

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UM ESTUDO SOBRE RECONSTRUÇÃO DE CARREGAMENTOS DINÂMICOS
USANDO PSEUDO-INVERSA DE MOORE-PENROSE

por

Ariane Rebelato Silva dos Santos

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Janeiro de 2018

UM ESTUDO SOBRE RECONSTRUÇÃO DE CARREGAMENTOS DINÂMICOS
USANDO PSEUDO-INVERSA DE MOORE-PENROSE

por

Ariane Rebelato Silva dos Santos
Engenheira Mecânica

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério J. Marczak

Aprovada por:

Dr. Daniel Contreras MundstockALTAIR ENG. BRASIL

Prof. Dr. Ignacio IturriozPROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Felipe Tempel StumpfDEMEC / UFRGS

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 31, janeiro de 2018

“No mesmo instante em que recebemos pedras em nosso caminho, flores estão sendo plantadas mais longe. Quem desiste não as vê.”

William Shakespeare

(1564 - 1616)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e a minha família, meu alicerce. Mãe, Lorena, pelo apoio incondicional. Irmã, Aline, por se fazer presente e avó, Dulce, pelo suporte.

À família Matje pelo suporte, em especial ao Alexandre, meu companheiro de todas as horas, por estar sempre ao meu lado em todo os momentos.

Ao professor Rogério José Marczak, pela contribuição acadêmica e orientação deste trabalho. Ao colega Tales pelo auxílio e incentivo durante o mestrado.

Aos professores e colegas do GMAp, pela disponibilidade em ajudar.

À CAPES, pela bolsa concedida durante o mestrado.

Ao PROMEC e à UFRGS, pela oportunidade e infraestrutura para a elaboração dessa dissertação.

À Altair Engineering, por disponibilizar a licença do *software* HyperWorks para a realização das análises numéricas deste trabalho. Ao Valdir Cardoso, *country manager* da Altair do Brasil, por acreditar e investir no desenvolvimento desta dissertação. Ao suporte técnico da Altair pelas informações técnicas referentes ao software.

RESUMO

Determinar as forças que estão agindo em um dado sistema é uma questão frequente em dinâmica estrutural, de modo que a reconstrução ou a identificação de carregamento se torna um importante problema de engenharia. Quando um sistema é exposto a um carregamento desconhecido e/ou não se é possível medir diretamente a força atuante nesse sistema, se torna necessária a utilização de métodos inversos. Esta metodologia consiste essencialmente na aplicação de cargas dinâmicas pontuais nos modelos de estudo e posterior recuperação de estimativas dessas cargas nos pontos de interesse. Na prática, há situações em que o número de pontos de interesse diferem do número de pontos testados, sendo assim, a matriz da função de resposta de frequência (FRF) do sistema resulta retangular, fazendo-se necessário o uso da pseudo-inversa de Moore-Penrose. No presente trabalho, essa metodologia é aplicada a modelos numéricos a fim de testar sua eficácia. Os resultados dos processos de reconstrução de carregamento dinâmico utilizando a presente metodologia foram obtidos a partir de aplicações analíticas e numéricas. Além disso, diretrizes para utilização da pseudo-inversa de Moore-Penrose na reconstrução de carregamento dinâmico são apresentadas ao final deste trabalho.

Palavras-chave: Reconstrução de carregamento, Pseudo-Inversa de Moore-Penrose, Dinâmica estrutural, Histórico de carregamento, Função de Resposta em Frequência.

ABSTRACT

Determining the forces acting on a given system is a frequent issue in structural dynamics, so that load reconstruction or load identification becomes an important engineering problem. When a system is exposed to an unknown load and/or if it is not possible to directly measure the force acting on that system, it is necessary to use inverse methods. This methodology consists essentially in the application of punctuals dynamics load in the study models and later recovery of estimates of these loads at points of interest. In practice, there are situations where the number of points of interest differ from the number of points tested, so the matrix of the frequency response function (*FRF*) of the system is rectangular, making it necessary to use the pseudo-inverse of Moore-Penrose. In the present work, this methodology is applied to numerical models in order to test their effectiveness. The results of the dynamic load reconstruction processes using the present methodology were obtained from analytical and numerical applications. In addition, guidelines for using Moore-Penrose pseudo-inverse in the dynamic load reconstruction are presented at the end of this work.

Keywords: Load Reconstruction, Moore-Penrose Pseudo-Inverse, Structural Dynamics, Load History, Frequency Response Function.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Revisão Bibliográfica	3
1.2	Objetivos	9
1.3	Organização do Trabalho	9
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	11
2.1	Conceitos Básicos em Vibrações	11
2.1.1	Resposta Harmônica	13
2.2	Função de Resposta em Frequência (<i>FRF</i>)	15
2.3	Problemas Inversos	17
2.3.1	Inversa Generalizada	18
2.3.2	Pseudo-Inversa de Moore-Penrose	19
2.4	Processamento de Sinais	21
2.4.1	Classificação dos Sinais	21
2.4.2	Transformada de Fourier	21
2.4.3	<i>Aliasing</i>	25
2.4.4	<i>Leakage</i>	28
2.4.5	Janelamento	30
3	METODOLOGIA	31
3.1	Reconstrução de Carregamento	31
3.1.1	Modelos	33
3.1.2	Análise Harmônica	33
3.1.3	Análise Transiente	33
3.1.4	Procedimento de Reconstrução de Carregamento	33
3.1.5	Obtenção dos Resultados	34
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	35
4.1	Modelagem Analítica	35

4.2	Modelagem Numérica	41
4.2.1	Caso 1	42
4.2.2	Caso 2	47
4.2.3	Caso 3	53
4.2.4	Caso 4	76
4.2.5	Caso 5	87
4.3	Diretrizes para utilização da pseudo-inversa de Moore-Penrose na reconstrução de carregamento dinâmico	98
5	CONCLUSÕES	100
5.1	Sugestões para Trabalho Futuros	101
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	102

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Sistema massa-mola-amortecedor com 1 GDL.	12
Figura 2.2	Sistema dinâmico linear discreto.	15
Figura 2.3	Transformadas direta e inversa de Fourier (adaptado de Lathi, 2007).	24
Figura 2.4	Correlação entre sinal no domínio do tempo e da frequência(adaptado de Zhang, 2017).	25
Figura 2.5	O fenômeno do <i>aliasing</i> (adaptado de Ewins, 1984). (a) Sinal de baixa frequência (b) Sinal de alta frequência	26
Figura 2.6	Distorção do espectro pela Transformada Discreta de Fourier (<i>DFT</i>). (a) Espectro do sinal; (b) Espectro da <i>DFT</i> (adaptado de Ewins, 1984).	27
Figura 2.7	Filtro anti- <i>aliasing</i> (adaptado de Ewins, 1984.)	28
Figura 2.8	Comprimento da amostra e <i>leakage</i> do espectro. (a) Sinal "ideal"(b) Sinal "estranho"(adaptado de Ewins, 1984.)	29
Figura 2.9	Tipos de janelamento: (a)Boxcar; (b) Hanning; (c) Cosine-taper; Exponencial. (adaptado de Ewins, 1984.	30
Figura 3.1	Processo de reconstrução de carregamento (adaptado de Vishwakarma et al., 2010).	32
Figura 4.1	Modelo analítico 1	36
Figura 4.2	Método inverso modelo 1	37
Figura 4.3	Método pseudo-inverso modelo 1	38
Figura 4.4	Modelo analítico 2	39
Figura 4.5	Método inverso modelo 2	40
Figura 4.6	Método pseudo-inverso modelo 2	40
Figura 4.7	Caso 1.	43
Figura 4.8	Configuração 1: comparação entre força aplicada e força reconstruída.	44
Figura 4.9	Exemplo 1: Sinal senoidal. (a) sinal original, (b) após <i>FFT</i> e (c) após <i>IFFT</i>	45
Figura 4.10	Exemplo 2: Sinal multiseno. (a) sinal original, (b) após <i>FFT</i> e (c) após <i>IFFT</i>	45

Figura 4.11	Exemplo 3: Sinal do tipo degrau. (a) sinal original, (b) após FFT e (c) após $IFFT$	46
Figura 4.12	Exemplo 4: Sinal do tipo seno intervalado. (a) sinal original, (b) após FFT e (c) após $IFFT$	46
Figura 4.13	Caso 2.	47
Figura 4.14	Configuração 2: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	48
Figura 4.15	Configuração 2: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	49
Figura 4.16	Configuração 3: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	50
Figura 4.17	Configuração 3: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	50
Figura 4.18	Configuração 4: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	51
Figura 4.19	Configuração 4: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	51
Figura 4.20	Configuração 5: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	52
Figura 4.21	Configuração 5: comparativo entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	53
Figura 4.22	Caso 3.	54
Figura 4.23	Gráfico do número de condicionamento (CN) da matriz FRF no domínio da frequência para o caso 3.	55
Figura 4.24	Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	56
Figura 4.25	Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	56
Figura 4.26	Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	57
Figura 4.27	Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	57

Figura 4.28	Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	58
Figura 4.29	Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	58
Figura 4.30	Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	59
Figura 4.31	Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	59
Figura 4.32	Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	60
Figura 4.33	Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	60
Figura 4.34	Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	61
Figura 4.35	Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	61
Figura 4.36	Configuração 7: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	62
Figura 4.37	Configuração 7: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	63
Figura 4.38	Configuração 7: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	63
Figura 4.39	Configuração 7: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	64
Figura 4.40	Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	65
Figura 4.41	Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	65
Figura 4.42	Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	66
Figura 4.43	Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	66

Figura 4.44	Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	67
Figura 4.45	Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	67
Figura 4.46	Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	68
Figura 4.47	Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	68
Figura 4.48	Configuração 9: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	69
Figura 4.49	Configuração 9: comparativo entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	70
Figura 4.50	Configuração 9: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	70
Figura 4.51	Configuração 9: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	71
Figura 4.52	Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	72
Figura 4.53	Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	72
Figura 4.54	Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	73
Figura 4.55	Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	73
Figura 4.56	Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	74
Figura 4.57	Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	74
Figura 4.58	Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	75
Figura 4.59	Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	75

Figura 4.60	Caso 4.	76
Figura 4.61	Gráfico do número de condicionamento (CN) da matriz FRF no domínio da frequência para o caso 4.	77
Figura 4.62	Configuração 11: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	78
Figura 4.63	Configuração 11: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	78
Figura 4.64	Configuração 11: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	79
Figura 4.65	Configuração 11: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	79
Figura 4.66	Configuração 12: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	80
Figura 4.67	Configuração 12: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	81
Figura 4.68	Configuração 12: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	81
Figura 4.69	Configuração 12: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	82
Figura 4.70	Configuração 13: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	83
Figura 4.71	Configuração 13: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	83
Figura 4.72	Configuração 13: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	84
Figura 4.73	Configuração 13: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	84
Figura 4.74	Configuração 14: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	85
Figura 4.75	Configuração 14: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	86

Figura 4.76	Configuração 14: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	86
Figura 4.77	Configuração 14: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	87
Figura 4.78	Caso 5.	88
Figura 4.79	Gráfico do número de condicionamento (CN) da matriz FRF no domínio da frequência para o caso 5.	88
Figura 4.80	Configuração 15: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	89
Figura 4.81	Configuração 15: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	89
Figura 4.82	Configuração 15: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	90
Figura 4.83	Configuração 15: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	90
Figura 4.84	Configuração 16: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	91
Figura 4.85	Configuração 16: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	92
Figura 4.86	Configuração 16: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	92
Figura 4.87	Configuração 16: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	93
Figura 4.88	Configuração 17: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	94
Figura 4.89	Configuração 17: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	94
Figura 4.90	Configuração 17: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	95
Figura 4.91	Configuração 17: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	95

Figura 4.92	Configuração 18: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	96
Figura 4.93	Configuração 18: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	97
Figura 4.94	Configuração 18: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.	97
Figura 4.95	Configuração 18: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Definição da <i>FRR</i> de acordo com o tipo de resposta (adaptado de Lage, 2014).	15
Tabela 3.1	Propriedades do material	33
Tabela 4.1	Configurações modelos analíticos	35
Tabela 4.2	Configurações modelos numéricos	42

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CN	Número de Condicionamento
CSM	Método da Rigidez Complexa
DFT	Transformada Discreta de Fourier
FFT	Transformada Rápida de Fourier
FRF	Função de Resposta em Frequência
GDL	Grau de Liberdade
IFFT	Inversa da Transformada Rápida de Fourier
MEF	Método dos Elementos Finitos
MIM	Método da Inversão de Matrizes
ODS	Análise de Forma de Deflexão Operacional
TPA	Análise de Caminhos de Transferência

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

b	Base
c	Amortecimento
$[C]$	Matriz de amortecimento
D	Diâmetro maior, m
d	Diâmetro menor, m
E	Módulo de Elasticidade, Pa
e	Espessura, m
e_1	Espessura menor, m
e_2	Espessura maior, m
f	Força, N
F	Força, N
h_τ	Função de resposta ao impulso
$[H]$	Matriz FRF
$[Ha]$	Matriz aceleração
k	Rigidez
$[K]$	Matriz de rigidez
L	Comprimento total da viga, m
m	Massa, kg
$[M]$	Matriz de massa
r	Razão entre frequências
t	Tempo, t
\ddot{x}	Resposta em aceleração, m/s^2
\dot{x}	Resposta em velocidade, m/s
x	Resposta em deslocamento, m
$\{Y\}$	Vetor de resposta

Símbolos Gregos

α	Ângulo de fase
ν	Coefficiente de Poisson

ω	Frequência, <i>rad/s</i>
ω_n	Frequência natural, <i>rad/s</i>
ϕ	Ângulo de fase FRF
ϕ_{xf}	Diferença de fase entre a resposta e a força
ρ	Massa específica, <i>kg/m³</i>
ζ	Fator de amortecimento

1 INTRODUÇÃO

Quando se tem casos de falhas em componentes estruturais a questão da determinação das forças atuantes nesses sistemas torna-se fundamental para evitar que essas falhas ocorram novamente no mesmo componente ou em componentes parecidos que tenham a mesma função e sejam solicitados pelo mesmo tipo de carregamento. Desta forma, a reconstrução ou identificação de carregamento se torna um importante tipo de problema em engenharia, que vem sendo investigado há algumas décadas. Estes tipos de problemas podem ser classificados como problemas inversos, onde suas saídas são conhecidas e a partir delas estimam-se suas entradas. A resolução destes problemas pode ser de grande complexidade, uma vez que nem sempre é possível o conhecimento total das respostas dinâmicas de um sistema.

Genericamente, quando consegue-se determinar diretamente a resposta de um dado sistema sujeito a uma determinada entrada o problema é considerado direto. Assim como para o problema ser considerado inverso ou indireto, as respostas do sistema são medidas de maneira a estabelecer suas entradas [Bekey, 1970]. Em relação a determinação direta ou indireta de carregamento, entende-se por problema direto aquele em que se conhece as forças aplicadas e se deseja estimar as reações nos apoios. Define-se como problema inverso ou indireto de determinação de carregamento aquele em que se deseja determinar as forças que são aplicadas no problema, seu local de aplicação e/ou as suas magnitudes [Maia et al., 2012].

Sistemas estruturais podem ser modelados como contínuos ou discretos. Em sistemas contínuos é possível se obter soluções exatas apenas para estruturas, carregamentos, condições de contorno e iniciais, relativamente simples. Portanto, formulações discretas são comumente usadas. Existem três formas de modelamento discreto, que são amplamente utilizadas em dinâmica estrutural, e elas são baseadas em três domínios: espacial, modal e de frequência [Dobson e Rider, 1990].

Há várias situações em que não se é possível obter uma descrição correta das condições de excitação diretamente. Um exemplo disto é o caso de forças vibratórias atuantes na interface de dois corpos: geralmente elas não podem ser medidas diretamente. Componentes inseridos em ambientes operacionais complexos ou insalubres também tendem a possuir difícil acesso para medição direta e/ou precisa. Além disso, quando se tem várias

forças atuantes no sistema, a sensibilidade das respostas com a utilização desta metodologia é muito maior. Logo, erros de baixa magnitude presentes nas respostas medidas e nas funções de transferência podem se tornar erros de alta magnitude nas forças identificadas [Karlsson, 1996].

A introdução de equipamentos de medição em alguns sistemas geralmente é limitada, sendo possível apenas a utilização de poucos sensores e posições disponíveis. Devido a isto se torna interessante o estudo de medição de força em locais acessíveis que não necessariamente estejam próximos ao seu local de aplicação. Muitas áreas de pesquisas vêm desenvolvendo estudos com problemas inversos. Estes problemas podem apresentar mal-condicionamento matricial quando o problema inverso é mal-colocado, ou seja, quando o problema possui extrema instabilidade de solução, pequenas variações na entrada podem gerar grandes variações na saída. A pseudo-inversa de Moore-Penrose é uma inversa generalizada que é utilizada em casos em que se possui uma matriz retangular para inversão. Para o caso de reconstrução de carregamento utiliza-se esta ferramenta quando o número de forças aplicadas diferem do número de medições de respostas extraídas de um sistema de análise. Alguns trabalhos de pesquisa utilizam a pseudo-inversa com sistemas sobre-determinados, técnicas de regularização e filtros para contornar os problemas de mal-condicionamento matricial existentes. Na literatura, uma das primeiras investigações sobre reconstrução de carregamento usando a pseudo-inversa de Moore-Penrose foi realizada por Bartlett e Flannelly, 1979, e um dos estudos recentes, no qual este trabalho se baseou, foi conduzido por Vishwakarma et al., 2010.

O método abordado neste estudo se mostra como uma alternativa ao uso de equipamentos para obtenção de dados de força e aceleração (transdutores de força ou acelerômetros), que geralmente têm um custo elevado e precisam de mais tempo em função da construção de protótipos. Além disso, estes equipamentos de medição podem alterar propriedades físicas do sistema a ser medido, como a massa, rigidez, carregamento, entre outras. Estas alterações podem produzir inconsistências entre as respostas medidas e os valores reais. Ademais, em certos casos, a aquisição direta de dados é difícil, se não impossível, e em alguns equipamentos a utilização de transdutores ou acelerômetros seria invasivo, descaracterizando assim o sistema de análise.

Uma maneira de contornar os problemas supramencionados é calcular a matriz de Função de Resposta em Frequência (*FRF*) a partir das respostas de aceleração extraídas

de um modelo numérico que resolva a equação do movimento que caracteriza o problema. A matriz FRF com dados em aceleração, também chamada de matriz de aceleração, tem a função de relacionar o carregamento aplicado à resposta em aceleração medida. Para calcular o histórico de carregamento, as respostas medidas em aceleração podem ser utilizadas juntamente com este modelo. Desta forma é possível escolher pontos da estrutura onde se deseja prever o carregamento.

Diante do exposto, o presente trabalho pretende estudar uma técnica que utiliza pseudo-inversas de Moore-Penrose como método inverso para a reconstrução de histórico de carregamento dinâmico, a partir de uma metodologia que consiste em análises no domínio da frequência para obter a Função de Resposta em Frequência (FRF) do sistema. O uso da pseudo-inversa se faz necessário, pois quando o número de forças e de pontos de medição das respostas em aceleração diferem, a matriz FRF resulta retangular. Para a obtenção dos dados necessários à aplicação da técnica, ou seja, solucionar a equação do movimento que caracteriza o problema, utiliza-se um software comercial baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF). A metodologia para reconstrução de carregamento é implementada buscando obter resultados a partir de dados extraídos de locais onde supostamente não se pode medir diretamente os esforços sofridos pela estrutura. Evidencia-se como importância deste trabalho a oportunidade de oferecer subsídio de informações relacionadas à utilização do método pseudo-inverso para reconstrução de carregamento dinâmico.

1.1 Revisão Bibliográfica

Uma das primeiras investigações, dentro do conhecimento da autora, sobre reconstrução de carregamento utilizando a pseudo-inversa de Moore-Penrose foi realizada por Bartlett e Flannelly, 1979. Segundo eles, o exército americano tinha o objetivo contínuo de melhorar a confiabilidade de seus helicópteros. A partir de estudos técnicos de fabricantes, foi identificado que com a redução nas forças em frequência das pás do helicóptero, transmitidas para sua fuselagem através do rotor, conseguiam-se obter aumentos significativos em sua confiabilidade. Então, Bartlett e Flannelly, 1979, propuseram um método de determinação de cargas vibratórias usando somente os dados de vibração de voo da fuselagem do helicóptero e teste de solo. Foram realizados testes em laboratório a fim de verificar o método e determinar as forças vibratórias de um modelo dinâmico

de helicóptero. Os autores deste estudo obtiveram bons resultados, nos quais o erro das forças previsto no modelo mostrou-se dentro dos limites de precisão da instrumentação utilizada.

Os efeitos dos modos estruturais na determinação de forças vibratórias utilizando o método pseudo-inverso foram estudados por Fabunmi, 1986. Ele utilizou métodos de álgebra linear e análise modal para delimitar esta técnica no que se refere ao número de forças atuantes a uma determinada frequência em relação ao número e a significância dos modos estruturais presentes na resposta nesta frequência. O método foi aplicado a dois modelos de vigas uniformes. Os resultados obtidos das forças determinadas com o parâmetro relativo ao número de modos que participaram da resposta da estrutura se mostraram dentro de um nível aceito para o erro aleatório da matriz de mobilidade, matriz FRF descrita em velocidade. Comparando tais resultados, Fabunmi, 1986, afirmou que o modelo sem restrições de contorno permite que mais forças sejam determinadas em frequências mais baixas do que no modelo restrito, isso se deve à presença de modos de corpo rígido na resposta do modelo livre. Portanto, a falta de consideração adequada da participação destes modos na frequência analisada pode interferir severamente na eficácia da utilização do método pseudo-inverso para determinação de cargas vibratórias operacionais em um sistema estrutural.

Dobson e Rider, 1990, apresentaram uma revisão sobre técnicas de cálculo indireto de forças de excitação a partir dos dados de resposta estrutural medidos. No início dos anos 1990, os estudos sobre estes métodos estavam em estágio embrionário e haviam poucas publicações de aplicações bem sucedidas. A partir disso, Dobson e Rider, 1990, notaram que alguns destes métodos funcionavam para um determinado exemplo, entretanto não garantindo sucesso em outras aplicações. Muitos dos problemas por eles observados se davam em função do procedimento de inversão matricial dos termos dependentes da frequência. Isto ocorre pelo fato da matriz FRF possuir um mau condicionamento perto das regiões de ressonância e anti-ressonância acarretando em erros significativos. Para Dobson e Rider, 1990, a abordagem mais promissora seria a que utiliza modelos espaciais pelo método não necessitar da inversão matricial, porém esta também demonstrou possuir certa instabilidade.

Devido aos resultados do problema inverso serem frequentemente muito sensíveis ao ruído nas medições da resposta e da possibilidade de erros no modelo da estrutura,

Karlsson, 1996, focou seu estudo nesta sensibilidade, supondo a existência de uma relação linear entre amplitudes de forças harmônicas desconhecidas e a resposta em posições de medição discreta. Em seu trabalho é possível encontrar alguns exemplos numéricos que demonstram e correlacionam esta sensibilidade com a medida proposta, que tem a intenção de auxiliar no processo experimental. Segundo Karlsson, 1996, em vários casos não se tem uma identificação bem sucedida das forças excitantes devido às propriedades vibratórias intrínsecas das estruturas, não sendo suficiente as informações sobre as forças de excitação disponíveis na resposta para a determinação precisa a partir de medições indiretas. Então, foi sugerido por ele um parâmetro que fornece uma ferramenta para investigação da viabilidade de medições indiretas de força, que consiste em utilizar o inverso do número de condicionamento da matriz FRF como uma indicação da precisão das amplitudes das forças indiretamente medidas.

Matrizes FRF são amplamente usadas em muitos aspectos da análise estrutural dinâmica e acústica para representar características estruturais. Devido a isto, Liu e Ewins, 1998 propuseram um teorema para relação entre $FRFs$ de sistemas com vários graus de liberdade a partir de uma função de transmissibilidade. Seguindo nesta linha, Ribeiro et al., 2000, apresentaram uma generalização para o conceito de transmissibilidade em estruturas com vários graus de liberdade. Ela é baseada na dependência entre a matriz de transmissibilidade e as coordenadas dos locais excitados na estrutura de análise, onde as matrizes entre as coordenadas envolvidas deveriam ser conhecidas. Neves e Maia, 2010 utilizaram esse conceito de transmissibilidade para prever forças dinâmicas desconhecidas transmitidas aos suportes de forças aplicadas conhecidas e, seu inverso, prever as forças aplicadas conhecendo as forças nos suportes. Casos simples foram avaliados nestes estudos, nos quais foi possível determinar a localização e a amplitude das forças que atuavam sobre uma estrutura. Para casos mais complexos sugeriu-se utilizar um modelo híbrido, reunindo os resultados experimentais e um modelo de elementos finitos para a obtenção da matriz de transmissibilidade.

Segundo Maia et al., 2011, a noção de transmissibilidade foi por muito tempo limitada ao sistema de um único grau de liberdade tendo seu conceito evoluído de forma consistente somente na última década para que se pudesse ter uma definição generalizada aplicável a um sistema com vários graus de liberdade. Técnicas analíticas e experimentais de Análise de Caminhos de Transferência Vibroacústicos (TPA) foram comparadas por

Padilha, 2006. Estas técnicas consistem basicamente em obter as forças operacionais em cada caminho de transferência e suas *FRFs*. O estudo abordou dois métodos de obtenção indireta das forças operacionais: o Método da Rigidez Complexa (*CSM*) e o Método da Inversão de Matrizes (*MIM*), e duas configurações para determinação das *FRFs*. Inicialmente as técnicas foram avaliadas em um modelo analítico e posteriormente os experimentos foram realizados em um modelo simplificado de automóvel. Padilha, 2006, concluiu que com a fonte removida o Método da Rigidez Complexa obteve melhores resultados. Porém o Método de Inversão de Matrizes, que é muito semelhante à utilização da pseudo-inversa de Moore-Penrose, mostrou melhores resultados com a fonte presente. Para obter melhora na qualidade de estimativas do último método, sugeriu-se redundância no número de pontos auxiliares de medição.

Moura, 2010, apresenta algumas ferramentas matemáticas para possibilitar a regularização de sistemas numericamente instáveis e mal-condicionados. Segundo Moura, 2010, o método baseado em operações matriciais funciona apenas para sistemas com níveis elevados de mal condicionamento e se mostrou de difícil operabilidade em sistemas de bom a moderado condicionamento. Ele também propôs uma análise alternativa de caminhos de transferência.

No estudo realizado por Lage et al., 2011, foi proposta uma abordagem inicial do problema inverso, de modo a localizar a posição e quantificar as forças atuantes em uma viga livre-livre. Os autores utilizaram um modelo numérico para medir as respostas dinâmicas e escolher um conjunto de coordenadas ao longo da estrutura e assim estimar o carregamento aplicado. O método foi validado em laboratório para um tipo de carregamento e seu algoritmo combinou um modelo de elementos finitos com as respostas dinâmicas da estrutura medidas em laboratório. Observou-se que o posicionamento dos sensores de medição tem grande influência na resposta e a possibilidade de se obter falsos positivos das respostas medidas deve ser considerada.

Lage, 2014, apresentou técnicas de identificação e transmissibilidade de forças em sistemas dinâmicos com múltiplos graus de liberdade. Este estudo também engloba dois assuntos tratados anteriormente por ele em conjunto com outros autores.

O primeiro estudo apresentado por Lage et al., 2013, foi um método de identificação de força usando o conceito de transmissibilidade de deslocamento, onde a primeira parte do método consiste em utilizar um algoritmo para encontrar o número e a posição das forças

usando o conceito de transmissibilidade e a segunda parte utiliza os resultados obtidos na primeira parte para reconstruir o vetor de carregamento baseado na combinação adequada da resposta dinâmica medida e do modelo numérico da estrutura. A estrutura utilizada para os testes foi uma viga de aço livre-livre submetida a diferentes carregamentos com análise numérica e experimental. A partir do erro entre as respostas dinâmicas calculadas e as respostas dinâmicas medidas, Lage et al., 2013, encontraram as combinações de forças e locais de medição da resposta que obtiveram o mínimo erro acumulado, e assim, puderam escolher os melhores pontos para extrair as respostas. Um dos pontos cruciais enfatizados neste estudo foi que para a etapa de reconstrução se deve ter um modelo numérico atualizado da estrutura, isto é, o modelo numérico deve ser o mais fiel possível do caso de análise. Para a etapa de localização, esta condição de fidelidade do modelo não foi tão importante devido ao cálculo da amplitude de forças ser um procedimento híbrido que mistura respostas medidas com o modelo de resposta teórica.

O segundo estudo foi apresentado por Lage et al., 2014, e baseou-se em utilizar a transmissibilidade de força para calcular as reações mediante o conhecimento das cargas aplicadas e vice-versa. Foi então proposto pelos autores a reconstrução das forças, com base nos problemas diretos e inversos da transmissibilidade em sistemas de múltiplos graus de liberdade. A metodologia híbrida aplicada no estudo relaciona dois conjuntos de forças (reações e forças aplicadas) a partir do conhecimento *a priori* da transmissibilidade da estrutura, seja experimentalmente ou numericamente. Foi construído um modelo de elementos finitos para descrever o comportamento dinâmico da estrutura de viga simplesmente apoiada e um modelo numérico para construção da matriz de transmissibilidade. No entanto, este método não pretendeu substituir o problema inverso comum baseado em FRFs e acelerações operacionais para determinar forças operacionais, e sim ser uma alternativa para quando se é possível medir apenas um conjunto de forças sem a necessidade de acelerômetros.

Uslu et al., 2007, avaliou a aplicabilidade de um método de determinação de força indireta, baseado na utilização das *FRFs* de um sistema e dos níveis de vibração medidos em condições operacionais, a partir de estudos numéricos e experimentais. Este procedimento utilizou uma inversa generalizada da matriz *FRF* e o espectro dos níveis de resposta medidos. Segundo Uslu et al., 2007, na prática, a parte mais difícil é obter a inversa da matriz *FRF* com precisão e confiabilidade, e em seu estudo recorreu-se a

uma técnica de regularização do sistema. Utilizou-se neste estudo um modelo de placa engastada para a análise numérica e um modelo de placa em L para a análise experimental. Em ambas as análises testou-se o método com aplicação de força em pontos unitários nos modelos a fim de verificar a existência de forças diferentes de zero nas coordenadas diferentes do local de aplicação da força. Em ambos os modelos a força na coordenada aplicada foi prevista, no entanto, nas outras coordenadas, também foi possível prever forças inexistentes, que, segundo o autor, estão associadas ao problema numérico relacionado ao número de condicionamento da matriz FRF . Desta forma este trabalho evidenciou que a determinação de forma única ainda é um problema bastante difícil se o número de forças a serem determinadas não for óbvio. Para Uslu et al., 2007, a principal limitação do método de estudo é o condicionamento matricial da matriz FRF . Além disso deve ser feita uma inspeção cuidadosa das propriedades numéricas dos dados para a interpretação correta das forças previstas.

A fim de avaliar a integridade estrutural de um modelo de míssil, Vishwakarma et al., 2010, apresentaram duas técnicas que se baseiam em cálculos no domínio de frequência e que utilizam o método pseudo-inverso de Moore-Penrose para reconstrução de carregamento. A primeira técnica consiste na utilização direta da pseudo-inversa de Moore-Penrose na matriz FRF do sistema. Já a segunda técnica utiliza a normalização de massa do vetor modal para determinar a matriz FRF antes de aplicar a pseudo-inversa de Moore-Penrose. Um diferencial desta metodologia em relação às citadas anteriormente é o fato de ela se utilizar do domínio na frequência nos cálculos que envolvem maior processamento numérico, porém tendo como entrada as forças aplicadas, e como saída, as forças reconstruídas, os dados no domínio do tempo. Os resultados obtidos a partir da utilização das técnicas apresentadas foram suspeitosamente bons com pequenos erros em função da inversão da matriz FRF , da utilização da FFT e IFFT e de arredondamento, casos aparentemente bem definidos pelo autor.

No trabalho proposto por Khoo et al., 2014, avaliou-se uma força dinâmica em um modelo de placa retangular apoiada a partir de uma metodologia que utiliza Análise de Forma de Deflexão Operacional (ODS), medição de FRF e método pseudo-inverso. Foi demonstrado experimentalmente o desempenho desta abordagem para casos sub-determinados, determinados e sobredeterminados. Avaliou-se o número de condicionamento matricial para selecionar as combinações boas e más de locais de resposta, e se-

gundo os autores, no caso sobre-determinado, uma boa combinação de locais de resposta e um número elevado de locais de resposta proporcionam a melhor precisão do resultado da identificação da força em comparação com casos subdeterminados e determinados.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho surgiu dos seguintes questionamentos:

- É possível reconstruir o carregamento dinâmico aplicado a uma estrutura utilizando a Pseudo-Inversa de Moore-Penrose no método inverso, tendo disponível apenas as informações de saída do problema?
- O que é preciso, ou quais seriam as informações necessárias, para que esse problema seja resolvido com maior assertividade?

A partir disso, tornam-se necessários: a revisão bibliográfica, a fim de compreensão do problema inverso de reconstrução de carregamento; a utilização de software comercial baseado no Método dos Elementos Finitos (*MEF*), para obtenção de dados de análises dinâmica; e a resolução do problema de reconstrução de carregamento utilizando a pseudo-inversa de Moore-Penrose. Desta forma obtém-se as diretrizes para utilização da pseudo-inversa de Moore-Penrose na reconstrução de carregamentos dinâmicos.

Se torna importante salientar que o método escolhido para estudo visa abordar o problema inverso de forma simplificada, pois a utilização de regularizações, entre outras manipulações, tendem a aumentar a complexidade do problema inicialmente proposto.

1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho é composto por cinco capítulos. A parte introdutória bem como a revisão bibliográfica, objetivos pretendidos, estruturação do texto e nomenclatura, está presente no capítulo 1. No capítulo 2, é apresentada a fundamentação teórica, onde são descritos: conceitos básicos em vibrações, *FRF*, pseudo-inversa de Moore-Penrose e uma breve abordagem sobre processamento de sinais. No capítulo 3 está contida a metodologia aplicada para reconstrução de carregamento utilizando método pseudo-inverso. No capítulo 4 são descritos os casos de estudos realizados neste trabalho, bem como são mostrados e discutidos os resultados obtidos com a metodologia descrita no capítulo an-

terior e apresentadas as diretrizes de utilização da metodologia estudada. Finalmente, no capítulo 5, as conclusões e observações finais são apresentadas.

As notações matricial e indicial são utilizadas no presente trabalho. Na primeira notação, matrizes são escritas em letras maiúsculas entre colchetes e vetores são escritos em letras maiúsculas entre chaves. A segunda notação é composta por índices arábicos que quando utilizados em somatórios são explicitados no equacionamento. O ponto acima das variáveis significa que as mesmas são derivadas e a quantidade de pontos indica a ordem da derivada.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No presente capítulo serão apresentados alguns conceitos de vibrações, problemas inversos e processamento de sinais, como: *FRF*, pseudo-inversa de Moore-Penrose e transformada de Fourier. Estes assuntos definem os fundamentos teóricos necessários para descrição do método de reconstrução de carregamento explorado neste trabalho.

2.1 Conceitos Básicos em Vibrações

As vibrações estão presentes em diversos sistemas de uso cotidiano. Pode-se classificar vibrações de sistemas dinâmicos pela presença ou não de solicitações externas: quando o sistema não possui solicitação externa, a vibração é denominada de livre; havendo solicitação externa, a vibração é denominada de forçada. A frequência em que a estrutura oscila, em vibrações livres, é chamada de frequência natural. Sistemas estruturais têm infinitas frequências naturais. Quando a solicitação externa ou a frequência de excitação da base se aproximam ou atingem alguma destas frequências naturais ocorre um fenômeno chamado de ressonância. A ressonância é, muitas vezes, responsável por falhas graves que podem colocar em risco a vida de muitas pessoas [Irvine, 2000].

Uma análise completa em vibrações geralmente compreende dois estágios sucessivos: a análise de vibração livre e posteriormente a análise de vibração forçada. É usual começar a conceituar vibrações através do sistema de um grau de liberdade (*GDL*) e se usa este modelo para introduzir a notação utilizada bem como as análises que podem evoluir para sistemas com múltiplos graus de liberdade [Ewins, 1984]. Os graus de liberdade presentes em um sistema são definidos pelo número mínimo de coordenadas independentes necessárias para a completa determinação das posições em todas as partes do sistema em qualquer instante. Na Figura 2.1 é ilustrado um sistema simples com um grau de liberdade, composto por massa (m), mola (k) e amortecedor (c) que são, geralmente, as partes que constituem sistemas vibratórios.

Sistemas estruturais podem ser modelados como contínuos ou discretos. Quando um sistema possui um número de graus de liberdade finito é dito que este é um sistema discreto ou de parâmetros concentrados. Já em sistemas contínuos ou distribuídos, o número de graus de liberdade é infinito. Em sistemas discretos as equações de movimento geralmente se apresentam na forma de equações diferenciais ordinárias, enquanto nos sis-

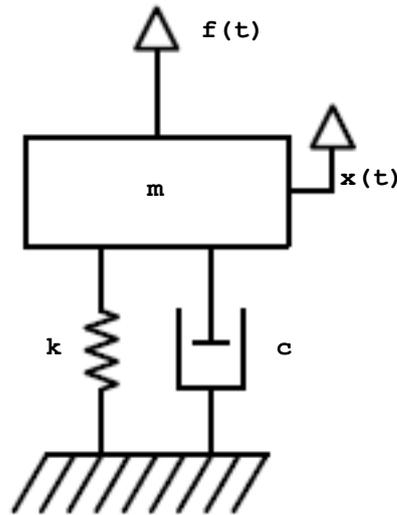


Figura 2.1 – Sistema massa-mola-amortecedor com 1 GDL.

temas contínuos se apresentam como equações diferenciais parciais. Os sistemas discretos tendem a ter uma solução mais simples do que os sistemas contínuos, desta forma, em vários casos procura-se uma aproximação discretizada aplicável ao problema contínuo. Embora haja algumas limitações de tipos de problemas que podem ser resolvidos com esta aproximação, consegue-se obter resultados mais precisos aumentando o número de graus de liberdade do sistema, isto é, discretizando o problema em partes menores. A equação de movimento pode ser obtida por meio de diferentes abordagens, entre elas estão a segunda Lei do movimento de Newton, o princípio de D' Alembert e o princípio da conservação da energia [Rao, 2011].

Considerando o sistema linear da Figura 2.1, massa-mola com amortecimento viscoso sendo solicitado por uma força externa $f(t)$ (vibração forçada), a equação do movimento é dada por

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (2.1)$$

onde \ddot{x} , \dot{x} , e x , representam respectivamente a aceleração, velocidade e deslocamento.

Caso os efeitos de dissipação do amortecimento sejam negligenciáveis e não haja forças externas atuantes no sistema, elimina-se da Equação 2.1 os termos correspondentes ao amortecimento e iguala-se esta equação a zero. Desta forma, o sistema vibrará livre e indefinidamente [Rao, 2011].

A Equação 2.1 ainda pode ser reescrita para múltiplos graus de liberdade, obtendo

a seguinte equação na forma matricial

$$[M] \{\ddot{X}(t)\} + [C] \{\dot{X}(t)\} + [K] \{X(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.2)$$

onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ representam respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez e \ddot{X} , \dot{X} , X e F os vetores de aceleração, velocidade, deslocamento e forças para cada um dos graus de liberdade do sistema.

