos. 5. Teoria dos Campos Conceituais. I. Título. II. Brietzke, Henrique de Mattos.

CDU: 51.8:37

Bibliotecária responsável: Ana Paula R. Gomes Goulart CRB-10/1736

GUSTAVO QUEVEDO CARVALHO

O USO DE JOGOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM
Um Estudo de Caso em uma turma do 8º ano do Colégio Militar de Porto Alegre

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Da Universidade Federal do Rio Grande Do Sul, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada em 26 de outubro de 2009.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof.Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (Orientador-UFRGS)

____
Prof. Dra. Helena Noronha Cury (UNIFRA)

____
Prof. Dra. Marilaine Fraga Sant'Ana (UFRGS)

____
Prof. Dra. Maria Alice Gravina (UFRGS)

DEDICATÓRIA

Aos meus pais e padrinhos, que me ensinaram muito mais que os livros e que me mostraram que as lágrimas caem e secam.
O esforço é passageiro, mas a lembrança é para sempre!

AGRADECIMENTO

Minhas origens: Carlos Manoel Carvalho, Inês Maria Quevedo Carvalho, João Carlos Peres Soares, Carmem Lorena Carvalho Soares, Carlota Pugliessi e José Carvalho.

Minha companheira, amiga, incentivadora e presente em todos os momentos dessa conquista: Janaina Braga da Silveira.

Meus amigos de ontem e sempre: Carlos Zambeli Nogueira, João Alberto Cruz de Melo e Sadi Machado de Oliveira.

Michael de Souza Cruz e família.

Comando do Colégio Militar de Porto Alegre.

Major Valter Nei Pereira.

Alunos da turma 805/2008 do CMPA.

Prof. Eduardo Brietzke.

Professores do curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática.

Leia no volume máximo...

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de sequência didática em problemas de contagem, a partir de situações de jogos. Foi feito um Estudo de Caso numa turma de 8º ano do ensino fundamental do Colégio Militar de Porto Alegre e, ao longo do segundo semestre de 2008, quando da aplicação desses jogos, fizemos observações em relação às estratégias de contagem, às relações sociais, às distintas formas de organizar a resolução dos problemas que surgiam nas atividades e aos esquemas produzidos pelos alunos. Fundamentados na Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud) e na Zona de Desenvolvimento Proximal (Vygotsky), fazemos uma análise de como esses sujeitos se comportaram em diferentes contextos que abordavam o mesmo campo conceitual multiplicativo. Ao término dessa pesquisa, concluímos que o conjunto das diversas situações dos jogos ampliou o leque de representações de contagem e que o ambiente de sala de aula se tornou mais sociável, à medida que os alunos se integravam para um objetivo comum.

Palavras-chave:

Problemas de Contagem – Jogos – Ensino de Matemática – Proposta Didática – Teoria dos Campos Conceituais – Zona de Desenvolvimento Proximal

ABSTRACT

This work proposes a teaching sequence in counting problems, from situations of games. Was made a case study in a class of 8th grade of elementary school of the Military School of Porto Alegre and, during the second half of 2008, when following these games, we made observations on the counting strategies, social interaction, different ways of organizing the problems that arose in the activities and the schemes produced by the students. Based on the Theory of Conceptual Fields (Vergnaud) and Zone of Proximal Development (Vygotsky), we made an analysis of how these individuals behave in different contexts that were on the same multiplicative conceptual field. At the end of this research, we conclude that all the different situations of the game expanded the range of representations of counting and that the environment of the classroom has become more sociable, as the students were integrated into a common goal.

Keywords:
Couting Problems – Games – Mathematics Teaching – Teaching Sequence - Theory of Conceptual Fields - Zone of Proximal Development

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

Três meses após a minha formatura de graduação, tive a oportunidade de trabalhar como professor substituto no Centro Federal de Educação Tecnológica de Pelotas (CEFETRS) na unidade descentralizada de Sapucaia do Sul (UNED). No período de maio de 2003 a junho de 2004, trabalhei em todas as séries do Ensino Médio, e no Ensino Tecnológico ministrei aulas nas cadeiras de Cálculo I e Geometria Analítica e Vetorial. Em julho de 2004, fui aprovado em concurso público na mesma escola e além dessas disciplinas do Ensino Tecnológico, também administrei as cadeiras de Cálculo II, Cálculo III, e Estatística Básica.

Até 6 de fevereiro de 2006, foram várias as atividades complementares que exerci no CEFETRS. Dentro da área da Matemática, apresentei, em agosto de 2004, um projeto de criação do Laboratório de Aprendizagem de Matemática e de Física, o qual foi aprovado imediatamente, já que a escola não dispunha de ambiente apropriado para as aulas práticas de Física e de Matemática.

Mesmo sem os materiais necessários, o Laboratório foi se tornando um local de discussão tanto para os professores de Matemática e de Física quanto para os alunos. Tive que organizar um quadro horário para que todos pudessem aproveitar o espaço tanto para as aulas regulares quanto para as aulas de recuperação e plantão de dúvidas.

As atividades do Laboratório seguiram-se até 5 de fevereiro de 2006 quando, no mesmo dia, fui chamado pelo Comando do Exército do Sul para nomeação em cargo público para o Colégio Militar de Porto Alegre (CMPA). Pedi exoneração do cargo de professor do CEFETRS em 7 de fevereiro de 2006 e em 10 de fevereiro assumi o compromisso com o CMPA.

O ingresso como professor ao CMPA oportunizou um momento de reflexão acerca de novas possibilidades de ensino que adicionaria à minha bagagem profissional. Até então, o que sabia sobre a instituição era a excelente qualidade de ensino que se refletia nos índices de aprovação em diversos concursos vestibulares e concursos militares, bem como o alto nível de disciplina exigida de seus alunos. Esse quadro indica alguns dos fatores que levam a escola ao sucesso e, por conseqüência, à admiração e ao respeito da comunidade.

Todos os colégios militares do Brasil possuem a mesma organização curricular, ou seja, o aluno que, por exemplo, tiver o pai transferido de Manaus para Curitiba, não sentirá, teoricamente, dificuldades em adaptar-se nas disciplinas de sua “nova” escola.

A organização curricular de cada disciplina está registrada no documento denominado PLAEST (Plano de Estudo) para os anos do Ensino Fundamental e no PLADIS (Plano da Disciplina) para os anos do Ensino Médio. Ao início de cada período letivo, o discente prepara o PET (Plano de Execução de Trabalho) de cada bimestre baseado no PLAEST ou PLADIS e deve, ao máximo, segui-lo à risca. Algumas modificações são possíveis desde que não alterem drasticamente o plano inicial e que não venham a prejudicar o planejamento do ano posterior.

No ano de 2007, comecei a lecionar para 8º ano do Ensino Fundamental (antiga 7ª série) e, ao preparar o PET, percebi que em nenhum momento trabalhavam-se problemas de contagem. Curioso, pesquisei os demais PLAESTs e identifiquei que apenas no 6º ano se fazia uma abordagem sobre o assunto. Nos demais anos do Ensino Fundamental, nada encontrei que fizesse referência sobre problemas de contagem ou princípio multiplicativo.

Assim, refleti sobre a possibilidade de elaborar uma sequência de ensino para o 8º ano que abordasse problemas de contagem e que fosse desenvolvida a partir de jogos previamente selecionados. Retomei os PLAESTs do 6º ano para verificar como são abordados os problemas de contagem.

O primeiro contato que o aluno do CMPA tem com problemas dessa natureza se dá no 6º ano do Ensino Fundamental quando é abordado o conjunto dos números naturais e suas operações. O quadro 1 apresenta uma parte do PLAEST do 6º ano.

UNIDADE DIDÁTICA III – O CONJUNTO "N"		**CARGA HORÁRIA: 20 HORAS**
A S S U N T O S	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**	**NR DE SESSÕES**
1. O Conjunto "N".	a. Identificar o conjunto dos números naturais (N). b. Identificar antecessor e sucessor de um número natural. c. Comparar dois ou mais números naturais, segundo a relação de ordem.	02
2. Operações em "N".	a. Efetuar corretamente a adição b. Reconhecer numa adição as parcelas e as somas. c. Aplicar as propriedades da adição. d. Efetuar corretamente a subtração e. Reconhecer numa subtração o minuendo, o subtraendo e a diferença. f. Aplicar a relação fundamental da subtração. g. Resolver exercícios. h. Associar a multiplicação a uma adição de parcelas iguais. i. Reconhecer numa multiplicação os fatores e o produto. j. Aplicar as propriedades da multiplicação. l. Resolver exercícios. m. Efetuar corretamente a divisão. n. Reconhecer numa divisão o dividendo, o divisor, o quociente e o resto. o. Estabelecer a relação fundamental da divisão. p. Associar a potenciação a situações que representam multiplicações de fatores iguais. q. Empregar corretamente a terminologia: base, expoente e potência. r. Associar a radiciação à operação inversa da potenciação. s. Empregar corretamente a terminologia radicando, índice do radical e raiz. t. Efetuar a radiciação, priorizando a raiz quadrada. u. Resolver exercícios.	18

Quadro 1: PLAEST 6º ano - APROVADO PELO ADITAMENTO DEPA AO BOLETIM INTR/DEP NR 074, DE 27 DE SETEMBRO DE 2001.

Entende-se por "número de sessões" o total de horas-aula previstas para determinada unidade. O tempo da hora-aula é de 45 minutos, o que vale um período ou tempo. Ao trabalhar esses tópicos, o professor da série deve levar em conta as instruções metodológicas, segundo o quadro 2:

UNIDADE DIDÁTICA III - O CONJUNTO "N"	CARGA HORÁRIA: 20 HORAS
INSTRUÇÕES METODOLÓGICAS a. Despertar nos alunos a automatização de regras e operações com números naturais, por meio de jogos simples. b. Utilizar outras formas, como o quadrado mágico. c. Trabalhar com a estimativa do resultado das operações, o que contribui para a formação do senso numérico. Realizar com freqüência o uso do cálculo mental. d. Resolver problemas utilizando o principio fundamental da contagem. e. Incentivar a prática de trabalhos em grupo.	
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS Livro (s) Texto (s) 1) Adotado para o discente Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga. MATEMÁTICA, Idéias e Desafias, 10ª Edição, Revisada e atualizada 1ª Tiragem, Editora Saraiva. 2) Sugerido para o docente IEZZI, Gelson e outros. MATEMÁTICA E REALIDADE. 5ª série. Ed. Atual. BIANCHINI, Edwaldo. MATEMÁTICA. 5ª série. Ed. Moderna. GIOVANNI, José Ruy e outro. MATEMÁTICA PENSAR E DESCOBRIR. 5ª série. Ed. FTD. RAMOS, Luiza Faraco. O SEGREDO DOS NÚMEROS. Ed. Ática.	

Quadro 2: PLAEST 6º ano - APROVADO PELO ADITAMENTO DEPA AO BOLETIM INTR/DEP NR 074, DE 27 DE SETEMBRO DE 2001.

Vê-se que uma das instruções metodológicas propõe trabalhar a operação multiplicação com problemas em que seja necessário o uso do princípio fundamental da contagem, já incentivando o aluno a pensar sobre questões dessa natureza.

O estudo de problemas de contagem fica restrito a essa unidade, na qual o aluno resolve questões simples e desenha, num primeiro momento, os dados iniciais da situação ou faz esquemas de fácil compreensão e, posteriormente, usa a operação multiplicação para o princípio fundamental da contagem.

Essa abordagem fica limitada a esse ano dentro do ensino fundamental. Nos anos seguintes não se faz menção sobre o tema e tampouco a problemas de contagem.

Somente no 2º ano do Ensino Médio os alunos voltam a trabalhar com o princípio multiplicativo, com a análise combinatória e com todos os outros tipos de contextos como arranjos simples, combinação simples, permutação simples e permutação com repetição. Depois de muito tempo, os alunos encontram dificuldade na interpretação e na resolução de problemas desse tipo.

Nosso trabalho apresenta uma proposta de sequência didática no estudo de problemas de contagem que pode ser desenvolvida em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental do CMPA com o uso de jogos. Nossa intenção é propor uma variedade de problemas que envolvam contagem e que tenham relação direta com as diversas situações dos jogos.

A diversidade de situações é defendida por Vergnaud(1993) que propõe o estudo da estrutura multiplicativa e problemas diversos em função da sua resolução ou nível de abstração. O mesmo autor, no que diz respeito às estruturas multiplicativas, estabelece quatro classes: a comparação multiplicativa, a proporcionalidade simples, a proporcionalidade simples composta e a proporcionalidade dupla. Nesta última é que focamos nossa pesquisa.

Os problemas de proporcionalidade dupla são aqueles nos quais intervêm dois ou mais domínios de grandezas independentes. Essas grandezas podem ser discretas ou contínuas. Um exemplo de problema dessa espécie é: Para sair à noite, Paula tem 4 blusas de cores diferentes assim como 8 calças distintas. De quantas maneiras Paula poderá se vestir combinando uma calça e uma blusa?

A figura a seguir mostra um esquema que, segundo Vergnaud (1997), representa a classe de proporcionalidade dupla no campo conceitual multiplicativo e muitas vezes utilizado na resolução de problemas semelhantes ao citado anteriormente.

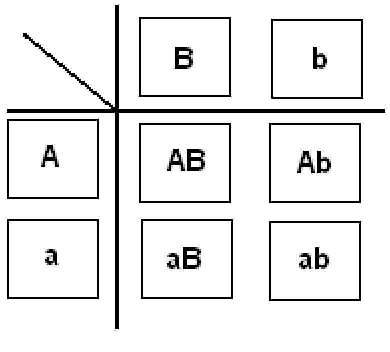


Figura 1: Esquema de proporcionalidade dupla

Nesse sentido, nossa proposição é a de provocar os alunos dessa turma do 8º ano do Ensino Fundamental do CMPA em situações de combinatória que os motivem a pensar organizadamente, utilizando tabelas de dupla entrada, esquemas de flechas e, por fim, o princípio multiplicativo, não se restringindo apenas a problemas meramente corriqueiros identificados em livros didáticos.

O uso de jogos foi uma maneira de tratar do assunto de uma forma atraente e interessante. Para que houvesse um retorno por parte dos alunos, era necessário que os mesmos estivessem motivados e integrados com as diversas situações propostas.

O uso de jogos também propicia uma integração entre os estudantes, bem como a prática da socialização, da cooperação e da formação/resgate de atitudes. Acreditamos que a aproximação entre jogos e problemas de contagem possa vir a contribuir em muito na ampliação do conjunto de conceitos do campo multiplicativo, dado que possibilitam ao aluno prever resultados e comparar hipóteses.

Associa-se a estas colocações, as de Borin (2004), a qual defende que a atividade de jogar desempenha papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, dedutivo e indutivo, da linguagem, da criatividade, da atenção e da concentração. Habilidades estas, essenciais para o aprendizado em Matemática.

Assim, visto que os alunos encontram barreiras cognitivas ao estudar problemas de cunho combinatório, no 2º ano do Ensino Médio, nos dispomos a responder a seguinte questão, eixo gerador deste trabalho: o uso de jogos pode favorecer melhor compreensão de problemas de contagem para alunos de uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental do CMPA?

Essa pesquisa é fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o que dá ao professor a responsabilidade de propor distintas situações para construção de um campo de conceitos; e na Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky (1991) que afirma que:

> [...] o aprendizado desperta vários processos internos de desenvolvimento que são capazes de operar somente quando a criança interage com pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com seus companheiros.

1.1 OBJETIVOS

Temos, então, como objetivos desse trabalho:

- Propor uma sequência didática que apresente resposta positiva quanto à ampliação do campo conceitual multiplicativo, especificamente aos problemas de contagem;
- A partir de diversas situações dos jogos, desenvolver nos alunos a capacidade de organizar estratégias de contagem e organização na resolução dos problemas;
- A partir da atividade coletiva, promover maior socialização entre os membros da turma, bem como o resgate de valores e a formação de atitudes positivas para o bem comum.

1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O segundo capítulo é dedicado aos referenciais teóricos que fundamentam a pesquisa: Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud) e Zona de Desenvolvimento Proximal (Vygotsky). Também nesse capítulo, há uma breve revisão de literatura referente a diversos trabalhos realizados nessa área de pesquisa, tendo como foco o uso de jogos e análise combinatória. Por fim, relatamos a importância de se recorrer a jogos nas aulas de matemática.

No terceiro capítulo, explicamos a metodologia a ser utilizada descrevendo os sujeitos e o ambiente onde será realizada a pesquisa. Concluímos o capítulo explicando como foi feita a coleta de dados.

No quarto capítulo apresentamos os jogos: suas origens, material a ser utilizado e as regras.

O quinto capítulo destina-se a apresentação da proposta de sequência didática concebida por nós e executada na turma do 8º ano do Ensino Fundamental do CMPA.

O sexto capítulo contém a análise dos dados levantados ao longo das atividades. Além dessa análise, procuramos avaliar a proposta da sequência didática e dos jogos, comparando as opiniões dos jogadores bem como as diferentes formas de resolução.

No sétimo capítulo, fazemos o fechamento das ideias apresentadas ao longo do trabalho convergindo para as considerações finais. Refletimos sobre os conceitos construídos, os esquemas utilizados pelos alunos e sua mudança de postura ao trabalharem de forma cooperativa. Terminamos as considerações pensando maduramente na possibilidade em dar continuidade ao trabalho reajustando alguns pontos de tal modo que este contribua, efetivamente, não só no estudo de contagem para o 8º ano do Ensino Fundamental do CMPA, mas também, aos demais anos da educação básica da instituição.

Complementam a estrutura dessa dissertação as Referências, os Apêndices e os Anexos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Para este trabalho, teremos como pressupostos teóricos os fundamentos da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud e a Zona de Desenvolvimento Proximal de Lev Semenovich Vygotsky.

2.1 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE GERARD VERGNAUD

O próprio Vergnaud define a Teoria dos Campos Conceituais como uma teoria cognitivista que visa a fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, notadamente das que relevam das ciências e das técnicas.

Vergnaud toma como premissa que o conhecimento está organizado em campos conceituais, cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo do tempo, da experiência, maturidade e aprendizagem (MOREIRA, 1996, 2002). Assim, um estudante que queira aprender um conceito, precisa de tempo e situações diversas que possam dar significado a esse conceito.

O ponto fundamental da cognição, segundo Vergnaud, é o processo de conceitualização do real. Inserindo o sujeito em uma nova situação e analisando suas reações, é possível compreender melhor sua evolução em seu tempo, à medida que aprende, e repensar planejamentos de intervenção didática focados nos conteúdos que estão sendo ou serão estudados.

O estudante, quando confrontado com uma nova situação, usa conhecimento desenvolvido por uma experiência anterior e tenta adaptá-lo a esta nova situação. De forma geral, o conhecimento se dá por meio de problemas com os quais o aprendiz já possui alguma familiaridade.

É necessário que o professor seja um interlocutor das reações comportamentais do aluno. Vergnaud(1993) é enfático ao afirmar que é papel do professor identificar quais conhecimentos seus alunos têm, explicitamente, e quais os que eles usam corretamente, mas não os desenvolveu a ponto de serem explícitos.

Para isso, é de fundamental importância a comunicação. A linguagem exerce um papel importante para que o estudante amplie evolutivamente seu domínio num campo conceitual. Através dessa, professor e aluno se manifestam adequadamente, a ponto de o professor identificar equívocos do estudante ao longo do processo, bem como corrigi-los.

Assim, torna-se necessário promover atividades que estimulem e impliquem a comunicação oral e escrita, levando o aluno a verbalizar os seus raciocínios, a explicar, a discutir, a confrontar processos e resultados (ZUCHI, 2004).

Na seção seguinte, serão apresentados os componentes fundamentais da Teoria dos Campos Conceituais propostas por Vergnaud.

2.1.1 A noção de Campo Conceitual

Vergnaud(1991) define campo conceitual como um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição.

Ele considera o campo conceitual como uma unidade de estudo para dar sentido às dificuldades observadas na conceitualização do real. Para isso, consideremos três argumentos dos quais Vergnaud considerou ao conceito de campo conceitual (MOREIRA, 2002):

1. um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações;
2. uma situação não se analisa com um só conceito e
3. todos os aspectos de uma situação são processos que se estendem ao longo dos anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes.

Como exemplo, tomo o campo conceitual das estruturas multiplicativas abordadas nesta pesquisa de investigação. Neste campo há vários conceitos matemáticos envolvidos.

Entretanto, no que se refere a esta pesquisa, estão envolvidos, de forma geral, problemas onde são necessárias estratégias de contagem e as operações multiplicação e divisão ou uma combinação dessas.

Ampliando os conceitos matemáticos envolvidos numa situação que constituem o campo conceitual das estruturas multiplicativas, podemos citar, entre outras, proporcionalidade, fração, razão, taxas e função linear.

2.1.2 A noção de Conceito

Vergnaud(1998) define conceito como uma terna de conjuntos: (S,I,R). O primeiro conjunto – de situações – está relacionado aos processos cognitivos e às respostas do sujeito frente às situações com as quais é confrontado (DA SILVA, 2008). São estas que dão sentido ao conceito.

O segundo conjunto – de invariantes operatórios – representa objetos, propriedades e relações sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto. São as estratégias que o sujeito utiliza diante de uma situação e que variam de acordo com os conhecimentos prévios que possui. Os invariantes operatórios designam-se pelas expressões “conceito-em-ação” e “teorema-em-ação”. Teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira sobre o real. Conceito-em-ação é um objeto, uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante (MOREIRA, 2002).

O terceiro conjunto - de representações simbólicas ou significantes – pode ser usado para indicar e representar esses invariantes por linguagem natural, gráficos, diagramas, tabelas, sentenças formais, etc. Consequentemente, essas representações simbólicas ou significantes podem representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Apesar de que são as situações que dão sentido aos conceitos, este sentido não está nelas. Na verdade, são os esquemas, outra palavra-chave da teoria de Vergnaud, que uma situação ou representação evoca no sujeito que constitui o sentido dessa situação ou representação.

Vergnaud (1998) chama de esquema a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações. Segundo ele, são nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória.

Durante o desenvolvimento de alguma atividade, os esquemas se transformam e são substituídos dando lugar a novas relações e esquemas. Graças à experiência sobre as situações, o estudante apreende formas mais complexas e eficazes de representações. Sendo eficaz o esquema, o aluno é capaz de simular e antecipar resultados, pondo em jogo seus conhecimentos acerca de conceitos e esquemas que mediam o entendimento e a solução de um dado problema.

Os esquemas se referem, como dito anteriormente, a uma classe de situações. Na análise de resultados desta pesquisa de investigação, observaremos a sucessiva utilização de vários esquemas que podem chocar-se ao longo das situações propostas ou serem levados a uma acomodação, combinação ou recombinação. Em síntese, esquema é a forma como o sujeito estrutura a atividade e que contém conhecimentos-em-ação implícitos.

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud tem forte base piagetiana, dado que Vergnaud foi discípulo de Piaget. Por outro lado, esta teoria tem influência vygotskyana, pois considera o professor como mediador no processo que caracteriza o evolutivo domínio de um campo conceitual de um estudante. A tarefa do professor resume-se em desenvolver um leque de esquemas e representações (significantes).

Percebe-se uma influência vygotskyana na teoria de Vergnaud na importância atribuída à interação social, à linguagem e a simbolização. No caso dos sujeitos desta pesquisa de investigação, o professor tem a difícil tarefa de oferecer atividades para que desenvolvam seus esquemas na zona de desenvolvimento proximal, dado que os ambientes que se encontram, na maioria dos casos, os levam à competitividade e ao individualismo.

2.2 A ZONA DE DESENVOLVIMENTO PROXIMAL DE VYGOTSKY

Na perspectiva vygotskyana, a constituição das funções complexas do pensamento é veiculada pelas trocas sociais, e nesta interação, o fator de maior peso é a linguagem, ou seja, a comunicação entre os homens (PALANGANA, 2001).

Uma zona de desenvolvimento proximal é a distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial. Vygotsky define como nível de desenvolvimento real aquele determinado pela solução de problemas, independente da ajuda alheia.

O mesmo autor entende que as diferenças quanto à capacidade de desenvolvimento potencial das crianças – definido pelos problemas que a criança consegue resolver com o auxílio de pessoas mais experientes – devem-se, em grande parte, às diferenças qualitativas no ambiente social em que vivem. O ambiente que possui uma diversidade de condições sociais promove aprendizagens diversas que, por sua vez, ativam diferentes processos de desenvolvimento.

No ambiente onde foi feita esta pesquisa, é necessário fazer jus às idéias de Vygotsky, que ressalta que muito embora a aprendizagem bem organizada gere desenvolvimento, esses dois processos não são sinônimos.

As idéias de Vygotsky, principalmente no que dizem respeito às relações interacionais, sejam com o sujeito, com o professor, com as regras, ou com seu ambiente, serão abordadas no oportuno momento em que se verifica um progresso na mudança dos esquemas dos alunos frente às respostas e reações destes nas atividades propostas. Como já citado aqui, o professor será de essencial consideração no que for referente às intervenções, bem como um colaborador para o sucesso dessa pesquisa.

2.3 REVISÃO DE LITERATURA

Nesta revisão de literatura, apresentamos livros, teses, dissertações, artigos de revistas especializadas e artigos disponíveis na internet que tratam de jogos e ensino de matemática, especificamente, aqueles sobre problemas de contagem e análise combinatória.

Hoje em dia, em época de reforma de ensino, espera-se que o professor de matemática ensine de uma forma atraente e divertida, que chame a atenção do aluno. Já faz algum tempo que o professor carrega responsabilidades além daquelas que lhe foram atribuídas no seu curso de licenciatura.

Assim, o que vemos é uma grande quantidade de trabalhos que vem a suprir partes dessas necessidades do aluno, visando à melhoria de aprendizagem em sala de aula.

Na dissertação “Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental”(ESTEVES, 2001),o principal objetivo foi estudar a aquisição e o desenvolvimento dos primeiros conceitos de análise combinatória em adolescentes de 14 anos de idade, cursando a última série do Ensino Fundamental. Foi construída uma sequência de ensino fundamentada em teorias psicológicas e educacionais que partem de situações-problemas através da contagem direta.

Dois grupos, um experimental e outro de referência submeteram-se a um pré-teste antes de serem introduzidos a esse novo conceito, para, logo após, estudarem o conceito de análise combinatória, segundo duas abordagens distintas. O grupo de referência era uma turma do 2º ano do Ensino Médio e esta seguiu a abordagem tradicional apresentada por livros didáticos e o grupo experimental consistiu uma turma da 8ª série do Ensino Fundamental que seguiu uma abordagem (sequência de ensino) elaborada pela autora.

Aplicados os pós-testes, os resultados mostraram que os alunos da 8ª série apresentaram dificuldade em resolver esses problemas. A autora elenca como causas do fracasso, a confusão sobre a relevância da ordem, falta de organização para enumerar os dados sistematicamente, dúvidas na identificação da operação aritmética equivalente e interpretação incorreta do problema, quando este apresenta mais de uma etapa.

Em outra dissertação, “As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental"(COSTA,2003),o objetivo da pesquisa é estudar e analisar os instrumentos disponíveis para o professor de matemática ensinar análise combinatória no ensino fundamental por processo de modelagem.

A pesquisa foi desenvolvida junto aos professores do ensino fundamental e médio da rede pública de ensino do estado de São Paulo, participantes do projeto de formação continuada pelo convênio PUC-SP/SEE. Foram objetos de análise os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de matemática do ensino fundamental, a proposta curricular para o ensino de matemática do estado de São Paulo -1º grau – e duas coleções de livros didáticos adotados por professores da rede pública naquele ano.

A análise dos resultados seguiu uma perspectiva qualitativa e pode-se constatar dificuldades de estabelecer um procedimento sistemático, justificar respostas, não uso ou pouco uso de representações e dificuldades para reconhecer, na formação dos grupos, se a ordem dos mesmos era relevante ou não.

Em “Jogo de regras e construção de possíveis: análise de duas situações de intervenção psicopedagógica”(PIANTAVINI, 1999) há uma investigação das relações entre o jogo de regras Senha e a construção de possíveis[1], no contexto de duas

[1] A autora chama de *possíveis* aos tipos de conceitos que podem ser formados a partir do jogo Senha.

intervenções psicopedagógicas. Uma limitada à estrutura do jogo e outra acrescida de situações problematizadoras explícitas.

A fim de proceder a uma análise comparativa, dois grupos experimentais foram constituídos com 16 sujeitos cada um. Estes pertenciam às classes de 1ª a 4ª série do Ensino Fundamental e foram divididos aleatoriamente.

No que se refere ao grupo que sofreu uma intervenção do jogo acrescida de situações problematizadoras explícitas, houve a apresentação de perguntas alusivas a uma organização de contagem de elementos, pois estas eram de natureza combinatória.

Embasado na teoria epistemológica de Piaget, os resultados obtidos nos pós-testes, demonstraram que a intervenção baseada em problematizações foi mais eficaz em desencadear nos sujeitos evoluções e construções mais efetivas dos possíveis, mediante a análise dos próprios meios empregados no jogo Senha. Os dados da pesquisa afirmam a importância do jogo de regras em um contexto educativo e psicopedagógico, como desencadeador de reflexão nos sujeitos, proporcionando construções significativas do ponto de vista cognitivo.

No trabalho de mestrado intitulado “As possibilidades de um Ensino de Análise Combinatória sob uma Abordagem Alternativa” (STURM,1999), o foco de investigação foi nos procedimentos adotados pelo professor e pelos alunos de uma turma de 2º ano de ensino médio perante uma proposta alternativa de análise combinatória.

O autor reteve-se a apresentar problemas do assunto em questão e suas resoluções mediante o pensamento combinatório, fugindo da ênfase e memorização de fórmulas. Fazendo uso de uma análise qualitativa, o autor utilizou um diário no qual anotava com máximo detalhes o que ocorria durante as aulas.

Para essa análise, foram selecionados dois episódios: o primeiro, um exercício de introdução do assunto à classe que valeu debates e discussões durante e após as aulas; o segundo, uma discussão sobre a relação entre arranjo e combinação e de como alguns textos abordavam esse assunto.

Nos resultados finais, o autor identificou que os alunos encontraram muitas dificuldades na resolução dos problemas, principalmente no que diz respeito à ordem e repetição. O autor finalizou seu trabalho chamando a atenção de que o princípio multiplicativo foi bem utilizado e propõe aos leitores de sua pesquisa, uma abordagem diferenciada de problemas, fugindo daqueles considerados como tradicionais.

Na tese de doutorado "O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula" (GRANDO,2000), o interesse da pesquisa é sobre o jogo pedagógico, especificamente, o jogo pedagógico no ensino da Matemática. A investigação surgiu da necessidade de compreensão dos aspectos cognitivos envolvidos na utilização de jogos na aprendizagem da Matemática.

Nessa pesquisa, a autora investiga os processos gerados na construção e/ou resgate de habilidades matemáticas a partir da intervenção de dois jogos (Nim e Contig60®)em 8 alunos da 6ª série do Ensino Fundamental.

No que diz respeito ao jogo Contig60®, na análise dos dados (qualitativa) foram propostas questões acerca de possibilidades das faces dos dados e previsão/antecipação de jogadas, sendo que esta abordagem não foi única. Os resultados indicaram que houve um processo desencadeador na construção dos procedimentos e conceitos matemáticos, pelos sujeitos, em situações de jogo.

Sobre jogos e problemas de contagem, verificam-se poucos artigos nas revistas especializadas. Entretanto, o pouco material encontrado apresenta boa qualidade de intervenções pedagógicas acerca do assunto.

Em Educação Matemática em Revista – RS, na sua edição de dezembro de 2003, há um artigo intitulado "A importância dos jogos e curiosidades matemáticas no processo Ensino-Aprendizagem" (GROENWALD, 2003). Neste artigo, a autora abordou ideias para que os professores de matemática utilizem jogos e curiosidades matemáticas como forma de conceituar e comunicar conhecimentos.

A autora apresentou um exemplo de jogo (O Salto da Rã) que consiste na troca de posição de dois grupos de fichas, dispostas sobre um tabuleiro. O objetivo do jogo consiste em trocar as fichas de lugar; as fichas brancas devem ocupar o lugar das fichas pretas e vice-versa, levando em conta as regras do jogo. Na figura 2, temos o exemplo de uma situação do jogo com três fichas, sendo duas pretas e uma branca.

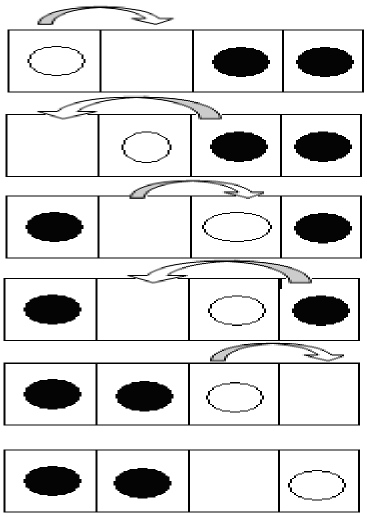


Figura 2: Exemplo de uma situação do jogo O salto da rã

Uma sugestão didática oferecida pela autora é, após a familiarização do jogo pelos alunos, contar o número de movimentos que se devem fazer de acordo com o número de fichas que estão colocadas em cada parte do tabuleiro. A partir de uma simples tabela, é possível buscar uma regularidade e descrever um modelo matemático que permite calcular o número mínimo de movimentos necessários para trocar as fichas de lugar.

A autora concluiu seu artigo ressaltando a importância dos jogos e curiosidades matemáticas como um motivador para que os alunos formem conhecimento e pensem de forma mais autônoma.

“Jogo no ensino de matemática: uma visão de futuros professores” (DE MARCO, 2006) é um artigo da FAMAT em Revista da Universidade Federal de Uberlândia – MG. Neste artigo discutiram-se os resultados de uma pesquisa realizada com alunos do curso Licenciatura Matemática da Universidade Federal de Uberlândia em que se interpretou a concepções dos alunos sobre jogos no ensino de matemática após algumas discussões teóricas e práticas.

Dois jogos foram utilizados e dentre estes, Contig60®. Segundo o artigo, este jogo foi escolhido para análise, pois tem, como objetivo educacional, a utilização do cálculo mental com as 4 operações, criação de estratégias de análise de possibilidades/antecipação de jogadas e a análise combinatória.

O autor conclui o artigo dizendo que a pesquisa foi satisfatória no sentido de que os professores puderam perceber que o jogo pode estimular a concentração, possibilitando o desenvolvimento de conhecimentos. Segundo De Marco, não é o jogo que ensina matemática, mas que este, quando intencionalmente definido, pode promover um contexto estimulador e desafiante para o pensamento e ser um auxiliar didático na construção de conceitos matemáticos.

O minicurso “Geoplano e Análise Combinatória: construindo o conhecimento matemático no trabalho cooperativo”(MALLMAN, LUDWIG & RICO, 2006) apresentado no IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática em abril de 2006 buscou proporcionar aos professores e estudantes do evento atividades com conteúdos de análise combinatória abordados de forma leve e divertida.

As atividades partiram da construção de um geoplano quadrado 5x5 e, após, da resolução de problemas que envolviam conhecimentos de análise combinatória. O trabalho em si não se fundamenta como jogo, mas como salienta Machado (2005), uma ajuda didática que oferece apoio à representação mental e uma etapa ao caminho da abstração.

As tarefas finais referiam-se às diferentes maneiras com que se poderia sair de um vértice e chegar a outro com certas restrições e representar no geoplano o número binomial $\binom{6}{3}$.

No IX Encontro Nacional de Educação Matemática, em Relatos de Experiência, Martins e Gonçalves(2007), apresentaram a pesquisa “Experiências Matemáticas com educandos do programa Curumim” que faz parte do projeto de extensão Camp-Jr do curso de Matemática do UNI-BH.

Com o objetivo de contribuir para a ruptura de certos paradigmas da matemática da educação básica, e mudar certas concepções equivocadas que as pessoas têm dessa disciplina, foram realizadas, com os educandos do programa Curumim, atividades que privilegiaram o pensamento matemático sem, contudo, trabalhar com a matemática escolar.

Estas atividades foram elaboradas e testadas dentro de uma sequência didática que, segundo as autoras, possibilitam o surgimento de aprendizagem da matemática. Dentre as atividades propostas, chamamos a atenção para as que farão parte desta pesquisa de investigação: Jogo Senha e A Grande Corrida de Cavalos.

Ao final da pesquisa, as autoras sinalizaram que 75% dos educandos apresentaram certa resistência quanto às atividades propostas. Ainda pela pesquisa, as mesmas acreditam que se os educandos tivessem dado respostas satisfatórias à proposta apresentada, bem como às possibilidades de discussão sobre determinados assuntos, talvez os resultados fossem obtidos de uma forma mais concreta.

Publicado nos anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática (Regional São Paulo), “Seleção de jogos”(BARBOSA, 2004) apresenta uma série de jogos e quais intervenções didáticas são possíveis para cada um deles. Destaca-se, dentro de problemas de contagem, o jogo Bicolorido, também conhecido como SIM, para o qual o autor destaca sua natureza lúdica e competitiva. Esse jogo, segundo o autor, possibilita a inserção de algumas explorações relativas a aspectos de contagem.

Ao término da descrição, o autor discutiu as possíveis variações durante o jogo e as consequências de estratégias a que este poderá levar se forem mudadas algumas condições iniciais. Para fins de entendimento, adiante serão explicitadas as regras desse jogo e as possibilidades de jogá-lo direcionado aos problemas de contagem.

2.4 O RECURSO AOS JOGOS NA AULA DE MATEMÁTICA

Quando se fala em Matemática, logo vem à cabeça uma aula cheia de fórmulas, conceitos sem sentido, exercícios impossíveis e, claro, um momento do dia sem ânimo, sem dinâmica, sem prazer.

O uso de jogos como um recurso às aulas de matemática favorece um ambiente adequado para resolução de problemas, aplicação e exploração de conceitos matemáticos e/ou para um aprofundamento destes. Assim, torna-se relevante a prática de jogos nas aulas de matemática, pois esses propiciam momentos de desbloqueios dos estudantes que, normalmente, apresentam aversão a essa disciplina.

Esses momentos de jogo contribuem para uma aula estimulante, desafiadora, provocativa. O desenvolvimento potencial, segundo Vygotsky, destaca-se ao longo das atividades propostas e da intervenção do professor. Este se torna o mediador da construção do conhecimento pelo aluno a tal ponto que o próprio aluno, após algum tempo, desenvolve seu desenvolvimento real, ampliando sua zona de desenvolvimento proximal. Para Vygotsky, o desenvolvimento cognitivo da criança resulta da interação entre esta e as pessoas com quem mantém contatos regulares.

Além disso, o jogo propicia o desenvolvimento de habilidades como análise de possibilidades, tomada de decisão, trabalho em grupo, saber ganhar e saber perder (MARCO, 2004). Neste trabalho verificou-se, na observação das aulas, que os alunos, inicialmente em cada jogo, se preocupavam apenas em ganhar, não se preocupando com o tipo de estratégia a ser utilizada. Ao longo do jogo, com a intervenção do professor e discussão com os próprios colegas, o ritmo da competição foi diminuindo de tal forma que não era mais tão importante ganhar e sim discutir e descobrir o que havia por trás da situação. Já ao término das atividades, percebia-se que muitos estudantes deixaram a competição de lado para dar lugar à cooperação. Por meio do jogo, a criança e o jovem desenvolvem uma interação social que é indispensável para o desenvolvimento social, moral e cognitiva (KAMII, 1991).

Concordo com Tirapegui (2000), quando ela dá ao jogo, nas aulas de matemática, uma função social e socializadora que vai ao encontro da aprendizagem; o jogo proporciona o ajuste emocional. Algumas escolas não parecem estar convencidas da vantagem dos jogos: há uma espécie de temor ao introduzi-los em aula, e mais ainda, nas aulas de matemática. Isso está associado à consideração de que o jogo é uma atividade pouco séria, próxima do entretenimento ou perda de tempo[2].

Há de salientar que o jogo pelo jogo não promove uma ampliação do campo conceitual que se estuda. O professor, além de mediar, deve tomar o jogo como um auxiliar didático de seu planejamento, tendo clareza nos objetivos a serem alcançados, nas competências e nas habilidades a serem atingidas, pois, a introdução de jogos nas aulas de matemática não é garantia de aprendizagem. É preciso ter a responsabilidade de que o jogo não se torne apenas uma atividade de recreação.

Segundo os PCNs (1998),

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exige soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações, possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma

---
[2] Tradução do autor

> natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas.

Cabe ao professor planejar e administrar o jogo e o tipo de abordagem que se dá a um determinado tema de seu planejamento didático. Como visto acima, não fica claro a forma como o professor deve trabalhar os jogos em aula nem o modo de intervenção mais adequado.

Entretanto, no decorrer das páginas dos PCNs, verifica-se uma preocupação em dispor os jogos a fim de contribuir para um trabalho de formação de atitudes necessárias para a aprendizagem matemática.

3 METODOLOGIA

3.1 ESTUDO DE CASO

Para que a verificação da abordagem metodológica de ensino baseada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e na Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky fosse satisfatória, produziu-se uma investigação fundamentada em Estudo de Caso.

O Estudo de Caso é uma investigação que se assume como particularística, isto é, se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos (PONTE, 2006).

Tem sempre um forte cunho descritivo, isto é, diz simplesmente como é o caso em questão. Baseia-se em trabalho de campo no qual se estuda uma entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações e documentos (YIN, 1984).

Mesmo um estudo de caso nunca estando completo, o autor procura levar em consideração todos os aspectos que são importantes para a pesquisa, de tal modo a tornar o quanto possível completa essa investigação (PONTE, 2006).

3.2 SUJEITOS DA PESQUISA

Ao escrever o pré-projeto desta pesquisa, fomos tomados por curiosidade de como poderíamos aplicar tais jogos e em quais sujeitos. A resolução de problemas de contagem está, frequentemente, prevista no planejamento curricular do 2º ano do Ensino Médio. Entretanto, resolvemos por considerar tal situação em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental, com 33 alunos de faixa etária entre 12 e 16 anos, do Colégio Militar de Porto Alegre, alunos do autor dessa investigação. Para registro de fotos e entrevistas, pedimos a autorização dos responsáveis dos alunos.

3.3 O AMBIENTE DOS JOGOS

O Colégio Militar de Porto Alegre está localizado na zona urbana da capital gaúcha e possui cerca de 1100 alunos, do 6º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio. Em último levantamento (2009), a quantidade de meninos representava 53% do total de alunos, sendo que ano a ano, observa-se um crescimento do percentual de meninas.

As aulas regulares são ministradas pela manhã, num total de 6 períodos iniciando às 07 horas e 30 minutos e terminando às 12 horas e 40 minutos. No turno da tarde alguns alunos assistem aulas de recuperação, plantões de dúvidas, apoio pedagógico e/ou preparação aos concursos militares.

A maior parte dos alunos é oriunda da capital gaúcha ou da região metropolitana. A minoria tem sua origem em outros estados que, por motivo de transferência dos responsáveis, estudam no colégio por direito em lei.

O colégio segue uma linha tradicional de educação onde prevalece o conteudismo. As aulas quase sempre são expositivas e fundamentadas em livros didáticos. A proposta pedagógica se particulariza não só na transmissão dos conteúdos disciplinares, mas também, pela preparação do jovem para a vida cidadã com todas suas exigências em valores morais e afetivos, de ordem, disciplina e respeito.

O Colégio Militar de Porto Alegre é uma instituição de destaque no cenário estadual, nacional e internacional. Deve-se esse destaque as participações em olimpíadas de matemática, física, química, astronomia, entre outras, bem como os resultados satisfatórios que o colégio apresenta nos diversos concursos vestibulares, ENEM, e Prova Brasil. Além disso, destacamos a participação positiva do colégio em diversas competições esportivas como atletismo, futebol, handebol, voleibol, esgrima, judô, karatê e xadrez.

3.3.1 Os jogos no contexto dos alunos

Esse trabalho foi desenvolvido em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental que possui suas aulas regulares no turno da manhã. O período de aplicação dos jogos e das observações foi o segundo semestre de 2008, entre agosto e dezembro, em aulas previamente agendadas, uma ou duas vezes por semana, dependendo do desenvolvimento da pesquisa e do planejamento do professor em relação aos conteúdos do Plano de Estudo do colégio.

