UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Uma Representação Construtiva Global para Sistemas Ordenados de 2ª Ordem em Espaços Coerentes Intervalares Bi-Estruturados, com Aplicação em Matemática Intervalar

por

GRAÇALIZ PEREIRA DIMURO

Tese submetida à avaliação como
requisito parcial para a obtenção do grau de
Doutor em Ciência da Computação

Prof. Dr. Dalcidio Moraes Claudio
Prof. Dr. Antônio Carlos da Rocha Costa
Orientadores

Porto Alegre, abril de 1998.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Dimuro, Graçaliz Pereira

Uma Representação Computacional Global para Sistemas Ordenados de 2ª Ordem em Espaços Coerentes intervalares Bi-Estruturados, com Aplicação em Matemática Intervalar/por Graçaliz Pereira Dimuro. - Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1998.

270f. : il

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Porto Alegre, BR-RS, 1998. Orientadores: Claudio, Dalcidio Moraes; Antônio Carlos da Rocha Costa.

1. Teoria dos Intervalos. 2. Computação Científica. 3. Teoria dos Domínios. 4. Espaços Coerentes. 5. Construção de Números Reais. 6. Categorias. I. Claudio, Dalcidio Moraes. II. Costa, Antônio Carlos da Rocha. III. Título

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Profa. Wrana Panizzi

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação : Prof. José Carlos Ferraz Hennemann

Diretor do Instituto de Matemática : Prof. Roberto Tom Price

Coordenador do CPGCC : Prof. Flávio Rech Wagner

Bibliotecária-Chefe do Instituto de Informática : Zita Prates de Oliveira

À Glenda e Rocha...

seria impossível ter navegado tanto,
se não houvesse a certeza
destes portos seguros para me ancorar.

Agradecimentos

Esta tese só se tornou possível pela grandiosidade do amor que encontrei ...

... em minha filha Glenda, forte companheira, profunda amiga, que soube com coragem e firmeza me acompanhar nesta viagem, enfrentando muitas vezes tanta divisão e solidão,

.... nos filhos que a vida foi me trazendo, Cacá e Cristina, que acompanharam minha filha Glenda, com carinho e amizade, e nos outros filhos que a profissão foi me proporcionando, Rafael, Marilton, Fábio e Renatinha, Luis Fernando e Ana Paula, que sempre me levaram alegria e conforto, e, em especial, nos amigos de todas as horas, todos os momentos e todas as situações, Renata e Paulinho, e suas adoráveis filhas Carolina e Cristina,

... em meu orientador e amigo prof. Dr. Dalcídio Moraes Claudio, fonte da tranqüilidade, serenidade e segurança, em minha querida professora Dra. Laira Vieira Toscani, cujos ensinamentos científicos foram tão fundamentais para mim quanto seu carinho e amizade, e em meu amigo e co-orientador do curso de Mestrado, prof. Dr. Benedito M. Acióly, que me contagiou com seu saber e me iniciou nesta viagem com paciência e dedicação,

... em meu amigo prof. Francisco de Paula M. Rodrigues, diretor da Escola de Informática da UCPel, incansável lutador, que com empenho, dedicação, segurança e competência vem conduzindo a transformação da realidade de nossa escola,

... nos alunos do Grupo de Matemática Computacional da UCPel liderados pelo prof. Gerardo S. Sellanes e pelo aluno André DuBois, nos colegas professores e funcionários do NAPI sob a coordenação do prof. Claudio Gastal, nos professores e funcionários da ESIN, em especial, no sorriso de Elisabete B. de Aguiar, todos tão brilhantes, dedicados, apaixonados, que sempre me ajudaram e apoiaram incondicionalmente,

....nos professores, funcionários e dirigentes da reitoria e pró-reitorias da Universidade Católica de Pelotas, e demais setores, em especial, na alegria de Elimar e Marisa, na competência e firmeza da profa. Circe Cunha,

... nos colegas de curso, grupo de Matemática Computacional da UFRGS, e no corpo docente do CPGCC da UFRGS, em especial, nas valiosas sugestões e apoio recebidos do prof. Paulo Blauth Menezes,

... no carinho e interesse do prof. Dr. Philip Mulry (Universidade de Colgate - EUA), que me recebeu em sua casa durante minha estada nos Estados Unidos, proporcionando longas e proveitosas discussões sobre o trabalho,

... nos professores do Instituto de Informática da PUC-RS, em especial, na professora Iara Claudio, que me garantiu espaço para reuniões com os orientadores,

... na CAPES, pelo auxílio em forma de bolsa,

e, em especial, no meu orientador e companheiro prof. Dr. Antônio Carlos da Rocha Costa, que, com incansável dedicação, tornou realidade esse sonho, pela segurança e força que me proporcionou em todos os momentos, não somente através de seus ensinamentos, mas pela humildade e sabedoria com que estudou, participou, vibrou, lutou, observou, apoiou, amou, e enfrentou, juntamente comigo, todas as dificuldades, e com quem compartilho todas as glórias deste trabalho.

Sumário

Lista de Símbolos

$\lhd$	aproximação indexada
$[[p;q]]$	bi-intervalo de guia $[p;q]$
$\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\nabla}(x)$	bola aberta generalizada de raio ε centrada em x
$\mathcal{B}_{\varepsilon}(x)$	bola aberta padrão de raio ε centrada em x
x_w	conjunto coerente de intervalos racionais ligado a w
$\overset{*}{x}$	conjunto coerente no espaço coerente $\dot{\Pi}A$ associado ao produto das subteias
$\dot{x}$	conjunto coerente no produto direto $\dot{\Pi}A$
A	conjunto básico
IA	conjunto de intervalos de elementos básicos
$\mathbb{IA}$	conjunto de intervalos de elementos de $\mathbb{A}$
$\mathbb{IR}^*$	conjunto de intervalos reais estendido
SN($\mathbb{S}$)	conjunto de vizinhanças estáveis definidas em $\mathbb{S}$
LN($\mathbb{S}$)	conjunto de vizinhanças lineares definidas em $\mathbb{S}$
$\mathcal{P}_x$	conjunto de vizinhanças que contém x
D^0	conjunto dos elementos finitos de um espaço coerente D
E^P	conjunto dos elementos primos completos de um espaço coerente E
$\mathbb{S}_{\mathrm{uni}}$	conjunto dos elementos unitário de $\mathbb{S}$
$\mathbb{IR}^*_{pos}$	conjunto dos intervalos positivos de $\mathbb{IR}^*$
IQ_{pos}	conjunto dos intervalos positivos de IQ
IQ	conjunto dos intervalos racionais
$\mathbb{IR}$	conjunto dos intervalos reais
I($\mathbb{R}$)	conjunto dos intervalos reais de Moore
COSP($\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$)	conjunto dos morfismos de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ em **COSP**
N	conjunto dos números naturais
Q	conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$qtot$(IIQ)	conjunto dos objetos quasi-totais de IIQ
tot(IIQ)	conjunto dos objetos totais de IIQ
$\mathcal{A}_{fin}$	conjunto dos pontos finitos do espaço coerente $\mathcal{A}$

IIQ_{pos}	conjunto dos pontos positivos de IIQ
$\wp(X)$	conjunto potência ou das partes de X
Coh	construtor de espaço coerente
t_{Σ}	construtor de estruturas
t_F	construtor de funções
[ ]	construtor intervalar
t_R	construtor de relações
t	construtor de sistemas
t_u	construtor de universos
D	diâmetro
d	distância
$\mathbf{I}\mathbb{R}$	domínio contínuo de intervalos de Edalat
$\boldsymbol{R}$	domínio intervalar contínuo de Acióly
$\underline{A}$	domínio plano ou "flat"
ev_t^S	endofunctor evolução, regulada por S, pela ação do construtor t
$Rxp_{I,J}$	endofunctor expansão relativa a I,J
$Red_{I,J}$	endofunctor redução relativa a I,J
$\mathcal{A}$	espaço coerente constituido pela coleção de subconjuntos coerentes de uma teia **A** parcialmente ordenados pela inclusão
IIA	espaço coerente de gerado pelo conjunto básico A
IIQ	espaço coerente de intervalos racionais gerado por Q
$[\mathcal{A} \xrightarrow{St} \mathcal{B}]$	espaço coerente dos traços das funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$
$[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$	espaço coerente dos traços lineares das funções lineares de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$
$(\mathcal{A} \xrightarrow{St} \mathcal{B})$	espaço das funções estáveis de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$
$(\mathcal{A} \xrightarrow{lin} \mathcal{B})$	espaço das funções lineares de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$
$II(Q)$	espaço de informação
$(\mathbb{S},\mathcal{N})$	espaço de vizinhanças definidas sobre $\mathbb{S}$
$(\mathbb{S},\mathbf{SN}(\mathbb{S}))$	espaço de vizinhanças estáveis definidas sobre $\mathbb{S}$
$(\mathbb{S},\mathbf{LN}(\mathbb{S}))$	espaço de vizinhanças lineares definidas sobre $\mathbb{S}$
EVG	espaço de vizinhanças generalizadas
$(\mathbb{S},\mathcal{D}(\mathbb{S}))$	espaço disjuntivo definido sobre $\mathbb{S}$
$II(\mathbb{R})$	espaço dos reais parciais

$\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$	espaço funcional de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$
$\Sigma_{\mathbb{A}}^{ap}$	estrutura de aplicação de um sistema de 2ª ordem bi-estruturado de universo $\mathbb{A}$
$\Sigma_{\mathbb{A}}^{in}$	estrutura de informação de um sistema de 2ª ordem bi-estruturado de universo $\mathbb{A}$
$\Sigma_{\mathbb{A}}$	estrutura de um sistema de 2ª ordem de universo $\mathbb{A}$
$\angle_t^S$	evolução, regulada por S, pela ação do construtor de sistemas t
!	exponencial
r	extremo direito
l	extremo esquerdo
$Coh(\mathrm{A})$	família de conjuntos coerentes de uma teia A
$Fincoh(\mathrm{A})$	família de conjuntos coerentes finitos de uma teia A
X_{IQ}	família dos conjuntos de intervalos racionais ligados a intervalos racionais
X_Q	família dos conjuntos ligados a racionais
$X_{\overline{IQ}}$	família dos conjuntos não-ligados a intervalos
$X_{\overline{Q}}$	família dos conjuntos não-ligados a racionais,
$\hat{f}\|_S$	fecho da função f relativo ao subsistema S
$\hat{h}\|_{S,S'}$	fecho do homomorfismo h relativo aos subsistemas S e S'
$\hat{x}$	fecho indexado de um conjunto coerente $x \in \Pi Q$
$\uparrow Y$	filtro principal gerado por Y
$curry$	função de currificação
$eval$	função de avaliação
$\dot{f}$	função de objetos no espaço coerente $\dot{\Pi}A$ associado ao produto das subteias
$\dot{f}$	função de objetos no produto direto $\dot{\Pi}A$
$\langle , \rangle$	função mediadora ou de pareamento
id	função identidade
$[a,b,f]$	função parâmetro
π_0, π_1	funções projeções associadas ao produto direto
$gr(F)$	grafo da função F
$F[X]$	imagem do conjunto X pela função F

$\widetilde{\underline{\Diamond}}$	imersão
$i(x)$	índice de um conjunto coerente x
$ir(x)$	índice real de um conjunto coerente
$\bigcap_{\mathbb{R}}$	interseção em $\mathbb{R}$
$\bigcap_{Q}$	interseção em Q
ICF	Interval Computable Functions
$[a,b]$	intervalo de extremos a e b
$p(\mathrm{A})$	intervalo próprio do intervalo dirigido A
$\overline{\mathrm{I}(\mathbb{R})}$	intervalos impróprios
$\cong$	isomorfismo
$\cong_{ap}$	isomorfismo para a estrutura de aplicação
$\top$	maior elemento ou topo de um cpo
$\bot$	menor elemento ou bottom de um cpo
$\underline{\varnothing}$	objeto terminal de **COSP**, **STAB** e **LIN**
dual	operador de elemento dual
cl	operador de fecho
int	operador de interior
$\ll$	ordem de aproximação
$\leq_B$	ordem de Berry ou ordem estável
$\sqsubseteq$	ordem de informação
$\prod$	produto direto
$\otimes$	produto tensorial
qf	quasi-função
$*^q$	quasi-operação
$\Sigma_{\downarrow I,J}$	redução da estrutura relativamente a I,J
$\prec$	redução de sistemas
R_S	regulação de sistemas
$\approx_A$	relação de coerência em A
$\approx_{\leq_A}$	relação de coerência induzida por $\leq_A$
$\dot{\approx}$	relação de coerência no espaço coerente $\dot{\Pi}A$ associado ao produto das subteias

$\dot{\approx}$	relação de coerência no produto direto $\dot{\amalg}A$
$\sqsubseteq_{\mu}$	relação minimalmente menor que
$\overline{\amalg A}$	representação de $\amalg A$ no conjunto das partes
$\dot{\amalg}A$	representação de $\amalg A$ pelo espaço coerente associado ao produto das subteias
$\dot{\amalg}A$	representação de $\amalg A$ pelo produto direto de subespaços
$\mathbf{M} = (\mathbf{D}_{K,A}, \mathbf{K}, \mathbf{A})$	sistema de mecanismos computacionais
$\mathsf{A} = (\Lambda_{\mathbb{A}} ; \Sigma_{\mathbb{A}})$	sistema ordenado de 2ª ordem, com universo $\mathbb{A}$ e estrutura $\Sigma_{\mathbb{A}}$ definida para $\mathbb{A}$ e $\wp(\mathbb{A})$
IIQ	sistema ordenado de 2ª ordem bi-estruturado dos intervalos racionais
IA	sistema ordenado de 2ª ordem do conjunto de intervalos de elementos de $\mathbb{A}$ estendido
IQ	sistema ordenado de 2ª ordem dos intervalos racionais
IR	sistema ordenado de 2ª ordem dos intervalos reais estendido
Q	sistema ordenado de 2ª ordem dos números racionais
R	sistema ordenado de 2ª ordem dos números reais
$+^{-}$	soma interior
$M_{\mathbb{A}}$	subestrutura de medidas de um sistema de universo $\mathbb{A}$
X_Q	subsistema de conjunto ligados
$S(X)$	subsistema de X
qtot	subsistema de objetos quasi-totais
tot	subsistema de objetos totais
$\sqcup$	supremo
$\lvert\mathcal{A}\rvert$	teia de um conjunto coerente $\mathcal{A}$
$(IA, \approx_{\leq_A})$	teia induzida
$\mathcal{O}(\mathbb{S})$	topologia associada ao espaço de vizinhanças $(\mathbb{S},\mathcal{N})$
$tr(F)$ $(ltr(F))$	traço (traço linear) da função estável F
$\dot{\cup}$	união disjunta
$\bigcup^{\uparrow}$	uniões dirigidas relativamente a $\subseteq$
$\lvert\ \rvert$	valor absoluto ou módulo

$\uparrow d$	vizinhança estável (linear) principal gerada por d
U_X	vizinhança estável (linear) relativa a X

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Resumo

Este trabalho consiste no desenvolvimento de uma metodologia para a obtenção de representações construtivas de sistemas ordenados de 2ª ordem, baseadas em estruturas de espaços coerentes, com aplicação fundamental na Computação Científica e Matemática Intervalar. Obtém-se assim uma representação global para os objetos ditos infinitos relativamente ao conteúdo de informação, como números reais e intervalos reais, de tal forma que possam ser definidos modelos semânticos adequados para os processos computacionais envolvendo tais objetos. Esta representação construtiva é denominada de global, pois é realizada em dois níveis distinguíveis, compreendendo não somente a construção interna dos objetos, no contexto de uma da estrutura de informação, mas também sua estrutura externa de aplicação. A estrutura de informação tem caráter compatível com uma abordagem domínio-teorética, e a estrutura de aplicação é determinada pelo uso pretendido do sistema representado. Existe um relacionamento entre os dois níveis de construção, garantindo que cada componente da estrutura de aplicação tenha uma representação interna na estrutura de informação. Os sistemas de representação global resultantes são denominados então espaços coerentes bi-estruturados, e têm a característica adicional de serem gerados por um sistema ordenado básico de universo enumerável. A estrutura de informação é um espaço coerente, com funções lineares e uma estrutura topológica de informação compatível. A estrutura de aplicação - algébrica, de ordem, relacional, funcional, de medidas, topológica, dentre outras - é obtida por um processo construtivo a partir da estrutura do sistema básico. Um espaço coerente bi-estruturado, obtido por esse processo de construção, é a representação global de um dado sistema ordenado de 2ª ordem quando é possível recuperar este sistema através do subsistema dos objetos totais do espaço, pela determinação de isomorfismos para a estrutura de aplicação. Da mesma forma, estabelecendo também isomorfismos para o subsistema dos intervalos de elementos do conjunto universo do sistema que está sendo representado, esse subsistema pode ser recuperado como o subsistema dos objetos quasi-totais do espaço coerente. Apresenta-se também uma abordagem categórica para o processo de construção global, mostrando-se que ele determina uma adjunção entre duas subcategorias da categoria **SO2** dos sistemas ordenados de 2ª ordem. A metodologia proposta se mostrou particularmente interessante na construção do conjunto dos números reais e do conjunto de intervalos reais. Para estes sistemas introduziu-se também uma subestrutura elementar de medidas, pela definição, de forma generalizada, das funções valor absoluto, distância e diâmetro. Foi desenvolvida uma estrutura topológica para os espaços coerentes bi-estruturados, que caracteriza-se também por apresentar dois níveis que se inter-relacionam. Para obter uma caracterização topológica de informação desenvolveu-se a noção de espaços de vizinhanças lineares. No sentido de se obter a caracterização topológica de aplicação, obteve-se, em cada etapa da construção, um espaço de vizinhanças gerado pela função distância generalizada, com uma topologia de aplicação associada. Conexões entre as representações de reais e de intervalos de reais e aspectos de computabilidade são referidas de modo preliminar, sugerindo-se este tema como trabalho futuro. Possíveis aplicações dos espaços coerentes bi-estruturados e do processo de construção global a outras áreas da Ciência da Computação são indicadas no final do trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: representação de números reais, representação de intervalos reais construção de sistemas, espaços coerentes, teoria dos domínios, matemática intervalar, espaços de vizinhanças

TITLE: "A GLOBAL CONSTRUCTIVE REPRESENTATION OF SECOND ORDER ORDERED SYSTEMS USING BI-STRUCTURED INTERVAL COHERENCE SPACES, WITH AN APPLICATION IN INTERVAL MATHEMATICS"

Abstract

The aim of this work is to develop a methodology to obtain constructive representations of second order ordered systems, based on coherence space structures, with the main application in Scientific Computation and Interval Mathematics. A global representation for the so-called infinite objects considering the information content they represent, in particularly real numbers and real intervals, is obtained, so that suitable semantical models for real and interval computational processes can be provided. This constructive representation is said to be global, since it is performed in two distinguished levels, dealing with the internal construction of the objects, in the context of an information structure, and, on the other hand, building an external application structure. The information structure is compatible with a domain-theoretic approach, and the application structure is established according the intended usage of the represented system. There exists a relationship between the two levels of the construction, guaranteeing that each component of the application structure should have an internal representation in the information structure. The resulting global representation systems are called bi-structured coherence spaces, and they have the additional feature of being generated by a basic ordered system having a denumerable universe. The information structure is a coherence space endowed with linear functions and a compatible information topological structure. The (algebraic, ordered, relational, functional, measure, topological, etc.) application structure is obtained by the construction process, considering the structure of the basic system as the start point. A bi-structured coherence space, obtained by this construction process, is said to be the global representation of a given second order ordered system if it is possible to recover the latter by the subsystem of the total objects of the former, defining isomorphisms related to the application structure. Following the same pattern, establishing isomorphisms for the subsystem of the intervals of elements of the represented system, it is possible to recover it as the subsystem of quasi-total objects of the bi-structured coherence space. A categorical approach is also presented and it is shown that the global construction process determines an adjunction between two subcategories of the category **SO2** of the second order ordered systems. The proposed methodology was shown to be particularly interesting when constructing the sets of real numbers and real intervals. For these systems, an elementary measure structure was introduced in a generalised approach, defining generalised distance, diameter and absolute value functions. The bi-structured coherence spaces were given an interrelated two-level topological characterisation. In order to obtain an information topological characterisation the concept of linear neighbourhood systems was introduced. For the application topological characterisation, at each step of the construction, a neighbourhood system generated by the generalised distance function, with an associated topology, was defined. A brief analysis concerning the connections among other representations of real and real intervals and computability aspects is presented. Other possible applications in Computer Science are indicated.

KEYWORDS: representation of real numbers, representation of real intervals, construction of systems, coherence spaces, domain theory, interval mathematics, neighbourhood systems

1 Introdução

Este trabalho consiste no desenvolvimento de uma metodologia para a obtenção de representações construtivas de sistemas ordenados de 2ª ordem, baseadas em estruturas de espaços coerentes, com aplicação fundamental na Computação Científica e Matemática Intervalar.

Obtém-se assim uma representação global para os objetos ditos infinitos relativamente ao conteúdo de informação, como números reais e intervalos reais, de tal forma que possam ser obtidos modelos semânticos adequados para os processos computacionais envolvendo tais objetos.

Esta representação construtiva é denominada de global, pois, é realizada em dois níveis distinguíveis, compreendendo não somente a construção interna dos objetos da estrutura de informação, do conjunto das aproximações destes objetos e de sua topologia de informação, mas também sua estrutura externa de aplicação, representando um conjunto de operações algébricas, uma relação de ordem de posição, uma família de relações, uma família de funções elementares, uma subestrutura de medidas e uma topologia induzida por ela.

Existe um relacionamento entre estes dois níveis de construção, garantindo que cada componente da estrutura de aplicação tenha uma representação interna na estrutura de informação, e, por outro lado, a cada etapa da construção corresponda uma estrutura de aplicação definida a partir da estrutura de aplicação existente na etapa anterior.

O processo de se obter uma representação global [DIM 97f] - processo construtivo da estrutura de informação, processo construtivo da estrutura de aplicação e o mecanismo que relaciona estas estruturas - é denominado de processo de globalização.

As estruturas dos tipos de dados que podem ser representadas globalmente são denominadas de sistemas[1] ordenados de 2ª ordem. Um sistema ordenado de 2ª ordem é um conjunto, denominado de universo, acompanhado de seu conjunto potência, para os quais se define uma estrutura - relacional, funcional, topológica -, onde é definida uma ordem parcial de posição.

Para a globalização de sistemas ordenados de 2ª ordem são utilizados espaços coerentes bi-estruturados, que constituem sistemas ordenados de 2ª ordem bi-estruturados, cujo universo é um espaço coerente de intervalos gerado por um conjunto ordenado básico enumerável.

A bi-estrutura deste sistema é dada por uma estrutura de informação, compatível com uma abordagem domínio-teorética, importante desde o ponto de vista computacional, e uma estrutura de aplicação, determinada pelo uso pretendido do sistema representado. A estrutura de informação do sistema bi-estruturado é um espaço coerente, com funções lineares e uma estrutura topológica de informação compatível. A estrutura de aplicação - algébrica, de ordem, relacional, funcional, de medidas, topológica, dentre outras - é obtida pelo processo construtivo a partir da estrutura de um

---

[1] A noção de sistema de 2ª ordem pode ser considerada como uma extensão à noção de "sistema" [MAN 89] ou de "estrutura relacional" [BRI 77], ou de Σ-estrutura [ACI 91], que são de 1ª ordem.

sistema básico, isto é, um subconjunto enumerável, denominado de conjunto básico, para o qual é definida uma estrutura básica.

Um espaço coerente bi-estruturado, obtido pelo processo de globalização, é a representação global de um dado sistema ordenado de 2ª ordem quando é possível recuperar este sistema através do subsistema dos objetos totais do espaço, pela determinação de isomorfismos para a estrutura de aplicação. Da mesma forma, estabelecendo também isomorfismos para o subsistema dos intervalos de elementos do conjunto universo do sistema que está sendo representado, esse subsistema pode ser recuperado como o subsistema dos objetos quasi-totais do espaço coerente.

Apresenta-se uma abordagem categórica para o processo de construção global, mostrando-se que o processo de construção global determina uma adjunção entre duas subcategorias da categoria **SO2** dos sistemas ordenados de 2ª ordem: a subcategoria dos sistemas representados $\mathbf{SO2}_R$, que apresentam apenas uma estrutura, e a subcategoria das representações globais e seus subsistemas $\mathbf{SO2}_G$, que são bi-estruturadas.

A metodologia proposta se mostrou particularmente interessante na construção do conjunto dos números reais e do conjunto de intervalos reais [DIM 96a] [DIM 96b] [DIM 96c] [DIM 96d] [DIM 97a] [DIM 97b] [DIM 97c] [DIM 97d], possibilitando assim sua aplicação na representação global de sistemas ordenados de 2ª ordem da Matemática Intervalar e da Computação Científica. Para estes sistemas introduziu-se também uma subestrutura elementar de medidas [DIM 98], pela definição, de forma generalizada, do valor absoluto, distância e diâmetro.

Foi desenvolvida uma estrutura topológica para os espaços coerentes bi-estruturados [DIM 97e], que caracteriza-se também por apresentar dois níveis que se inter-relacionam. Introduziu-se para tanto um estudo sobre espaços de vizinhanças generalizados. Para obter uma caracterização topológica de informação desenvolveu-se a noção de espaços de vizinhanças lineares, com base nos trabalhos originais de Zhang [ZHA 92]. No sentido de se obter a caracterização topológica de aplicação, obtém-se, em cada etapa da construção, um espaço de vizinhanças gerado pela função distância generalizada, com uma topologia de aplicação associada.

A motivação para a busca de soluções para problemas de fundamentação de estruturas da Computação Científica concentram-se na análise incluída no capítulo 2, onde se resume a Teoria dos Intervalos, discorre-se sobre a teoria dos domínios e estruturas relacionadas, e comenta-se sobre os principais trabalhos realizados envolvendo a construção de números reais e intervalos de reais, assim como a obtenção de números reais efetivos e aritmética computacional real exata.

No capítulo 3 apresentam-se conceitos básicos sobre Espaços Coerentes e resultados relevantes para a compreensão desta estrutura, introduzindo-se também idéias e conceitos novos, como os espaços coerentes com objetos indexados e os espaços coerentes gerados por conjuntos básicos. As principais categorias de Espaços Coerentes são apresentadas no capítulo 4, onde salienta-se a categoria monoidal simétrica fechada **LIN**.

No capítulo 5 são introduzidos os sistemas ordenados de 2ª ordem, os morfismos de sistemas ordenados de 2ª ordem e as principais transformações de universo, estruturais e globais realizadas sobre estes sistemas, onde destacam-se as noções de construção e evolução de sistemas. No capítulo 6 é definida a categoria **SO2** dos sistemas ordenados de 2ª ordem e as operações e relações entre estes sistemas são introduzidas como endofunctores.

O processo de globalização é apresentado no capítulo 7, introduzindo-se a definição de representação global de sistemas e estabelecendo-se a representação linear interna de aspectos da estrutura de aplicação, na estrutura de informação. A abordagem categórica para o processo de construção global está no capítulo 8.

No capítulo 9, aplica-se a metodologia desenvolvida para obter o espaço coerente bi-estruturado IIQ de intervalos racionais, que, como é mostrado no capítulo 10, se constitui em uma representação global construtiva do sistema R dos números reais e do sistema IR dos intervalos reais estendido. No capítulo 10 também são estudados os isomorfismos entre R e IR e sua representação global, relativos à estrutura de aplicação. Prova-se que o sistema IR dos intervalos reais estendido e o subsistema qtot_{IIQ} dos objetos quasi-totais de IIQ são isomorfos para a estrutura de aplicação, assim como o subsistema tot_{IIQ} dos objetos totais de IIQ, relativamente à sua estrutura de aplicação, apresenta-se como um corpo ordenado completo que pode ser identificado com o sistema dos números reais R.

O capítulo 11 apresenta uma subestrutura de medidas elementares para a representação global do sistema de número reais R e intervalos de reais IR, obtida pelo processo de construção global, determinada pela introdução de definições generalizadas para os conceitos de distância, valor absoluto e diâmetro. O objetivo do capítulo 12 é mostrar a existência dos isomorfismos para a subestrutura de medidas entre R e IR e sua representação global.

O capítulo 13 introduz um estudo sobre espaços de vizinhanças generalizadas no sentido de fornecer a fundamentação para uma caracterização topológica adequada dos espaços coerentes bi-estruturados obtidos pelo processo de construção global.

A noção de vizinhanças lineares é introduzida no capítulo 14, fornecendo uma caracterização topológica adequada à estrutura de informação dos espaços coerentes bi-estruturados. Para a caracterização dos espaços de vizinhanças lineares, são apresentados também os conceitos de espaços disjuntivos e espaços de vizinhanças estáveis. No capítulo 15, são estudadas algumas construções com vizinhanças estáveis introduzidas por Zhang [ZHA 89] [ZHA 92], e, com base nestas noções, são introduzidas algumas construções com vizinhanças lineares.

No capítulo 16 introduz-se uma estrutura topológica de informação para o espaço coerente bi-estruturado IIQ de intervalos racionais, com base nas noções de espaços de vizinhanças introduzidos nos capítulos 13 e 14. No capítulo 17 é introduzida uma estrutura topológica para a estrutura de aplicação, assim como o relacionamento entre os dois níveis de caracterização. O objetivo principal do capítulo 17 é garantir que a estrutura de aplicação seja dotada de um espaço de vizinhanças induzido pela função distância generalizada, com uma topologia de aplicação associada. Mostra-se também a existência dos isomorfismos para a topologia entre R e IR e sua representação global.

Possíveis aplicações dos espaços coerentes bi-estruturados e do processo de construção global a outras áreas da Ciência da Computação são indicadas no capítulo 18. No capítulo 19 estão as conclusões, considerações finais, trabalhos relacionados e perspectivas de trabalhos futuros. Conexões entre as representações de reais e de intervalos de reais e aspectos de computabilidade são referidas de modo preliminar, sugerindo-se este tema como continuidade do trabalho.

1 A Computação Científica, a Matemática Intervalar e a Teoria dos Domínios: da Fundamentação à Aplicação

Apresenta-se a Matemática Intervalar como uma solução para o problema do erro em Computação Científica [DIM 96a] [COR 88]. A Teoria dos Intervalos de Moore [MOO 66] [MOO 79], que deu origem a todos os estudos em Matemática Intervalar, é resumida, acrescentando-se algumas referência bibliográficas que foram estudadas para esta análise. No sentido de uma fundamentação para a Computação Científica, discorre-se sobre as principais teorias encontradas, como Domínios de Scott, Domínios Contínuos, Espaços Coerentes, dentre outras estruturas, acrescentando-se discussões encontradas na literatura e comparando-se as diversas alternativas.

1.1 Uma Análise da Problemática da Computação Científica

É possível tecer algumas considerações a respeito dos problemas enfrentados pela Computação Científica [DIM 94], que podem ser classificados em dois níveis: o de aplicação e o de fundamentação. Embora este trabalho se concentre exclusivamente ao nível da fundamentação, é possível relacionar estes dois aspectos, e mostrar a importância deste inter-relacionamento.

1.1.1 Problemas de Aplicação

Os problemas de ordem prática se concentram fundamentalmente em três aspectos: na criação do modelo computacional que reflita fidedignamente a realidade em questão, no controle e análise dos erros que ocorrem no processo computacional e na escolha das técnicas de programação adequadas para desenvolvimento de software científico. Os problemas de modelagem computacional e do desenvolvimento de software científico não serão discutidos aqui. Veja [DIM 96b]. Outras referências são [STR 86], [DEV 91], [REN 94], [DIM 92], [DIM 93], [DIM 93b], [AGU 95], [GIR 90], [AGU 96].

Entretanto, a qualidade de um resultado, em computação científica, depende também do conhecimento e do controle que se possa ter sobre seu erro. Algoritmos convencionais, normalmente utilizados em Computação Científica, chamados de algoritmos pontuais, computam uma estimativa para uma resposta, e, talvez, um erro estimado. O usuário não pode afirmar a exatidão da resposta estimada sem o auxílio de uma análise de erro, que é extensa, dispendiosa e nem sempre viável [COR 88].

Existem três fontes de erros em computação numérica [BAR 92]: (i) a propagação de erro nos dados e parâmetros iniciais, que é a mais séria, porque não é possível torná-la arbitrariamente pequena via computação adicional, (ii) o erro de arredondamento e (iii) o erro de truncamento.

1.1.2 Problemas de Fundamentação

Acióly [ACI 91] sugeriu que os problemas de aplicabilidade, discutidos na seção anterior, na verdade existem porque Analistas Numéricos e Cientistas da Computação não têm trabalhado em conjunto e, na verdade, existe um único problema, que reside na fundamentação da Análise Numérica como uma teoria computacional.

Smale [SMA 90] refere-se à questão da fundamentação da Computação Científica, apresentando a tabela 2.1 com o objetivo de realizar uma comparação com a Ciência da Computação:

TABELA 1.1 - Comparação entre a Computação Científica e a Ciência da Computação

Aspectos	Computação Científica	Ciência da Computação
Matemática	Continua	Discreta
Problemas	Clássicos	Novos
Objetivos	Práticos, Imediatos	de Longo Prazo
Fundamentação	Nenhuma	Desenvolvida
Complexidade	Não Desenvolvida	Desenvolvida
"Máquina"	Nenhuma	Turing

Neste mesmo trabalho, Smale [SMA 90] afirma que os problemas de fundamentação da Análise Numérica ainda deverão ser reconhecidos pelos cientistas - o que já é fato atualmente. Salientou que o principal objeto de estudo da Computação Científica é o desenvolvimento de algoritmos, entretanto não existe uma definição formal de algoritmo em computação numérica. Outro problema apontado como obstáculo é a presente idéia de "máquina", isto é, computador digital. Como o computador é uma entidade finitária, isto é, é visto como "um objeto finito ou discreto", é difícil sistematizar a Computação Científica. Uma questão é saber como estas "máquinas" serão úteis para a Análise Numérica, onde os erros (de arredondamento, truncamento etc.) são tão importantes, uma vez que "máquinas" sobre os reais executam aritmética exata.

Algumas respostas para este problema de fundamentação podem ser encontradas nos trabalhos de Acióly, Claudio e Dimuro, [ACI 90] [ACI 91] [ACI 91a] [DIM 91] [DIM 91a] [DIM 91b] [DIM 94], Escardó e Claudio [CLA 92], Escardó [ESC 93] [ESC 96], Edalat e Escardó [EDA 95a], Edalat [EDA 95] [EDA 95b] [EDA 96] [EDA 97], dentre outros, que serão discutidos posteriormente.

2.2 A Matemática Intervalar

Atualmente tem sido muito divulgada a necessidade do uso de técnicas intervalares como uma alternativa para alcançar limites garantidos para os resultados de computações científicas, através do controle rigoroso e automático do erro do resultado. A Análise de Intervalos está interessada em técnicas que podem ser programadas por computador, contendo em sua computação uma análise rigorosa, completa e automática destes erros.

A Análise de Intervalos, que é uma teoria matemática com origem na década de 60, têm por objetivo responder à questão da exatidão e da eficiência que aparece na prática da Computação Científica. Apresentam-se esquemas computacionais que tratam tanto do problema da propagação do erro dos dados e parâmetros iniciais ao longo do processo computacional, assim como dos erros de arredondamento e truncamento. A propagação do erro nos dados iniciais e a acumulação do erro de arredondamento em qualquer seqüência finita de operações aritméticas podem ser ambas rigorosamente controladas, simplesmente pela utilização de aritmética de máquina ordinária.

Técnicas intervalares manipulam dados e parâmetros inicias como intervalos, com o indicativo do erro máximo presente nestes valores antes que os mesmos sejam introduzidos no computador (veja [DIM 93b] [SAN 94]). Desta forma algoritmos intervalares, em contraste com os algoritmos pontuais, computam um intervalo como solução, com a garantia de que a resposta pertence a este intervalo. Portanto, resultados intervalares carregam sempre consigo a segurança de sua qualidade e o grau de sua incerteza, pois o diâmetro de um intervalo solução é um indicativo da influência do erro do dado de entrada no erro do resultado final obtido. Este é um tipo de análise de sensibilidade, que pode substituir execuções de simulação repetidas e dispendiosas.

Entretanto, obter uma resposta intervalar não garante que ela inclua algo de interesse. Atingir uma inclusão significativa requer uma fundamentação matemática cuidadosa de todos os estágios do desenvolvimento do algoritmo e sua implementação. Os algoritmos a serem desenvolvidos devem ser algoritmos intervalares, e não versões intervalares de algoritmos pontuais, conforme Corliss [COR 88]. Veja Kulisch [KUL 81] [KUL 83] e Moore [MOO 66] [MOO 79] [MOO 88].

Na Teoria dos Intervalos de Moore [MOO 66] um intervalo real $[a,b]$ foi definido como um subconjunto do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ dado por $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b, a,b \in \mathbb{R}\}$, e o conjunto de todos os intervalos reais é denotado por $\mathrm{I}(\mathbb{R})$. Observe que a idéia principal é considerar um intervalo como uma aproximação dos reais que ele contém, embora Moore não tenha considerado a noção de aproximação no sentido de uma interpretação computacional.

Uma operação aritmética binária $* \in \{+,-,\times,\div\}$ entre intervalos $A = [p,q]$ e $B = [r,s]$, é definida como $A * B = \{a * b | a \in A \wedge b \in B\}$. Pode-se observar que $\mathrm{I}(\mathbb{R})$ constitui uma estrutura algébrica que generaliza a estrutura dos reais. A aritmética de intervalos satisfaz a propriedade de monotonicidade da inclusão (veja [MOO 79] [RAT 84]), isto é, se $I,J,K,L \in \mathrm{I}(\mathbb{R})$, com $I \subseteq K$ e $J \subseteq L$, então: $I * J \subseteq K * L$. Note que esta propriedade sugere uma ordem (de aproximação ou de informação), mas a ordem considerada em $\mathrm{I}(\mathbb{R})$ é somente a ordem " $\leq$ " dos reais, que compara os intervalos relativamente à sua posição na reta.

A imagem de uma função real $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre um conjunto $X \subseteq D$ é dada por $\bar{f}(X) = \{f(x) | x \in X\}$. Seja o intervalo real fechado e limitado $X = [a,b]$. Tem-se que se f é contínua, então $\bar{f}(X)$ também é um intervalo da mesma espécie.

Um problema fundamental e típico na Análise Intervalar é o cálculo de $\bar{f}(X)$ ou no mínimo uma boa aproximação dela. Se f é definida em termos de operações aritméticas e funções com extensões intervalares, então o uso de computação intervalar [BAU 8?] [DIM 89] [MOO 79] [RAL 86] [RAT 84] [RAT 88] resulta em uma extensão intervalar F tal que $\bar{f}(X) \subseteq F(X)$, para $X \subseteq D$. Este cálculo tem a vantagem de ser completamente automático e de não requerer conhecimento das propriedades específicas de f.

Foi introduzida uma topologia sobre $\mathrm{I}(\mathbb{R})$, que torna as operações aritméticas contínuas para a ordem de posição. Sejam os intervalos $X = [a,b]$, $Y = [c,d] \in \mathrm{I}(\mathbb{R})$. Chama-se de distância entre X e Y a expressão dada por $dist(X,Y) = max\{|a-c|, |b-d|\}$. É fácil ver que $dist$ satisfaz as propriedades de uma métrica para a ordem de posição, e, portanto $(\mathrm{I}(\mathbb{R}), dist)$ é um espaço métrico e conseqüentemente a topologia induzida dessa métrica é Hausdorff [MOO 79] [RAT 84].

Uma análise mais detalhada sobre a Teoria dos Intervalos de Moore e suas extensões está em [DIM 96b]. A bibliografia é muita extensa. Salienta-se algumas referências adicionais na literatura clássica: [AGU 95], [ALE 83], [BAR 93], [BAU 8?], [CLA 89], [COE 91], [COR 88], [DIM 89], [DIV 95], [HAN 69], [HOL 96], [LOR 9?], [MOO 66], [MOO 79], [MOO 88], [NEU 89], [NIC 75], [NIC 85], [RAL 86], [RAT 84], [RAT 88], [REI 94], [REI 95], [REI 96b], [ACC 96], dentre outras. Algumas extensões à teoria clássica podem ser encontradas em [ALE 68], [CAD 93], [CLA 94], [DIM 91c], [DIM 93], [HAN 80], [KOR 94], [LAV 8?], [MAR 81], [MAR 92], [MAR 92a], [MAR 94], [MAR 95], [MAR 9?], [OLI 95], [RAT 88], [REN 94], [BOI 96].

1.3 No Sentido de uma Fundamentação da Computação Científica e da Matemática Intervalar utilizando a Teoria dos Domínios

Em geral, os estudos envolvendo intervalos de Moore e suas extensões visam muito mais o desenvolvimento de métodos para aplicação imediata em Computação Científica do que a fundamentação teórica necessária para embasamento dos algoritmos referentes a estes métodos. É possivel observar neste instante que é preciso buscar uma fundamentação para a Teoria dos Intervalos de Moore, que a torne compatível com uma teoria computacional, isto é, para que esta teoria não seja tratada apenas como uma teoria matemática ou da Análise Numérica, mas também como uma Teoria da Computação.

Uma computação em que se utilizam algoritmos é executada em passos discretos. Após cada passo, uma quantidade maior de informação sobre o resultado da computação vai se tornando disponível. O resultado obtido após cada etapa pode ser considerado como uma aproximação do resultado final, que deve ser alcançado após um número finito de etapas. Como exemplo, pode-se citar a computação do maior divisor comum de dois inteiros positivos utilizando-se o algoritmo Euclidiano.

Entretanto, em algumas situações, a computação nunca termina. Neste caso, é possível definir que o resultado final é a melhor das aproximações obtidas em cada etapa da computação, se essa melhor aproximação existir. No caso em que essa melhor aproximação não existe, toma-se a seqüência das aproximações obtidas e tenta-se passar a um limite. Este último caso acontece quando se computa sobre objetos considerados como limites sob um ponto de vista computacional, como, por exemplo, os números reais ou intervalos de reais, que são denominados de objetos infinitos. Vê-se que, nesses casos, é necessário ter tanto um modelo apropriado de aproximação como um modelo apropriado de computação.

Surgem assim os domínios, que são estruturas que modelam a noção de aproximação e sobre as quais se pode definir modelos apropriados de computação.

A teoria dos domínios é alvo de muitos estudos na atualidade. Seria impossível apresentar aqui tudo o que tem sido realizado envolvendo algum aspecto desta teoria. Entretanto, como é nosso interesse discutir sobre uma fundamentação da computação científica e da Matemática Intervalar com base na teoria dos domínios, são apresentados aqui breves discussões sobre alguns trabalhos selecionados.

2.3.1 A Teoria dos Domínios: a evolução

A teoria dos domínios foi introduzida por Dana Scott [SCO 70] em 1970 como uma teoria matemática de computação em semântica de linguagens de programação.

Algumas idéias relativas ao assunto foram introduzidas anteriormente por Daniel Lacombe [LAC 55] na teoria da recursão. Contribuições importantes à teoria dos domínios também foram introduzidas independentemente por Y. L. Ershov [ERS 72]. Textos introdutórios sobre esta teoria apareceram ainda com a sua utilização em semântica denotacional de linguagens de programação em [STO 77]. Entretanto, sua introdução como uma teoria matemática em um texto didático aparece com Plotkin [PLO 81]. As contribuições fundamentais foram realmente dadas por Scott [SCO 72] [SCO 72a] [SCO 76] [SCO 82] [SCO 90].

Esta teoria está agora estabelecida [STO 94] [DAV 91] [EDA 97] [GIE 80] [JOH 82] [PLO 81] [GUN 92] [ABR 94] e é na atualidade o maior paradigma em semântica de linguagens de programação.

A primeira definição de domínio, apresentada por Scott [SCO 70] [SCO 72] [SCO 72a], foi a de reticulado (ou semireticulado) contínuo (veja também [GIE 80]), e, inspirado em noções topológicas [SMY 90] [SMY 91], conseguiu definir diversos conceitos de interesse computacional sobre reticulados, como, por exemplo, a noção de função contínua e elemento compacto ou finito. Posteriormente, Scott [SCO 76] optou pela subclasse dos reticulados algébricos. Finalmente, verificou-se que o elemento topo dos reticulados era semanticamente desprezível, no sentido de que não era natural dar-lhe alguma aplicação em semântica denotacional. Assim, aparece na literatura a definição de domínio como cpo algébrico consistentemente completo. Esta categoria, além de possuir todas as propriedades interessantes da categoria de reticulados algébricos, não apresenta necessariamente o elemento topo e todos os problemas acarretados por ele. Veja também [KAM 84] [KAM 84a] [LAW 87] [LAW 97] [PLO 77] [SMY 90] [SMY 91].

2.3.2 A Teoria dos Domínios: noções fundamentais

A idéia básica é representar tipos de dados por certos conjuntos parcialmente ordenados, denominados domínios. Quando a computação está baseada em um algoritmo, então cada um dos conjuntos de dados de entrada e saída forma um domínio.

O programa que executa a computação é representado por certas funções entre domínios, denominadas de funções contínuas. Uma função contínua é aquela que preserva a ordem de informação (quanto maior a informação dos dados de entrada, maior será a informação dos dados de saída) e os limites de computações infinitas no domínio (a informação total disponível como saída de uma seqüência infinita de elementos de entrada com informação refinada é o somatório total de toda a informação obtida de cada elemento de entrada). A tese de Scott afirma que toda a função computável é contínua neste sentido acima.

Funções com o mesmo domínio de entrada e saída, com a ordem pontual, formam um domínio de funções ou o espaço funcional. Toda a função contínua em um domínio com um menor elemento possui um menor ponto fixo no sentido do teorema de Tarski. Isto implica que o significado de um programa recursivo pode ser capturado como o ponto fixo de uma função de ordem mais alta, que é definida, pela recursão correspondente, no domínio de todas as funções de um dado tipo.

Existe uma variedade de categorias de domínios de acordo com as propriedades adicionais consideradas, desde que satisfaçam os critérios estabelecidos em [JUN 89].

Procurando maior precisão técnica, pode-se definir uma domínio como uma estrutura onde é definida uma relação binária $\sqsubseteq$ - uma ordem parcial denominada de ordem de informação - para significar que $x \sqsubseteq y$ se e somente se x é uma aproximação de y ou y contém pelo menos a informação de x. Neste estágio diz-se que o domínio é simplesmente uma ordem parcial, freqüentemente denominado de po ou poset.

Também exige-se que um domínio possua um menor elemento $\perp$, modelando a ausência de informação. Na verdade, a presença deste menor elemento não seria necessária, mas ele é útil na determinação da existência de pontos fixos. Ainda, para modelar computações infinitas, exige-se que um domínio seja completo no sentido em que cada seqüência crescente de aproximações seja representada por um elemento no domínio, ou seja, deve possuir um supremo. Estes requisitos são suficientes para a obtenção de pontos fixos de funções contínuas e também para a construção de espaços funcionais. Obtém-se assim os domínios denominados de ordens parciais completas ou cpo's.

2.3.3 A Teoria dos Domínios: domínios algébricos e semântica da computação

Observe agora que uma computação é executada sobre objetos concretos. Por exemplo, uma computação sobre números reais ou intervalos reais consiste de computações sobre aproximações concretas dos números reais ou, respectivamente, intervalos de reais, dadas com freqüência pelos números racionais ou cadeias de intervalos racionais encaixados. O resultado da computação também é dado por uma seqüência de elementos concretos. Então, para modelar computações, é necessário abstrair a noção de "ser um elemento concreto". Esta abstração é denominada de elemento finito ou compacto. Assim, exige-se que cada elemento de um domínio seja representado por todas as suas aproximações finitas ou compactas, ou seja, que cada elemento do domínio seja o supremo do conjunto dirigido de suas aproximações compactas. Quando isto acontece, tem-se os chamados cpo's algébricos. Os elementos compactos ou finitos do domínio formam a base do domínio.

A classe dos cpo's algébricos parece possuir as propriedades de computabilidade desejadas. Entretanto, observa-se a não existência de uma propriedade importante para a ciência da computação e também para partes da teoria da computabilidade: esta classe não é fechada para a construção de espaço funcional. Então, uma subclasse de cpo's algébricos é freqüentemente considerada - a dos que são consistentemente completos, ou seja, quando todo subconjunto consistente do domínio possui um supremo. Estas estruturas, ou seja, os cpo's consistentemente completos são finalmente denominadas de Domínios de Scott, ou simplesmente domínios algébricos. Os espaços coerentes, estrutura fundamental em se baseia este trabalho, constituem um tipo especial de domínio algébrico (veja seção 1.3.8).

Um domínio algébrico cuja base é enumerável, denominado de domínio w-algébrico, pode ser dado de modo efetivo, segundo certas condições [WEI 80] [ESC 97], com o objetivo de tornar a teoria construtiva e de definir a noção de elemento computável e função computável.

Os elementos básicos podem também ser considerados como um conjunto de proposições lógicas que caracterizam qualquer elemento do domínio. Isto foi primeiramente observado por D. Scott [SCO 82] para os Domínios de Scott, tendo sido posteriormente generalizado para outras classes de domínios. Um domínio algébrico possui uma apresentação simples em termos de um sistema de informação, uma estrutura lógica sobre os elementos básicos que fornece uma indicação de como construir os elementos como as teorias da lógica correspondente. A lógica relativa a um domínio algébrico é a das propriedades observáveis do processo computacional. Esta "lógica de observações" está intimamente ligada à topologia de Scott para domínios [SMY 83] [VIC 87]. Um aberto de Scott pode ser visto como uma proposição sobre um tipo de dados, ou uma propriedade deste tipo. Um análise da lógica para a categoria cartesiana fechada dos chamados domínios bi-finitos foi desenvolvida por Abramsky [ABR 87]. Outras categorias de domínios também foram estudadas em uma forma lógica (veja [EDA 93] [VIC 93] [HOO 93] [BED 93] [BED 94] [ZHA 92a] [ZHA 91] [ZHA 89] [ZHA 89a])

Diversas categorias cartesianas fechadas de domínios algébricos, incluindo os chamados Domínios de Scott, tem sido empregadas em semânticas de computação. São utilizadas para obter um modelo não-trivial [SCO 72] [SCO 73] do λ-cálculo não-tipado [BAR 84] baseado em um domínio não-trivial isomórfico ao seu espaço funcional. Também foi introduzida uma semântica denotacional para PCF (Programming Language for Computable Functions) [PLO 77], um λ-cálculo tipado com tipos básicos para números naturais e valores booleanos mais constantes para operações básicas sobre estes tipos. PCF pode ser considerada como modelo teorético para linguagens de programação funcional.

Domínios algébricos têm sido utilizados para representar espaços clássicos em uma abordagem efetiva. Veja [WEI 81] [STO 88] [STO 95] [BLA 97].

2.3.4 A Teoria dos Domínios: domínios contínuos, espaços matemáticos clássicos e outras estruturas relacionadas

Um domínio é uma estrutura matemática que descreve aspectos computacionais e isto justifica sua importância para a fundamentação da computação científica e matemática intervalar [EDA 97]. Nos últimos anos, têm surgido uma nova direção para aplicação de domínios contínuos em espaços clássicos da matemática. Domínios contínuos constituem uma generalização dos domínios algébricos que conservam muitas de suas básicas propriedades. Edalat [EDA 97] afirma que domínios contínuos constituem a abordagem natural para a matemática contínua, pois considera que as representações nestes domínios são evidentemente mais diretas e simples que as representações em domínios algébricos.

No sentido de se obter a definição de um domínio contínuo, é necessário que se tome um cpo e introduza uma relação de aproximação, denominada de relação "way-below" $\ll$, que determina que um objeto x aproxima outro objeto y se sempre que y apresente no máximo a informação dada pelo supremo de um conjunto dirigido A, então é possível encontrar em A um outro objeto a que apresente no mínimo a informação fornecida por x. Observe que um elemento é finito ou compacto se aproxima a si mesmo.

Um subconjunto é uma base para um domínio se cada elemento do domínio é o supremo do conjunto dirigido de suas aproximações "way-below" contidas na base, isto é, cada elemento do domínio é representado pela seqüência de suas aproximações básicas para a relação "way-below".

Diz-se que um domínio é contínuo se ele possui uma base. Se a base é enumerável, então o domínio é denominada de w- contínuo. Um domínio contínuo é algébrico se possui uma base de elementos compactos. Observe que todo domínio algébrico é um domínio contínuo.

Todo domínio w- contínuo pode ser dado de modo efetivo com respeito a uma enumeração de uma base, pela exigência de que a relação "way-below" restrita aos elementos básicos seja recursivamente enumerável [ESC 97] [WEI 80]. Diz-se que um elemento nestes domínios é computável se ele é o supremo de uma cadeia recursiva de elementos básicos que o aproximam pela relação "way-below". O supremo de uma cadeia efetiva de elementos computáveis é computável e, portanto, é o menor ponto fixo de uma função computável em um domínio dado de modo efetivo.

Acióly [ACI 91] definiu domínios contínuos de intervalos (veja seção 1.3.5), retirando o elemento topo dos reticulados contínuos dos trabalhos originais de Scott e obtendo cpo's intervalares contínuos consistentemente completos com base enumerável, com o objetivo de apresentar uma fundamentação computacional para a Matemática Intervalar [DIM 91]. Na continuação do trabalho de Acióly, pode-se citar também Bedregal [BED 93] e [BED 94], que introduziu os sistemas de informação contínuos.

Segundo Escardó e Claudio [ESC 93] (veja seção 1.3.6), Acióly [ACI 91] introduziu a idéia da utilização da Teoria dos Domínios de Scott e o λ-cálculo como uma fundamentação para a Análise Intervalar alterando levemente a noção de Domínios de Scott e da topologia de Scott. Assim, Escardó e Claudio [CLA 92] [ESC 93] introduzem um desenvolvimento da Análise Intervalar segundo a Teoria dos Domínios de Scott, tomada em sua versão original. Veja seção 1.3.6

Os trabalhos fundamentais com domínios contínuos de intervalos, no sentido de obter números reais efetivamente computáveis e as principais aplicações se devem a Edalat [EDA 95] [EDA 95a] [EDA 95b] [EDA 96] [EDA 97] [EDA 97a] [JUN 97] e Escardó [ESC 94] [ESC 95] [ESC 96]. Potts [POT 96] [POT 97] [POT 97a] introduziu uma estrutura prática para computação exata. Estes trabalhos serão comentados na seção 1.3.7.

Phoa [PHO 94] introduziu um exemplo de uma nova abordagem para a teoria dos domínios, na qual uma categoria de domínios é construída diretamente de um modelo particular de computação, em uma estrutura intuitiva e natural, utilizando as ferramentas da teoria das categorias e teoria de topos. Bonsangue, Breugel e Rutten [BOM 95] estudaram os espaços ultramétricos generalizados, que constituem uma generalização de pré-ordens e espaços ultramétricos ordinários, mostrando como construir a completação, topologia, e domínios potência, combinando a visão topológica de Smyth [SMY 83] [SMY 87] [SMY 90] [SMY 91] e a visão categórica de Lawvere [LAW 73] em espaços (ultra)métricos generalizados.

Por outro lado, Girard [GIR 87] [GIR 89] introduziu o estudo de espaços coerentes, um tipo especial de domínio de Scott, visando dar um modelo para sua lógica linear. Na seção 1.3.8 apresenta-se a argumentação de Girard. Um estudo sobre Espaços coerentes encontra-se em [DIM 95] [DIM 96a] [DIM 96b]. Esta tese toma os espaços coerentes como a estrutura semântica fundamental. Para isso, novos conceitos foram desenvolvidos e introduzidos no capítulo 3. No capítulo 4 encontra-se a abordagem categórica.

2.3.5 A Teoria dos Domínios Intervalares Contínuos de Acióly

Acióly [ACI 91], em sua tese de doutorado, evidenciou algumas incompatibilidades entre a Teoria dos Intervalos de Moore (como uma teoria da Análise Numérica) e uma teoria intervalar computacional (como uma teoria da Computação Científica - Matemática Computacional) para aplicação efetiva em computação científica. Também em Dimuro [DIM 91] foram discutidas estas incompatibilidades apontadas por Acióly.

Acióly [ACI 91] fixou-se no fato de que a Teoria dos Intervalos de Moore baseia-se na idéia de que um intervalo é uma aproximação dos reais que ele contém. Entretanto, a topologia (de Hausdorff) que foi proposta por Moore [MOO 79] [RAT 84] é incompatível com essa idéia. Observe que, se $X \neq \varnothing$ e τ é uma topologia sobre X, então o espaço topológico (X, τ) é de Hausdorff se e somente se dados $x, y \in X$ com $x \neq y$, existe uma propriedade de x e uma propriedade de y que são disjuntas. Portanto, se $x \neq y$ então "x não aproxima y" e "x aproxima y" se e somente se $x = y$. Assim, nos espaços topológicos de Hausdorff (como o espaço dos intervalos de Moore) todos os objetos são totais, significando que cada objeto do espaço somente aproxima ele mesmo.

Acióly [ACI 91] salientou também a existência de uma incompatibilidade entre a propriedade de monotonicidade da inclusão e a métrica proposta por Moore. A propriedade de monotonicidade da inclusão como está definida em [MOO 79] sugere distinções qualitativas em função de uma ordem intuitiva de aproximação. Ora, esta ordem (de informação) induz uma topologia (T_0, e não T_1) que não compatibiliza com a topologia (Hausdorff - T_2) induzida pela métrica de Moore [MOO 79]. Além disso, funções monotônicas com relação a inclusão e funções contínuas segundo a topologia proposta por Moore são incompatíveis, uma vez que existem funções monotônicas para a inclusão que não são contínuas segundo a topologia de Moore, e, inversamente, existem funções contínuas para a topologia de Moore que não são monotônicas para a inclusão.

A Teoria dos Domínios Intervalares Contínuos de Acióly [ACI 91] [DIM 91] [ACI 91a] [DIM 91b] [DIM 91a] [ACI 90] procura superar as deficiências e incompatibilidades encontradas, na Teoria dos Intervalos de Moore, propondo uma topologia compatível (Topologia de Scott) com a idéia de aproximação, que gera uma ordem de informação, isto é, para quaisquer intervalos X e Y, se $X \sqsubseteq Y$ então "Y fornece mais (no mínimo tanto quanto) informação, sobre um real r, do que X". Salienta-se que isto não acontece com a abordagem clássica, devido a topologia ser de Hausdorff.

Na proposta de Acióly [ACI 91], um número real r é aproximado por intervalos de extremos racionais (não mais por intervalos de extremos reais), definido como o supremo de um conjunto dirigido de intervalos com extremos racionais, que são denominados de intervalos de informação. O espaço de informação, denotado por $\mathrm{II}(Q)$, é o espaço constituído por um conjunto de intervalos de extremos racionais, munido de uma certa estrutura lógica e topológica. Assim, os reais constituem os elementos totais de um domínio cuja base β é o conjunto dos intervalos de informação.

Sejam $[p,q],[r,s] \in \mathrm{II}(Q)$. A ordem de informação "$\sqsubseteq$" é definida por $[p,q] \sqsubseteq [r,s]$ se e somente se $[r,s] \subseteq [p,q]$. Define-se também uma relação de aproximação, tal que $[p,q] \ll [r,s]$ se e somente se $p < r \leq s < q$, onde "$\ll$" é chamado de relação auxiliar ou ordem forte. O espaço de informação é constituído pela estrutura $\beta = (\,\mathrm{II}(Q), \sqsubseteq, \ll, [-\infty,+\infty]\,)$, onde $\perp = [-\infty,+\infty]$ é o menor elemento. Em sua proposta, Acióly utilizou uma adaptação à definição de cortes de Dedekind [DED 01] [TRO 88] para intervalos de extremos racionais e uma técnica semelhante à de completação por ideais de Scott [STO 94]. Então a completação desta base β por cortes (definição de Acióly) resulta em um cpo (conjunto parcialmente ordenado completo) contínuo, dado por $\boldsymbol{R} = (\mathrm{II}(\mathbb{R}), \sqsubseteq, \ll, [-\infty,+\infty])$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais. O conjunto dos objetos totais de $\boldsymbol{R}$, $tot(\boldsymbol{R})$, é isomorfo ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Por outro lado, o conjunto $\mathrm{II}(\mathbb{R})$, denominado de conjunto dos reais parciais, é isomorfo ao conjunto dos intervalos de extremos reais $\mathrm{I}(\mathbb{R})$ de Moore [MOO 79].

Com relação à topologia, Acióly observou que $\mathrm{B} = (\,{}^{\uparrow}x \mid x \in \mathrm{II}(Q))$, onde ${}^{\uparrow}x = \{y \in \mathrm{II}(Q) \mid x \ll y\}$, é a base da topologia Scott. O cpo $\boldsymbol{R}$ constitui assim um domínio, denominado domínio contínuo [ACI 91] [DIM 91] [GIE 80] [LAW 87] [LAW 97] [EDA 97] que não é um domínio de Scott propriamente dito [SCO 72] [SCO 72a] [SCO 76], pois não é algébrico, uma vez que o único elemento compacto (ou isolado) [STO 94] é $\perp = [-\infty,+\infty]$.

No Domínio Intervalar Contínuo de Acióly, cada função contínua será "essencialmente" uma função monotônica na base e, mais ainda, será completamente representada em termos de elementos da base, que são finitos, no sentido de que são finitamente representáveis. Como pretende que esta teoria tenha aplicação, principalmente em Análise Funcional (em equações diferenciais, por exemplo) cada função contínua da análise real será vista como limite (objetos totais) de seqüências de funções contínuas entre elementos da base (os intervalos de informação com extremos racionais).

Em Dimuro [DIM 91], propõe-se a introdução de uma quasi-métrica, que poderá assegurar a maioria das vantagens em se ter uma métrica (propriedades quantitativas) e que gera uma topologia compatível com a topologia gerada pela ordem de informação (topologia de Scott), garantindo todas as propriedades qualitativas.

As operações aritméticas binárias e as operações unárias no domínio dos intervalos reais parciais $\boldsymbol{R}$ e suas propriedades foram estudadas em Dimuro [DIM 91] [DIM 91c]. A aritmética é estendida, e opera, inclusive, com intervalos ilimitados e com intervalos que aproximam o número real "0" (zero). A aritmética de máquina é discutida em Dimuro [DIM 91c], sugerindo a possibilidade de uma implementação da Álgebra dos Intervalos.

Segundo Acióly, uma das diferenças marcantes, entre este seu ponto de vista e a abordagem clássica de Moore, consiste no fato de que, aqui, a análise de intervalos não é uma extensão da análise real, mas uma linguagem para falar sobre aproximações em análise real.

Acióly lembra também "que esta abordagem tem a vantagem de ser de lógica construtiva e computacional (provê uma teoria para falar de funções computáveis), além de unificar as teorias das semânticas de linguagens de programação e a Matemática Computacional (Análise Numérica). Ela provê uma lógica (lógica de Scott) para raciocinar sobre programas em Matemática Computacional".

Segundo Scott (1972): *"O nível correto de modelagem matemática da computação não é nem o estritamente finito, nem o ilimitadamente infinito, mas o finitário, isto é, o nível em que aqueles objetos aparecem como limites de objetos finitos."*

Segundo Kamimura e Tang [KAM 84] [KAM 84a], programa-se com objetos totais, mas raciocina-se com objetos parciais, daí, a importância de uma base. Na abordagem da computação por domínios, elementos computáveis são usualmente dados operacionalmente: supremos de seqüências recursivamente enumeráveis de objetos da base. A topologia de Scott permite abstrair o conjunto de propriedades dos objetos, independentemente de como eles são computados, isto é, ela isola um certo conjunto enumerável de propriedades suficientemente finas para separar objetos distintos.

2.3.6 A Fundamentação para a Análise Intervalar de Escardó e Claudio

Escardó e Claudio [ESC 93] observaram que Acióly [ACI 91] introduziu a idéia da utilização da Teoria dos Domínios de Scott e o λ-cálculo como uma fundamentação para a Análise Intervalar alterando levemente a noção de Domínios de Scott. Salientam, também que naquele trabalho o conjunto dos números reais $\Re$, com sua topologia usual (Hausdorff), é um subespaço topológico do espaço dos intervalos de Moore, ordenado pela relação de inclusão, com a topologia de Scott, identificando-se os números reais x e os intervalos degenerados $[x,x]$. Então, como funções contínuas para a topologia de Scott são monotônicas para a inclusão, Acióly [ACI 91] sugeriu que se descartasse a topologia de Moore e que fosse adotada a topologia de Scott. Entretanto, segundo Escardó e Claudio, a topologia de Scott foi tomada fundamentalmente em "termos filosóficos".

Escardó e Claudio [ESC 93] introduzem um desenvolvimento da Análise Intervalar segundo a Teoria dos Domínios de Scott, tomada em sua versão original. Isto torna-se importante pois segundo a Teoria dos Domínios de Scott tem-se a construção de um espaço de funções e um teorema de ponto fixo. Há também uma teoria de computabilidade para os Domínios de Scott.

Escardó e Claudio [ESC 93] definiram o Domínio Intervalar de Moore, constituído pelo conjunto dos intervalos ordenado pela relação de inclusão. Este domínio é um Domínio de Scott Contínuo [SCO 72] [SCO 72a] [SCO 76] [PLO 81]. Além disso, as funções contínuas para a Topologia de Scott no Domínio Intervalar de Moore são justamente aquelas que são monotônicas com a relação a inclusão para a topologia de Moore [MOO 79].

O trabalho de Escardó e Claudio [ESC 93] foi realizado exclusivamente com a Teoria dos Domínios de Scott, mostrando que a noção de monotonicidade com a relação a inclusão e continuidade segundo a topologia de Moore são compatíveis pela introdução de uma topologia auxiliar no Domínio Intervalar de Moore, denominada Topologia da Inclusão.

A Topologia da Inclusão é definida de tal forma que uma função intervalar é contínua para a topologia de inclusão se e somente se for monotônica para a inclusão. Considera-se a interseção entre a topologia da inclusão e a topologia de Moore, originando uma topologia denominada de Topologia de Moore-inclusão. Uma função intervalar é contínua para a Topologia de Moore-inclusão se e somente se monotônica para a inclusão e contínua para a topologia de Moore.

Além disso, conclui-se que a Topologia de Moore-inclusão na verdade é Topologia de Scott. Isto mostra, a princípio que, neste sentido, as noções de monotonicidade para a inclusão e continuidade para a Topologia de Moore são compatíveis, e que, portanto, a Topologia de Scott é apropriada para a Análise Intervalar.

A Topologia de Scott no Domínio Intervalar de Moore é uma topologia T_0 que não é T_1, portanto não é metrizável. Entretanto, na prática, Escardó e Claudio [ESC 93] sugerem que se seja utilizada a métrica de Moore em conexão com a Topologia de Scott. Observam também que a topologia de Scott é metrizável segundo uma ordem, no sentido que os conjuntos abertos da topologia são gerados por uma métrica com o acréscimo de uma relação de ordem.

O λ-cálculo introduzido por Acióly não possui constantes para intervalos e funções primitivas. Além disso, Acióly não apresentou regras computacionais para o cálculo. No trabalho de Escardó e Claudio são introduzidas constantes para entes primitivos e regras computacionais para o cálculo. É estabelecido um teorema de adequação computacional, que afirma que um programa computa um valor X se e somente se seu valor, quando o programa é interpretado como uma expressão matemática, é X. Também é considerado uma variação para o cálculo para computação intervalar de ponto flutuante, e para isto é estabelecido um teorema de adequação computacional.

O conceito de aproximação de funções é introduzido, relacionando esta noção com a Teoria dos Domínios de Scott. A partir da definição de ordens parciais completas (cpos), mostra-se o Domínio Intervalar de Moore como um cpo. Com a definição de cpos contínuos é também apresentado o Domínio Intervalar de Moore como um cpo contínuo.

São apresentadas diversas topologias para o Domínio Intervalar de Moore - topologia da inclusão, topologia de Moore-Inclusão e topologia de Scott - e estabelecidos diversas relações entre elas, como a equivalência entre as topologias de Scott e a de Moore-Inclusão para o Domínio Intervalar de Moore. Além disso, estas topologias são relacionadas com a topologia usual da reta real. A Reta real é um subespaço do Domínio Intervalar de Moore.

São também introduzidos os Domínios de Scott Contínuos, mostrando-se que o Domínio Intervalar de Moore é um Domínio de Scott Contínuo. Salienta-se que existe um tipo mais simples de cpo contínuo, denominado de cpo algébrico, mas que, infelizmente, o Domínio Intervalar de Moore não é um cpo algébrico.

Acrescentam-se espaços de funções e funções de ordem superior, o teorema de ponto fixo de Scott, definição recursiva de funções.

Como existe uma teoria de computabilidade para Domínios de Scott contínuos ("The Theory of Effectively Given Domains", de Smyth [SMY 77]), observa-se que existe automaticamente uma teoria de computabilidade para a Análise Intervalar. Esta teoria é apresentada brevemente, através de definições e resultados informais.

É apresentado um λ-cálculo simples com constantes [PLO 77]. Pela seleção de um tipo básico para intervalos e de um conjunto particular de constantes para funções e valores primitivos, é introduzida a linguagem **ICF** ("Interval Computable Functions"). Esta linguagem é um conjunto de expressões formais. Estas expressões são notações matemáticas para intervalos e funções intervalares. Como **ICF** é um cálculo, obtém-se regras formais para avaliar suas expressões. Como estas regras podem ser seguidas por um computador, **ICF** pode ser considerada uma linguagem de programação. Considera-se que todos os intervalos e funções intervalares computáveis podem ser definidos (ou programáveis) em **ICF**. Também são definidas regras computacionais de precisão limitada para uma versão de **ICF**, denominada de $\mathbf{ICF}_{\Diamond}$. Estas regras simulam as regras dos sistemas computacionais intervalares de ponto-flutuante. Sugere-se também que **ICF** é uma linguagem de programação Turing-completa.

Com este trabalho, Escardó e Claudio [ESC 93] apresentam uma alternativa no sentido de uma fundamentação para a Computação Científica, aplicando a Teoria dos Domínios de Scott para a Análise Intervalar. Observa-se que a linguagem de programação **ICF** fornece uma definição formal de algoritmo para a computação numérica intervalar. Pode-se tomar um algoritmo como um programa **ICF**.

Observa-se que a matemática contínua e a matemática discreta não são incompatíveis. Na verdade, a noção de computabilidade para Domínios de Scott Contínuos é obtida da noção de computabilidade para Domínios Discretos. Além disso, é possível operar objetos contínuos por meio de aproximações discretas.

A conclusão principal anunciada pelo trabalho é que a Análise Intervalar é uma fundamentação natural para a Análise Numérica e que a Teoria dos Domínios de Scott é uma fundamentação natural para a Análise Intervalar.

2.3.7 Domínios de Intervalos, Números Reais Efetivos e Aritmética Computacional Real Exata de Edalat, Escardó e Potts

Nos últimos anos os domínios contínuos têm sido utilizados em trabalhos sobre computação exata de números reais, resultando em algoritmos eficientes em aritmética computacional de precisão infinita, em sistemas de funções iterativas, teoria de medidas e integração, principalmente com aplicações em matemática e física, como geometria fractal e física estatística [EDA 97].

Os trabalhos de Edalat e Escardó baseiam-se na construção de um dominio w-contínuo $\mathbf{I}\mathbb{R}$ de intervalos reais fechados e limitados, ordenados pela ordem reversa da inclusão. Este tipo de construção foi originalmente proposta por Scott [SCO 70], com a introdução de um conjunto parcialmente ordenado, com um elemento topo representado pelo intervalo vazio, como um tipo de dado para números reais.

Observe que $\mathbf{I}\mathbb{R}$ é de fato um domínio w- contínuo, pois o supremo de qualquer conjunto dirigido de intervalos reais fechados e limitados neste cpo é um intervalo real fechado e limitado, dado pela interseção destes intervalos. A relação "way-below" é dada por $a \ll b$ se e somente se b está no interior de a. Uma base enumerável é dada pelo conjunto de todos os intervalos com extremos racionais.

Para todo conjunto aberto $O \subseteq \mathbb{R}$, um aberto Scott básico é dado pela coleção $\Box O = \{a \in \mathbf{I}\mathbb{R} | a \subseteq O\}$. Os elementos maximais deste domínio são os conjunto unitários $\{x\}$, para $x \in \mathbb{R}$. A função $s: \mathbb{R} \to \mathbf{I}\mathbb{R}$, com $x \mapsto \{x\}$ é uma imersão da reta real no conjunto dos elementos maximais, pois $s^{-1}(\Box O) = O$, para todo conjunto aberto $O \subseteq \mathbb{R}$. Isto significa que a topologia Euclidiana coincide com a topologia de Scott relativa ao subespaço dos elementos maximais.

Qualquer função contínua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser estendida canonicamente a uma função contínua segundo Scott $\mathbf{I}f: \mathbf{I}\mathbb{R} \to \mathbf{I}\mathbb{R}$, definida por $a \mapsto f(a)$. Esta é a extensão maximal [EDA 95a] de f em $\mathbf{I}\mathbb{R}$, ou seja, se $g\colon \mathbf{I}\mathbb{R} \to \mathbf{I}\mathbb{R}$ satisfaz $g(\{x\}) = \{f(x)\}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então $g \sqsubseteq \mathbf{I}f$.

O domínio contínuo $\mathbf{I}\mathbb{R}$ pode ser equipado com uma estrutura efetiva canônica pela utilização da enumeração padrão dos intervalos racionais. Um número real computável é então o supremo de uma seqüência de intervalos racionais encaixados, a qual é gerada por um programa mestre. Da mesma forma caracteriza-se um número computável na abordagem intervalar para a computabilidade sobre a reta real [ROG 67].

Diz-se que uma função contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é computável se possui uma extensão computável $g\colon \mathbf{I}\mathbb{R} \to \mathbf{I}\mathbb{R}$. Em [EDA 97b], encontra-se uma prova de que esta definição de função computável coincide com a noção bem estabelecida de Pour-El e Richards [POU 88], que é equivalente à abordagem de [WEI 97] e está baseada no trabalho clássico de Grzegorczyk [GRZ 55] [GRZ 57]. De fato, com base no trabalho de Stoltemberg-Hansen and Tucker [STO 95], Edalat e Sünderhauf observam que a teoria da computabilidade induzida sobre a reta real por sua representação efetiva com um domínio algébrico é equivalente à teoria da computabilidade clássica dos números reais, e, além disso, dos resultados apresentados em [BLA 97], é possível mostrar que representações efetivas por domínios algébrico e contínuos são realmente equivalentes.

De forma similar, é possível construir o domínio $\mathbf{I}[x_1, x_2]$ dos subintervalos compactos de qualquer intervalo real fechado $[x_1, x_2]$. Veja na figura 2.1 o domínio $\mathbf{I}[0,1]$.

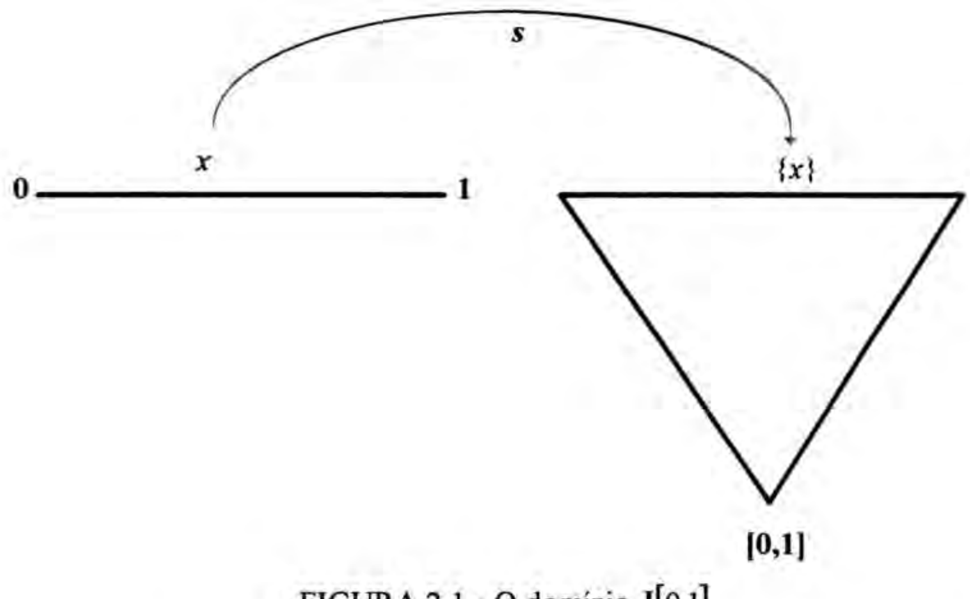


FIGURA 2.1 - O domínio $\mathbf{I}[0,1]$

Um sistema de funções iterativas (IFS) sobre um espaço topológico X é dado por um conjunto finito de funções contínuas $f_i\colon X \to X$, com $i \in I$, denotado por $\{X\colon f_i | i \in I\}$, ou $\{X\colon f_1, f_2, \ldots, f_N | i \in I\}$, se $I = \Sigma_N = \{1,2,\ldots N\}$. A teoria IFS têm sido objeto de pesquisa em geometria fractal e também têm sido aplicada em diversas áreas como economia, processamento de sinais, computação gráfica, redes neurais e computação de números reais, dentre outras. Veja [EDA 97] [HUT 81] [BAR 85] [BAR 88] [BAM 93]. Em [EDA 97a] são apresentadas algumas aplicações da teoria dos domínios em sistemas de funções iterativas (IFS). IFS pode ser utilizado para representar outros sistemas numéricos e tem um papel fundamental na computação de números reais exata. Em Edalat [EDA 96] há uma introdução de um IFS hiperbólico mais fraco, em um espaço métrico compacto, onde os mapeamentos f_i são contrações, baseando-se em um modelo domínio-teorético, que usa o domínio de potência de Plotkin e o domínio de potência probabilístico.

Edalat [EDA 95] apresentou uma construção em domínios contínuos para uma teoria de medidas computacional. Em [EDA 97] mostra como construir modelos computacionais para espaços de medidas ou distribuições de probabilidade sobre espaços clássicos.

É introduzido um tipo de medida finita, denominada de avaliação contínua, definida sobre conjunto abertos, que é denominada de avaliação simples se toma somente um número finito de valores. O domínio potência probabilístico **P**X é o conjunto de avaliações contínuas definidas em X com a ordem pontual. Se D é um domínio w-contínuo com uma base enumerável B, então **P**D é um domínio w- contínuo com uma base de avaliações simples [JON 89]. Saheb-Djaromi [SAB 80], Lawson [LAW 82] e Norberg [NOR 89] mostraram independentemente que avaliações contínuas em diferentes classes de domínios apresentam únicas extensões para medidas de Borel. Alvarez e Edalat [ALV 97] mostraram, de foram mais geral, que toda avaliação contínua em um domínio contínuo possui uma única extensão para uma medida.

Edalat desenvolveu uma teoria de integração de funções de valor real limitadas, com relação às medidas limitadas de Borel em espaços métricos compactos. Esta teoria é uma generalização da teoria de Riemann. Definiu uma nova noção de integral em que, utilizando uma w-cadeia de avaliações simples, cujo supremo é a medida de Borel dada, é possível obter melhores aproximações crescentes para o valor da integral de maneira similar à forma como a integral de Riemann é obtida no cálculo com o uso de funções degrau. Observa-se que os resultados básicos da teoria de integração de Riemann podem ser estendidos para esta visão mais geral.

Em [ESC 94] [ESC 95], Escardó caracterizou a linha real por propriedades similares aos axiomas de Peano para os números naturais. Estas propriedades incluem um princípio de indução e um esquema de recursão correspondente. Este esquema permite definir funções como adição, multiplicação, exponencial, logaritmo, seno, cosseno, arc seno, etc. a partir de funções mais simples. Para obter tal caracterização, foi introduzida uma noção de composição infinitamente iterada de morfismos em categorias, e foi estabelecido um teorema de ponto fixo e um teorema de composição infinita para espaços uniformes.

Seguindo a idéia de Dana Scott sobre um domínio de intervalos como a representação dos números reais [SCO 70], alguns autores verificaram que a linguagem de programação PCF (Programming Language for computable Functions) [PLO 77] era adequada para definir tal tipo de dado. PCF é essencialmente um λ-cálculo tipado com tipos básicos para números naturais e valores booleanos mais constantes para operações básicas sobre estes tipos. PCF pode ser considerada como modelo teorético para linguagens de programação funcional.

Di Gianantonio [GIA 93] [GIA 96] apresentou uma extensão para PCF com um tipo de dado número real interpretado como um domínio algébrico cujos elementos compactos são isomórficos ao conjunto dos intervalos diádicos ordenado pela inclusão reversa. Um número real é então representado por uma seqüência de intervalos diádicos encaixados, que podem ser considerados como reais aproximados. O domínio contém uma representação para cada número real, mas existem três representações para cada racional diádico.

Em contraste, em [ESC 96], Martin Escardó apresentou uma extensão da linguagem de programação PCF, Real PCF, com um tipo para números reais (totais e parciais), interpretado como o domínio contínuo de intervalos $\mathbf{I}\mathbb{R}$. Um número real parcial é um elemento do domínio de intervalos, cujo subespaço de elementos maximais (intervalos pontuais) é homeomorfo a linha real euclidiana (veja figura 2.1). Mostra que números reais parciais podem ser considerados como "palavras contínuas". A concatenação destas palavras corresponde ao refinamento de informação parcial.

Escardó [ESC 96] também fornece uma semântica operacional e denotacional para a referida extensão. Observa-se que a semântica operacional não pode avaliar um programa denotando um número real em um número finito de etapas. Entretanto, é possível computar um intervalo racional pequeno arbitrário contendo o número real em um número suficientemente grande de etapas.

Baseando-se nos trabalhos prévios em teoria de domínios e integração [EDA 95] [EDA 95b], Edalat e Escardó [EDA 95a] mostram como operar integração em Real PCF, generalizando a integração de Riemann de funções de valor real de variável real para funções de valor intervalar de variável intervalar. Veja também [JUN 97].

Estas duas abordagens visam obter uma formalização de aspectos relativos à computabilidade e não se preocupam com a eficiência de computações. Um questão fundamental [EDA 97] é se é realmente possível desenvolver um contexto para computação exata de forma que cálculos numéricos básicos possam ser executados sem erros de arredondamento.

Uma estrutura prática para computação exata baseada na teoria dos domínios foi introduzida em [POT 96] [POT 97a]. Ela unifica as três abordagens consideradas fundamentais por Edalat [EDA 97] - dígitos redundantes, números B-ádicos e frações contínuas -. Esta abordagem foi implementada de foram efetiva nas linguagens de programação Caml e C++. Uma extensão para PCF para esta estrutura também foi desenvolvida em [POT 97b]. Um conjunto de algoritmos estritos e eficientes para funções elementares nesta estrutura foram introduzidos em [POT 97].

1.3.8 Os Espaços Coerentes de Girard

Com o objetivo de dar uma semântica denotacional para a Lógica Linear, Girard [GIR 87] [GIR 89] introduziu o estudo de espaços coerentes, que é um tipo especial de domínio de Scott, onde os objetos são conjuntos construídos segundo uma relação reflexiva e simétrica, denominada de relação de coerência, e a ordem de informação é a relação de inclusão entre conjuntos. Veja capítulo 3 para os conceitos fundamentais sobre espaços coerentes, e capítulo 4 para abordagem categórica.

Girard justifica seu trabalho, partindo de que existem várias discussões em torno de estudos realizados em semântica denotacional de cálculos formais. Segundo Girard [GIR 89], a idéia fundamental de semântica denotacional é permitir interpretar redução de expressões (uma noção dinâmica) por igualdade de valores (uma noção estática). Explicando de outra forma, são modelados os invariantes do cálculo. A semântica denotacional é feita com a utilização da Teoria dos Domínios de Scott [STO 77], [SMY 77], [PLO 81], [DAV 91], [STO 94], [DIM 91], [ACI 91], [ESC 93].

A particularidade da idéia de Scott estava em que o tipo de espaço topológico que adotou (espaços T_0) permitiu compatibilizar a estrutura topológica com a estrutura de ordem dos objetos.

Girard observa, contudo, que esta concepção topológica não se adapta muito bem para a construção de espaços funcionais [GIR 89]:

"*Quando deve-se dizer que uma seqüência de funções converge de algum modo: puntualmente ou uniformemente?*"

A mais comum, mas não universal, resposta para esta questão é utilizar a topologia de abertos-compactos, na qual uma função encontra-se em um dado conjunto aberto se, quando restringida a um conjunto compacto específico, seus valores encontram-se em um conjunto aberto específico. Esta topologia somente é bem comportada quando os espaços são localmente compactos (todo ponto possui uma base de vizinhanças compactas), e mesmo assim o espaço funcional computacional não necessita ser localmente compacto.

Para resolver estes problemas, Scott [SCO 72] [SCO 72a] [SCO 76] [SCO 82] foi conduzido a impor restrições drásticas a seus espaços topológicos, que foram afastados do espírito geométrico tradicional da topologia. De fato, seus espaços são realmente apenas conjuntos parcialmente ordenados com supremos dirigidos [JUN 89], onde, segundo Girard, a topologia é uma característica casual. Salienta-se, entretanto, que existe uma visão lógica da topologia, que foi estabelecida em um contexto científico computacional. Veja [ABR 87], [SMY83], [VIC 87].

Por outro lado, a teoria dos Espaços Coerentes [GIR 86] [GIR 87] [GIR 89] [LAF 88] [TRO 92] [SEL 96], também chamados de domínios de Girard, considera admissíveis no conjunto de funções somente funções que, além de contínuas no sentido de Scott (preservam supremos de conjuntos dirigidos), também preservam conjunções (interseções, ínfimos) limitadas superiormente ("pullbacks"), propriedade denominada de estabilidade, introduzida originalmente por Berry [BER 78], com o objetivo de fornecer uma caracterização semântica para algoritmos seqüenciais. Em [GIR 96] é apresentada uma semântica denotacional baseada em espaços de Banach, com a idéia de dar uma versão contínua de espaços coerentes.

Observe que a noção principal nos modelos da lógica linear é a de função linear, que são fechadas para elementos primos completos. Entretanto, existem muitas estruturas que, embora adequadas para a lógica linear, não determinam domínios algébricos primos, e, além disso, domínios de Scott em geral não são algébricos primos. Veja [HUT 95] para um estudo sobre a categoria PRIME dos domínios algébricos primos. Zhang [ZHA 96] procurou generalizar a noção de função linear, introduzindo a noção (mais fraca) de função quasi-linear, dando origem à classe dos domínios algébricos quasi-primos. Zhang [ZHA 89] [ZHA 96] estudou a categoria monoidal simétrica destes domínios, cujos morfismos são as funções quasi-lineares, representando-os como sistemas de informação irredutíveis. Mostra também que considerando as funções contínuas segundo Scott, estes domínios formam uma categoria cartesiana fechada. A mais larga categoria cartesiana fechada dos domínios estáveis foi estudada em [ZHA 96a].

2.3.9 Sobre a Abordagem Adotada

A Teoria dos Domínios é atualmente a área da Matemática da Computação consolidada como uma das mais empregada pela Informática Teórica [STO 94]. Nas seções 1.3.5, 1.3.6 e 1.3.7 estão algumas abordagens adotadas relativamente a números reais e ou intervalos reais.

Salienta-se que a abordagem adotada por Escardó, Edalat e Potts (seção 1.3.7) apresenta natureza que consideramos infinitária. Observe que o principal objetivo desta abordagem é fornecer acesso computacional direto aos objetos considerados infinitos relativamente a informação que contém - número reais e intervalos de reais -, de tal forma que as linguagens de programação incluam tais conceitos explicitamente. Assim o programador pode manipular as representações de números reais e intervalos de reais pela própria linguagem de programação, podendo considerar os reais como entidades abstratas no sentido matemático usual. Neste caso, tem-se que os números reais não são construídos, e, embora infinitos, são efetivos.

O trabalho desenvolvido aqui trabalho parte do ponto de vista tradicional da teoria da computação e, por isso, difere conceitualmente da abordagem adotada na seção 1.3.7. Observando a prática corrente da programação científica, mais especificamente, da matemática intervalar, buscou-se uma estrutura de domínio adequada para construir os números reais e intervalos de reais, e, assim, modelar semanticamente os processos computacionais correspondentes como eles ocorrem na prática. Na verdade, optou-se por aderir à visão tradicional de que somente objetos finitos (no sentido de sua informação) são efetivos e representáveis em linguagem de programação. Por outro lado, os objetos infinitos são entidades ideais limites que não são explicitamente representáveis. Esta abordagem pode ser definida como uma abordagem finitária.

Dentre a diversidade de estruturas de domínio que poderiam ser adotadas, optou-se pelos Espaços Coerentes como a estrutura semântica principal, devido à sua simplicidade e, em particular, por parecerem adequados para modelar computações intervalares de forma intuitiva. Na verdade, a idéia da utilização de Espaços Coerentes deve-se originalmente a Costa [COS 94]. Observou-se que a noção de computação por construção está muito explícita nestas estruturas, que se mostraram perfeitamente adequadas à metodologia de construção desenvolvida.

Salienta-se que a abordagem adotada também difere de outras existentes por permitir que as características externas à construção interna dos reais (objetos totais) e intervalo reais (objetos quasi-totais), como suas operações algébricas, sua ordem de posição, sua distância euclidiana, sua topologia de Hausdorff, dentre outras, possam também ser obtidas pelo processo construtivo, ao mesmo tempo em que os reais e intervalos reais são construídos. Outras abordagens consideram que estas características não são de natureza computacional, e, portanto, não são inerentes aos objetos parciais, sendo somente identificadas no subespaço dos objetos totais. Além disso, ao mesmo tempo em que esta construção externa procede, sua representação computacional interna é garantida por uma estrutura de informação de Espaço Coerente com morfismos estáveis e lineares.

Por outro lado, o trabalho que está sendo desenvolvido por Reiser e Costa [REI 97e] mostra que a bordagem proposta neste trabalho e a abordagem infinitária de Escardó, Edalat e Potts (seção 1.3.7) não são contraditórias, uma vez que é possível mostrar que as propriedades e entidades infinitas podem ser recuperadas como propriedades e entidades que são construídas a partir de quasi-propriedades generalizadas e entidades parciais em espaços coerentes.

Resta, contudo, como um trabalho ainda a ser realizado, tornar explícita a conexão entre as duas abordagens, no que diz respeito aos aspectos de computabilidade de números, intervalos e funções, determinando, de maneira mais precisa, o modo pelo qual as representações infinitárias, modeladas pelo domínio contínuo $\mathbb{IR}$, aparecem no contexto das representações finitárias, modeladas pelo espaço coerente $\mathrm{II}Q$ desenvolvido no presente trabalho.

3 Espaços Coerentes: Conceitos Fundamentais

Os Espaços Coerentes foram introduzidos por Girard [GIR 86] com o objetivo de obter uma estrutura para fornecer uma semântica para a Lógica Linear [GIR 87] [LAF 88]. Neste sentido, Girard procurou modificar as estruturas semânticas existentes na época, simplificando a noção de Domínios de Scott [SCO 72a] [SCO 76] [SCO 82] e obtendo um espaço de natureza construtiva. Desta forma, surgiram domínios mais simples e com características finitárias, denominados de qualitativos [GIR 86]. Finalmente, Girard optou pelos domínios qualitativos binários, denominando-os de Espaços Coerentes [GIR 89], obtendo uma estrutura para sua semântica de provas. Em [GIR 96] é apresentada uma semântica denotacional baseada em espaços de Banach, com a idéia de dar uma versão contínua de espaços coerentes.

A idéia principal da teoria dos espaços coerentes é interpretar um tipo de dados de um cálculo formal tipado através de um espaço coerente, e um termo do cálculo que tenha esse tipo (uma prova, no caso da Teoria Construtiva dos Tipos [MAR 84]) por um ponto deste espaço, isto é, um subconjunto coerente do espaço, um estado de uma computação.

Por outro lado, as computações são representadas por funções entre espaços coerentes que devem possuir propriedades interessantes, como a estabilidade e a linearidade.

Observa-se que na análise a continuidade é caracterizada pela preservação de limites. Em um contexto no qual o resultado de uma computação é modelado como um supremo (limite) de conjuntos dirigidos, é natural que continuidade seja compatível com a formação de tais supremos. Assim, na teoria de Scott [SCO 72a] [SCO 76] [SCO 82], as funções contínuas admissíveis são aquelas caracterizadas pela preservação de supremos de conjuntos dirigidos [JUN 89].

Por outro lado, a teoria dos espaços coerentes considera admissíveis no conjunto de funções somente aquelas que, além de contínuas no sentido de Scott, são também estáveis e lineares. A propriedade de estabilidade introduzida originalmente por Berry [BER 78] para fornecer uma caracterização semântica para algoritmos seqüenciais, caracteriza-se pela preservação de pullbacks (fig. 3.3), isto é, dos ínfimos que são exigidos pela consistência. A propriedade de linearidade, isto é, a preservação de uniões arbitrárias de conjuntos finitamente consistentes pelas funções estáveis, foi introduzida por Girard [GIR 89].

Neste trabalho, optou-se pela utilização de espaços coerentes como a estrutura semântica principal não somente por sua natureza finitária e construtiva, compatível com a abordagem que está sendo proposta, mas também pela simplicidade com que é possível modelar adequadamente processos computacionais da Matemática Intervalar [MOO 79] [MOO 88].

O objetivo deste capítulo é introduzir conceitos básicos sobre Espaços Coerentes e resultados relevantes para a compreensão desta estrutura, fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, segundo uma interpretação compatível com a abordagem construtiva que se pretende adotar. Idéias e conceitos novos também são introduzidos, como os espaços coerentes com objetos indexados e os espaços coerentes gerados por conjuntos básicos. Algumas provas de proposições foram omitidas, mas podem ser encontradas em detalhes em trabalho anterior da autora [DIM 96a]. Para realização deste capítulo foram consultados principalmente os trabalhos de Girard [GIR 86] [GIR 87] [GIR 89], Berry [BER 78], Troelstra [TRO 92] e Zhang [ZHA 89] [ZHA 89a]. Também podem ser citados [DIM 95] [DIM 96b] [DIM 96c] [DIM 96d] [DIM 97a] [LAF 88] [REI 97a] [SEL 96] [ZHA 91] [ZHA 92a] [ZHA 96] [ZHA 96a]. Para a teoria dos Domínios de Scott veja [ABR 87] [DAV 91] [GIE 80] [KAN 84b] [PLO 81] [SCO 72] [SCO 72a] [SCO 90] [SMY 77] [SMY 91] [STO 77] [STO 94].

3.1 Conceitos Básicos

3.1.1 Definição. Teia, Conjunto Coerente

Uma teia $\mathrm{A} \equiv (A, \approx_A)$ é um par formado por um conjunto A sobre o qual é definida uma relação reflexiva e simétrica, denotada por $\approx_A$, denominada de relação de coerência em A.

Um subconjunto x de uma teia A é coerente se e somente se para todo $\alpha,\beta \in x$, $\alpha \approx_A \beta$. O conjunto de todos os subconjuntos coerentes de A, denotado por $Coh(\mathrm{A})$, é dado por $Coh(\mathrm{A}) = Coh(A, \approx_A) = \{x \subseteq A \mid \forall\alpha,\beta \in x,\ \alpha \approx_A \beta\}$. ♦

3.1.2 Definição. Espaço Coerente

Um espaço coerente $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ é a coleção de subconjuntos coerentes de uma teia A parcialmente ordenados pela inclusão. ♦

Os elementos de uma teia são denominados de unidades ou "tokens". Os tokens de uma teia representam quantidades elementares ou bits de informação sobre entidades de um universo, não especificado. Coerência entre tokens significa que estas unidades podem ser vistas como pedaços de informação com relação à mesma entidade. Assim, um conjunto coerente é uma quantidade coerente de informação sobre uma mesma entidade.

A ordem de informação é dada pela relação de inclusão: $x \subseteq y$ significa que y representa no mínimo tanta informação quanto x.

A proposição a seguir evidencia as principais propriedades de um espaço coerente.

3.1.3 Proposição

Se $\mathcal{A}$ é um espaço coerente então:

(i) $\mathcal{A}$ contém todos os conjuntos unitários $\{\alpha\} \subseteq A$, chamados de átomos do domínio.

(ii) $a \in \mathcal{A}, b \subseteq a \Rightarrow b \in \mathcal{A}$ (fecho inferior).

(iii) $B \subseteq \mathcal{A}, \forall c,c' \in B, (c \cup c') \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup B \in \mathcal{A}$ (completeza para coerência binária).

(iv) $\varnothing \in \mathcal{A}$ (objeto indefinido);

(v) $\mathcal{A}$ é fechado em relação a uniões dirigidas [GIR 86], relativamente a $\subseteq$, isto é:

$$\forall i \in I, a_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup^{\uparrow}\{a_i \mid i \in I\} \in \mathcal{A};$$

ou se X é dirigido com relação a $\subseteq$ em $\mathcal{A}$, então $\bigcup X \in \mathcal{A}$.

(vi) $\mathcal{A}$ é fechado em relação a interseções arbitrárias, isto é,

$$\forall i \in I, a_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\{a_i \mid i \in I\} \in \mathcal{A}. \blacklozenge$$

1.1.4 Exemplos

(i) [TRO 92] [GIR 89] Para qualquer conjunto X, $\mathrm{X} \equiv (X, =)$ é uma teia (discreta); o espaço coerente correspondente é denominado de espaço coerente plano ("flat"). Escreve-se $\underline{X}$ para o espaço coerente correspondente. Tem-se que $Coh(\mathrm{X}) = \{\varnothing\} \cup \{\{\alpha\} | \alpha \in X\}$. Para $\underline{\varnothing}$ também escreve-se $\underline{0}$. Tem-se que $Coh(0) = \{\varnothing\}$; $\varnothing$ é o único objeto em $\underline{0}$. Para $\underline{\{\varnothing\}}$ utiliza-se também a notação $\underline{1}$. Neste caso, $Coh(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; os objetos em $\underline{1}$ são $\varnothing$ e $\{\varnothing\}$. Então, observa-se que os diagramas da figura 3.1 representam espaços coerentes planos ("flats"), denominados respectivamente de *Bool* e *Int*.

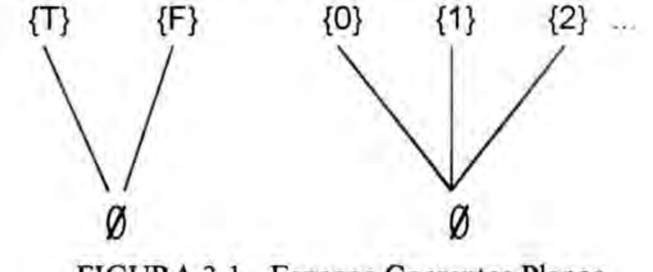
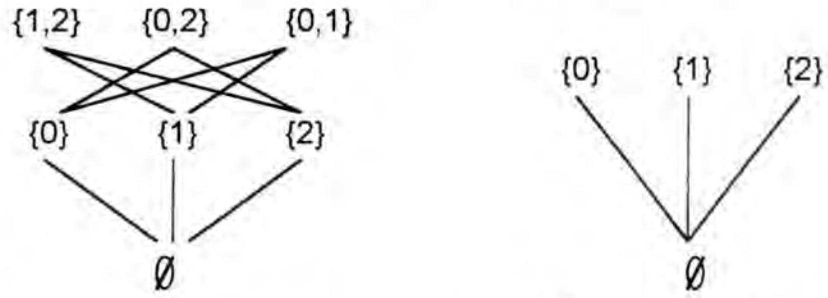


FIGURA 3.1 - Espaços Coerentes Planos

(ii) [GIR 89] O conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{A}$ da figura 3.2 (a) não é um espaço coerente, uma vez que não satisfaz 3.1.3 (iii). De fato, se B é o subconjunto de $\mathcal{A}$ dado na figura 3.2 (b), então tem-se que para todo $c, c' \in B, (c \cup c') \in \mathcal{A}$, mas $\bigcup B \notin \mathcal{A}$. ♦



(a) $\mathcal{A}$ não é espaço coerente (b) $B \subseteq \mathcal{A}, \forall c, c' \in B, (c \cup c') \in \mathcal{A}$

FIGURA 3.2 - Conjunto parcialmente ordenado que não é espaço coerente

Para mostrar que $\mathcal{A}$ é um espaço coerente, é suficiente mostrar que $\mathcal{A}$ é uma coleção de conjuntos que satisfaz as condições (ii) e (iii) da proposição 3.1.3. Em particular, tem-se que o objeto indefinido $\varnothing \in \mathcal{A}$.

Dado um espaço coerente $\mathcal{A}$, é possível recuperar sua teia A. Primeiramente, obtém-se $|\mathcal{A}| = \bigcup \mathcal{A} = \{\alpha; \{\alpha\} \in \mathcal{A}\}$. A relação de coerência entre os tokens da teia pode ser recuperada, definindo-se $\alpha \approx_{|\mathcal{A}|} \alpha'$ se e somente se $\{\alpha, \alpha'\} \in \mathcal{A}$, que é uma relação reflexiva e simétrica em $|\mathcal{A}|$. Então, tem-se que a teia de $\mathcal{A}$ é dada por $\mathrm{A} \equiv (|\mathcal{A}|, \approx_{|\mathcal{A}|})$.

Observe que esta teia pode ser vista como um grafo. Assim, considerando o exemplo 1.1.4 (i), a teia de *Bool* consiste dos tokens T e F, que são incoerentes; similarmente, a teia de *Int* consiste dos inteiros não negativos e, como *Bool*, constitui um grafo discreto.