2.1.1 Resposta Harmônica

Quando um sistema dinâmico é solicitado por uma força harmônica sua resposta dinâmica é chamada de resposta harmônica. Neste caso a força aplicada é descrita por funções harmônicas como: $f(t) = F e^{i\omega t}$ ou $f(t) = F \cos(\omega t + \phi)$, onde F é a amplitude da força, ω sua frequência e ϕ seu ângulo de fase [Lage, 2014]. Considerando o sistema linear da Figura 2.1, temos:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F \cos(\omega t + \phi) \quad (2.3)$$

A resolução completa da Equação 2.3 se dará por meio do somatório da solução homogênea $x_h(t)$, que representa a vibração livre do sistema, com a solução particular $x_p(t)$, que representa a resposta do sistema enquanto houver força atuando sobre ele [Lage, 2014]. Sendo assim, considerando o sistema linear da Equação 2.3 a solução particular é dada por:

$$x_p(t) = X_p \cos(\omega t - \phi_{xf}) \quad (2.4)$$

onde X_p é a amplitude da resposta em deslocamento e ϕ_{xf} é a diferença de fase entre a resposta e a força.

Substituindo a Equação 2.4 na Equação 2.3 obtemos:

$$X_p[(k - m\omega^2) \cos(\omega t - \phi_{xf}) - c\omega \sin(\omega t - \phi_{xf})] = F \cos(\omega t) \quad (2.5)$$

Utilizando o auxílio das seguintes relações trigonométricas na Equação 2.5,

$$\begin{aligned} \cos(\omega t - \phi_{xf}) &= \cos(\omega t) \cos(\phi_{xf}) + \sin(\omega t) \sin(\phi_{xf}) \\ \sin(\omega t - \phi_{xf}) &= \sin(\omega t) \cos(\phi_{xf}) - \cos(\omega t) \sin(\phi_{xf}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

e igualando os coeficientes $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$ em ambos os lados da equação se obtém:

$$\begin{aligned} X_p[(k - m\omega^2) \cos(\phi_{xf} + c\omega \sin(\phi_{xf}))] &= F \\ X_p[(k - m\omega^2) \sin(\phi_{xf} + c\omega \cos(\phi_{xf}))] &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Assim se pode chegar à amplitude X_p :

$$X_p = \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.8)$$

e à fase ϕ_{xf} :

$$\phi_{xf} = \tan^{-1} \left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right) \quad (2.9)$$

Assumindo que:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ r &= \frac{\omega}{\omega_n} \\ \zeta &= \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde ω_n é a frequência natural não amortecida, r é a razão entre frequências e ζ é o fator de amortecimento. Tem-se para X_p :

$$X_p = \frac{F}{k\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (2.11)$$

e para a fase ϕ_{xf} ,

$$\phi_{xf} = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right) \quad (2.12)$$

Assim obtemos a solução particular da Equação 2.3, que somada à solução homogênea nos fornecerá a resposta para o sistema dinâmico solicitado por uma força harmônica.

Uma ferramenta particular disponível para realizar análises e testes de vibração, dentre outras que existem, é a Função de Resposta em Frequência (*FRF*). Ela é uma função de transferência expressa no domínio da frequência. Estas funções são construídas no domínio complexo, podendo-se também representá-las em termos de magnitude e fase. Constituem-se a partir de dados medidos ou funções analíticas, que expressam a resposta estrutural a uma solicitação externa em função da frequência [Irvine, 2000]. A resposta da *FRF* pode ser obtida em termos de deslocamento, velocidade ou aceleração, o que pode ser visto com mais detalhes na Seção 2.2.

2.2 Função de Resposta em Frequência (FRF)

A Função de Resposta em Frequência (FRF), como supramencionado, é uma função de transferência que pode ser expressa em termos de deslocamento, velocidade ou aceleração no domínio da frequência. No caso em que as respostas consideradas são dadas em deslocamento, a matriz FRF é conhecida como matriz de receptância; quando são dadas em velocidade é conhecida por matriz de mobilidade e para o caso de acelerações por matriz de acelerância. A Tabela 2.1 mostra a denominação da matriz FRF de acordo com o tipo de resposta considerada, embora seja uma prática comum usar $H(\omega)$ para se referir genericamente às funções de resposta de frequência [Ewins, 1984].

Tabela 2.1 – Definição da FRF de acordo com o tipo de resposta (adaptado de Lage, 2014).

Tipo de Resposta				
Deslocamento	x/F	Receptância	F/x	Rigidez Dinâmica
Velocidade	\dot{x}/F	Mobilidade	F/\dot{x}	Impedância Mecânica
Aceleração	\ddot{x}/F	Acelerância	F/\ddot{x}	Massa Aparente

Como pode ser visto na Figura 2.2, a relação de entrada e saída de um sistema linear comumente utilizada no domínio da frequência é a FRF. A matriz $H(\omega)$ é formada pelo conjunto de FRFs que descrevem a dinâmica do sistema [Lage, 2014].

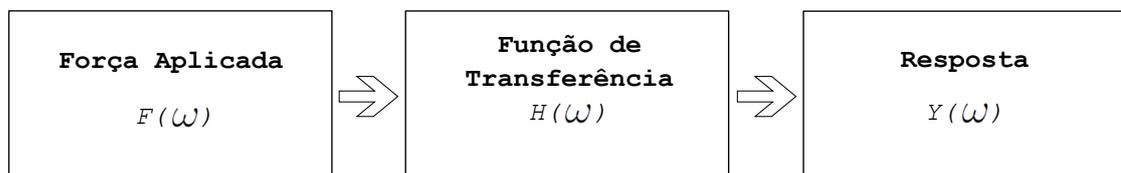


Figura 2.2 – Sistema dinâmico linear discreto.

Considerando a relação da Figura 2.2, define-se a equação de movimento no domínio da frequência, onde este tipo de representação é chamado de modelo de resposta no domínio da frequência [Lage, 2014]:

$$\{Y(\omega)\} = [H(\omega)]\{F(\omega)\} \quad (2.13)$$

onde $F(\omega)$ é a força de excitação, $H(\omega)$ é a *FRF* e $Y(\omega)$ é o vetor de resposta em função do tipo de resposta (Tabela 2.1).

Analicamente a função de resposta em frequência pode ser obtida através da transformada de Fourier da função de resposta ao impulso $h(\tau)$. Esta função relaciona a resposta de um sistema $y(t)$ com uma entrada qualquer $x(t)$ através da integral de convolução, que é dada por [Bendat e Piersol, 1971]:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (2.14)$$

sendo $h(\tau)$ nula para qualquer τ menor que zero. Pode-se definir então a *FRF* como:

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau \quad (2.15)$$

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados da Equação 2.14 chega-se à relação para a função de resposta em frequência de sistemas lineares com parâmetros constantes (Equação 2.13). Esta *FRF* é função apenas da frequência e, portanto, independente do tempo ou excitação [Bendat e Piersol, 1971].

A função de transferência, que representa a aceleração sobre a força, também chamada de função acelerância, pode ser obtida analiticamente em termos de magnitude e ângulo de fase α para o sistema da Figura 2.1 por [Irvine, 2000]:

$$\left| \frac{Y(\omega)}{F(\omega)} \right| = \left[\frac{1}{m} \right] \left[\frac{-\omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega\omega_n)^2}} \right] \quad (2.16)$$

e a fase α :

$$\alpha = -\pi + \tan^{-1} \left[\frac{2\zeta\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \right] \quad (2.17)$$

Os modelos discretos amplamente utilizados em dinâmica estrutural são baseados em três domínios [Dobson e Rider, 1990]:

- Espacial: no qual o sistema é descrito em termos de massa, rigidez e amortecimento;
- Modal: em que o sistema é descrito em termos da frequência natural, formas modais e amortecimento;
- De Resposta: que descreve o sistema a partir da função de resposta em frequência em função da frequência de excitação.

Estes modelos podem ainda ser divididos em completos e incompletos. Em modelos

completos tem-se todas as componentes de massas, rigidez e, se houver, amortecimento dos N graus de liberdade do sistema. Nos modelos chamados de incompletos, ou reduzidos, não se conhecem todas as componentes para os N graus de liberdade do sistema. Se eliminarmos vários graus de liberdade de um modelo de resposta completo de dimensão $N \times N$ teremos o seguinte modelo reduzido [Ewins, 1984]:

$$\{X^R\}_N = [H^R]_{N \times N} \{F^R\}_N \quad (2.18)$$

onde R indica o modelo reduzido.

O modelo de resposta descrito pela matriz de receptância, quando reduzido, não altera as FRF s pelas quais é composto, porém o mesmo não pode ser dito quando se pretende obter a matriz de rigidez dinâmica a partir do modelo reduzido da Equação 2.18. A redução do modelo espacial é feita através de métodos complexos para corrigir as propriedades do sistema (massa, rigidez e amortecimento), o que torna a tarefa mais difícil. A eliminação de modos, no caso do modelo modal, torna a matriz dos modos de vibração retangular, porém suas informações de frequências naturais permanecem completas na matriz de autovalores [Lage, 2014].

2.3 Problemas Inversos

Os problemas inversos integram uma parte importante na matemática voltada à análise de problemas de identificação ou reconstrução, e algumas questões importantes devem ser consideradas para que seja possível a resolução destes problemas [Aster et al., 2005]:

- Existência da Solução: se os dados da análise contiverem ruído e/ou se o modelo matemático for aproximado, pode não haver um modelo que corresponda exatamente ao conjunto de dados analisados;
- Unicidade da Solução: se existem soluções exatas, elas podem não ser únicas, mesmo para um número infinito de dados exatos;
- Instabilidade do Processo de Solução: o processo de resolução de uma solução inversa geralmente possui extrema instabilidade. Pequenas alterações ou erros nas medições podem gerar mudanças significativas nos modelos analisados. No caso de sistemas contínuos, estes problemas de resolução são chamados de mal-postos e em sistemas

lineares discretos são referidos como discretos mal-postos ou mal-condicionados. Para estabilizar o processo de inversão, geralmente é necessário adicionar restrições ao problema. Estas restrições são usualmente referidas como regularização e servem para obter um solução útil, porém limita-se a um modelo suavizado.

A instabilidade da solução pode ser medida através do número de condicionamento (CN) das matrizes. Este número fornece um limite superior do quão imprecisa uma solução de um sistema de equações pode ser devido aos erros. Portanto, sugere-se assumir que o erro é aproximadamente do tamanho previsto pelo número de condicionamento [Aster et al., 2005]. Na prática, se temos capacidade computacional de armazenamento para 16 dígitos de precisão, e tivermos um CN igual ou superior a 10^{16} , significa que pode não haver dígitos precisos na solução para o dado sistema de equações, tornando-a apenas um amplificador de ruído.

O número de condicionamento de uma matriz $[A]$ pode ser estimado a partir da equação [Hansen, 1998]:

$$CN(A) = \|A\|_2 \|A^+\|_2 \quad (2.19)$$

onde o sobrescrito (+) indica a inversa generalizada e $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana da matriz $[A]$.

Números de condição elevados são atribuídos a sistemas mal-condicionados. Cabe salientar que o mal-condicionamento é uma propriedade do sistema de equações, portanto não pode ser resolvido simplesmente substituindo o algoritmo utilizado na resolução do sistema. Deve-se aumentar a precisão computacional ou encontrar outro sistema de equações melhor condicionado [Aster et al., 2005].

2.3.1 Inversa Generalizada

A inversa de uma matriz não singular $[A]$ é única, descrita por $[A]^{-1}$, tal que [Ben-Israel e Greville, 2003]

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I] \quad (2.20)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade.

Se pode citar algumas das propriedades das matrizes inversas, como:

$$\begin{aligned}([A]^{-1})^{-1} &= [A], \\ ([A]^T)^{-1} &= ([A]^{-1})^T, \\ ([A]^*)^{-1} &= ([A]^{-1})^*, \\ ([A][B])^{-1} &= [A]^{-1}[B]^{-1},\end{aligned}$$

onde $[A]^T$ é a transposta de $[A]$ e $[A]^*$ é a transposta conjugada de $[A]$ [Ben-Israel e Greville, 2003].

Desta forma, obtém-se a inversa de uma matriz somente se ela for quadrada, isto é, o número de linhas for igual ao número de colunas da matriz, e se a matriz for não-singular. Devido à necessidade em várias áreas da matemática de se aplicar a inversa em matrizes singulares ou retangulares, Moore estabeleceu o conceito de inversa generalizada de matrizes em 1920 [Zontini, 2014].

Para se obter a inversa generalizada de uma dada matriz $[A]$, se deve ter uma matriz $[X]$ associada que de alguma forma faça com que $[A]$ [Ben-Israel e Greville, 2003]:

- Exista para uma classe de matrizes maiores do que a classe de matrizes não singulares;
- Possua algumas propriedades da inversa habitual;
- Se reduza ao inverso usual quando $[A]$ é não-singular, ou seja, a inversa generalizada de $[A]$ deve satisfazer

$$[A][X][A] = [A] \tag{2.21}$$

onde multiplicando ambos os lados da equação por $[A]^{-1}$, se existisse, obteríamos

$$[X] = [A]^{-1} \tag{2.22}$$

2.3.2 Pseudo-Inversa de Moore-Penrose

Em 1950, começou-se a relacionar a inversa generalizada com solução de problemas de mínimos quadrados. Então, Penrose mostrou que a inversa de Moore é a única matriz que satisfaz as equações [Zontini, 2014]:

$$[A][X][A] = [A] \tag{2.23}$$

$$[X][A][X] = [X] \quad (2.24)$$

$$([A][X])^* = [A][X] \quad (2.25)$$

$$([X][A])^* = [X][A] \quad (2.26)$$

e a partir da contribuição destes pesquisadores a pseudo-inversa é comumente chamada de pseudo-inversa de Moore-Penrose [Zontini, 2014].

Para se obter a força de excitação de um sistema a partir da matriz FRF , caso tenha-se o mesmo número de forças desconhecidas e os dados de resposta, a matriz FRF resulta quadrada e não-singular, podendo-se então reorganizar a Equação 2.13:

$$\{F(\omega)\} = [H(\omega)]^{-1}\{Y(\omega)\} \quad (2.27)$$

onde o sobrescrito (+) representa a pseudo-inversa.

Entretanto, quando o número de forças aplicadas e o número de pontos de medição diferem, obtém-se uma matriz FRF retangular. Desta forma, para resolver o sistema torna-se necessário utilizar uma matriz inversa generalizada: a pseudo-inversa de Moore-Penrose [Hansen, 1998]. Assim, a força pode ser obtida pela equação [Vishwakarma et al., 2010]:

$$\{F(\omega)\} = [H^+(\omega)]\{Y(\omega)\} \quad (2.28)$$

Se o sistema for redundante, isto é, forem conhecidas mais respostas do que as cargas aplicadas no sistema, o problema é dito sobredeterminado, e pode ser resolvido pela Equação

$$[H^+(\omega)] = [H^T H]^{-1}[H^T] \quad (2.29)$$

caso contrário o problema é denominado subdeterminado, e se utiliza a equação,

$$[H^+(\omega)] = [H^T][H^T H]^{-1} \quad (2.30)$$

onde para sistemas amortecidos usa-se H^T como a matriz Hermitiana de H [Ewins, 1984].

Segundo Padilha, 2006, problemas redundantes tendem a obter resultados melhores. Desta forma, decidiu-se utilizar a Pseudo-inversa de Moore-Penrose para problemas sobredeterminados neste trabalho.

2.4 Processamento de Sinais

2.4.1 Classificação dos Sinais

Os sinais podem ser divididos em várias classes, porém, nesta dissertação, torna-se relevante tipificar os sinais da seguinte forma [Lathi, 2007]:

- **Contínuos e Discretos no Tempo.** Qualificam a natureza do sinal no eixo do tempo (t). Quando se tem valores contínuos de tempo o sinal é dito contínuo. Para sinais discretos os valores de tempo são discretos. Alguns sinais contínuos podem ser convertidos em sinais discretos por meio de amostragem.
- **Analógicos e Digitais.** Qualificam a natureza do sinal no eixo da amplitude. Quando se pode assumir infinitos valores de amplitude o sinal é dito analógico. Em sinais digitais a amplitude geralmente pode assumir dois valores (binário). Por meio de quantização¹ se pode converter um sinal analógico em digital.
- **Periódicos e Não Periódicos.** Sinais periódicos são sinais que satisfazem a condição de periodicidade, isto é, seu período se repete ao longo do tempo. Em sinais não periódicos esta condição de periodicidade não é satisfeita, portanto, ele não possui um período que se repete ao longo do tempo.
- **Determinísticos e Aleatórios.** Os sinais determinísticos, como o nome sugere, são sinais que podem ser determinados ou descritos fisicamente em forma matemática ou gráfica. Os sinais aleatórios são sinais que podem ser descritos de forma probabilística², não podendo ser predeterminados de forma precisa.

2.4.2 Transformada de Fourier

Análises de Fourier têm como característica comum descrever dados variáveis no tempo como conjunto de senoídes, e também, a partir de dados em frequência, reconstruir um histórico no tempo [Ewins, 1984]. Dentro das análises de Fourier tem-se: série de Fourier, transformada de Fourier e séries ou transformadas discretas de Fourier.

¹Quantização é o arredondamento de valores presentes em um sinal para o valor mais próximo possível de números possíveis permitidos [Lathi, 2007].

²Valor médio e valor médio quadrático são exemplos de descrições de sinais em forma probabilística [Lathi, 2007].

Apenas uma gama finita da Transformada de Fourier pode ser realmente computada com dados digitalizados, e esta gama finita sempre pode ser considerada como um período de uma Série de Fourier associada. Sendo assim, Séries e Transformadas de Fourier podem diferir em suas propriedades teóricas. Contudo, para a maioria dos propósitos práticos, ela mantém seus detalhes computacionais digitais [Bendat e Piersol, 1971].

A Série de Fourier de uma amostra estacionária $x(t)$ periódica com período T_p e frequência fundamental $f_1 = 1/T_p$ pode ser representada por [Bendat e Piersol, 1971]:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} (a_q \cos 2\pi q f_1 t + b_q \sen 2\pi q f_1 t) \quad (2.31)$$

onde,

$$a_q = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \cos 2\pi q f_1 t dt \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_q = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \sen 2\pi q f_1 t dt \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

Supondo que $x(t)$ é discretizado e definido em um conjunto N de valores x_n , a Série de Fourier pode ser escrita como:

$$x_n = A_0 + \sum_{q=1}^{N/2} A_q \cos \left(\frac{2\pi q n}{N} \right) + \sum_{q=1}^{((N/2)-1)} B_q \sen \left(\frac{2\pi q n}{N} \right) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.32)$$

onde A_0 , A_q e B_q são os coeficientes dados por:

$$A_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n = 0$$

$$A_q = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x_n \cos \frac{2\pi q n}{N} \quad q = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (2.33)$$

$$B_q = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x_n \sen \frac{2\pi q n}{N} \quad q = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

No caso de se ter um valor grande para N , esses métodos de determinação dos coeficientes A_q e B_q , que são iterativos, podem ter tempo computacional elevado (ordem N^2) [Bendat e Piersol, 1971].

Assumindo um sinal de entrada digital finito discreto N igualmente espaçado em um período T , com amostra periódica, se pode calcular, conforme Equação 2.32, a série de Fourier como uma estimativa para a Transformada de Fourier necessária. O comprimento da amostra T , o número de valores discretos N , a taxa de amostragem ω_s e a faixa e

resolução do espectro de frequência, $\Delta\omega$, são relacionados por [Ewins, 1984]:

$$\omega_{max} = \frac{\omega_s}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi N}{T} \right) \quad (2.34)$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_s}{N} = \frac{2\pi}{T} \quad (2.35)$$

onde a faixa do espectro é $[0 - \omega_{max}]$ e ω_{max} é a frequência de Nyquist.

A série de Fourier também pode ser expressa em coeficientes complexos:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{n=\infty} C_n e^{i2\pi nt/T} \quad (2.36)$$

onde

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{i2\pi nt/T} dt \quad (2.37)$$

Considerando a Transformada de Fourier como o limite da Série de Fourier $x(t)$, quando T tende ao infinito, tem-se $\Delta\omega$ infinitesimal, logo a Transformada de Fourier e a Transformada Inversa de Fourier são dadas respectivamente por [Ewins, 1984]:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.38)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.39)$$

Em suma, a Transformada de Fourier é utilizada para transformar dados no domínio do tempo ou espaço em dados no domínio da frequência e vice-versa. A Figura 2.3 ilustra sucintamente o processo da Transformada de Fourier.

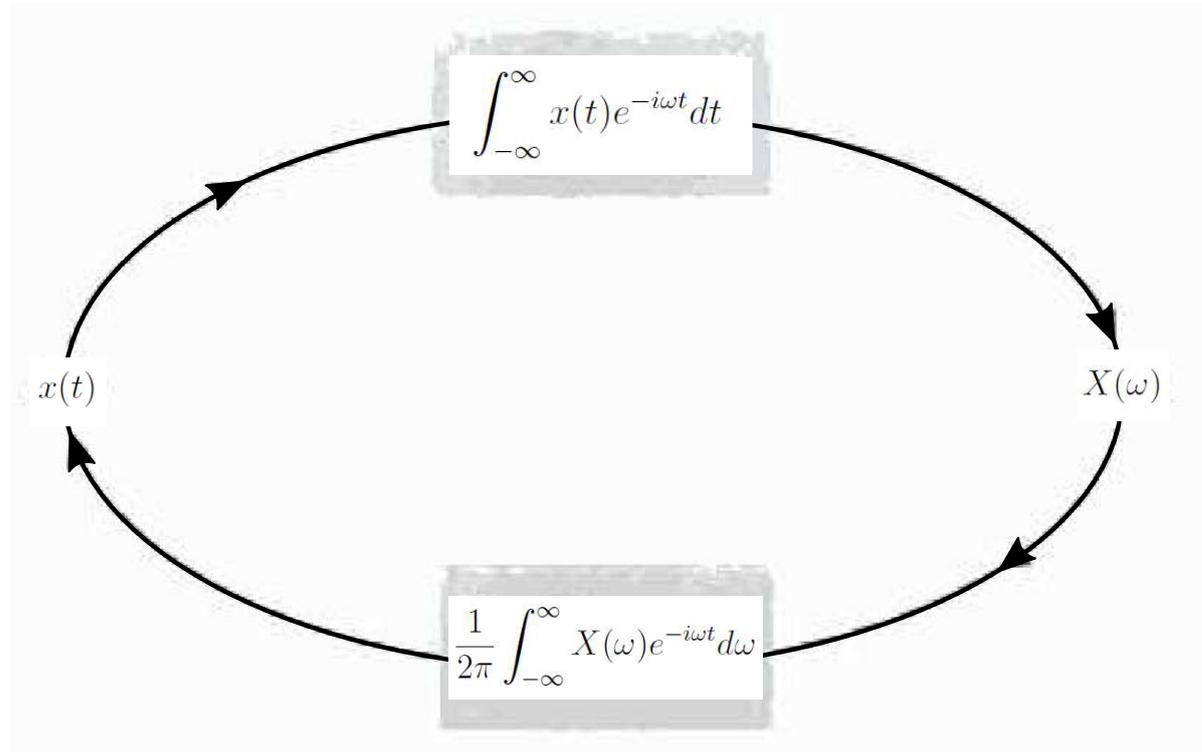


Figura 2.3 – Transformadas direta e inversa de Fourier (adaptado de Lathi, 2007).

A Figura 2.4 busca mostrar de maneira simplificada que se pode separar o sinal no domínio do tempo em várias ondas senoidais para se obter o espectro do sinal no domínio da frequência.

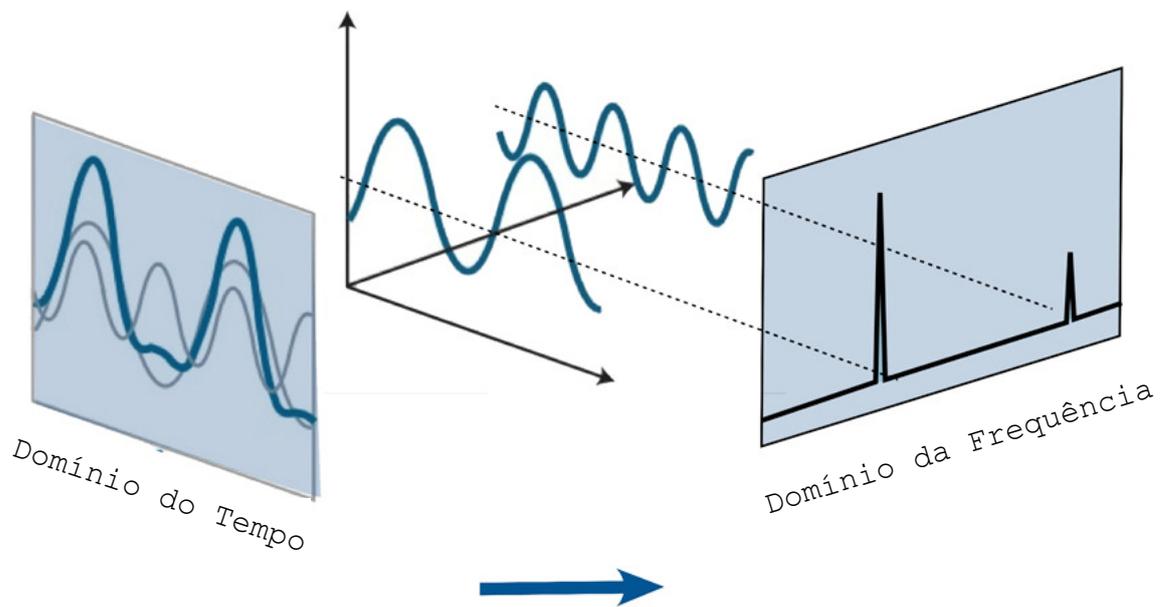


Figura 2.4 – Correlação entre sinal no domínio do tempo e da frequência(adaptado de Zhang, 2017).

Métodos alternativos foram propostos e desenvolvidos para que se fosse possível reduzir os tempos de processamento para resolução das equações 2.38 e 2.39 [Bendat e Piersol, 1971]. O algoritmo mais utilizado é a Transformada Rápida de Fourier (*FFT*) desenvolvido por Cooley e Tukey na década de 1960, que utiliza N como sendo uma potência de 2. O procedimento inverso é chamado de Inversa da Transformada Rápida de Fourier (*IFFT*) [Ewins, 1984].

Uma das principais vantagens da *FFT* é a transformação da função de convolução de sinais, uma função que possui elevada complexidade, para uma simples multiplicação de sinais, utilizada no domínio da frequência [Lage, 2014].

A aproximação da discretização e a necessidade de limitar o tamanho do histórico de tempo são algumas características que podem gerar resultados errôneos se não tratados adequadamente. Algumas das patologias e características específicas que podem ocorrer são: *aliasing*, *leakage* e janelamento. Elas estão descritas nas próximas seções.

2.4.3 *Aliasing*

A discretização do histórico de tempo originalmente contínuo causa um problema associado à análise espectral digital. Este problema é conhecido por *aliasing*, e o principal

fator que influencia sua existência são as altas frequências presentes no sinal original quando se tem uma amostragem inferior a ser discretizada. O fenômeno do *aliasing* é mostrado na Figura 2.5, onde a digitalização de um sinal de baixa frequência (Figura 2.5(a)) produz o mesmo conjunto de valores resultantes do processo de discretização de um sinal com frequência mais alta (Figura 2.5(b)) [Ewins, 1984].

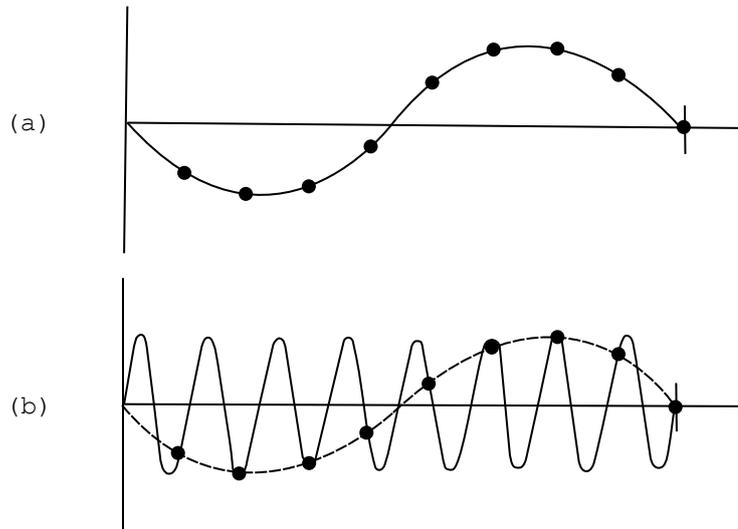


Figura 2.5 – O fenômeno do *aliasing* (adaptado de Ewins, 1984). (a) Sinal de baixa frequência (b) Sinal de alta frequência

Um espectro obtido via Transformada Discreta de Fourier (*DFT*) pode ser visualizado de forma distorcida. A Figura 2.6(a) mostra o sinal de frequência original, e o mesmo sinal após aplicar a *DFT* pode ser visto de forma distorcida na Figura 2.6(b). Esta distorção, se deve ao fato de que parte do sinal pode possuir componentes de frequência acima da frequência de Nyquist $\left(\frac{\omega}{2}\right)$, logo estes componentes aparecerão refletidos ou "*aliased*" no intervalo $\left[0 - \left(\frac{\omega_s}{2}\right)\right]$. Independente do número de valores discretos, deve se utilizar a frequência de Nyquist como a maior frequência que pode estar contida no espectro [Ewins, 1984].

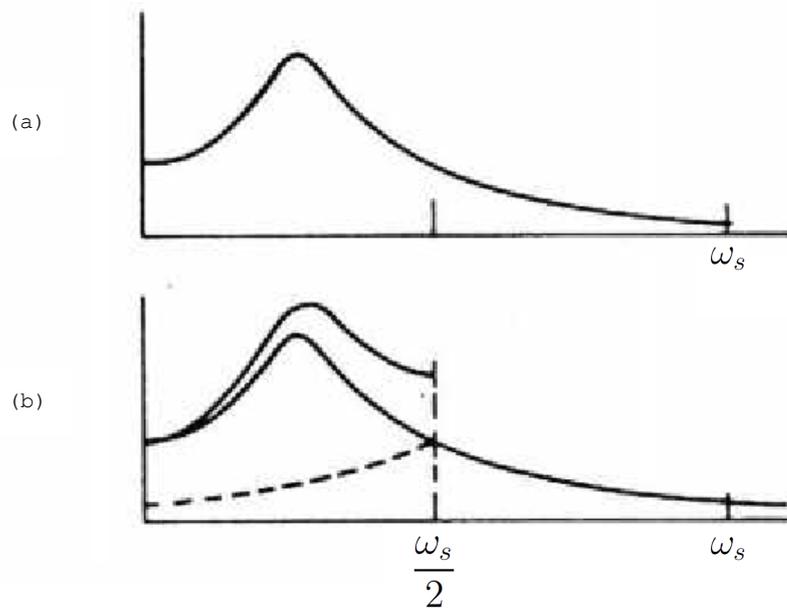


Figura 2.6 – Distorção do espectro pela Transformada Discreta de Fourier (*DFT*). (a) Espectro do sinal; (b) Espectro da *DFT* (adaptado de Ewins, 1984).

Uma forma de solucionar este problema é utilizar um filtro anti-*aliasing* (Figura 2.7). Este tipo de filtro tende a cortar e limitar o pico do sinal original como um filtro passa-baixa. Faixa de valores destes tipos de filtro podem variar de $0.5 - 0.1 \left(\frac{\omega_s}{2}\right)$ para filtros simples, e $0.8 - 0.1 \left(\frac{\omega_s}{2}\right)$ para filtros mais complexos. Logo, deve-se considerar que quando se tem uma análise com 1024 pontos, não se pode contar com o espectro completo de 512 pontos, e sim apenas com os primeiros 250-400 pontos, pois os valores mais altos podem ser contaminados por um anti-*aliasing* imperfeito [Ewins, 1984].

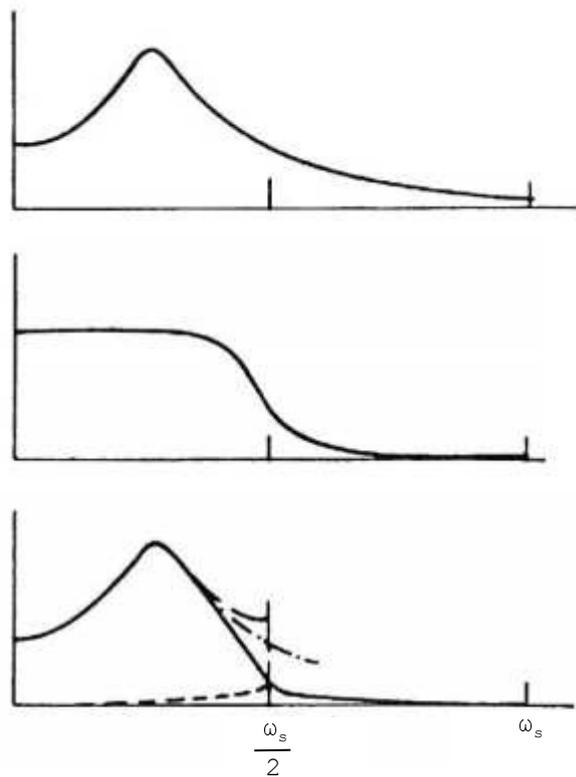


Figura 2.7 – Filtro anti-*aliasing* (adaptado de Ewins, 1984.)

2.4.4 *Leakage*

Quando uma análise no domínio da frequência não tem sensibilidade aos fenômenos transientes, algumas de suas funções não contêm informações da fase, fazendo-se necessário uma grande quantidade de informação para compensar as perdas ocorridas no processo de transformação entre os domínios do tempo e da frequência. Esta perda de informação acarreta no fenômeno conhecido por *leakage*³, que consiste no erro de representação da amplitude de vibração por escolha inconsistente da janela do sinal ou da discretização do domínio da frequência [Lage, 2014]. A Figura 2.8 ilustra dois exemplos de senóides ligeiramente diferentes.

³Vazamento.(tradução livre)

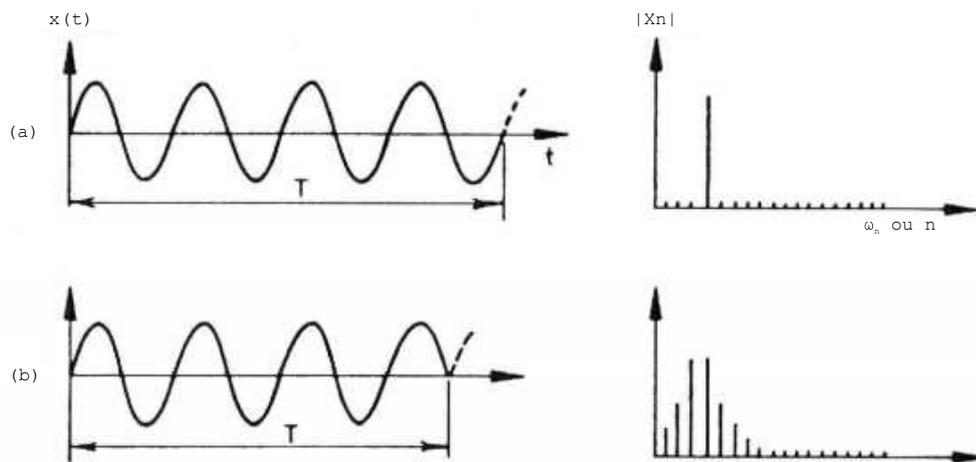


Figura 2.8 – Comprimento da amostra e *leakage* do espectro. (a) Sinal "ideal"(b) Sinal "estranho"(adaptado de Ewins, 1984.)

Na Figura 2.8(a) pode-se notar que o sinal é perfeitamente periódico em uma janela de tempo, T , e seu espectro resultante é apenas uma linha que representa a frequência do seno que foi aplicado. Já na Figura 2.8(b), não existe uma perfeita periodicidade no sinal, fazendo com que haja uma descontinuidade em cada uma de suas extremidades. Desta forma, pode-se observar que a energia da Figura 2.8(b) "vazou" (*leaked*) ao redor da frequência original. Dessa forma, a amplitude do sinal não pode ser capturada corretamente. Problemas deste tipo podem ser atenuados em frequências mais baixas [Ewins, 1984].

Segundo Ewins, 1984, o *leakage* era um sério problema em aplicações que utilizam o processamento de sinal digital. Dentre estas aplicações está a medição da *FRF*. Algumas maneiras de evitar ou minimizar seus efeitos são:

- Alteração do tamanho da amostra em análise de sinais periódicos, de modo que esta corresponda à periodicidade presente no sinal;
- Aumentar a duração do período de medição, T , para se obter melhora na resolução da frequência;
- Adicionar zeros ao final da amostra medida ou modificar a amostra de modo a reduzir o efeito do *leakage* utilizando o janelamento.

2.4.5 Janelamento

Windowing ou janelamento é o procedimento de impor um perfil prescrito no sinal, no domínio do tempo, antes de realizar a *FFT*, ou seja, é um procedimento de filtragem do sinal no domínio do tempo. Geralmente representa-se estas janelas como uma função do tempo, $\omega(t)$, Figura 2.9.

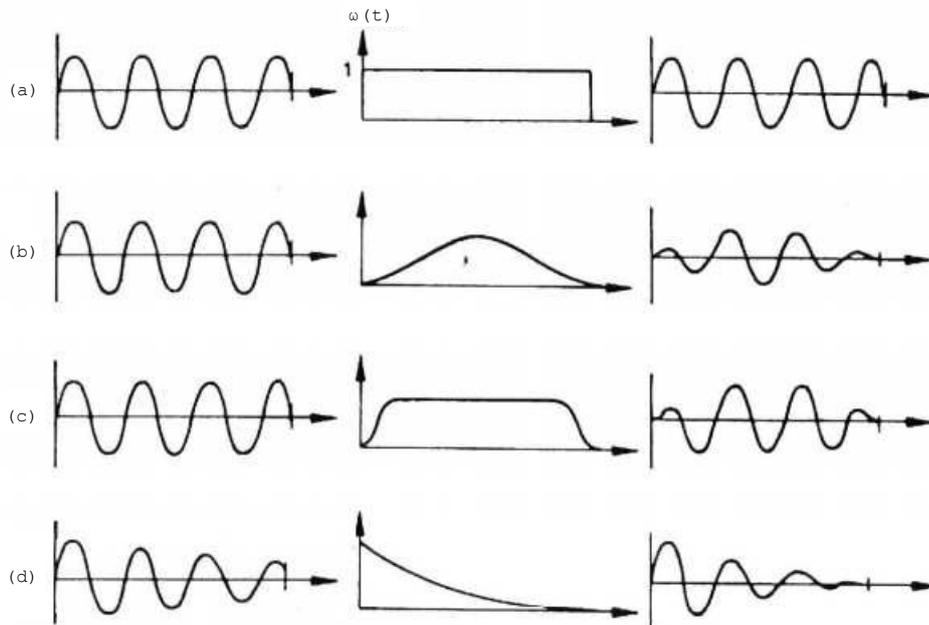


Figura 2.9 – Tipos de janelamento: (a) Boxcar; (b) Hanning; (c) Cosine-taper; Exponencial. (adaptado de Ewins, 1984).

Um sinal do tipo $y(t) = x(t) \cdot \omega(t)$, após a utilização de quatro diferentes tipos de janela pode ser visualizado na terceira coluna da Figura 2.9. As janelas de Hanning (b) e *Cosine Taper* (c) são utilizadas em sinais contínuos produzidos por vibração periódica ou aleatória constante, a janela Exponencial (d) é usada para aplicações transientes com concentração de informação importante no início do sinal. Quando se pretende calcular a *FRF*, para que a atenuação dos sinais após submetidos ao janelamento seja compensada se faz necessário um reescalamento do sinal. Este procedimento pode ser negligenciado quando ambos os sinais de resposta e excitação são submetidos ao mesmo tipo de janelamento [Ewins, 1984].