3.4 COLETA DE DADOS

Na coleta de dados foram utilizadas as anotações feitas em sala de aula, pelo professor, tanto orais como escritas. O professor testemunhou conversas de alguns grupos de alunos durante os jogos e de como eles traçavam suas estratégias utilizando ou não o campo multiplicativo.

Ao início de cada encontro, as regras do jogo e suas peculiaridades eram discutidas com o grupo maior. Nestes momentos, o professor observava atentamente as diferentes expressões dos alunos frente às suas estratégias de jogo e se eles identificavam alguma situação vantajosa no mesmo. Nessas oportunas ocasiões de discussão, os alunos questionavam algumas situações do jogo e a possibilidade de alterar alguma regra para torná-lo mais atraente e mais divertido.

Tudo que os alunos conversavam e apontavam sobre um determinado jogo, o professor anotava em seu caderno. Algumas questões dos alunos eram respondidas pelo professor com uma outra questão. Muitos alunos sentiam a necessidade da ajuda do professor para obter a resposta e não ficavam muito satisfeitos quando eram indagados com outra pergunta.

Os jogos foram planejados e referenciados segundo a Teoria dos Campos Conceituais, especificamente, o campo conceitual multiplicativo. O período total previsto de aplicação dos jogos foi de 14 encontros, mas outras aulas que não estavam destinadas à aplicação dos jogos foram utilizadas para debates.

A apresentação de cada jogo, das regras e a ação do jogo, propriamente dita, durava em média, 3 encontros. Para nós era importante discutir com os alunos sobre os jogos, não só para levantar dados da pesquisa, mas também avaliar o jogo aplicado e replanejar os próximos, se fosse o caso.

Todos os quatro jogos foram confeccionados por nós. Fizemos uso de material disponibilizado online para construir tabuleiros e fichas. Alguns materiais foram comprados, tais como copos plásticos, dados, tinta guache, folhas de laminado, caixas de lápis de cor e atilhos.

Pode-se dizer que o custo da confecção dos jogos foi baixo e sugerimos que é possível, dentro do planejamento, viabilizar o uso de material reciclável.

4 IDENTIFICAÇÃO DOS JOGOS

4.1 JOGO A GRANDE APOSTA

Este jogo é uma adaptação do jogo "A grande corrida de Cavalos" que faz parte do projeto Experiências Matemáticas com Educandos do Programa Curumim (MG) (MARTINS e GONÇALVES, 2007). No jogo original, as crianças eram divididas em pequenos grupos e dois alunos eram chamados de negociadores, que tinham a função de negociarem as apostas. Um educando era responsável pela organização e o restante dos alunos formava os jogadores apostadores. Em um painel era montado um quadro com os números dos cavalos, de 2 a 12.

O número de cada cavalo era a soma das faces voltadas para cima ao jogar dois dados distintos e o cavalo com o número apresentado por essa soma andava. Acreditamos que esse cavalo ganhava a suposta corrida e assim, as crianças que tivessem feito suas apostas neste cavalo ganhavam.

O jogo foi aplicado coletivamente e, durante o tempo de aplicação, ocorriam discussões sobre as regras do jogo e possibilidades de cada cavalo.

Fizemos uma adaptação deste jogo para duplas e, com isso, tivemos que formular algumas regras, descritas a seguir. Como o consideramos um novo jogo, resolvemos também por colocar um outro nome.

4.1.1 Material do jogo

Para esse jogo, cada dupla necessitava de

a) fichas de numeração de cada cavalo, de 2 a 12, em que cada dupla recebia um total de 11 fichas.

b) dois dados pequenos de cores distintas.

c) um copo plástico para o lançamento dos dados.

d) um pequeno bloco de papel para identificação dos cavalos de cada jogador.

4.1.2. As regras do jogo

Antes do primeiro lançamento de dados, cada jogador da dupla escolhia seus cavalos de tal forma que cada um ficasse com o mesmo número de fichas. Essa escolha poderia ser feita de forma aleatória com as fichas voltadas para baixo ou cada jogador escolhendo seus cavalos. Deixamos os jogadores livres para que decidissem a forma de como escolheriam seus cavalos para não intervir, num primeiro momento, no jogo. A ficha que restava da divisão seria chamada de “cavalo-curinga”.

Escolhidos os cavalos, decidia-se quem faria o primeiro lançamento dos dados. Vejamos, então, como funciona o jogo propriamente dito:

a) O primeiro jogador, que chamaremos de jogador 1, lança os dados. Três situações podem ocorrer:

1. A soma das faces dos dados voltadas para cima é o número de um dos cavalos do jogador 1: Neste caso, o jogador 1 vence o páreo e marca no bloco um traço (|)e o número do seu cavalo que saiu a seu favor.

2. A soma das faces dos dados voltadas para cima é o número de um dos cavalos do jogador 2: Neste caso, o jogador 2 vence o páreo e marca no bloco um traço (|)e o número do seu cavalo que saiu a seu favor.

3. A soma das faces dos dados voltadas para cima é o número do “cavalo-curinga”: Neste caso, o jogador 1 anota para sua pontuação o valor do “cavalo-curinga”. Nesta situação, nenhum jogador vence o páreo. Caso seja a jogada do outro jogador, este marca os pontos para si.

b) O segundo jogador, que chamaremos de jogador 2, procede com o segundo lançamento dos dados. Aqui também podem ocorrer as três situações descritas acima e o jogo continua normalmente.

c) Espera-se que cada jogador realize três lançamentos de dados, o que totalizaria seis lançamentos correspondentes aos seis páreos disputados.

d) Ao término da corrida, ou seja, dos seis páreos, será considerado vencedor aquele jogador que venceu mais páreos.

e) Em caso de empate, ou seja, se cada jogador tiver vencido três páreos, será considerado vencedor aquele jogador que obtiver a maior soma dos números de seus cavalos vencedores em seus respectivos páreos. Caso algum jogador tenha pontuado com o “cavalo-curinga”, o valor deste também entra na soma.

Vejamos uma situação do jogo onde houve empate:

	Jogador 1	Jogador 2
Cavalos	3, 7, 5, 9 e 10	2, 6, 4, 8 e 11
Páreo 1	| (10)	
Páreo 2		| (8)
Páreo 3		| (11)
Páreo 4	| (7)	
Páreo 5	| (10)	
Páreo 6		| (6)
Soma	27	25

Figura 3: Exemplo da situação do jogo “A Grande Aposta”

Na escolha dos cavalos, o “cavalo-curinga” é o de número 12. Como cada jogador venceu um páreo, então a decisão ficou para a soma dos cavalos vencedores de cada páreo.

4.2 JOGO CONTIG60

Para aplicação deste jogo, baseamo-nos na experiência de GRANDO (2000) quando o estudou em sua tese de doutorado. Lá, como já citamos na revisão de literatura, Grando investiga os processos gerados na construção e/ou resgate de habilidades matemáticas a partir da intervenção do jogo.

No caso de nossa pesquisa, fomos específicos em analisar as possíveis situações do jogo na ampliação do campo conceitual multiplicativo, trabalhando com problemas de contagem. Grando trabalhou com poucos alunos tendo mais tempo de observação, enquanto que nós tivemos um grupo maior e um tempo muito menor, comparado com o de Grando.

Mesmo assim, fizemos uso do trabalho de Grando para nos orientar e comparar os dados obtidos em ambos os trabalhos. Alteramos uma das regras do jogo, quanto a determinar o vencedor. Na regra original, uma das condições é que o jogador que tiver o menor número de pontos obtido da subtração de 60 será considerado vencedor.

A nossa alteração, nessa condição, é de que será considerado vencedor o jogador que obtiver o maior número de pontos obtidos durante o jogo.

4.2.1 Material do jogo

O jogo é composto por

a) tabuleiro, como mostra a figura 4.
b) 50 fichas, sendo 25 de uma cor e 25 de outra cor distinta.
c) três dados pequenos indistinguíveis.
d) um copo plástico para lançamento dos dados.
e) papel, lápis e borracha.

0	1	2	3	4	5	6	7
27	28	29	30	31	32	33	8
26	54	55	60	64	66	34	9
25	50	120	125	144	72	35	10
24	48	108	180	150	75	36	11
23	45	100	96	90	80	37	12
22	44	42	41	40	39	38	13
21	20	19	18	17	16	15	14

Figura 4: Tabuleiro do Contig60

4.2.2 As regras do jogo

O jogo começa escolhendo-se qual jogador deverá lançar os dados primeiro. Após, as jogadas alternam-se de jogador para jogador. Ao lançar os dados,

a) cada jogador constrói uma sentença numérica utilizando os números das faces voltadas para cima de cada dado. Nessa sentença, cada jogador fará uso de uma ou duas operações diferentes dentre adição, subtração, multiplicação e divisão. Suponha que um dos jogadores tenha lançado os dados e as faces voltadas para cima foram 3, 4 e 6. Assim, ele poderá construir a sentença 3+4+6 e ocupar, com uma de suas fichas, o espaço do número 13.

b) se um dos jogadores passar sua jogada, por acreditar que não é possível fazer uma sentença numérica com os valores obtidos do lançamento dos dados, o adversário terá uma opção a tomar. Se o adversário formar uma sentença com os números obtidos pelo colega, ele ganha o dobro do número de pontos nesta situação e, a seguir, poderá fazer sua própria jogada.

c) contagem de pontos: um ponto é ganho por colocar uma ficha num espaço desocupado que seja adjacente a um espaço ocupado (horizontal, vertical ou diagonalmente). Colocando-se uma ficha num espaço desocupado adjacente a mais de um espaço ocupado, mais pontos são obtidos. Suponha que um jogador tenha formado uma sentença numérica tal que o resultado tenha sido 35. Se os espaços dos números 9, 10 e 34 estiverem ocupados, por ficha de qualquer cor, este jogador ganha 3 pontos (veja tabuleiro). Salienta-se que a cor das fichas nos espaços ocupados não faz diferença.

d) O jogo termina quando um jogador conseguir colocar cinco fichas de mesma cor em linha reta sem nenhuma ficha do adversário intervindo. Essa linha poderá ser horizontal, vertical ou diagonal. Caso nenhum jogador forme a linha com cinco fichas e todas as fichas já tenham sido usadas no jogo, o vencedor será aquele que obtiver o maior número de pontos.

4.3 JOGO SENHA

Este jogo foi criado em 1970 pelo israelense Mordechai Meirovitz e o objetivo do jogo é descobrir sequência de cores que compõe a senha formada por quatro cores dentre seis distintas. Essa senha pode ter cores repetidas ou não.

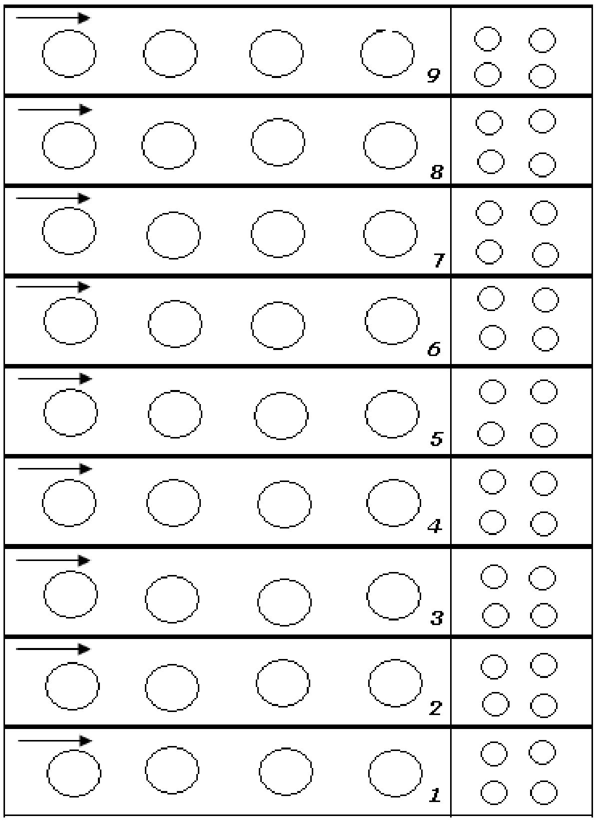
Especialista em telecomunicações, Meirovitz teve sua idéia recusada por quase um ano, quando em 1971, numa feira de brinquedos em Nuremberg, Alemanha, a Invicta Plastics comprou todos os direitos intelectuais do brinquedo (Figura 5).

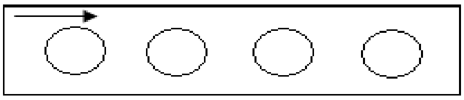
Figura 5:Tabuleiro original do jogo Senha. Fonte: http://carrosseldaaprendizagem.blogspot.com/2009/04/jogo-da-senha.html

O jogo chegou ao Brasil no início dos anos 80 em três tamanhos diferentes. A Grow deixou de produzi-lo por um tempo, mas hoje já o encontramos em lojas de brinquedo em sua versão e nome originais.

Este jogo foi aplicado por Piantavini (1999) como descreve em sua dissertação de mestrado, citada por nós na revisão de literatura. Lá, Piantavini analisa qualitativamente o uso do jogo na construção de possíveis, no campo psicopedagógico, gerados a partir de uma situação-problema. Os 16 sujeitos de sua pesquisa foram alunos pertencentes às classes de 1ª a 4ª série do Ensino Fundamental.

Sendo inviável a compra de tabuleiros, adaptamos o jogo para o papel. Em vez de pinos, usamos lápis de cores e os tabuleiros ficaram de acordo com a figura 6. Combinamos com os alunos de que a senha escolhida deveria ser uma sequência de cores distintas.





Tabuleiro do desafiado   Tabuleiro do desafiante

Figura 6: Tabuleiros adaptados do jogo Senha

4.3.1 Material do jogo

Adaptado do jogo original, o material para cada dupla era composto por

a) tabuleiros indicados na figura 6.

b) lápis de cores.

4.3.2 As regras do jogo

Antes do início do jogo, escolhe-se quem será o desafiante, ou seja, aquele que formará a senha, e o desafiado, aquele que tentará descobri-la. Escolhidos os papéis de cada jogador, seguem as regras:

a) O desafiante forma uma senha e colore os espaços reservados para a senha seguindo a direção da seta. Por exemplo, suponha que o desafiante forme a senha azul-laranja-vermelho-amarelo.

Então, pelo sentido, da esquerda para direita, o desafiante colore os espaços, ficando com

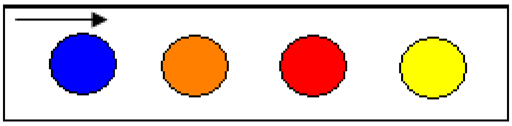


Figura 7: Exemplo de situação do jogo “Senha”

b) O desafiado, então, forma uma senha que acredita ser a formada pelo desafiante. Caso não tenha acertado a senha, o desafiante dá algumas dicas na coluna da direita do tabuleiro do desafiado. Se o desafiado acertar alguma cor e a posição que ela está, o desafiante pinta um dos círculos de preto. Se o desafiado acertar apenas alguma cor, mas não sua posição, o desafiante deixa algum dos círculos em branco. Caso a senha apresentada pelo desafiado contenha alguma cor que não coincide com a do desafiante, este marca um “x” em algum dos círculos. Vejamos abaixo um exemplo, onde o desafiado acertou a cor e sua posição, mas uma das cores não faz parte da senha.

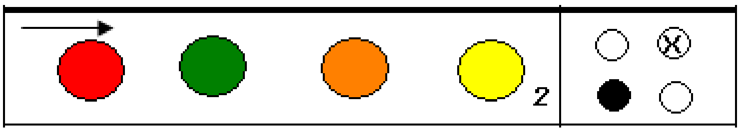


Figura 8: Exemplo de situação do jogo “Senha”

Os círculos que indicam as dicas para o desafiado não seguem ordem alguma, ou seja, na figura acima, necessariamente não é a cor laranja que está na posição certa.

c) O desafiado tem nove tentativas para descobrir a senha. Caso não acerte a senha em nenhuma das nove oportunidades, ele contabiliza nove pontos.

d) alternadamente, os jogadores invertem seus papéis. O jogo segue da mesma forma e será considerado vencedor aquele que descobrir a senha do outro em menos tentativas, ou seja, aquele que obtiver o menor número de pontos.

4.4 JOGO BICOLORIDO

O jogo Bicolorido é bem semelhante ao famoso jogo da velha. Também conhecido como “O Sim” em homenagem ao seu inventor, Gustavus I. Simmons, este jogo também pode ser jogado por uma só pessoa.

O objetivo do jogo é formar um triângulo cujos lados possuem uma única cor. Os vértices desse triângulo devem ser os pontos dados no início do jogo.

4.4.1 Material do jogo

a) Alguns tabuleiros, como mostra a Figura 9.
b) Lápis ou canetas esferográficas de cores distintas.

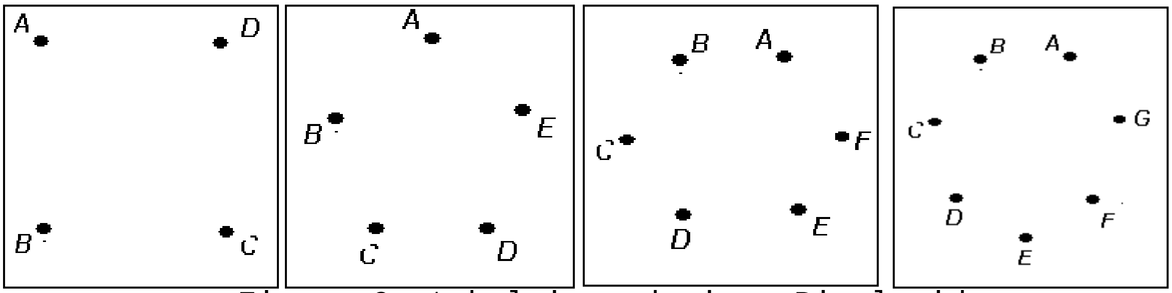


Figura 9: tabuleiros do jogo Bicolorido

4.4.2 As regras do jogo

Escolhe-se o jogador a fazer a primeira jogada e o tabuleiro a iniciar o jogo. O roteiro do nosso trabalho foi iniciar com quatro pontos e aumentar, gradativamente, a cada término de jogo, os pontos iniciais. Após, seguem as regras:

a) Os jogadores, cada um com um lápis ou uma caneta de cor distinta, deverão, sucessiva e alternadamente, construir segmentos de reta com extremos nos pontos dados no início do jogo. Esses segmentos podem ser lados ou diagonais.

b) Será declarado vencedor aquele jogador que primeiro fechar um triângulo monocromático com a cor de seu lápis ou caneta.

Vejamos um exemplo de jogo com 5 pontos iniciais:

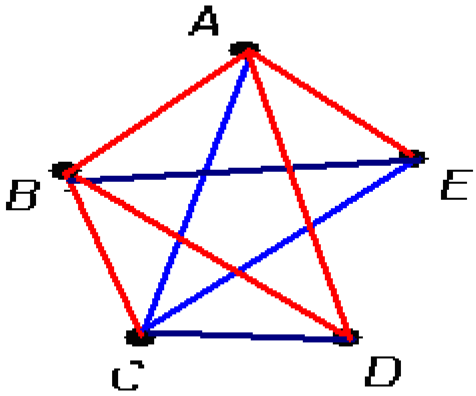


Figura 10: Exemplo de situação do jogo Bicolorido

Na situação acima, o jogador que traça o segmento com a cor vermelha venceu fechando o triângulo ABD.

5 PROPOSTA DIDÁTICA

Foi executada a seguinte sequência didática, conforme planejada por nós:

5.1 JOGO: A GRANDE APOSTA

5.1.1 Questionário

01. Suponha que um dos jogadores tenha o cavalo número 4. De quantas formas distintas ele poderá ganhar um páreo com esse cavalo, segundo as regras do jogo?

02. Da mesma forma, de quantas maneiras distintas ele poderá ganhar um páreo se ele tiver o cavalo número 10? E se tiver o cavalo número 8?

03. Suponha que o jogador 1 tenha o cavalo número 3 e o jogador 2 tenha o cavalo número 12. Quem tem mais chance de vencer um páreo? Justifique.

04. Veja, abaixo, uma situação do jogo, onde a última jogada pode decidir a corrida e o cavalo curinga é o de número 3.

	Jogador 1	Jogador 2
Cavalos	2,4,6,8,10	5,7,9,11,12
Páreo 1	| (2)	0
Páreo 2	0	| (7)
Páreo 3	| (6)	0
Páreo 4	| (8)	0
Páreo 5	0	| (5)
Soma		

Responda:

Antes das apostas iniciarem, qual dos jogadores tinha mais chances de ganhar, segundo as regras do jogo? Justifique.

05. Veja, a seguir, os cavalos dos jogadores 1 e 2, respectivamente:

Jogador 1: 5,6,7,8 e 9

Jogador 2: 2,3,10,11 e 12

Antes de iniciarem as apostas, qual dos jogadores têm mais chance de ganhar? Justifique.

06. Após você ter jogado algumas vezes, você acha que todos os cavalos têm as mesmas chances de ganhar?

07. Supondo que a escolha dos cavalos não fosse feita "aleatoriamente" pelos cartões e sim pelo número obtido da **soma** das faces voltadas para cima dos dois dados. Quais são os possíveis pares dos dados e quantos são estes?

08. E, se em vez de serem dois dados, fossem três. O jogo deveria ter quantos cavalos? Quantos são os possíveis resultados da forma (d_1,d_2,d_3) onde d_1,d_2 e d_3 são os possíveis números indicados pela face voltada para cima de cada dado?

09. E se fossem quatro dados? Quantos cavalos seriam? Quantos são os possíveis resultados da forma (d_1,d_2,d_3,d_4) ?

5.2 JOGO: CONTIG60

5.2.1 Questionário

01. Veja, abaixo, uma situação do jogo, onde apenas os espaços dos números 6, 8 e 33 estão ocupados (em negrito). Para marcar 3 pontos, o espaço do número 7 deve ser ocupado. De quantos modos isso é possível usando apenas adição?

6	7

33	**8**

02. Usando, novamente, **apenas adição** e sabendo que os espaços 36, 37 e 38 são os únicos espaços ocupados. De quantas maneiras é possível marcar 1 ponto? Por exemplo, para marcar 1 ponto é necessário marcar os espaços 10 ou 14. Para o espaço 10 existe, dentre todas as maneiras, 2+3+5; 1+4+5,etc. Faça o mesmo para marcar 2 pontos e 3 pontos.

03. Imagine a situação de jogo apresentada na questão 01. Considere os mesmos valores apresentados, porém, fazendo uso das operações adição e subtração.

04. No lançamento dos três dados, suponha que tenham saído as faces 3, 4 e 5. Quais são os possíveis espaços que podem ser ocupados fazendo uso da adição e da multiplicação segundo as combinações abaixo?

$$\square \times \square + \square$$

$$\square \times \left(\square + \square\right)$$

05. Considere que no lançamento dos três dados, as faces voltadas para cima foram 2, 5 e 6. Quais são os possíveis espaços que podem ser ocupados fazendo uso da adição e da multiplicação segundo as combinações abaixo?

$$\square \times \square + \square$$

$$\square \times \left(\square + \square\right)$$

06. No caso de terem saído as faces 1,2 e 5 quais são os espaços que podem ser ocupados, fazendo uso da subtração e multiplicação, segundo as combinações abaixo?

$$\square \times \square - \square$$

$$\square \times \left(\square - \square \right)$$

07. Suponha que, no lançamento dos dados, tenham saídos as faces, 3,5 e 6. Com a adição e a divisão, quais são os espaços possíveis de serem ocupados, segundo as combinações abaixo?

$$\square : \square + \square$$

$$\square : \left(\square + \square \right)$$

08. No lançamento dos dados, suponha que tenham saído as faces 3, 3 e 6. Fazendo uso da multiplicação e adição, quais são os espaços possíveis de serem ocupados, segundo as combinações abaixo?

$$\square \times \square + \square$$

$$\square \times \left(\square + \square \right)$$

09. Suponha que, para um dos jogadores, seja vantagem marcar o espaço do número 42. Quais são as possíveis combinações, usando adição e multiplicação, para que este jogador ocupe o espaço pretendido? (Existem várias combinações)

10. Descobrir os divisores de um número pode ser uma boa estratégia para formar uma expressão numérica e ocupar o espaço de um determinado número. Consideremos o número 42, da questão acima. Para descobrir seus divisores, podemos pensar nos pares de números inteiros positivos que multiplicados dão como resultado 42: 1x42, 2x21, 3x14 e 6x7. Cada um dos fatores apresentados é um divisor de 42. Veja que uma forma de obtê-lo é (6+1)x6. Assim, encontre os divisores do número 125 e determine quais as possíveis combinações para que o espaço do número 125 seja ocupado.

11. Suponha que seja vantagem, para um dos jogadores, marcar o espaço do número 50. Como esse jogador tem dificuldades em formar uma expressão numérica cujo resultado seja 50, ele opta por descobrir os divisores desse número. Sabendo que este jogador usou adição e multiplicação, descubra quais são os divisores de 50 e quais as possíveis combinações para que ele marque o espaço pretendido.

12. Considere uma situação semelhante à da questão anterior, porém, o número pretendido é 66. Determine os divisores de 66 e, sabendo que se fez uso da adição e da multiplicação, liste as possíveis combinações de marcar o espaço pretendido.

13. Veja a fatoração de alguns números já vistos aqui: $42=2^1x3^1x7^1$; $125=5^3$; $50=2^1x5^2$ e $66=2^1x3^1x11^1$. Encontre a fatoração do número 100, segundo os modelos anteriores. Quais as possíveis combinações para marcar o espaço do número 100 usando multiplicação e adição?

14. Considere a suposição de que seja vantagem, para o jogador 1, marcar o espaço do número 96. Entretanto, para este jogador, parece ser uma tarefa difícil determinar os divisores de 96. Sendo assim, ele preferiu determinar apenas **quantos** divisores tem o número e deixar que seu adversário faça a

jogada. Como o jogador 1 fez para determinar a **quantidade de divisores** de 96? Uma dica: ele partiu da fatoração do número.

15. A partir de um valor, é necessário fazer uso da operação multiplicação. Por exemplo, suponha que, para marcar 4 pontos, você tenha a seguinte situação, onde os números escritos em negrito são os únicos ocupados:

125	**144**
180	150
96	

Usando apenas a operação multiplicação, de quantos modos é possível preencher o espaço do número 150?

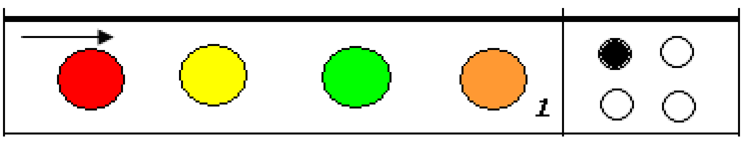
16. Analise os divisores dos números encontrados anteriormente e tente descobrir uma maneira **prática** de determinar a **quantidade** de divisores do número 80. Tente fazer o mesmo para encontrar a **quantidade** de divisores do número 144.

5.3 JOGO: SENHA

5.3.1 Questionário

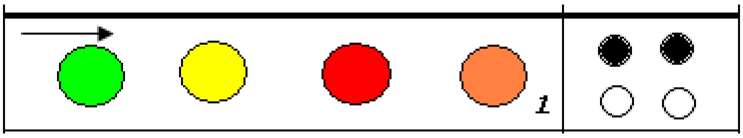
Situação 01: Considere que estão sendo utilizadas quatro cores: laranja, verde, vermelho e amarelo. A senha é formada por quatro cores **distintas** dentre estas.

01. Suponha que, na primeira tentativa, o desafiado apresenta a seguinte combinação de cores e o desafiante preenche o campo de "dicas" da seguinte forma:



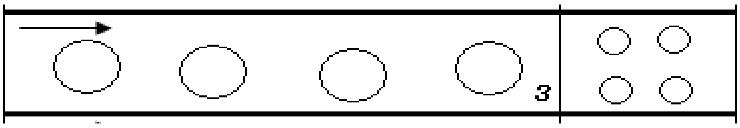
Quais são as combinações de senhas possíveis para a próxima jogada, sabendo que a cor amarela está na posição certa?

02. Na jogada seguinte, o desafiado mantém a cor amarela, muda a posição das demais cores e o desafiante dá a seguinte “dica”:



a)Além da cor amarela, **quais** são as possíveis cores que estão na posição correta? b) Nesta situação, **quais** são as possíveis combinações de senha?

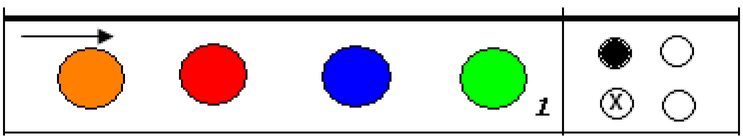
03. Na 3ª tentativa, qual deverá ser a próxima jogada? Haverá uma 4ª jogada? Justifique com suas palavras.



04. Antes de o jogo iniciar, **quais** eram as possíveis combinações de senha?

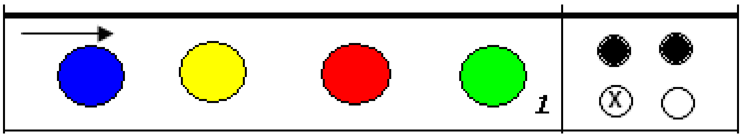
Situação 02: Considere, agora, que estão sendo utilizadas cinco cores, por exemplo, verde, vermelho, laranja, amarelo e azul, e a senha é formada por quatro cores **distintas** dentre estas.

01. Na 1ª tentativa, o desafiado apresenta a seguinte seqüência de cores e o desafiante preenche o campo de “dicas” da seguinte forma:



Sabendo que a cor verde está na posição certa e que a cor vermelha não faz parte da senha, **quais** são as combinações possíveis para a próxima jogada?

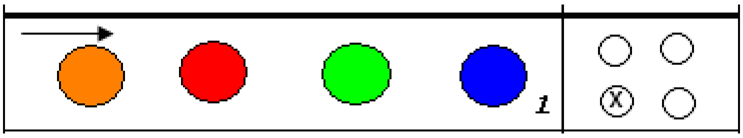
02. Suponha que o desafiado não saiba que a cor vermelha **não** faz parte da senha, e ele substitui a cor laranja pela cor amarela apresentando a seguinte seqüência:



A partir do que foi apresentado pelo desafiante e sabendo que a cor azul e a cor verde estão certas, **quais** são as possíveis combinações de senhas para a próxima jogada?

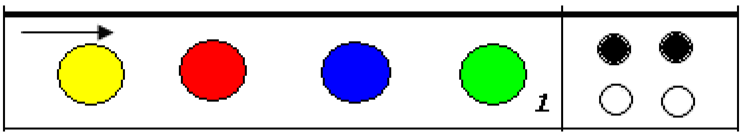
03. Sabendo, então, que a cor vermelha não faz parte da senha e que as cores azul e verde estão na posição certa, **quais** são as possíveis combinações de senha?

04. Vamos supor um novo jogo. Na 1ª tentativa, o desafiado apresenta a seguinte seqüência e o desafiante dá a "dica":



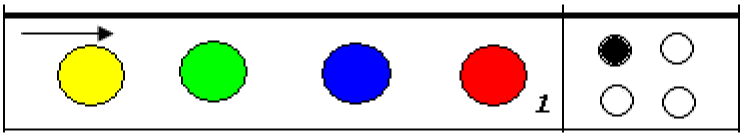
Sabendo que a cor laranja não faz parte da senha, **quantas** são as possíveis senhas para a próxima jogada?

05. Na 2ª tentativa, o desafiado substitui a cor laranja pela cor amarela e troca as posições das cores verde e azul. Assim, o desafiante apresenta a seguinte "dica":



A partir do que apresentou o desafiante e sabendo que a cor azul está correta, **quais** são as possíveis cores que estão na posição correta?

06. O desafiado escolhe por manter a cor amarela e a cor azul em suas posições. O desafiante apresenta a dica:



A partir do que apresentou o desafiante, das jogadas anteriores e sabendo que a cor vermelha **não** está na posição certa, **quais** são as possíveis senhas para a próxima jogada?

07. Antes de o jogo iniciar, **quantas** eram as possíveis combinações de senha?

08. Originalmente, o jogo *Senha* foi criado em 1971 por Mordechai Meirovitz e consistia em determinar uma senha de quatro cores (distintas ou não) dentre **seis** possíveis. Supondo que foram utilizadas estas seis cores, determine **quantas** senhas de quatro cores distintas são possíveis de criar.

5.4 JOGO: BICOLORIDO

5.4.1 Questionário

Situação 01. Quatro pontos A,B,C e D (vértices de um quadrilátero convexo)

01. Após ter jogado algumas vezes com seu colega, qual foi a situação de resultado que mais apareceu? Situação de vitória/derrota ou situação de empate?

02. Quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados, para o colega que faz a primeira jogada, partindo do vértice A?

03. E quantas restam para o 2º jogador, na segunda jogada, partindo do mesmo vértice A? E se fosse o vértice B? E se fosse o vértice C? E se fosse o vértice D?

04. Dados os 4 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?

05. Destes, quais são lados? Quais são diagonais?

06. Quais são os possíveis triângulos que podemos formar tendo como vértices os pontos A,B,C e D?

Situação 02. Cinco pontos A,B,C,D e E (vértices de um pentágono convexo)

01. Após ter jogado algumas vezes com seu colega, qual foi a situação de resultado que mais apareceu? Situação de vitória/derrota ou situação de empate?

02. Quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados, para o colega que faz a primeira jogada, partindo do vértice D?

03. E quantos restam para o 2º jogador, na segunda jogada, partindo do mesmo vértice D? E se fosse o vértice B? E se fosse o vértice C? E se fosse o vértice E? E se fosse o vértice A?

04. Dados os 5 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?

05. Destes, quais são lados? Quais são diagonais?

06. Quais são os possíveis triângulos que podemos formar tendo como vértices os pontos A, B, C, D e E?

Situação 03. Seis pontos A, B, C, D, E e F (vértices de um hexágono convexo)

01. Após ter jogado algumas vezes com seu colega, qual foi a situação de resultado que mais apareceu? Situação de vitória/derrota ou situação de empate?

02. Quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados, para o colega que faz a primeira jogada, partindo do vértice C?

03. E quantos restam para o 2º jogador, na segunda jogada, partindo do mesmo vértice C? E se fosse o vértice B? E se fosse o vértice D? E se fosse o vértice E? E se fosse o vértice A? E se fosse o vértice F?

04. Dados os 6 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?

05. Destes, quais são lados? Quais são diagonais?

06. Quais são os possíveis triângulos que podemos formar tendo como vértices os pontos A, B, C, D, E e F?

Situação 04. Sete pontos A, B, C, D, E, F, e G (vértices de um heptágono convexo)

01. Após ter jogado algumas vezes com seu colega, qual foi a situação de resultado que mais apareceu? Situação de vitória/derrota ou situação de empate?

02. Quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados, para o colega que faz a primeira jogada, partindo do vértice B?

03. E quantos restam para o 2º jogador, na segunda jogada, partindo do mesmo vértice B? E se fosse o vértice G? E se

fosse o vértice D? E se fosse o vértice E? E se fosse o vértice A? E se fosse o vértice F? E se fosse o vértice C?

04. Dados os 7 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?

05. Destes, quais são lados? Quais são diagonais?

06. Quais são os possíveis triângulos que podemos formar tendo como vértices os pontos A, B, C, D, E, F e G?

Você já deve ter notado que, à medida que o número de pontos (vértices) aumenta, fica mais difícil listar e contar o número de segmentos de reta e o número de triângulos. Analisando as situações anteriores responda:

a) Existe uma maneira **mais prática** de calcular o número de segmentos? E o número de triângulos? Explique com suas palavras e com cálculos.
b) Você conseguiria responder as questões anteriores no caso de 8 pontos? Ou seja, quantos segmentos de reta podemos formar tendo 8 pontos (vértices de um octógono convexo)?
c) E quantos triângulos podemos formar tendo como vértices os pontos de um octógono? Justifique.

6 ANÁLISE DAS SITUAÇÕES

Analisaremos as diferentes situações apresentadas aos alunos para a construção e apropriação de propriedades do campo conceitual multiplicativo e o desenvolvimento em cada etapa.

O próprio Vergnaud (1990) sugere a necessidade da diversificação de atividades de ensino que permitam ao sujeito a aplicação de um dado conceito em diversas situações e que faça a integração entre as partes e o todo. Com essa diversificação de situações, o aluno pode testar seus modelos e esquemas em diversos contextos, enriquecendo-os ou reformulando-os.

A análise das situações focará os tipos de respostas (corretas e incorretas) e as formas de resolução que os alunos apresentaram. Exceto o primeiro questionário, todos os demais foram identificados pelos alunos e que aqui, nesta pesquisa, estão representados por números: aluno 01, aluno 02, etc.

A classificação das respostas, quanto ao tipo, segue a caracterização a seguir:

Resposta em Branco (B): O aluno não respondeu a questão.

Resposta Correta Parcial (RCP): O aluno apresenta apenas a resposta numérica da questão sem desenvolvimento ou apenas o desenvolvimento sem indicação da resposta numérica.

Resposta Incorreta Parcial Negativa (RIPN): O aluno apresenta apenas um valor numérico incorreto que ele considera ser o correto, sem desenvolvimento.

Resposta Incorreta Parcial Positiva (RIPP): O aluno apresenta o desenvolvimento de seu raciocínio listando algumas possibilidades corretas e/ou incorretas sem indicação de resposta.

Resposta Esperada (RE): O aluno apresenta desenvolvimento completo da questão bem como o resultado numérico correto.

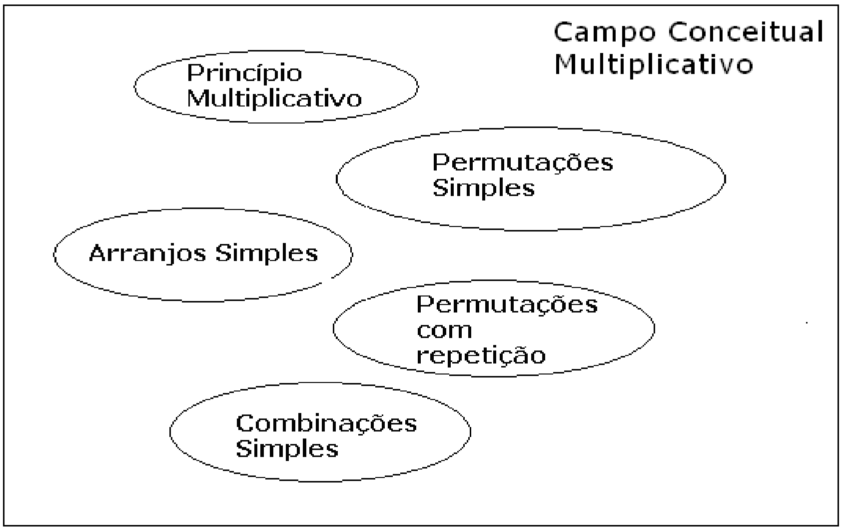
O quadro 3 indica a organização de cada questão indicando o número de alunos que tiveram suas respostas classificadas em um dos tipos descritos anteriormente.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos					

Quadro 3: levantamento quantitativo das respostas por tipo

Os jogos aplicados seguem certa ordem em relação aos diferentes níveis do campo conceitual multiplicativo. Iniciamos com um jogo onde são propostas situações de problemas de contagem e terminamos nossa pesquisa com um jogo onde já existe uma provocação quanto aos problemas de combinações simples, não deixando de explorar outros conceitos dentro do raciocínio combinatório.

No quadro 4 temos uma representação do conjunto dos conceitos referentes ao campo conceitual multiplicativo que iremos abordar.



Quadro 4: Conjunto dos conceitos

A introdução desses conceitos ocorreu após a aplicação dos questionários de cada jogo e em nenhum momento definia-se permutação, arranjo ou combinação. Lembramos que a apresentação desses conceitos aconteceu de uma maneira informal, sem que os alunos soubessem a definição formal de cada um.

Ao fim de cada jogo, discutia-se, geralmente no encontro seguinte, sobre as regras do jogo e de como se poderia pensar nas estratégias utilizando algum esquema que indicasse as possibilidades de jogadas futuras. Ao discutir as estratégias, o professor provocava os alunos quanto a alguns eventos que poderiam surgir e que fossem fatores condicionantes para uma boa estratégia.

6.1 ANÁLISE DO JOGO A GRANDE APOSTA

A Grande Aposta foi o primeiro jogo a ser aplicado na turma. Curiosos, os alunos estavam excitados nesse dia, pois, desde que ingressaram no colégio, nunca haviam pensado de que na aula de Matemática do 8º ano, considerado um ano complicado para os estudantes[3] do colégio, o professor iria fazer um jogo com eles.

Antes de iniciá-lo, distribuímos o material necessário a cada dupla. Como participaram todos os 33 alunos da turma, foi necessário formar um trio, o que não prejudicou o desenvolvimento do jogo, pois, os componentes do trio alternavam-se a cada partida.

A entrega do material deixou-os animados e muito agitados, o que nos levou a chamar a atenção várias vezes para poder explicar as regras. Alguns alunos mantiveram uma postura séria durante todo o momento de entrega de material e a explicação do jogo. É importante salientar que já havíamos trabalhado de uma forma diferenciada com esses alunos, usando multimídias, material concreto e trabalhos coletivos em que era preciso a participação de toda a turma para que um dado assunto fosse compreendido.

---

[3] Justifica-se por iniciar o estudo de álgebra. Os alunos sentem grandes dificuldades em compreender que “as letras agora representam números” (fala dos mesmos).

Durante essas aulas diversificadas, alguns jovens se sentiram incomodados a ponto de vir conversar conosco. Quando questionados, respondiam que preferiam uma aula “normal” ou como eles mesmos disseram, “com o professor lá na frente do quadro e escrevendo, sem fazendo perguntas”[4].

De qualquer forma, a entrega do material do jogo A grande Aposta causou curiosidade e estranheza, pois, ninguém conhecia aquele jogo e, tampouco que tipo de perguntas de matemática se poderia fazer a partir dele.

A seguir, colocamos no quadro cartazes feitos de cartolina com as regras do jogo. Esses cartazes foram colocados em ordem numérica e explicamos cada regra com um exemplo de situação do jogo.

Antes da aplicação da atividade, acreditamos que, logo nas primeiras partidas, os alunos perderiam o interesse de jogá-lo, já que se tratava de um jogo muito simples e rápido.

Mas não foi o que ocorreu. Era difícil de progredir nas explicações das regras, pois, os alunos interrompiam a todo instante questionando-nos sobre as possíveis situações de jogo. Nestes momentos, que não foram poucos minutos, tínhamos que parar a explicação e orientar os jogadores de que qualquer dúvida seria respondida ao final de sua explanação e que deveriam manter suas mãos erguidas para fazer as perguntas.

Depois de uns vinte minutos, aproximadamente, os alunos iniciaram o jogo. Circulamos por entre os jogadores prestando atenção em suas falas, expressões e de como traçavam suas estratégias para vencer o adversário.

Percebeu-se que, mesmo em se tratando de um jogo, eles sentiam uma necessidade de nos chamar para questionar se estavam jogando certo ou não. Fazemos essa observação, pois, inicialmente, eles tentavam ser mais autônomos e internalizar as regras naturalmente.

Ao caminhar pela sala, era interessante notar as falas dos jogadores e as observações acerca das regras. Para o

[4] Fala dos alunos.

lançamento dos dados, um copo de plástico era fornecido a cada dupla e as fichas de cada cavalo estavam agrupadas e seguras por atilhos coloridos. O barulho, a certo ponto já incomodava e os atilhos já haviam se tornado, para alguns, outro brinquedo. Novamente, chamávamos a atenção e pedíamos que continuassem a jogar colaborando com os outros colegas.