A construção da teia de um espaço coerente consiste do estabelecimento de uma bijeção entre espaços coerentes e grafos (reflexivos-simétricos). Da teia pode-se recuperar o espaço coerente com: $a \in \mathcal{A} \Leftrightarrow a \subseteq |\mathcal{A}| \wedge \forall \alpha_1, \alpha_2 \in a, \alpha_1 \approx_{|\mathcal{A}|} \alpha_2$.

Na terminologia da Teoria dos Grafos, tem-se que:

3.1.5 Definição. Ponto ou Objeto Parcial

Um ponto ou objeto parcial x de um espaço coerente $\mathcal{A}$ é exatamente um clique (um subgrafo completo) na teia $\mathrm{A} \equiv (A, \approx_A)$, ou seja, qualquer subconjunto coerente da teia A. O conjunto dos objetos finitos pode ser denotado por $\mathcal{A}_{fin}$ ou *Fincoh*(A). ♦

3.1.6 Definição: Ponto ou Objeto Total

Um ponto ou objeto total x em um espaço coerente $\mathcal{A}$ é um clique maximal na teia $\mathrm{A} \equiv (A, \approx_A)$, isto é, x é um subconjunto coerente de A tal que sempre que existe $\gamma \in A$ com $\gamma \approx_A \alpha$, para todo $\alpha \in x$, então $\gamma \in x$. Denota-se a família dos objetos totais de $\mathcal{A}$ por $tot(\mathcal{A})$. ♦

3.2 Espaços Coerentes considerados como Domínios

Pode-se considerar um espaço coerente como um domínio cuja ordem de informação é a ordem parcial dada pela relação de inclusão, e, como tal, um espaço coerente é um cpo (ordem parcial completa) algébrico [STO 94] que satisfaz a condição binária da proposição 1.1.3 (iii).

Assim, tem-se que para todo $x \in \mathcal{A}$, o conjunto das aproximações finitas de x é dirigido relativamente à inclusão e x é o supremo do conjunto de suas aproximações finitas ou compactas [STO 94], isto é, x é a união dirigida de seus subconjuntos finitos.

Um objeto total é aquele que concentra toda informação possível sobre uma determinada entidade. Assim, pela definição 1.1.6, segue que:

3.2.1 Proposição

Um objeto x em um espaço coerente $\mathcal{A}$ é total se e somente se sempre que existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $x \subseteq y$ então $x = y$. ♦

3.2.2 Exemplo

No exemplo 1.1.4 (i), em *Bool* os objetos totais são $\{T\}$ e $\{F\}$, e, em *Int*, os objetos totais são $\{0\}, \{1\}, \{2\}$, etc. $\varnothing$ é o único exemplo de objeto parcial não total em *Bool* e *Int*. ♦

3.3 Espaços Coerentes com Objetos Indexados

Para a abordagem que está sendo proposta neste trabalho, é interessante caracterizar explicitamente o conteúdo de informação de um conjunto coerente. Esta caracterização deve ser dada por um parâmetro que forneça uma indicação do conteúdo de informação que é comum a todos os tokens do conjunto em questão. Este parâmetro, denominado de índice de um conjunto coerente, é obtido a partir dos índices dos tokens que o compõem. Seja (K, $\sqsubseteq$, $\sqcup$, $\perp$, $\top$) um reticulado completo, onde $\sqcup$ é a operação de supremo, $\perp$ é o bottom ou menor elemento, e $\top$ é o topo, que representa explicitamente conteúdos de informação. Então:

3.3.1 Definição. Índice de um Token

O conteúdo de informação dos tokens de uma teia $\mathrm{A} \equiv (A, \approx_A)$ é dado por uma função índice de token $j: A \to K$ que associa cada token $\alpha \in A$ a um índice $j(\alpha) \in K$, que representa o seu conteúdo de informação, tal que $\alpha \approx_A \beta$ se e somente se $j(\alpha) \sqcup j(\beta) \neq \top$, para todo $\alpha, \beta \in A$. ♦

3.3.2 Definição. Índice de um Conjunto Coerente

Seja $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ um espaço coerente. O índice de um conjunto coerente $x \in \mathcal{A}$, denotado por $i(x)$, é o supremo do conjunto dos índices de seus tokens, ou seja, $i(x) = \coprod_K \{ j(\alpha) | \alpha \in x \}$, onde $j(\alpha) \in K$ é o índice de um token $\alpha \in A$ definido em 3.3.1. Em particular, $i(\emptyset) = \perp$. ♦

3.3.3 Exemplo

Seja $\wp(Q) \equiv (\wp(Q), \sqsubseteq, \cap, Q, \emptyset)$ o reticulado completo do conjunto das partes do conjunto dos números racionais Q, com operação de supremo $\cap$, bottom Q e topo $\emptyset$, onde $X \sqsubseteq Y$ se e somente se $Y \subseteq X$, para todo $X, Y \in \wp(Q)$.

Considere então o espaço coerente $\mathcal{IQ} \equiv (Coh(IQ, \approx_{IQ}), \subseteq)$, onde $IQ = \{[p,q] | p,q \in Q\}$ é a família de intervalos racionais $[p,q] = \{r \in Q | p \leq r \leq q\}$ e $\approx_{IQ}$ é a relação de coerência definida em IQ tal que $X \approx_{IQ} Y$ se e somente se $X \cap Y \neq \emptyset$, para todo $X, Y \in IQ$.

Os índices dos tokens da teia $(IQ, \approx_{IQ})$ são determinados por uma função que associa cada intervalo $X \in IQ$ ao seu correspondente no reticulado $\wp(Q)$ como subconjunto de Q, isto é, a função índice de token é a função $j: IQ \to \wp(Q)$, $X \mapsto j(X) = X$. Assim, o índice de um conjunto coerente $x \in \mathcal{IQ}$ é dado por $i(x) = \bigcap_{\wp(Q)} \{ j(X) | X \in x \} = \bigcap_{\wp(Q)} \{ X | X \in x \}$. Quando $i(x) = \{k\}$, escreve-se $i(x) = k$. Em particular, $i(\emptyset) = Q$.

Observe que eventualmente pode-se obter $i(x) \notin IQ$, para $x \neq \varnothing$, ou também $i(x) = \varnothing$. De fato, considere os conjuntos coerentes $x = \{[p,q] \in IQ | p^2 \leq 2 \leq q^2\}$ e $x' = \{[p',q'] \in IQ | p'^2 \geq 2, q'^2 \geq 2, p' < 0, q' > 0\}$. Tem-se então que $i(x) = \varnothing$ e $i(x') = \{r \in Q | r^2 < 2\} \notin IQ$. ♦

Objetos que possuem um mesmo índice podem ser comparados relativamente à qualidade de informação que contém a respeito do índice considerado. Então:

3.3.4 Definição. Aproximação Indexada de um Conjunto Coerente

Sejam x e y objetos de um espaço coerente $\mathcal{A}$. Para um determinado índice k, diz-se que x é uma aproximação k-indexada de y, e denota-se $x \lhd_k y$, se e somente se $i(x) = i(y) = k$ e $x \subseteq y$. ♦

Existe agora a possibilidade de introduzir um outro tipo de totalidade de objetos, cuja noção é fundamental para a o trabalho que será desenvolvido. Diz-se então que um objeto é quasi-total se ele concentra toda informação relativa ao seu índice. Isto significa que não existe token da teia A cuja informação é no máximo igual à do índice de um objeto quasi-total x, que seja coerente com todos os tokens de x e que não seja elemento de x. Então, tem-se que:

3.3.5 Definição. Objeto Quasi-Total

Um objeto x com índice $i(x) = k$ é quasi-total em um espaço coerente $\mathcal{A}$ se e somente se sempre que existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $x \lhd_k y$ então $x = y$. Denota-se a família dos objetos quasi-totais de $\mathcal{A}$ por $qtot(\mathcal{A})$. Quando o índice não é relevante, $x \lhd_k y$ é escrito como $x \lhd y$, simplesmente. ♦

Salienta-se que $\varnothing$ é um objeto quasi-total.

Observe agora que todo objeto total é também quasi-total.

3.3.6 Exemplo

Sejam $x,y \in \mathcal{IQ}$, com

$$x = \{[p,q] \in IQ | p \leq a \leq b \leq q, a,b \in Q\} \text{ e } y = \{[p',q'] \in IQ | p' \leq r \leq q', r \in Q\},$$

onde $\mathcal{IQ}$ é o espaço coerente do exemplo 1.3.3. Tem-se que o conjunto coerente x é um objeto quasi-total, de índice $i(x) = [a,b]$, mas x não é um objeto total. Por outro lado, y é um objeto quasi-total com índice $i(y) = r$ e y é total. ♦

Em diversas aplicações no desenvolvimento deste trabalho existe a necessidade de se transformar um objeto parcial em outro objeto que seja quasi-total mas que possua o mesmo índice. Neste sentido, introduz-se o operador fecho indexado. Então:

3.3.7 Definição. Fecho Indexado de um Conjunto Coerente

O fecho indexado de um conjunto coerente x em um espaço coerente $\mathcal{A}$, denotado por $\hat{x}$, é definido como $\hat{x} = \bigcup^{\uparrow} \{d \in \mathcal{A} | x \lhd d\}$. ♦

Observe que o fecho indexado $\hat{x}$ é obtido pela união dirigida de todos conjunto coerentes de um espaço coerente $\mathcal{A}$ que possuem o mesmo índice de x e que contém x, e, portanto, pela proposição 1.1.3 (v), $\hat{x} \in \mathcal{A}$ e, além disso, $i(x) = i(\hat{x})$. É então imediato que:

3.3.8 Proposição

Para todo $x \in \mathcal{A}$ tem-se que o fecho indexado $\hat{x}$ é o objeto quasi-total de $\mathcal{A}$ que possui o mesmo indice de x. ♦

Salienta-se que o fecho do objeto quasi-total x é o próprio x, isto é, $\hat{x} = x$.

3.3.9 Exemplo

Considere o espaço coerente $\mathcal{IQ}$ do exemplo 1.3.3 e o conjunto coerente $x = \{[p,q] \in IQ | p < 3 < q\}$, cujo índice é $i(x) = 3$. Observe que x não é um objeto total. De fato, por exemplo, existe um intervalo $[3,r]$, com $3 \leq r \in Q$, tal que $[3,r] \approx [p,q]$, para todo $[p,q] \in x$, mas $[3,r] \notin x$. Entretanto, o fecho indexado $\hat{x} = \{[p,q] \in IQ | p \leq 3 \leq q\}$ é o objeto total de $\mathcal{IQ}$ com $i(\hat{x}) = i(x) = 3$. ♦

3.4 Espaços Coerentes Gerados por um Conjunto Básico

Nesta seção introduz-se uma classe de espaços coerentes adequada para a abordagem construtiva adotada neste trabalho. Estes espaços coerentes caracterizam-se por serem obtidos a partir de um conjunto parcialmente ordenado, denominado de conjunto básico.

Seja (A , $\leq_A$) uma ordem parcial e $IA = \{[a_1, a_2] | a_1, a_2 \in A\}$ a família de intervalos $[a_1, a_2] = \{a \in A | a_1 \leq a \leq a_2\}$ de elementos de A. A relação $\leq_A$ induz uma relação reflexiva e simétrica $\approx_{\leq_A}$ em IA, denominada de relação de coerência induzida.

3.4.1 Definição. Relação de Coerência Induzida, Teia Induzida

Para todo $[a_1, a_2], [b_1, b_2] \in IA$, a relação de coerência $\approx_{\leq_A}$ induzida por $\leq_A$ é definida como $[a_1, a_2] \approx_{\leq_A} [b_1, b_2] \Leftrightarrow a_1 \leq b_2 \wedge b_1 \leq a_2$. Diz-se que a teia $(IA, \approx_{\leq_A})$ é induzida por $\leq_A$. ♦

Observe que $\approx_{\leq_A}$ possui um significado claro e intuitivo, no sentido de que dois intervalos desta teia são coerentes se eles possuem algum elemento de A em comum, conforme o resultado a seguir:

3.4.2 Proposição

$X \approx_{\leq_A} X'$ se e somente $X \cap X' \neq \emptyset$, para todo $X, X' \in IA$. ♦

3.4.3 Definição. Espaço Coerente Gerado por um Conjunto Básico

Diz-se que $\mathcal{IA} \equiv \left(Coh\left(IA, \approx_{\leq_A}\right), \subseteq\right)$, onde $\left(IA, \approx_{\leq_A}\right)$ é a teia induzida por $\leq_A$ definida em 1.1.1, é um espaço coerente gerado por um conjunto básico A. ♦

3.4.4 Exemplo

O espaço coerente $\mathcal{IQ}$ do exemplo 1.3.3 é um espaço coerente gerado pelo conjunto básico dos números racionais Q, ordenado pela relação de posição usual $\leq_Q$. ♦

Considere agora o cálculo de índices de tokens e de conjuntos coerentes em $\mathcal{IA}$. Seja $\wp(A) \equiv (\wp(A), \sqsubseteq, \cap, A, \emptyset)$ o reticulado completo do conjunto das partes do conjunto básico A, com operação de supremo $\cap$, bottom A e topo $\emptyset$, onde $X \sqsubseteq Y$ se e somente se $Y \subseteq X$, para todo $X, Y \in \wp(A)$. Os índices dos tokens da teia $\left(IA, \approx_{\leq_A}\right)$ são determinados por uma função índice de token $j: IA \to \wp(A)$, $X \mapsto j(X) = X$, que associa cada intervalo $X \in IA$ ao seu correspondente subconjunto de A no reticulado $\wp(A)$. Escreve-se $X \in IA$ e $X \in \wp(A)$, indiferentemente. Utiliza-se a notação $X = a$ nos casos em que $X = [a,a] \in IA$ ou $X = \{a\} \in \wp(A)$. Segue que:

3.4.5 Proposição

O índice de um conjunto coerente $x \in \mathcal{IA}$ é dado por $i(x) = \bigcap_{\wp(A)} \{X | X \in x\}$. ♦

Com relação aos índices dos objetos totais do espaço coerente $\mathcal{IA}$ tem-se que:

3.4.6 Proposição

Sempre que $x \in tot(\mathcal{IA})$ então $i(x) = \emptyset$ ou $i(x) = [a,a] = a \in A$.

prova:

Supor que x é um objeto total com $i(x) \neq \emptyset$ e $i(x) \neq [a,a]$, para todo $a \in A$. Então, existem pelo menos dois elementos $a_1 \neq a_2 \in A$, consecutivos relativamente a ordem $\leq_A$, tais que para todo intervalo $X \in x$, tem-se que $a_1, a_2 \in X$. Isto significa que $[a_1, a_1] \approx_{\leq_A} X$, assim como $[a_2, a_2] \approx_{\leq_A} X$, para todo $X \in x$, embora $[a_1, a_1] \not\approx_{\leq_A} [a_2, a_2]$. Como x é total, pode-se concluir então que $[a_1, a_1] \in x$ (e $[a_2, a_2] \notin x$) ou $[a_2, a_2] \in x$ (e $[a_1, a_1] \notin x$). No primeiro caso, tem-se necessariamente que $i(x) = [a_1, a_1] = a_1 \in A$, e, considerando o segundo caso, segue que $i(x) = [a_2, a_2] = a_2 \in A$, obtendo-se sempre uma contradição, o que prova a proposição. ♦

Os resultados a seguir mostram propriedades interessantes sobre os objetos quasi-totais do espaço coerente $\mathcal{IA}$ que são relevantes para este trabalho:

3.4.7 Proposição

Sejam $x,y \in qtot(\mathcal{IA})$. Tem-se que $x \cup y \in qtot(\mathcal{IA})$ se e somente se $x \subseteq y$ ou $y \subseteq x$.

prova:

Suponha que $x \cup y \in qtot(\mathcal{IA})$ e que $x \not\subseteq y$ e $y \not\subseteq x$. Isto significa que $i(y) \not\subseteq i(x)$ e $i(x) \not\subseteq i(y)$. Como somente pode-se ter $i(x) \cap i(y) \neq \varnothing$, caso contrário $x \cup y \notin \mathcal{IA}$, então é válido que $i(x \cup y) = i(x) \cap i(y)$. Agora observe que $i(x) \cap i(y) \notin x$, pois $i(x) \not\subseteq i(y)$, assim como $i(x) \cap i(y) \notin y$, porque $i(y) \not\subseteq i(x)$, e, portanto, $i(x \cup y) \notin (x \cup y)$. Então existe $z \in \mathcal{A}$, com $i(z) \in z$, tal que $i(z) = i(x \cup y)$, $x \subseteq z$ e $y \subseteq z$, e, portanto, $x \cup y \subseteq z$, e $z \neq (x \cup y)$. Isto é uma contradição, pois $x \cup y \in qtot(\mathcal{IA})$. Logo, é válido que se $x \cup y \in qtot(\mathcal{IA})$ então $x \subseteq y$ ou $y \subseteq x$. A recíproca é imediata. ♦

3.4.8 Corolário

Seja $X \subseteq qtot(\mathcal{IA})$ tal que para todo $a,b \in X$, tem-se que $a \cup b \in qtot(\mathcal{IA})$. Então é válido que $\bigcup X \in qtot(\mathcal{IA})$. ♦

3.4.9 Corolário

Para todo conjunto dirigido $X \subseteq qtot(\mathcal{IA})$, $\bigcup X \in qtot(\mathcal{IA})$. ♦

3.5 Propriedades das Funções em Espaços Coerentes

Procura-se agora caracterizar as propriedades das funções entre espaços coerentes. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ espaços coerentes.

3.5.1 Definição. Função Contínua, Estável, Linear

Uma função $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é:

(i) monotônica se e somente se para todo $a, a' \in \mathcal{A}$ tem-se que sempre que $a \subseteq a'$ então tem-se que $F(a) \subseteq F(a')$;

(i) contínua se e somente se satisfaz a condição de continuidade: para todo subconjunto dirigido X de $\mathcal{A}$, $F(X)$ é dirigido e $F(\bigcup X) = \bigcup\{F(b) \| b \in X\}$;

(ii) estável se e somente se F é contínua e satisfaz a propriedade de estabilidade: $a \cup a' \in \mathcal{A} \Rightarrow F(a \cap a') = F(a) \cap F(a')$;

(iii) é linear se e somente é estável e se também satisfaz a condição de linearidade: se $X \subseteq \mathcal{A}$, e para todo $b,c \in X \Rightarrow b \cup c \in \mathcal{A}$, então $F(\bigcup X) = \bigcup\{F(b) \| b \in X\}$. ♦

Uma função monotônica é portanto aquela que preserva a relação de aproximação: se é fornecida mais informação à entrada do um processo que calcula F (a' ao invés de a) então se obtém maior retorno no final.

Uma função contínua é aquela que preserva o supremo de conjuntos dirigidos. Observe que todo conjunto coerente a é a união de seu conjunto de aproximações finitas e que o conjunto de aproximações finitas de a é dirigido. Isto significa que uma função $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é contínua se e somente se para todo $a \in \mathcal{A}$ tem-se que $F(a) = \bigcup^{\uparrow}\{F(a_0) | a_0 \subseteq a,\ a_0 \text{ finito}\}$. Isto significa que uma função contínua é aquela que preserva uniões dirigidas de partes finitas de objetos.

A estabilidade de funções caracteriza a preservação das partes que são comuns a objetos coerentes entre si, frente à transformação dos próprios objetos.

Por outro lado, uma transformação de objetos é linear se e somente se pode ser realizada como uma transformação de partes de objetos.

Salienta-se que continuidade implica em monotonicidade, assim como estabilidade também implica em monotonicidade. Entretanto a condição de estabilidade por si só não implica em continuidade, embora toda a função estável seja contínua, por definição. Analogamente, a condição de linearidade não implica a condição de estabilidade, embora toda a função linear seja estável, por definição.

Se considerarmos os conjuntos parcialmente ordenados $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como categorias, nas quais os morfismos de a para a' são inclusões $a \subseteq a'$, então a monotonicidade estabelece que a função estável F constitui um functor. A continuidade e a linearidade estabelecem que F preserva co-limites dirigidos ("filtered colimits") e co-limites arbitrários, respectivamente. Estas condições são inteiramente familiares com a abordagem topológica. Entretanto, isto não acontece com a propriedade de estabilidade, que por si só não possui significado topológico óbvio. Em termos de categorias, a propriedade de estabilidade afirma que "pullbacks" devem ser preservados. Veja a figura 3.3 (a) e (b).

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & a \cup b & & & & F(a) \cup F(b) & \\
a \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \arrow[rr, "F"] & & F(a) \arrow[ur] & & F(b) \arrow[ul] \\
 & a \cap b \arrow[ul] \arrow[ur] & & & & F(a) \cap F(b) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(a) Pullback (b) Preservação do Pullback

FIGURA 3.3 - Diagrama da Preservação de Pullbacks por uma Função Estável F

O objetivo dessas definições é que isto seja válido para qualquer conjunto $\{a_1, a_2, \ldots\}$ que seja limitado superiormente, não somente os que sejam finitos, mas no contexto de aproximação fortemente finita, existente nos espaços coerentes, não é necessário salientar este fato. Observa-se neste caso o fato de que os elementos aproximadores possuem somente uma quantidade finita de elementos abaixo deles, isto é, os espaços coerentes são dI-domínios [ZHA 89] [ZHA 89a] [ZHA 92a], o que não é geralmente verdadeiro para os domínios da teoria de Scott.

A propriedade de estabilidade força a existência de uma menor aproximação em certos casos, simplesmente tomando-se a interseção de um conjunto que é limitado superiormente.

3.5.2 Exemplo

[GIR 89] Deseja-se representar todas as funções de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ como as funções estáveis de *Int* para *Int* do exemplo1.1.4 (i), em particular, considere-se a função

$$f(0) = f(1) = 0,$$
$$f(n+2) = 1.$$

Isto faz com que sua representação como função linear seja

$$F(\{0\}) = F(\{1\}) = \{0\},$$
$$F(\{n+2\}) = \{1\}$$

e, por monotonicidade, $F(\varnothing) = \varnothing$. Tem-se que

$$F(\{0\} \cap \{1\}) = F(\varnothing) = \varnothing \neq F(\{0\}) \cap F(\{1\}) = \{0\}.$$

Apesar disso, F é estável, devido à incoerência entre 0 e 1, que faz com que $\{0\} \cup \{1\} \notin Int$. ♦

Observa-se que toda parte finita do resultado de uma transformação contínua de um objeto pode ser obtida pela transformação de pelo menos uma parte finita do objeto. Por outro lado, quando um objeto sofre uma transformação estável, entre todas as partes do objeto que podem ser transformadas em uma determinada parte do resultado, existe uma única parte que é menor que todas elas. As funções estáveis têm a propriedade de que seus valores são totalmente determinados por seus valores em alguns pontos minimais. Finalmente, quando um objeto sofre uma transformação linear, cada uma das partes do resultado pode ser obtida pela transformação de um átomo do objeto. Estas idéias são explicitadas na proposição a seguir:

3.5.3 Proposição

Uma função $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é
(i) contínua se e somente se sempre que $\beta \in F(a)$ existe um subconjunto finito $a_0 \subseteq a$ tal que $\beta \in F(a_0)$;
(ii) estável se e somente se sempre que $\beta \in F(a)$ existe um menor subconjunto (necessariamente finito) $a_0 \subseteq a$ tal que $\beta \in F(a_0)$;
(iii) linear se e somente se sempre que $\beta \in F(a)$ existe $\alpha \in a$ tal que $\beta \in F(\{\alpha\})$. ♦

3.5.4 Definição. Função Contínua, Estável, Linear em $qtot(\mathcal{IA})$

Sejam $\mathcal{IA} \equiv (Coh(IA, \approx_{\leq_A}), \subseteq)$ e $\mathcal{IB} \equiv (Coh(IB, \approx_{\leq_B}), \subseteq)$ espaços coerentes gerados pelos conjuntos básicos A e B, respectivamente, cujas teias são formadas por conjuntos de intervalos de elementos básicos. Uma função $F: qtot(\mathcal{IA}) \to qtot(\mathcal{IB})$ é:

(i) contínua em $qtot(\mathcal{IA})$ se e somente se satisfaz a condição de continuidade em $qtot(\mathcal{IA})$: para todo subconjunto dirigido X de $qtot(\mathcal{IA})$, tem-se que $F(X)$ é dirigido e $F(\bigcup X) = \bigcup\{F(b) | b \in X\}$;

(ii) estável em $qtot(\mathcal{IA})$ se e somente se é contínua e satisfaz a propriedade de estabilidade em $qtot(\mathcal{IA})$: $a \cup a' \in qtot(\mathcal{IA}) \Rightarrow F(a \cap a') = F(a) \cap F(a')$;

(iii) é linear em $qtot(\mathcal{IA})$ se e somente se é estável e também satisfaz a condição de linearidade $qtot(\mathcal{IA})$: se $X \subseteq qtot(\mathcal{IA})$, e para todo $b,c \in X \Rightarrow b \cup c \in qtot(\mathcal{IA})$, então $F(\bigcup X) = \bigcup\{F(b) | b \in X\}$. ♦

3.6 Construções em Espaços Coerentes

Nesta seção são apresentadas algumas construções em Espaços Coerentes relevantes para este trabalho, como produtos e exponencial. O produto direto é essencial para a construção dos espaços de funções, enquanto que o produto tensorial e o exponencial são fundamentais para caracterizar o isomorfismo entre o espaço de funções estáveis, representado pelos traços destas funções, e um certo espaço de funções lineares, representados pelos traços lineares destas funções. Traços de funções e espaços de funções, por possuirem caracteristicas especiais, serão tratado na seção 1.7.

Sejam $\mathcal{A} \equiv (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ e $\mathcal{B} \equiv (Coh(B, \approx_B), \subseteq)$ espaços coerentes. Então:

3.6.1 Definição. Produto Direto de Espaços Coerentes

O produto direto de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, denotado por $\mathcal{A} \prod \mathcal{B}$, é o espaço coerente $\mathcal{A} \prod \mathcal{B} = \left(Coh\left(A \cup B, \approx \right), \subseteq \right)$, onde

$$
\begin{aligned}
&A \cup B := (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B), \\
&(0, \alpha) \approx (0, \alpha') \text{ se e somente se } \alpha \approx_A \alpha', \\
&(1, \beta) \approx (1, \beta') \text{ se e somente se } \beta \approx_B \beta', \\
&(0, \alpha) \approx (1, \beta) \text{ para todo } \alpha \in A, \beta \in B.
\end{aligned}
$$

As funções projeções associadas $\pi_1 : \mathcal{A} \prod \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ e $\pi_2 : \mathcal{A} \prod \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ são dadas por $x \mapsto \{\alpha | (0, \alpha) \in x\}$ e $x \mapsto \{\beta | (1, \beta) \in x\}$, respectivamente. ♦

Observa-se que o produto cartesiano de espaços coerentes não constitui um espaço coerente. Entretanto, existe um isomorfismo de conjuntos entre a família dos conjuntos coerentes do produto direto de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, $Coh(\mathcal{A} \prod \mathcal{B})$, e o produto cartesiano da família dos conjuntos coerentes de $\mathcal{A}$, $Coh(\mathcal{A})$, pela família dos conjuntos coerentes de $\mathcal{B}$, $Coh(\mathcal{B})$, isto é, $Coh(\mathcal{A} \prod \mathcal{B}) \cong Coh(\mathcal{A}) \times Coh(\mathcal{B})$ [DIM 96a] [GIR 89]. Assim qualquer $x \in Coh(\mathcal{A} \prod \mathcal{B})$ pode ser unicamente decomposto como $(\{0\} \times a) \cup (\{1\} \times b)$, e representado simplesmente pelo par (a, b), com $a \in Coh(\mathcal{A})$, $b \in Coh(\mathcal{B})$.

3.6.2 Definição. Produto Tensorial

O produto tensorial de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, denotado por $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, é o espaço coerente $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = (Coh(A \times B, \approx), \subseteq)$, onde $\times$ é o produto cartesiano e $(\alpha_1, \beta_1) \approx (\alpha_2, \beta_2)$ se e somente se $\alpha_1 \approx_A \alpha_2$ e $\beta_1 \approx_B \beta_2$. ♦

3.6.3 Definição. Exponencial

O exponencial de $\mathcal{A}$, denotado por $!\mathcal{A}$, é o espaço coerente $!\mathcal{A} = (Coh(Fincoh(\mathrm{A}), \approx), \subseteq)$, onde $a \approx b$ se e somente se $a \cup b \in Fincoh(\mathrm{A})$, sendo $Fincoh(\mathrm{A})$ a família dos subconjuntos coerentes finitos da teia $\mathrm{A} = (A, \approx_A)$. ♦

3.7 O Espaço de Funções

Nesta seção são estudados os traços de funções estáveis e lineares, assim como os Espaços de Funções Estáveis e Lineares.

Observa-se agora que, para espaços coerentes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, a família de funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, assim como a família das funções lineares, com a ordem pontual, não constitui um espaço coerente [DIM 96a] [TRO 92].

Entretanto, toda função estável possui uma representação em forma de um conjunto de pares ordenados, denominado de traço, que é um subconjunto de uma forma especial de seu grafo. Mostra-se que uma função estável é unicamente representada pelo seu traço. Isto é, é possível estabelecer um isomorfismo de ordem entre os conjunto dos traços das funções estáveis, ordenado pela inclusão, e a família de funções estáveis, com uma ordem adequada, denominada de ordem estável ou de Berry [BER 78]. O conjunto dos traços das funções estáveis, ordenado pela inclusão, é um espaço coerente que representa o espaço de funções estáveis, ordenado pela ordem estável.

De forma análoga, toda função linear pode ser representada de modo único por um traço linear. Isto é, também aqui existe a possibilidade de estabelecer um isomorfismo entre os conjunto dos traços lineares das funções lineares, ordenado pela inclusão, e a família de funções lineares, com a ordem de Berry [BER 78]. O conjunto dos traços das funções lineares, ordenado pela inclusão, é também um espaço coerente que representa o espaço de funções lineares, ordenado pela ordem estável.

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ espaços coerentes. Então:

3.7.1 Definição. Traço de uma Função Estável

O traço de uma função estável $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um subconjunto de $\mathcal{A}_{fin} \times |\mathcal{B}|$ dado por:

$$tr(F) := \{(a, \beta) | a \in \mathcal{A} \text{ é o menor conjunto coerente tal que } \beta \in F(a)\}. \ ♦$$

Pode-se entender o par $(a, \beta) \in tr(F)$ de forma que a é um ponto minimal para F assumir um valor aproximado por $\{\beta\}$. O traço de uma função estável é caracterizado pela seguinte proposição:

3.7.2 Proposição

Seja $tr(F)$ o traço de uma função estável $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Então:
(i) $(a_1, \beta_1),(a_2, \beta_2) \in tr(F),\ a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \beta_1 \approx \beta_2$ em $\mathcal{B}$; e
(ii) $(a_1, \beta_1),(a_2, \beta_2) \in tr(F),\ a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A} \wedge a_1 \neq a_2 \Rightarrow \beta_1 \neq \beta_2$ em $\mathcal{B}$. ♦

Observa-se que todo conjunto X que possua as mesmas características de um traço, conforme a proposição 1.7.2, é capaz de determinar uma função estável $F_{st(X)}$. Tem-se que:

3.7.3 Proposição

Todo conjunto $X \subseteq \mathcal{A}_{fin} \times |\mathcal{B}|$ tal que
(i) $(a_1, \beta_1),(a_2, \beta_2) \in X,\ a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \beta_1 \approx \beta_2$ em $\mathcal{B}$; e
(ii) $(a_1, \beta_1),(a_2, \beta_2) \in X,\ a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A} \wedge a_1 \neq a_2 \Rightarrow \beta_1 \neq \beta_2$ em $\mathcal{B}$,
determina uma função estável $F_{st(X)}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ por

$$F_{st(X)}(a) := \{\beta \mid \exists a' \subseteq a \text{ tal que } (a', \beta) \in X\}.\ ♦$$

Mostra-se agora que o conjunto dos traços das funções estáveis, ordenado pela inclusão, é um espaço coerente. Tem-se que:

3.7.4 Proposição

Seja $\mathcal{A}_{fin}$ o conjunto dos objetos finitos de $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{S}$ o espaço coerente cuja teia é formada pelos pares ordenados de $|\mathcal{S}| = \mathcal{A}_{fin} \times |\mathcal{B}|$, com a relação de coerência $\approx_{st}$, definida por: $(a_1, \beta_1) \approx_{st} (a_2, \beta_2)$ se e somente se
(i) $a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \beta_1 \approx_{\mathcal{B}} \beta_2$ em $\mathcal{B}$;
(ii) $a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A} \wedge a_1 \neq a_2 \Rightarrow \beta_1 \neq \beta_2$.
Então, $\mathcal{S}$ é o espaço coerente dos traços das funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, ordenados pela inclusão, denotado por $[\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$, isto é, $[\mathcal{A} \to \mathcal{B}] \equiv \left(\left(Coh\left(\mathcal{A}_{fin} \times |\mathcal{B}|\right), \approx_{st}\right), \subseteq\right)$. ♦

É possível estabelecer uma bijeção entre o conjunto dos traços das funções estáveis, $\{tr(F) \mid F: \mathcal{A} \to \mathcal{B} \text{ estavel}\}$, e a família de funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ [DIM 96a] [TRO 92]. Esta bijeção induz uma relação de ordem no espaço de funções estáveis, denominada de ordem de Berry [BER 78]:

3.7.5 Definição. Ordem de Berry ou Ordem Estável

Sejam F e G funções estáveis de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$. Então, $F \leq_B G$ se e somente se para todo $a', a \in \mathcal{A},\ a' \subseteq a \Rightarrow F(a') = F(a) \cap G(a')$. ♦

3.7.6 Definição. Espaço de Funções Estáveis

O espaço das funções estáveis de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, denotado por $\left(\mathcal{A} \xrightarrow{St} \mathcal{B}\right)$, é constituido pelo conjunto das funções estáveis de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, ordenado pela ordem de Berry, $\leq_B$:

$$\left(\mathcal{A} \xrightarrow{St} \mathcal{B}\right) = \left(\{F: \mathcal{A} \to \mathcal{B} | F \text{ é estável }\}, \leq_B\right). \blacklozenge$$

A ordem de inclusão no espaço coerente dos traços das funções estáveis $[\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$ corresponde a ordem de Berry no espaço das funções estáveis $\left(\mathcal{A} \xrightarrow{St} \mathcal{B}\right)$, isto é, se F e G são funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, então $F \leq_B G$ se e somente se $tr(F) \subseteq tr(G)$. Segue que:

3.7.7 Proposição

O conjunto $\{F: \mathcal{A} \to \mathcal{B} | F \text{ é estável }\}$ das funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ é ordem-isomorfo ao conjunto $\{tr(F) | F: \mathcal{A} \to \mathcal{B} \text{ é estável }\}$ dos traços de tais funções, ou seja, $\left(\mathcal{A} \xrightarrow{St} \mathcal{B}\right) \cong [\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$. ♦

Neste momento concluímos que o espaço coerente dos traços das funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, $[\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$, pode ser considerado como uma representação do espaço $\left(\mathcal{A} \xrightarrow{St} \mathcal{B}\right)$ destas funções.

Resultados análogos aos obtidos para o espaço das funções estáveis são também estabelecidos para o espaço das funções lineares. Observe agora que todos os pares $(a, \beta) \in tr(F)$ de uma função linear $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ são de fato da forma $(\{\alpha\}, \beta)$. Então:

3.7.8 Definição. Traço Linear

O traço linear de uma função linear $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um subconjunto de $|\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}|$ dado por

$$ltr(F) := \{(\alpha, \beta) | \beta \in F(\{\alpha\})\}. \blacklozenge$$

O traço linear de uma função linear é caracterizado pela seguinte proposição:

3.7.9 Proposição

Seja $ltr(F)$ o traço linear de $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Então:
(i) $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in ltr(F)$, $\alpha_1 \approx \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \approx \beta_2$ em $\mathcal{B}$; e
(ii) $(\alpha_1, \beta), (\alpha_2, \beta) \in ltr(F)$, $\alpha_1 \approx \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$. ♦

Observa-se que todo conjunto X que possua as mesmas características de um traço linear, conforme a proposição 1.7.9, é capaz de determinar uma função linear $F_{lin(X)}$. Tem-se que:

3.7.10 Proposição

Todo conjunto $X \subseteq |\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}|$ tal que
(i) $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in X$, $\alpha_1 \approx \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \approx \beta_2$ em $\mathcal{B}$; e
(ii) $(\alpha_1, \beta), (\alpha_2, \beta) \in X$, $\alpha_1 \approx \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$,
determina uma função linear $F_{lin(X)}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definida por

$$F_{lin(X)}(a) := \{\beta | \exists \alpha \in a \text{ tal que } (\alpha, \beta) \in X\}. \blacklozenge$$

Mostra-se agora que o conjunto dos traços lineares das funções lineares, ordenado pela inclusão, é também um espaço coerente. Tem-se que:

3.7.11 Proposição

Seja $\mathcal{L}$ o espaço coerente cuja teia é formada pelos átomos de $|\mathcal{L}| = |\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}|$, com a relação de coerência $\approx_{lin}$, definida por: $(\alpha_1, \beta_1) \approx_{lin} (\alpha_2, \beta_2)$ se e somente se:

$$\alpha_1 \approx \alpha_2 \Rightarrow (\beta_1 \approx \beta_2 \wedge (\beta_1 = \beta_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2)).$$

Então, $\mathcal{L}$ é o espaço coerente dos traços lineares das funções lineares de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, ordenados pela inclusão, denotado por $[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$, isto é,

$$[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}] \equiv ((Coh(|\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}|), \approx_{lin}), \subseteq). \ \blacklozenge$$

É possível estabelecer uma bijeção entre o conjunto dos traços das funções lineares, $\{ltr(F) | F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \text{ é linear } \}$, e a família de funções lineares de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ [DIM 96a] [TRO 92]. Como a ordem de Berry [BER 78], definida para funções estáveis em 1.7.5, pode ser considerada também para as funções lineares, tem-se que:

3.7.12 Definição. Espaço de Funções Lineares

O espaço das funções lineares de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, denotado por $(\mathcal{A} \xrightarrow{lin} \mathcal{B})$, é constituído pelo conjunto das funções lineares de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, ordenado pela ordem de Berry, $\leq_B$, relativa às funções lineares, $(\mathcal{A} \xrightarrow{lin} \mathcal{B}) = (\{F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} | F \text{ é linear}\}, \leq_B)$. $\blacklozenge$

Também neste caso a ordem de inclusão no espaço coerente dos traços lineares das funções lineares $[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$ corresponde a ordem de Berry relativa ao espaço das funções lineares $(\mathcal{A} \xrightarrow{lin} \mathcal{B})$, isto é, se F e G são funções lineares de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, então $F \leq_B G$ se e somente se $ltr(F) \subseteq ltr(G)$. Segue que:

3.7.13 Proposição

O conjunto $\{F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} | F \text{ é linear}\}$ das funções lineares de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ é ordem-isomorfo ao conjunto $\{ltr(F) | F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \text{ é linear } \}$, dos traços lineares de tais funções, ou seja, $(\mathcal{A} \xrightarrow{lin} \mathcal{B}) \cong [\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$. $\blacklozenge$

Assim, conclui-se que o espaço coerente dos traços lineares das funções lineares de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, $[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$, pode ser considerado como uma representação do espaço $(\mathcal{A} \xrightarrow{lin} \mathcal{B})$ destas funções.

Girard [GIR 87] estabeleceu um isomorfismo l: $(\mathcal{A} \xrightarrow{St} \mathcal{B}) \rightarrow (!\mathcal{A} \xrightarrow{lin} \mathcal{B})$, entre o espaço das funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ e o espaço das funções lineares do exponencial de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$. Assim, é fácil ver que é possível escrever $[\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}]$, o espaço coerente dos traços das funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ ordenados pela inclusão, como $[!\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$, isto é, o espaço coerente dos traços lineares das funções lineares do exponencial de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$

ordenados pela inclusão. Isto significa que toda função estável pode ser representada por uma função linear, e vice-versa. Em outras palavras, o espaço das funções estáveis $[_ \rightarrow _]$pode ser decomposto em duas construções mais básicas: o espaço das funções lineares $[\_ \multimap \_]$ e o exponencial $!\_$. É suficiente portanto considerar o espaço das funções lineares e a sua representação através dos traços de tais funções [ZHA 92], para analisar a estabilidade das funções admissíveis em Espaços Coerentes.

A descoberta da possibilidade de transformar $\rightarrow$ em ! e $\multimap$ foi um passo importante para o desenvolvimento da Lógica Linear [GIR 87] [LAF 88] [TRO 92].

4 Espaços Coerentes: A Abordagem Categórica

Nesta unidade serão apresentadas as principais categorias de Espaços Coerentes.

Em [DIM 96a] encontra-se uma prova de que a categoria **STAB**, cujos objetos são os espaços coerentes e os morfismos são as funções estáveis entre estes espaços, é uma categoria cartesiana fechada [PIE 91]. Isto significa que **STAB** é realmente uma categoria especial, no sentido computacional. Além de possuir o produto binário definido para todos os seus objetos, **STAB** apresenta objeto exponencial e morfismo de avaliação, garantindo significado para processos computacionais.

Seria desejável que o objeto exponencial nesta categoria fosse justamente o conjunto de morfismos **STAB**($\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$), onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são espaços coerentes. Entretanto o conjunto das funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ não se apresenta como um espaço coerente (veja seção 3.7). Procurou-se então uma representação particular do conjunto das funções estáveis [GIR 89] [TRO 92] de tal forma que ele se constitua em um espaço coerente. Na categoria **STAB**, o conjunto dos morfismos **STAB**($\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$) pode ser representado pelo objeto denotado por $[\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}]$, que nada mais é que o conjuntos dos traços destas funções estáveis, ordenado pela inclusão. Segue que $[\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}]$ é o objeto exponencial desta categoria [DIM 96a] [TRO 92].

Por outro lado, a subcategoria **LIN** da categoria **STAB**, cujos morfismos são as funções lineares, não é uma categoria cartesiana fechada [DIM 96a]. Entretanto, **LIN** apresenta-se como uma categoria monoidal simétrica que é fechada [ASP 91], considerando-se o produto tensorial definido em 3.6.2 [ZHA 89a] [HUT 95]. Isto significa que **LIN** apresenta um fecho, dado pelo objeto denotado por $[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$, que é o conjuntos dos traços lineares das funções lineares, ordenado pela inclusão. Esta condição é suficiente para que em **LIN** também se tenha a garantia de se poder obter significado para processos computacionais.

No final da seção 3.7, mostrou-se que espaço das funções estáveis pode ser decomposto em duas construções mais básicas: o espaço das funções lineares e o exponencial. O exponencial, na verdade, fornece uma adjunção [ASP 91] entre a categoria **STAB** e a categoria **LIN** [ZHA 92]. É suficiente, portanto, considerar a categoria monoidal fechada **LIN** para o estudo dos aspectos de estabilidade dos morfismos de **STAB**.

As provas de proposições que foram omitidas ou simplesmente esquematizadas, podem ser encontradas em detalhes em trabalho anterior da autora [DIM 96a]. Para realização deste capitulo foram consultados principalmente os trabalhos de Girard [GIR 86] [GIR 87] [GIR 89], Huth [HUT 95], Troelstra [TRO 92] e Zhang [ZHA 89] [ZHA 89a] [ZHA 91] [ZHA 92]. Para a teoria das categorias veja também [BAR 9?] [PIE 91] [GOL 79] [ASP 91].

Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ espaços coerentes.

4.1 A Categoria Cartesiana Fechada STAB

A primeira categoria de espaços coerentes a ser apresentada é aquela cujos morfismos são as funções estáveis. A categoria **STAB** apresenta produtos binários, objeto terminal e objeto exponencial, sendo portanto, uma categoria cartesiana fechada [PIE 91].

4.1.1 Definição. A Categoria STAB

A categoria **STAB** possui espaços coerentes como objetos e funções estáveis entre espaços coerentes como morfismos. A composição de morfismos é a composição conjunto-teorética de funções e os morfismos identidade são as funções identidade. Denota-se por $\mathbf{STAB}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ o conjunto dos morfismos de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$. ♦

Em [DIM 96a] encontra-se uma prova de que **STAB** está bem definida. Resumidamente, a prova é como segue. Tem-se que a composição de funções estáveis $f:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $g:\mathcal{B}\to\mathcal{C}\in\mathbf{STAB}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ é uma função estável $g\circ f:\mathcal{A}\to\mathcal{C}\in\mathbf{STAB}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Além disso, esta composição de funções estáveis é associativa, isto é, $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$. Também a função identidade $id:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, dada por $id(x)=x$ é estável, e, portanto, $id\in\mathbf{STAB}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, para qualquer espaço coerente $\mathcal{A}$. Ainda é válido que, para qualquer função estável $f:\mathcal{A}\to\mathcal{B}\in\mathbf{STAB}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, valem as leis da identidade: $id_{\mathcal{B}}\circ f=f$ e $f\circ id_{\mathcal{A}}=f$.

4.1.2 O Objeto Terminal

O objeto terminal de **STAB** é $\underline{0}$, o espaço coerente sem átomos $\underline{\varnothing}$ com a relação de coerência trivial =, $\underline{0}=\underline{\varnothing}=((\varnothing,=),\subseteq)$. A família dos conjuntos coerentes de $\underline{0}$ é dada por $Coh(0)=\{\varnothing\}$. Logo, $\varnothing$ é o único objeto em $\underline{0}$. Para todo espaço coerente $\mathcal{A}$ existe um único morfismo de $\mathcal{A}$ para $\underline{0}$, isto é, para todo espaço coerente $\mathcal{A}$ existe uma função de $Coh(\mathcal{A})$ para $Coh(0)=\{\varnothing\}$, mapeando todo conjunto coerente de $\mathcal{A}$ para o único conjunto coerente de $\underline{0}$ e, além disso, esta é a única função estável de $\mathcal{A}$ para $\underline{0}$. Observa-se que esta é também a única função linear de $\mathcal{A}$ para $\underline{0}$. ♦

4.1.3 Produto Categórico

O produto direto de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\prod\mathcal{B}$, definido em 3.6.1, é o produto categórico binário de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ na categoria **STAB**, com projeções $\pi_0:\mathcal{A}\prod\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ e $\pi_1:\mathcal{A}\prod\mathcal{B}\to\mathcal{B}$, dadas por $x\mapsto\{\alpha|(0,\alpha)\in x\}$ e $x\mapsto\{\beta|(1,\beta)\in x\}$, respectivamente. ♦

Em [DIM 96a] encontra-se uma prova de que o produto direto é realmente o produto categórico na categoria **STAB**. Resumidamente, a prova é a seguinte. As funções projeções π_0 e π_1 são estáveis. Além disso, se $f:\mathcal{C}\to\mathcal{A}$, $g:\mathcal{C}\to\mathcal{B}\in\mathbf{STAB}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ são funções estáveis, então existe uma única função estável de pareamento $\langle,\rangle:\mathcal{C}\to\mathcal{A}\prod\mathcal{B}$, definida por

$$\langle f,g\rangle(c)=\{(0,\alpha)|\alpha\in f(c)\}\cup\{(1,\beta)|\beta\in g(c)\},$$

tal que o diagrama da figura 4.1 comuta, isto é, tal que $\pi_0\circ\langle f,g\rangle=f$ e $\pi_1\circ\langle f,g\rangle=g$. Segue que:

4.1.4 Teorema

STAB é uma categoria cartesiana. ♦

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C} \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f,g \rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
\mathcal{A} & \mathcal{A} \prod \mathcal{B} \arrow[l, "\pi_0"] \arrow[r, "\pi_1"'] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 4.1 - Diagrama do produto nas Categorias **STAB** e **LIN**

4.1.5 O Objeto Exponencial

O objeto exponencial $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ da categoria **STAB** é o espaço coerente $[\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}]$ dos traços das funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ introduzido em 3.7.4,

$$\mathcal{B}^{\mathcal{A}} \equiv [\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}],$$

onde a função de avaliação associada $eval: \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \prod \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é definida por

$$eval(X,a) = F_{st(X)}(a),$$

com $F_{st(X)}$ dada em 3.7.3, e, para toda a função estável $F: \mathcal{C} \prod \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, a função $curry(F): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ é definida por

$$curry(F)(c) = \{(a,\gamma) | a \in \mathcal{A}, \gamma \in F(c,a)\}. \ ♦$$

Em [DIM 96a] encontra-se uma prova de que espaço coerente $[\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}]$ dos traços das funções estáveis de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, que é ordem isomorfo ao espaço das funções estáveis $\left(\mathcal{A} \xrightarrow{St} \mathcal{B}\right)$ (proposição 3.7.7), é realmente o objeto exponencial $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ da categoria **STAB**. Resumidamente, a prova é como segue. A ordem de Berry diz que a função de avaliação *eval* preserva o pullback da figura 4.2, em $\left(\mathcal{A} \xrightarrow{St} \mathcal{B}\right) \prod \mathcal{A}$. Portanto a ordem de Berry é exatamente a relação de ordem que se necessita em $\left(\mathcal{A} \xrightarrow{St} \mathcal{B}\right)$ para tornar a função avaliação *eval* estável.

Além disso, para todo espaço coerente $\mathcal{C}$ e para toda função estável $F: \mathcal{C} \prod \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, existe uma única função estável $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$, definida por $G(c) = \{(a,\gamma) | a \in \mathcal{A}, \gamma \in F(c,a)\}$, tal que o diagrama da figura 4.3 comuta, isto é,

$eval \circ (G, id_{\mathcal{A}}) = F$. Esta única função G define a função $curry(F)$ da figura 4.3, que é, portanto, estável.

$$
\begin{tikzcd}
 & (G, a) & \\
(G, a') \arrow[ur] & & (F, a) \arrow[ul] \\
 & (F, a') \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 4.2 - Pullback de $(\mathcal{A} \xrightarrow{St} \mathcal{B}) \prod \mathcal{A}$ onde $a' \subseteq a \in \mathcal{A}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \prod \mathcal{A} \arrow[d, dotted, "{(G, \mathrm{id}_{\mathcal{A}})}"'] \arrow[dr, "F"] & & \mathcal{C} \arrow[d, dotted, "curry(F)"] \\
\mathcal{B}^{\mathcal{A}} \prod \mathcal{A} \arrow[r, "eval"'] & \mathcal{B} & \mathcal{B}^{\mathcal{A}}
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 4.3 - Diagrama do Objeto Exponencial

O resultado a seguir é imediato:

4.1.6 Teorema

STAB é uma categoria cartesiana fechada. ♦

4.1.7 Observação

A importância de se garantir a existência do objeto exponencial em uma categoria está relacionada com a idéia do que consiste uma computação. Observe novamente o diagrama do objeto exponencial dado na figura 4.3. Se uma categoria possui um objeto exponencial, como, por exemplo, a categoria **STAB**, então pode-se entender intuitivamente que para cada elemento em $\mathcal{C}$, interpretado como um programa ou algoritmo, e para cada morfismo F que representa a execução deste programa ou algoritmo a partir de elementos de $\mathcal{A}$, interpretados como dados de entrada, obtendo resultados em $\mathcal{B}$, existe uma única função semântica $G = curry(F)$, que também é um morfismo da categoria e que associa este programa ou algoritmo ao seu significado matemático, como elemento do objeto exponencial $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$, interpretado como uma função, que é aplicado através da ação do morfismo *eval*, a um argumento em $\mathcal{A}$ para obter um valor em $\mathcal{B}$. No caso da categoria **STAB**, como $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ é uma família de traços, a função estável *eval* realiza a aplicação da função estável associada ao traço em questão. ♦

4.2 A Categoria Monoidal Fechada LIN

Agora apresenta-se a subcategoria da categoria **STAB** cujos morfismos são as funções lineares. A categoria **LIN** apresenta produtos binários, objeto terminal, mas não possui objeto exponencial, e, portanto, não é uma categoria cartesiana fechada [PIE 91]. Entretanto, em **LIN** é definido um produto associativo, comutativo, para o qual existe o elemento identidade, o produto tensorial definido em 3.6.2, sendo, portanto, uma categoria monoidal simétrica para este produto [ASP 91]. Além disso, **LIN** é uma categoria monoidal fechada [ASP 91], no sentido que apresenta um fecho [TRO 92], isto é, um objeto que é uma abstração do objeto exponencial de uma categoria cartesiana fechada.

4.2.1 Definição. A Categoria **LIN**

A categoria **LIN** possui espaços coerentes como objetos e funções lineares entre espaços coerentes como morfismos. A composição de morfismos é a composição conjunto-teorética de funções e os morfismos identidade são as funções identidade. Denota-se $\mathbf{LIN}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ o conjunto dos morfismos de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$. ♦

Em [DIM 96a] encontra-se uma prova de que **LIN** está bem definida. Em resumo, a prova é como segue. Tem-se que a composição de funções lineares $f:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $g:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ $\in\mathbf{LIN}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ é uma função linear $g\circ f:\mathcal{A}\to\mathcal{C}\in\mathbf{LIN}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Também a função identidade $id:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ é linear, e, portanto, $id\in\mathbf{LIN}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, para qualquer espaço coerente $\mathcal{A}$. Além disso, a composição é associativa.

4.2.2 O Objeto Terminal

O objeto terminal de **LIN** é o espaço coerente sem átomos $\underline{0}$, introduzido em 1.1.2. ♦

4.2.3 Produto Categórico

O produto direto de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\prod\mathcal{B}$, definido em 3.6.1, é o produto categórico binário de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ na categoria **LIN**, com projeções $\pi_0:\mathcal{A}\prod\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ e $\pi_1:\mathcal{A}\prod\mathcal{B}\to\mathcal{B}$, dadas por $x\mapsto\{\alpha\,|\,(0,\alpha)\in x\}$ e $x\mapsto\{\beta\,|\,(1,\beta)\in x\}$, respectivamente. ♦

Em [DIM 96a] encontra-se uma prova de que o produto direto é realmente o produto categórico na categoria **LIN**. Em resumo, a prova é como segue. As funções projeções π_0 e π_1 são lineares. Além disso, se $f:\mathcal{C}\to\mathcal{A}$, $g:\mathcal{C}\to\mathcal{B}$ $\in\mathbf{LIN}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ são funções lineares, então existe uma única função linear de pareamento $\langle,\rangle:\mathcal{C}\to\mathcal{A}\prod\mathcal{B}$, definida por

$$\langle f,g\rangle(c)=\{(0,\alpha)|\alpha\in f(c)\}\cup\{(1,\beta)|\beta\in g(c)\}.$$

tal que o diagrama da figura 4.1 comuta, isto é, tal que $\pi_0 \circ \langle f,g \rangle = f$ e $\pi_1 \circ \langle f,g \rangle = g$. Segue que:

4.2.4 Teorema

LIN é uma categoria cartesiana. ♦

4.2.5 Por que **LIN** não é uma categoria cartesiana fechada?

Em [DIM 96a] encontra-se uma prova de que **LIN** não é uma categoria cartesiana fechada. Em resumo, a prova é como segue. Observe que é possível pensar em um objeto exponencial $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ como o espaço coerente $[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$ dos traços lineares das funções lineares de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ introduzido em 3.7.11, $\mathcal{B}^{\mathcal{A}} \equiv [\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$, com a função de avaliação associada $eval$: $\mathcal{B}^{\mathcal{A}} \prod \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definida por $eval(X,a) = F_{lin(X)}(a)$, onde $F_{lin(X)}$ é dada em 3.7.10. A função de avaliação $eval$ é linear. Entretanto, dada F: $\mathcal{C} \prod \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linear, não é possível determinar uma função linear G: $\mathcal{C} \to \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ tal que o diagrama da figura 4.4 comuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \prod \mathcal{A} \arrow[d, dashed, "(G\,,\, \mathrm{id}_{\mathcal{A}})"'] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathcal{B}^{\mathcal{A}} \prod \mathcal{A} \arrow[r, "eval"'] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

FIGURA 4.4 - Diagrama do Objeto Exponencial

O resultado a seguir é imediato:

4.2.6 Teorema

LIN não é uma categoria cartesiana fechada. ♦

4.2.7 Produto Tensorial

O produto tensorial de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, definido em 3.6.2, é um produto tensorial de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ na categoria **LIN**. ♦

De fato, observe que o produto tensorial $\otimes$ é associativo. Além disso, existe o elemento identidade à direita e à esquerda para $\otimes$, dado pelo espaço coerente $\underline{1} \equiv (Coh(\{1\},=),\subseteq) = (\{\{1\},\varnothing\},\subseteq)$, gerado pela teia $(\{1\},=)$. Segue que:

4.2.8 Proposição

LIN é uma categoria monoidal relativamente a $\otimes$. ♦

Salienta-se agora que o produto tensorial $\otimes$ é também comutativo, e, portanto, tem-se que:

4.2.9 Proposição

LIN é uma categoria monoidal simétrica relativamente a $\otimes$. ♦

Observa-se que o produto tensorial é uma "generalização" do produto categórico. Toda categoria cartesiana é uma categoria monoidal simétrica com relação ao produto categórico. Pode-se dizer, em linhas gerais, que o produto tensorial, no sentido de categorias monoidais, difere do produto categórico justamente por não possuir projeções e funções de pareamento.

4.2.10 O Fecho em **LIN**

Em **LIN**, o espaço coerente $[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$ dos traços lineares das funções lineares de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, introduzido em 3.7.11, é um fecho relativamente ao produto tensorial $\otimes$, onde a função de avaliação associada *eval*: $[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]\otimes\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é tal que

$$\beta \in eval(t,a) \text{ se e somente se } ((\alpha,\beta),\alpha) \in (t,a), \text{ para algum } (t,a) \in [\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]\otimes\mathcal{A},$$

e, para toda a função linear $F: \mathcal{C}\otimes\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, o traço linear da função $curry(F)$: $\mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$ é dado por

$$(\gamma,(\alpha,\beta)) \in ltr(curry(F)) \text{ se e somente se } ((\gamma,\alpha),\beta) \in ltr(F). \ ♦$$

Conforme [TRO 92], o espaço coerente $[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$ dos traços lineares das funções lineares de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ é realmente um fecho para a categoria **LIN**, relativamente ao produto tensorial $\otimes$. Em resumo, a prova é como segue. Para todo espaço coerente $\mathcal{C}$ e para toda função linear $F: \mathcal{C}\otimes\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, existe uma única função linear $G: \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$, cujo traço linear é definido por $(\gamma,(\alpha,\beta)) \in ltr(G)$ se e somente se $((\gamma,\alpha),\beta) \in ltr(F)$, tal que o diagrama da figura 4.5 comuta, isto é, $eval \circ (G \otimes id_{\mathcal{A}}) = F$. Esta única função G define a função $curry(F)$ da figura 4.5, que é, portanto, linear.

A importância intuitiva da existência deste fecho na categoria **LIN**, que não é cartesiana fechada, é garantir de que se possa fornecer também aqui um significado matemático para os processos computacionais em **LIN**, conforme a observação da seção 4.1.7. Assim, é possível dar uma interpretação análoga à do diagrama da figura 4.3 (seção 4.1.5) ao diagrama da figura 4.5. Se na categoria **LIN** existe o fecho $[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$ para o produto tensorial, então pode-se entender que para cada programa em $\mathcal{C}$ e para cada função linear F que representa a execução deste programa a partir de dados de entrada em $\mathcal{A}$, obtendo resultados em $\mathcal{B}$, existe uma única função semântica $G = curry(F)$, que associa este programa ao seu significado matemático, no espaço coerente $[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$, que é aplicado através da ação da função linear *eval*, a um argumento em $\mathcal{A}$ para obter um valor em $\mathcal{B}$. Neste caso, como $[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$ é uma família de traços lineares, a função *eval* realiza a aplicação da função linear associada ao traço linear em questão.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \arrow[d, dotted, "curry(F) \otimes id_{\mathcal{A}}"'] \arrow[dr, "F"] & & \mathcal{C} \arrow[d, dotted, "curry(F)"] \\
{[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}] \otimes \mathcal{A}} \arrow[r, "eval"'] & \mathcal{B} & {[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]}
\end{tikzcd}$$

FIGURA 4.5 - Diagrama Comutativo do Fecho $[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$ em **LIN**

Em resumo, a obtenção do fecho $[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$ em **LIN**, relativamente ao produto tensorial $\otimes$, garante que para cada espaço coerente $\mathcal{C}$ e para cada função linear $F: \mathcal{C}\otimes\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, existe uma única função linear $curry(F): \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$, e vice-versa, o que caracteriza a existência de um isomorfismo Λ: $\mathbf{LIN}(\mathcal{C}\otimes\mathcal{A},\mathcal{B}) \cong \mathbf{LIN}(\mathcal{C},[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}])$, que é natural em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$.

Observe que para mostrar que Λ é um isomorfismo, basta verificar que a função linear $curry(F)$ é bijetiva. De fato, sejam F', G: $\mathcal{C}\otimes\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ funções lineares tais que $curry(F') = curry(G)$. Tem-se que:

$$F' = eval \circ \left(curry(F') \otimes id_{\mathcal{A}}\right) = eval \circ \left(curry(G) \otimes id_{\mathcal{A}}\right) = G,$$

o que prova a injetividade de $curry(F)$. Por outro lado, para toda $H: \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]$, define-se $F = eval \circ \left(H \otimes id_{\mathcal{A}}\right)$. Pela unicidade de $curry(F)$ conclui-se que $curry(F) = H$, e, portanto, $curry(F)$ é bijetiva. Segue que:

4.2.11 Teorema

LIN é uma categoria monoidal fechada. ♦

4.2.12 Observação

O isomorfismo entre conjuntos de morfismos Λ: $\mathbf{LIN}(\mathcal{C}\otimes\mathcal{A},\mathcal{B}) \cong \mathbf{LIN}(\mathcal{C},[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}])$ é uma transformação natural em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$, que, sendo uma bijeção para todo $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$, preserva a estrutura enquanto seus argumentos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ variam. Isto caracteriza uma adjunção [ASP 91] $\langle F, G, \Lambda\rangle$, representada esquematicamente por:

$$\frac{\mathcal{C} \to [\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]}{\mathcal{C}\otimes\mathcal{A} \to \mathcal{B}}$$

e descrita no diagrama da figura 4.6.

O functor $F \equiv (\_ \otimes \mathcal{A})\!: \mathbf{LIN} \to \mathbf{LIN}$, que leva cada objeto $\mathcal{C}$ no objeto $\mathcal{C}\otimes\mathcal{A}$ e cada morfismo g: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ no morfismo $F(g)\!: \mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{D} \otimes \mathcal{A}$, tal que $F(g) = g \otimes id_{\mathcal{A}}$ (veja figura 4.7), é adjunto à esquerda do functor $G \equiv ([\mathcal{A} \multimap \_\,])$: $\mathbf{LIN} \to \mathbf{LIN}$ que associa cada objeto $\mathcal{B}$ ao objeto $[\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$ e cada morfismo h: $\mathcal{B} \to \mathcal{D}$ ao morfismo $G(h)$: $[\mathcal{A} \to \mathcal{B}] \to [\mathcal{A} \to \mathcal{D}]$, tal que $G(h)(X) = ltr\left(h \circ F_{lin(X)}\right)$, para $X \in [\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$ (veja figura 4.8). A co-unidade da adjunção é justamente a função *eval*. ♦

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, dotted, "F"] \arrow[d, "\Lambda(f)"'] & \mathcal{C}\otimes\mathcal{A} \arrow[d, "f"] \\
{[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]} & \mathcal{B} \arrow[l, dotted, "G"]
\end{tikzcd}$$

FIGURA 4.6 - Diagrama da Adjunção $\langle F, G, \Lambda\rangle$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "g"'] & & \mathcal{C}\otimes\mathcal{A} \arrow[d, "g \otimes id_{\mathcal{A}}"] \\
\mathcal{D} & & \mathcal{D}\otimes\mathcal{A}
\end{tikzcd}
\qquad \xrightarrow{F}$$

FIGURA 4.7 - Diagrama do Adjuntor à esquerda $F \equiv (\_ \otimes \mathcal{A})\!: \mathbf{LIN} \to \mathbf{LIN}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[d, "h"'] \arrow[rr, phantom, "G"] & & {[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]} \arrow[d, "ltr(h \circ F_{lin(X)}),\ X \in {[\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}]}"] \\
\mathcal{D} & & {[\mathcal{A} \multimap \mathcal{D}]}
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 4.8 - Diagrama do Adjuntor à direita $G \equiv ([\mathcal{A} \multimap \_])$: **LIN** $\rightarrow$ **LIN**

4.3 A Adjunção entre as Categorias STAB e LIN garantida pelo operador !

O isomorfismo entre os conjuntos de morfismos $\left(\mathcal{A} \xrightarrow{st} \mathcal{B}\right) \cong \left(!\mathcal{A} \xrightarrow{lin} \mathcal{B}\right)$, estabelecido por Girard [GIR 87] (veja final do capítulo 3), introduz uma transformação natural Ω: **LIN**$(!\mathcal{A},\mathcal{B}) \cong$ **STAB**$(\mathcal{A},\mathcal{B})$ em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, que é uma bijeção, que preserva a estrutura enquanto $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ variam. Isto caracteriza uma adjunção $\langle F, G, \Omega \rangle$ entre as categorias **STAB** e **LIN**, representada esquematicamente por:

$$
\frac{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}{!\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}
$$

e descrita no diagrama da figura 4.9.

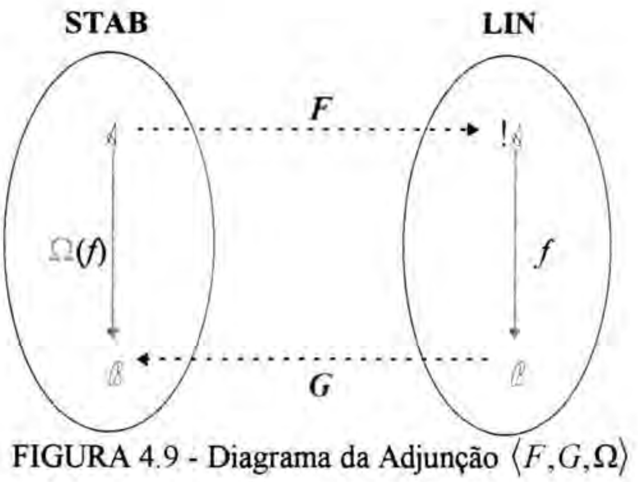


FIGURA 4.9 - Diagrama da Adjunção $\langle F, G, \Omega \rangle$

O functor $F \equiv (!\_)$: **STAB** $\rightarrow$ **LIN**, que leva cada objeto $\mathcal{A}$ da categoria **STAB** no objeto $!\mathcal{A}$ da categoria **LIN** e cada morfismo g: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ de **STAB** no morfismo $F(g)$:$!\mathcal{A} \rightarrow !\mathcal{C}$ (veja figura 4.10), com $F(g) = !g$, tal que $a \mapsto \{g(x) | x \in a\}$, é adjunto à esquerda do functor inclusão $G \equiv (\_)$: **LIN** $\rightarrow$ **STAB** que associa cada objeto $\mathcal{B}$ da categoria **LIN** ao mesmo objeto $\mathcal{B}$ da categoria **STAB** e cada morfismo h: $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ em **LIN** ao morfismo $G(h)$: $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ em **STAB**, tal que $G(h) = h$ (veja figura 4.11).

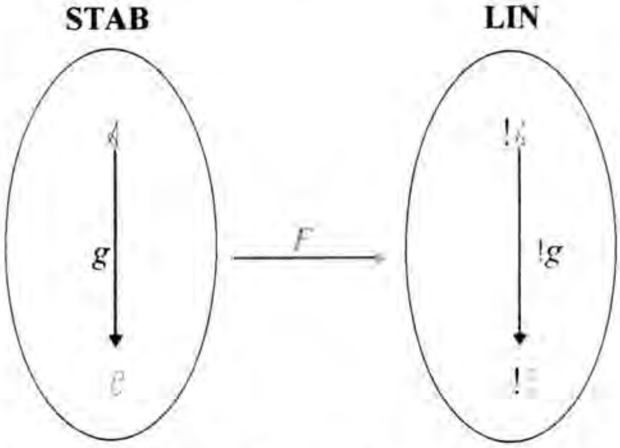


FIGURA 4.10 - Diagrama do Adjuntor à esquerda $F \equiv (!\_)\!: \mathbf{STAB} \rightarrow \mathbf{LIN}$

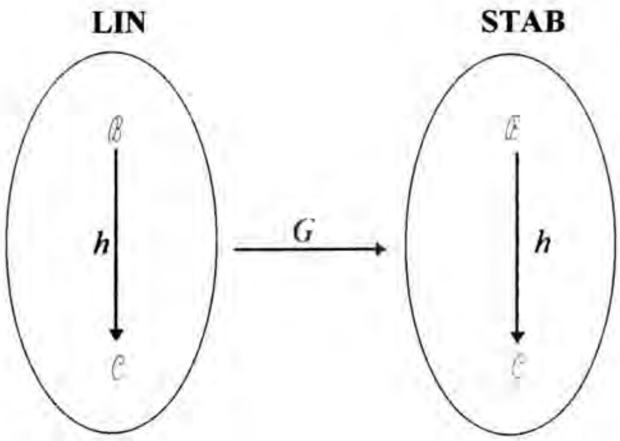


FIGURA 4.11 - Diagrama do Adjuntor à direita $G \equiv (\_)\!: \mathbf{LIN} \rightarrow \mathbf{STAB}$

5 Sistemas Ordenados de 2ª Ordem

Analisando-se os principais tipos de dados da Computação Científica e da Matemática Intervalar - números reais $\mathbb{R}$ e intervalos de reais $\mathbb{IR}$ - e os sistemas de representação que se pretende usar para representá-los - espaços coerentes bi-estruturados -, observa-se que é possível definir uma classe de estruturas que os engloba. Estas estruturas mais gerais serão denominadas de sistemas ordenados de 2ª ordem.

A noção de sistema de 2ª ordem pode ser considerada como uma extensão à noção de "sistema" [MAN 89] ou de "estrutura relacional" [BRI 77], ou de Σ-estrutura [GRA 79] [ACI 91], que são de 1ª ordem, com uma estrutura de relações e funções definidas somente sobre objetos do conjunto universo. As estruturas dos sistemas de 2ª ordem admitem, adicionalmente, relações e funções sobre partes (subconjuntos) do conjunto universo.

Os principais sistemas ordenados de 2ª ordem considerados neste trabalho - os sistemas de representação - têm, ainda, a característica adicional de serem bi-estruturados, isto é, de poderem ter sua estrutura dividida em duas partes, uma chamada de estrutura de aplicação e a outra chamada de estrutura de informação.

A estrutura de aplicação - relacional, funcional, topológica, lógica -, onde é definida a ordem parcial de posição que dá ao sistema o seu caráter de sistema ordenado, e da qual se deriva a ordem de informação contida na estrutura de informação, é determinada pela utilização pretendida para o sistema de representação em questão. No caso dos sistemas de representação para a Computação Científica e a Matemática Intervalar, relativos ao números reais e aos intervalos reais, na estrutura de aplicação é possível definir, por exemplo, a relação de posição $\leq$, as operações algébricas, funções como as funções trigonométricas, a distância e o módulo, a topologia induzida pela distância, dentre outros aspectos.

Por outro lado, a estrutura de informação do sistema de representação está associada ao processo de construção dos elementos do conjunto universo da representação, chamados de objetos, do conjunto das aproximações destes objetos e de sua topologia de informação.

5.1 Sistemas Ordenados de 2ª Ordem: Conceitos Básicos

Nesta seção são introduzidos os sistemas de 2ª ordem, os sistemas ordenados de 2ª ordem e os principais aspectos relacionados.

Sejam $\mathbb{A} \neq \varnothing$ um conjunto, $\wp(\mathbb{A})$ o conjunto das partes de $\mathbb{A}$, $\lambda_{\mathbb{A}} \in \{\mathbb{A}, \wp(\mathbb{A})\}$ e U e V conjuntos de índices. Considere a família

$$\mathcal{F} = \left\{ f_{\mathbb{A}_u} : \lambda_{\mathbb{A}}^{\kappa(u)} \to \lambda_{\mathbb{A}} \,|\, u \in U, \kappa : U \to \mathrm{N} \right\}$$

de todas as funções de $\lambda_{\mathbb{A}}^{\kappa(u)}$ em $\lambda_{\mathbb{A}}$, com aridade $\kappa(u) \in \mathrm{N}$, e a família

$$\mathcal{R} = \left\{ r_{\mathbb{A}_v} \subseteq \lambda_{\mathbb{A}}^{\eta(v)} \,|\, v \in V, \eta : V \to \mathrm{N} \right\}$$

de todas as relações em $\lambda_{\mathbb{A}}$, com aridade $\eta(v) \in \mathrm{N}$.

5.1.1 Definição. Sistemas de 2ª Ordem

Diz-se que A é um sistema de 2ª ordem se $\mathsf{A} = (\Lambda_{\mathbb{A}}; \Sigma_{\mathbb{A}})$, com $\Lambda_{\mathbb{A}} = \{\mathbb{A}, \wp(\mathbb{A})\}$, onde $\mathbb{A} \neq \varnothing$ é um conjunto, denominado de universo do sistema, $\wp(\mathbb{A})$ é o conjunto das partes de $\mathbb{A}$, $\Sigma_{\mathbb{A}} = \left(\{f_{\mathbb{A}i}\}_{i \in I}, \{r_{\mathbb{A}j}\}_{j \in J}\right)$, com funções associadas $\mu: I \to \mathrm{N}$ e $\delta: J \to N$, compreendendo funções e relações definidas sobre o universo $\mathbb{A}$ e $\wp(\mathbb{A})$, e tal que, para $\lambda_{\mathbb{A}} \in \Lambda_{\mathbb{A}}$, é válido que:

(i) $I \subseteq U$ é um subconjunto de índices, que pode ser vazio. Para cada $i \in I$, $\mu(i) \in \mathrm{N}$, tem-se que $f_{\mathbb{A}i}: \lambda_{\mathbb{A}}^{\mu(i)} \to \lambda_{\mathbb{A}} \in \mathcal{F}$ é uma função $\mu(i)$-ária definida sobre $\lambda_{\mathbb{A}}^{\mu(i)}$. Quando $\mu(i) = 0$, $f_{\mathbb{A}i}$ é um elemento destacado de $\lambda_{\mathbb{A}}$.

(ii) $J \subseteq V$ é um subconjunto de índices, que também pode ser vazio. Para cada $j \in J$, $\delta(j) \in \mathrm{N}$, tem-se que $r_{\mathbb{A}j} \subseteq \lambda_{\mathbb{A}}^{\delta(j)} \in \mathcal{R}$ é uma relação $\delta(j)$-ária definida em $\lambda_{\mathbb{A}}$.

Se o universo $\mathbb{A}$ do sistema A é de natureza intervalar, diz-se que A é um sistema intervalar de 2ª ordem. Se na subestrutura de relações do sistema A for definida uma ordem parcial de posição sobre o universo $\mathbb{A}$, então diz-se que A é um sistema ordenado de 2ª ordem. O tipo ou assinatura do sistema A é dado por $\langle \mu, \delta \rangle$. A família de todos os sistemas ordenados de 2ª ordem é denotada por SO2. ♦

5.1.2 Exemplo

É um exemplo de sistema ordenado de 2ª ordem o sistema $\mathsf{R} = (\Lambda_{\mathbb{R}}; \Sigma_{\mathbb{R}})$ dos números reais $\mathbb{R}$, com $\Sigma_{\mathbb{R}} \equiv \langle *_{\mathbb{R}}, \leq_{\mathbb{R}}, F_{\mathbb{R}}, R_{\mathbb{R}}, M_{\mathbb{R}}, \sigma_{\mathbb{R}} \rangle$, onde $*_{\mathbb{R}}$ são operações aritméticas, $\leq_{\mathbb{R}}$ é a relação parcial de posição, $F_{\mathbb{R}}$ são funções de reais, $R_{\mathbb{R}}$ são relações definidas sobre $\mathbb{R}$, $M_{\mathbb{R}}$ representa a estrutura de medidas definida pela métrica e pela norma em $\mathbb{R}$, e $\sigma_{\mathbb{R}}$ é a topologia de Hausdorff.

Por outro lado, $\mathsf{IR} = (\Lambda_{\mathbb{IR}}; \Sigma_{\mathbb{IR}})$ é o sistema intervalar ordenado de 2ª ordem dos intervalos reais $\mathbb{IR}$ [MOO 66] [MOO 79] [MOO 88] [ALE 83], com $\Sigma_{\mathbb{IR}} \equiv \langle *_{\mathbb{IR}}, \leq_{\mathbb{IR}}, F_{\mathbb{IR}}, R_{\mathbb{IR}}, M_{\mathbb{IR}}, \sigma_{\mathbb{IR}} \rangle$, onde $*_{\mathbb{IR}}$ são operações aritméticas intervalares, $\leq_{\mathbb{IR}}$ é a relação parcial de posição, $F_{\mathbb{IR}}$ são funções intervalares, $R_{\mathbb{IR}}$ são relações definidas sobre $\mathbb{IR}$, $M_{\mathbb{IR}}$ representa a estrutura de medidas definida por uma função distância intervalar e uma função valor absoluto intervalar, e $\sigma_{\mathbb{IR}}$ é a topologia definida sobre $\mathbb{IR}$. ♦

Agora verifica-se que é possível definir intuitivamente dois tipos de estruturas para os sistemas de 2ª ordem. Seja $\mathsf{A} = (\Lambda_{\mathbb{A}}; \Sigma_{\mathbb{A}})$ um sistema de 2ª ordem. Tem-se que:

5.1.3 Definição. Estrutura de Informação

Diz-se que $(\Lambda_{\mathbb{A}};\Sigma_{\mathbb{A}}^{in})$, onde $\Sigma_{\mathbb{A}}^{in}=\left(\left\{f_{\mathbb{A}\,i}^{in}\right\}_{i\in I},\left\{r_{\mathbb{A}\,j}^{in}\right\}_{j\in J}\right)$, com funções associadas $\mu_{in}:I\rightarrow \mathrm{N}$ e $\delta_{in}:J\rightarrow N$, é um sistema de 2ª ordem com estrutura de informação se e somente se as funções $f_{\mathbb{A}\,i}^{in}:\lambda_{\mathbb{A}}^{\mu_{in}(i)}\rightarrow\lambda_{\mathbb{A}}$ e as relações $r_{\mathbb{A}\,j}^{in}\subseteq\lambda_{\mathbb{A}}^{\delta_{in}(j)}$, com $\lambda_{\mathbb{A}}\in\Lambda_{\mathbb{A}}$, estiverem relacionadas com a natureza interna de formação dos objetos do universo $\mathbb{A}$, do conjunto das aproximações deste objetos, de sua topologia de informação e de sua lógica de informação, no sentido da teoria dos domínios de Scott. ♦

5.1.4 Definição. Estrutura de Aplicação

Diz-se que $(\Lambda_{\mathbb{A}};\Sigma_{\mathbb{A}}^{ap})$, onde $\Sigma_{\mathbb{A}}^{ap}=\left(\left\{f_{\mathbb{A}\,i}^{ap}\right\}_{i\in I},\left\{r_{\mathbb{A}\,j}^{ap}\right\}_{j\in J}\right)$, com funções associadas $\mu_{ap}:I\rightarrow \mathrm{N}$ e $\delta_{ap}:J\rightarrow N$, é um sistema de 2ª ordem com estrutura de aplicação se e somente se as funções $f_{\mathbb{A}\,i}^{ap}:\lambda_{\mathbb{A}}^{\mu_{ap}(i)}\rightarrow\lambda_{\mathbb{A}}$ e as relações $r_{\mathbb{A}\,j}^{ap}\subseteq\lambda_{\mathbb{A}}^{\delta_{ap}(j)}$, com $\lambda_{\mathbb{A}}\in\Lambda_{\mathbb{A}}$, estiverem relacionadas com a natureza externa de aplicação dos objetos do universo $\mathbb{A}$, determinadas de acordo com a sua utilização como um sistema de representação, sendo dadas por um conjunto de funções e relações (operações algébricas, relação de ordem de posição e outras relações, funções elementares, estrutura de medidas, lógica, topologia induzida) que derivam da estrutura do tipo de dado que o sistema está representando. ♦

Existe a possibilidade de um sistema de 2ª ordem apresentar os dois tipos de estruturas definidos. Então:

5.1.5 Definição. Sistemas de 2ª Ordem Bi-Estruturados

Diz-se que A é um sistema de 2ª ordem bi-estruturado se e somente se for possível definir uma estrutura de informação $\Sigma_{\mathbb{A}}^{in}$ e uma estrutura de aplicação $\Sigma_{\mathbb{A}}^{ap}$ para o universo $\mathbb{A}$. Denota-se por $\mathsf{A}=(\Lambda_{\mathbb{A}};\Sigma_{\mathbb{A}}^{in};\Sigma_{\mathbb{A}}^{ap})$.

Se o universo $\mathbb{A}$ do sistema A é de natureza intervalar, diz-se que A é um sistema intervalar de 2ª ordem bi-estruturado. Se na subestrutura de relações externa do sistema A for definida uma ordem parcial de posição sobre o universo $\mathbb{A}$, então diz-se que A é um sistema ordenado de 2ª ordem bi-estruturado. O tipo ou assinatura do sistema A é dado por $\langle\mu_{in},\delta_{in};\mu_{ap},\delta_{ap}\rangle$. ♦

5.1.6 Definição. $\Sigma_{\mathbb{A}}^{ap}$ - Propriedade, $\Sigma_{\wp(\mathbb{A})}^{ap}$ - Propriedade

Seja $\mathsf{A}=(\Lambda_{\mathbb{A}};\Sigma_{\mathbb{A}}^{in};\Sigma_{\mathbb{A}}^{ap})$ um sistema de 2ª ordem bi-estruturado. Seja $(\Lambda_{\mathbb{A}};\Sigma_{\mathbb{A}}^{ap})$ o sistema obtido quando a estrutura de informação do sistema A é desconsiderada. Sempre que $(\mathbb{A};\Sigma_{\mathbb{A}}^{ap})$ ($(\wp(\mathbb{A});\Sigma_{\wp(\mathbb{A})}^{ap})$) apresenta uma propriedade P então diz-se que o sistema de 2ª ordem bi-estruturado A apresenta a propriedade $\Sigma_{\mathbb{A}}^{ap}$ - P ($\Sigma_{\wp(\mathbb{A})}^{ap}$ - P). ♦

Como exemplo relacionado com a definição 5.1.6, tem-se que um sistema $\mathsf{A} = \left(\Lambda_{\mathbb{A}};\Sigma^{in}_{\mathbb{A}};\Sigma^{ap}_{\mathbb{A}}\right)$ é um $\Sigma^{ap}_{\mathbb{A}}$ - monóide se e somente se $\left(\mathbb{A};\Sigma^{ap}_{\mathbb{A}}\right)$ é um monóide.

5.2 SO2 como uma Estrutura Algébrica e Relacional: as transformações de universo

Sejam A e B sistemas ordenados de 2ª ordem tais que, para $\mathsf{S} \in \{\mathsf{A},\mathsf{B}\}$, se tem que $\mathsf{S} = \left(\Lambda_{\mathbb{S}};\Sigma_{\mathbb{S}}\right)$, $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S},\wp(\mathbb{S})\}$, $\lambda_{\mathbb{S}} \in \Lambda_{\mathbb{S}}$, e $\Sigma_{\mathbb{S}} = \left(\left\{f_{\mathbb{S}_i}\right\}_{i\in I},\left\{r_{\mathbb{S}_j}\right\}_{j\in J}\right)$, com funções associadas $\mu: I \to \mathrm{N}$ e $\delta: J \to N$.

Nesta seção é introduzida a relação entre sistemas de 2ª ordem que se caracteriza por uma transformação entre universos. Se A e B são sistemas de mesmo tipo $\langle\mu,\delta\rangle$, então:

5.2.1 Definição. Subsistema

Diz-se que A é um subsistema (com universo determinado por uma propriedade S) de B, e escreve-se $\mathsf{A} = S(\mathsf{B})$, se e somente se:

(i) $\mathbb{A} = S(\mathbb{B}) = \{b \in \mathbb{B} \; S(b)\} \subseteq \mathbb{B}$;

(ii) para cada $i \in I$, $f_{\mathbb{A}_i} = f_{\mathbb{B}_i}|\lambda_{\mathbb{A}}^{\mu(i)}$, isto é, $f_{\mathbb{A}_i}$ é a restrição de $f_{\mathbb{B}_i}$ ao universo de A;

(iii) para cada $j \in J$, $r_{\mathbb{A}_j} = r_{\mathbb{B}_j} \cap \lambda_{\mathbb{A}}{}^{\delta(j)}$. ♦

Em particular, os indivíduos destacados de A e B coincidem, quando presentes também em A. Se $\mathsf{A} = S(\mathsf{B})$ então pode-se utilizar a notação $\Sigma_{\mathbb{A}} = \Sigma_{\mathbb{B}}\big|_{\mathbb{A}}$ para indicar que $\Sigma_{\mathbb{A}}$ é obtida pela restrição das definições das funções e relações de $\Sigma_{\mathbb{B}}$ ao universo $\mathbb{A}$.

5.2.2 Exemplo

Considere o sistema ordenado de 2ª ordem $\mathsf{R} = \left(\Lambda_{\mathbb{R}};\Sigma_{\mathbb{R}}\right)$ introduzido no exemplo 5.1.2. Então o sistema $\mathsf{Q} = \left(\Lambda_{Q};\Sigma_{Q}\right)$, onde $Q \subseteq \mathbb{R}$ é o conjunto dos número racionais e $\Sigma_Q \equiv \left\langle *_Q,\leq_Q,F_Q,R_Q,M_Q,\sigma_Q\right\rangle$ é obtida pela restrição das funções reais ao conjunto dos racionais Q, pela restrição das relações reais relativamente a Q, e tomando a topologia de Hausdorff relativa a Q, é um subsistema de R, cujo universo é constituído por todos os números reais que satisfazem a propriedade S_Q de serem racionais, isto é, $\mathsf{Q} = S_Q(\mathsf{R})$. ♦

5.2.3 Exemplo

Considere o sistema ordenado de 2ª ordem $\mathsf{A} = \left(\Lambda_{\mathbb{A}};\Sigma_{\mathbb{A}}\right)$ cujo universo é um espaço coerente $\mathbb{A}$. Então o sistema $\mathsf{tot}_{\mathbb{A}} = \left(\Lambda_{tot(\mathbb{A})};\Sigma_{tot(\mathbb{A})}\right)$, onde $tot(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A}$ é a família dos objetos totais de $\mathbb{A}$ e $\Sigma_{tot(\mathbb{A})}$ é obtida pela restrição da estrutura de A ao conjunto dos objetos totais de $\mathbb{A}$, $tot(\mathbb{A})$, é um subsistema de A, cujo universo é constituído por todos os objetos de $\mathbb{A}$ que satisfazem a propriedade tot de serem totais, isto é, $\text{tot}_{\mathbb{A}} = tot(\text{A})$. ♦

5.2.4 Definição. Função Bem-Comportada relativamente a um Subsistema

Diz-se que uma função $f_{\mathbb{A}_i}:\lambda_{\mathbb{A}}^{\mu(i)} \to \lambda_{\mathbb{A}}$, definida em um sistema de 2ª ordem A, é bem comportada relativamente a um subsistema S(A) de A se e somente se $f_{\mathbb{A}_i}$ é bem definida e fechada em $\lambda_{S(\mathbb{A})}$, onde $\lambda_{S(\mathbb{A})} \in \Lambda_{S(\mathbb{A})} = \{S(\mathbb{A}), \wp(S(\mathbb{A}))\}$ e a noção de subsistema está em 5.2.1. ♦

5.2.5 Definição. Fecho de uma Função relativo a um Subsistema

O fecho de uma função $f_{\mathbb{A}_i}:\lambda_{\mathbb{A}}^{\mu(i)} \to \lambda_{\mathbb{A}}$, definida em um sistema de 2ª ordem A, relativo a um subsistema S(A) de A, fechado para a interseção, é dado por $\hat{f}_{\mathbb{A}_i}|_{S(\mathbb{A})}:\lambda_{\mathbb{A}}^{\mu(i)} \to \lambda_{\mathbb{A}}$

$$\left(X_1,\ldots,X_{\mu(i)}\right) \mapsto \begin{cases} \bigcap\left\{Y \in \lambda_{S(\mathbb{A})} \mid f_{\mathbb{A}_i}\left(X_1,\ldots,X_{\mu(i)}\right) \subseteq Y\right\} & \text{se } \left(X_1,\ldots,X_{\mu(i)}\right) \in \lambda_{S(\mathbb{A})}^{\mu(i)}; \\ f_{\mathbb{A}_i}\left(X_1,\ldots,X_{\mu(i)}\right) & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

onde $\lambda_{S(\mathbb{A})} \in \Lambda_{S(\mathbb{A})} = \{S(\mathbb{A}), \wp(S(\mathbb{A}))\}$. Por simplicidade, quando o subsistema S(A) estiver subentendido pelo contexto, utiliza-se a notação $\hat{f}_{\mathbb{A}_i}$ para indicar o fecho de $f_{\mathbb{A}_i}$ relativo a S(A). ♦

O seguinte resultado é imediato:

5.2.6 Proposição

Para toda função $f_{\mathbb{A}_i}:\lambda_{\mathbb{A}}^{\mu(i)} \to \lambda_{\mathbb{A}}$, definida em um sistema de 2ª ordem A, o fecho $\hat{f}_{\mathbb{A}_i}|_{S(\mathbb{A})}:\lambda_{\mathbb{A}}^{\mu(i)} \to \lambda_{\mathbb{A}}$ relativo ao subsistema a S(A) de A, definido em 5.3.5, é uma função bem comportada em S(A). ♦

5.3 Os Morfismos entre Sistemas de 2ª Ordem

Sejam A e B sistemas ordenados de 2ª ordem tais que onde, para $\text{S} \in \{\text{A},\text{B}\}$, se tem que $\text{S} = (\Lambda_{\mathbb{S}};\Sigma_{\mathbb{S}})$, $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, $\lambda_{\mathbb{S}} \in \Lambda_{\mathbb{S}}$, e $\Sigma_{\mathbb{S}} = \left(\{f_{\mathbb{S}_i}\}_{i\in I}, \{r_{\mathbb{S}_j}\}_{j\in J}\right)$, com funções associadas $\mu: I \to \text{N}$ e $\delta: J \to N$.

Nesta seção estudam-se os principais tipos de morfismos entre sistemas de 2ª ordem.

5.3.1 Definição. Homomorfismo, Homomorfismo Forte

Diz-se que A e B são sistemas homomorfos, e denota-se $A \to B$, se e somente se existe uma função $h: \mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A}) \to \mathbb{B} \cup \wp(\mathbb{B})$ tal que:

(i) para cada $i \in I$ e $x_1,\ldots,x_{\mu(i)} \in \lambda_{\mathbb{A}}$,

$$h\left(f_{\mathbb{A}i}\left(x_1,\ldots,x_{\mu(i)}\right)\right) = f_{\mathbb{B}i}\left(h(x_1),\ldots,h\left(x_{\mu(i)}\right)\right);$$

(ii) para cada $j \in J$ e $x_1,\ldots,x_{\delta(j)} \in \lambda_{\mathbb{A}}$,

$$\text{se } \left(x_1,\ldots,x_{\delta(j)}\right) \in r_{\mathbb{A}j} \text{ então } \left(h(x_1),\ldots,h\left(x_{\delta(j)}\right)\right) \in r_{\mathbb{B}j}. \ \blacklozenge$$

Diz-se, neste caso, que h é um homomorfismo de A em B, denotado por $h: A \to B$. Quando também vale a recíproca da condição (ii), diz-se que A e B são sistemas fortemente homomorfos e h é um homomorfismo forte de A em B.

5.3.2 Definição. Imersão

Diz-se que o sistema A está imerso no sistema B, e escreve-se $A \,\underset{\sim}{\tilde{\Diamond}}\, B$, se e somente se existe um homomorfismo forte $h: A \to B$ injetor. Diz-se que h é uma imersão de A em B e denota-se $h: A \,\underset{\sim}{\tilde{\Diamond}}\, B$. ♦

5.3.3 Definição. Isomorfismo, Σ_{ap} - Isomorfismo

Diz-se que A e B são sistemas isomorfos, e denota-se $A \cong B$, se e somente se existe um homomorfismo forte $h: A \to B$ bijetor. Diz-se que h é um isomorfismo de A e B e denota-se $h: A \cong B$.

Se A e B são sistemas com estrutura de aplicação (bi-estruturados), denota-se $A \cong_{ap} B$ para indicar que A e B são Σ_{ap} - isomorfos, isto é, são isomorfos para a estrutura de aplicação. ♦

5.3.4 Definição. Homomorfismo Bem-Comportado relativamente a um Tipo de Subsistema

Diz-se que um homomorfismo $h: A \to B$, determinado pela função $h: \mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A}) \to \mathbb{B} \cup \wp(\mathbb{B})$, é bem comportado relativamente aos subsistemas $S(A)$ de A e $S(B)$ de B se e somente se $h[S(\mathbb{A})] \subseteq S(\mathbb{B})$ e $h[\wp(S(\mathbb{A}))] \subseteq \wp(S(\mathbb{B}))$, onde a noção de subsistema está em 5.2.1. ♦

5.3.5 Definição. Fecho de um Homomorfismo relativo a Subsistemas

O fecho de um homomorfismo $h: A \to B$, determinado pela função $h: \mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A}) \to \mathbb{B} \cup \wp(\mathbb{B})$, relativo aos subsistemas $S(A)$ de A e $S(B)$ de B, é o homomorfismo $\hat{h}|_{S(A),S(B)}: A \to B$, determinado pela função

$$\hat{h}|_{S(\mathbb{A}),S(\mathbb{B})}: \mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A}) \to \mathbb{B} \cup \wp(\mathbb{B}),$$

definida por

$$X \mapsto \begin{cases} \bigcap\{Y \in S(\mathbb{B}) | h(X) \subseteq Y\} & \text{se } X \in S(\mathbb{A}); \\ \bigcap\{Y \in \wp(S(\mathbb{B})) | h(X) \subseteq Y\} & \text{se } X \in \wp(S(\mathbb{A})) \\ h(X) & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Por simplicidade, quando a propriedade S que determina os subsistemas estiver subentendida pelo contexto, utiliza-se a notação $\hat{h}$ para indicar o fecho de h relativo a $S(\mathsf{A})$ e $S(\mathsf{B})$. ♦

O seguinte resultado é imediato:

5.3.6 Proposição

Para todo homomorfismo $h: \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ o fecho $\hat{h}|_{S(\mathsf{A}),S(\mathsf{B})}: \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ relativo aos subsistemas $S(\mathsf{A})$ e $S(\mathsf{B})$ é um homomorfismo bem comportado em $S(\mathsf{A})$ e $S(\mathsf{B})$. ♦

5.4 SO2 como uma Estrutura Algébrica e Relacional: as transformações estruturais

Sejam A e B sistemas ordenados de 2ª ordem tais que onde, para $\mathsf{S} \in \{\mathsf{A},\mathsf{B}\}$, se tem que $\mathsf{S} = (\Lambda_{\mathbb{S}};\Sigma_{\mathbb{S}})$, $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S},\wp(\mathbb{S})\}$, $\lambda_{\mathbb{S}} \in \Lambda_{\mathbb{S}}$, e $\Sigma_{\mathbb{S}} = \left(\{f_{\mathbb{S}_i}\}_{i\in I},\{r_{\mathbb{S}_j}\}_{j\in J}\right)$, com funções associadas $\mu: I \to \mathrm{N}$ e $\delta: J \to N$.

Nesta seção são definidas relações e operações estruturais sobre sistemas de 2ª ordem, isto é, são introduzidas as transformações de sistemas de 2ª ordem que se concentram em suas estruturas.

Sejam $\mathbb{A} \neq \varnothing$ um conjunto, $\wp(\mathbb{A})$ o conjunto das partes de $\mathbb{A}$, $\lambda_{\mathbb{A}} \in \{\mathbb{A},\wp(\mathbb{A})\}$ e U e V conjuntos de índices. Considere a família

$$\mathcal{F} = \{f_{\mathbb{A}_u}: \lambda_{\mathbb{A}}^{\kappa(u)} \to \lambda_{\mathbb{A}} | u \in U, \kappa: U \to \mathrm{N}\}$$

de todas as funções de $\lambda_{\mathbb{A}}^{\kappa(u)}$ em $\lambda_{\mathbb{A}}$, com aridade $\kappa(u) \in \mathrm{N}$, e a família

$$\mathcal{R} = \{r_{\mathbb{A}_v} \subseteq \lambda_{\mathbb{A}}^{\eta(v)} | v \in V, \eta: V \to \mathrm{N}\}$$

de todas as relações em $\lambda_{\mathbb{A}}$, com aridade $\eta(v) \in \mathrm{N}$.

5.4.1 Definição. Redução, Expansão

Diz-se que A, com tipo $\langle\mu,\delta\rangle$ é uma redução de B, com tipo $\langle\mu',\delta'\rangle$, e escreve-se A$\prec$B, se e somente se:
(i) $\mathbb{A} = \mathbb{B}$;

(ii) $I \subseteq I' \subseteq U$, $\mu = \mu'|I$, e, para cada $i \in I$, $f_{\mathbb{A}i} = f_{\mathbb{B}i}$;
(iii) $J \subseteq J' \subseteq U$, $\delta = \delta'|J$, e, para cada $j \in J$, $r_{\mathbb{A}j} = r_{\mathbb{B}j}$. ♦

Quando A≺B, pode-se também dizer que a estrutura $\Sigma_{\mathbb{A}}$ é uma redução da estrutura $\Sigma_{\mathbb{B}}$, denotando-se por $\Sigma_{\mathbb{A}} \prec \Sigma_{\mathbb{B}}$. Pode-se também utilizar a notação $\Sigma_{\mathbb{A}} = \Sigma_{\mathbb{B}\downarrow_{I,J}}$, para indicar que $\Sigma_{\mathbb{A}}$ é a redução da estrutura $\Sigma_{\mathbb{B}}$ relativamente a $I \subseteq I' \subseteq U$ e $J \subseteq J' \subseteq U$.

Sempre que A≺B, diz-se que B é uma expansão de A. Neste caso, utiliza-se a notação $\Sigma_{\mathbb{B}} = \Sigma_{\mathbb{A}\uparrow_{I',J'}}$, para indicar que $\Sigma_{\mathbb{B}}$ é a expansão da estrutura $\Sigma_{\mathbb{A}}$ relativamente a $I' \subseteq U$ e $J' \subseteq U$, com $I' \supseteq I$ e $J' \supseteq J$.

5.4.2 Definição. Regulação

Sejam A e B sistemas de mesmo tipo $\langle \mu, \delta \rangle$. Diz-se que A é uma regulação de B para um subsistema *S*(B) de B, e escreve-se A = R_S(B), se e somente se:
(i) $\mathbb{A} = \mathbb{B}$;
(ii) para cada $i \in I$, $f_{\mathbb{A}i} = \hat{f}_{\mathbb{B}i}|_{S(\mathbb{B})}$;
(iii) para cada $j \in J$, $r_{\mathbb{A}j} = r_{\mathbb{B}j}$,
onde $\hat{f}_{\mathbb{B}i}|_{S(\mathbb{B})}$ é o fecho de $f_{\mathbb{B}i}$ relativo a *S*(B), definido em 5.2.5. ♦

Quando A = R_S(B), pode-se também dizer que a estrutura $\Sigma_{\mathbb{A}}$ é uma regulação da estrutura $\Sigma_{\mathbb{B}}$, denotando-se por $\Sigma_{\mathbb{A}} = R_S(\Sigma_{\mathbb{B}})$.

5.5 SO2 como uma Estrutura Algébrica e Relacional: as transformações globais

Sejam A e B sistemas ordenados de 2ª ordem tais que, para $\mathsf{S} \in \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$, se tem que $\mathsf{S} = (\Lambda_{\mathbb{S}}; \Sigma_{\mathbb{S}})$, $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, $\lambda_{\mathbb{S}} \in \Lambda_{\mathbb{S}}$, e $\Sigma_{\mathbb{S}} = \left(\{f_{\mathbb{S}i}\}_{i \in I}, \{r_{\mathbb{S}j}\}_{j \in J} \right)$, com funções associadas $\mu: I \to \mathrm{N}$ e $\delta: J \to N$.

Nesta seção são definidas relações e operações sobre sistemas de 2ª ordem caracterizadas por transformações que são executadas tanto em suas estruturas como em seus universos.