3 METODOLOGIA

3.1 Reconstrução de Carregamento

A metodologia utilizada para a resolução completa do problema de reconstrução de carregamento abordado neste estudo consiste essencialmente na aplicação de carregamentos dinâmicos pontuais nos modelos analisados, e posterior recuperação de estimativas destes carregamentos em pontos de interesse. Como o procedimento para reconstrução de carregamento é composto por várias etapas, um diagrama de fluxo é apresentado na Figura 3.1, de modo a ilustrar esquematicamente essas etapas, que são descritas resumidamente a seguir:

- **Etapa 1.** Definem-se a geometria, as propriedades do material, os modelos de estudo, as condições de contorno e os carregamentos. Para definição dos carregamentos deve-se considerar a faixa de excitação do carregamento que é descrita na seção 4.3.
- **Etapa 2.** As matrizes FRF são montadas com os dados de aceleração no domínio da frequência obtidos a partir da análise harmônica dos modelos de estudo executados nesta etapa. Para a montagem da matriz FRF deve-se considerar uma faixa de frequência útil conforme seção 4.3.
- **Etapa 3.** Nesta etapa, realizada simultaneamente à etapa 2, se obtém os dados de aceleração no domínio do tempo provenientes de análises transientes¹. Transforma-se estes dados para o domínio da frequência formando a matriz de respostas Y .
- **Etapa 4.** Após organização dos dados obtidos, realizam-se os cálculos para a reconstrução do carregamento nesta etapa.
- **Etapa 5.** Esta é a última etapa, onde os dados obtidos no domínio da frequência são transformados para o domínio do tempo.

¹Análise transiente: nomenclatura usada pelo software utilizado para análises no domínio do tempo.

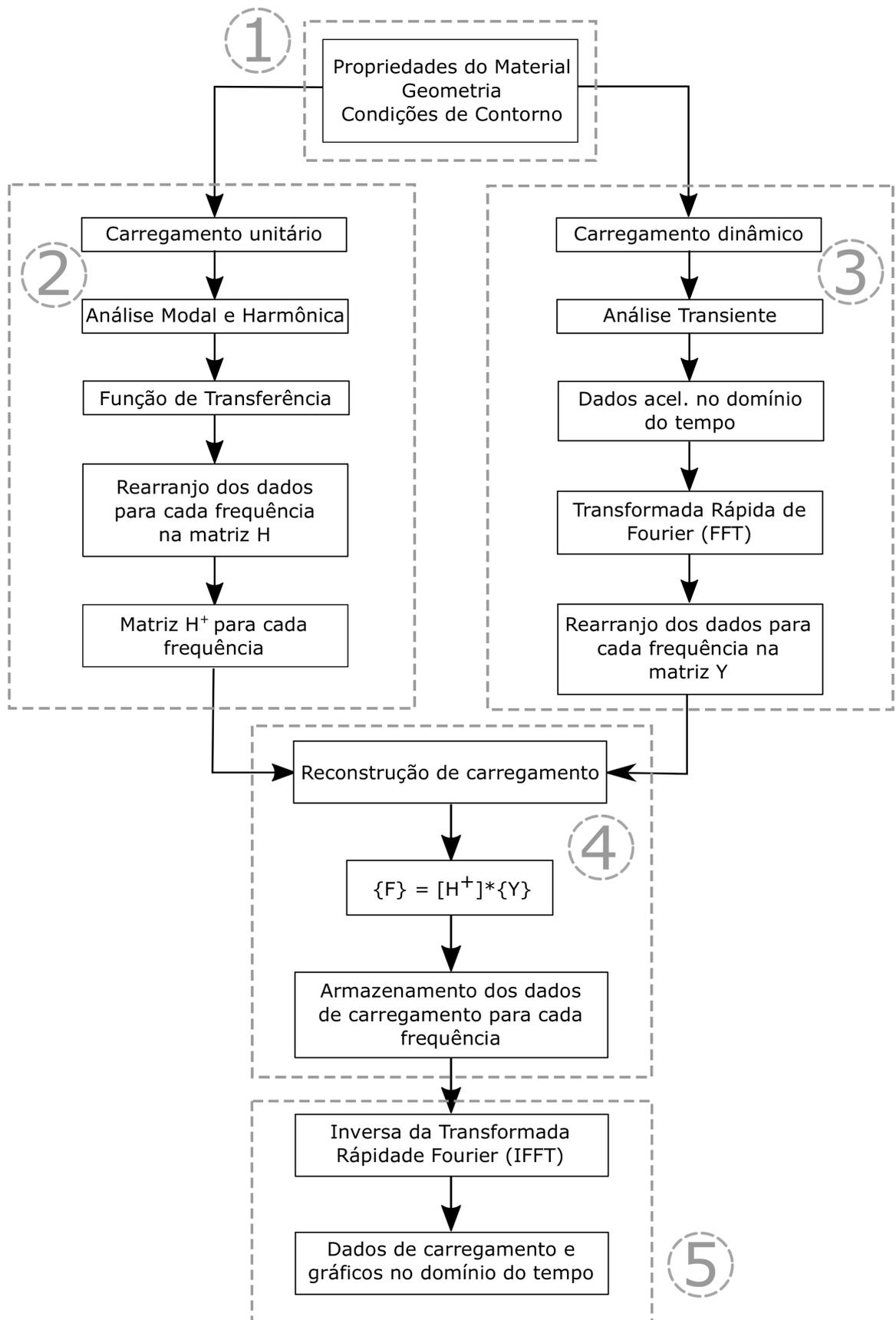


Figura 3.1 – Processo de reconstrução de carregamento (adaptado de Vishwakarma et al., 2010).

3.1.1 Modelos

Os modelos de estudo utilizados neste trabalho bem como as condições de contorno e os carregamentos aplicados são apresentados detalhadamente no Capítulo 4 e tratam-se de modelos massa-mola-amortecedor, vigas e de elasticidade bidimensional. As propriedades do material utilizado nos modelos de viga e elasticidade bidimensional são apresentadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Propriedades do material

Módulo de elasticidade - E	210×10^9 Pa
Coefficiente de Poisson - ν	0.3
Massa específica - ρ	7840 kg/m^3

3.1.2 Análise Harmônica

A análise harmônica de cada modelo foi executada no *solver* OptiStruct do *software* HyperWorks da Altair® [Hyperworks, 2013]. Inicialmente se aplicou uma carga unitária em pontos pré-determinados em cada modelo de elementos finitos a fim de se obter a matriz FRF . Então mediu-se a resposta em aceleração nos nós e nas direções de interesse para todas as frequências dentro da faixa estabelecida. A matriz FRF é formada a partir das respostas medidas nos pontos e cada coluna da matriz representa uma força aplicada.

3.1.3 Análise Transiente

A análise transiente de cada modelo foi executada no mesmo *software* da análise harmônica. Para esta análise foi aplicado o carregamento dinâmico nos modelos de estudo. Assim é possível obter as respostas em aceleração nos mesmo pontos e direções pré-determinadas na análise harmônica. Como as respostas deste procedimento são obtidas no domínio do tempo, se faz necessário o uso da FFT para transformá-los para o domínio da frequência e, assim, poder realizar os cálculos para reconstrução de carregamento.

3.1.4 Procedimento de Reconstrução de Carregamento

Para realizar os cálculos de reconstrução de carregamento foi utilizado o *software* MATLAB® [MathWorks, 2010]. Juntou-se as respostas obtidas na análise harmônica

com as respostas obtidas na análise transiente no domínio da frequência como pode ser visto nas equações 3.1 e 3.2. Uma vez que o número de pontos de interesse em geral difere do número de pontos medidos, a matriz FRF resulta de forma retangular, então a necessidade de pseudo-inversos. A partir desse procedimento foram obtidas as estimativas de carregamento no domínio da frequência [Santos e Marczak, 2016].

$$\{F_1(\omega)\}_{(n \times 1)} = [H(\omega)]_{(n \times m)}^+ \{Y(\omega)\}_{(m \times 1)} \quad (3.1)$$

$$\begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ \vdots \\ F_n(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \cdots & H_{2m}(\omega) \\ H_{31}(\omega) & H_{32}(\omega) & \cdots & H_{3m}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}(\omega) & H_{n2}(\omega) & \cdots & H_{nm}(\omega) \end{bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} Y_2(\omega) \\ Y_3(\omega) \\ \vdots \\ Y_m(\omega) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

3.1.5 Obtenção dos Resultados

Utilizou-se a *IFFT* para transformar as forças reconstruídas, inicialmente obtidas no domínio da frequência, para o domínio do tempo. A partir dos resultados e gráficos obtidos no domínio do tempo se pode então compará-los com as forças inicialmente aplicadas, também no domínio do tempo.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo apresentam-se as configurações dos modelos analíticos e numéricos utilizados neste estudo, bem como os resultados obtidos, suas discussões e as diretrizes para utilização do método de estudo.

4.1 Modelagem Analítica

Dois modelos analíticos foram testados a fim de avaliar a metodologia de reconstrução de carregamento estudada. Estes modelos, visualizados nas figuras 4.1 e 4.4, foram testados para a mesma força (F) de 10 N, aplicada na faixa de frequência de 0 - 500 Hz. As duas configurações utilizadas em cada modelo estão listadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Configurações modelos analíticos

Configuração	Modelo	Número de forças consideradas	Número de forças não-nulas aplicadas	Método
1	1	2	1	Inverso
2	1	1	1	Pseudo-Inverso
3	2	2	1	Inverso
4	2	1	1	Pseudo-Inverso

As configurações 1 e 2 são aplicadas ao Modelo 1, esquematizado na Figura 4.1. Na configuração 1 considerou-se como se fossem aplicadas duas forças ao modelo na mesma direção, uma na massa M_1 e outra na massa M_2 . Entretanto, a força aplicada na massa M_2 é nula e isso foi considerado com o objetivo de se obter uma matriz FRF quadrada e desta forma realizar o cálculo utilizando o método inverso, sem a necessidade de aplicação da pseudo-inversa. Na configuração 2 considerou-se apenas a força aplicada na massa M_1 , tornando assim a matriz FRF retangular, requerendo a utilização do método pseudo-inverso.

Os valores assumidos para o sistema do Modelo 1 são:

$$\begin{array}{lll}
 M_1 = 100 \text{ kg} & K_1 = 40 \text{ kN/m} & C_1 = 40 \text{ Ns/m} \\
 M_2 = 50 \text{ kg} & K_2 = 100 \text{ kN/m} & C_2 = 20 \text{ Ns/m} \\
 & K_3 = 100 \text{ kN/m} & C_3 = 20 \text{ Ns/m}
 \end{array}$$

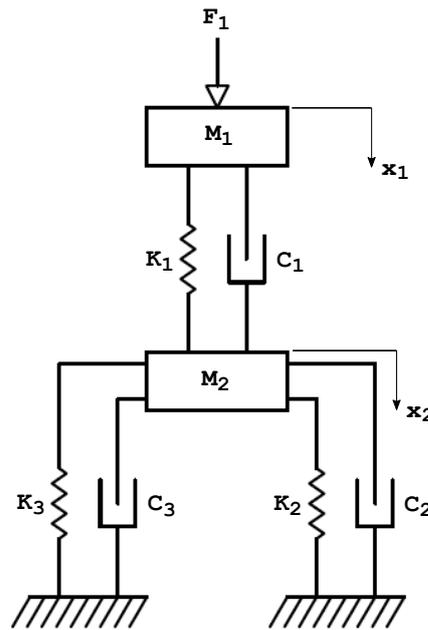


Figura 4.1 – Modelo analítico 1

A equação matricial que descreve o sistema apresentado no Modelo 1 pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

onde x é o deslocamento, H é a matriz FRF de receptância e F é a força aplicada.

Considerando a metodologia de reconstrução de carregamento aqui abordada, a força aplicada ao Modelo 1 é obtida através da Eq. 3.1. As forças são obtidas no método inverso pela equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Ha_{11} & Ha_{12} \\ Ha_{21} & Ha_{22} \end{bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

onde Ha é a matriz FRF de aceleração, o sobrescrito (+) indica a inversa generalizada e f é a força reconstruída.

Obtem-se, então, a resposta x_2 do sistema apresentado no Modelo 1 a partir da força reconstruída (f) pela equação:

$$x_2 = H_{21}f_1 + H_{22}f_2 \quad (4.3)$$

Como para a utilização da pseudo-inversa de Moore-Penrose é necessário que a matriz FRF seja retangular, a equação para a obtenção da força na configuração 2 de análise é reescrita como:

$$\{f_1\} = \begin{bmatrix} Ha_{11} \\ Ha_{21} \end{bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

onde o sobrescrito (+) indica a pseudo-inversa de Moore-Penrose.

A resposta x_2 do sistema então será obtida pela equação:

$$x_2 = H_{21}f_1 \quad (4.5)$$

Desta forma, obteve-se as respostas em deslocamento do sistema pelo método direto, conforme Eq. 4.1, onde se pode extrair as respostas em aceleração para montagem da matriz FRF e calcular o deslocamento x_2 a partir das forças reconstruídas com a utilização dos método inverso e pseudo-inverso.

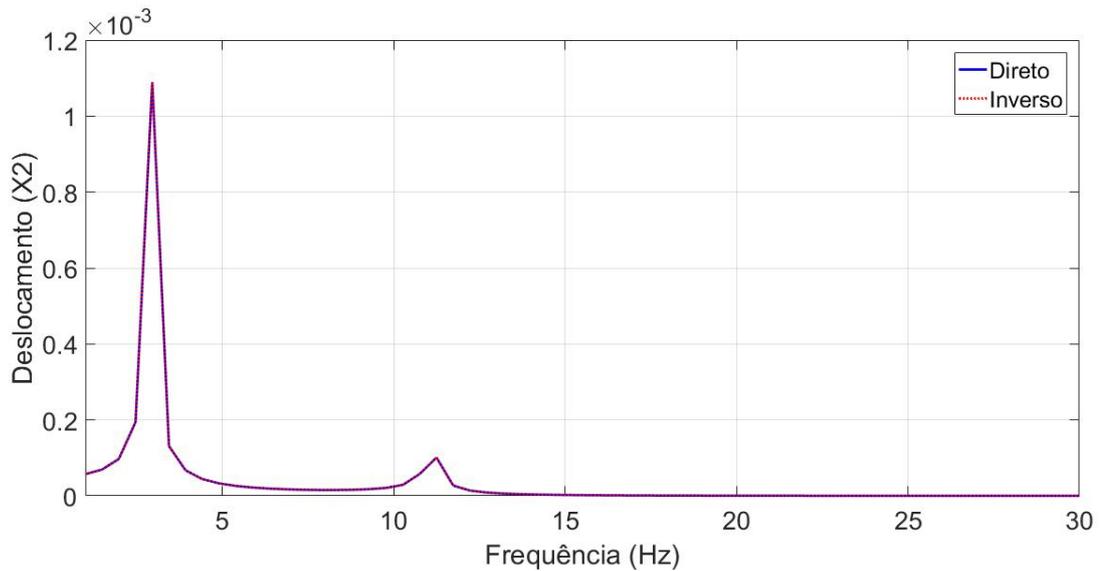


Figura 4.2 – Método inverso modelo 1

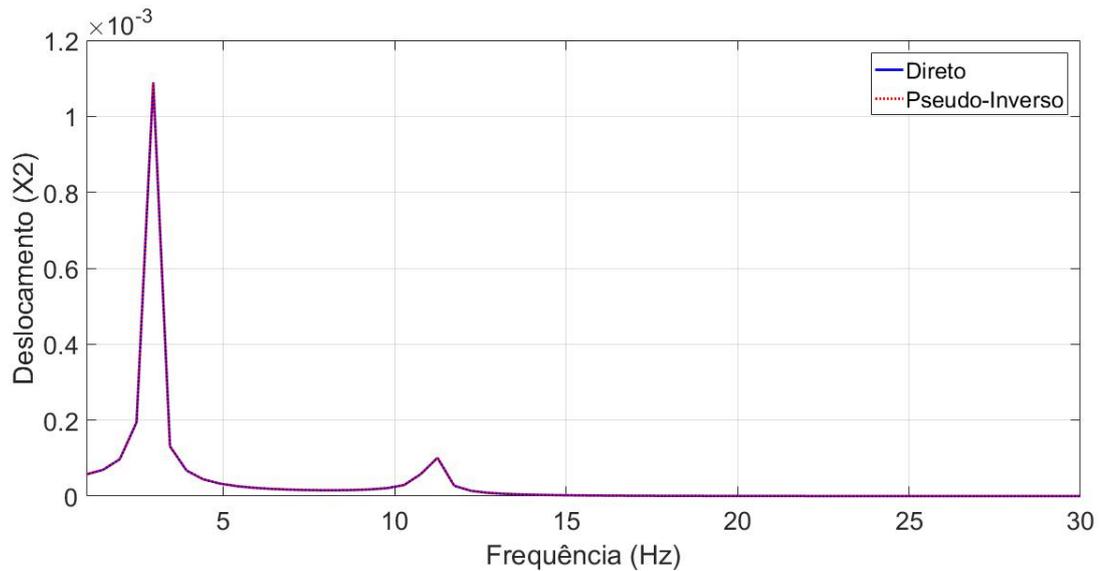


Figura 4.3 – Método pseudo-inverso modelo 1

As figuras 4.2 e 4.3 indicam, respectivamente, os resultados obtidos para as configurações 1 e 2 do Modelo 1. É possível notar que tanto o método inverso quanto o método pseudo-inverso coincidiram com a resposta do método direto.

As configurações 3 e 4 são aplicadas ao Modelo 2, esquematizado na Figura 4.4, e equivalem às configurações 1 e 2 respectivamente. Porém, na configuração 3 as forças consideradas são aplicadas nas massas M_2 e M_3 , sendo a força aplicada a massa M_2 nula, enquanto que na configuração 4 a força é aplicada na massa M_3 somente.

Os valores assumidos para o sistema do Modelo 2 são:

$$\begin{array}{lll}
 M_1 = 100 \text{ kg} & K_1 = 40 \text{ kN/m} & C_1 = 40 \text{ Ns/m} \\
 M_2 = 10 \text{ kg} & K_2 = 1000 \text{ kN/m} & C_2 = 10 \text{ Ns/m} \\
 M_3 = 50 \text{ kg} & K_3 = 1000 \text{ kN/m} & C_3 = 20 \text{ Ns/m} \\
 & K_4 = 50 \text{ kN/m} & C_4 = 100 \text{ Ns/m}
 \end{array}$$

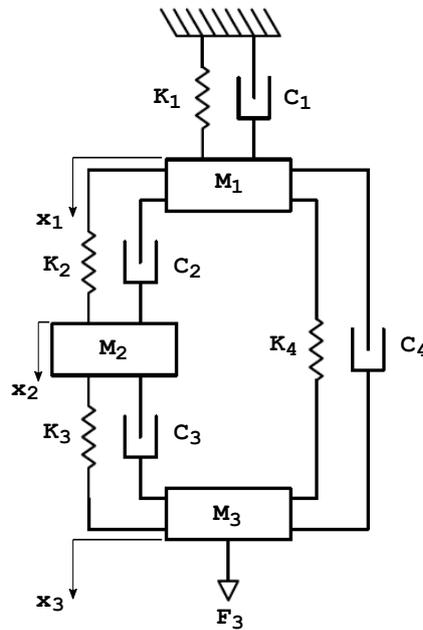


Figura 4.4 – Modelo analítico 2

A equação matricial que descreve o sistema apresentado no Modelo 2 pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Para o Modelo 2 as forças são obtidas no método inverso pela equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Ha_{12} & Ha_{13} \\ Ha_{22} & Ha_{23} \end{bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

A resposta x_1 do sistema é obtida a partir da força reconstruída (f) pela equação:

$$x_1 = H_{12}f_2 + H_{13}f_3 \quad (4.8)$$

A equação para a obtenção da força na configuração 4 de análise é reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Ha_{12} & Ha_{13} \\ Ha_{22} & Ha_{23} \\ Ha_{32} & Ha_{33} \end{bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

A resposta x_1 do sistema então será obtida pela equação:

$$x_1 = H_{13}f_3 \quad (4.10)$$

Assim, as respostas em deslocamento do sistema pelo método direto foram obtidas, conforme Eq. 4.1, e comparadas com o deslocamento x_1 calculado a partir das forças reconstruídas com a utilização dos método inverso e pseudo-inverso.

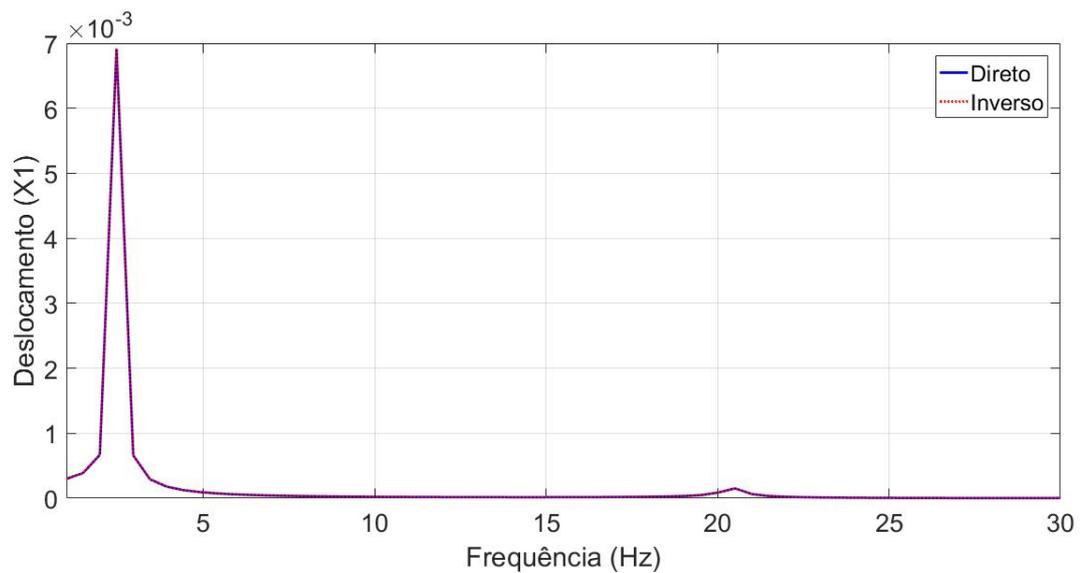


Figura 4.5 – Método inverso modelo 2

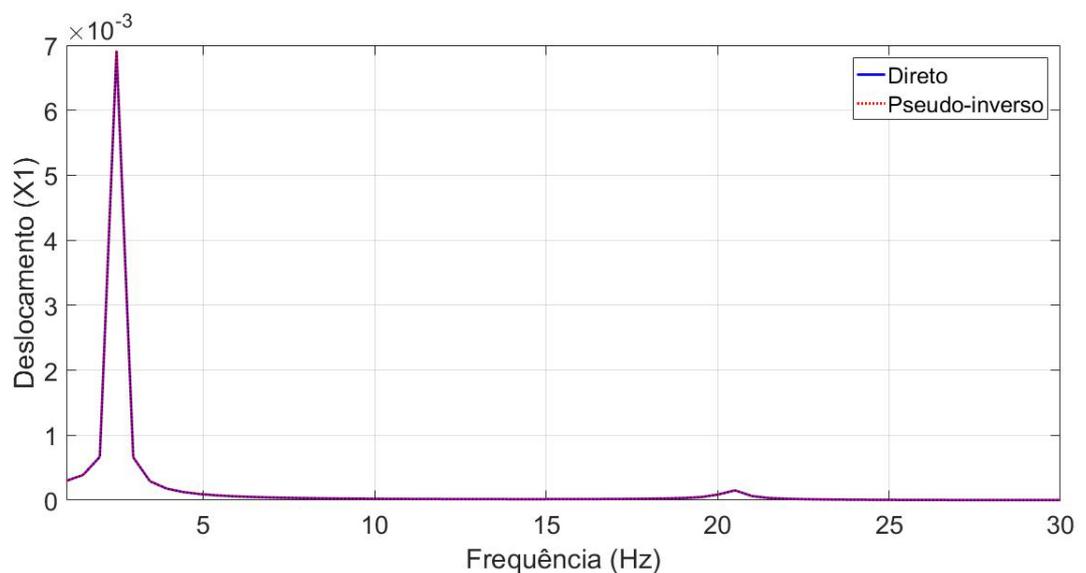


Figura 4.6 – Método pseudo-inverso modelo 2

Nas figuras 4.5 e 4.6 podem ser visualizados os respectivos resultados obtidos para as configurações 3 e 4 do modelo 2. Neste caso também obteve-se resultados satisfatórios para as condições de análise.

4.2 Modelagem Numérica

Foram avaliados na modelagem numérica três modelos de estudo com propriedades materiais apresentadas na Seção 3.1.1, com condições de contorno do tipo engastada-livre. Também foi considerado um valor constante de 0.01 para o amortecimento estrutural. Os modelos de estudos são: viga com seção constante, elasticidade bidimensional com seção constante e elasticidade bidimensional com seção variável e com furos na geometria. As configurações utilizadas para cada modelos estão listas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Configurações modelos numéricos

C	Modelo	N°EM	N°POR	N°FC	Tipo de força	N°FNNA	Avaliação do <i>CN</i>
1	Viga	40	2	1	Seno intervalado	1	Não
2	Viga	16	16	1	Senoidal	1	Não
3	Viga	16	16	1	Multi-seno	1	Não
4	Viga	16	16	1	Seno intervalado	1	Não
5	Viga	16	16	1	Degrau	1	Não
6	Viga	16	6	2	Senoidal	1	Sim
7	Viga	16	6	2	Senoidal	2	Sim
8	Viga	16	6	2	Multi-seno	1	Sim
9	Viga	16	6	2	Seno intervalado	1	Sim
10	Viga	16	6	2	Degrau	1	Sim
11	Elasticidade 2D	600	7	3	Senoidal	1	Sim
12	Elasticidade 2D	600	7	3	Multi-seno	1	Sim
13	Elasticidade 2D	600	7	3	Seno intervalado	1	Sim
14	Elasticidade 2D	600	7	3	Degrau	1	Sim
15	Elasticidade 2D	853	7	3	Senoidal	1	Sim
16	Elasticidade 2D	853	7	3	Multi-seno	1	Sim
17	Elasticidade 2D	853	7	3	Seno intervalado	1	Sim
18	Elasticidade 2D	853	7	3	Degrau	1	Sim

C - Configuração N°EM - Número de elementos do modelo

N°POR - Número de pontos de obtenção das respostas N°FC - Número de forças consideradas

N°FNNA - Número de forças não-nulas aplicadas

4.2.1 Caso 1

O primeiro caso é constituído da configuração 1, o qual é composto por uma força e dois pontos de medição como ilustrado na Figura 4.7. Os pontos de medição escolhidos para obtenção das respostas são equidistantes entre si, esta distância equivale à $\frac{L}{3}$ do comprimento total (L) da viga. A análise harmônica para montagem da matriz FRF é realizada para a faixa de frequência de 0 – 2200 Hz. O intervalo de tempo utilizado na análise transiente foi de 0.000454 segundos. O modelo possui 40 elementos do tipo *CBEAM* [Hyperworks, 2013] com dois nós por elemento e três graus de liberdade (u , v e

θ). As dimensões do modelo são: $1 \times 0.01 \times 0.01$ ($L \times b \times e$).

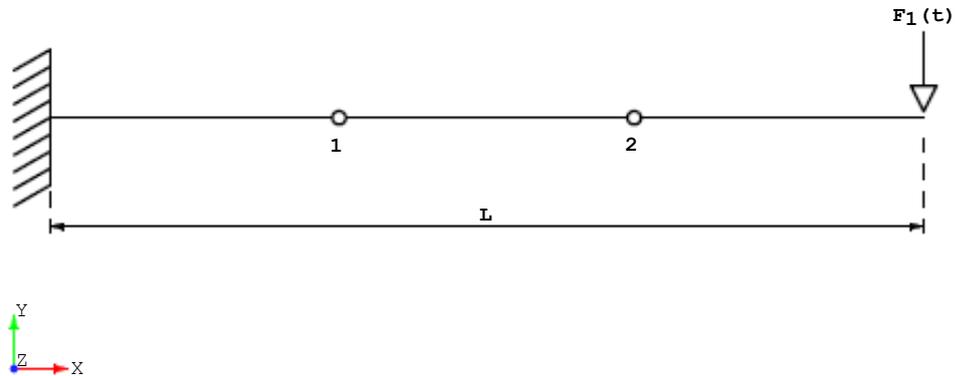


Figura 4.7 – Caso 1.

A força aplicada na extremidade livre da viga é reconstruída a partir da seguinte equação:

$$\{f_1\} = \begin{bmatrix} Ha_{11} \\ Ha_{21} \end{bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

A transformação entre os domínios da frequência e do tempo foi feita através da utilização das ferramentas *FFT* e *IFFT* do *software* matemático *MATLAB*[®].

4.2.1.1 Configuração 1

O carregamento utilizado nesta configuração é um seno aplicado em um intervalo de tempo igual a 0,4 segundos na direção Y e os resultados são extraídos a partir dos pontos 1 e 2.

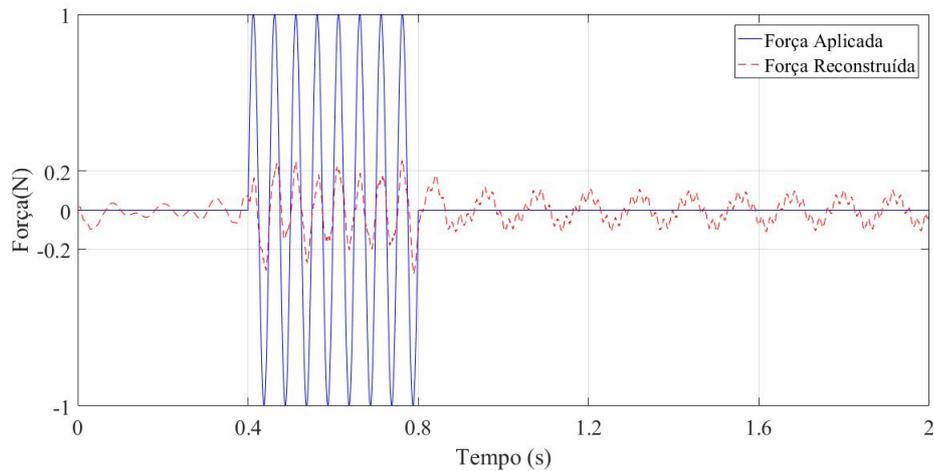


Figura 4.8 – Configuração 1: comparação entre força aplicada e força reconstruída.

A Figura 4.8 mostra uma comparação entre a força aplicada e a força reconstruída, na qual pode-se notar que o método conseguiu reconstruir apenas cerca de 20% da magnitude da força aplicada. No entanto, apesar de apresentar ruído, o tempo de aplicação da carga do sistema foram capazes de serem identificados com esta metodologia.

A partir deste resultado e como o método abordado nesta dissertação utiliza-se de transformações entre dois domínios: do tempo e da frequência, conforme mostrado nos capítulos anteriores. Fez-se necessário uma verificação da utilização das funções *FFT* e *IFFT* do *software MATLAB*[®]. Dessa forma, com o intuito de garantir a correta utilização dessas funções, respeitando as frequências de Nyquist e demais normalizações dos sinais de entrada, criou-se um gerador de sinais.

Alguns exemplos foram submetidos às funções *FFT* e *IFFT* geradas para as transformações entre os dois domínios antes de aplicar na metodologia estudada. Estas funções são ilustradas nas figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12.

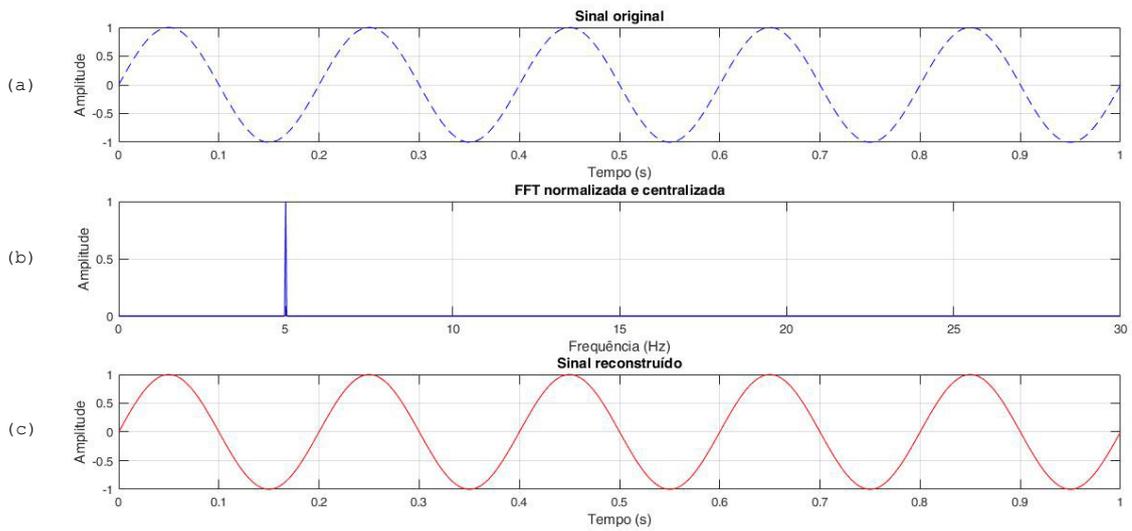


Figura 4.9 – Exemplo 1: Sinal senoidal. (a) sinal original, (b) após FFT e (c) após $IFFT$.

A Figura 4.9 ilustra um sinal do tipo senoidal, onde um seno com frequência de 5 Hz é submetido à transformação entre os dois domínios.

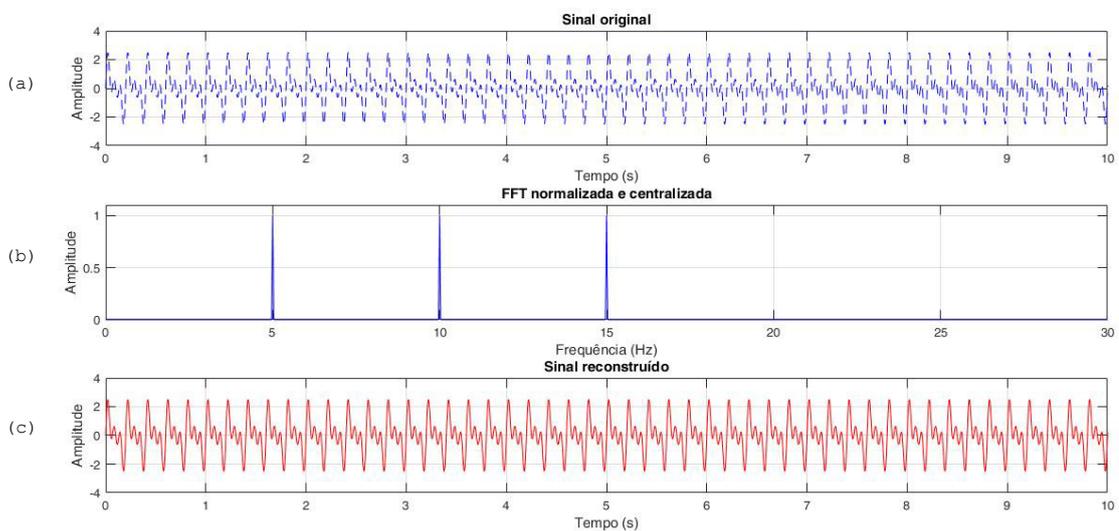


Figura 4.10 – Exemplo 2: Sinal multiseno. (a) sinal original, (b) após FFT e (c) após $IFFT$.

A Figura 4.10 ilustra um sinal do tipo multiseno, onde três senos com frequências de 5, 10 e 15 Hz são somados e submetidos à transformação entre os dois domínios.

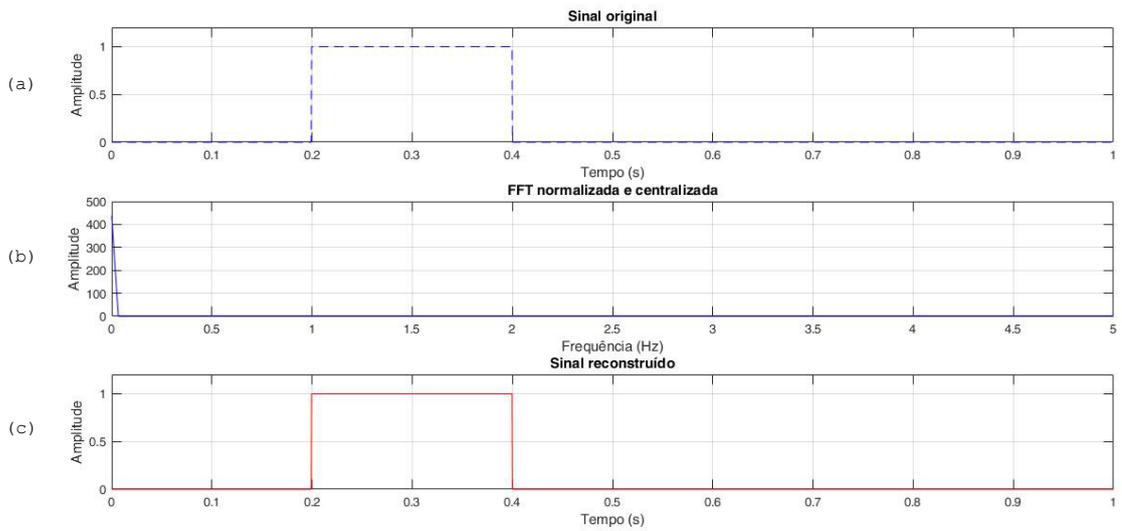


Figura 4.11 – Exemplo 3: Sinal do tipo degrau. (a) sinal original, (b) após FFT e (c) após $IFFT$.

A Figura 4.11 ilustra um sinal do tipo degrau unitário com intervalo igual a 0,2 segundos submetido à transformação entre os dois domínios.

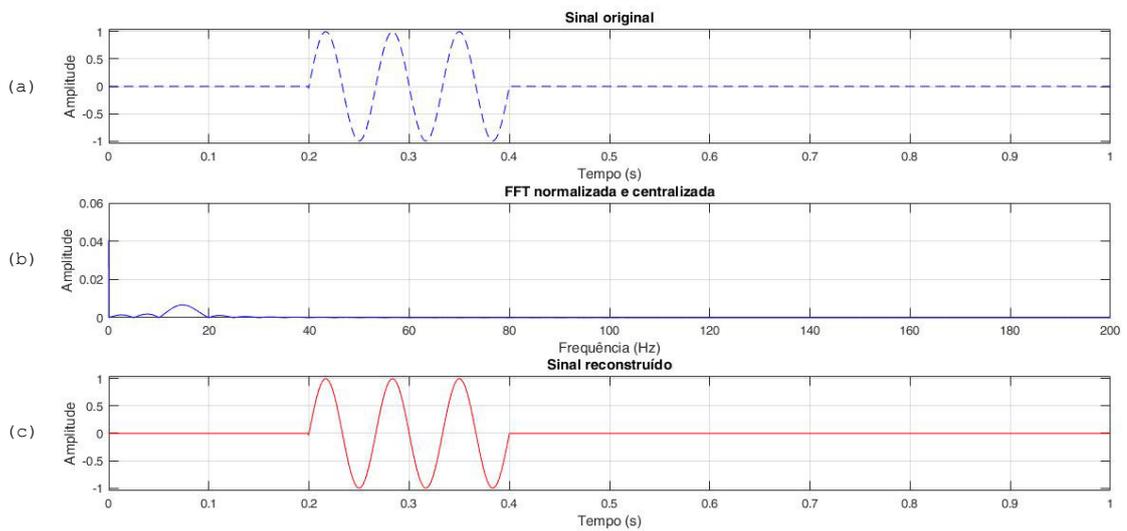


Figura 4.12 – Exemplo 4: Sinal do tipo seno intervalado. (a) sinal original, (b) após FFT e (c) após $IFFT$.