Como escrito anteriormente, esses alunos já haviam presenciado uma aula diferente das convencionais dadas no colégio. Durante observações nessas aulas, era possível perceber que, para alguns, esse tipo de aula era brincadeira. Difícil, dentro desse ambiente no qual eles estão inseridos, propor uma abordagem alternativa que fuja da monotonia que eles consideram uma aula de matemática.

Ao término desse primeiro encontro, os aprendizes devolveram o material do jogo e alguns até pediram emprestado para levar para casa, pois queriam mostrar e jogar com seus pais e/ou irmãos.

No encontro seguinte, discutimos com as crianças sobre o jogo e perguntamos a opinião do grupo, em geral. Eles perguntaram se jogariam novamente em alguma outra aula. Respondemos afirmativamente e pedimos que eles voluntariamente explicassem sobre suas estratégias de jogo.

Ao ouvir os alunos, pudemos perceber quais os “teoremas-em-ação” que utilizavam durante os jogos e os tipos de esquemas internos que traçavam para vencer o adversário. Ressaltamos, nessa discussão, que muitos alunos pensaram que o cavalo que possuía o maior número tinha mais chances de vencer um páreo. Assim, a escolha dos cavalos era feita aleatoriamente, sem que houvesse favorecimento de um dos jogadores. Salientamos que outros colegas discordaram dessa idéia de que o cavalo de maior número tinha vantagem, o que levou a uma outra discussão, agora, entre os próprios alunos.

Lembramos que eles ainda não haviam respondido o questionário do jogo e que teriam mais outra oportunidade de jogá-lo.

No encontro seguinte, a turma pôde jogar novamente e percebemos que alguns já haviam adotado uma postura diferenciada quando do encontro anterior. Por mais que o fator sorte estivesse em jogo, alguns já desconfiavam que alguns cavalos eram mais favoráveis a ganhar do que outros e que não eram os de maior número. O que faltava era entender o porquê.

Seguimos com as observações e anotações, prestando atenção mais profundamente no que eles diziam uns para os outros e motivando aqueles que cansavam do jogo. Nesta aula, não conseguimos entregar os questionários, pois, já era muito tarde e a professora do próximo período já estava à espera do sinal.

Assim, o questionário foi respondido no encontro seguinte com tempo disponível para esclarecimentos e discussão. Cada aluno respondia suas perguntas com seu par. Era permitido que os jogadores das duplas conversassem entre si e discutissem as respostas. Esse tipo de interação era importante para a observação, pois, baseados em Vygotsky (1991), acreditamos que a criança fará amanhã sozinha aquilo que hoje é capaz de fazer em cooperação.

Essa cooperação vinha não somente do colega, mas também do professor que, cuidadosamente, fazia intervenções a fim de poder acrescentar dúvidas positivas no desenvolvimento do participante, fazendo com que este reformulasse seu conjunto de invariantes operatórios.

6.1.1 Desempenho dos alunos

O questionário que cada aluno respondeu era composto de perguntas referentes a algumas possíveis situações de jogo. Nesse momento são de nosso interesse as questões de número 01, 02, 03, 04, 07 e 08 que serão apresentadas a seguir com as respectivas análises. Selecionamos as respostas de um pequeno grupo de alunos para fazer estas análises dado que muitas se repetiram.

Questão 01:
Após ter jogado algumas vezes, você acha que todos os cavalos têm a mesma chance?

Resposta esperada:

Não. Algumas somas saem mais do que outras. Logo, alguns cavalos podem sair mais vezes.

As ocorrências de respostas estão indicadas no quadro 5.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	1	0	9	19	2

Quadro 5

No dia em que foi proposto o questionário, um aluno faltou por motivos de saúde. Uma das respostas não foi contabilizada porque apresentou a resposta “mais ou menos”.

Identificamos que os dois alunos que responderam corretamente o que era esperado formavam uma dupla. A justificativa que apresentaram para a questão veio em forma de um esquema representado na figura 11. A resposta não estava totalmente completa, mas esses alunos reconheceram que alguns cavalos eram mais favoráveis que outros.

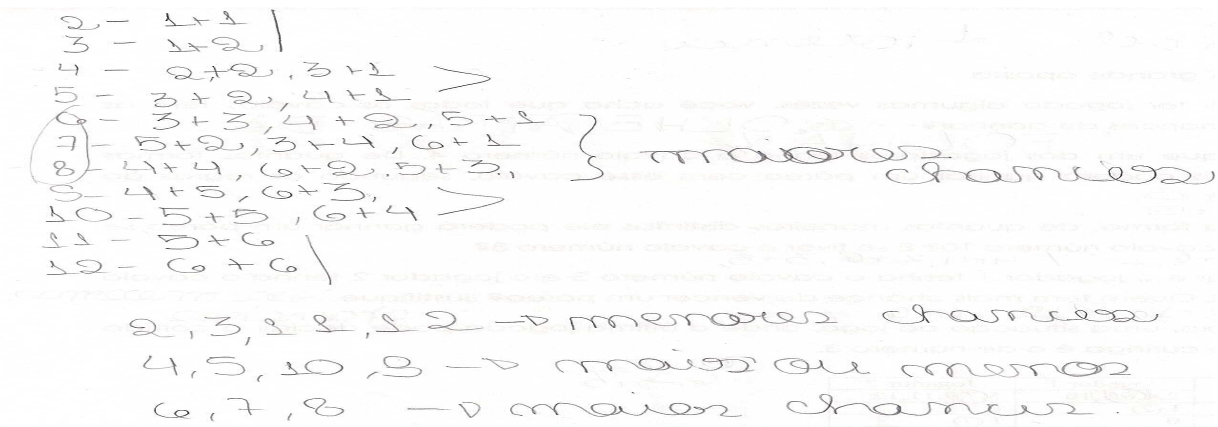


Figura 11: Resposta de aluno

A resposta acima é de um dos alunos dessa dupla. Observe que ele montou um esquema e mesmo desconsiderando o fato de que os dados eram distintos, classificou os cavalos quanto às suas possibilidades de vitória.

Seu colega de jogo também apresentou esquema semelhante, entretanto, não apresentou as chances dos cavalos.

Evidenciamos o fato de um dos alunos responder “não” a questão. Veja a figura 12, correspondente a resposta.

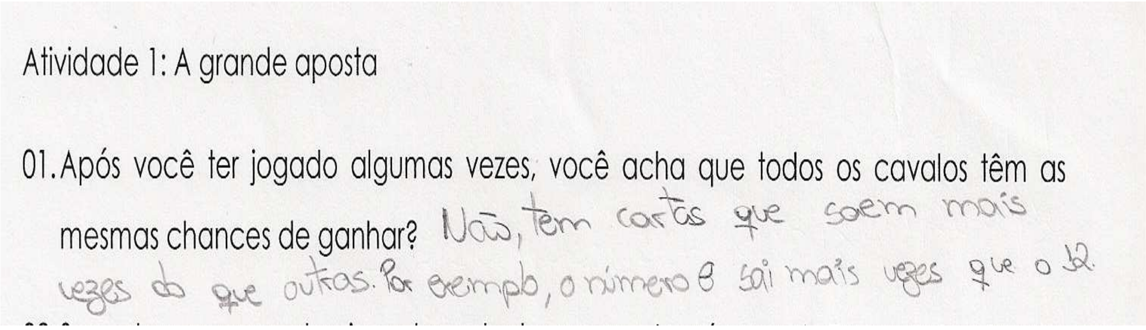


Figura 12: Resposta de aluno

O aluno percebeu que os cavalos não tinham as mesmas chances de ganhar e apresentou como exemplo, os cavalos de número 8 e 12. Infelizmente, nesse primeiro instante, ficamos sem saber se o referido aluno havia ou não entendido a justificativa dessa situação, mas logo a seguir ele nos mostrou que compreendeu a razão da vantagem de certos cavalos. Aqui poderia ter mostrado que o cavalo de número 8 pode sair com as faces 4 e 4 ou 6 e 2; e o cavalo de número 12 apenas com as faces 6 e 6.

Houve também aqueles alunos que tentaram explicar sua resposta, mas não encontraram um argumento válido para isso. Ao analisar as respostas obtidas, nos deparamos com muitas justificativas sem lógica ou fundamentação nas próprias regras do jogo. Um exemplo que citamos é o da figura 13.

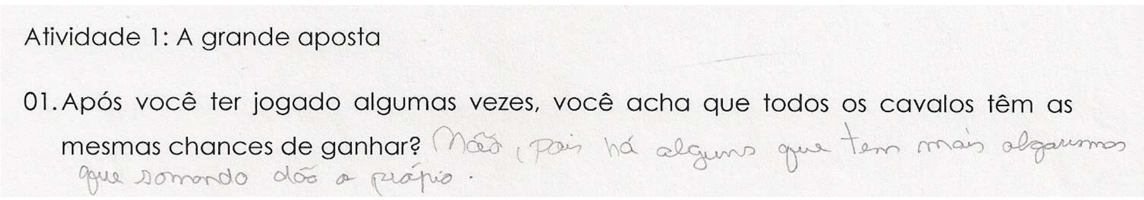


Figura 13: Resposta de aluno (*Não, pois há alguns que têm mais algarismos que somando dão o próprio)*

Veja que não existe uma lógica para a justificativa do aluno, pois, no conjunto {2,3,...,11,12}, se considerarmos a quantidade de algarismos de cada número, não haverá uma relação com as chances de cada um sair. Talvez, a resposta era referente aos dados e não à quantidade dos algarismos dos números dos cavalos. Ao ser questionado, o aluno manteve sua explicação, mesmo sendo provocado a refletir se o que estava em jogo era a quantidade de algarismos dos números ou a quantidade de faces de cada dado.

Confessamos que algumas respostas causavam certa confusão, pois deixavam-nos sem entender o que o aluno queria dizer. Ao longo das análises das respostas, traçávamos novos planos e estratégias para tentar motivar os alunos a pensarem e a discutirem em conjunto com outros colegas. Aparentemente, via-se que esses alunos não estavam acostumados a escrever numa questão que envolvia matemática. Veja a seguir, na figura 14, a resposta de um aluno.

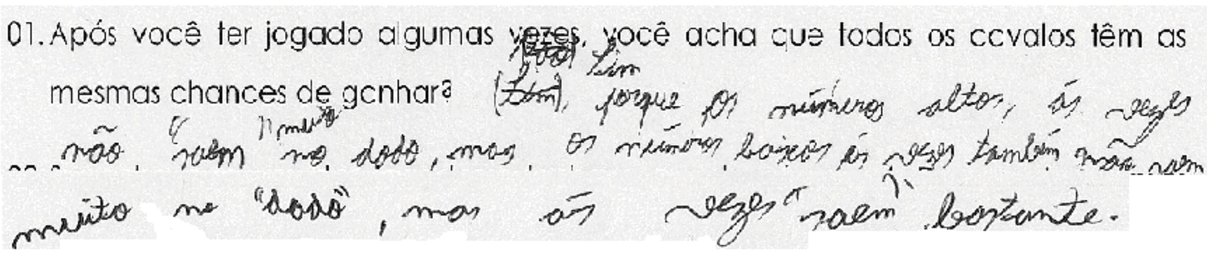

01. Após você ter jogado algumas vezes, você acha que todos os cavalos têm as mesmas chances de ganhar? Sim, porque os números altos, às vezes não saem muito no dado, mas os números baixos às vezes também não saem muito no "dado", mas às vezes saem bastante.

Figura 14: Resposta de aluno (*Sim, porque os números altos às vezes não "saem" muito no dado, mas os números baixos às vezes também não saem muito no dado, mas às vezes "saem" bastante)*

Observe que o aluno fica em dúvida ao responder a questão. Por fim, ele opta por responder afirmativamente a questão apresentando a justificativa.

Questão 02:

Suponha que um dos jogadores tenha o cavalo número 4. De quantas formas distintas ele poderá ganhar um páreo com esse cavalo, segundo as regras do jogo?

Resposta esperada:

Ele poderá ganhar se sair no dado vermelho a face 1 e no azul a face 3, ou no vermelho a face 2 e no azul também 2 ou no vermelho sair face 3 e no azul a face 1.Logo, são 3 formas. Os resultados apresentados estão indicados no quadro 6.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	1	0	10	10	1

Quadro 6

Nesta questão, a resposta de dez alunos não foi contabilizada na classificação por tipo, pois, esses responderam “muitas formas”, “várias” ou “se os números somados derem 4 esse cavalo ganha”.

Na análise dessa questão, salientamos que o aluno que apresentou tanto o desenvolvimento quanto a resposta numérica corretamente, é o mesmo aluno que apresentou a justificativa descrita na Figura 11. Ele apresentou sua resolução semelhante à utilização de pares ordenados: 1;3 , 2;1 e 3;1. Talvez aqui esse aluno já tenha se dado conta do que havia escrito anteriormente na resposta da questão 1.

Vê-se pelo resultado de desempenho dessa questão que uma parte dos alunos não identificou a distinção entre os dados considerando a possibilidade 1;3 igual à possibilidade 3;1. Muitos alunos desenharam os dados para indicar as possíveis somas iguais a quatro. Veja abaixo, nas figuras 15,16,17 e 18, algumas escritas dos alunos referentes a essa questão.

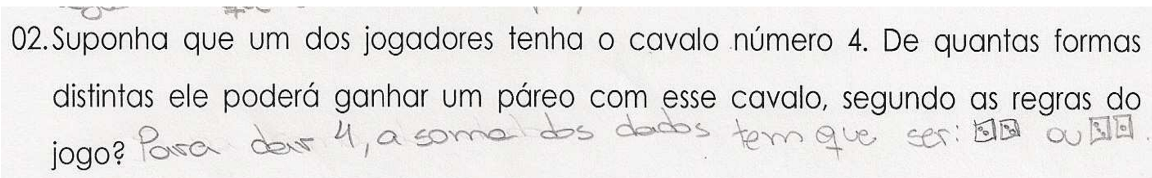

02. Suponha que um dos jogadores tenha o cavalo número 4. De quantas formas distintas ele poderá ganhar um páreo com esse cavalo, segundo as regras do jogo? Para dar 4, a soma dos dados tem que ser: ou .

Figura 15: Resposta de aluno

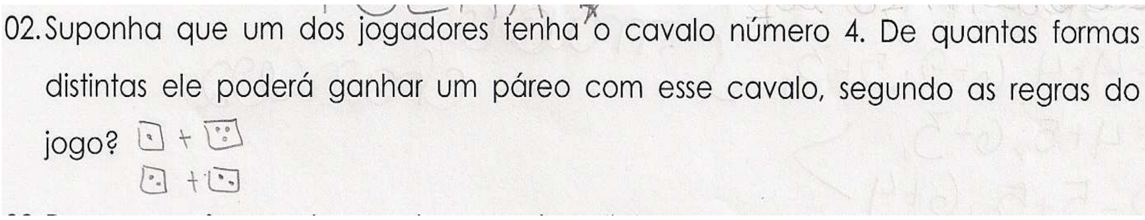

02. Suponha que um dos jogadores tenha o cavalo número 4. De quantas formas distintas ele poderá ganhar um páreo com esse cavalo, segundo as regras do jogo?

Figura 16: Resposta de aluno

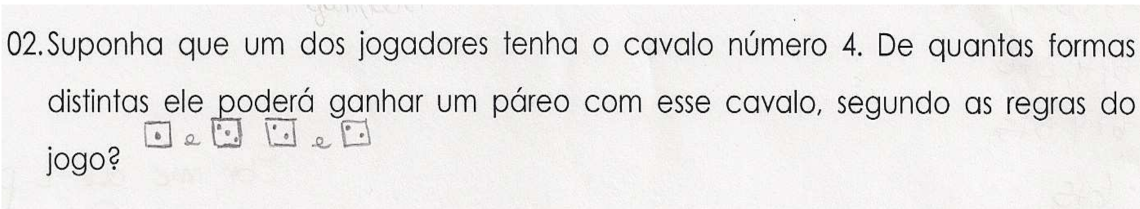

02. Suponha que um dos jogadores tenha o cavalo número 4. De quantas formas distintas ele poderá ganhar um páreo com esse cavalo, segundo as regras do jogo?

Figura 17: Resposta de aluno

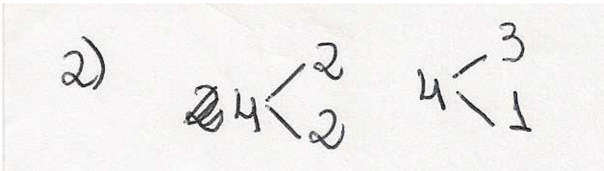


Figura 18: Resposta de aluno

O erro comum dos alunos, como dito anteriormente, foi não identificar a distinção dos dados. Mas enfatizamos que um grupo de alunos respondeu haver muitas formas de esse cavalo ganhar, mas sem ao menos explicar o porquê de tantas formas.

Tanto durante o jogo quanto durante o momento do questionário, percebíamos que alguns alunos não levavam com seriedade a atividade. Portanto, acreditamos que alguns tenham respondido qualquer coisa só para não deixar a questão em branco. Isso ficou claro um tempo depois, quando alguns nos perguntaram se alguém tinha gabaritado o questionário e se valia nota.

A mesma observação vale para aqueles que apenas responderam numericamente, ingressando na classificação RIPN, em que não apresentaram a razão de chegar a esse resultado. Mesmo circulando entre os jogadores, foi difícil identificar aqueles que conversavam com outros e discutiam possibilidades de resposta para questão. Notávamos que alguns simplesmente perguntavam o que o outro colega havia respondido e apenas anotavam a resposta.

Observemos, nas figuras 19 e 20, as respostas de dois alunos referentes a questão 2 do questionário.

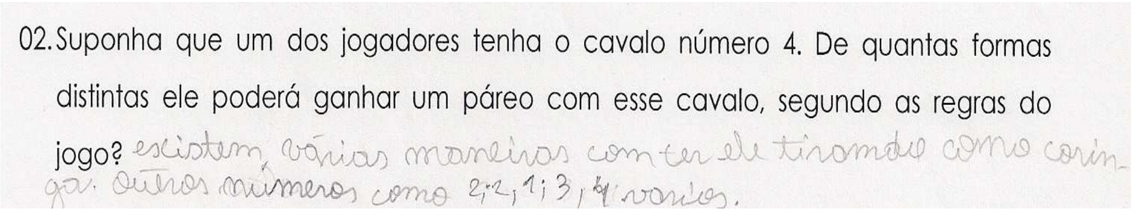

02. Suponha que um dos jogadores tenha o cavalo número 4. De quantas formas distintas ele poderá ganhar um páreo com esse cavalo, segundo as regras do jogo? escistem várias maneiras com ter ele tiromdo como corin-ga. outros números como 2;2, 1;3, 4 varios.

Figura 19: Resposta de aluno

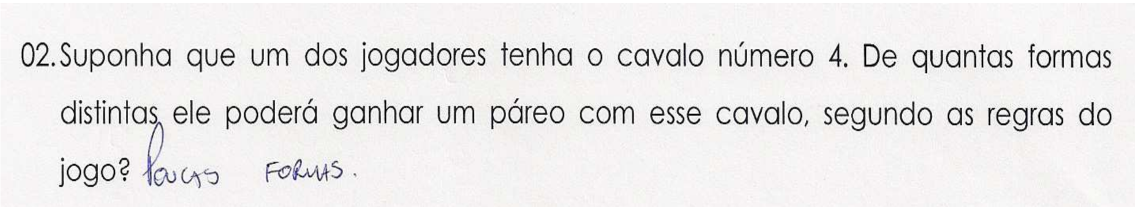

02. Suponha que um dos jogadores tenha o cavalo número 4. De quantas formas distintas ele poderá ganhar um páreo com esse cavalo, segundo as regras do jogo? Poucas FORMAS.

Figura 20: Resposta de aluno

Em relação à resposta da figura 19, veja que o aluno não se deu conta que havia escrito várias formas. Entretanto, ele apresenta duas formas e depois o número 4(?) e depois “vários”. Será que para esse aluno o número de possibilidades de sair soma 4 no lançamento de dois dados é mais do que ele imagina?

Um fator positivo nesse início de análise é que alguns alunos já utilizaram algum esquema ou representação para poder visualizar e entender seu raciocínio.

Questão 03:

Da mesma forma, de quantas maneiras distintas ele poderá ganhar um páreo se ele tiver o cavalo número 10? E se tiver o cavalo número 8?

Resposta esperada:

Para o cavalo de número 10 temos as possibilidades de (4,6), (5,5) ou (6,4) (3 maneiras). Para o cavalo de número 8 temos as possibilidades de (2,6), (3,5), (4,4), (5,3) ou (6,2) (5 maneiras). As ocorrências de resultados estão indicadas no quadro 7.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	0	0	0	22	1

Quadro 7

Nesta questão não contabilizamos as respostas de nove alunos que apresentaram "várias formas", "muitas" ou "idem questão 2", o que não caracteriza um dos tipos de respostas.

O aluno que respondeu o que era esperado é o mesmo que apresentou aquela resposta da questão 1, referente à soma dos algarismos. Ele manteve a forma de listar as possibilidades utilizando uma idéia semelhante a de pares ordenados (Figura 21).

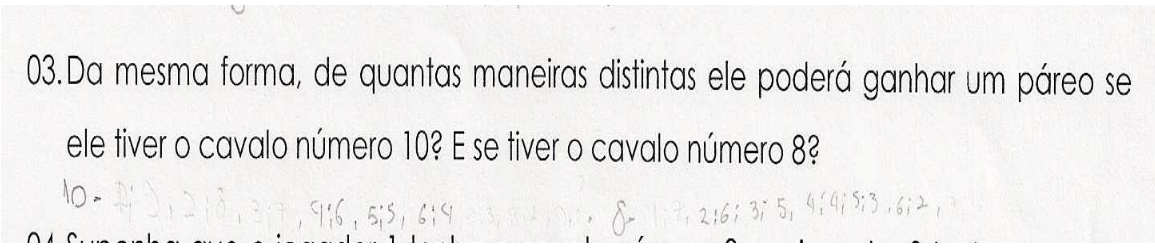


Figura 21: Resposta de aluno (*cavalo número 10: 4;6, 5;5 e 6;4. cavalo número 8: 2;6, 3;5, 4;4, 5;3 e 6;2.*)

Dos alunos que responderam parcialmente a questão, alguns se destacaram pela iniciativa de montar um esquema para representar a situação proposta. Desses vinte e dois alunos, identificamos dezessete que responderam haver duas maneiras para o cavalo de número 10 e três maneiras para o cavalo de número 8. Isso significa que o que faltou a eles para responderem completamente a questão foi identificar que os pares ordenados eram distintos.

Nesta etapa, com muito da nossa motivação e estímulo, os alunos já conversavam mais entre si e, por isso, consideramos que essas respostas tornam-se válidas, pois, os jogadores já começam a estabelecer uma relação entre as possibilidades das somas e as faces dos dados; não completamente, mas esse já foi um primeiro passo.

Aqui também tivemos respostas interessantes. Como na questão anterior, as expressões “várias formas”, “muitas” e “idem questão 2” começaram a se tornar constantes. Mesmo assim, vemos nas figuras 22,23,24 e 25 as respostas de alguns desses alunos.

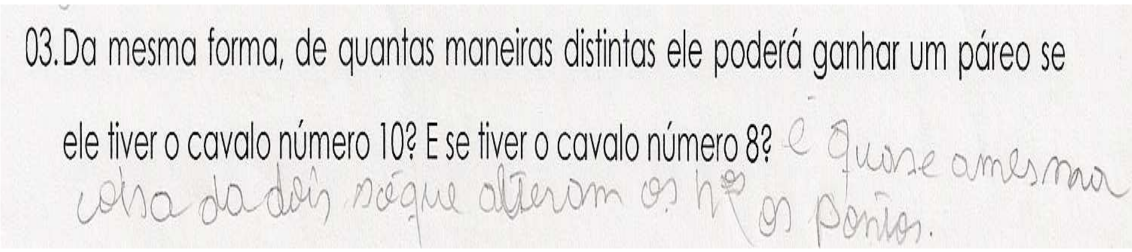

03. Da mesma forma, de quantas maneiras distintas ele poderá ganhar um páreo se ele tiver o cavalo número 10? E se tiver o cavalo número 8? é quase a mesma coisa da dois só que alteram os nº os pontos.

Figura 22: Resposta de aluno

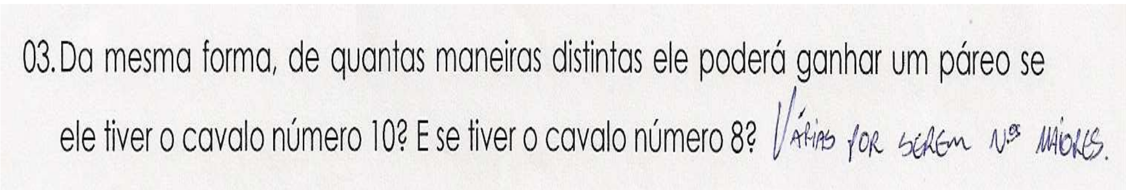

03. Da mesma forma, de quantas maneiras distintas ele poderá ganhar um páreo se ele tiver o cavalo número 10? E se tiver o cavalo número 8? Várias por serem nºs maiores.

Figura 23: Resposta de aluno

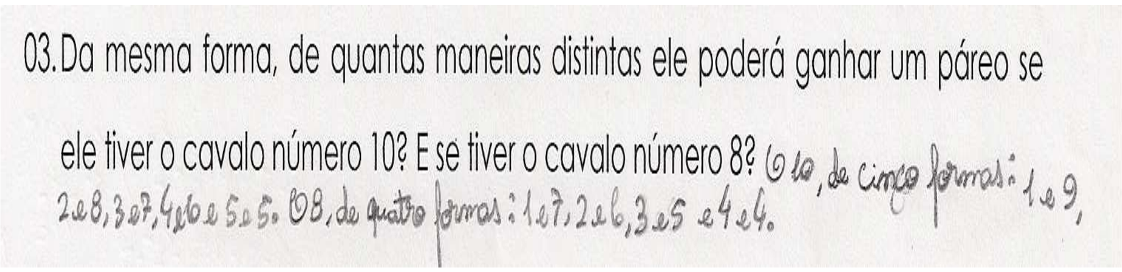

03. Da mesma forma, de quantas maneiras distintas ele poderá ganhar um páreo se ele tiver o cavalo número 10? E se tiver o cavalo número 8? 10, de cinco formas: 1 e 9, 2 e 8, 3 e 7, 4 e 6 e 5 e 5. 08, de quatro formas: 1 e 7, 2 e 6, 3 e 5 e 4 e 4.

Figura 24: Resposta de aluno

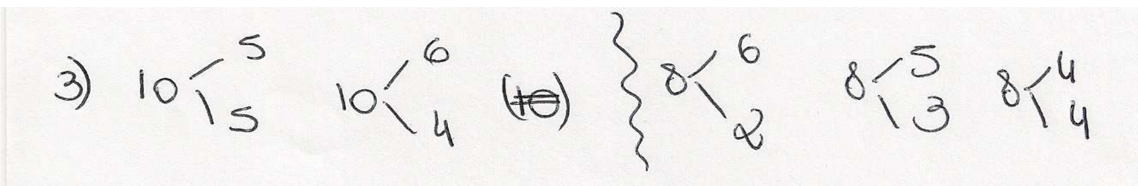


Figura 25: Resposta de aluno

Nas figuras acima, vemos exemplos de respostas que estavam previstas e de outras que, em nenhum momento, acreditávamos que iriam figurar na tabulação dos dados.

O aluno que apresenta a resposta indicada pela figura 23 mantém uma posição quanto às vantagens dos números serem maiores. O aluno resposta da figura 22 é coerente com o que respondeu na primeira questão. Logo, para ele, todos os cavalos têm as mesmas chances de ganhar.

Surpreendente foi a resposta na figura 24. Observe que o aluno não se deu conta de que a numeração dos dados vai até 6. Assim, ele considerou possibilidades tais como 1,9 ; 2,8 e 3;7. Foi o único que apresentou essas possibilidades.

Neste primeiro jogo, como as duplas eram formadas por alunos que não mantinham um contato afetivo em sala de aula, acreditamos que alguns responderam individualmente seu questionário sem discutir com o seu companheiro de jogo. Este tipo de comportamento é habitual no ambiente do colégio, geralmente naqueles alunos que são considerados bons. Foi visível a competição entre alguns desses alunos tanto no jogo quanto ao responder os questionários, fato esse que não favorecia o interacionismo dos jogadores.

Questão 04:

Suponha que o jogador 1 tenha o cavalo número 3 e o jogador 2 tenha o cavalo de número 12. Quem tem mais chance de vencer um páreo? Justifique.

Resposta esperada:

O cavalo de número 3 pode sair de duas maneiras: (1,2) ou (2,1). O cavalo de número 12, apenas uma: (6,6). Então o cavalo 3 tem mais chance de vencer um páreo. Os resultados apresentados estão indicados no quadro 8.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	0	4	8	17	1

Quadro 8

Duas respostas não foram contabilizadas na classificação acima.

A diferença desta questão para a anterior está no tipo de raciocínio e de pensamento que o aluno deve desenvolver para poder respondê-la. Veja que na questão anterior, perguntamos as possibilidades de dois cavalos e, nesta, o aluno deve identificar qual tem mais chance de vencer um páreo.

Desse modo, estudamos as variações nas respostas de uma e outra questão em relação às mudanças no enfoque das perguntas. Por isso foi importante a observação direta no ambiente dos alunos, especificamente em suas falas, pois, muitos destes não conseguiam escrever o que era pedido ou a explicação de seu próprio raciocínio. Assim, quando queriam construir seus esquemas, chamavam o professor e respondiam oralmente. Vygotsky (1990), em seu trabalho já mencionava que a fala da criança é tão importante quanto a ação para atingir um objetivo. É uma fala dirigida para a solução do problema.

As dezessete respostas classificadas como RIPP são daqueles alunos que listaram as possibilidades de vencer dos dois cavalos, mas desconsideraram que os dados eram distintos. Vemos abaixo, nas figuras 26 e 27, a resposta de dois desses estudantes.

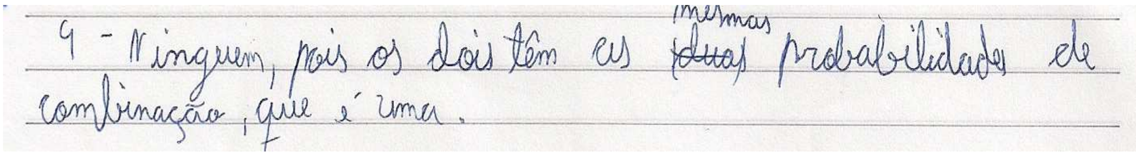


Figura 26: Resposta de aluno

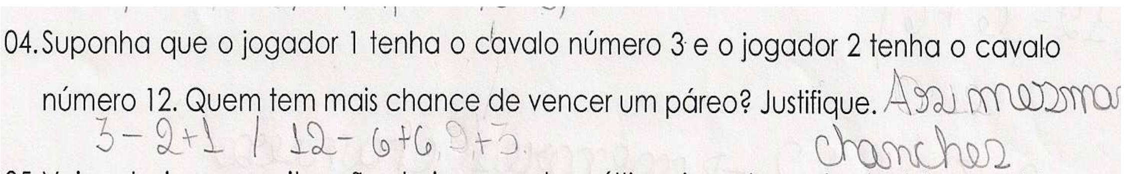
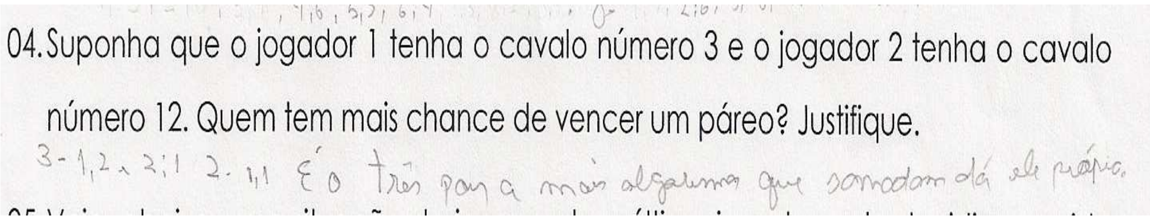


Figura 27: Resposta de aluno

O único aluno que teve sua resposta considerada como RE, na verdade, confundiu os números dos cavalos, mas, mesmo assim, sua resposta foi satisfatória. Este aluno é aquele que respondeu a questão 01 com o argumento da soma dos algarismos. Veja a justificativa para sua resposta na questão 4. Ao ler a resposta do aluno, questionamos, novamente, a que ele se referia por “soma dos algarismos” (Figura 28). O aluno explicou seu raciocínio mostrando os tais algarismos. Nada mais eram do que os números das faces dos dados. Portanto, não estava se referindo aos algarismos, mas aos pares de números. Assim, tudo ficou mais claro.


04. Suponha que o jogador 1 tenha o cavalo número 3 e o jogador 2 tenha o cavalo número 12. Quem tem mais chance de vencer um páreo? Justifique.

3- 1,2 e 2,1 2- 1,1 É o três pois a mais algarismos que somados dá ele próprio.

Figura 28: Resposta de aluno

Os quatro alunos que tiveram suas respostas classificadas como RCP afirmaram ser o cavalo de número 3 aquele com mais chances de vencer o páreo, mas não explicaram o porquê.

Questão 07:

Supondo que a escolha dos cavalos não fosse feita “aleatoriamente” pelos cartões e sim pelo número obtido da **soma** das faces voltadas para cima dos dois dados. Quais são os possíveis pares dos dados e quantos são estes?

Resposta esperada:

1+1, 1+2, 1+3, 1+4, 1+5, 1+6, 2+1, 2+2, 2+3, 2+4, 2+5, 2+6, 3+1, 3+2, 3+3, 3+4, 3+5, 3+6, 4+1, 4+2, 4+3, 4+4, 4+5, 4+6, 5+1, 5+2, 5+3, 5+4, 5+5, 5+6, 6+1, 6+2, 6+3, 6+4, 6+5, 6+6. Total de 36 maneiras. Os resultados apresentados estão indicados no quadro 9.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	0	1	11	19	1

Quadro 9

Neste momento, muitos alunos nos chamaram para pedir ajuda. Eles estavam chegando ao fim do questionário e percebiam que as perguntas exigiam respostas mais elaboradas do que simplesmente responder por responder.

Ao ver que os alunos estavam em dúvidas sobre algumas situações do jogo que o questionário apresentava, fomos ao quadro-negro e pedimos um instante de atenção. Avisamos que passaríamos de mesa em mesa para ajudar nas dúvidas, mas solicitamos que tentassem escrever algo, que se baseassem nas respostas anteriores e nas discussões com os colegas.

E assim foi feito e fez efeito. Orientamos algumas duplas e outras, que haviam requerido ajuda, já não mais necessitavam, pois o entendimento da questão e de suas próprias respostas já tomava um caminho compreensível.

Mesmo assim, dezenove alunos mantiveram uma idéia equivocada quanto a não distinção dos dados e apresentaram, como total de possibilidades, 21 somas. Mesmo que esses dezenove representem uma fatia representativa da turma, consideramos suas respostas um progresso, dado que eles contaram as possibilidades e formalizaram um esquema próprio de contagem. Abaixo, nas figuras 29,30 e 31, temos algumas das respostas desses alunos, sendo a última dessas respostas a do aluno que respondeu corretamente o que era esperado.

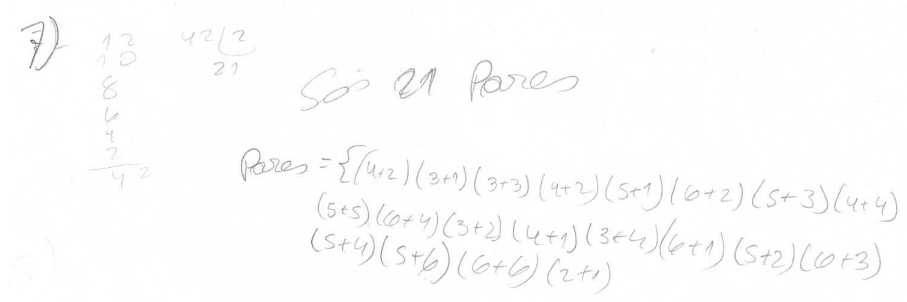


Figura 29: Resposta de aluno

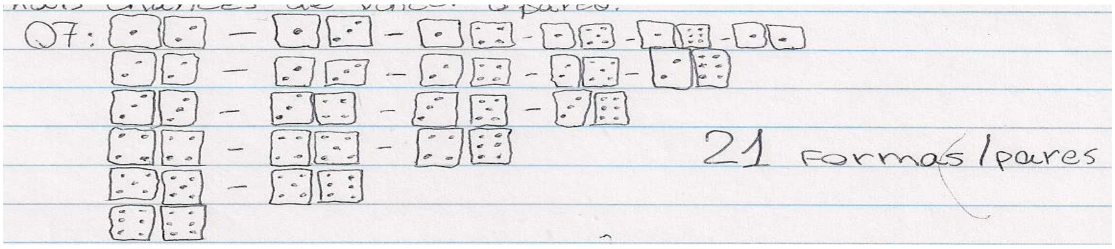


Figura 30: Resposta de aluno

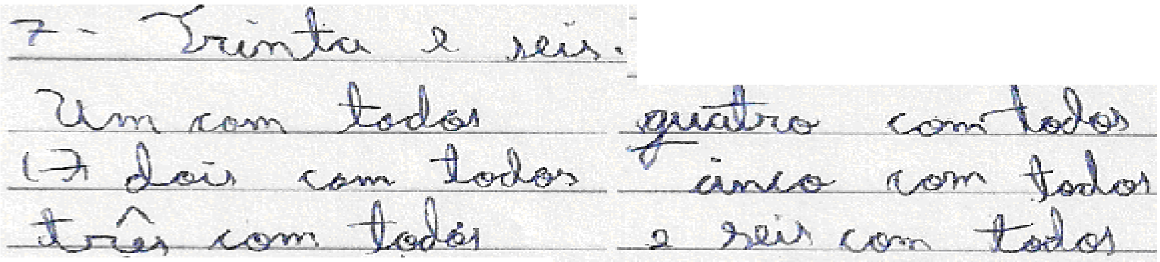


Figura 31: Resposta de aluno

Nessa questão 7 provocamos os alunos a pensarem nas diferentes possibilidades de pares ordenados e suas somas, tentando induzi-los a pensarem e reformularem seus esquemas,“teoremas-em-ação” e “conceitos-em-ação”.

Na próxima questão, exigimos mais e propusemos uma situação onde o jogo não mais era jogado com dois dados distintos e sim com três dados distintos[5]. Vejamos o que houve a seguir com o fechamento do questionário do primeiro jogo e as discussões que foram levantadas nessa nova situação.

Questão 08:

E se, em vez de serem dois dados, fossem três. O jogo deveria ter quantos cavalos? Quantos são os possíveis resultados da forma (d_1,d_2,d_3) onde d_1,d_2 e d_3 são os possíveis números indicados pela face voltada para cima de cada dado?

Resposta esperada:

[5] Essa informação foi dita em sala de aula, pois, após entregue o questionário, o autor se deu conta que não havia, nesta questão, a palavra “distintos” referente aos dados, bem como o ponto de interrogação no final da primeira oração.

Com dois dados, o cavalo de menor número é 1+1=2 e o de maior número é 6+6=12, tendo, então 11 cavalos.

Com três dados, o cavalo de menor número será 1+1+1=3 e o de maior número será 6+6+6=18, tendo então 16 cavalos.

Com dois dados, são 36 pares, porque para cada face do dado vermelho, por exemplo, há 6 para o dado azul. Então, 6x6=36.

Assim, dá para pensar que, para cada face de um dado, há 6 para o 2º dado, ou seja, 36. Para cada um destes 36 pares há 6 para o 3º dado. Logo, 36x6=216. As ocorrências dos resultados estão indicadas no quadro 10.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	3	2	9	15	3

Quadro 10

Aqui nos preocupamos com a possibilidade de o aluno apresentar alguma operação que indicasse a quantidade total de conjuntos da forma (d_1,d_2,d_3). Obtivemos três alunos que responderam o que era esperado, tanto na quantidade de cavalos quanto na quantidade de conjuntos (d_1,d_2,d_3) possíveis.

Um desses alunos apresentou uma fórmula que envolvia as faces dos dados (Figura 32).

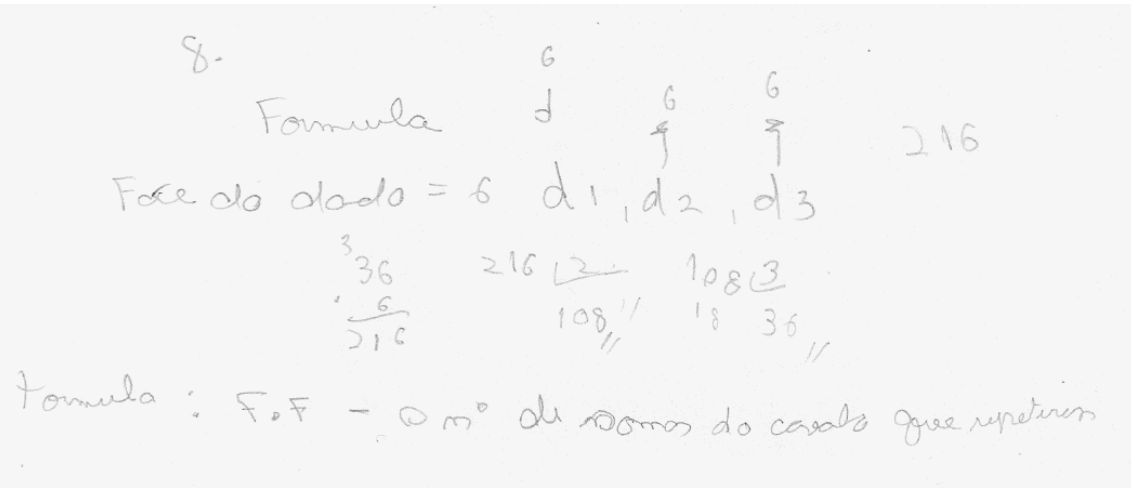


Figura 32: Resposta de aluno

Veja que o aluno estabeleceu uma relação com a quantidade de faces dos dados e as possíveis somas. O seu par, nesse jogo, não entendeu o que ele havia feito e preferiu tomar outro caminho (Figura 33). Este sabia que, para determinar a quantidade de conjuntos (d_1,d_2,d_3), deveria envolver a multiplicação nesse raciocínio. Porém, não obteve êxito, como aconteceu com o colega da figura acima.

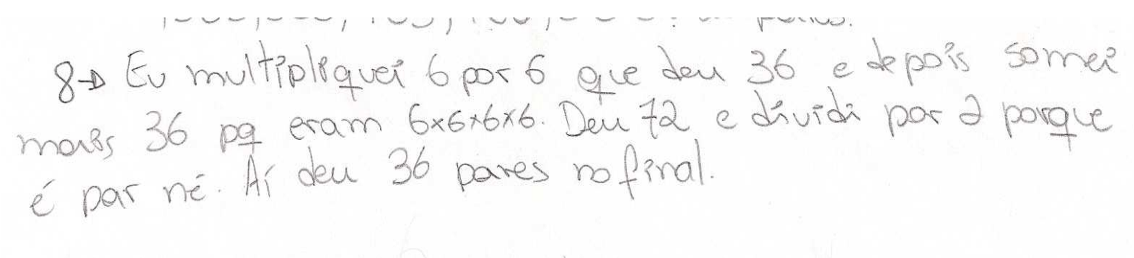

8→ Eu multipliquei 6 por 6 que deu 36 e depois somei mais 36 pq eram 6x6x6x6. Deu 72 e dividi por 2 porque é par né. Aí deu 36 pares no final.

Figura 33: Resposta de aluno

A maioria dos alunos manteve-se coerente com aquilo que achava estar correto, por mais que tivéssemos exposto ajuda nas duplas. De forma geral, neste primeiro jogo, notamos que os alunos guardaram para si suas opiniões e suas expressões. Alguns externalizaram suas falas indicando necessitarem de ajuda, mas alguns internalizaram suas falas, talvez antes mesmo de as tornarem falas socializadas. Dando prosseguimento às analises, propusemos o segundo jogo, um segundo conjunto de problemas. Nessa primeira avaliação do trabalho ainda não tivemos condições de afirmar ou suspeitar de que algum aluno já construiu um conceito. Um aluno não constrói um conceito em torno de um problema, mas constrói um conjunto de conceitos que lhes dão sentido num campo de problemas (Vergnaud, 1993). Vejamos, então, a análise do segundo jogo aplicado onde revimos nossa estratégia de observação a fim de propor aos alunos uma oportunidade de reflexão e construção de novas aprendizagens.