É possível transformar um sistema de 2ª ordem em outro sistema de 2ª ordem, pela aplicação de um construtor. Então:

5.5.1 Definição. Construtor de Sistemas

Um construtor de sistemas de 2ª ordem é toda função $t \equiv \langle t_u ; t_\Sigma \rangle$: SO2 → SO2, definida por $t\mathsf{X} = (t_u \Lambda_{\mathbb{X}} ; t_\Sigma \Sigma_{\mathbb{X}})$, para todo $\mathsf{X} = (\Lambda_{\mathbb{X}} ; \Sigma_{\mathbb{X}}) \in$ SO2, com $\Lambda_{\mathbb{X}} = \{\mathbb{X}, \wp(\mathbb{X})\}$, de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$, tal que:

(i) t_u é um construtor de universos tal que $t_u\Lambda_{\mathbb{X}} = \{t_u\mathbb{X}, t_u\wp(\mathbb{X})\}$, onde $t_u\mathbb{X} \subseteq \wp(\mathbb{X})$ e $t_u\wp(\mathbb{X}) = \wp(t_u\mathbb{X})$;

(ii) $t_\Sigma \equiv \langle t_F, t_R \rangle$ é um construtor de estruturas tal que, para todo $i \in I$ e $j \in J$,

$$\Sigma_{\mathbb{X}} \mapsto t_\Sigma\Sigma_{\mathbb{X}} = \left(\left\{(t_F f)_{(t_u\mathbb{X})_i}\right\}_{i\in I}, \left\{(t_R r)_{(t_u\mathbb{X})_j}\right\}_{j\in J}\right);$$

(iii) t_F é um construtor de funções tal que, para todo $i \in I$ e $f_{\mathbb{X}_i} : \lambda_{\mathbb{X}}^{\mu(i)} \to \lambda_{\mathbb{X}}$, com $\lambda_{\mathbb{X}} \in \Lambda_{\mathbb{X}}$, tem-se que $f_{\mathbb{X}_i} \mapsto (t_F f)_{(t_u\mathbb{X})_i} : \lambda_{t_u\mathbb{X}}^{\mu(i)} \to \lambda_{t_u\mathbb{X}}$, com $\lambda_{t_u\mathbb{X}} \in \Lambda_{t_u\mathbb{X}}$, onde a função construída $(t_F f)_{(t_u\mathbb{X})_i}$ é a extensão natural da função original $f_{\mathbb{X}_i}$ ao novo universo construído, definida por:

$$\left(X_1,\ldots,X_{\mu(i)}\right) \mapsto \bigcap\left\{Y \in \lambda_{t_u\mathbb{X}} \middle| \left\{f_{\mathbb{X}_i}\left(x_1,\ldots,x_{\mu(i)}\right) \in \lambda_{\mathbb{X}} \middle| x_1 \in X_1,\ldots,x_{\mu(i)} \in X_{\mu(i)}\right\} \subseteq Y\right\},$$

para cada $x_1,\ldots,x_{\mu(i)} \in \lambda_{\mathbb{X}}$ e $X_1,\ldots,X_{\mu(i)} \in \lambda_{t_u\mathbb{X}}$;

(iv) t_R é um construtor de relações, tal que, para todo $j \in J$ e $r_{\mathbb{X}_j} \subseteq \lambda_{\mathbb{X}}^{\delta(j)}$, com $\lambda_{\mathbb{X}} \in \Lambda_{\mathbb{X}}$, tem-se que $r_{\mathbb{X}_j} \mapsto (t_R r)_{(t_u\mathbb{X})_j} \subseteq \lambda_{t_u\mathbb{X}}^{\delta(j)}$, com $\lambda_{t_u\mathbb{X}} \in \Lambda_{t_u\mathbb{X}}$, onde a relação construída $(t_R r)_{(t_u\mathbb{X})_j}$ é tal que, para todo $x_1,\ldots,x_{\delta(j)} \in \lambda_{\mathbb{X}}$ e $X_1,\ldots,X_{\delta(j)} \in \lambda_{t_u\mathbb{X}}$, tem-se que $\left(X_1,\ldots,X_{\delta(j)}\right) \in r_{t_u\mathbb{X}_j}$ se e somente se, para todos $x_1,\ldots,x_{\delta(j)} \in \bigcup_{l=1}^{\delta(j)} X_l$, sempre que se verifica $\left(x_1,\ldots,x_{\delta(j)}\right) \in r_{\mathbb{X}_j}$ e não ocorre $x_k, x_{k'} \in X_l$, para todo $k, k', l = 1,\ldots,\delta(j)$, então tem-se que $x_1 \in X_1,\ldots,x_{\delta(j)} \in X_{\delta(j)}$;

(v) Se o sistema construído for um sistema bi-estruturado $tX = \left(t_u\Lambda_{\mathbb{X}}; \Sigma_{t_u\mathbb{X}}^{in}; t_\Sigma\Sigma_{\mathbb{X}}\right)$, então $\Sigma_{t_u\mathbb{X}}^{in}$ é a estrutura de informação associada à estrutura de domínio do universo $t_u\mathbb{X}$ construído por t_u. ♦

A ação de um construtor de sistemas t quando aplicado a um sistema de 2ª ordem X está ilustrada nas figuras 5.1 e 5.2. Na figura 5.1, salienta-se a ação do construtor de funções t_f. Na figura 5.2 mostra-se a ação do construtor de relações t_R, onde $fr_{\mathbb{X}_j} : K_j \to \lambda_{\mathbb{X}}^{\delta(j)}$ é a função injetora associada à relação $r_{\mathbb{X}_j}$, para cada $j \in J$, e K_j é um conjunto de índices determinado pela cardinalidade de $r_{\mathbb{X}_j}$.

5.5.2 Exemplo

Dois exemplos de construtores, que são utilizados neste trabalho, são: (a) o construtor $[\ ] : SO2 \to SO2$, $X \mapsto IX$, que constrói, a partir do sistema X, o sistema intervalar IX, cujo universo é o conjunto dos intervalos de elementos do universo de X; e

(b) o construtor $Coh: \mathrm{SO2} \to \mathrm{SO2}$, $\mathrm{IX} \mapsto \mathrm{IIX}$, que constrói, a partir do sistema intervalar IX, o espaço coerente intervalar bi-estruturado IIX, cujo universo é a família de conjuntos coerentes de intervalos de elementos do universo de X. ♦

$$
\begin{tikzcd}
tX & \lambda^{\mu_{ap}(i)}_{t_u\mathbb{X}} \arrow[rr, "(t_F f)_{(t_u\mathbb{X})_i}"] & & \lambda_{t_u\mathbb{X}} \\
X \arrow[u, "t"] & \lambda^{\mu_{ap}(i)}_{\mathbb{X}} \arrow[u, "t_u^{\mu(i)}"] \arrow[rr, "f_{\mathbb{X}_i}"'] & & \lambda_{\mathbb{X}} \arrow[u, "t_u"']
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 5.1 - Diagrama Ilustrativo da Ação do Construtor de Funções

$$
\begin{tikzcd}
tX & & \lambda^{\delta(j)}_{t_u\mathbb{X}} \\
X \arrow[u, "t"] & K_j \arrow[ur, "f(t_R r)_{(t_u\mathbb{X})_j}"] \arrow[r, "fr_{\mathbb{X}_j}"'] & \lambda^{\delta(j)}_{\mathbb{X}} \arrow[u, "t_u^{\delta(i)}"']
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 5.2 - Diagrama Ilustrativo da Ação do Construtor de Relações

5.5.3 Definição. t_S-Evolução

Sejam A um sistema ordenado de 2ª ordem, com tipo $\langle \mu,\delta \rangle$, e S(A) um subsistema de A. Sejam B um sistema ordenado de 2ª ordem, com tipo $\langle \mu,\delta \rangle$, e $t\mathrm{B} = \left(\Lambda_{t_u\mathrm{B}}; t_\Sigma \Sigma_{\mathrm{B}}\right)$ o sistema obtido a partir de B pela aplicação de um construtor de sistemas $t \equiv \langle t_u; t_\Sigma \rangle$, onde t_u é o construtor de universos como em 5.5.1 (i) e $t_\Sigma \equiv \langle t_F; t_R \rangle$ é o construtor de estruturas com o construtor de funções t_F definido em 5.5.1 (iii) e o construtor de relações t_R definido em 5.5.1 (iv). Diz-se que A é uma evolução de B, regulada por S(A), pela ação do construtor de sistemas t, ou simplesmente A é uma t_S-evolução de B, e denota-se por $\mathsf{B}\angle_t^S\mathsf{A}$, se e somente se

(i) $\mathsf{A} = R_S(t\mathsf{B})$, isto é, A é obtido pela regulação do sistema tB relativa ao subsistema $S(\mathsf{A}) = S(t\mathsf{B})$;

(ii) $\mathsf{B}\,\widetilde{\underline{\Diamond}}\,\mathsf{A}$, ou seja, sistema B está imerso no sistema A. ♦

Sempre que $\mathsf{B}\angle_t^S\mathsf{A}$ diz-se que B é um pré-sistema para A, $\mathbb{B}$ é um pré-universo para $\mathbb{A}$, $\Sigma_{\mathbb{B}}$ é uma pré-estrutura para $\Sigma_{\mathbb{A}}$ e S(A) é o subsistema regulador da evolução. Se existe $k \in \mathrm{N}$ e existe $\mathsf{A} \in \mathrm{SO2}$ tais que $\mathsf{B}_0\angle_{t_0}^{S'(\mathsf{B}_1)}\mathsf{B}_1\angle_{t_1}^{S''(\mathsf{B}_2)}\ldots\angle_{t_{k-1}}^{S'''(\mathsf{B}_k)}\mathsf{B}_k\angle_{t_k}^{S(\mathsf{A})}\mathsf{A}$, para subsistemas adequados S', S'', S''', então diz-se que B_0 é um sistema básico para A, $\mathbb{B}_0$ é um conjunto básico para o universo $\mathbb{A}$ e $\Sigma_{\mathbb{B}_0}$ é uma estrutura básica para $\Sigma_{\mathbb{A}}$.

5.5.4 Exemplo

No exemplo 5.5.2 introduziu-se o construtor de sistemas de 2ª ordem $[\ ]: \mathrm{SO2} \to \mathrm{SO2}$, $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{IX}$, que constrói, a partir do sistema $\mathrm{X} = (\mathbb{X}; \Sigma_{\mathbb{X}})$, o sistema intervalar $\mathrm{IX} = (\mathbb{IX}; [\ ]_{\Sigma}\Sigma_{\mathbb{X}})$, cujo universo é o conjunto $\mathbb{IX}$ dos intervalos de elementos do universo $\mathbb{X}$ do sistema X.

Considere como sistema básico o sistema ordenado de 2ª ordem $\mathsf{Q} = (Q; \Sigma_Q)$ dos números racionais Q, com uma estrutura $\Sigma_Q \equiv \langle \leq_Q, *_Q \rangle$, onde $\leq_Q$ é a relação de posição usual em Q e $*_Q$ são operações aritméticas em Q.

Aplicando-se o construtor intervalar [ ] ao sistema Q, obtém-se o sistema ordenado intervalar de 2ª ordem $\mathsf{IQ} = (IQ; \Sigma_{IQ})$, cujo universo é o conjunto dos intervalos de racionais $IQ = \{[p,q] \mid p,q \in Q\} \subseteq \wp(Q)$ introduzido primeiramente no exemplo 3.3.3.

Para obter a estrutura $\Sigma_{IQ} \equiv \langle \leq_{IQ}, *_{IQ} \rangle$, defina primeiramente o construtor de operações aritméticas intervalares $[\ ]_F$, de forma que, para toda operação aritmética $*_Q: Q \times Q \to Q$ definida no sistema básico Q, tem-se que $*_Q \mapsto ([\ ]_F *_Q) = *_{IQ}: IQ \times IQ \to IQ$, com $X_1 *_{IQ} X_2 = \{x_1 *_Q x_2 \in Q \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$.

Observe que $[\ ]_F$ atende aos requisitos da definição 5.5.1 (iii). Além disso, $[\ ]_F$ atende aos requisitos de regulação da definição 5.5.3, considerando-se como subsistema regulador o próprio sistema IQ. De fato, tem-se que $*_{IQ}$ coincide com seu fecho relativo ao sistema IQ, e, portanto, é bem comportada relativamente a esse sistema.

Define-se agora o construtor de relações intervalares binárias $[\ ]_R$, de modo que para toda relação binária $r_Q \subseteq Q \times Q$ definida no sistema básico Q, tem-se que $r_Q \mapsto ([\ ]_R r_Q) = r_{IQ} \subseteq IQ \times IQ$, tal que $(X_1, X_2) \in r_{IQ}$ se e somente se para cada $x_1, x_2 \in (X_1 \cup X_2)$, tais que x_1 e x_2 não pertencem a um mesmo intervalo, sempre que se verifica $(x_1, x_2) \in r_Q$ então tem-se que $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Portanto, para a relação de posição, conclui-se que $[p,q] < [p',q']$ se e somente se $q < p'$, e $[p,q] \leq [p',q']$ se e somente se $[p,q] < [p',q']$ ou $[p,q] = [p',q']$. Observe que $[\ ]_R$ atende aos requisitos da definição 5.5.1 (iv), assim como da definição 5.5.3.

Conclui-se então que $IQ = R_{IQ}([\ ]Q)$, isto é, IQ é obtido a partir de Q pela aplicação do construtor de sistemas intervalares [ ] e pela regulação de [ ]Q relativamente a IQ. Além disso, observe que $Q \subseteq IQ$, uma vez que a todo racional $p \in Q$ pode-se associar um intervalo pontual $[p,p] \in IQ$ e vice-versa. Portanto, tem-se que $\mathrm{Q}\ \underline{\tilde{\Diamond}}\ \mathrm{IQ}$, ou seja, o sistema Q está imerso no sistema IQ.

Assim, pela definição 5.5.3, segue que $\mathrm{Q} \angle_{[\ ]}^{\mathrm{IQ}} \mathrm{IQ}$, isto é, o sistema intervalar ordenado de 2ª ordem IQ é uma $[\ ]_{\mathrm{IQ}}$-evolução do sistema ordenado de 2ª ordem Q. ♦

6 Sistemas Ordenados de 2ª Ordem: A Abordagem Categórica

Introduz-se aqui a abordagem categórica para os sistemas ordenados de 2ª ordem. É definida a categoria **SO2** dos sistemas ordenados de 2ª ordem e as operações e relações entre estes sistemas são introduzidas como endofunctores.

Sejam A, B, C e D sistemas ordenados de 2ª ordem onde, para $\mathsf{S} \in \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}\}$, tem-se que $\mathsf{S} = (\Lambda_{\mathbb{S}}; \Sigma_{\mathbb{S}})$, com $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, $\Sigma_{\mathbb{S}} = \left(\{f_{\mathbb{S}i}\}_{i \in I}, \{r_{\mathbb{S}j}\}_{j \in J}\right)$, e funções associadas $\mu: I \to \mathrm{N}$ e $\delta: J \to \mathrm{N}$, e $\lambda_{\mathbb{S}} \in \Lambda_{\mathbb{S}}$.

6.1 A Categoria dos Sistemas Ordenados de 2ª Ordem

Tem-se o seguinte resultado importante:

6.1.1 Lema

É válido que:
(i) Para cada sistema ordenado de 2ª ordem A, o mapeamento identidade $id_{\mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A})}: \mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A}) \to \mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A})$, tal que $id_{\mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A})}(x) = x$, define um homomorfismo forte $id_{\mathsf{A}}: \mathsf{A} \to \mathsf{A}$;
(ii) Se $h: \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ e $h': \mathsf{B} \to \mathsf{C}$ são homomorfismos fortes, então a composta $h' \circ h: \mathsf{A} \to \mathsf{C}$ também é um homomorfismo forte.
prova:

Prova-se (i). Para cada $i \in I$ e $x_1, \ldots, x_{\mu(i)} \in \lambda_{\mathbb{A}}$, tem-se que

$$id_{\mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A})}\left(f_{\mathbb{A}i}\left(x_1, \ldots, x_{\mu(i)}\right)\right) = f_{\mathbb{A}i}\left(x_1, \ldots, x_{\mu(i)}\right) = f_{\mathbb{A}i}\left(id_{\mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A})}(x_1), \ldots, id_{\mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A})}\left(x_{\mu(i)}\right)\right),$$

e, para cada $j \in J$ e $x_1, \ldots, x_{\delta(j)} \in \lambda_{\mathbb{A}}$, $\left(x_1, \ldots, x_{\delta(j)}\right) \in r_{\mathbb{A}j}$ se e somente se $\left(id_{\mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A})}(x_1), \ldots, id_{\mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A})}\left(x_{\delta(j)}\right)\right) \in r_{\mathbb{A}j}$, e, portanto, $id_{\mathsf{A}}: \mathsf{A} \to \mathsf{A}$ é um homomorfismo forte.

Mostra-se agora (ii). Para cada $i \in I$ e $x_1, \ldots, x_{\mu(i)} \in \lambda_{\mathbb{A}}$, tem-se que

$$\begin{aligned}
(h' \circ h)\left(f_{\mathbb{A}i}\left(x_1, \ldots, x_{\mu(i)}\right)\right) &= h'\left(h\left(f_{\mathbb{A}i}\left(x_1, \ldots, x_{\mu(i)}\right)\right)\right) \\
&= h'\left(f_{\mathbb{B}i}\left(h(x_1), \ldots, h\left(x_{\mu(i)}\right)\right)\right) \\
&= f_{\mathbb{C}i}\left(h'(h(x_1)), \ldots, h'\left(h\left(x_{\mu(i)}\right)\right)\right) \\
&= f_{\mathbb{C}i}\left((h' \circ h)(x_1), \ldots, (h' \circ h)\left(x_{\mu(i)}\right)\right),
\end{aligned}$$

e, para cada $j \in J$ e $x_1, \ldots, x_{\delta(j)} \in \lambda_{\mathbb{A}}$,

$$\left(x_1,\ldots,x_{\delta(j)}\right)\in r_{\mathrm{A}j} \Leftrightarrow \left(h(x_1),\ldots,h\left(x_{\delta(j)}\right)\right)\in r_{\mathrm{B}j}$$
$$\Leftrightarrow\left(h'(h(x_1)),\ldots,h'\left(h\left(x_{\delta(j)}\right)\right)\right)\in r_{\mathrm{C}j}$$
$$\Leftrightarrow\left((h'\circ h)(x_1),\ldots,(h'\circ h)\left(x_{\delta(j)}\right)\right)\in r_{\mathrm{C}j},$$

o que mostra que $h'\circ h\colon \mathrm{A}\to\mathrm{C}$ é um homomorfismo forte. ♦

Agora é possível introduzir a categoria dos sistemas ordenados de 2ª ordem:

6.1.2 Definição. A Categoria **SO2**

A categoria **SO2** possui sistemas ordenados de 2ª ordem como objetos e homomorfismos fortes de sistemas ordenados de 2ª ordem como morfismos. A composição de morfismos é determinada pela composição conjunto-teorética das funções que determinam os morfismos. Os morfismos identidade são aqueles determinados pelas funções identidade. Denota-se **SO2**(A,B) o conjunto dos morfismos de A para B. ♦

Observa-se que **SO2** está bem definida. Pelo lema 1.1.1 (i), para cada sistema ordenados de 2ª ordem A, a função identidade determina um homomorfismo forte $id_{\mathrm{A}}\colon\mathrm{A}\to\mathrm{A}$, e, portanto, id_{A} é um morfismo da categoria **SO2**. Este morfismo satisfaz as equações da lei da identidade. De fato, para qualquer morfismo $h\colon\mathrm{A}\to\mathrm{B}$, tem-se que $id_{\mathbb{B}\cup\wp(\mathbb{B})}\circ h=h$ e $h\circ id_{\mathbb{A}\cup\wp(\mathbb{A})}=h$, e, portanto, é válido que $id_{\mathrm{B}}\circ h=h$ e $h\circ id_{\mathrm{A}}=h$.

Ainda, também pelo lema 1.1.1 (ii), tem-se que a composição $h'\circ h\colon\mathrm{A}\to\mathrm{C}$ de homomorfismos fortes $h\colon\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ e $h'\colon\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ é também um homomorfismo forte, isto é, um morfismo de **SO2**. Além disso, é imediato que a composição de morfismos é associativa, isto é, para qualquer homomorfismo forte $h''\colon\mathrm{C}\to\mathrm{D}$, tem-se que $h''\circ(h'\circ h)=(h''\circ h')\circ h$.

6.2 Principais Endofunctores em SO2

Apresenta-se aqui uma abordagem categórica para a estrutura algébrica e relacional de SO2, introduzindo-se as operações e relações sobre sistemas de 2ª ordem como endofunctores na categoria **SO2.**

Sejam $\mathbb{B}\neq\varnothing$ um conjunto, $\wp(\mathbb{B})$ o conjunto das partes de $\mathbb{B}$, $\lambda_{\mathbb{B}}\in\{\mathbb{B},\wp(\mathbb{B})\}$ e U e V conjuntos de índices. Considere a família

$$\mathcal{F}=\left\{f_{\mathbb{B}_u}\colon\lambda_{\mathbb{B}}^{\kappa(u)}\to\lambda_{\mathbb{B}}\,|\,u\in U,\kappa\colon U\to\mathrm{N}\right\}$$

de todas as funções de $\lambda_{\mathbb{B}}^{\kappa(u)}$ em $\lambda_{\mathbb{B}}$, com aridade $\kappa(u)\in\mathrm{N}$, e a família

$$\mathcal{R}=\left\{r_{\mathbb{B}_v}\subseteq\lambda_{\mathbb{B}}^{\eta(v)}\to\lambda_{\mathbb{B}}\,|\,v\in V,\eta\colon V\to\mathrm{N}\right\}$$

de todas as relações em $\lambda_{\mathbb{B}}$, com aridade $\eta(v)\in\mathrm{N}$.

A noção de redução de sistemas ordenados de 2ª ordem, introduzida em 5.4.1, está associada a um functor, denominado de functor redução relativa a $I\subseteq U,J\subseteq V$. Então:

6.2.1 Definição. O Functor Redução

O functor redução relativa a $I \subseteq U, J \subseteq V$, denotado por $Red_{I,J}$, é o endofunctor $Red_{I,J}: \mathbf{SO2} \to \mathbf{SO2}$, que associa:

(i) cada objeto $\mathsf{B} = (\Lambda_{\mathrm{B}}; \Sigma_{\mathrm{B}})$, de tipo $\langle \mu', \delta' \rangle$, com $\mu': I' \subseteq U \to \mathrm{N}$ e $\delta: J' \subseteq V \to N$, à sua redução relativa a I,J, $Red_{I,J}(\mathsf{B}) = \left(\Lambda_{\mathrm{B}}; \Sigma_{\mathrm{B}\downarrow_{I,J}}\right)$, de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$, com $\mu: I \subseteq I' \to \mathrm{N}$ e $\delta: J \subseteq J' \to N$, onde $\Sigma_{\mathrm{B}\downarrow_{I,J}}$ é a redução da estrutura Σ_{B} relativamente a $I \subseteq U$ e $J \subseteq V$, satisfazendo as condições da definição 5.4.1;
(ii) cada morfismo $h: \mathsf{B} \to \mathsf{B}'$ ao morfismo $Red_{I,J}(h): Red_{I,J}(\mathsf{B}) \to Red_{I,J}(\mathsf{B}')$, tal que $Red_{I,J}(h) = h$. ♦

Observe que $Red_{I,J}$ está bem definido. Veja figura 6.1. De fato, tem-se que $Red_{I,J}(id_{\mathsf{B}}) = id_{Red_{I,J}(\mathsf{B})}$, pois para a função associada tem-se que $Red_{I,J}\left(id_{\mathrm{B} \cup \wp(\mathrm{B})}\right) = id_{\mathrm{B} \cup \wp(\mathrm{B})} = id_{Red_{I,J}(\mathrm{B}) \cup \wp\left(Red_{I,J}(\mathrm{B})\right)}$. Além disso, se $h: \mathsf{B} \to \mathsf{B}'$ e $g: \mathsf{B}' \to \mathsf{B}''$ são morfismos de **SO2**, então tem-se que $Red_{I,J}(g \circ h) = g \circ h = Red_{I,J}(g) \circ Red_{I,J}(h)$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{B} = (\Lambda_{\mathrm{B}}; \Sigma_{\mathrm{B}}) \arrow[d, "h"'] \arrow[r, "Red_{I,J}"] & Red_{I,J}(\mathsf{B}) = \left(\Lambda_{\mathrm{B}}; \Sigma_{\mathrm{B}\downarrow_{I,J}}\right) \arrow[d, "Red_{I,J}(h) = h"] \\
\mathsf{B}' = (\Lambda_{\mathrm{B}'}; \Sigma_{\mathrm{B}'}) & Red_{I,J}(\mathsf{B}') = \left(\Lambda_{\mathrm{B}'}; \Sigma_{\mathrm{B}'\downarrow_{I,J}}\right)
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 6.1 - O Functor Redução $Red_{I,J}$

De forma análoga, a noção de expansão de sistemas ordenados de 2ª ordem, introduzida em 5.4.1, está associada ao functor expansão relativa a I,J. Então:

6.2.2 Definição. O Functor Expansão

O functor expansão relativa a $I \subseteq U, J \subseteq V$, denotado por $Exp_{I,J}$, é o endofunctor $Exp_{I,J}: \mathbf{SO2} \to \mathbf{SO2}$, que associa:

(i) cada objeto $\mathsf{A} = (\Lambda_{\mathrm{A}}; \Sigma_{\mathrm{A}})$, de tipo $\langle \mu', \delta' \rangle$, com $\mu': I' \subseteq U \to \mathrm{N}$ e $\delta: J' \subseteq V \to N$, à sua expansão relativa a $I \subseteq U, J \subseteq V$, $Exp_{I,J}(\mathsf{A}) = \left(\Lambda_{\mathrm{A}}; \Sigma_{\mathrm{A}\uparrow_{I,J}}\right)$, de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$, com $\mu: I \supseteq I' \to \mathrm{N}$ e $\delta: J \supseteq J' \to N$, onde $\Sigma_{\mathrm{A}\uparrow_{I,J}}$ é a expansão da estrutura Σ_{A} relativamente a $I \subseteq U$ e $J \subseteq V$ satisfazendo as condições da definição 5.4.1;
(ii) cada morfismo $h: \mathsf{A} \to \mathsf{A}'$ ao morfismo $Exp_{I,J}(h): Exp_{I,J}(\mathsf{A}) \to Exp_{I,J}(\mathsf{A}')$, tal que $Exp_{I,J}(h) = h$. ♦

Uma análise análoga à que foi realizada para a definição do functor redução leva a conclusão de que o functor expansão $Exp_{I,J}$ também está bem definido, pois $Exp_{I,J}(id_{\mathsf{A}}) = id_{Exp_{I,J}(\mathsf{A})}$ e $Exp_{I,J}(g \circ h) = Exp_{I,J}(g) \circ Exp_{I,J}(h)$, para morfismos $h: \mathsf{A} \to \mathsf{A}'$ e $g: \mathsf{A}' \to \mathsf{A}''$ de **SO2**. Veja figura 6.2.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{A} = (\Lambda_{\mathbb{A}}; \Sigma_{\mathbb{A}}) \arrow[d, "h"'] \arrow[r, "Exp_{I,J}"] & Exp_{I,J}(\mathsf{A}) = (\Lambda_{\mathbb{A}}; \Sigma_{\mathbb{A}\uparrow_{I,J}}) \arrow[d, "Exp_{I,J}(h) = h"] \\
\mathsf{A}' = (\Lambda_{\mathbb{A}'}; \Sigma_{\mathbb{A}'}) & Exp_{I,J}(\mathsf{A}') = (\Lambda_{\mathbb{A}'}; \Sigma_{\mathbb{A}'\uparrow_{I,J}})
\end{tikzcd}$$

FIGURA 6.2 - O Functor Expansão $E_{I,J}$

A noção de subsistema em sistemas ordenados de 2ª ordem, introduzida em 5.2.1, está associada a um functor, denominado de functor de subsistema. Então:

6.2.3 Definição. O Functor de Subsistema

O functor relativo a uma operação de subsistema S é o endofunctor S: $\mathbf{SO2} \to \mathbf{SO2}$, que associa:

(i) cada objeto $\mathsf{A} = (\Lambda_{\mathbb{A}}; \Sigma_{\mathbb{A}})$ ao subsistema $S(\mathsf{A}) = \left(\Lambda_{S(\mathbb{A})}; \Sigma_{\mathbb{A}}|_{S(\mathbb{A})}\right)$, onde $\Sigma_{\mathbb{A}}|_{S(\mathbb{A})}$ é obtida pela restrição das definições das funções e relações de $\Sigma_{\mathbb{A}}$ ao universo $S(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A}$, satisfazendo as condições da definição 5.2.1;

(ii) cada morfismo $h: \mathsf{A} \to \mathsf{A}'$, com $h[S(\mathbb{A})] \subseteq S(\mathbb{A}')$, ao morfismo $S(h): S(\mathsf{A}) \to S(\mathsf{A}')$, tal que $S(h) = h|_{S(\mathsf{A})}$ é determinado pela função $S(h): S(\mathbb{A}) \cup \wp(S(\mathbb{A})) \to S(\mathbb{A}') \cup \wp(S(\mathbb{A}'))$, com $S(h) = h|_{S(\mathbb{A}) \cup \wp(S(\mathbb{A}))}$, onde $h|_{S(\mathbb{A}) \cup \wp(S(\mathbb{A}))}$ é a restrição de h a $S(\mathbb{A}) \cup \wp(S(\mathbb{A}))$. ♦

Observe que S está bem definido. Veja figura 6.3. De fato, tem-se que $S(id_{\mathsf{A}}) = id_{S(\mathsf{A})}$, pois $S\left(id_{\mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A})}\right) = id|_{S(\mathbb{A}) \cup \wp(S(\mathbb{A}))} = id_{S(\mathbb{A}) \cup \wp(S(\mathbb{A}))}$. Além disso, se $h: \mathsf{A} \to \mathsf{A}'$ e $g: \mathsf{A}' \to \mathsf{A}''$ são morfismos de **SO2**, então tem-se que $S(g \circ h) = (g \circ h)|_{S(\mathbb{A}) \cup \wp(S(\mathbb{A}))} = g|_{S(\mathbb{A}') \cup \wp(S(\mathbb{A}'))} \circ h|_{S(\mathbb{A}) \cup \wp(S(\mathbb{A}))} = S(g) \circ S(h)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{A} = (\Lambda_{\mathrm{A}};\Sigma_{\mathrm{A}}) \arrow[d, "h"'] \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{S}"] & S(\mathsf{A}) = \left(\Lambda_{S(\mathrm{A})};\Sigma_{\mathrm{A}}|_{S(\mathrm{A})}\right) \arrow[d, "S(h) = h|_{S(\mathsf{A})}"] \\
\mathsf{A}' = (\Lambda_{\mathrm{A}'};\Sigma_{\mathrm{A}'}) & S(\mathsf{A}') = \left(\Lambda_{S(\mathrm{A}')};\Sigma_{\mathrm{A}'}|_{S(\mathrm{A}')}\right)
\end{tikzcd}$$

FIGURA 6.3 - O Functor de Subsistema S

É também possível associar um functor à noção de regulação de sistemas, introduzida em 5.4.2:

6.2.4 Definição. O Functor Regulador

O functor regulador relativo a uma operação de subsistema S, denotado por R_S, é o endofunctor R_S: $\mathbf{SO2} \to \mathbf{SO2}$, que associa:

(i) cada objeto $\mathsf{B} = (\Lambda_{\mathrm{B}};\Sigma_{\mathrm{B}})$, de tipo $\langle\mu,\delta\rangle$, com $\mu: I \to \mathrm{N}$, $\delta: J \to N$, e $\Sigma_{\mathrm{B}} = \left(\left\{f_{\mathrm{B}_i}\right\}_{i\in I}, \left\{r_{\mathrm{B}_j}\right\}_{j\in J}\right)$, ao objeto $R_S(\mathsf{B}) = (\Lambda_{\mathrm{B}};R_S(\Sigma_{\mathrm{B}}))$, de mesmo tipo $\langle\mu,\delta\rangle$, tal que $R_S(\Sigma_{\mathrm{B}}) = \left(\left\{\hat{f}_{\mathrm{B}_i}|_{S(\mathrm{B})}\right\}_{i\in I}, \left\{r_{\mathrm{B}_j}\right\}_{j\in J}\right)$, onde $\hat{f}_{\mathrm{B}_i}|_{S(\mathbf{B})}$ é o fecho (definição 5.2.5), relativo ao subsistema $S(\mathsf{B})$ de B, da função f_{B_i} definida na estrutura Σ_{B} de B;

(ii) cada morfismo h: $\mathsf{B} \to \mathsf{B}'$, determinado pela função h: $\mathbb{B} \cup \wp(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}' \cup \wp(\mathbb{B}')$, ao morfismo $R_S(h)$: $R_S(\mathsf{B}) \to R_S(\mathsf{B}')$, tal que $R_S(h) = \hat{h}|_{S(\mathbf{B}),S(\mathbf{B}')}$, onde $\hat{h}|_{S(\mathbf{B}),S(\mathbf{B}')}$ é o fecho do morfismo h (definição 5.3.5) relativo aos subsistemas $S(\mathsf{B})$ e $S(\mathsf{B}')$. ♦

Observe que R_S está bem definido. Veja figura 6.4. De fato, tem-se que $R_S(id_{\mathsf{B}}) = id_{R_S(\mathsf{B})}$, pois $R_S\left(id_{\mathrm{B}\cup\wp(\mathrm{B})}\right) = id_{\mathrm{B}\cup\wp(\mathrm{B})}|_{S(\mathrm{B}),S(\mathrm{B})} = id_{\mathrm{B}\cup\wp(\mathrm{B})}$. Além disso, se h: $\mathsf{B} \to \mathsf{B}'$ e g: $\mathsf{B}' \to \mathsf{B}''$ são morfismos de $\mathbf{SO2}$, determinados pelas funções h: $\mathbb{B} \cup \wp(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}' \cup \wp(\mathbb{B}')$ e g: $\mathbb{B}' \cup \wp(\mathbb{B}') \to \mathbb{B}'' \cup \wp(\mathbb{B}'')$, respectivamente, então tem-se que $R_S(g \circ h) = \widehat{(g \circ h)}|_{S(\mathbf{B}),S(\mathbf{B}'')} = \hat{g}|_{S(\mathbf{B}'),S(\mathbf{B}'')} \circ \hat{h}|_{S(\mathbf{B}),S(\mathbf{B}')} = R_S(g) \circ R_S(h)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{B} = (\Lambda_{\mathrm{B}};\Sigma_{\mathrm{B}}) \arrow[d, "h"'] \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{R_S}"] & R_S(\mathsf{B}) = (\Lambda_{\mathrm{B}};R_S(\Sigma_{\mathrm{B}})) \arrow[d, "R_S(h) = \hat{h}|_{S(\mathbf{B}),S(\mathbf{B}')}"] \\
\mathsf{B}' = (\Lambda_{\mathrm{B}'};\Sigma_{\mathrm{B}'}) & R_S(\mathsf{B}') = (\Lambda_{\mathrm{B}'};R_S(\Sigma_{\mathrm{B}'}))
\end{tikzcd}$$

FIGURA 6.4 - O Functor Regulador R_S

Associa-se agora um functor à noção de construtor de sistemas ordenados de 2ª ordem, introduzida em 5.5.1.

6.2.5 Definição. O Functor Construtor de Sistemas

Um functor construtor de sistemas $t \equiv \langle t_u; t_\Sigma \equiv \langle t_F; t_R\rangle\rangle$ é um endofunctor $t \equiv \langle t_u; t_\Sigma \equiv \langle t_F; t_R\rangle\rangle : \mathbf{SO2} \to \mathbf{SO2}$, que associa:

(i) cada objeto $\mathrm{X} = (\Lambda_{\mathbb{X}}; \Sigma_{\mathbb{X}})$, com $\Lambda_{\mathbb{X}} = \{\mathbb{X}, \wp(\mathbb{X})\}$, de tipo $\langle \mu, \delta\rangle$, a um objeto $t(\mathrm{X}) = (t_u\Lambda_{\mathbb{X}}; t_\Sigma \Sigma_{\mathbb{X}})$, de mesmo tipo $\langle \mu, \delta\rangle$, onde t_u é um construtor de universos tal que $t_u \Lambda_{\mathbb{X}} = \{t_u\mathbb{X}, \wp(t_u\mathbb{X})\}$, com $\mathbb{X} \mapsto t_u\mathbb{X} \subseteq \wp(\mathbb{X})$ e $\wp(\mathbb{X}) \mapsto \wp(t_u\mathbb{X})$, e t_Σ é um construtor de estruturas tal que $\Sigma_{\mathbb{X}} \mapsto t_\Sigma\Sigma = \left(\left\{(t_F.f)_{(t_u\mathbb{X})_i}\right\}_{i\in I}, \left\{(t_R r)_{(t_u\mathbb{X})_j}\right\}_{j\in J}\right)$, para todo $i \in I$ e $j \in J$, satisfazendo as condições da definição 5.5.1;

(ii) cada morfismo $h: \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$, determinado por $h: \mathbb{X} \cup \wp(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}' \cup \wp(\mathbb{X}')$, ao morfismo $t(h): t(\mathrm{X}) \to t(\mathrm{X}')$, determinado por $t(h): t_u\mathbb{X} \cup \wp(t_u\mathbb{X}) \to t_u\mathbb{X}' \cup \wp(t_u\mathbb{X}')$, tal que $t(h)(X) = \bigcap\{Y \in t_u\mathbb{X}' \cup \wp(t_u\mathbb{X}') | \{h(x) \in \mathbb{X}' \cup \wp(\mathbb{X}') | x \in X\} \subseteq Y\}$. ♦

Observe que todo $t: \mathbf{SO2} \to \mathbf{SO2}$ que satisfaz as condições da definição 6.2.5 está bem definido. Veja figura 6.5. De fato, tem-se que $t(id_{\mathrm{X}}) = id_{t(\mathrm{X})}$, pois, para todo $X \in t_u\mathbb{X} \cup \wp(t_u\mathbb{X})$, tem-se que

$$\begin{aligned} t\left(id_{\mathbb{X}\cup\wp(\mathbb{X})}\right)(X) &= \bigcap\left\{Y \in t_u\mathbb{X} \cup \wp(t_u\mathbb{X}) | \left\{id_{\mathbb{X}\cup\wp(\mathbb{X})}(x) \in \mathbb{X} \cup \wp(\mathbb{X}) | x \in X\right\} \subseteq Y\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{X} \cup \wp(\mathbb{X}) | x \in X\} = X = id_{t_u\mathbb{X}\cup\wp(t_u\mathbb{X})}(X), \end{aligned}$$

e, portanto, $t\left(id_{\mathbb{X}\cup\wp(\mathbb{X})}\right) = id_{t_u\mathbb{X}\cup\wp(t_u\mathbb{X})}$.

Além disso, se $g: \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ e $f: \mathrm{X}' \to \mathrm{X}''$ são morfismos de **SO2**, determinados, respectivamente, por $g: \mathbb{X} \cup \wp(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}' \cup \wp(\mathbb{X}')$ e $f: \mathbb{X}' \cup \wp(\mathbb{X}') \to \mathbb{X}'' \cup \wp(\mathbb{X}'')$, então tem-se que

$$\begin{aligned} &t(f \circ g)(X) \\ &= \bigcap\left\{Y \in t_u\mathbb{X}'' \cup \wp(t_u\mathbb{X}'') | \{(f \circ g)(x) \in \mathbb{X}'' \cup \wp(\mathbb{X}'') | x \in X\} \subseteq Y\right\} \\ &= \bigcap\left\{Y \in t_u\mathbb{X}'' \cup \wp(t_u\mathbb{X}'') | \{(f(g(x))) \in \mathbb{X}'' \cup \wp(\mathbb{X}'') | g(x) \in g[X]\} \subseteq Y\right\} \\ &= \bigcap\left\{Y \in t_u\mathbb{X}'' \cup \wp(t_u\mathbb{X}'') | \{(f(y)) \in \mathbb{X}'' \cup \wp(\mathbb{X}'') | y \in Y'\} \subseteq Y\right\} \\ &= t(f)(Y'), Y' = g[X] = \bigcap\left\{Y \in t_u\mathbb{X}' \cup \wp(t_u\mathbb{X}') | \{g(x) \in \mathbb{X}' \cup \wp(\mathbb{X}') | x \in X\} \subseteq Y\right\} \\ &= t(f)\left(\bigcap\left\{Y \in t_u\mathbb{X}' \cup \wp(t_u\mathbb{X}') | \{g(x) \in \mathbb{X}' \cup \wp(\mathbb{X}') | x \in X\} \subseteq Y\right\}\right) \\ &= t(f)(t(g)(X)) \\ &= ((t(f)) \circ (t(g)))(X), \end{aligned}$$

e, portanto, $t(f \circ g) = t(f) \circ t(g)$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathrm{X} = (\Lambda_{\mathbb{X}};\Sigma_{\mathbb{X}}) \arrow[d, "h"'] & t\mathrm{X} = (t_u\Lambda_{\mathbb{X}};t_\Sigma\Sigma_{\mathbb{X}}) \arrow[d, "{t(h),\ t(h)(X) = \{h(x) \in \mathbb{X}' \cup \wp(\mathbb{X}') | x \in X\}}"] \\
\mathrm{X}' = (\Lambda_{\mathbb{X}'};\Sigma_{\mathbb{X}'}) \arrow[ur, phantom, "t"] & t\mathrm{X}' = (t_u\Lambda_{\mathbb{X}'};t_\Sigma\Sigma_{\mathbb{X}'})
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 6.5 - O Functor Construtor de Sistemas t

Salienta-se que a definição 6.2.5 pode ser enunciada da mesma forma para o caso em que o objeto obtido pela aplicação do functor t a um sistema X é um sistema bi-estruturado $t(\mathrm{X}) = \left(t_u\Lambda_{\mathbb{X}};\Sigma^{in}_{t_u\mathbb{X}};t_\Sigma\Sigma^{ap}_{\mathbb{X}}\right)$, onde $\Sigma^{in}_{t_u\mathbb{X}}$ é a estrutura de informação dada em 5.5.1 (v).

Também é possível associar um functor à noção de evolução de sistemas ordenados de 2ª ordem, introduzida em 5.5.3:

6.2.6 Definição. O Functor Evolução de Sistemas

Seja t o functor dado em 6.2.5, associado ao construtor de sistemas ordenados de 2ª ordem $t \equiv \langle t_u;t_\Sigma\rangle$, definido como em 5.5.1, onde t_u é o construtor de universos e t_Σ é o construtor de estruturas. O functor evolução de sistemas, pela ação do construtor t, regulada por uma operação de subsistema S, denotado por ev_t^S, é o endofunctor $ev_t^S: \mathbf{SO2} \to \mathbf{SO2}$, que associa:

(i) cada objeto $\mathsf{B} = (\Lambda_{\mathbb{B}};\Sigma_{\mathbb{B}})$, com $\Lambda_{\mathbb{B}} = \{\mathbb{B},\wp(\mathbb{B})\}$, à sua t_S-evolução $ev_t^S(\mathsf{B}) = \left(\Lambda_{t_u\mathbb{B}};R_S(t_\Sigma\Sigma_{\mathbb{B}})\right)$, onde $R_S(t_\Sigma\Sigma_{\mathbb{B}})$ é a regulação da estrutura construída $t_\Sigma\Sigma_{\mathbb{B}}$ para o subsistema $S(t\mathsf{B})$, satisfazendo as condições da definição 5.5.3;

(ii) cada morfismo $h: \mathsf{B} \to \mathsf{B}'$, determinado por $h: \mathbb{B} \cup \wp(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}' \cup \wp(\mathbb{B}')$, ao morfismo t_S- evoluído $ev_t^S(h): ev_t^S(\mathsf{B}) \to ev_t^S(\mathsf{B}')$, tal que $ev_t^S(h) \equiv \widehat{t(h)}|_{S(t(\mathsf{B})),S(t(\mathsf{B}'))}$ é determinado pela função $ev_t^S(h) \equiv \widehat{t(h)}|_{S(t_u\mathbb{B}),S(t_u\mathbb{B}')}: t_u\mathbb{B} \cup \wp(t_u\mathbb{B}) \to t_u\mathbb{B}' \cup \wp(t_u\mathbb{B}')$, com $t(h)(X) = \{h(x) \in \mathbb{B}' \cup \wp(\mathbb{B}') | x \in X\}$, onde $\widehat{t(h)}|_{S(t(\mathsf{B})),S(t(\mathsf{B}'))}$ é dado pela operação de fecho de morfismo (definição 5.3.5) relativo aos subsistemas $S(t\mathsf{B})$ e $S(t\mathsf{B}')$. ♦

Observe que ev_t^S está bem definido. Veja figura 6.6. Primeiramente, tem-se que $ev_t^S(id_{\mathsf{B}}) = id_{ev_t^S(\mathsf{B})}$. De fato, para todo $X \in t_u\mathbb{B} \cup \wp(t_u\mathbb{B})$, é válido que

$$\begin{aligned} ev_t^S\left(id_{\mathbb{B}\cup\wp(\mathbb{B})}\right)(X) &= \left(\wedge t\left(id_{\mathbb{B}\cup\wp(\mathbb{B})}\right)\big|_{S(t_u\mathbb{B}),S(t_u\mathbb{B})}\right)(X)\\ &=\wedge\left\{id_{\mathbb{B}\cup\wp(\mathbb{B})}(x)\in\mathbb{B}\cup\wp(\mathbb{B})\mid x\in X\right\}\big|_{S(t_u\mathbb{B}),S(t_u\mathbb{B})}\\ &= \left\{x\in \mathbb{B}\cup\wp(\mathbb{B})\mid x\in X\right\}\\ &= X\\ &= id_{t_u\mathbb{B}\cup\wp(t_u\mathbb{B})}(X).\end{aligned}$$

Além disso, se $h\colon \mathsf{B}\to\mathsf{B}'$ e $g\colon \mathsf{B}'\to\mathsf{B}''$ são morfismos de **SO2**, determinados respectivamente, por $h\colon \mathbb{B}\cup\wp(\mathbb{B})\to\mathbb{B}'\cup\wp(\mathbb{B}')$ e $g\colon \mathbb{B}'\cup\wp(\mathbb{B}')\to\mathbb{B}''\cup\wp(\mathbb{B}'')$, então tem-se que

$$\begin{aligned} ev_t^S(g\circ h)(X) &=\wedge\left(t(g\circ h)\right)\big|_{S(t_u\mathbb{B}),S(t_u\mathbb{B}'')}(X)\\ &=\wedge\left\{(g\circ h)(x)\in\mathbb{B}''\cup\wp(\mathbb{B}'')\mid x\in X\right\}\big|_{S(t_u\mathbb{B}),S(t_u\mathbb{B}'')}\\ &=\wedge\left\{g(h(x))\in\mathbb{B}''\cup\wp(\mathbb{B}'')\mid x\in X\right\}\big|_{S(t_u\mathbb{B}),S(t_u\mathbb{B}'')},\end{aligned}$$

e, fazendo $y=h(x), Y=\widehat{t(h)}\big|_{S(t_u\mathbb{B}),S(t_u\mathbb{B}')}(X)$, com $t(h)(X)=\left\{h(x)\in\mathbb{B}'\cup\wp(\mathbb{B}')\mid x\in X\right\}$, segue que

$$\begin{aligned} ev_t^S(g\circ h)(X) &=\wedge\left\{g(y)\in\mathbb{B}''\cup\wp(\mathbb{B}'')\mid y\in Y\right\}\big|_{S(t_u\mathbb{B}),S(t_u\mathbb{B}'')}\\ &=\left(ev_t^S(g)\right)(Y)\\ &=\left(ev_t^S(g)\right)\left(\widehat{t(h)}\big|_{S(t_u\mathbb{B}),S(t_u\mathbb{B}')}(X)\right)\\ &=\left(ev_t^S(g)\right)\left(ev_t^S(h)(X)\right)\\ &=\left(ev_t^S(g)\circ ev_t^S(h)\right)(X),\end{aligned}$$

e, portanto, $ev_t^S(g\circ h)=ev_t^S(g)\circ ev_t^S(h)$.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{B}=\left(\Lambda_{\mathbb{B}};\Sigma_{\mathbb{B}}\right) \arrow[d, "h"'] \arrow[r, "ev_t^S"] & ev_t^S(\mathsf{B})=\left(\Lambda_{t_u\mathbb{B}};R_S\left(t_\Sigma\Sigma_{\mathbb{B}}\right)\right) \arrow[d, "{\begin{array}{l} ev_t^S(h)\equiv\widehat{t(h)}\big|_{S(t(\mathsf{B})),S(t(\mathsf{B}'))} \\ t(h)(X)=\left\{h(x)\in\mathbb{B}'\cup\wp(\mathbb{B}')\mid x\in X\right\}\end{array}}"] \\ \mathsf{B}'=\left(\Lambda_{\mathbb{B}'};\Sigma_{\mathbb{B}'}\right) & ev_t^S(\mathsf{B}')=\left(\Lambda_{t_u\mathbb{B}'};R_S\left(t_\Sigma\Sigma_{\mathbb{B}'}\right)\right) \end{tikzcd}$$

FIGURA 6.6 - O Functor Evolução ev_t^S

Salienta-se que a definição 6.2.6 pode ser enunciada da mesma forma para o caso em que o objeto evoluído a partir de um sistema X é um sistema bi-estruturado $ev_t^S(\mathbb{X}) = \left(\Lambda_{t_u\mathbb{X}}; \Sigma_{t_u\mathbb{X}}^{m}; R_S\left(t_\Sigma \Sigma_{\mathbb{X}}\right)\right)$.

6.2.7 Observação

O functor evolução ev_t^S pode ser entendido como a composição do functor regulador R_S, definido em 6.2.4, com um functor construtor de sistemas t, definido como em 6.2.5, tal que t garanta que o objeto a partir do qual se efetua a construção esteja imerso no objeto construído. Tem-se então que $ev_t^S = R_S \circ t$. Isto está ilustrado na figura 6.7, onde para todo $h\!: \mathsf{B} \to \mathsf{B}'$, tem-se que $t(h)(X) = \{h(x) \in \mathbb{B} \cup \wp(\mathbb{B}) | x \in X\}$, para todo $X \in t_u\mathbb{B} \cup \wp(t_u\mathbb{B})$, e $R_S(t(h)) = (\widehat{t(h)})|_{S(t(\mathsf{B})),S(t(\mathsf{B}'))}$. ♦

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathsf{B} = \left(\Lambda_{\mathbb{B}}; \Sigma_{\mathbb{B}}\right) \arrow[d, "h"'] \arrow[rr, bend left, "ev_t^S = R_S \circ t"] \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{\;t\;}"] & t(\mathsf{B}) = \left(\Lambda_{t_u\mathbb{B}}; t_\Sigma \Sigma_{\mathbb{B}}\right) \arrow[d, "{\mathsf{B}\widetilde{\underline{\Diamond}}t(\mathsf{B}) \quad t(h) \quad \mathsf{B}'\widetilde{\underline{\Diamond}}t(\mathsf{B}')}"] \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{\;R_S\;}"] & R_S(t(\mathsf{B})) = \left(\Lambda_{t_u\mathbb{B}}; R_S\left(t_\Sigma \Sigma_{\mathbb{B}}\right)\right) \arrow[d, "R_S(t(h))"] \\
\mathsf{B}' = \left(\Lambda_{\mathbb{B}'}; \Sigma_{\mathbb{B}'}\right) & t(\mathsf{B}') = \left(\Lambda_{t_u\mathbb{B}'}; t_\Sigma \Sigma_{\mathbb{B}'}\right) & R_S(t(\mathsf{B}')) = \left(\Lambda_{t_u\mathbb{B}'}; R_S\left(t_\Sigma \Sigma_{\mathbb{B}'}\right)\right)
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 6.7 - O Functor Evolução ev_t^S como a composição do functor regulador R_S com um functor construtor de sistemas t que garanta a imersão do sistema original no sistema construído

7 Representação Global de Sistemas Ordenados de 2ª Ordem

O objetivo deste capítulo é introduzir um processo construtivo para obter uma representação global, com uma estrutura semântica baseada em Espaços Coerentes, para os sistemas ordenados de 2ª ordem, em particular, para os sistemas da computação científica, como números reais e intervalos de reais.

Esta representação construtiva é denominada de global porque constitui-se de um espaço coerente bi-estruturado, com uma estrutura de informação e outra de aplicação, capaz de representar o sistema considerado em sua totalidade. Isto significa que através do processo de construção global é possível capturar tanto a estrutura de informação compatível com uma abordagem domínio-teorética, importante desde o ponto de vista computacional, quanto a estrutura de aplicação - com os aspectos algébricos, relação de posição, funções e relações, funções de medidas, topologia - determinada pelo uso pretendido do sistema representado em computação científica.

A representação em duas estruturas é obtida pela coordenação de dois processos de construção relacionados: o que constrói a estrutura de informação e o que trata da construção da estrutura de aplicação. Obtém-se, assim, um espaço coerente bi-estruturado através de evoluções sucessivas específicas a partir de um sistema básico, com certas características especiais, determinado de acordo com o sistema a ser representado.

Estas evoluções são realizadas de tal forma que a estrutura do sistema representado pode ser recuperada na estrutura de aplicação do espaço coerente bi-estruturado, através do isomorfismo existente entre o sistema representado e o subsistema dos objetos totais. Da mesma forma, observa-se que o sistema dos intervalos de elementos do sistema representado, estendido de modo adequado, e o subsistema dos objetos quasi-totais são isomorfos.

Além disso, existe uma representação linear interna, para cada aspecto da estrutura de aplicação, na estrutura de informação, garantindo desta forma o caráter computacional da construção.

Seja $\mathsf{A} = (\Lambda_{\mathbb{A}}; \Sigma_{\mathbb{A}})$, com $\Lambda_{\mathbb{A}} = \{\mathbb{A}, \wp(\mathbb{A})\}$, o sistema ordenado de 2ª ordem que deve ser representado globalmente, onde $\mathbb{A}$ é um conjunto parcialmente ordenado pela relação de posição $\leq_{\mathbb{A}}$, com uma estrutura $\Sigma_{\mathbb{A}}$.

Neste capítulo a estrutura de um sistema representado será considerada como $\Sigma_{\mathbb{A}} \equiv (\leq_{\mathbb{A}}, *_{\mathbb{A}}, F_{\mathbb{A}})$, onde $*_{\mathbb{A}}$ representa um conjunto de operações algébricas e $F_{\mathbb{A}}$ é uma família de funções unárias definidas no universo $\mathbb{A}$. Outros aspectos de caracterização da estrutura, como o valor absoluto, a distância e a topologia induzida pela distância serão tratados em capítulos posteriores, devido a sua importância e características especiais. As funções foram estudadas em detalhe por Reiser em [REI 97a] [REI 97b] [REI 97c] [REI 97d].

7.1 O Processo de Construção Global

Nesta seção introduz-se o processo de construção global, ilustrado na figura 7.1, descrevendo-se a metodologia utilizada por etapas de construção.

7.1.1 O Sistema Básico

O ponto de partida da construção é a determinação do sistema básico. Considere, então, como sistema básico o sistema denotado por $\mathsf{A}_0 = (\Lambda_A;\Sigma_A)$, com $\Lambda_A = \{A, \wp(A)\}$, onde A é um subconjunto enumerável de $\mathbb{A}$ com uma estrutura básica $\Sigma_A \equiv (\leq_A, *_A, F_A)$, que é obtida por restrição de $\Sigma_{\mathbb{A}}$ a A tal que Σ_A seja bem definida.

7.1.2 Primeira Evolução: uma [ ]-evolução regulada pelo próprio sistema evoluído

A primeira evolução na construção consiste da aplicação regulada do construtor de sistemas de 2ª ordem [ ]: **SO2** $\rightarrow$ **SO2** que, a partir do sistema A_0, determina o sistema intervalar $\mathsf{A}_1 = [\ ]\mathsf{A}_0 = (\Lambda_{IA};\Sigma_{IA})$, com $\Lambda_{IA} = \{IA, \wp(IA)\}$, cujo universo IA é constituído dos intervalos $[a_1,a_2] = \{a \in A | a_1 \leq a \leq a_2\}$ de elementos do universo básico A e cuja estrutura $\Sigma_{IA} \equiv (\leq_{IA}, *_{IA}, F_{IA})$ é obtida pela aplicação, regulada pelo próprio sistema intervalar A_1, dos construtores de funções e relações - $[\ ]_F$ e $[\ ]_R$, respectivamente - à estrutura básica Σ_A, satisfazendo as condições das definições 5.5.1 e 5.5.3. ♦

7.1.3 Exemplo

Na primeira evolução, aplicando-se o construtor de funções $[\ ]_F$, associado ao construtor de sistemas de 2ª ordem [ ]: **SO2** $\rightarrow$ **SO2**, a uma função unária básica $f_A: A \rightarrow A$, onde A é o conjunto básico, obtém-se uma função unária intervalar $f_{IA}: IA \rightarrow IA$, $X \mapsto \bigcap\{Y \in IA | \{f_A(a) \in A | a \in X\} \subseteq Y\}$, que é bem definida e fechada em IA [REI 97a]. Da mesma forma, se $[\ ]_F$ é aplicado a uma operação binária básica $*_{IA}: A \times A \rightarrow A$, obtém-se uma operação binária intervalar $*_{IA}: IA \times IA \rightarrow IA$, definida como $X *_{IA} Y = \bigcap\{Z \in IA | \{a *_A b \in A | a \in X, b \in Y\} \subseteq Z\} = \{a *_A b \in A | a \in X, b \in Y\}$, que também é bem definida e fechada em IA [DIM 96a] [DIM 97a]. Observe então que a [ ]-evolução é uma evolução regulada pelo próprio sistema intervalar. ♦

7.1.4 Exemplo

Na primeira evolução, aplicando-se o construtor de relações $[\ ]_R$, associado ao construtor de sistemas de 2ª ordem [ ]: **SO2** $\rightarrow$ **SO2**, à relação de posição básica $\leq_A$, obtém-se uma relação de posição intervalar $\leq_{IA}$, definida como: (i) $[a_1,a_2] <_{IA} [b_1,b_2]$ se e somente se $a_2 <_A b_1$ e (ii) $[a_1,a_2] \leq_{IA} [b_1,b_2]$ se e somente se $[a_1,a_2] <_{IA} [b_1,b_2]$ ou $[a_1,a_2] = [b_1,b_2]$. ♦

Observe que a função $h: A \rightarrow IA$, $a \mapsto [a,a]$ é injetora e, portanto, $\mathsf{A}_0 \,\tilde{\lozenge}\, \mathsf{A}_1$, ou seja A_0 está imerso em A_1. Segue que:

7.1.5 Proposição

A_1 é uma $[\ ]_{A_1}$-evolução de A_0, ou seja, $A_0 \angle_{[\ ]}^{A_1} A_1$. ♦

7.1.6 Evolução Final: uma *Coh*-Evolução regulada pelo sistema dos objetos quasi-totais

A evolução final na construção consiste da aplicação regulada do construtor de sistemas de 2ª ordem *Coh*: **SO2** → **SO2** que, a partir do sistema intervalar A_1 determina o sistema bi-estruturado $A_2 = Coh(A_1) = (\Lambda_{\mathbb{I}A}; \Sigma_{\mathbb{I}A}^{in}; \Sigma_{\mathbb{I}A}^{ap})$, com $\Lambda_{\mathbb{I}A} = \{\mathbb{I}A, \wp(\mathbb{I}A)\}$, onde $\mathbb{I}A$ é o espaço coerente gerado pelo conjunto básico A (definição 3.4.3). A estrutura de informação é dada por $\Sigma_{\mathbb{I}A}^{in} \equiv (\subseteq, F_{lin})$, onde $\subseteq$ é a ordem de informação e F_{lin} é a família das funções lineares. A estrutura de aplicação $\Sigma_{\mathbb{I}A}^{ap} \equiv (\leq_{\mathbb{I}A}, *_{\mathbb{I}A}, F_{\mathbb{I}A})$ é obtida pela aplicação, regulada pelo subsistema dos objetos quasi-totais de $\mathbb{I}A$, de construtores de funções e relações - Coh_F e Coh_R, respectivamente - à estrutura Σ_{IA}, satisfazendo as condições da definição 5.5.1 e 5.5.3. ♦

Salienta-se que outros aspectos da estrutura de informação, como, por exemplo, a topologia de informação, serão tratados separadamente em capítulo posterior.

7.1.7 Exemplo

Seja $(\Lambda_{\mathbb{I}A}; \Sigma_{\mathbb{I}A}^{in}; \Sigma_{\mathbb{I}A}^{ap})$, com $\Lambda_{\mathbb{I}A} = \{\mathbb{I}A, \wp(\mathbb{I}A)\}$ o espaço coerente bi-estruturado obtido por um processo de construção global a partir de um sistema básico $A_0 = (\Lambda_A; \Sigma_A)$, com $\Lambda_A = \{A, \wp(A)\}$ para $A \subseteq \mathbb{A}$ e estrutura de aplicação $\Sigma_{\mathbb{I}A}^{ap} \equiv (\leq_{\mathbb{I}A}, *_{\mathbb{I}A}, F_{\mathbb{I}A})$.

Para obter a definição de funções de objetos unárias $f_{\mathbb{I}A} \in F_{\mathbb{I}A}$, aplica-se, primeiramente, o construtor de funções Coh_F, associado ao construtor de sistemas de 2ª ordem *Coh*: **SO2** → **SO2**. Constrói-se assim a função unária $qf_{\mathbb{I}A}: \mathbb{I}A \to \mathbb{I}A$, denominada de quasi-função de objetos, definida por

$$x \mapsto \bigcap\{Y \in \mathbb{I}A | \{f_{IA}(X) \in IA | X \in x\} \subseteq Y\} = \{f_{IA}(X) \in IA | X \in x\}.$$

Observe que a quasi-função $qf_{\mathbb{I}A}$ não é necessariamente fechada no subsistema dos objetos quasi-totais. Isto significa que pode existir $f_{\mathbb{A}} \in F_{\mathbb{A}}$ tal que $qf_{\mathbb{I}A}(x) \notin qtot(\mathbb{I}A)$, para algum $x \in qtot(\mathbb{I}A)$, e, portanto, $qf_{\mathbb{I}A}$ não é bem comportada no sentido da definição 5.2.4. Isto acontece, por exemplo, quando se deseja representar o sistema dos números reais $R = (\Lambda_{\mathbb{R}}; \Sigma_{\mathbb{R}})$, com $\Lambda_{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R}, \wp(\mathbb{R})\}$ (veja capítulos 9 e 10).

Para garantir que a evolução final seja regulada pelo subsistema dos objetos quasi-totais, determina-se o fecho da quasi-função relativo ao subsistema dos objetos quasi-totais. Assim, a evolução regulada de uma função unária intervalar $f_{IA}: IA \to IA$ (obtida após a primeira evolução conforme exemplo 7.1.3), garante que a função de objetos resultante seja realmente fechada no subsistema dos objetos quasi-totais, isto é, seja bem comportada neste subsistema. Obtém-se então uma função de objetos unária $f_{\mathbb{I}A}: \mathbb{I}A \to \mathbb{I}A$, dada por

$$x \mapsto \begin{cases} \hat{q}f_{\mathrm{II}A}(x) & \text{se } x \in qtot(\mathrm{II}A), \\ qf_{\mathrm{II}A}(x) & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

onde $\hat{q}f_{\mathrm{II}A}$ é o fecho da quasi-função $qf_{\mathrm{II}A}$, definido em 5.2.5. Observe que $\hat{q}f_{\mathrm{II}A}(x)$ é o fecho indexado (definição 3.3.7) de $qf_{\mathrm{II}A}(x)$, para todo $x \in \mathrm{II}A$. Esta função é bem definida em IIA [REI 97a].

Salienta-se que $f_{\mathrm{II}A}$ é definida na estrutura de aplicação e, portanto, não é necessário que $f_{\mathrm{II}A}$ seja linear, como as funções admissíveis na estrutura de informação. Entretanto, é possível obter um representação linear interna para $f_{\mathrm{II}A}$ capaz de descrever o comportamento de $f_{\mathrm{II}A}$ na estrutura de informação. Veja seção 7.3. ♦

7.1.8 Exemplo

Seja $(\Lambda_{\mathrm{II}A};\Sigma^{in}_{\mathrm{II}A};\Sigma^{ap}_{\mathrm{II}A})$ o espaço coerente bi-estruturado do exemplo 7.1.7. A operação binária obtida pela aplicação do construtor de funções Coh_F associado ao construtor de sistemas de 2ª ordem Coh: **SO2** → **SO2**, denominada de quasi-operação de objetos, é dada por $*^{q}_{\mathrm{II}A} : \mathrm{II}A \prod \mathrm{II}A \to \mathrm{II}A$, tal que

$$x *^{q}_{\mathrm{II}A} y = \{X *_{IA} Y \in IA | X \in x, Y \in y\},$$

onde $\prod$ é o produto direto definido em 3.6.1.

Na execução da evolução final sobre uma operação binária intervalar $*_{IA} : IA \times IA \to IA$ (obtida após a primeira evolução conforme exemplo 7.1.3), garante-se, pela operação de regulação, que a operação de objetos resultante seja realmente fechada no subsistema dos objetos quasi-totais, isto é, seja bem comportada neste subsistema (definição 5.2.4).

Assim, obtém-se uma operação de objetos binária $*_{\mathrm{II}A} : \mathrm{II}A \prod \mathrm{II}A \to \mathrm{II}A$, dada por

$$x *_{\mathrm{II}A} y = \begin{cases} x *^{\hat{q}}_{\mathrm{II}A} y & \text{se } x, y \in qtot(\mathrm{II}A), \\ x *^{q}_{\mathrm{II}A} y & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

onde $x *^{\hat{q}}_{\mathrm{II}A} y$ é o fecho indexado da quasi-operação $x *^{q}_{\mathrm{II}A} y$, definido em 3.3.7. Esta operação é bem definida em IIA [DIM 96a] [DIM 97a]. ♦

7.1.9 Exemplo

Seja $(\Lambda_{\mathrm{II}A};\Sigma^{in}_{\mathrm{II}A};\Sigma^{ap}_{\mathrm{II}A})$ o espaço coerente bi-estruturado do exemplo 7.1.7. Na evolução final, aplicando-se o construtor de relações Coh_R, associado ao construtor de sistemas de 2ª ordem Coh: **SO2** → **SO2**, à relação de posição intervalar $\leq_{IA}$, obtida após a primeira evolução (veja exemplo 7.1.4), obtém-se uma relação de posição de objetos $\leq_{\mathrm{II}A}$, que pode ser caracterizada como: (i) $x <_{\mathrm{II}A} y$ se e somente se existem $X \in x, Y \in y$ tais que $X <_{IA} Y$ e (ii) $x \leq_{\mathrm{II}A} y$ se e somente se $x <_{\mathrm{II}A} y$ ou $x = y$. ♦

Observe que a função $h' : IA \to \mathrm{II}A$, $[a_1, a_2] \mapsto \{[a', a''] \in IA | a' \leq a_1 \leq a_2 \leq a''\}$ é injetora e, portanto, $A_1 \mathrel{\tilde{\underline{\Diamond}}} A_2$, ou seja A_1 está imerso em A_2. Segue que:

7.1.10 Proposição

A_2 é uma Coh_{qtot}-evolução de A_1, ou seja, $\mathsf{A}_1 \angle_{Coh}^{\mathrm{qtot}} \mathsf{A}_2$. ♦

7.1.11 Corolário

Tem-se que $\mathsf{A}_0 \angle_{[\,]}^{\mathsf{A}_1} \mathsf{A}_1 \angle_{Coh}^{\mathrm{qtot}} \mathsf{A}_2$. ♦

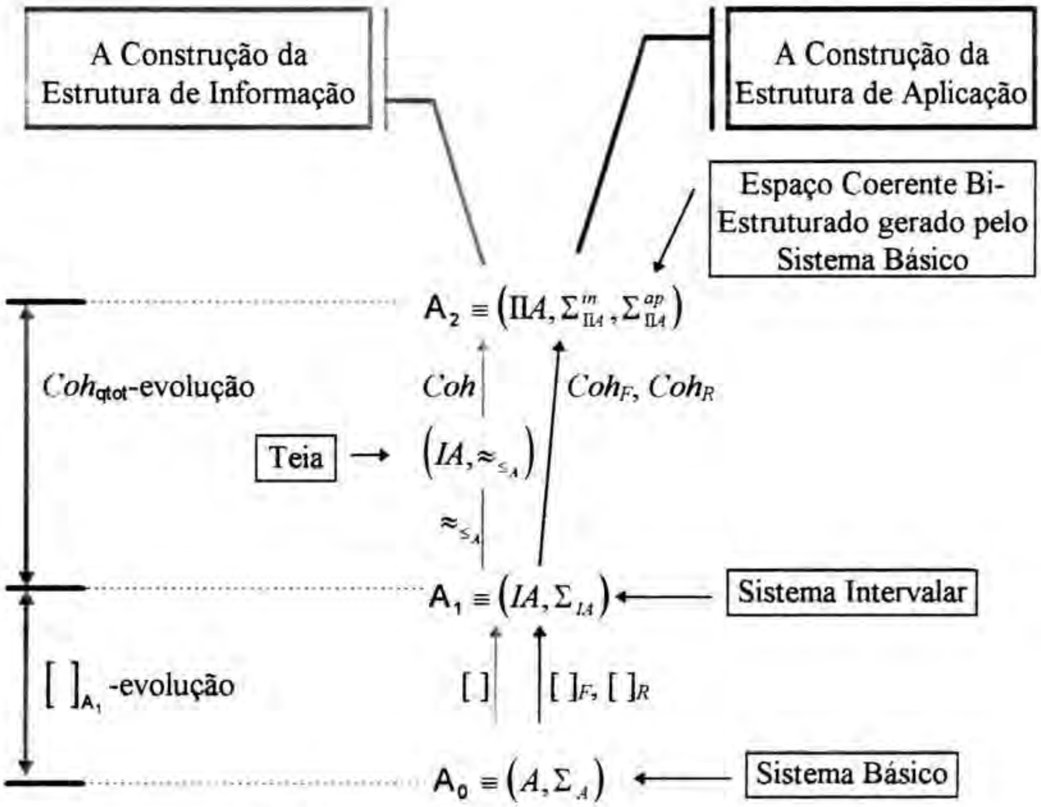


FIGURA 7.1 - O Processo de Construção Global

7.2 **Representação Global**

O processo de construção global fornece como resultado final um espaço coerente bi-estruturado, gerado pelo sistema básico, que constitui uma representação global mediante certos requisitos.

Sejam $\mathsf{A} = (\Lambda_{\mathbb{A}}; \Sigma_{\mathbb{A}})$, com $\Lambda_{\mathbb{A}} = \{\mathbb{A}, \wp(\mathbb{A})\}$, um sistema ordenado de 2ª ordem, e $\mathsf{IA} = (\Lambda_{\mathbb{IA}^*}; \Sigma_{\mathbb{IA}^*})$, com $\Lambda_{\mathbb{IA}^*} = \{\mathbb{IA}^*, \wp(\mathbb{IA}^*)\}$, o sistema ordenado de 2ª ordem onde $\mathbb{IA}^*$ é o conjunto de intervalos de elementos de $\mathbb{A}$ estendido com $\mathbb{A}$ ($\mathbb{IA}^* = \mathbb{IA} \cup \{\mathbb{A}\}$), relativamente a relação de posição $\leq_{\mathbb{A}}$.

Sejam $(\Lambda_{\mathrm{II}A}; \Sigma_{\mathrm{II}A}^{in}; \Sigma_{\mathrm{II}A}^{ap})$, com $\Lambda_{\mathrm{II}A} = \{\mathrm{II}A, \wp(\mathrm{II}A)\}$, o espaço coerente bi-estruturado obtido por um processo de construção global a partir do sistema básico $\mathsf{A}_0 = (\Lambda_A; \Sigma_A)$, com $\Lambda_A = \{A, \wp(A)\}$, e $\mathsf{qtot} \equiv \left(\Lambda_{qtot(\mathrm{II}A)}; \Sigma^{in}_{qtot(\mathrm{II}A)}; \Sigma^{ap}_{qtot(\mathrm{II}A)}\right)$, com $\Lambda_{qtot(\mathrm{II}A)} = \{qtot(\mathrm{II}A), \wp(qtot(\mathrm{II}A))\}$, o subsistema de seus objetos quasi-totais.

7.2.1 Definição. Índice Real

O índice real de um conjunto coerente $x \in \mathrm{II}A$ é definido como

$$ir(x) = \bigcap\{Y \in \mathbb{IA}^* | i(x) \subseteq Y \wedge Y \subseteq X, \forall X \in x\},$$

onde i é o índice de um conjunto coerente definido em 3.3.2. ♦

7.2.2 Exemplo

Seja $\mathsf{R} = (\Lambda_{\mathbb{R}}; \Sigma_{\mathbb{R}})$, com $\Lambda_{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R}, \wp(\mathbb{R})\}$ o sistema ordenado de 2ª ordem dos número reais e $\mathsf{IR} = (\Lambda_{\mathbb{IR}^*}; \Sigma_{\mathbb{IR}^*})$, com $\Lambda_{\mathbb{IR}^*} = \{\mathbb{IR}^*, \wp(\mathbb{IR}^*)\}$, o sistema ordenado de 2ª ordem $\mathbb{IR}^*$ dos intervalos de reais estendido com $\mathbb{R}$ ($\mathbb{IR}^* = \mathbb{IR} \cup \{\mathbb{R}\}$). Suponha que sejam realizadas as seguintes evoluções $\mathsf{Q} \angle^{\mathsf{IQ}}_{[\,]} \mathsf{IQ} \angle^{\mathsf{qtot}}_{Coh} \mathsf{IIQ}$ do processo de construção global, considerando-se como sistema básico o sistema Q dos número racionais Q, onde $\mathsf{IIQ} = (\Lambda_{\mathrm{II}Q}; \Sigma^{in}_{\mathrm{II}Q}; \Sigma^{ap}_{\mathrm{II}Q})$, com $\Lambda_{\mathrm{II}Q} = \{\mathrm{II}Q, \wp(\mathrm{II}Q)\}$.

Considere agora os conjuntos coerentes $\varnothing$, $x = \{[p,q] \in IQ | p^2 \le 2 \le q^2\}$, $x' = \{[p',q'] \in IQ | p'^2 \ge 2, q'^2 \ge 2, p' < 0, q' > 0\} \in \mathrm{II}Q$. Observe que os índices destes objetos são: $i(\varnothing) = Q$, $i(x) = \varnothing$ e $i(x') = \{r \in Q | r^2 < 2\}$, respectivamente (veja exemplo 3.3.3). Calculando-se os índices reais, obtém-se que $ir(\varnothing) = \mathbb{R}$, $ir(x) = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e $ir(x') = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, respectivamente. ♦

7.2.3 Definição. Representação Global

Diz-se que espaço coerente bi-estruturado $(\Lambda_{\mathrm{II}A}; \Sigma^{in}_{\mathrm{II}A}; \Sigma^{ap}_{\mathrm{II}A})$, obtido pelo processo de construção global, é a representação global do sistema de 2ª ordem A se e somente se existe um Σ^{ap}-isomorfismo $\phi: \mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}} \cong_{ap} \mathsf{IA}$, definido por

$$\phi: qtot(\mathrm{II}A) \cup \wp(qtot(\mathrm{II}A)) \to \mathbb{IA}^* \cup \wp(\mathbb{IA}^*),$$

tal que

$$x \mapsto \begin{cases} ir(x) & \text{se } x \in qtot(\mathrm{II}A); \\ \{ir(w) \in \mathbb{IA}^* | w \in x\} & \text{se } x \in \wp(qtot(\mathrm{II}A)), \end{cases}$$

onde ir é o índice real de um conjunto coerente definido em 7.2.1 e Σ^{ap}-isomorfismo é o isomorfismo relativo a estrutura de aplicação, introduzido em 5.3.3. ♦

7.2.4 Exemplo

Considere o espaço coerente bi-estruturado de intervalos racionais $\mathbb{IIQ} = \left(\Lambda_{\mathbb{II}Q}; \Sigma^{in}_{\mathbb{II}Q}; \Sigma^{ap}_{\mathbb{II}Q}\right)$, com $\Lambda_{\mathbb{II}Q} = \{\mathbb{II}Q, \wp(\mathbb{II}Q)\}$, introduzido no exemplo 7.2.2, obtido pelo processo de construção global a partir do sistema básico dos números racionais Q. No capítulo 10 prova-se a existência dos Σ^{ap}-isomorfismos $\phi_1 : qtot_{\mathbb{IIQ}} \cong_{ap} \mathbb{IR}$ e $\phi_2 : tot_{\mathbb{IIQ}} \cong_{ap} \mathbb{R}$, e, portanto, IIQ é a representação global do sistema dos números reais R e do sistema dos intervalos reais IR. ♦

A figura 7.2 mostra o processo de determinação dos Σ^{ap}-isomorfismos de uma representação global obtida pelo processo de construção global.

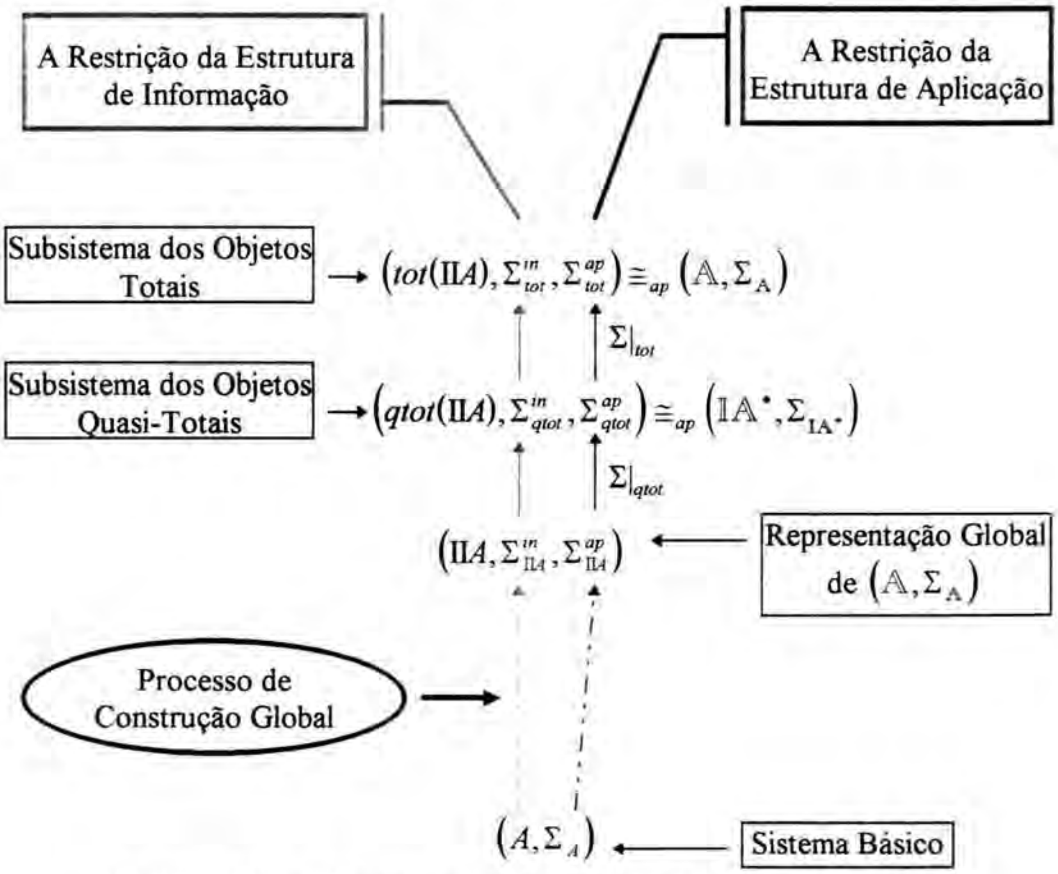


FIGURA 7.2 - A Representação Global e os Σ^{ap}-isomorfismos

7.3 **A Representação Linear Interna**

Uma característica desejável para a representação global é que se possa ter uma representação linear interna para a sua estrutura de aplicação em sua estrutura de informação. Esta seção preocupa-se apenas com as funções de aplicação unárias. Representações de funções de mais de uma variável e de relações em geral são objetos de trabalhos futuros. A topologia será tratada separadamente, em capítulos posteriores.

Reiser [REI 97a] [REI 97b] [REI 97c] [REI 97d] introduziu o estudo sobre a representação linear de funções unárias definidas para um espaço coerente gerado por um conjunto básico. Com base nestes trabalhos, introduz-se aqui uma definição mais geral de representação linear interna de funções unárias da estrutura de aplicação de uma representação global em sua estrutura de informação.

Seja $\mathsf{A}_2 = \left(\Lambda_{\mathbb{I}A}; \Sigma_{\mathbb{I}A}^{in}; \Sigma_{\mathbb{I}A}^{ap}\right)$, com $\Lambda_{\mathbb{I}A} = \{\mathbb{I}A, \wp(\mathbb{I}A)\}$ o espaço coerente bi-estruturado obtido por um processo de construção global a partir de um sistema básico $\mathsf{A}_0 = \left(\Lambda_A; \Sigma_A\right)$, com $\Lambda_A = \{A, \wp(A)\}$ para $A \subseteq \mathbb{A}$ e estrutura de aplicação $\Sigma_{\mathbb{I}A}^{ap} \equiv \left(\leq_{\mathbb{I}A}, *_{\mathbb{I}A}, F_{\mathbb{I}A}\right)$.

A representação linear interna de uma função unária $f \in F_{\mathbb{I}A}$ definida na estrutura de aplicação $\Sigma_{\mathbb{I}A}^{ap}$ do espaço coerente bi-estruturado A_2 é construída sobre uma representação especial de $\mathbb{I}A$ no conjunto das partes $\wp(\mathbb{I}A)$, denotada genericamente por $\overline{\mathbb{I}A}$, que garanta a linearidade da representação interna de f, e de tal forma que exista uma imersão de $\mathbb{I}A$ na sua representação $\overline{\mathbb{I}A}$ [REI 97a]. Esta representação $\overline{\mathbb{I}A}$ pode ser dada por dois espaços produtos isomorfos [REI 97a]: a representação pelo produto direto de subespaços, denotada por $\dot{\mathbb{I}A}$, e a representação pelo espaço coerente associado ao produto cartesiano das subteias, denotada por $\dot{\mathbb{I}A}$ Para todo $x \in \mathbb{I}A$, denota-se por $\overline{x}$ a representação de x em $\overline{\mathbb{I}A}$.

7.3.1 Definição. Representação Linear Interna de uma Função de Aplicação Unária

Uma representação linear interna para uma função de aplicação unária $f \in F_{\mathbb{I}A}$ é um par $F \equiv \left(f_1, f_2\right)$, onde $f_1 : \overline{\mathbb{I}A} \to \overline{\mathbb{I}A}$ é uma função linear em $\overline{\mathbb{I}A}$ e $f_2 : qtot\left(\overline{\mathbb{I}A}\right) \to qtot\left(\overline{\mathbb{I}A}\right)$ é uma função linear no subsistema dos objetos quasi-totais de $\overline{\mathbb{I}A}$, tais que

$$\overline{f_{\mathbb{I}A}(x)} = \left(f_1, f_2\right)(\overline{x}) = \begin{cases} f_2(\overline{x}) & \text{se } \overline{x} \in qtot\left(\overline{\mathbb{I}A}\right); \\ f_1(\overline{x}) & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{I}A$. ♦

7.4 A Representação Linear Interna de Funções de Aplicação Injetivas na Base

A estabilidade de funções é uma propriedade relativa à estrutura de informação. Entretanto, em um espaço coerente bi-estruturado gerado por um conjunto básico, a condição de estabilidade de uma função de objetos é dependente da injetividade da respectiva função básica [REI 97a], que é uma propriedade inerente à estrutura representada pelo espaço e, portanto, inerente à estrutura de aplicação daquele espaço, e não uma propriedade inerente à sua estrutura de informação.

Para verificar esse resultado, considere agora a quasi-função de objetos $qf_{\mathbb{I}A} : \mathbb{I}A \to \mathbb{I}A$, $x \mapsto \left\{ f_{IA}(X) \in IA | X \in x \right\}$, e a respectiva função de objetos $f_{\mathbb{I}A} : \mathbb{I}A \to \mathbb{I}A$, dada por

$$x \mapsto \begin{cases} \hat{q}f_{\mathrm{II}A}(x) & \text{if } x \in qtot(\mathrm{II}A), \\ qf_{\mathrm{II}A}(x) & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

obtida após uma *Coh*-evolução, regulada pelo subsistema dos quasi-totais, conforme o exemplo 7.1.7, onde $f_{IA}: IA \to IA$, $X \mapsto \{f_A(a) \in A | a \in X\}$ é a respectiva função intervalar, conforme exemplo 7.1.3, e $\hat{q}f_{\mathrm{II}A}(x)$ é o fecho indexado da quasi-função $qf_{\mathrm{II}A}(x)$, definido em 3.3.7.

A restrição da função $f_{\mathrm{II}A}$ à família dos objetos quasi-totais é denominada de função fecho da quasi-função de objetos $qf_{\mathrm{II}A}$ restrita a $qtot(\mathrm{II}A)$, e será denotada simplesmente por $\hat{q}f_{\mathrm{II}A} \equiv f_{\mathrm{II}A}\big|_{qtot} : qtot(\mathrm{II}A) \to qtot(\mathrm{II}A)$. Obtém-se os seguintes resultados:

7.4.1 Proposição

Tem-se que (i) $qf_{\mathrm{II}A}$ é monotônica, contínua e satisfaz a condição de linearidade e (ii) $\hat{q}f_{\mathrm{II}A}$ é monotônica, contínua e satisfaz a condição de linearidade em $qtot(\mathrm{II}A)$, com relação a ordem de informação $\subseteq$.
prova:

Para provar (i), mostra-se primeiramente que $qf_{\mathrm{II}A}$ é monotônica. Sejam então $x_j, x_l \in \mathrm{II}A$, tais que $x_j \subseteq x_l$, e $Y \in qf_{\mathrm{II}A}(x_j)$. Logo existe $X \in x_j$ tal que $Y = f_{IA}(X)$. Como $x_j \subseteq x_l$, então tem-se que $X \in x_l$, e, portanto, $Y = f_{IA}(X) \in qf_{\mathrm{II}A}(x_l)$. Isto significa que $qf_{\mathrm{II}A}(x_j) \subseteq qf_{\mathrm{II}A}(x_l)$, o que mostra que $qf_{\mathrm{II}A}$ é monotônica.

Para mostrar a continuidade de $qf_{\mathrm{II}A}$, seja $\mathrm{X} = \{x_i \in \mathrm{II}A | i \in I\}$ um conjunto dirigido de $\mathrm{II}A$ relativamente a ordem de informação $\subseteq$. Então, para todo $x_j, x_k \in \mathrm{X}$, existe $x_l \in \mathrm{X}$ tal que $x_j \subseteq x_l$ e $x_k \subseteq x_l$. Como $qf_{\mathrm{II}A}$ é monotônica, então $qf_{\mathrm{II}A}(x_j) \subseteq qf_{\mathrm{II}A}(x_l)$ e $qf_{\mathrm{II}A}(x_k) \subseteq qf_{\mathrm{II}A}(x_l)$, e, portanto, $qf_{\mathrm{II}A}[\mathrm{X}]$ é também um conjunto dirigido. Além disso, $\bigcup \mathrm{X} \in \mathrm{II}A$, pois todo espaço coerente é fechado para uniões dirigidas (proposição 3.1.3 (v)). Tem-se também que

$$\begin{aligned} qf_{\mathrm{II}A}(\bigcup \mathrm{X}) &= \{f_{IA}(Y) \in IA | Y \in \bigcup \mathrm{X}\} \\ &= \left\{ f_{IA}(Y) \in IA | Y \in \bigcup_{i \in I} x_i \right\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{f_{IA}(Y) \in IA | Y \in x_i\} \\ &= \bigcup_{i \in I} qf_{\mathrm{II}A}(x_i) \\ &= \bigcup qf_{\mathrm{II}A}[\mathrm{X}], \end{aligned}$$

o que mostra que $qf_{\mathrm{II}A}$ é contínua.

Para mostrar que $qf_{\mathrm{II}A}$ satisfaz a condição de linearidade, considere $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{II}A$ tal que para todo $x_j, x_k \in \mathrm{X}$, $x_j \cup x_k \in \mathrm{II}A$. Como II$A$ é um espaço coerente, então $\bigcup\mathrm{X} \in \mathrm{II}A$ (proposição 3.1.3 (iii)), e, então, é imediato que $qf_{\mathrm{II}A}(\bigcup\mathrm{X}) = \bigcup qf_{\mathrm{II}A}[\mathrm{X}]$.

A prova de (ii) é similar. ♦

7.4.2 Lema

A função básica f_A é injetiva se e somente se a função intervalar f_{IA} também é injetiva.
prova:

Prova-se primeiramente a recíproca. Suponha que f_A não é injetiva. Isto significa que existem $a,b \in A$ tais que $a \neq b$ e $f_A(a) = f_A(b) = k \in A$. Considere dois intervalos $[a,c],[b,c] \in IA$ em que f_A seja não decrescente para a relação de posição. Tem-se então que

$$f_{IA}([a,c]) = \{f_A(r) | r \in [a,c]\} = [f_A(a), f_A(c)] = [k, f_A(c)]$$

e

$$f_{IA}([b,c]) = \{f_A(r) | r \in [b,c]\} = [f_A(b), f_A(c)] = [k, f_A(c)],$$

donde conclui-se que $f_{IA}([a,c]) = f_{IA}([b,c])$. Supondo-se f_A não crescente em tais intervalos, relativamente à relação de posição, de forma análoga obtém-se também que $f_{IA}([a,c]) = f_{IA}([b,c])$. Isto mostra que a função intervalar f_{IA}, assim como f_A, também não é injetiva. De forma análoga mostra-se que se f_A é injetiva então f_{IA} também é injetiva. ♦

Para a quasi-função de objetos $qf_{\mathrm{II}A}$, tem-se que:

7.4.3 Proposição

$qf_{\mathrm{II}A}$ satisfaz a condição de estabilidade se e somente se a respectiva função básica f_A é injetiva.
prova:

Sejam $x,x' \in \mathrm{II}A$ tais que $x \cup x' \in \mathrm{II}A$ e suponha f_A não é injetiva. Pelo lema 7.4.2, tem-se que a função intervalar f_{IA} também não é injetiva. Então considere $X, X' \in IA$ tais que $X \neq X'$ e $f_{IA}(X) = f_{IA}(X')$. Suponha que $X \in x$, mas $X \notin x'$, e $X' \in x'$, mas $X' \notin x$. Isto significa que $X, X' \notin (x \cap x')$, e, portanto, $f_{IA}(X) = f_{IA}(X') \notin qf_{\mathrm{II}A}(x \cap x')$. Agora observe que $f_{IA}(X) \in qf_{\mathrm{II}A}(x)$ e $f_{IA}(X') \in qf_{\mathrm{II}A}(x')$. Então, tem-se que $f_{IA}(X) = f_{IA}(X') \in qf_{\mathrm{II}A}(x) \cap qf_{\mathrm{II}A}(x')$, e, portanto, $qf_{\mathrm{II}A}(x \cap x') \neq qf_{\mathrm{II}A}(x) \cap qf_{\mathrm{II}A}(x')$, o que significa que $qf_{\mathrm{II}A}$ não satisfaz a condição de estabilidade quando a função básica f_A não é injetiva.

Para provar a recíproca, considere f_A injetiva e sejam $x,x' \in \mathrm{II}A$ tais que $x \cup x' \in \mathrm{II}A$. Se $x \cap x' \neq \emptyset$, então para todo $X \in x \cap x'$, tem-se que $f_{IA}(X) \in f_{\mathrm{II}A}(x \cap x')$, $f_{IA}(X) \in f_{\mathrm{II}A}(x)$ e $f_{IA}(X) \in f_{\mathrm{II}A}(x')$. Portanto, segue que $f_{IA}(X) \in f_{\mathrm{II}A}(x) \cap f_{\mathrm{II}A}(x')$, o que significa que $f_{\mathrm{II}A}(x \cap x') \subseteq f_{\mathrm{II}A}(x) \cap f_{\mathrm{II}A}(x')$. Agora, considere $Y \in f_{\mathrm{II}A}(x) \cap f_{\mathrm{II}A}(x')$ e suponha que $Y \notin f_{\mathrm{II}A}(x \cap x')$. Então existem $X \in x$, $X' \in x'$, $X \neq X'$, tais que $X \notin x'$, $X' \notin x$ e $Y = f_{IA}(X) = f_{IA}(X')$. Isto é uma contradição, pois f_{IA} é também injetiva, pelo lema 7.4.2. ♦

7.4.4 Proposição

Tem-se que $\hat{q}f_{\mathrm{II}A}$ satisfaz a condição de estabilidade em $qtot(\mathrm{II}A)$.

prova:

Considere $x, x' \in qtot(\mathrm{II}A)$ tais que $x \cup x' \in qtot(\mathrm{II}A)$. Então, pela proposição 3.4.7, tem-se que (i) $x' \subseteq x$ ou (ii) $x \subseteq x'$. Supor (i). Então tem-se que $x \cap x' = x'$ e, portanto, $\hat{q}f_{\mathrm{II}A}(x \cap x') = \hat{q}f_{\mathrm{II}A}(x') = \hat{q}f_{\mathrm{II}A}(x) \cap \hat{q}f_{\mathrm{II}A}(x')$, pois $\hat{q}f_{\mathrm{II}A}$ é monotônica em $qtot(\mathrm{II}A)$, pela proposição 7.4.1 (ii). O mesmo resultado é obtido considerando-se (ii). ♦

Segue então que:

7.4.5 Corolário

Tem-se que (i) $\hat{q}f_{\mathrm{II}A}$ é linear em $qtot(\mathrm{II}A)$ e (ii) $qf_{\mathrm{II}A}$ é linear em $\mathrm{II}A$ se e somente se a respectiva função básica f_A é injetiva. ♦

7.4.6 Corolário

O par $F = (qf_{\mathrm{II}A}, \hat{q}f_{\mathrm{II}A})$ é uma representação linear interna para a função de objetos unária $f_{\mathrm{II}A}$ se e somente se a respectiva função básica f_A é injetiva. ♦

7.5 A Representação Linear Interna de Funções de Aplicação Não-Injetivas na Base

Concentra-se agora no problema das funções objetos $f_{\mathrm{II}A}$ cujas respectivas funções básicas f_A não são injetivas. Considere então uma divisão do domínio básico A em subdomínios básicos $A_i \subseteq A$, para $i \in I$ arbitrário, tal que cada uma das funções restritas básicas $f_{A_i} : A_i \to B_i \subseteq A$ é injetiva, $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ e B_i é a imagem de f_{A_i}. Em tal situação, diz-se que a respectiva quasi-função de objetos é $qf_{\mathrm{II}A}$ é localmente linear.

Observe que cada subdomínio básico A_i gera uma subteia $(IA_i, \approx_{A_i})$, onde IA_i é o conjunto de intervalos de elementos de A_i, e $\approx_{A_i}$ é a restrição da relação de coerência induzida $\approx_{\leq_A}$ a A_i. Da mesma forma, cada respectiva subimagem B_i produz uma subteia $(IB_i, \approx_{B_i})$, onde IB_i é o conjunto de intervalos de elementos de B_i, e $\approx_{B_i}$ é a restrição da relação de coerência induzida $\approx_{\leq_A}$ a B_i. Cada uma das subteias acima gera um subespaço coerente, dados por $\mathrm{II}A_i \equiv (Coh(IA_i, \approx_{A_i}), \subseteq)$ e $\mathrm{II}B_i \equiv (Coh(IB_i, \approx_{B_i}), \subseteq)$.

É imediato que cada quasi-função de objetos $qf_{\mathrm{II}A_i}$ restrita aos espaços coerentes $\mathrm{II}A_i$ gerados pelos respectivos subdomínios básicos A_i é contínua, estável e linear, pois as respectivas funções básicas são injetivas. Também é imediato que cada função fecho $\hat{q}f_{\amalg A_i}$ é contínua, estável e linear em $qtot(\amalg A_i)$.

Assim, buscam-se representações $\overline{\amalg A}$ para o universo $\amalg A$ de uma representação global, em termos das subteias $(IA_i, \approx_{A_i})$ e $(IB_i, \approx_{B_i})$ e dos subespaços coerentes $\amalg A_i \equiv (Coh(IA_i, \approx_{A_i}), \subseteq)$ e $\amalg B_i \equiv (Coh(IB_i, \approx_{B_i}), \subseteq)$, para que se possa definir a representação linear interna de funções não injetivas na base. Estas representações serão estudadas nas seções que se seguem.

7.6 A Representação utilizando o Produto Direto de Subespaços

Seja $\left(\dot{\bigcup_{i \in I}} X_i, \dot{\approx}\right)$ a teia gerada pela união disjunta de subteias, onde $\dot{\bigcup_{i \in I}} X_i := \bigcup_i (\{i\} \times X_i)$, e a relação de coerência $\dot{\approx}$ é definida por: $(i, \alpha) \dot{\approx} (i, \alpha')$ se e somente se $\alpha \approx_{X_i} \alpha'$ e $(m, \alpha) \dot{\approx} (n, \beta)$, para todo $\alpha \in X_m, \beta \in X_n, m, n \in I, m \neq n$.

Considere as teias $\left(\dot{\bigcup_{i \in I}} IA_i, \dot{\approx}\right)$ e $\left(\dot{\bigcup_{i \in I}} IB_i, \dot{\approx}\right)$ obtidas pela união disjunta das subteias $(IA_i, \approx_{A_i})$ e $(IB_i, \approx_{B_i})$, respectivamente. O produto direto (definição 3.6.1) dos espaços coerentes $\amalg A_i$ é dado pelo espaço coerente $\dot{\amalg A} \equiv \left(Coh\left(\dot{\bigcup_{i \in I}} IA_i, \dot{\approx}\right), \subseteq\right)$, assim como o produto direto dos espaços coerentes $\amalg B_i$'s é o espaço coerente $\dot{\amalg B} \equiv \left(Coh\left(\dot{\bigcup_{i \in I}} IB_i, \dot{\approx}\right), \subseteq\right)$.

Observa-se que existe um isomorfismo de conjunto entre a família $Coh\left(\dot{\bigcup_{i \in I}} X_i, \dot{\approx}\right)$ dos conjuntos coerentes da teia $\left(\dot{\bigcup_{i \in I}} X_i, \dot{\approx}\right)$ e o produto cartesiano $\prod_{i \in I} Coh(X_i, \approx_{X_i})$ da família dos conjuntos coerentes de cada subteia, ou seja, $Coh\left(\dot{\bigcup_{i \in I}} X_i, \dot{\approx}\right) \equiv \prod_{i \in I} Coh(X_i, \approx_{X_i})$ (veja seção 3.6.1). Então pode-se utilizar a notação $\dot{x} \equiv (x_0, \ldots, x_i)$, para todo $\dot{x} \in Coh\left(\dot{\bigcup_{i \in I}} X_i, \dot{\approx}\right)$ e $(x_0, \ldots, x_i) \in \prod_{i \in I} Coh(X_i, \approx_{X_i})$.

Considere então a quasi-função de objetos $q\dot{f}_{\dot{\amalg A}} : \dot{\amalg A} \to \dot{\amalg B}$, definida no espaço produto $\dot{\amalg A}$, dada por $\dot{x} \mapsto \{ f_{IA_i}(X_{ij}) \in IB_i \mid X_{ij} \in x_i, i \in I, j \in J \}$.

Observe que, pelo lema 7.4.2, f_{IA_i} é injetiva, pois a respectiva função básica f_{A_i} é injetiva, para cada $i \in I$. Então, com uma argumentação análoga às utilizadas nas proposições 7.4.1 e 7.4.3, conclui-se que

7.6.1 Proposição

$q\dot{f}_{\dot{\amalg A}}$ é estável e linear. ♦

Se a notação $\dot{x} \equiv (x_0, \ldots, x_i)$ é utilizada, então tem-se que $q\dot{f}_{\dot{\amalg A}}(\dot{x}) = (qf_{\amalg A_0}(x_0), \ldots, qf_{\amalg A_i}(x_i), \ldots)$, para cada $\dot{x} \in Coh\left(\dot{\bigcup_{i \in I}} IA_i, \dot{\approx}\right)$, o que também pode ser denotado por $q\dot{f}_{\dot{\amalg A}}(\dot{x}) = (qf_{\amalg A_0}, \ldots, qf_{\amalg A_i}, \ldots)(x_0, \ldots, x_i, \ldots)$. Salienta-se que cada quasi-função componente $qf_{\amalg A_i}$ é estável e linear em $\amalg A_i$, pois as respectivas funções básicas f_{A_i} são injetoras.

Observe agora que a função de objetos no espaço produto $\dot{\amalg A}$ é definida como $\dot{f}_{\dot{\amalg A}} : \dot{\amalg A} \to \dot{\amalg B}$, tal que

$$\dot{x} \mapsto \begin{cases} \hat{q}\dot{f}_{\dot{\amalg A}}(\dot{x}) = (\hat{q}f_{\amalg A_0}(x_0), \ldots, \hat{q}f_{\amalg A_0}(x_0)) & \text{se } \dot{x} \in qtot(\dot{\amalg A}), \\ q\dot{f}_{\dot{\amalg A}}(\dot{x}) = (qf_{\amalg A_0}(x_0), \ldots, qf_{\amalg A_0}(x_0)) & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

onde $\hat{q}f_{\dot{\amalg A}}(x)$ é o fecho indexado de $qf_{\dot{\amalg A}}(x)$.