A Figura 4.12 ilustra um sinal do tipo seno aplicado em um intervalo de tempo igual a 0,2 segundos e com frequência de 15 Hz submetido à transformação entre os dois

domínios.

A partir dos exemplos mostrados é possível observar que os sinais após as transformações correspondem aos sinais originais garantindo a correta utilização das funções criadas a partir das funções *FFT* e *IFFT* no *software MATLAB*[®]. Sendo assim, o código gerado pode ser utilizado para as transformações entre os domínios do tempo e da frequência requeridas pelo método de reconstrução de carregamento.

4.2.2 Caso 2

O segundo caso de análise para reconstrução de força é constituído das configurações 2 à 5, as quais são compostas por uma força e desesseis pontos de medição como ilustrado na Figura 4.13. Os pontos de medição escolhidos para obtenção das respostas são equidistantes entre si, e esta distância equivale a $\frac{L}{17}$ do comprimento total (L) da viga. A análise harmônica para montagem da matriz *FRF* é realizada para a faixa de frequências 0 – 1024 Hz. O intervalo de tempo utilizado na análise transiente foi de 0.00098 segundos. A condição de contorno do modelo de viga é engastada-livre. A força é aplicada na direção Y e os resultados são extraídos dos desesseis pontos diferentes do local de aplicação da força. O modelo possui 16 elementos do tipo *CBEAM* com dois nós por elemento e três graus de liberdade (u , v e θ) [Hyperworks, 2013]. As dimensões do modelo são: $1 \times 0.01 \times 0.01$ ($L \times b \times e$).

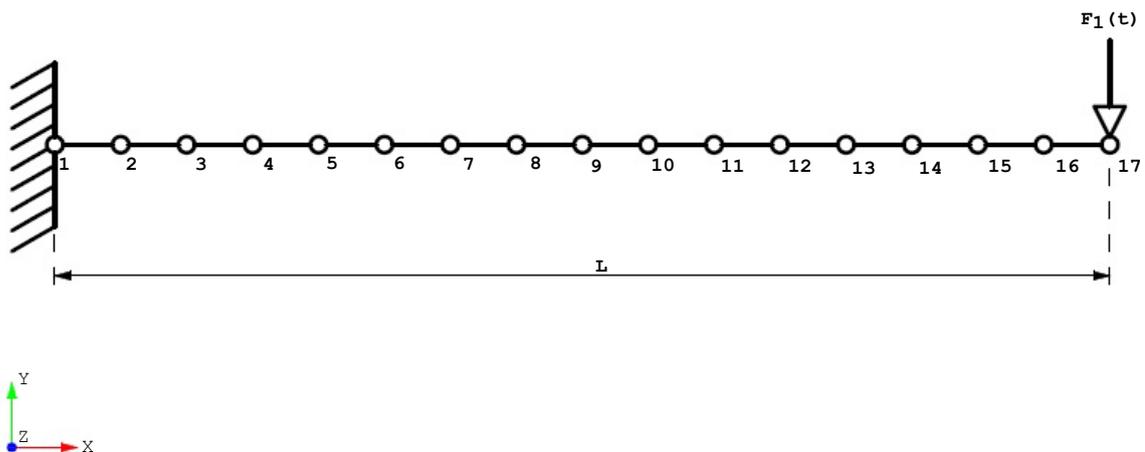


Figura 4.13 – Caso 2.

A força aplicada na extremidade livre da viga é reconstruída a partir da seguinte equação:

$$\{f_1\} = \begin{bmatrix} Ha_{11} \\ Ha_{21} \\ Ha_{31} \\ Ha_{41} \\ \vdots \\ Ha_{161} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ \vdots \\ Y_{16} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

4.2.2.1 Configuração 2

As figuras 4.14 e 4.15 ilustram os resultados obtidos no domínio do tempo e da frequência respectivamente a partir do método de estudo para um carregamento do tipo senoidal.

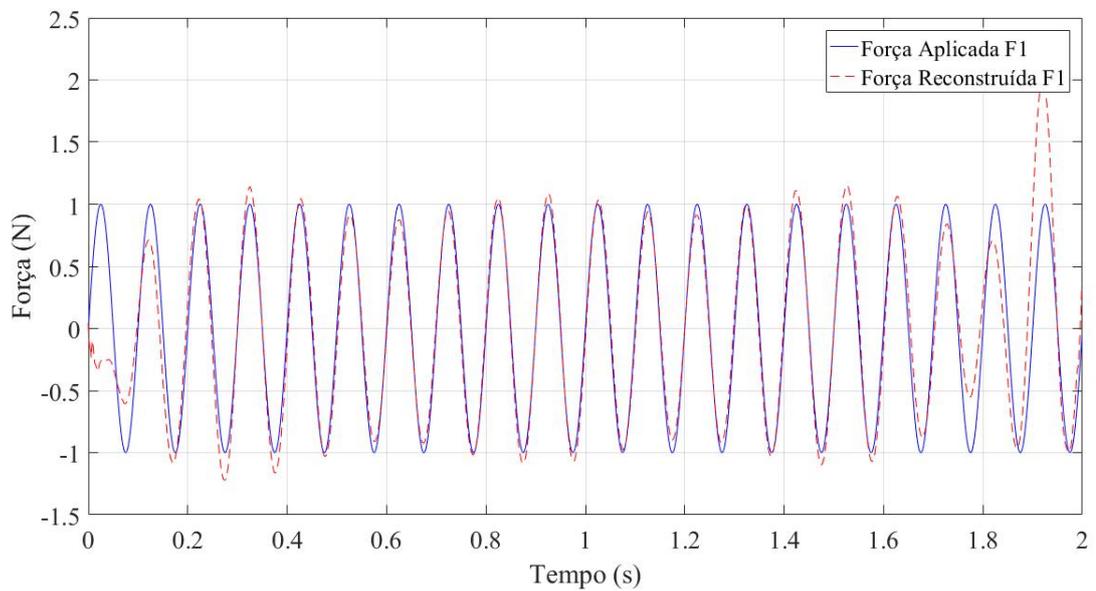


Figura 4.14 – Configuração 2: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

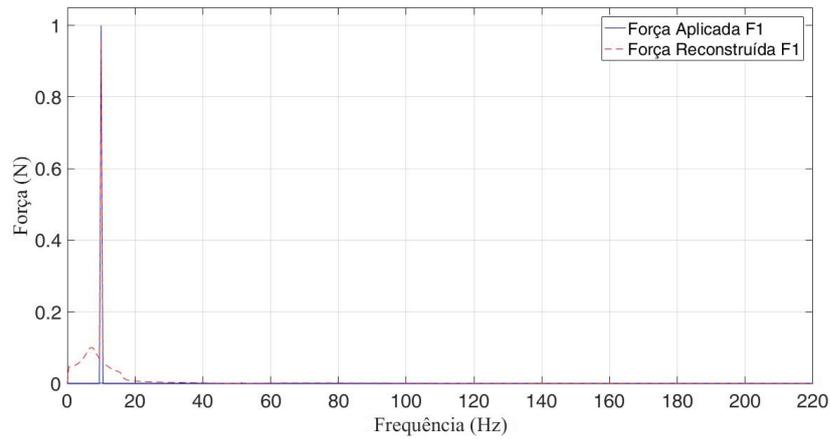


Figura 4.15 – Configuração 2: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Na Figura 4.15 é possível notar uma pequena amplitude visível próximo aos 10 Hz, porém a força está bem caracterizada no domínio da frequência. Dessa forma, apesar de conter ruído, o método utilizado para resolução do problema conseguiu reconstruir o carregamento aplicado a este tipo de modelo com esta configuração.

4.2.2.2 Configuração 3

Um carregamento do tipo multiseno também foi testado, como pode ser visto nas figuras 4.16 e 4.17 os resultados obtidos no domínio do tempo e da frequência, respectivamente.

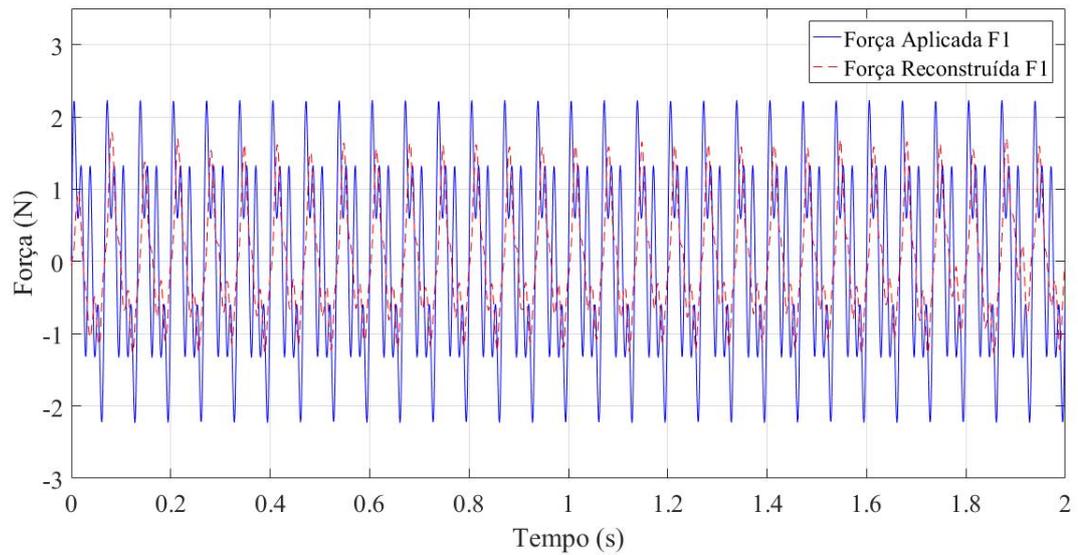


Figura 4.16 – Configuração 3: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

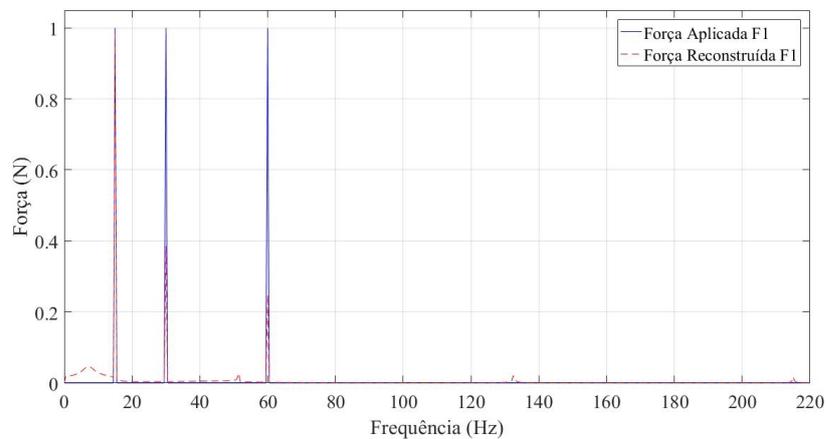


Figura 4.17 – Configuração 3: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Neste caso a pequena amplitude visível próxima aos 10 Hz também está presente, como pode ser visto na Figura 4.17, porém o carregamento multisenso aplicado trata-se de três senos com frequências de 15, 30 e 60 Hz. Nota-se com este caso que as frequências puderam ser identificadas, porém a amplitude foi mantida apenas na frequência mais baixa presente neste carregamento.

4.2.2.3 Configuração 4

A fim de avaliar a capacidade do método em carregamentos não periódicos aplicou-se um carregamento tipo seno em um intervalo de tempo de 0,2 segundos como ilustrado na Figura 4.18, descaracterizando assim a periodicidade presente no sinal.

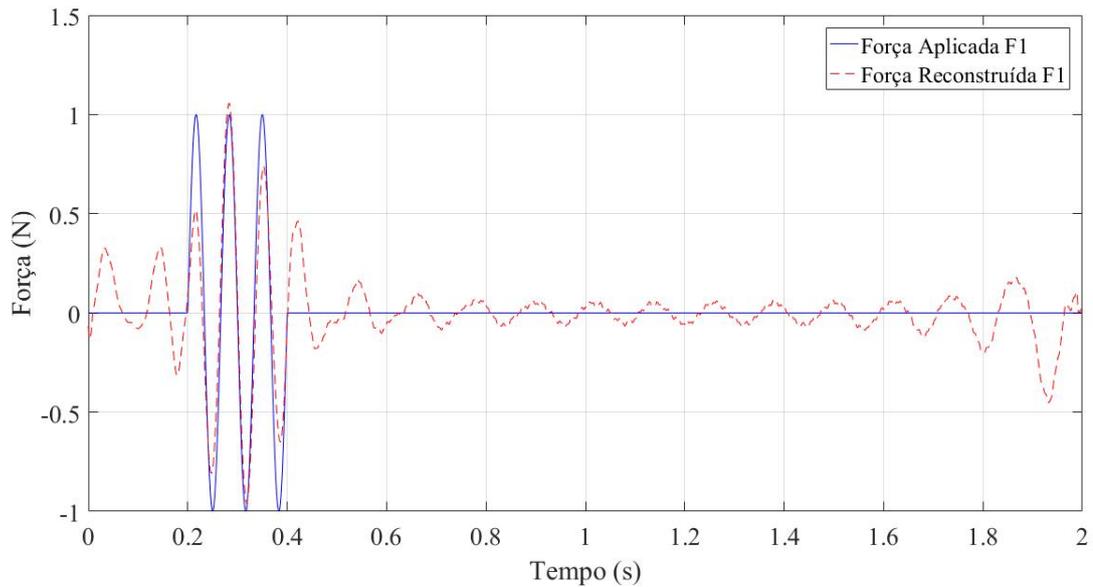


Figura 4.18 – Configuração 4: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

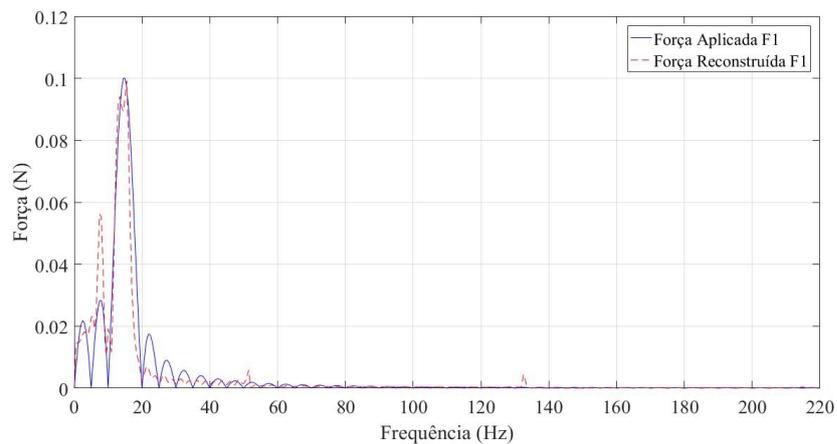


Figura 4.19 – Configuração 4: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Na Figura 4.19 se pode perceber alguns picos na força reconstruída, e estes pi-

cos não fazem parte da força aplicada mas são diretamente relacionados às frequências naturais do modelo. Esta relação é avaliada a partir do Caso 3.

Diante do exposto, o método conseguiu reconstruir o carregamento, isto é, a frequência e o tempo de aplicação do carregamento foram capturados, porém houve uma pequena perda de amplitude do sinal. Esta perda pode ser justificada pela não periodicidade do sinal que faz com que ocorra o fenômeno *leakage*, como mostrado na seção 2.4.4.

4.2.2.4 Configuração 5

As figuras 4.20 e 4.21 ilustram um caso com força aplicada do tipo degrau no domínio do tempo e da frequência respectivamente.

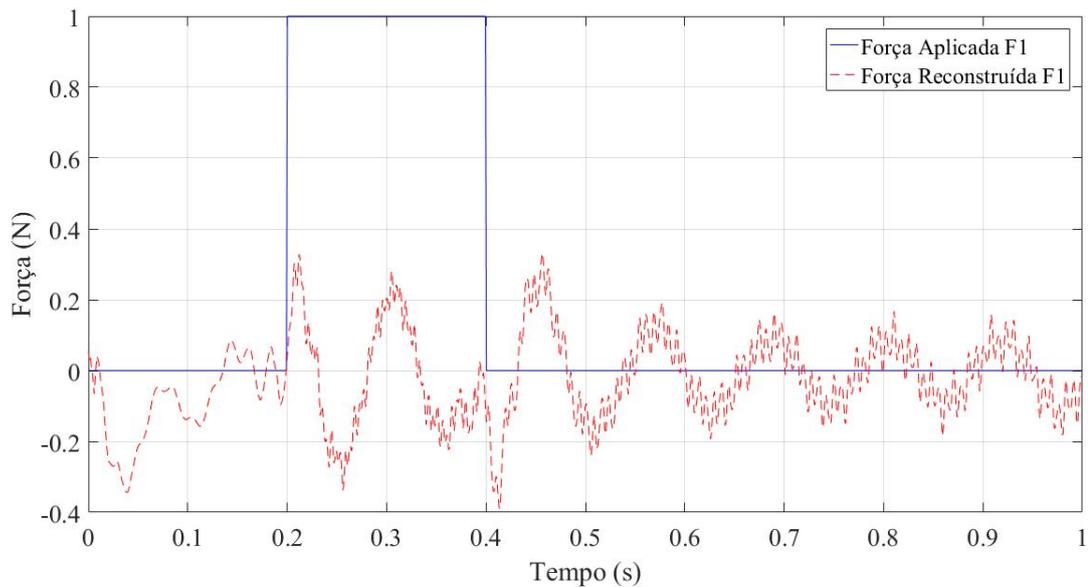


Figura 4.20 – Configuração 5: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

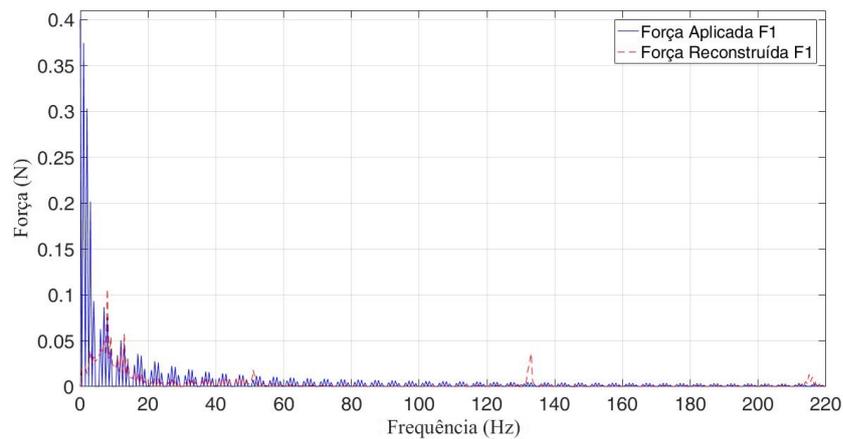


Figura 4.21 – Configuração 5: comparativo entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Nesta análise é possível notar que o intervalo de tempo de aplicação do carregamento é delimitado, porém a forma e amplitude do carregamento não foram mantidas. Estes tipos de carregamento são mais complexos e tendem a excitar inúmeras frequências naturais da estrutura. O não conhecimento prévio de boa parte dessas frequências pode gerar perda de informações importantes do carregamento aplicado. Além disso, conforme abordado na subseção anterior, a não periodicidade do sinal também pode gerar o *leakage*, não sendo possível realizar a reconstrução de carregamento de forma satisfatória.

4.2.3 Caso 3

O caso 3 corresponde às configurações 6 a 10, no qual as condições de análise utilizadas para este caso são as mesmas utilizadas no caso anterior, porém aqui são aplicadas duas forças ao modelo. São utilizados 6 pontos para medição das respostas, como ilustrado na Figura 4.22.

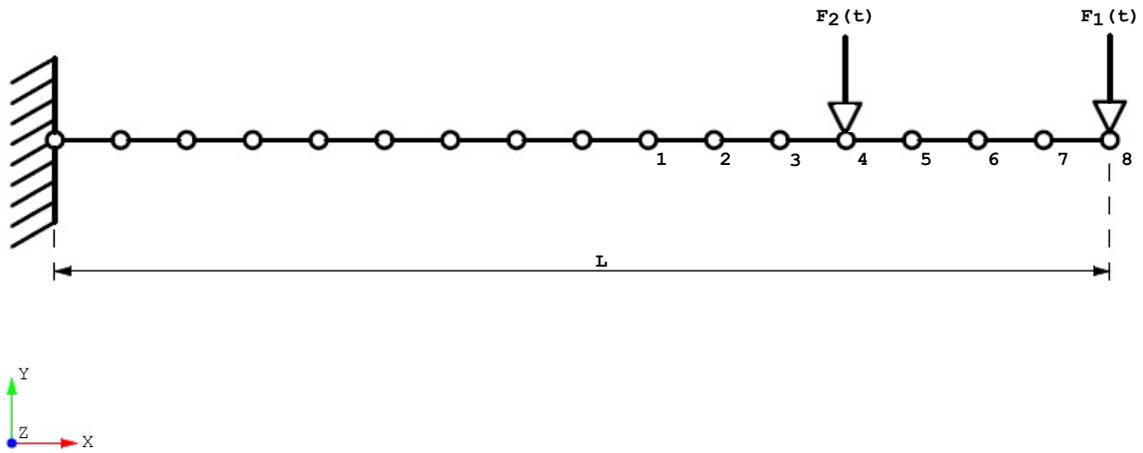


Figura 4.22 – Caso 3.

As forças aplicadas no modelo são reconstruídas a partir da seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Ha_{11} & Ha_{12} \\ Ha_{21} & Ha_{22} \\ Ha_{31} & Ha_{32} \\ Ha_{51} & Ha_{52} \\ Ha_{61} & Ha_{62} \\ Ha_{71} & Ha_{72} \end{bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

A partir deste caso calculou-se o CN da matriz FRF do modelo para avaliar a metodologia com alguns carregamentos aplicados nas zonas de ressonância e anti-ressonância bem como em região intermediária a essas zonas. As zonas de ressonância e anti-ressonância correspondem respectivamente aos picos e aos vales presentes no gráfico do CN .

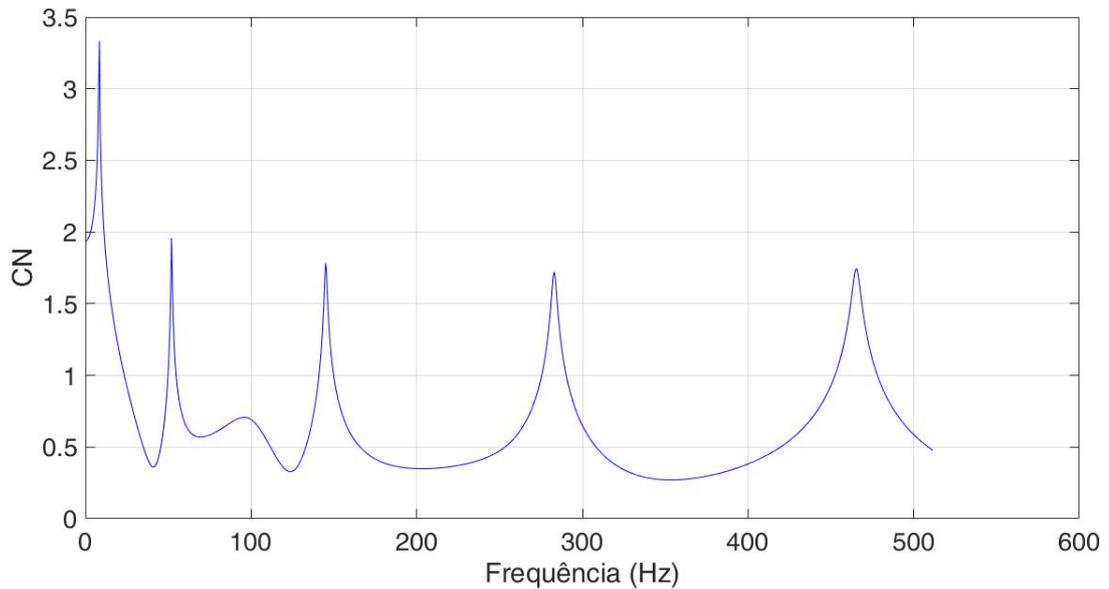


Figura 4.23 – Gráfico do número de condicionamento (CN) da matriz FRF no domínio da frequência para o caso 3.

Também foi avaliado, a partir deste caso, a influência da frequência de excitação do primeiro modo de vibração, que para este modelo é de aproximadamente 8,35 Hz.

4.2.3.1 Configuração 6

Na configuração 6 a força aplicada F_1 é do tipo senoidal e a força F_2 é considerada nula. As figuras 4.24 e 4.25 ilustram o caso no domínio do tempo e da frequência respectivamente em uma frequência escolhida a partir de um valor intermediário do gráfico do CN (Figura 4.23).

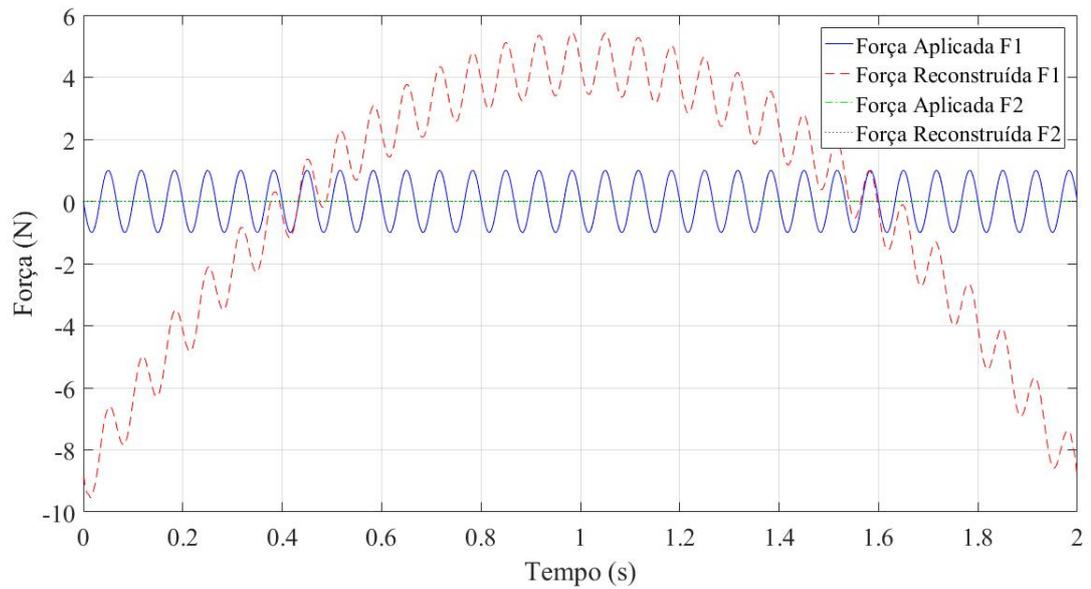


Figura 4.24 – Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

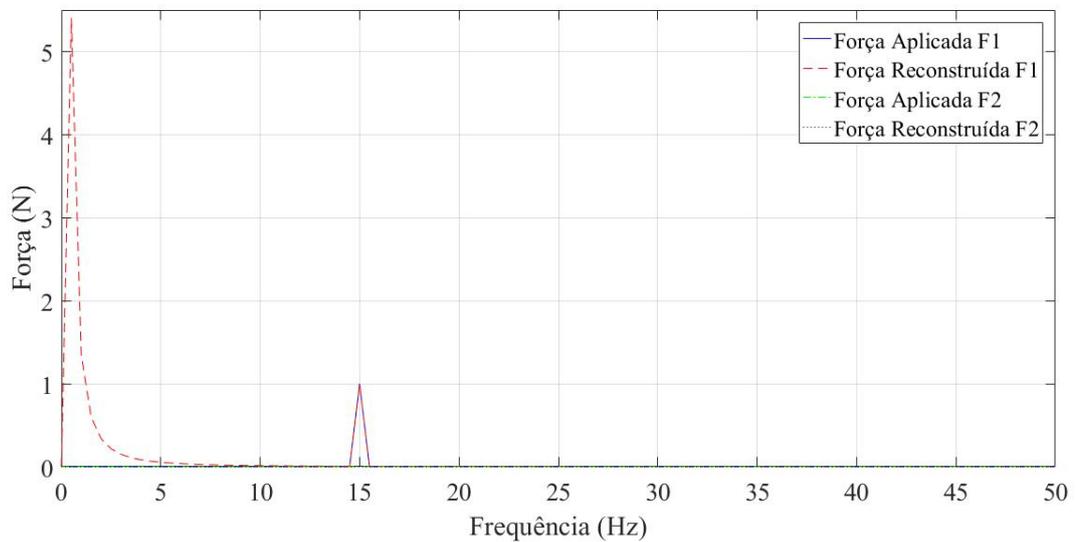


Figura 4.25 – Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Nas figuras 4.26 e 4.27 é ilustrado o mesmo caso anterior porém desconsiderando as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração, isto é, para o cálculo da reconstrução de carregamento foram utilizados valores a partir de 9 Hz.

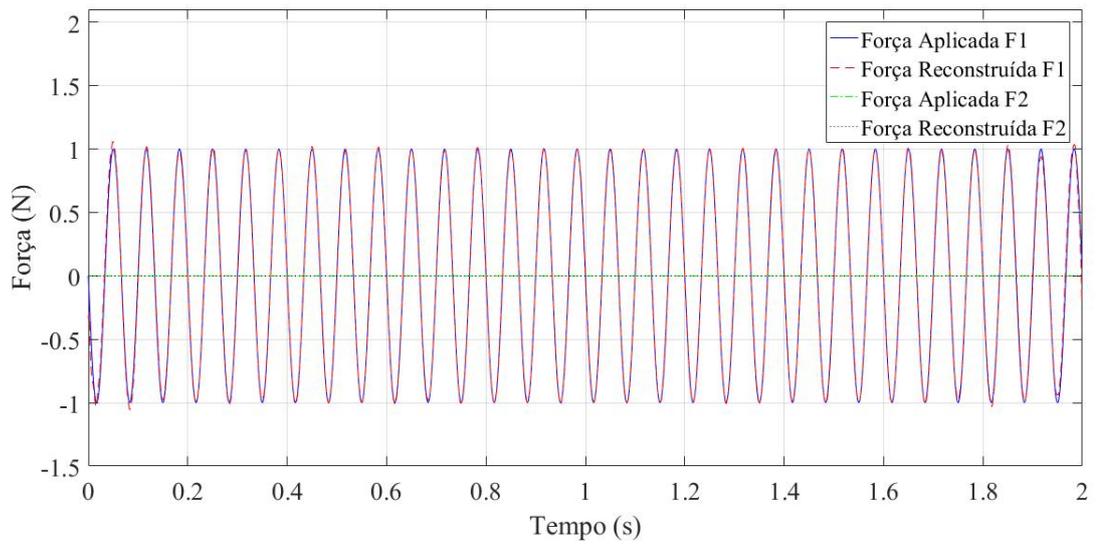


Figura 4.26 – Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

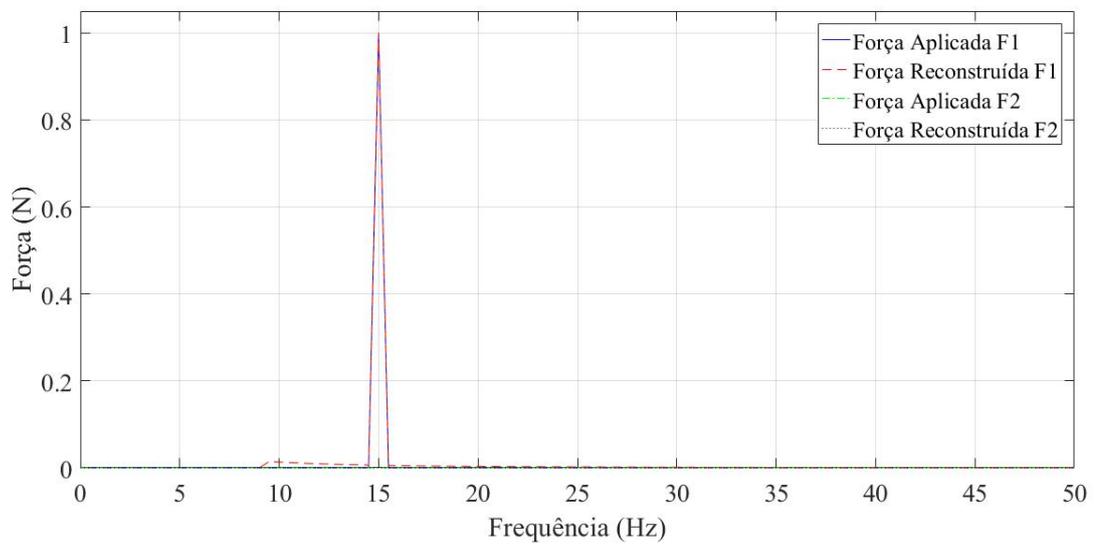


Figura 4.27 – Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

As figuras 4.28 e 4.29 ilustram um caso no qual a frequência de excitação do carregamento foi escolhida a partir de um valor de anti-ressonância. O valor escolhido foi de 52 Hz e corresponde ao primeiro vale presente no gráfico do CN (Figura 4.23).

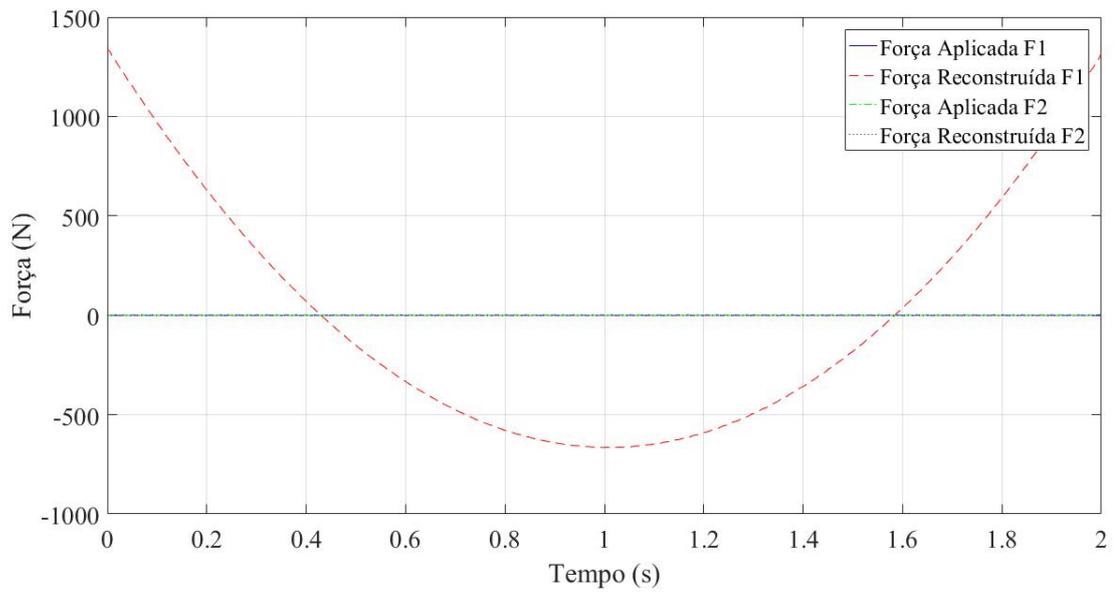


Figura 4.28 – Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstituída no domínio do tempo.

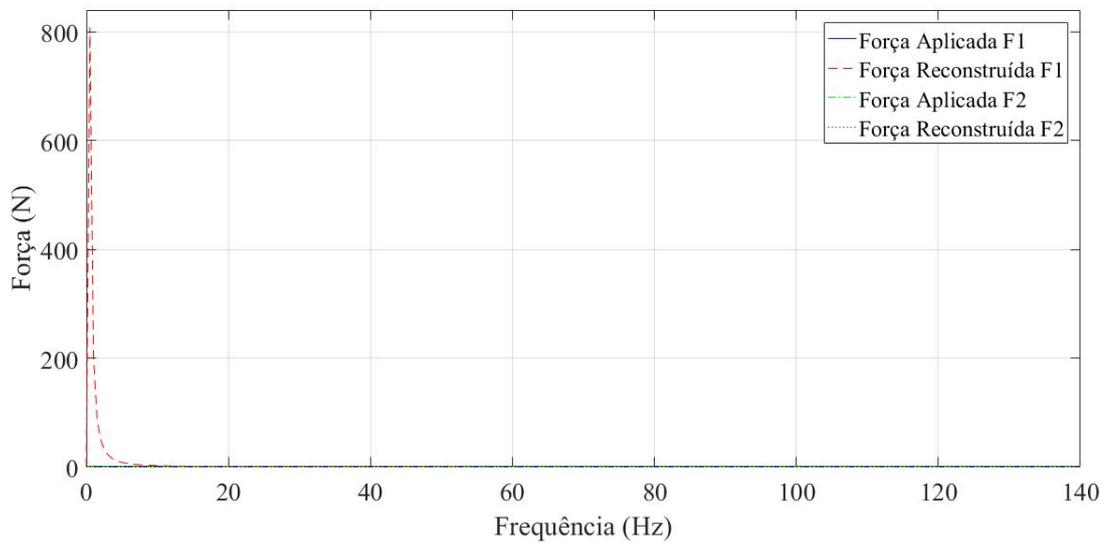


Figura 4.29 – Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstituída no domínio da frequência.