6.2 ANÁLISE DO JOGO CONTIG60

Antes da explicação das regras houve a entrega de material e este continha, novamente, dados e copos, o que causou um grande alvoroço, pois, assim que cada dupla recebia-os, já iniciavam a "música" dos copos. Um tabuleiro também foi entregue e os alunos começaram, sem perda de tempo, a se perguntarem que jogo era aquele e porque estavam faltando alguns números no tabuleiro (figura 34).

CONTIG 60

0	1	2	3	4	5	6	7
27	28	29	30	31	32	33	8
26	54	55	60	64	66	34	9
25	50	120	125	144	72	35	10
24	48	108	180	150	75	36	11
23	45	100	96	90	80	37	12
22	44	42	41	40	39	38	13
21	20	19	18	17	16	15	14

Figura 34:Tabuleiro do Contig60®. Fonte: http://www.pucsp.br/~maze/jogos/americanos/11CONTIG%2060.pdf

Pedimos calma à todos e que, tão logo entregasse o material do jogo a cada dupla, iniciaríamos as explicações das regras do jogo e assim prosseguimos como o planejado. As regras foram colocadas no quadro em cartazes feitos de cartolina e em ordem numérica. Nós as explicávamos com um exemplo, a partir de uma situação do jogo.

O diferencial deste jogo em relação ao anterior, além de seus aspectos físicos, era que neste, os alunos deveriam não só pensar no fator sorte como eles mesmos diziam, mas, também, em uma expressão que indicasse algum valor do tabuleiro.

Depois de um certo tempo tirando as dúvidas dos alunos sobre as regras do jogo, iniciamos as observações circulando pela sala e testemunhando as falas e expressões dos participantes a cada lançamento de dados.

Um fato observado e que foi exposto por grande parte dos jogadores foi a demora do jogo. Eles diziam que o jogo não tinha a mesma rapidez do jogo anterior. Quando perguntamos por que, disseram que nesse eles tinham que pensar durante o jogo. Novamente os questionamos: ”Como assim? Quer dizer que no jogo anterior vocês não pensavam?”. Eles responderam afirmativamente corrigindo suas falas. O que eles queriam dizer é que nesse jogo tinham que pensar numa sentença numérica cujo resultado deveria constar no tabuleiro. E mais: Ainda tinham que pensar na estratégia para vencer o adversário.

Neste jogo, sentimos dificuldade em presenciar o que os alunos pensavam acerca de suas estratégias e de como a atividade ia se configurando à medida que as operações numéricas eram combinadas. Nossa observação estava focada no processo de contagem, sendo que só nas últimas questões do questinário provocamos os alunos a pensarem no princípio multiplicativo.

Parece que eles não ficaram tão empolgados como nos dias anteriores, com o jogo A Grande Aposta. Era nítido que ficaram cansados muito rápido ou, talvez, aquele não era um dia bom de aplicar esse jogo. Na verdade, quando terminou o período e os alunos devolveram o material, fizemos uma análise geral de como eles haviam apreendido essa nova situação. Nossa hipótese era de que os alunos esperavam algo mais interessante do que o jogo anterior e que nesses encontros, nos quais haveria jogos, não teriam que pensar logicamente.

Enfim, o jogo não foi bem aceito pelo grupo, mas precisávamos continuar com nosso planejamento, mesmo com a falta de motivação dos alunos. Portanto, durante o jogo conseguimos poucas informações sobre o que os alunos estavam pensando e de como formulavam seus esquemas, deixando essa análise para o questionário que estava por vir.

6.2.1 Desempenho dos alunos

Centramos nossa análise nas questões de número 01, 03, 04, 07, 11 e 14. Ao fim da descrição de cada questão, fazemos uma análise parcial sobre o questionário apresentado, bem como as intervenções e reformulações para o próximo jogo.

Questão 01:

Veja, abaixo, uma situação do jogo, onde apenas os espaços dos números 6, 8 e 33 estão ocupados. Para marcar 3 pontos, o espaço do número 7 deve ser ocupado. De quantos modos isso é possível usando apenas adição com os números obtidos no lançamento dos dados?

6	7
33	**8**

Resposta esperada:

1+1+5, 1+2+4, 1+3+3 ou 2+2+3 (4 formas). Os resultados estão indicados no quadro 11.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	0	0	2	10	21

Quadro 11

Os alunos apresentaram um bom desempenho na primeira questão. Nessa situação, em que a operação de adição estava envolvida, os alunos perceberam que não havia distinção entre os dados, pois, o conjunto {1,2} é o mesmo que {2,1}, configurando a comutatividade da adição.

Pudemos observar que vinte um alunos responderam completamente a questão, apresentando tanto a quantidade de modos quanto as possibilidades (Figuras 35,36 e 37).

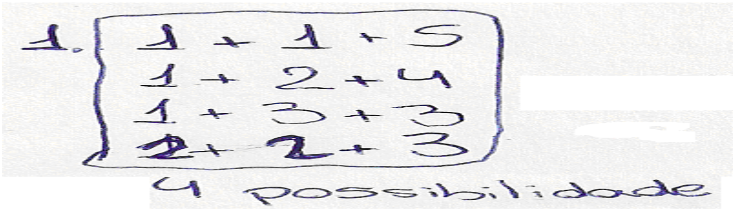


Figura 35: Resposta do aluno 01

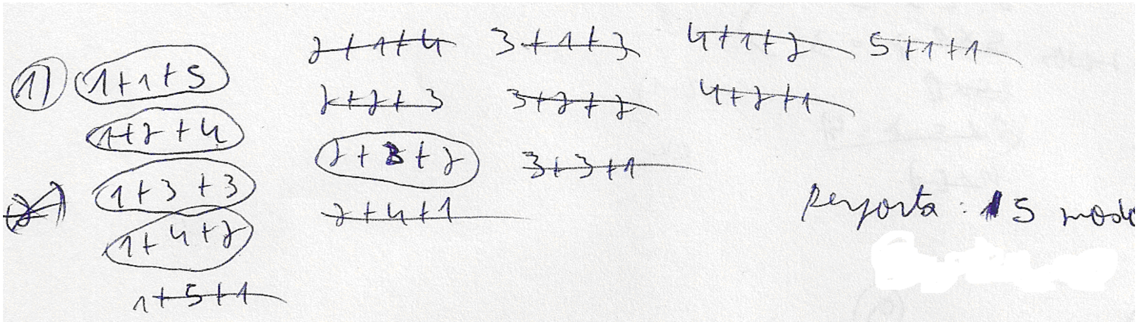


Figura 36: Resposta do aluno 02

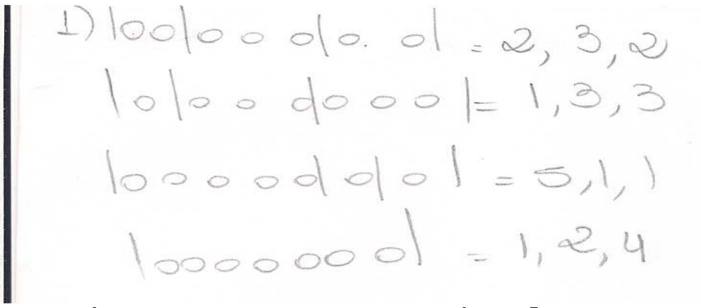


Figura 37: Resposta do aluno 03

A resposta da figura 35, é uma das tantas respostas que surgiram para a questão 1. Observe que o aluno constrói um esquema para listar as possíveis somas, indicando as parcelas em ordem crescente. Muitos alunos se organizaram dessa forma e conseguiram responder o que era esperado.

Agora, vejamos a resposta indicada pela figura 36, de um aluno considerado bom em matemática e que antes de escrevê-la, já havia nos dito como iria fazê-la. Ele dispôs todas as combinações possíveis montando um esquema segundo uma ordem crescente de numeração.

Ele listou, em colunas, todas as possibilidades cuja soma resultava o número 7. Observe que na primeira coluna, ele coloca como primeira parcela o número 1, depois, na continuação da soma, todos de 1 ao 5 e, por fim, na terceira parcela, o que completava resultado 7. Na segunda coluna, a primeira parcela foi o número 2, depois, na continuação da soma, todos de 1 a 4 e, por fim, na terceira parcela, o que completava resultado 7.

Ao todo, ele encontrou 15 possibilidades para soma 7, entretanto, ele riscou aquelas possibilidades que se distinguiam apenas pela ordem da parcela, já que a adição é comutativa para os números naturais. Ao contar as possibilidades, ele repetiu a soma 1+2+4 = 1+4+2. Mas isso não interfere em nossa análise já que ele conseguiu listar as possibilidades e encontrar uma representação para as demais questões.

Perguntamos ao aluno por que havia usado esse método. Questionamos se não seria melhor pensar em comutatividade. As parcelas somadas que dão sete não dependem de ordem. O aluno respondeu que havia encontrado um jeito que, para ele, era mais acessível. Ele considerava todas as possibilidades possíveis e, depois, ia descartanto aquelas que diferem apenas pela ordem. Deixamos o aluno prosseguir com seu esquema pois, ele encontraria as possibilidades de qualquer jeito.

Ao fim desse encontro, chamamos esse aluno à mesa e pedimos que explicasse com mais detalhes o modo como havia pensado em listar as possibilidades. Ele então explicou que " a soma tem que dar 7,né? Então, as parcelas só podem ir de 1 a 5 porque se tiver 6, aí não dá pra fazer com três parcelas. Se a primeira parcela for 1, então na segunda eu só posso ir até o 5, por causa do 6. Daí eu completo para chegar no 7, que vai ser o contrário, ó. Se a primeira parcela for 2, então na segunda só posso ir até o 4. Daí eu faço a mesma coisa pro resto até chegar no 7. Depois eu corto as somas que são iguais"[6].

Essas somas iguais referem-se àquelas que possuem as mesmas parcelas, distintas apenas pela ordem. Essa informação foi apresentada por ele apontando para a sua resposta, especificamente as possibilidades riscadas por ele. Antes que

[6] Fala do aluno

o aluno saísse para o intervalo, questionamos se não seria melhor pensar em soma 6 ao invés de 7 e em duas parcelas ao invés de três. O aluno respondeu “tanto faz” e saiu em disparada ao encontro de seus colegas que o esperavam na porta da sala.

Enfim, ele, talvez sem saber, trabalhou com um tipo de combinação com repetição. Ao estudar equações lineares com coeficientes unitários, encontramos que o número de soluções em inteiros positivos de uma equação do tipo $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = m$, $m > 0$ é dado por C_{m-1}^{r-1}. Veja que o aluno estava resolvendo uma equação do tipo $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ que, nesse caso, é possível resolver utilizando a fórmula combinatória simples citada anteriormente, levando em conta a condição de que $x_1, x_2, x_3 \leq 6$ não representa nenhuma restrição adicional, uma vez que $x_1 + x_2 + x_3 = 7$, $x_1, x_2, x_3 \geq 1 \Rightarrow x_i \leq 5$ para todo *i*.

Vejamos a terceira resposta apresentada na figura 37. Esse aluno manteve esse esquema até a questão 4. É uma representação bem semelhante a que geralmente se utiliza para resolver equações do tipo $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = m$, $m > 0$ antes de generalizar uma fórmula.

Esse aluno escreveu o número 7 como o agrupamento de 7 círculos, isto é,

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○=7

Figura 38: Estratégia de resolução

Depois, separou esses sete círculos em três parcelas. Para isso, introduziu quatro barrinhas (|) entre os círculos. Um dos exemplos,

Figura 39: Resolução de aluno

indica que uma das possibilidades é a terna (1,3,3). E assim seguiu com esse esquema atingindo sucesso na resposta da questão.

Quando o professor perguntou como havia pensado nisso, ele respondeu que "tinha que separar 3 números que somados dão 7. É melhor botar 7 coisinhas e ir separando de quatro em quatro barrinhas"[7]. Nossa dúvida era saber se esse aluno já havia trabalhado com esse tipo de problema ou alguma outra pessoa tivesse lhe dito, porque estávamos impressionados com a forma de resolução. Afinal, não fizéramos nenhuma introdução formal de problemas de contagem.

Questão 03:

Imagine a situação de jogo apresentada na questão 01. Considere os mesmos valores apresentados, porém, fazendo uso das operações adição e subtração.

Respostas esperadas:

6+2-1, 6+3-2, 6+4-3, 6+5-4, 6+6-5, 5+3-1, 5+4-2, 5+5-3 ou 4+4-1 (9 maneiras). As ocorrências de resultados estão indicadas no quadro 11.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	1	0	2	25	5

Quadro 11

É uma situação semelhante à da questão 01 porém, com o uso de adição e subtração simultaneamente. Ao ler as respostas dos alunos, percebemos que alguns não compreenderam que as duas operações deveriam ser utilizadas na mesma sentença. Talvez isso não tenha ficado claro na pergunta.

[7] Fala do aluno

Um grupo considerável (25 alunos) desenvolveu a resposta apresentando algumas possibilidades favoráveis à situação. Mesmo que as respostas não fossem completas, consideramos positivo o desempenho desses alunos, pois, significava que estavam pensando sobre a situação do jogo dentro de uma limitação de operações.

Os alunos que responderam o que era esperado apresentaram resolução semelhante à que indicamos na figura 40.

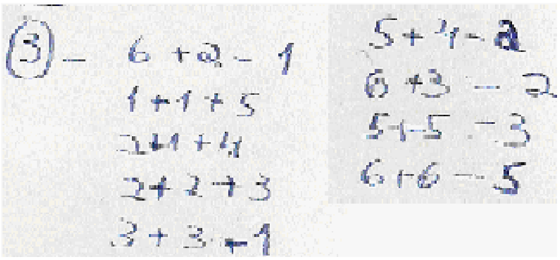


Figura 40: Resposta do aluno 01

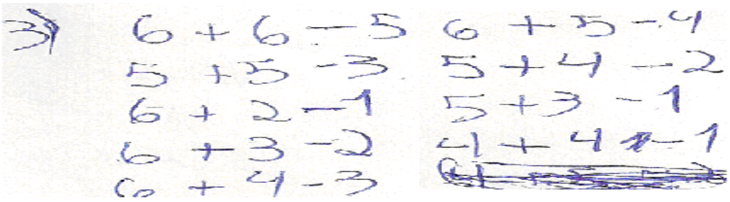


Figura 41: Resposta de aluno 04

As resoluções classificadas em RE, apresentadas nas figuras acima, caracterizam o tipo de esquema que os alunos montaram para poder compreender e entender a questão e sua resposta. Ambos os alunos que apresentaram as resoluções nessas figuras mantiveram um esquema, uma representação em suas respostas.

Veja que a primeira operação inserida nas expressões foi a adição. Quando perguntamos a um desses alunos o porquê de utilizar a adição primeiro, ele nos respondeu que “é mais fácil somar antes e depois diminuir”[8]. Não foi uma resposta satisfatória, pelo menos para nós. Insistimos na pergunta e, dessa vez, ele conseguiu ser um pouco mais claro.

---

[8] Fala do aluno

Assim, respondeu: “ eu sei que a maior soma é doze, por causa dos dois seis. Eu posso tirar uma face cinco e tirar do doze, aí dá sete. Aí faz o resto. A próxima soma é onze e daí eu tiro um quatro, depois a soma é dez e eu tiro 3 e assim vai”[9]. Dessa forma o aluno pensava apenas nas possibilidades da primeira soma sem interferir no valor do subtraendo a seguir.

Para somar dez, temos duas possibilidades para as duas parcelas: 6+4 e 5+5. Para se chegar ao resultado sete, basta diminuir três de cada uma. Ainda ouvimos um dos colegas comentar que era mais fácil contar assim.

Questão 04:

No lançamento dos três dados, suponha que tenham saído as faces 3, 4 e 5 não necessariamente nesta ordem. Quais são os possíveis espaços que podem ser ocupados fazendo uso da adição e da multiplicação segundo as combinações abaixo?

$$\boxed{} \times \boxed{} + \boxed{}$$

$$\boxed{} \times \left(\boxed{} + \boxed{}\right)$$

Resposta esperada:

3x4+5=17, 3x5+4=19, 4x5+3=23, 3x(4+5)=27, 4x(3+5)=32 ou 5x(3+4)=35. As respostas são apresentadas no quadro 12.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	0	0	0	15	18

Quadro 12

Nesta questão, obtivemos um desempenho muito bom dos alunos. Dezoito aluno alunos alcançaram a resposta esperada identificando a comutatividade tanto da adição quanto da

[9] Fala do aluno

multiplicação. Acreditamos que a diferença do desempenho dessa questão para a anterior deu-se, provavelmente, pelo fato de termos apresentado uma figura que representasse os espaços dos fatores/parcelas. Quando os alunos chegaram nessa questão, explicamos que naqueles espaços eles deveriam colocar os números 3, 4 e 5 para descobrir os possíveis espaços a serem preenchidos.

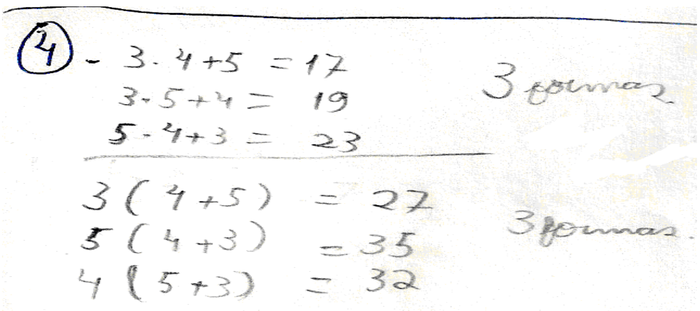


Figura 42: Resposta do aluno 05

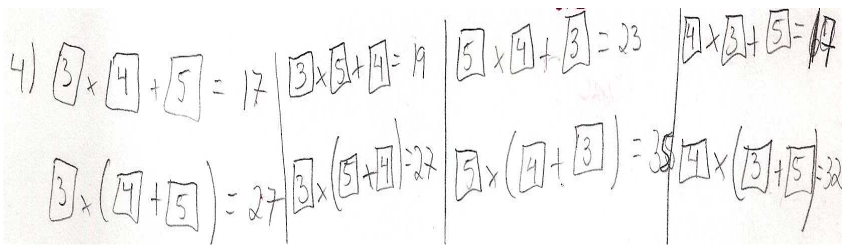


Figura 43: Resposta do aluno 06

Algumas resoluções se destacaram não pela forma apresentada, mas sim, pela dificuldade de resolver uma multiplicação.

À medida que formos descrevendo a análise das respostas dos jogos, citaremos tipo de erros que não se encaixam na organização combinatória do aluno, mas, sim, na gênese de seus conhecimentos prévios, no caso desse jogo, o das operações aritméticas.

Questão 07:

Suponha que, no lançamento dos dados, tenham saído as faces, 3,5 e 6, não necessariamente nesta ordem. Com a adição e a divisão, quais são os espaços possíveis de serem ocupados, segundo as combinações abaixo?

$$\square : \square + \square$$

$$\square : \left(\square + \square\right)$$

Resposta esperada:

3:5+6 (X)[10], 3:6+5 (X), 5:3+6 (X), 5:6+3 (X), 6:3+5=7, 6:5+3 (X), 3:(5+6) (X), 5:(3+6), ou 6:(3+5) (X). Só é possível marcar o espaço do número 7. Os resultados são apresentados no quadro 13.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	3	1	0	5	24

Quadro 13

Aqui, o aluno deveria prestar atenção ao fato de que, apesar das diferentes combinações possíveis quanto às posições dos números 3, 5 e 6, nem todo resultado final da sentença matemática construída resultaria em algum número existente no tabuleiro.

Felizmente, a maioria dos alunos percebeu isso e encontrou a sentença que revelaria o único espaço a ser preenchido com esta combinação de operações. Nas figuras 49 e 50 apresentamos duas respostas esperadas.

[10] Significa que o resultado da expressão não resulta em um número pertencente ao tabuleiro.

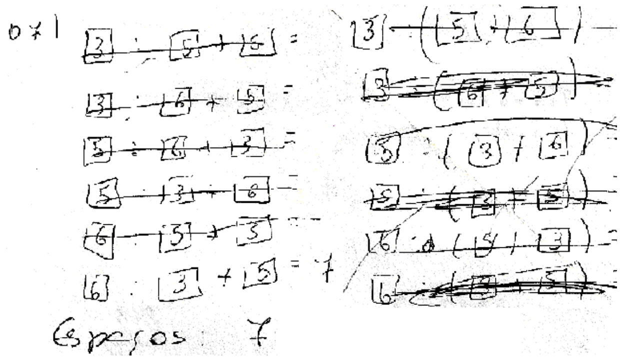


Figura 49: Resposta do aluno 07

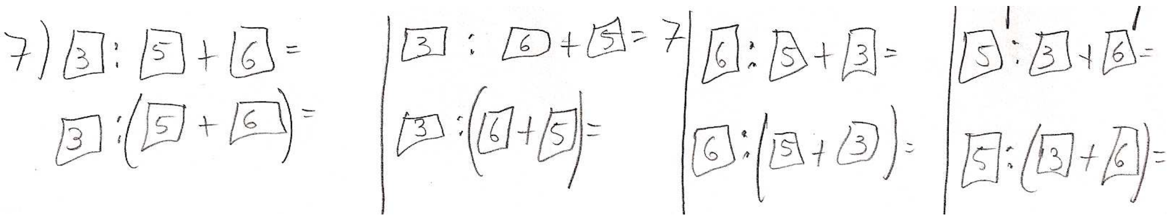


Figura 50: Resposta do aluno 06

Observe que estes alunos listaram as combinações possíveis para os números 3, 5 e 6 e, logo após resolverem cada sentença, descobriram qual a única que representava um valor no tabuleiro.

Alguns alunos encontraram a sentença da qual resultava o valor 7, mas na folha de resposta do questionário escreveram expressões do tipo “não é possível” ou “não dá”. Um desses alunos, ao ser questionado, respondeu que não era possível marcar o espaço do número 7, pois, este já havia sido preenchido na questão 1.

Ou seja, ele não compreendeu que essa questão 7 tinha uma outra interpretação, diferente da apresentada pela questão 1. Mencionamos que a questão 7 era uma situação hipotética, caso a regra do jogo fosse só utilizar as operações de adição e divisão. Nós queriamos saber a maneira como os jogadores resolveriam o problema apresentado por essa situação, já que deveriam lembrar que a divisão de números naturais não é fechada.

O aluno entendeu o que havia sido solicitado, entretanto, manteve a resposta alegando que “a pergunta não tá dizendo isso, professor”[11]. De qualquer maneira, ele encontrou o único espaço possível de ser preenchido e a análise das situações do jogo Contig60 nos surpreendeu, não pelas respostas mas pela (des)motivação dos alunos.

Até este ponto, os alunos discutiam as perguntas apresentadas e as diferentes formas de respondê-las. Captávamos as falas dos alunos e tentávamos compreender o tipo de estratégia que traçavam, o esquema para responder as perguntas. “Faz assim,ó!” era uma frase que se escutava muito entre as duplas.

Vygotsky (1993) comenta que:

> Para compreender a fala de outrem não basta entender suas palavras – temos que entender seu pensamento. Mas nem mesmo isso é suficiente – também é preciso que conheçamos sua motivação (p.130).

A análise das questões começa a se tornar incompleta, pois, nesse último encontro, os alunos começam a ficar desanimados e não têm mais paciência para responder alguma pergunta. O jogo, que na sua aplicação já havia sido rotulado de cansativo, torna-se menos prazeroso ainda.

A próxima questão tem como eixo central descobir os divisores positivos de um número e, a partir dessa informação, descobrir os possíveis espaços a serem preenchidos no tabuleiro utilizando as operações adição e multiplicação.

Questão 11:

Suponha que seja vantagem, para um dos jogadores, marcar o espaço do número 50. Como esse jogador tem dificuldades em formar uma expressão numérica cujo resultado seja 50, ele opta por descobrir os divisores desse número. Sabendo que este jogador usou adição e multiplicação, descubra quais são os

---

[11] Fala do aluno

divisores de 50 e quais as possíveis combinações para que ele marque o espaço pretendido.

Resposta esperada:

D(50) => 1x50, 2x25, 5x10 => D(50)={1,2,5,10,25,50}

50=> (4+6)x5 ou (5+5)x5. As ocorrências dos resultados são apresentadas no quadro 14.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	13	0	3	17	0

Quadro 14

Como dito anteriormente, os alunos já não estavam tão animados e motivados a reponderem as questões apresentadas. Observe que treze alunos não responderam a questão e quando questionamos uma dupla quanto a deixar a questão em branco, estes responderam: “ah, sor! É muita coisa, é igual nas outras perguntas!”. Mesmo que tenhamos dito que não era a mesma coisa, mantiveram sua posição de não responder. Nós colocamos, inclusive, algumas possibilidades no quadro, mas de nada adiantou.

Os dezessete alunos que tiveram suas resoluções classificadas em RIPP, apresentaram as possíveis sentenças que resultam no valor 50. Apesar de terem chegado nas sentenças corretas, faltou apresentar os divisores de 50, pois esse dado referente aos divisores de um número seria citado nas perguntas posteriores.

Nas figuras 51, 52 e 53 vemos as respostas de alguns alunos que chegaram às sentenças corretas, cujo resultado é 50 e que utilizaram, na sentença, adição e multiplicação simultaneamente ou só multiplicação.

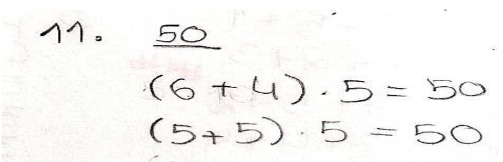


Figura 51: Resposta do aluno 08

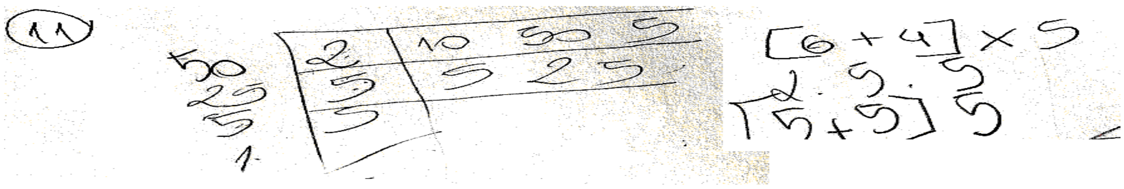


Figura 52: Resposta do aluno 09

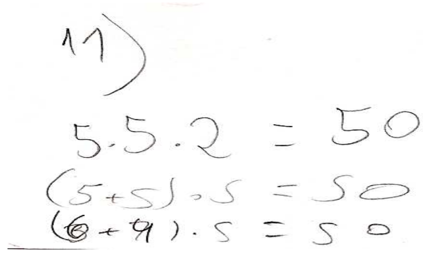


Figura 53: Resposta do aluno 10

Descobrir os divisores positivos de um número é trabalhar com o princípio multiplicativo. Quando exigimos um pouco mais nesta etapa, o nosso objetivo era de que os alunos identificassem a relação entre os expoentes de cada fator com a quantidade de fatores. Por exemplo, na fatoração do número 108 encontramos $2^2.3^3$. Alguns divisores de 108 são 3^2, $2^0.3^1$, $2^1.3^0$, etc. Ou seja, nos divisores do número 108 o expoente do fator 2 pode variar de 0 a 2: (2^0, 2^1, 2^2) e, assim, temos 3 possibilidades de expoente para o fator 2; o expoente do fator 3 pode variar de 0 a 3: (3^0, 3^1, 3^2, 3^3)e, assim, temos 4 possibilidades de expoente para o fator 3. Logo, para cada expoente escolhido para o fator 2 temos 3 possibilidade e 4 possibilidades de escolha para o fator 3.Portanto, 3x4=12 possibilidades ou 12 divisores positivos.

Questão 14:

Considere a suposição de que seja vantagem, para o jogador 1, marcar o espaço do número 96. Entretanto, para este jogador, parece ser uma tarefa difícil determinar os divisores de 96. Sendo assim, ele preferiu determinar apenas **quantos** divisores tem o número e deixar que seu adversário faça a jogada. Como o jogador 1 fez para determinar a quantidade de divisores de 96? Uma dica: ele partiu da fatoração do número.

Resposta esperada:

1x96, 2x48, 3x32, 4x24, 6x16 ou 8x12. Total de 12 divisores. Os resultados são apresentados no quadro 15.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	23	0	1	6	3

Quadro 15

Nesta etapa, já é nítido que os alunos já não estão mais tão dispostos a responderem o questionário. Entretanto, ao questionarmos alguns desses alunos, recebemos algumas respostas que não esperávamos. Um deles disse: “não estou mais entendendo. Por que o senhor quer que a gente escreva em forma de potência? Não é mais fácil fazer aquele ‘chiqueirinho’[12] e descobrir os divisores?”. Outro respondeu: “a gente aprendeu assim na quinta série, eu não sei como funciona, mas dá certo. Esse seu jeito é mais fácil, professor?”. Por menos que pudesse parecer, esses eram considerados problemas combinatórios e pudemos observar, na prática que, se não há plena compreensão da situação descrita, não há solução por parte dos participantes.

Percebemos que esse questionário extenso tornou-se um obstáculo na observação dos alunos em ação. Neste momento eles já não mais discutiam sobre as perguntas. Deixavam o tempo passar para que a atividade terminasse logo. Também pudemos observar que os alunos haviam perdido a conexão com as perguntas anteriores e até mesmo com o jogo. Para finalizar, alguém perguntou se não haveria outro jogo parecido com o A Grande Aposta.

Conscientes da falha que cometemos, terminamos a análise desse jogo apresentando a resolução de um aluno dentre os três

[12] Método para descobrir os divisores de um número a partir de sua fatoração em primos.

que responderam o que era esperado. Esse tentou combinar os expoentes dos fatores primos do número 96 com as diferentes bases (Figura 55).

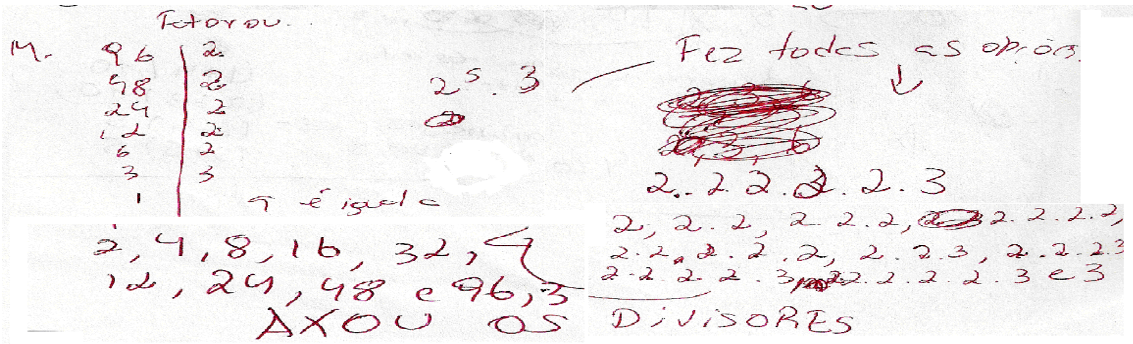


Figura 55: Resposta do aluno 07

Ao pedir explicações para o aluno, obtivemos a seguinte resposta: “Eu fatorei usando o que a professora da quinta série nos ensinou. Como na questão de antes o senhor colocou os expoentes, então eu fui trocando expoentes dos fatores até encontrar algum divisor. Por exemplo, tem cinco fatores 2,né? Então o 2 na 3 vai ser um divisor, o 2 na 4 também e assim continua.”. Perguntamos sobre o outro fator, sobre como ele seria utilizado. Disse: “Ah, depois que fizer com o 2, junta o 3 com cada um que tu achou antes.”.

Podemos dizer que esse aluno conseguiu encontrar uma maneira de descobrir a quantidade de divisores positivos de um número a partir do princípio da multiplicação.

Ao fim dessa segunda etapa, já pudemos suspeitar que os alunos, naturalmente, estavam ampliando sua zona de desenvolvimento proximal. As questões até aqui propostas a eles eram, de forma geral propostas aos alunos do 2º ano do Ensino Médio do colégio.

Sabe-se que os processos de desenvolvimento progridem de forma mais lenta do que os processos de aprendizagem e desta sequênciação, resultam as zonas de desenvolvimento proximal. Já citamos aqui que a ampliação dos campos conceituais não se dá somente a um tipo de situação e, sim, a uma variedade de situações ou problemas em função de sua resolução.

Desse modo, sigamos com a análise do terceiro jogo aplicado, no qual os conceitos da estrutura multiplicativa se tornam mais relevantes e representativos.

6.3 ANÁLISE DO JOGO SENHA

Depois que o tempo do jogo Contig60 passou, os alunos esperavam que o próximo jogo fosse tão atraente quanto o primeiro. Ao entregarmos o material do terceiro jogo, percebemos que muitos alunos já se mostravam empolgados, motivados a participarem de mais uma etapa de nosso trabalho.

O jogo Senha realmente é um jogo muito divertido. Essa opinião não é de todos os alunos, já que alguns ainda prefereriam o primeiro jogo. Um grupo pequeno dos participantes já conhecia esse jogo e um deles disse que o tinha em casa, mas não jogava mais.

As regras, assim como as dos anteriores, foram apresentadas no quadro negro e, dessa vez, não fizemos uso de cartazes, pois pensamos que seria melhor explicá-las com giz colorido. Obviamente, seguimos uma ordem de explicações, passo a passo, lembrando que os alunos jogariam com a situação da senha formada por quatro cores distintas. Nesse jogo conseguimos uma melhor observação dos alunos, bem como de suas falas e discussões com seus pares. Apesar eles ficarem mais calados no jogo anterior, do ponto de vista de nossa análise, eles demonstraram, até certo ponto, que estavam interagindo entre si. Era importante que essa comunicação se expandisse a fim de favorecer o aprendizado, pois, este

> desperta vários processos internos de desenvolvimento que são capazes de operar somente quando a criança interage com pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com seus companheiros. Uma vez internalizados, esses processos tornam-se parte das aquisições do desenvolvimento independente da criança (VYGOTSKY,1991, p. 101).

Enquanto caminhávamos entre os jogadores e estes manifestavam suas expressões, falas e atitudes, um aspecto despertou nossa curiosidade: a desinibição de alunos que em outras oportunidades, em sala de aula, mostravam-se fechados e tímidos.

A cada jogo eram formados novos pares de jogadores. O critério que utilizamos para essas formações foi de que cada dupla deveria ser composta de alunos que não tinham muito contato na turma. Entretanto, não conseguimos manter essa formação para todas as duplas, pois, muitos se mostravam descontentes com o critério adotado. De qualquer forma, a discussão não se prendia apenas à dupla e, sim, às duplas que estavam a volta.

A interação dos alunos não estava restrita a seus pares, ou seja, alunos discutiam as regras e possibilidades do jogo com colegas do outro lado da sala. Isso configurou um ponto positivo para nossa análise tanto no que se refere ao campo conceitual multiplicativo quanto à ampliação da zona de desenvolvimento proximal.

6.3.1 Desempenho dos alunos

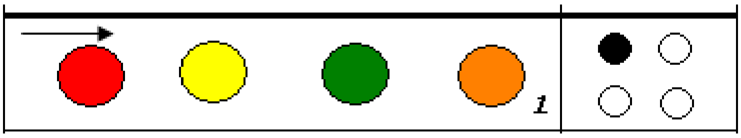
No questionário sobre o Senha apresentamos duas situações de jogo. Na situação 1, a senha é formada por quatro cores distintas dentre quatro cores (laranja, verde, vermelho e amarelo) e, na situação 2, a senha é formada por quatro cores distintas dentre cinco cores (verde, vermelho, laranja, amarelo e azul).

Sendo assim, focamos, na situação 1, as questões de número 01, 02 (item b) e 04; na situação 2, as questões de número 01, 04, 06 e 08. Ao fim dessa análise fazemos um parecer geral quanto à motivação dos alunos e outras intervenções pedagógicas possíveis dentro do jogo.

Situação 1: Estão sendo utilizadas 4 cores e a senha é formada por 4 cores distintas

Questão 01:

Suponha que, na primeira tentativa, o desafiado apresenta a seguinte combinação de cores e o desafiante preenche o campo de "dicas" da seguinte forma:



Quais são as combinações de senhas possíveis para a próxima jogada, sabendo que a cor amarela está na posição certa?

Resposta esperada:

1) VERMELHO – AMARELO- LARANJA- VERDE
2) VERDE- AMARELO- VERMELHO- LARANJA
3) VERDE – AMARELO- LARANJA – VERMELHO
4) LARANJA – AMARELO- VERMELHO – VERDE
5) LARANJA- AMARELO – VERDE – VERMELHO

Os resultados estão apresentados no quadro 16.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	0	0	0	25	8

Quadro 16

Uma característica marcante nessa primeira questão e que segue até o fim do questionário foi a iniciativa dos alunos de pintar com lápis de cor as possíveis senhas ou utilizar legendas para cada cor. Na questão acima, a situação é a mais simples possível que pode ocorrer após a primeira jogada.

Se uma das cores estiver na posição correta, então o próximo jogador poderá adivinhar uma das cinco senhas possíveis, dado que a senha que se apresenta no momento da dica já foi contada.

Pelo levantamento quantitativo, podemos observar uma fatia significativa de alunos que acertaram completamente a questão ou que desenvolveram alguma resolução positiva quanto à resposta esperada.

Nas figuras 56, 57 e 58 vemos as respostas de alguns dos alunos cujas respostas se configuram RE.

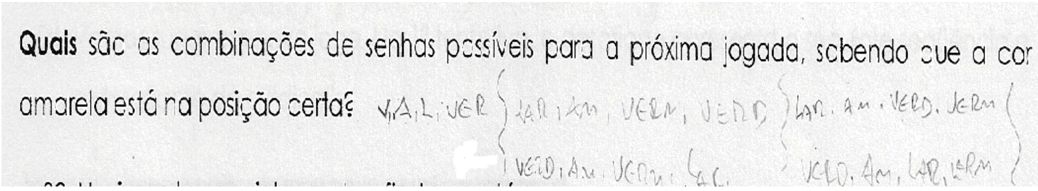

Quais são as combinações de senhas possíveis para a próxima jogada, sabendo que a cor amarela está na posição certa?

Figura 56: Resposta do aluno 11

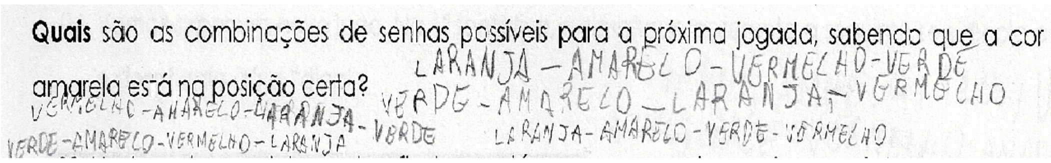

Quais são as combinações de senhas possíveis para a próxima jogada, sabendo que a cor amarela está na posição certa?
LARANJA – AMARELO – VERMELHO – VERDE
VERDE – AMARELO – LARANJA – VERMELHO
VERMELHO – AMARELO – LARANJA – VERDE
VERDE – AMARELO – VERMELHO – LARANJA
LARANJA – AMARELO – VERDE – VERMELHO

Figura 57: Resposta do aluno 12

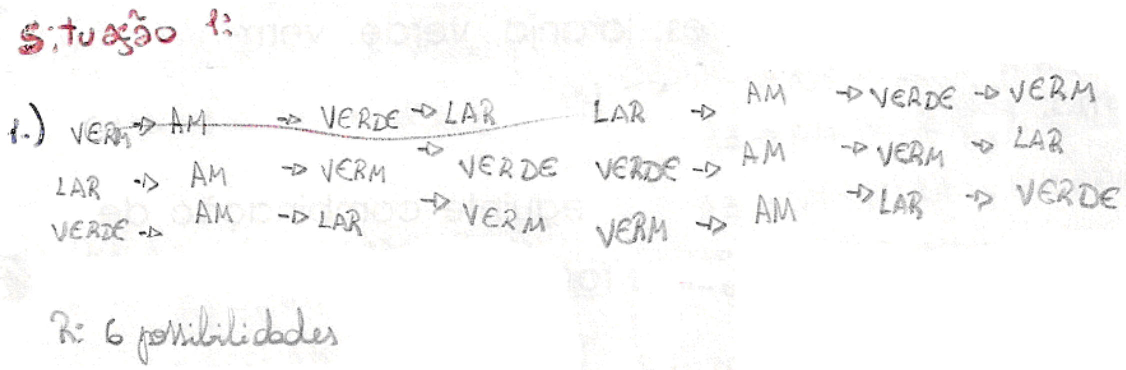

Situação 1:
R: 6 possibilidades

Figura 58: Resposta de aluno 13

Podemos afirmar que estes alunos já possuem uma forma de organização para montar seus esquemas.

Podemos dizer que na primeira resposta(figura56) o aluno fixou a primeira posição e trocou as duas últimas, só que nesse caso ele não considerou a senha apresentada na questão. Já na resposta da figura 57 e 58, é difícil saber se os alunos formalizaram um esquema para suas resoluções. Pelo que vemos, tudo indica que não.

Na figura 60 temos a resposta de um aluno que legendou as cores com figuras, o que não deixa de caracterizar uma forma de organização. O aluno respondeu parcialmente a questão.

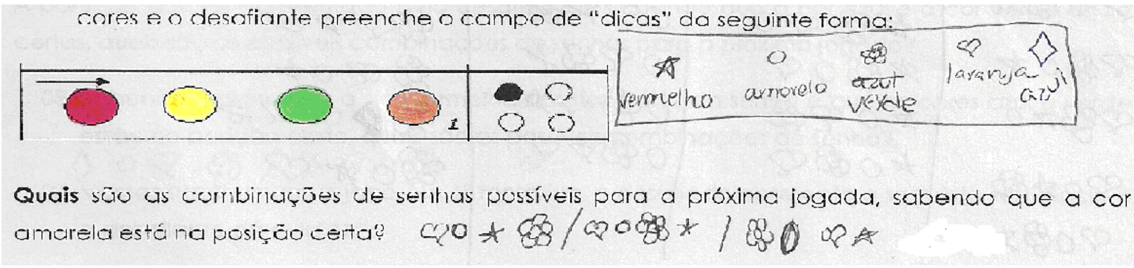
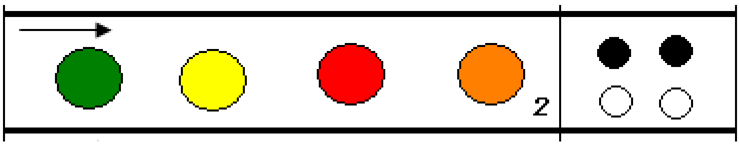


Figura 60: Resposta do aluno 07

Questão 02:

Na jogada seguinte, o desafiado mantém a cor amarela, muda a posição das demais cores e o desafiante dá a seguinte "dica":



b) Nesta situação, **quais** são as possíveis combinações de senha?

Resposta esperada:

Sendo a correta:

- VERDE: A senha é VERDE – AMARELA – LARANJA- VERMELHO.

- VERMELHO: A senha é LARANJA – AMARELA – VERMELHO – VERDE.

Os resultados são indicados no quadro 17.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
Nº de alunos	3	0	0	6	24

Quadro 17

Esperávamos que esse resultado quantitativo já estivesse representado na questão 1, mas foi aqui na segunda questão que pudemos manter as perspectivas de que os alunos teriam um desempenho melhor em comparação aos demais jogos. Assim, vinte e quatro alunos exibiram uma resposta satisfatória considerando as possibilidades para as cores certas. Dentre estes, destacamos as respostas indicadas nas figuras 61,62,63 e 64.