A restrição da função $\dot{f}_{\dot{\amalg A}}$ à família dos objetos quasi-totais é denominada de função fecho da quasi-função de objetos $q\dot{f}_{\dot{\amalg A}}$ restrita a $qtot(\dot{\amalg A})$, e será denotada simplesmente por $\hat{q}\dot{f}_{\dot{\amalg A}} \equiv \dot{f}_{\dot{\amalg A}}\Big|_{qtot} : qtot(\dot{\amalg A}) \to qtot(\dot{\amalg B})$. Com uma argumentação análoga às utilizadas nas proposições 7.4.1 e 7.4.4, conclui-se que:

7.6.2 Proposição

$\hat{q}\dot{f}_{\dot{\amalg A}}$ é linear em $qtot(\dot{\amalg A})$. ♦

Portanto, mesmo se a função básica f_A não é injetiva, é possível obter uma representação linear interna para a respectiva função de objetos $f_{\amalg A}$, conforme o resultado a seguir:

7.6.3 Corolário

O par $F = \left(q\dot{f}_{\dot{\text{II}A}}, \hat{q}\dot{f}_{\dot{\text{II}A}} \right)$ é uma representação linear interna para a função de aplicação unária $f_{\text{II}A}$ se e somente se a respectiva quasi-função de objetos $qf_{\text{II}A}$ é localmente linear. ♦

7.6.4 Exemplo

Diz-se que F é uma representação linear interna de $f_{\text{II}A}$ para significar que F é um conjunto de funções da estrutura de informação que podem reproduzir o mesmo efeito da aplicação de $f_{\text{II}A}$ a um objeto qualquer x.

Considere a função básica $f_A\!: A \to A$ não injetiva. Suponha que seja possível subdividir o domínio básico em $A = A_0 \cup A_1$, de tal forma que as restrições da função básica f_A a cada uma destas subdivisões, $f_{A_0} \equiv f_A|_{A_0} : A_0 \to B_0$, com $B_0 = f_A[A_0]$, $f_{A_1} \equiv f_A|_{A_1} : A_1 \to B_1$, $B_1 = f_A[A_1]$, sejam injetivas. Como a respectiva quasi-função de objetos $qf_{\text{II}A}$ é localmente linear, então valem os resultados da seção 7.6.

Assim, pode-se obter o produto direto dos espaços coerentes $\text{II}A_0$ e $\text{II}A_1$, dado pelo espaço coerente $\dot{\text{II}A} \equiv \left(Coh\left(IA_0 \dot{\cup} IA_1, \dot{\approx} \right), \subseteq \right)$, cuja teia $\left(IA_0 \dot{\cup} IA_1, \dot{\approx} \right)$ é a união disjunta das subteias $\left(IA_0, \approx_{A_0} \right)$ e $\left(IA_1, \approx_{A_1} \right)$, onde $\dot{\approx}$ é definida em 7.6, $\approx_{A_0}$ e $\approx_{A_1}$ são as restrições da relação de coerência induzida $\approx_{\leq_A}$ a A_i, $i = 0,1$, e tal que $\text{II}A$ está imerso em $\dot{\text{II}A}$ [REI 97a]. Também pode-se definir um espaço coerente $\dot{\text{II}B} \equiv \left(Coh\left(IB_0 \dot{\cup} IB_1, \dot{\approx} \right), \subseteq \right)$, produto direto dos espaços $\text{II}B_0$ e $\text{II}B_1$, cuja teia $\left(IB_0 \dot{\cup} IB_1, \dot{\approx} \right)$ é obtida pela união disjunta das subteias $\left(IB_0, \approx_{B_0} \right)$ e $\left(IB_1, \approx_{B_1} \right)$.

Determina-se então a representação linear interna $F = \left(q\dot{f}_{\dot{\text{II}A}}, \hat{q}\dot{f}_{\dot{\text{II}A}} \right)$ para função de aplicação unária $f_{\text{II}A}$, conforme o corolário 7.6.3.

Considere agora um conjunto coerente $x = \{[a,b]\} \in \text{II}A$, cuja correspondente imagem pela função de objetos $f_{\text{II}A}$ em $\text{II}A$ é o conjunto coerente $f_{\text{II}A}(x) = \{[r,s]\} \in \text{II}A$. Pode-se obter uma representação para x em $\dot{\text{II}A}$ dada por $\dot{x} = \{(0,[a,k]),(1,[k,b])\} \in \dot{\text{II}A}$, onde $[a,k] \in IA_0$, $[k,b] \in IA_1$ e $[a,k] \cup [k,b] = [a,b]$. Observe que pode-se utilizar a notação $\dot{x} \equiv \left(\{[a,k]\}, \{[k,b]\} \right)$.

Como x não é um objeto quasi-total, a imagem de $\dot{x}$ pode ser calculada pela quasi-função de objetos $qf_{\dot{\text{II}A}}$ (primeira componente da representação linear F) em $\dot{\text{II}A}$, obtendo-se o conjunto coerente

$$
\begin{aligned}
q\dot{f}_{\dot{\amalg A}}\left(\dot{x}\right) &= \left(qf_{\amalg A_0}\left(\{[a,k]\}\right), qf_{\amalg A_1}\left(\{[k,b]\}\right)\right)\\
&= \left(\{f_{IA_0}([a,k])\}, \{f_{IA_1}([k,b])\}\right)\\
&= \left(\{[r,w]\}, \{[w',s]\}\right),
\end{aligned}
$$

tal que $[r,w]\cup[w',s]=[r,s]$. Portanto, a ação da função representada quando aplicada ao objeto x pôde ser capturada pela primeira componente de sua representação linear interna F. ♦

7.7 A Representação utilizando o Espaço Coerente Associado ao Produto Cartesiano das Subteias

Seja $\left(\prod_{i\in I} X_i, \dot{\approx}\right)$ a teia produto gerada pelo produto cartesiano das subteias, onde $\prod_{i\in I} X_i := X_0 \times \ldots \times X_i \times \ldots$, e a relação de coerência $\dot{\approx}$ é definida por: $(\alpha_0,\ldots\alpha_i,\ldots)\dot{\approx}(\beta_0,\ldots\beta_i,\ldots)$ se e somente se existem $k,k' \in I$ tais que $\alpha_k \approx_{\leq_X} \beta_{k'}$, para todo $(\alpha_0,\ldots\alpha_i,\ldots),(\beta_0,\ldots\beta_i,\ldots)\in\prod_{i\in I} X_i$.

Considere as teias produtos $\left(\prod_{i\in I} IA_i, \dot{\approx}\right)$ e $\left(\prod_{i\in I} IB_i, \dot{\approx}\right)$ obtidas pelo produto cartesiano das subteias $(IA_i, \approx_{A_i})$ e $(IB_i, \approx_{B_i})$, respectivamente. O espaço coerente associado ao produto cartesiano das subteias $(IA_i, \approx_{A_i})$ é definido como $\dot{\amalg A} \equiv \left(Coh\left(\prod_{i\in I} IA_i, \dot{\approx}\right), \subseteq\right)$, assim como o espaço coerente associado ao produto cartesiano das subteias $(IB_i, \approx_{B_i})$ é dado por $\dot{\amalg B} \equiv \left(Coh\left(\prod_{i\in I} IB_i, \dot{\approx}\right), \subseteq\right)$.

Como os tokens da teia $\left(\prod_{i\in I} IA_i, \dot{\approx}\right)$ são n-uplas de intervalos, então define-se a função de n variáveis intervalares $f_{\prod_{i\in I} IA_i}: \prod_{i\in I} IA_i \to \prod_{i\in I} IB_i$, tal que $(X_0,\ldots,X_i,\ldots)\mapsto\left(f_{IA_0}(X_0),\ldots,f_{IA_i}(X_i),\ldots\right)$, onde cada função intervalar f_{IA_i} é injetiva, pois a respectiva função básica f_{A_i} é injetiva, para cada $i \in I$. Considerando-se que uma função de n variáveis intervalares é injetiva se e somente se é injetiva em cada uma de suas componentes, então conclui-se que $f_{\prod_{i\in I} IA_i}$ é injetiva.

Considere então a quasi-função de objetos $q\dot{f}_{\dot{\amalg A}}: \dot{\amalg A} \to \dot{\amalg B}$, definida no espaço coerente associado ao produto cartesiano de subteias $\dot{\amalg A}$, dada por

$\dot{x} \mapsto \left\{ f_{\prod_{i\in I} IA_i}\left(X_0,\ldots,X_i,\ldots\right) \in \prod_{i\in I} IB_i \,\middle|\, \left(X_0,\ldots,X_i,\ldots\right) \in \dot{x}, i \in I \right\}$. Como $f_{\prod_{i\in I} IA_i}$ é injetiva, então, com uma argumentação análoga às utilizadas nas proposições 7.4.1 e 7.4.3, conclui-se que:

7.7.1 Proposição

$q\dot{f}_{\dot{\Pi A}}$ é estável e linear. ♦

A função de objetos no espaço coerente associado ao produto cartesiano de subteias $\dot{\Pi A}$ é definida como $\dot{f}_{\dot{\Pi A}} : \dot{\Pi A} \to \dot{\Pi B}$, tal que

$$\dot{x} \mapsto \begin{cases} \hat{q}\dot{f}_{\dot{\Pi A}}\left(\dot{x}\right) & \text{se } \dot{x} \in qtot\left(\dot{\Pi A}\right), \\ q\dot{f}_{\dot{\Pi A}}\left(\dot{x}\right) & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

onde $\hat{q}f_{\dot{\Pi A}}\left(\dot{x}\right)$ é o fecho indexado de $qf_{\dot{\Pi A}}\left(\dot{x}\right)$.

A restrição da função $\dot{f}_{\dot{\Pi A}}$ à família dos objetos quasi-totais é denominada de função fecho da quasi-função de objetos $q\dot{f}_{\dot{\Pi A}}$ restrita a $qtot(\dot{\Pi A})$, e será denotada simplesmente por $\hat{q}\dot{f}_{\dot{\Pi A}} \equiv \dot{f}_{\dot{\Pi A}}\Big|_{qtot} : qtot\left(\dot{\Pi A}\right) \to qtot\left(\dot{\Pi B}\right)$. Com uma argumentação análoga às utilizadas nas proposições 7.4.1 e 7.4.4, conclui-se que

7.7.2 Proposição

$\hat{q}\dot{f}_{\dot{\Pi A}}$ é linear em $qtot(\dot{\Pi A})$. ♦

Portanto, mesmo se a função básica f_A não é injetiva, é possível obter uma representação linear interna para a respectiva função de objetos $f_{\Pi A}$, conforme o resultado a seguir:

7.7.3 Corolário

O par $F = \left(q\dot{f}_{\dot{\Pi A}}, \hat{q}\dot{f}_{\dot{\Pi A}}\right)$ é uma representação linear interna para a função de aplicação unária $f_{\Pi A}$ se e somente se a respectiva quasi-função de objetos $qf_{\Pi A}$ é localmente linear. ♦

7.7.4 Exemplo

Reproduz-se agora o exemplo 7.6.4, aplicando-se porém uma representação baseada no espaço coerente associado ao produto cartesiano de subteias. Considera-se então a mesma função básica $f_A : A \to A$ não injetiva, assim como a mesma subdivisão do domínio básico $A = A_0 \cup A_1$, de tal forma que as restrições $f_{A_0} \equiv f_A|_{A_0} : A_0 \to B_0$, com $B_0 = f_A[A_0]$, $f_{A_1} \equiv f_A|_{A_1} : A_1 \to B_1$, $B_1 = f_A[A_1]$, sejam injetivas. Como a respectiva quasi-função de objetos é $qf_{\text{II}A}$ é localmente linear, então valem os resultados da seção 7.7.

Assim, pode-se obter um espaço coerente $\dot{\text{II}A} \equiv \left(Coh\left(IA_0 \times IA_1, \dot{\approx} \right), \subseteq \right)$, associado ao produto cartesiano das subteias $\left(IA_0, \approx_{A_0}\right)$ e $\left(IA_1, \approx_{A_1}\right)$, onde $\dot{\approx}$ é definida em 7.7, $\approx_{A_0}$ e $\approx_{A_1}$ são as restrições da relação de coerência induzida $\approx_{\leq_A}$ a A_i, $i = 0,1$, tal que $\text{II}A$ está imerso em $\dot{\text{II}A}$ [REI 97a]. Também pode-se definir um espaço coerente $\dot{\text{II}B} \equiv \left(Coh\left(IB_0 \times IB_1, \dot{\approx} \right), \subseteq \right)$ associado ao produto cartesiano das subteias $\left(IB_0, \approx_{B_0}\right)$ e $\left(IB_1, \approx_{B_1}\right)$.

Determina-se então a representação linear interna $F = \left(q\dot{f}_{\dot{\text{II}A}}, \hat{q}\dot{f}_{\dot{\text{II}A}} \right)$ para função de aplicação unária $f_{\text{II}A}$, conforme o corolário 7.7.3.

Considere agora um conjunto coerente $x = \{[a,b]\} \in \text{II}A$, cuja correspondente imagem pela função de objetos $f_{\text{II}A}$ em $\text{II}A$ é o conjunto coerente $f_{\text{II}A}(x) = \{[r,s]\} \in \text{II}A$. Pode-se obter uma representação para x em $\dot{\text{II}A}$ dada por $\dot{x} = \{([a,k],[k,b])\} \in \dot{\text{II}A}$, onde $[a,k] \in IA_0$ e $[k,b] \in IA_1$.

Como x não é um objeto quasi-total, a imagem de $\dot{x}$ pode ser calculada pela quasi-função de objetos $q\dot{f}_{\dot{\text{II}A}}$ (primeira componente da representação linear F) em $\dot{\text{II}A}$, obtendo-se o conjunto coerente

$$q\dot{f}_{\dot{\text{II}A}}\left(\dot{x}\right) = \left\{\left(f_{IA_0}([a,k]), f_{IA_1}([k,b])\right)\right\} = \{([r,w],[w',s])\} \in \dot{\text{II}B},$$

tal que $[r,w] \cup [w',s] = [r,s]$. Portanto, a ação da função representada $f_{\text{II}A}$ pôde ser capturada pela primeira componente de sua representação linear interna F. ♦

8 Representação Global: A Abordagem Categórica

A noção de adjunção [PIE 91] [ASP 91] é considerada uma das mais importantes idéias em teoria das categorias. Uma grande variedade de construções matemáticas são exemplos de adjunção.

Mostra-se, neste capítulo, que o processo de construção global determina uma adjunção entre duas subcategorias da categoria **SO2** dos sistemas ordenados de 2ª ordem: a subcategoria dos sistemas representados **SO2**$_{\mathbf{R}}$, que apresentam apenas uma estrutura, e a subcategoria das representações globais e seus subsistemas **SO2**$_{\mathbf{G}}$, que são bi-estruturadas.

Sejam $\mathsf{A} = (\Lambda_{\mathbb{A}};\Sigma_{\mathbb{A}})$, com $\Lambda_{\mathbb{A}} = \{\mathbb{A}, \wp(\mathbb{A})\}$, e $\mathsf{IA} = (\Lambda_{\mathbb{IA}^*};\Sigma_{\mathbb{IA}^*})$, com $\Lambda_{\mathbb{IA}^*} = \{\mathbb{IA}^*, \wp(\mathbb{IA}^*)\}$, onde $\mathbb{IA}^* = \mathbb{IA} \cup \{\mathbb{A}\}$ é o conjunto dos intervalos de elementos de $\mathbb{A}$ estendido, os sistemas ordenados de 2ª ordem da categoria **SO2**$_{\mathbf{R}}$, que devem ser representados globalmente, e que possuem somente uma estrutura.

Seja $(\Lambda_{\mathbb{II}A};\Sigma^{in}_{\mathbb{II}A};\Sigma^{ap}_{\mathbb{II}A})$, com $\Lambda_{\mathbb{II}A} = \{\mathbb{II}A, \wp(\mathbb{II}A)\}$ a representação global bi-estruturada de A e IA na categoria **SO2**$_{\mathbf{G}}$, obtida por um processo de construção global a partir de um sistema básico $\mathsf{A}_0 = (\Lambda_A;\Sigma_A)$, com $\Lambda_A = \{A, \wp(A)\}$ para $A \subseteq \mathbb{A}$.

Seja $\mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}} \equiv (\Lambda_{qtot(\mathbb{II}A)};\Sigma^{in}_{qtot(\mathbb{II}A)};\Sigma^{ap}_{qtot(\mathbb{II}A)})$, com $\Lambda_{qtot(\mathbb{II}A)} = \{qtot(\mathbb{II}A), \wp(qtot(\mathbb{II}A))\}$, o sistema de 2ª ordem bi-estruturado da categoria **SO2**$_{\mathbf{G}}$, relativo aos dos objetos quasi-totais de $(\Lambda_{\mathbb{II}A};\Sigma^{in}_{\mathbb{II}A};\Sigma^{ap}_{\mathbb{II}A})$.

8.1 Os Morfismos da Adjunção

Nesta seção são introduzidos os principais morfismos que serão trabalhados com a adjunção.

Para a prova dos homomorfismos, considera-se a estrutura $\Sigma_{\mathbb{X}} \equiv (\leq_{\mathbb{X}}, *_{\mathbb{X}}, F_{\mathbb{X}})$, onde $\mathbb{X}$ é o universo de um sistema de 2ª ordem X considerado conforme o caso em questão, $\leq_{\mathbb{X}}$ é a relação de posição definida em $\mathbb{X}$, $*_{\mathbb{X}} : \mathbb{X} \otimes \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ representa um conjunto de operações algébricas para um produto adequado $\otimes$, e $F_{\mathbb{X}}$ é uma família de funções unárias $f_{\mathbb{X}} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$.

Para análise das provas das proposições, veja o exemplo 7.1.3 para as definições de operações intervalares, que também podem ser encontradas em [DIM 96a] [DIM 97a] [MOO 79]. A definição de funções intervalares também está no exemplo 7.1.3, ou veja [REI 97a] [MOO 79]. No exemplo 7.1.4 está a definição da relação de posição intervalar que também se encontra em [DIM 96a] [DIM 97a]. Veja o exemplo 7.1.8 ou [DIM 96a] [DIM 97a] para a definição de operações de objetos de espaços coerentes. No exemplo 7.1.7 ou em [REI 97a] procure a definição de funções de objetos de espaços coerentes. A definição da relação de posição para objetos está no exemplo 7.1.9 e também pode ser encontrada em [DIM 96a] [DIM 97a].

8.1.1 Proposição

Seja $f: \mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A}) \to \mathbb{IA}^* \cup \wp(\mathbb{IA}^*)$, tal que

$$f(a) = \begin{cases} [a,a] & \text{se } a \in \mathbb{A}; \\ \{[w,w] | w \in a\} & \text{se } a \in \wp(\mathbb{A}). \end{cases}$$

Então f é homomorfismo forte $f: \mathsf{A} \to \mathsf{IA}$, isto é, f é um morfismo da categoria **SO2**.

prova:

É imediato que f é bem definida. Agora, para qualquer $a,a' \in \mathbb{A}$, $g_{\mathbb{A}} \in F_{\mathbb{A}}$ e $g_{\mathbb{IA}^*} \in F_{\mathbb{IA}^*}$, tem-se que

$$f(a *_{\mathbb{A}} a') = [a *_{\mathbb{A}} a', a *_{\mathbb{A}} a'] = [a,a] *_{\mathbb{IA}^*} [a,a'] = f(a) *_{\mathbb{IA}^*} f(a'),$$

$$f(g_{\mathbb{A}}(a)) = [g_{\mathbb{A}}(a), g_{\mathbb{A}}(a)] = g_{\mathbb{IA}^*}([a,a]) = g_{\mathbb{IA}^*}(f(a))$$

e $a \leq_{\mathbb{A}} a'$ se e somente se $[a,a] \leq_{\mathbb{IA}^*} [a',a']$ se e somente se $f(a) \leq_{\mathbb{IA}^*} f(a')$.

A prova para outros elementos da estrutura não trabalhados aqui é similar.

Pela definição 5.3.1, segue que $f: \mathsf{A} \to \mathsf{IA}$ é um homomorfismo forte, e, portanto, é um morfismo da categoria **SO2**, conforme a definição 6.1.2. ♦

8.1.2 Proposição

Seja $(\Lambda_{\mathbb{I}IA}; \Sigma_{\mathbb{I}IA})$, com $\Lambda_{\mathbb{I}IA} = \{\mathbb{I}IA, \wp(\mathbb{I}IA)\}$, o sistema obtido quando se desconsidera a estrutura de informação do espaço coerente bi-estruturado $(\Lambda_{\mathbb{I}IA}; \Sigma^{in}_{\mathbb{I}IA}; \Sigma^{ap}_{\mathbb{I}IA})$. Seja $im_{\mathsf{A}}: \mathbb{A} \cup \wp(\mathbb{A}) \to \mathbb{I}IA \cup \wp(\mathbb{I}IA)$, tal que

$$im_{\mathsf{A}}(a) = \begin{cases} x_a & \text{se } a \in \mathbb{A}; \\ \{x_w | w \in a\} & \text{se } a \in \wp(\mathbb{A}), \end{cases}$$

onde $x_r = \{[a_1,a_2] \in IA | a_1 \leq r \leq a_2\}$ e IA é o conjunto de intervalos de elementos básicos. Então im_{A} é uma imersão $im_{\mathsf{A}}: \mathsf{A} \,\tilde{\underline{\Diamond}}\, (\Lambda_{\mathbb{I}IA}; \Sigma_{\mathbb{I}IA})$, ou seja, im_{A} é um morfismo da categoria **SO2**.

prova:

É imediato que im_{A} é bem definida. Para qualquer $a,a' \in \mathbb{A}$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
im_{\mathsf{A}}(a) *_{\amalg A} im_{\mathsf{A}}(a') &= x_a *_{\amalg A} x_{a'} \\
&= \{[a_1, a_2] \in IA | a_1 \leq a \leq a_2\} *_{\amalg A} \{[a'_1, a'_2] \in IA | a'_1 \leq a' \leq a'_2\} \\
&= \wedge \{[a_1, a_2] *_{IA} [a'_1, a'_2] \in IA | a_1 \leq a \leq a_2, a'_1 \leq a' \leq a'_2\} \\
&= \{[b_1, b_2] \in IA | b_1 \leq a *_{\mathbb{A}} a' \leq b_2\} \\
&= x_{a *_{\mathbb{A}} a'} \\
&= im_{\mathsf{A}}(a *_{\mathbb{A}} a'),
\end{aligned}
$$

onde

$$
b_1 = min\{b *_A b' \in A | b \in [a_1, a_2], b' \in [a'_1, a'_2]\},
$$

$$
b_2 = max\{b *_A b' \in A | b \in [a_1, a_2], b' \in [a'_1, a'_2]\}.
$$

Além disso, para todo $a \in \mathbb{A}$, $g_{\mathbb{A}} \in F_{\mathbb{A}}$ e $g_{\amalg A} \in F_{\amalg A}$. Tem-se que

$$
\begin{aligned}
g_{\amalg A}(im_{\mathsf{A}}(a)) &= g_{\amalg A}(x_a) \\
&= g_{\amalg A}(\{[a_1, a_2] \in IA | a_1 \leq a \leq a_2\}) \\
&= \wedge \{g_{IA}([a_1, a_2]) \in IA | a_1 \leq a \leq a_2\} \\
&= \{[b_1, b_2] \in IA | b_1 \leq g_{\mathbb{A}}(a) \leq b_2\} \\
&= x_{g_{\mathbb{A}}(a)} \\
&= im_{\mathsf{A}}(g_{\mathbb{A}}(a)),
\end{aligned}
$$

onde $b_1 = min\{g_A(b) \in A | b \in [a_1, a_2]\}$, $b_2 = max\{g_A(b) \in A | b \in [a_1, a_2]\}$.

Agora considere $a, a' \in \mathbb{A}$ e suponha que $a \leq_{\mathbb{A}} a'$. Então ou

$$
\text{(i) } \{[a_1, a_2] \in IA | a_1 \leq a \leq a_2\} = \{[a'_1, a'_2] \in IA | a'_1 \leq a' \leq a'_2\}
$$

ou (ii) existem $X \in \{[a_1, a_2] \in IA | a_1 \leq a \leq a_2\}$ e $X' \in \{[a'_1, a'_2] \in IA | a'_1 \leq a' \leq a'_2\}$ tais que $X <_{IA} X'$. Neste caso, ocorre que ou (i) $x_a = x_{a'}$ ou (ii) $x_a <_{\amalg A} x_{a'}$. Portanto, tem-se que $im_{\mathsf{A}}(a) \leq_{\amalg A} im_{\mathsf{A}}(a')$. De forma análoga mostra-se que se $im_{\mathsf{A}}(a) \leq_{\amalg A} im_{\mathsf{A}}(a')$ então $a \leq_{\mathbb{A}} a'$.

A prova para outros elementos da estrutura não trabalhados aqui é similar.

Pela definição 5.3.1, segue que $im_{\mathsf{A}}: \mathsf{A} \to (\amalg A, \Sigma_{\amalg A})$ é um homomorfismo forte, e, portanto, é um morfismo da categoria **SO2**, conforme a definição 6.1.2.

Observe que é imediato que toda função im_{A} é injetiva, e, portanto, $im_{\mathsf{A}}: \mathsf{A} \tilde{\underline{\Diamond}} (\Lambda_{\amalg A}; \Sigma_{\amalg A})$ é uma imersão.♦

8.1.3 Proposição

Seja $f\#:\text{II}A \cup \wp(\text{II}A) \to qtot(\text{II}A) \cup \wp(qtot(\text{II}A))$, tal que

$$f\#(x) = \begin{cases} \hat{x} & \text{se } x \in \text{II}A; \\ \{\hat{w} \mid w \in x\} & \text{se } x \in \wp(\text{II}A), \end{cases}$$

onde $\hat{x}$ é o fecho indexado de um conjunto coerente x definido em 3.3.7. Então $f\#$ é um homomorfismo forte $f\#$: $(\Lambda_{\text{II}A};\Sigma^{in}_{\text{II}A};\Sigma^{ap}_{\text{II}A}) \to \text{qtot}_{\text{II}A}$, ou seja, $f\#$ é um morfismo da categoria **SO2**.

prova:

Seja i a função de índice de conjuntos coerentes definida em 3.3.2 e IA o conjunto dos intervalos de elementos básicos.

Mostra-se que $f\#$ é bem definida. De fato, pela proposição 3.3.8, para todo $x \in \text{II}A$, $f\#(x) = \hat{x} \in qtot(\text{II}A)$. Em particular, tem-se que $\hat{\varnothing} = \varnothing$. Agora, considere $x_1, x_2 \in \text{II}A$ e suponha $f(x_1) \neq f(x_2)$. Isto significa que $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$, e, portanto, $i(x_1) \neq i(x_2)$. Então, pode-se pensar que ou (i) existe $X_1 \in x_1$ tal que $X_1 \notin x_2$, ou (ii) existe $X_2 \in x_2$ tal que $X_2 \notin x_1$. Em qualquer um dos casos tem-se que $x_1 \neq x_2$. Resultado análogo obtém-se para as outras situações.

Então, para qualquer $x,y \in \text{II}A$, tem-se que

$$\begin{aligned} & f\#(x) *_{qtot(\text{II}A)} f\#(y) \\ & = \hat{x} *_{qtot(\text{II}A)} \hat{y} \\ & = \wedge \{X *_{IA} Y \in IA \mid X \in \hat{x}, Y \in \hat{y}\} \\ & = \wedge \{X *_{IA} Y \in IA \mid (\exists d \in \text{II}A, x \subseteq d, i(x) = i(d), X \in d) \wedge (\exists d' \in \text{II}A, y \subseteq d, i(y) = i(d), Y \in d')\}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} & \{X *_{IA} Y \in IA \mid X \in x, Y \in y\} \\ & \subseteq \{X *_{IA} Y \in IA \mid (\exists d \in \text{II}A, x \subseteq d, i(x) = i(d), X \in d) \wedge (\exists d' \in \text{II}A, y \subseteq d, i(y) = i(d), Y \in d')\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & i(\{X *_{IA} Y \in IA \mid X \in x, Y \in y\}) \\ & = i(\{X *_{IA} Y \in IA \mid (\exists d \in \text{II}A, x \subseteq d, i(x) = i(d), X \in d) \wedge (\exists d' \in \text{II}A, y \subseteq d, i(y) = i(d), Y \in d')\}), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} & \wedge \{X *_{IA} Y \in IA \mid (\exists d \in \text{II}A, x \subseteq d, i(x) = i(d), X \in d) \wedge (\exists d' \in \text{II}A, y \subseteq d, i(y) = i(d), Y \in d')\} \\ & = \wedge \{X *_{IA} Y \in IA \mid X \in x, Y \in y\}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
&f\#(x)*_{qtot(\amalg A)} f\#(y)\\
&=\wedge\left\{X*_{IA} Y \in IA|\left(\exists d \in \amalg A, x\subseteq d, i(x)=i(d), X\in d\right)\wedge\left(\exists d' \in \amalg A, y\subseteq d, i(y)=i(d), Y\in d'\right)\right\}\\
&=\wedge\left\{X*_{IA} Y \in IA| X\in x, Y\in y\right\}\\
&=\wedge\left(x*_{\amalg A} y\right)\\
&=f\#\left(x*_{\amalg A} y\right).
\end{aligned}
$$

Sejam agora $x \in \amalg A$, $g_{\amalg A} \in F_{\amalg A}$ e $g_{qtot(\amalg A)} \in F_{qtot(\amalg A)}$. Tem-se que

$$
\begin{aligned}
g_{qtot(\amalg A)}(f\#(x)) &= g_{qtot(\amalg A)}(\hat{x})\\
&=\wedge\left\{g_{IA}(X)\in IA| X\in\hat{x}\right\}\\
&=\wedge\left\{g_{IA}(X)\in IA|\exists d \in \amalg A, x\subseteq d, i(x)=i(d), X\in d\right\}.
\end{aligned}
$$

Como

$$\left\{g_{IA}(X)\in IA| X\in x\right\}\subseteq\left\{g_{IA}(X)\in IA|\exists d \in \amalg A, x\subseteq d, i(x)=i(d), X\in d\right\}$$

e

$$i\left(\left\{g_{IA}(X)\in IA| X\in x\right\}\right)=i\left(\left\{g_{IA}(X)\in IA|\exists d \in \amalg A, x\subseteq d, i(x)=i(d), X\in d\right\}\right),$$

então

$$\wedge\left\{g_{IA}(X)\in IA|\exists d \in \amalg A, x\subseteq d, i(x)=i(d), X\in d\right\}=\wedge\left\{g_{IA}(X)\in IA| X\in x\right\},$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
g_{qtot(\amalg A)}(f\#(x)) &=\wedge\left\{g_{IA}(X)\in IA|\exists d \in \amalg A, x\subseteq d, i(x)=i(d), X\in d\right\}\\
&=\wedge\left\{g_{IA}(X)\in IA| X\in x,\right\}\\
&=\wedge\left(g_{\amalg A}(x)\right)\\
&=f\#\left(g_{\amalg A}(x)\right).
\end{aligned}
$$

Considere $x,y \in \amalg A$ e suponha que $x \leq_{\amalg A} y$. Então tem-se que ou (i) $x = y$ ou (ii) existe $[a_1,a_2]\in x$, $[a_1',a_2']\in y$, tais que $[a_1,a_2] <_{IA} [a_1',a_2']$. Isto significa que ou (i) $\hat{x}=\hat{y}$ ou (ii) existe $[a_1,a_2]\in\hat{x}$, $[a_1',a_2']\in\hat{y}$, tais que $[a_1,a_2] <_{IA} [a_1',a_2']$, e, portanto, $\hat{x}\leq_{qtot(\amalg A)}\hat{y}$, ou seja, $f\#(x)\leq_{qtot(\amalg A)} f\#(y)$. De forma análoga mostra-se que se $f\#(x)\leq_{qtot(\amalg A)} f\#(y)$ então $x\leq_{\amalg A} y$.

A prova para outros elementos da estrutura não trabalhados aqui é similar.

Pela definição 5.3.1, segue que *f*#: $\left(\Lambda_{\amalg A};\Sigma^{in}_{\amalg A};\Sigma^{ap}_{\amalg A}\right) \rightarrow$ qtot$_{\amalg A}$, é um homomorfismo forte, e, portanto, é um morfismo da categoria **SO2**, conforme a definição 6.1.2. ♦

Observa-se que se o espaço coerente bi-estruturado $\left(\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma_{\mathbb{I}A}^{in};\Sigma_{\mathbb{I}A}^{ap}\right)$ é a representação global de do sistema ordenado de 2ª ordem A, então, pela definição 7.2.3, tem-se que $\mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}}$ é Σ^{ap}-isomorfo (definição 5.3.3) a IA. Isto significa que existe um Σ^{ap}-isomorfismo ϕ: $\mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}} \equiv_{ap} \mathsf{IA}$, definido por

$$\phi: qtot(\mathbb{I}A) \cup \wp(qtot(\mathbb{I}A)) \to \mathbb{IA}^* \cup \wp(\mathbb{IA}^*),$$

tal que

$$x \mapsto \begin{cases} ir(x) & \text{se } x \in qtot(\mathbb{I}A); \\ \{ir(w) \in \mathbb{IA}^* \mid w \in x\} & \text{se } x \in \wp(qtot(\mathbb{I}A)), \end{cases}$$

que identifica cada objeto quasi-total $x \in qtot(\mathbb{I}A)$ com seu índice real (definição 7.2.1) $ir(x) \in \mathbb{IA}^*$. Então, é válido que $x \equiv ir(x) \in \mathbb{IA}^*$, para todo $x \in qtot(\mathbb{I}A)$. Segue que:

8.1.4 Proposição

Seja $\left(\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma_{\mathbb{I}A}\right)$, com $\Lambda_{\mathbb{I}A} = \{\mathbb{I}A, \wp(\mathbb{I}A)\}$, o sistema obtido quando se desconsidera a estrutura de informação do espaço coerente bi-estruturado $\left(\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma_{\mathbb{I}A}^{in};\Sigma_{\mathbb{I}A}^{ap}\right)$. Seja $\tilde{f}\#: \mathbb{I}A \cup \wp(\mathbb{I}A) \to \mathbb{IA}^* \cup \wp(\mathbb{IA}^*)$, tal que $\tilde{f}\# = \phi \circ f\#$, a função correspondente a $f\#$, definida em 8.1.3 para $\left(\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma_{\mathbb{I}A}^{in};\Sigma_{\mathbb{I}A}^{ap}\right)$. Então $\tilde{f}\#$ é um homomorfismo forte $\tilde{f}\#: \left(\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma_{\mathbb{I}A}\right) \to \mathsf{IA}$, ou seja, $\tilde{f}\#$ é um morfismo da categoria **SO2**.

prova:

É imediato que $\tilde{f}\#$ é bem definida. Observe que ϕ e $f\#$ são homomorfismos fortes de sistemas ordenados de 2ª ordem. Então, para qualquer $x,y \in \mathbb{I}A$, tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{f}\#(x *_{\mathbb{I}A} y) &= (\phi \circ f\#)(x *_{\mathbb{I}A} y) \\ &= \phi(f\#(x *_{\mathbb{I}A} y)) \\ &= \phi(f\#(x) *_{qtot(\mathbb{I}A)} f\#(y)) \\ &= \phi(f\#(x)) *_{\mathbb{IA}^*} \phi(f\#(y)) \\ &= (\phi \circ f\#)(x) *_{\mathbb{IA}^*} (\phi \circ f\#)(y) \\ &= \tilde{f}\#(x) *_{\mathbb{IA}^*} \tilde{f}\#(y). \end{aligned}$$

Sejam agora $x \in \mathbb{I}A$, $g_{\mathbb{I}A} \in F_{\mathbb{I}A}$ e $g_{\mathbb{IA}^*} \in F_{\mathbb{IA}^*}$. Tem-se que

$$\begin{aligned}\tilde{f}\#(g_{\mathbb{I}A}(x)) &= (\phi \circ f\#)(g_{\mathbb{I}A}(x)) \\ &= \phi(f\#(g_{\mathbb{I}A}(x))) \\ &= \phi(g_{qtot(\mathbb{I}A)}(f\#(x))) \\ &= g_{\mathbb{IA}^*}(\phi((f\#(x)))) \\ &= g_{\mathbb{IA}^*}(\phi \circ f\#)(x) \\ &= g_{\mathbb{IA}^*}(\tilde{f}\#(x)).\end{aligned}$$

Considere $x,y \in \mathbb{I}A$. Então, se $x \leq_{\mathbb{I}A} y$ tem-se que $f\#(x) \leq_{qtot(\mathbb{I}A)} f\#(y)$, e, portanto, $\phi(f\#(x)) \leq_{\mathbb{IA}^*} \phi(f\#(y))$, ou seja, $(\phi \circ f\#)(x) \leq_{\mathbb{IA}^*} (\phi \circ f\#)(y)$. Conclui-se que $\tilde{f}\#(x) \leq_{\mathbb{IA}^*} \tilde{f}\#(y)$. De forma análoga mostra-se que se $\tilde{f}\#(x) \leq_{\mathbb{IA}^*} \tilde{f}\#(y)$ então $x \leq_{\mathbb{I}A} y$.

A prova para outros elementos da estrutura não trabalhados aqui é similar.

Pela definição 5.3.1, segue que $\tilde{f}\#: (\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma_{\mathbb{I}A}) \to \mathsf{IA}$, é um homomorfismo forte, e, portanto, é um morfismo da categoria **SO2**, conforme a definição 6.1.2. ♦

8.2 A Definição da Adjunção

Sejam **SO2$_R$** a subcategoria de **SO2** cujos objetos são sistemas representados, com somente uma estrutura, e **SO2$_G$** a subcategoria de **SO2** cujos objetos são as representações globais e seus subsistemas, que são sistemas bi-estruturados.

8.2.1 Proposição

Considere os objetos A e IA de **SO2$_R$** e seja $(\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma_{\mathbb{I}A})$, com $\Lambda_{\mathbb{I}A} = \{\mathbb{I}A, \wp(\mathbb{I}A)\}$, o objeto de **SO2$_R$** obtido quando se desconsidera a estrutura de informação do espaço coerente bi-estruturado $(\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma^{in}_{\mathbb{I}A};\Sigma^{ap}_{\mathbb{I}A})$. Seja $f:\mathsf{A} \to \mathsf{IA}$ o morfismo definido em 8.1.1 e $im_{\mathsf{A}}:\mathsf{A} \to (\mathbb{I}A, \Sigma_{\mathbb{I}A})$ a imersão definida em 8.1.2. Então existe exatamente um morfismo $\tilde{f}\#: (\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma_{\mathbb{I}A}) \to \mathsf{IA}$ para o qual o diagrama da figura 8.1 comuta.
prova:

Sejam $\hat{x}$ o fecho indexado de um conjunto coerente x definido em 3.3.7 e $\mathbb{I}A$ o conjunto de intervalos de elementos básicos.

Considere o Σ^{ap}-isomorfismo $\phi: \mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}} \equiv_{ap} \mathsf{IA}$ (definição 7.2.3) e o homomorfismo forte de sistemas ordenados de 2ª ordem $\tilde{f}\#: (\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma_{\mathbb{I}A}) \to \mathsf{IA}$ (proposição 8.1.4), dado por $\tilde{f}\#: \mathbb{I}A \cup \wp(\mathbb{I}A) \to \mathbb{IA}^* \cup \wp(\mathbb{IA}^*)$ tal que $\tilde{f}\# = \phi \circ f\#$, onde $f\#: \mathbb{I}A \cup \wp(\mathbb{I}A) \to qtot(\mathbb{I}A) \cup \wp(qtot(\mathbb{I}A))$ (proposição 8.1.3), é dada por

$$f\#(x)=\begin{cases}\hat{x} & \text{se } x\in \mathrm{II}A;\\ \{\hat{w}|w\in x\} & \text{se } x\in \wp(\mathrm{II}A).\end{cases}$$

Seja $im_{\mathsf{A}}:\mathsf{A}\,\widetilde{\underline{\odot}}\,(\Lambda_{\mathrm{II}A};\Sigma_{\mathrm{II}A})$ a imersão (proposição 8.1.2) definida por $im_{\mathsf{A}}:\mathbb{A}\cup\wp(\mathbb{A})\to \mathrm{II}A\cup\wp(\mathrm{II}A)$, tal que

$$im_{\mathsf{A}}(a)=\begin{cases}x_a & \text{se } a\in\mathbb{A};\\ \{x_w|w\in a\} & \text{se } a\in\wp(\mathbb{A}),\end{cases}$$

com $x_r=\{[a_1,a_2]\in IA|a_1\le r\le a_2\}$.

Considere o homomorfismo forte $f:\mathsf{A}\to\mathsf{IA}$ (proposição 8.1.1) definido como $f:\mathbb{A}\cup\wp(\mathbb{A})\to\mathbb{IA}^{\bullet}\cap\wp(\mathbb{IA}^{\bullet})$, tal que

$$f(a)=\begin{cases}[a,a] & \text{se } a\in\mathbb{A};\\ \{[w,w]|w\in a\} & \text{se } a\in\wp(\mathbb{A}).\end{cases}$$

Então, para todo $a\in\mathbb{A}$, tem-se que

$$\begin{aligned}(\tilde{f}\#\circ im_{\mathsf{A}})(a)&=\tilde{f}\#(im_{\mathsf{A}}(a))\\&=\tilde{f}\#(x_a)\\&=(\phi\circ f\#)(x_a)\\&=\phi(f\#(x_a))\\&=\phi(x_a)\\&=ir(x_a)\\&=[a,a]\\&=f(a),\end{aligned}$$

ou seja, o diagrama da figura 8.1 comuta.

$$\begin{tikzcd}\mathsf{A} \arrow[r, "im_{\mathsf{A}}"] \arrow[dr, "f"'] & (\Lambda_{\mathrm{II}A};\Sigma_{\mathrm{II}A}) \arrow[d, dotted, "\tilde{f}\#"] \\ & \mathsf{IA}\end{tikzcd}$$

FIGURA 8.1 - Diagrama Comutativo da Proposição 8.2.1

Mostra-se agora a unicidade de $\tilde{f}\#$. Assuma que exista um morfismo f': $(\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma_{\mathbb{I}A}) \to \mathsf{IA}$ tal que o diagrama da figura 8.1 também comuta. Então tem-se que $(f' \circ im_{\mathsf{A}})(a) = f(a)$, para todo $a \in \mathbb{I}A$. Como, para todo $a \in \mathbb{I}A$, $(\tilde{f}\# \circ im_{\mathsf{A}})(a) = f(a)$, segue que $(f' \circ im_{\mathsf{A}})(a) = (\tilde{f}\# \circ im_{\mathsf{A}})(a)$, ou seja, $f'(im_{\mathsf{A}}(a)) = \tilde{f}\#(im_{\mathsf{A}}(a))$, e, portanto, $f' = \tilde{f}\#$. Portanto, $\tilde{f}\#$ é única.

De forma similar mostram-se os mesmos resultados para $a \in \wp(\mathbb{I}A)$. ♦

Sejam S_A o functor de subsistema relativo ao conjunto básico $A \subseteq \mathbb{A}$ (definição 6.2.3), $ev^{\mathsf{IA}}_{[\,]}$ o functor de [ ]-evolução regulada pelo próprio sistema evoluído IA (definições 6.2.6 e 7.1.2), $ev^{\mathsf{qtot}_{\mathsf{IA}}}_{Coh}$ o functor de *Coh*-evolução regulada pelo subsistema qtot dos objetos quasi-totais (definições 6.2.6 e 7.1.6). Seja A o conjunto básico e IA o conjunto de intervalos de elementos básicos.

Considere o functor $Glob \equiv \left(\left(ev^{\mathsf{qtot}_{\mathsf{IA}}}_{Coh} \circ ev^{\mathsf{IA}}_{[\,]} \circ S_A\right)\_\right)$: $\mathbf{SO2_R} \to \mathbf{SO2_G}$, que associa cada objeto A da categoria $\mathbf{SO2_R}$ à sua representação global $(\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma^{in}_{\mathbb{I}A};\Sigma^{ap}_{\mathbb{I}A})$ na categoria $\mathbf{SO2_G}$, obtida por um processo de construção global, e cada morfismo h: $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ de $\mathbf{SO2_R}$ ao morfismo $Glob(h)$: $(\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma^{in}_{\mathbb{I}A};\Sigma^{ap}_{\mathbb{I}A}) \to (\Lambda_{\mathbb{I}B};\Sigma^{in}_{\mathbb{I}B};\Sigma^{ap}_{\mathbb{I}B})$ de $\mathbf{SO2_G}$, tal que

$$Glob(h) = \left(ev^{\mathsf{qtot}_{\mathsf{IA}}}_{Coh} \circ ev^{\mathsf{IA}}_{[\,]} \circ S_A\right)(h),\ x \mapsto \{h_{IA}(X) \in IB \mid X \in x\},$$

sendo $h_{IA}: IA \to IB$ a função intervalar $X \mapsto \{h_A(a) \in B \mid a \in A\}$, onde h_A é a restrição de h ao conjunto básico A. Veja figura 8.2.

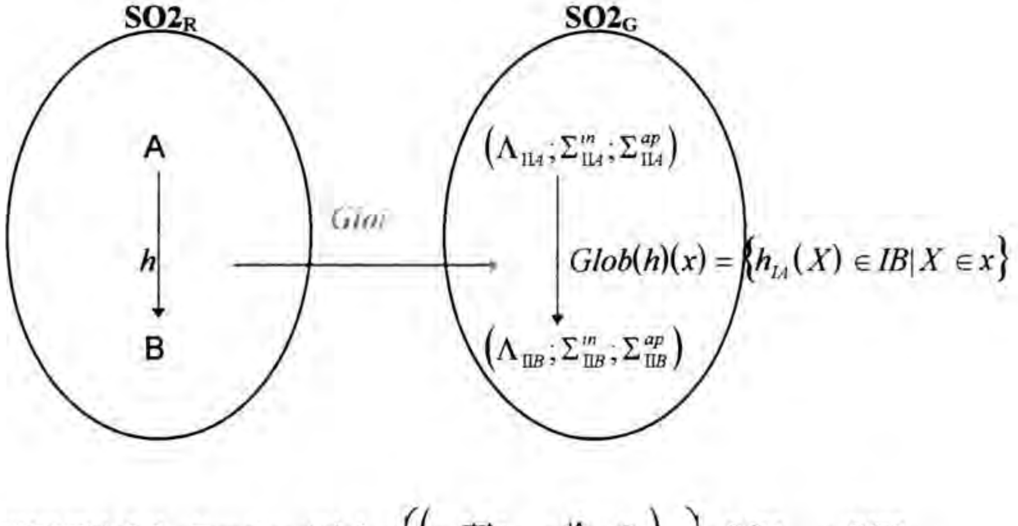


FIGURA 8.2 - Functor $Glob \equiv \left(\left(ev^{\mathsf{qtot}_{\mathsf{IA}}}_{Coh} \circ ev^{\mathsf{IA}}_{[\,]} \circ S_A\right)\_\right)$: $\mathbf{SO2_R} \to \mathbf{SO2_G}$

Considere também o functor U: $\mathbf{SO2_G} \to \mathbf{SO2_R}$, que associa cada sistema bi-estruturado $(\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma^{in}_{\mathbb{I}A};\Sigma^{ap}_{\mathbb{I}A})$ da categoria $\mathbf{SO2_G}$ ao correspondente sistema $(\Lambda_{\mathbb{I}A};\Sigma_{\mathbb{I}A})$, com somente uma estrutura, da categoria **SO2**$_R$, e cada morfismo $l:\left(\Lambda_{IIA};\Sigma^{in}_{IIA};\Sigma^{ap}_{IIA}\right)\to\left(\Lambda_{IIB};\Sigma^{in}_{IIB};\Sigma^{ap}_{IIB}\right)$ **SO2**$_G$, ao correspondente morfismo $U(l):\left(\Lambda_{IIA};\Sigma_{IIA}\right)\to\left(\Lambda_{IIB};\Sigma_{IIB}\right)$ de **SO2**$_R$, tal que $U(l)=l$. Veja figura 8.3.

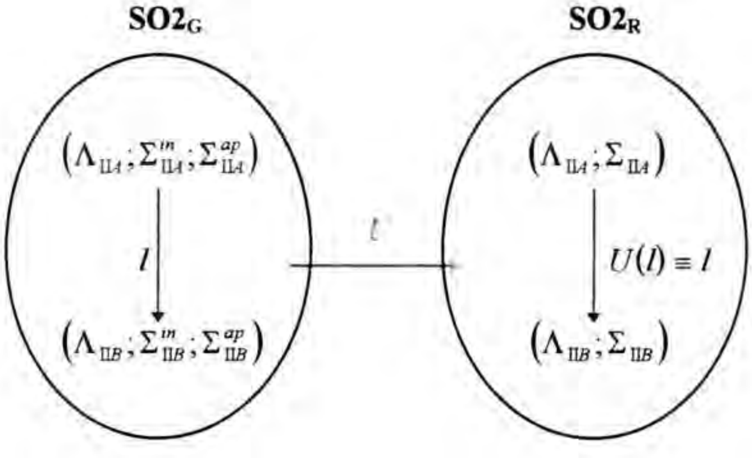


FIGURA 8.3 - Functor U: **SO2**$_G \to$ **SO2**$_R$

Considere a transformação natural $\eta: I_{\mathbf{SO2}_R} \xrightarrow{\bullet} (U\circ Glob)$, dada por uma família de imersões $\eta_A \equiv im_A: A \to \left(\Lambda_{IIA};\Sigma_{IIA}\right)$, definidas em 8.1.2, tal que

$$im_A(a)=\begin{cases} x_a & \text{se } a\in\mathbb{A};\\ \{x_w \mid w\in a\} & \text{se } a\in\wp(\mathbb{A}),\end{cases}$$

onde $x_r = \left\{[a_1,a_2]\in IA \mid a_1\le r\le a_2\right\}$.

Agora observe o diagrama da figura 8.4.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A \equiv im_A"] \arrow[dr, "f"'] & U(Glob(A)) = \left(\Lambda_{IIA};\Sigma_{IIA}\right) \arrow[d, dotted, "U(f\#)=\tilde{f}\#"] \\ & U\left(\mathrm{qtot}_{IIA}\right) \equiv IA \end{tikzcd}$$

FIGURA 8.4 - Diagrama Comutativo do teorema 8.2.2

Da proposição 8.2.1 segue que:

8.2.2 Teorema

Glob, U e η determinam uma adjunção de $\mathbf{SO2}_R$ para $\mathbf{SO2}_G$. ♦

Diz-se que $(Glob,U)$ é um par adjuntor de functores; *Glob* é o adjunto à esquerda de U e U é o adjunto à direta de *Glob*. A transformação natural η é a unidade da adjunção. O morfismo $f\#$, que corresponde ao morfismo f que leva cada elemento a do universo de A ao intervalo $[a,a]$ do universo de IA, é uma extensão homomórfica de f, porque a função associada $f\#$ coincide com f quando aplicada em "elementos do universo de A", isto é, $f\#(x_a) \equiv f(a)$. O diagrama completo da adjunção está na figura 8.5.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{A} \arrow[r, "\eta_{\mathsf{A}} \equiv im_{\mathsf{A}}"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, bend left, "Glob"] & U(Glob(\mathsf{A})) = (\Lambda_{\mathrm{IIA}};\Sigma_{\mathrm{IIA}}) \arrow[d, dotted, "U(f\#) = \tilde{f}\#"] & Glob(\mathsf{A}) = (\Lambda_{\mathrm{IIA}};\Sigma^{in}_{\mathrm{IIA}};\Sigma^{ap}_{\mathrm{IIA}}) \arrow[l, "U"'] \arrow[d, dotted, "f\#"] \\
 & U(\mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}}) \equiv \mathsf{IA} & \mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}} \arrow[l, "U"']
\end{tikzcd}$$

FIGURA 8.5 - Diagrama Completo da Adjunção

Observe que a adjunção determinada pelo teorema 8.2.2 garante o isomorfismo

$$\varphi\colon \mathbf{SO2}_G(Glob(\mathsf{A}),\ \mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}}) \cong \mathbf{SO2}_R(\mathsf{A},\ U(\mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}}) \equiv \mathsf{IA})$$

que é natural em A e $\mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}}$, isto é, é uma transformação natural entre os conjuntos de morfismos $\mathbf{SO2}_G(Glob(\_),\_)$ e $\mathbf{SO2}_R(\_,U(\_))$ que preserva a estrutura enquanto os argumentos A e $\mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}}$ variam e que é uma bijeção, para todo A e $\mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}}$. Esta bijeção pode ser apresentada esquematicamente por:

$$\frac{\mathsf{A} \to U(\mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}}) \equiv \mathsf{IA}}{Glob(\mathsf{A}) \to \mathsf{qtot}_{\mathsf{IIA}}}$$

Assim, a adjunção do teorema 8.2.2 pode ser denotada por $\langle Glob, U, \varphi\rangle$ e representada graficamente pelo diagrama da figura 8.6.

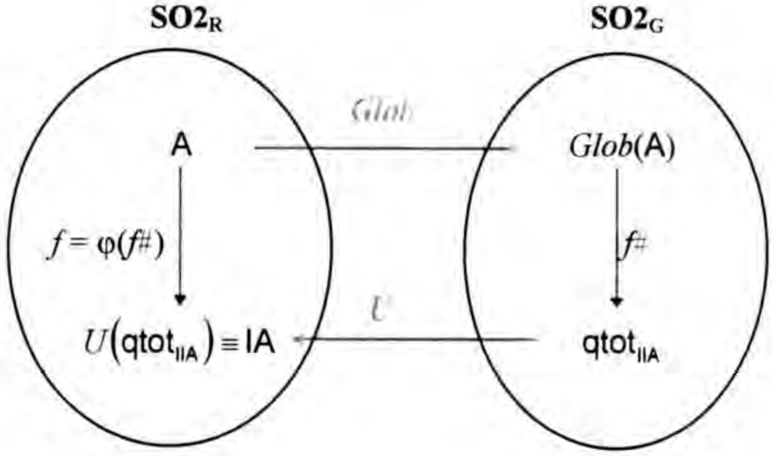


FIGURA 8.6 - Diagrama da Adjunção $\langle Glob, U, \varphi \rangle$

9 O Processo de Construção Global de $\mathrm{II}Q$

O objetivo deste capítulo é aplicar a metodologia desenvolvida para obter o espaço coerente bi-estruturado $\mathrm{II}Q$, que, como será mostrado no capítulo 10, se constitui uma representação global (definição 7.2.3) construtiva do sistema dos números reais $\mathsf{R} = (\Lambda_{\mathbb{R}};\Sigma_{\mathbb{R}})$, com $\Lambda_{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R}, \wp(\mathbb{R})\}$, e o sistema dos intervalos reais estendido $\mathsf{IR} = (\Lambda_{\mathbb{IR}^*};\Sigma_{\mathbb{IR}^*})$, com $\Lambda_{\mathbb{R}^*} = \{\mathbb{IR}^*, \wp(\mathbb{IR}^*)\}$, $\mathbb{IR}^* = \mathbb{IR} \cup \{\mathbb{R}\}$ e $\Sigma \equiv (\leq, *, F)$, onde $\leq$ é a relação de posição, $*$ representa o conjunto de operações aritméticas e F é a família de funções elementares unárias.

As funções elementares foram primeiramente estudadas por Reiser et al. em [REI 96a] [REI 97a] [REI 97b] [REI 97c] [REI 97d]. Também serão estudados o valor absoluto e a distância, que serão introduzidos nos capítulos 11 e 12. A caracterização topológica será apresentada nos capítulos 16 e 17.

Considere como sistema básico o subsistema dos números racionais $\mathsf{Q} = (\Lambda_Q;\Sigma_Q)$, com $\Lambda_Q = \{Q, \wp(Q)\}$, onde a estrutura básica $\Sigma_Q \equiv (\leq_Q, *_Q, F_Q)$ é obtida por restrição de $\Sigma_{\mathbb{R}}$ a Q tal que Σ_Q seja bem definida. Neste capítulo mostra-se que pelo processo de construção global descrito em 7.1 obtém-se um espaço coerente bi-estruturado de intervalos racionais $(\Lambda_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{in}_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{ap}_{\mathrm{II}Q})$, com $\Lambda_{\mathrm{II}Q} = \{\mathrm{II}Q, \wp(\mathrm{II}Q)\}$, gerado pelo sistema básico Q, cuja estrutura de informação é $\Sigma^{in}_{\mathrm{II}Q} \equiv (\sqsubseteq, F_{lin})$, onde $\sqsubseteq$ é a ordem de informação e F_{lin} é a família das funções lineares sobre $\mathrm{II}Q$, e cuja estrutura de aplicação é $\Sigma^{ap}_{\mathrm{II}Q} \equiv (\leq_{\mathrm{II}Q}, *_{\mathrm{II}Q}, F_{\mathrm{II}Q})$. Mostra-se também alguns exemplos sobre a representação linear interna para as funções elementares.

As evoluções sucessivas específicas realizadas a partir do sistema básico Q neste processo de construção de $(\Lambda_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{in}_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{ap}_{\mathrm{II}Q})$ estão ilustradas na figura 9.1.

A seguir, apresentam-se os resultados obtidos em cada evolução do processo de construção global para R e IR. Resultados preliminares foram apresentados e ou publicados em [DIM 96a] [DIM 96b] [DIM 96c] [DIM 96d] [DIM 97a] [DIM 97b] [DIM 97c] [DIM 97d].

9.1 O Sistema dos Intervalos Racionais: uma [ ]-evolução regulada pelo próprio sistema evoluído

A primeira etapa do processo de construção global corresponde a uma [ ]-evolução (veja seção 7.1.2), pela aplicação do construtor de sistemas de 2ª ordem [ ]: **SO2** $\rightarrow$ **SO2** ao sistema básico Q, regulada pelo próprio sistema intervalar resultante. Veja figura 9.1. Segue que:

9.1.1 Proposição

A [ ]-evolução regulada pelo próprio sistema intervalar, aplicada ao sistema básico Q, determina o sistema intervalar $\mathsf{IQ} = (\Lambda_{IQ};\Sigma_{IQ})$, com $\Lambda_{IQ} = \{IQ, \wp(IQ)\}$, cujo universo $IQ = \{[p,q] | p,q \in Q\}$ é o conjunto de intervalos racionais $[p,q] = \{r \in Q | p \le r \le q\}$. A estrutura intervalar $\Sigma_{IQ} \equiv (\le_{IQ}, *_{IQ}, F_{IQ})$ é dada explicitamente por: para todo $X = [p,q], Y = [r,s] \in IQ$,
(i) $[p,q] \le_{IQ} [r,s] \Leftrightarrow [p,q] <_{IQ} [r,s]$ ou $[p,q] = [r,s]$, onde $[p,q] <_{IQ} [r,s] \Leftrightarrow q <_Q r$ e $<_Q$ é a relação de posição definida no conjunto básico Q;
(ii) para toda função intervalar elementar unária $f_{IQ} \in F_{IQ}$, $f_{IQ}: IQ \to IQ$, tal que $f_{IQ}(X) = \{f_Q(r) \in Q | r \in X\}$, onde $f_Q \in F_Q$ é a respectiva função básica definida em Q;
(iii) para toda operação aritmética intervalar $*_{IQ} \in \{+,-,\times,\div\}$, $*_{IQ}: IQ \times IQ \to IQ$, tal que $X *_{IQ} Y = \{r *_Q s \in Q | r \in X \wedge s \in Y\}$ [1], onde $*_Q$ é a respectiva operação aritmética básica definida em Q.
prova:

A primeira parte da proposição é conseqüência direta da proposição 7.1.2. É imediato que (i) satisfaz as condições das definições 5.5.1 (iv) e 5.5.3. Observe agora que (ii) satisfaz as condições das definições 5.5.1 (iii) e 5.5.3, pois toda função intervalar f_{IQ} é bem definida em IQ e completamente determinada pela respectiva função básica f_Q [REI 97a], e, portanto, f_{IQ} assim definida coincide com o seu fecho relativo ao sistema IQ. Da mesma forma, (iii) satisfaz as condições das definições 5.5.1 (iii) e 5.5.3, pois toda operação aritmética intervalar $*_{IQ}$ é bem definida em IQ e completamente determinada pelas respectivas operações básicas $*_Q$ [DIM 91] [DIM 96a], e, portanto, $*_{IQ}$ também coincide com o seu fecho relativo ao sistema IQ. ♦

Observe que a função $h: Q \to IQ$, $r \mapsto [r,r]$ é injetora e, portanto, $\mathsf{Q} \,\tilde{\underline{\emptyset}}\, \mathsf{IQ}$, ou seja Q está imerso em IQ. Segue que:

9.1.2 Proposição

IQ é uma $[\ ]_{\mathsf{IQ}}$-evolução de Q, ou seja, $\mathsf{Q} \angle_{[\,]}^{\mathsf{IQ}} \mathsf{IQ}$. ♦

Com relação à relação $\le_{IQ}$ definida em 9.1.1 (i), tem-se que:

9.1.3 Proposição

A relação $\le_{IQ}$ é uma relação de ordem parcial.
prova:

É imediato que $\le_{IQ}$ é reflexiva. Considere $X = [p,q], Y = [r,s], Z = [w,v] \in IQ$. Se $X \le_{IQ} Y$ e $Y \le_{IQ} X$ então uma das seguintes situações acontece: (a) $X <_{IQ} Y$ e $Y <_{IQ} X$

---

[1] Para a operação de divisão, considere $0 \notin Y$.

ou (b) $X = Y$. Supondo que ocorra (a), então tem-se que $q < r$ e $s < p$, o que levaria a $q < r \leq s < p$, o que é uma contradição pois $p \leq q$. Portanto somente pode ocorrer (b), isto é, $X = Y$, o que mostra que $\leq_{IQ}$ é antissimétrica. Agora, se $X \leq_{IQ} Y$ e $Y \leq_{IQ} Z$ então tem-se que $X <_{IQ} Y$ ou $X = Y$, e $Y <_{IQ} Z$ ou $Y = Z$. Então existem as seguintes alternativas: (a) $X <_{IQ} Y$ e $Y <_{IQ} Z$ ou (b) $X = Y$ e $Y <_{IQ} Z$ ou (c) $X <_{IQ} Y$ e $Y = Z$ ou (d) $X = Y$ e $Y = Z$. Nos casos (a), (b) e (c) tem-se que $X <_{IQ} Z$ ou, quando vale (d), tem-se que $X = Z$. Conclui-se que $X \leq_{IQ} Z$, e, portanto, $\leq_{IQ}$ é transitiva. Conclui-se então que $\leq_{IQ}$ é uma relação de ordem parcial. ♦

Observe que $\leq_{IQ}$ é uma relação de ordem parcial derivada da relação de posição básica $\leq_Q$, e, portanto, $\leq_{IQ}$ é a relação de posição no sistema intervalar IQ. As funções intervalares introduzidas em 9.1.1 (ii) foram estudadas em [REI 97a]. Com relação as operações aritméticas intervalares definidas em 9.1.1 (iii), tem-se que:

9.1.4 Proposição

Sejam $[p,q],[r,s] \in IQ$. As operações aritméticas em IQ podem ser calculadas explicitamente como:

(i) adição: $[p,q]+[r,s]=[p+r,q+s]$;

(ii) multiplicação: $[p,q]\times[r,s]=[min\{p\cdot r, p\cdot s, q\cdot r, q\cdot s\}, max\{p\cdot r, p\cdot s, q\cdot r, q\cdot s\}]$;

(iii) subtração: $[p,q]-[r,s]=[p,q]+[-1,-1]\times[r,s]=[p,q]+[-s,-r]=[p-s,q-r]$;

(iv) divisão: se $0 \notin [r,s]$,

$$[p,q]\div[r,s]=[p,q]\times[1/s,1/r]=[min\{p/s, p/r, q/s, q/r\}, max\{p/s, p/r, q/s, q/r\}]$$

prova:

Esta prova pode ser encontrada em [DIM 91]. ♦

Para as principais propriedades das operações aritméticas intervalares veja [DIM 96b] [DIM 91] [DIM 89] [MOO 79] [ALE 83]. Convém salientar:

9.1.5 Proposição

Para todo $A, B, C \in IQ$, são válidas as seguintes propriedades:

(i) comutatividade: $A+B=B+A$, $A\times B=B\times A$, e

(ii) associatividade: $(A+B)+C=A+(B+C)$, $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$.

prova:

Esta prova pode ser encontrada em [DIM 91]. ♦

9.2 O Sistema do Espaço Coerente Bi-Estruturado de Intervalos Racionais: uma *Coh*-evolução regulada pelo subsistema dos objetos quasi-totais

A segunda etapa do processo de construção global corresponde a uma *Coh*-evolução (veja seção 7.1.6), pela aplicação do construtor de sistemas de 2ª ordem *Coh*: **SO2** → **SO2** ao sistema intervalar IQ - obtido após a [ ]-evolução - regulada pelo subsistema dos objetos quasi-totais do espaço coerente bi-estruturado resultante. Veja figura 9.1. Segue que:

9.2.1 Proposição

A *Coh*-evolução regulada pelo subsistema dos objetos quasi-totais, aplicada ao sistema intervalar IQ definido em 9.1.1, determina o sistema bi-estruturado $\left(\Lambda_{\text{II}Q};\Sigma^{in}_{\text{II}Q};\Sigma^{ap}_{\text{II}Q}\right)$, com $\Lambda_{\text{II}Q} = \{\text{II}Q, \wp(\text{II}Q)\}$, onde $\text{II}Q$ é o espaço coerente gerado pelo conjunto básico Q (definição 3.4.3). A estrutura de informação é dada por $\Sigma^{in}_{\text{II}Q} \equiv (\subseteq, F_{lin})$, onde $\subseteq$ é a ordem de informação e F_{lin} é a família das funções lineares. A estrutura de aplicação $\Sigma^{ap}_{\text{II}Q} \equiv \left(\leq_{\text{II}Q}, *_{\text{II}Q}, F_{\text{II}Q}\right)$ é dada explicitamente por: para todo $x,y \in \text{II}Q$,

(i) $x \leq_{\text{II}Q} y \Leftrightarrow x <_{\text{II}Q} y$ ou $x = y$, onde $x <_{\text{II}Q} y \Leftrightarrow \exists X \in x, \exists Y \in y, X <_{IQ} Y$, e $<_{IQ}$ é a relação de posição definida em 9.1.1 (i) para o conjunto de intervalos racionais IQ;

(ii) para toda função de objetos elementar unária $f_{\text{II}Q} \in F_{\text{II}Q}$, define-se $f_{\text{II}Q}: \text{II}Q \to \text{II}Q$, tal que

$$f_{\text{II}Q}(x) = \begin{cases} \hat{q}f_{\text{II}Q}(x) & \text{se } x \in qtot(\text{II}Q), \\ qf_{\text{II}Q}(x) & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

onde $qf_{\text{II}Q}: \text{II}Q \to \text{II}Q$, $x \mapsto \{f_{IQ}(X) \in IQ | X \in x\}$ é a quasi-função de objetos, $\hat{q}f_{\text{II}Q}(x)$ é o fecho indexado (definição 3.3.7) de $qf_{\text{II}Q}(x)$, $qtot(\text{II}Q)$ é a família dos objetos quasi-totais de $\text{II}Q$, e $f_{IQ} \in F_{IQ}$ é a respectiva função intervalar definida em 9.1.1 (ii) para o conjunto de intervalos racionais IQ;

(iii) para toda operação aritmética de objetos $*_{IQ} \in \{+,-,\times,\div\}$, define-se $*_{\text{II}Q}: \text{II}Q \prod \text{II}Q \to \text{II}Q$, tal que

$$x *_{\text{II}Q} y = \begin{cases} x *^{\hat{q}}_{\text{II}Q} y & \text{se } x, y \in qtot(\text{II}Q), \\ x *^{q}_{\text{II}Q} y & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

onde $*^{q}_{\text{II}Q}: \text{II}Q \prod \text{II}Q \to \text{II}Q$, $(x,y) \mapsto \{X *_{IQ} Y \in IQ | X \in x \wedge Y \in y\}$[2] é a quasi-operação aritmética de objetos, $x *^{\hat{q}}_{\text{II}Q} y$ é o fecho indexado (definição 3..3.7) de $x *^{q}_{\text{II}Q} y$, $qtot(\text{II}Q)$ é a família dos objetos quasi-totais de $\text{II}Q$, $*_{IQ}$ é a respectiva operação aritmética intervalar definida em 9.1.1 (iii) para o conjunto de intervalos racionais IQ, e $\prod$ é o produto direto definido em 3.6.1.

prova:

A primeira parte da proposição é conseqüência direta da proposição 7.1.6. Ainda, é imediato que (i) satisfaz as condições das definições 5.5.1 (iv) e 5.5.3.

Observe agora que (ii) satisfaz as condições das definições 5.5.1 (iii) e 5.5.3. De fato, toda quasi-função de objetos $qf_{\text{II}Q}$ é bem definida em $\text{II}Q$ e completamente determinada pela respectiva função intervalar f_{IQ} [REI 97a], e, portanto, $f_{\text{II}Q}$ é bem

---

[2] Para a operação de divisão considere $0 \notin Y$, para todo $Y \in y$.

definida. Além disso, pela proposição 3.3.8, $f_{\text{II}Q}$ é fechada na família dos objetos quasi-totais, sendo, portanto, bem comportada no subsistema qtot$_{\text{IIQ}}$.

Observe agora que (iii) satisfaz as condições das definições 5.5.1 (iii) e 5.5.3. É imediato que para todo $X \in x, Y \in y$, tem-se $X *_{IQ} X \in x *^{q}_{\text{II}Q} y$, e, portanto, $X *_{IQ} Y \in x *_{\text{II}Q} y$, com $0 \notin Y$ quando for considerada a operação de divisão.

Além disso, para todo $x, y \in \text{II}Q$, tem-se que $x *^{q}_{\text{II}Q} y \in \text{II}Q$ e, portanto, $x *_{\text{II}Q} y \in \text{II}Q$, com $0 \notin Y$, para todo $Y \in y$, quando for considerada a operação de divisão. De fato, se $x = \varnothing$ ou $y \neq \varnothing$ o resultado é imediato. Supor então $x, y \neq \varnothing$ e considere a operação de adição. Pela proposição 9.1.4, tem-se que

$$\begin{aligned} x +^{q}_{\text{II}Q} y &= \{[p,q] +_{IQ} [p',q'] \in IQ | [p,q] \in x \wedge [p',q'] \in y\} \\ &= \{[p+p', q+q'] \in IQ | [p,q] \in x \ \wedge \ [p',q'] \in y\}. \end{aligned}$$

Então, para todo $[p_1, q_1], [p_1', q_1'] \in x$ tem-se que $[p_1, q_1] \approx_{\leq_Q} [p_1', q_1']$ e para todo $[p_2, q_2], [p_2', q_2'] \in y$ tem-se que $[p_2, q_2] \approx_{\leq_Q} [p_2', q_2']$. Portanto, pela definição 3.4.1, tem-se que $p_1 \leq q_1'$, $p_1' \leq q_1$, $p_2 \leq q_2'$ e $p_2' \leq q_2$. Assim, ocorre que $p_1 + p_2 \leq q_1' + q_2'$ e $p_1' + p_2' \leq q_1 + q_2$. Logo, tem-se que para todo

$$[p_1 + p_2, q_1 + q_2], [p_1' + p_2', q_1' + q_2'] \in x +^{q}_{\text{II}Q} y,$$

é válido que $[p_1 + p_2, q_1 + q_2] \approx_{\leq_Q} [p_1' + p_2', q_1' + q_2']$, e, portanto, $x +^{q}_{\text{II}Q} y \in \text{II}Q$. Segue que $x +_{\text{II}Q} y \in \text{II}Q$. Analogamente prova-se o resultado para as outras operações.

Agora suponha que $x *^{q}_{\text{II}Q} y \neq x' *^{q}_{\text{II}Q} y'$, para $x, y, x', y' \in \text{II}Q$. Isto significa que (1) existe $X *_{IQ} Y \in x *^{q}_{\text{II}Q} y$ tal que $X *_{IQ} Y \notin x' *^{q}_{\text{II}Q} y'$, ou (2) existe $X' *_{IQ} Y' \in x' *^{q}_{\text{II}Q} y'$ tal que $X' *_{IQ} Y' \notin x *^{q}_{\text{II}Q} y$. Supor (1). Então tem-se que (1a) $X \in x, X \notin x'$ ou (1b) $Y \in y, Y \notin y'$. Considerando-se (1a), conclui-se então que, pelo menos, $x \neq x'$. Supondo (1b), a conclusão é de que, pelo menos, $y \neq y'$. Resultado análogo obtém-se considerando-se (2). Segue que se $x *_{\text{II}Q} y \neq x' *_{\text{II}Q} y'$, para $x, y, x', y' \in \text{II}Q$, então ao menos $x \neq x'$ ou $y \neq y'$.

Conclui-se assim que toda operação aritmética de objetos $*_{\text{II}Q}$ é bem definida em $\text{II}Q$ e completamente determinada pelas respectivas operações aritméticas intervalares $*_{IQ}$. Além disso, pela proposição 3.3.8, $*_{\text{II}Q}$ é fechada na família dos objetos quasi-totais, sendo, portanto, bem comportada no subsistema qtot$_{\text{IIQ}}$. ♦

Observe que a função $h': IQ \to \text{II}Q$, $[r,s] \mapsto \{[p,q] \in IQ | p \leq r \leq s \leq q\}$ é injetora e, portanto, IQ $\underset{\sim}{\widetilde{\subseteq}}$ $(\text{II}Q; \Sigma^{in}_{\text{II}Q}; \Sigma^{ap}_{\text{II}Q})$, ou seja IQ está imerso em $(\text{II}Q; \Sigma^{in}_{\text{II}Q}; \Sigma^{ap}_{\text{II}Q})$. Então:

9.2.2 Proposição

$(\text{II}Q; \Sigma^{in}_{\text{II}Q}; \Sigma^{ap}_{\text{II}Q})$ é uma Coh_{qtot}-evolução de IQ, ou seja, IQ $\angle^{\text{qtot}}_{Coh}$ $(\text{II}Q; \Sigma^{in}_{\text{II}Q}; \Sigma^{ap}_{\text{II}Q})$. ♦

9.2.3 Corolário

Tem-se que $\mathrm{Q} \angle_{[\,]}^{\mathrm{IQ}} \mathrm{IQ} \angle_{Coh}^{\mathrm{qtot}} \left(\mathrm{II}Q;\Sigma_{\mathrm{II}Q}^{in};\Sigma_{\mathrm{II}Q}^{ap}\right)$. ♦

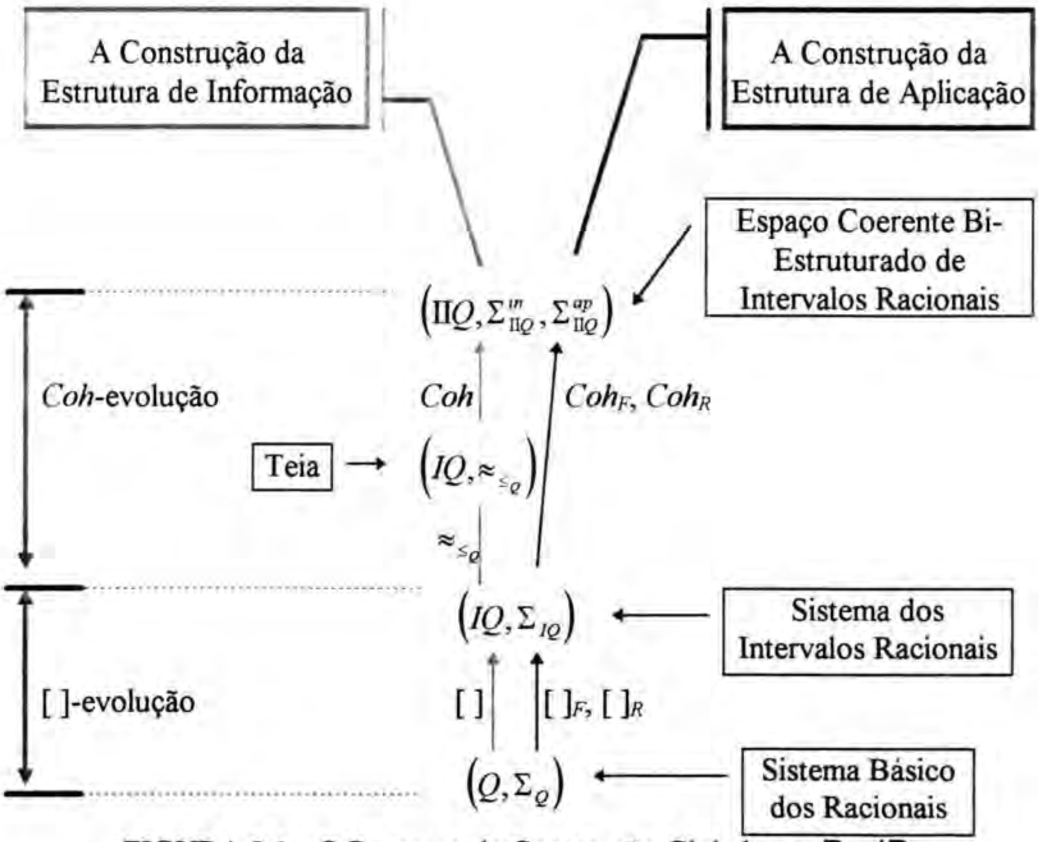


FIGURA 9.1 - O Processo de Construção Global para R e IR

Analisando agora a relação $\leq_{\mathrm{II}Q}$ introduzida em 9.2.1 (i), tem-se que:

9.2.4 Proposição

A relação $\leq_{\mathrm{II}Q}$ é uma relação de ordem parcial.

prova:

É imediato que $\leq_{\mathrm{II}Q}$ é reflexiva. Para todo $x,y \in \mathrm{II}Q$, se $x \leq_{\mathrm{II}Q} y$ e $y \leq_{\mathrm{II}Q} x$ então (1) existem $[p,q] \in x,[p',q'] \in y$ tal que $q <_Q p'$ e existem $[r,s] \in x$, $[r',s'] \in y$ tal que $s' < r$, ou (2) $x = y$. Suponha que ocorra (1). Pela coerência em x, tem-se que $p \leq s$ e $r \leq q$, e , pela coerência em y, tem-se que $p' \leq s'$ e $r' \leq q'$. Então segue que $r \leq q < p' \leq s'$ e $p' \leq s' < r \leq q$, o que é uma contradição. Como a primeira situação é contraditória, então somente pode ocorrer (2), isto é, $x = y$, o que prova que $\leq_{\mathrm{II}Q}$ é antissimétrica. Agora, para todo $x,y,z \in \mathrm{II}Q$, se $x \leq_{\mathrm{II}Q} y$ e $y \leq_{\mathrm{II}Q} z$ então existem $[p,q] \in x,[p',q'] \in y$ tal que $q <_Q p'$ ou $x = y$, e existem $[p',q'] \in y,[p'',q''] \in z$ tal que $q' <_Q p''$ ou $y = z$. Portanto, ocorre que $p \leq q < p' \leq q' < p'' \leq q''$, ou então $x = y = z$. Isto significa que $x \leq_{\mathrm{II}Q} z$, e, portanto, $\leq_{\mathrm{II}Q}$ é transitiva. Conclui-se então que a relação $\leq_{\mathrm{II}Q}$ é uma relação de ordem parcial. ♦

Assim, $\leq_{IIQ}$ é a relação de ordem parcial obtida da relação de posição intervalar $\leq_{IQ}$, e, portanto, é a relação de posição no sistema $\left(\Lambda_{IIQ};\Sigma_{IIQ}^{in};\Sigma_{IIQ}^{ap}\right)$.

As funções de objetos introduzidas em 9.2.1 (ii) foram estudadas em [REI 97a]. Para as principais propriedades das operações aritméticas de objetos veja [DIM 96b] [DIM 97]. Dentre essas propriedades, convém salientar:

9.2.5 Proposição

Para todo $x, y, z \in IIQ$ são válidas as seguintes propriedades:
(i) comutatividade: $x +_{IIQ} y = y +_{IIQ} x$, $x \times_{IIQ} y = y \times_{IIQ} x$;
(ii) associatividade:

$$\left(x +_{IIQ} y\right) +_{IIQ} z = x +_{IIQ} \left(y +_{IIQ} z\right),\ \left(x \times_{IIQ} y\right) \times_{IIQ} z = x \times_{IIQ} \left(y \times_{IIQ} z\right).$$

prova:

Prova-se (i) para a operação de adição. Por 9.2.1(iii) e 9.1.5 (i), tem-se que:

$$\begin{aligned} x +_{IIQ}^{q} y &= \{[p,q] +_{IQ} [p',q'] \in IQ \| [p,q] \in x \wedge [p',q'] \in y\} \\ &= \{[p',q'] +_{IQ} [p,q] \in IQ \| [p',q'] \in y \wedge [p,q] \in x\} \\ &= y +_{IIQ}^{q} x, \end{aligned}$$

e, portanto, $x +_{IIQ} y = y +_{IIQ} x$. Analogamente prova-se que a operação de multiplicação é comutativa, considerando a comutatividade da adição intervalar.

Com relação a (ii), por 9.2.1(iii) e 9.1.5 (ii), segue que:

$$\begin{aligned} \left(x +_{IIQ}^{q} y\right) +_{IIQ}^{q} z &= \{([p,q] + [p',q']) + [p'',q''] \in IQ \| [p,q] \in x, [p',q'] \in y, [p'',q''] \in z\} \\ &= \{[p,q] + ([p',q'] + [p'',q'']) \in IQ \| [p,q] \in x,\ [p',q'] \in y, [p'',q''] \in z\} \\ &= x +_{IIQ}^{q} \left(y +_{IIQ}^{q} z\right), \end{aligned}$$

e, portanto, $\left(x +_{IIQ} y\right) +_{IIQ} z = x +_{IIQ} \left(y +_{IIQ} z\right)$. De forma análoga, prova-se a associatividade da multiplicação de objetos, valendo-se da associatividade da multiplicação intervalar. Para maiores detalhes veja [DIM 96b].♦

9.2.6 Proposição

Para todo $x \in IIQ$ tem-se que:
(i) $i\left(x +_{IIQ} n\right) = i\left(n +_{IIQ} x\right) = i(x)$, se e somente se $i(n) = 0$;
(ii) $i\left(x \times_{IIQ} id\right) = i\left(id \times_{IIQ} x\right) = i(x)$ se e somente se $i(id) = 1$.

prova:

Prova-se primeiramente (i). Suponha que $i\left(x +_{IIQ} n\right) = i\left(n +_{IIQ} x\right) = i(x)$ e observe que $i\left(x +_{IIQ} n\right) = i\left(n +_{IIQ} x\right) = i\left(x +_{IIQ}^{q} n\right) = i\left(n +_{IIQ}^{q} x\right) = i(x)$. Portanto, para todo

$[p,q] \in x$ e para todo $[n_1,n_2] \in n$ tem-se que $p+n_1 \le r \le q+n_2$, para qualquer $r \in i(x)$. Por outro lado, como para todo $[p,q] \in x$, é válido que $i(x) \subseteq [p,q]$, então ocorre que $p \le r \le q$, para qualquer $r \in i(x)$. Logo, conclui-se que $p+n_1 \le p \le q \le q+n_2$, ou seja, $n_1 \le 0 \le n_2$. Segue que $i(n)=0$.

Por outro lado, observe que se $i(n)=0$, então para todo $[n_1,n_2] \in n$, é válido que $n_1 \le 0 \le n_2$. Logo, tem-se que $p+n_1 \le p \le q \le q+n_2$, para todo $[p,q] \in x$. Portanto, para todo $[n_1,n_2] \in n$ e para todo $[p,q] \in x$,

$$\begin{aligned}
\bigcap_Q \{[p,q]+[n_1,n_2] \in IQ \mid [p,q] \in x, [n_1,n_2] \in n\} \\
&= \bigcap_Q \{[n_1,n_2]+[p,q] \in IQ \mid [p,q] \in x, [n_1,n_2] \in n\} \\
&= \bigcap_Q \{[p,q] \in IQ \mid [p,q] \in x\} \\
&= \bigcap_Q x,
\end{aligned}$$

ou seja, $i\left(x +^q_{\Pi Q} n\right) = i\left(n +^q_{\Pi Q} x\right) = i(x)$. Conclui-se então que

$$i\left(x +_{\Pi Q} n\right) = i\left(n +_{\Pi Q} x\right) = i(x).$$

Mostra-se agora (ii). Assim, se $i(id)=1$, então para todo $[id_1,id_2] \in id$, é válido que $id_1 \le 1 \le id_2$. Tem-se então as seguintes possibilidades:

(1) se $0 \le id_1 \le 1$, então

$$\begin{aligned}
min\{id_1 \cdot p, id_1 \cdot q, id_2 \cdot p, id_2 \cdot q\} &= id_1 \cdot p \\
&\le p \\
&\le q \\
&\le id_2 \cdot q \\
&= max\{id_1 \cdot p, id_1 \cdot q, id_2 \cdot p, id_2 \cdot q\},
\end{aligned}$$

(2) se $id_1 < 0, p < 0, q < 0$ para todo $[p,q] \in x$, então

$$\begin{aligned}
min\{id_1 \cdot p, id_1 \cdot q, id_2 \cdot p, id_2 \cdot q\} &= id_2 \cdot p \\
&\le p \\
&\le q \\
&\le id_1 \cdot q \\
&= max\{id_1 \cdot p, id_1 \cdot q, id_2 \cdot p, id_2 \cdot q\},
\end{aligned}$$

(3) se $id_1 < 0, p < 0, q \ge 0$ para todo $[p,q] \in x$, então

$$
\begin{aligned}
min\{id_1 \cdot p, id_1 \cdot q, id_2 \cdot p, id_2 \cdot q\} &= -\left(max\{|p|, q\} \cdot max\{|id_1|, id_2\}\right) \\
&\leq p \\
&\leq q \\
&\leq max\{|p|, q\} \cdot max\{|id_1|, id_2\} \\
&= max\{id_1 \cdot p, id_1 \cdot q, id_2 \cdot p, id_2 \cdot q\},
\end{aligned}
$$

(4) se $id_1 < 0, p \geq 0$ para todo $[p,q] \in x$, então

$$
\begin{aligned}
min\{id_1 \cdot p, id_1 \cdot q, id_2 \cdot p, id_2 \cdot q\} &= id_1 \cdot q \\
&\leq p \\
&\leq q \\
&\leq id_2 \cdot q \\
&= max\{id_1 \cdot p, id_1 \cdot q, id_2 \cdot p, id_2 \cdot q\}.
\end{aligned}
$$

Portanto, para todo $[id_1, id_2] \in id$ e para todo $[p,q] \in x$,

$$
\begin{aligned}
&\bigcap_Q \{[p,q] \times [id_1, id_2] \in IQ | [p,q] \in x, [id_1, id_2] \in id\} \\
&\qquad = \bigcap_Q \{[id_1, id_2] \times [p,q] \in IQ | [p,q] \in x, [id_1, id_2] \in id\} \\
&\qquad = \bigcap_Q \{[p,q] \in IQ | [p,q] \in x\} \\
&\qquad = \bigcap_Q x,
\end{aligned}
$$

ou seja, $i\left(x \times^q_{\Pi Q} id\right) = i\left(id \times^q_{\Pi Q} x\right) = i(x)$. Conclui-se então que

$$
i\left(x \times_{\Pi Q} id\right) = i\left(id \times_{\Pi Q} x\right) = i(x).
$$

Analogamente, mostra-se que se $i\left(x \times_{\Pi Q} id\right) = i\left(id \times_{\Pi Q} x\right) = i(x)$ então $i(id) = 1$. ♦

9.3 A Representação Linear Interna de Funções de Objetos

Nesta seção aplicam-se os resultados das seções de 7.3 a 7.7 para mostrar um exemplo de determinação da representação linear interna na estrutura de informação de uma função de objetos, mais especificamente a função seno, definida conforme 9.2.1 (ii) para a estrutura de aplicação do espaço coerente bi-estruturado $\left(\Pi Q; \Sigma^{in}_{\Pi Q}; \Sigma^{ap}_{\Pi Q}\right)$.

Reiser [REI 96a] [REI 97a] [REI 97b] [REI 97c] [REI 97d] introduziu o estudo sobre a representação linear de funções unárias definidas para um espaço coerente gerado por um conjunto básico, com aplicações na representação de funções elementares reais, incluindo também a função seno. Aqui, esses resultados são estendidos para o espaço coerente bi-estruturado $\left(\Pi Q; \Sigma^{in}_{\Pi Q}; \Sigma^{ap}_{\Pi Q}\right)$ obtido pelo processo de construção global.

Diz-se que F é uma representação linear interna de $f_{\Pi A}$ para significar que F é um conjunto de funções da estrutura de informação que podem reproduzir o mesmo efeito da aplicação de $f_{\Pi A}$ a um objeto qualquer x.

Considere então a função seno de objetos, $\text{sen}_{\Pi Q}: \Pi Q \to \Pi Q$, dada por

$$\text{sen}_{\Pi Q}(x) = \begin{cases} \hat{q}\,\text{sen}_{\Pi Q}(x) & \text{se } x \in qtot(\Pi Q), \\ q\,\text{sen}_{\Pi Q}(x) & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

conforme 9.2.1 (ii).

A quasi-função $q\,\text{sen}_{\Pi Q}: \Pi Q \to \Pi Q$, dada por $x \mapsto \{\text{sen}_{IQ}(X) \in IQ | X \in x\}$, onde $\text{sen}_{IQ}(X) = \{\text{sen}_Q(r) \in Q | r \in X\}$ é a função seno intervalar, conforme 9.1.1 (ii), é localmente linear (veja seção 7.5). De fato, basta considerar os subconjuntos:

$$Q_i = \{\alpha \in Q | \ -90^\circ + 180^\circ i \le \alpha \le 90^\circ + 180^\circ i\} \subseteq Q,$$

$\forall i \in \mathbb{Z}$, tais que $\bigcup Q_i = Q$ e $\text{sen}_Q[Q_i] = [-1,1]$. Observa-se que $\bigcap Q_i = \{90^\circ + 180^\circ i | i \in \mathbb{Z}\}$ coincide com os pontos de máximo e mínimos da função racional $\text{sen}_Q: Q \to Q$, e além disso, constituem os extremos dos intervalos nos quais sen_{Q_i} é injetora.

9.3.1 A Representação Linear Interna da Função Seno pelo Espaço Coerente Associado ao Produto Cartesiano das Subteias

A representação linear interna da função $\text{sen}_{\Pi Q}$ na estrutura de informação $\Sigma^{in}_{\Pi Q}$ pode ser obtida, por exemplo, no espaço coerente gerado pelo produto cartesiano de subteias, $\dot{\Pi Q} = \left(Coh\left(\prod_{i \in I} IQ_i, \dot{\approx} \right), \subseteq \right)$, introduzido em 7.7.

Observa-se que função racional seno, restrita ao subconjunto Q_i, $\text{sen}_{Q_i}: Q_i \to [-1,1]$, é injetora por construção. A partir dela, define-se a correspondente função intervalar $\text{sen}_{IQ_i}: IQ_i \to IQ_{[-1,1]}$, restrita a correspondente subteia $(IQ_i, \approx_{IQ_i})$, por:

$$\text{sen}_{IQ_i}(X) = \left[min\{\text{sen}_{Q_i}(\alpha) | \alpha \in X\},\ max\{\text{sen}_{Q_i}(\alpha) | \alpha \in X\} \right].$$

Da mesma forma, a função define-se a função

$$\text{sen}_{\dot{IQ}}: \left(\prod_i IQ_i, \dot{\approx} \right) \to \left(\prod_i IQ_{[-1,1]}, \dot{\approx} \right),$$

que associa cada token $\dot{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots) \in \prod_i IQ_i$, à sua correspondente imagem $\text{sen}_{\dot{IQ}}\left(\dot{X}\right) = \left(\text{sen}_{IQ_0}(X_0), \text{sen}_{IQ_1}(X_1), \ldots, \text{sen}_{IQ_i}(X_i), \ldots\right)$.

Considerando-se o espaço coerente $\Pi\dot{Q}$, define-se a quasi-função $q\,\dot{\text{sen}}_{\Pi\dot{Q}} : \Pi\dot{Q} \to \Pi\dot{Q}_{[-1,1]}$, onde $\Pi\dot{Q}_{[-1,1]} = \left(Coh\left(\prod_i IQ_{[-1,1]}, \dot{\approx}\right), \subseteq\right)$, tal que $q\,\dot{\text{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\left(\dot{x}\right) = \left\{\text{sen}_{\dot{IQ}}\left(\dot{X}\right) \mid \dot{X} \in \dot{x}\right\} \in \Pi\dot{Q}_{[-1,1]}$. Verifica-se que esta função é estável e linear, conforme proposição 7.7.1.

Finalmente a função de objetos $\dot{\text{sen}}_{\Pi\dot{Q}} : \Pi\dot{Q} \to \Pi\dot{Q}_{[-1,1]}$, é definida por:

$$\dot{\text{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\left(\dot{x}\right) = \begin{cases} \hat{q}\,\dot{\text{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\left(\dot{x}\right) & \text{se } x \in qtot(\Pi\dot{Q}) \\ q\,\dot{\text{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\left(\dot{x}\right) & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

onde $\hat{q}\,\dot{\text{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\left(\dot{x}\right)$ é o fecho indexado de $q\,\dot{\text{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\left(\dot{x}\right)$. Verifica-se que $\hat{q}\,\dot{\text{sen}}_{\Pi\dot{Q}} \equiv \dot{\text{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\big|_{qtot}$ satisfaz as condições de estabilidade e linearidade em $qtot\left(\Pi\dot{Q}\right)$, conforme a proposição 7.7.2.

Portanto, pelo corolário 7.7.3, como a função $q\,\text{sen}_{\Pi Q}$ é localmente linear, o par

$$SEN = \left(q\,\dot{\text{sen}}_{\Pi\dot{Q}}, \hat{q}\,\dot{\text{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\right)$$

corresponde a representação linear interna da função seno de objetos $\text{sen}_{\Pi Q}$.

Seja então o conjunto coerente $x = \{[0^\circ, 150^\circ]\} \in \Pi Q$, cuja correspondente imagem pela função de objetos $\text{sen}_{\Pi Q}$ em ΠQ é o conjunto coerente $\text{sen}_{\Pi Q}(x) = \{[0,1]\} \in \Pi Q$.

Pode-se obter uma representação para x em $\Pi\dot{Q}$ dada por $\dot{x} = \{([0^\circ, 90^\circ], [90^\circ, 150^\circ])\} \in \Pi\dot{Q}$, onde $[0^\circ, 90^\circ] \cup [90^\circ, 150^\circ] = [0^\circ, 150^\circ]$, de acordo com os intervalos onde a função básica sen_Q é injetiva.

Como x não é um objeto quasi-total, a imagem de sua representação $\dot{x}$ em $\Pi\dot{Q}$ pode ser calculada pela primeira componente da representação linear interna de $\text{sen}_{\Pi Q}$, dada por

$$q\,\dot{\mathrm{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\left(\dot{x}\right)=\left\{\left(\mathrm{sen}_{IQ_0}\left(\left[0^\circ,90^\circ\right]\right),\mathrm{sen}_{IQ_1}\left(\left[90^\circ,150^\circ\right]\right)\right)\right\}=\left\{\left(\left[0,1\right],\left[1/2,1\right]\right)\right\}\in\Pi\dot{Q},$$

com $[0,1]\cup[1/2,1]=[0,1]$ e $\mathrm{sen}_{\Pi Q}(x)=\{[0,1]\}$.

Portanto, a ação da função representada $\mathrm{sen}_{\Pi Q}$ pode ser capturada pela primeira componente de sua representação linear interna *SEN*.

9.3.2 A Representação Linear Interna da Função Seno pelo Produto Direto de Subespaços

A representação linear da função interna da função $\mathrm{sen}_{\Pi Q}$ na estrutura de informação $\Sigma^{in}_{\Pi Q}$ pode ser também obtida no espaço coerente gerado pelo produto direto de subespaços, $\Pi\dot{Q}\equiv\left(Coh\left(\dot{\bigcup\limits_{i\in I}}IQ_i,\dot{\approx}\right),\subseteq\right)$, introduzido em 7.6.

Considerando-se os mesmo resultados da seção 9.3.1, define-se a quasi-função $q\,\dot{\mathrm{sen}}_{\Pi\dot{Q}}:\Pi\dot{Q}\to\Pi\dot{Q}_{[-1,1]}$, onde $\Pi\dot{Q}_{[-1,1]}=\left(Coh\left(\dot{\bigcup\limits_{i\in I}}IQ_{[-1,1]},\dot{\approx}\right),\subseteq\right)$, tal que $q\,\dot{\mathrm{sen}}_{\Pi Q^{\bullet}}\left(\dot{x}\right)=\left\{\mathrm{sen}_{\dot{IQ}}\left(\dot{X}\right)\mid\dot{X}\in\dot{x}\right\}\in\Pi\dot{Q}_{[-1,1]}$. Verifica-se que esta função é estável e linear, conforme proposição 7.6.1.

Agora a função de objetos $\dot{\mathrm{sen}}_{\Pi\dot{Q}}:\Pi\dot{Q}\to\Pi\dot{Q}_{[-1,1]}$, é definida por:

$$\dot{\mathrm{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\left(\dot{x}\right)=\begin{cases}\hat{q}\,\dot{\mathrm{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\left(\dot{x}\right) & \text{se } x\in qtot(\Pi\dot{Q})\\ q\,\dot{\mathrm{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\left(\dot{x}\right) & \text{caso contrario,}\end{cases}$$

onde $\hat{q}\,\dot{\mathrm{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\left(\dot{x}\right)$ é o fecho indexado de $q\,\dot{\mathrm{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\left(\dot{x}\right)$. Verifica-se que $\hat{q}\,\dot{\mathrm{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\equiv\dot{\mathrm{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\big|_{qtot}$ satisfaz as condições de estabilidade e linearidade em $qtot\left(\Pi\dot{Q}\right)$, conforme a proposição 7.6.2.

Portanto, pelo corolário 7.6.3, como a função $q\,\mathrm{sen}_{\Pi Q}$ é localmente linear, o par

$$SEN'=\left(q\,\dot{\mathrm{sen}}_{\Pi\dot{Q}},\hat{q}\,\dot{\mathrm{sen}}_{\Pi\dot{Q}}\right)$$

corresponde a outra representação linear interna da função seno de objetos $\mathrm{sen}_{\Pi Q}$.

Seja então o conjuntos coerente $x = \{[0^\circ, 150^\circ]\} \in \mathrm{II}Q$ da seção 9.3.1. cuja correspondente imagem pela função de objetos $\mathrm{sen}_{\mathrm{II}Q}$ em $\mathrm{II}Q$ é o conjunto coerente $\mathrm{sen}_{\mathrm{II}Q}(x) = \{[0,1]\} \in \mathrm{II}Q$.

Pode-se obter uma representação para x em $\mathrm{II}\dot{Q}$ dada por $\dot{x} = \{(0,[0^\circ,90^\circ]),(1,[90^\circ,150^\circ])\} \in \mathrm{II}\dot{Q}$, onde $[0^\circ,90^\circ] \cup [90^\circ,150^\circ] = [0^\circ,150^\circ]$, de acordo com os intervalos onde a função básica sen_Q é injetiva. Pode-se também utilizar a notação $\dot{x} = (\{[0^\circ,90^\circ]\},\{[90^\circ,150^\circ]\})$.

Como x não é um objeto quasi-total, a imagem de sua representação $\dot{x}$ em $\mathrm{II}\dot{Q}$ pode ser calculada pela primeira componente da representação linear interna de $\mathrm{sen}_{\mathrm{II}Q}$, dada por

$$
\begin{aligned}
q\,\dot{\mathrm{sen}}_{\mathrm{II}\dot{Q}}(\dot{x}) &= \left(q\,\mathrm{sen}_{\mathrm{II}Q_0}(\{[0^\circ,90^\circ]\}), q\,\mathrm{sen}_{\mathrm{II}Q_1}(\{[90^\circ,150^\circ]\})\right) \\
&= \left(\{\mathrm{sen}_{IQ_0}([0^\circ,90^\circ])\},\{\mathrm{sen}_{IQ_1}([90^\circ,150^\circ])\}\right) \\
&= (\{[0,1]\},\{[1/2,1]\}) \\
&\equiv \{(0,[0,1]),(1,[1/2,1])\} \in \mathrm{II}\dot{Q},
\end{aligned}
$$

com $[0,1] \cup [1/2,1] = [0,1]$ e $\mathrm{sen}_{\mathrm{II}Q}(x) = \{[0,1]\}$.

Portanto, a ação da função representada $\mathrm{sen}_{\mathrm{II}Q}$ pode ser capturada pela primeira componente de sua representação linear interna *SEN'*.

Como um outro exemplo, considere o conjunto coerente $x = \{X_0, X_1\} = \{[0^\circ,150^\circ],[30^\circ,210^\circ]\} \in \mathrm{II}Q$, cuja correspondente imagem pela função de objetos $\mathrm{sen}_{\mathrm{II}Q}$ em $\mathrm{II}Q$ é o conjunto coerente

$$\mathrm{sen}_{\mathrm{II}Q}(x) = \{\mathrm{sen}_{IQ}(X_0), \mathrm{sen}_{IQ}(X_1)\} = \{[0,1],[-\tfrac{1}{2},1]\} \in \mathrm{II}Q.$$

Pode-se obter uma representação para x em $\mathrm{II}\dot{Q}$ dada por $\dot{x} = \{(0,[0^\circ,90^\circ]_0),(1,[90^\circ,150^\circ]_0),(0,[30^\circ,90^\circ]_1),(1,[90^\circ,180^\circ]_1),(2,[180^\circ,210^\circ]_1)\} \in \mathrm{II}\dot{Q}$, onde

$$X_0 = [0^\circ,90^\circ] \cup [90^\circ,150^\circ] = [0^\circ,150^\circ],$$

$$X_1 = [30^\circ,90^\circ] \cup [90^\circ,180^\circ] \cup [180^\circ,210^\circ] = [30^\circ,210^\circ],$$

de acordo com os intervalos onde a função básica sen_Q é injetiva.