Nas figuras 4.30 e 4.31 é ilustrado o mesmo caso anterior porém desconsiderando as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

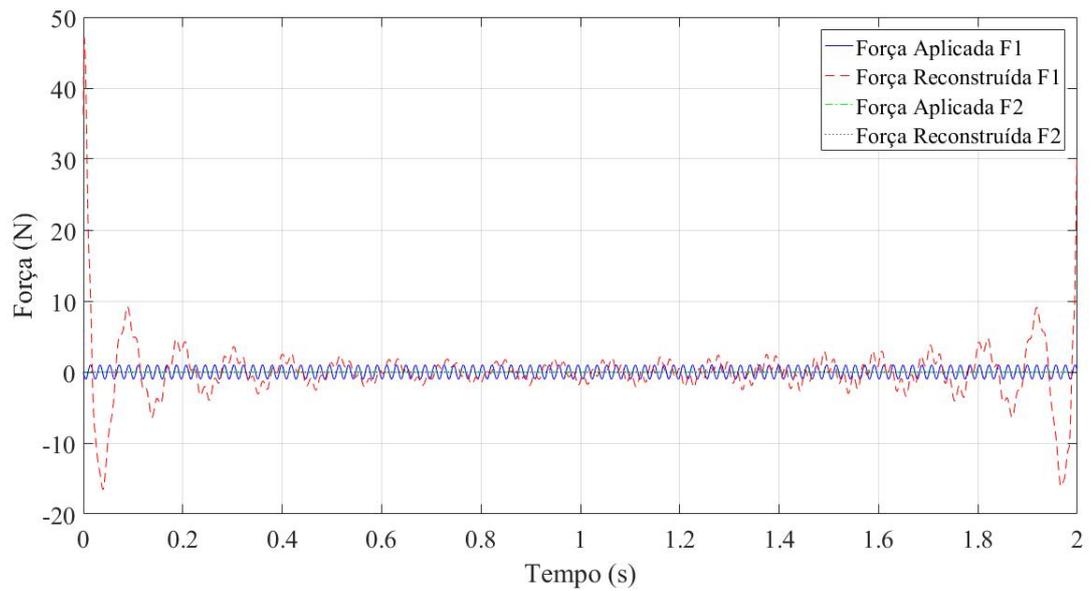


Figura 4.30 – Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

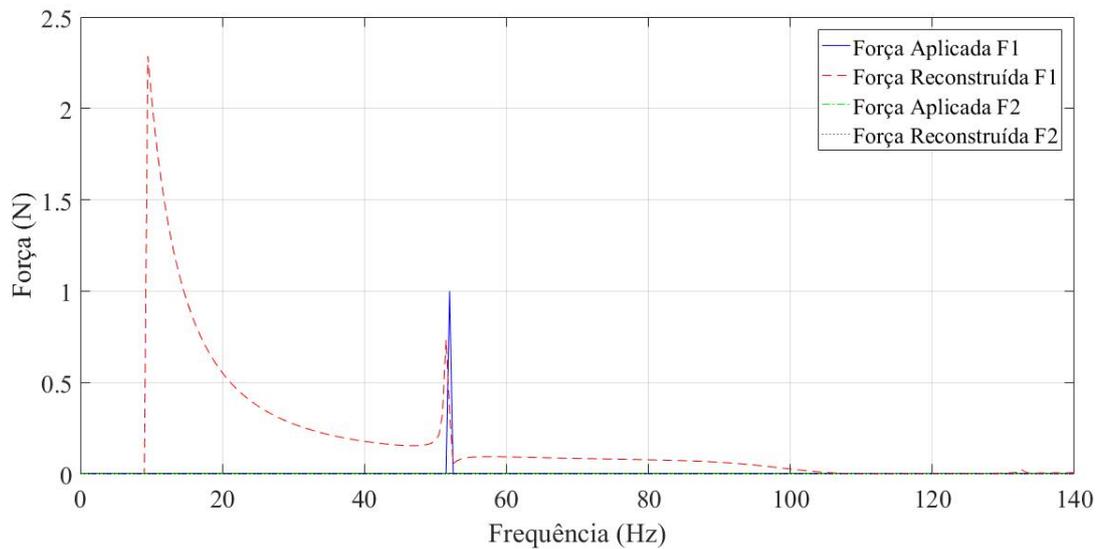


Figura 4.31 – Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

As figuras 4.32 e 4.33 ilustram o caso com força aplicada em uma frequência escolhida a partir de um valor de ressonância. O valor escolhido foi de 125 Hz e corresponde ao terceiro pico presente no gráfico do CN (Figura 4.23).

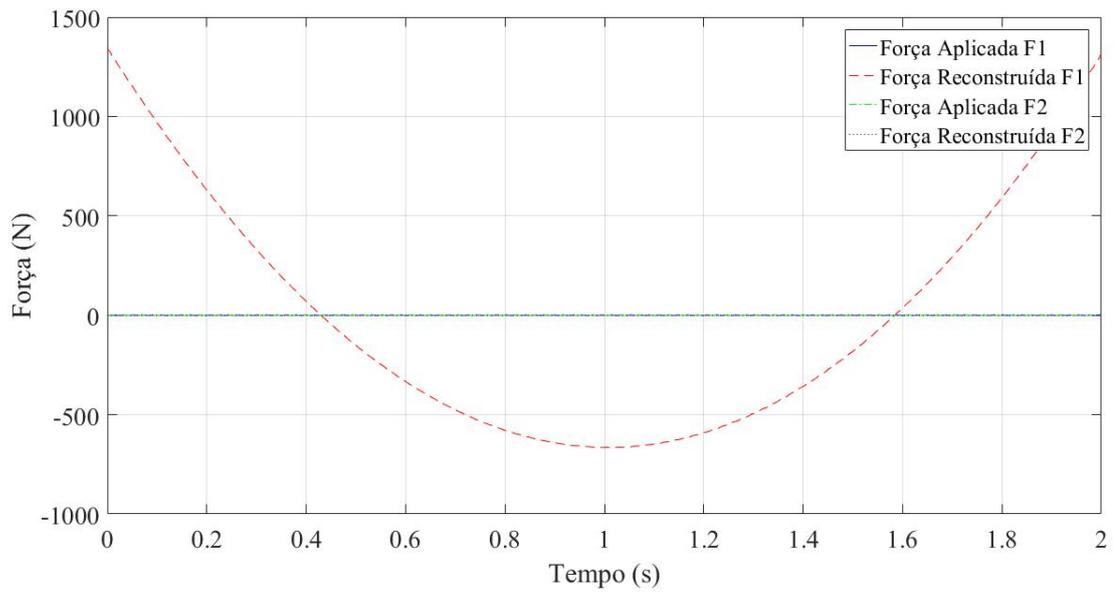


Figura 4.32 – Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

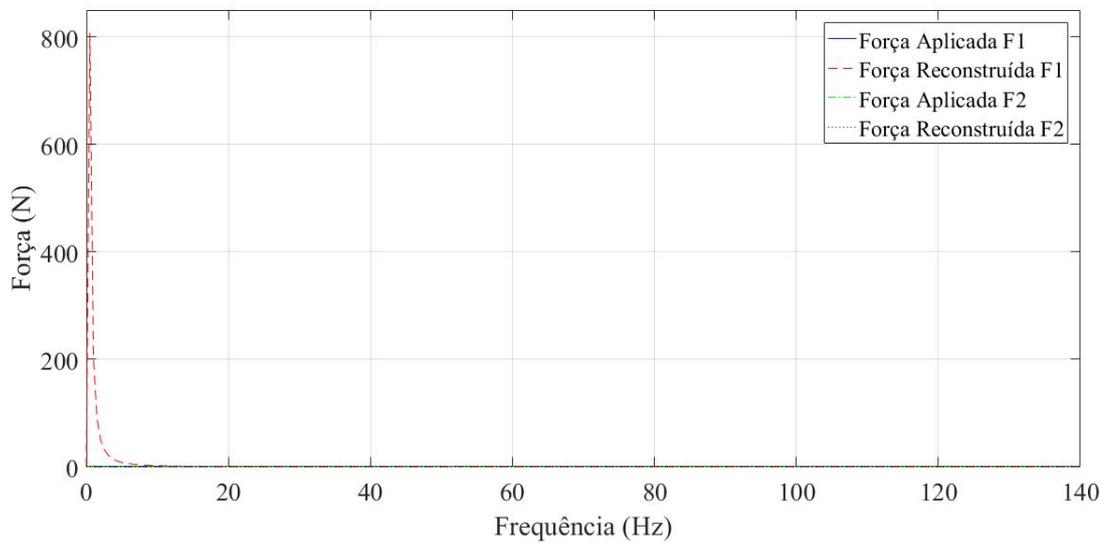


Figura 4.33 – Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

O mesmo caso é ilustrado nas figuras 4.34 e 4.35 desconsiderando as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

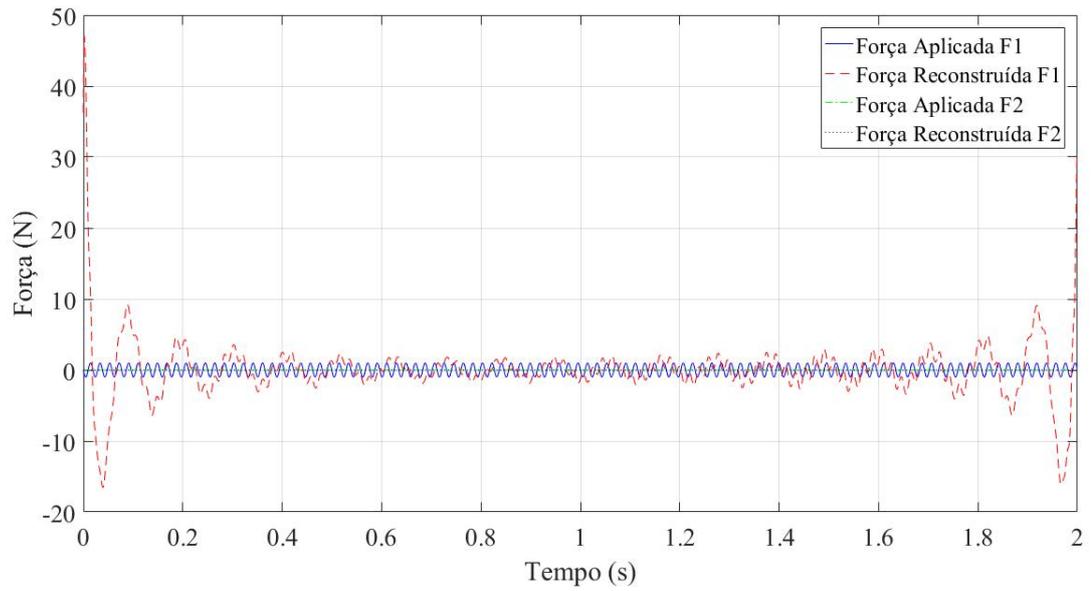


Figura 4.34 – Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

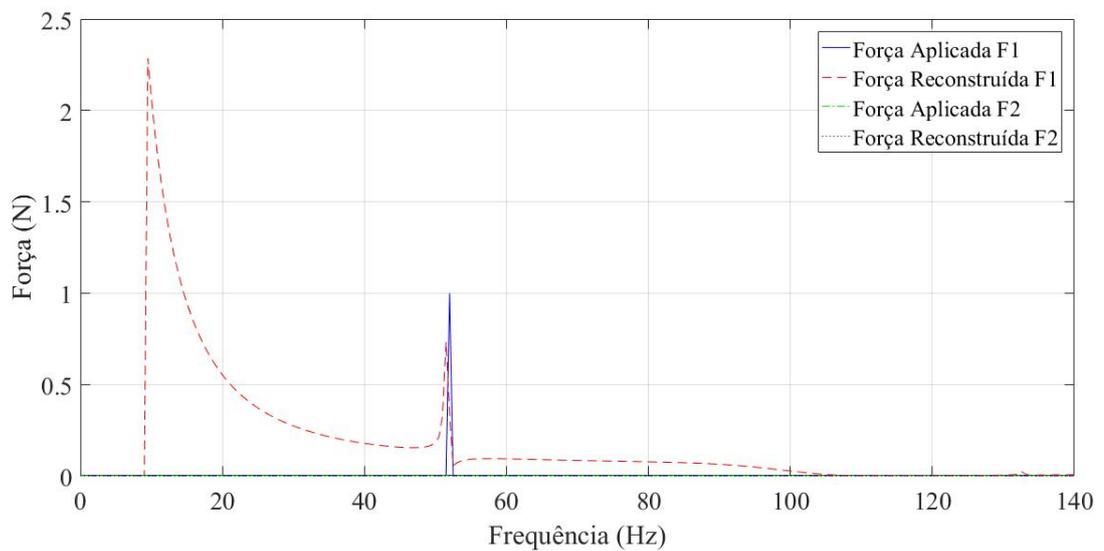


Figura 4.35 – Configuração 6: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

A partir das análises realizadas para a configuração 6 pode-se notar que a frequência de excitação do primeiro modo de vibração tem grande influência sobre a resposta do carregamento reconstruído. Quando avaliamos um carregamento em uma zona intermediária às regiões de ressonância e anti-ressonância extraindo a faixa de valores de

frequência anteriores à frequência do primeiro modo de vibração, o carregamento pôde ser reconstruído de forma satisfatória, como mostrado na Figura 4.26. Também é possível notar que com os carregamentos aplicados nas regiões de ressonância e anti-ressonância a reconstrução de carregamento não foi satisfatória mesmo quando não considerada a frequência de excitação do primeiro modo de vibração do modelo.

4.2.3.2 Configuração 7

Na configuração 7 as forças aplicadas F_1 e F_2 são do tipo senoidal. As figuras 4.36 e 4.37 ilustram o caso no domínio do tempo e da frequência com frequências de 20 e 15 Hz, respectivamente, escolhidas como valores intermediários do gráfico do CN (Figura 4.23).

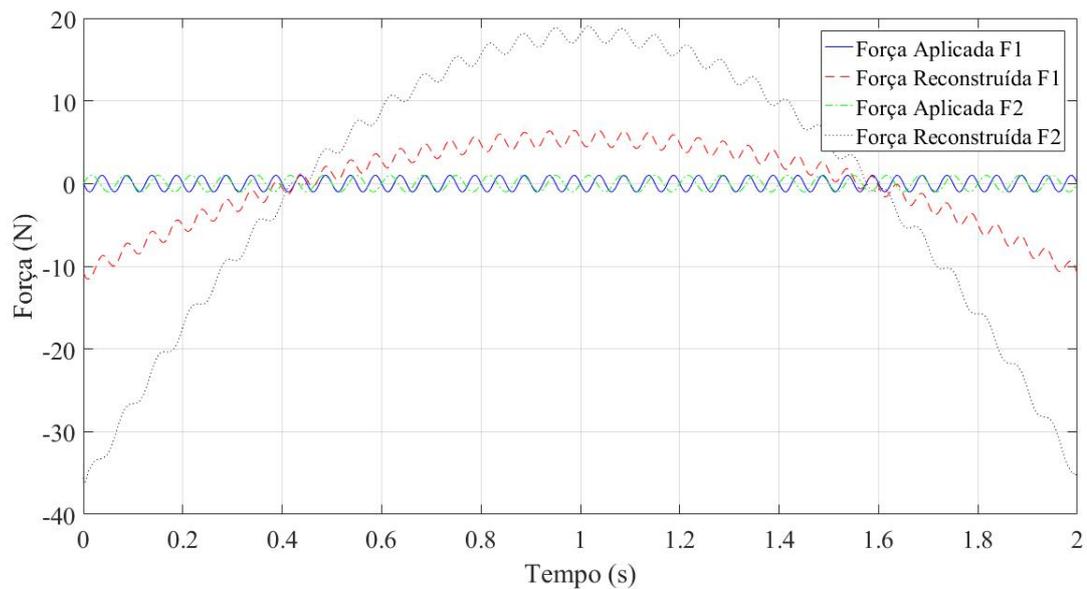


Figura 4.36 – Configuração 7: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

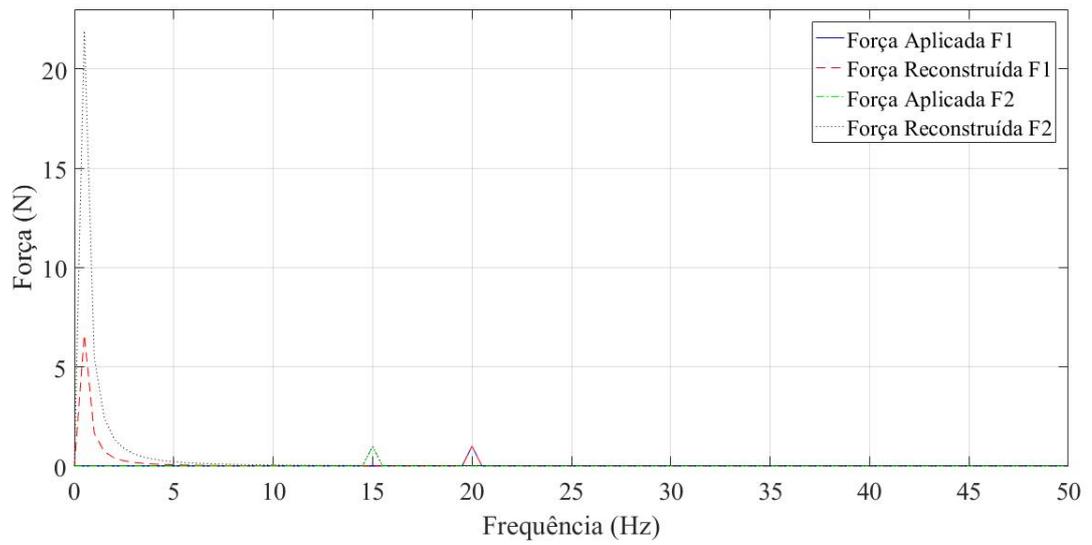


Figura 4.37 – Configuração 7: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Nas figuras 4.38 e 4.39 é ilustrado o mesmo caso anterior porém desconsiderando as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

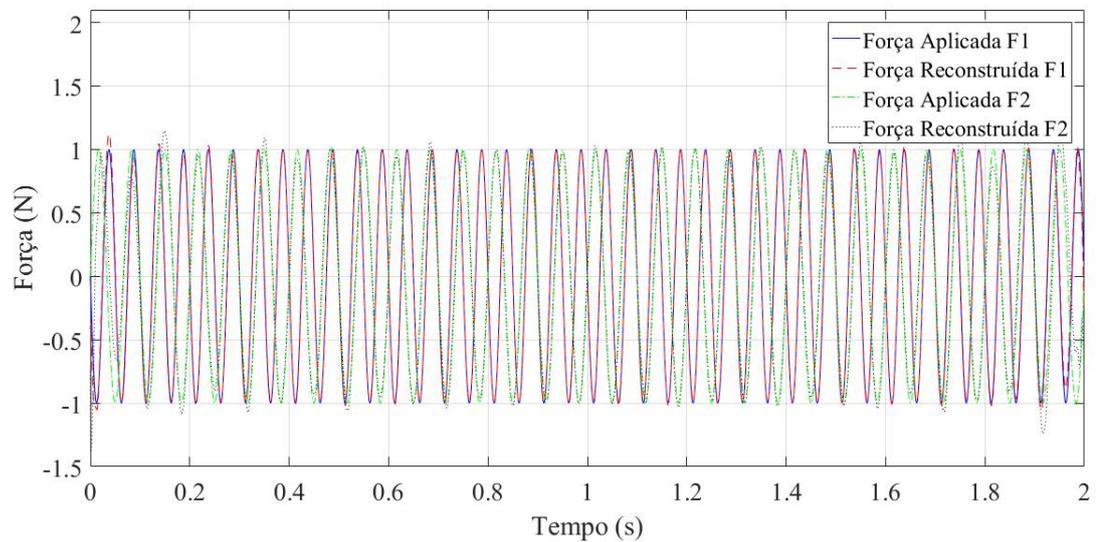


Figura 4.38 – Configuração 7: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

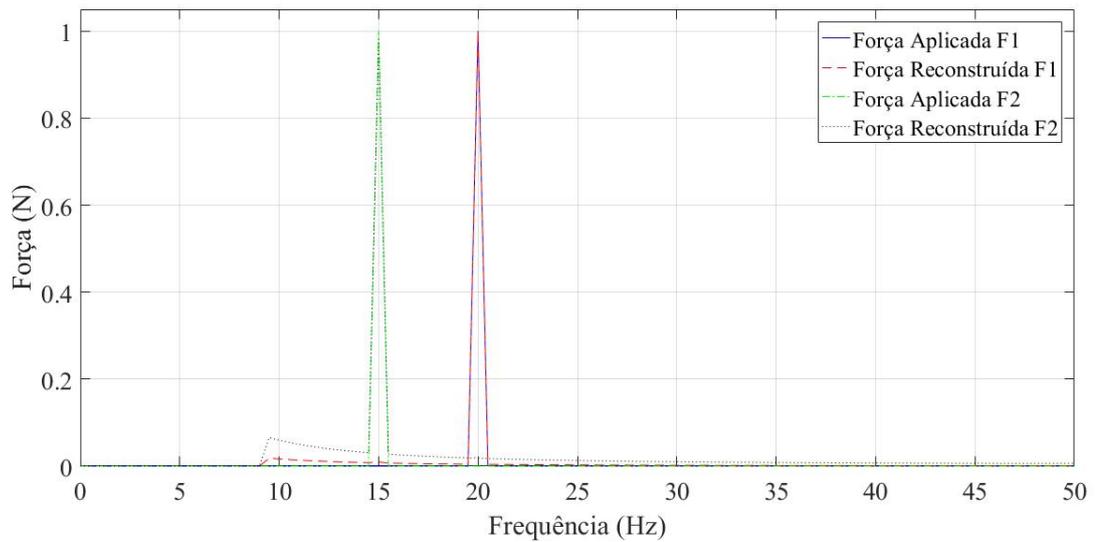


Figura 4.39 – Configuração 7: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Neste caso também é possível notar a influência da frequência de excitação do primeiro modo de vibração, a qual, quando desconsiderada, se obtém uma boa aproximação da força reconstruída sobre a força aplicada.

4.2.3.3 Configuração 8

Na configuração 8 a força aplicada F_1 é do tipo multisenso e a força F_2 é considerada nula. As figuras 4.40 e 4.41 ilustram o caso no domínio do tempo e da frequência, respectivamente, com frequências de 15 e 20 Hz escolhidas a partir de valores intermediários do gráfico do CN (Figura 4.23).

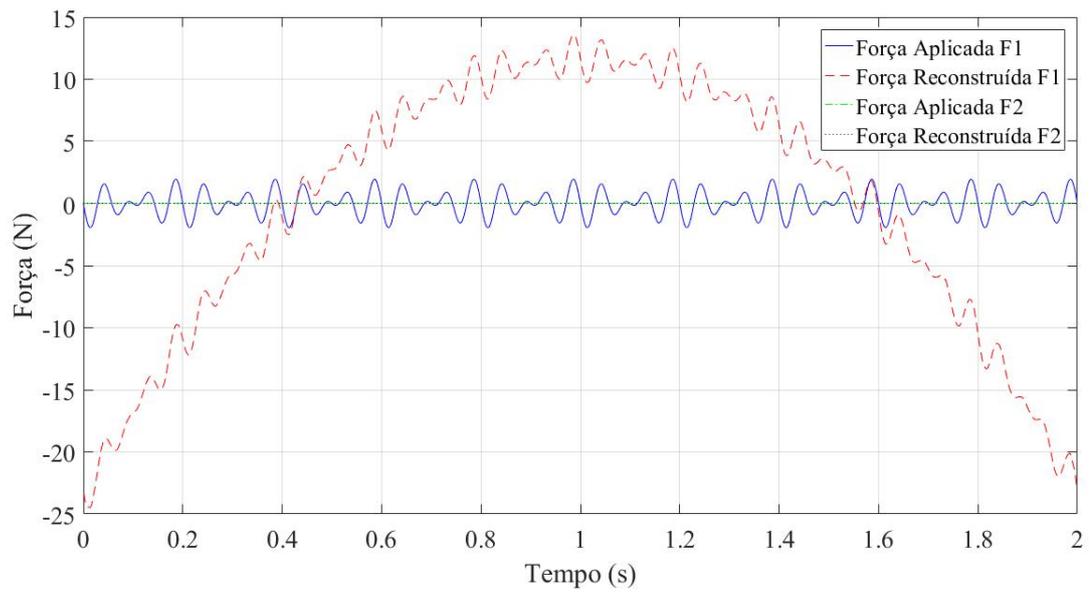


Figura 4.40 – Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

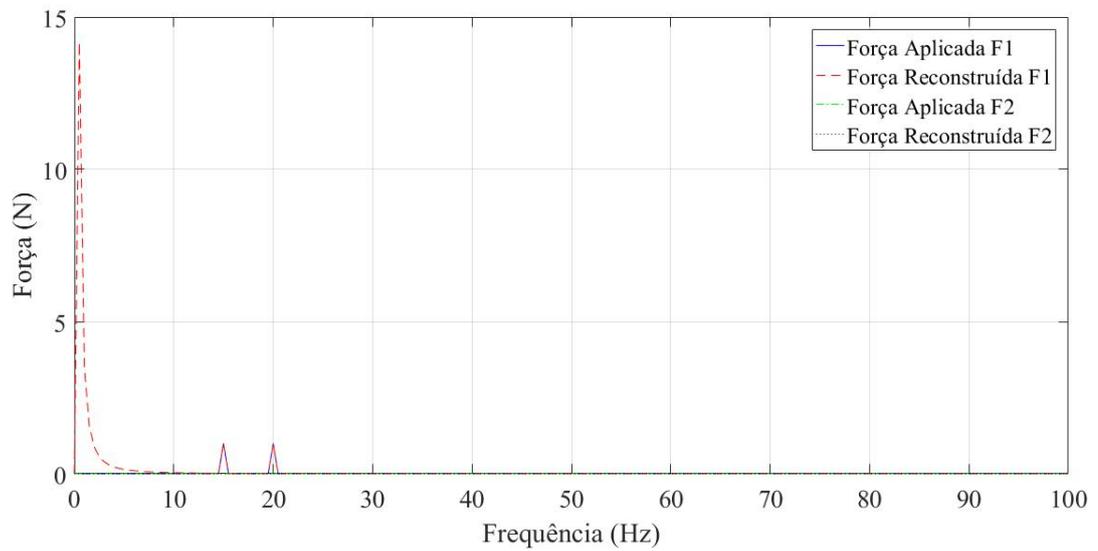


Figura 4.41 – Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

O mesmo caso é ilustrado nas figuras 4.42 e 4.43 desconsiderando as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

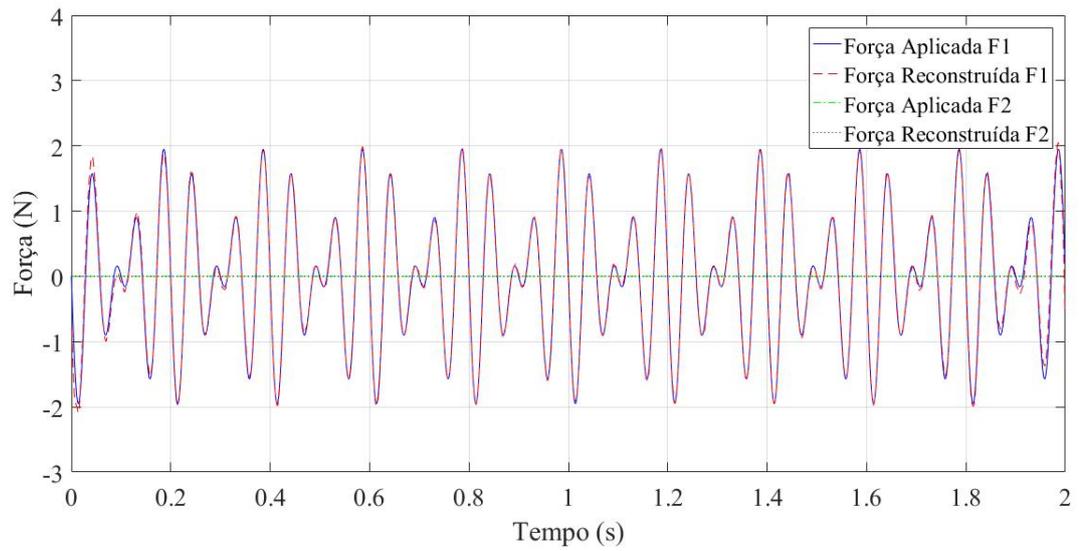


Figura 4.42 – Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

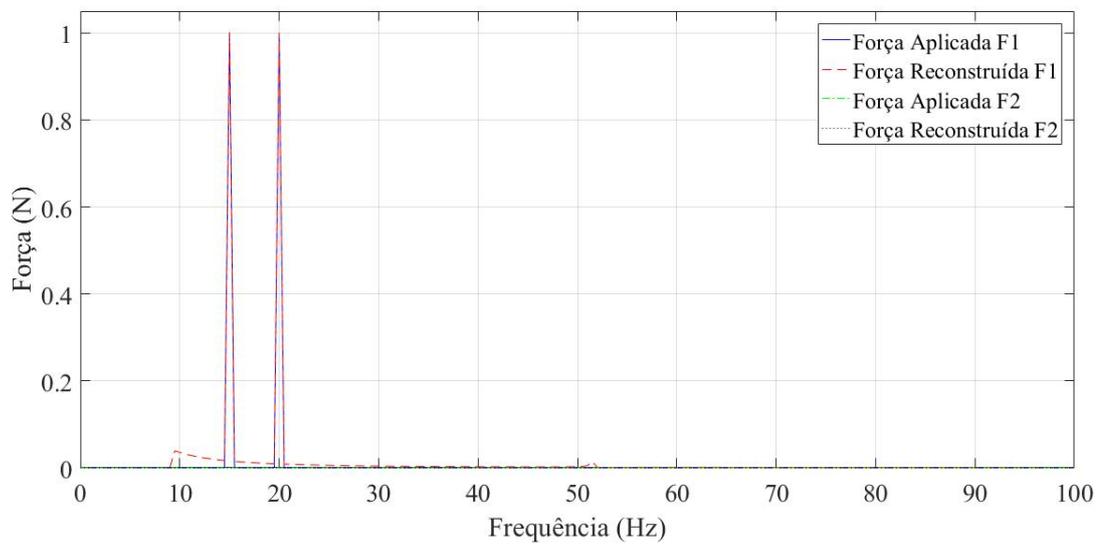


Figura 4.43 – Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

As figuras 4.44 e 4.45 ilustram um caso no qual uma das frequências foi escolhida a partir de um valor intermediário, 15 Hz, e a outra em uma região de anti-ressonância, 52 Hz, do gráfico do CN (Figura 4.23).

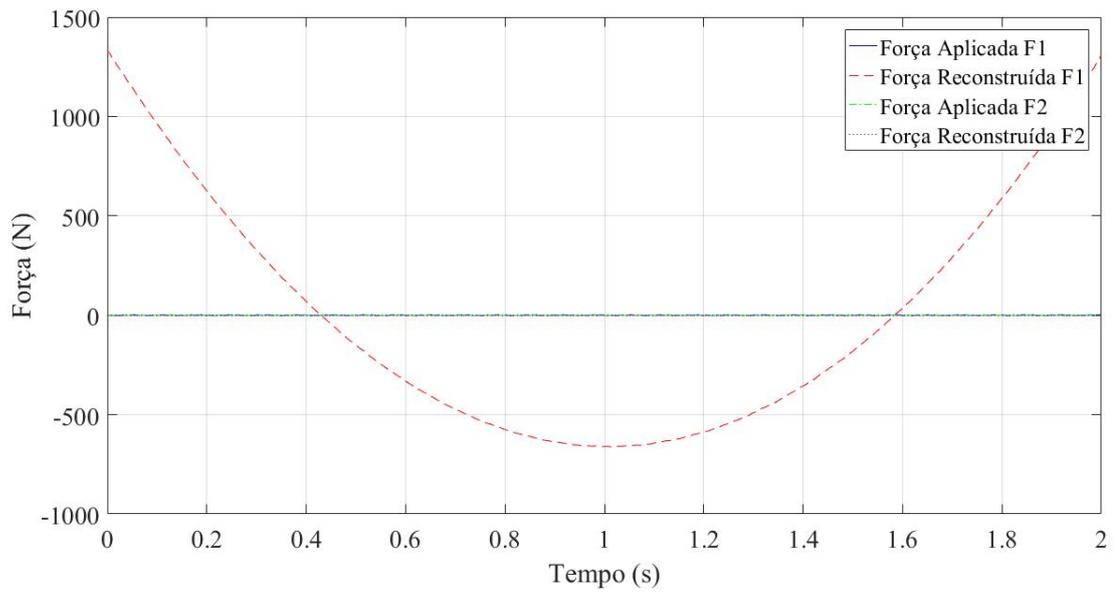


Figura 4.44 – Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

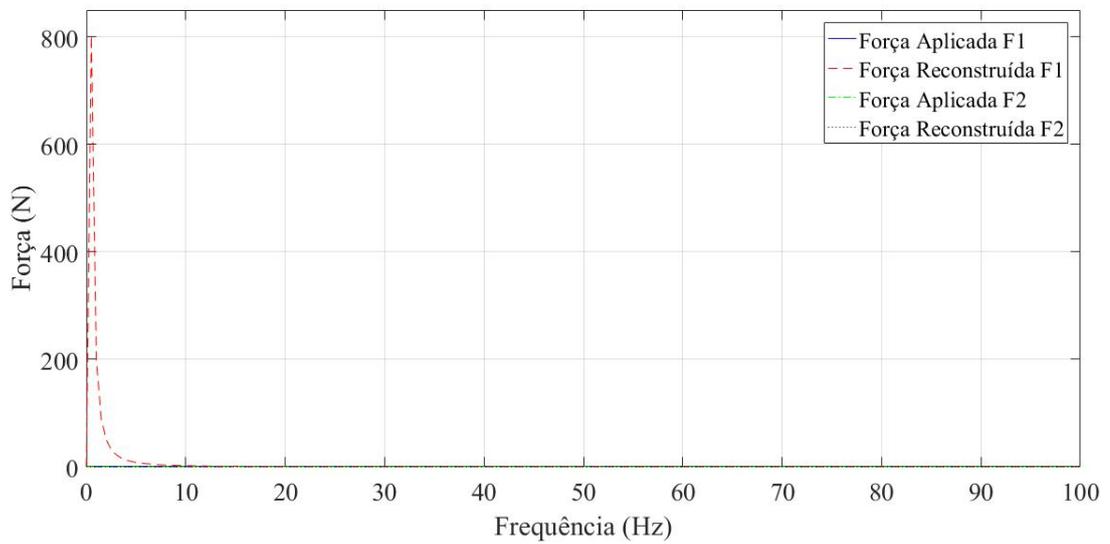


Figura 4.45 – Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

O mesmo caso é ilustrado nas figuras 4.46 e 4.47 desconsiderando as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

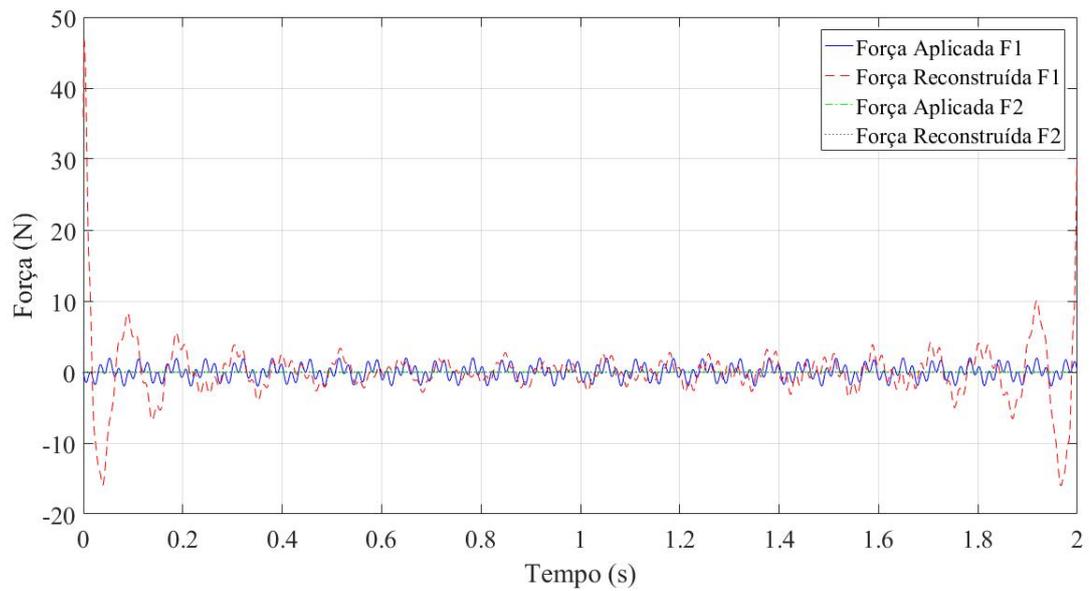


Figura 4.46 – Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

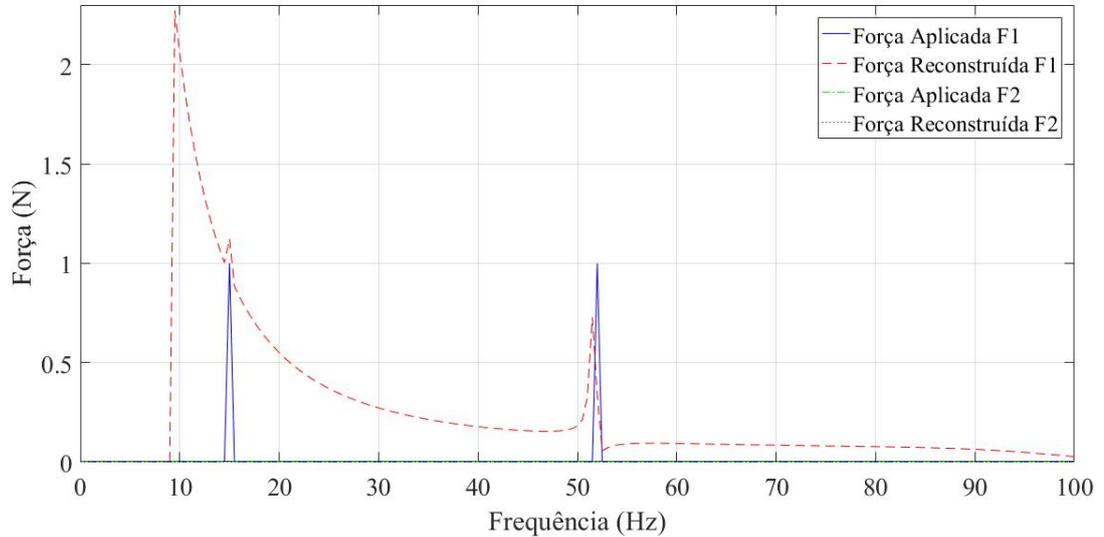


Figura 4.47 – Configuração 8: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Neste caso pode-se notar que quando se tem um carregamento multisenso com frequências dentro de uma região intermediária do gráfico do CN (Figura 4.23) é possível reconstruí-lo quando desconsiderada a faixa de valores inferior à frequência do primeiro modo de vibração, como mostrado na Figura 4.42. Porém, quando uma das componentes

do carregamento está em uma região de anti-ressonância, a metodologia não consegue reconstruir nem a componente do carregamento que está em uma região intermediária do CN , como pode ser visto nas Figuras 4.44 a 4.47. Isso significa que o valor do carregamento na região de anti-ressonância dominou a resposta neste caso.

4.2.3.4 Configuração 9

Na configuração 9 a força F_1 é do tipo seno aplicada em um intervalo de 0,2 segundos e a força F_2 é considerada nula. As figuras 4.48 e 4.49 ilustram o caso no domínio do tempo e da frequência respectivamente em uma frequência escolhida a partir de um valor intermediário do gráfico do CN (Figura 4.23).