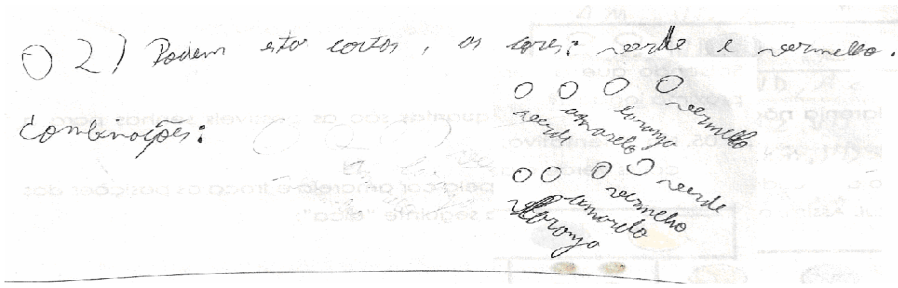


Figura 61: Resposta do aluno 14

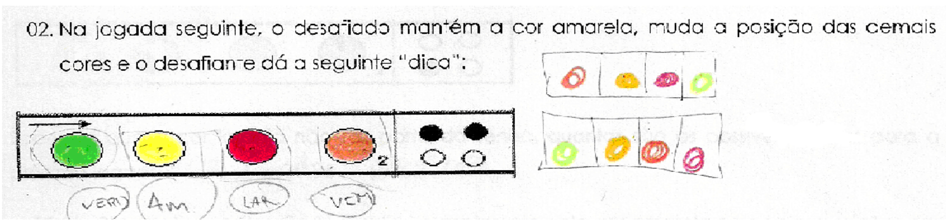


Figura 62: Resposta do aluno 15

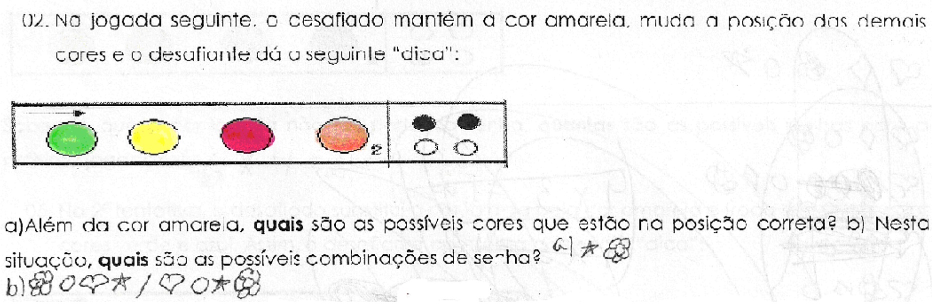


Figura 63: Resposta do aluno 07

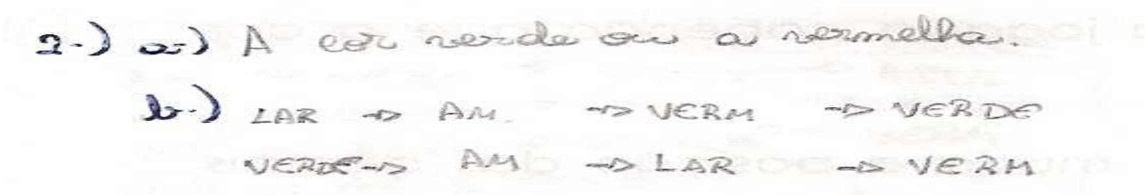


Figura 64: Resposta do aluno 13

A questão não apresenta grandes dificuldades. As respostas das últimas figuras são algumas das apresentadas pelos alunos que, positivamente, listam as possibilidades de senha na situação dada.

O que nos preocupou foi o fato de 4 alunos terem deixado o item da questão em branco, afinal tomamos o cuidado para que as primeiras questões de cada questionário não desmotivassem os participantes quanto ao nível de complexidade de resolução.

Conseguimos conversar com dois desses quatro alunos sobre não responder a questão. Um deles afirmou que não estava se sentindo bem e que preferiu responder o que considerava as mais fáceis. O outro aluno disse que "a letra b) é igual a letra a). É a mesma coisa. Só troca o vermelho com o laranja depois."[13]. Mesmo assim, o aluno não escreveu o que nos disse e contabilizamos sua resposta como em branco.

Alguns alunos começaram a apresentar um comportamento diferente do que nós estávamos esperando para esse jogo. Sendo o terceiro a ser aplicado e bem diferente do segundo, aguardávamos que eles se motivassem mais não só a jogá-lo, mas, também, a responder as questões sobre possíveis situações dele.

Acreditamos que um dos fatores que estivesse preocupando esses alunos era que estávamos perto da semana de provas bimestrais e, agora, pouco importavam os jogos, os questionários ou nossas observações. Nesse ritmo, os alunos deixavam de responder algumas das perguntas para que o tempo passasse mais rápido e, assim, pudessem tirar suas dúvidas do conteúdo de aula.

O cronograma de aplicação dos jogos foi planejado respeitando o período de provas bimestrais para não prejudicá-los. Entretanto, mesmo que faltassem pouco mais de duas semanas para a época das provas, sentíamos a ansiedade de alguns alunos, principalmente aqueles que não estavam tendo um rendimento satisfatório no ano.

Mesmo assim, teríamos que continuar com o que estava programado, pois, caso contrário, não conseguiríamos aplicar o último jogo antes das provas do quarto bimestre. No encontro seguinte, o professor disponibilizou seu e-mail para que

[13] Fala do aluno

enviassem suas dúvidas e sugeriu presença no plantão de dúvidas. Pelo menos até a data prevista para os jogos antes da avaliações, os tipos de respostas sofreram uma mudança em relação aos questionários anteriores.

Questão 04:

Antes de o jogo iniciar, **quais** eram as possíveis combinações de senha?

Resposta esperada:

Tabela 1: Possíveis senhas com quatro cores distintas

LA-VD-VM-AM		VD-LA-VM-VD		VM-VD-LA-AM		AM-VM-VD-LA
LA-VD-AM-VM		VD-LA-VD-VM		VM-VD-AM-LA		AM-VM-LA-VD
LA-VM-VD-AM		VD-AM-LA-VM		VM-LA-VD-AM		AM-LA-VM-VD
LA-VM-AM-VD		VD-AM-VM-LA		VM-LA-AM-VD		AM-LA-VD-VM
LA-AM-VD-VM		VD-VM-AM-LA		VM-AM-LA-VD		AM-VD-VM-LA
LA-AM-VM-VD		VD-VM-LA-AM		VM-AM-VD-LA		AM-VD-LA-VM

Legenda: LA: LARANJA, VD: VERDE, VM: VERMELHA, AM: AMARELO

As ocorrências dos resultados estão indicadas no quadro 18.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	6	0	6	16	5

Quadro 18

A tabela 1, como resposta da questão, foi proposta por nós, conforme um possível esquema que os alunos poderiam fazer.

Observe que o número de alunos que não responderam a questão aumentou. Estatisticamente, não podemos fazer uma análise generalizada desse aumento pelo fato de ser uma amostra pequena, mas, os seis alunos que tiveram suas respostas classificadas em RIPN também contribuíram para esse aumento. Mesmo tendo respondido a questão, incorretamente, percebeu-se que eles escreveram qualquer coisa como resposta. Nas figuras 65,66,67 e 68 observamos algumas escritas classificadas em RIPN.


04. Antes de o jogo iniciar, **quais** eram as possíveis combinações de senha?
Várias, creio que 16.

Figura 65: Resposta do aluno 04

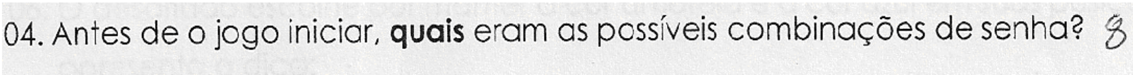

04. Antes de o jogo iniciar, **quais** eram as possíveis combinações de senha? 8

Figura 66: Resposta do aluno 16

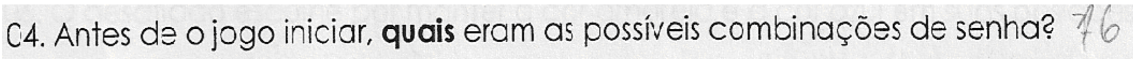

04. Antes de o jogo iniciar, **quais** eram as possíveis combinações de senha? 16

Figura 67: Resposta do aluno 02

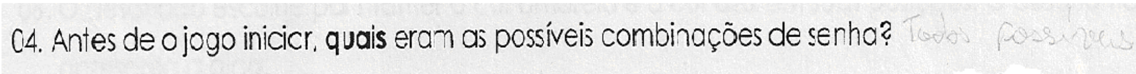

04. Antes de o jogo iniciar, **quais** eram as possíveis combinações de senha? Todos possíveis

Figura 68: Resposta do aluno 17

As respostas exibidas nas figuras 65,66 e 67 apresentam apenas um valor numérico o que, num primeiro momento, não possibilita saber de que forma os estes alunos pensaram o desenvolvimento da resolução da questão e de como chegaram a esse valor. Os dois alunos que apresentaram o número 16 como o total de combinações de senha alegaram que o cálculo utilizado foi a multiplicação do número de cores pelo número de espaços a serem preenchidos.

Não só estes participantes, mas outros mantiveram esse invariante operatório até o fim do jogo. Quando discutimos em aula sobre as possíveis senhas para quatro cores, sugeri que escrevessem algumas senhas para que encontrassem alguma regularidade. Essa observação, feita em aula, surtiu efeito em poucos alunos que começaram a pensar numa forma prática de encontrar a quantidade de senhas sem ter que listar todas.

A resposta apresentada na figura 69 expõe o sentimento de desinteresse de alguns alunos a refletirem sobre as questões propostas. Veja que o aluno escreve algumas possibilidades, mas conclui com a expressão “...sei lá”.

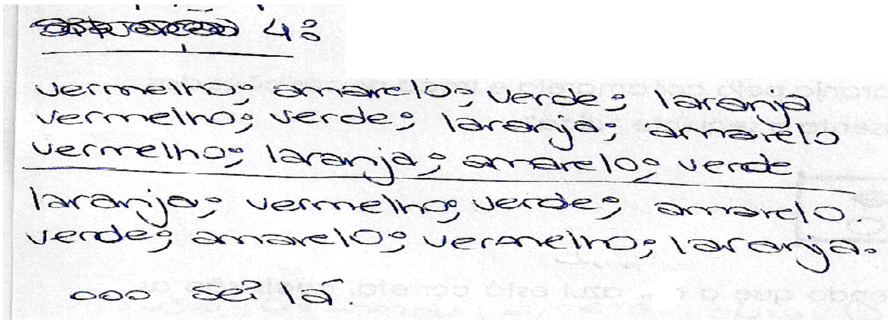

4ª:
vermelho; amarelo; verde; laranja
vermelho; verde; laranja; amarelo
vermelho; laranja; amarelo; verde
laranja; vermelho; verde; amarelo.
verde; amarelo; vermelho; laranja.
... será.

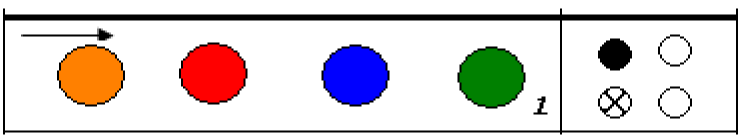
Figura 69: Resposta de aluno

Levantamos alguns aspectos que até então eram considerados normais dentro dos conhecimentos prévios dos jogadores. Listar vinte quatro possibilidades poderia ser um desses aspectos. Mas os resultados mostraram que muitos alunos relacionaram algumas possíveis senhas. Logo, a quantidade de combinações a apresentar não deveria ser um obstáculo. Outro fator que examinamos foi que o aluno não chamava o professor para possíveis dúvidas, ou seja, estando com dúvidas, os jogadores discutiam entre si e com outros participantes a sua volta, mas não solicitavam a presença do professor para confirmar ou corrigir alguma informação. Em nenhum momento o professor excluiu a possibilidade de ajudar o aluno, caso contrário iria de encontro ao seu referencial teórico.

Situação 2: Estão sendo utilizadas 5 cores. A senha é formada por 4 cores distintas.

Questão 01:

Na 1ª tentativa, o desafiado apresenta a seguinte seqüência de cores e o desafiante preenche o campo de “dicas” da seguinte forma:



Sabendo que a cor verde está na posição certa e que a cor vermelha não faz parte da senha, **quais** são as combinações possíveis para a próxima jogada?

Resposta esperada:

1) AMARELO – AZUL – LARANJA- VERDE
2) AZUL – LARANJA- AMARELO – VERDE
3) AZUL – AMARELO – LARANJA – VERDE

Os resultados estão indicados no quadro 18.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	5	1	0	20	6

Quadro 18

A interpretação dessa primeira pergunta é muito semelhante a da questão inicial da situação 1. Entretanto,.sabe-se que a laranja e a azul não estão na posição correta, então resta substituir a vermelha pela amarela obtendo as três combinações possíveis onde a laranja e a azul ocuparam suas possíveis posições. As figuras 70,71 e 72 indicam algumas das respostas classificadas em RE.

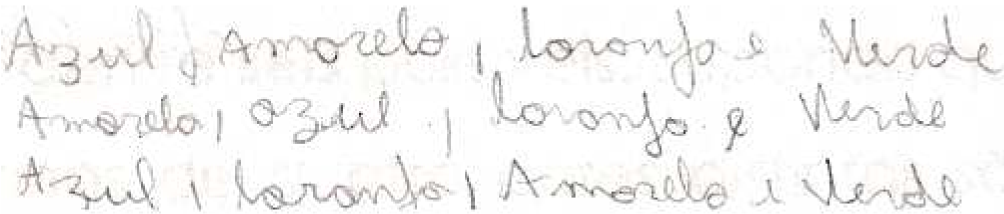


Figura 70: Resposta do aluno 17

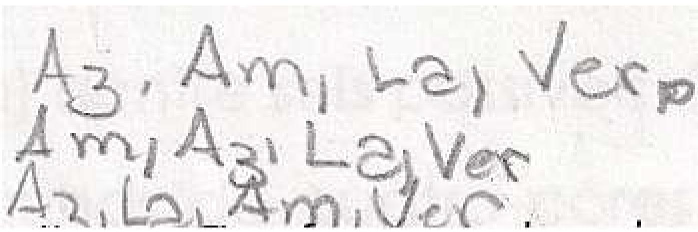


Figura 71: Resposta do aluno 15

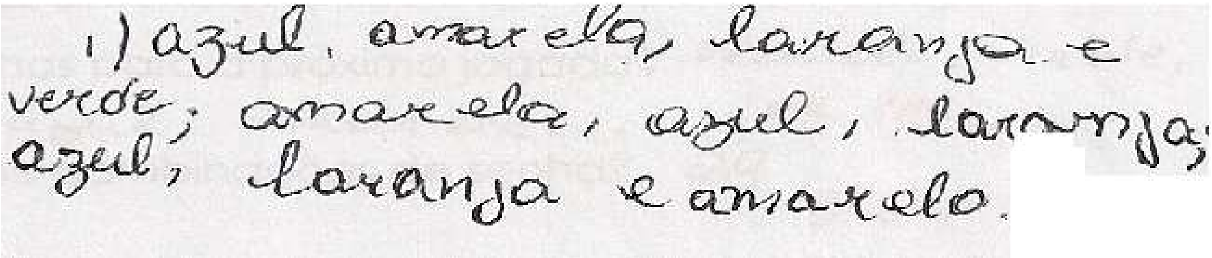

1) azul, amarela, laranja e verde; amarela, azul, laranja; azul, laranja e amarelo.

Figura 72: Resposta do aluno 16

Comparando os dados da tabela da questão 1 na situação 1, vemos que há uma semelhança na distribuição dos valores classificados em RE. Os seis alunos que aqui responderam completamente a pergunta também fazem parte do conjunto dos oito alunos que lá escreveram as possíveis senhas.

Abaixo, vemos um exemplo da falta de atenção do que estava sendo pedido (figura 73).

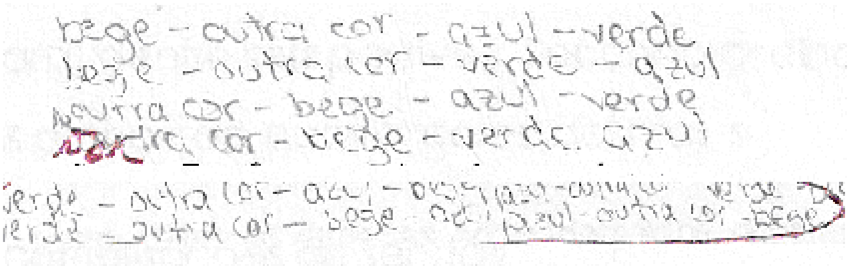

bege - outra cor - azul - verde
bege - outra cor - verde - azul
outra cor - bege - azul - verde
outra cor - bege - verde - azul

Figura 73: Resposta do aluno 18

O aluno não deve ter lido que a cor verde faz parte da senha e que está na posição certa. Possivelmente, desconsiderou as dicas do desafiante porque dispõe de diferentes posições as cores que ali estão, incluindo, segundo ele, a outra cor, chegando a seis possibilidades. Completa a questão indicando que tem mais senhas possíveis, o que nos leva a crer que ele realmente não levou em conta a dica do desafiante.

Também devemos fazer referência ao que um dos jogadores respondeu quanto ao cálculo das possibilidades de senhas, onde ele utiliza o princípio multiplicativo(Figura 74).

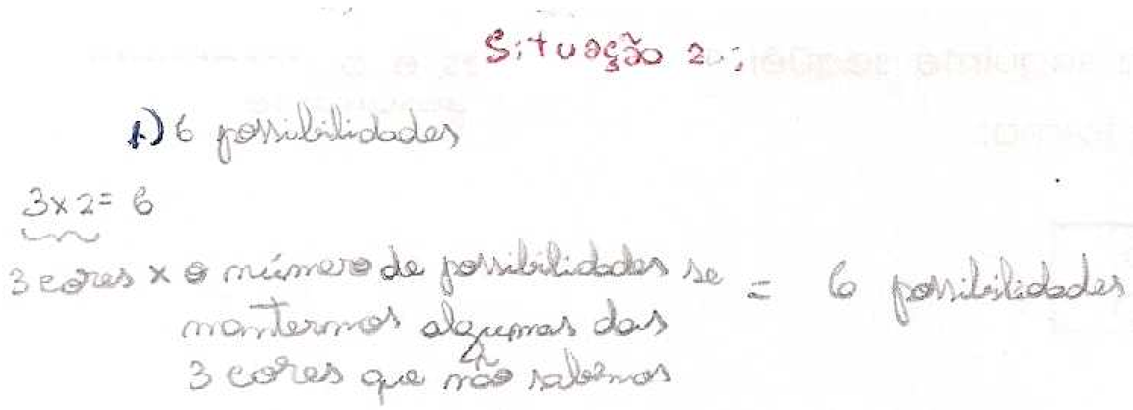
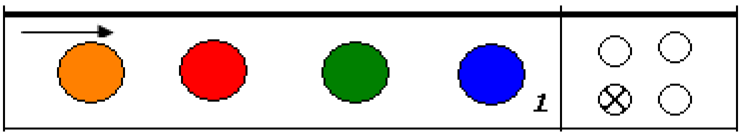


Figura 74: Resposta do aluno 13

Veja que o número de senhas a que chegou foi calculado pelo número de cores multiplicado pelo número de possibilidades mantendo alguma das 3 cores. Ele mantém esse “teorema-em-ação” até o fim do questionário .

Questão 04:

Vamos supor um novo jogo. Na 1ª tentativa, o desafiado apresenta a seguinte seqüência e o desafiante dá a “dica”:



Sabendo que a cor laranja não faz parte da senha, **quantas** são as possíveis senhas para a próxima jogada?

Resposta esperada:

Substituindo LARANJA por AMARELO, teremos 24 combinações. É uma questão parecida com a questão 04 da situação 1. Também se pode considerar as respostas dos alunos que subtraíram de 24 senhas todas as que têm a cor vermelha na 2ª posição; do que sobrasse, subtrair as que têm a cor verde na 3ª posição e, do que sobrasse, subtrair as que têm a cor azul na 4ª posição. Os resultados estão indicados no quadro 19.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	2	1	0	26	4

Quadro 19

Diferentemente dos resultados de desempenho da questão 4 na situação 1, os participantes demonstraram maior interesse em responder esta pergunta. Temos cinco alunos que responderam positivamente a questão, apresentando todas as possibilidades de senha ou calculando, via multiplicação, o número das mesmas.

O aluno que respondeu conforme a figura 74, mostrou, além de uma listagem de possibilidades, o cálculo que efetuou para chegar às vinte e quatro senhas (figura 75).

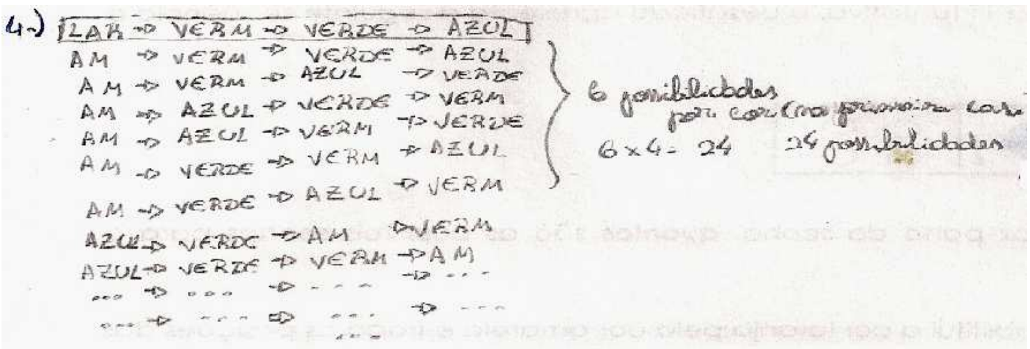


Figura 75: Resposta do aluno 13

Podemos antecipar que este aluno já estava utilizando um esquema seguro de resolução, pois ele mantém sua forma de resposta e os valores esperados vão surgindo naturalmente. Nesta última, ele relaciona algumas senhas e logo após explica a conta utilizada. Ele determina quantas possibilidades existem de senhas para uma cor fixa. Então, como para cada cor fixa há seis senhas possíveis e distintas, existem vinte e quatro combinações possíveis.

O colega que formava a dupla com ele não obteve o mesmo resultado, não só nessa questão, mas nas demais. A este, perguntamos se havia discussão com seu par sobre as questões do questionário e ele nos respondeu “ah, muito pouco, né sor. O senhor sabe como ‘ele’ é”[14]. O “ele” referia-se ao companheiro do jogo que obteve sucesso no questionário.

Ao fim dessa aula, conversamos com esse aluno principalmente sobre ajuda aos colegas. Lembramos que aquilo não era uma prova e de que não tinha o propósito de avaliar. Afinal, ele concordou em participar da pesquisa livremente sem garantia de quaisquer bônus. A expressão do aluno pouco mudou comparado ao início da conversa, mas prometeu se esforçar em ajudar o colega. Alertamos sobre o fato de que nem todos aprendem na mesma velocidade e com a mesma clareza e que necessitam de uma atenção especial para que possam prosseguir com os demais.

Interessante foi notar que alguns alunos, como esse que citamos por último, criaram ou reformularam seus comportamentos para, sozinhas, seguirem seu trabalho. Vygotsky (1991), quando comenta que a maior mudança ocorre quando a criança internaliza sua fala socializada, propõe que, nesse momento, as crianças desenvolvem um método de comportamento para guiarem a si mesmas, organizando suas próprias atividades de acordo com uma forma social de comportamento impondo, a si mesmas, uma atitude social.

O fator interacionista se destacou entre grande parte da turma, mas alguns ainda preferiram se manter calados diante das solicitações do professor.

A seguir, nas figuras 76,77,78 e 79, algumas resoluções classificadas em RE e RIPP.

[14] Fala do aluno

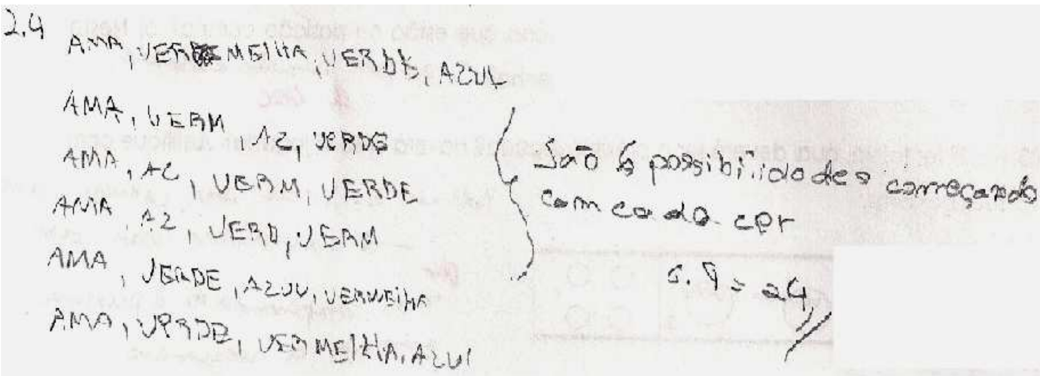


Figura 76: Resposta do aluno 19

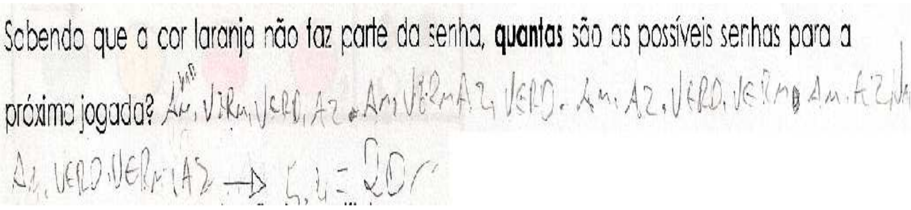


Figura 77: Resposta do aluno 11

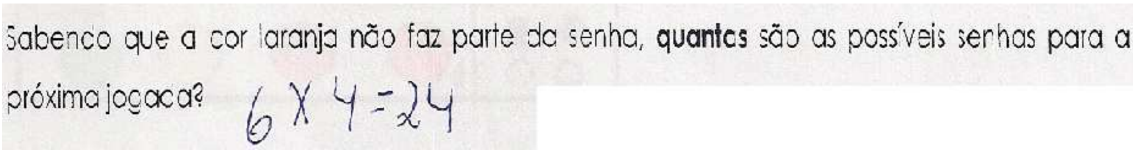


Figura 78: Resposta do aluno 07

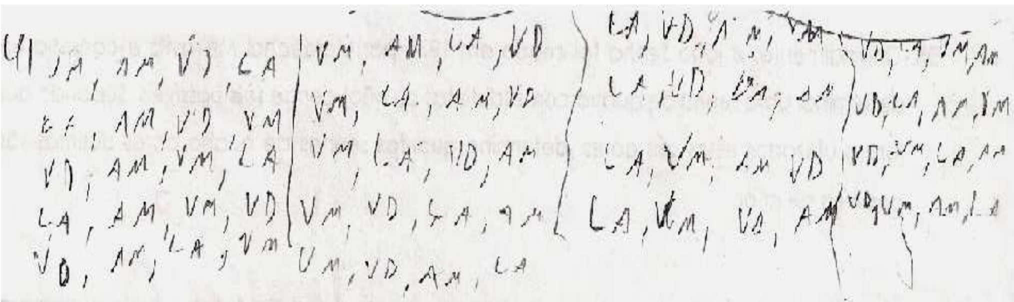


Figura 79: Resposta de aluno 14

Questão 07:

Antes de o jogo iniciar, **quantas** eram as possíveis combinações de senha?

Resposta esperada:

1ª espaço: 5 cores; 2º espaço: 4 cores; 3º espaço:3 cores e 4º espaço: 2 cores

Para cada escolha das 5 cores no 1º espaço, haverá 4 para o 2º espaço. Aí já são 20. Para cada uma dessas 20, haverá 3 cores para o 3º espaço. Aí já são 60. Para cada uma dessas 60, haverá 2 cores para o 4º e último espaço. Aí já são 120. Logo, são 120 senhas possíveis. As respostas estão indicadas no quadro 20.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	2	0	0	29	2

Quadro 20

As figuras 80 e 81 mostra as respostas dos dois alunos que responderam satisfatoriamente a questão.

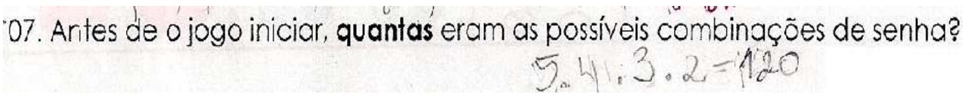


Figura 80: Resposta do aluno 09

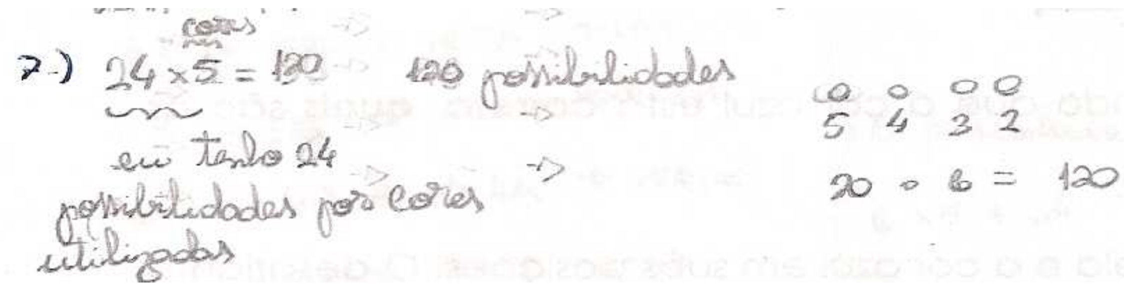


Figura 81: Resposta do aluno 13

A primeira resposta, a da figura 80 nos leva a crer que o aluno pensou em algo parecido com arranjo. Veja que ele utiliza o princípio multiplicativo tal qual um aluno que já viu o conteúdo de combinatória, exceto pelo fato de não usar fórmula.

Na segunda resposta, figura 81, o jogador considera o que respondeu na questão 4 e afirma que para cada uma das vinte e quatro possibilidades por cor utilizada há cinco cores, o que dá um total de cento e vinte senhas. Este jovem é o mesmo que apresentou a resolução na figura 74. Na mesma resolução, ele apresenta uma multiplicação semelhante a arranjo seguindo o que o colega da resposta anterior apresentou. Estes dois participantes não faziam parte da mesma dupla, mas estavam perto um do outro.

Desconsiderando os que não responderam, grande parte dos restantes mantiveram seus invariantes operatórios, de que o número de possibilidades é o produto entre a quantidade total de cores e o número de espaços a serem preenchidos.

Outros valores surgiram para a solução da pergunta tais como “4”, “12” e “29”. Sabe-se, por observação, que algumas das respostas foram expostas apenas para que a questão não ficasse em branco. Enfatizamos que, na etapa de responder os questionários, os alunos não liam completamente as perguntas ou se liam, não era com a devida atenção. Tomamos o cuidado de formular questões claras para que não houvesse dúvida quanto ao tipo de resolução que gostaríamos de analisar. Claro que erros foram inevitáveis, mas a cada jogo reformulávamos nossa estratégia a partir das hesitações dos participantes ao se depararem com alguma dificuldade, tanto que, nas primeiras abordagens sobre a quantidade de possibilidades, apresentávamos em negrito a expressão “quais” e, logo ao fim , a expresão “quantas”, exatamente para que o aluno pudesse, num primeiro momento, listar essas possibilidades, analisar os valores obtidos e, em seguida, prever uma quantidade de possibilidades usando a operação multiplicação.

Questão 08:

Originalmente, o jogo *Senha* foi criado em 1971 por Mordechai Meirovitz e consistia em determinar uma senha de quatro cores (distintas ou não) dentre **seis** possíveis. Supondo que foram utilizadas estas seis cores, determine **quantas** senhas de quatro cores distintas são possíveis de criar.

Resposta esperada:

1ª espaço: 6 cores

2º espaço: 5 cores

3º espaço: 4 cores

4º espaço: 3 cores

Para cada escolha das 6 cores, haverá 5 para o 2º espaço. Aí já são 30. Para cada uma dessas 30, haverá 4 cores para o 3º espaço. Aí já são 120. Para cada uma dessas 120, haverá 3 cores para o 4º e último espaço. Aí já são 360. Logo, são 360 senhas possíveis. As ocorrências dos resultados estão indicadas no quadro 21.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	4	0	0	26	3

Quadro 21

Naturalmente, os jogadores que acertaram a questão anterior também tiveram sucesso nesta. Curiosamente, um aluno que errou a questão 7 acertou essa utilizando corretamente o princípio multiplicativo. Observe na figura 82 a respostas da questão 8 desse aluno.

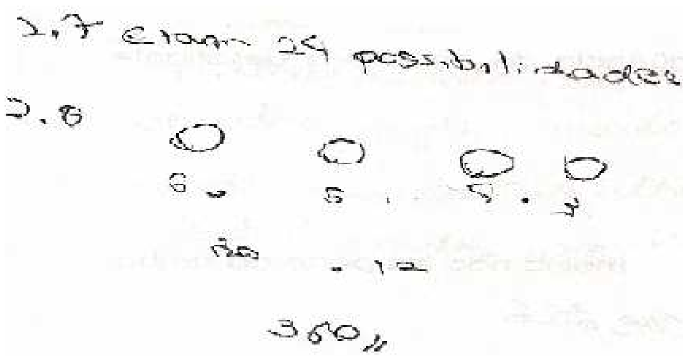


Figura 82: Resposta do aluno 19

Veja que na pergunta de número 7, ele respondeu que, para cinco cores, existiam 24 combinações de senhas antes do início do jogo e, agora, com seis cores, existiam 360.

Perguntamos a ele como o número de possibilidades pôde ter dado um salto como esse e se ele havia utilizado a mesma estratégia de resolução para ambas questões, já que se diferenciavam apenas pela quantidade de cores iniciais.

O jogador respondeu cada pergunta com a ajuda de um colega diferente. Disse também que o grupo estava em dúvida em relação a cada solução e, por isso, escolheu uma resposta diferente para cada questão. Realçamos nossa observação quanto à preocupação dos estudantes em acertar todas as questões e/ou não deixar nenhuma em branco. Mesmo assim, o aluno acreditava que o modo de resolução da questão 8 era mais completo, por que, como o mesmo comentou, “era parecido com as perguntas dos jogos de antes”.

Os outros dois alunos que responderam satisfatoriamente apresentaram uma resolução semelhante àquela apresentada na questão anterior (figuras 83 e 84).

Figura 83: Resposta do aluno 13

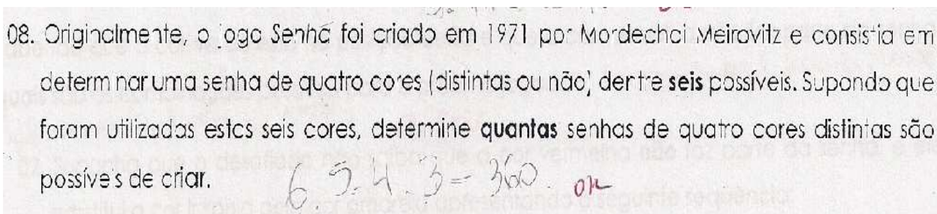
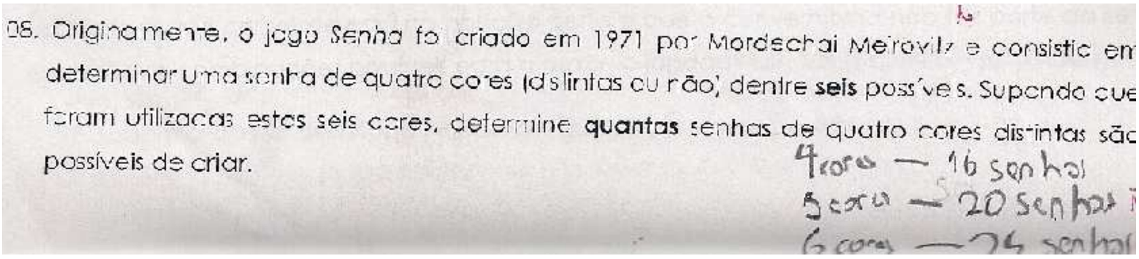

08. Originalmente, o jogo Senha foi criado em 1971 por Mordechai Meirovitz e consistia em determinar uma senha de quatro cores (distintas ou não) dentre seis possíveis. Supondo que foram utilizadas estas seis cores, determine **quantas** senhas de quatro cores distintas são possíveis de criar. 6.5.4.3 = 360. ok

Figura 84: Resposta do aluno 09 (*6.5.4.3 =360*)

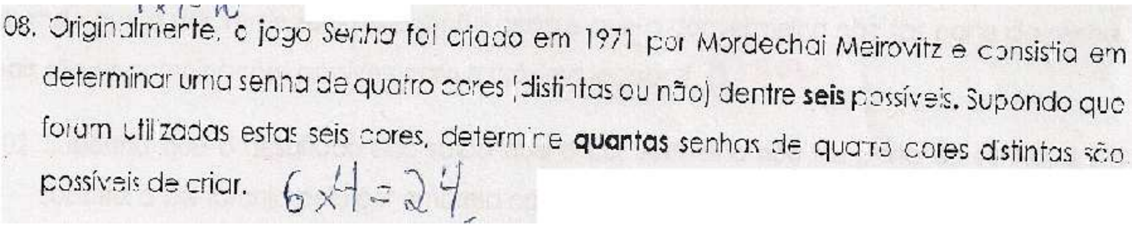
Aqui ainda prevaleceu que o total de senhas possíveis é obtido multiplicando-se o número de cores pelo número de espaços a serem preenchidos, como podemos ver nas figuras 85 e 86.



08. Originalmente, o jogo Senha foi criado em 1971 por Mordechai Meirovitz e consistia em determinar uma senha de quatro cores (distintas ou não) dentre **seis** possíveis. Supondo que foram utilizadas estas seis cores, determine **quantas** senhas de quatro cores distintas são possíveis de criar.

4 cores — 16 senhas
5 cores — 20 senhas
6 cores — 24 senhas

Figura 85: Resposta do aluno 20



08. Originalmente, o jogo Senha foi criado em 1971 por Mordechai Meirovitz e consistia em determinar uma senha de quatro cores (distintas ou não) dentre **seis** possíveis. Supondo que foram utilizadas estas seis cores, determine **quantas** senhas de quatro cores distintas são possíveis de criar. 6x4=24

Figura 86: Resposta do aluno 04

Terminamos a análise desse jogo mais satisfeitos com as respostas apresentadas. É claro que os alunos deram um grande passo em comparação com o jogo anterior, por mais que o número de soluções classificadas em RE não tenham aumentado significativamente. Prendemo-nos não só a essas, mas também àquelas respostas caracterizadas por RIPP, pois, ali estão as estratégias, os raciocínios, enfim, as diversas formas que os jogadores encontram para tentar responder completamente as situações propostas.

Igualmente importante foi a captura das falas dos participantes durante o jogo e na etapa do questionário. Não é possível interpretar um resultado numérico sem que haja um contato com o autor do cálculo numérico prévio desse resultado. Com efeito, o que observamos ao longo do trabalho, nesta fase, é o que Vergnaud (1991) define como cálculos relacionais, diferente dos cálculos numéricos:

> Os cálculos numéricos são as relações dos algoritmos propriamente ditos e os cálculos relacionais envolvem operações de pensamento necessárias para compreender os relacionamentos envolvidos na operação.

Esses relacionamentos envolvidos na operação são expressos por meio da linguagem e da postura do aluno diante da situação apresentada. Ao propor diversas situações para construção de um campo de conceitos, oportunizamos ao estudante um momento de formar esses conceitos dentro de uma pirâmide de conceitos constantemente oscilando entre duas direções, do particular para o geral e do geral para o particular.

6.4 ANÁLISE DO JOGO BICOLORIDO

Chegamos à penúltima etapa de nossa prática e de nossa observação. O cansaço, assim podemos dizer, já se estampava nos rostos dos alunos bem como as preocupações normais de fim de ano, como estudar para provas, fazer trabalhos e cumprir prazos finais do calendário letivo. Felizmente, essa atividade exigiu o necessário dos jogadores para que nós já pudéssemos construir nossas considerações finais.

Dentro do jogo Bicolorido foi possível propor aos alunos diversas situações sem que houvesse modificações de suas regras. Como citado no capítulo da identificação dos jogos, trabalhamos com quatro tabuleiros diferentes e para cada um apresentamos um questionário.

Na apresentação das regras, utilizamos o quadro-negro e um aluno voluntário como exemplo de jogada. O primeiro tabuleiro a ser jogado foi o de quatro pontos, vértices de um quadrilátero convexo. Antes de terminar a explicação das jogadas e quem seria considerado o vencedor, muitos já comentavam que era parecido com o jogo da velha.

Nessa atividade, nem todos os alunos conseguiram jogar com os quatro tabuleiros. Como estávamos chegando no período de provas e algumas aulas seriam destinadas à revisão de conteúdos, o professor optou por fechar o tempo destinado a esse jogo.

Assim, durante a análise de desempenho dos participantes, o número de jogadores em cada situação apresentada caiu gradualmente, pois, alguns jogadores foram mais rápidos que outros, tanto dentro do jogo, quanto ao responder às perguntas.

Nosso objetivo nesse jogo era trabalhar com a ideia de combinação simples, principalmente no que tange ao cálculo do número de segmentos de retas e de triângulos que podem ser obtidos a partir de uma quantidade de pontos iniciais não sendo três pontos quaisquer colineares. Por isso nossa sequência segue a ordem de quatro, cinco, seis e sete pontos, para, depois, provocar o jogador quanto à quantidade de segmentos de retas e triângulos num polígono convexo de oito lados.

6.4.1 Desempenho dos alunos

Para cada tabuleiro (situação), faremos uma análise das questões de número 01, 04 e 06. A análise da questão 01 terá uma abordagem diferente das demais, que seguem a classificação quanto ao tipo.

Lembramos que os alunos já conheciam a fórmula da diagonal de um polígono convexo trabalhada durante as aulas de geometria no início do semestre. Logo, alguns fizeram uso desse conhecimento prévio para responder as questões determinadas ao fim do jogo. Mesmo com o pequeno número de jogadores na última situação, em torno de 16 alunos, conseguimos captar algumas falas e escritas acerca do uso do princípio multiplicativo.

Situação 1: Quatro pontos (quadriláteros)

Questão 01: Após ter jogado algumas vezes com seu colega, qual foi a situação de resultado que mais apareceu? Situação de vitória/derrota ou situação de empate?
Resposta esperada:

Mais casos de empate por haver poucos pontos.

Os 30 participantes identificaram que houve mais empates. Como na questão não havia pedido de justificativa de resposta, eles apenas responderam “empate”. Mesmo assim, os alunos estavam convencidos de que era difícil vencer com pouco pontos e o mais provável é que sempre se empataria, isso se algum jogador não estivesse desatento.

Questão 04: Dados os 4 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?

Resposta esperada:

São eles: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CD}$

As ocorrências dos resultados estão indicados no quadro 22.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	0	0	0	6	22

Quadro 22

Duas respostas não foram contabilizadas na tabela, pois não se caracterizaram como um dos tipos apresentados. Os alunos apresentaram a palavra diagonal como resposta dessa questão. Um deles foi chamado por nós para que pudesse explicar o que foi apresentado. Rapidamente o aluno desculpou-se e disse ter entendido que o que se pedia era o nome dos segmentos. “E por que você não colocou lado, ao invés de diagonal?”, perguntamos. O jovem não soube o que dizer e logo a seguir saiu para o intervalo sem dar muitos esclarecimentos.

Nas respostas classificadas em RIPP, os próprios estudantes confessaram que esqueceram um ou outro segmento e que não era difícil responder a pergunta. Mesmo assim, identificamos algumas soluções nas quais o aluno considerou distintos dois segmentos de reta formados pelos vértices A e B, por exemplo. Observe nas figuras 88 e 89 a escrita de dois alunos que entram nesse caso.