Como x não é um objeto quasi-total, a imagem de sua representação $\dot{x}$ em $\mathrm{I}\dot{\mathrm{I}}Q$ pode ser calculada pela primeira componente da representação linear interna de $\mathrm{sen}_{\mathrm{II}Q}$, dada por

$$
\begin{aligned}
& q\,\dot{\mathrm{sen}}_{\mathrm{I}\dot{\mathrm{I}}Q}\left(\dot{x}\right) \\
&= \Big\{\left(0, \mathrm{sen}_{IQ_0}\left(\left[0^\circ, 90^\circ\right]_0\right)\right), \left(1, \mathrm{sen}_{IQ_1}\left(\left[90^\circ, 150^\circ\right]_0\right)\right), \\
&\qquad \left(0, \mathrm{sen}_{IQ_0}\left(\left[30^\circ, 90^\circ\right]_1\right)\right), \left(1, \mathrm{sen}_{IQ_1}\left(\left[90^\circ, 180^\circ\right]_1\right)\right), \left(2, \mathrm{sen}_{IQ_2}\left(\left[180^\circ, 210^\circ\right]_1\right)\right)\Big\}, \\
&= \left\{\left(0, [0,1]_0\right), \left(1, [1/2, 1]_0\right), \left(0, [1/2, 1]_1\right), \left(1, [0,1]_1\right), \left(2, [-1/2, 0]_1\right)\right\} \in \mathrm{I}\dot{\mathrm{I}}Q,
\end{aligned}
$$

com

$$
[0,1]_0 \cup [1/2, 1]_0 = [0,1]_0, \; [1/2, 1]_1 \cup [0,1]_1 \cup [-1/2, 0]_1 = [-1/2, 1]_1
$$

e $\mathrm{sen}_{\mathrm{II}Q}(x) = \left\{[0,1], [-\tfrac{1}{2}, 1]\right\}$, o que mostra que a ação da função representada $\mathrm{sen}_{\mathrm{II}Q}$ pode ser novamente capturada pela primeira componente de sua representação linear interna *SEN'*.

10 Os Σ_{ap}-Isomorfismos e a Representação Global de R e IR

Pelo processo de construção global descrito no capítulo 9, obtém-se o espaço coerente bi-estruturado de intervalos racionais $\left(\Lambda_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{in}_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{ap}_{\mathrm{II}Q}\right)$, com $\Lambda_{\mathrm{II}Q}=\{\mathrm{II}Q,\wp(\mathrm{II}Q)\}$, conforme o corolário 9.2.3.

O objetivo deste capítulo é provar que espaço o coerente bi-estruturado $\left(\Lambda_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{in}_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{ap}_{\mathrm{II}Q}\right)$ é uma representação global (definição 7.2.3) do sistema dos números reais $\mathsf{R}=\left(\Lambda_{\mathbb{R}};\Sigma_{\mathbb{R}}\right)$, com $\Lambda_{\mathbb{R}}=\{\mathbb{R},\wp(\mathbb{R})\}$, e do sistema dos intervalos reais estendido $\mathsf{IR}=\left(\Lambda_{\mathbb{IR}^*};\Sigma_{\mathbb{IR}^*}\right)$, com $\Lambda_{\mathbb{R}^*}=\{\mathbb{IR}^*,\wp(\mathbb{IR}^*)\}$, $\mathbb{IR}^*=\mathbb{IR}\cup\{\mathbb{R}\}$ e $\Sigma\equiv(\leq,*,F)$, onde $\leq$ é a relação de posição, $*$ representa o conjunto de operações aritméticas e F é a família de funções elementares unárias.

Observa-se que as evoluções do processo de construção global são realizadas de tal forma que as estruturas dos sistemas representados, R e IR, podem ser recuperadas na estrutura de aplicação do espaço coerente bi-estruturado $\left(\Lambda_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{in}_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{ap}_{\mathrm{II}Q}\right)$.

Neste capítulo serão estudados os Σ_{ap}- isomorfismos relativos à estrutura de aplicação considerada. Prova-se que o sistema dos intervalos reais estendido IR e o subsistema $\mathsf{qtot}_{\mathsf{IIQ}}$ dos objetos quasi-totais de $\left(\Lambda_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{in}_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{ap}_{\mathrm{II}Q}\right)$ são Σ_{ap}- isomorfos, isto é $\mathsf{IR}\cong_{ap}\mathsf{qtot}_{\mathsf{IIQ}}$. Além disso, o subsistema $\mathsf{tot}_{\mathsf{IIQ}}$ dos objetos totais de $\left(\Lambda_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{in}_{\mathrm{II}Q};\Sigma^{ap}_{\mathrm{II}Q}\right)$, relativamente à sua estrutura de aplicação, apresenta-se como um corpo ordenado completo que pode ser identificado com o sistema dos números reais R, isto é, $\mathsf{R}\cong_{ap}\mathsf{tot}_{\mathsf{IIQ}}$. Versões preliminares destes resultados foram apresentados e/ou publicadas em [DIM 96a] [DIM 96b] [DIM 96c] [DIM 96d] [DIM 97a] [DIM 97b] [DIM 97c] [DIM 97d].

O valor absoluto e a distância, assim como os Σ_{ap}- isomorfismos relativos a esses aspectos, serão introduzidos nos capítulo 11 e 12. A caracterização topológica será apresentada nos capítulos 16 e 17, assim como os Σ_{ap}- isomorfismos adequados a essa caracterização.

10.1 As Propriedades das Operações Algébricas e o Σ_{ap}-Corpo do Subsistema dos Objetos Totais

Nesta seção mostra-se que o subsistema dos objetos totais $\mathsf{tot}_{\mathsf{IIQ}}=\left(\Lambda_{tot(\mathrm{II}Q)};\Sigma^{in}_{tot(\mathrm{II}Q)};\Sigma^{ap}_{tot(\mathrm{II}Q)}\right)$, com $\Lambda_{tot(\mathrm{II}Q)}\in\{tot(\mathrm{II}Q),\wp(tot(\mathrm{II}Q))\}$, é um Σ_{ap}- corpo (definição 5.1.6), ou seja, a estrutura de aplicação $\left(\Lambda_{tot(\mathrm{II}Q)};\Sigma^{ap}_{tot(\mathrm{II}Q)}\right)$ apresenta-se como um corpo. Para isso, as operações aritméticas de objetos são restritas ao subsistema dos objetos totais. Primeiramente mostra-se que estas operações são fechadas neste subsistema:

10.1.1 Proposição

Para todo $x, y \in tot(\text{II}Q)$, $x *_{tot} y \in tot(\text{II}Q)$.

prova:

Suponha $x, y \in tot(\text{II}Q)$ e considere a operação de adição. Então pode ocorrer uma das seguintes situações: (i) $i(x), i(y) \in Q$, (ii) $i(x), i(y) \notin Q$, (iii) $i(x) \in Q, i(y) \notin Q$ ou (iv) $i(x) \notin Q, i(y) \in Q$. Considere os resultados das proposições 9.2.1 (iii) e 9.1.4 (i).

Supor que aconteça a situação (i). Então, existem $r, r' \in Q$ tal que $x = \{[p,q] \in IQ | p \leq r \leq q\}$ e $y = \{[p',q'] \in IQ | p' \leq r' \leq q'\}$. Segue que:

$$\begin{aligned} x \overset{q}{+}_{\text{II}Q} y &= \{[p,q] +_{IQ} [p',q'] \in IQ | p \leq r \leq q \wedge p' \leq r' \leq q'\} \\ &= \{[p+p', q+q'] \in IQ | p+p' \leq r+r' \leq q+q'\} \\ &= \{[p'',q''] \in IQ | p'' \leq r'' \leq q''\} \in tot(\text{II}Q), \end{aligned}$$

para $p'' = p + p', q'' = q + q', r'' = r + r'$. Conclui-se então que

$$x +_{\text{II}Q} y = x \overset{\hat{q}}{+}_{\text{II}Q} y = x \overset{q}{+}_{\text{II}Q} y \in tot(\text{II}Q).$$

Seja agora (ii). Tem-se que

$$\begin{aligned} x \overset{q}{+}_{\text{II}Q} y &= \{[p,q] +_{IQ} [p',q'] \in IQ | [p,q] \in x \wedge [p',q'] \in y\} \\ &= \{[p+p', q+q'] \in IQ | [p,q] \in x \wedge [p',q'] \in y\}, \end{aligned}$$

e $x +_{\text{II}Q} y = x \overset{\hat{q}}{+}_{\text{II}Q} y \in qtot(\text{II}Q)$, pela proposição 3.3.8. Suponha então que $x +_{\text{II}Q} y \notin tot(\text{II}Q)$. Então existe $z \in \text{II}Q$, tal que $x +_{\text{II}Q} y \subseteq z$ e $z \neq x +_{\text{II}Q} y$. Isto significa que $i(z) \subseteq i(x +_{\text{II}Q} y) = i(x \overset{q}{+}_{\text{II}Q} y)$ e $i(z) \neq i(x +_{\text{II}Q} y) = i(x \overset{q}{+}_{\text{II}Q} y)$. Logo, existe $[p_z, q_z] \in z$ tal que, para todo $[p,q] \in x +_{\text{II}Q} y$, $[p_x, q_x] \in x$ e $[p_y, q_y] \in x$, tem-se que $[p_z, q_z] \subset [p,q] \subseteq [p_x + p_y, q_x + q_y]$. Portanto, é válido que $p_x + p_y \leq p < p_z \leq q_z < q \leq q_x + q_y$, isto é, $[p_z, q_z] \subseteq i(x +_{\text{II}Q} y)$ e $[p_z, q_z] \neq i(x +_{\text{II}Q} y)$. Assim, ocorre que $p_z < q \leq q_x + q_y$ e $p_x + p_y \leq p < q_z$, ou seja, $p_z - q_y < q_x$ e $p_x \leq q_z - p_y$, isto é, $[p_z - q_y, q_z - p_y] \approx [p_x, q_x]$, e, como x é um objeto total, tem-se que $[p_z - q_y, q_z - p_y] \in x$. Então, pode-se calcular

$$\{[(p_z - q_y) + p_y, (q_z - p_y) + q_y] \in IQ | [p_z - q_y, q_z - p_y] \in x \wedge [p_y, q_y] \in y\}$$

$$\subseteq x \overset{q}{+}_{\text{II}Q} y \subseteq x +_{\text{II}Q} y.$$

Entretanto, como $p_y < q_y$, tem-se que $q_y - p_y > 0$. Fazendo $q_y - p_y = \varepsilon > 0$, tem-se que:

$$\{[p_z - \varepsilon, q_z + \varepsilon] \in IQ | [p_z - \varepsilon - p_y, q_z + \varepsilon - q_y] \in x \wedge [p_y, q_y] \in y\} \subseteq x +^q_{\text{II}Q} y \subseteq x +_{\text{II}Q} y.$$

Agora, observe que

$$i(\{[p_z - \varepsilon, q_z + \varepsilon] \in IQ | [p_z - \varepsilon - p_y, q_z + \varepsilon - q_y] \in x \wedge [p_y, q_y] \in y\}) = [p_z, q_z],$$

e, portanto, $i(x +_{\text{II}Q} y) \subseteq [p_z, q_z]$, o que é uma contradição. Conclui-se então que $x +_{\text{II}Q} y$ um objeto total de IIQ. Com um raciocínio análogo ao anterior, conclui-se que nas situações (iii) e (iv) $x +_{\text{II}Q} y$ é um objeto total de $\text{II}(Q)$. Analogamente prova-se o resultado para as outras operações. ♦

Da proposição 9.2.5 segue que:

10.1.2 Proposição

Para todo $x, y, z \in tot(\text{II}Q)$ são válidas as seguintes propriedades:
(i) comutatividade: $x +_{tot} y = y +_{tot} x$, $x \times_{tot} y = y \times_{tot} x$;
(ii) associatividade:

$$(x +_{tot} y) +_{tot} z = x +_{tot} (y +_{tot} z),\ (x \times_{tot} y) \times_{tot} z = x \times_{tot} (y \times_{tot} z).$$

Considere agora os objetos totais $x_0 = \{[p,q] \in IQ | p \leq 0 \leq q\}$ e $x_1 = \{[p', q'] \in IQ | p' \leq 1 \leq q'\}$. Tem-se que x_0 é o único elemento neutro da adição e x_1 é o único elemento identidade da multiplicação em $tot(\text{II}Q)$, isto é:

10.1.3 Proposição

Para todo x, y $tot(\text{II}Q)$, é válido que:
(i) $x +_{tot} x_N = x_N +_{tot} x = x \Leftrightarrow x_N = x_0$;
(ii) $x \times_{tot} x_I = x_I \times_{tot} x = x \Leftrightarrow x_I = x_1$.
prova:

Mostra-se primeiramente (i). Seja $X \in x +_{tot} x_0$. Então tem-se que $X \in x +^q_{tot} x_0$. Assim, existe $[p,q] \in x$, com $i(x) \subseteq [p,q]$, e existe $[p', q'] \in x_0$, com $p' \leq 0 \leq q'$, tal que $X = [p + p', q + q']$. Tem-se então que $p + p' \leq p \leq q \leq q + q'$. Portanto, é válido que $X \approx [p,q]$, $i(x) \subseteq X$, e, conseqüentemente, $X \in x$. Logo, conclui-se que $x +_{tot} x_0 \subseteq x$. Raciocínio análogo leva a conclusão de que $x_0 +_{tot} x \subseteq x$. Considere agora $X = [p,q] \in x$, com $i(x) \subseteq [p,q]$, e seja $Y = [p', q'] \in x$, com $i(x) \subseteq [p', q']$, tal que $p \leq p' \leq q' \leq q$. Então, é válido que $X = [p' + (p - p'), q' + (q - q')]$, onde $p - p' \leq 0 \leq q - q'$, ou seja, $[p - p', q - q'] \in x_0$. Portanto, tem-se que $X \in x +_{tot} x_0$.

Logo, conclui-se que $x \subseteq x +_{tot} x_0$. Raciocínio análogo leva a conclusão de que $x \subseteq x_0 +_{tot} x$. Portanto, $x +_{tot} x_0 = x_0 +_{tot} x = x$.

Por outro lado, suponha que $x +_{tot} x_N = x_N +_{tot} x = x$. Tem-se que $i(x +_{tot} x_N) = i(x_N +_{tot} x) = i(x)$. Pela proposição 9.2.6, segue que $i(x_N) = [0,0]$. Conclui-se então que $N = [0,0]$.

Mostra-se agora (ii). Seja $X \in x \times_{tot} x_1$. Então, tem-se que $X \in x \times^q_{tot} x_1$. Assim, existe $[p,q] \in x$, com $i(x) \subseteq [p,q]$, e existe $[p',q'] \in x_1$, com $p' \leq 1 \leq q'$, tal que $X = [min\{p \cdot p', p \cdot q', q \cdot p', q \cdot q'\}, max\{p \cdot p', p \cdot q', q \cdot p', q \cdot q'\}]$. Então, é válido que

$$min\{p \cdot p', p \cdot q', q \cdot p', q \cdot q'\} \leq min\{p,q\} = p$$
$$\leq q \leq max\{p,q\} \leq max\{p \cdot p', p \cdot q', q \cdot p', q \cdot q'\}$$

Portanto, tem-se que $X \approx [p,q]$, $i(x) \subseteq X$, e, conseqüentemente, $X \in x$. Logo, conclui-se que $x \times_{tot} x_1 \subseteq x$. Raciocínio análogo leva a conclusão de que $x_1 \times_{tot} x \subseteq x$. Considere agora $X = [p,q] \in x$, $i(x) \subseteq [p,q]$, e seja $Y = [p',q'] \in x$, com $i(x) \subseteq [p',q']$, tal que $p \leq p' \leq q' \leq q$. Então, é válido que

$$X = \left[min\left\{ p' \cdot \frac{p}{p'}, p' \cdot \frac{q}{q'}, q' \cdot \frac{p}{p'}, q' \cdot \frac{q}{q'} \right\}, max\left\{ p' \cdot \frac{p}{p'}, p' \cdot \frac{q}{q'}, q' \cdot \frac{p}{p'}, q' \cdot \frac{q}{q'} \right\} \right],$$

onde $\frac{p}{p'} \leq 1 \leq \frac{q}{q'}$, ou seja, $\left[\frac{p}{p'}, \frac{q}{q'} \right] \in X_1$. Portanto, tem-se que $X \in x \times_{tot} x_1$. Logo, conclui-se que $x \subseteq x \times_{tot} x_1$. Raciocínio análogo leva a conclusão de que $x \subseteq x_1 \times_{tot} x$. Portanto, $x \times_{tot} x_1 = x_1 \times_{tot} x = x$.

Por outro lado, suponha então que $x \times_{tot} x_I = x_I \times_{tot} x = x$. Tem-se então que $i(x \times_{tot} x_I) = i(x_I \times_{tot} x) = i(x)$. Pela proposição 6.3.17, segue que $i(x_I) = [1,1]$. Conclui-se então que $I = [1,1]$. ♦

Mostra-se agora a existência de elementos simétricos e inversíveis. Tem-se que:

10.1.4 Proposição

Para todo $x \in tot(\text{II}Q)$, é válido que:

(i) x é simetrizável: existe um único $(-x) \in tot(\text{II}Q)$, tal que

$$x +_{tot} (-x) = (-x) +_{tot} x = x_0.$$

(ii) se $i(x) \neq 0$, então x é inversível: existe um único $(x)^{-1} \in tot(\text{II}Q)$, tal que

$$x \times_{tot} (x)^{-1} = (x)^{-1} \times_{tot} x = x_1.$$

prova:

Prova-se (i). Desenvolvendo-se $x +_{tot} (-x) = x_0$, obtém-se a quasi-adição $x +^q_{\text{II}Q} (-x) = \{[p + p', q + q'] \in IQ \| [p,q] \in x \wedge [p',q'] \in (-x)\}$, com

$$i(x +_{\text{II}Q}^{q} (-x)) = i\left(x +_{tot}^{\bar{q}} (-x)\right) = i\left(x +_{tot} (-x)\right) = i(x_0) = 0 .$$

Logo, conclui-se que para todo $[p,q] \in x$ e $[p',q'] \in (-x)$, é válido que $p + p' \leq 0$ e $q + q' \geq 0$. Logo, tem-se que $p' \leq -p$ e $-q \leq q'$, isto é, para cada $[p,q] \in x$ e $[p',q'] \in (-x)$, existe $[-q,-p] \in (-x)$, com $[p',q'] \approx [-q,-p]$. Portanto, tem-se que $(-x) = \{[-q,-p] \in IQ | [p,q] \in x\}$ é elemento simétrico de x. Por outro lado,

$$\begin{aligned}(-x) +_{\text{II}Q}^{q} x &= \{[p-q, q-p] \in IQ | [p,q] \in x\} \\ &\subseteq \{[p'',q''] \in IQ | p'' \leq 0 \leq q''\} = x_0,\end{aligned}$$

pois $p - q \leq 0 \leq q - p$, e, portanto, $(-x) +_{tot} x = (-x) +_{\text{II}Q}^{\bar{q}} x = x_0$.

Ainda, para mostrar a unicidade do elemento simétrico, suponha que exista $y \in tot(\text{II}Q)$, $y \neq (-x)$, tal que $x +_{tot} y = y +_{tot} x = x_0$. Por 1.1.2 (ii) e 1.1.3 (i), tem-se $(y +_{tot} x) +_{tot} (-x) = x_0 +_{tot} (-x) = (-x)$ e $y +_{tot} (x +_{tot} (-x)) = y +_{tot} x_0 = y$, e, portanto, conclui-se que $(-x) = y$, o que é uma contradição. Portanto, o elemento simétrico é único.

Para provar (ii), desenvolve-se $x \times_{tot} (x)^{-1} = x_1$, obtendo-se a quasi-multiplicação

$$x \times_{\text{II}Q}^{q} (x)^{-1} = \{[min\partial, max\partial] \in IQ | [p,q] \in x \wedge [p',q'] \in (x)^{-1}\},$$

onde $\partial = \{p \cdot p', p \cdot q', q \cdot p', q \cdot q'\}$, com

$$i\left(x \times_{\text{II}Q}^{q} (x)^{-1}\right) = i\left(x \times_{\text{II}Q}^{\bar{q}} (x)^{-1}\right) = i\left(x \times_{tot} (x)^{-1}\right) = i(x_1) = 1 .$$

Então conclui-se que

$$min\{p \cdot p', p \cdot q', q \cdot p', q \cdot q'\} = p'' \leq 1 \text{ e } max\{p \cdot p', p \cdot q', q \cdot p', q \cdot q'\} = q'' \geq 1.$$

Logo, como $p,q \neq 0$ e considerando-se todas as possibilidades, sempre ocorre que $p' \leq \dfrac{1}{p}$ e $\dfrac{1}{q} \leq q'$, isto é, $[p',q'] \approx [1/q, 1/p]$. Portanto,

$$(x)^{-1} = \{[1/q, 1/p] \in IQ | [p,q] \in x \wedge 0 \notin [p,q]\}$$

é elemento inverso de x. Por outro lado, fazendo $\alpha = \{p \cdot 1/q, p \cdot 1/p, q \cdot 1/q, q \cdot 1/p\}$, então

$$\begin{aligned}(x)^{-1} \times_{\text{II}Q}^{q} x &= \{[min\alpha, max\alpha] \in IQ | [p,q] \in x\} \\ &= \{[min\{p/q, q/p, 1\}, max\{p/q, q/p, 1\}] \in IQ | [p,q] \in x\} \\ &\subseteq \{[p'',q''] \in IQ | p'' \leq 1 \leq q''\} = x_1,\end{aligned}$$

pois $min\{p/q, q/p, 1\} \leq 1 \leq max\{p/q, q/p, 1\}$, e, portanto, $(x)^{-1} \times_{tot} x = (x)^{-1} \times_{\text{II}Q}^{\bar{q}} x = x_1$.

Ainda, para mostrar a unicidade do elemento inverso, suponha que exista $y \in tot(\Pi Q)$, $y \neq (x)^{-1}$, tal que $x \times_{tot} y = y \times_{tot} x = x_1$. Por 1.1.2 (ii) e 1.1.3 (ii), desenvolve-se

$$\left(y \times_{tot} x\right) \times_{tot} (x)^{-1} = x_1 \times_{tot} (x)^{-1} = (x)^{-1} \text{ e } y \times_{tot} \left(x \times_{tot} (x)^{-1}\right) = y \times_{tot} x_1 = y,$$

e, portanto, $(x)^{-1} = y$, o que é uma contradição. Assim, o elemento inverso é único. ♦

Finalmente, mostra-se a distributividade:

10.1.5 Proposição

A operação da multiplicação é distributiva em relação à adição, isto é, para todo $x, y, z \in tot(\Pi Q)$, tem-se que $x \times_{tot} \left(y +_{tot} z\right) = \left(x \times_{tot} y\right) +_{tot} \left(x \times_{tot} z\right)$.

prova:

Observe que

$$\begin{aligned} x \times^q_{\Pi Q} \left(y +^q_{\Pi Q} z\right) &= x \times^q_{\Pi Q} \left\{[p' + p'', q' + q''] \in IQ \middle| [p', q'] \in y \wedge [p'', q''] \in z\right\} \\ &= \left\{[min\partial, max\partial] \in IQ \middle| [p,q] \in x, [p', q'] \in y \wedge [p'', q''] \in z\right\}, \end{aligned}$$

onde $\partial = \{p \cdot (p' + p''), p \cdot (q' + q''), q \cdot (p' + p''), q \cdot (q' + q'')\}$ e

$$\begin{aligned} \left(x \times^q_{\Pi Q} y\right) +^q_{\Pi Q} \left(x \times^q_{\Pi Q} z\right) &= \left\{[min\beta_1, max\beta_1] \in IQ \middle| [p,q] \in x \wedge [p', q'] \in y\right\} \\ &\quad +^q_{\Pi Q} \left\{[min\beta_2, max\beta_2] \in IQ \middle| [p,q] \in x \wedge [p'', q''] \in z\right\} \\ &= \left\{[min\beta_1 + min\beta_2, max\beta_1 + max\beta_2] \in IQ \middle| \right. \\ &\qquad \left. [p,q] \in x, [p', q'] \in y \wedge [p'', q''] \in z\right\}, \end{aligned}$$

onde $\beta_1 = \{p \cdot p', p \cdot q', q \cdot p', q \cdot q'\}$ e $\beta_2 = \{p \cdot p'', p \cdot q'', q \cdot p'', q \cdot q''\}$. Como

$$\begin{aligned} min\beta_1 + min\beta_2 &= min\{p \cdot p', p \cdot q', q \cdot p', q \cdot q'\} + min\{p \cdot p'', p \cdot q'', q \cdot p'', q \cdot q''\} \\ &\leq min\{p \cdot p' + p \cdot p'', p \cdot q' + p \cdot q'', q \cdot p' + q \cdot p'', q \cdot q' + q \cdot q''\} \\ &= min\partial \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} max\beta_1 + max\beta_2 &= max\{p \cdot p', p \cdot q', q \cdot p', q \cdot q'\} + max\{p \cdot p'', p \cdot q'', q \cdot p'', q \cdot q''\} \\ &\geq max\{p \cdot p' + p \cdot p'', p \cdot q' + p \cdot q'', q \cdot p' + q \cdot p'', q \cdot q' + q \cdot q''\} \\ &= max\partial \end{aligned}$$

então $[min\partial, max\partial] \approx [min\beta_1 + min\beta_2, max\beta_1 + max\beta_2]$. Tem-se que

$$x \times^q_{\Pi Q} \left(y +^q_{\Pi Q} z\right) = \left(x \times^q_{\Pi Q} y\right) +^q_{\Pi Q} \left(x \times^q_{\Pi Q} z\right),$$

e, portanto, $x \times_{tot} \left(y +_{tot} z\right) = \left(x \times_{tot} y\right) +_{tot} \left(x \times_{tot} z\right)$. ♦

Pelas proposições 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4 e 1.1.5, conclui-se que $\left(tot(\Pi Q), +_{tot}, \times_{tot}, x_0, x_1\right)$ constitui um corpo. A conseqüência imediata das propriedades apresentadas pelas operações algébricas definidas na estrutura de aplicação

$\left(\Lambda_{tot(\amalg Q)};\Sigma^{ap}_{tot(\amalg Q)}\right)$ do subsistema $\mathrm{tot}_{\amalg Q}$ dos objetos totais do espaço coerente bi-estruturado de intervalos racionais é que:

10.1.6 Corolário

$\mathrm{tot}_{\amalg Q}$ é um Σ_{ap} -corpo. ♦

10.2 As Propriedades da Relação de Posição e o Σ_{ap}-Corpo Ordenado do Subsistema dos Objetos Totais

Nesta seção mostra-se que o subsistema dos objetos totais $\mathrm{tot}_{\amalg Q}=\left(\Lambda_{tot(\amalg Q)};\Sigma^{in}_{tot(\amalg Q)};\Sigma^{ap}_{tot(\amalg Q)}\right)$, com $\Lambda_{tot(\amalg Q)}\in\{tot(\amalg Q),\wp(tot(\amalg Q))\}$, é um Σ_{ap} -corpo ordenado, ou seja, a estrutura de aplicação $\left(\Lambda_{tot(\amalg Q)};\Sigma^{ap}_{tot(\amalg Q)}\right)$ apresenta-se como um corpo ordenado.

A relação de posição $\leq_{\amalg Q}$ relativa ao subsistema dos objetos totais é dada por

$$x\leq_{tot} y\Leftrightarrow x<_{tot} y \text{ ou } x=y\text{, onde } x<_{tot} y \Leftrightarrow \exists X\in x,\exists Y\in y, X<_{IQ} Y,$$

e $<_{IQ}$ é a relação de posição definida em 9.1.1 (i) para o conjunto de intervalos racionais IQ. Segue que:

10.2.1 Proposição

$\leq_{tot}$ é uma relação de ordem total.

prova:

Da proposição 9.2.4 tem-se que $\leq_{tot}$ é uma relação de ordem parcial.

Suponha agora que $\leq_{tot}$ não seja uma relação de ordem total. Então existem $x,y\in tot(\amalg Q)$ tal que $x\not\leq_{tot} y$ e $y\not\leq_{tot} x$. Portanto, tem-se $x\neq y$ e não existem $[p,q]\in x$ e $[p',q']\in y$ tal que $q<_Q p'$ e $q'<p$. Isto quer dizer que para todo $[p,q]\in x$ e $[p',q']\in y$, tem-se que $p'\leq q$ e $p\leq q'$, ou seja, $[p,q]\approx[p',q']$. Conclui-se então que $x=y$, o que é uma contradição. Logo, tem-se que $\leq_{tot}$ é uma relação de ordem total. ♦

Pelo corolário 1.1.6 e a proposição 1.2.1, conclui-se que $\left(tot(\amalg Q),+_{tot},\times_{tot},x_0,x_1,\leq_{tot}\right)$ constitui um corpo ordenado. A conseqüência imediata das propriedades apresentadas pelas operações algébricas e a relação de posição definidas na estrutura de aplicação $\left(\Lambda_{tot(\amalg Q)};\Sigma^{ap}_{tot(\amalg Q)}\right)$ do subsistema $\mathrm{tot}_{\amalg Q}$ dos objetos totais do espaço coerente bi-estruturado de intervalos racionais é que:

10.2.2 Corolário

$\mathrm{tot}_{\amalg Q}$ é um Σ_{ap} -corpo ordenado. ♦

10.3 O Σ_{ap}-Corpo Ordenado Completo do Subsistema dos Objetos Totais

Nesta seção mostra-se que o subsistema dos objetos totais $\text{tot}_{\text{IIQ}} = \left(\Lambda_{tot(\text{II}Q)}; \Sigma^{in}_{tot(\text{II}Q)}; \Sigma^{ap}_{tot(\text{II}Q)}\right)$, com $\Lambda_{tot(\text{II}Q)} \in \{tot(\text{II}Q), \wp(tot(\text{II}Q))\}$, é um Σ_{ap}-corpo ordenado completo, ou seja, a estrutura de aplicação $\left(\Lambda_{tot(\text{II}Q)}; \Sigma^{ap}_{tot(\text{II}Q)}\right)$ apresenta-se como um corpo ordenado completo.

Para isso é necessário provar que qualquer subconjunto não-vazio de objetos totais, limitado superiormente, possui um supremo que também é um objeto total. Tem-se então o seguinte resultado:

10.3.1 Proposição

Seja $F = \{x_i \in tot(\text{II}Q) | i \in I\}$ uma família não vazia de objetos totais. Então:
(i) se F é majorada, então F tem supremo em $tot(\text{II}Q)$;
(ii) se F é minorada, então F tem ínfimo em $tot(\text{II}Q)$.
prova:

Como F é majorada, então o conjunto dos majorantes de F pode ser dado por $M(F) = \{x_M \in tot(\text{II}Q) | \forall i \in I, x_i \leq_{tot} x_M\}$. Portanto, para todo $i \in I$ e $x_M \in M(F)$, $x_i = x_M$, ou existe $[p_i, q_i] \in x_i$ e existe $[p_M, q_M] \in x_M$ tal que $[p_i, q_i] <_{IQ} [p_M, q_M]$, isto é, $q_i < p_M$. Mostra-se que o supremo de F existe em $tot(\text{II}Q)$ e é dado por

$$x_{\text{sup}} = \{[p_s, q_M] \in IQ | p_s < p_i \text{ para algum } [p_i, q_i] \in x_i \text{ e } i \in I, [p_M, q_M] \in x_M\}.$$

Mostra-se que x_{sup} é um conjunto coerente de intervalos racionais. Dados $[p_s, q_M], [p'_s, q'_M] \in x_{\text{sup}}$ tem-se que existem $[p_i, q_i] \in x_i$ e $[p'_M, q'_M] \in x_M$ com $[p_i, q_i] = [p'_M, q'_M]$ ou $p_i \leq q_i < p'_M \leq q'_M$, e existem $[p'_i, q'_i] \in x_i$ e $[p_M, q_M] \in x_M$ com $[p'_i, q'_i] = [p_M, q_M]$ ou $p'_i \leq q'_i < p_M \leq q_M$, tal que $p_s \leq p_i$ e $p'_s \leq p'_i$. Portanto, $[p_s, q_i] = [p'_M, q'_M]$ ou $p_s \leq p_i \leq q_i < p'_M \leq q'_M$, e $[p'_s, q'_i] = [p_M, q_M]$ ou $p'_s \leq p'_i \leq q'_i < p_M \leq q_M$. Logo, tem-se que $p_s \leq q'_M$ e $p'_s \leq q_M$, ou seja, $[p_s, q_M] \approx [p'_s, q'_M]$.

Suponha agora que x_{sup} não é objeto total. Então existe $y \in \text{II}Q$ tal que $x_{\text{sup}} \subseteq y$ e $x_{\text{sup}} \neq y$. Logo, existe $[p,q] \in y$ tal que, para todo $[p_s, q_M] \in x_{\text{sup}}$, $[p,q] \approx [p_s, q_M]$, mas $[p,q] \notin x_{\text{sup}}$. Portanto, para todos $i \in I$, $[p_i, q_i] \in x_i$, $p_s \leq p_i$,$[p_M, q_M] \in x_M$ e $x_M \in M(F)$, tem-se que $[p,q] \approx [p_s, q_M]$. Tem-se que $p \leq q_M$ e $p_s \leq q$, mas, como $[p,q] \notin x_{\text{sup}}$, então ocorre pelo menos uma das seguintes situações: (1) não existe $x_M \in M(F)$ tal que exista $[p', q] \in x_M$ ou (2) não existe $i \in I$ tal que $p \leq p_i$ e $[p_i, q'] \in x_i$. Supor que aconteça a situação (1). Então existe x_s, $x_s < x_M$ para todo

$x_M \in M(F)$, tal que existe $[p_s, q_s] \in x_s$ com $[p', q] <_{IQ} [p_s, q_s]$, ou seja, $q < p_s$. Logo, $[p, q] \not\approx [p_s, q_M]$, para qualquer $[p_M, q_M] \in x_M$ e $x_M \in M(F)$, o que é uma contradição.

Supor agora que ocorra a situação (2). Então existe $x'_M \in M(F)$ tal que existe $[p'_M, q'_M] \in x'_M$ com $[p'_M, q'_M] <_{IQ} [p, q']$, ou seja, $q'_M < p$. Logo, $[p, q] \not\approx [p_s, q'_M]$, para qualquer $p_s \leq p_i$, $i \in I$, $[p_i, q_i] \in x_i$, o que é outra contradição. Conclui-se então $[p, q] \in x_{\sup}$ e $x_{\sup}$ é objeto total.

Mostra-se agora que $x_{\sup}$ é um majorante de *F*. Suponha então $x_i \in F$. Como $tot(\Pi Q)$ é totalmente ordenado, então (1) existe $x_j \in F$ tal que $x_i < x_j$ ou (2) para todo $x_j \in F$, $x_j \leq x_i$. Supor (1). Então existe $x_j \in F$ tal que existem $[p_i, q_i] \in x_i$ e $[p_j, q_j] \in x_j$ com $[p_i, q_i] <_{IQ} [p_j, q_j]$, isto é, $q_i < p_j$. Portanto, existe $[p_i, q_i] \in x_i$ tal que $[p_i, q_i] <_{IQ} [p_j, q_M]$, para algum $[p_M, q_M] \in x_M$ e $[p_j, q_j] \in x_j$. Logo, $x_i < x_{\sup}$, ou seja, $x_{\sup}$ é um majorante de *F*. Supor agora a situação (2). Neste caso, x_i é majorante de *F* e, portanto, $x_i \in M(F)$. Então, tem-se que

$$x_i = \left\{ [p_i, q_{M_i}] \middle| [p_i, q_i] \in x_i, [p_M, q_{M_i}] \in x_i \right\} \subseteq x_{\sup}.$$

Além disso, como $x_{\sup}$ é conjunto coerente, então dados $[p, q] \in x_{\sup}$, tem-se que $[p, q] \approx [p_i, q_{M_i}]$, para todo $[p_i, q_{M_i}] \in x_{\sup}$. Portanto, $[p, q] \approx [p_i, q_{M_i}]$ para todo $[p_i, q_{M_i}] \in x_i$. Assim, como x_i é maximal, conclui-se que $[p, q] \in x_i$, ou seja, $x_{\sup} \subseteq x_i$. Portanto, $x_i = x_{\sup}$. Logo, conclui-se que para todo $x_i \in F$, $x_i \leq x_{\sup}$, ou seja, neste caso $x_{\sup}$ também é um majorante de *F*.

Seja agora $x'_M \in M(F)$ outro majorante de *F* tal que $x'_M < x_{\sup}$. Então existe $[p'_M, q'_M] \in x'_M$ e existe $[p_s, q_M] \in x_{\sup}$ tal que $[p'_M, q'_M] <_{IQ} [p_s, q_M]$. Logo, tem-se que $p'_M \leq q'_M < p_s \leq p_i$, para algum $[p_i, q_i] \in x_i$. Portanto, existe $x_i \in F$, tal que existem $[p_i, q_i] \in x_i$ e $[p'_M, q'_M] \in x'_M$ com $[p'_M, q'_M] <_{IQ} [p_i, q_i]$. Tem-se então que $x'_M < x_i$, o que é uma contradição, pois $x'_M \in M(F)$ é majorante de *F*. Logo, conclui-se que $x_{\sup} \leq x'_M$, para todo $x'_M \in M(F)$, isto é, $x_{\sup}$ é o menor dos majorantes de *F*. Portanto, $x_{\sup}$ é o supremo de *F* em $tot(\Pi Q)$.

De maneira análoga, utilizando-se as propriedades duais, prova-se (ii). ♦

Pelo corolário 1.2.2 e a proposição 1.3.1, conclui-se que $(tot(\Pi Q), +_{tot}, \times_{tot}, x_0, x_1, \leq_{tot})$ constitui um corpo ordenado completo. A conseqüência imediata das propriedades apresentadas pelas operações algébricas e a relação de posição definidas na estrutura de aplicação $\left(\Lambda_{tot(\Pi Q)}; \Sigma^{ap}_{tot(\Pi Q)}\right)$ do subsistema $\mathsf{tot}_{\Pi Q}$ dos objetos totais do espaço coerente bi-estruturado de intervalos racionais é que:

10.3.2 Corolário

tot$_{IIQ}$ é um Σ_{ap} -corpo ordenado completo. ♦

10.4 O Σ_{ap} -Isomorfismo entre o Subsistema tot dos Objetos Totais e o Sistema R dos Números Reais

Observa-se aqui que os axiomas para um corpo ordenado completo são categóricos. Isto significa que quaisquer dois corpos ordenados completos são idênticos, exceto possivelmente pela simbologia adotada. Cada um deles apresenta um elemento "zero" e um elemento "um", e também um conjunto de "números naturais", um conjunto de "números inteiros" e um conjunto de "números racionais". É possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de dois corpos ordenados completos. Após esta correspondência ser estabelecida para todos os "números racionais", o axioma da completeza garante a extensão da correspondência para todos os elementos pertencentes aos dois corpos em questão. Diz-se assim que quaisquer dois corpos ordenados são isomorfos, ou são idênticos a menos de um isomorfismo. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Conseqüentemente:

10.4.1 Corolário

Existe um Σ_{ap} -isomorfismo Φ: $\mathbb{R} \cup \wp(\mathbb{R}) \cong_{ap} tot(\Pi Q) \cup \wp(tot(\Pi Q))$, isto é, tot$_{IIQ}$ $\cong_{ap}$ R.

Agora, apresenta-se-se a definição de tal Σ_{ap} -isomorfismo.

10.4.2 Definição. Conjunto Coerente Ligado

Seja IQ o conjunto dos intervalos racionais. Para cada $w \in \mathbb{R}$, define-se $x_w = \{[p,q] \in IQ | p \leq w \leq q\}$ como o conjunto dos intervalos racionais ligado a w, ou w-ligado. $X_Q = \{x_r | r \in Q\}$ é a família dos conjuntos ligados a racionais e $X_{\overline{Q}} = \{x_{\overline{r}} | \overline{r} \in (\mathbb{R} - Q)\}$ é a família dos conjuntos não ligados a racionais (ligados a algum número não racional). ♦

Considere a função Φ: $\mathbb{R} \cup \wp(\mathbb{R}) \rightarrow tot(\Pi Q) \cup \wp(tot(\Pi Q))$, definida por

$$\Phi(w) = \begin{cases} x_w & \text{se } w \in \mathbb{R}, \\ \{x_{w'} \in tot(\Pi Q) | w' \in w\} & \text{se } w \in \wp(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Tem-se que:

10.4.3 Proposição

A função Φ é bijetora.

prova:

Tem-se que Φ é bem definida, pois para todo real w é possivel obter $\Phi(w) \in tot(\Pi Q)$, tal que se $w \in Q$ então $\Phi(w) \in X_Q$ e, em caso contrário, se $w \in (\mathbb{R}-Q)$, então $\Phi(w) \in tot(\Pi) - X_Q = X_{\overline{Q}}$. Além disso, dados os reais w_1 e w_2, se $\Phi(w_1) \neq \Phi(w_2)$ então (i) existe $[p_1,q_1] \in \Phi(w_1)$ tal que $[p_1,q_1] \notin \Phi(w_2)$ ou (ii) existe $[p_2,q_2] \in \Phi(w_2)$ tal que $[p_2,q_2] \notin \Phi(w_1)$. Supor que ocorra (i). Então tem-se que $p_1 \leq w_1 \leq q_1$, e $q_1 < w_2$ ou $w_2 < p_1$. Logo, $p_1 \leq w_1 \leq q_1 < w_2$ ou $w_2 < p_1 \leq w_1 \leq q_1$, e, portanto, $w_1 \neq w_2$. Analogamente, supondo a situação (ii), obtém-se o mesmo resultado.

Mostra-se agora que Φ é injetora. Sejam então $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ tal que $w_1 \neq w_2$. Se $w_1, w_2 \in Q$, então $w_1 = i(x_{w_1}) \neq w_2 = i(x_{w_2})$. Então somente pode ocorrer que $w_1 = i(x_{w_1}) < w_2 = i(x_{w_2})$ ou $w_2 = i(x_{w_2}) < w_1 = i(x_{w_1})$. Isto significa que somente pode-se ter $x_{w_1} <_{tot} x_{w_2}$ ou $x_{w_2} <_{tot} x_{w_1}$, e, portanto, $\Phi(w_1) \neq \Phi(w_2)$.

Suponha então que $w_1, w_2 \in (\mathbb{R}-Q)$ e $w_1 < w_2$. Como Q é denso em $\mathbb{R}$, existem $p_1, q_1, p_2, q_2 \in Q$ tal que $p_1 < w_1 < q_1 \leq p_2 < w_2 < q_2$. Assim, existe $[p_1,q_1] \in \Phi(w_1)$ tal que $[p_1,q_1] \notin \Phi(w_2)$ e existe $[p_2,q_2] \in \Phi(w_2)$ tal que $[p_2,q_2] \notin \Phi(w_1)$. Portanto, tem-se que $\Phi(w_1) \neq \Phi(w_2)$. Analogamente mostra-se que se $w_1, w_2 \in (\mathbb{R}-Q)$ e $w_2 < w_1$ então $\Phi(w_1) \neq \Phi(w_2)$. Analogamente prova-se o resultado para $w_1, w_2 \in \wp(\mathbb{R})$. Logo, Φ é injetora.

Para mostrar que Φ é sobrejetora, suponha agora $y \in tot(\Pi Q)$. Observe que para todo $y \in X_Q$, existe $r \in Q$, com $p \leq r \leq q$, $p,q \in Q$, tal que $y = \Phi(r) = x_r = \{[p,q] \in IQ | p \leq r \leq q\}$. Considere agora $y \in X_{\overline{Q}}$. Então não existe $r \in Q$ tal que para todo $[p,q] \in y$ ocorra que $p \leq r \leq q$. Logo, tem-se que

$$\bigcap_{[p,q]\in y} [p,q] = \varnothing$$

em IQ, ou seja, $i(y) = \varnothing$ Entretanto, como $\mathbb{R}$ é completo, existe $\bar{r} \in (\mathbb{R}-Q)$, com $p < \bar{r} < q$ para todo $[p,q] \in y$, tal que $y = \Phi(\bar{r}) = x_{\bar{r}} = \{[p,q] \in IQ | p < \bar{r} < q\}$. Analogamente prova-se o resultado para $w_1, w_2 \in \wp(\mathbb{R})$. Portanto, Φ é sobrejetora. Conclui-se assim que Φ é bijetora. ♦

10.4.4 Proposição

A função Φ é um homomorfismo forte de **R** em **tot**$_{\Pi Q}$.
prova:

Considere primeiramente a relação de posição.

Se $w_1, w_2 \in Q$ e $w_1 \leq_Q w_2$, então $w_1 = i(x_{w_1}) \leq_Q w_2 = i(x_{w_2})$. Isto significa que somente pode-se ter $x_{w_1} \leq_{tot} x_{w_2}$, e, portanto, $\Phi(w_1) \leq_{tot} \Phi(w_2)$. Da mesma forma, se $\Phi(w_1) \leq_{tot} \Phi(w_2)$ então $w_1 \leq_Q w_2$.

Suponha então que $w_1, w_2 \in (\mathbb{R}-Q)$ e $w_1 \leq_{\mathbb{R}} w_2$. Logo $w_1 = w_2$ ou, como Q é denso em $\mathbb{R}$, existem $p_1, q_1, p_2, q_2 \in Q$ tal que $p_1 < w_1 < q_1 \leq p_2 < w_2 < q_2$. Assim, $\Phi(w_1) = \Phi(w_2)$ ou existe $[p_1, q_1] \in \Phi(w_1)$ e existe $[p_2, q_2] \in \Phi(w_2)$ tal que $[p_1, q_1] <_{IQ} [p_2, q_2]$. Portanto, neste caso, tem-se que $\Phi(w_1) \leq_{tot} \Phi(w_2)$.

Considere agora o caso em que $w_1 \in Q, w_2 \in (\mathbb{R}-Q)$ e $w_1 \leq_{\mathbb{R}} w_2$. Então somente pode ser $w_1 <_{\mathbb{R}} w_2$. Logo existem $p, p_2, q_2 \in Q$ tal que $p \leq w_1 \leq p_2 < w_2 < q_2$. Assim, existe $[p, p_2] \in \Phi(w_1)$ e existe $[p_2, q_2] \in \Phi(w_2)$ tal que $[p, p_2] <_{IQ} [p_2, q_2]$. Portanto, neste caso, tem-se que $\Phi(w_1) \leq_{tot} \Phi(w_2)$. Analogamente, prova-se que se $w_1 \in (\mathbb{R}-Q), w_2 \in Q$ e $w_1 \leq_{\mathbb{R}} w_2$ então $\Phi(w_1) \leq_{tot} \Phi(w_2)$.

Inversamente, suponha que $\Phi(w_1), \Phi(w_2) \in X_{\overline{Q}}$ e $\Phi(w_1) \leq_{tot} \Phi(w_2)$. Então $\Phi(w_1) = \Phi(w_2)$ ou existem $[p_1, q_1] \in \Phi(w_1)$ e $[p_2, q_2] \in \Phi(w_2)$ tal que $[p_1, q_1] <_{IQ} [p_2, q_2]$. Logo $w_1 = w_2$ ou $p_1 < w_1 < q_1 \leq p_2 < w_2 < q_2$. Portanto, tem-se que $w_1 \leq_{\mathbb{R}} w_2$.

Se, no entanto, $\Phi(w_1) \in X_Q, \Phi(w_2) \in X_{\overline{Q}}$ e $\Phi(w_1) \leq_{tot} \Phi(w_2)$, então somente pode ser $\Phi(w_1) <_{tot} \Phi(w_2)$. Então existe $[p_1, q_1] \in \Phi(w_1)$ e existe $[p_2, q_2] \in \Phi(w_2)$ tal que $[p_1, q_1] <_{IQ} [p_2, q_2]$. Logo tem-se que $w_1 < q_1 \leq p_2 < w_2$, isto é, $w_1 <_{\mathbb{R}} w_2$. Analogamente, prova-se que se $\Phi(w_1) \in X_{\overline{Q}}, \Phi(w_2) \in X_Q$ e $\Phi(w_1) \leq_{tot} \Phi(w_2)$ então $w_1 <_{\mathbb{R}} w_2$.

Considere agora as operações algébricas e sejam $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$. Observe que:

$$\Phi(w_1 +_{\mathbb{R}} w_2) = x_{w_1 +_{\mathbb{R}} w_2} = \{[p,q] \in IQ \mid p \leq w_1 +_{\mathbb{R}} w_2 \leq q\}.$$

Agora, calcula-se

$$\begin{aligned}
\Phi(w_1) +_{tot} \Phi(w_2) &= x_{w_1} \overset{q}{+}_{\text{II}Q} x_{w_2} \\
&= \{[p_1, q_1] \in IQ \mid p_1 \leq w_1 \leq q_1\} \overset{q}{+}_{\text{II}Q} \{[p_2, q_2] \in IQ \mid p_2 \leq w_2 \leq q_2\} \\
&= \{[p_1 + p_2, q_1 + q_2] \in IQ \mid p_1 + p_2 \leq w_1 +_{\mathbb{R}} w_2 \leq q_1 + q_2\} \\
&= \{[p,q] \in IQ \mid p \leq w_1 +_{\mathbb{R}} w_2 \leq q\}, \text{ onde } p = p_1 + p_2, q = q_1 + q_2 \\
&= \Phi(w_1 +_{\mathbb{R}} w_2).
\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se o resultado para as outras operações aritméticas.

Considere agora as funções unárias e sejam $w_1 \in \mathbb{R}$, $f \in F$. Salienta-se que as funções unárias são sempre bem definidas em *tot*(IIQ) e, para todo $x \in$ *tot*(IIQ) e $f \in F$, tem-se que $f(x) \in$ *tot*(IIQ) [REI 97a]. Observe que:

$$\Phi(f_{\mathbb{R}}(w_1)) = x_{f_{\mathbb{R}}(w_1)} = \{[p,q] \in IQ \mid p \leq f_{\mathbb{R}}(w_1) \leq q\}.$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned}
f_{tot}(\Phi(w_1)) &= \hat{q}f_{\Pi Q}(x_{w_1}) \\
&= \hat{q}f_{\Pi Q}(\{[p_1,q_1] \in IQ | p_1 \le w_1 \le q_1\}) \\
&= \{f_{IQ}[p_1,q_1] \in IQ || p_1 \le w_1 \le q_1\} \\
&= \{[min\alpha, max\alpha] \in IQ | min\alpha \le f_{\mathbb{R}}(w_1) \le max\alpha\} \\
&= \{[p,q] \in IQ | p \le f_{\mathbb{R}}(w_1) \le q\}, \text{ onde } p = min\alpha, q = max\alpha \\
&= \Phi(f_{\mathbb{R}}(w_1)),
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \{f_Q(r) | p_1 \le r \le q_1\}$.

A prova para outros elementos da estrutura é análoga. Conclui-se que a função Φ é um homomorfismo forte de R em tot_{IIQ}. ♦

Como Φ é bijetiva, pela proposição 1.4.3, segue que:

10.4.5 Corolário

A função Φ é um Σ_{ap}-isomorfismo de R em tot_{IIQ}, isto é, $(tot(\Pi Q), \Sigma^{in}_{tot}, \Sigma^{ap}_{tot}) \cong_{ap} (\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$. ♦

10.4.6 Corolário

A estrutura de aplicação do subsistema dos objetos totais tot_{IIQ} pode ser identificada com o sistema do dos números reais R. ♦

Salienta-se que é possível dizer que $tot(\Pi Q)$ contém uma cópia dos racionais. Seja $X_Q = (\Lambda_{X_Q}; \Sigma^{in}_{X_Q}; \Sigma^{ap}_{X_Q})$, com $\Lambda_{X_Q} \in \{X_Q, \wp(X_Q)\}$, o subsistema de tot_{IIQ} dos conjuntos ligados a racionais, e considere a função Φ_Q: $Q \cup \wp(Q) \to X_Q \cup \wp(X_Q)$, definida por

$$\Phi_Q(r) = \begin{cases} x_r & \text{se } r \in Q, \\ \{x_{r'} \in tot(\Pi Q) | r' \in r\} & \text{se } r \in \wp(Q). \end{cases}$$

Observe que Φ_Q é a restrição do Σ_{ap} - isomorfismo Φ: R $\cong_{ap}$ tot_{IIQ} do corolário 1.4.5 ao subsistema X_Q. Das proposições 1.4.3 e 1.4.4, segue que Φ_Q é um homomorfismo forte injetor, e é imediato que Φ_Q é sobrejetora. Segue que:

10.4.7 Proposição

A função Φ_Q é um Σ_{ap}-isomorfismo de Q em X_Q. ♦

Seja $X_{\overline{Q}} = \left(\Lambda_{X_{\overline{Q}}}; \Sigma_{X_{\overline{Q}}}^{in}; \Sigma_{X_{\overline{Q}}}^{ap}\right)$, com $\Lambda_{X_{\overline{Q}}} \in \left\{X_{\overline{Q}}, \wp\left(X_{\overline{Q}}\right)\right\}$, o subsistema dos conjuntos não ligados a racionais (ligados a algum número não racional), $X_{\overline{Q}} = tot(\Pi Q) - X_Q$. Então, com um raciocínio análogo, pode-se concluir também que:

10.4.8 Proposição

Existe um Σ_{ap}-isomorfismo $\Phi_{\overline{Q}} : \overline{Q} \cup \wp(\overline{Q}) \to X_{\overline{Q}} \cup \wp\left(X_{\overline{Q}}\right)$, onde $\overline{Q} = \mathbb{R} - Q$. ♦

10.4.9 Observação

O subconjunto $X_Q \subset tot(\Pi Q)$ pode denotado simplesmente por Q, e seus elementos $x_r, r \in Q$, são identificados com os elementos de Q, isto é, $r \equiv x_r = \{[p,q] \in IQ | p \leq r \leq q\}$.

Conseqüentemente, os elementos do subconjunto $X_{\overline{Q}}$ são identificados com os números irracionais. Como estes elementos de $X_{\overline{Q}}$ são conjuntos de intervalos racionais não ligados a racionais, então diz-se que todo $x_{\bar{r}} \in X_{\overline{Q}}$ está ligado a algum irracional $\bar{r} \in (\mathbb{R} - Q)$. Então, para cada $\bar{r} \in (\mathbb{R} - Q)$ é possível obter um objeto total $x_{\bar{r}} = \{[p,q] \in IQ | p < \bar{r} < q\} \in X_{\overline{Q}}$. Por exemplo, observe que não existe número racional r tal que $r^2 = 2$. O número real r que satisfaz esta tal condição é portanto um número irracional, representado pelo símbolo $\sqrt{2}$, que pode ser identificado com o total $\bar{x}$ dado por:

$$
\begin{aligned}
r \equiv \bar{x} &= \left\{[p,q] \in IQ \left| \left(p \leq 0 \vee \left(p > 0 \wedge p^2 < 2\right)\right) \wedge \left(q > 0 \wedge q^2 > 2\right)\right.\right\} \\
&= \left\{[p,q] \in IQ \mid p < \sqrt{2} < q\right\} \\
&= x_{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Então, conhecido um número real w, pode-se utilizar a notação $x_w \in tot(\Pi Q)$, com $x_w = \{[p,q] \in IQ | p \leq w \leq q\}$, para representar o mesmo número. Assim tem-se que $\pi \in \mathbb{R}$ e $x_\pi \in tot(\Pi Q)$ representam o mesmo número, assim como $e \in \mathbb{R}$ e $x_e \in tot(\Pi Q)$. ♦

10.4.10 Proposição

Para todo $w \in \mathbb{R}$, os conjuntos $\left\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\right\}$ e $\left\{x_r' \in X_Q | x_w <_{tot} x_r'\right\}$ são cadeias e $w = \sup\left\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\right\} = \inf\left\{x_r' \in X_Q | x_w <_{tot} x_r'\right\}$.

prova:

Observa-se que o conjunto $\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$ é limitado superiormente, pois x_w é um majorante de $\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$. Entretanto $\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$ não possui elemento máximo. Para provar esta afirmação, suponha que exista $max\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\} = x_{max}$. Então para todo $x_s \in \{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$, $x_s = x_{max}$ ou existem $[p_s, q_s] \in x_s$ e $[p_{max}, q_{max}] \in x_{max}$ tal que $q_s < p_{max} \leq q_{max}$. Então existe $y \in Q$, com $y \geq 0$, e existe $[p,q] \in x_w$, tal que $q_{max} = q_s + y$ e $y < p - q_s$. Portanto, tem-se que

$$\begin{aligned} q_{max} &= q_s + y \\ &< q_s + (p - q_s) \\ &< p \end{aligned}$$

ou seja, $x_{max} <_{tot} x_w$ e $x_{max} \in \{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$. Portanto, dado $x_s \in \{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$ é sempre possível obter $x_{max} \in \{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$, tal que ainda existe $x'_{max} \in \{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$ de tal forma que existe $[p_{max}, q_{max}] \in x_{max}$ e existe $[p'_{max}, q_{max} + y] \in x'_{max}$, resultando em $x_{max} <_{tot} x'_{max}$, o que é uma contradição. Portanto, $\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$ não possui elemento máximo.

Considere agora o conjunto $\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$. Tem-se que $\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$ é limitado inferiormente, pois x_w é minorante de $\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$. Entretanto $\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$ não possui elemento mínimo. Para provar esta afirmação, suponha que exista $min\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\} = x_{min}$. Então para cada $x'_s \in \{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$, $x'_s = x_{min}$ ou existem $[p'_s, q'_s] \in x'_s$ e $[p_{min}, q_{min}] \in x_{min}$ tal que $p_{min} \leq q_{min} < p'_s$. Então existe $k \in Q$, com $k \geq 0$, e existe $[p,q] \in x_w$, tal que $p_{min} = p'_s - k$ e $k > p'_s - q$. Portanto, tem-se que

$$\begin{aligned} p_{min} &= p'_s - k \\ &> p'_s - (p'_s - q) \\ &> q \end{aligned}$$

ou seja, $x_w <_{tot} x_{min}$ e $x_{min} \in \{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$. Portanto, dado $x'_s \in \{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$ é sempre possível obter $x_{min} \in \{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$, tal que ainda existe $x'_{min} \in \{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$ de tal forma que existe $[p_{min}, q_{min}] \in x_{min}$ e existe $[p_{min} - k, q'_{min}] \in x'_{min}$, resultando em $x'_{min} <_{tot} x_{min}$, o que é uma contradição. Portanto, $\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$ não possui elemento mínimo.

Observe agora que para todo $x_s \in \{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$ e $x'_s \in \{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$, tem-se que $x_s <_{tot} x_w <_{tot} x'_s$. Assim $\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\} \cup \{x_w\}$ é o conjunto dos majorantes de $\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$. Como $\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$ não possui elemento máximo, então x_w é o menor majorante de $\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$. De fato, se existisse $x'_w \in tot(\text{II}Q)$ tal que para todo $x_s \in \{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$, $x_s \leq_{tot} x'_w$ e $x'_w <_{tot} x_w$ então x'_w pertenceria ao conjunto $\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$ do qual seria o elemento máximo, o que é uma contradição. Portanto o supremo de $\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$ existe e $\sup\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\} = x_w$.

Por outro lado, $\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\} \cup \{x_w\}$ é o conjunto dos minorantes de $\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$. Como $\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$ não possui elemento mínimo, então x_w é o maior minorante de $\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$. Também considerando a existência de $x''_w \in tot(\text{II}Q)$ tal que para todo $x'_s \in \{x'_s \in X_Q | x_w <_{tot} x'_s\}$, $x''_w \leq_{tot} x'_s$ e $x_w <_{tot} x''_w$ então x''_w pertenceria ao conjunto $\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$ do qual seria o elemento mínimo, o que é uma outra contradição. Portanto o ínfimo de $\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$ existe e $\inf\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\} = x_w$.

Para mostrar que os conjuntos $\{x_r \in X_Q | x_r <_{tot} x_w\}$ e $\{x'_r \in X_Q | x_w <_{tot} x'_r\}$ são cadeias, salienta-se que X_Q é um conjunto totalmente ordenado e, portanto, qualquer subconjunto de X_Q é uma cadeia em X_Q. ♦

10.4.11 Proposição

Seja ir o índice real de um conjunto coerente definido em 7.2.1. Para todo $x \in \text{II}Q$, é válido que:
(i) se $x \neq \varnothing$ então $ir(x) \in \mathbb{IR}$;
(ii) x é um objeto total se somente se $ir(x) = [r,r] = r \in \mathbb{R}$.
prova:

A prova de (i) segue da proposição 1.4.10, pois para todo $w \in \mathbb{R}$, os conjuntos $\{x_r \in X_Q | x_r < x_w\}$ e $\{x'_r \in X_Q | x_w < x'_r\}$ são cadeias, e sempre é válido que

$$w = \sup\{x_r \in X_Q | x_r < x_w\} = \inf\{x'_r \in X_Q | x_w < x'_r\}.$$

Assim, se $x \neq \varnothing$, então sempre é possível determinar o menor elemento e o maior elemento do subconjunto de números reais

$$ir(x) = \bigcap\{Y \in \mathbb{IR}^* | i(x) \subseteq Y \wedge Y \subseteq X, \forall X \in x\},$$

Portanto, tem-se que $ir(x)$ e um intervalo real.

Prova-se então (ii). Supor que x é um objeto total, mas que $ir(x) \neq [r,r] = r \in \mathbb{R}$. Então $ir(x)$ é um intervalo real $[a,b]$ com $a \neq b$. Então, para todo intervalo racional $[p,q] \in x$, tem-se que $p \leq a \leq q$ e $p \leq b \leq q$. Suponha agora que $a < b$. Logo, existem $r \in Q$, com $a < r < b$, tal que $p \leq a < r < b \leq q$. Portanto, existe $[p,r] \in IQ$, tal que $[p,r] \approx [p,q]$, para todo $[p,q] \in x$, mas $[p,r] \notin x$, o que é uma contradição, pois x é total. Analogamente, mostra-se contradição supondo $b < a$. Portanto, conclui-se que $ir(x) = [r,r] = r \in \mathbb{R}$.

A prova da recíproca é análoga. ♦

10.5 O Sistema IR dos Intervalos Reais Estendido

Nesta seção introduz-se a estrutura do sistema IR dos intervalos reais estendido para que se possa estabelecer o Σ^{ap}-isomorfismo entre IR e o subsistema $qtot_{IIQ}$ dos objetos quasi-totais.

Seja $\mathbb{IR} = \{[a,b] | a,b \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos intervalos reais $[a,b] = \{w \in \mathbb{R} | a \leq w \leq b\}$ da Matemática Intervalar introduzida por Moore [MOO 66] [MOO 79].

O universo $\mathbb{IR}^* = \mathbb{IR} \cup \{\mathbb{R}\}$ do sistema IR é uma extensão de $\mathbb{IR}$. As operações aritméticas e funções na estrutura $\Sigma_{\mathbb{IR}^*}$ do sistema IR são então definida considerando a definição das operações aritméticas em $\mathbb{IR}$ (veja [MOO 66] [MOO 79] [DIM 89] [DIM 91]). Tem-se que:

10.5.1 Definição. Operação Aritmética

Sejam $A, B \in \mathbb{IR}^*$. A operação aritmética $*_{\mathbb{IR}^*} \in \{+,-,\times,\div\}$ em $\mathbb{IR}^*$ é definida como

$$A *_{\mathbb{IR}^*} B = \begin{cases} \{a *_{\mathbb{R}} b \in \mathbb{R} | a \in A \text{ e } b \in B\} & \text{se } A, B \neq \mathbb{R}; \\ \mathbb{R} & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

onde $*_{\mathbb{R}}$ é a respectiva operação nos reais $\mathbb{R}$. ♦

Estas operações são uma extensão das operações bem definidas de Moore [MOO 66] [MOO 79] [DIM 89]. É imediato que as operações aritméticas em $\mathbb{IR}^*$ são também bem definidas (veja [DIM 91] [DIM 96a]).

10.5.2 Definição. Função Intervalar

A função intervalar $f_{\mathbb{IR}^*} : \mathbb{IR}^* \to \mathbb{IR}^*$ é definida como

$$f_{\mathbb{IR}^*}(X) = \begin{cases} \{f_{\mathbb{R}}(x) \in \mathbb{R} | x \in X\} & \text{se } X \neq \mathbb{R}, \\ \mathbb{R} & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

onde $f_{\mathbb{R}}$ é a respectiva função nos reais $\mathbb{R}$. ♦

A função intervalar é uma extensão da função intervalar bem definida na Matemática Intervalar clássica [MOO 79] [RAT 84] [ALE 83] [DIM 89]. É imediato que a função intervalar em $\mathbb{IR}^*$ é também bem definida (veja [DIM 91] [DIM 96a]).

Para a relação de posição optou-se por uma definição mais conveniente para o propósito deste trabalho do que a introduzida por Moore [MOO 66] [MOO 79]. Tem-se que:

10.5.3 Definição. Relação "menor que"

Sejam $X,Y \in \mathbb{IR}^*$. Diz-se que $X <_{\mathbb{IR}^*} Y$ se somente se $X,Y \neq \mathbb{R}$ e $r(X) <_{\mathbb{R}} l(Y)$, onde $r(X)$ é o extremo direito e $l(X)$ é o extremo esquerdo do intervalo real X, $<_{\mathbb{R}}$ é a relação "menor que" em $\mathbb{R}$. ♦

10.5.4 Definição. Relação de Posição

Define-se a relação de posição em $\mathbb{IR}^*$, denotada por $\leq_{\mathbb{IR}^*}$, por:

$$X \leq_{\mathbb{IR}^*} Y \quad \Leftrightarrow \quad X <_{\mathbb{IR}^*} Y \text{ ou } X = Y,$$

para todo $X,Y \in \mathbb{IR}^*$, onde $<_{\mathbb{IR}^*}$ é a relação "menor que" definida em 10.5.3. ♦

10.5.5 Proposição

A relação de posição $\leq_{\mathbb{IR}^*}$ é uma relação de ordem parcial.

prova:

É imediato que $\leq_{\mathbb{IR}^*}$ é reflexiva. Para todo $X,Y \in \mathbb{IR}^*$, se $X \leq_{\mathbb{IR}^*} Y$ e $Y \leq_{\mathbb{IR}^*} X$ então uma das seguintes situações acontece: (a) $X <_{\mathbb{IR}^*} Y$ e $Y <_{\mathbb{IR}^*} X$ ou (b) $X = Y$. Supondo que ocorra (a), então, como $\mathbb{R}$ não é comparável pela relação $<_{\mathbb{IR}^*}$ tem-se que somente pode-se ter $X = [p,q] \in \mathbb{IR}$ e $Y = [r,s] \in \mathbb{IR}$. Assim, ocorre que $q < r$ e $s < p$, o que levaria a $q < r \leq s < p$, o que é uma contradição pois $p \leq q$. Portanto somente pode ocorrer (b), isto é, $X = Y$, o que prova que $\leq_{\mathbb{IR}^*}$ é antissimétrica. Ainda, para todo $X,Y,Z \in \mathbb{IR}$, se $X \leq_{\mathbb{IR}^*} Y$ e $Y \leq_{\mathbb{IR}^*} Z$, então tem-se que $X <_{\mathbb{IR}^*} Y$ ou $X = Y$, e $Y <_{\mathbb{IR}^*} Z$ ou $Y = Z$. Então existem as seguintes alternativas: (a) $X <_{\mathbb{IR}^*} Y$ e $Y <_{\mathbb{IR}^*} Z$ ou (b) $X = Y$ e $Y <_{\mathbb{IR}^*} Z$ ou (c) $X <_{\mathbb{IR}^*} Y$ e $Y = Z$ ou (d) $X = Y$ e $Y = Z$. Nos casos (a), (b) e (c) tem-se que $X <_{\mathbb{IR}^*} Z$ ou, quando vale (d), tem-se que $X = Z$. Conclui-se que $X \leq_{\mathbb{IR}^*} Z$, o que prova que $\leq_{\mathbb{IR}^*}$ é transitiva. Conclui-se então que $\leq_{\mathbb{IR}^*}$ é uma relação de ordem parcial. Observe que $\leq_{\mathbb{IR}^*}$ não é uma relação de ordem total, pois $\mathbb{R}$ não é comparável, isto é, para todo $X \in \mathbb{IR}$ tem-se que $\mathbb{R} \not\leq X$ e $X \not\leq \mathbb{R}$. ♦

10.6 O Σ_{ap}-Isomorfismo entre o Subsistema qtot$_{\text{IIQ}}$ dos Objetos Quasi-Totais e o Sistema IR dos Intervalos Reais Estendido

Nesta seção mostra-se que o subsistema dos objetos quasi-totais $\text{qtot}_{\text{IIQ}} = \left(\Lambda_{qtot(\Pi Q)}; \Sigma^{in}_{qtot(\Pi Q)}; \Sigma^{ap}_{qtot(\Pi Q)}\right)$, com $\Lambda_{qtot(\Pi Q)} \in \{qtot(\Pi Q), \wp(qtot(\Pi Q))\}$, é Σ^{ap}-isomorfo ao sistema dos intervalos de reais estendido IR.

Para isso, as operações aritméticas de objetos são restritas ao subsistema dos objetos quasi-totais. Segue da própria definição (veja 9.2.1 (iii)) que estas operações são fechadas neste subsistema, isto é, para todo $x, y \in qtot(\Pi Q)$, $x *_{qtot} y \in qtot(\Pi Q)$.

A relação de posição $\leq_{\Pi Q}$ relativa ao subsistema dos objetos quasi-totais é dada por

$$x \leq_{qtot} y \Leftrightarrow x <_{qtot} y \text{ ou } x = y\text{, onde } x <_{qtot} y \Leftrightarrow \exists X \in x, \exists Y \in y, X <_{IQ} Y,$$

e $<_{IQ}$ é a relação de posição definida em 9.1.1 (i) para o conjunto de intervalos racionais IQ. Observa-se que a relação de posição $\leq_{qtot}$ é uma relação de ordem (veja proposição 9.2.4), que não é total.

Considere agora a função $\phi: qtot(\Pi Q) \cup \wp(qtot(\Pi Q)) \to \mathbb{IR}^* \cup \wp(\mathbb{IR}^*)$,

tal que

$$x \mapsto \begin{cases} ir(x) & \text{se } x \in qtot(\Pi Q); \\ \{ir(w) \in \mathbb{IR}^* \mid w \in x\} & \text{se } x \in \wp(qtot(\Pi Q)), \end{cases}$$

onde ir é o índice real definido em 7.2.1.

Tem-se que:

10.6.1 Proposição

A função ϕ é bijetora.

prova:

É imediato que ϕ é bem definida. Para todo $x \in qtot(\Pi Q)$ é possível determinar seu índice $ir(x)$, com $ir(x) = \bigcap\{Y \in \mathbb{IR}^* \mid i(x) \subseteq Y \wedge Y \subseteq X, \forall X \in x\} \in \mathbb{IR}^*$, pois $ir(\varnothing) = \mathbb{R}$ e, se $x \neq \varnothing$, pela proposição 10.4.11, tem-se que $ir(x) \in \mathbb{IR}$. Tem-se ainda que $\phi(x) = \mathbb{R}$ se e somente se $x = \varnothing$. Sejam então $x, y \in qtot(\Pi Q)$, com $x, y \neq \varnothing$, e sejam $[a,b],[c,d] \in \mathbb{IR}$, tal que $\phi(x) = ir(x) = [a,b] \neq [c,d] = ir(y) = \phi(y)$. Então, tem-se que (i) $a \neq c$ ou (ii) $b \neq d$. Suponha que aconteça (i) e seja $a < c$. Então, existem $r, r' \in Q$ tal que $a < r \leq c \leq d \leq r'$. Logo, existe $[r,r'] \in IQ$ tal que $[r,r'] \in y$, mas $[r,r'] \notin x$. Conclui-se que, neste caso, $x \neq y$. Seja agora $a < c$. Então existem $r, r' \in Q$ tal que $c < r \leq a \leq b \leq r'$. Logo, existe $[r,r'] \in IQ$ tal que $[r,r'] \in x$, mas $[r,r'] \notin y$. Portanto, neste caso, conclui-se também que $x \neq y$. Analogamente, obtém-se o mesmo resultado considerando a alternativa (ii).

Sejam agora $x, y \in qtot(\text{II}Q)$, tal que $x \neq y$. Se $x = \varnothing$, então para todo $y \in qtot(\text{II}Q)$ tal que $y \neq \varnothing$, tem-se que $\phi(\varnothing) = ir(\varnothing) = \mathbb{R} \neq ir(y) = \phi(y)$. Suponha então $x, y \neq \varnothing$, e sejam $ir(x) = [p_x, q_x]$ e $ir(y) = [p_y, q_y]$. Então, tem-se que (i) existe $[a,b] \in x$ tal que $[a,b] \notin y$ ou (ii) existe $[c,d] \in y$ tal que $[c,d] \notin x$. Supor que ocorra (i). Como x e y são quasi-totais, então somente pode ser que para todo $[p,q] \in x$, tem-se que (ia) $p < c$ ou (ib) $d < q$. Supor (ia). Então, é válido que $p_x < c \leq p_y$, donde se conclui que $ir(x) = [p_x, q_x] \neq [p_y, q_y] = ir(y)$, ou seja, $\phi(x) \neq \phi(y)$. Seja então (ib). Então, é válido que $q_y \leq d < q_x$, donde se conclui que $ir(x) = [p_x, q_x] \neq [p_y, q_y] = ir(y)$, ou seja, $\phi(x) \neq \phi(y)$. Raciocínio análogo supondo a situação (ii) leva à mesma conclusão. Portanto, tem-se que ϕ é injetiva.

Por outro lado, para todo $Y \in \text{I}\mathbb{R}^*$, tem-se que ou (i) $Y = \mathbb{R}$ ou (ii) $Y \in \text{I}\mathbb{R}$. Suponha a situação (i). Então, existe $\varnothing \in qtot(\text{II}Q)$, tal que $\mathbb{R} = \phi(\varnothing) = ir(\varnothing)$. Seja agora a alternativa (ii). Então existe $x \in qtot(\text{II}Q)$, com $x = \{[p,q] \in IQ | Y \subseteq [p,q]\}$, tal que $Y = \phi(x) = ir(x)$. Portanto, conclui-se que ϕ é sobrejetiva.

Analogamente prova-se o resultado para $x, y \in \wp(qtot(\text{II}Q))$. Assim, tem-se que ϕ é bijetiva. ♦

10.6.2 Proposição

A função ϕ é um homomorfismo forte de qtot_{IIQ} em IR.
prova:

Considere primeiramente a relação de posição. Sejam $x,y \in qtot(\text{II}Q)$ e suponha que $x <_{qtot} y$, $i(x) = [a,b] \in \text{I}\mathbb{R}$ e $i(y) = [c,d] \in \text{I}\mathbb{R}$. Tem-se que $x <_{qtot} y$ se e somente se existem $[p,q] \in x, [p',q'] \in y$ tal que $q < p'$. Então tem-se que $b \leq q < p' \leq c$ e, portanto, $\phi(x) = ir(x) <_{\text{IR}^*} ir(y) = \phi(y)$. Por outro lado, suponha que $\phi(x) = ir(x) <_{\text{IR}^*} ir(y) = \phi(y)$. Então tem-se que $b < c$. Logo, existem $r, r' \in Q$ $b \leq r < r' \leq c$. Assim, existe $[p,r] \in x$ e existe $[r',q'] \in y$ tal que $r < r'$. Conclui-se que $x <_{qtot} y$.

Considere agora as operações algébricas e $x,y \in qtot(\text{II}Q)$. Se $x = \varnothing$, então tem-se que

$$\phi(\varnothing +_{qtot} y) = \phi(\varnothing) = ir(\varnothing) = \mathbb{R} = \mathbb{R} +_{\text{IR}^*} ir(y) = ir(\varnothing) +_{\text{IR}^*} ir(y) = \phi(\varnothing) +_{\text{IR}^*} \phi(y)$$

e

$$\phi(\varnothing \times_{qtot} y) = \phi(\varnothing) = ir(\varnothing) = \mathbb{R} = \mathbb{R} \times_{\text{IR}^*} ir(y) = ir(\varnothing) \times_{\text{IR}^*} ir(y) = \phi(\varnothing) \times_{\text{IR}^*} \phi(y).$$

Resultado idêntico obtém-se supondo $y = \varnothing$. Supondo então $x, y \neq \varnothing$, segue que

$$\begin{aligned}
\phi\left(x +_{qtot} y\right) &= ir\left(x +^{\hat{q}}_{\mathrm{II}Q} y\right) \\
&= ir\left(x +^{q}_{\mathrm{II}Q} y\right) \\
&= ir\left(\left\{[p+p', q+q'] \in IQ \mid [p,q] \in x \wedge [p',q'] \in y\right\}\right) \\
&= \bigcap_{\mathbb{R}} \left\{Y \in \mathbb{IR} \mid i\left(x +^{q}_{\mathrm{II}Q} y\right) \subseteq Y \wedge Y \subseteq X, \forall X \in \left(x +^{q}_{\mathrm{II}Q} y\right)\right\} \\
&= [a+a', b+b'] \in \mathbb{IR},\ p+p' \leq a+a' \leq b+b' \leq q+q' \\
&= [a,b] +_{\mathrm{IR}^*} [a',b'] \in \mathbb{IR},\ p \leq a \leq b \leq q \ \wedge\ p' \leq a' \leq b' \leq q' \\
&= \bigcap_{\mathbb{R}} \left\{Y' \in \mathbb{IR} \mid i(x) \subseteq Y' \wedge Y' \subseteq X, \forall X \in (x)\right\} \\
&\qquad +_{\mathrm{IR}^*} \bigcap_{\mathbb{R}} \left\{Y'' \in \mathbb{IR} \mid i(y) \subseteq Y'' \wedge Y'' \subseteq X, \forall X \in (y)\right\} \\
&= ir(x) +_{\mathrm{IR}^*} ir(y) \\
&= \phi(x) +_{\mathrm{IR}^*} \phi(y)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\phi\left(x \times_{qtot} y\right) \\
&= ir\left(x \times^{\hat{q}}_{\mathrm{II}Q} y\right) \\
&= ir\left(x \times^{q}_{\mathrm{II}Q} y\right) \\
&= ir\left(\left\{[min\theta, max\theta] \in IQ \mid [p,q] \in x \wedge [p',q'] \in y\right\}\right),\ \theta = \{p\cdot p', p\cdot q', q\cdot p', q\cdot q'\} \\
&= \bigcap_{\mathbb{R}} \left\{Y \in \mathbb{IR} \mid i\left(x \times^{q}_{\mathrm{II}Q} y\right) \subseteq Y \wedge Y \subseteq X, \forall X \in \left(x \times^{q}_{\mathrm{II}Q} y\right)\right\} \\
&= [min\vartheta, max\vartheta] \in \mathbb{IR},\ \vartheta = \{a\cdot a', a\cdot b', b\cdot a', b\cdot b'\}, min\theta \leq min\vartheta \leq max\vartheta \leq min\theta \\
&= [a,b] \times_{\mathrm{IR}^*} [a',b'] \in \mathbb{IR},\ p \leq a \leq b \leq q \ \wedge\ p' \leq a' \leq b' \leq q' \\
&= \bigcap_{\mathbb{R}} \left\{Y' \in \mathbb{IR} \mid i(x) \subseteq Y' \wedge Y' \subseteq X, \forall X \in x\right\} \\
&\qquad \times_{\mathrm{IR}^*} \bigcap_{\mathbb{R}} \left\{Y'' \in \mathbb{IR} \mid i(x) \subseteq Y'' \wedge Y'' \subseteq X, \forall X \in x\right\} \\
&= ir(x) \times_{\mathrm{IR}^*} ir(y) \\
&= \phi(x) \times_{\mathrm{IR}^*} \phi(y).
\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se o resultado para as outras operações aritméticas.

Considere agora as funções unárias e seja $x \in qtot(\mathrm{II}Q)$, $f \in F$. Salienta-se que as funções unárias são sempre bem definidas em $qtot(\mathrm{II}Q)$ e, para todo $x \in qtot(\mathrm{II}Q)$ e $f \in F$, tem-se que $f(x) \in qtot(\mathrm{II}Q)$ [REI 97a]. Se $x = \varnothing$, então tem-se que

$$\phi\left(f_{qtot}(\varnothing)\right) = \phi(\varnothing) = ir(\varnothing) = \mathbb{R} = f_{\mathrm{IR}^*}(\mathbb{R}) = f_{\mathrm{IR}^*}\left(ir(\varnothing)\right) = f_{\mathrm{IR}^*}\left(\phi(\varnothing)\right).$$

Suponha então $x \neq \varnothing$. Segue que:

$$
\begin{aligned}
\phi\left(f_{qtot}(x)\right) &= ir\left(\hat{q}f_{\text{II}Q}(x)\right)\\
&= ir\left(qf_{\text{II}Q}(x)\right)\\
&= ir\left(\left\{f_{IQ}[p,q] \in IQ \mid [p,q] \in x\right\}\right)\\
&= ir\left(\left\{[min\alpha, max\alpha] \in IQ \mid [p,q] \in x\right\}\right), \alpha = \left\{f_Q(r) \in Q \mid p \le r \le q\right\}\\
&= \bigcap_{\mathbb{R}} \left\{Y \in \mathbb{IR} \mid i\left(qf_{\text{II}Q}(x)\right) \subseteq Y \wedge Y \subseteq X, \forall X \in \left(qf_{\text{II}Q}(x)\right)\right\}\\
&= [min\beta, max\beta] \in \mathbb{IR},\ min\alpha \le min\beta \le max\beta \le max\alpha,\\
&= \left\{f_{\mathbb{R}}(w) \in \mathbb{R} \mid p \le a \le w \le b \le q, [p,q] \in x\right\}\\
&= f_{\mathbb{IR}^*}([a,b]) \in \mathbb{IR},\ p \le a \le b \le q, [p,q] \in x\\
&= f_{\mathbb{IR}^*}\left(\bigcap_{\mathbb{R}} \left\{Y' \in \mathbb{IR} \mid i(x) \subseteq Y' \wedge Y' \subseteq X, \forall X \in (x)\right\}\right)\\
&= f_{\mathbb{IR}^*}(ir(x))\\
&= f_{\mathbb{IR}^*}(\phi(x))
\end{aligned}
$$

onde $\beta = \left\{f_{\mathbb{R}}(w) \in \mathbb{R} \mid p \le a \le w \le b \le q, [p,q] \in x\right\}$.

A prova para outros elementos da estrutura é análoga. Conclui-se que a função ϕ é um homomorfismo forte de qtot_{IIQ} em IR. ♦

Como ϕ é bijetiva, pela proposição 10.6.1, segue que:

10.6.3 Corolário

qtot_{IIQ} e IR são Σ_{ap} -isomorfos, isto é, $\left(qtot(\text{II}Q), \Sigma^{in}_{qtot}, \Sigma^{ap}_{qtot}\right) \cong_{ap} \left(\mathbb{IR}^*, \Sigma_{\mathbb{IR}^*}\right)$. ♦

Observe agora que, como a função ϕ é bijetiva (proposição 10.6.1), então é possível determinar a sua inversa, que é dada por ϕ^{-1}: $\mathbb{IR} \cup \wp(\mathbb{IR}) \rightarrow qtot(\text{II}Q) \cup \wp\left(qtot(\text{II}Q)\right)$, tal que

$$
\phi^{-1}(W) = \begin{cases} x_W & \text{se } W \in \mathbb{IR},\\ \left\{x_{W'} \in qtot(\text{II}Q) \mid W' \in W\right\} & \text{se } W \in \wp(\mathbb{IR}),\end{cases}
$$

onde $x_W = \left\{X \in IQ \mid W \subseteq X\right\}$. A restrição da função ϕ^{-1} ao sistema R dos reais é justamente o Σ^{ap}-isomorfismo Φ: $\mathbb{R} \cup \wp(\mathbb{R}) \cong_{ap} tot(\text{II}Q) \cup \wp\left(tot(\text{II}Q)\right)$, estabelecido na seção 10.4.

Seja agora o conjunto coerente $x_{[a,b]} = \left\{[p,q] \in IQ \mid p \le a \le b \le q\right\}$, denominado de conjunto ligado ao intervalo racional $[a,b] \in IQ$, e seja $\text{X}_{\text{IQ}} = \left(\Lambda_{X_{IQ}}; \Sigma^{in}_{X_{IQ}}; \Sigma^{ap}_{X_{IQ}}\right)$, com

$\Lambda_{X_{IQ}} \in \{X_{IQ}, \wp(X_{IQ})\}$, o subsistema de $qtot_{IIQ}$ dos conjuntos ligados a intervalos racionais. Considere a função Φ_{IQ}: $IQ \cup \wp(IQ) \to X_{IQ} \cup \wp(X_{IQ})$, definida por

$$\Phi_{IQ}(Y) = \begin{cases} x_Y & \text{se } Y \in IQ, \\ \{x_{Y''} \in qtot(\text{II}Q) | Y' \in Y\} & \text{se } Y \in \wp(IQ). \end{cases}$$

Observe que Φ_{IQ} é a restrição do Σ_{ap} - isomorfismo ϕ^{-1}: IR $\cong_{ap}$ $qtot_{IIQ}$ ao subsistema X_{IQ}. Das proposições 10.6.1 e 10.6.2, segue que Φ_{IQ} é um homomorfismo forte injetor, e é imediato que Φ_{IQ} é sobrejetora. Segue que:

10.6.4 Proposição

A função Φ_{IQ} é um Σ_{ap} -isomorfismo de IQ em X_{IQ}. ♦

10.7 A Representação Global de R e IR

Nesta seção chega-se ao principal resultado deste capítulo, que é a conclusão de que o espaço coerente bi-estruturado $\left(\Lambda_{\text{II}Q}, \Sigma^{in}_{\text{II}Q}, \Sigma^{ap}_{\text{II}Q}\right)$ é a representação global de R e IR. Do que foi mostrado no capítulo 9 e seções 10.4 e 10.5, segue que:

10.7.1 Proposição

$\left(\Lambda_{\text{II}Q}, \Sigma^{in}_{\text{II}Q}, \Sigma^{ap}_{\text{II}Q}\right)$ é a representação global de R e IR.

prova:

Segue do corolários 9.2.3, 10.4.5 e 10.6.3. ♦

A figura 10.1 mostra o processo de determinação dos Σ^{ap}-isomorfismos da representação global de R e IR.

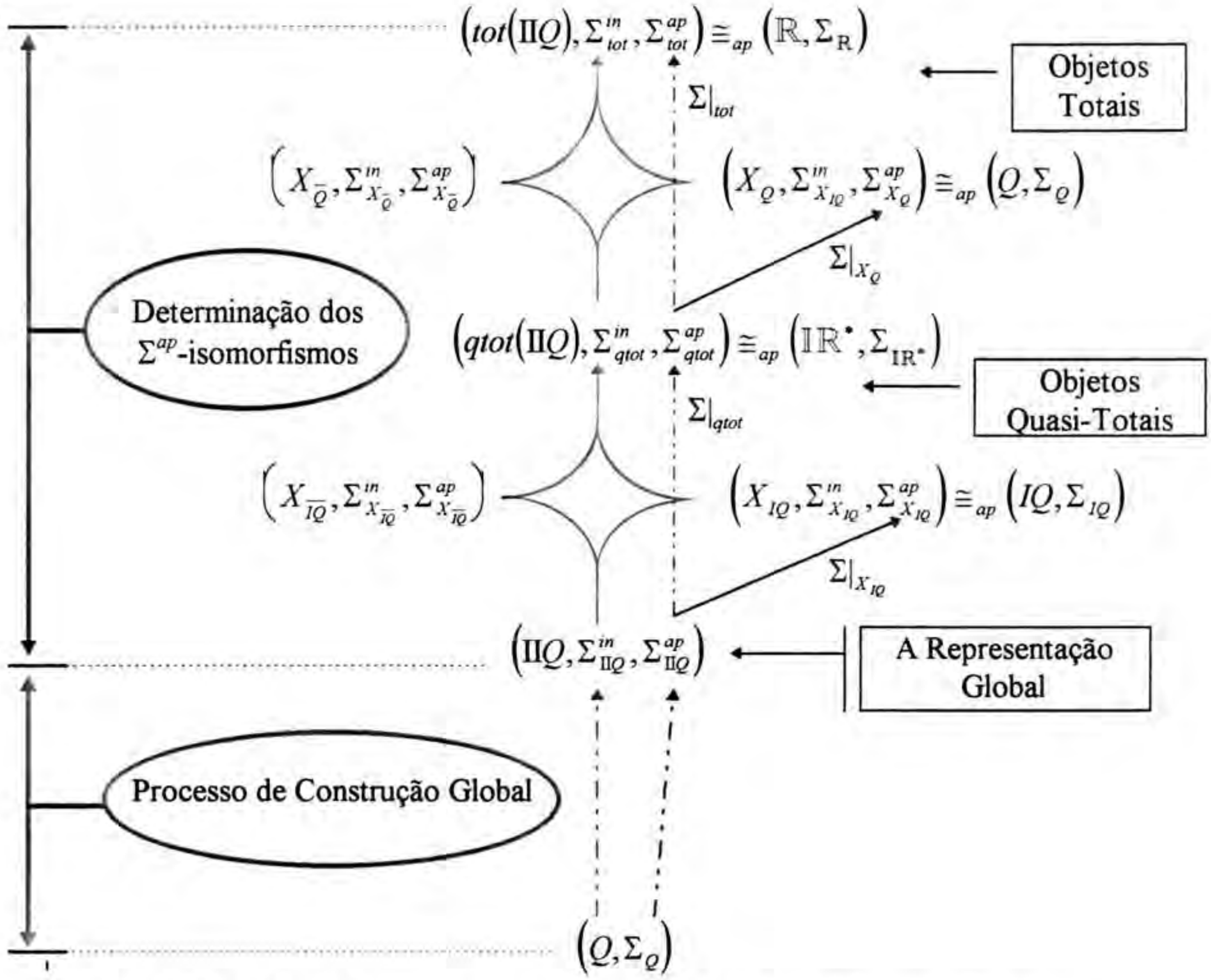


FIGURA 10.1 - A Representação Global de R e IR e os Σ^{ap}-isomorfismos

11 A Construção de uma Subestrutura de Medidas

Este capítulo apresenta uma subestrutura de medidas elementares para a representação global do sistema de número reais $\mathsf{R} = (\Lambda_{\mathbb{R}}; \Sigma_{\mathbb{R}})$, onde $\Lambda_{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R}, \wp(\mathbb{R})\}$, e intervalos de reais $\mathsf{IR} = (\Lambda_{\mathbb{IR}}; \Sigma_{\mathbb{IR}})$, onde $\Lambda_{\mathbb{IR}} = \{\mathbb{IR}, \wp(\mathbb{IR})\}$, obtida pelo processo de construção global.

Para isso, procura-se estudar o comportamento dos objetos de forma quantitativa, desconsiderando uma análise da qualidade da informação por eles representada, ou seja, observando apenas a sua posição relativa pela relação de posição $\leq_{\Pi Q}$ definida na estrutura de aplicação do espaço coerente bi-estruturado $(\Lambda_{\Pi Q}; \Sigma^{in}_{\Pi Q}; \Sigma^{ap}_{\Pi Q})$, com $\Lambda_{\Pi Q} = \{\Pi Q, \wp(\Pi Q)\}$.

As subestruturas de medidas elementares consideradas nesta abordagem [DIM 98] para os sistemas R dos números reais e IR dos intervalos reais são representadas, respectivamente, por $M_{\mathbb{R}} = \{d_{\mathbb{R}}, |\ |_{\mathbb{R}}\}$ e $M_{\mathbb{IR}} = \{d_{\mathbb{IR}}, |\ |_{\mathbb{IR}}, D_{\mathbb{IR}}\}$, onde $d_{\mathbb{R}}$ é a distância e $|\ |_{\mathbb{R}}$ é o valor absoluto ou módulo usuais definidos em $\mathbb{R}$, e $d_{\mathbb{IR}}$ é a distância intervalar, $|\ |_{\mathbb{IR}}$ é o valor absoluto ou módulo intervalar e $D_{\mathbb{IR}}$ é o diâmetro intervalar, cujas definições generalizadas em $\mathbb{IR}$ diferem das adotadas na teoria clássica. Para definições clássicas de distância, valor absoluto e diâmetro de intervalos veja [MOO 66] [ALE 83] [RAT 84].

Nesta abordagem, através de uma generalização da noção de distância, obtém-se a definição de uma função distância generalizada na subestrutura de medidas $M_{\Pi Q} = \{D_{\Pi Q}, d_{\Pi Q}, |\ |_{\Pi Q}\}$ da estrutura de aplicação $\Sigma^{ap}_{\Pi Q}$ do espaço coerente bi-estruturado $(\Lambda_{\Pi Q}; \Sigma^{in}_{\Pi Q}; \Sigma^{ap}_{\Pi Q})$, pelas sucessivas evoluções do processo de construção global, a partir da definição da função distância básica d_Q na estrutura Σ_Q do sistema básico Q dos números racionais.

Por distância generalizada entende-se uma função distância mais fraca [SIE 52] [CEC 66], cuja imagem encontra-se em uma estrutura similar à estrutura do seu domínio. Por exemplo, a distância entre dois conjunto coerentes de intervalos racionais é ainda um conjunto coerente, assim como a distância entre dois intervalos também constitui um intervalo.

Observe que é possível fornecer uma interpretação intuitiva para a definição adotada. Assim, como um intervalo pode ser considerado como a incerteza sobre uma medida ou um número real, então é intuitivo aceitar que a distância seja dada por um intervalo que representa a incerteza a respeito da distância entre dois números reais incertos considerados. Raciocínio análogo pode ser feito para fornecer uma interpretação para a distância entre conjunto coerentes.

Observa-se que definições mais fracas de funções distância, que não satisfazem alguns dos axiomas usuais de uma métrica, ou até nenhum deles, já foram sugeridas anteriormente em [SIE 52] [CEC 66] [SMY 95].

De maneira similar são construídas a função diâmetro e a função valor absoluto, que também recebem definições generalizadas. Para a função valor absoluto generalizada mostra-se também a sua representação linear interna na estrutura de informação $\Sigma^{in}_{\Pi Q}$.

Considere os conjuntos de intervalos racionais

$$IQ_+ = \{[p,q] \in IQ | p \geq 0\} \subseteq IQ,\ IQ_{pos} = \{[p,q] \in IQ | p > 0\} \subseteq IQ,$$

$$IQ_- = \{[p,q] \in IQ | q \leq 0\} \subseteq IQ.$$

Defina as relações de coerência induzida $\approx_{\leq Q+}$ e $\approx_{\leq Q-}$, tal que para todo $X, Y \in IQ_+$, $X', Y' \in IQ_-$, tem-se que $X \approx_{\leq Q+} Y$ e se e somente se $X \approx_{\leq_Q} Y$, e $X' \approx_{\leq Q-} Y'$ se e somente se $X' \approx_{\leq_Q} Y'$,. Então $(IQ_+, \approx_{\leq +})$ e $(IQ_-, \approx_{\leq -})$ são subteias (induzidas) de $(IQ, \approx_{\leq Q})$. Os espaços coerentes $\Pi Q_+ \equiv (Coh(IQ_+, \approx_{\leq Q+}), \subseteq)$ e $\Pi Q_- \equiv (Coh(IQ_-, \approx_{\leq Q-}), \subseteq)$ são subespaços do espaço coerente ΠQ, gerados por Q_+ e Q_-, respectivamente.

Observe que ΠQ_+ é um subespaço coerente de ΠQ. Os objetos quasi-totais de ΠQ_+ não são quasi-totais em ΠQ. Entretanto, existe uma bijeção $\Omega: \{x \in qtot(\Pi Q) | x \geq x_0\} \to qtot(\Pi Q_+)$, dada por $x \mapsto \{[p,q] \in x | p \geq 0\}$, cuja inversa é $\Omega^{-1}: qtot(\Pi Q_+) \to \{x \in qtot(\Pi Q) | x \geq x_0\}$ é definida por $y \mapsto \hat{y}|_{qtot(\Pi Q)}$, onde $\hat{y}|_{qtot(\Pi Q)}$ é o fecho indexado de y no sistema $\mathsf{qtot}_{\Pi Q}$.

11.1 Definições Básicas

Nesta seção são apresentados algumas definições e resultados básicos que serão utilizados no estudo das subestruturas de medidas. As provas foram omitidas, mas podem ser encontras em livros clássicos de topologia ou em [ACI 92] [SMY 90] [SIE 52] [CEC 66] [SMY 95].

Procura-se primeiramente generalizar o conceito de função distância de modo que ela possa ter sua imagem em um conjunto qualquer, ordenado por uma relação de posição.

Seja $\mathsf{S} \equiv (\Lambda_{\mathbb{S}}, \Sigma_{\mathbb{S}})$ um sistema ordenado de 2ª ordem, onde $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$.

11.1.1 Definição. Função Distância

Uma função distância ou uma relação de valor real [CEC 66] sobre o universo $\mathbb{S}$ é qualquer mapeamento $d_{\mathbb{S}}: \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}_+$.♦

11.1.2 Definição. Métrica

Uma métrica no universo $\mathbb{S}$ é uma função $d_{\mathbb{S}}: \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}_+$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $d_{\mathbb{S}}(x,y) \geq 0$ e $d_{\mathbb{S}}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(ii) $d_{\mathbb{S}}(x,y) = d_{\mathbb{S}}(y,x)$;
(iii) $d_{\mathbb{S}}(x,y) \leq d_{\mathbb{S}}(x,z) + d_{\mathbb{S}}(z,y)$,
para todo $x,y,z \in \mathbb{S}$. Diz-se que S é um sistema métrico relativamente a $d_{\mathbb{S}}$. ♦

11.1.3 Proposição.

Seja S um sistema métrico relativamente a $d_{\mathbb{S}}$. A topologia induzida por $d_{\mathbb{S}}$ em $\mathbb{S}$ é T_2 ou de Hausdorff. Se o sistema S é bi-estruturado, diz-se que a topologia de aplicação induzida por $d_{\mathbb{S}}$ em $\mathbb{S}$ é T_2 ou de Hausdorff. ♦

Observe que a utilização do conjunto dos reais como imagem da função distância restringe a utilização deste conceito. A definição a seguir permite que a distância possa ter imagem em um conjunto $\mathbb{V}$ de valores, ordenado por uma relação de posição $\leq_{\mathbb{V}}$.

11.1.4 Definição. Função Distância Generalizada

Seja $\mathsf{V} \equiv (\Lambda_{\mathbb{V}}, \Sigma_{\mathbb{V}})$, com $\Lambda_{\mathbb{V}} = \{\mathbb{V}, \wp(\mathbb{V})\}$ um sistema ordenado de 2ª ordem, onde $\mathbb{V}$ é um conjunto de valores. Uma função distância generalizada sobre o universo $\mathbb{S}$ é qualquer mapeamento $d_{\mathbb{S}}: \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{V}$. ♦

As semi-pseudométricas foram introduzidas por Cech [CEC 66] em seu trabalho sobre espaços de fecho e posteriormente foram estudadas em [SMY 87], [SMY 90], [SMY 91]. Em [SMY 95], Smyth introduziu uma generalização para os espaços de fecho de Cech, fornecendo uma definição mais geral de semi-métrica, um caso particular de uma semi-pseudométrica, com aplicação em topologia digital.

11.1.5 Definição. Semi-Pseudométrica [CEC 66]

Seja $d_{\mathbb{S}}: \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}_{-}$ uma função distância. Diz-se que $d_{\mathbb{S}}$ é uma semi-pseudométrica se as seguintes condições são satisfeitas:
(i) $d_{\mathbb{S}}(x,x) = 0$;
(ii) $d_{\mathbb{S}}(x,y) = d_{\mathbb{S}}(y,x)$,
para todo $x,y \in \mathbb{S}$. Diz-se que S é um sistema semi-pseudométrico relativamente a $d_{\mathbb{S}}$. ♦

Observa-se que somente a condição (i) é necessária para garantir que o espaço de vizinhanças induzido por $d_{\mathbb{S}}$ seja um espaço de fecho de Cech [CEC 66].

Uma definição mais geral de semi-pseudométrica permite caracterizar funções distâncias generalizadas definidas em uma estrutura de aplicação de sistemas. Introduz-se então, aqui, a noção de semi-pseudométrica generalizada.