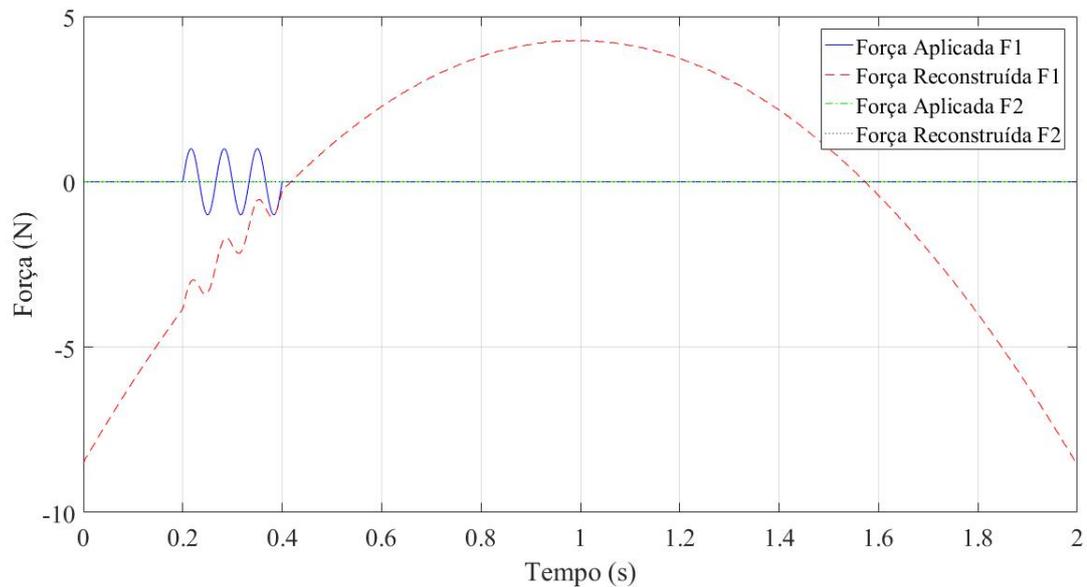


Figura 4.48 – Configuração 9: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

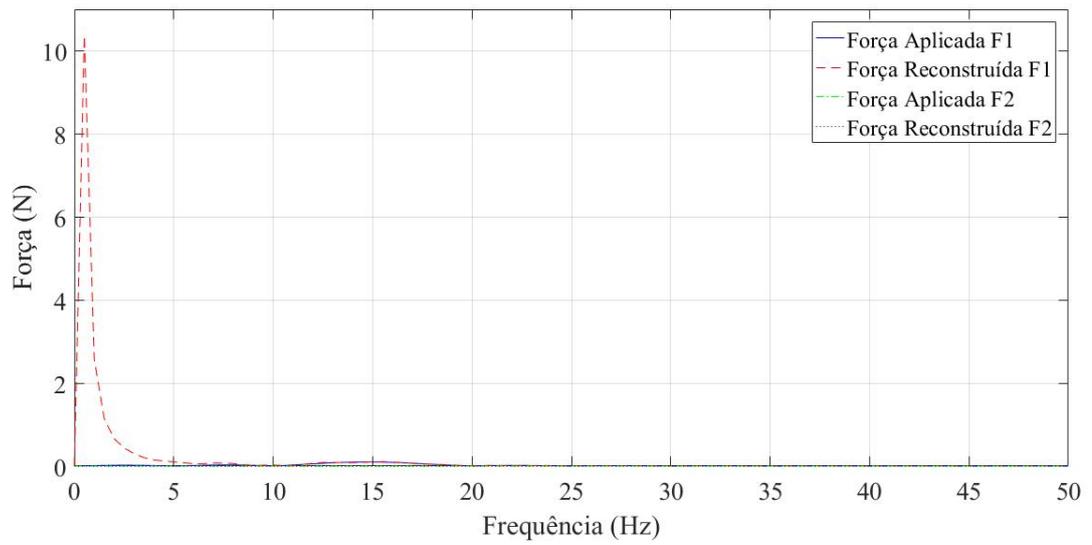


Figura 4.49 – Configuração 9: comparativo entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

No caso ilustrado nas figuras 4.50 e 4.51 são desconsideradas as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

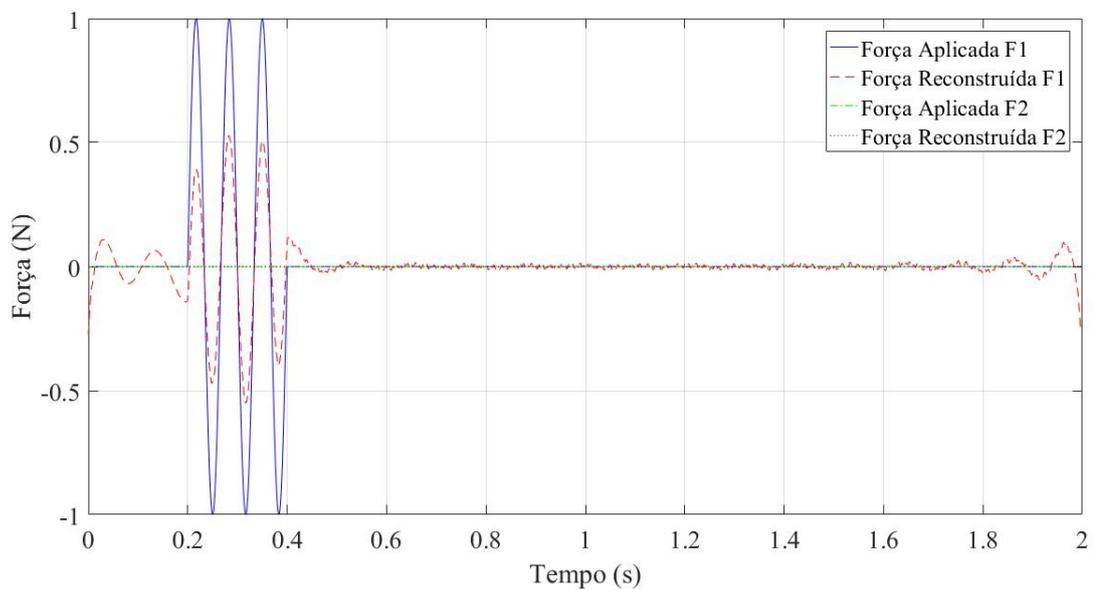


Figura 4.50 – Configuração 9: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

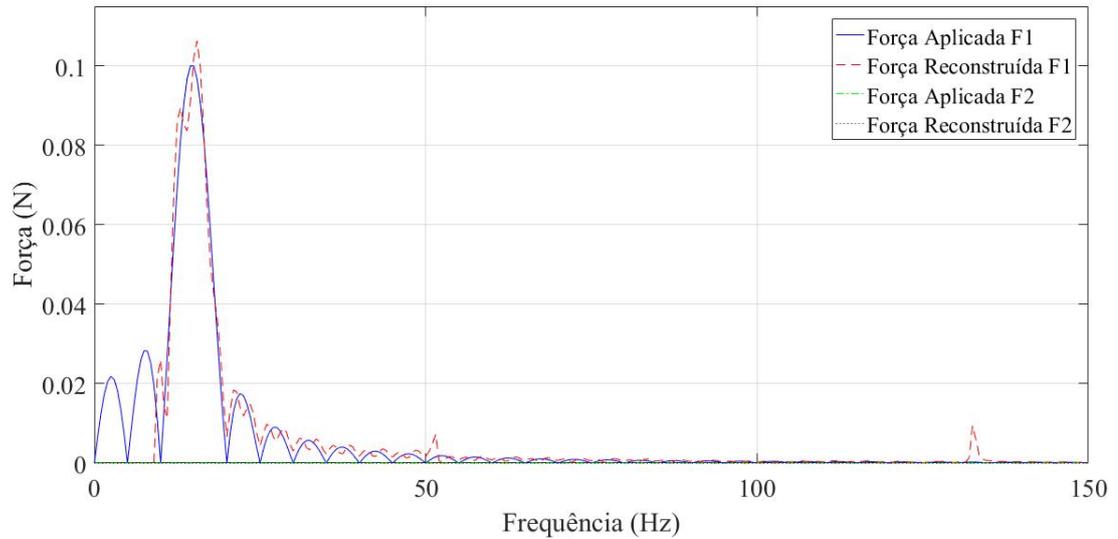


Figura 4.51 – Configuração 9: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Conforme citado no caso 2 para um carregamento do mesmo tipo, a perda de magnitude pode ser justificada pelo fenômeno do *leakage*. Neste caso também é possível notar a influência da frequência de excitação do primeiro modo de vibração. Porém, apesar de conter ruído, a duração de aplicação do carregamento pode ser bem delimitada e a frequência identificada no carregamento reconstruído.

4.2.3.5 Configuração 10

Na configuração 10 a força aplicada F_1 é do tipo degrau e a força F_2 é considerada nula. As figuras 4.52, 4.56 e 4.53, 4.57 ilustram o caso no domínio do tempo e da frequência respectivamente para intervalos de tempo diferentes. Nas figuras 4.54, 4.55, 4.58 e 4.59 são desconsideradas as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

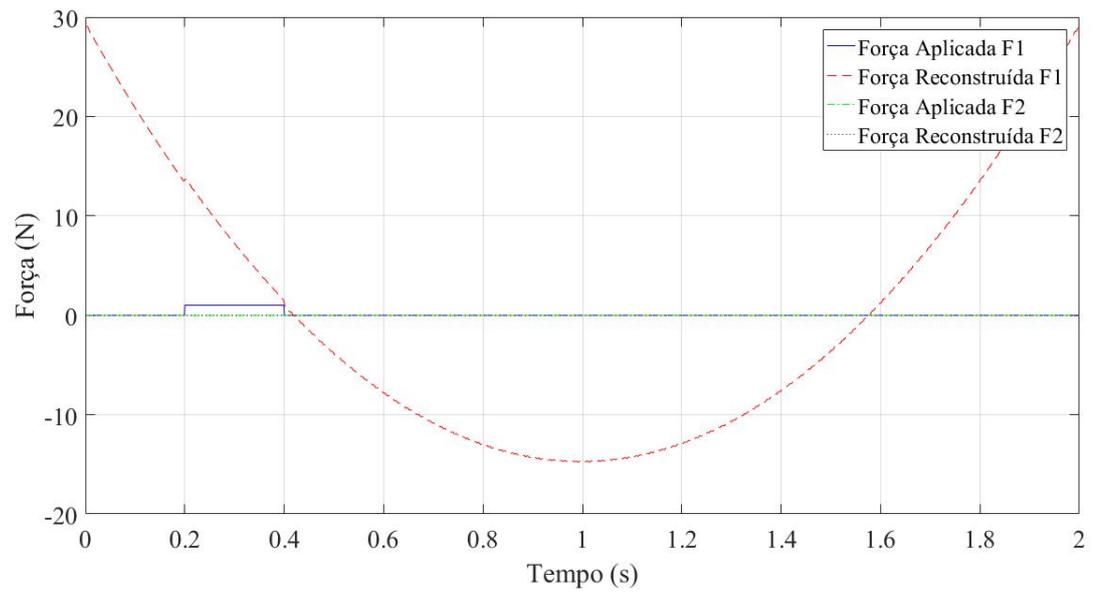


Figura 4.52 – Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

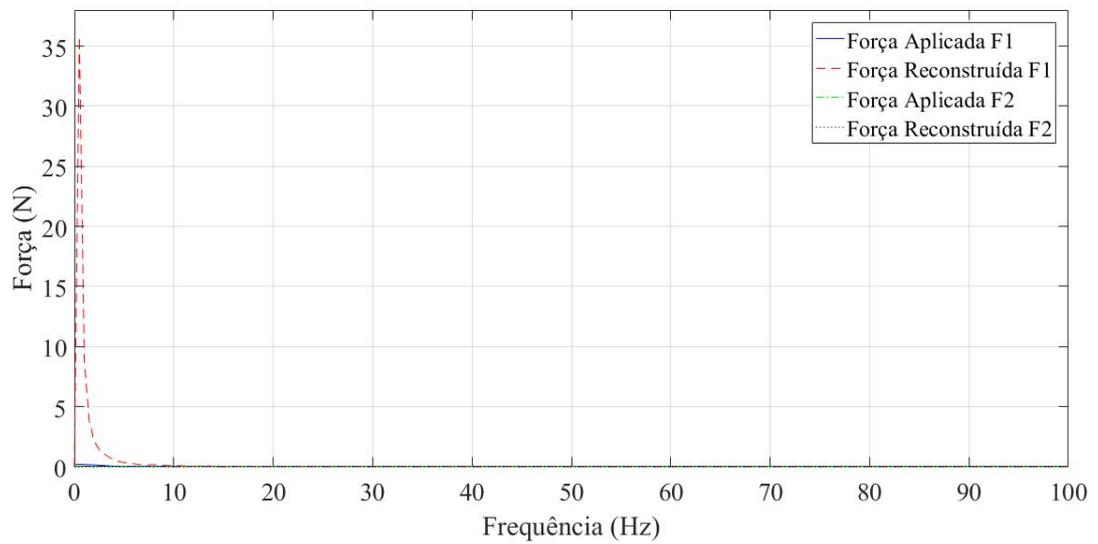


Figura 4.53 – Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

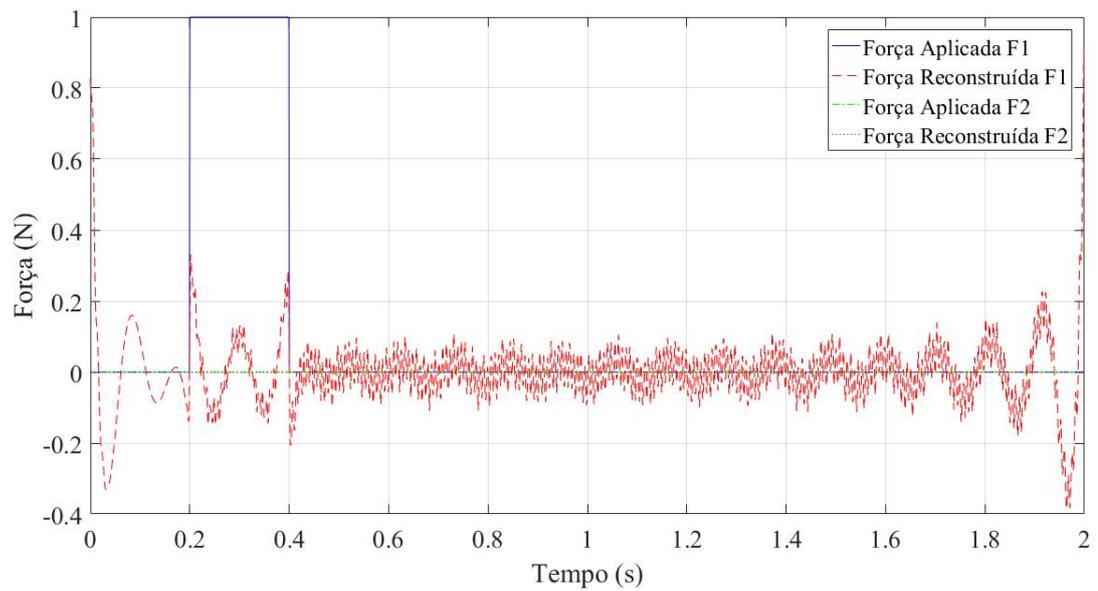


Figura 4.54 – Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

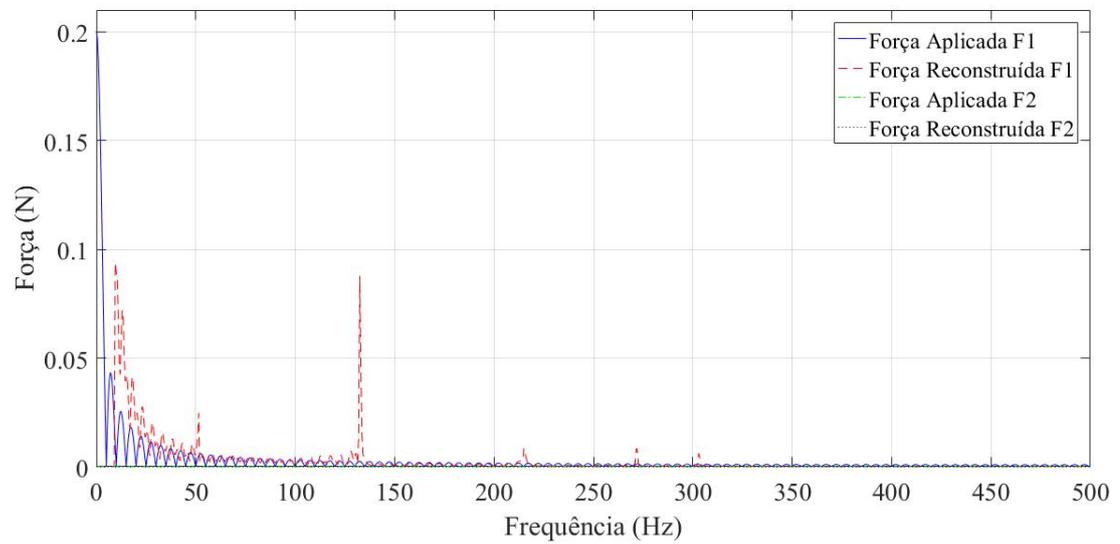


Figura 4.55 – Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

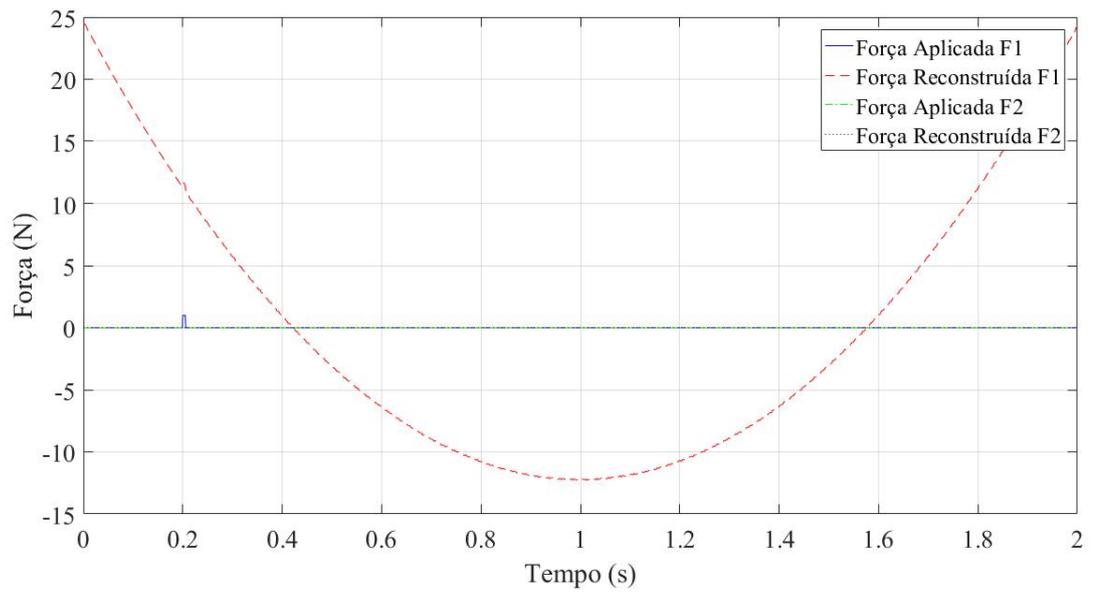


Figura 4.56 – Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

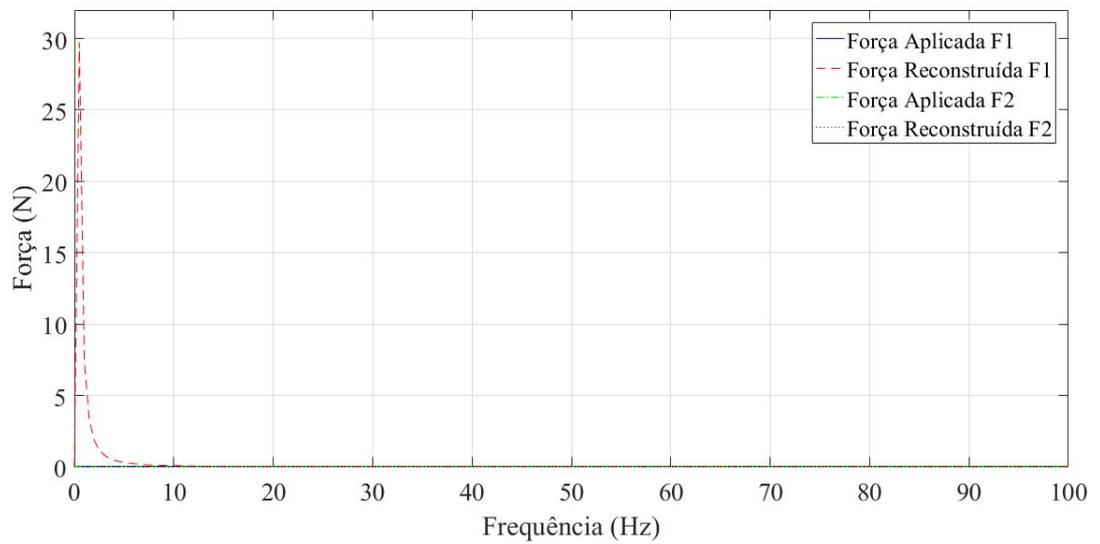


Figura 4.57 – Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

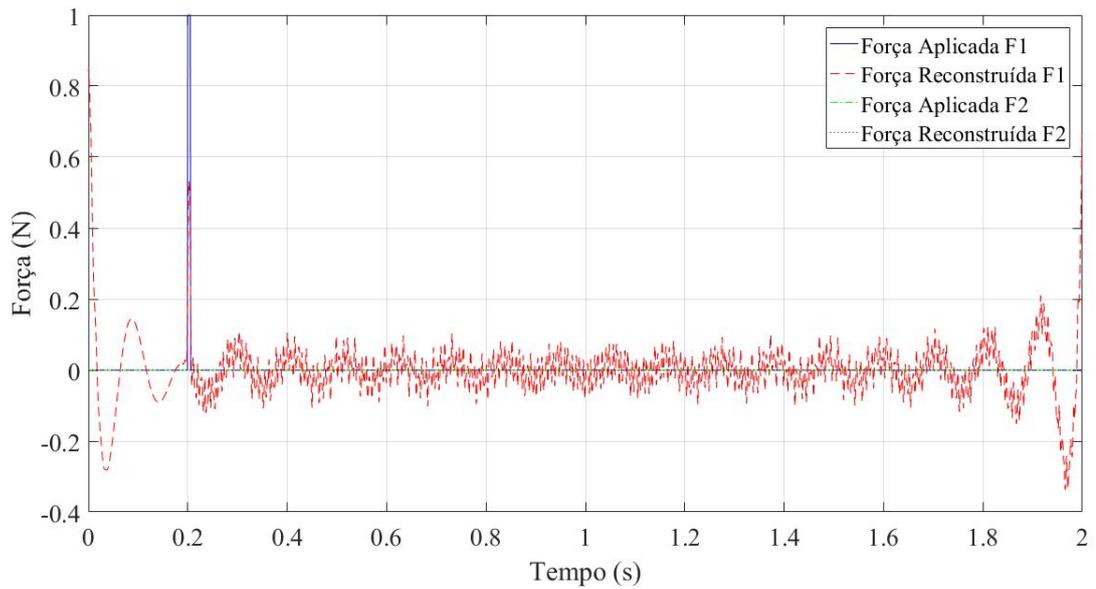


Figura 4.58 – Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

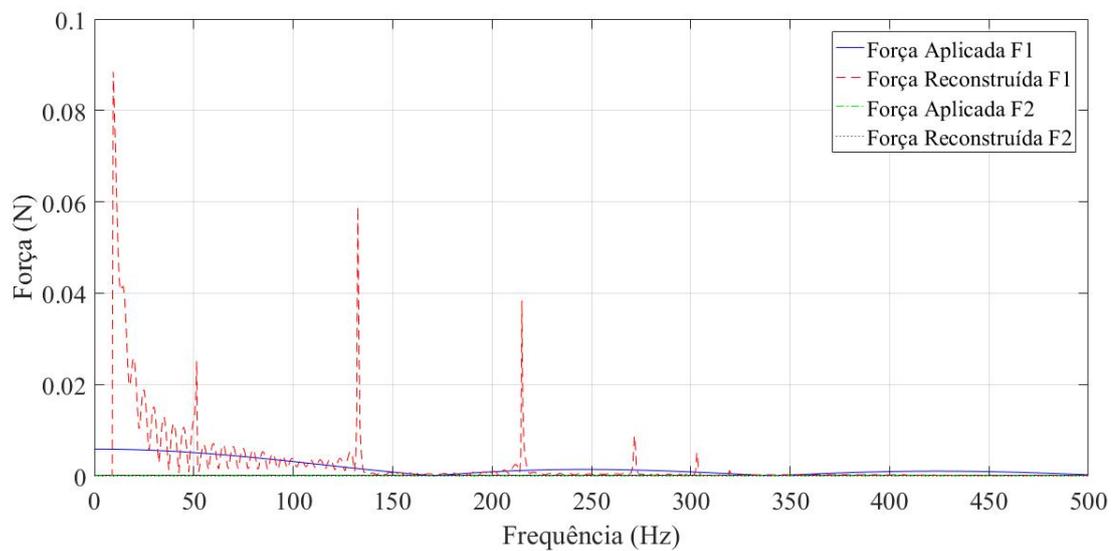


Figura 4.59 – Configuração 10: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Neste caso também observa-se a influência da frequência de excitação do primeiro modo de vibração. Nas figuras 4.55 e 4.59 é possível notar alguns picos na força reconstruída, o que se deve a esse tipo de carregamento excitar diversas frequências da estrutura que não foram consideradas inicialmente para a realização do cálculo de reconstrução do

carregamento, além do carregamento não ser periódico, o que provoca o *leakage* e causando assim um resultado divergente da força aplicada.

4.2.4 Caso 4

O caso 4 é constituído das configurações 11 à 14, no qual as condições de análise utilizadas para este caso são as mesmas utilizadas nos casos 2 e 3, porém para testar a metodologia em outras teorias estruturais escolheu-se um modelo de elasticidade bidimensional. Neste caso são aplicadas duas forças em três pontos do modelo e são utilizados 7 pontos para medição das respostas. Além disso o modelo possui 600 elementos do tipo *PSHELL* [Hyperworks, 2013] com quatro nós por elemento e três graus de liberdade (u , v e θ) como ilustrado na Figura 4.60. As dimensões do modelo são: $e=10\text{m}$, $b=10\text{m}$, $L=60\text{m}$.

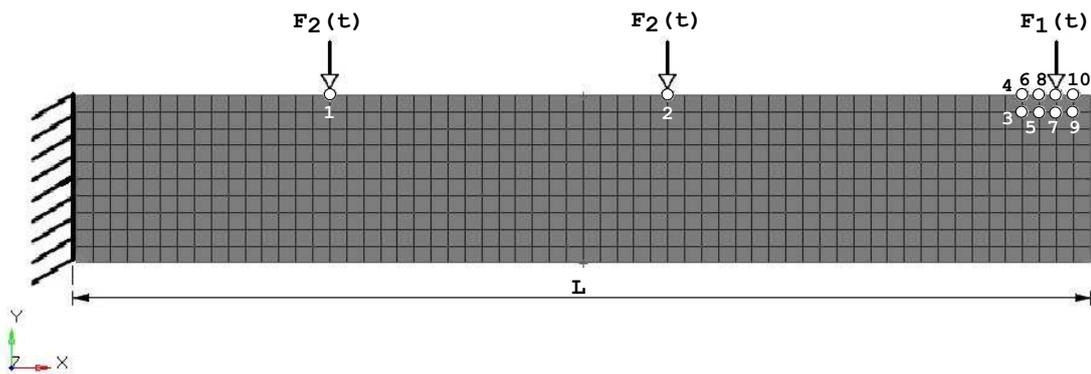


Figura 4.60 – Caso 4.

As forças aplicadas ao modelo deste caso e do próximo, caso 5, são reconstruídas a partir da seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Ha_{31} & Ha_{32} & Ha_{33} \\ Ha_{41} & Ha_{42} & Ha_{43} \\ Ha_{51} & Ha_{52} & Ha_{53} \\ Ha_{61} & Ha_{62} & Ha_{63} \\ Ha_{71} & Ha_{72} & Ha_{73} \\ Ha_{91} & Ha_{92} & Ha_{93} \\ Ha_{101} & Ha_{102} & Ha_{103} \end{bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_9 \\ Y_{10} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

A Figura 4.61 apresenta o gráfico do CN da matriz FRF deste modelo, o qual é possível notar elevada instabilidade e vários picos de ressonância e vales de anti-ressonância.

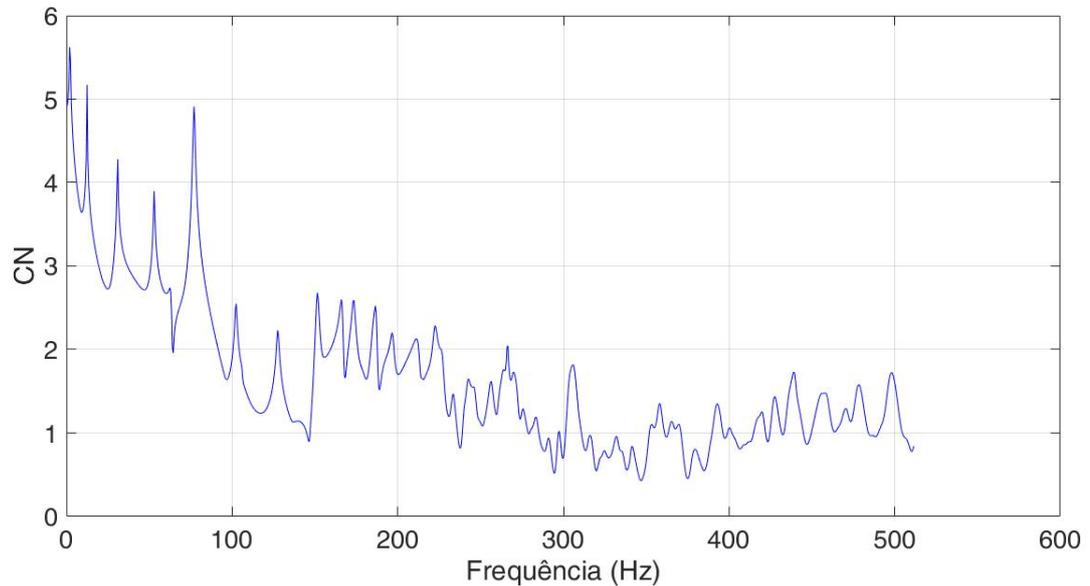


Figura 4.61 – Gráfico do número de condicionamento (CN) da matriz FRF no domínio da frequência para o caso 4.

A influência da frequência de excitação do primeiro modo de vibração também foi avaliada e para este modelo obteve-se de aproximadamente 2,21 Hz.

4.2.4.1 Configuração 11

Na configuração 11 a força aplicada F_1 é do tipo senoidal e a força F_2 é considerada nula. As Figuras 4.62 e 4.63 ilustram o caso no domínio do tempo e da frequência respectivamente.

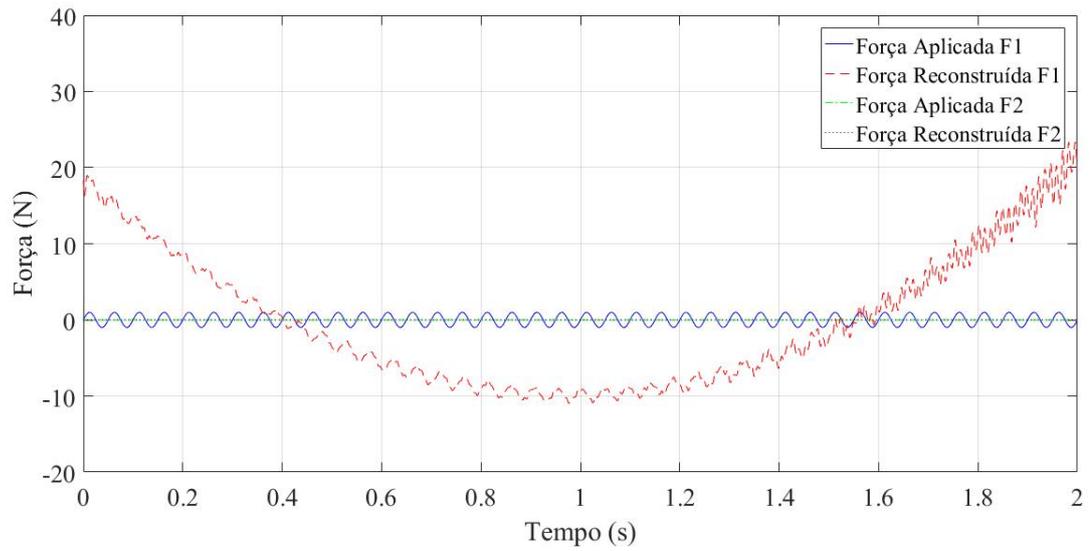


Figura 4.62 – Configuração 11: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

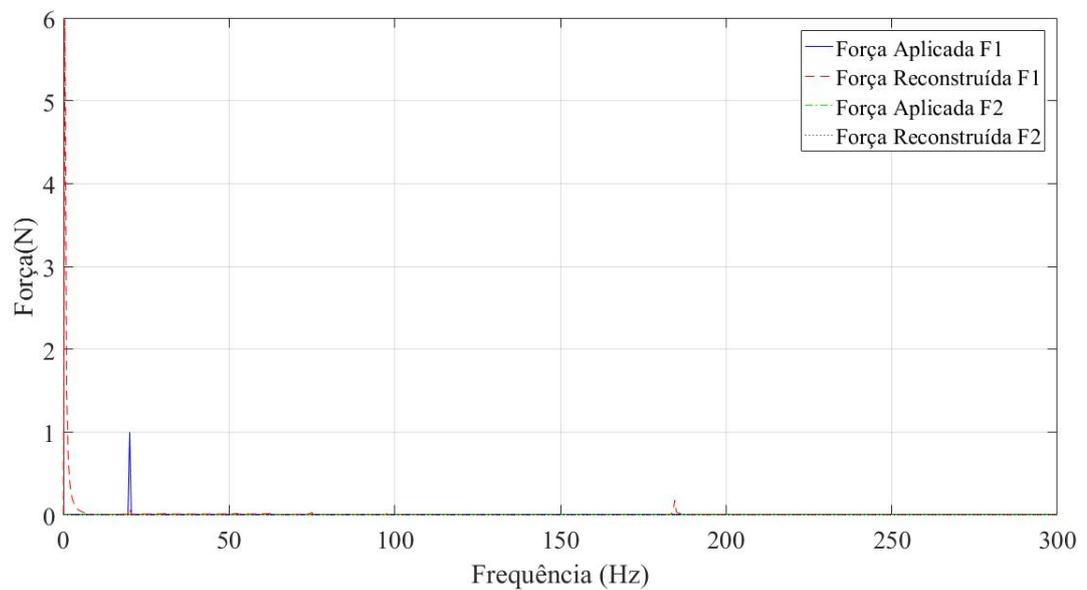


Figura 4.63 – Configuração 11: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Nas Figuras 4.64 e 4.65 é ilustrado o mesmo caso porém desconsiderando as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

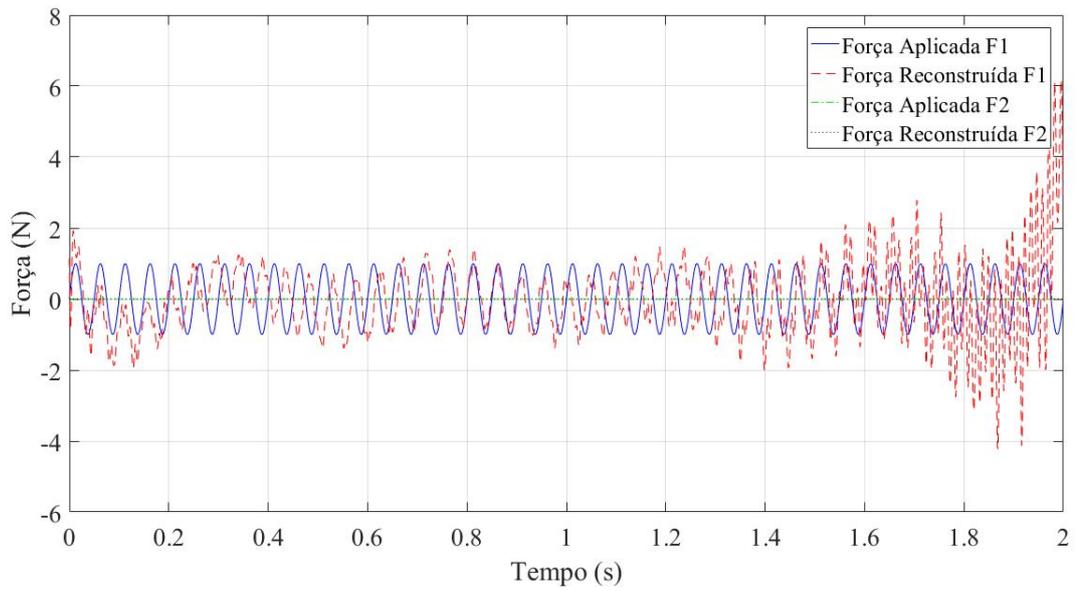


Figura 4.64 – Configuração 11: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

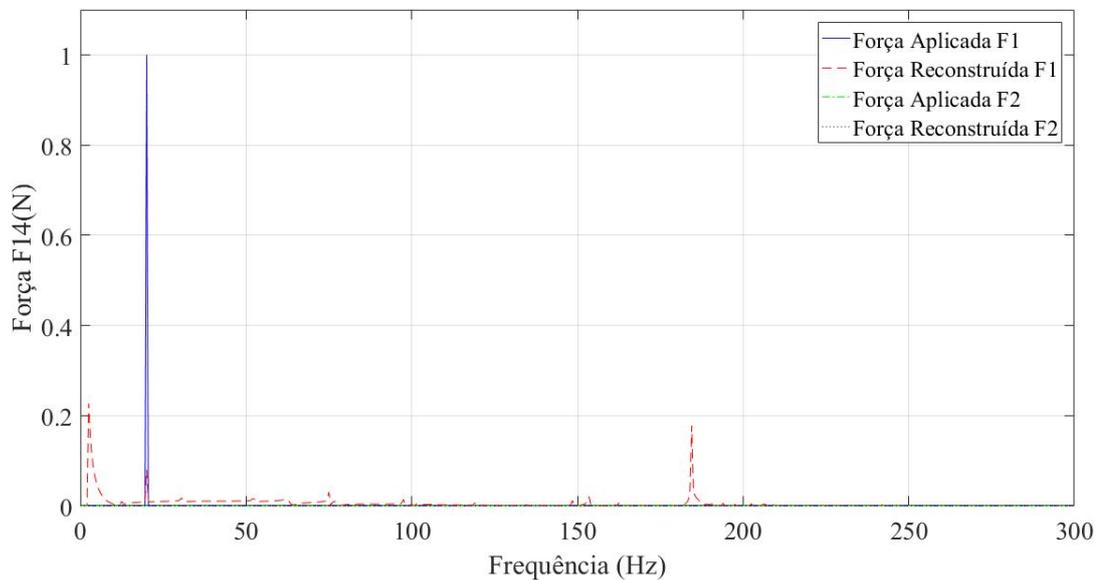


Figura 4.65 – Configuração 11: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Neste caso é possível notar nas Figuras 4.63 e 4.65 picos que não constam na força aplicada, o que leva a erros na força reconstruída. Também se pode observar a influência da instabilidade do CN , pois quando não é possível identificar claramente as regiões de

ressonância e anti-ressonância no gráfico se torna difícil avaliar um valor de frequência de excitação em região intermediária para aplicação do carregamento.