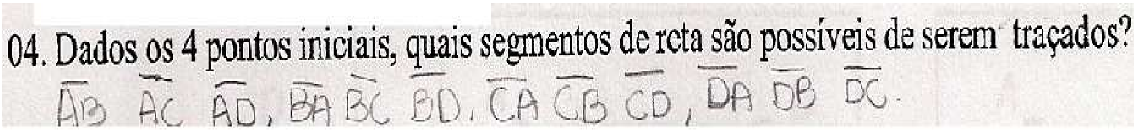

04. Dados os 4 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?
$\overline{AB}$ $\overline{AC}$ $\overline{AD}$, $\overline{BA}$ $\overline{BC}$ $\overline{BD}$, $\overline{CA}$ $\overline{CB}$ $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ $\overline{DB}$ $\overline{DC}$.

Figura 88: Resposta do aluno 08

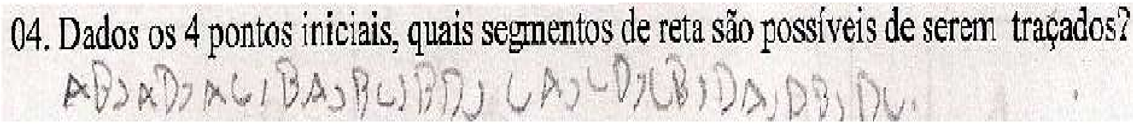

04. Dados os 4 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?
AB, AD, AC, BA, BC, BD, CA, CD, CB, DA, DB, DC.

Figura 89: Resposta do aluno 21

Em ambas as respostas os alunos não perceberam que $\overline{AC}$ e $\overline{CA}$ representam o mesmo segmento de reta e, assim, escreveram os doze segmentos possíveis com quatro pontos. Tivemos a oportunidade de conversar com ambos os jogadores que, coincidentemente, faziam parte da mesma dupla. Perguntamos aos dois se não haviam segmentos de retas demais com quatro pontos. Um deles respondeu que sim, e que estava certo porque ele fez todas as combinações das letras e que, fazendo isso, encontraria o número de segmentos de retas. O seu par nada disse, apenas acenou com a cabeça sobre a opinião do outro.

Antes que os dois alunos se dispersassem, mostramos, no quadro-negro, porque algumas daquelas combinações iriam gerar um segmento que já havia sido contado e pedimos mais atenção no próximo tabuleiro.

Sendo uma pergunta acessível, não identificamos esquemas complexos para a solução. Um grupo optou por seguir uma ordem alfabética dos vértices, atentando para não repetir segmentos já listados.

Questão 06: Quais são os possíveis triângulos que podemos formar tendo como vértices os pontos A,B,C e D?

Resposta esperada:

São eles: $\Delta ABC, \Delta ABD, \Delta ACD$ e ΔBCD.

Os resultados estão indicados no quadro 23.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	0	2	3	5	20

Quadro 23

Para nossa surpresa, começamos a crer que os alunos da turma confundem segmento de retas com triângulos. Para ilustrar, consideremos as soluções apresentadas nas figuras 90 e 91.

Figura 90: Resposta do aluno 07 ($\overline{ACB}, \overline{ACD}, \overline{BCD}$ e $\overline{BAD}$)

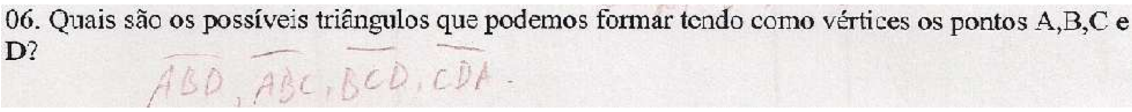


Figura 91: Resposta do aluno 02 ($\overline{ABD}, \overline{ABC}, \overline{BCD}$ e $\overline{CDA}$)

O estudo dos triângulos foi visto bem antes de a turma ter contato com o jogo Bicolorido, ou seja, eles já sabiam a notação de triângulo. Por exemplo, triângulo ABC ou ΔABC, como o professor já havia escrito outras vezes. O que esses dois alunos apresentaram é, de certa forma, a resposta da questão, porém, a notação utilizada está errada.

Com isso, fomos ao quadro e lembramos a notação de triângulo e que a barra vertical na parte superior das letras (vértices) significava segmento de reta. Pelas respostas a seguir, acreditamos que essa intervenção pouco ou nenhum efeito fez sobre eles.

Dois jogadores responderam corretamente o número de triângulos possíveis, mas não mostraram como chegaram a tal resultado (RCP). Alguns que tiveram suas respostas classificadas em RIPP, consideraram distintos os triângulos ABC e BCA, por exemplo e por isso encontraram mais de quatro triângulos possíveis. Curiosamente esses alunos não são os mesmos que apresentaram as respostas nas figuras 90 e 91, mas são aqueles que responderam a palavra diagonal na questão 04.

Os demais alunos seguiram a ordem alfabética das letras (vértices) e obtiveram corretamente os possíveis triângulos. Destacamos, dentre as várias soluções positivas, o esquema exibido na figura 92, onde o jovem dispõe os pontos iniciais e desenha os possíveis triângulos.

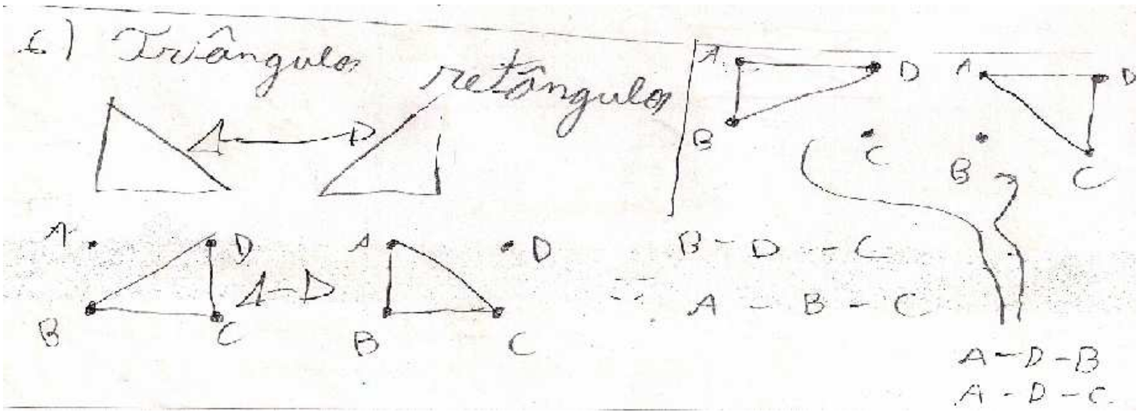


Figura 92: Resposta do aluno 14

A intenção depois dessa situação foi aumentar o número de pontos iniciais e observar a postura da turma quanto às estratégias para buscar as soluções das perguntas. Mesmo com alguns equívocos, os alunos foram bem, mas, isso era esperado,pois os acertos ocorrem em sua maioria com os problemas cuja grandeza numérica é pequena (PESSOA & BORBA, 2007).

Situação 2: Cinco pontos (pentágonos)

Questão 01: Após ter jogado algumas vezes com seu colega, qual foi a situação de resultado que mais apareceu? Situação de vitória/derrota ou situação de empate?

Resposta esperada:

Aqui teremos uma prevalência de possibilidades de situações de vitória/derrota.

Dois alunos (uma dupla) conseguiram empatar mais vezes e tivemos vinte e sete casos de vitória/derrota e um aluno não respondeu a questão.

Questão 04: Dados os 5 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?
Resposta esperada:
São eles: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CD}, \overline{CE}, \overline{DE}$.
Os resultados estão indicados no quadro 24.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	1	2	0	4	20

Quadro 24

Três respostas não se caracterizaram quanto aos tipos acima e, por isso, não foram contabilizadas. As duas respostas RCP pertencem à mesma dupla que, mesmo respondendo apenas 10, identificaram os segmentos e nos mostraram.

Os demais alunos não encontraram maiores dificuldades em responder a questão, mesmo que alguns tenham esquecido um ou outro segmento de reta. Aqui tivemos, novamente, o caso de alguns jogadores repetirem segmentos iguais, alterando a ordem dos vértices como vemos nas figuras 93 e 94.

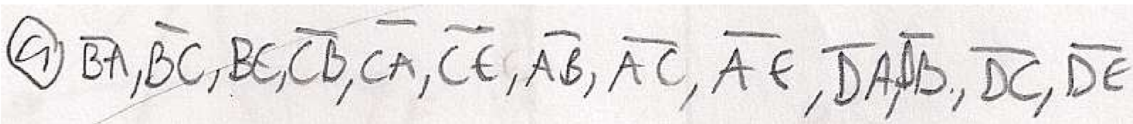


Figura 93: Resposta do aluno 20

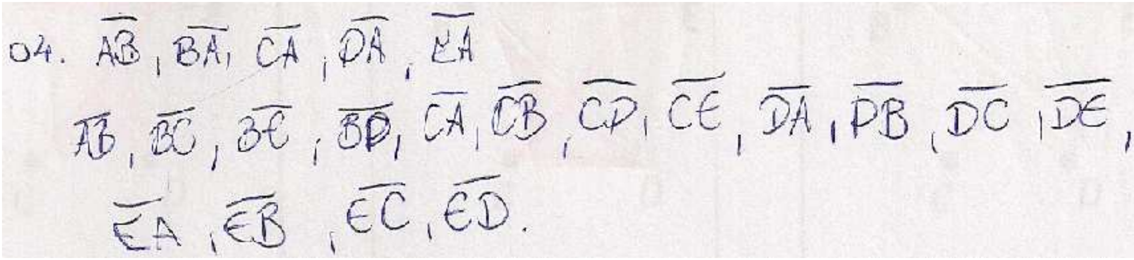


Figura 94: Resposta do aluno 10

Dentre as respostas positivas em nossa observação, ressaltamos as que serão apresentadas nas figuras 95 e 96. Em ambas, existe um único esquema para resolução. Os esquemas são importantes, pois eles é que evocam no sujeito a constituição do sentido da situação.

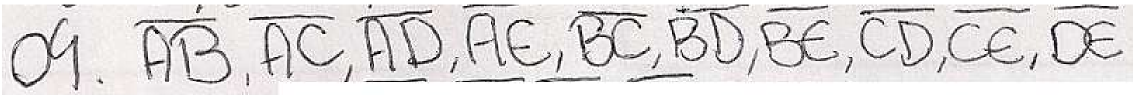


Figura 95: Resposta do aluno 01

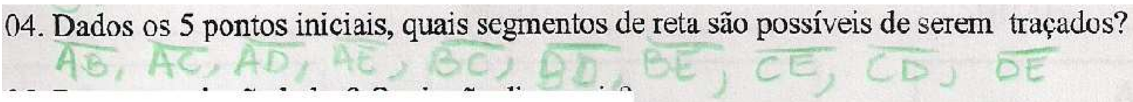


Figura 96: Resposta do aluno 16 ($\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CE}, \overline{CD}$ e $\overline{DE}$)

Os esquemas apresentados anteriormente já haviam sido utilizados por grande parte da turma na situação de quatro pontos e consiste em escrever os segmentos de reta seguindo a ordem alfabética das letras (vértices).

Nas figuras 97 e 98 vemos que a organização dos alunos foi em forma de listagem seguindo, também, a ordem alfabética das letras (vértices).

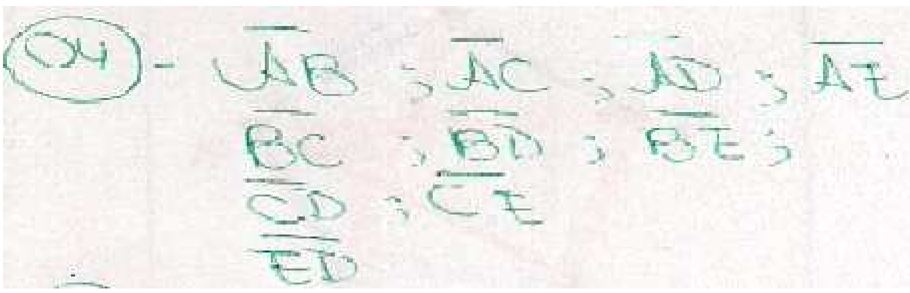


Figura 97: Resposta do aluno 22

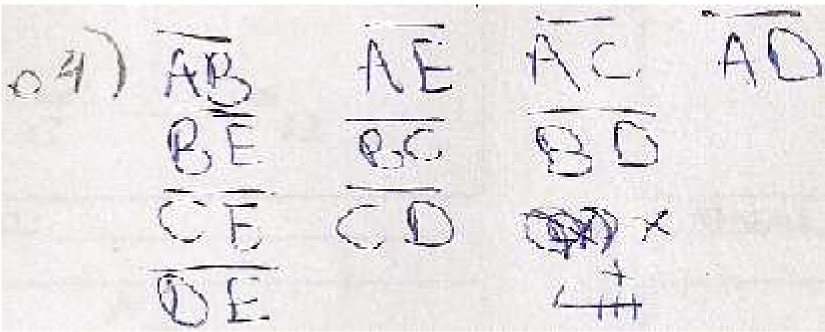


Figura 98: Resposta do aluno 17

O que diferencia esses esquemas dos anteriores (figuras 95 e 96) é a forma como foram dispostos os segmentos. Esse se assemelha muito ao que chamamos de árvores de possibilidades, pois, é fácil ver que esses alunos pensaram nas possibilidades para o primeiro vértice e depois para o segundo, só que já desconsiderando os segmentos iguais.

Tivemos a oportunidade de presenciar a discussão entre dois desses alunos, que faziam parte da mesma dupla, sobre como obter os segmentos. Partiu de um deles a ideia de ordenar os segmentos segundo a ordem alfabética das letras (vértices). A conversa entre os dois, relatada a seguir, indica os “teoremas-em-ação” e “conceitos-em-ação” provocados pelos jogos, nas atividades anteriores.

Aluno A – A gente começa com a letra A, depois a B e assim por diante, entendeu?

Aluno B – E escreve reto?

Aluno A – De qualquer jeito. Faz primeiro com a letra A.

Nesse momento, o aluno olha para o professor e pergunta se pode ser escrito assim, recebendo uma sinal positivo como resposta.

Aluno A – Tá, agora a B. Faz embaixo.

Aluno B – Ah, agora é fácil. Olha aqui, diminui um segmento por linha!

Aluno A – Viu?

Esse diálogo mostra o quão importante foi a comunicação, a linguagem utilizada por eles, a postura e iniciativa de pensar organizadamente a questão. Reforçamos o sucesso dessa e de outras estratégias positivas também às nossas intervenções nos momentos nos quais os jogadores não refletiam sobre seus possíveis erros e não conseguiam seguir adiante nas atividades.

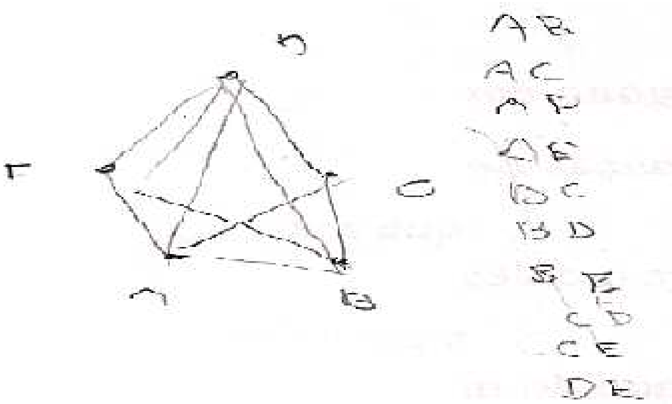


Figura 99: Resposta do aluno 19

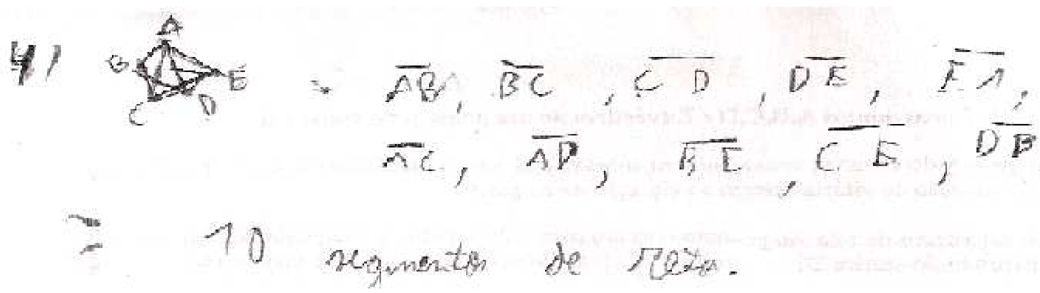


Figura 100: Resposta do aluno 14

Nas figuras acima, a dupla listou todos os segmentos possíveis utilizando a figura do pentágono. Seguindo também a ordem alfabética das letras (vértices), eles desenhavam um segmento (lado ou diagonal) e notavam o mesmo ao lado da figura.

Questão 06: Quais são os possíveis triângulos que podemos formar tendo como vértices os pontos A,B,C,D e E?

Resposta esperada:

São eles: $\Delta ABC, \Delta ABD, \Delta ABE, \Delta ACD, \Delta ACE, \Delta ADE, \Delta BCD, \Delta BCE, \Delta BDE, \Delta CDE$.

As ocorrências dos resultados estão indicados no quadro 25.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	1	0	0	24	3

Quadro 25

Duas respostas não foram lançadas na tabela por que não se enquadraram na classificação quanto ao tipo. Essa dupla não havia lido com atenção a pergunta e responderam “isósceles e equilátero”.

O restante da turma respondeu, de certa forma satisfatoriamente, apresentando triângulos possíveis de serem formados. O que nos chamou atenção foi que um grupo não conseguiu relacionar todos os triângulos, mesmo sabendo que os triângulos formados pelos vértices era num total de 10.

Também observamos que alguns alunos voltaram a considerar triângulos iguais aqueles que diferem pela ordem dos vértices, bem como respostas que apresentavam, equivocadamente, a notação de triângulo, corrigido anteriormente na situação de quatro pontos.

A dupla que apresentou a solução nas figuras 99 e 100 manteve seu esquema quanto à organização dos lados e diagonais para listar os possíveis triângulos (figura 101).

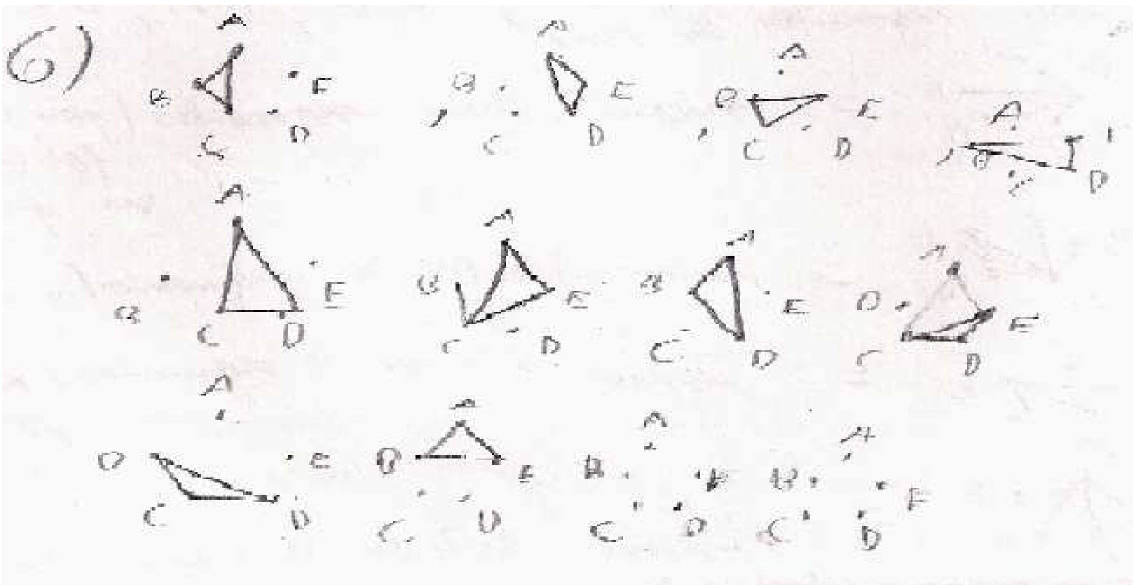


Figura 101: Resposta do aluno 19

Sustentando seus esquemas, foi possível que eles pudessem prever e antecipar as soluções das próximas situações, colocando à prova o que adquiriram de conhecimentos sobre os conceitos que medeiam a compreensão e os resultados dos próximos problemas.

Situação 3: Seis pontos (hexágonos)

Questão 01: Após ter jogado algumas vezes com seu colega, qual foi a situação de resultado que mais apareceu? Situação de vitória/derrota ou situação de empate?
Resposta esperada:
Aqui haverá uma prevalência de situações de vitória/derrota.

Obtivemos vinte e quatro respostas indicando situação de vitória/derrota, dois casos de empate e dois participantes não responderam. Nesse ponto do jogo, alguns alunos ainda jogavam com o tabuleiro de cinco pontos ou estavam respondendo as atividades deste; outros estavam inciando a situação de seis pontos, o que causou um decréscimo de jogadores a cada etapa do Bicolorido.

Questão 04: Dados os 6 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?

Resposta esperada:
São eles: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{BF}, \overline{CD}, \overline{CE}, \overline{CF}, \overline{DE}, \overline{DF}$ e $\overline{EF}$.
Os resultados estão indicados no quadro 26.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	3	2	0	6	16

Quadro 26

Um dos jogadores apresentou a expressão “todos!” como resposta da questão, porém, sem mostrar todos os segmentos.

Também identificamos que aqueles que responderam apenas 15, haviam contado os segmentos, mas não os expuseram no questionário. Nós já havíamos ressaltado que o desenvolvimento das questões era importante para a análise e que as atividades que eles estavam fazendo não consistiam em avaliação e, se assim fosse, exigiria desenvolvimento da mesma forma.

Os demais alunos, em parte, sustentaram seus esquemas construídos nas situações anteriores, como listar os possíveis segmentos de reta seguindo a ordem alfabética das letras (vértices) ou utilizando a figura do hexágono para listar primeiro os lados e depois as diagonais, dentre outras representações(figuras 101 a 104).

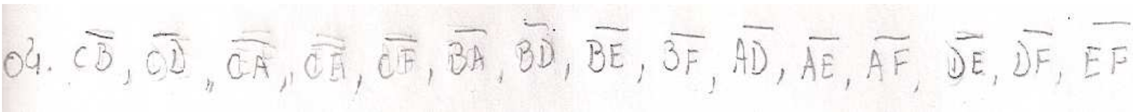


Figura 101: Resposta do aluno 23

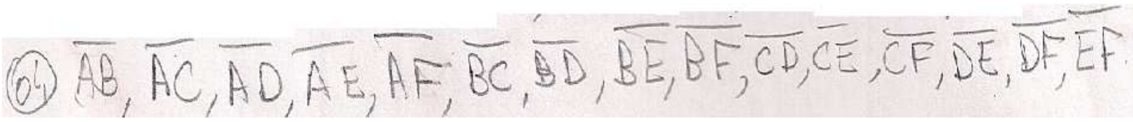


Figura 102: Resposta do aluno 24

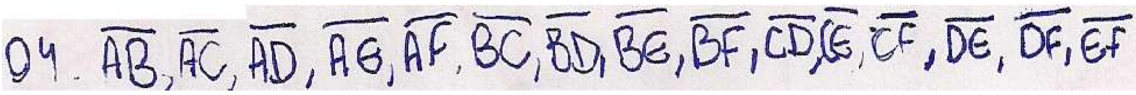


Figura 103: Resposta do aluno 01

Figura 104: Resposta do aluno 09

Questão 06: Quais são os possíveis triângulos que podemos formar tendo como vértices os pontos A,B,C,D,E e F?

Resposta esperada:

São eles: $\Delta ABC, \Delta ABD, \Delta ABE, \Delta ABF, \Delta ACD, \Delta ACE, \Delta ACF, \Delta ADE, \Delta ADF,$ $\Delta AEF, \Delta BCD, \Delta BCE, \Delta BCF, \Delta BDE, \Delta BDF, \Delta BEF, \Delta CDE, \Delta CDF, \Delta CEF$ e ΔDEF .

As ocorrências de resultados estão indicadas no quadro 27.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	2	0	0	22	0

Quando 27

Quatro soluções não entraram na classificação quanto ao tipo. Uma dupla escreveu: “É possível fazer triângulos com todas as letras entre elas.”. Outros dois alunos, que, provavelmente, não leram novamente a questão ou não entenderam o que estava sendo pedido, responderam “isósceles, retângulo e obtusângulo” e “isósceles, retângulo e quadrilátero”.

Dessa vez os alunos optaram por listar alguns triângulos, não chegando ao total de vinte, como na resposta esperada. Entretanto, consideramos positiva a tentativa dos alunos, pois, percebemos que alguns já estavam compreendendo a idéia de combinações simples e que, trocando a ordem dos vértices, não geraria um novo triângulo (Figuras 105,106 e 107).

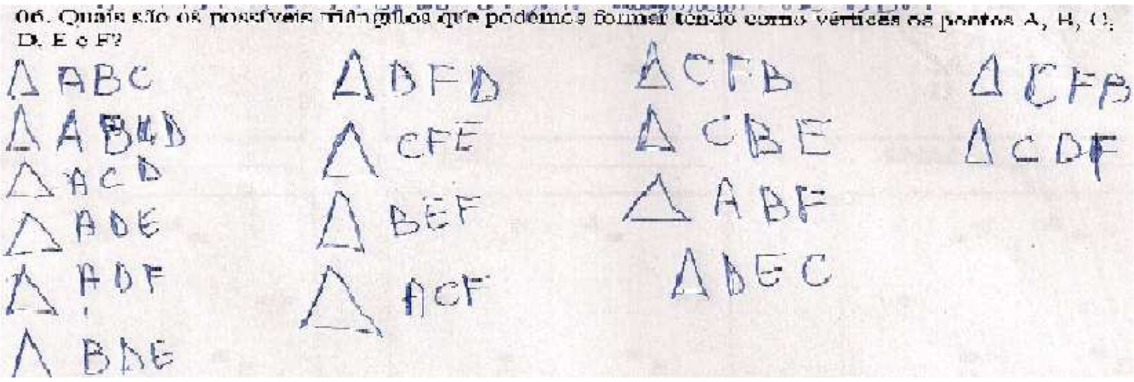


Figura 105: Resposta do aluno 04

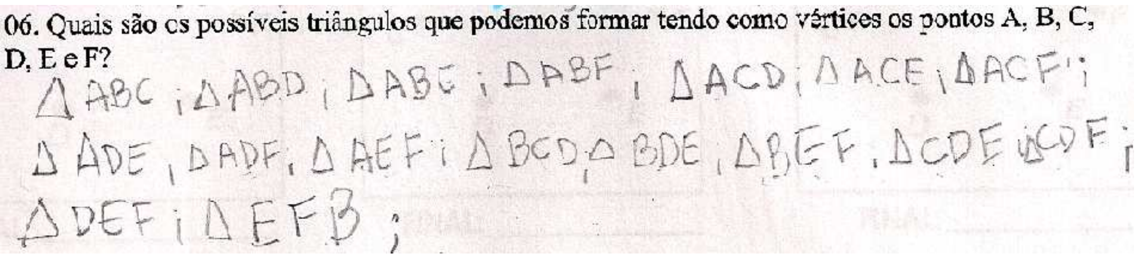


Figura 106: Resposta do aluno 09

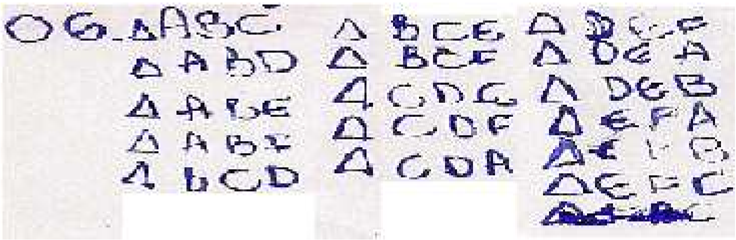


Figura 107: Resposta do aluno 01

Situação 4: Sete pontos (Heptágonos)

Questão 01: Após ter jogado algumas vezes com seu colega, qual foi a situação de resultado que mais apareceu? Situação de vitória/derrota ou situação de empate?

Resposta esperada:

A tendência é de que se tenha mais situações de vitória/derrota, haja vista que o número de pontos dificulta a possibilidades de empates.

O número de alunos que chegaram neste ponto da atividade caiu bastante comparado à situação anterior. Muitos ainda estavam terminando de jogar com seis pontos e ainda não haviam começado a responder as perguntas do questionário. Assim, tivemos apenas dezesseis alunos respondendo às questões da situação com sete pontos. Em todos, o caso que prevaleceu foi de vitória/derrota.

Para que não ficasse muito desgastante, apresentamos apenas seis tabuleiros com sete pontos e, na situação anterior, com seis pontos, foram propostos nove tabuleiros.

Questão 04: Dados os 7 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?

Resposta esperada:

São eles:

$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}, \overline{AG}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{BF}, \overline{BG}, \overline{CD}, \overline{CE}, \overline{CF}, \overline{CG}, \overline{DE}, \overline{DF}, \overline{DG}, \overline{EF}, \overline{EG}$ e $\overline{FG}$.

Os resultados estão indicados no quadro 28.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	0	0	2	9	5

Quadro 28

O aluno que teve sua resposta classificada como RIPN apresentou apenas o valor 22 para a quantidade de segmentos de retas possíveis. Quando perguntado de onde havia encontrado o resultado, disse que havia contado os segmentos que o seu par de jogo encontrou.

Dos cinco alunos que listaram todos as possibilidades, apresentamos a resposta de dois alunos que mantiveram a organização segundo a ordem alfabética das letras (vértices) e um que separou os que formavam lados e os que formavam diagonais (figuras 107,108 e 109).

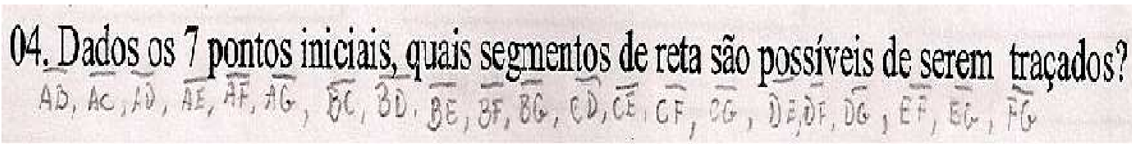


Figura 107: Resposta do aluno 23

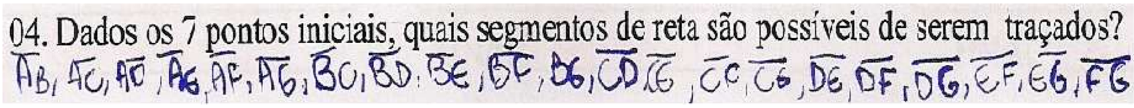


Figura 108: Resposta do aluno 01

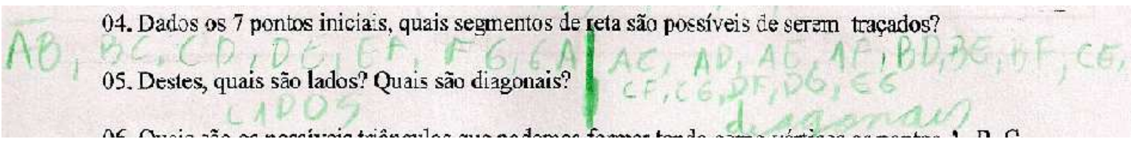


Figura 109: Resposta do aluno 12

Questão 06: Quais são os possíveis triângulos que podemos formar tendo como vértices os pontos A,B,C,D,E,F e G?

Resposta esperada:

São eles:

$\Delta ABC, \Delta ABD, \Delta ABE, \Delta ABF, \Delta ABG, \Delta ACD, \Delta ACE, \Delta ACF, \Delta ACG, \Delta ADE, \Delta ADF, \Delta ADG,$

$\Delta AEF, \Delta AEG, \Delta AFG, \Delta BCD, \Delta BCE, \Delta BCF, \Delta BCG, \Delta BDE, \Delta BDF, \Delta BDG, \Delta BEF, \Delta BEG, \Delta BFG, \Delta CDE, \Delta CDF, \Delta CDG, \Delta CEF, \Delta CEG, \Delta CFG, \Delta DEF, \Delta DEG, \Delta DFG, \Delta EFG$.

Os resultados estão indicados no quadro 29.

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	3	0	2	10	0

Quadro 29

Um aluno escreveu “é possível fazer triângulos com todas as letras” e, por isso, não teve sua resposta contabilizada na tabela acima.

Nessa fase das perguntas, os alunos já demonstravam um pouco de desânimo e de cansaço. Com isso, nenhum aluno listou todos os triângulos possíveis, mesmo com a nossa insistência para que escrevessem todos. Eles já haviam recebido a orientação de como organizar os segmentos de reta e que poderiam fazer o mesmo no caso dos triângulos. Também pesou bastante o fato de o cronograma do jogo já estar fechado e os jogadores souberam tirar proveito disso, demorando a responder os questionários ou até mesmo demorando a jogar. Essa demora caracterizou-se por conversas paralelas cujos assuntos fugiam do que se estava trabalhando em sala de aula.

De qualquer forma, tudo nos leva a crer que, mesmo com a baixa participação de alunos nessa última situação, a análise da postura dos alunos frente aos problemas de combinatória foi satisfatória (figuras 110 e 111).

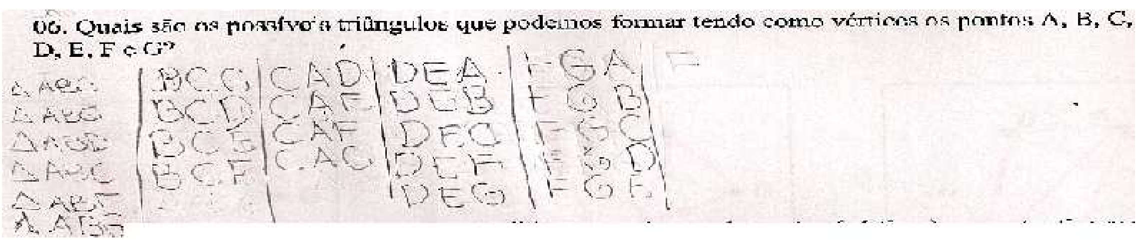


Figura 110: Resposta do aluno 25

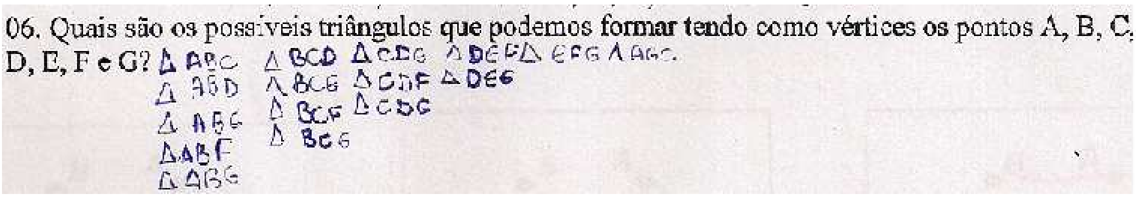

06. Quais são os possíveis triângulos que podemos formar tendo como vértices os pontos A, B, C, D, E, F e G? Δ ABC Δ BCD Δ CDG Δ DEF Δ EFG Δ AGC.
Δ ABD Δ BCG Δ CDF Δ DEG
Δ ABG Δ BCF Δ CDG
Δ ABF Δ BCG
Δ ABG

Figura 111: Resposta do aluno 01

Ao fim das questões sobre sete pontos, provocamos o aluno a pensar sobre uma maneira prática de encontrar a quantidade de segmentos de reta e triângulos, dado uma quantidade inicial de pontos, sem que houvesse a necessidade de listá-los. Daqueles que responderam as perguntas sobre heptágonos, apenas nove participaram dessa etapa e não totalmente. Vejamos,por ordem, as perguntas e algumas respostas.

-Você já deve ter notado que, à medida que o número de pontos (vértices) aumenta, fica mais difícil listar e contar o número de segmentos de reta e o número de triângulos. Analisando as situações anteriores responda:

d) Existe uma maneira **mais prática** de calcular o número de segmentos? E o número de triângulos? Explique com suas palavras e com cálculos.

Obtivemos respostas interessantes para essa pergunta. Nossa provocação foi a de contar o número de segmentos de retas e de triângulos para cada situação e comparar com o número de pontos dados. Àqueles que não refletiram sobre a questão, responderam “não”, mesmo ouvindo de outros colegas que existia uma maneira prática, que eles acharam ser prática.

Na figura 112 vemos que um aluno encontrou uma operação que resulta na quantidade de segmentos de retas para o caso de sete pontos.

Figura 112: Resposta do aluno 25

Questionado sobre como pensou para chegar a tal procedimento, respondeu: “Eu peguei o número de pontos no início e vi que para cada um tem que ter um a menos para fazer um segmento. Aí fica parecido com diagonal por que a gente conta tudo duas vezes, então divide. Só que aqui dá lado e diagonal e não só diagonal. É melhor.”

Quando, em geometria, trabalhou-se número de diagonais de um polígono convexo, o professor explicou a fórmula utilizando o princípio multiplicativo. Os alunos descobriram que de cada vértice de um polígono de *n* lados, partem *n-3* diagonais e assim bastaria multiplicar *n* por *n-3*. Entretanto, ao fazer essa multiplicação, os alunos perceberam que estavam obtendo o dobro do valor que seria correto. Então, o professor começou a contar algumas diagonais e os jovens notaram que cedo ou tarde elas iriam repetir duas vezes. Assim, concluíram que era necessário dividir aquela multiplicação por dois.

A próxima figura mostra o cálculo utilizado por um jogador para descobrir o número de segmentos de retas possíveis a partir do caso de sete pontos. Esse aluno não se deu conta, num primeiro momento, de que o valor encontrado era diferente do que havia apresentado na questão 04.

Figura 113: Resposta do aluno 10

Perguntamos ao jogador como havia pensado nessa multiplicação e o porquê de sete vezes sete. Sem muito estar convicto do que responder, disse que sabia que tinha alguma multiplicação porque nos jogos anteriores também tinha multiplicação, então aqui também teria. Ele ouviu que era alguma coisa com os vértices, daí fez sete vezes sete e sabia que tinha uma multiplicação. Comentamos que sim, havia uma multiplicação, mas, antes, dissemos a ele que um segmento de reta não poderia ser formado por dois vértices iguais. Interrogamos o aluno sobre se não teria seis vértices, em vez de sete, referindo-se ao segundo fator da multiplicação. O aluno acenou com a cabeça que sim, mas não com muita firmeza. Ao ser perguntado por quanto deveria ser dividida essa multiplicação, ele pensou um instante e respondeu que deveria ser por dois. “Por que?”, perguntamos. “Para dar certo”, finalizou o aluno.

O aluno que apresentou a resposta a seguir (Figura 114) fez uso da fórmula para obter o número de diagonais de um polígono convexo. Com esse conhecimento prévio, ele entendeu que a maneira mais prática, para ele, era calcular a quantidade de diagonais e depois somar com a de lados.

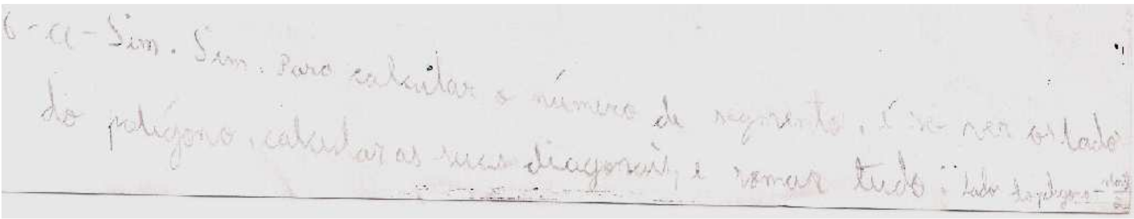


Figura 114: Resposta do aluno (*Sim. Para calcular o número de segmentos é só ver os lados do polígono, calcular suas diagonais e somar tudo. Lado do polígono*+$\frac{n(n-3)}{2}$)

A pergunta seguinte foi respondida por quatro jovens sendo que apenas um apresentou um valor numérico ou uma multiplicação (Figura 115).

e) Você conseguiria responder as questões anteriores no caso de 8 pontos? Ou seja, quantos segmentos de reta podemos formar tendo 8 pontos (vértices de um octógono convexo)?

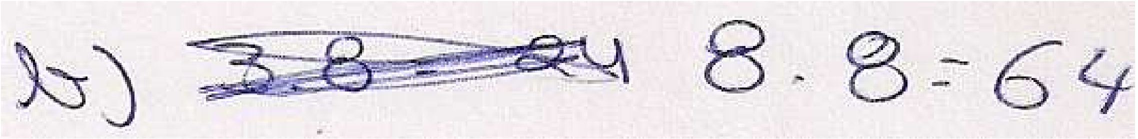


Figura 115: Resposta do aluno 10

Esse aluno é o mesmo que apresentou a solução 7x7 para a pergunta anterior. Entretanto, sua resposta não condiz com o que havíamos lhe falado anteriormente. Disse ele: “Ah, é! Eu me esqueci! Mas o senhor sabe que eu sei”.

Dos outros três que responderam a questão, dois escreveram “Não, pois são muitos” e um escreveu apenas 6. Para os dois que escreveram haver muitos, pedimos que eles escrevessem, então, alguns segmentos e não todos. Mas a resposta dos mesmos continuou negativa e não completaram a questão.

Nenhum aluno respondeu a última pergunta.

7 Considerações Finais

Dentro desse período de quase quatro meses, buscamos atingir os objetivos elencados inicialmente, assim como responder as dúvidas que nos instigavam à medida que íamos desenvolvendo nossa pesquisa.

Como citado no terceiro capítulo, a metodologia utilizada foi o estudo de caso. Um estudo de caso nunca está completo, mas, mesmo assim, aquele que investiga deve respeitar todos os aspectos para que se chegue ao máximo possível em uma pesquisa completa.

Nesse cronograma tão comprimido e dentro das peculiaridades do ambiente dos jogos, podemos afirmar que obtivemos sucesso no que se refere aos objetivos do trabalho. Ao longo das atividades planejadas, pudemos observar que algumas perguntas eram respondidas e outras, nem sempre previsíveis, surgiam naturalmente.

A análise jogo a jogo indicou um aumento do aproveitamento da turma frente às novas situações propostas. Isso fica claro quando voltamos às diferentes formas de resolução e distintos esquemas ou representações utilizadas pelos estudantes da turma.

Ao propor diversas classes de situações que expõem o mesmo campo conceitual, especificamente, as estruturas multiplicativas em problemas de contagem, percebíamos que o aluno utilizava esquemas que já havia empregado em jogos anteriores, reformulando-os ou adaptando-os a nova realidade.

O mesmo aconteceu com os invariantes operatórios (“teoremas-em-ação” e “conceitos-em ação”) manifestados em cada atividade. Ao fechar esse trabalho, podemos explicitar alguns destes, identificados na investigação:

- “Os cavalos não possuem as mesmas chances porque tem uns que tem somas a mais que outros”, referindo-se às diferentes possibilidades dos cavalos.

- “são possíveis 36 pares: um com todos, dois com todos, três com todos, quatro com todos, cinco com todos e seis com todos”, explicando de como obteve as possíveis somas no lançamento de dois dados distintos.
- “Fórmula: Face x Face x Face => número de somas dos cavalos”, generalizando o caso para o lançamento de três dados.
- “a soma tem que dar 7,né? Então, as parcelas só podem ir de 1 a 5 porque se tiver 6, aí não dá pra fazer com três parcelas. Se a primeira parcela for 1, então na segunda eu só posso ir até o 5, por causa do 6. Daí eu completo para chegar no 7, que vai ser o contrário, ó. Se a primeira parcela for 2, então na segunda só posso ir até o 4. Daí eu faço a mesma coisa pro resto até chegar no 7. Depois eu corto as somas que são iguais”, esclarecendo de como obteve as possíveis somas iguais a 7, no lançamento de três dados.
- “Eu fatorei usando o que a professora da quinta série nos ensinou. Como na questão de antes o senhor colocou os expoentes, então eu fui trocando expoentes dos fatores até encontrar algum divisor. Por exemplo, tem cinco fatores 2,né? Então o 2 na 3 vai ser um divisor, o 2 na 4 também e assim continua. Ah, depois que fizer com o 2, junta o 3 com cada um que tu achou antes”, sobre como encontrar a quantidade de divisores positivos de um número.
- “número de cores vezes o número de espaços”, referindo-se a como obter o número de senhas possíveis.
- “Eu peguei o número de pontos no início e vi que para cada um tem que ter um a menos para fazer um segmento. Aí fica parecido com diagonal por que a gente conta tudo duas vezes, então divide. Só que

aqui dá lado e diagonal e não só diagonal. É melhor.”, relatando como fez para descobrir o número de segmentos de reta possíveis com sete pontos não colineares (vértices de um heptágono).