11.1.6 Definição. Semi-Pseudométrica Generalizada

Seja $\mathsf{V} \equiv (\Lambda_{\mathbb{V}}, \Sigma_{\mathbb{V}})$, com $\Lambda_{\mathbb{V}} = \{\mathbb{V}, \wp(\mathbb{V})\}$ um sistema ordenado de 2ª ordem, onde na estrutura $\Sigma_{\mathbb{V}}$ é definida uma operação binária $\oplus_{\mathbb{V}}: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ com elemento neutro. Seja $d_{\mathbb{S}}: \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{V}$ a função distância generalizada definida em 11.1.4. Diz-se que $d_{\mathbb{S}}$ é uma semi-pseudométrica generalizada se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $d_{\mathbb{S}}(x,x) = \mathrm{O}$,

(ii) $d_{\mathbb{S}}(x,y) = d_{\mathbb{S}}(y,x)$,

para todo $x,y \in \mathbb{S}$, onde O é qualquer aproximação do elemento neutro. Diz-se que S é um espaço semi-pseudométrico generalizado relativamente a $d_{\mathbb{S}}$. ♦

11.1.7 Definição. Norma

Uma norma no universo $\mathbb{S}$ é uma função $\| \; \|_{\mathbb{S}} : \mathbb{S} \to \mathbb{R}_{+}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\|r\|_{\mathbb{S}} \geq 0$ e $\|r\|_{\mathbb{S}} = 0 \Leftrightarrow r = 0$;

(ii) $\|\lambda\, r\|_{\mathbb{S}} = |\lambda\,|_{\mathbb{R}} \cdot \|r\|_{\mathbb{S}}$;

(iii) $\|r_1 + r_2\|_{\mathbb{S}} \leq \|r_1\|_{\mathbb{S}} + \|r_2\|_{\mathbb{S}}$,

para todo $r, r_1, r_2 \in \mathbb{S}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $| \; |_{\mathbb{R}}$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}$. Diz-se que S é um sistema normado relativamente a $\| \; \|_{\mathbb{S}}$. ♦

11.2 A Subestrutura de Medidas Básica M_Q

Seja $\mathsf{Q} = (\Lambda_Q;\Sigma_Q)$, com $\Lambda_Q = \{Q, \wp(Q)\}$ o subsistema básico dos números racionais Q. A subestrutura de medidas básica M_Q definida na estrutura Σ_Q do sistema Q é obtida pela restrição da subestrutura de medidas $M_{\mathbb{R}}$ do sistema R dos números reais. Os seguintes resultados são imediatos:

11.2.1 Proposição

A operação de subsistema aplicada sobre $M_{\mathbb{R}}$ determina a subestrutura de medidas básica $M_Q = \{d_Q, | \; |_Q\}$ do sistema Q dos números racionais, dada explicitamente por:

(i) função módulo ou valor absoluto básica: $| \; |_Q : Q \to Q_{+}$, tal que

$$r \mapsto \begin{cases} r & \text{se } r \geq 0, \\ -r & \text{se } r < 0; \end{cases}$$

(ii) função distância básica: $d_Q : (Q \times Q) \to Q_{+}$, tal que $(r,s) \mapsto |r - s|_Q$.

11.2.2 Proposição

Sejam $| \; |_Q$ a função valor absoluto e d_Q a função distância básicas. Então:

(i) $| \; |_Q$ apresenta as propriedades de uma norma;

(ii) $| \; |_Q$ não é injetora, mas sua restrições $| \; |_{Q_{+}} : Q_{+} \to Q_{+}$ e $| \; |_{Q_{-}} : Q_{-} \to Q_{+}$ são injetoras;

(iii) d_Q apresenta as propriedades de uma métrica;

(iv) o sistema básico Q é um sistema métrico e normado relativamente a d_Q e $|\ |_Q$, respectivamente;
(v) a topologia induzida em Q pela métrica d_Q é uma topologia T_2 ou de Hausdorff.

11.3 A Subestrutura de Medidas Intervalar M_{IQ}

A primeira etapa do processo de construção global para R e IR corresponde a uma [ ]-evolução (veja seção 7.1.2) aplicada ao sistema básico Q, resultando no sistema dos intervalos racionais IQ = $(\Lambda_{IQ};\Sigma_{IQ})$ (veja seção 9.1), onde $\Lambda_{IQ} = \{IQ, \wp(IQ)\}$, sendo regulada pelo próprio sistema IQ.

As funções de medidas fundamentais, que são obtidas pelo processo construtivo, são a função distância e a função módulo. Então tem-se que:

11.3.1 Proposição

A [ ]$_{IQ}$-evolução, aplicada à subestrutura de medidas básica $M_Q = \{d_Q, |\ |_Q\}$, introduzida em 11.2.1, determina as funções de medidas intervalares fundamentais, dadas explicitamente por:
(i) função distância intervalar: $d_{IQ}: IQ \times IQ \to IQ_+ \subseteq IQ$, tal que

$$d_{IQ}(X,Y) = \left[min\{d_Q(x,y) \in Q | x \in X \wedge y \in Y\}, max\{d_Q(x,y) \in Q | x \in X \wedge y \in Y\}\right] \in IQ,$$

que também pode ser dada por

$$d_{IQ}([p,q],[r,s]) = \begin{cases} \left[min\{|p-s|_Q, |q-r|_Q\}, max\{|p-s|_Q, |q-r|_Q\}\right] & \text{se } [p,q] \cap [r,s] = \emptyset, \\ \left[0, max\{|p-s|_Q, |q-r|_Q\}\right] & \text{se } [p,q] \cap [r,s] \neq \emptyset; \end{cases}$$

(ii) função valor absoluto ou módulo intervalar: $|\ |_{IQ}: IQ \to IQ_+ \subseteq IQ$, tal que

$$\|[p,q]\|_{IQ} = d_{IQ}([p,q],[0,0]) = \begin{cases} \left[min\{|p|_Q, |q|_Q\}, max\{|p|_Q, |q|_Q\}\right] & \text{se } 0 \notin [p,q], \\ \left[0, max\{|p|_Q, |q|_Q\}\right] & \text{se } 0 \in [p,q], \end{cases}$$

que também pode ser dada por

$$\|[p,q]\|_{IQ} = \begin{cases} [p,q] & \text{se } [p,q] \in IQ_{pos}, \\ \left[0, max\{|p|_Q, |q|_Q\}\right] & \text{se } 0 \in [p,q], \\ -[p,q] & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

prova:

A prova da primeira parte de (i) é imediata, pois (i) satisfaz as condições da definição 5.5.3, é bem definida em IQ e completamente determinada pela função distância em Q. Para provar a segunda parte, considere $X = [p,q], Y = [r,s] \in IQ$ e suponha que $X \cap Y = \varnothing$. Então tem-se que ou (a) $p \leq q < r \leq s$, ou (b) $r \leq s < p \leq q$. Considerando (a) tem-se segue que

$$\begin{aligned} min\{d_Q(x,y) \in Q | x \in X \wedge y \in Y\} &= min\{d_Q(x,y) \in Q | p \leq x \leq q < r \leq y \leq s\} \\ &= d_Q(q,r) \\ &= |q-r|_Q, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} max\{d_Q(x,y) \in Q | x \in X \wedge y \in Y\} &= max\{d_Q(x,y) \in Q | p \leq x \leq q < r \leq y \leq s\} \\ &= d_Q(p,s) \\ &= |p-s|_Q. \end{aligned}$$

Considere agora (b). Procedimento análogo mostra que

$$min\{d_Q(x,y) \in Q | x \in X \wedge y \in Y\} = |p-s|_Q$$

e

$$max\{d_Q(x,y) \in Q | x \in X \wedge y \in Y\} = |q-r|_Q.$$

Portanto, conclui-se que

$$d_{IQ}(X,Y) = \left[min\{|p-s|_Q, |q-r|_Q\}, max\{|p-s|_Q, |q-r|_Q\}\right],$$

sempre que $X \cap Y = \varnothing$.

Seja agora $X \cap Y \neq \varnothing$. Logo, existem $x \in X, y \in Y$ tal que $x = y$, ou seja, $d(x,y)_Q = 0$. Segue que $min\{d_Q(x,y) \in Q | x \in X \wedge y \in Y\} = 0$. Além disso, tem-se que $p \leq s$ e $r \leq q$, e como $p \leq q$ e $r \leq s$, segue que $d_Q(p,s) = |p-s|_Q \geq |p-r| =_Q d_Q(p,r)$ e $d_Q(q,r) = |q-r|_Q \geq |q-s| =_Q d_Q(q,s)$, ou seja,

$$\begin{aligned} max\{d_Q(x,y) \in Q | x \in X \wedge y \in Y\} &= max\{d_Q(x,y) \in Q | p \leq x \leq q \wedge r \leq y \leq s\} \\ &= max\{d_Q(p,r), d_Q(p,s), d_Q(q,r), d_Q(q,s)\} \\ &= max\{d_Q(p,s), d_Q(q,r)\} \\ &= max\{|p-s|_Q, |q-r|_Q\}, \end{aligned}$$

o que significa que $d_{IQ}(X,Y)=\left[0, max\left\{|p-s|_Q, |q-r|_Q\right\}\right]$, sempre que $X \cap Y \neq \emptyset$.

A prova da primeira parte de (ii) é imediata, segue diretamente de (i), satisfazendo as condições da definição 5.5.3. Além disso, (ii) é bem definida em IQ e completamente determinada pela função valor absoluto em Q. Para provar a segunda parte, observe que o resultado é imediato para $0 \in X$. Agora, se $X=[p,q] \in IQ_{pos}$, então tem-se que $|p|_Q \leq |q|_Q$ e, portanto, é válido que

$$|X|_{IQ}=\|[p,q]\|_{IQ}=\left[min\left\{|p|_Q, |q|_Q\right\}, max\left\{|p|_Q, |q|_Q\right\}\right]=[p,q]=X.$$

Em caso contrário, tem-se que $p \leq q < 0$ e, portanto, $|q|_Q \leq |p|_Q$. Logo, segue que

$$|X|_{IQ}=\|[p,q]\|_{IQ}=\left[min\left\{|p|_Q, |q|_Q\right\}, max\left\{|p|_Q, |q|_Q\right\}\right]=[-q,-p]=-X. \ \blacklozenge$$

11.3.2 Definição. Diâmetro Intervalar

A função diâmetro intervalar é definida como $D_{IQ}: IQ \to IQ$, tal que $X \mapsto r_{IQ}(X)-l_{IQ}(X)$, onde r_{IQ} e l_{IQ} são, respectivamente, o extremo superior (direito) e o inferior (esquerdo) de um intervalo racional. ♦

O seguinte resultado é imediato:

11.3.3 Proposição

O diâmetro intervalar pode ser dado como $D_{IQ}: IQ \to IQ$, tal que $[p,q] \mapsto d_Q(p,q)=|p-q|_Q$, onde d_Q e $|\ |_Q$ são a distância e o módulo básicos introduzidos em 11.2.1. ♦

11.3.4 Definição. Subestrutura de Medidas Intervalares

A subestrutura de medidas do sistema intervalar IQ é dada por $M_{IQ}=\left\{D_{IQ}, d_{IQ}, |\ |_{IQ}\right\}$, onde D_{IQ} é o diâmetro intervalar definido em 11.3.2, e d_{IQ} e $|\ |_{IQ}$ são, respectivamente, a distância e o módulo intervalares, introduzidos em 11.3.1. ♦

As proposições a seguir relacionam algumas propriedades interessantes apresentadas pela distância intervalar.

11.3.5 Proposição

Se $d_{IQ}(X,Y)=[a,b] \in IQ$ então $min\left\{D_{IQ}(X), D_{IQ}(Y)\right\} \leq b$.

prova:

Sejam $X=[p,q], Y=[r,s] \in IQ$ e suponha $X \cap Y = \emptyset$. Se $X<Y$, então tem-se que $p \leq q < r \leq s$. Logo, é válido que $D_{IQ}(X)=q-p$, $D_{IQ}(Y)=s-r$ e

$d_{IQ}(X,Y)=[r-q,s-p]$. Então, é imediato que $D_{IQ}(X),D_{IQ}(Y)<s-p=b$. Resultado análogo é obtido considerando-se $Y<X$. Suponha agora $X\cap Y\neq\emptyset$. Se $p\leq r\leq q\leq s$, tem-se que $d_{IQ}(X,Y)=[0,s-p]$ e, portanto, $D_{IQ}(X),D_{IQ}(Y)<s-p=b$. Resultado análogo é obtido considerando-se $r\leq p\leq s\leq q$. Agora, se $X\subseteq Y$, então $r\leq p\leq q\leq s$. Segue que $d_{IQ}(X,Y)=[0,max\{s-p,q-r\}]$, e, portanto, $min\{D_{IQ}(X),D_{IQ}(Y)\}=q-p\leq s-p,q-r\leq b$. Resultado análogo é obtido considerando-se $Y\subseteq X$. ♦

11.3.6 Proposição

Para todo $X,Y\in IQ$, tem-se que

(i) $d_{IQ}(X,X)=[0,D_{IQ}(X)]$;

(ii) $d_{IQ}(X,X)=0$ se e somente se $X\in Q$;

(iii) $d_{IQ}(X,Y)=0$ se e somente se $X=Y\in Q$;

(iv) $d_{IQ}(X,Y)=d_{IQ}(Y,X)$.

prova:

Para provar (i), seja $X=[p,q]\in IQ$. Pela proposição 11.3.1 (ii), segue que $d_{IQ}(X,X)=\left[0,max\left\{|p-q|_Q\right\}\right]=[0,D_{IQ}(X)]$. As provas de (ii) e (iii) são imediatas, assim como a de (iv), pois, pela proposição 11.2.2 (iii), d_Q é uma métrica e, portanto, $d_Q(x,y)=d_Q(y,x)$, para todo $x\in X$, $y\in Y$. ♦

O resultado a seguir mostra que a distância é monótona com relação à inclusão.

11.3.7 Proposição

Para todo $X,X',Y,Y'\in IQ$, se $X\subseteq X'$ e $Y\subseteq Y'$ então $d_{IQ}(X,Y)\subseteq d_{IQ}(X',Y')$.

prova:

Sejam $X=[p,q],X'=[p',q'],Y=[r,s],Y'=[r',s']\in IQ$. Como $X\subseteq X'$ e $Y\subseteq Y'$, então $p'\leq p\leq q\leq q'$ e $r'\leq r\leq s\leq s'$. Portanto, é válido que

$$min\left\{|s-p|_Q,|r-q|_Q\right\}\geq min\left\{|s'-p'|_Q,|r'-q'|_Q\right\}\geq 0$$

e

$$max\left\{|s-p|_Q,|r-q|_Q\right\}\leq max\left\{|s'-p'|_Q,|r'-q'|_Q\right\}.$$

Tem-se então as seguintes possibilidades:

(i) se $X'\cap Y'=\emptyset$, então

$$d_{IQ}(X,Y) = \left[min\left\{ |s-p|_Q, |r-q|_Q \right\}, max\left\{ |s-p|_Q, |r-q|_Q \right\} \right]$$
$$\subseteq \left[min\left\{ |s'-p'|_Q, |r'-q'|_Q \right\}, max\left\{ |s'-p'|_Q, |r'-q'|_Q \right\} \right] = d_{IQ}(X',Y');$$

(ii) se $X' \cap Y' \neq \varnothing$ e $X \cap Y = \varnothing$, então

$$d_{IQ}(X,Y) = \left[min\left\{ |s-p|_Q, |r-q|_Q \right\}, max\left\{ |s-p|_Q, |r-q|_Q \right\} \right]$$
$$\subseteq \left[0, max\left\{ |s'-p'|_Q, |r'-q'|_Q \right\} \right] = d_{IQ}(X',Y');$$

(iii) se $X' \cap Y' \neq \varnothing$ e $X \cap Y \neq \varnothing$, então

$$d_{IQ}(X,Y) = \left[0, max\left\{ |s-p|_Q, |r-q|_Q \right\} \right]$$
$$\subseteq \left[0, max\left\{ |s'-p'|_Q, |r'-q'|_Q \right\} \right] = d_{IQ}(X',Y').$$

Portanto, em qualquer caso, é válido que $d_{IQ}(X,Y) \subseteq d_{IQ}(X',Y')$. ♦

As proposições a seguir apresentam algumas propriedades interessantes relacionadas com o valor absoluto intervalar.

11.3.8 Proposição

Para todo $X, Y \in IQ$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se que:
(i) $|\lambda X|_{IQ} = |\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot |X|_{IQ}$;
(ii) se $|X+Y|_{IQ} = [a,b]$, $|X| = [c,d]$ e $|Y|_{IQ} = [e,f]$, então $a \leq c+e$ e $b \leq d+f$;
(iii) se $X \cap Y \neq \varnothing$ então $|X \cup Y|_{IQ} = |X|_{IQ} \cup |Y|_{IQ}$.
prova:

Para provar (i), considere $X = [p,q] \in IQ$. Como $|\ |_Q$ é uma norma em Q, tem-se que $|\lambda r|_Q = |\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot |r|_Q$, para todo $r \in Q$. Então, utilizando a proposição 11.3.1 (ii) para $0 \notin X$ e supondo $\lambda \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}
|\lambda X|_{IQ} &= |\lambda [p,q]|_{IQ} \\
&= |[\lambda p, \lambda q]|_{IQ} \\
&= \left[min\left\{ |\lambda p|_Q, |\lambda q| \right\}_Q, max\left\{ |\lambda p|_Q, |\lambda q| \right\}_Q \right] \\
&= \left[min\left\{ |\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot |p|_Q, |\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot |q|_Q \right\}, max\left\{ |\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot |p|_Q, |\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot |q|_Q \right\} \right] \\
&= \left[|\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot min\left\{ |p|_Q, |q|_Q \right\}, |\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot max\left\{ |p|_Q, |q|_Q \right\} \right] \\
&= |\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot |X|_{IQ}.
\end{aligned}$$

Agora, considerando $\lambda < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned}
|\lambda X|_{IQ} &= |\lambda\,[p,q]|_{IQ} \\
&= |[\lambda q, \lambda p]|_{IQ} \\
&= \left[min\left\{|\lambda p|_Q, |\lambda q|\right\}_Q, max\left\{|\lambda p|_Q, |\lambda q|\right\}_Q \right] \\
&= \left[min\left\{|\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot |p|_Q, |\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot |q|_Q\right\}, max\left\{|\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot |p|_Q, |\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot |q|_Q\right\} \right] \\
&= \left[|\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot min\left\{|p|_Q, |q|_Q\right\}, |\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot max\left\{|p|_Q, |q|_Q\right\} \right] \\
&= |\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot |X|_{IQ}.
\end{aligned}$$

Obtém-se o mesmo resultado para $0 \in X$ de forma análoga.

Prova-se agora (ii). Sejam $X = [p,q], Y = [r,s] \in IQ$. Considerando-se a proposição 11.3.1 (ii), e observando que para todo $r_1, r_2 \in Q$ é válido que $|r_1 + r_2|_Q \leq |r_1|_Q + |r_2|_Q$, pois $|\ |_Q$ é uma norma em Q, segue que:

(1) se $X, Y \in IQ_{pos}$, então

$$\begin{aligned}
|X+Y|_{IQ} &= |[p,q]+[r,s]|_{IQ} \\
&= |[p+r, q+s]|_{IQ} \\
&= [p+r, q+s] \\
&= [p,q]+[r,s] \\
&= |X|_{IQ} + |Y|_{IQ}
\end{aligned}$$

e, portanto, $a = p + r = c + e$ e $b = q + s = d + f$.

(2) $X \in IQ_{pos}$ e $0 \in Y$, então

$$\begin{aligned}
|X+Y|_{IQ} &= |[p,q]+[r,s]|_{IQ} \\
&= |[p+r, q+s]|_{IQ} \\
&= \begin{cases} [p+r, q+s] & \text{se } p > |r|_Q, \\ \left[0, max\left\{|p+r|_Q, q+s\right\}\right] & \text{se } p \leq |r|_Q. \end{cases}
\end{aligned}$$

Por outro lado, $|X|_{IQ} = [p,q]$ e $|Y|_{IQ} = \left[0, max\left\{|r|_Q, s\right\}\right]$. Logo, tem-se que $|X+Y|_{IQ} = \left[p, q + max\left\{|r|_Q, s\right\}\right]$. Segue que, ou $a = p + r < p = c + e$, ou $a = 0 < p = c + e$, e, ou $b = q + s \leq q + max\left\{|r|_Q, s\right\} = d + f$, ou $b = max\left\{|p+r|_Q, q+s\right\} \leq q + max\left\{|r|_Q, s\right\} = d + f$.

(3) se $X \in IQ_{pos}$ e $r \le s < 0$, então

$$
\begin{aligned}
|X+Y|_{IQ} &= \left[\!\left[p,q\right] + \left[r,s\right]\!\right]_{IQ} \\
&= \left[\!\left[p+r,q+s\right]\!\right]_{IQ} \\
&= \begin{cases} \left[p+r,q+s\right] & \text{se } p > |r|_Q, \\ \left[0, max\left\{\left|p+r\right|_Q, \left|q+s\right|_Q\right\}\right] & \text{se } p \le |r|_Q \wedge \left|q\right|_Q \ge |s|_Q, \\ \left[\left|q+s\right|_Q, \left|p+r\right|_Q\right] & \text{se } \left|q\right|_Q < |s|_Q. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Por outro lado, $|X|_{IQ} = \left[p,q\right]$ e $|Y|_{IQ} = \left[|s|_Q, |r|_Q\right]$. Logo, tem-se que $|X+Y|_{IQ} = \left[p+|s|_Q, q+|r|_Q\right]$. Segue que, ou $a = p+r < p+|s|_Q = c+e$, ou $a = 0 < p+|s|_Q = c+e$, ou $a = \left|q+s\right|_Q \le p+|s|_Q = c+e$ (pois $q < |s|_Q$), e, ou $b = q+s < q+|r|_Q = d+f$, ou

$$
b = max\left\{\left|p+r\right|_Q, \left|q+s\right|_Q\right\} \le max\left\{p+|r|_Q, q+|s|_Q\right\} < q+|r|_Q = d+f,
$$

ou $b = \left|p+r\right|_Q \le p+|r|_Q < q+|r|_Q = d+f$.

(4) se $0 \in X$ e $0 \in Y$, então

$$
\begin{aligned}
|X+Y|_{IQ} &= \left[\!\left[p,q\right] + \left[r,s\right]\!\right]_{IQ} \\
&= \left[\!\left[p+r,q+s\right]\!\right]_{IQ} \\
&= \left[0, max\left\{\left|p+r\right|_Q, \left|q+s\right|_Q\right\}\right].
\end{aligned}
$$

Por outro lado, $|X|_{IQ} = \left[0, max\left\{\left|p\right|_Q, \left|q\right|_Q\right\}\right]$ e $|Y|_{IQ} = \left[0, max\left\{|r|_Q, |s|_Q\right\}\right]$. Logo, tem-se que

$$
\begin{aligned}
|X|_{IQ} + |Y|_{IQ} &= \left[0, max\left\{\left|p\right|_Q, \left|q\right|_Q\right\} + max\left\{|r|_Q, |s|_Q\right\}\right] \\
&= \left[0, max\left\{\left|p\right|_Q + |r|_Q, \left|p\right|_Q + |s|_Q, \left|q\right|_Q + |r|_Q, \left|q\right|_Q + |s|_Q\right\}\right].
\end{aligned}
$$

Segue que $a = 0 = c+e$, e

$$
\begin{aligned}
b &= max\left\{\left|p+r\right|_Q, \left|q+s\right|_Q\right\} \\
&\le max\left\{\left|p\right|_Q + |r|_Q, \left|q\right|_Q + |s|_Q\right\} \\
&\le max\left\{\left|p\right|_Q + |r|_Q, \left|p\right|_Q + |s|_Q, \left|q\right|_Q + |r|_Q, \left|q\right|_Q + |s|_Q\right\} = d+f.
\end{aligned}
$$

(5) se $p \leq q < 0$ e $0 \in Y$, então

$$
\begin{aligned}
|X+Y|_{IQ} &= \left\|[p,q]+[r,s]\right\|_{IQ} \\
&= \left\|[p+r,q+s]\right\|_{IQ} \\
&= \begin{cases} \left[0, max\left\{|p+r|_Q, |q+s|_Q\right\}\right] & \text{se } |s|_Q \geq q \\ \left[|q+s|_Q, |p+r|_Q\right] & \text{se } |s|_Q < q. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Por outro lado, $|X|_{IQ} = \left[|q|_Q, |p|_Q\right]$ e $|Y|_{IQ} = \left[0, max\left\{|r|_Q, |s|_Q\right\}\right]$. Logo, tem-se que $|X|_{IQ} + |Y|_{IQ} = \left[|q|_Q, |p|_Q + max\left\{|r|_Q, |s|_Q\right\}\right]$. Segue que, ou $a = 0 < |q|_Q = c + e$, ou $a = |q+s|_Q \leq |q|_Q = c + e$, e, ou

$$
\begin{aligned}
b &= max\left\{|p+r|_Q, |q+s|_Q\right\} \\
&\leq max\left\{|p|_Q + |r|_Q, |q|_Q + |s|_Q\right\} \\
&\leq max\left\{|p|_Q + |r|_Q, |p|_Q + |s|_Q\right\} = |p|_Q + max\left\{|r|_Q, |s|_Q\right\} = d + f,
\end{aligned}
$$

ou $b = |p+r|_Q \leq |p|_Q + |r|_Q \leq |p|_Q + max\left\{|r|_Q, |s|_Q\right\} = d + f$.

(6) se $p \leq q < 0$ e $r \leq s < 0$, então

$$
\begin{aligned}
|X+Y|_{IQ} &= \left\|[p,q]+[r,s]\right\|_{IQ} \\
&= \left\|[p+r,q+s]\right\|_{IQ} \\
&= \left[|q+s|_{IQ}, |p+r|_{IQ}\right].
\end{aligned}
$$

Por outro lado, $|X|_{IQ} = \left[|q|_Q, |p|_Q\right]$ e $|Y|_{IQ} = \left[|s|_Q, |r|_Q\right]$. Logo, tem-se que $|X|_{IQ} + |Y|_{IQ} = \left[|q|_Q + |s|_Q, |p|_Q + |r|_Q\right]$. Segue que $a = |q+s|_Q \leq |q|_Q + |s|_Q = c + e$ e $b = |p+r|_Q \leq |p|_Q + |r|_Q = d + f$.

Observe que qualquer outra situação possível pode ser reduzida à alguma das expostas acima, e, portanto o resultado (ii) é sempre válido.

Para provar (iii), sejam $X = [p,q], Y = [r,s] \in IQ$. Como $X \cap Y \neq \varnothing$ então tem-se que $p \leq s$ e $r \leq q$. Consideram-se as seguintes situações: (1) $X, Y \in IQ_{pos}$, ou (2) $X \in IQ_{pos}$ e $0 \in Y$, ou (3) $0 \in X$ e $0 \in Y$, ou (4) $0 \in X$ e $Y \in IQ_{pos}$, ou (5) $0 \in X$ e $s < 0$, ou (6) $q < 0$ e $0 \in Y$, ou (7) $q < 0$ e $s < 0$. Considere primeiramente (1). Segue que

$$\begin{aligned}|X \cup Y|_{IQ} &= \left[\!\left[min\{p,r\}, max\{q,s\}\right]\!\right]_{IQ} \\ &= \left[min\{p,r\}, max\{q,s\}\right] \\ &= [p,q] \cup [r,s] \\ &= |X|_{IQ} \cup |Y|_{IQ}.\end{aligned}$$

Seja agora (2). Tem-se que

$$\begin{aligned}|X \cup Y|_{IQ} &= \left[\!\left[r, max\{q,s\}\right]\!\right]_{IQ} \\ &= \left[0, max\left\{|r|_Q, q, s\right\}\right] \\ &= [p,q] \cup \left[0, max\left\{|r|_Q, s\right\}\right] \\ &= |X|_{IQ} \cup |Y|_{IQ}.\end{aligned}$$

De forma análoga mostra-se (4). Em (3), é válido que

$$\begin{aligned}|X \cup Y|_{IQ} &= \left[\!\left[min\{p,r\}, max\{q,s\}\right]\!\right]_{IQ} \\ &= \left[0, max\left\{|p|_Q, |r|_Q, q, s\right\}\right] \\ &= \left[0, max\left\{|p|_Q, q\right\}\right] \cup \left[0, max\left\{|r|_Q, s\right\}\right] \\ &= |X|_{IQ} \cup |Y|_{IQ}.\end{aligned}$$

Considere então (5). Segue que

$$\begin{aligned}|X \cup Y|_{IQ} &= \left[\!\left[min\{p,r\}, q\right]\!\right]_{IQ} \\ &= \left[0, max\left\{|p|_Q, |r|_Q, q\right\}\right] \\ &= \left[0, max\left\{|p|_Q, q\right\}\right] \cup \left[|s|_Q, |r|_Q\right] \\ &= |X|_{IQ} \cup |Y|_{IQ}.\end{aligned}$$

De forma análoga mostra-se (6). Seja agora (7). Tem-se que

$$\begin{aligned}|X \cup Y|_{IQ} &= \left[\!\left[min\{p,r\}, max\{q,s\}\right]\!\right]_{IQ} \\ &= \left[min\left\{|q|_Q, |s|_Q\right\}, max\left\{|p|_Q, |r|_Q\right\}\right] \\ &= \left[|q|_Q, |p|_Q\right] \cup \left[|s|_Q, |r|_Q\right] \\ &= |X|_{IQ} \cup |Y|_{IQ},\end{aligned}$$

o que mostra que em qualquer situação o resultado sempre é válido. ♦

A proposição a seguir mostra a monotonicidade da função módulo para a relação de inclusão.

11.3.9 Proposição

Para todo $X, Y \in IQ$, se $X \subseteq Y$ então $|X|_{IQ} \subseteq |Y|_{IQ}$.

prova:

Sejam $X = [p,q], Y = [r,s] \in IQ$. Como $X \subseteq Y$ então tem-se que $r \leq p \leq q \leq s$. Consideram-se as seguintes situações: (i) $X, Y \in IQ_{pos}$, ou (ii) $X \in IQ_{pos}$ e $0 \in Y$, ou (iii) $0 \in X$ e $0 \in Y$, ou (iv) $q < 0$ e $0 \in Y$, ou (v) $q < 0$ e $s < 0$. Considere primeiramente (i). Segue que $|X|_{IQ} = X \subseteq Y = |Y|_{IQ}$. Em (ii), tem-se que $|X|_{IQ} = X = [p,q]$ e $|Y|_{IQ} = \left[0, max\left\{|r|_Q, |s|_Q\right\}\right]$. Como ocorre que $r \leq 0 < p \leq q \leq s \leq max\left\{|r|_Q, |s|_Q\right\}$, então segue $|X|_{IQ} \subseteq |Y|_{IQ}$. Seja agora (iii). Tem-se que $|X|_{IQ} = \left[0, max\left\{|p|_Q, |q|_Q\right\}\right]$ e $|Y|_{IQ} = \left[0, max\left\{|r|_Q, |s|_Q\right\}\right]$. Como $0 \leq max\left\{|p|_Q, |q|_Q\right\} \leq max\left\{|r|_Q, |s|_Q\right\}$, então é válido que $|X|_{IQ} \subseteq |Y|_{IQ}$. Em (iv), tem-se que $|X|_{IQ} = -X = [-q, -p]$ e $|Y|_{IQ} = \left[0, max\left\{|r|_Q, |s|_Q\right\}\right]$. Segue que $0 < -q \leq -p \leq -r \leq max\left\{|r|_Q, |s|_Q\right\}$, ou seja, ocorre que $|X|_{IQ} \subseteq |Y|_{IQ}$. Finalmente, se ocorre (v), então é válido que $|X|_{IQ} = -X = [-q, -p]$ e $|Y|_{IQ} = -Y = [-s, -r]$. É imediato que $|X|_{IQ} \subseteq |Y|_{IQ}$. ♦

Da proposição 11.2.2 (ii) segue que:

11.3.10 Proposição

A função módulo intervalar $|\ |_{IQ} : IQ \to IQ_{-}$ não é injetora, mas suas restrições $|\ |_{IQ_{+}} : IQ_{+} \to IQ_{-}$ e $|\ |_{IQ_{-}} : IQ_{-} \to IQ_{-}$ são injetoras.

11.4 A Subestrutura de Medidas $M_{\text{II}Q}$ do Espaço Coerente Bi-Estruturado de Intervalos Racionais

A segunda etapa do processo de construção global para R e IR corresponde a uma *Coh*-evolução (veja seção 7.1.6) aplicada ao sistema intervalar IQ, resultando no sistema bi-estruturado $\left(\Lambda_{\text{II}Q}; \Sigma^{in}_{\text{II}Q}, \Sigma^{ap}_{\text{II}Q}\right)$ (veja seção 9.2), com $\Lambda_{\text{II}Q} = \left\{\text{II}Q, \wp(\text{II}Q)\right\}$, sendo regulado pelo subsistema $\text{qtot}_{\text{II}Q}$ dos objetos quasi-totais de $\text{II}Q$, onde $\text{II}Q$ é o espaço coerente de intervalos racionais gerado pelo conjunto básico Q (definição 3.4.3).

Então tem-se que:

11.4.1 Proposição

A Coh_{qtot}-evolução, aplicada às funções de medidas intervalares fundamentais d_{IQ} e $|\ |_{IQ}$, introduzidas em 11.3.1, determina as funções de medidas de objetos do espaço coerente bi-estruturado de intervalos racionais $\left(\Lambda_{\amalg Q};\Sigma^{in}_{\amalg Q};\Sigma^{ap}_{\amalg Q}\right)$, dadas explicitamente por:

(i) função distância de objetos: $d_{\amalg Q}:\amalg Q \sqcap \amalg Q \to \amalg Q$, tal que

$$d_{\amalg Q}(x,y)=\begin{cases}\hat{q}d_{\amalg Q}(x,y) & \text{se } x,y\in qtot(\amalg Q);\\ qd_{\amalg Q}(x,y) & \text{caso contrario,}\end{cases}$$

onde $qd_{\amalg Q}:\amalg Q\sqcap \amalg Q \to \amalg Q_{+} \subseteq \amalg Q$, tal que $(x,y)\mapsto \{d_{IQ}(X,Y)\in IQ_{+} \mid X\in x\wedge Y\in y\}$, é a quasi-distância de objetos, $\hat{q}d_{\amalg Q}(x,y)$ é o fecho de $qd_{\amalg Q}(x,y)$ relativamente a $qtot_{\amalg Q}$ e $\sqcap$ é o produto direto definido em 3.6.1;

(ii) função valor absoluto ou módulo de objetos: $|\ |_{\amalg Q}:\amalg Q \to \amalg Q$, tal que

$$|x|_{\amalg Q}=\begin{cases}\hat{q}|x|_{\amalg Q} & \text{se } x\in qtot(\amalg Q);\\ q|x|_{\amalg Q} & \text{caso contrario,}\end{cases}$$

onde $q|\ |_{\amalg Q}:\amalg Q \to \amalg Q_{+} \subseteq \amalg Q$, tal que $x\mapsto \{|X|_{IQ}\in IQ_{+} \mid X\in x\}$ é o quasi-módulo de objetos e $\hat{q}|x|_{\amalg Q}$ é o fecho de $q|x|_{\amalg Q}$ relativamente a $qtot_{\amalg Q}$;

sendo $qtot_{\amalg Q+}\equiv\left(\Lambda_{qtot(\amalg Q_{+})};\Sigma^{in}_{qtot(\amalg Q_{+})};\Sigma^{ap}_{qtot(\amalg Q_{+})}\right)$ o sistema dos objetos quasi-totais de $\amalg Q_{+}$, onde $\Lambda_{qtot(\amalg Q_{+})}=\{qtot(\amalg Q_{+}),\wp(qtot(\amalg Q_{+}))\}$.

prova:

Observe que (i) satisfaz as condições da definição 5.5.3 (iii). Salienta-se tambem que se $[p,q]\in x,[p',q']\in y$, então $d_{IQ}([p,q],[p',q'])\in d_{\amalg Q}(x,y)$. Além disso, tem-se que $d_{\amalg Q}(x,y)\in \amalg Q$, para todo $x,y\in\amalg Q$. De fato, se $x=\varnothing$ ou $y\neq\varnothing$ o resultado é imediato. Supor então $x,y\neq\varnothing$. Para todo $X=[p_1,q_1], X'=[p_1',q_1']\in x$, $Y=[p_2,q_2], Y'=[p_2',q_2']\in y$, tem-se que $p_1\leq q_1'$, $p_1'\leq q_1$, $p_2\leq q_2'$ e $p_2'\leq q_2$. Considere primeiramente que $X\cap Y=\varnothing$ e $X'\cap Y'=\varnothing$. Observe que se $X<Y$ e $X'<Y'$ então tem-se que $p_1\leq q_1<p_2\leq q_2$ e $p_1'\leq q_1'<p_2'\leq q_2'$. Portanto, é válido que $d_{IQ}(X,Y)=[p_2-q_1,q_2-p_1]\in IQ_{+}$ e $d_{IQ}(X',Y')=[p_2'-q_1',q_2'-p_1']\in IQ_{+}$. Então é imediato que $d_{IQ}(X,Y)\approx_{\leq Q+} d_{IQ}(X',Y')$, para todo $X,X'\in x$ e $Y,Y'\in y$, pois $p_2-q_1\leq q_2'-p_1'$ e $p_2'-q_1'\leq q_2-p_1$. O mesmo resultado é obtido se $Y<X$ e $Y'<X'$. Salienta-se que a possibilidade de $X<Y$ e $Y'<X'$ nunca ocorre, porque neste caso tem-se que $q_1<p_2$ e $q_2'<p_1'$, o que acarreta em $q_1<p_2\leq q_2'<p_1'$. Isto resultaria em $X\not\approx X'$, o que é um absurdo. Da mesma forma as possibilidades $Y<X$ e $X'<Y'$ nunca é acontece.

Considere agora $X \cap Y = \emptyset$ e $X' \cap Y' \neq \emptyset$, tal que $X < Y$. Suponha então que $p_1' \leq p_2' \leq q_1' \leq q_2'$. Então, neste caso, tem-se que $d_{IQ}(X,Y) = [p_2 - q_1, q_2 - p_1] \in IQ_+$ e $d_{IQ}(X',Y') = [0, q_2' - p_1'] \in IQ_+$. Logo, é imediato que $d_{IQ}(X,Y) \approx_{\leq Q_+} d_{IQ}(X',Y')$, para todo $X, X' \in x$ e $Y, Y' \in y$, pois $0 \leq q_2 - p_1$ e $p_2 - q_1 \leq q_2' - p_1'$. Agora, se $p_2' \leq p_1' \leq q_2' \leq q_1'$, então $d_{IQ}(X',Y') = [0, q_1' - p_2'] \in IQ_+$, e, também é imediato que $d_{IQ}(X,Y) \approx_{\leq Q_+} d_{IQ}(X',Y')$, pois $0 \leq q_2 - p_1$ e $p_2 - q_1 \leq q_2' - p_1' \leq q_1' - p_2'$. Ainda, se $X' \subseteq Y'$, então $p_2' \leq p_1' \leq q_1' \leq q_2'$, e, portanto, $d_{IQ}(X',Y') = [0, q_2' - p_2'] \in IQ_+$. Segue que $d_{IQ}(X,Y) \approx_{\leq Q_+} d_{IQ}(X',Y')$, pois $0 \leq q_2 - p_1$ e $p_2 - q_1 \leq q_2' - p_1' \leq q_2' - p_2'$. Por outro lado, se $Y' \subseteq X'$, então $p_1' \leq p_2' \leq q_2' \leq q_1'$, e, portanto, $d_{IQ}(X',Y') = [0, q_1' - p_1'] \in IQ_+$. Segue que $d_{IQ}(X,Y) \approx_{\leq Q_+} d_{IQ}(X',Y')$, pois $0 \leq q_2 - p_1$ e $p_2 - q_1 \leq q_2' - p_1' \leq q_1' - p_1'$. O mesmo resultado ó obtido se for feita a consideração de $Y < X$.

Também, de maneira análoga ao parágrafo anterior, prova-se o resultado considerando-se $X \cap Y \neq \emptyset$ e $X' \cap Y' = \emptyset$. Agora. se $X \cap Y \neq \emptyset$ e $X' \cap Y' \neq \emptyset$, então $d_{IQ}(X,Y) = [0,r] \in IQ_+$ e $d_{IQ}(X',Y') = [0,s] \in IQ_+$, onde $0 \leq r, s \in Q$, e, portanto, $d_{IQ}(X,Y) \approx_{\leq Q_+} d_{IQ}(X',Y')$, para todo $X, X' \in x$ e $Y, Y' \in y$. Logo, tem-se que $qd_{\text{II}Q}(x,y) \in \text{II}Q_+$, e, portanto, $d_{\text{II}Q}(x,y) \in \text{II}Q$.

Agora suponha que $qd_{\text{II}Q}(x,y) \neq qd_{\text{II}Q}(x',y')$, para $x,y,x',y' \in \text{II}Q$. Então, de maneira análoga ao que foi mostrado na proposição 9.2.1 (iii), tem-se que $x \neq x'$ ou $y \neq y'$.

Conclui-se assim que toda distância de objetos $d_{\text{II}Q}$ é bem definida em $\text{II}Q$ e completamente determinada pela distância intervalar d_{IQ}. Além disso, pela proposição 3.3.8, $d_{\text{II}Q}$ é fechada na família dos objetos quasi-totais, sendo, portanto, bem comportada no subsistema $\text{qtot}_{\text{II}Q}$.

Observe agora que (ii) também satisfaz as condições da definição 5.5.3. Salienta-se que se $[p,q] \in x$, então $[\![p,q]\!]_{IQ} \in |x|_{\text{II}Q}$. Além disso, tem-se que $|x|_{\text{II}Q} \in \text{II}Q$. De fato, se $x = \emptyset$ o resultado é imediato. Supor então $x \neq \emptyset$. Para todo $X = [p,q], X' = [p',q'] \in x$ tem-se que $p \leq q'$ e $p' \leq q$. Podem ocorrer as seguintes situações: ou (i) $X, X' \in IQ_{pos}$, ou (ii) $X \in IQ_{pos}$ e $0 \in X'$, ou (iii) $0 \in X$ e $X' \in IQ_{pos}$, ou (iv) $0 \in X$ e $0 \in X'$, ou (v) $0 \in X$ e $q' < 0$, ou (vi) $q < 0$ e $0 \in X'$, ou (vii) $q < 0$ e $q' < 0$. Considere primeiramente (i). Segue que $|X|_{IQ} = X \approx_{\leq Q_+} X' = |X'|_{IQ}$. Em (ii), tem-se que $|X|_{IQ} = X = [p,q]$ e $|X'|_{IQ} = \left[0, max\left\{|p'|_Q, |q'|_Q\right\}\right] \in IQ_+$. Como ocorre que $0 < p \leq q$ e $0 < p \leq q' \leq max\left\{|p'|_Q, |q'|_Q\right\}$, então segue $X \approx_{\leq Q_+} X'$. A situação (iii) é análoga à (ii).

Seja agora (iv). Tem-se que $|X|_{IQ} = \left[0, max\left\{|p|_Q, |q|_Q\right\}\right] \in IQ_-$ e $|X'|_{IQ} = \left[0, max\left\{|p'|_Q, |q'|_Q\right\}\right] \in IQ_-$. Então é imediato que $X \approx_{\leq Q+} X'$. Em (v), tem-se que $|X|_{IQ} = \left[0, max\left\{|p|_Q, |q|_Q\right\}\right] \in IQ_-$ e $|X'|_{IQ} = -X' = [-q', -p'] \in IQ_-$. Segue que $0 < -p'$ e $0 < -q' \leq -p = |p|_Q \leq max\left\{|p|_Q, |q|_Q\right\}$, ou seja, $X \approx_{\leq Q+} X'$. A situação (vi) é análoga a (v). Finalmente, se ocorre (vii), então é válido que $|X|_{IQ} = -X = [-q, -p] \in IQ_-$ e $|X'|_{IQ} = -X' = [-q', -p'] \in IQ_-$. Portanto, aqui também é imediato que $X \approx_{\leq Q+} X'$. Conclui-se então que $q|x|_{\text{II}Q} \in \text{II}Q_+$, e, portanto, $|x|_{\text{II}Q} \in \text{II}Q$.

Agora suponha que $q|x|_{\text{II}Q} \neq q|y|_{\text{II}Q}$, para $x, y \in \text{II}Q$. Então ocorre uma das seguintes situações: ou (a) existe $X \in x$ tal que $X \notin y$, ou (b) existe $Y \in y$ tal que $Y \notin x$. Em qualquer um dos casos a conclusão é de que $x \neq y$.

Conclui-se assim que toda distância de objetos $d_{\text{II}Q}$ é bem definida em $\text{II}Q$ e completamente determinada pela distância intervalar d_{IQ}. Além disso, pela proposição 3.3.8, $d_{\text{II}Q}$ é fechada na família dos objetos quasi-totais, sendo, portanto, bem comportada no subsistema $\text{qtot}_{\text{II}Q}$. ♦

Observe que, pela proposição 10.4.10, os conjuntos $\left\{x_{r(X)} \in X_Q | X \in w\right\}$ e $\left\{x_{l(X)} \in X_Q | X \in w\right\}$ são cadeias para a relação de posição $\leq_{tot}$ que apresentam, respectivamente, ínfimo e supremo. Então é possível definir:

11.4.2 Definição. Extremo Superior, Extremo Inferior

Seja $w \in \text{II}Q$ e $x_u = \left\{[p, q] \in IQ | p \leq u \leq q\right\} \in X_{IQ}$. O extremo superior de w é definido como

$$r_{\text{II}Q}(w) = \begin{cases} \inf\limits_{\leq_{tot}}\left\{x_{r_{IQ}(X)} \in X_{IQ} | X \in w\right\} & \text{se } w \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{se } w = \emptyset, \end{cases}$$

e o extremo inferior de w é dado por

$$l_{\text{II}Q}(w) = \begin{cases} \sup\limits_{\leq_{tot}}\left\{x_{l_{IQ}(X)} \in X_{IQ} | X \in w\right\} & \text{se } w = \emptyset, \\ \emptyset & \text{se } w = \emptyset, \end{cases}$$

onde $r_{IQ}(X)$ e $l_{IQ}(X)$ são, respectivamente, o extremo superior e inferior de um intervalo racional X. ♦

É imediato que:

11.4.3 Proposição

Para todo $w \in \text{II}Q$, tem-se que:

(i) se $i(w) \in IQ$, então $r_{\text{II}Q}(w) = x_{r_{IQ}(i(w))}$ e $l_{\text{II}Q}(w) = x_{l_{IQ}(i(w))}$;

(ii) se $w \in tot(\text{II}Q)$ então $r_{\text{II}Q}(w) = l_{\text{II}Q}(w)$. ♦

11.4.4 Definição. Diâmetro do Objetos

A função diâmetro de objetos é definida como $D_{\text{II}Q}: \text{II}Q \to tot(\text{II}Q)$, tal que

$$w \mapsto r_{\text{II}Q}(w) -_{tot} l_{\text{II}Q}(w)$$

onde $r_{\text{II}Q}$ e $l_{\text{II}Q}$ são os extremos superior e inferior, respectivamente, definidos em 11.4.2. ♦

Tem-se o seguinte resultado imediato:

11.4.5 Proposição

A função diâmetro de objetos pode ser dada por $D_{\text{II}Q}: \text{II}Q \to tot(\text{II}Q)$, tal que

$$w \mapsto \inf_{\leq_{tot}}\left\{x_{D_{IQ}(X)} \in X_Q \mid X \in w\right\},$$

onde D_{IQ} é o diâmetro intervalar definido em 11.3.2. ♦

11.4.6 Definição. Subestrutura de Medidas de Objetos

A subestrutura de medidas do espaço coerente bi-estruturado de intervalos racionais $\left(\Lambda_{\text{II}Q}; \Sigma_{\text{II}Q}^{in}; \Sigma_{\text{II}Q}^{ap}\right)$ é dada por $M_{\text{II}Q} = \left\{D_{\text{II}Q}, d_{\text{II}Q}, \left|\ \right|_{\text{II}Q}\right\}$, onde $D_{\text{II}Q}$ é o diâmetro de objetos definido em 11.4.4, e $d_{\text{II}Q}$ e $|\ |_{\text{II}Q}$ são, respectivamente, a distância e o módulo de objetos, introduzidos em 11.4.1. ♦

A proposição a seguir relaciona algumas propriedades interessantes apresentadas pelo diâmetro de objetos $D_{\text{II}Q}$:

11.4.7 Proposição

Para todo $w \in \text{II}Q$, tem-se que:

(i) se $i(w) \in IQ$, então $D_{\text{II}Q}(w) = x_{D_{IQ}(i(w))}$;

(ii) se $w \in tot(\text{II}Q)$ então $D_{\text{II}Q}(w) = x_0$;

(iii) $D_{\text{II}Q}(\varnothing) = \varnothing$.

prova:

Prova-se (i). Pela proposição 11.4.3 (i), segue que

$$\begin{aligned} D_{\text{II}Q}(w) &= r_{\text{II}Q}(w) - l_{\text{II}Q}(w) \\ &= x_{r_{IQ}(i(w))} - x_{l_{IQ}(i(w))} \\ &= x_{r_{IQ}(i(w)) - l_{IQ}(i(w))} \\ &= x_{D_{IQ}(i(x))}, \end{aligned}$$

utilizando o isomorfismo $x_v \equiv v$ da proposição 10.4.4.

Agora, para provar (ii) observe que se $w \in tot(\text{II}Q)$ então, pela proposição 11.4.3 (i), tem-se que $r_{\text{II}Q}(w) = l_{\text{II}Q}(w)$. Segue que $D_{\text{II}Q}(w) = r_{\text{II}Q}(w) -_{tot} l_{\text{II}Q}(w) = x_0$.

A prova de (iii) é imediata. ♦

11.4.8 Proposição

Para todo $x \in \text{II}Q$, tem-se que:

(i) $i(D_{\text{II}Q}(x)) \leq D_{IQ}(X)$, para todo $X \in x$;

(ii) para todo $x \in tot(\text{II}Q)$ tem-se que $i(D_{\text{II}Q}(x)) = 0$.

prova:

Prova-se (i). Se $i(x) = \varnothing$, então é imediato que $i(D_{\text{II}Q}(x)) = i(D_{\text{II}Q}(\varnothing)) = 0 \leq D_{IQ}(X)$, para todo $X \in x$. Suponha então $i(x) \neq \varnothing$. Segue que $i(x) = [p,q] \in IQ$ tal que $[p,q] \subseteq X$, para todo $X \in x$. Logo, tem-se que $i(D_{\text{II}Q}(x)) = D_{IQ}([p,q]) \leq D_{IQ}(X)$, para todo $X \in x$. A prova de (iii) é imediata, pois se $x \in tot(\text{II}Q)$ então $i(x) = \varnothing$ ou $i(x) = [r,r] = r \in Q$. ♦

Salientam-se as seguintes propriedades da distância de objetos:

11.4.9 Proposição

Para todo $x,y \in \text{II}Q$, tem-se que:

(i) se $i(x) \in x$ e $i(y) \in y$ então $i(qd_{\text{II}Q}(x,y)) = d_{IQ}(i(x),i(y)) \in IQ_+$;

(ii) para todo $[p,q] \in qd_{\text{II}Q}(x,y)$ tem-se que $p \geq 0$;

(iii) para todo $[p,q] \in qd_{\text{II}Q}(x,x)$ tem-se que $p = 0$;

(iv) se $i(d_{\text{II}Q}(x,y)) \neq \varnothing$, então para todo $p \in i(d_{\text{II}Q}(x,y))$ tem-se que $p \geq 0$. Em particular, se $d_{\text{II}Q}(x,y) = x_{[a,b]}$, então $a \geq 0$;

(v) $min(i(d_{\text{II}Q}(x,x))) = 0$.

prova:

Prova-se (i). Se $i(x) \in x$ e $i(y) \in y$ então $d_{IQ}(i(x),i(y)) \in qd_{\text{II}Q}(x,y)$. Por outro lado, para todo $X \in x$, tem-se que $i(x) \subseteq X$, e para todo $Y \in y$, ocorre que $i(y) \subseteq Y$. Pela proposição 11.3.7, segue que $d_{IQ}(i(x),i(y)) \subseteq d_{IQ}(X,Y)$, para todo $X \in x$, $Y \in y$. É imediato que $i(qd_{\text{II}Q}(x,y)) = d_{IQ}(i(x),i(y)) \in IQ_+$.

A prova de (ii) é imediata, assim como a de (iii), pois para todo $X,Y \in x$, é válido que $X \approx Y$, logo, $X \cap Y \neq \varnothing$. Portanto, tem-se que $d_{IQ}(X,Y) = [0,r]$, $r \in Q$, para todo $X,Y \in x$. A prova de (iv) segue de (ii), e (v) é conseqüências de (iii). ♦

11.4.10 Proposição

Tem-se que:

(i) $i(d_{\mathrm{II}Q}(x,x)) = i(\{[0,D_{IQ}(X)] \in IQ | X \in x\})$;

(ii) $d_{\mathrm{II}Q}(x,x) = x_{i(\{[0,D_{IQ}(X)] \in IQ | X \in x\})}$;

(iii) $[0,i(D_{\mathrm{II}Q}(x))] \subseteq i(qd_{\mathrm{II}Q}(x,x))$, sempre que $D_{\mathrm{II}Q}(x) \neq \varnothing$;

(iv) se $x \in tot(\mathrm{II}Q)$ então $d_{\mathrm{II}Q}(x,x) = x_0$.

prova:

Prova-se (i). Pela proposição 11.3.6 (i), tem-se que $d_{IQ}(X,X) = [0,D_{IQ}(X)]$. Portanto, é válido que

$$\{[0,D_{IQ}(X)] \in IQ | X \in x\} \subseteq \{d_{IQ}(X,Y) \in IQ | X,Y \in x\} = qd_{\mathrm{II}Q}(x,x).$$

Logo, conclui-se que $i(qd_{\mathrm{II}Q}(x,x)) \subseteq i(\{[0,D_{IQ}(X)] \in IQ | X \in x\})$. Por outro lado, para todo $X,Y \in x$, se $[p,q] = d_{IQ}(X,Y) \in qd_{\mathrm{II}Q}(x,x)$, então tem-se que $p = 0$. Além disso, é válido que $q \geq min\{D_{IQ}(X), D_{IQ}(Y)\}$, pela proposição 11.3.5. Logo, tem-se que $i(\{[0,D_{IQ}(X)] \in IQ | X \in x\}) \subseteq i(qd_{\mathrm{II}Q}(x,x))$. Conclui-se então que

$$i(d_{\mathrm{II}Q}(x,x)) = i(qd_{\mathrm{II}Q}(x,x)) = i(\{[0,D_{IQ}(X)] \in IQ | X \in x\}).$$

A prova de (ii) é conseqüência imediata de (i). Prova-se agora (iii). Observe que $i(x) \subseteq X$, para todo $X \in x$. Isto significa que $D_{IQ}(i(x)) \leq min\{D_{IQ}(X) \in IQ | X \in x\}$. Logo, para todo $X \in x$, tem-se que $[0,i(D_{\mathrm{II}Q}(x))] = [0,D_{IQ}(i(x))] \subseteq [0,D_{IQ}(X)]$, e, portanto, $[0,i(D_{\mathrm{II}Q}(x))] \subseteq i(qd_{\mathrm{II}Q}(x,x))$.

Para provar (iv), suponha que $x \in tot(\mathrm{II}Q)$, mas $i(qd_{\mathrm{II}Q}(x,x)) \neq [0,0]$. Isto significa que $i(\{[0,D_{IQ}(X)] \in IQ | X \in x\}) \neq [0,0]$, pela proposição 11.4.10. Observe que $i(\{[0,D_{IQ}(X)] \in IQ | X \in x\}) \neq \varnothing$, pois $0 \in i(\{[0,D_{IQ}(X)] \in IQ | X \in x\})$. Além disso, $0 = min(i(\{[0,D_{IQ}(X)] \in IQ | X \in x\}))$. Logo, podem ocorrer as seguintes possibilidades:

(a) Existe $r \in Q$, tal que $i(\{[0,D_{IQ}(X)] \in IQ | X \in x\}) = [0,r]$. Neste caso, existe $X' \in x$ tal que $0 < D_{IQ}(X') = r \leq D_{IQ}(X)$. Portanto, tem-se que $X' = [p,p+r] = i(x)$. Conclui-se que x não é um objeto total, pois existe $y \in \mathrm{II}Q$, com $y = x \cup [p,p]$, tal que

$x \subseteq y$, mas $x \neq y$. Segue que $x \notin tot(\Pi Q)$. Como isto é uma contradição, conclui-se que $i(qd_{\Pi Q}(x,x)) = [0,0]$.

(b) Existe $S \subseteq Q$, com 0 como menor elemento de S, tal que $i(\{[0, D_{IQ}(X)] \in IQ | X \in x\}) = S \neq [0,0]$. Logo, não existe o maior elemento de S. Além disso, existe pelo menos um $r \in Q$, com $r > 0$, tal que $r \in S$. Isto significa que o conjunto $\{D_{IQ}(X) | X \in x\}$ não possui um menor elemento, mas $r < D_{IQ}(X)$, para todo $X \in x$. Logo, existe $S' \subseteq Q, S' \neq \varnothing$, tal que $r < D_{IQ}(S') < D_{IQ}(X)$, para todo $X \in x$. Segue que $S' = i(x)$ e $x \notin tot(\Pi Q)$. Como isto é uma outra contradição, conclui-se também aqui que $i(qd_{\Pi Q}(x,x)) = [0,0]$.

Segue que $d_{\Pi Q}(x,x) = x_0$. ♦

11.4.11 Proposição

Tem-se que $d_{\Pi Q}(x,y) = x_0$ se e somente se

(i) $i(x) = i(y) \in Q$ e $i(x) \in x, i(y) \in y$, ou

(ii) $x = y$ e $i(x) = i(y) = \varnothing$.

prova:

Suponha que $d_{\Pi Q}(x,y) = x_0$, ou seja, $i(qd_{\Pi Q}(x,y)) = [0,0]$, e que $i(x) \neq \varnothing$ ou $i(y) \neq \varnothing$, e as seguintes possibilidades:

(a) Se $i(x) \neq i(y)$, então, para todo $X \in x$ e $Y \in y$ tem-se que, ou $X \neq Y$, ou $X = Y \notin Q$. Logo, tem-se $d_{IQ}(X,Y) \neq [0,0]$, para todo $X \in x$ e $Y \in y$. Conclui-se que $i(qd_{\Pi Q}(x,y)) \neq [0,0]$, o que é uma contradição.

(b) se $i(x) \notin Q$ ou $i(y) \notin Q$, então, para todo $X \in x$ e $Y \in y$ tem-se que $X, Y \notin Q$. Segue que $d_{IQ}(X,Y) \neq [0,0]$, para todo $X \in x$ e $Y \in y$, e, portanto, $i(qd_{\Pi Q}(x,y)) \neq [0,0]$, o que é outra contradição.

(c) $i(x) \notin x$ ou $i(y) \notin y$, então para todo $X \in x$ e $Y \in y$ tem-se que $i(x) \neq X$ e $i(y) \neq Y$. Isto significa que mesmo que $i(x) = i(y) \in Q$, o que levaria à conclusão de que $d_{IQ}(i(x), i(y)) = [0,0]$, e pode não acontecer $i(qd_{\Pi Q}(x,y)) = [0,0]$, pois, para todo $X \in x$ e $Y \in y$ tem-se que $d_{IQ}(X,Y) \neq [0,0]$. Logo, tem-se que $i(qd_{\Pi Q}(x,y)) \neq [0,0]$, o que é novamente uma contradição.

Conclui-se então que (i) $i(x) = i(y) \in Q$ e $i(x) \in x, i(y) \in y$, ou (ii) $i(x) = i(y) = \varnothing$.

Por outro lado, supondo $i(x)=i(y)\in Q$ e $i(x)\in x, i(y)\in y$, ou, $x=y$ e $i(x)=i(y)=\varnothing$, então pode acontecer que $x=y\in tot(\Pi Q)$, e, pela proposição 1.4.6, segue que $i(qd_{\Pi Q}(x,y))=[0,0]$. Entretanto, também é possível ocorrer $x\notin tot(\Pi Q)$ ou $y\notin tot(\Pi Q)$. Neste caso, $x\neq y$, mas $d_{IQ}(i(x),i(y))=[0,0]$. Como $i(x)\in x, i(y)\in y$, então existem $X\in x$ e $Y\in y$ tais que $i(x)=X$ e $i(y)=Y$, e, portanto, $d_{IQ}(X,Y)=[0,0]$. Conclui-se que $i(qd_{\Pi Q}(x,y))=[0,0]$. ♦

11.4.12 Proposição

Tem-se que $d_{\Pi Q}(x,y)=d_{\Pi Q}(y,x)$.

prova:

É imediata pois, pela proposição 11.3.6 (iv), para todo $X\in x, Y\in y$, $d_{IQ}(X,Y)=d_{IQ}(Y,X)$. ♦

Para o valor absoluto de objetos são válidas as propriedades:

11.4.13 Proposição

Para todo $x\in \Pi Q$, tem-se que:

(i) $|i(x)|_{IQ}\subseteq i(|x|_{\Pi Q})$.

(ii) se $i(x)\in x$ então $i(|x|_{\Pi Q})=|i(x)|_{IQ}\in IQ_{+}$;

(iii) se $i(|x|_{\Pi Q})\neq\varnothing$, então para todo $p\in i(|x|_{\Pi Q})\neq\varnothing$ tem-se que $p\geq 0$;

(iv) $|x|_{\Pi Q}=x_0$ se e somente se $x=x_0$, onde $x_0\in X_Q\subseteq tot(\Pi Q)$;

(v) $|\lambda\, x|_{\Pi Q}=|\lambda\,|_{\mathbb{R}}\cdot|x|_{\Pi Q}$, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$.

prova:

Para provar (i), observe que $i(x)\subseteq X$, para todo $X\in x$. Portanto, $|i(x)|_{IQ}\subseteq|X|_{IQ}$, para todo $X\in x$. É imediato que $|i(x)|_{IQ}\subseteq i(q|x|_{\Pi Q})$. Segue que $|i(x)|_{IQ}\subseteq i(|x|_{\Pi Q})$.

Prova-se (ii). Se $i(x)\in x$ então $|i(x)|_{IQ}\in i(q|x|_{\Pi Q})$. Por outro lado, como para todo $X\in x$, tem-se que $i(x)\subseteq X$, então tem-se que $|i(x)|_{Q}\subseteq|X|_{Q}$, para todo $X\in x$. É imediato que $i(q|x|_{\Pi Q})=|i(x)|_{IQ}\in IQ_{+}$, ou seja, $i(|x|_{\Pi Q})=|i(x)|_{IQ}\in IQ_{+}$. O Resultado (iii) segue de (ii).

Para provar (iv), suponha que $q|x|_{\Pi Q}=x_0$. Isto significa que $i(q|x|_{\Pi Q})=i(x_0)=0$. Por (i), tem-se que $|i(x)|_{IQ}\subseteq i(q|x|_{\Pi Q})=[0,0]$. Logo, conclui-se que $|i(x)|_{IQ}=[0,0]$. Por definição, segue que $x = x_0$. Por outro lado, se $x = x_0$, então é imediato que $q|x_0|_{\amalg Q} = x_0$.

Prova-se (v). Pela proposição 11.3.8 (i), tem-se que para todo $X \in IQ$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda X|_{IQ} = |\lambda| \cdot |X|_{IQ}$. Para $x \notin qtot(\amalg Q)$, tem-se que

$$\begin{aligned} q|\lambda\, x|_{\amalg Q} &= \{|\lambda\, X|_{IQ} \in IQ | X \in x\} \\ &= \{|\lambda\,|_{\mathbb{R}} \cdot |X|_{IQ} \in IQ | X \in x\} \\ &= |\lambda\,|_{\mathbb{R}} \cdot \{|X|_{IQ} \in IQ | X \in x\} \\ &= |\lambda\,|_{\mathbb{R}} \cdot q|\lambda x|_{\amalg Q}, \end{aligned}$$

que é o resultado esperado. Suponha agora que $x \in qtot(\amalg Q)$. Segue que

$$\begin{aligned} |\lambda\, x|_{\amalg Q} &= \hat{q}|\lambda\, x|_{\amalg Q} \\ &= |\lambda\,|_{\mathbb{R}} \cdot \hat{q}|x|_{\amalg Q} \\ &= |\lambda\,|_{\mathbb{R}} \cdot |x|_{\amalg Q}. \end{aligned}$$

♦

A proposição a seguir mostra que a função módulo de objetos é monótona para a inclusão:

11.4.14 Proposição

Para todo $x, y \in \amalg Q$, tem-se que $x \subseteq y$ se e somente se $|x|_{\amalg Q} \subseteq |y|_{\amalg Q}$

prova:

Sejam $x, y \in \amalg Q$ tais que $x \subseteq y$. Então tem-se que para todo $X \in x$ também é válido que $X \in y$. Logo, para todo $|X|_{IQ} \in q|x|_{\amalg Q}$, ocorre que $|X|_{IQ} \in q|y|_{\amalg Q}$. Portanto, tem-se que $q|x|_{\amalg Q} \subseteq q|y|_{\amalg Q}$, e, portanto, $|x|_{\amalg Q} \subseteq |y|_{\amalg Q}$. Analogamente prova-se que se $|x|_{\amalg Q} \subseteq |y|_{\amalg Q}$ então $x \subseteq y$. ♦

11.5 A Representação Linear Interna da Função Módulo de Objetos

Os resultados das seções de 7.3 a 7.7 podem ser aplicados para determinar uma representação linear interna na estrutura de informação da função módulo de objetos, definida em 11.4.8 (ii), como $|\ |_{\amalg Q} : \amalg Q \to \amalg Q$, tal que

$$|x|_{\amalg Q} = \begin{cases} \hat{q}|x|_{\amalg Q} & \text{se } x \in qtot(\amalg Q); \\ q|x|_{\amalg Q} & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

onde $q|\ |_{\Pi Q}: \Pi Q \to \Pi Q_{-} \subseteq \Pi Q$, tal que $x \mapsto \{|X|_{IQ} \in IQ_{-} | X \in x\}$, é o quasi-módulo de objetos e $\hat{q}|\ |_{\Pi Q}$ é o fecho de $q|\ |_{\Pi Q}$ relativamente a $qtot_{\Pi Q}$.

11.5.1 Determinando a Representação Linear Interna

A representação linear interna da função módulo de objetos será dada aqui pelo produto direto de subespaços, introduzido em 7.6.

Verifica-se que a função quasi-módulo $q|\ |_{\Pi Q}$ é localmente linear. De fato, observe que o domínio Q da função módulo racional $|\ |_{Q} = Q \to Q_{+}$, definida na estrutura básica, pode ser dividido em duas partes $Q = Q_{-} \cup Q_{+}$, tais que suas restrições $|\ |_{Q_{-}} = Q_{-} \to Q_{+}$ e $|\ |_{Q_{+}} = Q_{+} \to Q_{-}$ são injetoras, conforme a proposição 1.2.2 (ii). Assim, as funções módulo intervalar correspondentes a cada uma das subteias $(IQ_{-}, \approx_{\leq -})$ e $(IQ_{+}, \approx_{\leq +})$ correspondentes, $|\ |_{IQ_{-}} = IQ_{-} \to IQ_{+}$ e $|\ |_{IQ_{+}} = IQ_{+} \to IQ_{-}$, são funções totais e injetoras, de acordo com a proposição 1.3.9. Portanto, é imediato que as quasi-funções de objetos $q|\ |_{\Pi Q-}$ e $q|\ |_{\Pi Q+}$ correspondentes aos espaços coerentes $\Pi Q_{-} = (Coh(IQ_{-}, \approx_{\leq -}), \subseteq)$ e $\Pi Q_{+} = (Coh(IQ_{+}, \approx_{\leq +}), \subseteq)$, respectivamente, são contínuas, estáveis e lineares, o que caracteriza a função quasi-módulo como localmente linear.

Considere agora o produto direto dos subespaços $\Pi Q_{-} = (Coh(IQ_{-}, \approx_{\leq -}), \subseteq)$ e $\Pi Q_{-} = (Coh(IQ_{+}, \approx_{\leq +}), \subseteq)$, dado pelo espaço coerente $\Pi \dot{Q} \equiv (Coh(IQ_{-} \dot{\cup} IQ_{+}, \dot{\approx}), \subseteq)$, assim como o produto direto $\Pi \dot{Q}_{+} \equiv (Coh(IQ_{+} \dot{\cup} IQ_{+}, \dot{\approx}), \subseteq)$. Salienta-se que para todo $\dot{x} = \{\{\{0\} \times x_{-}\} \dot{\cup} \{\{1\} \times x_{+}\}\} \in \Pi \dot{Q}$, pode-se utilizar a notação $\dot{x} \equiv (x_{-}, x_{+}) \in \Pi Q_{-} \times \Pi Q_{+}$, conforme exposto em 3.6.1.

Seja agora a função $\dot{|\ |}_{\Pi \dot{Q}}: \Pi \dot{Q} \to \Pi \dot{Q}_{+}$, definida por

$$
\dot{|(x_{-}, x_{+})|}_{\Pi \dot{Q}} = \begin{cases} \hat{q}\dot{|(x_{-}, x_{+})|}_{\Pi \dot{Q}} & \text{se } \dot{x} = (x_{-}, x_{+}) \in qtot(\Pi \dot{Q}), \\ q\dot{|(x_{-}, x_{+})|}_{\Pi \dot{Q}} & \text{caso contrario,} \end{cases}
$$

onde $\hat{q}\dot{|\ |}_{\Pi \dot{Q}}$ é o fecho da quasi-função $q\dot{|\ |}_{\Pi \dot{Q}}: \Pi \dot{Q} \to \Pi \dot{Q}_{+}$, dada por

$$
q\dot{|(x_{-}, x_{+})|}_{\Pi \dot{Q}} = (q|x_{-}|_{\Pi Q-}, q|x_{+}|_{\Pi Q+}) \in \Pi \dot{Q}_{+}.
$$

Verifica-se que $\hat{q}\left|\dot{}\right|_{\dot{\Pi Q}} \equiv \left.\left|\dot{}\right|_{\dot{\Pi Q}}\right|_{qtot}$ satisfaz as condições de estabilidade e linearidade em $qtot\left(\dot{\Pi Q}\right)$, conforme a proposição 7.6.2.

Portanto, pelo corolário 7.6.3, como a função $q\left|\;\right|_{\Pi Q}$ é localmente linear, o par $MOD = \left(q\left|\dot{}\right|_{\dot{\Pi Q}}, \hat{q}\left|\dot{}\right|_{\dot{\Pi Q}}\right)$ é uma representação linear interna para a função módulo de objetos $\left|\;\right|_{\Pi Q}$.

11.5.2 Exemplo

Considere os conjuntos coerentes $x = \{[-3,5],[0,6],[-2,3]\}$ e $y = \{[-3,5],[-6,0],[-3,1]\}$. Tem-se que

$$|x|_{\Pi Q} = q|x|_{\Pi Q} = \left\{\left|[-3,5]\right|_{IQ}, \left|[0,6]\right|_{IQ}, \left|[-2,3]\right|_{IQ}\right\} = \{[0,5],[0,6],[0,3]\} \in \Pi Q_{+}.$$

Da mesma forma, calcula-se

$$|y|_{\Pi Q} = q|y|_{\Pi Q} = \left\{\left|[-3,5]\right|_{IQ}, \left|[-6,0]\right|_{IQ}, \left|[-3,1]\right|_{IQ}\right\} = \{[0,5],[0,6],[0,3]\} \in \Pi Q_{+}.$$

Observe que $|x|_{\Pi Q} \cap |y|_{\Pi Q} = \{[0,5],[0,6],[0,3]\}$. Verifica-se agora a condição de estabilidade. Note que $x \cup y \in \Pi Q$. Assim, tem-se que

$$|x \cap y|_{\Pi Q} = \left|\{[-3,5]\}\right|_{\Pi Q} = q\left|\{[-3,5]\}\right|_{\Pi Q} = \left\{\left|[-3,5]\right|_{IQ}\right\} = \{[0,5]\},$$

e, portanto, $|x \cap y|_{\Pi Q} \neq |x|_{\Pi Q} \cap |y|_{\Pi Q}$, o que mostra a não estabilidade da função módulo. Isto acontece porque a função módulo racional não é injetora no conjunto básico Q, conforme a proposição 1.2.2 (ii).

Considere agora a representação linear da função módulo, dada por $MOD = \left(q\left|\dot{}\right|_{\dot{\Pi Q}}, \hat{q}\left|\dot{}\right|_{\dot{\Pi Q}}\right)$. Do conjunto coerente x obtém-se

$$\dot{x} = (x_{-}, x_{+}) = \left(\left\{[-3,0]_0, [0,0]_1, [-2,0]_2\right\}, \left\{[0,5]_0, [0,6]_1, [0,3]_2\right\}\right),$$

onde $x = \left\{X_i \cup Y_i \in IQ \mid X_i \in x_{-}, Y_i \in x_{+} \wedge i = 0,1,2\right\}$. Segue que

$$
\begin{aligned}
q|\dot{x}|_{\dot{\Pi Q}} &= q\left|(x_- \dot{,}\, x_-)\right|_{\dot{\Pi Q}} \\
&= \left(q|x_-|_{\Pi Q-}, q|x_+|_{\Pi Q-}\right) \\
&= \left(q\left|\{[-3{,}0]_0, [0{,}0]_1, [-2{,}0]_2\}\right|_{\Pi Q-}, q\left|\{[0{,}5]_0, [0{,}6]_1, [0{,}3]_2\}\right|_{\Pi Q-}\right) \\
&= \left(\left\{\left\|[-3{,}0]\right\|_{IQ}, \left\|[0{,}0]\right\|_{IQ}, \left\|[-2{,}0]\right\|_{IQ}\right\}, \left\{\left\|[0{,}5]\right\|_{IQ}, \left\|[0{,}6]\right\|_{IQ}, \left\|[0{,}3]\right\|_{IQ}\right\}\right) \\
&= \left(\{[0{,}3]_0, [0{,}0]_1, [0{,}2]_2\}, \{[0{,}5]_0, [0{,}6]_1, [0{,}3]_2\}\right).
\end{aligned}
$$

Observe que $|x|_{\Pi Q}$ pode ser recuperado a partir de $q\left|(x_- \dot{,}\, x_-)\right|_{\dot{\Pi Q}}$, fazendo $|x|_{\Pi Q} = \left\{X_i \cup Y_i \in IQ_- \mid X_i \in q|x_-|_{\Pi Q-}, Y_i \in q|x_+|_{\Pi Q+} \wedge i = 0{,}1{,}2\right\}$.

Da mesma forma, do conjunto coerente y obtém-se $\dot{y} = (y_-, y_+) = \left(\{[-3{,}0]_0, [-6{,}0]_1, [-3{,}0]_2\}, \{[0{,}5]_0, [0{,}0]_1, [0{,}1]_2\}\right)$, onde

$$y = \{X_i \cup Y_i \in IQ| X_i \in y_-, Y_i \in y_+ \wedge i = 0{,}1{,}2\}.$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
q|\dot{x}|_{\dot{\Pi Q}} &= q\left|(y_- \dot{,}\, y_+)\right|_{\dot{\Pi Q}} \\
&= \left(q|y_-|_{\Pi Q-}, q|y_-|_{\Pi Q+}\right) \\
&= \left(q\left|\{[-3{,}0]_0, [-6{,}0]_1, [-3{,}0]_2\}\right|_{\Pi Q-}, q\left|\{[0{,}5]_0, [0{,}0]_1, [0{,}1]_2\}\right|_{\Pi Q-}\right) \\
&= \left(\{[0{,}3]_0, [0{,}6]_1, [0{,}3]_2\}, \{[0{,}5]_0, [0{,}0]_1, [0{,}1]_2\}\right).
\end{aligned}
$$

Salienta-se que $|y|_{\Pi Q}$ pode ser recuperado a partir de $q\left|(y_- \dot{,}\, y_-)\right|_{\dot{\Pi Q}}$, fazendo $|y|_{\Pi Q} = \left\{X_i \cup Y_i \in IQ_- \mid X_i \in q|y_-|_{\Pi Q-}, Y_i \in q|y_-|_{\Pi Q+} \wedge i = 0{,}1{,}2\right\}$.

Observe que

$$
\begin{aligned}
&q|\dot{x}|_{\dot{\Pi Q}} \cap q|\dot{y}|_{\dot{\Pi Q}} \\
&\quad = q\left|(x_- \dot{,}\, x_+)\right|_{\dot{\Pi Q}} \cap q\left|(y_- \dot{,}\, y_+)\right|_{\dot{\Pi Q}} \\
&\quad = \left(\{[0{,}3], [0{,}0], [0{,}2]\} \cap \{[0{,}3], [0{,}6]\}, \{[0{,}5], [0{,}6], [0{,}3]\} \cap \{[0{,}5], [0{,}0], [0{,}1]\}\right) \\
&\quad = \left(\{[0{,}3]\}, \{[0{,}5]\}\right).
\end{aligned}
$$

Verifica-se agora a condição de estabilidade. Note que $(x_-,x_-)\cup(y_-,y_-)\in\dot{\Pi Q}$. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned}\dot{x}\cap\dot{y} &= (x_-,x_-)\cap(y_-,y_-)\\ &= (x_-\cap y_-, x_-\cap y_-)\\ &= (\{[-3,0],[0,0],[-2,0]\}\cap\{[-3,0],[-6,0]\},\{[0,5],[0,6],[0,3]\cap\{[0,5],[0,0],[0,1]\}\})\\ &= (\{[-3,0]\},\{[0,5]\}),\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}q|\dot{x}\,\dot{\cap}\,\dot{y}|_{\dot{\Pi Q}} &= q|(x_-,x_+)\,\dot{\cap}\,(y_-,y_+)|_{\dot{\Pi Q}}\\ &= q|\{[-3,0]\}\dot{,}\{[0,5]\}|_{\dot{\Pi Q}}\\ &= \left(q|\{[-3,0]\}|_{\Pi Q-},q|\{[0,5]\}|_{\Pi Q-}\right)\\ &= (\{[0,3]\},\{[0,5]\}),\end{aligned}$$

e, portanto, $q|\dot{x}\,\dot{\cap}\,\dot{y}|_{\dot{\Pi Q}} = q|\dot{x}|_{\dot{\Pi Q}}\,\dot{\cap}\,q|\dot{y}|_{\dot{\Pi Q}}$, que é o resultado esperado devido a estabilidade de $q|\ |_{\dot{\Pi Q}}$, pois $q|\ |_{\dot{\Pi Q}}$ é linear. Salienta-se que $q|\ |_{\dot{\Pi Q}}$, a primeira componente da representação linear interna de função módulo de objetos $|\ |_{\Pi Q}$, definida na estrutura de aplicação $\Sigma^{ap}_{\Pi Q}$, é um morfismo da categoria LIN definido na estrutura de informação $\Sigma^{in}_{\Pi Q}$. ♦

11.5.3 Exemplo

Nesta seção, denota-se por $\dot{X}_{IQ}\subseteq\dot{\Pi Q}$ a família $X_{IQ_-}\Pi X_{IQ_+}\equiv\left(X_{IQ_-},X_{IQ_-}\right)$, e por $\dot{X}_{IQ_+}\subseteq\dot{\Pi Q}_+$ a família $X_{IQ_+}\Pi X_{IQ_+}\equiv\left(X_{IQ_-},X_{IQ_+}\right)$.

Seja $\Omega^{-1}:qtot(\Pi Q_-)\to\{x\in qtot(\Pi Q)|x\geq x_0\}$, tal que $y\mapsto\hat{y}|_{qtot(\Pi Q)}$, onde $\hat{y}|_{qtot(\Pi Q)}$ é o fecho indexado de y no sistema $\mathrm{qtot}_{\Pi Q}$, a bijeção introduzida na introdução a este capítulo.

Considere agora os conjuntos coerentes $x_{[-5,3]},x_{[2,6]}\in X_{IQ}$. Então, pela proposição 11.4.13, é imediato que

$$|x_{[-5,3]}|_{\Pi Q}=\hat{q}|x_{[-5,3]}|_{\Pi Q}=x_{|[-5,3]|_{IQ}}=x_{[0,5]}\in X_{IQ}$$

e

$$|x_{[2,6]}|_{\Pi Q}=\hat{q}|x_{[2,6]}|_{\Pi Q}=x_{|[2,6]|_{IQ}}=x_{[2,6]}\in X_{IQ}.$$

Observe que $\left|x_{[-5,3]}\right|_{\Pi Q} \cap \left|x_{[2,6]}\right|_{\Pi Q} = x_{[0,5]} \cap x_{[2,6]} = x_{[0,6]}$. Verifica-se agora a condição de estabilidade em *qtot*(Π*Q*). Salienta-se que $x_{[-5,3]} \cup x_{[2,6]} \in \Pi Q$. Então, segue que $\left|x_{[-5,3]} \cap x_{[2,6]}\right|_{\Pi Q} = \left|x_{[-5,6]}\right|_{\Pi Q} = x_{[0,6]}$. Portanto, é válido que

$$\left|x_{[-5,3]} \cap x_{[2,6]}\right|_{\Pi Q} = \left|x_{[-5,3]}\right|_{\Pi Q} \cap \left|x_{[2,6]}\right|_{\Pi Q},$$

que é o resultado esperado, uma vez que a restrição da função $\left|\ \right|_{\Pi Q}$ à *qtot*(Π*Q*) sempre é estável em *qtot*(Π*Q*).

Aplica-se agora a representação linear $\left|\ \right|_{\Pi \dot{Q}}$. De $x_{[-5,3]} \in X_{IQ}$, obtém-se $\left(x_{[-5,0]_-}, x_{[0,3]_-}\right) \in \dot{X}_{IQ}$. Logo, tem-se que

$$\begin{aligned}
\left|\left(\dot{x}_{[-5,3]}\right)\right|_{\Pi \dot{Q}} &= \left|\left(x_{[-5,0]_-}, x_{[0,3]_-}\right)\right|_{\Pi \dot{Q}} = \hat{q}\left|\left(x_{[-5,0]_-}, x_{[0,3]_-}\right)\right|_{\Pi \dot{Q}} \\
&= \left(\hat{q}\left|x_{[-5,0]_-}\right|_{\Pi Q-}, \hat{q}\left|x_{[0,3]_{-+}}\right|_{\Pi Q+}\right) \\
&= \left(x_{[0,5]_+}, x_{[0,3]_+}\right) \in \dot{X}_{IQ_-} \subseteq \Pi \dot{Q}_+ .
\end{aligned}$$

Observe que a partir do argumento $\dot{x}_{[-5,3]} = \left(x_{[-5,0]_-}, x_{[0,3]_-}\right) \in \dot{X}_{IQ}$, recupera-se

$$x_{[-5,3]} = \left\{X_i \cup Y_i \in IQ \mid X_i \in x_{[-5,0]_-}, Y_i \in x_{[0,3]_-} \wedge i \in I\right\} = x_{[-5,0] \cup [0,3]} = x_{[-5,3]} \in X_{IQ}.$$

Agora, do resultado

$$\left|\left(\dot{x}_{[-5,3]}\right)\right|_{\Pi \dot{Q}} = \left|\left(x_{[-5,0]_-}, x_{[0,3]_-}\right)\right|_{\Pi \dot{Q}} = \left(x_{[0,5]_+}, x_{[0,3]_+}\right) \in \dot{X}_{IQ-} \subseteq \Pi \dot{Q}_+ ,$$

calcula-se $\left\{X_i \cup Y_i \in IQ_+ \mid X_i \in x_{[0,5]_+}, Y_i \in x_{[0,3]_-} \wedge i \in I\right\} = x_{[0,5]_- \cup [0,3]_-} = x_{[0,5]_+} \in X_{IQ_-}$, o que permite recuperar

$$\left|x_{[-5,3]}\right|_{\Pi Q} = \Omega^{-1}\left(x_{[0,5]_+}\right) = \hat{x}_{[0,5]_+} = x_{[0,5]} \in X_{IQ}.$$

Agora, de $x_{[2,6]} \in X_{IQ}$, obtém-se $\dot{x}_{[2,6]} = \left(x_{0_-}, x_{[2,6]_-}\right) \in \dot{X}_{IQ}$. Logo, tem-se que

$$\left|\dot{x}_{[2,6]}\right|_{\dot{\Pi Q}} = \left|\left(x_{0_-}, \overset{\bullet}{x}_{[2,6]_+}\right)\right|_{\dot{\Pi Q}} = \hat{q}\left|\left(x_{0_-}, \overset{\bullet}{x}_{[2,6]_+}\right)\right|_{\dot{\Pi Q}}$$

$$= \left(\hat{q}\left|\left(x_{0_-}\right)\right|_{\Pi Q_-}, \hat{q}\left|\left(x_{[2,6]_+}\right)\right|_{\Pi Q_-}\right)$$

$$= \left(x_{0_-}, x_{[2,6]_+}\right) \in \overset{\bullet}{X}_{IQ_-} \subseteq \Pi\dot{Q}_-.$$

Observe que a partir do argumento $\dot{x}_{[2,6]} = \left(x_{0_-}, x_{[2,6]_+}\right) \in \overset{\bullet}{X}_{IQ}$ e do resultado $\left|\left(\overset{\bullet}{\dot{x}}_{[2,6]}\right)\right|_{\dot{\Pi Q}} = \left|\left(x_{0_-}, \overset{\bullet}{x}_{[2,6]_+}\right)\right|_{\dot{\Pi Q}} = \left(x_{0_-}, x_{[2,6]_+}\right) \in \overset{\bullet}{X}_{IQ_-} \subseteq \Pi\dot{Q}_-$ é sempre possível recuperar

$$x_{[2,6]} = \left\{X_i \cup Y_i \in IQ | X_i \in x_{0_-}, Y_i \in x_{[2,6]_+} \wedge i \in I\right\} \in X_{IQ},$$

e

$$\left|x_{[2,6]}\right|_{\Pi Q} = \Omega^{-1}\left(\left\{X_i \cup Y_i \in IQ_- | X_i \in x_{0_-}, Y_i \in x_{[2,6]_+} \wedge i \in I\right\}\right) = \hat{x}_{[2,6]_-} = x_{[2,6]} \in X_{IQ}.$$

Salienta-se que

$$\left|\left(\overset{\bullet}{\dot{x}}_{[-5,3]}\right)\right|_{\dot{\Pi Q}} \cap \left|\left(\overset{\bullet}{\dot{x}}_{[2,6]}\right)\right|_{\dot{\Pi Q}} = \left|\left(x_{[-5,0]_-}, \overset{\bullet}{x}_{[0,3]_+}\right)\right|_{\dot{\Pi Q}} \cap \left|\left(x_{0_-}, \overset{\bullet}{x}_{[2,6]_+}\right)\right|_{\dot{\Pi Q}}$$

$$= \left(x_{[0,5]_+}, x_{[0,3]_+}\right) \cap \left(x_{0_+}, x_{[2,6]_+}\right)$$

$$= \left(x_{[0,5]_+} \cap x_{0_+}, x_{[0,3]_+} \cap x_{[2,6]_+}\right)$$

$$= \left(x_{[0,5]_+}, x_{[0,6]_+}\right).$$

Portanto, tem-se que

$$\left|\left(x_{[-5,0]_-}, \overset{\bullet}{x}_{[0,3]_+}\right) \cap \left(x_{0_-}, x_{[2,6]_+}\right)\right|_{\dot{\Pi Q}} = \left|\left(x_{[-5,0]_-}, \overset{\bullet}{x}_{[0,3]_+}\right)\right|_{\dot{\Pi Q}} \cap \left|\left(x_{0_-}, \overset{\bullet}{x}_{[2,6]_+}\right)\right|_{\dot{\Pi Q}},$$

o que ilustra a linearidade relativa aos quasi-totais da função $\hat{q}\left|\ \right|_{\dot{\Pi Q}}$, que é a segunda componente da representação linear da função módulo $\left|\ \right|_{\Pi Q}$. ♦

12 Mostrando os Isomorfismos entre a Subestrutura de Medidas de R e IR e a Subestrutura de Medidas de ΠQ

No capítulo 11, pelo processo de construção global, introduziu-se uma subestrutura de medidas adequada à representação global do sistema de número reais $\mathsf{R} = (\Lambda_{\mathbb{R}}; \Sigma_{\mathbb{R}})$ e intervalos de reais $\mathsf{IR} = (\Lambda_{\mathbb{IR}}; \Sigma_{\mathbb{IR}})$, onde $\Lambda_{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R}, \wp(\mathbb{R})\}$, $\Lambda_{\mathbb{IR}} = \{\mathbb{IR}, \wp(\mathbb{IR})\}$.

No capítulo 10 mostrou-se a existência de Σ_{ap}-isomorfismos entre o subsistema $\mathsf{tot}_{\Pi Q}$ dos objetos totais e o sistema R dos números reais, assim como entre o subsistema $\mathsf{qtot}_{\Pi Q}$ dos objetos quasi-totais e o sistema IR dos intervalos reais, relativamente à estrutura $\Sigma = \{\leq, *, F\}$. O objetivo deste capítulo é mostrar que estes isomorfismos também existem para a subestrutura de medidas.

Mostra-se aqui que a função distância definida na subestrutura de medidas $M_{\Pi Q}$ da estrutura de aplicação $\Sigma^{ap}_{\Pi Q}$ do espaço coerente bi-estruturado $(\Lambda_{\Pi Q}; \Sigma^{in}_{\Pi Q}, \Sigma^{ap}_{\Pi Q})$, onde $\Lambda_{\Pi Q} = \{\Pi Q, \wp(\Pi Q)\}$, quando restrita ao subsistema dos objetos quasi-totais $\mathsf{qtot}_{\Pi Q} = \left(\Lambda_{qtot(\Pi Q)}; \Sigma^{in}_{qtot(\Pi Q)}, \Sigma^{ap}_{qtot(\Pi Q)}\right)$, onde $\Lambda_{qtot(\Pi Q)} = \{qtot(\Pi Q), \wp(qtot(\Pi Q))\}$, é uma semi-pseudométrica generalizada que apresenta o significado intuitivo desejado para uma função distância no sistema dos intervalos reais IR. Além disso, esta função distância restrita ao subsistema dos objetos totais $\mathsf{tot}_{\Pi Q} = \left(\Lambda_{tot(\Pi Q)}; \Sigma^{in}_{tot(\Pi Q)}, \Sigma^{ap}_{tot(\Pi Q)}\right)$, onde $\Lambda_{tot(\Pi Q)} = \{tot(\Pi Q), \wp(tot(\Pi Q))\}$, coincide exatamente com a métrica usual definida para o sistema dos números reais R. Estes dois fatos caracterizam novamente os Σ_{ap}-isomorfismos entre R e IR e sua representação global.

De maneira similar, prova-se aqui que a função valor absoluto definida na subestrutura de medidas $M_{\Pi Q}$ da estrutura de aplicação $\Sigma^{ap}_{\Pi Q}$ do espaço coerente bi-estruturado $(\Lambda_{\Pi Q}; \Sigma^{in}_{\Pi Q}, \Sigma^{ap}_{\Pi Q})$, quando restrita ao subsistema dos objetos totais $\mathsf{tot}_{\Pi Q}$, coincide exatamente com a norma Euclidiana definida para o sistema dos números reais R. Resultado análogo é obtido para a função valor absoluto restrita ao subsistema dos objetos quasi-totais $\mathsf{qtot}_{\Pi Q}$ e uma função valor absoluto intervalar adequada definida no sistema dos intervalos reais IR.

Considere os conjuntos de intervalos racionais $IQ_{pos} = \{[p,q] \in IQ | p > 0\} \subseteq IQ$, $IQ_{-} = \{[p,q] \in IQ | p \geq 0\} \subseteq IQ$, $IQ_{pos} = \{[p,q] \in IQ | p > 0\} \subseteq IQ$, e os espaços coerentes $\Pi Q_{-} \equiv (Coh(IQ_{+}, \approx_{\leq Q+}), \subseteq)$ e $\Pi Q_{-} \equiv (Coh(IQ_{-}, \approx_{\leq Q-}), \subseteq)$, gerados por Q_{+} e Q_{-}, respectivamente, introduzidos na introdução ao capítulo 11.

por $y \mapsto \hat{y}|_{qtot(\text{II}Q)}$, onde $\hat{y}|_{qtot(\text{II}Q)}$ é o fecho indexado de y no sistema qtot$_{\text{II}Q}$, ambas introduzidas na introdução ao capítulo 11.

12.1 A Subestrutura de Medidas do Sistema IR dos Intervalos Reais Estendido

Nesta seção introduz-se a subestrutura de medidas do sistema IR dos intervalos reais estendido, introduzido em 10.5, para que se possa verificar o isomorfismo entre IR e o subsistema qtot$_{\text{II}Q}$ dos objetos quasi-totais.

12.1.1 Definição. Subestrutura de Medidas de IR

A subestrutura de medidas do sistema IR dos intervalos reais estendido é dada por $M_{\mathbb{IR}^*} = \left\{ D_{\mathbb{IR}^*}, d_{\mathbb{IR}^*}, |\ |_{\mathbb{IR}^*} \right\}$, onde

(i) diâmetro intervalar real: $D_{\mathbb{IR}^*}: \mathbb{IR}^* \to \mathbb{IR}^*$, tal que

$$D_{\mathbb{IR}^*}(X) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } X = \mathbb{R}, \\ r_{\mathbb{IR}}(X) -_{\mathbb{R}} l_{\mathbb{IR}}(X) & \text{caso contrario;} \end{cases}$$

onde $r_{\mathbb{IR}}$ e $l_{\mathbb{IR}}$ são, respectivamente, o extremo superior e o extremo inferior de um intervalo real;

(ii) função distância intervalar real: $d_{\mathbb{IR}^*}: \mathbb{IR}^* \times \mathbb{IR}^* \to \mathbb{IR}^*_+ \subseteq \mathbb{IR}^*$, tal que

$$d_{\mathbb{IR}^*}(X,Y) = \begin{cases} \mathbb{R} & X = \mathbb{R} \vee Y = \mathbb{R}, \\ [min\alpha, max\alpha] & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

onde $\alpha = \left\{ d_{\mathbb{R}}(x,y) \in \mathbb{R} \mid x \in X \wedge y \in Y \right\}$;

(iii) função valor absoluto ou módulo intervalar real: $|\ |_{\mathbb{IR}^*}: \mathbb{IR}^* \to \mathbb{IR}^*_+ \subseteq \mathbb{IR}^*$, tal que

$$|X|_{\mathbb{IR}^*} = d_{\mathbb{IR}^*}(X, [0,0]);$$

onde $d_{\mathbb{R}}$ e $|\ |_{\mathbb{R}}$ são a distância e o módulo de reais. ♦

De forma análoga à prova da proposição 11.3.1, é possível mostrar que a subestrutura de medidas está bem definida e que:

12.1.2 Proposição

O diâmetro intervalar real também pode ser dado por $D_{\mathbb{IR}^*}: \mathbb{IR}^* \to \mathbb{IR}^*$, tal que

$$D_{\mathbb{IR}^*}(X) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } X = \mathbb{R}, \\ d_{\mathbb{R}}(w_1, w_2) = |w_1 - w_2|_{\mathbb{R}} & \text{se } X = [w_1, w_2], \end{cases}$$

onde $d_{\mathbb{R}}$ e $|\ |_{\mathbb{R}}$ são a distância e o módulo de reais. ♦

12.1.3 Proposição

A distância intervalar real também pode ser dada por $d_{\mathbb{IR}^*}: \mathbb{IR}^* \times \mathbb{IR}^* \to \mathbb{IR}^*_- \subseteq \mathbb{IR}^*$, tal que

$$d_{\mathbb{IR}^*}(X,Y) = \begin{cases} \mathbb{R} & X = \mathbb{R} \vee Y = \mathbb{R}, \\ [min\theta, max\theta] & \text{se } X = [w_1, w_2] \cap Y = [w_1', w_2'] = \varnothing, \\ [0, max\theta] & \text{se } X = [w_1, w_2] \cap Y = [w_1', w_2'] \neq \varnothing, \end{cases}$$

onde $\theta = \{|w_1 - w_2'|_{\mathbb{R}}, |w_2 - w_1'|_{\mathbb{R}}\}$. ♦

12.1.4 Proposição

O módulo intervalar real também pode ser dado por $|\ |_{\mathbb{IR}^*}: \mathbb{IR}^* \to \mathbb{IR}^*_- \subseteq \mathbb{IR}^*$, tal que

$$|X|_{\mathbb{IR}^*} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } X = \mathbb{R}, \\ \left[min\{|w_1|_{\mathbb{R}}, |w_2|_{\mathbb{R}}\}, max\{|w_1|_{\mathbb{R}}, |w_2|_{\mathbb{R}}\}\right] & \text{se } 0 \notin X = [w_1, w_2], \\ \left[0, max\{|w_1|_{\mathbb{R}}, |w_2|_{\mathbb{R}}\}\right] & \text{se } 0 \in X = [w_1, w_2], \end{cases}$$

ou

$$|X|_{\mathbb{IR}^*} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } X = \mathbb{R}, \\ [w_1, w_2] & \text{se } X = [w_1, w_2] \in IQ_{pos}, \\ \left[0, max\{|w_1|_{\mathbb{R}}, |w_2|_{\mathbb{R}}\}\right] & \text{se } 0 \in X = [w_1, w_2]; \\ -[w_1, w_2] & \text{caso contrario.} \end{cases}$$ ♦

De forma análoga às provas das proposições 11.3.6 (i) e (iv), mostra-se que:

12.1.5 Proposição

A função distância intervalar real $d_{\mathbb{IR}^*}: \mathbb{IR}^* \times \mathbb{IR}^* \to \mathbb{IR}^*_-$ é uma semi-pseudométrica generalizada (definição 11.1.6), ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $d_{\mathbb{IR}^*}(X,X) = \mathrm{O}$,

(ii) $d_{\mathbb{IR}^*}(X,Y) = d_{\mathbb{IR}^*}(Y,X)$,

para todo $X,Y \in \mathbb{IR}^*$, onde O é $\mathbb{R}$ ou qualquer intervalo real contendo zero. ♦

12.1.6 Corolário

O sistema IR dos intervalos reais é um espaço semi-pseudométrico generalizado relativamente a sua subestrutura de medidas $M_{\mathbb{IR}^*}$. ♦

12.2 O Σ_{ap}-Isomorfismo entre a Subestrutura de Medidas do Subsistema $qtot_{\Pi Q}$ dos Objetos Quasi-Totais e a Subestrutura de Medidas do Sistema IR dos Intervalos Reais Estendido

Para mostrar o isomorfismo, a função distância, a função valor absoluto e a função diâmetro de ΠQ são restritas ao subsistema dos objetos quasi-totais. Segue da própria definição (veja 11.3.1 e 11.3.2) que estas medidas são fechadas neste subsistema, isto é:

12.2.1 Proposição

Para todo $x \in qtot(\Pi Q)$, tem-se que: (i) $D_{\Pi Q}(x) \in qtot(\Pi Q)$, (ii) $d_{\Pi Q}(x) \in qtot(\Pi Q)$, (iii) $|x|_{\Pi Q} \in qtot(\Pi Q)$.

Considere agora o Σ_{ap}-isomorfismo $\phi: qtot(\Pi Q) \cup \wp(qtot(\Pi Q)) \to \mathbb{IR}^* \cup \wp(\mathbb{IR}^*)$, tal que

$$x \mapsto \begin{cases} ir(x) & \text{se } x \in qtot(\Pi Q), \\ \{ir(w) \in \mathbb{IR}^* \mid w \in x\} & \text{se } x \in \wp(qtot(\Pi Q)), \end{cases}$$

introduzido em 10.6, onde ir é o índice real definido em 7.2.1. Mostra-se que ϕ também preserva a subestrutura de medidas.