4.2.4.2 Configuração 12

Na configuração 12 a força aplicada F_1 é do tipo multisenso, com frequências iguais a 15 e 30 Hz, e a força F_2 é considerada nula. As Figuras 4.66 e 4.67 ilustram o caso no domínio do tempo e da frequência respectivamente

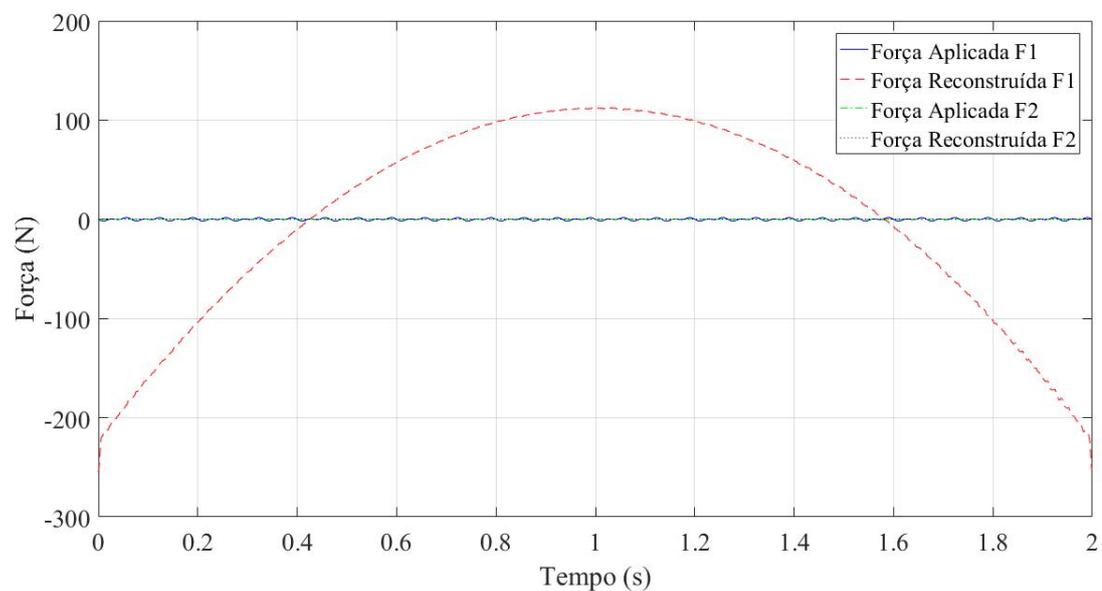


Figura 4.66 – Configuração 12: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

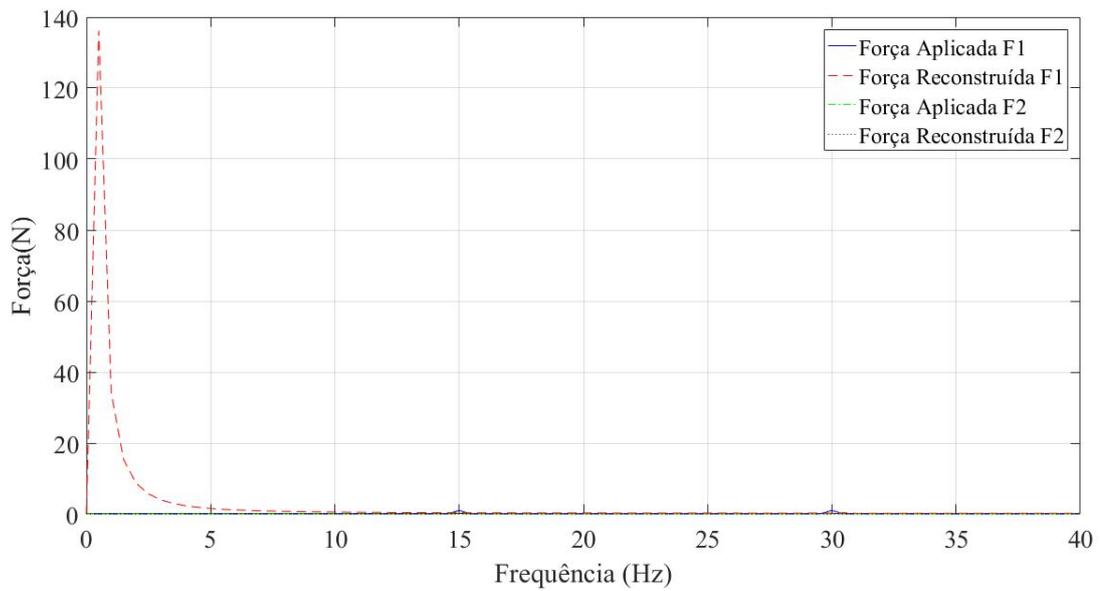


Figura 4.67 – Configuração 12: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

O mesmo caso é ilustrado nas Figuras 4.68 e 4.69 desconsiderando as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

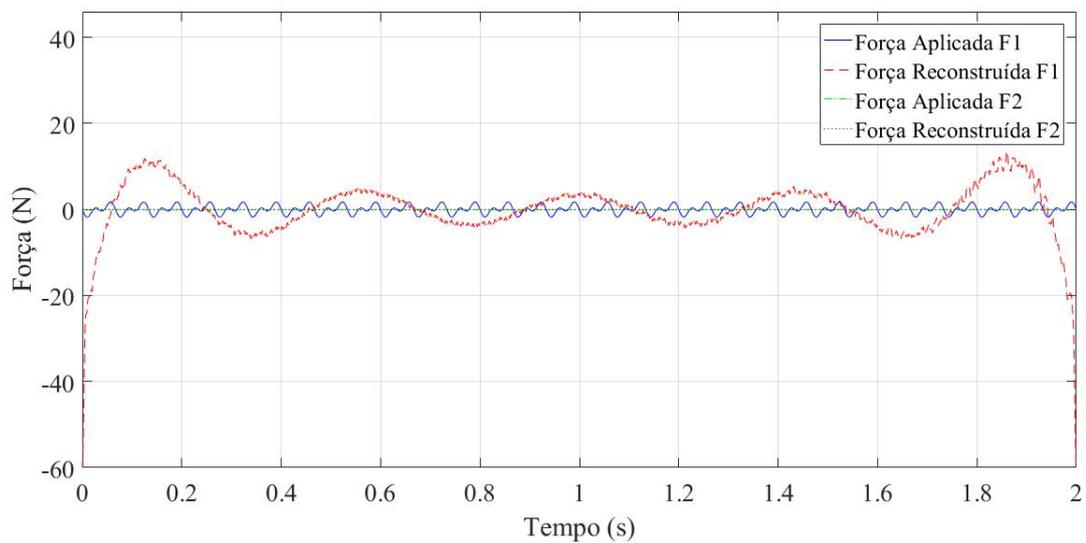


Figura 4.68 – Configuração 12: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

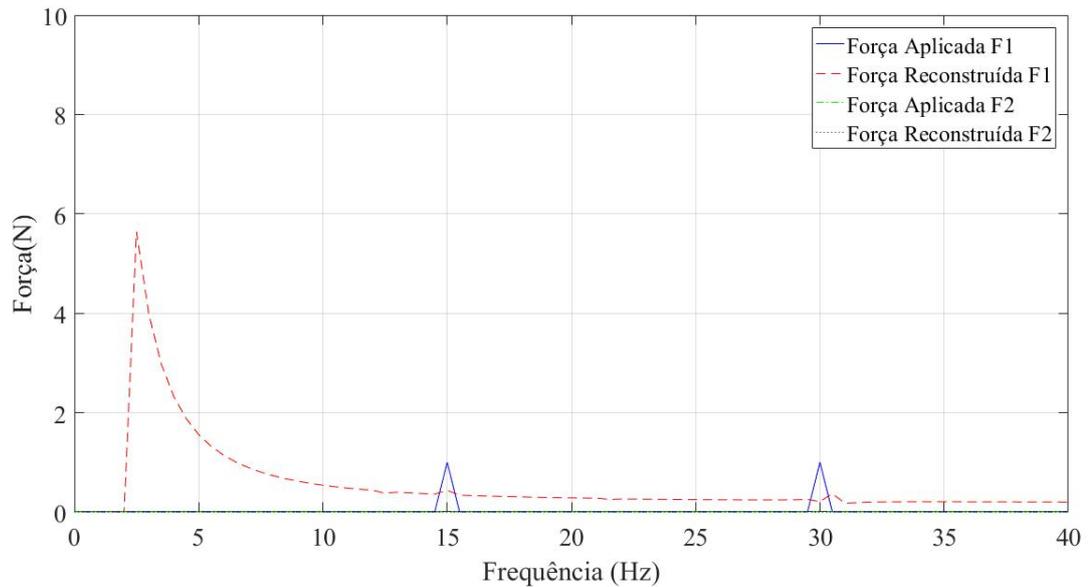


Figura 4.69 – Configuração 12: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Neste caso é possível notar que apesar de se ter desconsiderado os valores inferiores à frequência do primeiro modo de vibração ainda há um pico inicial, como pode ser visto na Figura 4.69, com amplitude maior do que a do carregamento multiseno aplicado. Dessa forma, os resultados obtidos na reconstrução de carregamento são diferentes do carregamento inicialmente aplicado.

4.2.4.3 Configuração 13

Na configuração 13 a força F_1 é do tipo seno aplicada em um intervalo de 0,2 segundos e a força F_2 é considerada nula. As figuras 4.70 e 4.71 ilustram o caso no domínio do tempo e da frequência respectivamente.

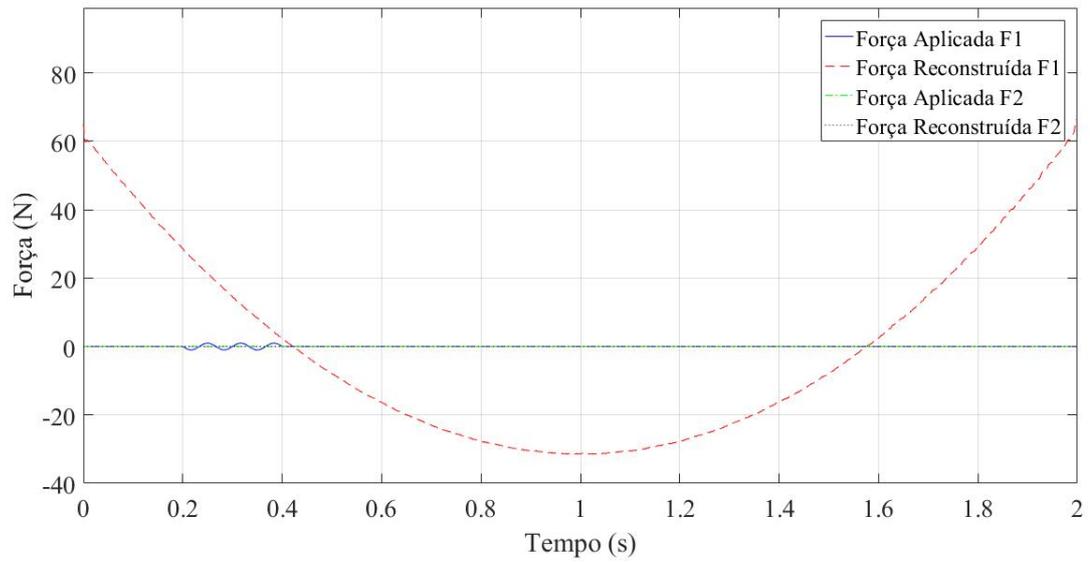


Figura 4.70 – Configuração 13: comparação entre força aplicada e reconstituída no domínio do tempo.

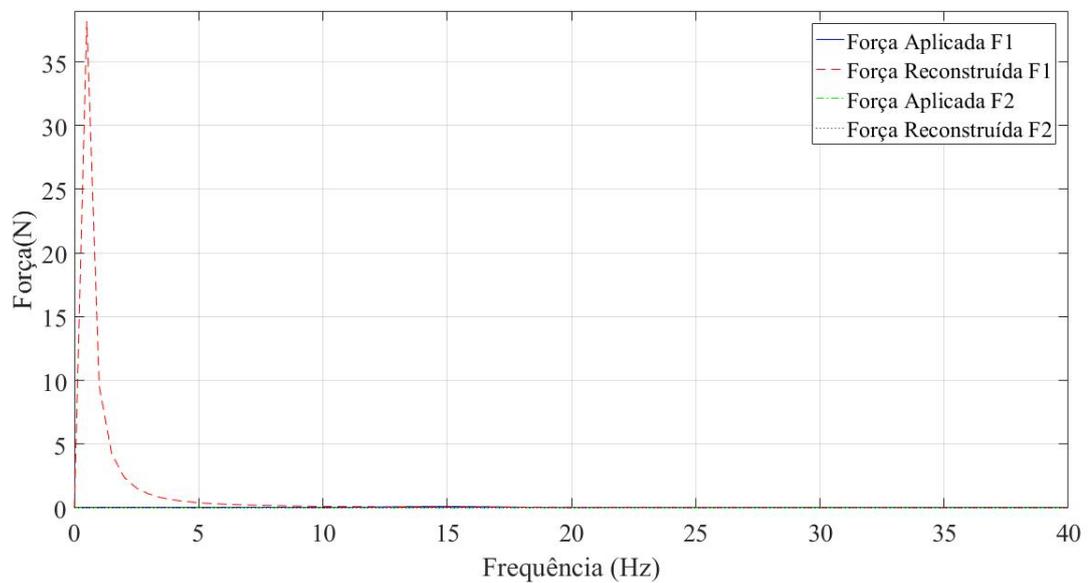


Figura 4.71 – Configuração 13: comparação entre força aplicada e reconstituída no domínio da frequência.

No caso ilustrado nas Figuras 4.72 e 4.73 são desconsideradas as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

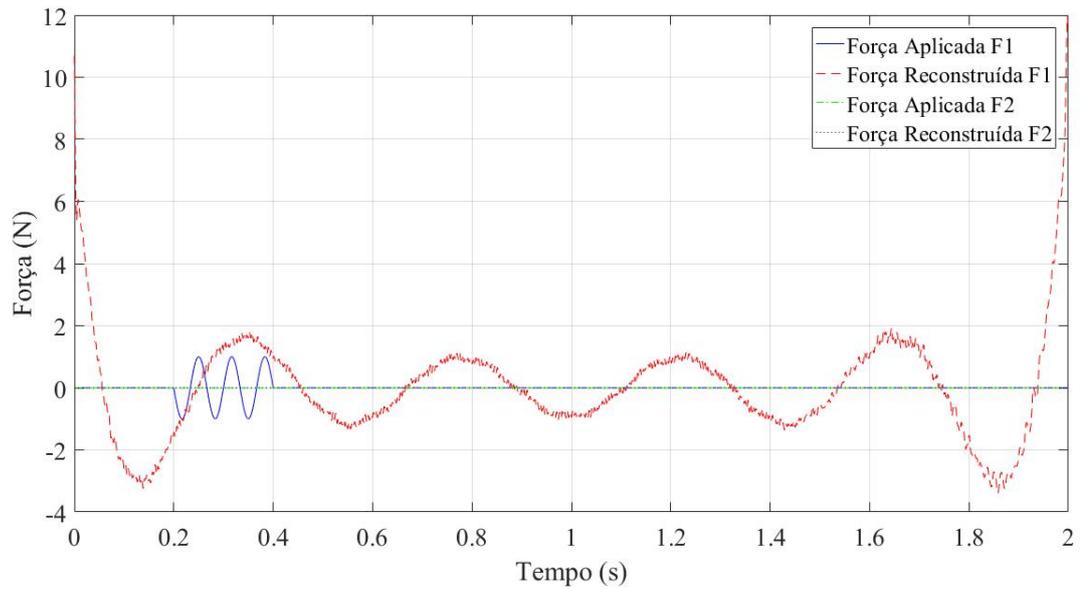


Figura 4.72 – Configuração 13: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

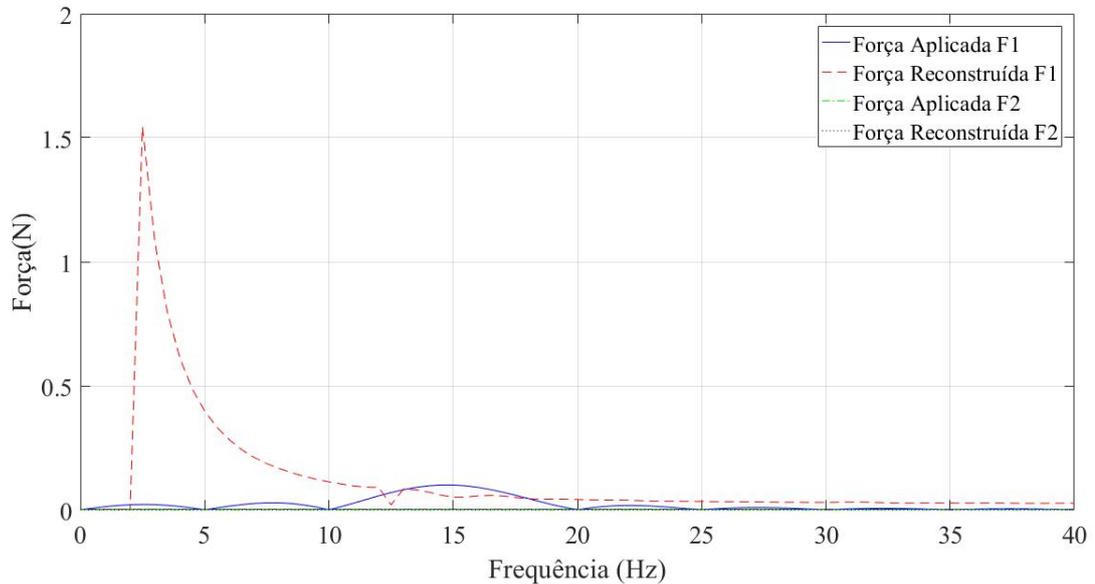


Figura 4.73 – Configuração 13: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Neste caso também não se obteve resultados satisfatórios. Apesar de os casos anteriores em que se utilizaram do mesmo tipo de carregamento apresentarem um perda de amplitude justificada pelo *leakage*, neste caso a amplitude do pico inicial é muito maior

do que a amplitude do carregamento aplicado, mesmo desconsiderando as frequências inferiores à frequência do primeiro modo de vibração, como mostra a Figura 4.73, e nem o tempo de aplicação e nem a frequência foram captados corretamente.

4.2.4.4 Configuração 14

Na configuração 14 a força aplicada F_1 é do tipo degrau e a força F_2 é considerada nula. As figuras 4.74 e 4.75 ilustram o caso no domínio do tempo e da frequência respectivamente para intervalos de tempo diferentes. Nas figuras 4.76 e 4.77 são desconsideradas as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

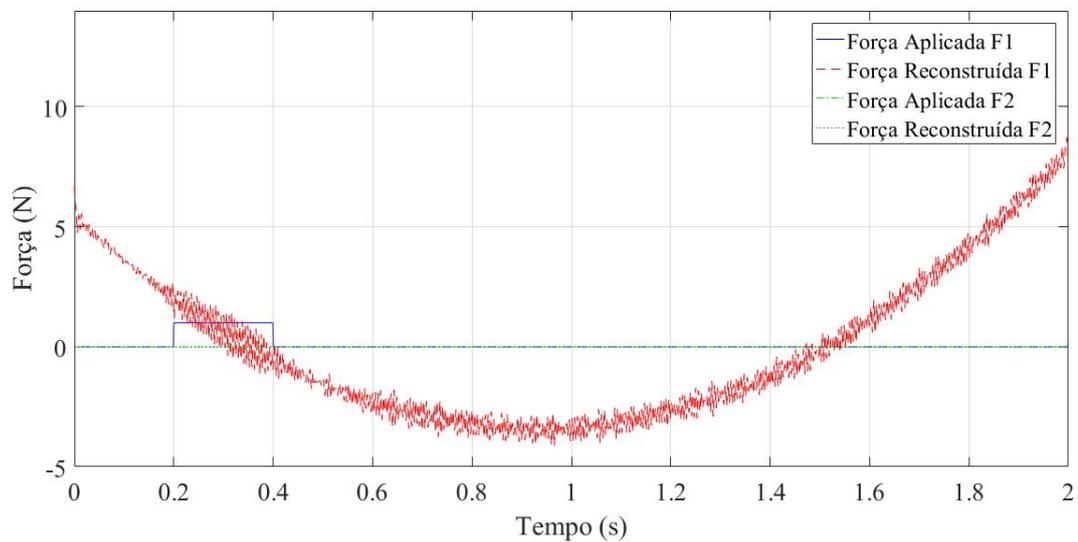


Figura 4.74 – Configuração 14: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

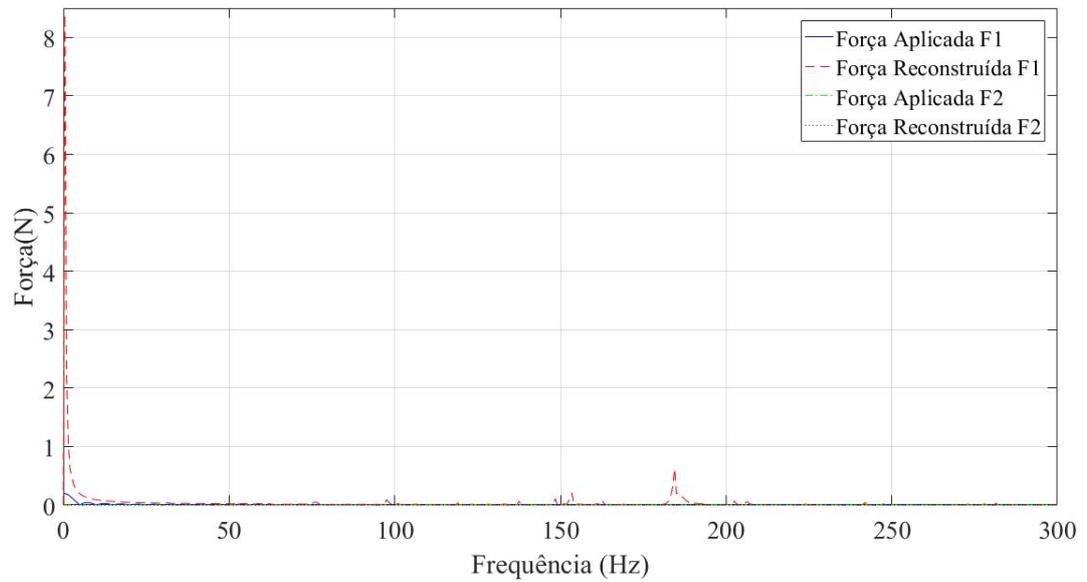


Figura 4.75 – Configuração 14: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

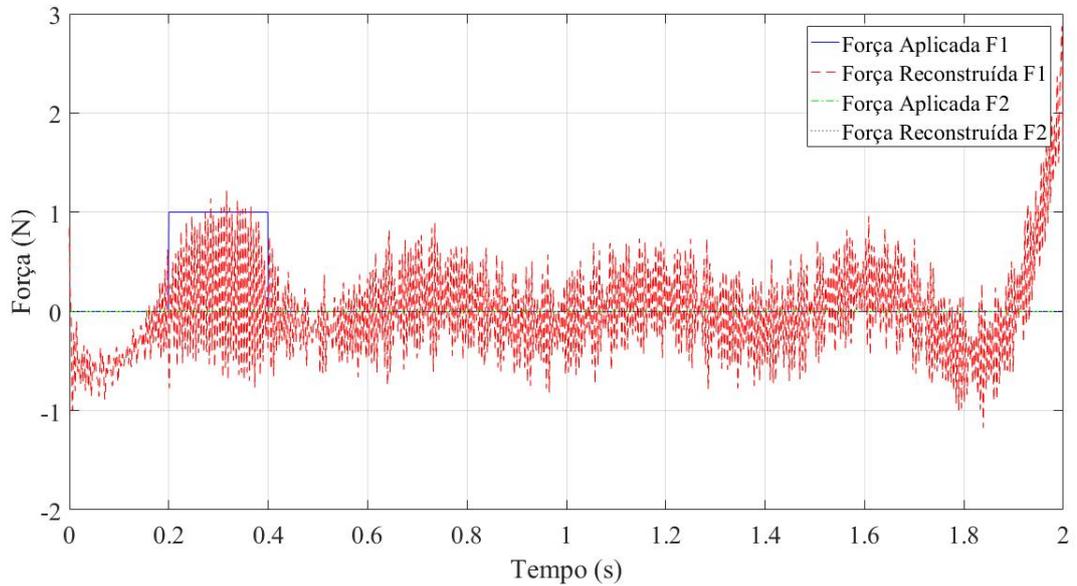


Figura 4.76 – Configuração 14: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

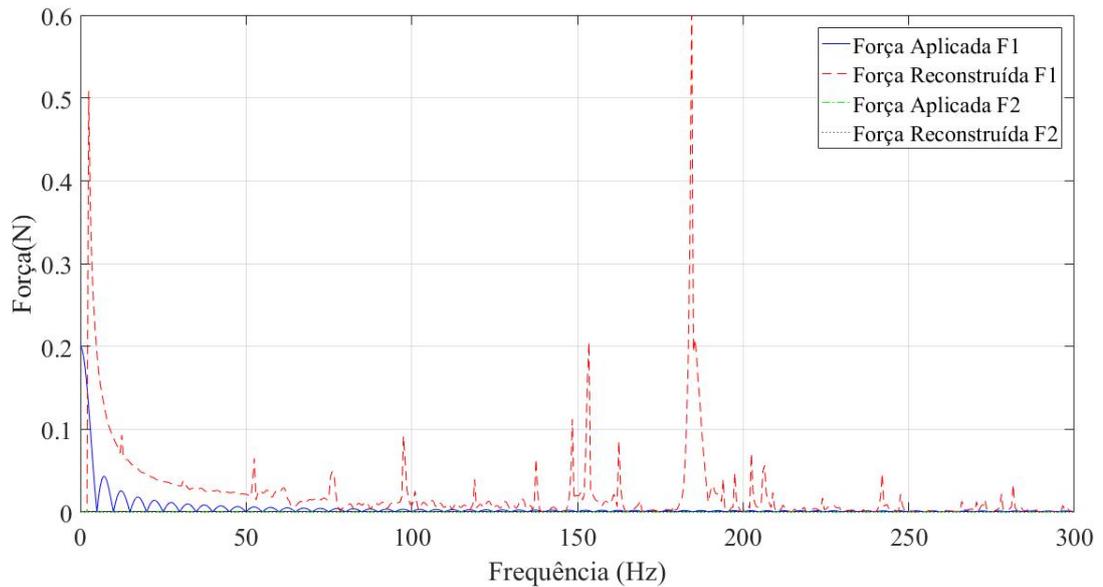


Figura 4.77 – Configuração 14: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Neste caso, como citado anteriormente nos casos com mesmo tipo de carregamento, frequências naturais não consideradas inicialmente para o cálculo da reconstrução de carregamento foram excitadas, como pode ser visto na Figura 4.77 em que há vários picos na força reconstruída. Além disso, como o CN da matriz FRF apresentou grau elevado de instabilidade, os resultados obtidos tornam-se pouco confiáveis.

4.2.5 Caso 5

O caso 5 é constituído das configurações 15 a 18, no qual as condições de análise utilizadas para este caso e a equação matricial para reconstrução das forças aplicadas são as mesmas utilizadas no caso 4. Neste caso o modelo de elasticidade bidimensional tem seção variável e dois furos na geometria, o modelo possui 853 elementos do tipo *PSHELL* [Hyperworks, 2013] de quatro nós por elemento e três graus de liberdade (u , v e θ) como ilustrado na Figura 4.78. As dimensões do modelo são: $D=8\text{m}$, $d=4\text{m}$, $e_1=10\text{m}$, $e_2=20\text{m}$, $b=10\text{m}$, $L=60\text{m}$.

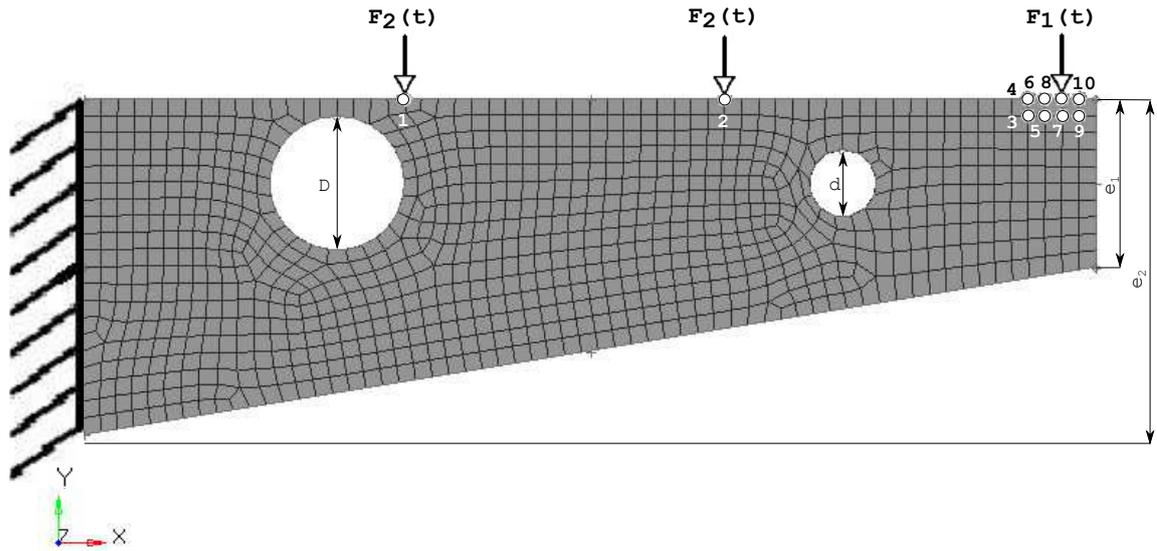


Figura 4.78 – Caso 5.

O gráfico do CN da matriz FRF deste modelo está ilustrado na Figura 4.79, e assim como no caso 4 o gráfico do CN apresenta elevada instabilidade.

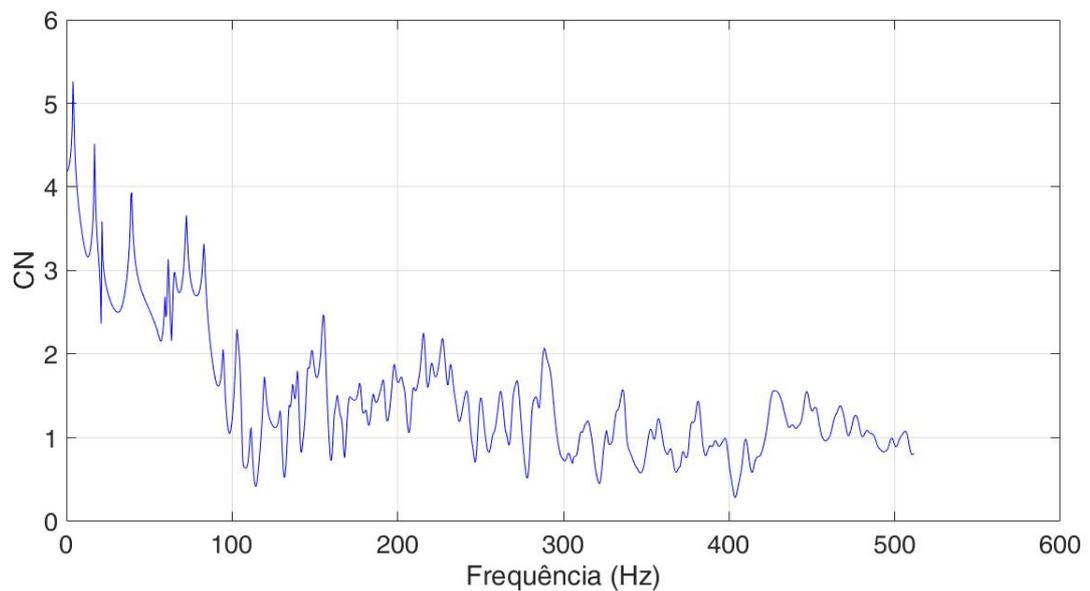


Figura 4.79 – Gráfico do número de condicionamento (CN) da matriz FRF no domínio da frequência para o caso 5.

Também foi avaliado neste caso, a influência da frequência de excitação do primeiro modo de vibração que, para este modelo, é de aproximadamente de 4,17 Hz.

4.2.5.1 Configuração 15

Na configuração 15 a força aplicada F_1 é do tipo senoidal e a força F_2 é considerada nula. As Figuras 4.80 e 4.81 ilustram o caso no domínio do tempo e da frequência respectivamente.

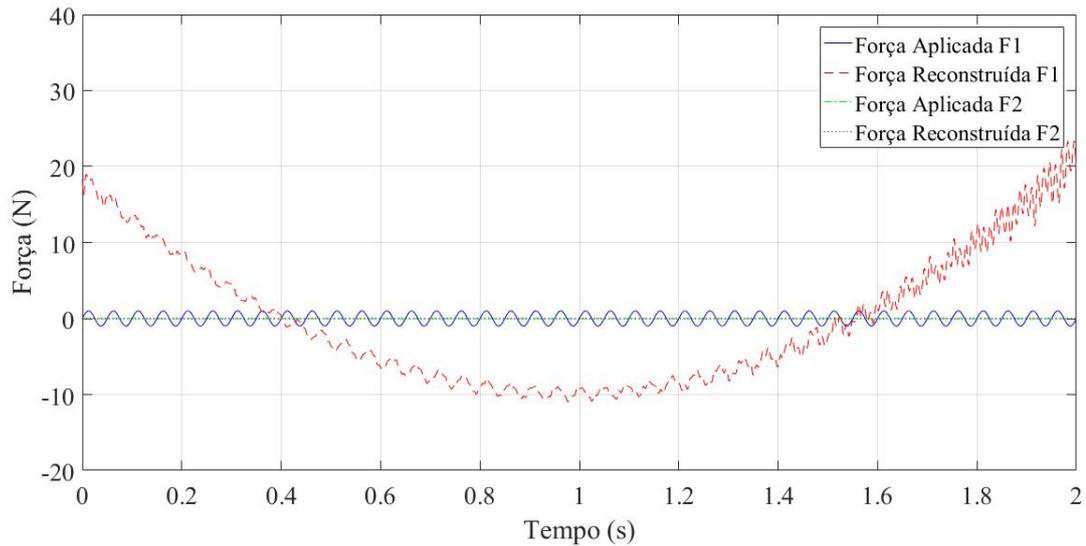


Figura 4.80 – Configuração 15: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

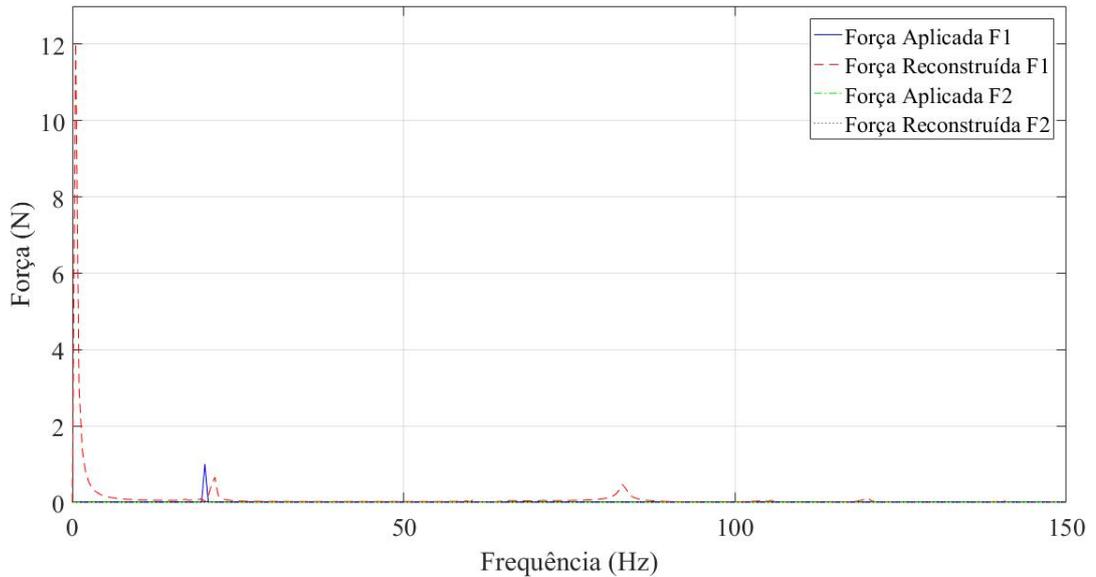


Figura 4.81 – Configuração 15: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Nas Figuras 4.82 e 4.83 é ilustrado o mesmo caso porém desconsiderando as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

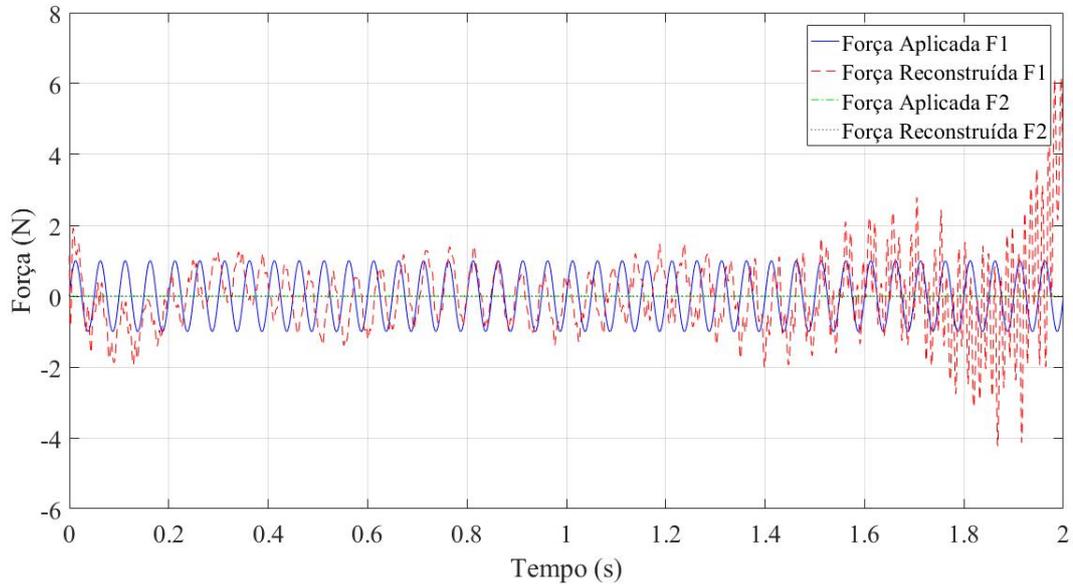


Figura 4.82 – Configuração 15: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

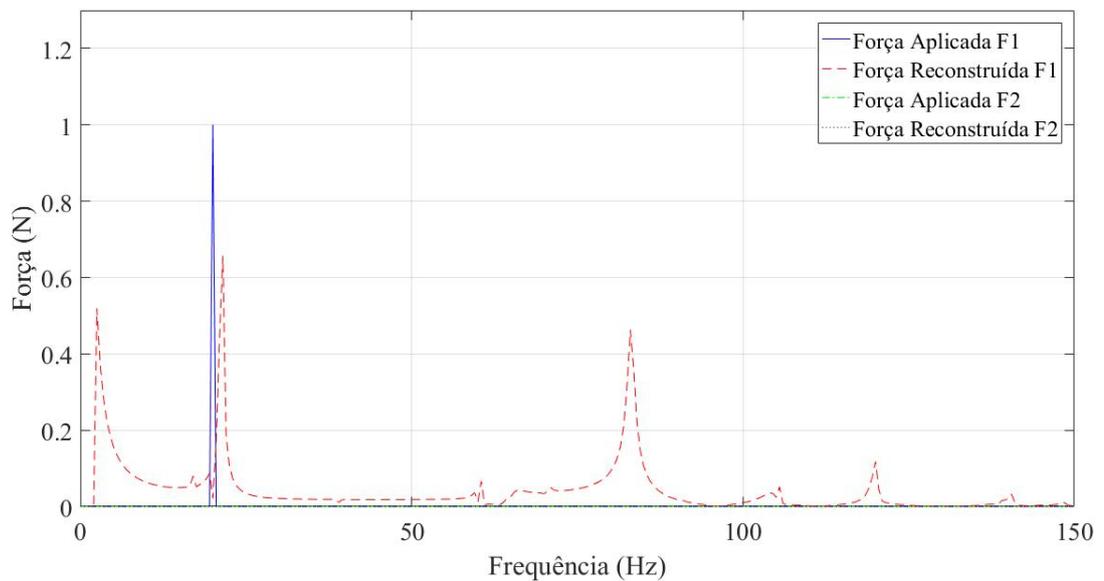


Figura 4.83 – Configuração 15: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Neste caso é possível notar mais picos na força reconstruída do que na configuração

11, na qual foi aplicada o mesmo tipo de carregamento em uma viga de seção uniforme. Porém, devido à instabilidade do CN , como esperava-se, os resultados obtidos não foram satisfatórios. Desta forma, não foi possível avaliar a influência dos furos na geometria.