- “Se eu escolher o azul para a região do coração, tem duas cores para o heptágono. Para cada um destes tem três cores para o ovo e para cada um de todos, tem quatro cores para a região do retângulo. Faz um vezes dois vezes três vezes quatro.”, para descobrir quantas bandeiras são possíveis de se formar.

Mesmo com pouco tempo, os alunos conseguiram utilizar tanto os invariantes operatórios como seus esquemas no desenvolvimento das quatro atividades.

Ao obterem desempenho positivo ao fim da última etapa de nossa pesquisa, podemos afirmar que a distância entre o nível de desenvolvimento real e o de desenvolvimento potencial desses estudantes aumentou, caracterizando uma ampliação da Zona de Desenvolvimento Proximal. Não temos dúvida de que a proposta da sequência de ensino surtiu efeito positivo nos alunos e, com certeza, colaborou para que eles desenvolvessem estratégias de contagem, muito úteis quando chegarem no 2º ano do ensino médio.

Acreditamos que, para estes alunos e mesmo aqueles que não tiveram um desempenho muito satisfatório, a introdução de análise combinatória no 2º ano do ensino médio será de melhor compreensão comparada a de estudantes que não tiveram um contato prévio desse assunto. Esperamos que não façam uso de fórmulas ou macetes para resolver os problemas de contagem que lá surgirem e que aproveitem essa experiência com jogos no momento de traçar alguma estratégia de resolução.

Pudemos testemunhar as falas durante as atividades e notamos que a postura dos alunos era bem diferente daquela de quando iniciamos as atividades com os jogos. Praticamente eles trabalharam em duplas durante todo o segundo semestre, não só quando dos encontros dos jogos, mas nos momentos das aulas regulares. Algumas mudanças foram notáveis quanto ao trabalho de cooperação com o coletivo.

Esse contato mais próximo entre eles não só ajudou nos processos internos de desenvolvimento do campo conceitual multiplicativo, mas também nos assuntos programados para a série. O professor notou que eles estavam interagindo mais nas aulas e que alguns já não estavam mais tão inibidos. Essa interação com os companheiros de sala colaborou não só para o resultado dessa pesquisa, mas, também, para as aquisições do desenvolvimento independente de cada um.

Os alunos ficaram mais comunicativos e dependentes na resolução de problemas. Suas falas, antes internalizadas, tornaram-se sociais a fim de promover uma discussão entre os próprios colegas e analisar cada situação de forma cooperativa.

Alguns problemas de relacionamentos até então devem persistir, pois, essas atividades que propomos são apenas uma “demão” no que ainda deve ser feito para retomar valores e atitudes que foram esquecidos. É preciso que todo o CMPA se envolva em trabalhos dessa natureza, na formação do caráter e desse resgate de valores que essas crianças precisam para se tornarem cidadãos conscientes de seus atos, respeitando as diferenças e contribuindo de forma efetiva no seu espaço social.

Essa pesquisa atingiu diretamente os alunos de uma turma do 8º ano do CMPA, mas não deve se limitar apenas a esse nível escolar. Com as devidas alterações e transposições didáticas, podem-se trabalhar problemas de contagem em todo o ensino fundamental, como prevêem os PCNs. É importante para a escola que existam pesquisas investigativas de como os alunos de diferentes níveis escolares podem superar as diversas dificuldades na resolução de problemas de contagem.

Uma nova pesquisa bem fundamentada e planejada pode apontar como se dá o desenvolvimento do raciocínio combinatório ao longo da vida escolar e que, assim, possibilite as reconfigurações e readaptações da organização curricular da disciplina de matemática do CMPA.

É indispensável que a escola preste atenção ao que está sendo trabalhado com seus alunos, pois, de uma maneira ou de outra, o produto desse trabalho terá reflexo no desempenho geral da instituição.

O término desse trabalho é meramente formal, porém, não se esgota aqui. Levamos adiante nossas intenções de adaptá-lo aos demais anos do ensino fundamental e ensino médio, claro, com as alterações e adaptações necessárias para cada nível escolar e mantendo os referenciais teóricos utilizados aqui.

8 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Marcos Teodorico Pinheiro de. **Jogos divertidos e brinquedos criativos**. Petrópolis,RJ: Vozes, 2004.

BARBOSA, Juliana Gontijo; FRANCHIN, Danielly Santos; COSTA, Marisa de. **O brincar e a Zona de Desenvolvimento Proximal na Educação Infantil**. Trabalho de estágio em Psicologia Escolar. CEINF – Campo Grande/MS. 2004.

BATLLORI, Jorge. **Jogos para treinar o cérebro**: desenvolvimento de habilidades cognitivas e sociais. Traduzido por Fina Iñiguez. 9.ed. São Paulo: Madras, 2007.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: 5ª a 8ª série. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ttransversais.pdf> Acesso em 12 nov. 2007

BORIN, Júlia. **Jogos e resolução de problemas:** uma estratégia para as aulas de matemática. 5.ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 2004. 100p.

BURKE, Thomas Joseph. **O professor revolucionário**: da Pré-escola à Universidade. 2.ed. Petrópolis,RJ: Vozes, 2003.

CENTRO DE COMPETÊNCIA ENTRE MAR E SERRA. **O ouri e o desenvolvimento do pensamento matemático quotidiano**. Projeto de investigação. Escola Secundária com 3º CEB da Batalha. Ministério da Educação. Portugal. 2003.

COSTA, Claudinei Aparecido da. **As concepções dos professores de matemática sobre o uso de modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório.** 2003. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4772> Acesso em: 20 mar. 2008

DA SILVA, Marcelo Carlos. **Bases Fundamentais da Teoria dos Campos Conceituais.** Disponível em: <www.psicologia.com.pt> 21/11/2008. Acesso em 10 jan. 2009.

DE MARCO, Fabiana Fiorezi. **Jogos: Um recurso metodológico para as aulas de matemática.** Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc08.pdf>. Acesso em 24 mar. 2009.

DE MARCO, Fabiana Fiorezi. **Estudo dos processos de resolução de problema mediante a construção de jogos computacionais de matemática no ensino fundamental.** Campinas, SP:[s.n], 2004. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

DELL'AGLI, Betânia Alves Veiga; BRENELLI, Rosely Palermo. **O jogo "Descubra o animal":** um recurso no diagnóstico psicopedagógico. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/pe/v12n3/v12n3a13.pdf> Acesso em: 20 mar. 2008.

ESTEVES, Inês. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório(...)**. 2001. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4786> Acesso em 21 mar. 2008.

GRANDO, Célia Regina. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** Campinas, SP: [s.n.], 2000. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

GROENWALD, Claudia Liste Oliveira; TIMM, Úrsula Tatiana. **Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula**. Educação Matemática em Revista-RS, v.2, n.2, p.21-26, 2000.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. **A importância dos jogos e curiosidades matemáticas no processo de Ensino-Aprendizagem.** Educação Matemática em Revista-RS, v.5, n.5, p26-28, 2003.

IMPA. Coordenadoria da OBMEP. Projeto de Iniciação Científica OBMEP 2006. **Métodos de Contagem e Probabilidade**. Porto Alegre: 2006.

ITACARAMBI, Ruth Ribas; CAPOVILLA, Simone F. de C.; PORFÍRIO, Maria Aparecida Rodrigues. **Jogos como Recurso Pedagógico para trabalhar matemática**. Relato de experiências, Seminário do 16º Congresso de Leitura do Brasil. 1999.

JUNIOR, Gabriel Dias de Carvalho. **A teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e o Planejamento Didático**. Disponível em:<http://www.redecatolicadeeducacao.com.br/admin/pdf/Gabriel%20_setembro_O_PLANEJAMENTO_DIDATICO.pdf> Acesso em: 20 mai. 2008.

KAMII, Constance; DEVRIES, Rheta. (orgs). **Jogos em grupo na educação infantil**:implicações na Teoria de Piaget. São Paulo: Trajetória Cultural, 1991.

LARA,Isabel Cristina Machado de. **Os jogos na aula de Matemática**. Ciência Porto Alegre, n12, pp.225-234, jul/dez 2002.

LESSA, Mônica Maria Lins; FALCÃO, Jorge Tarcísio da. **Pensamento e linguagem: uma discussão no campo da psicologia da educação matemática.** Psicologia: Reflexão e Crítica, Porto Alegre, v.18, n.3, p.1-13 Set./Dez. 2005

LOPES,José Marco. **Raciocínio combinatório por meio de resolução de problemas.** Disponível em: <www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxx_cnmac/PDF/706.pdf> Acesso em: 13 abr. 2008.

LUDWIG, Paula Isabel; RICO, Rosa Maria Tagliari. **Geoplano e Análise Combinatória:** construindo o conhecimento matemático no trabalho cooperativo. IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática, CCET/UCS. Caxias do Sul. 2006.

MANSUTTI, Maria Amábile. **Multiplicação, divisão e medidas.** Série PCN na escola – Matemática. MEC/SEED; Brasília, 2002. Proposta de Aula.

MARTINS, Rosana; GONÇALVES, Maria Imaculada. **Experiências matemáticas com educandos do programa Curumim**. Programa da SEDESE-MG. 2007.

MOREIRA, Marco Antonio. **Modelos Mentais.** Investigações em Ensino de Ciências, v.1, n.3, pp.193-232, 1996. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/modelosmentaisport.pdf> Acesso em 18 mar. 2009.

MOREIRA, Marco Antonio. **A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS (...).** Investigações em Ensino de Ciências, v.7,p.7-29, 2002 [S.l.]

PALANGANA, I.C. **Desenvolvimento & Aprendizagem em Piaget e Vygotsky**: a relevância do social. 3.ed. São Paulo: Summus, 2001.

PERRENOUD, Philippe. **10 Novas Competências para Ensinar**. Traduzido por Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

PESSOA, C. & BORBA, R. **Como crianças de 1ª a 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório?** Anais do 2º SIPEMAT – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. UFRPE, Recife, 2008.

PIANTAVINI, Francismara Neves Oliveira. **Jogo de regras e construção de possíveis**: análise das situações de intervenção psicopedagógica. Campinas: UNICAMP, 1999. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1999.

PONTE, J.P. **O estudo de caso na investigação em educação matemática**. Quadrante, 3(1),3-18. Lisboa. 2006.

RAMOS, Fernando Carvalho. **Recursos didáticos para o ensino da matemática**: ensino fundamental, ensino médio e ensino superior. Santa Maria,RS: Pallotti, 2002. 80p.

REHFELDT,Márcia Jussara; FLÔRES,Maria Lucia; BERCHT, Magda. **Um modelo afetivo de aprendizagem para o estudo de análise combinatória**. CINTED-UFRGS, Novas Tecnologias para Educação. V.3,n.2, Novembro, 2005.

SANTOS, J. Plínio; MELLO, Margarida; MURARI, Idani. **Introdução à Análise Combinatória**. 3.ed.rev. Campinas: Editora da Unicamp, 2002.

STURM, Wilton. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa**. Campinas: UNICAMP, 1999. Dissertação (Mestrado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1999.

TIRAPEGUI, Cecília. **Juegos para La clase de matemáticas.** Educación Matemática. v.12, n.2, pp.121-131, ago 2000.

VERGNAUD, Gerard. **La Théorie dês champs conceptuels.** Research em didatique dês Mathematiques. Traduzido por Gustavo Carvalho. v.10, pp. 133-170, 1998.

VERGNAUD, Gerard. **Multiplicative structures.** In: R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics: Concepts and processes.* New York : Academic Press, pp. 141-161, 1991.

VERGNAUD, Gerard. **Teoria dos Campos Conceituais.** In Nasser, L(Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática. Rio de Janeiro, RJ. Pp. 1-26. 1993.

VERGNAUD, Gerard. The nature of mathematical concepts. In Nunes, T & Bryant, P. (Eds.) Learning and teaching mathematics, na international perspective. Hove (East Sussex) Psychology Press Ltda. 1997. Traduzido por Gustavo Carvalho.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **Pensamento e Linguagem**. Traduzido por Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **A Formação Social da Mente**:o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Traduzido por José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 4.ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

ZUCHI, Ivanete. **A Importância da Linguagem no ensino de Matemática**. Educação Matemática em Revista, v.11, n.16, pp49-55,2004.

-APÊNDICE A-

Reformulação da proposta da sequência didática

(Comentários)

Do planejamento à execução das atividades, foram muitas as intervenções e alterações. Alguns equívocos foram inevitáveis, tanto na etapa de organização dos jogos (ordem dos mesmos e regras) quanto na confecção dos questionários. Aquilo que não havíamos previsto, cedo ou tarde foi revelado pelos alunos.

Assim, depois de uma análise do que deu certo e do que deu errado, apresentamos uma reformulação da proposta da sequência didática. Acreditamos que a ordem das atividades a seguir possa ser mais efetiva e que possibilite ao educador observar de forma clara os conceitos do campo multiplicativo que estão sendo trabalhados dentro de problemas de contagem nas situações dos jogos.

Desejamos um ótimo trabalho e muito sucesso àqueles que utilizarem essa sequência didática em seus planejamentos escolares.

Os questionários reformulados estão no Apêndice B.

1 Jogo A Grande Aposta

Propomos dois momentos para este jogo. O primeiro momento segue à risca o que apresentamos em nossa pesquisa. No segundo momento sugerimos que o número de cada cavalo seja obtido a partir da multiplicação das faces voltadas para cima de cada dado. Nesse caso, é necessário fazer mudanças nas regras do jogo.

Material do jogo (2º momento)

a) Fichas de numeração de cada cavalo, totalizando 18 cavalos.

As regas do jogo

a) cada jogador recebe nove fichas e não há “cavalo-curinga”.

b) ao lançar os dados, deve-se atentar que agora o **produto** das faces voltadas pra cima de cada dado será o número de algum cavalo.

Para essa etapa, sugerimos a conservação do questionário, entretanto, com as modificações para a multiplicação. Além dessas modificações, recomendamos as seguintes alterações nos dois momentos (soma e produto):

02. “... Quais são as formas distintas com que ele poderá ganhar num páreo com esse cavalo, segundo as regras do jogo?”.

03. “Da mesma forma, de quais e quantas maneiras distintas ele poderá ganhar um páreo se ele tiver o cavalo número 10? E se tiver o cavalo número 8?”.

05. “Veja, abaixo, uma situação do jogo.

	Jogador 1	Jogador 2
Cavalos	2,4,6,8,10,12, 16,18, 20	1,3,5,9,15,24,25,30,36
Páreo 1	| (2)	0
Páreo 2	0	| (9)
Páreo 3	| (6)	0
Páreo 4	| (8)	0
Páreo 5	0	| (5)
Páreo 6	| (20)	0
Soma		

Responda:

Antes das apostas iniciarem, qual dos jogadores tinha mais chances de ganhar, segundo as regras do jogo? Justifique.”.

06. “Veja, a seguir, os cavalos dos jogadores 1 e 2, respectivamente:

Jogador 1 : 5,6,8,9,15,24,25,30 e 36.

Jogador 2 : 1,2,3,4,10,12,16,18 e 20.

Antes de iniciarem as apostas, qual dos jogadores tinha mais chance de ganhar? Justifique.”.

07. “... e sim pelo número obtido da **multiplicação** das faces voltadas para cima dos dois dados. Quais são os possíveis pares dos dados e quantos são estes?”.

Sugerimos que as questões 08 e 09 sejam suprimidas nesse caso de se trabalhar com a multiplicação das faces voltadas pra cima.

2 Jogo “Senha”

Sugerimos a manutenção do material e das regras do jogo. As modificações se restringem a algumas perguntas do questionário.

Situação 2: Considere, agora, que estão sendo utilizadas cinco cores, por exemplo, verde, vermelho, laranja, amarelo e azul, e a senha é formada por quatro cores **distintas** dentre estas.

02. “... A partir do que foi apresentado pelo desafiante e sabendo que a cor azul está certa, **quais** são as possíveis combinações de senhas para a próxima jogada?”.

03. “... Sabendo, então, que a cor vermelha não faz parte da senha, **quais** são as possíveis combinações de senha?”.

04. “... Sabendo que a cor laranja não faz parte da senha, **quais** são as possíveis senhas para a próxima jogada?”.

07. Complemente a pergunta pedindo que os alunos listem todas as possibilidades.

08. Adicione “Sugestão: Verifique o número de senhas para os casos: a)senhas formadas por uma cor, b)senhas formadas por duas cores distintas e c)senhas formadas por três cores distintas. Encontre alguma regularidade entre as respostas de

a), b) e c) e responda o caso em que a senha é formada por quatro cores distintas.”.

3 Jogo Contig60®

Recomendamos que o material e as regras do jogo sejam mantidos, exceto pelo número de fichas, que o questionário tenha uma quantidade menor de perguntas, bem como a reformulação de alguns problemas restantes.

Regras do jogo

d) O jogo termina quando um jogador conseguir colocar quatro fichas de mesma cor em linha reta sem nenhuma ficha do adversário intervindo. Essa linha poderá ser horizontal, vertical ou diagonal. Caso nenhum jogador forme a linha com quatro fichas e todas as fichas já tenham sido usadas no jogo, o vencedor será aquele que obtiver o maior número de pontos.

Em relação ao questionário, aconselhamos que se façam as seguintes alterações:

03. Adicionar, ao final da questão, a expressão “simultaneamente”.
09. Adicionar, ao final da questão, a expressão “simultaneamente”.
10. Além das possíveis multiplicações para o número 42, apresentar sua fatoração em primos. Substituir o número 125 pelo número 96.
13. Pedir apenas os divisores do número 100 a partir do que foi sugerido. Não pedir as possíveis combinações.
14. Substitua o número 96 por 120.

As questões de número 05, 08, 12 e 15 podem ser eliminadas sem prejuízos para a atividade.

4 Jogo Bicolorido

Não há recomendações quanto ao material e as regras do jogo. Entretanto, apresentamos possibilidades para a questão 3 em todas as situações.

03.

Situação 01: quatro pontos A,B,C e D

"E quantos segmentos restam para o 2º jogador, na segunda jogada, sabendo que o primeiro jogador marcou a)o segmento $\overline{AC}$?, b)o segmento $\overline{BC}$?, c) o segmento $\overline{CD}$? e d)o segmento $\overline{DA}$?"

Situação 02: cinco pontos A,B,C,D e E

"E quantos segmentos restam para o 2º jogador, na segunda jogada, sabendo que o primeiro jogador marcou a)o segmento $\overline{AC}$?, b)o segmento $\overline{BC}$?, c) o segmento $\overline{CD}$?, d)o segmento $\overline{DE}$? e e)o segmento $\overline{EA}$?"

Situação 03: seis pontos A,B,C,D,E e F

"E quantos segmentos restam para o 2º jogador, na segunda jogada, sabendo que o primeiro jogador marcou a)o segmento $\overline{AC}$?, b)o segmento $\overline{BC}$?, c) o segmento $\overline{CD}$?, d)o segmento $\overline{DE}$?, e)o segmento $\overline{EF}$? e f)o segmento $\overline{FA}$?"

Situação 04: sete pontos A,B,C,D,E,F e G

"E quantos segmentos restam para o 2º jogador, na segunda jogada, sabendo que o primeiro jogador marcou a)o segmento $\overline{AC}$?, b)o segmento $\overline{BC}$?, c) o segmento $\overline{CD}$?, d)o segmento $\overline{DE}$?, e)o segmento $\overline{EF}$?, f)o segmento $\overline{FG}$? e g)o segmento $\overline{GA}$?"

Aconselhamos a retirada da questão de número 05 em todas as situações.

Ao final da situação 04, provocamos os alunos a pensarem nos casos de 8 pontos, propondo três questões. Destas, sugerimos a seguinte alteração:

b) Você conseguiria responder quantos segmentos de reta podemos formar tendo 8 pontos (vértices de um octógono convexo)?

Acreditamos que um questionário ou uma pequena lista de exercícios diversos deva ser proposto ao fim de cada jogo, dependendo do conceito multiplicativo abordado. Esse tipo de verificação contínua pode indicar, de uma forma mais eficaz que a proposta por nós, se o aluno está desenvolvendo os conhecimentos prévios necessários para que possa ampliar sua Zona de Desenvolvimento Proximal.

APÊNDICE B – Questionários reformulados

Questionário *A Grande Aposta*

Situação SOMA

10. Após você ter jogado algumas vezes, você acha que todos os cavalos têm as mesmas chances de ganhar?

11. Suponha que um dos jogadores tenha o cavalo número 4. De quantas formas distintas ele poderá ganhar um páreo com esse cavalo, segundo as regras do jogo?

12. Da mesma forma, de quantas maneiras distintas ele poderá ganhar um páreo se ele tiver o cavalo número 10? E se tiver o cavalo número 8?

13. Suponha que o jogador 1 tenha o cavalo número 3 e o jogador 2 tenha o cavalo número 12. Quem tem mais chance de vencer um páreo? Justifique.

14. Veja, abaixo, uma situação do jogo, onde a última jogada pode decidir a corrida e o cavalo curinga é o de número 3.

	Jogador 1	Jogador 2
Cavalos	2,4,6,8,10	5,7,9,11,12
Páreo 1	I (2)	0
Páreo 2	0	I (7)
Páreo 3	I (6)	0
Páreo 4	I (8)	0
Páreo 5	0	I (5)
Páreo 6	?	?
Soma		

Responda:

Antes das apostas iniciarem, qual dos jogadores tinha mais chances de ganhar, segundo as regras do jogo? Justifique.

15. Veja, a seguir, os cavalos dos jogadores 1 e 2, respectivamente:

Jogador 1: 5,6,7,8 e 9

Jogador 2: 2,3,10,11 e 12

Antes de iniciarem as apostas, qual dos jogadores têm mais chance de ganhar? Justifique.

16. Supondo que a escolha dos cavalos não fosse feita "aleatoriamente" pelos cartões e sim pelo número obtido da **soma** das faces voltadas para cima dos dois dados. Quais são os possíveis pares dos dados e quantos são estes?

17. E, se em vez de serem dois dados, fossem três. O jogo deveria ter quantos cavalos? Quantos são os possíveis resultados da forma (d_1,d_2,d_3) onde d_1,d_2 e d_3 são os possíveis números indicados pela face voltada para cima de cada dado?

18. E se fossem quatro dados? Quantos cavalos seriam? Quantos são os possíveis resultados da forma (d_1,d_2,d_3,d_4) ?

Situação PRODUTO

01. Após você ter jogado algumas vezes, você acha que todos os cavalos têm as mesmas chances de ganhar?

02. Suponha que um dos jogadores tenha o cavalo número 4. Quais as formas distintas que ele poderá ganhar um páreo com esse cavalo, segundo as regras do jogo?

03. Da mesma forma, de quais e quantas maneiras distintas ele poderá ganhar um páreo se ele tiver o cavalo número 10? E se tiver o cavalo número 8?

04. Suponha que o jogador 1 tenha o cavalo número 3 e o jogador 2 tenha o cavalo número 12. Quem tem mais chance de vencer um páreo? Justifique.

05. Veja, abaixo, uma situação do jogo.

<table>
<tr><td rowspan="2">Cavalos</td><td>Jogador 1</td><td>Jogador 2</td></tr>
<tr><td>2,4,6,8,10,12,
16,18, 20</td><td>1,3,5,9,15,24,
25,30,36</td></tr>
<tr><td>Páreo 1</td><td>| (2)</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Páreo 2</td><td>0</td><td>| (9)</td></tr>
<tr><td>Páreo 3</td><td>| (6)</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Páreo 4</td><td>| (8)</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Páreo 5</td><td>0</td><td>| (5)</td></tr>
<tr><td>Páreo 6</td><td>| (20)</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Soma</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Responda:

Antes das apostas iniciarem, qual dos jogadores tinha mais chances de ganhar, segundo as regras do jogo? Justifique.

06. Veja, a seguir, os cavalos dos jogadores 1 e 2, respectivamente:

Jogador 1 : 5,6,8,9,15,24,25,30 e 36.

Jogador 2 : 1,2,3,4,10,12,16,18 e 20.

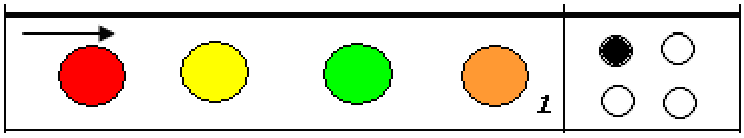
Antes de iniciarem as apostas, qual dos jogadores têm mais chance de ganhar? Justifique.

07. Supondo que a escolha dos cavalos não fosse feita “aleatoriamente” pelos cartões e sim pelo número obtido do **produto** das faces voltadas para cima dos dois dados. Quais são os possíveis pares dos dados e quantos são estes?

Questionário *Senha*

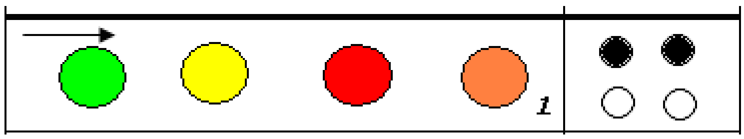
Situação 01: Considere que estão sendo utilizadas quatro cores: laranja, verde, vermelho e amarelo. A senha é formada por quatro cores **distintas** dentre estas.

05. Suponha que, na primeira tentativa, o desafiado apresenta a seguinte combinação de cores e o desafiante preenche o campo de "dicas" da seguinte forma:



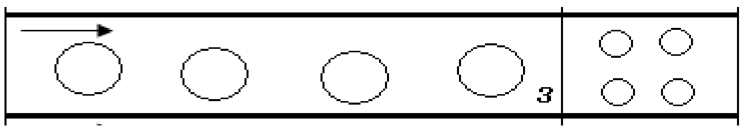
Quais são as combinações de senhas possíveis para a próxima jogada, sabendo que a cor amarela está na posição certa?

06. Na jogada seguinte, o desafiado mantém a cor amarela, muda a posição das demais cores e o desafiante dá a seguinte "dica":



a)Além da cor amarela, **quais** são as possíveis cores que estão na posição correta? b) Nesta situação, **quais** são as possíveis combinações de senha?

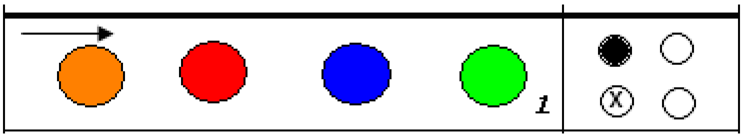
07. Na 3ª tentativa, qual deverá ser a próxima jogada? Haverá uma 4ª jogada? Justifique com suas palavras.



08. Antes de o jogo iniciar, **quais** eram as possíveis combinações de senha?

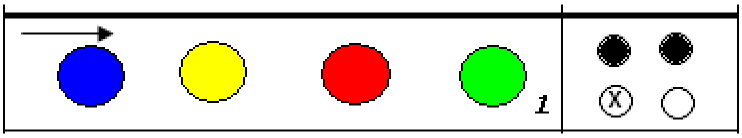
Situação 02: Considere, agora, que estão sendo utilizadas cinco cores, por exemplo, verde, vermelho, laranja, amarelo e azul, e a senha é formada por quatro cores **distintas** dentre estas.

02. Na 1ª tentativa, o desafiado apresenta a seguinte seqüência de cores e o desafiante preenche o campo de "dicas" da seguinte forma:



Sabendo que a cor verde está na posição certa e que a cor vermelha não faz parte da senha, **quais** são as combinações possíveis para a próxima jogada?

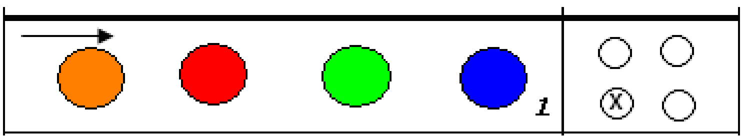
02. Suponha que o desafiado não saiba que a cor vermelha **não** faz parte da senha, e ele substitui a cor laranja pela cor amarela apresentando a seguinte seqüência:



A partir do que foi apresentado pelo desafiante e sabendo que a cor azul está na posição certa, **quais** são as possíveis combinações de senhas para a próxima jogada?

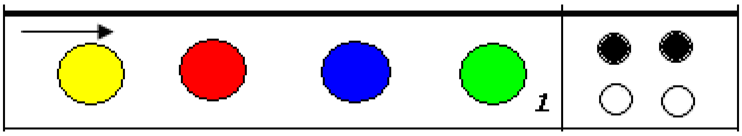
03. Sabendo, então, que a cor vermelha não faz parte da senha, **quais** são as possíveis combinações de senha?

04. Vamos supor um novo jogo. Na 1ª tentativa, o desafiado apresenta a seguinte seqüência e o desafiante dá a "dica":



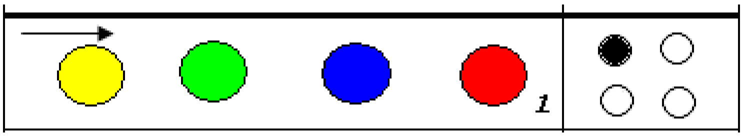
Sabendo que a cor laranja não faz parte da senha, **quais** são as possíveis senhas para a próxima jogada?

05. Na 2ª tentativa, o desafiado substitui a cor laranja pela cor amarela e troca as posições das cores verde e azul. Assim, o desafiante apresenta a seguinte "dica":



A partir do que apresentou o desafiante e sabendo que a cor azul está correta, **quais** são as possíveis cores que estão na posição correta?

06. O desafiado escolhe por manter a cor amarela e a cor azul em suas posições. O desafiante apresenta a dica:



A partir do que apresentou o desafiante, das jogadas anteriores e sabendo que a cor vermelha **não** está na posição certa, **quais** são as possíveis senhas para a próxima jogada?

07. Antes de o jogo iniciar, **quantas** eram as possíveis combinações de senha? Liste todas as possibilidades.

08. Originalmente, o jogo *Senha* foi criado em 1971 por Mordechai Meirovitz e consistia em determinar uma senha de quatro cores (distintas ou não) dentre **seis** possíveis. Supondo que foram utilizadas estas seis cores, determine **quantas** senhas de quatro cores distintas são possíveis de criar. Sugestão: Verifique o número de senhas para os casos: a)senhas formadas por uma cor, b)senhas formadas por duas cores distintas e c)senhas formadas por três cores distintas. Encontre alguma regularidade entre as respostas de a), b) e c) e responda o caso em que a senha é formada por quatro cores distintas.

Questionário *Contig60*

01. Veja, abaixo, uma situação do jogo, onde apenas os espaços dos números 6, 8 e 33 estão ocupados. Para marcar 3 pontos, o espaço do número 7 deve ser ocupado. De quantos modos isso é possível usando apenas adição?

6	7
33	8

02. Usando, novamente, **apenas adição** e sabendo que os espaços 36, 37 e 38 são os únicos espaços ocupados. De quantas maneiras é possível marcar 1 ponto? Por exemplo, para marcar 1 ponto é necessário marcar os espaços 10 ou 14. Para o espaço 10 existe, dentre todas as maneiras, 2+3+5; 1+4+5,etc. Faça o mesmo para marcar 2 pontos e 3 pontos.

03. Imagine a situação de jogo apresentada na questão 01. Considere os mesmos valores apresentados, porém, fazendo uso das operações adição e subtração,simultaneamente.

04. No lançamento dos três dados, suponha que tenham saído as faces 3, 4 e 5 não necessariamente nesta ordem. Quais são os possíveis espaços que podem ser ocupados fazendo uso da adição e da multiplicação segundo as combinações abaixo?

$$\square \times \square + \square$$

$$\square \times (\square + \square)$$

05. No caso de terem saído as faces 1,2 e 5, não necessariamente nesta ordem, quais são os espaços que podem ser ocupados, fazendo uso da subtração e multiplicação, segundo as combinações abaixo?

$$\square \times \square - \square$$

$$\square \times \left(\square - \square\right)$$

06. Suponha que, no lançamento dos dados, tenham saídos as faces, 3,5 e 6, não necessariamente nesta ordem. Com a adição e a divisão, quais são os espaços possíveis de serem ocupados, segundo as combinações abaixo?

$$\square : \square + \square$$

$$\square : \left(\square + \square\right)$$

07. Suponha que, para um dos jogadores, seja vantagem marcar o espaço do número 42. Quais são as possíveis combinações, usando adição e multiplicação, simultaneamnete, para que este jogador ocupe o espaço pretendido? (Existem várias combinações)

08. Descobrir os divisores de um número pode ser uma boa estratégia para formar uma expressão numérica e ocupar o espaço de um determinado número. Consideremos o número 42, da questão acima. Para descobrir seus divisores, podemos pensar nos pares de números inteiros positivos que multiplicados dão como resultado 42: 1x42, 2x21, 3x14 e 6x7. Cada um dos fatores apresentados é um divisor de 42. Também podemos pensar na sua fatoração em primos: 42=2x3x7. Veja que uma forma de obtê-lo é (6+1)x6. Assim, encontre os divisores do número 96 e determine quais as possíveis combinações para que o espaço do número 96 seja ocupado.

09. Suponha que seja vantagem, para um dos jogadores, marcar o espaço do número 50. Como esse jogador tem dificuldades em formar uma expressão numérica cujo resultado seja 50, ele opta por descobrir os divisores desse número. Sabendo que este jogador usou adição e multiplicação, descubra quais são os divisores de 50 e quais as possíveis combinações para que ele marque o espaço pretendido.

10. Veja a fatoração de alguns números já vistos aqui: $42=2^1x3^1x7^1$; $125=5^3$; $50=2^1x5^2$ e $66=2^1x3^1x11^1$. Encontre os divisores do número 100, segundo os modelos anteriores.

11. Considere a suposição de que seja vantagem, para o jogador 1, marcar o espaço do número 120. Entretanto, para este jogador, parece ser uma tarefa difícil determinar os divisores de 120. Sendo assim, ele preferiu determinar apenas **quantos** divisores tem o número e deixar que seu adversário faça a jogada. Como o jogador 1 fez para determinar a **quantidade de divisores** de 120? Uma dica: ele partiu da fatoração do número.

12. Analise os divisores dos números encontrados anteriormente e tente descobrir uma maneira **prática** de determinar a **quantidade** de divisores do número 80. Tente fazer o mesmo para encontrar a **quantidade** de divisores do número 144.

Questionário Bicolorido

Situação 01. Quatro pontos A,B,C e D (vértices de um quadrilátero convexo)

01. Após ter jogado algumas vezes com seu colega, qual foi a situação de resultado que mais apareceu? Situação de vitória/derrota ou situação de empate?

02. Quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados, para o colega que faz a primeira jogada, partindo do vértice A?

03. E quantos segmentos restam para o 2º jogador, na segunda jogada, sabendo que o primeiro jogador marcou a)o segmento $\overline{AC}$?, b)o segmento $\overline{BC}$?, c) o segmento $\overline{CD}$? e d)o segmento $\overline{DA}$?

04. Dados os 4 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?

05. Quais são os possíveis triângulos que podemos formar tendo como vértices os pontos A,B,C e D?

Situação 02. Cinco pontos A,B,C,D e E (vértices de um pentágono convexo)

01. Após ter jogado algumas vezes com seu colega, qual foi a situação de resultado que mais apareceu? Situação de vitória/derrota ou situação de empate?

02. Quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados, para o colega que faz a primeira jogada, partindo do vértice D?

03. E quantos segmentos restam para o 2º jogador, na segunda jogada, sabendo que o primeiro jogador marcou a)o segmento $\overline{AC}$?, b)o segmento $\overline{BC}$?, c) o segmento $\overline{CD}$?, d)o segmento $\overline{DE}$? e e)o segmento $\overline{EA}$?

04. Dados os 5 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?

05. Quais são os possíveis triângulos que podemos formar tendo como vértices os pontos A, B, C, D e E?

Situação 03. Seis pontos A, B, C, D, E e F (vértices de um hexágono convexo)

01. Após ter jogado algumas vezes com seu colega, qual foi a situação de resultado que mais apareceu? Situação de vitória/derrota ou situação de empate?

02. Quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados, para o colega que faz a primeira jogada, partindo do vértice C?

03. E quantos segmentos restam para o 2º jogador, na segunda jogada, sabendo que o primeiro jogador marcou a)o segmento $\overline{AC}$?, b)o segmento $\overline{BC}$?, c) o segmento $\overline{CD}$?, d)o segmento $\overline{DE}$?, e)o segmento $\overline{EF}$? e f)o segmento $\overline{FA}$?

04. Dados os 6 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?

05. Quais são os possíveis triângulos que podemos formar tendo como vértices os pontos A, B, C, D, E e F?

Situação 04. Sete pontos A, B, C, D, E, F, e G (vértices de um heptágono convexo)

01. Após ter jogado algumas vezes com seu colega, qual foi a situação de resultado que mais apareceu? Situação de vitória/derrota ou situação de empate?

02. Quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados, para o colega que faz a primeira jogada, partindo do vértice B?

03. E quantos segmentos restam para o 2º jogador, na segunda jogada, sabendo que o primeiro jogador marcou a)o segmento $\overline{AC}$?, b)o segmento $\overline{BC}$?, c) o segmento $\overline{CD}$?, d)o segmento $\overline{DE}$?, e)o segmento $\overline{EF}$?, f)o segmento $\overline{FG}$? e g)o segmento $\overline{GA}$?

04. Dados os 7 pontos iniciais, quais segmentos de reta são possíveis de serem traçados?

05. Quais são os possíveis triângulos que podemos formar tendo como vértices os pontos A, B, C, D, E, F e G?

Você já deve ter notado que, à medida que o número de pontos (vértices) aumenta, fica mais difícil listar e contar o número de segmentos de reta e o número de triângulos. Analisando as situações anteriores responda:

f) Existe uma maneira **mais prática** de calcular o número de segmentos? E o número de triângulos? Explique com suas palavras e com cálculos.
g) Você conseguiria responder quantos segmentos de reta podemos formar tendo 8 pontos (vértices de um octógono convexo)?
h) E quantos triângulos podemos formar tendo como vértices os pontos de um octógono? Justifique.

-APÊNDICE C-

Possibilidades do Jogo “Cara a Cara”

Na fase de projeto desse mestrado, o primeiro jogo que pensamos aplicar na turma foi o “Cara a Cara”. Foi feita uma solicitação de compra junto à Sub-Direção de Ensino do CMPA em meados de abril. Não obtivemos resposta quanto à aquisição do material e, assim, guardamos essa atividade na gaveta, substituindo-a pelo “A Grande Aposta”.

Apresentamos a seguir o jogo Cara a Cara e um possível questionário que pode ser aplicado.

1 Jogo Cara a Cara

Cara a cara é um jogo de tabuleiro que foi lançado em 1986 pela empresa Estrela, baseado no jogo “Guess Who?”, criado em 1979 e fabricado pela Milton Bradley Company, adquirida, em 1984 pela Hasbro.

O jogo admite dois jogadores ou dois grupos de jogadores. O tabuleiro é composto por 24 retratos diferentes, conforme Figura 1.

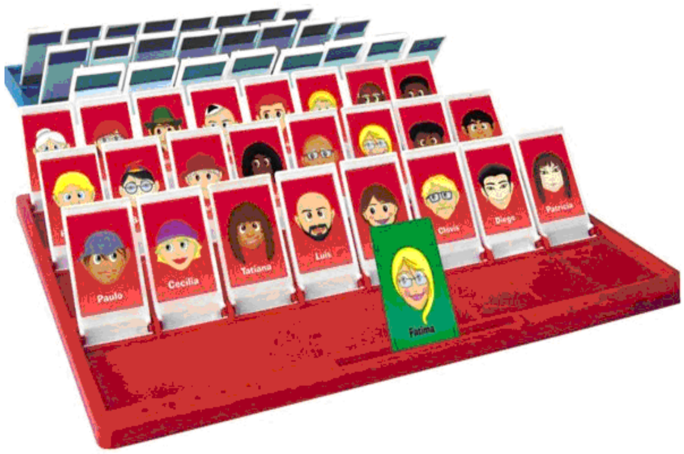


Figura 1: Tabuleiro do jogo Cara a Cara. Fonte: http://www.culturamarcas.com.br/toys_productdetails.asp?Query=ProductPage&ProdTypeId=3&ProdId=207762&ST=SF21333.

Sorteia-se uma carta, dentre 24, para cada jogador e, por meio de perguntas, deve-se adivinhar a “carinha” que coube ao adversário.

1.1 Regras do jogo

a) Cada jogador escolhe um dos tabuleiros e coloca-o com o lado da fenda virado pra si.
b) Cada retrato do tabuleiro possui uma carta. Ao embaralhar as 24 cartas, cada jogador escolhe, aleatoriamente uma e a coloca na fenda de seu tabuleiro, sem que o adversário a veja.
c) Cada jogador terá direito de fazer uma pergunta ao seu adversário sobre a carta que este escolheu. A pergunta a ser feita só poderá ter dois tipos de resposta: sim ou não.
d) A primeira pergunta não poderá ser sobre o personagem ser homem ou mulher. Pergunte, por exemplo: “Tem olhos azuis?”. Se o adversário responder negativamente, abaixe todas as molduras (retratos do tabuleiro) que tiverem personagens com olhos azuis, para eliminá-las do jogo. Caso a resposta do seu adversário seja positiva, então abaixe todas as molduras que tiverem personagens que não têm olhos azuis. Depois, seu adversário faz uma pergunta e assim por diante.
e)Se um dos jogadores acredita que sabe o personagem de seu adversário, poderá adivinhar a qualquer momento ou se, no mínimo, restarem três carinhas no seu tabuleiro.

1.2 Questionário

01. Segundo as regras do jogo, qual foi a primeira pergunta que você mais fez? Justifique.
02. Qual(is) característica(s) você acredita que aumentam as possibilidades de acerto? Por quê?
03. Suponha que o personagem de seu adversário seja homem e de pele branca. Responda:
a) Quantos personagens possuem estas características?
b) Se, além disso, o personagem usar chapéu?
c) Ou, ao invés de chapéu, o personagem usar bigode?
d) Ou,ao invés de bigode, o personagem ser careca?
e) Ou, ao invés de ser careca, o personagem ter barba?
f) Ou, ao invés de ter barba, o personagem usar óculos?
g) Ou, ao invés de usar óculos, o personagem ter os olhos azuis?
04. Considere, agora, que o personagem de seu adversário seja mulher. Responda:
a) Quantos personagens possuem esta característica?
b) E, destes, quantos usam chapéu?
c) Sendo mulher, quantas têm cabelo escuro?
d) Ou, ao invés de cabelo escuro, ter o cabelo curto?
e) Ou, sendo mulher, usar brinco?
f) Ou, sendo mulher, ter o nariz pequeno?
05. Suponha que o personagem de seu adversário tenha pele branca. Responda:
a) Quantos são os personagens que possuem esta característica?
b) Se, além disso, o personagem for homem?
c) Ou, ao invés de ser homem, o personagem for mulher?
d) Ou, ao invés de ser mulher, o personagem usar chapéu?
e) Ou, ao invés de usar chapéu, o personagem usar barba?
f) Ou, ao invés de usar barba, o personagem usar brinco?
g) Ou, ao invés de usar brinco, o personagem ter boca grande?
06. Classifique os personagens do jogo quanto à cor da pele.
07. Classifique os personagens do jogo quanto ao tamanho da boca.