12.2.2 Proposição

Para todo $x,y \in qtot(\Pi Q)$ tem-se que:

(i) $\phi(d_{qtot}(x,y)) = d_{\mathbb{IR}^*}(\phi(x),\phi(y))$;

(ii) $\phi(|x|_{qtot}) = |\phi(x)|_{\mathbb{IR}^*}$;

(iii) $\phi(D_{qtot}(x)) = D_{\mathbb{IR}^*}(\phi(x))$.

prova:

Para provar (i), suponha $x = \varnothing$. Então tem-se que

$$\begin{aligned} \phi(d_{qtot}(\varnothing,y)) &= \phi(\varnothing) \\ &= ir(\varnothing) \\ &= \mathbb{R} \\ &= d_{\mathbb{IR}^*}(\mathbb{R}, ir(y)) \\ &= d_{\mathbb{IR}^*}(ir(\varnothing), ir(y)) \\ &= d_{\mathbb{IR}^*}(\phi(\varnothing),\phi(y)). \end{aligned}$$

O mesmo resultado é obtido supondo $y = \varnothing$. Considere então $x, y \neq \varnothing$. Segue que:

$$
\begin{aligned}
\phi\left(d_{qtot}(x,y)\right) &= ir\left(\hat{q}d_{\mathrm{II}Q}(x,y)\right)\\
&= ir\left(qd_{\mathrm{II}Q}(x,y)\right)\\
&= ir\left\{d_{IQ}(X,Y) \in IQ \mid X \in x \wedge Y \in Y\right\}\\
&= \bigcap_{\mathbb{R}}\left\{Y \in \mathbb{IR} \mid i\left(qd_{\mathrm{II}Q}(x,y)\right) \subseteq Y \wedge Y \subseteq X, \forall X \in qd_{\mathrm{II}Q}(x,y)\right\}\\
&= W \in \mathbb{IR}, W \subseteq d_{IQ}(X,Y), \forall X \in x, \forall Y \in Y\\
&= d_{\mathbb{IR}^*}(W', W'') \in \mathbb{IR}, W' \subseteq X, W'' \subseteq Y, \forall X \in x, \forall Y \in Y\\
&= d_{\mathbb{IR}^*}\Bigg(\bigcap_{\mathbb{R}}\left\{Y' \in \mathbb{IR} \mid i(x) \subseteq Y' \wedge Y' \subseteq X, \forall X \in x\right\},\\
&\qquad\qquad \bigcap_{\mathbb{R}}\left\{Y'' \in \mathbb{IR} \mid i(x) \subseteq Y'' \wedge Y'' \subseteq X, \forall X \in x\right\},\Bigg)\\
&= d_{\mathbb{IR}^*}\left(ir(x), ir(y)\right)\\
&= d_{\mathbb{IR}^*}\left(\phi(x), \phi(y)\right).
\end{aligned}
$$

Prova-se agora (ii). Suponha então $x = \varnothing$. Tem-se que

$$\phi\left(|\varnothing|_{qtot}\right) = \phi(\varnothing) = ir(\varnothing) = \mathbb{R} = |\mathbb{R}|_{\mathbb{IR}^*} = |ir(\varnothing)|_{\mathbb{IR}^*} = |\phi(\varnothing)|_{\mathbb{IR}^*}.$$

Considere agora $x \neq \varnothing$. Segue que:

$$
\begin{aligned}
\phi\left(|x|_{qtot}\right) &= ir\left(\hat{q}|x|_{\mathrm{II}Q}\right)\\
&= ir\left(q|x|_{\mathrm{II}Q}\right)\\
&= ir\left\{|X|_{IQ} \in IQ \mid X \in x\right\}\\
&= \bigcap_{\mathbb{R}}\left\{Y \in \mathbb{IR} \mid i\left(q|x|_{\mathrm{II}Q}\right) \subseteq Y \wedge Y \subseteq X, \forall X \in q|x|_{\mathrm{II}Q}\right\}\\
&= W \in \mathbb{IR}, W \subseteq |X|_{IQ}, \forall X \in x\\
&= |W'|_{\mathbb{IR}^*} \in \mathbb{IR}, W' \subseteq X, \forall X \in x\\
&= \left|\bigcap_{\mathbb{R}}\left\{Y' \in \mathbb{IR} \mid i(x) \subseteq Y' \wedge Y' \subseteq X, \forall X \in x\right\}\right|_{\mathbb{IR}^*}\\
&= |ir(x)|_{\mathbb{IR}^*}\\
&= |\phi(x)|_{\mathbb{IR}^*}.
\end{aligned}
$$

Considere agora (iii) e suponha $x = \varnothing$. Tem-se que

$$\phi\left(D_{qtot}(\varnothing)\right) = \phi(\varnothing) = ir(\varnothing) = \mathbb{R} = D(\mathbb{R})_{\mathbb{IR}^*} = D\left(ir(\varnothing)\right)_{\mathbb{IR}^*} = D\left(\phi(\varnothing)\right)_{\mathbb{IR}^*}.$$

Seja agora $x = w \neq \varnothing$. Segue que:

$$\begin{aligned}
\phi\left(D_{qtot}(w)\right) &= ir\left(D_{qtot}(w)\right) \\
&= ir\left(r_{IIQ}(w) -_{tot} l_{IIQ}(w)\right) \\
&= ir\left(\inf\left\{x_{r_{IQ}(X)} \in X_Q \mid X \in w\right\} -_{tot} \sup\left\{x_{l_{IQ}(X)} \in X_Q \mid X \in w\right\}\right) \\
&= ir\left(\inf\left\{x_{D_{IQ}(i(X))} \in X_Q \mid X \in w\right\}\right) \\
&= u \in \mathbb{R} \\
&= D_{\mathrm{IR}^*}(W), W \subseteq X, \forall X \in w \\
&= D_{\mathrm{IR}^*}(ir(w)) \\
&= D_{\mathrm{IR}^*}(\phi(w)).
\end{aligned}$$ ♦

12.2.3 Corolário

A subestrutura de medidas M_{qtot} do subsistema qtot_{IIQ} dos objetos quasi-totais pode ser identificada com a subestrutura de medidas $\mathbb{M}_{\mathrm{IR}}$ do sistema IR dos intervalos reais estendido. ♦

12.2.4 Corolário

A função $d_{qtot}: qtot(IIQ) \prod qtot(IIQ) \to qtot(IIQ)$ possui as propriedades de uma semi-pseudométrica generalizada (definição 11.1.6), isto é, satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $d_{qtot}(x,x) = \mathrm{O}$,

(ii) $d_{qtot}(x,y) = d_{qtot}(y,x)$,

para todo $x,y \in qtot(IIQ)$, onde O é qualquer quasi-total tal que $0 \in i(\mathrm{O})$. ♦

12.2.5 Corolário

O subsistema qtot_{IIQ} é um espaço semi-pseudométrico relativamente a sua subestrutura de medidas M_{qtot}. ♦

12.3 O Σ_{ap}-Isomorfismo entre a Subestrutura de Medidas do Subsistema tot_{IIQ} dos Objetos Totais e a Subestrutura de Medidas do Sistema R dos Números Reais

Para mostrar o isomorfismo, a função distância, a função valor absoluto e a função diâmetro de IIQ são restritas ao subsistema dos objetos totais. Primeiramente prova-se que estas funções são fechadas neste subsistema.

Segue da definição 11.4.4 que:

12.3.1 Proposição

Para todo $x \in tot(\text{II}Q)$, tem-se que $D_{\text{II}Q}(x) = x_0 \in tot(\text{II}Q)$, onde $x_0 = \{[p,q] \in IQ | p \leq 0 \leq q\}$.

Com relação à distância, é válido que:

12.3.2 Proposição

Para todo $x, y \in tot(\text{II}Q)$, $d_{\text{II}Q}(x,y) \in tot(\text{II}Q)$.

prova:

Se $x, y \in tot(\text{II}Q)$ então pode ocorrer uma das seguintes situações: (i) $x, y \in X_Q$, (ii) $x, y \in X_{\overline{Q}}$; (iii) $x \in X_Q$ e $y \in X_{\overline{Q}}$, ou (iv) $x \in X_{\overline{Q}}$ e $y \in X_Q$. Supor que aconteça a situação (i). Então existem $r_1, r_2 \in Q$ tais que $x = x_{r_1}, y = x_{r_2} \in X_Q$. É imediato que $d_{\text{II}Q}(x_{r_1}, x_{r_2}) = x_{d_Q(r_1,r_2)} = x_{r_2 - r_1} \in X_Q \subseteq tot(\text{II}Q)$.

Seja agora (ii). Observe que para todo $x, y \in tot(\text{II}Q)$ tem-se que $d_{\text{II}Q}(x,y) \in qtot(\text{II}Q)$. Suponha então que $d_{\text{II}Q}(x,y) \notin tot(\text{II}Q)$. Então existe $z \in \text{II}Q$, $z \neq d_{\text{II}Q}(x,y)$, tal que $d_{\text{II}Q}(x,y) \subseteq z$. Isto significa que $i(z) \subseteq i(d_{\text{II}Q}(x,y)) = i(pd_{\text{II}Q}(x,y))$ e $i(z) \neq i(d_{\text{II}Q}(x,y)) = i(pd_{\text{II}Q}(x,y))$. Logo existe $[p_z, q_z] \in z$ tal que, para todo $[p,q] \in d_{\text{II}Q}(x,y)$, $[p_x, q_x] \in x$ e $[p_y, q_y] \in y$, tem-se que

$$[p_z, q_z] \subset [p,q] \subseteq d_{IQ}([p_x, q_x],[p_y, q_y]).$$

Agora as seguintes situações podem ocorrer: ou (a) $[p_x, q_x] \cap [p_y, q_y] = \varnothing$, com (1) $[p_x, q_x] < [p_y, q_y]$ ou (2) $[p_y, q_y] < [p_x, q_x]$, ou (b) $[p_x, q_x] \cap [p_y, q_y] \neq \varnothing$, com (1) $p_x \leq p_y \leq q_x \leq q_y$, ou (2) $p_y \leq p_x \leq q_y \leq q_x$, ou (3) $[p_x, q_x] \subseteq [p_y, q_y]$, ou (4) $[p_y, q_y] \subseteq [p_x, q_x]$.

Considere a situação (a) (1). Então tem-se que

$$[p_z, q_z] \subset [p,q] \subseteq [p_y - q_x, q_y - p_x].$$

Portanto, é válido que $p_y - q_x \leq p < p_z \leq q_z < q \leq q_y - p_x$, isto é, $[p_z, q_z] \subseteq i(d_{\text{II}Q}(x,y))$ e $[p_z, q_z] \neq i(d_{\text{II}Q}(x,y))$. Assim corre que $p_z < q \leq q_y - p_x$ e $p_y - q_x \leq p < q_z$, ou seja, $p_x < q_y - p_z$ e $p_y - q_z < q_x$, isto é, $[p_y - q_z, q_y - p_z] \approx [p_x, q_x]$, e, como x é um objeto total, tem-se que $[p_y - q_z, q_y - p_z] \in x$. Então, pode-se calcular

$$\left\{d_{IQ}\left(\left[p_y - q_z, q_y - p_z\right], \left[p_y, q_y\right]\right) \in IQ \middle| \left[p_y - q_z, q_y - p_z\right] \in x \wedge \left[p_y, q_y\right] \in y\right\} \subseteq pd(x,y)$$
$$\subseteq d_{\Pi Q}(x,y).$$

Logo, fazendo $\partial = \left\{|q_z|_Q, |p_z - (q_y - p_y)|_Q, |q_z + (q_y - p_y)|_Q, |p_z|_Q\right\}$, tem-se que

$$\left\{d_{IQ}\left(\left[p_y - q_z, q_y - p_z\right], \left[p_y, q_y\right]\right) \in IQ \middle| \left[p_y - q_z, q_y - p_z\right] \in x \wedge \left[p_y, q_y\right] \in y\right\}$$
$$= \left\{[min\partial, max\partial] \in IQ \middle| \left[p_y - q_z, q_y - p_z\right] \in x \wedge \left[p_y, q_y\right] \in y\right\} \subseteq pd_{\Pi Q}(x,y) \subseteq d_{\Pi Q}(x,y).$$

Entretanto, como $p_y < q_y$, então $q_y - p_y > 0$. Fazendo $q_y - p_y = \varepsilon > 0$, tem-se que $\partial = \left\{|q_z|_Q, |p_z - \varepsilon|_Q, |q_z + \varepsilon|_Q, |p_z|_Q\right\}$, e, portanto,

$$\left\{d_{IQ}\left(\left[p_y - q_z, q_y - p_z\right], \left[p_y, q_y\right]\right) \in IQ \middle| \left[p_y - q_z, q_y - p_z\right] \in x \wedge \left[p_y, q_y\right] \in y\right\}$$
$$= \left\{[min\partial, max\partial] \in IQ \middle| \left[p_y - q_z, q_y - p_z\right] \in x \wedge \left[p_y, q_y\right] \in y\right\}$$
$$= \left\{\left[|p_z - \varepsilon|_Q, |q_z + \varepsilon|_Q\right] \in IQ \middle| \left[q_y \varepsilon - q_z, p_y + \varepsilon - p_z\right] \in x \wedge \left[p_y, q_y\right] \in y\right\}$$
$$\subseteq pd_{\Pi Q}(x,y) \subseteq d_{\Pi Q}(x,y).$$

Agora, observe que

$$i\left(\left\{\left[|p_z - \varepsilon|_Q, |q_z + \varepsilon|_Q\right] \in IQ \middle| \left[q_y \varepsilon - q_z, p_y + \varepsilon - p_z\right] \in x \wedge \left[p_y, q_y\right] \in y\right\}\right) = [p_z, q_z],$$

e, portanto, $i(d_{\Pi Q}(x,y)) \subseteq [p_z, q_z]$, o que é uma contradição. Conclui-se então que $d_{\Pi Q}(x,y) \in tot(\Pi Q)$. Analogamente prova-se o resultado para as outras situações. ♦

Para o valor absoluto tem-se que:

12.3.3 Proposição

Para todo $x \in tot(\Pi Q)$, $|x|_{\Pi Q} \in tot(\Pi Q)$.

prova:

Se $x \in tot(\Pi Q)$ então pode ocorrer uma das seguintes situações: ou (i) $x \in X_Q$ ou (ii) $x \in X_{\overline{Q}}$. Supor que aconteça a situação (i). Então existem $r \in Q$ tal que $x = x_r \in X_Q$, e, pela proposição 11.4.13, segue que $|x_r|_{\Pi Q} = \hat{q}|x_r|_{\Pi Q} = x_{|r|_Q} \in X_{Q_+} \subseteq tot(\Pi Q)$.

Seja agora (ii). Suponha então que $q|x|_{\Pi Q} \notin tot(\Pi Q_+)$. Então existe $z \in \Pi Q$, $z \neq q|x|_{\Pi Q}$, tal que $q|x|_{\Pi Q} \subseteq z$. Isto significa que $i(z) \subseteq i(q|x|_{\Pi Q})$ e $i(z) \neq i(q|x|_{\Pi Q})$. Logo existe $[p_z, q_z] \in z$ tal que, para todo $[p,q] \in q|x|_{\Pi Q}$ e $[p_x, q_x] \in x$, tem-se que $[p_z, q_z] \subset [p,q] \subseteq \llbracket p_x, q_x \rrbracket_{IQ}$.

Agora as seguintes situações podem ocorrer: ou (a) $p_x > 0$, ou (b) $q_x < 0$, ou (c) $p_x \leq 0 \leq q_x$. Considere a situação (a). Então tem-se que $[p_z, q_z] \subset [p,q] \subseteq [p_x, q_x]$. Portanto, é válido que $0 < p_x \leq p < p_z \leq q_z < q \leq q_x$, isto é, $[p_z, q_z] \subseteq i(q|x|_{\Pi Q})$ e $[p_z, q_z] \neq i(q|x|_{\Pi Q})$. Assim corre que $p_z < q_x$ e $p_x < q_z$, isto é, $[p_z, q_z] \approx [p_x, q_x]$, e, como x é um objeto total, tem-se que $[p_z, q_z] \in x$. Isto significa que $\llbracket p_z, q_z \rrbracket_{IQ} = [p_z, q_z] \in q|x|_{\Pi Q}$, pois $p_z > 0$. Portanto, tem-se $i(q|x|_{\Pi Q}) \subseteq [p_z, q_z]$, o que é uma contradição.

Seja agora (b). Então tem-se que $[p_z, q_z] \subset [p,q] \subseteq [-q_x, -p_x]$. Portanto, é válido que $0 < -q_x \leq p < p_Z \leq q_z < q \leq -p_x$, isto é, $[p_z, q_z] \subseteq i(q|x|_{\Pi Q})$ e $[p_z, q_z] \neq i(q|x|_{\Pi Q})$. Assim corre que $-q_x < q_Z$ e $p_z < -p_x$, ou seja, $-q_z < q_x$ e $p_x < -p_z$, isto é, $[-q_z, -p_z] \approx [p_x, q_x]$, e, como x é um objeto total, tem-se que $[-q_z, -p_z] \in x$. Isto significa que $\llbracket -q_z, -p_z \rrbracket_{IQ} = [p_z, q_z] \in q|x|_{\Pi Q}$, pois $-p_z < 0$. Portanto, tem-se $i(q|x|_{\Pi Q}) \subseteq [p_z, q_z]$, o que é outra contradição.

Finalmente considere a situação (c). Então tem-se que $[p_z, q_z] \subset [p,q] \subseteq \left[0, max\left\{|p_x|_Q, |q_x|_Q\right\}\right] = [0, max\{-p_x, q_x\}]$. Suponha que $max\{-p_x, q_x\} = -p_x$. Então é válido que $-q_x \leq 0 \leq p < p_z \leq q_z < q \leq -p_x$, isto é, $[p_z, q_z] \subseteq i(q|x|_{\Pi Q})$ e $[p_z, q_z] \neq i(q|x|_{\Pi Q})$. Assim corre que $-q_x < q_z$ e $p_z < -p_x$, isto é, $-q_z < q_x$ e $p_x < -p_z$, ou seja, $[-q_z, -p_z] \approx [p_x, q_x]$, e, como x é um objeto total, tem-se que $[-q_z, -p_z] \in x$. Isto significa que $\llbracket -q_z, -p_z \rrbracket_{IQ} = [p_z, q_z] \in q|x|_{\Pi Q}$, pois $-p_z < 0$. Portanto, tem-se $i(q|x|_{\Pi Q}) \subseteq [p_z, q_z]$, o que é ainda uma contradição. Agora, considere que $max\{-p_x, q_x\} = q_x$. Então é válido que $p_x \leq 0 \leq p < p_z \leq q_z < q \leq q_x$, isto é, $[p_z, q_z] \subseteq i(q|x|_{\Pi Q})$ e $[p_z, q_z] \neq i(q|x|_{\Pi Q})$. Assim corre que $p_x < q_z$ e $p_z < q_x$, isto é, $[p_z, q_z] \approx [p_x, q_x]$, e, como x é um objeto total, tem-se que $[p_z, q_z] \in x$. Isto significa que $\llbracket p_z, q_z \rrbracket_{IQ} = [p_z, q_z] \in q|x|_{\Pi Q}$, pois $p_z > 0$. Portanto, tem-se $i(q|x|_{\Pi Q}) \subseteq [p_z, q_z]$, o que é a última contradição esperada. Conclui-se então que $q|x|_{\Pi Q} \in tot(\Pi Q_-)$. Segue que $|x|_{\Pi Q} = \hat{q}|x|_{\Pi Q} \in tot(\Pi Q)$. ♦

Considere agora o Σ_{ap}-isomorfismo $\Phi: \mathbb{R} \cup \wp(\mathbb{R}) \to tot(\Pi Q) \cup \wp(tot(\Pi Q))$, tal que

$$\Phi(w)=\begin{cases}x_w & \text{se } w\in\mathbb{R},\\ \{x_{w'}\in tot(\Pi Q)|w'\in w\} & \text{se } w\in\wp(\mathbb{R}),\end{cases}$$

introduzido em 10.4, onde $x_w=\{[p,q]\in IQ|p\leq w\leq q\}$ é o conjunto ligado a w, definido em 10.4.2. Mostra-se que Φ também preserva a subestrutura de medidas.

12.3.4 Proposição

Para todo $w,w_1,w_2\in\mathbb{R}$, tem-se que:

(i) $\Phi(d_{\mathbb{R}}(w_1,w_2))=d_{tot}(\Phi(w_1),\Phi(w_2))$;

(ii) $\Phi(|w|_{\mathbb{R}})=|\Phi(w)|_{tot}$;

(iii) $\Phi(D_{\mathbb{R}}(w)=0)=D_{tot}(\Phi(w))=x_0$.

prova:

Prova-se (i). Observe que

$$\Phi(d_{\mathbb{R}}(w_1,w_2))=x_{d_{\mathbb{R}}(w_1,w_2)}=\{[p,q]\in IQ|p\leq d_{\mathbb{R}}(w_1,w_2)\leq q\}.$$

Agora, calcula-se

$$\begin{aligned}d_{tot}(\Phi(w_1),\Phi(w_2))&=\hat{q}d_{\Pi Q}(x_{w_1},x_{w_2})\\&=\hat{q}d_{\Pi Q}(\{[p_1,q_1]\in IQ|p_1\leq w_1\leq q_1\},\{[p_2,q_2]\in IQ|p_2\leq w_2\leq q_2\})\\&=\wedge\{d_{IQ}([p_1,q_1],[p_2,q_2])\in IQ|p_1\leq w_1\leq q\wedge p_2\leq w_2\leq q_2\}\\&=\wedge\{[min\partial,max\partial]\in IQ|min\partial\leq d_{\mathbb{R}}(w_1,w_2)\leq max\partial\}\\&=x_{d_{\mathbb{R}}(w_1,w_2)}\\&=\Phi(d_{\mathbb{R}}(w_1,w_2)),\end{aligned}$$

onde $\partial=\{d_Q(x,y)|x\in[p_1,q_1],y\in[p_2,q_2]\}$.

Mostra-se agora (ii). Observe que $\Phi(|w|_{\mathbb{R}})=x_{|w|_{\mathbb{R}}}=\{[p,q]\in IQ|p\leq|w|_{\mathbb{R}}\leq q\}$. Agora, calcula-se

$$\begin{aligned}|w|_{tot}&=\hat{q}|w|_{\Pi Q}\\&=\hat{q}\left|\{[p,q]\in IQ|p\leq w\leq q\}\right|_{\Pi Q}\\&=\wedge\left\{\|[p,q]\|_{IQ}\in IQ_+|p\leq w\leq q\right\}\\&=\wedge\{[min\beta,max\beta]\in IQ|min\beta\leq|w|_{\mathbb{R}}\leq max\beta\}\\&=x_{|w|_{\mathbb{R}}}\\&=\Phi(|w|_{\mathbb{R}}),\end{aligned}$$

onde $\beta = \{|x|_Q \in Q_+ | x \in [p,q]\}$.

Para provar (iii) observe que para todo $w \in \mathbb{R}$, tem-se que $w \equiv [w,w] \in \mathbb{IR}$, de tal forma que $D_{\mathbb{R}}(w) = D_{\mathbb{IR}}([w,w]) = 0$, onde $D_{\mathbb{IR}}$ está definido em 12.1.1 (i). Tem-se que $\Phi(D_{\mathbb{R}}(w) = 0) = x_0$ e $D_{tot}(\Phi(w)) = D_{tot}(x_w) = x_0$. Portanto, é válido que $\Phi(D_{\mathbb{R}}(w) = 0) = D_{tot}(\Phi(w)) = x_0$. ♦

12.3.5 Corolário

A subestrutura de medidas M_{tot} do subsistema $\mathsf{tot}_{\Pi Q}$ dos objetos totais pode ser identificada com a subestrutura de medidas $M_{\mathbb{R}}$ do sistema R dos números reais. ♦

Com relação à função distância tem-se que:

12.3.6 Corolário

A função $d_{tot}: tot(\Pi Q) \prod tot(\Pi Q) \rightarrow tot(\Pi Q)$ possui as propriedades de uma métrica, isto é, satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $d_{tot}(x_{w_1}, x_{w_2}) \geq x_0$ e $d_{tot}(x_{w_1}, x_{w_2}) = x_0 \Leftrightarrow x_{w_1} = x_{w_2} \Leftrightarrow w_1 = w_2$;

(ii) $d_{tot}(x_{w_1}, x_{w_2}) = d_{tot}(x_{w_2}, x_{w_1})$;

(iii) $d_{tot}(x_{w_1}, x_{w_2}) \leq d_{tot}(x_{w_1}, x_{w_3}) +_{tot} d_{tot}(x_{w_3}, x_{w_2})$,

onde $x_0 \equiv 0 \in \mathbb{R}$. ♦

12.3.7 Corolário

O subsistema $\mathsf{tot}_{\Pi Q}$ é um espaço métrico relativamente à sua subestrutura de medidas M_{tot}. ♦

12.3.8 Corolário

A topologia de aplicação induzida por d_{tot} em $tot(\Pi Q)$ é uma topologia T_2 ou de Hausdorff. ♦

Para o valor absoluto é válido que:

12.3.9 Corolário

A função $|\ |_{tot}: tot(\Pi Q) \rightarrow tot(\Pi Q)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $|x_w|_{tot} \geq x_0$ e $|x_w|_{tot} = x_0 \Leftrightarrow x_w = x_0 \Leftrightarrow w = 0$;

(ii) $|\lambda \cdot x_w|_{tot} = |\lambda|_{\mathbb{R}} \cdot |x_w|_{tot}$;

(iii) $|x_{w_1} +_{tot} x_{wr_2}|_{tot} \leq |x_{w_1}|_{tot} +_{tot} |x_{w_2}|_{tot}$, para todo $x_w, x_{w_1}, x_{w_2} \in tot(\Pi Q)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $|\,|_{\mathbb{R}}$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}$ e $x_0 \equiv 0 \in \mathbb{R}$. ♦

12.3.10 Corolário

O subsistema $\mathrm{tot}_{\Pi Q}$ é um espaço normado relativamente à sua subestrutura de medidas M_{tot}. ♦

12.4 Uma Análise do Comportamento da Representação Linear Interna da Função Módulo de Objetos no Subsistema dos Objetos Totais

Considere a representação linear interna $MOD = \left\{ q\left| \dot{\ } \right|_{\dot{\Pi Q}}, \hat{q}\left| \dot{\ } \right|_{\dot{\Pi Q}} \right\}$, introduzida na seção 11.5.1, da função módulo de objetos $|\,|_{\Pi Q}$, onde a primeira componente $q\left| \dot{\ } \right|_{\dot{\Pi Q}}$ é a quasi-função relativa ao espaço coerente $\Pi\dot{Q}$, que é o produto direto dos subespaços ΠQ_- e ΠQ_+, e a segunda componente $\hat{q}\left| \dot{\ } \right|_{\dot{\Pi Q}}$ é o fecho da quasi-função relativo ao subsistema dos objetos quasi-totais de $\Pi\dot{Q}$. Seja $\Pi\dot{Q}_{+}$ o produto direto de ΠQ_+ por ΠQ_+.

Observe que para todo $x \in tot(\Pi Q)$ tal que $x \geq x_0$, é possível determinar $(x_{0_-}, x_+) \in tot\left(\Pi\dot{Q}\right)$ tal que $x = \{X_i \cup Y_i \in IQ | X_i \in x_{0_-}, Y_i \in x_+ \wedge i \in I\}$. Por outro lado, se $x \leq x_0$, então tem-se que $(x_-, x_{0_+}) \in tot\left(\Pi\dot{Q}\right)$, tal que $x = \{X_i \cup Y_i \in IQ | X_i \in x_-, Y_i \in x_{0_+} \wedge i \in I\}$. O resultado a seguir é imediato:

12.4.1 Lema

Tem-se que (i) $x \in tot(\Pi Q)$, se e somente se $(x_-, x_+) \in tot\left(\Pi\dot{Q}\right)$. ♦

12.4.2 Proposição

Se $x \in tot(\Pi Q)$ então a segunda componente da representação linear interna MOD resulta em $\hat{q}\left|(x_-, x_+)\right|_{\dot{\Pi Q}} \in tot\left(\Pi\dot{Q}_{+}\right)$.

prova:

Pelo lema 12.4.1, para todo $x \in tot(\Pi Q)$, é possível obter $(x_-, x_+) \in tot\left(\Pi\dot{Q}\right)$. Pela proposição 12.3.3, tem-se para todo $x \in tot(\Pi Q)$, $|x|_{\Pi Q} = \hat{q}|x|_{\Pi Q} \in tot(\Pi Q)$. Segue que

$\hat{q}|x_-|_{\Pi Q_-} \in tot(\Pi Q_+)$ e $\hat{q}|x_+|_{\Pi Q_+} \in tot(\Pi Q_-)$, pois $\hat{q} \mid |_{\Pi Q_-}$ e $\hat{q} \mid |_{\Pi Q_+}$ são as restrições de $\hat{q} \mid |_{\Pi Q}$ a ΠQ_- e ΠQ_+, respectivamente. Conclui-se que

$$\hat{q}|(\overset{\bullet}{x_-}, x_+)|_{\dot{\Pi Q}} = \left(\hat{q}|x_-|_{\Pi Q_-}, \hat{q}|x_+|_{\Pi Q_+}\right) \in tot\left(\dot{\Pi Q_-}\right). \ \blacklozenge$$

12.4.3 Proposição

Se a segunda componente da representação linear interna *MOD* resulta em $\hat{q}|(\overset{\bullet}{x_-}, x_+)|_{\dot{\Pi Q}} = (y_+, y'_+) \in tot\left(\dot{\Pi Q_+}\right)$, então para todo $x \in tot(\Pi Q)$ é válido que $\hat{y}|_{qtot(\Pi Q)} = |x|_{\Pi Q} \in tot(\Pi Q)$.

prova:

Pela proposição 12.3.3, tem-se para todo $x \in tot(\Pi Q)$, $|x|_{\Pi Q} = \hat{q}|x|_{\Pi Q} \in tot(\Pi Q)$. Por outro lado, pelo lema 12.4.1, se $(y_+, y'_+) \in tot\left(\dot{\Pi Q_+}\right)$ então é imediato que $y = \{X_i \cup Y_i \in IQ_+ \mid X_i \in y_+ \wedge Y_i \in y'_+\} \in tot(\Pi Q_+)$. Segue que

$$\begin{aligned}
\hat{y} &= \wedge\{X_i \cup Y_i \in IQ_+ \mid X_i \in y_+ \wedge Y_i \in y'_+\} \\
&= \wedge\left\{X_i \cup Y_i \in IQ_+ \mid X_i \in q|x_-|_{\Pi Q_-} \wedge Y_i \in q|x_+|_{\Pi Q_+}\right\} \\
&= \left\{X_i \cup Y_i \in IQ_+ \mid X_i \in \hat{q}|x_-|_{\Pi Q_-} \wedge Y_i \in \hat{q}|x_+|_{\Pi Q_+}\right\} \\
&= \wedge\{|W|_{IQ} \in IQ_+ \mid W \in x\} \\
&= |x|_{\Pi Q} \in tot(\Pi Q),
\end{aligned}$$

que é o resultado esperado. $\blacklozenge$

13 Espaços de Vizinhanças Generalizadas

O objetivo deste capítulo é introduzir uma noção de espaço de vizinhanças generalizadas no sentido de fornecer a fundamentação para uma caracterização topológica adequada dos espaços coerentes bi-estruturados obtidos pelo processo de construção global, ainda que seja uma caracterização topológica em um sentido generalizado.

A motivação para este estudo está concentrada no fato de que conceitos topológicos são de extrema importância para a Ciência da Computação. É possível considerar um espaço topológico como um tipo de dado, conjuntos abertos como propriedades, e pontos do espaço como estados de computações. Em [ABR 87] e [ZHA 91], esta idéia se mostrou particularmente útil para o entendimento do relacionamento entre semântica denotacional e lógica de programas.

Assim, é importante obter uma caracterização topológica elegante para os espaços coerentes bi-estruturados, com funções estáveis e lineares na sua estrutura de informação, a exemplo do que existe para os domínios de Scott com funções contínuas, determinando uma estrutura topológica de informação para o sistema de representação global. Paralelamente, a estrutura de aplicação também deve ser caracterizada por uma estrutura topológica, bem como o relacionamento entre esta estrutura e a estrutura de informação.

Para obter uma estrutura topológica generalizada de aplicação, capaz de caracterizar a estrutura dos sistemas ordenados de 2ª ordem em cada etapa do processo de globalização, utiliza-se uma noção mais geral dos espaços de vizinhança [SMY 95] [SIE 52] induzidos por uma função distância mais fraca [SIE 52] [CEC 66], com uma topologia associada. Assim serão apresentados neste capítulo os conceitos fundamentais de espaços de vizinhanças generalizadas (EVGs), EVGs induzidos por uma função distância e a topologia associada a EVGs, estudando-se a noção de continuidade em EVGs e aspectos topológicos importantes relacionados.

Para caracterizar a estrutura topológica generalizada de informação, relativa aos aspectos topológicos generalizados para a categoria monoidal fechada dos espaços coerentes com funções estáveis e lineares, introduz-se, no capítulo 14, a noção de vizinhanças lineares com base na noção de vizinhanças estáveis introduzidas em [ZHA 92].

13.1 Definições Básicas

Resumem-se aqui alguns conceitos e resultados básicos sobre filtros, necessários para o desenvolvimento do trabalho. Veja [BUS 63] [DUG 66] [KEL 55] [CEC 66] [SIE 52][ZHA 92] [DAV 91] para detalhes e provas de proposições.

13.1.1 Definição. Filtro, Filtro Próprio

Seja $S \neq \emptyset$. Diz-se que uma coleção não vazia $\mathcal{F} \subseteq \wp(S)$ de subconjuntos de S é um filtro em S se:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(ii) sempre que $X, Y \in \mathcal{F}$ então $X \cap Y \in \mathcal{F}$;
(iii) se $Y \in \wp(S)$, $X \in \mathcal{F}$ e $X \subseteq Y$ então $Y \in \mathcal{F}$.

Diz-se que um filtro é próprio se não coincide com $\wp(S)$. ♦

Segue de (ii), por indução, que a interseção de qualquer subcoleção finita não vazia de um filtro $\mathcal{F}$ também pertence a $\mathcal{F}$. Desta conclusão e de (i), segue que qualquer filtro, ou mesmo uma subcoleção de um filtro, apresenta a propriedade da interseção finita: a interseção de qualquer subcoleção finita não vazia é não vazia. A interseção de qualquer conjunto de filtros sobre S é um filtro sobre S.

13.1.2 Definição. Base de um Filtro

Diz-se que $\mathcal{B} \subseteq \wp(S)$ é a base de um filtro $\mathcal{F}$ em S se $\mathcal{F}$ consiste dos $X \subseteq S$ para os quais existe $Y \in \mathcal{B}$ com $Y \subseteq X$, isto é, $\mathcal{F} = \{X \subseteq S | \exists Y \in \mathcal{B}, Y \subseteq X\}$. ♦

Uma coleção não vazia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de S é uma base de algum filtro $\mathcal{F}$ em S se e somente se: (i) $\varnothing \notin \mathcal{B}$ e (ii) a interseção de dois membros de $\mathcal{B}$ contém um membro de $\mathcal{B}$.

13.1.3 Definição. Filtro Gerado por um Conjunto

Seja $\mathcal{A}$ uma coleção não vazia de subconjuntos de um conjunto não vazio S que está contida em algum filtro em S. A interseção do conjunto de todos os filtros em S que contém $\mathcal{A}$ é também um filtro, denominado de filtro gerado por $\mathcal{A}$. ♦

A coleção $\mathcal{A}$ gera um filtro se e somente se possui a propriedade da interseção finita. A condição é necessária porque toda subcoleção de um filtro deve possuir esta propriedade; é suficiente porque $\mathcal{B} = \{\mathcal{X} | \mathcal{X}$ é uma subcoleção não vazia finita de $\mathcal{A}\}$ é então uma base de filtro, e o filtro do qual ela é a base contém $\mathcal{A}$ - na verdade, é o filtro gerado por $\mathcal{A}$. Em particular, toda base de filtro gera o filtro do qual ela é a base.

13.1.4 Definição. Ultrafiltro

Um filtro em S que é maximal no conjunto de todos os filtros em S é um ultrafiltro. ♦

Todo filtro $\mathcal{F}$ está contido em um ultrafiltro. Se F é um conjunto de filtros em S contido em $\mathcal{F}$, todo subconjunto $G \subseteq F$ totalmente ordenado possui uma cota superior, dada por $\bigcup G$. Então, pelo lema de Zorn [BUS 63], F possui um elemento maximal $\mathcal{F}_1$, e este deve também ser um elemento maximal do conjunto de todos os filtros em S, isto é, um ultrafiltro.

13.1.5 Proposição

Se $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro em S e $\mathcal{X}$ é uma coleção finita de subconjunto de S tais que $\cup\mathcal{X} \in \mathcal{F}$, então $\mathcal{F} \cap \mathcal{X} \neq \varnothing$. ♦

13.1.6 Definição. Filtro Principal

Chama-se de filtro principal gerado por $Y \in \wp(S)$, e denota-se por $\uparrow Y$, o conjunto dado por $\uparrow Y = \{X \in \wp(S) | Y \subseteq X\}$. ♦

13.1.7 Definição. Filtro Primo

Seja $\mathcal{F} \subseteq \wp(S)$ um filtro próprio em S. Diz-se que $\mathcal{F}$ é primo se sempre que $X, Y \subseteq S$ e $X \cup Y \in \mathcal{F}$ então $X \in \mathcal{F}$ e $Y \in \mathcal{F}$. ♦

13.2 Espaço de Vizinhanças Generalizadas (EVG)

Introduz-se aqui uma noção generalizada de espaços de vizinhanças. Estes espaços foram estudados, com variações, em [SMY 95], [SIE 52], [CEC 66] e [BUS 63]. Procura-se agora generalizar estas noções, com a finalidade de que elas possam ser aplicadas aos sistemas ordenados de 2ª ordem.

13.2.1 Definição. Espaço de Vizinhanças

Um espaço de vizinhança é um par $(\mathbb{S}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}: \mathbb{S} \to \wp(\wp(\mathbb{S}))$ atribui a cada ponto $x \in \mathbb{S}$ um filtro $\mathcal{N}_x$, não necessariamente próprio, de subconjuntos de $\mathbb{S}$. Cada elemento de $\mathcal{N}_x$ é denominado de vizinhança de x. ♦

Se $\mathbb{S}$ é o universo do sistema de 2ª ordem $\mathsf{S} = (\Lambda_{\mathbb{S}}, \Sigma_{\mathbb{S}})$, onde $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, então diz-se que $(\mathbb{S}, \mathcal{N})$ é um espaço de vizinhanças definido sobre S.

Observe que um ponto $x \in \mathbb{S}$ não precisa necessariamente ser um elemento de (cada uma de) suas vizinhanças. Além disso, um ponto $x \in \mathbb{S}$ pode ter o conjunto vazio como uma vizinhança, e, neste caso, cada subconjunto do espaço é uma vizinhança de x.

Deve-se salientar que uma noção geral de "espaço" como em 13.2.1, ou ainda mais geral que aquela definição, não é uma abordagem inovadora. A atribuição de um sistema de "vizinhanças" que não satisfaz nenhum requisito em particular (nem a condição de ser um filtro), a cada ponto $x \in \mathbb{S}$, é conhecida como um "Fréchet V-espaço" [SIE 52].

Em [BUS 63], é definido um sistema fundamental de vizinhanças em que a cada $x \in \mathbb{S}$ é atribuída uma coleção de vizinhanças $\mathcal{N}_x$ que é uma base de um filtro em $\mathbb{S}$. Abstraindo do ponto x e da natureza de $\mathcal{N}_x$, chega-se a uma forma ainda mais geral da definição 13.2.1:

13.2.2 Definição. Espaço de Vizinhanças Generalizadas (EVGs)

Um espaço de vizinhança generalizado (EVG) é um par $(\mathbb{S}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}$ é uma coleção de filtros (ou bases de filtros) em $\mathbb{S}$, chamados de vizinhanças generalizadas. ♦

Se $\mathbb{S}$ é o universo do sistema de 2ª ordem $\mathsf{S} = (\Lambda_{\mathbb{S}}, \Sigma_{\mathbb{S}})$, onde $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, então diz-se que o espaço de vizinhanças generalizadas $(\mathbb{S}, \mathcal{N})$ é definido sobre S.

13.2.3 Definição. Espaço de Fecho

Um espaço de fecho é um espaço de vizinhanças $(\mathbb{S}, \mathcal{N})$ para o qual as afirmações equivalentes são válidas:
(i) $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$, para todo $X \subseteq \mathbb{S}$;
(ii) $\mathrm{int}(X) \subseteq X$ para todo $X \subseteq \mathbb{S}$;
(iii) para todo $x \in \mathbb{S}$, x pertence a cada uma de suas vizinhanças, onde cl e int são os operadores de fecho e interior de conjuntos no sentido usual (definições 13.4.1 e 13.4.2). ♦

Se $\mathbb{S}$ é o universo do sistema de 2ª ordem $\mathsf{S} = (\Lambda_{\mathbb{S}}, \Sigma_{\mathbb{S}})$, onde $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, então diz-se que o espaço de fecho $(\mathbb{S}, \mathcal{N})$ é definido sobre S.

Os espaços de fecho foram introduzidos originalmente em [CEC 66]. Observe que todo grafo origina um espaço de vizinhanças, tomando-se como as vizinhanças de um nodo x aqueles conjuntos (de nodos, ou pontos) que contém os sucessores imediatos de x. Entretanto, este grafo, como um espaço de vizinhanças, é um espaço de fecho se e somente se é reflexivo.

13.3 Espaços de Vizinhanças Induzidos por uma Função Distância

Introduz-se agora a noção de espaços de vizinhanças generalizados definidos sobre um sistema ordenado de 2ª ordem, induzidos por uma função distância generalizada, no sentido da definição 11.1.4.

13.3.1 Definição. Bola Aberta Padrão

Seja $d_{\mathbb{S}}: \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função distância definida sobre $\mathbb{S}$. Uma bola aberta padrão centrada em $x \in \mathbb{S}$ e de raio $\varepsilon > 0$, é o conjunto definido por $\mathcal{B}_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{S} | d_{\mathbb{S}}(x, y) < \varepsilon\} \in \wp(\mathbb{S})$. A função $b_\varepsilon: \mathbb{S} \rightarrow \wp(\mathbb{S})$, tal que $x \mapsto \mathcal{B}_\varepsilon(x)$, é denominada de função bola. ♦

13.3.2 Definição. Bola Aberta Generalizada

Seja $\mathsf{V} = (\Lambda_{\mathbb{V}}, \Sigma_{\mathbb{V}})$, com $\Lambda_{\mathbb{V}} = \{\mathbb{V}, \wp(\mathbb{V})\}$, um sistema ordenado de 2ª ordem, onde $\mathbb{V}$ é um conjunto de valores e na estrutura $\Sigma_{\mathbb{V}}$ são definidas uma relação de posição $\leq_{\mathbb{V}}$ e uma operação binária $\oplus_{\mathbb{V}}: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ com elemento neutro O. Sejam $\mathsf{S} = (\Lambda_{\mathbb{S}}, \Sigma_{\mathbb{S}})$, com $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, um sistema ordenado de 2ª ordem, e $d_{\mathbb{S}}: \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{V}$ uma função distância generalizada definida sobre o universo $\mathbb{S}$. Uma bola aberta generalizada centrada em $x \in \mathbb{S}$ e de raio $\varepsilon >_{\mathbb{V}} O$, é o conjunto definido por $\mathcal{B}_\varepsilon^{\mathbb{V}}(x) = \{y \in \mathbb{S} | d_{\mathbb{S}}(x, y) <_{\mathbb{V}} \varepsilon\}$. A função $b_\varepsilon^{\mathbb{V}}: \mathbb{S} \rightarrow \wp(\mathbb{S})$, tal que $x \mapsto \mathcal{B}_\varepsilon^{\mathbb{V}}(x)$, é denominada de função bola generalizada. ♦.

Salienta-se que se $\mathbb{V} = \mathbb{S}$ então $d_{\mathbb{S}}$ está definida na subestrutura de medidas $M_{\mathbb{S}}$, assim como a função bola $b_\varepsilon^{\mathbb{S}}: \mathbb{S} \rightarrow \wp(\mathbb{S})$ está definida na estrutura $\Sigma_{\mathbb{S}}$.

13.3.3 Proposição

Uma função distância $d_{\mathbb{S}}$ definida em um universo $\mathbb{S}$ induz um espaço de vizinhanças ($\mathbb{S}, \mathcal{N}$), tomando-se $X \in \mathcal{N}_x$ se e somente se existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \subseteq X$, onde $\mathcal{B}_\varepsilon(x)$ é a bola aberta padrão centrada em $x \in \mathbb{S}$ e de raio $\varepsilon > 0$, definida em 13.3.1.

prova:

É imediato que a função $\mathcal{N}: \mathbb{S} \to \wp(\wp(\mathbb{S}))$, tal que $x \mapsto \mathcal{N}_x = \{X \mid \exists \varepsilon > 0, \mathcal{B}_\varepsilon(x) \subseteq X\}$, é bem definida. Sejam $\mathcal{N}_x \neq \mathcal{N}_y$ conjuntos de vizinhanças de $x,y \in \mathbb{S}$, respectivamente. Suponha $x = y$. Então é óbvio que, para todo $\varepsilon > 0$, $\mathcal{B}_\varepsilon(x) = \mathcal{B}_\varepsilon(y)$. Isto leva a uma contradição. Logo se conclui que somente pode ser $x \neq y$. Agora observe que o conjunto $\mathcal{N}_x$ é um filtro, qualquer que seja $x \in \mathbb{S}$. De fato, tem-se que (i) $\mathcal{N}_x \neq \varnothing$, e, (ii) se $Y, Z \in \mathcal{N}_x$, então existem ε', $\varepsilon'' > 0$ tal que $\mathcal{B}_{\varepsilon'}(x) \subseteq Y$ e $\mathcal{B}_{\varepsilon''}(x) \subseteq Z$. Portanto, tem-se que existe $\varepsilon = min\{\varepsilon', \varepsilon''\} > 0$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \subseteq Y \cap Z$, ou seja, $Y \cap Z \in \mathcal{N}_x$. Além disso, (ii) se $Y \in \wp(\mathbb{S})$, $Y \in \mathcal{N}_x$ e $Y \subseteq Z$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \subseteq Y \subseteq Z$, ou seja, $Z \in \mathcal{N}_x$. ♦

Observe que, sob o ponto de vista de geração de um espaço de vizinhanças, a utilização do conjunto dos números reais não é essencial. O que deve ser considerado é que a relação $d_{\mathbb{S}}(x,y) < \varepsilon$ forma a base de um filtro sobre $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$. Como uma extensão do caso topológico ordinário, pode-se considerar qualquer filtro de relações binárias sobre $\mathbb{S}$ como um espaço de vizinhanças uniforme sobre $\mathbb{S}$.

13.3.4 Proposição

Seja $\mathsf{V} = (\Lambda_{\mathbb{V}}, \Sigma_{\mathbb{V}})$, com $\Lambda_{\mathbb{V}} = \{\mathbb{V}, \wp(\mathbb{V})\}$, um sistema ordenado de 2ª ordem, onde $\mathbb{V}$ é um conjunto de valores e na estrutura $\Sigma_{\mathbb{V}}$ são definidos uma relação de posição $\leq_{\mathbb{V}}$ e uma operação binária $\oplus_{\mathbb{V}}: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ com elemento neutro O. Sejam $\mathsf{S} = (\Lambda_{\mathbb{S}}, \Sigma_{\mathbb{S}})$, com $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, um sistema ordenado de 2ª ordem, e $d_{\mathbb{S}}: \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{V}$ uma função distância generalizada definida sobre o universo $\mathbb{S}$. Diz-se que $d_{\mathbb{S}}$ induz um EVG ($\mathbb{S}, \mathcal{N}$), tomando-se $X \in \mathcal{N}_x$ se e somente se existe $\varepsilon >_{\mathbb{V}}$ O tal que $\mathcal{B}_\varepsilon^{\mathbb{V}}(x) \subseteq X$, onde $\mathcal{B}_\varepsilon^{\mathbb{V}}(x)$ é a bola aberta generalizada centrada em $x \in \mathbb{S}$ e de raio ε, definida em 13.3.2.

prova:

É análoga a da proposição 13.3.3. ♦

No que segue, quando não for necessário evidenciar alguma diferença entre os distintos espaços de vizinhanças introduzidos, utiliza-se a denominação de espaço de vizinhanças para significar um espaço de vizinhanças assim como um espaço de vizinhanças generalizado.

Observe que somente a condição (i) $d(x,x) = 0$ da definição 11.1.5 é necessária para garantir que o espaço de vizinhanças induzido por uma semi-pseudométrica d seja um espaço de fecho de Cech [CEC 66].

13.4 Conceitos Importantes em EVGs

Como na topologia padrão, espaços de vizinhanças podem ser introduzidos em termos de noções primitivas alternativas, como:

13.4.1 Definição. Operador de Interior em um Conjunto Qualquer

Um operador de interior sobre o universo $\mathbb{S}$ é um mapeamento $\mathrm{int}_{\mathbb{S}}:\wp(\mathbb{S}) \rightarrow \wp(\mathbb{S})$ que preserva interseções finitas, isto é, $\mathrm{int}_{\mathbb{S}}(X_1 \cap X_2) = \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(X_1) \cap \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(X_2)$, para todo $X_1, X_2 \in \mathbb{S}$. ♦

13.4.2 Definição. Operador de Fecho em um Conjunto Qualquer

Um operador de fecho sobre o universo $\mathbb{S}$ é um mapeamento $\mathrm{cl}_{\mathbb{S}}:\wp(\mathbb{S}) \rightarrow \wp(\mathbb{S})$ que preserva uniões finitas sobre um número finito de argumentos, isto é, $\mathrm{cl}_{\mathbb{S}}(X_1 \cup X_2) = \mathrm{cl}_{\mathbb{S}}(X_1) \cup \mathrm{cl}_{\mathbb{S}}(X_2)$, $X_1, X_2 \in \mathbb{S}$. ♦

13.4.3 Definição. Operador de Fecho em Espaço de Vizinhanças

Define-se operador de fecho em um espaço de vizinhanças $(\mathbb{S}, \mathcal{N})$ como um mapeamento $\mathrm{cl}_{\mathbb{S}}:\wp(\mathbb{S}) \rightarrow \wp(\mathbb{S})$, tal que, para todo $X \subseteq \mathbb{S}$, $x \in \mathrm{cl}_{\mathbb{S}}(X)$ se e somente se toda vizinhança de x interseciona X. ♦

13.4.4 Definição. Operador de Interior em Espaço de Vizinhanças

Define-se operador de interior em um espaço de vizinhanças $(\mathbb{S}, \mathcal{N})$ como um mapeamento $\mathrm{int}_{\mathbb{S}}:\wp(\mathbb{S}) \rightarrow \wp(\mathbb{S})$, tal que, para todo $X \subseteq \mathbb{S}$, $x \in \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(X)$ se e somente se $X \in \mathcal{N}_x$. ♦

Observe que se $X \subseteq \mathbb{S}$ então $\mathrm{int}_{\mathbb{S}}(X) = \mathbb{S} - \mathrm{cl}_{\mathbb{S}}(\mathbb{S} - X)$.

Salienta-se que se $d_{\mathbb{S}}$ é uma função distância arbitrária no universo $\mathbb{S}$, então, no espaço de vizinhanças $(\mathbb{S}, \mathcal{N})$ gerado por $d_{\mathbb{S}}$ ocorre que:

$$x \in \mathrm{cl}_{\mathbb{S}}(X) \Leftrightarrow d_{\mathbb{S}}(x, X) = 0,$$

onde $d_{\mathbb{S}}(x, X) = \inf\{d_{\mathbb{S}}(x, y) \| y \in X\}$.

Seja $\mathsf{V} = (\Lambda_{\mathbb{V}}, \Sigma_{\mathbb{V}})$, com $\Lambda_{\mathbb{V}} = \{\mathbb{V}, \wp(\mathbb{V})\}$, um sistema ordenado de 2ª ordem, onde $\mathbb{V}$ é um conjunto de valores e na estrutura $\Sigma_{\mathbb{V}}$ são definidos uma relação de posição $\leq_{\mathbb{V}}$ e uma operação binária $\oplus_{\mathbb{V}}:\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ com elemento neutro O. Sejam $\mathsf{S} = (\Lambda_{\mathbb{S}}, \Sigma_{\mathbb{S}})$, com $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, um sistema ordenado de 2ª ordem, e $d_{\mathbb{S}}:\mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{V}$ uma função distância generalizada definida sobre o universo $\mathbb{S}$. Então, no EVG $(\mathbb{S}, \mathcal{N})$ gerado por $d_{\mathbb{S}}$, definido sobre o sistema S, tem-se que

$$x \in \mathrm{cl}_{\mathbb{S}}(X) \Leftrightarrow d_{\mathbb{S}}(x, X) = \Theta,$$

onde Θ é qualquer aproximação do elemento neutro O.

13.4.5 Definição. Espaço T_0

Um espaço de vizinhanças $(\mathbb{S},\mathcal{N})$ é T_0 se, para todo $x,y \in \mathbb{S}$, tem-se que sempre que $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y$ então $x = y$. ♦

Observe que em um espaço T_0 pontos distintos não podem ter exatamente as mesmas vizinhanças.

13.4.6 Definição. Espaço T_1

Um espaço de vizinhanças $(\mathbb{S},\mathcal{N})$ é T_1 se, para todo $x,y \in \mathbb{S}$, tem-se que sempre que $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{N}_y$ então $x = y$. ♦

13.4.7 Definição. Espaço T_2

Um espaço de vizinhanças $(\mathbb{S},\mathcal{N})$ é T_2 se, para todo $x,y \in \mathbb{S}$, tem-se que sempre que $x \neq y$ então existe $A \in \mathcal{N}_x$ e existe $B \in \mathcal{N}_y$ tais que $\operatorname{int}_{\mathbb{S}}(A) \cap \operatorname{int}_{\mathbb{S}}(B) = \varnothing$. ♦

13.5 A Continuidade em Espaços de Vizinhanças

Procura-se agora caracterizar funções contínuas em espaços de vizinhanças. Sejam $(\mathbb{S},\mathcal{N})$ e $(\mathbb{S}',\mathcal{N}')$ espaços de vizinhanças.

13.5.1 Definição. Função Contínua

Uma função $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ é $\mathcal{N}$-contínua se qualquer uma das seguintes condições é satisfeita:

(i) $f^{-1}\left[\mathcal{N}_{f(x)}\right] \subseteq \mathcal{N}_x$, para todo $x \in \mathbb{S}$;

(ii) $f^{-1}\left[\operatorname{int}_{\mathbb{S}'}(B)\right] \subseteq \operatorname{int}_{\mathbb{S}}\left(f^{-1}[B]\right)$, para todo $B \subseteq \mathbb{S}'$;

(iii) $f\left[\operatorname{cl}_{\mathbb{S}}(A)\right] \subseteq \operatorname{cl}_{\mathbb{S}'}\left(f[A]\right)$, para todo $A \subseteq \mathbb{S}$. ♦

13.5.2 Definição. Função Contínua Generalizada

Uma função $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ é $\mathcal{N}$-contínua se qualquer uma das seguintes condições é satisfeita:

(i) para todo $V \in \mathcal{N}'$, existe $U \in \mathcal{N}$, tal que $f^{-1}[V] \subseteq U$;

(ii) $f^{-1}\left[\operatorname{int}_{\mathbb{S}'}(B)\right] \subseteq \operatorname{int}_{\mathbb{S}}\left(f^{-1}[B]\right)$, para todo $B \subseteq \mathbb{S}'$;

(iii) $f\left[\operatorname{cl}_{\mathbb{S}}(A)\right] \subseteq \operatorname{cl}_{\mathbb{S}'}\left(f[A]\right)$, para todo $A \subseteq \mathbb{S}$. ♦

13.6 A Topologia Associada a um Espaço de Vizinhanças

A todo espaço de vizinhanças está associada uma topologia. Procura-se agora caracterizar tal topologia. Sejam $(\mathbb{S},\mathcal{N})$ e $(\mathbb{S}',\mathcal{N}')$ espaços de vizinhanças.

13.6.1 Definição. Conjunto Aberto

Um conjunto $U \subseteq \mathbb{S}$ é um conjunto aberto se, para todo $x \in U$, o conjunto U contém uma vizinhança de x, ou seja, U é uma vizinhança de cada um de seus pontos. ♦

13.6.2 Proposição

Uma coleção de conjuntos $U \subseteq \mathbb{S}$ tais que $U \subseteq \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(U)$ é uma topologia, denotada por $\mathcal{O}(\mathbb{S})$.
prova:

Basta observar que se $U \subseteq \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(U)$, então para todo $x \in U$, tem-se que $x \in \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(U)$, o que significa que $U \in \mathcal{N}_x$, ou seja, U é uma vizinhança de cada um dos seus pontos, o que é uma condição para U ser um conjunto aberto de uma topologia, pela definição 13.6.1. ♦

13.6.3 Definição. Sistema mais Fino, mais Grosseiro

Sejam duas estruturas de vizinhanças $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ sobre o universo $\mathbb{S}$. Diz-se que $\mathcal{N}$ é mais fina que $\mathcal{M}$, ou $\mathcal{M}$ é mais grosseira que $\mathcal{N}$, se, para cada $x \in \mathbb{S}$, toda $\mathcal{M}$-vizinhança de x é também uma $\mathcal{N}$-vizinhança de x. ♦

13.6.4 Definição. Topologia mais Grosseira que um Sistema de Vizinhanças

Seja τ uma topologia definida sobre $\mathbb{S}$. Diz-se que τ é mais grosseira que $\mathcal{N}$ se cada aberto de τ é uma $\mathcal{N}$-vizinhança de cada um de seus pontos. ♦

13.6.5 Proposição

A topologia $\mathcal{O}(\mathbb{S})$ associada a um espaço de vizinhanças $(\mathbb{S},\mathcal{N})$ é a mais fina topologia sobre $\mathbb{S}$ que é mais grosseira que $\mathcal{N}$.
prova:

Segue da definição 13.6.4. De fato, $\mathcal{O}(\mathbb{S})$, como a coleção de todos os conjuntos com a propriedade dada nesta definição, é a mais fina topologia sobre $\mathbb{S}$ que é mais grosseira que $\mathcal{N}$. ♦

13.6.6 Proposição

Sejam $\mathcal{O}(\mathbb{S})$ e $\mathcal{O}(\mathbb{S}')$ as topologias associadas ao espaço de vizinhanças $(\mathbb{S},\mathcal{N})$ e $(\mathbb{S}',\mathcal{N}')$, respectivamente. Toda função $f: \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ $\mathcal{N}$-contínua é $\mathcal{O}$-contínua.
prova:

Suponha que f é $\mathcal{N}$-contínua. Seja $V \subseteq \mathbb{S}'$ um conjunto aberto na topologia associada $\mathcal{O}(\mathbb{S}')$. Então é válido que $V \subseteq \mathrm{int}_{\mathbb{S}'}(V)$. Segue que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &\subseteq f^{-1}(\mathrm{int}_{\mathbb{S}'}(V)) \\ &\subseteq \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(f^{-1}(V)), \end{aligned}$$

pela $\mathcal{N}$-continuidade de f. Portanto, $f^{-1}(V)$ é aberto. Logo, conclui-se que f é $\mathcal{O}$-contínua. ♦

13.7 Aspectos Topológicos em Espaços de Vizinhança

É possível estabelecer alguns conceitos básicos de topologia para o contexto de espaços generalizados.

Denota-se por **NSp** a categoria dos espaços de vizinhanças com funções contínuas como morfismos.

Observa-se que na categoria **NSp**, dados um conjunto $\mathbb{S}$ e uma família de mapeamentos $f_i : \mathbb{S} \to \mathbb{X}_i$, com $i \in I$, onde cada $\mathbb{X}_i$ é um espaço de vizinhanças, existe uma estrutura mas grosseira de vizinhanças em $\mathbb{S}$ que torna f_i contínua, para todo $i \in I$. Assim, para cada $x \in \mathbb{S}$, deve-se tomar $\mathcal{N}_x$ como o filtro que contém todos os filtros $\mathcal{F}_i = f^{-1}\left[\mathcal{N}_{f_i(x)}\right]$, conforme as definições 13.5.1 e 13.5.2. Portanto, $\mathcal{N}_x$ é o filtro obtido tomando-se as interseções finitas possíveis de elementos de $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

Uma argumentação padrão, como em [PRE 88], é capaz de mostrar que **NSp** é completa e co-completa, possuindo noções bem definidas de subespaço, quociente, dentre outros.

13.7.1 Definição. Base de um Espaço de Vizinhanças

Uma base para um espaço de vizinhanças ($\mathbb{S}$, $\mathcal{N}$) é uma coleção β de subconjuntos de $\mathbb{S}$ satisfazendo:

$$X \in \mathcal{N}_x \Rightarrow \exists B, B' \in \beta, x \in B \subseteq \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B') \wedge B' \subseteq X \text{ . ♦}$$

Uma definição levemente menos rigorosa que a dada em 13.7.1 poderia requerer simplesmente que toda vizinhança relativa a um ponto x contenha uma vizinhança básica de x, isto é, uma vizinhança de x que é um membro de β.

13.7.2 Definição. Base de um Espaço de Vizinhanças Generalizadas

Uma base para um espaço de vizinhanças generalizado ($\mathbb{S}$, $\mathcal{N}$) é uma coleção β de subconjuntos de $\mathbb{S}$ satisfazendo:

$$X \in U \Rightarrow \exists B \in \beta, B \subseteq X \text{, para todo } U \in \mathcal{N}. \text{ ♦}$$

Observe que existe uma diferença entre as definições 13.7.1 e 13.7.2. Uma base no sentido mais fraco, como em 13.7.2, dá origem a uma base como na definição 13.7.1, simplesmente pela incorporação do interior dos conjunto básicos dados, isto é, tomando-se $\beta^{*} = \beta \cup \{\mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B) | B \in \beta\}$.

Não há nenhuma exigência de que os conjunto básicos sejam abertos, e a noção não se reduz exatamente ao que é padrão em topologia. Entretanto, pode-se observar que existe uma conexão suficientemente próxima.

Seja ($\mathbb{S}, \mathcal{N}$) um espaço de vizinhanças com uma topologia associada $\mathcal{O}(\mathbb{S})$.

A definição abaixo é tradicional em topologia:

13.7.3 Definição. Base de Abertos

Diz-se que uma subcoleção B de $\mathcal{O}(\mathbb{S})$ é uma base para $\mathcal{O}(\mathbb{S})$ se e somente se $\mathcal{O}(\mathbb{S})$ é a união de subcoleções de $\mathcal{O}(\mathbb{S})$. ♦

A proposição a seguir estabelece algumas condições satisfeitas por uma base:

13.7.4 Proposição

Uma subcoleção B de $\mathcal{O}(\mathbb{S})$ é uma base para $\mathcal{O}(\mathbb{S})$ se e somente se satisfaz:
(i) Se $X, Y \in \mathrm{B}$ e $x \in X \cap Y$, então existe $Z \in \mathrm{B}$ tal que $x \in Z \subseteq X \cap Y$;
(ii) $\bigcup \mathrm{B} = S$.
prova:

Pode ser encontrada em qualquer livro de topologia como [BUS 63] [CEC 66] [DUG 66] [KEL 55] [SIE 52]. ♦

13.7.5 Proposição

Uma coleção β é uma base para $\mathcal{N}$ se e somente se $\mathrm{B} = \{\mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B) | B \in \beta\}$ é a base de abertos da topologia associada $\mathcal{O}(\mathbb{S})$.
prova:

Suponha que β é uma base para $\mathcal{N}$. Então basta mostrar que B satisfaz as condições da proposição 13.7.4. De fato, se $X \in \mathrm{B}$, $Y \in \mathrm{B}$ e $x \in X \cap Y$, então existem $B_X, B_Y \in \beta$ tal que $X = \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B_X)$, $Y = \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B_Y)$ e $x \in (\mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B_X) \cap \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B_Y))$. Logo, pela definição 13.4.1, tem-se que $x \in \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B_X \cap B_Y)$. Logo, pela definição 13.4.4, $B_X \cap B_Y$ é uma vizinhança de x. Logo, existe $B_Z \in \beta$ tal que $B_X \cap B_Y \supseteq B_Z \in \beta$. Isto significa que existe $Z = \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B_Z)$ tal que $x \in Z \subseteq X \cap Y$. Além disso, é óbvio que $\bigcup \mathrm{B} = \mathbb{S}$, o que mostra que B é a base de abertos da topologia associada $\mathcal{O}(\mathbb{S})$. Por outro lado, supondo que B é a base de abertos da topologia associada $\mathcal{O}(\mathbb{S})$, então é imediato que $\varnothing \notin \beta$ e, dados $B, B' \in \beta$ então $\mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B), \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B') \in \mathrm{B}$ e, portanto, se $x \in \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B) \cap \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B')$ então existe $O \in \mathrm{B}$ tal que $x \in O \subseteq \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B) \cap \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B')$. Isto significa que $O = \mathrm{int}_{\mathbb{S}}(B'')$ e B'' é uma vizinhança básica de x. Além disso, tem-se que $B'' \subseteq B \cap B'$. Isto prova que β é uma base para $\mathcal{N}$. ♦

13.7.6 Definição. Espaço Segundo Contável

Diz-se que um espaço de vizinhanças generalizado ($\mathbb{S}$, $\mathcal{N}$) é segundo contável se ele possui uma base enumerável. ♦

13.7.7 Definição. Vizinhança Relativa

Sejam ($\mathbb{S}$, $\mathcal{N}$) um espaço de vizinhanças generalizado e $Y \subseteq \mathbb{S}$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{S}$. Diz-se que um subconjunto $V \subseteq \mathbb{Y}$ é uma vizinhança relativa a $\mathbb{Y}$ se $V = \mathbb{Y} \cap U$, para $U \in \mathcal{N}$. ♦

O seguinte resultado é imediato:

13.7.8 Proposição

Sejam ($\mathbb{S}$, $\mathcal{N}$) um espaço de vizinhanças generalizado e $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{S}$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{S}$. A estrutura $(\mathbb{Y}, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T}$ é o conjunto de todos os subconjuntos de Y que são vizinhanças relativas a $\mathbb{Y}$, é um espaço de vizinhanças generalizado. ♦

13.7.9 Definição. Subespaço de Vizinhanças Generalizado

Sejam ($\mathbb{S}$, $\mathcal{N}$) um espaço de vizinhanças generalizado e $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{S}$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{S}$. Diz-se que $(\mathbb{Y}, \mathcal{T})$ é um subespaço de vizinhanças de ($\mathbb{S}$, $\mathcal{N}$) se $\mathcal{T}$ é uma coleção de vizinhanças relativas a $\mathbb{Y}$ induzidas por $\mathcal{N}$. ♦

13.7.10 Definição. Espaço Conexo

Um espaço $\mathbb{S}$ é conexo se não pode ser particionado em dois subconjuntos abertos não vazios. ♦

Observa-se que a noção de espaço conexo é tomada relativamente a $\mathcal{O}$-topologia, sem prejuizo para o contexto. Para verificar se esta noção é satisfatória em termos de topologia categórica, observe a seguinte proposição:

13.7.11 Proposição

Um espaço de vizinhanças ($\mathbb{S}$, $\mathcal{N}$) é conexo se e somente se não existe uma sobrejeção $\mathcal{N}$-contínua de $\mathbb{S}$ no espaço de dois pontos discreto. ♦

A noção de compacidade é de grande interesse computacional. Isto se deve ao aspecto finitário de espaços e conjuntos compactos.

13.7.12 Definição. Cobertura, Subcobertura

Sejam ($\mathbb{S}$, $\mathcal{N}$) um espaço de vizinhanças com topologia associada $\mathcal{O}(\mathbb{S})$ e $X \subseteq \mathbb{S}$. Diz-se que uma família $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos conjuntos $A_i \subseteq \mathbb{S}$ é uma cobertura de X se $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Diz-se que $\{A_i\}_{i\in I}$ é uma cobertura aberta se $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{S})$. Diz-se que $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura finita se o conjunto I dos índices é finito. Uma cobertura $\{B_j\}_{j \in J}$ é uma subcobertura de $\{A_i\}_{i \in I}$ se, para cada $j \in J$, existe $i \in I$ tal que $B_j = A_i$, isto é, a família $\{B_j\}_{j \in J}$ é uma subfamília de $\{A_i\}_{i \in I}$. ♦

Para discutir compacidade em espaços de vizinhanças, é necessário generalizar a noção de coberturas abertas.

13.7.13 Definição

Seja ($\mathbb{S}$, $\mathcal{N}$) é um espaço de vizinhanças e X um subconjunto de $\mathbb{S}$. Uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $\mathbb{S}$ é uma cobertura interior de X se cada ponto de X está no interior de algum membro de $\mathcal{C}$. ♦

Para definir compacidade, existem duas possibilidade: (i) X é compacto se toda cobertura interior de X contém uma subcobertura finita de X [CEC 66] [POS 71]; (ii) X é compacto se toda cobertura interior de X contém uma subcobertura interior finita de X [SMY 95].

Cech [CEC 66] adota a alternativa (i), estando também de acordo com o trabalho de Poston [POS 71], embora este último trabalhe relativamente pouco com o conceito de compacidade e admita sua incerteza em relação a esta definição.

Na verdade, a definição (i) possui algumas desvantagens [SMY 95]. Por exemplo, o grafo de um ponto único e sem arestas não é compacto no sentido de (i), o que é uma limitação do sentido desta definição para espaços de vizinhanças generalizados. Além disso, parece não ser possível enunciar um teorema como o de Hofmann-Mislove para esta definição, que forneceria uma caracterização lógica de conjunto compactos saturados como interseções de filtros adequados de vizinhanças.

Em contraste, compacidade definida como em (ii) faz sentido em todos os aspectos, e permite um teorema como o de Hofmann-Mislove; mas existe uma objeção séria a ser ressaltada, pois desta forma a compacidade não é, em geral, preservada por funções contínuas.

Salienta-se que a compacidade no sentido de (ii) é equivalente à compacidade no sentido padrão, com relação a topologia de conjuntos interiores para $\mathbb{S}$, isto é, a topologia que possui como base (no sentido topológico padrão) a coleção $\{\mathrm{int}_{\mathbb{S}}(A) | A \subseteq \mathbb{S}\}$. Requerendo sobriedade (a qualidade de um espaço ser sóbrio) com relação a esta topologia sobre X, pode-se, portanto, de uma maneira bastante trivial, obter um teorema como o de Hofmann-Mislove para $\mathbb{S}$. Exigindo que as funções sejam contínuas com relação a topologia de conjuntos interiores, é possível, de maneira trivial, garantir que os morfismos preservem compacidade.

14 Espaços de Vizinhanças Estáveis e Lineares

O objetivo deste capítulo é introduzir a noção de vizinhanças lineares, fornecendo uma caracterização topológica adequada à estrutura de informação dos espaços coerentes bi-estruturados obtidos pelo processo de construção global.

Bethke [BET 91] procurou mostrar que a estabilidade não é uma propriedade topológica, isto é, os espaços coerentes, com exceção dos espaços planos, não podem ser equipados com uma topologia tal que as noções de continuidade e estabilidade coincidem. A topologia de Scott não pode capturar a condição adicional de estabilidade. Isto realmente é uma verdade. Entretanto, não é desejável que estas duas noções coincidam. A conclusão de que não é possível dotar os espaços coerentes de algum tipo de topologia é muito forte. Smyth [SMY 95] afirma que é válido o estudo de estruturas topológicas generalizadas e Zhang [ZHA 92] introduziu um estudo sobre os aspectos topológicos de funções estáveis através do conceito de vizinhanças estáveis, caracterizando um noção mais geral de conjunto aberto. Com base no conceito de vizinhanças estáveis, introduz-se aqui a noção de vizinhanças lineares.

Para a caracterização dos espaços de vizinhanças lineares, são introduzidos os conceitos de espaços disjuntivos e espaços de vizinhanças estáveis.

14.1 Espaços Disjuntivos

Apresenta-se a seguir a noção de espaço disjuntivo [ZHA 92] associado a um EVG. Observa-se que todo espaço topológico é um espaço disjuntivo, mas o inverso não ocorre [ZHA 92]. Entretanto, muitas noções análogas às dos espaços topológicos podem ser introduzidas.

Seja $(\mathbb{S}, \mathcal{N})$ um espaço de vizinhanças generalizado.

14.1.1 Definição. Espaço Disjuntivo

Um espaço disjuntivo é a estrutura $(\mathbb{S}, \mathcal{D}(\mathbb{S}))$, onde $\mathcal{D}(\mathbb{S}) \subseteq \wp(\mathbb{S})$ satisfaz as seguintes propriedades:
(i) $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ é fechado para interseção finita;
(ii) $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ é fechado para a união disjunta, isto é, para todo $i \in I$, $U_i \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$ tais que $U_k \cap U_l = \varnothing$, para todo $k \neq l \in I$, tem-se $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$.

Um subconjunto em $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ é denominado de vizinhança. ♦

Se $\mathbb{S}$ é o universo do sistema de 2ª ordem $\mathsf{S} = (\Lambda_{\mathbb{S}}, \Sigma_{\mathbb{S}})$, onde $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, então diz-se que $(\mathbb{S}, \mathcal{D}(\mathbb{S}))$ é um espaço disjuntivo definido sobre S.

Seja $(\mathbb{S}, \mathcal{D}(\mathbb{S}))$ um espaço disjuntivo. Então:

14.1.2 Definição. Base

Uma base para um espaço disjuntivo $(\mathbb{S},\mathcal{D}(\mathbb{S}))$ é um subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{S})$ tal que toda vizinhança de $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ é uma união disjunta de elementos de $\mathcal{B}$. ♦

14.1.3 Definição. Sub-base

Uma sub-base para um espaço disjuntivo $(\mathbb{S},\mathcal{D}(\mathbb{S}))$ é um subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{S})$ tal que toda vizinhança de $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ é a união disjunta de interseções finitas de elementos de $\mathcal{A}$, isto é, o conjunto $\mathcal{B} = \{ B \mid B$ é a interseção de uma quantidade finita de membros de $\mathcal{A} \}$ é uma base para $(\mathbb{S},\mathcal{D}(\mathbb{S}))$. ♦

14.1.4 Definição. Espaço Segundo Contável

Diz-se que um espaço disjuntivo $(\mathbb{S},\mathcal{D}(\mathbb{S}))$ é segundo contável se ele possui uma base enumerável. ♦

14.1.5 Definição. Vizinhança Relativa

Seja $X \subseteq \mathbb{S}$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{S}$. Diz-se que um subconjunto $V \subseteq X$ é uma vizinhança em X se $V = X \cap U$, para $U \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$. ♦

14.1.6 Proposição

Seja $X \subseteq \mathbb{S}$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{S}$. A estrutura $(X,\mathcal{T})$, onde $\mathcal{T}$ é o conjunto de todos os subconjuntos de X que são vizinhanças em X, é um espaço disjuntivo. ♦

prova:

Mostra-se que $\mathcal{T}$ satisfaz as condições da definição 14.1.1. De fato, para provar (i), considere $U,V \in \mathcal{T}$. Então tem-se que $U = X \cap U'$ e $V = X \cap V'$, com $U',V' \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$. Segue que $U \cap V = (X \cap U') \cap (X \cap V') = X \cap (U' \cap V') \in \mathcal{T}$, pois $(U' \cap V') \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$. Isto significa que $\mathcal{T}$ é fechado para interseção finita. Mostra-se agora (ii). Considere $\{U_i \mid i \in I, U_K \cap U_l = \varnothing, \forall k \neq l \in I\} \subseteq \mathcal{T}$. Então, para cada $i \in I$, ocorre que $U_i = X \cap U_i'$, com $U_i' \in \mathcal{N}$. Como $U_k \cap U_l = \varnothing$, para todo $k \neq l \in I$, então também é válido que $(X \cap U_k') \cap (X \cap U_k') = X \cap (U_k' \cap U_l') = \varnothing$, donde se conclui que $(U_k' \cap U_l') = \varnothing$. Segue que

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (X \cap U_i') = X \cap \left(\bigcup_{i \in I} U_i' \right) \in \mathcal{T},$$

pois $\bigcup_{i \in I} U_i' \in \mathcal{D}(S)$. ♦

14.1.7 Definição. Subespaço Disjuntivo

Seja $X \subseteq \mathbb{S}$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{S}$. Diz-se que $(X, \mathcal{T})$ é um subespaço disjuntivo de $(\mathbb{S}, \mathcal{D}(\mathbb{S}))$ se $\mathcal{T}$ é uma coleção de vizinhanças em X induzidas por $\mathcal{D}(\mathbb{S})$. ♦

14.1.8 Proposição

Sejam $x \in \mathbb{S}$ e $\mathcal{P}_x$ a coleção de vizinhanças que contém x. Então $\mathcal{P}_x$ apresenta as seguintes propriedades:
(i) para todo $U \in \mathcal{P}_x$, se $U \subseteq V \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$, então $V \in \mathcal{P}_x$;
(ii) se $U, V \in \mathcal{P}_x$, então $U \cap V \in \mathcal{P}_x$;
(iii) para toda coleção disjunta de U_i's em $\mathcal{N}$, se $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{P}_x$, então $U_i \in \mathcal{P}_x$ para algum i.
♦
prova:

Pode ser encontrada em [ZHA 92]. ♦

14.1.9 Proposição

Um espaço disjuntivo $(\mathbb{S}, \mathcal{D}(\mathbb{S}))$ é T_0 se sempre que $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_y$ tem-se que $x = y$, para todo $x, y \in \mathbb{S}$.
prova:

É imediata, pois se espaço é T_0, então para todo $x \neq y$ existe $X \in \mathcal{P}_x$ tal que $X \notin \mathcal{P}_y$, o que resulta em $\mathcal{P}_x \neq \mathcal{P}_y$. ♦

14.1.10 Definição Filtro Primo Completo

Chama-se de filtro primo completo $\mathcal{P}$ a coleção de vizinhanças do espaço disjuntivo $(\mathbb{S}, \mathcal{D}(\mathbb{S}))$ que apresenta as seguintes propriedades:
(i) para todo $U \in \mathcal{P}$, se $U \subseteq V \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$, então $V \in \mathcal{P}$;
(ii) se $U, V \in \mathcal{P}$, então $U \cap V \in \mathcal{P}$;
(iii) para toda coleção disjunta de U_i's em $\mathcal{D}(\mathbb{S})$, se $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{P}$, então $U_i \in \mathcal{P}$ para algum i. ♦

14.1.11 Definição. Espaço Sóbrio

Um espaço disjuntivo $(\mathbb{S}, \mathcal{D}(\mathbb{S}))$ é sóbrio se é T_0 e, para todo filtro prime completo $\mathcal{P}$ em $\mathcal{D}(\mathbb{S})$, existe algum ponto x tal que $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}$. ♦

Observe que, intuitivamente, um espaço é sóbrio se é completamente determinado por seu reticulado de propriedades (vizinhanças).

14.1.12 Definição. Espaço Disjuntivo Compacto

$\mathbb{S}$ é compacto se toda cobertura interior de $\mathbb{S}$ contém uma subcobertura interior finita de $\mathbb{S}$. Um subconjunto $X \subseteq \mathbb{S}$ é compacto se X é compacto como um subespaço de $\mathbb{S}$. ♦

14.2 Espaços de Vizinhanças Estáveis

No sentido de capturar a noção de estabilidade em espaços coerentes, introduz-se, nesta seção, uma classe de conjuntos, denominados de vizinhanças estáveis, que caracterizam as funções estáveis no seguinte sentido:
(i) uma função é estável se e somente se a imagem inversa de uma vizinhança estável é também de uma vizinhança estável;
(ii) se f e g são funções estáveis, então $f \leq_B g$ se e somente se $f^{-1}(O) \sqsubseteq g^{-1}(O)$, para toda vizinhança estável O, onde $\leq_B$ é ordem de Berry ou ordem estável e $\sqsubseteq$ é uma ordem adequada no espaço das vizinhanças estáveis.

Sejam $(\Lambda_{\mathbb{S}}, \Sigma_{\mathbb{S}}^{in}, \Sigma_{\mathbb{S}}^{ap})$, com $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, um espaço coerente bi-estruturado, com estrutura de informação $\Sigma_{\mathbb{S}}^{in}$ e estrutura de aplicação $\Sigma_{\mathbb{S}}^{ap}$, e $(\mathbb{S},\mathcal{N})$ um espaço de vizinhanças generalizadas definido sobre $\mathbb{S}$. Então:

14.2.1 Definição. Aberto Scott

Diz-se que $U \subseteq \mathbb{S}$ é um aberto Scott se
(i) para todo $x \in U$, se $x \subseteq y$ então $y \in U$, e
(ii) para todo subconjunto dirigido $X \subseteq \mathbb{S}$ tal que $\bigcup X \in U$ tem-se que $X \cap U \neq \varnothing$. ♦

14.2.2 Definição. Vizinhança Estável, Espaço de Vizinhanças Estáveis

Diz-se que $U \subseteq \mathbb{S}$ é uma vizinhança estável em $\mathbb{S}$ se
(i) U é um aberto Scott, e
(ii) para todo $x, y \in U$, se $x \cup y \in \mathbb{S}$ então $x \cap y \in U$.

O conjunto das vizinhanças estáveis em $\mathbb{S}$ é denotado por **SN**($\mathbb{S}$). ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)) é denominado de espaço de vizinhanças estáveis em $\mathbb{S}$. ♦

Observe que **SN**($\mathbb{S}$) não necessariamente forma uma topologia, pois é fechado para a interseções finitas mas não é fechado para a uniões arbitrárias. De fato, seja $\{U_i' | i \in I\} \subseteq$ **SN**($\mathbb{S}$). Então, para cada $i \in I$, ocorre que para todo $x, y \in U_i$, se $x \cup y \in U_i$ então $x \cap y \in U_i$. Sejam $x, y \in \bigcup_{i \in I} U_i'$, tais que $(x \cup y) \in \mathbb{S}$. Observe que pode existir $j \neq k \in I$ tais que $x, x \cup y \in U_j$ e $y, x \cup y \in U_k$, mas $x \cap y \notin U_i'$, para todo $i \in I$. Neste caso, tem-se que $x \cap y \notin \bigcup_{i \in I} U_i'$. Isto mostra que não necessariamente ocorre que $\bigcup_{i \in I} U_i' \in$ **SN**($\mathbb{S}$).

Entretanto, **SN**($\mathbb{S}$) é fechado para uniões disjuntas, como mostra o resultado a seguir.

14.2.3 Proposição

($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)) é um espaço disjuntivo definido sobre $\mathbb{S}$.

prova:

Mostra-se que **SN**($\mathbb{S}$) satisfaz as condições da definição 14.1.1.

De fato, para provar (i), considere $U,V \in$ **SN**($\mathbb{S}$). Seja $x \in (U \cap V)$ e $x \subseteq y$. Então tem-se que $x \in U$ e $x \in V$. Logo, segue que $y \in U$ e $y \in V$, pois $U,V \in$**SN**($\mathbb{S}$). Assim, conclui-se que $y \in (U \cap V)$. Por outro lado, considere o subconjunto dirigido $X \subseteq \mathbb{S}$ tal que $\bigcup X \in U,V$. Tem-se que $\bigcup X \in U \cap V$, $X \cap U \neq \varnothing$ e $X \cap V \neq \varnothing$, e, portanto, $X \cap (U \cap V) \neq \varnothing$. Conclui-se que $U \cap V$ é aberto Scott.

Agora, sejam $x,y \in (U \cap V)$, tais que $x \cup y \in \mathbb{S}$. Então, tem-se que $x,y \in U$, $x,y \in V$. Como $U,V \in$ **SN**($\mathbb{S}$), conclui-se que $x \cap y \in U$ e $x \cap y \in V$. Segue que $x \cap y \in (U \cap V)$. Portanto, é válido que $(U \cap V)\in$**SN**($\mathbb{S}$). Isto significa que **SN**($\mathbb{S}$) é fechado para interseção finita.

Mostra-se agora (ii). Considere $\{U_i | i \in I, U_k \cap U_l = \varnothing, \forall k \neq l \in I\} \subseteq$ **SN**($\mathbb{S}$). Então, para cada $i \in I$, ocorre que: (a) para todo $x \in U_i$, se $x \subseteq y$ então $y \in U_i$, (b) para todo subconjunto dirigido $X \subseteq \mathbb{S}$ tal que $\bigcup X \in U_i$ tem-se que $X \cap U_i \neq \varnothing$, e (c) para todo $x,y \in U_i$, se $x \cup y \in U_i$ então $x \cap y \in U_i$. Como $U_k \cap U_l = \varnothing$, para todo $k \neq l \in I$, então para todo $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, ocorre que existe somente um $m \in I$, tal que $x \in U_m$. Suponha que $x \subseteq y$, para $y \in \mathbb{S}$. Então por (a), tem-se que $y \in U_m$. Como $U_m \in \{U_i | i \in I, U_k \cap U_l = \varnothing, \forall k \neq l \in I\}$, conclui-se que $y \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Por outro lado, considere o subconjunto dirigido $X = \{x_l | l \in L\} \subseteq \mathbb{S}$ tal que $\bigcup X \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Então, como $U_k \cap U_l = \varnothing$, para todo $k \neq l \in I$, ocorre que existe somente um $m \in I$, tal que $\bigcup X \in U_m$. Então, por (b), tem-se que $X \cap U_m \neq \varnothing$. Conclui-se que $\left(X \cap \bigcup_{i \in I} U_i\right) \neq \varnothing$. Logo, é verdade que $\bigcup_{i \in I} U_i$ é aberto Scott.

Agora, sejam $x,y \in \bigcup_{i \in I} U_i$, tais que $x \cup y \in \mathbb{S}$. Então, como $U_k \cap U_l = \varnothing$, para todo $k \neq l \in I$, ocorre que existe somente um $m \in I$ tal que $x,y, x \cup y \in U_m$. Então, por (c), ocorre que $x \cap y \in U_m$. Conclui-se que $x \cap y \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Portanto, é válido que $\bigcup_{i \in I} U_i \in$**SN**($\mathbb{S}$). Isto significa que **SN**($\mathbb{S}$) é fechado para a união disjunta.

A conclusão final é que ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)) é um espaço disjuntivo. ♦

Seja ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)) o espaço das vizinhanças estáveis em $\mathbb{S}$. O resultado a seguir é imediato:

14.2.4 Proposição

(**SN**($\mathbb{S}$),$\subseteq$) é um reticulado completo, não necessariamente distributivo. ♦

14.2.5 Definição. Espaço de Vizinhanças Estáveis mais Grosseiro que um Espaço de Vizinhanças Generalizado.

Diz-se que **SN**($\mathbb{S}$) é mais grosseiro que $\mathcal{N}$, ou $\mathcal{N}$ é mais fino que **SN**($\mathbb{S}$), se cada vizinhança estável de **SN**($\mathbb{S}$) é uma $\mathcal{N}$- vizinhança que satisfaz as condições da definição 14.2.2. ♦

14.2.6 Definição. Espaço de Vizinhanças de Informação Estável

Diz-se que o espaço de vizinhanças generalizado ($\mathbb{S}$,$\mathcal{N}$) é um espaço de vizinhanças de informação estável definido sobre $\Sigma_{\mathbb{S}}^{in}$ se é o mais grosseiro espaço vizinhanças que é mais fino que o espaços de vizinhanças estáveis ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)). ♦

14.2.7 Definição. Espaço de Vizinhanças Compacto

Diz-se que um espaço de vizinhanças ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)) é compacto se cada cobertura interior de $\mathbb{S}$ possui uma subcobertura finita. Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{S}$ é compacto se S é compacto como um subespaço de $\mathbb{S}$. ♦

14.2.8 Definição. Ponto Finito ou Compacto

Diz-se que um ponto $a \in \mathbb{S}$ é finito ou compacto se sempre que $A \subseteq \mathbb{S}$ é um subconjunto dirigido, e $a \subseteq \bigcup A$, então existe $x \in A$ tal que $a \subseteq x$. O conjunto dos elementos finitos é denotado por $\mathbb{S}^0$. ♦

14.2.9 Definição. Vizinhança Estável Compacta

Diz-se que uma vizinhança estável $K \in$**SN**($\mathbb{S}$) é compacta se K é um conjunto aberto Scott compacto. O conjunto das vizinhanças estáveis compactas é denotado por **KSN**($\mathbb{S}$). ♦

14.2.10 Definição. Vizinhança Estável Principal

P é uma vizinhança estável principal de **SN**($\mathbb{S}$) se existe um elemento finito d em $\mathbb{S}$ tal que $P = \uparrow d$, onde $\uparrow d = \{x \in \mathbb{S} | d \subseteq x\}$. ♦

Seja O um espaço coerente constituído de dois pontos $\varnothing$ e T e $\mathbb{S}$ um espaço coerente qualquer. Observe que se $f: \mathbb{S} \to O$ é estável, então é imediato que f^{-1}(T) é uma vizinhança estável. Por outro lado, suponha que U é uma vizinhança estável de $\mathbb{S}$. Então F:**SN**($\mathbb{S}$) $\to \left(\mathbb{S} \xrightarrow{St} O\right)$, com

$$F(U)(x)=\begin{cases}\mathrm{T} & \text{se } x\in U;\\ \varnothing & \text{se } x\in \mathbb{S}-U\end{cases}$$

é uma função estável, onde $(\mathbb{S}\xrightarrow{St} O)$ é o espaço das funções estáveis de $\mathbb{S}$ em O.

Entretanto, a inclusão de conjuntos sobre vizinhanças estáveis não determina a ordem estável. Em $(O\xrightarrow{St} O)$, por exemplo, duas funções estáveis $\lambda x.x$ e $\lambda x.\mathrm{T}$ apresentam a propriedade de que para todo $U\in$**SN**(O), tem-se que $(\lambda x.x)^{-1}(U)\subseteq(\lambda x.\mathrm{T})^{-1}(U)$, mas não é verdade que $\lambda x.x\leq_B \lambda x.\mathrm{T}$.

Suponha então que $U,V\in$**SN**($\mathbb{S}$) e $F(U)\leq_B F(V)$. Então, para todo $x,y\in\mathbb{S}$, $x\subseteq y$ implica em $F(U)(x)=F(U)(y)\cap F(V)(x)$. Observe que $x\in V$ quando $x\in U$, isto é, $U\subseteq V$. Além disso, sempre que $x\subseteq y\in U$, mas com $x\notin U$, é necessário também que ocorra $x\notin V$. Isto significa que um ponto minimal de U deve também ser um ponto minimal de V.

14.2.11 Definição. Ponto Minimal

O conjunto dos pontos minimais de $U\in$**SN**($\mathbb{S}$), denotado por μU, consiste dos pontos $m\in U$ tais que para todo $x\in\mathbb{S}$ com $x\subseteq m$, se $x\in U$ então $x=m$. ♦

14.2.12 Definição. Relação "minimalmente-menor que"

Para todo $U,V\in$**SN**($\mathbb{S}$), diz-se que U é minimalmente-menor que V, e denota-se $U\sqsubseteq_\mu V$, se $\mu U\subseteq\mu V$. ♦

14.2.13 Proposição

São válidos os seguintes resultados:
(i) Se $U\sqsubseteq_\mu V$ então $U\subseteq V$;
(ii) Se $U\sqsubseteq_\mu W$ e $U\subseteq V\subseteq W$, então $U\sqsubseteq_\mu V$;
(iii) $U\sqsubseteq_\mu V$ se e somente se existe $W\in$ **SN**($\mathbb{S}$), tal que $V=U\cup W$ e $U\cap W=\varnothing$;
(iv) Todo ponto minimal de uma vizinhança estável é um elemento finito.
prova:

Mostra-se (i). Suponha $U\sqsubseteq_\mu V$. Então tem-se que $\mu U\subseteq\mu V$. Seja $x\in U$. Então, para todo $m\in U$ tal que $m\in\mu U$, tem-se que $m\subseteq x$ e $m\in\mu V$. Como V é aberto Scott, então é imediato que $x\in V$.

Para verificar (ii), suponha que $U\sqsubseteq_\mu W$ e $U\subseteq V\subseteq W$, mas não ocorre $U\sqsubseteq_\mu V$. Então tem-se que $\mu U\subseteq\mu W$ mas $\mu U\not\subseteq\mu V$. Considere então $m\in\mu U$. Como $U\subseteq V$ tem-se que $m\in V$, mas $m\notin\mu V$. Isto significa que existe $x\in V$ tal que $x\subseteq m$ e $x\neq m$. Segue que $x\in W$, pois $V\subseteq W$. Mas isto é uma contradição, pois $m\in\mu W$, já que $\mu U\subseteq\mu W$. Conclui-se que $U\sqsubseteq_\mu V$.

Agora, prova-se (iii). Suponha $U\sqsubseteq_\mu V$. Então tem-se que $U\subseteq V$, pela proposição 14.2.13. Logo é imediato que $W\in$**SN**($\mathbb{S}$), $W=V-U$, tal que $V=U\cup W$ e $U\cap W=\varnothing$. Por outro lado, suponha que existe $W\in$**SN**($\mathbb{S}$), tal que $V=U\cup W$ e

$U \cap W = \varnothing$. Seja $m \in \mu U$ tal que $m \notin \mu V$. Então $m \in V$ e existe $x \in V$ tal que $x \sqsubseteq m$ e $x \neq m$. Então somente pode ser $x \in W$. Neste caso, como W é aberto Scott, tem-se que $m \in W$, o que é uma contradição, pois $U \cap W = \varnothing$. Conclui-se que $m \in \mu V$. Isto significa que $\mu U \subseteq \mu V$, ou seja, $U \sqsubseteq_\mu V$.

Finalmente, para mostrar (iv), seja $U \in \mathbf{SN}(\mathbb{S})$ e $m \in \mu U$. Seja $X \subseteq \mathbb{S}$ um subconjunto dirigido tal que $m \sqsubseteq \bigcup X$. Como U é aberto Scott, então $\bigcup X \in U$, e, portanto, tem-se que $X \cap U \neq \varnothing$. Logo, existe $x \in X$ tal que $x \in U$. Como $m \in \mu U$, então somente pode ser $m \sqsubseteq x$. Conclui-se que m é finito. ♦

Observe que o inverso do item (i) da proposição anterior não se verifica.

14.2.14 Proposição

Tem-se que $\left(\mathbb{S} \xrightarrow{St} O\right) \cong \mathbf{SN}(\mathbb{S})$, com a ordem estável $\leq_B$ em $\left(\mathbb{S} \xrightarrow{St} O\right)$ e $\sqsubseteq_\mu$ em $\mathbf{SN}(\mathbb{S})$.
prova:

É imediata, pois existe um isomorfismo dado por $f \mapsto f^{-1}(T)$. ♦

Seja $\left(\Lambda_\mathbb{S}, \Sigma_\mathbb{S}^{in}, \Sigma_\mathbb{S}^{ap}\right)$, com $\Lambda_\mathbb{S} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, um espaço coerente bi-estruturado com estrutura de informação $\Sigma_\mathbb{S}^{in}$ e estrutura de aplicação $\Sigma_\mathbb{S}^{ap}$. Seja $(\mathbb{S}, \mathcal{N}(\mathbb{S}))$ o espaço de vizinhanças de informação estável definido sobre Σ_D^{in}. Então:

14.2.15 Proposição

Para todo $U \in \mathbf{SN}(\mathbb{S})$, existe $K \subseteq \mathbb{S}^0$, um conjunto onde os elementos são incompatíveis dois a dois, tal que $U = \bigcup\{\uparrow k | k \in K\}$, onde $\mathbb{S}^0$ é o conjunto dos elementos finitos de $\mathbb{S}$.
prova:

Seja $x \in U$. Então existe $k \in \mu U$ tal que $x \in \uparrow k$. Pela proposição 14.2.13 (iv), tem-se que $k \in \mathbb{S}^0$. Logo existe $K \subseteq \mathbb{S}^0$ tal que $x \in \bigcup\{\uparrow k | k \in K\}$. Por outro lado, seja $x \in \bigcup\{\uparrow k | k \in K\}$, com $K \subseteq \mathbb{S}^0$. Então existe $k \in K$ tal que $x \in \uparrow k$. Pela definição 14.2.10, $\uparrow k = U \in \mathbf{SN}(\mathbb{S})$. Conclui-se que $U = \bigcup\{\uparrow k | k \in K\}$. ♦

14.2.16 Corolário

Para todo $U \in \mathbf{SN}(\mathbb{S})$, existe $K \subseteq \mathbb{S}^0$ tal que U é dada pela união disjunta de elementos de K, isto é, $U = \dot{\bigcup\limits_{k \in K}} \uparrow k$, onde $\mathbb{S}^0$ é o conjunto dos elementos finitos de $\mathbb{S}$. O conjunto $\{\uparrow k | k \in K\}$ é uma base para o espaço de vizinhanças estáveis $(\mathbb{S}, \mathbf{SN}(\mathbb{S}))$. ♦

Observe que se $\left(\Lambda_\mathbb{S}, \Sigma_\mathbb{S}^{in}, \Sigma_\mathbb{S}^{ap}\right)$, com $\Lambda_\mathbb{S} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, é um espaço coerente bi-estruturado, então a base do EVG de informação estável $(\mathbb{S}, \mathcal{N})$ e a base do espaço de vizinhanças estáveis ($\mathbb{S}$,$\mathbf{SN}(\mathbb{S})$ coincidem. A definição de base para cada um destes espaços garante que $(\mathbb{S},\mathcal{N})$ e ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$) sejam estruturas distintas. Veja as definições 13.7.2 e 14.1.2.

14.2.17 Corolário

O conjunto $\{\text{int}(\uparrow k) | k \in K, K \subseteq \mathbb{S}^0\}$ é uma base para a topologia $\mathcal{O}(\mathbb{S})$ associada ao espaço de vizinhanças de informação estável ($\mathbb{S},\mathcal{N}$), onde ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)) é um espaço de vizinhanças estáveis com base $\{\uparrow k | k \in K, K \subseteq \mathbb{S}^0\}$. ♦

No sentido de caracterizar o subespaço dos objetos quasi-totais e totais, estuda-se as vizinhanças estáveis relativas. Seja $X \subseteq \mathbb{S}$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{S}$.

14.2.18 Definição. Vizinhança Estável Relativa

Diz-se que um subconjunto $U_X \subseteq X$ é uma vizinhança estável em X se $U_X = X \cap U$, para $U \in$**SN**($\mathbb{S}$). ♦

14.2.19 Proposição

A estrutura (X,**SN**(X)), onde **SN**(X)) é o conjunto das vizinhanças estáveis relativas a X é um subespaço do espaço de vizinhanças estáveis ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)).
prova:

Segue da proposição 14.1.6 e da definição 14.1.7. ♦

14.2.20 Proposição

Seja (X,**SN**(X)) um subespaço do espaço de vizinhanças estáveis ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)). O conjunto $\{\uparrow k_X | k \in K, K \subseteq \mathbb{S}^0\}$ é uma base para **SN**(X)), onde $\uparrow k_X$ é uma vizinhança estável relativa a X.
prova:

Segue do corolário 14.2.16. ♦

14.2.21 Proposição

Seja (X,**SN**(X)) um subespaço do espaço de vizinhanças estáveis ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)). O conjunto $\{\text{int}(\uparrow k_X) | k \in K, K \subseteq \mathbb{S}^0\}$ é uma base para a topologia $\mathcal{O}(X)$ associada, onde $\uparrow k_X$ é uma vizinhança estável relativa a X.
prova:

Segue do corolário 14.2.17. ♦

14.3 A Estabilidade no Espaço de Vizinhanças Estáveis

O objetivo desta seção é introduzir o conceito de função *sn*-estável em Espaços de Vizinhanças Estáveis e mostrar que ele coincide exatamente com a definição de função estável em Espaços Coerentes. Sejam ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)) e ($\mathbb{S}$',**SN**($\mathbb{S}$')) espaços de vizinhanças estáveis.

14.3.1 Proposição

Uma função $f:\mathbb{S}\to\mathbb{S}'$ é sn-continua se qualquer uma das seguintes condições é satisfeita:

(i) $f^{-1}[U]\in$**SN**($\mathbb{S}$), para todo $U\in$**SN**($\mathbb{S}$');

(ii) $f^{-1}[\mathrm{int}(U)]\subseteq\mathrm{int}(f^{-1}[U])$, para todo $U\in$**SN**($\mathbb{S}$').

prova:

Segue da definição 13.5.2. ♦

Suponha agora que $f:\mathbb{S}\to\mathbb{S}'$ é estável. Para toda função $g:\mathbb{S}'\to O$ existe uma única função estável $h:\mathbb{S}\to O$ que faz o diagrama da figura 14.1 comutar.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \mathbb{S}' \arrow[d, "g"] \\
 & O
\end{tikzcd}$$

FIGURA 14.1 - Diagrama Comutativo

Isto implica que para toda $g:\mathbb{S}'\to O$, $(f^{-1}\circ g^{-1})(\mathrm{T})=h^{-1}(T)\in$**SN**($\mathbb{S}$), ou, para toda $U\in$**SN**($\mathbb{S}$'), $f^{-1}[U]\in$**SN**($\mathbb{S}$), pela proposição 14.2.14. Em geral, diz-se que:

14.3.2 Definição. Função sn-Estável

Diz-se que uma função $f:\mathbb{S}\to\mathbb{S}'$ é sn-estável se e somente se para todo $U\in$**SN**($\mathbb{S}$'), tem-se que $f^{-1}[U]\in$**SN**($\mathbb{S}$). ♦

A definição 14.3.2 diz que se $f:\mathbb{S}\to\mathbb{S}'$ é uma função sn-estável nos espaços de vizinhanças estáveis ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)) e ($\mathbb{S}$',**SN**($\mathbb{S}$')), então a imagem inversa de uma vizinhança estável em $\mathbb{S}$' é uma vizinhança estável em $\mathbb{S}$, isto é, a toda propriedade de $f(x)\in\mathbb{S}$' corresponde uma propriedade de $x\in\mathbb{S}$.

14.3.3 Teorema

Uma função $f:\mathbb{S}\to\mathbb{S}'$ é estável na categoria dos Espaços Coerentes se e somente se é sn-estável nos espaços de vizinhanças correspondentes. ♦

prova:

Suponha que f é estável e seja $U \in \mathbf{SN}(\mathbb{S}')$. Observe que se U é um aberto Scott em $\mathbb{S}'$, então $f^{-1}[U]$ também é um aberto Scott em $\mathbb{S}$, pois f é contínua (top-contínua [ACI 91]) na topologia de Scott. Agora, para todo $x, y \in \mathbb{S}$ e $U \in \mathbf{SN}(\mathbb{S}')$, com $f(x), f(y) \in U$, tal que $f(x) \cup f(y) \in \mathbb{S}'$ então $f(x) \cap f(y) \in U$. Como f é contínua e estável, então $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y) \in U$ e $f(x \cap y) = f(x) \cap f(y) \in U$. Tem-se que $\{x \cap y, x, y, x \cup y\} \subseteq f^{-1}[U]$. Como x,y são elementos arbitrários de $\mathbb{S}$, então conclui-se que $f^{-1}[U] \in \mathbf{SN}(\mathbb{S})$. Isto significa que f é *sn*-estável.