4.2.5.2 Configuração 16

Na configuração 16 a força aplicada F_1 é do tipo multisenso, com frequências iguais a 15 e 30 Hz, e a força F_2 é considerada nula. As Figuras 4.84 e 4.85 ilustram o caso no domínio do tempo e da frequência, respectivamente.

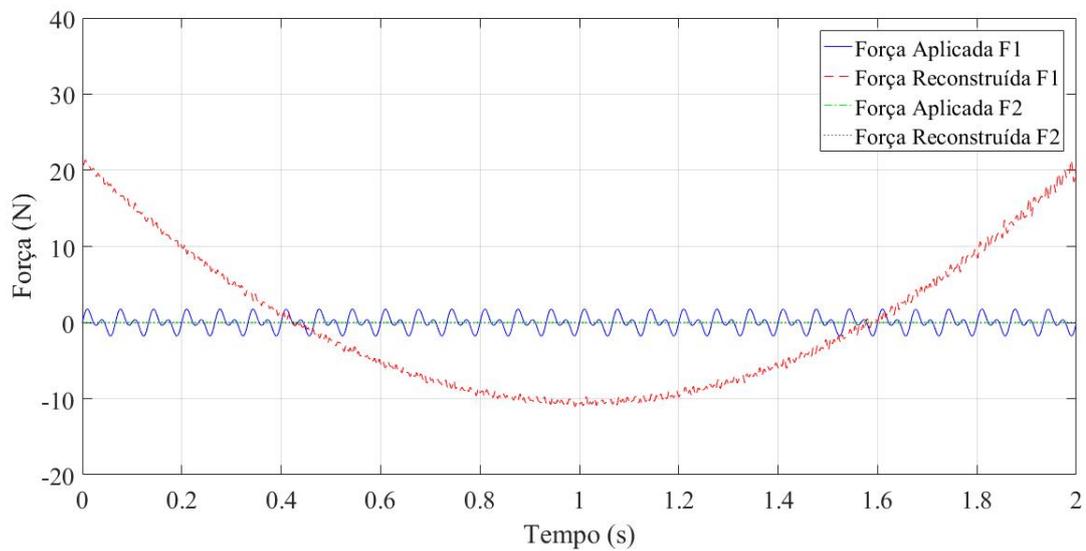


Figura 4.84 – Configuração 16: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

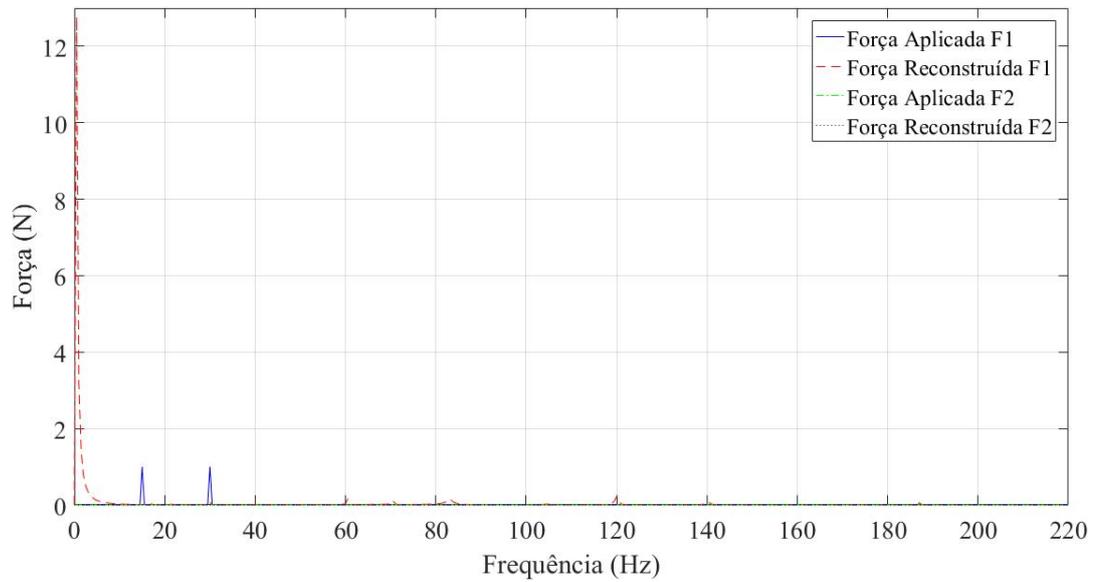


Figura 4.85 – Configuração 16: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

O mesmo caso é ilustrado nas Figuras 4.86 e 4.87 desconsiderando as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

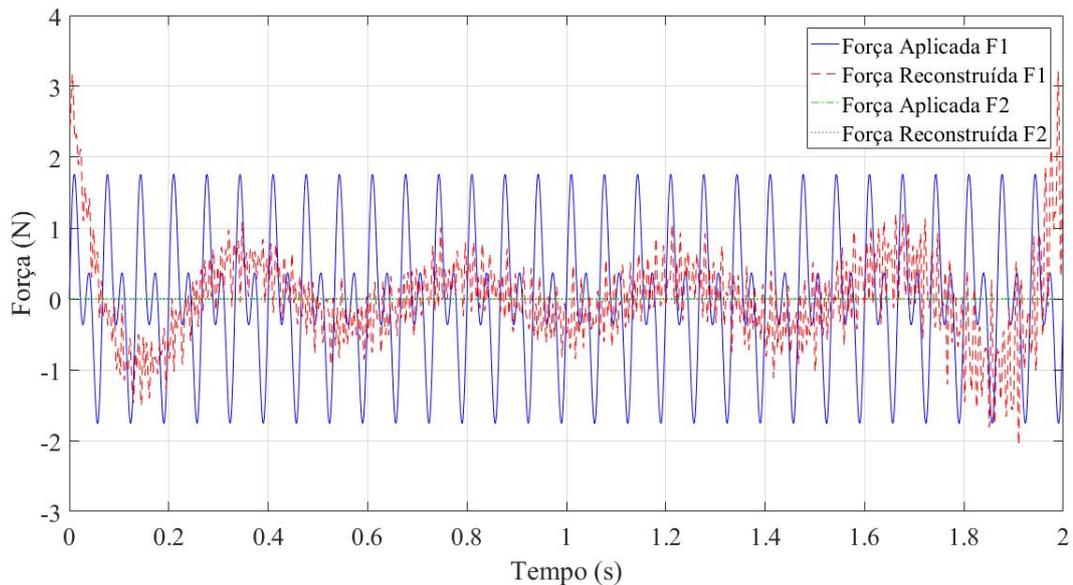


Figura 4.86 – Configuração 16: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

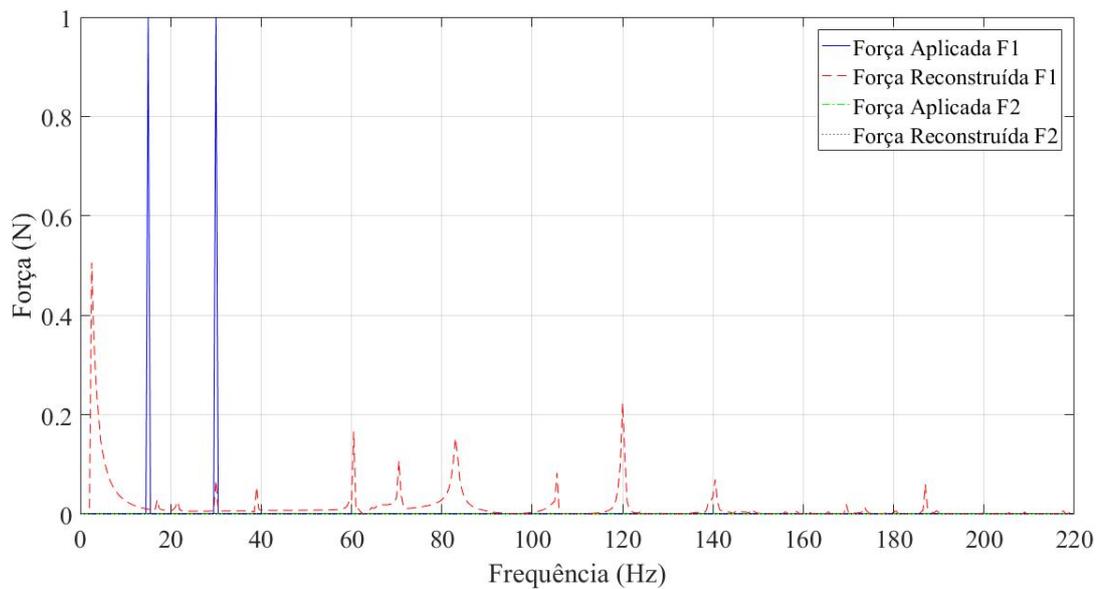


Figura 4.87 – Configuração 16: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Neste caso também é possível notar vários picos na força reconstruída mesmo com as frequências inferiores ao primeiro modo de vibração desconsideradas. Nota-se, também, que a frequência de 15 Hz não foi capturada e que nem 10 % da frequência de 30 Hz pode ser identificada.

4.2.5.3 Configuração 17

Na configuração 17 a força F_1 é do tipo seno aplicada em um intervalo de 0,2 segundos e a força F_2 é considerada nula. As figuras 4.88 e 4.89 ilustram o caso no domínio do tempo e da frequência respectivamente.

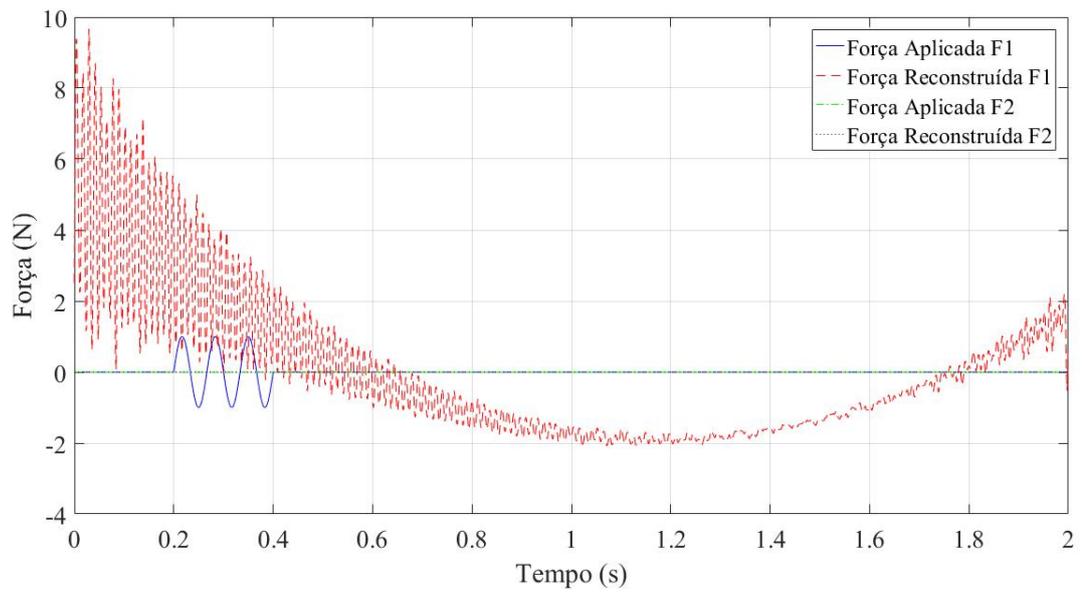


Figura 4.88 – Configuração 17: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

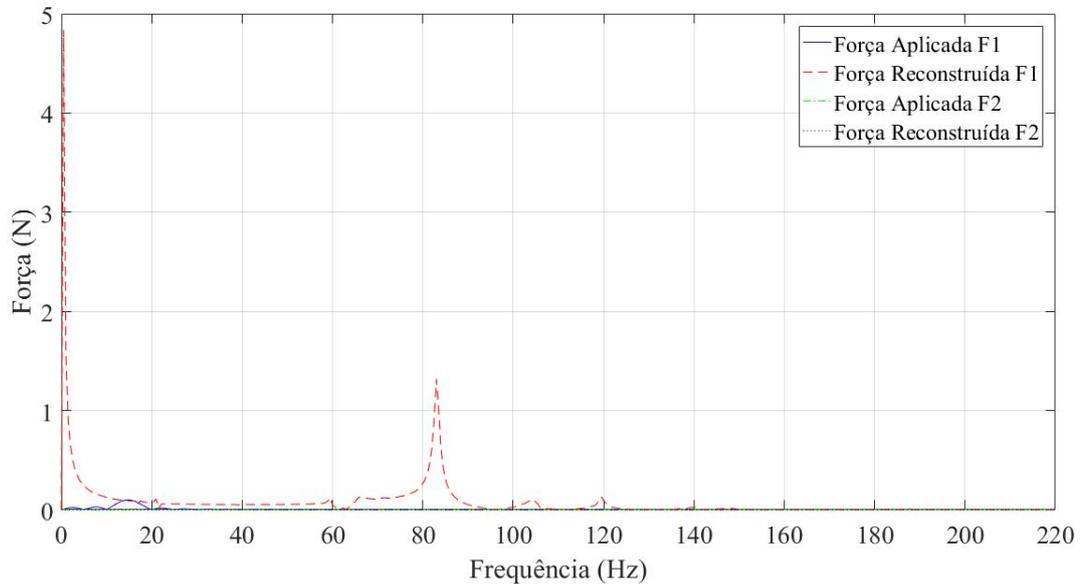


Figura 4.89 – Configuração 17: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

No caso ilustrado nas Figuras 4.90 e 4.91 são desconsideradas as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

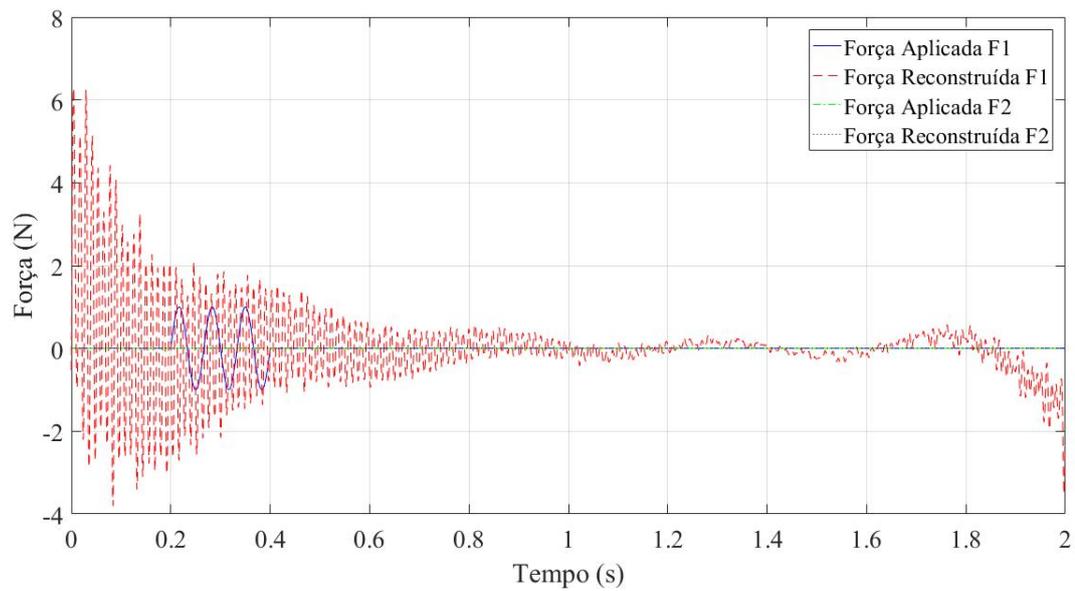


Figura 4.90 – Configuração 17: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

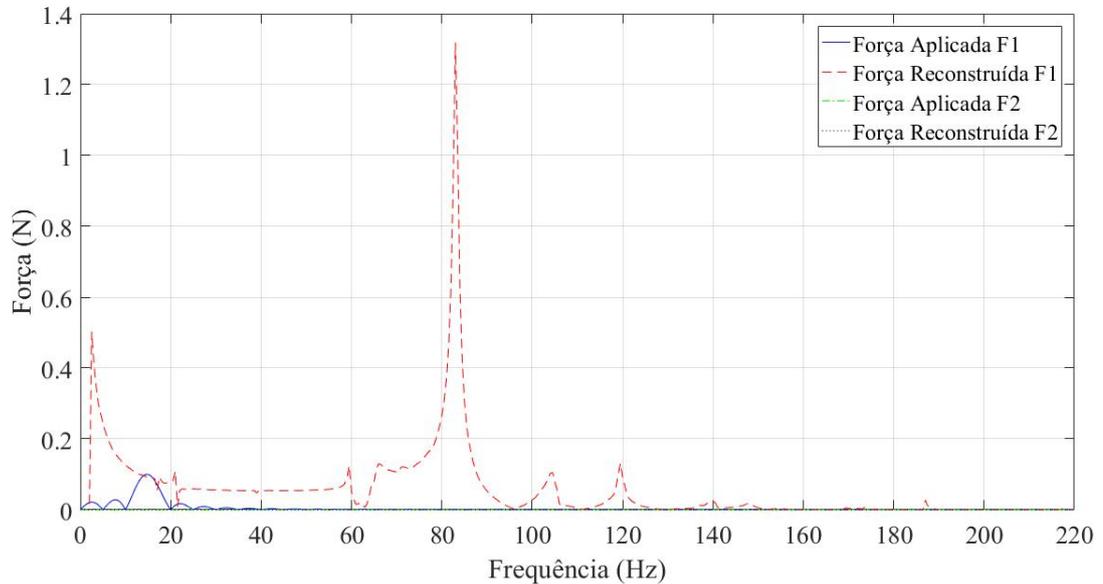


Figura 4.91 – Configuração 17: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Neste caso também se nota vários picos na força reconstruída. Outra observação é que no intervalo de aplicação do carregamento há elevado nível de ruído que ao término da aplicação vai diminuindo com o tempo, como pode ser visto nas Figuras 4.88 e 4.90. Desta

forma, os resultados obtidos não foram satisfatórios devido à influência da instabilidade do CN .

4.2.5.4 Configuração 18

Na configuração 18 a força aplicada F_1 é do tipo degrau e a força F_2 é considerada nula. As figuras 4.92 e 4.93 ilustram o caso no domínio do tempo e da frequência respectivamente para intervalos de tempo diferentes. Nas figuras 4.94 e 4.95 são desconsideradas as frequências inferiores à frequência de excitação do primeiro modo de vibração.

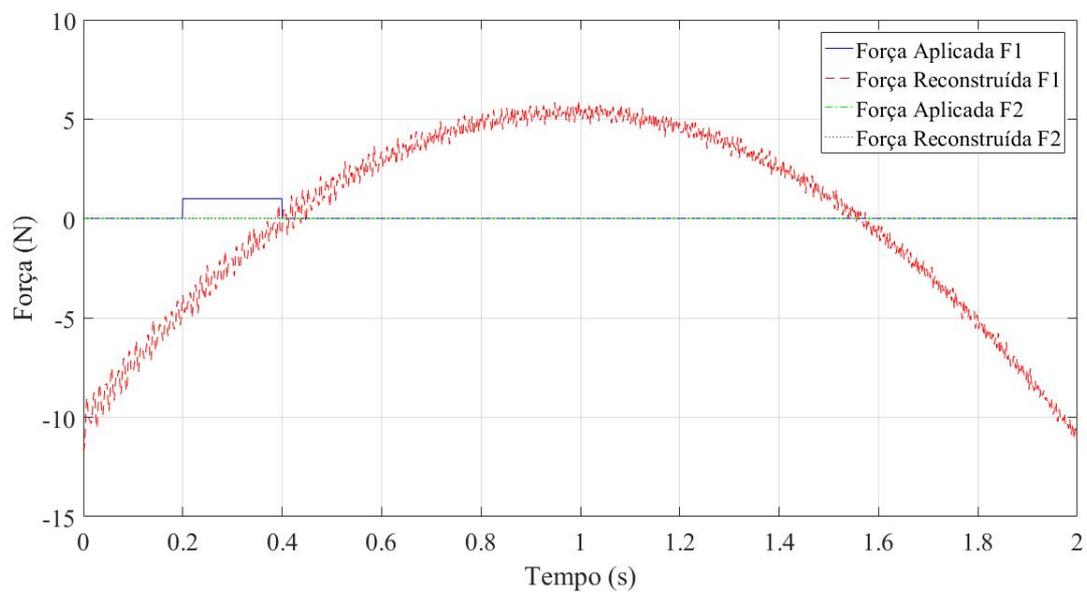


Figura 4.92 – Configuração 18: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

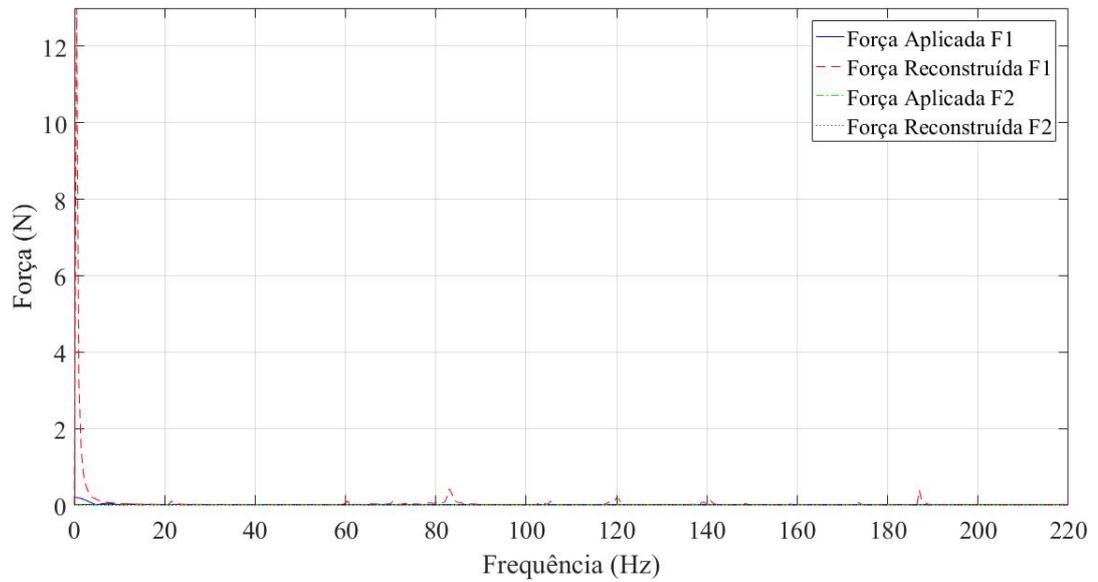


Figura 4.93 – Configuração 18: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

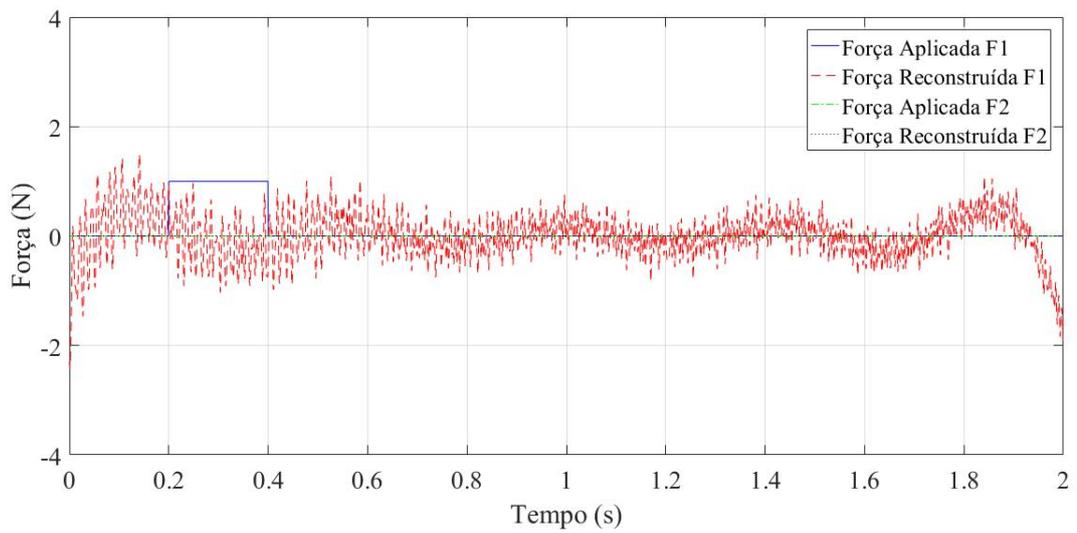


Figura 4.94 – Configuração 18: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio do tempo.

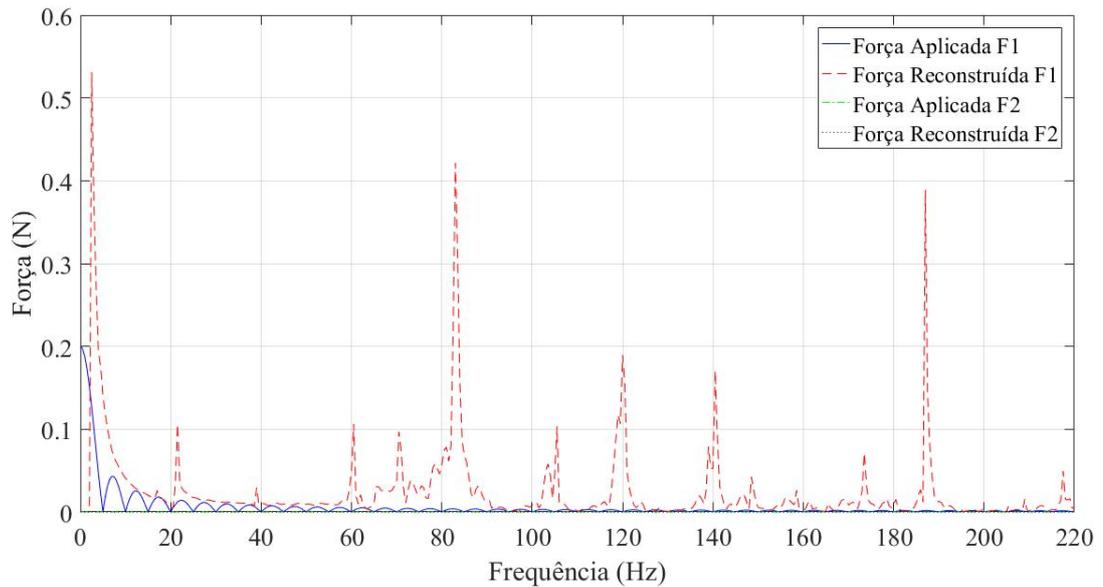


Figura 4.95 – Configuração 18: comparação entre força aplicada e reconstruída no domínio da frequência.

Neste caso, assim como apresentado na configuração 14, o carregamento aplicado excitou frequências naturais que não foram inicialmente consideradas para o cálculo de reconstrução do carregamento. Além da influência da frequência de excitação do primeiro modo de vibração e do CN da matriz FRF apresentar grau elevado de instabilidade, tornando os resultados pouco confiáveis, estas frequências não consideradas inicialmente levam a resultados errôneos.

4.3 Diretrizes para utilização da pseudo-inversa de Moore-Penrose na reconstrução de carregamento dinâmico

Após realização da aplicação analítica e numérica, se pode observar como a metodologia de reconstrução de carregamento dinâmico usando a pseudo-inversa de Moore-Penrose funciona dentro das condições de análise dessa dissertação. Dessa forma pode-se definir uma proposta de diretrizes para utilização desta metodologia de forma genérica em busca de uma maior assertividade na aplicação desse método.

A proposta de diretrizes para utilização do método pseudo-inverso na reconstrução de carregamento dinâmico é descrita na sequência, onde se pode visualizar de maneira simplificada os fatores que têm maior influência sobre os resultados:

- CN - O número de condicionamento (CN) da matriz FRF do sistema de análise é um dos primeiros itens que deve ser considerado. Não é assegurado que com um baixo número do CN a reconstrução de carregamento dinâmico utilizando a pseudo-inversa de Moore-Penrose seja realizada de forma satisfatória, porém quando o CN possui um valor elevado, a possibilidade de estar apenas amplificando um ruído sem informações relevantes sobre o carregamento é alta, obtendo assim resultados errôneos. A irregularidade do gráfico do CN também prejudica a identificação das componentes de frequência que devem ser ignoradas para a reconstrução de carregamento.
- Faixa de frequência da FRF - Esta técnica aqui apresentada requer uma boa modelagem da matriz FRF . Para o caso em que a excitação do carregamento for maior que a frequência útil da FRF , como por exemplo se a frequência útil da FRF medida vai até 1024 Hz mas a excitação do carregamento é 2000 Hz, a metodologia aqui estudada não funcionará bem, pois a modelagem do sistema nesta região não será boa. Portanto, se torna importante conhecer previamente a frequência de excitação do sistema para poder modelar a matriz FRF com igual ou maior frequência de excitação. Desta forma, nem todo o carregamento dinâmico pode ser recuperado com a técnica aqui testada.
- Faixa de excitação do carregamento - Para conseguir reconstruir o carregamento, também é necessário que a faixa de excitação analisada respeite a frequência de Nyquist, isto é, se a força atuante no sistema de análise está em torno de 600 Hz, a faixa de frequência de excitação utilizada para a medição das respostas deve ser no mínimo 1200 Hz.
- Número de pontos de medição - Conforme citado no Capítulo 2, essa metodologia mostrou melhores resultados quando aplicada a sistemas sobredeterminados. Desta forma, a probabilidade de assertividade na utilização desse método é maior se o número de pontos para medição das respostas for maior do que o número de forças atuantes no sistema.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um estudo sobre a reconstrução de carregamento dinâmico usando um método pseudo-inverso. Buscou-se, inicialmente, um conhecimento detalhado sobre a reconstrução de carregamento dinâmico usando um método pseudo-inverso, mais especificamente o método pseudo-inverso aplicado de forma direta, isto é, sem regularizações. Os resultados obtidos da aplicação do método foram comparados em diferentes modelos em processos analíticos e numéricos de reconstrução de carregamento.

A partir da revisão bibliográfica obteve-se um importante resultado: a verificação quanto à funcionalidade do método abordado neste trabalho. O Capítulo 2 organiza os fundamentos necessários para a compreensão da aplicação do método pseudo-inverso, tais como conceitos básicos em vibrações, FRF , problemas inversos, entre outros.

Neste estudo, foi possível verificar as dificuldades encontradas, as vantagens associadas ao método e sugerir boas práticas. As aplicações apresentadas no Capítulo 4 revelaram maior eficiência para problemas simples e bem definidos previamente, isto é, problemas nos quais se pode conhecer a maior parte das condições impostas ao problema inicialmente. O conhecimento prévio aproximado da faixa de excitação do carregamento que foi aplicado à estrutura é importante para se poder realizar as análises na faixa de atuação que abranja este carregamento aplicado. Também se pôde verificar que quando se conhece apenas as informações de saída do problema, a metodologia não é capaz de reconstruir o carregamento, em casos genéricos. Outro ponto de análise foi a influência da frequência de excitação do primeiro modo de vibração: observou-se que ela pode ser dominante em alguns casos, descaracterizando completamente o carregamento inicialmente aplicado. Como vantagem deste método, se pode citar como uma ferramenta útil para avaliar as solicitações sofridas por estruturas simples em casos bem definidos inicialmente.

Conforme mencionado no Capítulo 1 esses métodos podem ser instáveis e funcionar apenas para certos casos, e a metodologia que utiliza termos dependentes do domínio da frequência pode apresentar um mal-condicionamento associado à matriz FRF , podendo gerar erros significativos nos resultados. Desta forma, torna-se importante salientar que para o problema de estudo é necessário conhecer previamente a faixa de frequência da força atuante na estrutura de modo a reconstruir a força aplicada de maneira satisfatória. Portanto o método estudado mostrou-se ineficiente em casos em que se tem apenas as

respostas de alguns pontos da estrutura, como foi o caso da força em degrau, onde se aplicou um carregamento que se excitou frequências que não foram consideradas para o cálculo da matriz FRF fazendo com que se obtivesse uma força reconstruída diferente da força aplicada.

5.1 Sugestões para Trabalho Futuros

Primeiramente, ressalta-se que a metodologia pseudo-inversa possui potencial de aplicação para reconstrução de carregamento dentro do contexto da engenharia.

A partir do trabalho realizado ao longo desta dissertação, ficam aqui registrados as seguintes propostas para trabalhos futuros:

- Refazer este estudo utilizando dados experimentais na etapa 3 da Figura 3.1 como resposta transiente no lugar da simulação numérica.
- Comparação com outra metodologia que possua a mesma finalidade.
- Otimização da localização dos pontos de medição das respostas.
- Avaliar a influência das condições de contorno.
- Avaliar a influência dos modos de vibração.
- Comparar custos de simulação numérica com análise experimental.

O primeiro item se refere a etapa 3 da Figura 3.1, onde é sugerido que se faça uma análise experimental para obtenção das respostas e posterior montagem da matriz FRF e do vetor Y para utilizar a metodologia aqui apresentada, ao invés da utilização de dados de simulação numérica.

A segunda sugestão se refere a metodologias que utilizem regularizações, que sejam somente no domínio do tempo ou da frequência mas que possuam a mesma finalidade de reconstrução de carregamento dinâmico a partir do uso do método pseudo-inverso.

Os pontos de medição para montagem da matriz FRF e do vetor de respostas Y foram escolhidos neste trabalho de modo que fossem próximos ao local de aplicação do carregamento, desta forma sugere-se a otimização da localização desses pontos de medição de modo a identificar pontos desnecessários para utilização da metodologia aqui apresentada.

Como neste trabalho avaliou-se a condição de contorno do tipo engastada-livre e a influência da frequência de excitação do primeiro modo de vibração dos modelos, se torna relevante avaliar a aplicação deste método para outras condições de contorno e a influência da frequência de excitação de outros modos de vibração.

Devido à não necessidade de construção de um protótipo físico para a simulação numérica espera-se que os custos computacionais sejam menores do que da análise experimental, porém para algumas aplicações se torna importante comparar estes custos a fim de garantir a utilização da metodologia mais eficiente com o menor custo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aster, R., Thurber, C., and Borchers, B. **Parameter Estimation and Inverse Problems**. Number v. 1 in International geophysics series. Elsevier Academic Press, 2005.

Bartlett, F. and Flannelly, W. Model verification of force determination for measuring vibratory loads, **Journal of the American Helicopter Society**, vol. 24(2), p. 10–18, 1979.

Bekey, G. A. System identification-an introduction and a survey, **Simulation**, vol. 15(4), p. 151–166, 1970.

Ben-Israel, A. and Greville, T. N. **Generalized inverses: theory and applications**. volume 15. Springer Science & Business Media, 2003.

Bendat, J. and Piersol, A. **Random data: analysis and measurement procedures**. Wiley-Interscience, 1971.

Dobson, B. and Rider, E. A review of the indirect calculation of excitation forces from measured structural response data, **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Mechanical Engineering Science**, vol. 204(2), p. 69–75, 1990.

Ewins, D. **Modal Testing: Theory and Practice**. Engineering dynamics series. Wiley, 1984.

Fabunmi, J. A. Effects of structural modes on vibratory force determination by the pseudoinverse technique, **AIAA journal**, vol. 24(3), p. 504–509, 1986.

Hansen, P. C. **Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion**. SIAM, 1998.

Hyperworks, A. **HyperMesh User's Manual**, 2013.

Irvine, T. An introduction to frequency response functions, **Rapport, College of Engineering and Computer Science**, vol. , 2000.

Karlsson, S. Identification of external structural loads from measured harmonic responses, **Journal of sound and vibration**, vol. 196(1), p. 59–74, 1996.

Khoo, S., Ismail, Z., Kong, K., Ong, Z., Noroozi, S., Chong, W., and Rahman, A. Impact force identification with pseudo-inverse method on a lightweight structure for under-determined, even-determined and over-determined cases, **International Journal of Impact Engineering**, vol. 63, p. 52–62, 2014.

Lage, Y., Maia, N., and Neves, M. Force magnitude reconstruction using the force transmissibility concept, **Shock and Vibration**, vol. 2014, 2014.

Lage, Y., Maia, N., Neves, M., and Ribeiro, A. **A Force Identification Approach for Multiple-Degree-of-Freedom Systems**. In *Dynamics of Civil Structures, Volume 4*, pages 53–61. Springer, 2011.

Lage, Y., Maia, N., Neves, M., and Ribeiro, A. Force identification using the concept of displacement transmissibility, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 332(7), p. 1674 – 1686, 2013.

Lage, Y. E. **Identificação e Transmissibilidade de Forças em Sistemas Dinâmicos com Múltiplos Graus de Liberdade**. Tese de doutorado, Universidade de Lisboa, 2014.

Lathi, B. **Sinais e Sistemas Lineares - 2.ed.**: Bookman Companhia Ed, 2007.

Liu, W. and Ewins, D. **Transmissibility properties of MDOF systems**. In *Proceedings-Spie The International Society For Optical Engineering*, volume 2, pages 847–854. Spie International Society For Optical, 1998.

Maia, N., Lage, Y., and Neves, M. **Recent advances on force identification in structural dynamics**. In *Advances in Vibration Engineering and Structural Dynamics*. InTech, 2012.

Maia, N. M., Urgueira, A. P., and Almeida, R. A. **Whys and wherefores of transmissibility**. In *Vibration Analysis and Control-New Trends and Developments*. InTech, 2011.

MathWorks. **MatLab: Manual do Usuário**, 2010.

Moura, H. G. d. **Métodos de identificação de forças em sistemas vibroacústicos**. Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2010.

Neves, M. and Maia, N. **Estimation of applied forces using the transmissibility concept**. In *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering*, pages 3887–3897, 2010.

Padilha, P. E. F. **Comparação de Técnicas de Análise de Caminhos de Transferência Vibroacústicas**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2006.

Rao, S. **Mechanical Vibrations**. Pearson Prentice Hall, 2011.

Ribeiro, A., Silva, J., and Maia, N. On the generalisation of the transmissibility concept, **Mechanical Systems and Signal Processing**, vol. 14(1), p. 29–35, 2000.

Santos, A. R. S. d. and Marczak, R. J. A study on dynamic load history reconstruction using pseudo-inverse methods, **Revista interdisciplinar de pesquisa em engenharia**, vol. 2, p. 31–36, 2016.

Uslu, A. A., Sanliturk, K. Y., and Gul, M. **Force estimation using vibration data**. In *Inter-Noise and Noise-Con Congress and Conference Proceedings*, volume 2007, pages 2961–2969. Institute of Noise Control Engineering, 2007.

Vishwakarma, R., Turner, D., Lewis, A., Chen, Y., Houghton, P., and Xu, Y. **Load reconstruction on a missile structure using the Pseudo-Inverse methods.** In *Modelling, Identification and Control (ICMIC), The 2010 International Conference on*, pages 100–105. IEEE, 2010.

Zhang, L. **Nyquist-Shannon Sampling Theory.** <https://leightonzhang.com/2016/11/08/nyquist-shannon-sampling-theory/>, 2016, Acesso em: 17-12-2017.

Zontini, D. D. **Métodos computacionais para inversas generalizadas.** Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná, 2014.