08. Feito isso, classifique os personagens usando os dois critérios anteriores.
09. Agora, classifique os personagens do jogo quanto à cor dos olhos.
10. Da mesma forma, classifique os personagens do jogo quanto ao tamanho do nariz.
11. Classifique os personagens do jogo segundo os critérios cor dos olhos e tamanho do nariz.
12. Classifique os personagens do jogo quanto ao tamanho do cabelo.
13. Classifique os personagens do jogo quanto à cor do cabelo.
14. Classifique os personagens do jogo quanto à cor da pele.
15. Agora, classifique os personagens do jogo segundo os três critérios anteriores.
16. É possível saber quantos grupos serão formados usando um certo número de critérios? Justifique.
17. Você acredita que exista uma maneira **mais prática** de saber quantos grupos são possíveis de serem formados sem que haja necessidade de contar os grupos? Explique com suas palavras.

ANEXO A

Momentos registrados das atividades

Todos os registros de fotos foram autorizados pelos responsáveis dos alunos.

Figura 1: Material do jogo A Grande Aposta

Figura 2: Momento do jogo A Grande Aposta

Figura 3: Momento do jogo A Grande Aposta

Figura 4: Lançamento dos dados (A Grande Aposta)

Figura 5: Duas alunas respondendo questionário

Figura 6: Sob o olhar atento do orientador, os alunos realizam a atividade.

Figura 7: Alunos analisando as possibilidades

Figura 8: Momento de “descontração”.

Figura 9: Apresentação das regras do Contig60

Figura 10: Momento do jogo Contig60

Figura 11: Formando as sentenças (jogo Contig60)

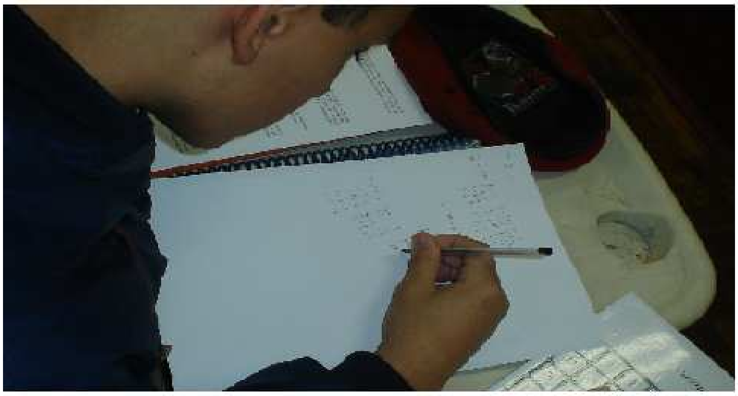


Figura 12: Aluno respondendo o questionário do jogo Contig60

Figura 13: Disposição dos alunos

Figura 14: Alunos jogando o Bicolorido

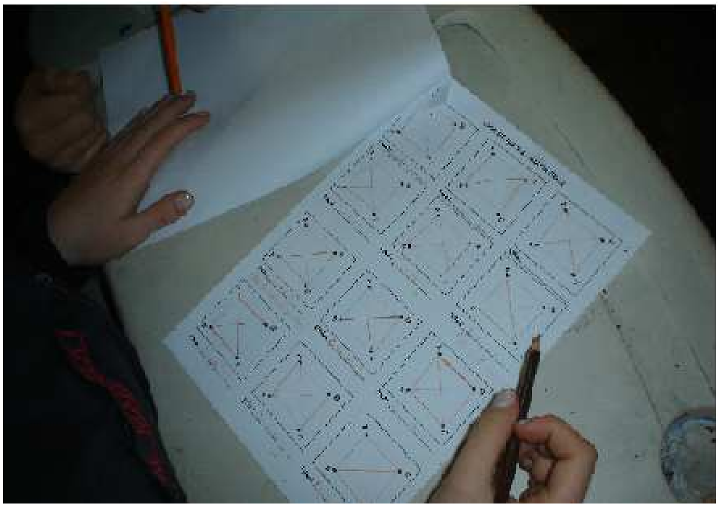


Figura 15: Dupla jogando com o tabuleiro de quatro pontos

ANEXO B – Material e regras dos jogos

Cavalos	Jogador 1	Jogador 2
Páreo 1		
Páreo 2		
Páreo 3		
Páreo 4		
Páreo 5		
Páreo 6		
Soma		

Cavalos	Jogador 1	Jogador 2
Páreo 1		
Páreo 2		
Páreo 3		
Páreo 4		
Páreo 5		
Páreo 6		
Soma		

Cavalos	Jogador 1	Jogador 2
Páreo 1		
Páreo 2		
Páreo 3		
Páreo 4		
Páreo 5		
Páreo 6		
Soma		

Cavalos	Jogador 1	Jogador 2
Páreo 1		
Páreo 2		
Páreo 3		
Páreo 4		
Páreo 5		
Páreo 6		
Soma		

Cavalos	Jogador 1	Jogador 2
Páreo 1		
Páreo 2		
Páreo 3		
Páreo 4		
Páreo 5		
Páreo 6		
Soma		

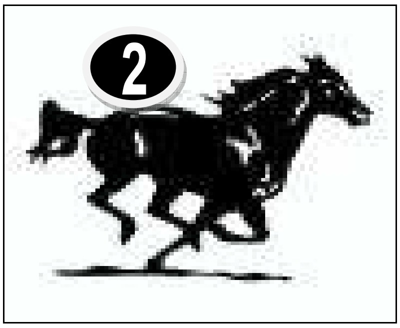
Cavalos	Jogador 1	Jogador 2
Páreo 1		
Páreo 2		
Páreo 3		
Páreo 4		
Páreo 5		
Páreo 6		
Soma		

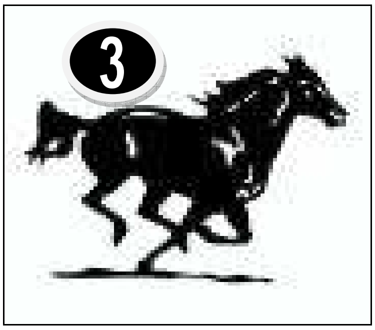
Cavalos	Jogador 1	Jogador 2
Páreo 1		
Páreo 2		
Páreo 3		
Páreo 4		
Páreo 5		
Páreo 6		
Soma		

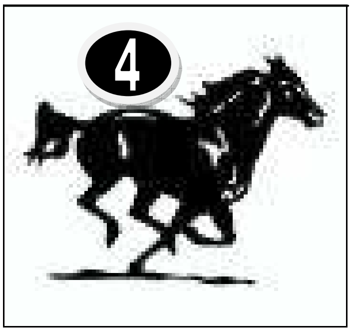
Cavalos	Jogador 1	Jogador 2
Páreo 1		
Páreo 2		
Páreo 3		
Páreo 4		
Páreo 5		
Páreo 6		
Soma		

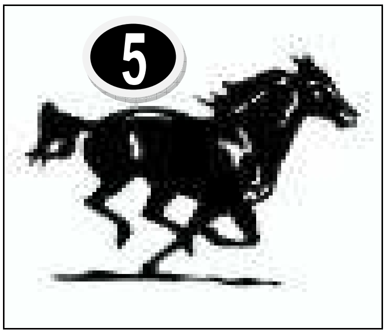
Cavalos	Jogador 1	Jogador 2
Páreo 1		
Páreo 2		
Páreo 3		
Páreo 4		
Páreo 5		
Páreo 6		
Soma		

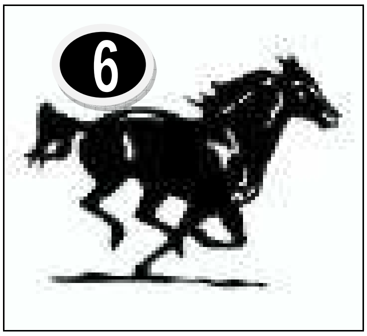
Cavalos	Jogador 1	Jogador 2
Páreo 1		
Páreo 2		
Páreo 3		
Páreo 4		
Páreo 5		
Páreo 6		
Soma		

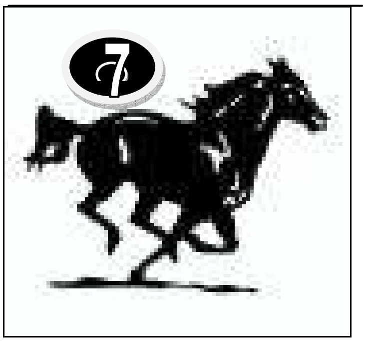

2

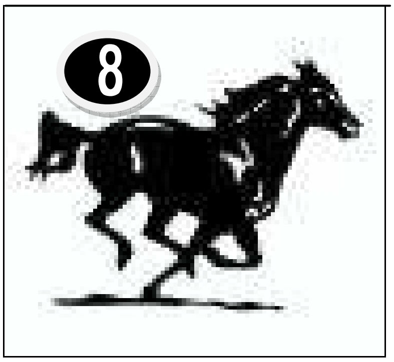

3


4


5

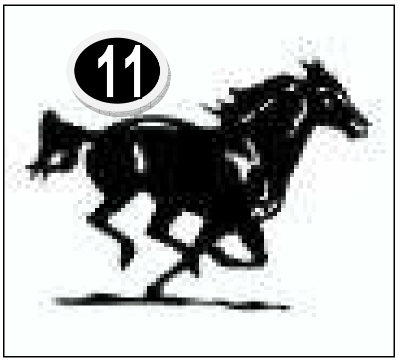

6

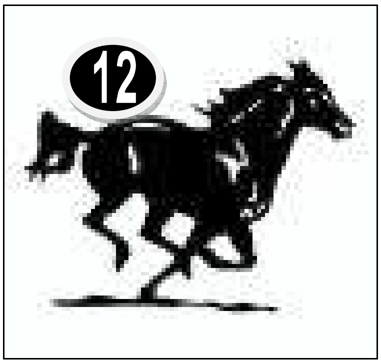

7


8


9

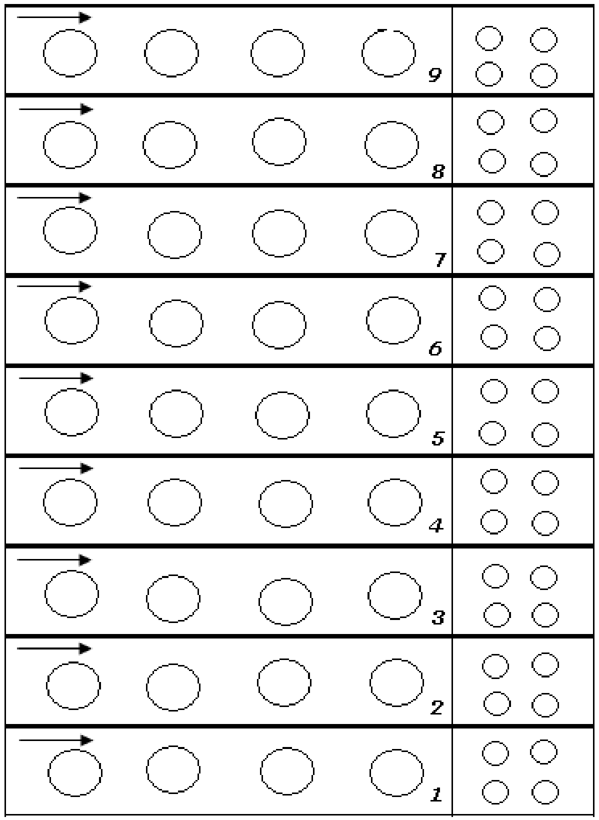

10

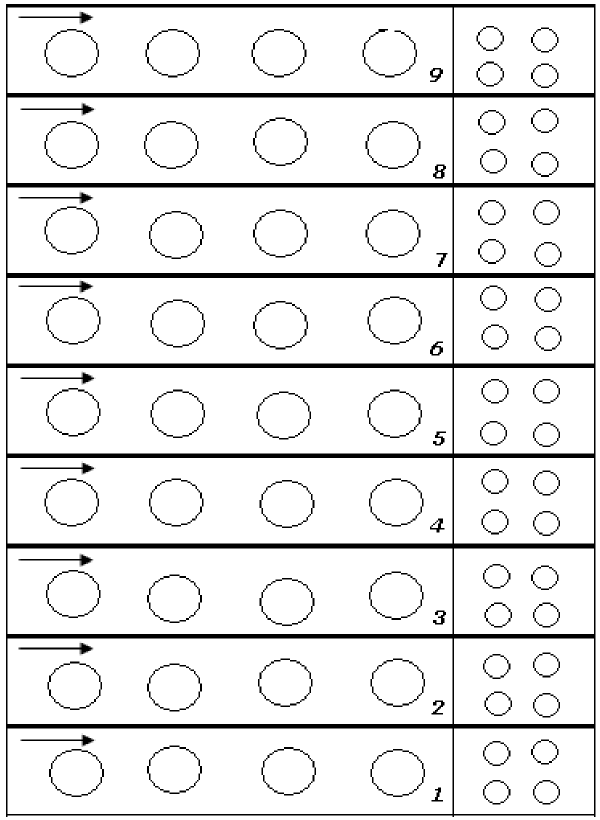

11

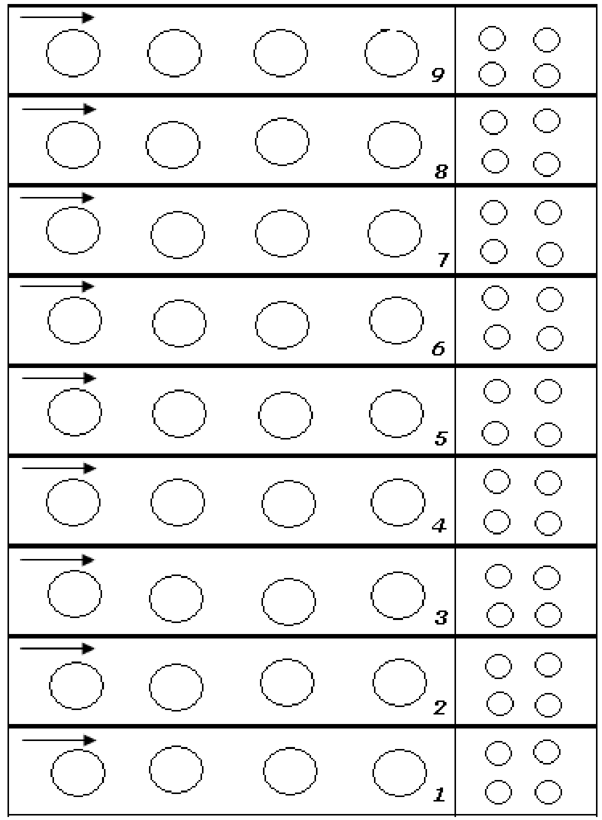

12

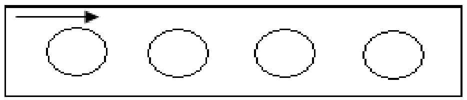
CONTIG 60

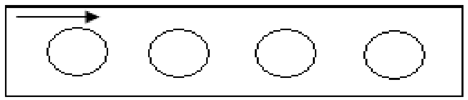
0	1	2	3	4	5	6	7
27	28	29	30	31	32	33	8
26	54	55	60	64	66	34	9
25	50	120	125	144	72	35	10
24	48	108	180	150	75	36	11
23	45	100	96	90	80	37	12
22	44	42	41	40	39	38	13
21	20	19	18	17	16	15	14

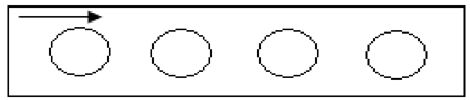

9
8
7
6
5
4
3
2
1


9
8
7
6
5
4
3
2
1

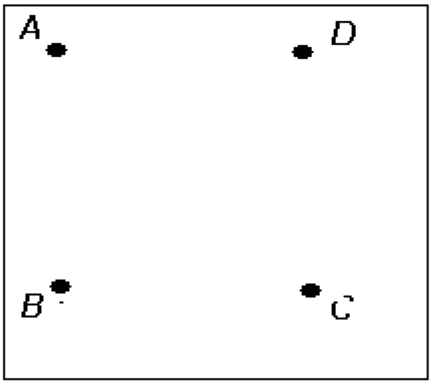

9
8
7
6
5
4
3
2
1



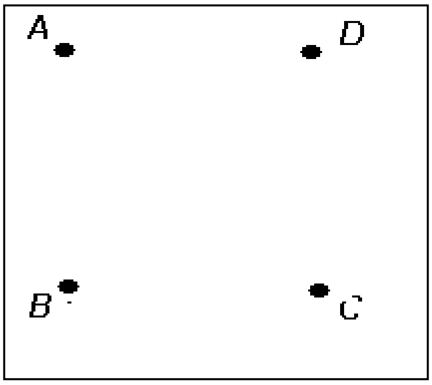




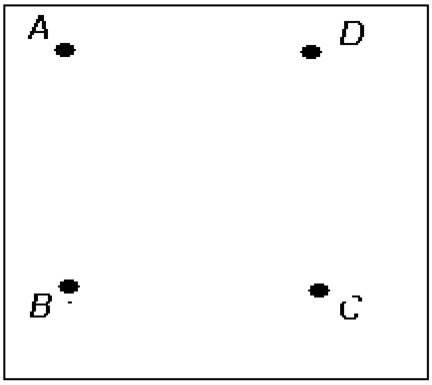
JOGO BICOLORIDO – QUADRILÁTEROS



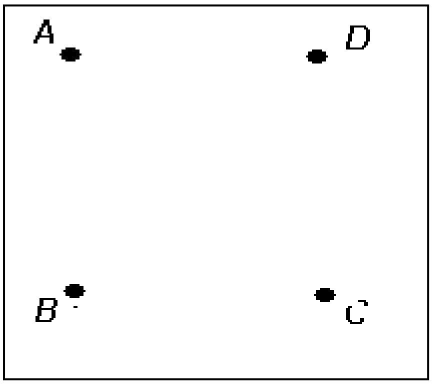
FINAL:____________________



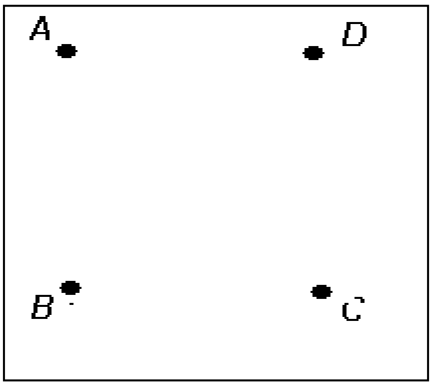
FINAL:______________________



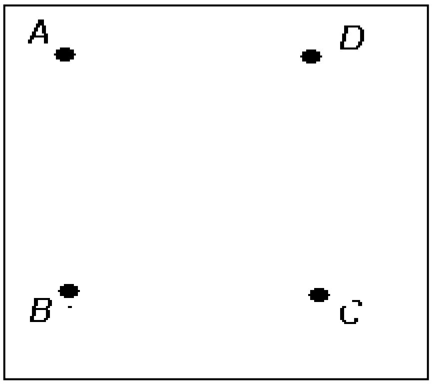
FINAL:_____________________



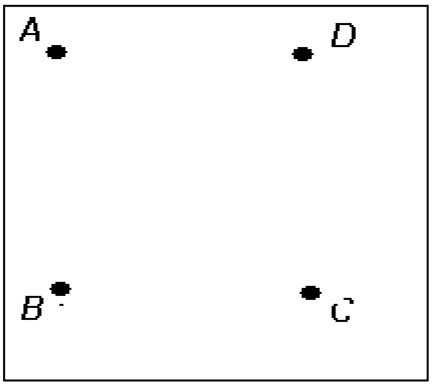
FINAL:_____________________



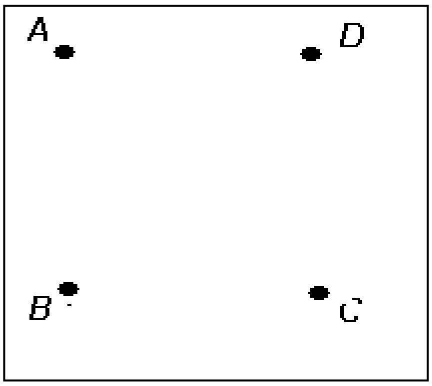
FINAL:______________________



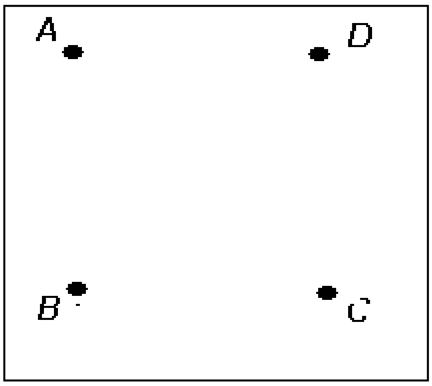
FINAL:_____________________



FINAL:_____________________

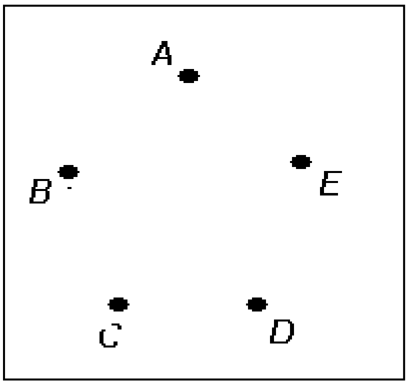


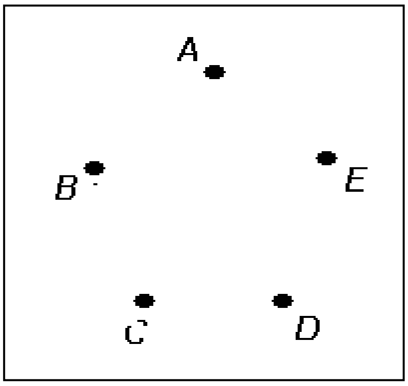
FINAL:____________________

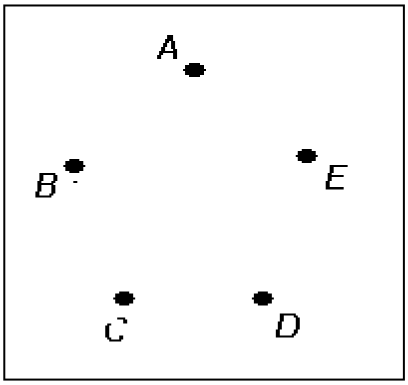


FINAL:_____________________

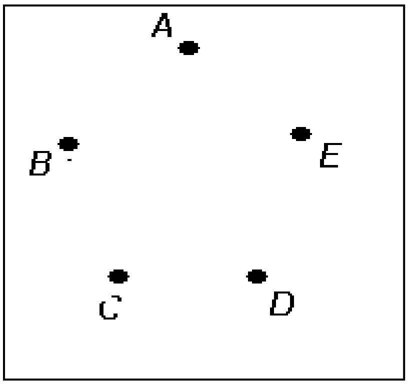
JOGO BICOLORIDO – PENTÁGONOS

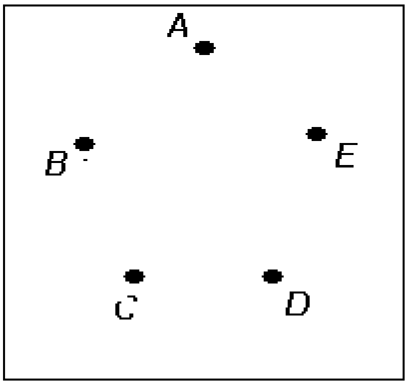


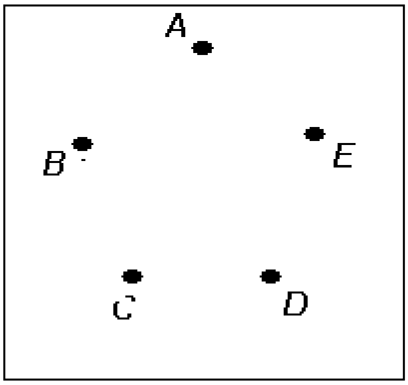




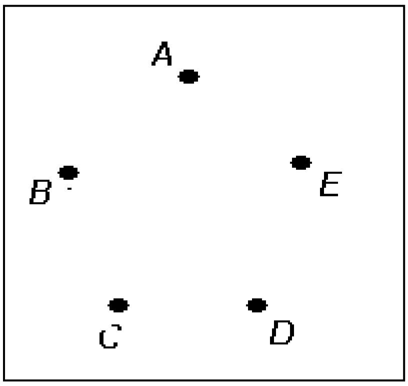
FINAL:__________________ **FINAL:**__________________ **FINAL:**__________________

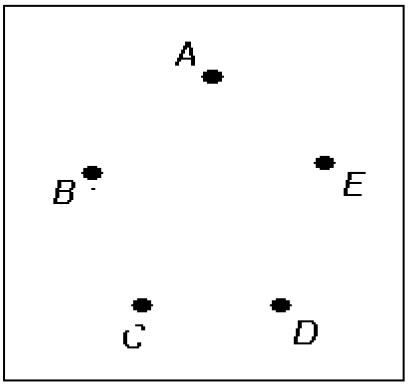


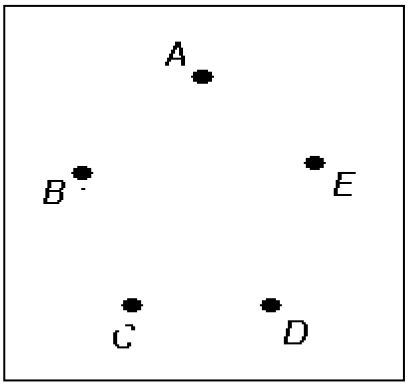




FINAL:__________________ **FINAL:**__________________ **FINAL:**__________________

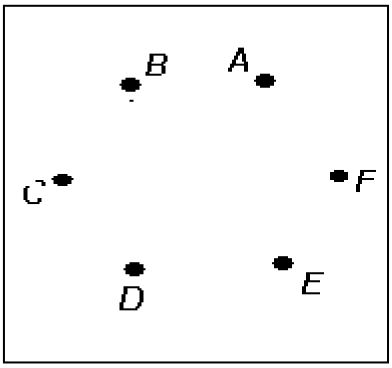




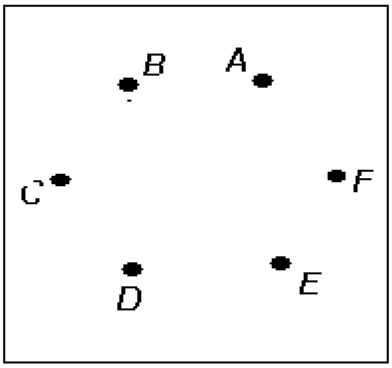


FINAL:__________________ **FINAL:** __________________ **FINAL:**__________________

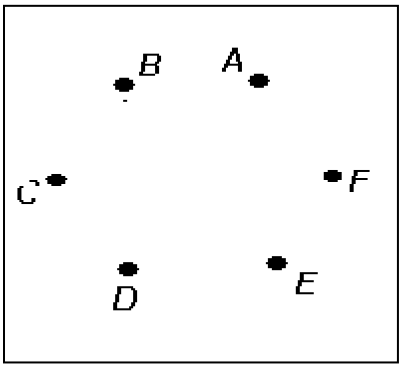
JOGO BICOLORIDO – HEXÁGONOS



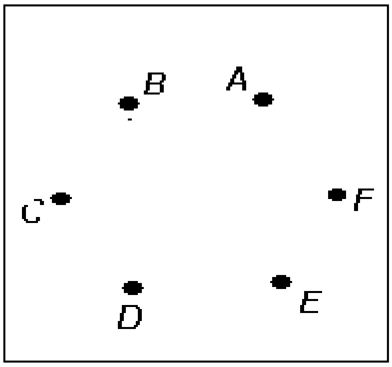
FINAL:________________



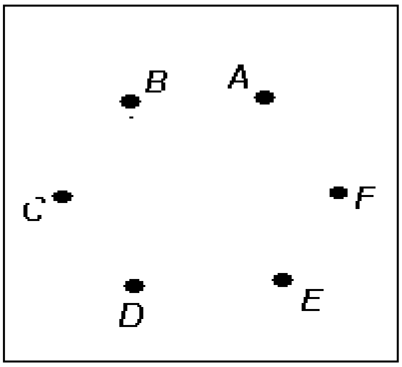
FINAL:________________



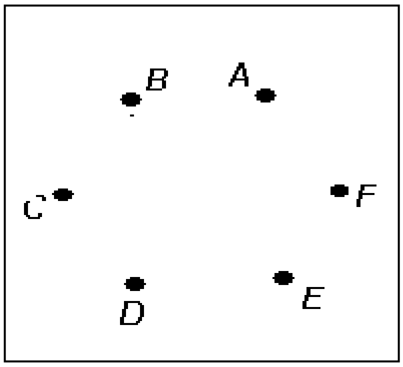
FINAL:__________________



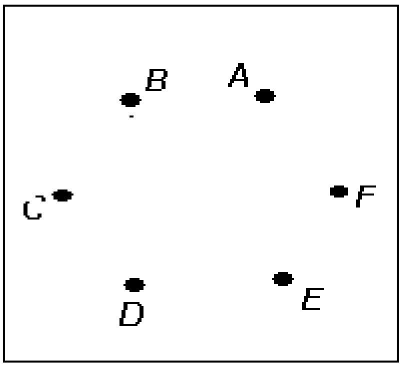
FINAL:_________________



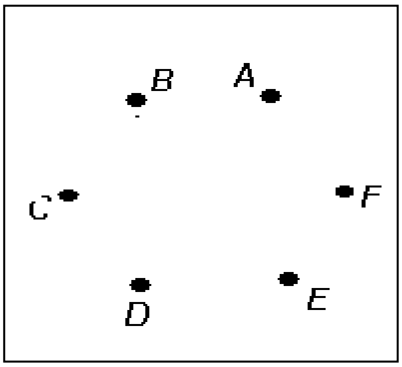
FINAL:________________



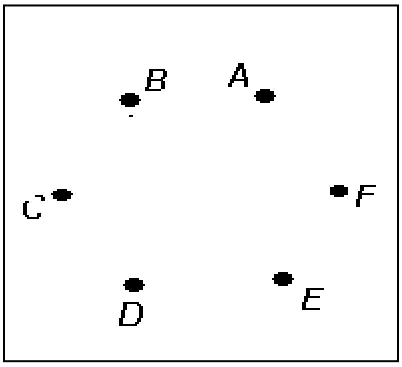
FINAL:_________________



FINAL:________________

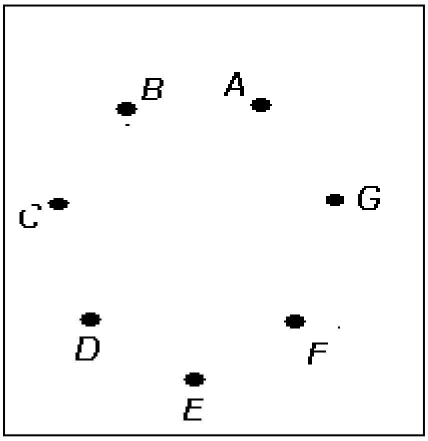


FINAL:_________________

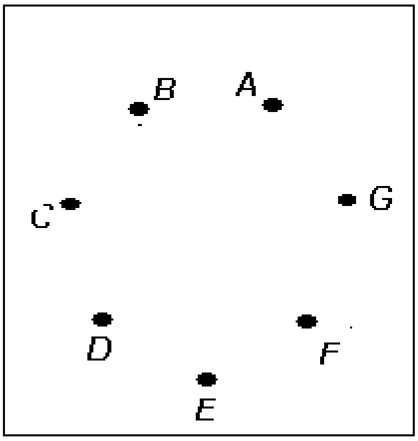


FINAL:_________________

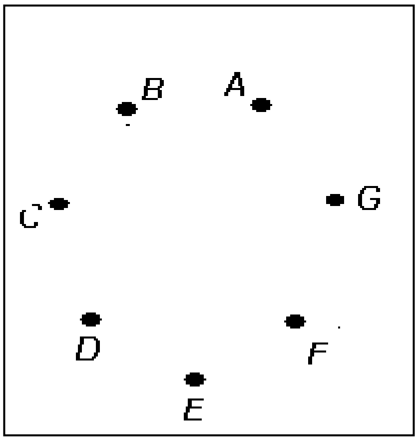
JOGOS BICOLORIDOS – HEPTÁGONOS



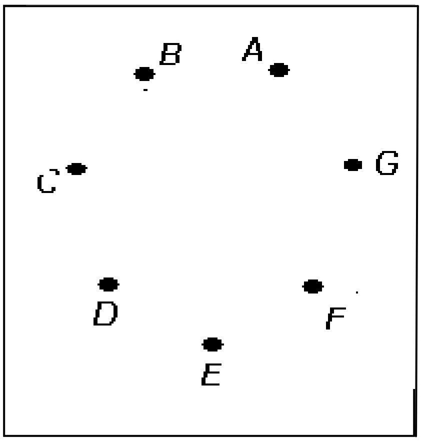
FINAL:____________________



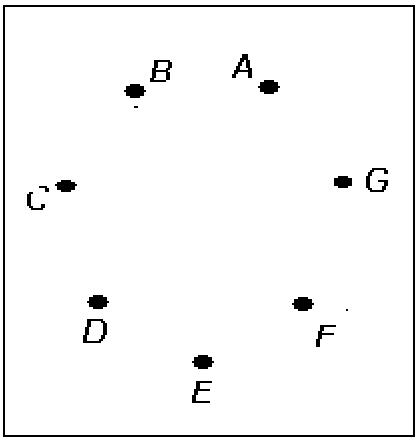
FINAL:_____________________



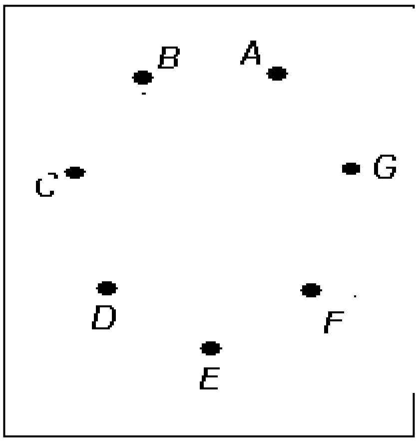
FINAL:_____________________



FINAL:_____________________



FINAL:_____________________



FINAL:_____________________

1 Jogo A Grande Aposta

1.1 Material do jogo

a) fichas de numeração de cada cavalo, de 2 a 12, em que cada dupla recebia um total de 11 fichas.
b) dois dados pequenos de cores distintas.
c) um copo plástico para o lançamento dos dados.
d) um pequeno bloco de papel para identificação dos cavalos de cada jogador.

1.2 Regras do jogo

Antes do primeiro lançamento de dados, cada jogador da dupla escolhe seus cavalos de tal forma que cada um fique com o mesmo número de fichas. Essa escolha pode ser feita de forma aleatória com as fichas voltadas para baixo ou cada jogador escolhendo seus cavalos. Sugerimos que os jogadores fiquem livres para decidirem a forma de escolha de seus cavalos. A ficha que resta da divisão será chamada de “cavalo-curinga”.

Escolhidos os cavalos, decide-se quem fará o primeiro lançamento dos dados. Vejamos, então, como funciona o jogo propriamente dito:

a) O primeiro jogador, que chamaremos de jogador 1, lança os dados. Três situações podem ocorrer:

1. A soma das faces dos dados voltadas para cima é o número de um dos cavalos do jogador 1: Neste caso, o jogador 1 vence o páreo e marca no bloco um traço (|)e o número do seu cavalo que saiu a seu favor.

2. A soma das faces dos dados voltadas para cima é o número de um dos cavalos do jogador 2: Neste caso, o jogador 2 vence o páreo e marca no bloco um traço (|)e o número do seu cavalo que saiu a seu favor.

3. A soma das faces dos dados voltadas para cima é o número do “cavalo-curinga”: Neste caso, o jogador 1 anota para sua pontuação o valor do “cavalo-curinga”. Nesta situação,

nenhum jogador vence o páreo. Caso seja a jogada do outro jogador, este marca os pontos para si.

b) O segundo jogador, que chamaremos de jogador 2, procede com o segundo lançamento dos dados. Aqui também podem ocorrer as três situações descritas acima e o jogo continua normalmente.

c) Espera-se que cada jogador realize três lançamentos de dados, o que totaliza seis lançamentos correspondentes aos seis páreos disputados.

d) Ao término da corrida, ou seja, dos seis páreos, será considerado vencedor aquele jogador que venceu mais páreos.

e) Em caso de empate, ou seja, se cada jogador tiver vencido três páreos, será considerado vencedor aquele jogador que obtiver a maior soma dos números de seus cavalos vencedores em seus respectivos páreos. Caso algum jogador tenha pontuado com o “cavalo-curinga”, o valor deste também entra na soma.

Vejamos uma situação do jogo onde houve empate:

	Jogador 1	Jogador 2
Cavalos	3, 7, 5, 9 e 10	2, 6, 4, 8 e 11
Páreo 1	| (10)	
Páreo 2		| (8)
Páreo 3		| (11)
Páreo 4	| (7)	
Páreo 5	| (10)	
Páreo 6		| (6)
Soma	27	25

Figura 1: Exemplo da situação do jogo “A Grande Aposta”

Na escolha dos cavalos, o “cavalo-curinga” é o de número 12. Como cada jogador venceu um páreo, então a decisão ficou para a soma dos cavalos vencedores de cada páreo.

2 Jogo Contig60

2.1 Material do jogo

a) tabuleiro, como indicado na página 172.
b) 50 fichas, sendo 25 de uma cor e 25 de outra cor distinta.
c) três dados pequenos.
d) um copo plástico para lançamento dos dados.
e) papel, lápis e borracha.

2.2 Regras do jogo

O jogo começa escolhendo-se qual jogador deverá lançar os dados primeiro. Após, as jogadas alternam-se de jogador para jogador. Ao lançar os dados,

a) cada jogador constrói uma sentença numérica utilizando os números das faces voltadas para cima de cada dado. Nessa sentença, cada jogador fará uso de uma ou duas operações diferentes dentre adição, subtração, multiplicação e divisão. Suponha que um dos jogadores tenha lançado os dados e as faces voltadas para cima foram 3, 4 e 6. Assim, ele poderá construir a sentença 3+4+6 e ocupar, com uma de suas fichas, o espaço do número 13.

b) se um dos jogadores passar sua jogada, por acreditar que não é possível fazer uma sentença numérica com os valores obtidos do lançamento dos dados, o adversário terá uma opção a tomar. Se o adversário formar uma sentença com os números obtidos pelo colega, ele ganha o dobro do número de pontos nesta situação e, a seguir, poderá fazer sua própria jogada.

c) contagem de pontos: um ponto é ganho por colocar uma ficha num espaço desocupado que seja adjacente a um espaço (horizontal, vertical ou diagonalmente). Colocando-se uma ficha num espaço desocupado adjacente a mais de um espaço ocupado, mais pontos são obtidos. Suponha que um jogador tenha formado uma sentença numérica tal que o resultado tenha sido 35. Se os espaços dos números 9, 10 e 34 estiverem ocupados, por ficha de qualquer cor, este jogador ganha 3 pontos (veja tabuleiro). Salienta-se que a cor das fichas nos espaços ocupados não faz diferença.

d) O jogo termina quando um jogador conseguir colocar cinco fichas de mesma cor em linha reta sem nenhuma ficha do adversário intervindo. Essa linha poderá ser horizontal, vertical ou diagonal. Caso nenhum jogador forme a linha com cinco fichas e todas as fichas já tenham sido usadas no jogo, o vencedor será aquele que obtiver o maior número de pontos.

3 Jogo Senha

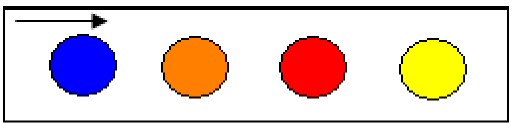
3.1 Material do jogo

a) tabuleiros como indicados na página 173.
b) lápis de cores.

3.2 Regras do jogo

Antes do início do jogo, escolhe-se quem será o desafiante, ou seja, aquele que formará a senha, e o desafiado, aquele que tentará descobri-la. Escolhidos os papéis de cada jogador, seguem as regras:

a) O desafiante forma uma senha e colore os espaços reservados para a senha seguindo a direção da seta. Por exemplo, suponha que o desafiante forme a senha azul-laranja-vermelho-amarelo. Então, pelo sentido, da esquerda para direita, o desafiante colore os espaços, ficando com



b) O desafiado, então, forma uma senha que acredita ser a formada pelo desafiante. Caso não tenha acertado a senha, o desafiante dá algumas dicas na coluna da direita do tabuleiro do desafiado. Se o desafiado acertar alguma cor e a posição que ela está, o desafiante pinta um dos círculos de preto. Se o desafiado acertar apenas alguma cor, mas não sua posição, o desafiante deixa algum dos círculos em branco. Caso a senha apresentada pelo desafiado contenha alguma cor que não coincide com a do desafiante, este marca um “x” em algum dos círculos. Vejamos abaixo um exemplo, onde o desafiado acertou a cor e sua posição, mas uma das cores não faz parte da senha.

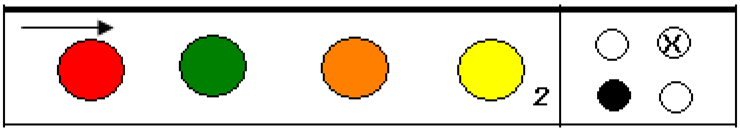


Figura 2: Exemplo de situação do jogo “Senha”

Os círculos que indicam as dicas para o desafiado não seguem ordem alguma, ou seja, na figura acima, necessariamente não é a cor laranja que está na posição certa.

c) O desafiado tem nove tentativas para descobrir a senha. Caso não acerte a senha em nenhuma das nove oportunidades, ele contabiliza nove pontos.

d) alternadamente, os jogadores invertem seus papéis. O jogo segue da mesma forma e será considerado vencedor aquele que descobrir a senha do outro em menos tentativas, ou seja, aquele que obtiver o menor número de pontos.

4 Jogo Bicolorido

4.1 Material do jogo

a) Alguns tabuleiros indicados nas páginas 174,175,176 e 177.
b) Lápis ou canetas esferográficas de cores distintas.

4.2 Regras do jogo

Escolhe-se o jogador a fazer a primeira jogada e o tabuleiro a iniciar o jogo. Inicie com quatro pontos e aumente, gradativamente, os pontos iniciais.

a) Os jogadores, cada um com um lápis ou uma caneta de cor distinta, deverão, sucessiva e alternadamente, construir segmentos de reta com extremos nos pontos dados no início do jogo. Esses segmentos podem ser lados ou diagonais.

b) Será declarado vencedor aquele jogador que primeiro fechar um triângulo monocromático com a cor de seu lápis ou caneta.

Vejamos um exemplo de jogo com 5 pontos iniciais:

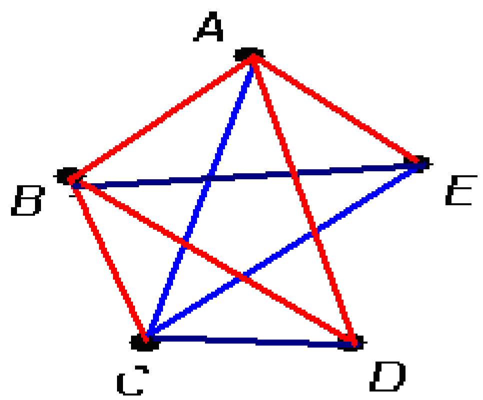


Figura 03: Exemplo de situação do jogo Bicolorido

Na situação acima, o jogador que traça o segmento com a cor vermelha venceu fechando o triângulo ABD.

- ANEXO C-

AUTORIZAÇÃO

Autorizo o(a) aluno(a)____, da turma 805 do Colégio Militar de Porto Alegre, a participar da coleta de dados relativa à pesquisa sobre "*O uso de jogos como motivação para resolução de problemas de contagem*", a ser realizada pelo professor Gustavo Quevedo Carvalho, como parte de seu trabalho de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Estou ciente que a experiência será realizada a partir do dia 20 de agosto e se estenderá até o final do semestre do ano corrente.

Porto Alegre, _____ de agosto de 2008.

Assinatura do responsável: ____

Nome completo do responsável (letra de forma): ______________________________