Por outro lado, suponha que f é *sn*-estável. Então, para todo $U \in \mathbf{SN}(\mathbb{S}')$, tem-se que $f^{-1}[U] \in \mathbf{SN}(\mathbb{S})$. Como U e $f^{-1}[U]$ são abertos Scott (top-continuidade), conclui-se que f é contínua (top-contínua) na topologia de Scott, e, portanto, contínua (sup-contínua) em Espaços Coerentes. Mostra-se agora que f satisfaz a condição de estabilidade. Considere então $U \in \mathbf{SN}(\mathbb{S}')$, tal que $f^{-1}[U] \in \mathbf{SN}(\mathbb{S})$ seja uma vizinhança estável contendo $x, y \in \mathbb{S}$. Suponha que f não satisfaz a condição de estabilidade, isto é, sempre que $x \cup y \in \mathbb{S}$ tem-se que $f(x \cap y) \neq f(x) \cap f(y)$. Observe que $\{x \cap y, x, y, x \cup y\} \subseteq f^{-1}[U]$. Isto significa que $\{f(x \cap y), f(x), f(y), f(x \cup y)\} \subseteq U$, mas $f(x) \cap f(y) \notin U$. Entretanto, isto é uma contradição, pois como f é contínua segundo Scott, tem-se que $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y) \in U$, e, de $U \in \mathbf{SN}(\mathbb{S}')$, segue que necessariamente $f(x) \cap f(y) \in U$. Conclui-se então que f é estável. ♦

14.3.4 Teorema

Sejam $f, g: \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ funções estáveis. Então é válido que $f \leq_B g$ se e somente se para todo $U \in \mathbf{SN}(\mathbb{S}')$, $f^{-1}[U] \sqsubseteq_\mu g^{-1}[U]$.
prova:

Suponha que para todo $U \in \mathbf{SN}(\mathbb{S}')$, $f^{-1}[U] \sqsubseteq_\mu g^{-1}[U]$. Para todo $x \in \mathbb{S}$ e $d \subseteq f(x)$ em $\mathbb{S}'^0$, tem-se que $\uparrow d \in \mathbf{SN}(\mathbb{S}')$ e $f^{-1}[\uparrow d] \subseteq g^{-1}[\uparrow d]$, pela proposição 14.2.13 (i). Portanto, é válido que $d \subseteq g(x)$. Conclui-se que $f(x) \subseteq g(x)$. Sejam $x, y \in \mathbb{S}$, com $x \subseteq y$. Então, como f é monótona, tem-se que $f(x) \subseteq f(y)$, e, portanto, $f(x) \subseteq f(y) \cap g(x)$. Considere agora $d' \in \mathbb{S}'^0$ e $y_0 \in \mu f^{-1}[\uparrow d']$, com $y_0 \subseteq y$. Por hipótese, tem-se que $y_0 \in \mu g^{-1}[\uparrow d']$. Segue que

$$\begin{aligned} d' \subseteq f(y) \cap g(x) &\Rightarrow x \in g^{-1}[\uparrow d'] \wedge y \in f^{-1}[\uparrow d'] \\ &\Rightarrow (y_0 \cup x) \in \mathbb{S} \wedge (y_0 \cap x) \in g^{-1}[\uparrow d'] \\ &\Rightarrow y_0 \cap x = y_0 \\ &\Rightarrow y_0 \subseteq x \\ &\Rightarrow d' \subseteq f(y_0) \subseteq f(x). \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que $f(y) \cap g(x) \subseteq f(x)$. Logo, é válido que $f \leq_B g$.

Observe agora que a proposição 14.2.14 implica a condição necessária do teorema. Suponha que $f \leq_B g$. Então, para todo $x, y \in \mathbb{S}$, sempre que $x \subseteq y$, então $f(x) = f(y) \cap g(x)$. Sejam $d' \in \mathbb{S}'^0$ e $y_0 \in \mu f^{-1}[\uparrow d']$, com $y_0 \subseteq y$. Então é válido que $f(y_0) = f(y) \cap g(y_0)$. Isto significa que $y \in f^{-1}[\uparrow d']$ e $y_0 \in g^{-1}[\uparrow d']$. Suponha agora que existe $m \in g^{-1}[\uparrow d']$ tal que $m \subseteq y_0$ e $m \neq y_0$. Segue que $f(m) = f(y_0) \cap g(m)$. Logo, tem-se que $m \in f^{-1}[\uparrow d']$ e $f(m) \subseteq f(y_0)$. Logo, somente pode ser $m \subset y_0$, o que é uma contradição, pois $y_0 \in \mu f^{-1}[\uparrow d']$. Conclui-se então que $m = y_0$ e, portanto, $y_0 \in \mu g^{-1}[\uparrow d']$, o que significa que $\mu f^{-1}[\uparrow d'] \subseteq \mu g^{-1}[\uparrow d']$. Logo, para todo $U \in$ **SN**($\mathbb{S}$'), tem-se que $f^{-1}[U] \sqsubseteq_\mu g^{-1}[U]$. ♦

Observa-se que se $f \leq_B g$ e $x \in \mu g^{-1}[A]$, onde A é uma vizinhança estável e $x \in f^{-1}[A]$, então sempre ocorre que $x \in \mu f^{-1}[A]$.

14.3.5 Proposição

Sejam ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)), ($\mathbb{S}$',**SN**($\mathbb{S}$')) e ($\mathbb{S}$'',**SN**($\mathbb{S}$'')) espaços de vizinhanças estáveis com $f: \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ e $g: \mathbb{S}' \to \mathbb{S}''$ funções *sn*-estáveis. Tem-se que $g \circ f: \mathbb{S} \to \mathbb{S}''$ também é *sn*-estável.

prova:

Seja $U \in$ **SN**($\mathbb{S}$''). Então $g^{-1}[U] \in$ **SN**($\mathbb{S}$') e $f^{-1}[g^{-1}[U]] \in$ **SN**($\mathbb{S}$), pela definição 14.3.2. Como $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$, segue que $g \circ f$ é *sn*-estável. ♦

14.3.6 Proposição

Sejam ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)), ($\mathbb{S}$',**SN**($\mathbb{S}$')), ($\mathbb{S}$'',**SN**($\mathbb{S}$'')) e ($\mathbb{S}$''',**SN**($\mathbb{S}$''')) espaços de vizinhanças estáveis com $f: \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ uma função *sn*-estável. Segue que:

(i) se ($\mathbb{S}$',**SN**($\mathbb{S}$')) é um subespaço disjuntivo de ($\mathbb{S}$'',**SN**($\mathbb{S}$'')), então $f: \mathbb{S} \to \mathbb{S}''$ é *sn*-estável;

(ii) se ($\mathbb{S}$''',**SN**($\mathbb{S}$''')) é um subespaço disjuntivo de ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)), então $f_{|\mathbb{S}'''}: \mathbb{S}''' \to \mathbb{S}'$ é *sn*-estável.

prova:

Prova-se (i). Se $U \in$ **SN**($\mathbb{S}$''), então tem-se que $(U \cap \mathbb{S}') \in$ **SN**($\mathbb{S}$'), e, portanto, $f^{-1}[U \cap \mathbb{S}'] \in$ **SN**($\mathbb{S}$). Entretanto, é válido que $f(x) \in \mathbb{S}$', para todo $x \in \mathbb{S}$, e, portanto, $f^{-1}[U] = f^{-1}[U \cap \mathbb{S}'] \in$ **SN**($\mathbb{S}$). Logo $f: \mathbb{S} \to \mathbb{S}''$ é *sn*-estável.

Para provar (ii), observe que é imediato que a função inclusão $i: \mathbb{S}''' \to \mathbb{S}$ tal que $i(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{S}$''', é *sn*-estável. Além disso, tem-se que $f_{|\mathbb{S}'''} : f \circ i$. Pela proposição 14.3.5, segue que $f: \mathbb{S} \to \mathbb{S}''$ é *sn*-estável. ♦

14.3.7 Definição. *Sn*-Homeomorfismo

Diz-se que uma função bijetiva $f:\mathbb{S}\to\mathbb{S}'$ é um *sn*-homeomorfismo se f e f^{-1} são *sn*-estáveis. Neste caso, os espaços ($\mathbb{S}$,**SN**($\mathbb{S}$)) e ($\mathbb{S}$',**SN**($\mathbb{S}$')) são denominados de *sn*-homeomorfos. ♦

14.3.8 Proposição

Sejam $\mathcal{B}$ uma base para **SN**($\mathbb{S}$) e $f:\mathbb{S}\to\mathbb{S}'$ uma função bijetiva. Tem-se que f é um *sn*-homeomorfismo se e somente se $\{f[B] | B\in\mathcal{B}\}$ é uma base para **SN**($\mathbb{S}$').

prova:

Considere f um *sn*-homeomorfismo e suponha que $\mathcal{B}$ é uma base para **SN**($\mathbb{S}$). Então tem-se que f e f^{-1} são *sn*-estáveis. Seja $U\in$**SN**($\mathbb{S}$'). Segue que $f^{-1}[U]\in$**SN**($\mathbb{S}$). Como $\mathcal{B}$ é uma base para **SN**($\mathbb{S}$), tem-se que $f^{-1}[U]$ é uma união disjunta de elementos de $\mathcal{B}$, isto é, $f^{-1}[U] = \bigcup\{B_i'\in\mathcal{B} | B_i\cap B_j=\varnothing, \forall i\neq j\in I\}$. Logo, segue que

$$\begin{aligned} f\left[f^{-1}[U]\right] &= U \\ &= f\left[\bigcup\{B_i'\in\mathcal{B} | B_i\cap B_j=\varnothing, \forall i\neq j\in I\}\right] \\ &= \bigcup\left\{f[B_i']\in f[\mathcal{B}] | f[B_i]\cap f[B_j]=\varnothing, \forall i\neq j\in I\right\}, \end{aligned}$$

pela bijetividade e estabilidade de f. Isto significa que U é uma união disjunta de elementos de $f[\mathcal{B}]$. Conclui-se que $f[\mathcal{B}]$ é uma base para **SN**($\mathbb{S}$').

Por outro lado, supondo que $f[\mathcal{B}]$ é uma base para **SN**($\mathbb{S}$'), se $U\in$**SN**($\mathbb{S}$') então tem-se que $U=\bigcup\left\{f[B_i']\in f[\mathcal{B}] | f[B_i]\cap f[B_j]=\varnothing, \forall i\neq j\in I\right\}$, e, portanto,

$$\begin{aligned} f^{-1}[U] &= f^{-1}\left[\bigcup\left\{f[B_i']\in f[\mathcal{B}] | f[B_i]\cap f[B_j]=\varnothing, \forall i\neq j\in I\right\}\right] \\ &= \bigcup\left\{f^{-1}\left[f[B_i']\right]\in f^{-1}\left[f[\mathcal{B}]\right] | f^{-1}\left[f[B_i]\right]\cap f^{-1}\left[f[B_j]\right]=\varnothing, \forall i\neq j\in I\right\} \\ &= \bigcup\{B_i'\in\mathcal{B} | B_i\cap B_j=\varnothing, \forall i\neq j\in I\}, \end{aligned}$$

que é uma vizinhança estável de **SN**($\mathbb{S}$). Conclui-se que f é *sn*-estável.

Agora, se $V\in$**SN**($\mathbb{S}$), então tem-se que $V=\bigcup\{B_i'\in\mathcal{B} | B_i\cap B_j=\varnothing, \forall i\neq j\in I\}$. Segue que

$$\begin{aligned} f[V] &= f\left[\bigcup\{B_i'\in\mathcal{B} | B_i\cap B_j=\varnothing, \forall i\neq j\in I\}\right] \\ &= \bigcup\left\{f[B_i']\in f[\mathcal{B}] | f[B_i]\cap f[B_j]=\varnothing, \forall i\neq j\in I\right\}\in\mathbf{SN}(\mathbb{S}'), \end{aligned}$$

pois $f[\mathcal{B}]$ é uma base para **SN**($\mathbb{S}$'). Entretanto, como f é bijetiva, tem-se que $f=\left(f^{-1}\right)^{-1}$. Portanto, é válido que $\left(f^{-1}\right)^{-1}[V]\in$**SN**($\mathbb{S}$') se $V\in$**SN**($\mathbb{S}$). Conclui-se que f^{-1} é *sn*-estável. ♦

Diz-se que dois espaços de vizinhanças estáveis *sn*-homeomorfos são indistingüíveis sob o ponto da estabilidade, isto é, a relação "$\mathbb{S}$ é *sn*-homeomorfo a $\mathbb{S}$'" é uma relação de equivalência na classe de todos os espaços disjuntivos.

14.4 Espaços de Vizinhanças Lineares

No sentido de capturar topologicamente a noção de linearidade em espaços coerentes, introduz-se, nesta seção, uma classe de conjuntos, denominados de vizinhanças lineares, que caracterizam as funções lineares no seguinte sentido:
(i) uma função é linear se e somente se a imagem inversa de uma vizinhança linear é também uma vizinhança linear;
(ii) se f e g são funções lineares, então $f \leq_B g$ se e somente se $f^{-1}(O) \sqsubseteq_\mu g^{-1}(O)$, para toda vizinhança linear O, onde $\leq_B$ é ordem de Berry ou ordem estável e $\sqsubseteq_\mu$ é definida em 14.2.12.

Sejam $(\Lambda_{\mathbb{S}}, \Sigma_{\mathbb{S}}^{in}, \Sigma_{\mathbb{S}}^{ap})$, com $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, um espaço coerente bi-estruturado, com estrutura de informação $\Sigma_{\mathbb{S}}^{in}$ e estrutura de aplicação $\Sigma_{\mathbb{S}}^{ap}$, e $(\mathbb{S},\mathcal{N})$ um espaço de vizinhanças generalizadas definido sobre $\mathbb{S}$. Então:

14.4.1 Definição. Vizinhança Linear, Espaço de Vizinhanças Lineares

Diz-se que $U \subseteq \mathbb{S}$ é uma vizinhança linear em $\mathbb{S}$ se
(i) U é uma vizinhança estável, e
(ii) para todo $X \subseteq \mathbb{S}$, $X \neq \varnothing$, sempre que, para todo $a,b \in X$, ocorre que $a \cup b \in U$, então $\bigcup X \in U$.

O conjunto das vizinhanças lineares em $\mathbb{S}$ é denotado por **LN**($\mathbb{S}$). ($\mathbb{S}$,**LN**($\mathbb{S}$)) é denominado de espaço de vizinhanças lineares em $\mathbb{S}$. ♦

Observe que **LN**($\mathbb{S}$) $\subseteq$ **SN**($\mathbb{S}$).

14.4.2 Proposição

($\mathbb{S}$,**LN**($\mathbb{S}$)) é um espaço disjuntivo definido sobre $\mathbb{S}$.
prova:

Mostra-se que **LN**($\mathbb{S}$) satisfaz as condições da definição 14.1.1.

De fato, para provar (i), considere $U,V \in$ **LN**($\mathbb{S}$). Seja $x \in (U \cap V)$ e $x \subseteq y$. Então tem-se que $x \in U$ e $x \in V$. Logo, segue que $y \in U$ e $y \in V$, pois $U,V \in$ **LN**($\mathbb{S}$). Assim, conclui-se que $y \in (U \cap V)$. Por outro lado, considere o subconjunto dirigido $X \subseteq \mathbb{S}$ tal que $\bigcup X \in U,V$. Tem-se que $\bigcup X \in U \cap V$, $X \cap U \neq \varnothing$ e $X \cap V \neq \varnothing$, e, portanto, $X \cap (U \cap V) \neq \varnothing$. Conclui-se que $U \cap V$ é aberto Scott.

Agora, sejam $x,y \in (U \cap V)$, tais que $x \cup y \in \mathbb{S}$. Então, tem-se que $x,y \in U$, $x,y \in V$. Como $U,V \in$ **LN**($\mathbb{S}$), conclui-se que $x \cap y \in U$ e $x \cap y \in V$. Segue que $x \cap y \in (U \cap V)$. Conclui-se que $U \cap V$ é vizinhança estável.

14.4.3 Definição. Espaço de Vizinhanças Lineares mais Grosseiro que um Espaço de Vizinhanças Generalizado.

Diz-se que **LN**($\mathbb{S}$) é mais grosseiro que $\mathcal{N}$, ou $\mathcal{N}$ é mais fino que **LN**($\mathbb{S}$), se cada vizinhança linear de **LN**($\mathbb{S}$) é uma $\mathcal{N}$- vizinhança que satisfaz as condições da definição 14.4.1. ♦

14.4.4 Definição. Espaço de Vizinhanças de Informação Linear

Diz-se que o espaço de vizinhanças generalizado ($\mathbb{S}$,$\mathcal{N}$) é um espaço de vizinhanças de informação linear definido sobre $\Sigma_{\mathbb{S}}^{in}$ se é o mais grosseiro espaço vizinhanças que é mais fino que o espaços de vizinhanças lineares ($\mathbb{S}$,**LN**($\mathbb{S}$)). ♦

Definições e proposições análogas às que foram introduzidas na seção 14.2 para vizinhanças estáveis podem ser enunciadas também para vizinhanças lineares. Entretanto, somente mencionam-se aquelas que apresentam modificações fundamentais.

14.4.5 Definição. Vizinhança Linear Principal

P é uma vizinhança linear principal de **LN**($\mathbb{S}$) se existe um elemento unitário d em $\mathbb{S}_{uni}$ tal que $P = \uparrow d$, onde $\uparrow d = \{x \in \mathbb{S} | d \subseteq x\}$. ♦

Segue que:

14.4.6 Proposição

Todo ponto minimal de uma vizinhança linear principal U é um elemento unitário, isto é, $\mu U \subseteq \mathbb{S}_{uni}$. ♦

14.4.7 Proposição

Para todo $U \in$**LN**($\mathbb{S}$), existe $K \subseteq \mathbb{S}_{uni}$, um conjunto onde os elementos são incompatível dois a dois, tal que $U = \bigcup\{\uparrow k | k \in K\}$, onde $\mathbb{S}_{uni}$ é o conjunto dos elementos unitários de $\mathbb{S}$.
prova:

Seja $x \in U$. Então existe $k \in \mu U$ tem-se que $x \in \uparrow k$. Pela proposição 14.4.5, tem-se que $k \in \mathbb{S}_{uni}$. Logo existe $K \subseteq \mathbb{S}_{uni}$ tal que $x \in \bigcup\{\uparrow k | k \in K\}$. Por outro lado, seja $x \in \bigcup\{\uparrow k | k \in K\}$, com $K \subseteq \mathbb{S}_{uni}$. Então existe $k \in K$ tal que $x \in \uparrow k$. Pela definição 14.4.1, $\uparrow k = U \in$**LN**($\mathbb{S}$). Conclui-se que $U = \bigcup\{\uparrow k | k \in K\}$. ♦

14.4.8 Corolário

Para todo $U \in$**LN**($\mathbb{S}$), existe $K \subseteq \mathbb{S}_{uni}$ tal que U é dada pela união disjunta de elementos de K, isto é, $U = \dot{\bigcup_{k \in K}} \uparrow k$, onde $\mathbb{S}_{uni}$ é o conjunto dos elementos unitários de $\mathbb{S}$.
O conjunto $\{\uparrow k | k \in K\}$ é uma base para o espaço de vizinhanças lineares ($\mathbb{S}$,**LN**($\mathbb{S}$)). ♦

Observe que se $(\Lambda_{\mathbb{S}}, \Sigma_{\mathbb{S}}^{in}, \Sigma_{\mathbb{S}}^{ap})$, com $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, é um espaço coerente bi-estruturado com estrutura de informação $\Sigma_{\mathbb{S}}^{in}$ e estrutura de aplicação $\Sigma_{\mathbb{S}}^{ap}$, então a base do EVG de informação linear ($\mathbb{S}$,$\mathcal{N}$) e a base do espaço de vizinhanças lineares ($\mathbb{S}$,**LN**($\mathbb{S}$)) coincidem. A definição de base para cada um destes espaços garante que ($\mathbb{S}$,$\mathcal{N}$) e ($\mathbb{S}$,**LN**($\mathbb{S}$)) sejam estruturas distintas.

14.4.9 Corolário

O conjunto $\{int(\uparrow k) | k \in K, K \subseteq \mathbb{S}_{uni}\}$ é uma base para a topologia $\mathcal{O}(\mathbb{S})$ associada ao espaço de vizinhanças de informação linear ($\mathbb{S}$,$\mathcal{N}(\mathbb{S})$), onde ($\mathbb{S}$,**LN**($\mathbb{S}$)) é um espaço de vizinhanças lineares com base $\{\uparrow k | k \in K, K \subseteq \mathbb{S}_{uni}\}$. ♦

No sentido de caracterizar o subespaço dos objetos quasi-totais e totais, estuda-se as vizinhanças lineares relativas. Seja $X \subseteq \mathbb{S}$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{S}$. A noção de subespaço de vizinhanças lineares é análoga ao introduzido em 14.2.18 e 14.2.19 para vizinhanças estáveis. Assim, diz-se que um subconjunto $U_X \subseteq X$ é uma vizinhança linear em X se $U_X = X \cap U$, para $U \in$**LN**($\mathbb{S}$). A estrutura (X,**LN**(X)), onde **LN**(X)) é o conjunto das vizinhanças lineares relativas a X é um subespaço do espaço de vizinhanças lineares ($\mathbb{S}$,**LN**($\mathbb{S}$)). Segue que:

14.4.10 Proposição

Seja (X,**LN**(X)) um subespaço do espaço de vizinhanças lineares ($\mathbb{S}$,**LN**($\mathbb{S}$)). O conjunto $\{\uparrow k_X | k \in K, K \subseteq \mathbb{S}_{uni}\}$ é uma base para **LN**(X)), onde $\uparrow k_X$ é uma vizinhança linear relativa a X.
prova:

Segue do corolário 14.2.16. ♦

14.4.11 Proposição

Seja (X,**LN**(X)) um subespaço do espaço de vizinhanças lineares ($\mathbb{S}$,**LN**($\mathbb{S}$)). O conjunto $\{int(\uparrow k_X) | k \in K, K \subseteq \mathbb{S}_{uni}\}$ é uma base para a topologia $\mathcal{O}(X)$ associada, onde $\uparrow k_X$ é uma vizinhança linear relativa a X.
prova:

Segue do corolário 14.2.17. ♦

14.5 A Linearidade no Espaço de Vizinhanças Lineares

O objetivo desta seção é introduzir o conceito de função ln-linear em espaços de vizinhanças lineares e mostrar que ele coincide exatamente com a definição de função linear em Espaços Coerentes. Sejam ($\mathbb{S}$,**LN**($\mathbb{S}$)) e ($\mathbb{S}'$,**LN**($\mathbb{S}'$)) espaços de vizinhanças lineares.

14.5.1 Proposição

Uma função $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ é *ln*-contínua se e somente se qualquer uma das seguintes condições é satisfeita:
(i) $f^{-1}[U] \in$ **LN**($\mathbb{S}$), para todo $U \in$**LN**($\mathbb{S}$');
(ii) $f^{-1}[\mathrm{int}(U)] \subseteq \mathrm{int}(f^{-1}[U])$, para todo $U \in$**LN**($\mathbb{S}$').
prova:

Segue da proposição 14.3.1. ♦

14.5.2 Definição. Função *ln*-Estável

Diz-se que uma função $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ é *ln*-estável se e somente se é *sn*-estável. ♦

14.5.3 Definição. Função *ln*-Linear

Diz-se que uma função $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ é *ln*-linear se e somente se para todo $U \in$**LN**($\mathbb{S}$'), tem-se que $f^{-1}[U] \in$**LN**($\mathbb{S}$). ♦

A definição 14.5.3 diz que se $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ é uma função *ln*-linear nos espaços de vizinhanças lineares ($\mathbb{S}$,**LN**($\mathbb{S}$)) e ($\mathbb{S}$',**LN**($\mathbb{S}$')), então a imagem inversa de uma vizinhança linear em $\mathbb{S}$' é uma vizinhança linear em $\mathbb{S}$, isto é, a toda propriedade de $f(x) \in \mathbb{S}$' corresponde uma propriedade de $x \in \mathbb{S}$.

14.5.4 Teorema

Uma função $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ é linear na categoria dos Espaços Coerentes se e somente se é *ln*-linear nos espaços de vizinhanças lineares correspondentes.
prova:

Suponha que f é linear e seja $U \in$**LN**($\mathbb{S}$'). Observe que se U é um aberto Scott em $\mathbb{S}$', então $f^{-1}[U]$ também é um aberto Scott em $\mathbb{S}$, pois f é contínua (top-contínua [ACI 91]) na topologia de Scott. Além disso, U é uma vizinhança estável em $\mathbb{S}$', e, portanto, $f^{-1}[U]$ também é uma vizinhança estável em $\mathbb{S}$, pois f é estável (*sn*-estável). Seja agora um subconjunto $X \subseteq \mathbb{S}$ tal que para todo $a,b \in X$ ocorre que $a \cup b \in f^{-1}[U]$. Observe que para todo $f(a), f(b) \in f[X] \subseteq \mathbb{S}$' tem-se que $f(a \cup b) \in U$. Pela continuidade de f, segue que $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b) \in U$, para todo $f(a), f(b) \in f[X]$. Como $U \in$**LN**($\mathbb{S}$'), segue que $\bigcup f[X] \in U$. Pela linearidade de f, tem-se que $f(\bigcup X) = \bigcup f[X] \in U$. Conclui-se então que $\bigcup X \in f^{-1}[U]$, ou seja, $f^{-1}[U] \in$**LN**($\mathbb{S}$). Logo f é *ln*- linear.

Por outro lado, suponha que f é *ln*-linear. Então, para todo $U \in$**LN**($\mathbb{S}$'), tem-se que $f^{-1}[U] \in$**LN**($\mathbb{S}$). Como U e $f^{-1}[U]$ são vizinhanças estáveis (*sn*-estabilidade), conclui-se que f é *sn*-estável (*ln*-estável) em **LN**($\mathbb{S}$), e, portanto, estável em Espaços Coerentes. Mostra-se agora que f satisfaz a condição de linearidade.

Suponha que f não satisfaz a condição de linearidade e seja $X \subseteq \mathbb{S}$ um subconjunto tal que para todo $a,b \in X$ ocorre que $a \cup b \in f^{-1}[U]$. Isto significa que $\bigcup X \in f^{-1}[U]$. Agora observe que para todo $f(a), f(b) \in f[X] \subseteq \mathbb{S}'$ tem-se que $f(a \cup b) \in U$. Pela continuidade de f, segue que $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b) \in U$, para todo $f(a), f(b) \in f[X]$. Também é possível dizer que $f(\bigcup X) \in U$. Agora, como f não é linear, tem-se que $f(\bigcup X) \neq \bigcup f[X]$ e, portanto, $\bigcup f[X] \notin U$. Isto é uma contradição, pois, se $U \in$**LN**($\mathbb{S}'$), então necessariamente tem-se que $\bigcup f[X] \in U$. Logo f é linear. ♦

14.5.5 Teorema

Sejam $f, g: \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ funções lineares. Então é válido que $f \leq_B g$ se e somente se para todo $U \in$**LN**($\mathbb{S}'$), $f^{-1}[U] \sqsubseteq_\mu g^{-1}[U]$.
prova:

É análoga a do teorema 14.3.4. ♦

14.5.6 Definição. *Ln*-Homeomorfismo

Diz-se que uma função bijetiva $f: \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ é um *ln*-homeomorfismo se f e f^{-1} são *ln*-lineares. Neste caso, os espaços ($\mathbb{S}$,**SL**($\mathbb{S}$)) e ($\mathbb{S}'$,**SL**($\mathbb{S}'$)) são denominados de *ln*-homeomorfos. ♦

14.5.7 Proposição

Sejam $\mathcal{B}$ uma base para **LN**($\mathbb{S}$) e $f: \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ uma função bijetiva. Tem-se que f é um *ln*-homeomorfismo se e somente se $\{f[B] \| B \in \mathcal{B}\}$ é uma base para **LN**($\mathbb{S}'$).
prova:

É análoga a da proposição 14.5.7. ♦

Diz-se que dois espaços de vizinhanças lineares *ln*-homeomorfos são indistingüíveis sob o ponto da linearidade, isto é, a relação "$\mathbb{S}$ é *ln*-homeomorfo a $\mathbb{S}'$" é uma relação de equivalência na classe de todos os espaços disjuntivos.

15 Vizinhanças em Espaços de Funções e em Outras Construções

Nesta capítulo serão estudadas as vizinhanças estáveis introduzidas por Zhang [ZHA 89] [ZHA 92], relativamente a espaços de funções estáveis e outras construções com espaços coerentes. Com base nestas noções, são introduzidas vizinhanças lineares em espaços de funções lineares.

Suponha que x é um estado de computação de tipo D, com propriedade A, denotado por $x \models A$, e y é um estado de computação de tipo E, com propriedade B, denotado por $y \models B$.

Combinando-se os estados de computações $x \in D$ e $y \in E$ para obter um estado de computação $(x\ op\ y) \in [D\ op\ E]$, onde op é alguma construção com espaços coerentes (veja seção 3.6) como a soma, o produto direto, o espaço das funções estáveis ou o espaço das funções lineares, deseja-se deduzir alguma propriedade de $(x\ op\ y)$ a partir dos fatos conhecidos $x \models A$ e $y \models B$. Isto resulta em construções $(A\ op\ B)$ sobre as propriedades A e B, de tal forma que de $x \models A$ e $y \models B$ pode-se deduzir $(x\ op\ y) \models (A\ op\ B)$.

Pode haver diferentes formas de combinar uma vizinhança estável (linear) A de D com uma vizinhança estável (linear) B de E para obter uma vizinhança estável (linear) $(A\ op\ B)$ de $[D\ op\ E]$.

É importante salientar [ZHA 91] que as construções com vizinhanças estáveis devem garantir que:
(i) combinando-se uma vizinhança estável $A \in \mathbf{SN}(D)$ com uma vizinhança estável $B \in \mathbf{SN}(E)$ deve-se obter uma vizinhança estável $(A\ op\ B) \in \mathbf{SN}([D\ op\ E])$;
(ii) vizinhanças estáveis da forma $(A\ op\ B)$ devem formar uma sub-base do espaço de vizinhanças estáveis $([D\ op\ E],\mathbf{SN}([D\ op\ E]))$; através da interseção finita de vizinhanças estáveis da forma $(A\ op\ B)$ deve ser possível obter todas as vizinhanças estáveis principais (primas) de $[D\ op\ E]$;
(iii) se $(D,\mathbf{SN}(D))$ e $(E,\mathbf{SN}(E))$ são espaços sóbrio, então $([D\ op\ E],\mathbf{SN}([D\ op\ E]))$ também é sóbrio.

Da mesma forma, as construções com vizinhanças lineares devem satisfazer requisitos análogos aos que são exigidos para as construções de vizinhanças estáveis no parágrafo anterior.

Observe que a condição (i) requer que $(A\ op\ B)$ seja bem definida, enquanto que a condição (ii) estabelece que vizinhanças estáveis (lineares) da forma $(A\ op\ B)$ são suficientemente expressivas, isto é, é possível obter todas as vizinhanças estáveis (lineares) compactas pela utilização da interseção e união finita. A condição (iii) garante que seja possível reconstruir os pontos do espaço coerente a partir da coleção de vizinhanças estáveis (lineares).

As construções que serão apresentadas aqui possuem as propriedades (i)-(iii) citadas anteriormente. Algumas das provas são imediatas e não serão explicitadas.

15.1 Vizinhanças Estáveis em Espaços de Funções Estáveis

Suponha que D e E são espaços coerentes. De forma similar ao que existe para os domínios de Scott, pode-se obter as vizinhanças estáveis de $D+E$, $D\times E$, a partir das vizinhanças estáveis de D e E, satisfazendo as condições comentadas nos parágrafos anteriores. Mas como é possível obter as vizinhanças estáveis do espaço de funções estáveis $\left(D\xrightarrow{St}E\right)$ diretamente das vizinhanças estáveis de D e E? A solução apresentada a seguir é devida a Zhang [ZHA 89] [ZHA 92].

Observe que, para a topologia de Scott, se A e B são abertos segundo Scott de D e E, respectivamente, então $A\to B=\left\{h{:}\,D\to E|A\subseteq h^{-1}[B]\right\}$ é um conjunto aberto Scott compacto de $[D\to E]$. Existe outra forma de analisar esta questão. Como A e B são abertos Scott, existe uma correspondência entre estes conjuntos e as funções $f_A{:}\,D\to O$ e $g_B{:}\,E\to O$. A relação de inclusão entre conjuntos abertos determina a ordem pontual; então, $h\in A\to B$ se e somente se $f_A\sqsubseteq g_B\circ h$. Veja a figura 15.1.

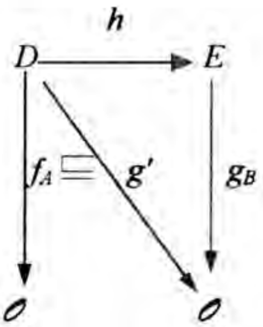


FIGURA 15.1 - Ordem pontual para funções contínuas segundo Scott

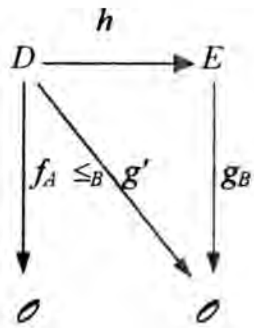


FIGURA 15.2 - Ordem de Berry para funções estáveis

Isto sugere que, para espaços coerentes, é conveniente utilizar a figura 15.2, onde a ordem é substituída pela ordem estável ou de Berry $\leq_B$. Então, pode-se definir $h\in A\to B$ para significar que $f_A\leq_B g_B\circ h$. Observe que:

15.1.1 Lema.

Tem-se que $f_A\leq_B g_B\circ h$ se e somente se $A\sqsubseteq_\mu h^{-1}[B]$

prova:

Pelo teorema 14.3.4, tem-se que $f_A\leq_B g_B\circ h$ se e somente se $f_A^{-1}[U]\sqsubseteq_\mu\left(g_B\circ h\right)^{-1}[U]$, para toda vizinhança estável U. Então é imediato que $f_A^{-1}[U]\sqsubseteq_\mu\left(h^{-1}\circ g_B^{-1}\right)[U]$, ou seja, $A\sqsubseteq_\mu h^{-1}[B]$. ♦

Sejam D,E espaços coerentes:

15.1.2 Definição. Vizinhança $A \twoheadrightarrow B$

Sejam $A \in$**KSN**(D) e $B \in$**KSN**(E). Define-se $A \twoheadrightarrow B$ como o conjunto $\{f \in (D \xrightarrow{St} E) \mid A \sqsubseteq_\mu f^{-1}[B]\}$, onde $(D \xrightarrow{St} E)$ é o espaço das funções estáveis de D em E, definido em 3.7.6. ♦

Considere um função estável f como um estado de computação de tipo $(D \xrightarrow{St} E)$ que consome informação de tipo D e produz informação de tipo E (aqui pode-se identificar computações de tipo D e E como dados de tipo D e E, respectivamente). Intuitivamente, o que significa o fato de um estado de computação em $(D \xrightarrow{St} E)$ possuir a propriedade $A \twoheadrightarrow B$, onde A é uma propriedade de tipo D e B é uma propriedade do tipo E ? As propriedades adequadas para funções estáveis são aquelas que são determinadas por um conjunto de informação mínima incompatível. É possível dizer que f possui uma propriedade $A \twoheadrightarrow B$ se f pode produzir alguma informação com propriedade B a partir de qualquer informação de entrada que tenha a propriedade A; além disso, uma informação necessária com propriedade A é também uma informação necessária para f ser capaz de produzir alguma informação com propriedade B. Pode-se também dizer que f possui a propriedade $A \twoheadrightarrow B$ se sempre que f pode produzir uma saída y (informação) com propriedade B, então sempre existe alguma informação de entrada minimal x que garante isso. Se esta informação minimal x for consistente com propriedade A, então x deve também ser uma informação minimal de propriedade A.

É necessário mostrar que a construção dada na definição 15.1.2 está de acordo com o critério (i) introduzido no início desta seção, isto é, a construção é bem definida. Para isso, introduz-se agora uma caracterização de elementos finitos no espaço das funções estáveis.

15.2 Caracterização de Elementos Finitos em $(D \xrightarrow{St} E)$

Esta seção apresenta as estruturas dos elementos primos completos nos espaços de funções estáveis, e, portanto, também as estruturas dos elementos finitos nesses espaços.

Sabe-se que para domínios de Scott D e E tem-se que o espaço funcional $D \to E$ é obtido a partir de funções step. Em outras palavras, os elementos finitos de $D \to E$ podem ser representados como funções step.

Observa-se que em um dI-domain os elementos primos completos são os elementos isolados (finitos, compactos) que possuem somente um elemento imediatamente abaixo deles pela relação de ordem de informação. Isto é demonstrado em [ZHA 96], [ZHA 92a] ou [HUT 95]. Então, o conjunto E^p dos elementos primos completos de um espaço coerente E é dado por $E^p = \{\{\alpha\} \mid \{\alpha\} \in E\}$ [ZHA 92], isto é, E^p é justamente a família E_{uni} dos conjuntos coerentes unitários de E.

Suponha que D e E são espaços coerentes. Sejam D^0 o conjunto dos elementos finitos de D, E^0 o conjunto dos elementos finitos de E e E^p o conjunto dos primos completos de E.

15.2.1 Definição. Função One-Step

Uma função one-step é definida como

$$[a,b](x)=\begin{cases} b & \text{se } a \subseteq x,\\ \perp & \text{caso contrario,}\end{cases}$$

onde $a \in D^0$, $b \in E^0$. ♦

Observe que a ordem estável é determinada pelos pontos minimais para uma função estável f assumir um determinado valor. Então seria desejável ler $[a,b]$ como uma função f para a qual "a é um ponto minimal para f assumir um valor maior ou igual que b". Isto imediatamente torna ambígua qualquer função da forma $[a,b]$, uma vez que a definição 15.2.1 especifica somente uma de tais funções.

Considere agora a seguinte definição para o traço de uma função estável, introduzido em 3.7.1:

15.2.2 Definição. Traço de uma Função Estável

Seja $f: D \to E$ uma função estável. Define-se o traço μf de uma função estável f como um conjunto de pares $(a,\beta) \in D^0 \times |E|$ tal que $(a,\beta) \in \mu f$ se

$$\beta \in f(a) \wedge \left(\forall a' \subseteq a, \beta \in f(a') \Rightarrow a = a'\right).$$ ♦

Deseja-se agora capturar a noção de elementos finitos em um espaço funcional estável.

15.2.3 Definição. Conjunto de Supremo Estável

Diz-se que um conjunto $\{(a_i,b_i) | i \in I\} \subseteq D^0 \times E^p$ admite um supremo estável se, para todo $J \subseteq_{fin} I$, as seguintes condições se verificam:

(i) $\bigcup\{a_i | i \in J\} \in D \Rightarrow \bigcup\{b_i | i \in J\} \in E$,

(ii) $a_i \cup a_j \in D \wedge \left(b_i = b_j\right) \Rightarrow \left(a_i = a_j\right)$, para todo $i,j \in J$. ♦

A primeira condição da definição 15.2.3 implica em consistência e a segunda expressa a propriedade minimal.

15.2.4 Lema

Seja $f: D \to E$ uma função estável. Então para todo $x \in D$, tem-se que $f(x) = \bigcup\left\{\{\beta\} | \exists a \subseteq x, (a,\beta) \in \mu f\right\}$.

prova:

Seja $f: D \to E$ uma função estável. Tem-se que $\beta \in f(a)$ para qualquer $(a,\beta) \in \mu f$. Portanto, se $a \subseteq x$ e $(a,\beta) \in \mu f$, então ocorre que $\beta \in f(x)$. Logo, tem-se que $\bigcup\left\{\{\beta\} | \exists a \subseteq x, (a,\beta) \in \mu f\right\} \subseteq f(x)$. Por outro lado, sabe-se que [ZHA 92a] para todo primo completo $q \in E$ tal que $q = \{\alpha\} \subseteq f(x)$, existe um elemento $b \subseteq x$ para o qual $(b,\alpha) \in \mu f$. Isto significa que $\alpha \in \bigcup\{\{\beta\} | \exists a \subseteq x, (a,\beta) \in \mu f\}$. Portanto, conclui-se que $f(x) = \bigcup\{\{\alpha\} | \alpha \in f(x)\} \subseteq \bigcup\{\{\beta\} | \exists a \subseteq x, (a,\beta) \in \mu f\}$. Assim, tem-se que $f(x) = \bigcup\{\{\beta\} | \exists a \subseteq x, (a,\beta) \in \mu f\}$. ♦

15.2.5 Lema

Sejam $f, g: D \to E$ funções estáveis. Segue que:
(i) Se $f \leq_B g$ então $\mu f \subseteq \mu g$;
(ii) $[(a,\beta),(a',\beta) \in \mu f \wedge a \cup a' \in D] \Rightarrow a = a'$.
prova:

Suponha que $f, g: D \to E$ são funções estáveis tais que $f \leq_B g$. Para todo $(a,\beta) \in \mu f$, tem-se que $\beta \in f(a) \subseteq g(a)$. Seja $b = \bigcap\{x | x \subseteq a \wedge \beta \in g(x)\}$. Aparentemente, $b \subseteq a$ e $(b,\beta) \in \mu g$. Ainda, por definição, $f \leq_B g$ implica em $f(b) = f(a) \cap g(b)$. Portanto, tem-se que $\beta \in f(b)$, pois $\beta \in f(a)$ e $\beta \in g(b)$. Deve-se ter então que $a = b$, pois $(a,\beta) \in \mu f$. Isto significa que $(a,\beta) \in \mu g$.

Suponha agora que f é estável, $a \cup a' \in D$ e $(a,\beta),(a',\beta) \in \mu f$. Segue que $\beta \in f(a), \beta \in f(a')$. Como $a \cup a' \in D$, tem-se que $\beta \in f(a) \cap f(a') = f(a \cap a')$. Então, conclui-se que $a \cap a' = a = a'$. ♦

15.2.6 Teorema

Sejam $f, g \in (D \xrightarrow{St} E)$. Tem-se que $f \leq_B g$ se e somente se $\mu f \subseteq \mu g$, onde $\leq_B$ é a ordem de Berry ou ordem estável. Para $\{(a_i, \{\beta_i\}) | i \in I\} \subseteq D^0 \times E^P$, tem-se que $\{(a_i, \beta_i) | i \in I\} = \mu f$ se e somente se $\{(a_i, \{\beta_i\}) | i \in I\}$ admite um supremo estável.
prova:

O lema 15.2.5 mostra que $f \leq_B g$ implica em $\mu f \subseteq \mu g$. Suponha, por outro lado, que $\mu f \subseteq \mu g$. Segue do lema 15.2.4 que para todo $x \in D$, $f(x) \subseteq g(x)$. Para provar que $f \leq_B g$ tem-se que mostrar que para todo $x \subseteq y \in D$, $f(x) = f(y) \cap g(x)$. Para isto, seja $p = \{\beta\} \in E^P$ e $\beta \in f(y) \cap g(x)$. Claramente, existe $a \subseteq x$ e $b \subseteq y$ tais que $(b,\beta) \in \mu f$ e $(a,\beta) \in \mu g$. Entretanto, como $\mu f \subseteq \mu g$, tem-se que $(b,\beta) \in \mu g$ e, pelo lema 15.2.5, segue que $a = b$. Isto implica em $\beta \in f(b) \subseteq f(x)$. Logo, tem-se que $f(y) \cap g(x) \subseteq f(x)$. Conclui-se que $f(x) = f(y) \cap g(x)$.

Prova-se agora a segunda parte do teorema, utilizando-se o lema 15.2.5. Suponha que $\{(a_i, \beta_i) | i \in I\} = \mu f$ para alguma função estável. É imediata a prova de que as propriedades (i) e (ii) da definição 15.2.3 se verificam. Agora seja

$\{(a_i,\{\beta_i\})|i\in I\}\subseteq D^0\times E^p$ um conjunto com as propriedades (i) e (ii). Mostra-se que a função estável f para a qual $\{(a_i,\beta_i)|i\in I\}=\mu f$ (que é única pelo lema 15.2.4) pode ser obtida como os supremos para a ordem pontual $\coprod_{i\in I}[a_i,\{\beta_i\}]$, onde

$$[a,\{\beta\}](x)=\begin{cases}\{\beta\} & \text{se } a\subseteq x,\\ \perp & \text{caso contrario,}\end{cases}$$

é a função one-step definida em 15.2.1, para $b=\{\beta\}\in E^p$. É imediato que $\coprod_{i\in I}[a_i,\{\beta_i\}]$ é contínua. Para verificar a estabilidade, sejam $x,y\in D$ tais que $x\cup y\in D$. Suponha que $\beta\in\bigcup_{i\in I}[a_i,\{\beta_i\}](x)\cap\bigcup_{i\in I}[a_i,\{\beta_i\}](y)$. Tem-se que para $i,j\in I$, $\beta\in\{\beta_i\}$, $a_i\subseteq x$, e $\beta\in\{\beta_j\}$, $a_j\subseteq y$. Logo, tem-se que $a_i=a_j$, pois $a_i\cup a_j\in D$ e $\beta=\beta_i=\beta_j$. Assim, é válido que $a_i=a_j\subseteq x\cap y$ e $\beta\in\bigcup_{i\in I}[a_i,\{\beta_i\}](x\cap y)$. Segue que $\bigcup_{i\in I}[a_i,\{\beta_i\}](x)\cap\bigcup_{i\in I}[a_i,\{\beta_i\}](y)\subseteq\bigcup_{i\in I}[a_i,\{\beta_i\}](x\cap y)$. Isto implica que $\coprod_{i\in I}[a_i,\{\beta_i\}]$ é estável. Resta mostrar que $\{(a_i,\beta_i)|i\in I\}=\mu f$, onde, para simplificação, utiliza-se a notação $\coprod_{i\in I}[a_i,\{\beta_i\}]=f$. Tem-se que $\beta_j\in\bigcup\{\{\beta_i\}|a_i\subseteq a_j\}=f(a_j)$. Sejam $y\subseteq a_j$ e $\beta_j\in f(y)$, isto é, $\beta_j\in\bigcup\{\{\beta_i\}|a_i\subseteq y\}$. Como $y\cup a_j\in D$, segue que $y=a_j$. Isto significa que $(a_j,\beta_j)\in\mu f$. Para todo $(a,\beta)\in\mu f$ tem-se que $\beta\in f(a)$. Portanto, é válido que $\beta\in\bigcup\{\{\beta_i\}|a_i\subseteq a\}$. Segue que $a_j=a$. ♦

Observa-se que as funções da forma $\coprod_{i\in I}[a_i,\{\beta_i\}]$, com I finito, representam todos os elementos isolados (finitos, compactos) no espaço de funções estáveis, onde $\{(a_i,\{\beta_i\})|i\in I\}\subseteq D^0\times E^p$ admite um supremo estável (definição 15.2.3).

15.2.7 Definição. Função Step

Seja $\coprod_{i\in I}[a_i,b_i]=_{def}\lambda x\in D.\bigcup_{i\in I}[a_i,b_i](x)$ o supremo para a ordem pontual de funções one-step. Cada conjunto $\{(a_i,b_i)|i\in I\}\subseteq D^0\times E^p$ que admite um supremo estável especifica uma função

$$\coprod_{i\in I}[a_i,b_i]=_{def}\lambda x\in D.\bigcup\{b_i|\exists i\in I,a_i\subseteq x\},$$

denominada de função step. ♦

Observe que a condição (i) da definição 15.2.3 implica em consistência e, portanto, $\coprod_{i\in I}[a_i,b_i]$ realmente define uma função. Como a condição (ii) expressa a propriedade minimal, então quando $[a_i, b_i]$ aparece como um elemento de uma função step tem-se que a_i é minimal para b_i.

Seja $\{(a_i, b_i) | i \in I\} \subseteq D^0 \times E^p$ admitindo um supremo estável. Então:

15.2.8 Proposição

Tem-se que a função step $\coprod_{i \in I} [a_i, b_i]$ é estável.

prova:

Veja prova do teorema 15.2.6. ♦

15.2.9 Proposição

Para todo $j \in I$ tem-se que $a_j \in \mu f^{-1}(\uparrow b_j)$, onde $f = \coprod_{i \in I} [a_i, b_i]$ e $\mu f^{-1}(\uparrow b_j)$ é o conjunto dos pontos minimais de $f^{-1}(\uparrow b_j)$.

prova:

Tem-se que $b_j = \{\beta_j\}$ e $\beta_j \in \bigcup \{\{\beta_i\} | a_i \subseteq a_j\} = f(a_j)$. Portanto, é válido que $a_j \in f^{-1}(\uparrow b_j)$. Seja $y \subseteq a_j$ e $\beta_j \in f(y)$, isto é, $\beta_j \in \bigcup \{\{\beta_i\} | a_i \subseteq y\}$. Como $y \cup a_j \in D$, pela definição 15.2.3, segue que $y = a_j$. Isto significa que $a_j \in \mu f^{-1}(\uparrow b_j)$. ♦

Observe que se f é uma função estável, $a \in \mu f^{-1}(\uparrow b)$ e $a' \in \mu f^{-1}(\uparrow b')$, onde $a \cup a' \in D$, então $a \cup a' \in \mu f^{-1}(\uparrow (b \cup b'))$. Para chegar a este resultado, note que $a_0 \in \mu f^{-1}(\uparrow (b \cup b'))$, onde $a_0 = \bigcap \{x | (b \cup b') \subseteq f(x)\}$, pela estabilidade de f. Claramente, é válido que $a_0 \subseteq a \cup a'$. Mas ocorre que $b \subseteq f(a_0)$ e $b' \subseteq f(a_0)$, e, portanto, $a \subseteq a_0$ e $a' \subseteq a_0$. Logo, tem-se que $a \cup a' \subseteq a_0$.

15.2.10 Proposição

Sejam $\{(a_i, b_i) | i \in I\} \subseteq D^0 \times E^p$ e $\{(a'_j, b'_j) | j \in I\} \subseteq D^0 \times E^p$ admitindo supremos estáveis. Então $\coprod_{i \in I} [a_i, b_i] \leq_B \coprod_{j \in J} [a_j, b_j] \Leftrightarrow \{(a_i, b_i) | i \in I\} \subseteq \{(a'_j, b'_j) | j \in I\}$.

prova:

Segue do teorema 15.2.6 e da proposição 15.2.8. ♦

Como a ordem de Berry ou ordem estável é mais forte que a ordem pontual, é fácil reconhecer que as funções step são elementos finitos no espaço de funções estáveis. É possível provar por exaustão que elas constituem todos os elementos finitos no espaço de funções, mostrando-se que toda a função estável é o limite de uma cadeia de funções step. Entretanto, é possível simplificar esta questão utilizando-se uma sugestão introduzida por T. Coquand [COQ 87].

15.2.11 Definição. Função Parâmetro

Seja $f \in (D \xrightarrow{St} E)$. A função definida como $[a,b,f] =_{def} \lambda x.b \cap f(a \cap x)$, onde $a \in D^0$, $b \in E^0$, é denominada de função parâmetro. ♦

Segue que:

15.2.12 Lema

$[a,b,f]$ é estável. ♦

15.2.13 Lema

$[a,b,f] \leq_B f$. ♦

prova:

Observe que para $x \subseteq y \in D$, tem-se que

$$\begin{aligned} [a,b,f](y) \cap f(x) &= b \cap f(a \cap y) \cap f(x) \\ &= b \cap f(a \cap y \cap x) \\ &= b \cap f(a \cap x) \\ &= [a,b,f](x), \end{aligned}$$

pois f é estável. ♦

15.2.14 Lema

Toda função em $(D \xrightarrow{St} E)$ que é estavelmente menor que $[a,b,f]$ é unicamente determinada por seus valores em a.

prova:

Suponha que $h \leq_B [a,b,f]$. Então $a \cap x \subseteq x$ e $a \cap x \subseteq a$ implica em

$$\begin{aligned} h(a \cap x) &= [a,b,f](a \cap x) \cap h(a) \\ &= [a,b,f](x) \cap h(a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h(a \cap x) &= [a,b,f](a \cap x) \cap h(x) \\ &= [a,b,f](x) \cap h(x). \end{aligned}$$

Segue que $h(x) = h(a) \cap [a,b,f](x)$. ♦

O lema 15.2.14 estabelece que existe apenas um número finito de funções estáveis menores que $[a,b,f]$.

15.2.15 Proposição

Todo elemento finito de $\left(D \xrightarrow{St} E\right)$ é da forma $\coprod_{i \in I}\left[a_i, b_i f\right]$, onde f é uma função estável, $a_i \in D^0, b_i \in E^0, i \in I$.
prova:

Primeiramente observe que cada $\left[a, b, f\right]$ é finito. Seja T um subconjunto dirigido de funções estáveis $T \subseteq \left(D \xrightarrow{St} E\right)$ tal que $\left[a, b, f\right] \leq_B \coprod_{t \in T} t$. Isto significa que $\left[a, b, f\right](a) \subseteq \coprod_{t \in T} t(a)$. Entretanto, é válido que $\left[a, b, f\right](a) = f(a) \cap b$, que também é finito, assim como b é finito. Logo, existe $t_0 \in T$ tal que $\left[a, b, f\right](a) \subseteq t_0(a)$. Para todo $x \in D$, segue que $t_0(a) \cap \left[a, b, f\right](a \cap x) = \left[a, b, f\right](a \cap x) \cap t_0(a \cap x)$, pela propriedade das funções estáveis [ZHA 89]. Entretanto, ocorre que $t_0(a) \cap \left[a, b, f\right](a \cap x) = \left[a, b, f\right](x)$ e $\left[a, b, f\right](a \cap x) \cap t_0(a \cap x) \subseteq t_0(x)$. Portanto, conclui-se que $\left[a, b, f\right](x) \subseteq t_0(x)$, ou seja, $\left[a, b, f\right] \leq_B t_0$. Logo, $\left[a, b, f\right]$ é finito. Note que o supremo de um conjunto finito de elementos finitos é também finito. É imediato que $f = \coprod \left\{\left[a, b, f\right] \mid a \in D^0 \wedge b \in E^0\right\}$ é finito. ♦

15.2.16 Teorema

Um função estável em $\left(D \xrightarrow{St} E\right)$ é um elemento finito se é igual a uma função step $\coprod_{i \in I}\left[a_i, b_i\right]$ determinada por um conjunto $\left\{(a_i, b_i) \mid i \in I\right\} \subseteq D^0 \times E^p$ que admite um supremo estável.
prova:

É imediato que as funções step são elementos finitos pois são finitas como funções Scott segundo a ordem pontual. Mostra-se que todo elemento finito em $\left(D \xrightarrow{St} E\right)$ é igual a uma função step. Da proposição 15.2.15, segue que todo elemento finito de $\left(D \xrightarrow{St} E\right)$ é da forma $\coprod_{1 \leq i \leq n}\left[a_i, b_i f\right]$. Portanto, é suficiente provar que $\coprod_{1 \leq i \leq n}\left[a_i, b_i f\right]$ é igual a alguma função step. Para cada $1 \leq i \leq n$, escreve-se

$$\left\{d \in E^p \mid d \subseteq f(a_i) \cap b_i\right\} = \left\{\{\beta\} \in E^p \mid \beta \in f(a_i) \cap b_i\right\}$$

como $\left\{d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{ik}\right\} = \left\{\{\beta_{i1}\}, \{\beta_{i2}\}, \ldots, \{\beta_{ik}\}\right\}$. Seja

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \bigcap \left\{x \subseteq a_i \mid d_{ij} \subseteq f(x) \cap b_i\right\} \\ &= \bigcap \left\{x \subseteq a_i \mid \beta_{ij} \in f(x) \cap b_i\right\}, \end{aligned}$$

para cada $1 \leq j \leq k_i$, e seja

$$\coprod_{1\le i\le n}\coprod_{1\le j\le k_i}[c_{ij},d_{ij}] = \lambda x.\bigcup\{d_{ij} \mid c_{ij} \subseteq x\}$$
$$= \lambda x.\bigcup\{\{\beta_{ij}\} \mid c_{ij} \subseteq x\}$$

Tem-se que $\coprod_{1\le i\le n}\coprod_{1\le j\le k_i}[c_{ij},d_{ij}] = \coprod_{1\le i\le n}[a_i,b_i,f]$, pois, para cada i,

$$\bigcup\{d_{ij} \mid c_{ij} \subseteq x\} \subseteq \bigcup\{f(c_{ij}) \cap b_i \mid c_{ij} \subseteq x\}$$
$$\subseteq [a_i,b_i,f](x)$$

e, para cada primo $d = \{\beta\} \subseteq f(x \cap a_i) \cap b_i$ existe s tal que $d = d_{is}$ e $c_{is} \subseteq x \cap a_i$. É suficiente verificar que $\bigcup_{1\le i\le n}\{(c_{ij},d_{ij}) \mid 1 \le j \le k_i\}$ satisfaz as condições da definição 15.2.3. Considere $I \subseteq \bigcup_{1\le i\le n}\{(i,j) \mid 1 \le j \le k_i\}$, e, para todo $(i,j) \in I$, $c_{ij} \subseteq a$, para algum $a \in D$. Então, para cada $(i,j) \in I$, tem-se que $d_{ij} \subseteq f(c_{ij} \cap a_i) \cap b_i \subseteq f(a)$, o que prova a condição (i). A condição (ii) segue da definição de c_{ij}. ♦

15.2.17 Proposição

Os elementos primos completos de $(D \xrightarrow{St} E)$ são da forma $[a,\{\beta\},f]$, onde f é uma função estável, $a \in D^0$ é um elemento finito de D e $\{\beta\} \in E^p$ é um elemento primo completo de E tal que $\beta \in f(a)$.
prova:

Segue da proposição 15.2.15 que cada $[a,\{\beta\},f]$ é um elemento primo completo. Na verdade, constituem todos elementos os primos completos porque para todo $[a,b,f]$, $[a,b,f] = \coprod_{j\in J}[a,\{\beta_j\},f]$, onde $\{\beta_j\} \in E^p$ são os elementos primos completos de E tais que $\bigcup_{j\in J}\{\beta_j\} = f(a) \cap b$. ♦

15.2.18 Corolário

Um conjunto $\{(a_i,\{\beta_i\}) \mid i \in I\} \subseteq D^0 \times E^p$ que admite um supremo estável determina um elemento primo completo $\coprod_{i\in I}[a_i,\{\beta_i\}] \in (D \xrightarrow{St} E)$.

15.3 Construções com Vizinhanças Estáveis

Na seção 15.2 estudou-se uma caracterização dos elementos primos completos no espaço de funções estáveis. É possível mostrar agora que a definição 15.1.2 introduz a noção de uma vizinhança estável. Suponha que D e E são espaços coerentes.

15.3.1 Proposição

Seja $\{(a_i,b_i)|i\in I\}\subseteq D^0\times E^p$ um conjunto que admite um supremo estável. Então tem-se que $f\in(\uparrow a_j\to\uparrow b_j)$ para todo $j\in I$, onde f é uma abreviação para a função step $\coprod_{i\in I}[a_i,b_i]$ determinada pelo conjunto $\{(a_i,b_i)|i\in I\}\subseteq D^0\times E^p$.

prova:

Segue diretamente da proposição 15.2.9. ♦

15.3.2 Teorema

Sejam $A\in$**KSN**(D) e $B\in$**KSN**(E). Tem-se que $(A\to B)\in\mathbf{KSN}\left(\left(D\xrightarrow{St}E\right)\right)$.

prova:

Primeiramente prova-se que $(A\to B)$ é um aberto Scott. Uma conseqüência imediata do teorema 14.3.4 é que $(A\to B)$ possui cota superior. Suponha então que $f_0\leq_B f_1\leq_B\ldots\leq_B f_n\leq_B\ldots$ é uma cadeia com $\coprod_{i\in\omega}f_i\in(A\to B)$. Por definição, $\mu A\subseteq\mu\left(\coprod_{i\in\omega}f_i\right)^{-1}(B)$. Como A é compacto, μA é finito. Seja $\mu A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. O fato de que $a_j\in\mu\left(\coprod_{i\in\omega}f_i\right)^{-1}(B)$ implica que $\coprod_{i\in\omega}f_i(a_j)\in B$, pelo lema 15.2.13. Existe I_j tal que $f_{I_j}(a_j)\in B$, pois B é um aberto Scott. Seja $n=max\{I_j|1\leq j\leq m\}$. Tem-se que $f_n(a_j)\in B$ para todo $1\leq j\leq n$. É imediato que $\mu A\subseteq\mu f_n^{-1}(B)$, isto é, $f_n\in(A\to B)$. Portanto, conclui-se que $(A\to B)$ é aberto Scott.

Sejam $f,g\in(A\to B)$ tais que existe $\coprod\{f,g\}$. Observe que $f\prod g\leq_B f$ e $f\prod g\leq_B g$. Pelo teorema 14.3.4, tem-se que $\mu(f\prod g)^{-1}(B)\subseteq\mu f^{-1}(B)$ e $\mu(f\prod g)^{-1}(B)\subseteq\mu g^{-1}(B)$, e, portanto, $\mu(f\prod g)^{-1}(B)\subseteq\mu f^{-1}(B)\cap\mu g^{-1}(B)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}x\in\mu f^{-1}(B)\cap\mu g^{-1}(B)&\Rightarrow x\in\mu f^{-1}(B)\wedge x\in\mu g^{-1}(B)\\&\Rightarrow f(x)\in B\wedge g(x)\in B\\&\Rightarrow f(x)\cap g(x)\in B\ (B\in\mathbf{SN}(E))\\&\Rightarrow(f\textstyle\prod g)(x)\in B\\&\Rightarrow x\in\mu(f\textstyle\prod g)^{-1}(B),\end{aligned}$$

pela definição de $(A\to B)$. Portanto, tem-se que $\mu f^{-1}(B)\cap\mu g^{-1}(B)\subseteq\mu(f\prod g)^{-1}(B)$, ou seja, $\mu(f\prod g)^{-1}(B)=\mu f^{-1}(B)\cap\mu g^{-1}(B)$.

Agora, sejam $f, g \in (A \to B)$. Tem-se que $A \sqsubseteq_\mu f^{-1}(B)$ e $A \sqsubseteq_\mu g^{-1}(B)$. Isto significa que $\mu A \subseteq \mu f^{-1}(B)$ e $\mu A \subseteq \mu g^{-1}(B)$, isto é, $\mu A \subseteq \mu f^{-1}(B) \cap \mu g^{-1}(B)$. Tem-se então que $\mu A \subseteq \mu\left(f \prod g\right)^{-1}(B)$, ou seja, $A \sqsubseteq_\mu \left(f \prod g\right)^{-1}(B)$. Portanto, conclui-se que $f \prod g \in (A \to B)$. Isto significa que $(A \to B)$ é uma vizinhança estável.

Mostra-se que $(A \to B)$ é compacto. Prova-se primeiramente que vizinhanças da forma $(\uparrow a \to \uparrow b)$ são compactas, onde $a \in D^0$, $b \in E^0$. Sejam $Q_a = \{c \in D | c \subseteq a\}$, $P_b = \{p \in E^p | p \subseteq b\} = \{\{\beta\} \in E^p | \beta \in b\}$ e

$$F_a^b = \{f | f \text{ é função step} \wedge \mu f \subseteq Q_a \times P_b \wedge a \in \mu f^{-1}(\uparrow b)\}.$$

Afirma-se que $(\uparrow a \to \uparrow b) = \bigcup_{g \in F_a^b} \uparrow g$. É imediato que $\bigcup_{g \in F_a^b} \uparrow g \subseteq (\uparrow a \to \uparrow b)$. Por outro lado, seja $f \in (\uparrow a \to \uparrow b)$. É possível mostrar que $[a,b,f] \in F_a^b$, onde $[a,b,f] =_{def} \lambda x.b \cap f(a \cap x)$, conforme definição 15.2.11. Pelo lema 15.2.13, tem-se que $[a,b,f] \leq_B f$, e, portanto, é válido que $f \in \bigcup_{g \in F_a^b} \uparrow g$. Isto significa que $(\uparrow a \to \uparrow b) \subseteq \bigcup_{g \in F_a^b} \uparrow g$, ou seja, $(\uparrow a \to \uparrow b) = \bigcup_{g \in F_a^b} \uparrow g$. Portanto, $(\uparrow a \to \uparrow b)$ é compacto, pois F_a^b é um conjunto finito.

Faça $A = \bigcup_{i \in I} (\uparrow a_i)$, $B = \bigcup_{j \in J} (\uparrow b_j)$, onde I e J são finitos e os a_i's são incompatíveis dois a dois, assim como os b_j's são incompatíveis dois a dois. Tem-se que

$$\begin{aligned} A \to B &= \left(\bigcup_{i \in I} \uparrow a_i\right) \to \left(\bigcup_{j \in J} \uparrow b_j\right) \\ &= \bigcap_{i \in I} \left(\uparrow a_i \to \bigcup_{j \in J} \uparrow b_j\right) \\ &= \bigcap_{i \in I} \left[\bigcup_{j \in J} (\uparrow a_i \to \uparrow b_j)\right]. \end{aligned}$$

Portanto, $A \to B$ é compacto. ♦

É necessário fazer a restrição de A e B para conjunto abertos compactos. Caso contrário, $A \to B$ poderia não ser um aberto, como acontece para os domínios de Scott. Salienta-se também que, diferente do que acontece no caso das funções Scott contínuas, $(\uparrow a \to \uparrow b)$ não precisa ser uma vizinhança estável principal (prima) quando a e b são elementos finitos.

O teorema 15.3.2 mostra que é possível obter todas as vizinhanças estáveis compactas de $\left(D \xrightarrow{St} E\right)$ pela união e interseção finitas de vizinhanças estáveis da forma $A \to B$, onde A e B são vizinhanças estáveis compactas de D e E, respectivamente. Em particular, pode-se obter vizinhanças estáveis cujo ponto minimal é uma única função estável. Observe que:

15.3.3 Proposição

Sejam $f,g \in \left(D \xrightarrow{St} E\right)$ tais que $f \leq_B g$. Sempre que $f \in (A \to B)$ tem-se que $g \in (A \to B)$, para toda $A \in$ **SN**(D), $B \in$ **SN**(E).

prova:

Como $f \leq_B g$, então tem-se que $\mu f^{-1}(B) \subseteq \mu g^{-1}(B)$, para todo $B \in$ **SN**(E). Sempre que $f \in (A \to B)$ ocorre que $A \sqsubseteq_\mu f^{-1}(B)$, isto é, $\mu A \subseteq \mu f^{-1}(B) \subseteq \mu g^{-1}(B)$, e portanto, $A \sqsubseteq_\mu g^{-1}(B)$, o que significa que $g \in (A \to B)$. ♦

15.3.4 Proposição

Sejam $a \in D^0$ e $b,c \in E^0$. Então sempre que $c \subseteq b$ tem-se que $(\uparrow a \to \uparrow b) \subseteq \bigcup_{a' \subseteq a} (\uparrow a' \to \uparrow c)$.

prova:

Observe que se $a' \neq a''$ e $a' \cup a'' \in D$ então $(\uparrow a' \to \uparrow c) \cap (\uparrow a'' \to \uparrow c) = \varnothing$. Logo, $\bigcup_{a' \subseteq a} (\uparrow a' \to \uparrow c)$ é uma união de elementos incompatíveis (união disjunta), e, portanto, é realmente uma vizinhança estável de $(D \xrightarrow{s} E)$. Agora, suponha que $f \in (\uparrow a \to \uparrow b)$. Então tem-se que $\uparrow a \sqsubseteq_\mu f^{-1}(\uparrow b)$, ou seja, $\mu(\uparrow a) \subseteq \mu(f^{-1}(\uparrow b))$. Segue que $a \in \mu(f^{-1}(\uparrow b))$. Tem-se que $c \subseteq b \subseteq f(a)$. Seja $a'' = \bigcap \{x | x \subseteq a \wedge c \subseteq f(x)\}$. Claramente tem-se que $a'' \subseteq a$ e $a'' \in \mu(f^{-1}(\uparrow c))$. Isto significa que $\mu(\uparrow a'') \subseteq \mu(f^{-1}(\uparrow c))$, ou seja, $\uparrow a'' \sqsubseteq_\mu f^{-1}(\uparrow c)$, e, portanto, $f \in (\uparrow a'' \to \uparrow c)$. Logo, conclui-se que $f \in \bigcup_{a' \subseteq a} (\uparrow a' \to \uparrow c)$, ou seja, $(\uparrow a \to \uparrow b) \subseteq \bigcup_{a' \subseteq a} (\uparrow a' \to \uparrow c)$. ♦

O teorema a seguir está relacionado com os requisitos (ii) e (iii) para a construção de uma vizinhanças estável, comentados no início deste capítulo. Em particular este teorema estabelece que para um conjunto que admite um supremo estável, tomando-se a interseção de vizinhanças estáveis $\uparrow a_i \to \uparrow b_i$, com $i \in I$, obtém-se uma vizinhança estável principal (prima) consistindo de todas as funções estáveis que dominam a função step estável $\coprod_{i \in I} [a_i, b_i]$ segundo a ordem estável de Berry.

15.3.5 Teorema

Seja $\{(a_i, b_i) | i \in I\} \subseteq D^0 \times E^0$ um conjunto admitindo um supremo estável. Então tem-se que

$$\bigcap_{i\in I}\left(\uparrow a_i \to \uparrow b_i\right) = \uparrow\left[\coprod_{i\in I}\left[a_i, b_i\right]\right].$$

prova:

Da proposição 15.2.9 tem-se que $\coprod_{i\in I}\left[a_i, b_i\right] \in \bigcap_{i\in I}\left(\uparrow a_i \to \uparrow b_i\right)$. É suficiente mostrar que $\coprod_{i\in I}\left[a_i, b_i\right]$ é menor ou igual a qualquer outra função estável em $\bigcap_{i\in I}\left(\uparrow a_i \to \uparrow b_i\right)$. Seja g uma função estável em $\bigcap_{i\in I}\left(\uparrow a_i \to \uparrow b_i\right)$. Para todo $i \in I$, $b_i = \{\beta_i\}$ e $b_i \subseteq g(a_i)$, ou seja, $\beta_i \in g(a_i)$. Portanto, para qualquer $x \in D$, tem-se que

$$\begin{aligned}\bigcup\{b_k | a_k \subseteq x\} &\subseteq \bigcup\{g(a_k) | a_k \subseteq x\}\\ &\subseteq g(x),\end{aligned}$$

isto é, $\coprod_{i\in I}\left[a_i, b_i\right](x) \subseteq g(x)$. Suponha que $x, y \in D$ e $x \subseteq y$. Observe que para todo j, tem-se que $b_j = \{\beta_j\}$ e $b_j \cap g(x) = \{\beta_j\} \cap g(x)$. Seja $p \subseteq \bigcup\{b_j \cap g(x) | a_j \subseteq y\}$, onde $p = \{\beta\}$ é um primo completo, com $p \subseteq b_j \cap g(x)$, para algum j. Portanto, tem-se $p = b_j$, com $b_j \subseteq g(a_j) \cap g(x) = g(a_j \cap x)$. Como $g \in \left(\uparrow a_j \to \uparrow b_j\right)$, isto implica que $a_j \cap x = a_j$ ou $a_j \subseteq x$. Portanto, $p \subseteq \bigcup\{b_i | a_i \subseteq x\}$. Como E é primo algébrico, segue que

$$g(x) \cap \bigcup\{b_i | a_i \subseteq y\} = \bigcup\{b_j \cap g(x) | a_j \subseteq y\} \subseteq \bigcup\{b_i | a_i \subseteq x\}.$$

Agora, é fácil observar que $\coprod_{i\in I}\left[a_i, b_i\right] \leq_B g$. ♦

Algumas regras de prova são apresentadas a seguir.

15.3.6 Proposição

Sejam A, B, C, D vizinhanças estáveis e a um elemento finito. Então, com tipos apropriados, tem-se que
(i) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow (A \cup B) \to C = (A \to C) \cap (B \to C)$,
(ii) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \uparrow a \to (A \cup B) = (\uparrow a \to A) \cup (\uparrow a \to B)$,
(iii) $(A \to C) \cap (B \to D) \subseteq (A \cap B) \to (C \cap D)$.
prova:

Somente é necessário provar (iii). Seja $f \in (A \to C) \cap (B \to D)$. Logo, tem-se que $f \in (A \to C)$ e $f \in (B \to D)$. Portanto, é válido que $A \sqsubseteq_\mu f^{-1}(C)$ e $B \sqsubseteq_\mu f^{-1}(D)$. Observa-se que $A \cap B \sqsubseteq_\mu (f^{-1}(C)) \cap (f^{-1}(D))$ [ZHA 89].. Mas ocorre que $(f^{-1}(C)) \cap (f^{-1}(D)) = f^{-1}(C \cap D)$. Portanto, tem-se que $A \cap B \sqsubseteq_\mu f^{-1}(C \cap D)$. Isto significa que $f \in (A \cap B) \to (C \cap D)$. Logo, tem-se que $(A \to C) \cap (B \to D) \subseteq (A \cap B) \to (C \cap D)$. ♦

Observe, entretanto, que a regra

$$A \subseteq A' \wedge B \subseteq B' \Rightarrow (A \to B) \subseteq (A' \to B'),$$

a qual é adequada para as funções Scott contínuas (Lógica de Hoare), não valem mais para espaços coerentes e vizinhanças estáveis. Isto acontece porque, com funções estáveis, $f \in A \to B$ se e somente se $A \sqsubseteq_\mu f^{-1}(B)$, e não simplesmente $A \subseteq f^{-1}(B)$.

15.4 Construções nos Espaços de Funções Lineares

Nesta seção estudam-se as construções com vizinhanças estáveis correspondentes às principais construções na categoria monoidal fechada dos espaços coerentes com funções lineares, introduzidas em 3.6. Sejam D e E espaços coerentes.

15.4.1 Teorema

Sejam $A \in$ **KSN**(D), $B \in$ **KSN**(E). Então $A \otimes B \in$ **KSN**($D \otimes E$), onde $A \otimes B =_{def} \{x \in D \otimes E | \exists x_0 \in A, x_1 \in B, x_0 \times x_1 \subseteq_{fin} x\}$ e $D \otimes E$ é o produto tensorial dos espaços coerentes D e E, definido em 3.6.2.
prova:

Claramente $A \otimes B$ é um aberto Scott. Seja $x \in A \otimes B$ e suponha $x \subseteq y$. Então tem-se que existe $x_0 \in A$, $x_1 \in B$ tais que $x_0 \times x_1 \subseteq_{fin} x \subseteq y$, e, portanto, $y \in A \otimes B$. Seja agora $X \subseteq D \otimes E$ um subconjunto dirigido tal que $\bigcup X \in A \otimes B$. Então tem-se que existe $x_0 \in A$, $x_1 \in B$ tais que $x_0 \times x_1 \subseteq_{fin} \bigcup X$. Isto significa que $X \cap A \otimes B \neq \varnothing$.

Agora sejam $x,y \in A \otimes B$ tais que $x \cup y \in D \otimes E$. Então tem-se que existem $x_0, x_1 \in A$, $y_0, y_1 \in B$ tais que $x_0 \times y_0 \subseteq_{fin} x$ e $x_1 \times y_1 \subseteq_{fin} y$. É válido que $x_0 \cup x_1 \in D$ e $y_0 \cup y_1 \in E$. Portanto, tem-se que $x_0 \cap x_1 \in A$ e $y_0 \cap y_1 \in B$. Também ocorre que $(x_0 \cap x_1) \times (y_0 \cap y_1) \subseteq_{fin} x \cap y$. Logo, conclui-se que $x \cap y \in A \otimes B$. Portanto, $A \otimes B$ é uma vizinhança estável.

Para provar que $A \otimes B$ é compacta, mostra-se que $\uparrow a \otimes \uparrow b$ são compactas, onde $a \in D^0$, $b \in E^0$. Claramente tem-se que $(a \times b) \in \uparrow a \otimes \uparrow b$. Por outro lado, suponha que $u \in \uparrow a \otimes \uparrow b$. Então, por definição, existem $a', b', a \subseteq a' \in D, b \subseteq b' \in E$, tais que $a' \times b' \subseteq_{fin} u$. Logo, tem-se que $a \times b \subseteq_{fin} u$. Mostrou-se que $\uparrow a \otimes \uparrow b = \uparrow (a \times b)$. Portanto, conclui-se que $\uparrow a \otimes \uparrow b$ é compacta. Pela proposição 14.2.15 e do fato de que $A \otimes (B \cup C) = (A \otimes B) \cup (A \otimes C)$ quando $B \cap C = \varnothing$, deduz-se que toda $A \otimes B$ é compacta. ♦

Da prova do teorema 15.4.1 pode-se ver que $\overline{e_0} \otimes \overline{e_1} = \{x \in D \otimes E | (e_0, e_1) \in x\}$, onde $\overline{e_0} = \{x_0 \in D | e_0 \in x_0\}$ e $\overline{e_1} = \{x_1 \in E | e_1 \in x_1\}$. Também está claro que utilizando-se a união e interseção finita pode-se obter todas as vizinhanças estáveis compactas de $D \otimes E$ a partir das vizinhanças compactas da forma $A \otimes B$. Além disso, para todo $x,y \in D \otimes E$, tem-se que $x \subseteq y$ se e somente se $x \in A \otimes B$ implica $y \in A \otimes B$, para todo

$A \in$ **SN**(D),$B \in$ **SN**(E). Portanto a construção dada no teorema 15.4.1 está de acordo com os requisitos propostos.

15.4.2 Teorema

Sejam $A \in$ **KSN**(D), $B \in$ **KSN**(E). Então $A \multimap B \in$ **KSN**$\left(\left(D \xrightarrow{lin} E\right)\right)$, onde $A \multimap B =_{def} \{x \in D \multimap E | A \sqsubseteq_{\mu^\cdot} F^{-1}_{lin(x)}[B]\}$ e $\left(D \xrightarrow{lin} E\right)$ é o espaço de funções lineares de D em E, definido em 3.7.12.
prova:

Claramente $A \multimap B$ é um aberto Scott. Seja $x \in A \multimap B$ e suponha $x \subseteq y$. Então tem-se que $A \sqsubseteq_{\mu^\cdot} F^{-1}_{lin(x)}[B] \sqsubseteq_{\mu^\cdot} F^{-1}_{lin(y)}[B]$, e, portanto, $y \in A \multimap B$. Seja agora $X \subseteq D \multimap E$ um subconjunto dirigido tal que $\bigcup X \in A \multimap B$. Então tem-se que $A \sqsubseteq_{\mu^\cdot} F^{-1}_{lin(\bigcup X)}[B]$. Isto significa que $X \cap (A \multimap B) \neq \varnothing$.

Agora sejam $x,y \in A \multimap B$ tais que $x \cup y \in (D \multimap E)$. Então tem-se que $A \sqsubseteq_{\mu^\cdot} F^{-1}_{lin(x)}[B]$ e $A \sqsubseteq_{\mu^\cdot} F^{-1}_{lin(y)}[B]$. Então é válido que $A \sqsubseteq_{\mu^\cdot} F^{-1}_{lin(x)}[B] \cap F^{-1}_{lin(y)}[B]$, ou seja, $A \sqsubseteq_{\mu^\cdot} F^{-1}_{lin(x \cap y)}[B]$. Portanto, $A \multimap B$ é uma vizinhança estável.

A prova de que $A \multimap B$ é compacta é similar a do teorema 15.4.1. ♦

Salienta-se que $\overline{e_0} \multimap \overline{e_1} = \{x \in D \multimap E | (e_0, e_1) \in x\}$, onde $\overline{e_0} = \{x_0 \in D | e_0 \in x_0\}$ e $\overline{e_1} = \{x_1 \in E | e_1 \in x_1\}$. De fato, seja $x \in D \multimap E$ e $(e_0, e_1) \in x$. Então tem-se que $\{e_1\} \subseteq F_{lin(x)}(\{e_0\})$ e $\{e_0\} \in \mu F^{-1}_{lin(x)} \overline{e_1}$. Portanto, tem-se que $x \in (\overline{e_0} \multimap \overline{e_1})$. Por outro lado, suponha que $x \in (\overline{e_0} \multimap \overline{e_1})$. Tem-se então que $\{e_0\} \in \mu F^{-1}_{lin(x)} \overline{e_1}$. Portanto, conclui-se que $\{e_1\} \supseteq F_{lin(x)}(\{e_0\})$ e $(e_0, e_1) \in x$.

Pela observação do parágrafo anterior, segue que cada vizinhança estável compacta de $\left(D \xrightarrow{lin} E\right)$ pode ser construída a partir de $A \multimap B$ utilizando-se união e interseção finitas. Além disso, para $x,y \in D \multimap E$, $x \subseteq y$ se e somente se $x \in (A \multimap B)$ implica em $y \in (A \multimap B)$ para toda $A \in$ **SN**(D), $B \in$ **SN**(E). Portanto a construção dada no teorema 15.4.2 está de acordo com os requisitos propostos.

15.4.3 Teorema

Seja $A \in$ **KSN**(D). Então $!A \in$ **KSN**($!D$), onde $!A =_{def} \{x \in !D | x \cap \mu A \neq \varnothing\}$ e $!D$ é o exponencial do espaço coerente D, definido em 3.6.3.
prova:

Claramente $!A$ é um aberto Scott. Seja $x \in !A$ e suponha $x \subseteq y$. Então tem-se que $x \cap \mu A \neq \varnothing$, e, portanto, $y \cap \mu A \neq \varnothing$, ou seja, $y \in !A$. Seja agora $X \subseteq !D$ um subconjunto dirigido tal que $\bigcup X \in !A$. Então tem-se que $\bigcup X \cap \mu A \neq \varnothing$. Observe que os elementos de μA são finitos. Conclui-se que existe $x \in X$ tal que $x \cap \mu A \neq \emptyset$, ou seja, $X \cap !A \neq \emptyset$.

Agora suponha que $x,y \in !A$ e $x \cup y \in !D$. Tem-se que $x \cap y \in !D$, $x \cap \mu A \neq \emptyset$ e $y \cap \mu A \neq \emptyset$. Logo, conclui-se que $(x \cap y) \cap \mu A \neq \emptyset$, pois os elementos de μA são incompatíveis dois a dois. Portanto, tem-se que $x \cap y \in !A$. Logo, $!A$ é uma vizinhanças estável.

Para verificar que $!A$ $\in$**KSN**($!D$), observe que $!A = \bigcup_{a \in \mu A} !(\uparrow \{a\})$ e cada $!(\uparrow \{a\})$ é compacto. ♦

Observe que para todo $x,y \in !D$, $x \subseteq y$ se e somente se $x \in !A$ implica em $y \in !A$, para todo A $\in$**SN**(D). Portanto a construção dada no teorema 15.4.3 está de acordo com os requisitos propostos.

Apresentam-se agora alguns resultados sobre as propriedades das construções apresentadas. Algumas provas são quase imediatas.

15.4.4 Proposição

Sejam $A_1,A_2 \in$ **KSN**(D), $B_1,B_2 \in$ **KSN**(E). Então tem-se que

$$(A_1 \cap A_2) \otimes (B_1 \cap B_2) = (A_1 \otimes B_1) \cap (A_1 \otimes B_2) \cap (A_2 \otimes B_1) \cap (A_2 \otimes B_2).$$

prova:

Suponha $x \in (A_1 \cap A_2) \otimes (B_1 \cap B_2)$. Então existem $y_0 \in (A_1 \cap A_2)$, $y_1 \in (B_1 \cap B_2)$ tais que $y_0 \times y_1 \subseteq_{fin} x$. Então é óbvio que

$$x \in (A_1 \otimes B_1) \cap (A_1 \otimes B_2) \cap (A_2 \otimes B_1) \cap (A_2 \otimes B_2).$$

Por outro lado, suponha $x \in (A_1 \otimes B_1) \cap (A_1 \otimes B_2) \cap (A_2 \otimes B_1) \cap (A_2 \otimes B_2)$. Por definição, existem $y_{11}, y_{21}, y_{12}, y_{22} \in D$ e $z_{11}, z_{21}, z_{12}, z_{22} \in E$ tais que $y_{ij} \in A_i, z_{ij} \in B_j$ e $y_{ij} \times y_{ij} \subseteq_{fin} x$, para $i = 1,2$, $j = 1,2$. Como A_1,A_2, B_1,B_2 são vizinhanças estáveis, tem-se que $y_{11} \cap y_{12} \in A_1$, $y_{21} \cap y_{22} \in A_2$, $z_{11} \cap z_{21} \in B_1$, $z_{12} \cap z_{22} \in B_2$. Claramente, observa-se que $(y_{11} \cap y_{12}) \cup (y_{21} \cap y_{22}) \in A_1 \cap A_2$ e $(z_{11} \cap z_{21}) \cup z_{12} \cap z_{22} \in B_1 \cap B_2$. Segue que

$$\begin{aligned}(y_{11} \cap y_{12}) \cup (y_{21} \cap y_{22}) \times (z_{11} \cap z_{21}) \cup z_{12} \cap z_{22} \\ &\subseteq (y_{11} \times z_{11}) \cup (y_{12} \times z_{12}) \cup (y_{21} \times z_{21}) \cup (y_{22} \times z_{22}) \\ &\subseteq_{fin} x.\end{aligned}$$

Portanto, tem-se que $x \in (A_1 \cap A_2) \otimes (B_1 \cap B_2)$. ♦

A seguinte proposição é imediata:

15.4.5 Proposição

Sejam A,B,C,D vizinhanças estáveis e a um conjunto coerente finito. Tem-se que:
(i) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow (A \cup B) \multimap C = (A \multimap C) \cap (B \multimap C)$,
(ii) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \uparrow a \multimap (A \cup B) = (\uparrow a \multimap A) \cup (\uparrow a \multimap B)$,
(iii) $(A \multimap C) \cap (B \multimap D) \subseteq (A \cap B) \multimap (C \cap D)$.

Observe que a regra $A \subseteq A' \wedge B \subseteq B' \Rightarrow (A \multimap B) \subseteq (A' \multimap B')$ não é válida.

15.4.6 Proposição

Sejam $x \in D$ e $y \in E$. Tem-se que $e' \in y \Rightarrow (\uparrow x \multimap \uparrow y) \subseteq \bigcup_{e \in x} (\overline{e} \multimap \overline{e'})$.

prova:

Suponha $w \in (\uparrow x \multimap \uparrow y)$ e $e' \in y$. Então $\uparrow x \sqsubseteq_\mu F^{-1}_{lin(w)}(\uparrow y)$, isto é, $x \in \mu F^{-1}_{lin(w)}(\uparrow y)$. Tem-se que $F_{lin(w)}(x) \in \uparrow y$, ou seja, $y \subseteq F_{lin(w)}(x)$. Isto implica que $e' \in F_{lin(w)}(x)$. Portanto, existe $e \in x$ tal que $(e,e') \in w$, e, então, tem-se que $w \in (\overline{e} \multimap \overline{e'})$, pela observação feita após o teorema 15.4.2. ♦

15.4.7 Proposição

Sejam $A,B \in$ **SN**(D) tais que $A \cap B = \varnothing$. Então tem-se que $!(A \cup B) = !A \cup !B$.
prova: Quando $A \cap B = \varnothing$ tem-se que $\mu(A \cup B) = \mu A \cup \mu B$. ♦

Note que $!\{\varnothing\} = \varnothing$, onde o primeiro $\varnothing$ esta em **SN**(D) e o segundo está em **SN**($!D$).

Observa-se que, pelo teorema 15.3.2 $A \to B \in$ **KSN**($(D \xrightarrow{St} E)$). Também é válido que existe um isomorfismo $l{:}(D \xrightarrow{St} E) \to (!D \xrightarrow{lin} E)$ [GIR 87] (veja final da seção 3.7). Além disso, também é válido que $A \to B = (!A) \multimap B$. Tem-se o seguinte resultado:

15.4.8 Proposição

Sejam $A \in$ **KSN**(D), $B \in$ **KSN**(E) e o isomorfismo $l{:}(D \xrightarrow{St} E) \to (!D \xrightarrow{lin} E)$.
Tem-se que $x \in A \to B$ se e somente se $x \in (!A) \multimap B$.
prova:

Observe que $\mu(!A) = \{\{a\} | a \in \mu A\}$. Tem-se que

$$\begin{aligned} x \in A \to B &\Leftrightarrow \mu A \subseteq \mu F^{-1}_{lin(x)}(B) \\ &\Leftrightarrow \{\{a\} | a \in \mu A\} \subseteq \mu F^{-1}_{lin(l(x))}(B) \\ &\Leftrightarrow \mu(!A) \subseteq \mu F^{-1}_{lin(l(x))}(B) \\ &\Leftrightarrow l(x) \in (!A) \multimap B. \end{aligned}$$

onde $l(x) = \{(\{u\},e) | (u,e) \in x\}$. ♦

15.5 Vizinhanças Lineares em Espaços de Funções Lineares

Deseja-se obter as vizinhanças lineares para o espaço de funções lineares $(D \xrightarrow{lin} E)$ diretamente das vizinhanças lineares de D e E. Para isso, realiza-se aqui uma análise semelhante a que foi feita em [ZHA 89] [ZHA 92], para vizinhanças estáveis, conforme exposto na seção 15.1.

Observe que se A e B são vizinhanças estáveis compactas de D e E, respectivamente, então $\{f \in (D \xrightarrow{St} E) \mid A \sqsubseteq_\mu f^{-1}[B]\}$ é uma vizinhança estável compacta de $(D \xrightarrow{St} E)$. Como A e B são vizinhanças estáveis, existe uma correspondência entre estes conjuntos e as funções $f_A: D \to O$ e $g_B: E \to O$. A inclusão de conjuntos em vizinhanças estáveis determina a ordem estável ou de Berry $\leq_B$; então, $h \in A \to B$ se e somente se $f_A \leq_B g_B \circ h$. Veja a figura 15.3.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f_A"'] \arrow[dr, "g'"] & E \arrow[d, "g_B"] \\ O \arrow[r, phantom, "\leq_B"] & O \end{tikzcd}$$

FIGURA 15.3 - Ordem de Berry para funções estáveis (lineares)

Isto sugere que, para espaços coerentes com funções lineares, deve-se utilizar o mesmo raciocinio. Observe que, para vizinhanças lineares A e B, $f_A \leq_B g_B \circ h$ se e somente se $A \sqsubseteq_\mu h^{-1}[B]$ (veja lema 15.1.1 e teorema 14.5.5).

Sejam D,E espaços coerentes:

15.5.1 Definição. Vizinhança $A \multimap B$

Sejam $A \in \mathbf{KLN}(D)$ e $B \in \mathbf{KLN}(E)$. Define-se $A \multimap B$ como o conjunto $\{f \in (D \xrightarrow{lin} E) \mid A \sqsubseteq_\mu f^{-1}[B]\}$. ♦

Observe que existe um isomorfismo entre a família das funções lineares de D para E, com a ordem estável $\leq_B$, e o conjunto dos traços lineares $[D \multimap E]$ (proposição 3.7.13), ordenados pela inclusão. Então a definição 15.5.1 também poderia ser dada como:

15.5.2 Definição. Vizinhança $A \multimap B$

Sejam $A \in \mathbf{KLN}(D)$ e $B \in \mathbf{KLN}(E)$. Define-se $A \multimap B$ como o conjunto $A \multimap B =_{def} \{x \in [D \multimap E] \| A \sqsubseteq_{\mu} F^{-1}_{lin(x)}[B]\}$, onde $[D \multimap E]$ é o conjunto dos traços lineares e $F_{lin(x)}$ é a função linear associada a um traço x. ♦

Introduz-se agora uma caracterização de elementos finitos no espaço das funções lineares.

15.6 Caracterização de Elementos Finitos em $\left(D \xrightarrow{lin} E\right)$

Esta seção estuda as estruturas dos elementos primos completos no espaço das funções lineares, e, portanto, também dos elementos finitos.

Observa-se que o conjunto E^p dos elementos primos completos de um espaço coerente E é dado por $E^p = \{\{\alpha\} | \{\alpha\} \in E\}$ [ZHA 92], isto é, E^p é justamente a família E_{uni} dos conjuntos coerentes unitários de E.

Suponha que D e E são espaços coerentes. Sejam D^p e E^p os conjunto dos elementos primos completos de D e E, respectivamente, e considere a seguinte definição para traço de uma função linear, introduzido em 3.7.8:

15.6.1 Definição. Traço de uma Função Linear

Seja $f: D \to E$ uma função linear. Define-se o traço μlf de uma função linear f como um conjunto de pares (α, β) tal que $(\alpha, \beta) \in \mu lf$ se

$$\left(\beta \in f(\{\alpha\}) \wedge \forall \alpha' \approx a, \beta \in f(\{\alpha'\})\right) \Rightarrow \alpha = \alpha'. \ ♦$$

Deseja-se agora capturar a noção de elementos finitos em um espaço funcional linear.

15.6.2 Definição. Conjunto de Supremo Linear

Diz-se que um conjunto $\{(a_i, b_i) | i \in I\} \subseteq D^p \times E^p$ admite um supremo linear se, para todo $J \subseteq_{fin} I$, as seguintes condições se verificam:

(i) $\bigcup\{a_i | i \in J\} \in D \Rightarrow \bigcup\{b_i | i \in J\} \in E$,

(ii) $a_i \cup a_j \in D \wedge \left(b_i = b_j\right) \Rightarrow \left(a_i = a_j\right)$, para todo i,j J. ♦

A primeira condição da definição 15.6.2 implica em consistência e a segunda expressa a propriedade minimal.

15.6.3 Lema

Seja $f: D \to E$ uma função linear. Então para todo $x \in D$, tem-se que $f(x) = \bigcup\{\{\beta\} | \exists \alpha \in x, (\alpha, \beta) \in \mu lf\}$.

Prova:

Segue do lema 15.2.4. ♦

15.6.4 Lema

Sejam $f, g: D \to E$ funções lineares. Segue que:

(i) Se $f \leq_B g$ então $\mu lf \subseteq \mu lg$;

(ii) $[(\alpha,\beta),(\alpha',\beta) \in \mu lf \wedge \alpha \approx \alpha' \in D] \Rightarrow \alpha = \alpha'$.

Prova:

Análoga a do lema 15.2.5. ♦

15.6.5 Teorema

Sejam $f, g \in (D \xrightarrow{lin} E)$. Tem-se que $f \leq_B g$ se e somente se $\mu lf \subseteq \mu lg$. Para $\{(\{\alpha_i\},\{\beta_i\}) | i \in I\} \subseteq D^p \times E^p$, tem-se que $\{(\alpha_i,\beta_i) | i \in I\} = \mu lf$ se e somente se $\{(\{\alpha_i\},\{\beta_i\}) | i \in I\}$ admite um supremo linear.

Prova:

A prova da primeira parte do teorema é análoga a da primeira parte do teorema 15.2.6. Prova-se agora a segunda parte do teorema, utilizando-se o lema 15.6.4. Suponha que $\{(\alpha_i,\beta_i) | i \in I\} = \mu lf$ para alguma função linear. É imediata a prova de que as propriedades (i) e (ii) da definição 15.6.2 se verificam. Agora seja $\{(\{\alpha_i\},\{\beta_i\}) | i \in I\} \subseteq D^p \times E^p$ um conjunto com as propriedades (i) e (ii). Mostra-se que a função linear f para a qual $\{(\alpha_i,\beta_i) | i \in I\} = \mu lf$ (que é única pelo lema 15.6.3) pode ser obtida como os supremos para a ordem pontual $\coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}]$, onde

$$[\{\alpha\},\{\beta\}](x) = \begin{cases} \{\beta\} & \text{se } \alpha \in x, \\ \perp & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

é a função one-step definida em 15.2.1, para $a = \{\alpha\} \in D^p$ e $b = \{\beta\} \in E^p$. É imediato que $\coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}]$ é contínua. Para verificar a estabilidade, sejam $x,y \in D$ tais que $x \cup y \in D$. Suponha que $\beta \in \bigcup_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}](x) \cap \bigcup_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}](y)$. Tem-se que para $i,j \in I$, $\beta \in \{\beta_i\}$, $\alpha_i \in x$, e $\beta \in \{\beta_j\}$, $\alpha_j \in y$. Logo, tem-se que $\alpha_i = \alpha_j$, pois $\alpha_i \approx \alpha_j \in D$ e $\beta = \beta_i = \beta_j$. Assim, é válido que $\alpha_i = \alpha_j \in x \cap y$ e $\beta \in \bigcup_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}](x \cap y)$. Segue que

$$\bigcup_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}](x) \cap \bigcup_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}](y) \subseteq \bigcup_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}](x \cap y).$$

Isto implica que $\coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}]$ é estável.

Para mostrar que $\coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}]$ é linear, seja $X \subseteq D$ tal que para todo $x,y \in X$ tem-se que $x \cup y \in D$. Seja $\beta \in \bigcup_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}](\bigcup X)$. Segue que $\beta \in \{\beta_i\}$, $\alpha_i \in \bigcup X$, ou seja, $\alpha_i \in x$, para algum $x \in X$. Conclui-se que $\beta \in \bigcup_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}](x)$, para algum $x \in X$, isto é, $\beta \in \bigcup\left\{\bigcup_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}](x) | x \in X\right\}$. O inverso prova-se de forma análoga.

Resta mostrar que $\{(\alpha_i,\beta_i) | i \in I\} = \mu lf$, onde, para simplificação, utiliza-se a notação $\coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}] = f$. Tem-se que $\beta_j \in \bigcup\{\{\beta_i\} | \alpha_i \approx \alpha_j\} = f(\{\alpha_j\})$. Sejam $\gamma \approx \alpha_j$ e $\beta_j \in f(\{\gamma\})$, isto é, $\beta_j \in \bigcup\{\{\beta_i\} | \alpha_i \approx \gamma\}$. Como $\gamma \approx \alpha_j$, segue que $\gamma = \alpha_j$. Isto significa que $(\alpha_j,\beta_j) \in \mu lf$. Para todo $(\alpha,\beta) \in \mu lf$ tem-se que $\beta \in f(\{\alpha\})$. Portanto, é válido que $\beta \in \bigcup\{\{\beta_i\} | \alpha_i \approx \alpha\}$. Segue que $\alpha_j = \alpha$. ♦

Observa-se que as funções da forma $\coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}]$, com I finito, representam todos os elementos isolados (finitos, compactos) no espaço de funções lineares, onde $\{(\{\alpha_i\},\{\beta_i\}) | i \in I\} \subseteq D^p \times E^p$ satisfaz as condições da definição 15.6.2.

15.6.6 Definição. Função Step Linear

Seja $\coprod_{i \in I}[a_i,b_i] =_{def} \lambda x \in D.\bigcup_{i \in I}[a_i,b_i](x)$ o supremo para a ordem pontual de funções one-step. Cada conjunto $\{(\{\alpha_i\},\{\beta_i\}) | i \in I\} \subseteq D^p \times E^p$ que admite um supremo linear especifica uma função

$$\coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}] =_{def} \lambda x \in D.\bigcup\{\{\beta_i\} | \exists i \in I, \alpha_i \in x\},$$

denominada de função step linear. ♦

Observe que a condição (i) da definição 15.6.2 implica em consistência e, portanto, $\coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}]$ realmente define uma função. Como a condição (ii) expressa a propriedade minimal, então quando $[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}]$ aparece como um elemento de uma função step tem-se que $\{\alpha_i\}$ é minimal para $\{\beta_i\}$.

Seja $\{(\{\alpha_i\},\{\beta_i\}) | i \in I\} \subseteq D^p \times E^p$ admitindo um supremo linear. Então:

15.6.7 Proposição

Tem-se que a função step $\coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}]$ é linear.

Prova:

Veja prova do teorema 15.6.5. ♦

15.6.8 Proposição

Para todo $j \in I$ tem-se que $\{\alpha_j\} \in \mu f^{-1}(\uparrow\{\beta_j\})$, onde $f = \coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}]$ e $\mu f^{-1}(\uparrow\{\beta_j\})$ é o conjunto dos pontos minimais de $f^{-1}(\uparrow\{\beta_j\})$.

Prova:

É análoga a da proposição 15.2.9. ♦

15.6.9 Proposição

Sejam $\{(\{\alpha_i\},\{\beta_i\}) | i \in I\} \subseteq D^p \times E^p$ e $\{(\{\alpha'_j\},\{\beta'_j\}) | j \in I\} \subseteq D^p \times E^p$ admitindo um supremos lineares. Então

$$\coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}] \leq_B \coprod_{j \in J}[\{\alpha_j\},\{\beta_j\}] \Leftrightarrow \{(\alpha_i,\beta_i) | i \in I\} \subseteq \{(\alpha'_j,\beta'_j) | j \in I\}.$$

Prova:

Segue do teorema 15.6.5 e da proposição 15.6.7. ♦

Como a ordem de Berry ou ordem estável é mais forte que a ordem pontual, é fácil reconhecer que as funções step lineares são elementos finitos no espaço de funções lineares. É possível provar por exaustão que elas constituem todos os elementos finitos no espaço de funções, mostrando-se que toda a função linear é o limite de uma cadeia de funções step lineares. Entretanto, é possível simplificar esta questão utilizando-se uma sugestão introduzida por T. Coquand [COQ 87], de forma análoga ao que foi realizado na seção 15.2.

15.6.10 Definição. Função Parâmetro Linear

Seja $f \in (D \xrightarrow{lin} E)$. A função definida como $[a,b,f] =_{def} \lambda x.b \cap f(a \cap x)$, onde $a \in D^0$, $b \in E^0$, é denominada de função parâmetro. ♦

Segue que:

15.6.11 Lema

$[a,b,f]$ é linear. ♦

15.6.12 Lema

$[a,b,f] \leq_B f$.

Prova:

Segue do lema 15.2.13. ♦

15.6.13 Lema

Toda função em $\left(D \xrightarrow{lin} E\right)$ que é estavelmente menor que $[a,b,f]$ é unicamente determinada por seus valores em a.

Prova:

Segue do lema 15.2.14. ♦

O lema 15.6.13 estabelece que existe apenas um número finito de funções lineares menores que $[a,b,f]$.

15.6.14 Proposição

Todo elemento finito de $\left(D \xrightarrow{lin} E\right)$ é da forma $\coprod_{i \in I} [a_i, b_i f]$, onde f é uma função linear, $a_i \in D^0, b_i \in E^0, i \in I$.

Prova:

Veja proposição 15.2.15. ♦

15.6.15 Teorema

Um função linear em $\left(D \xrightarrow{lin} E\right)$ é um elemento finito se é igual a uma função step linear $\coprod_{i \in I} [\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}]$ determinada por um conjunto $\{(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}) | i \in I\} \subseteq D^p \times E^p$ que admite um supremo linear.

Prova:

É imediato que as funções step lineares são elementos finitos pois são finitas como funções Scott segundo a ordem pontual. Mostra-se que todo elemento finito em $\left(D \xrightarrow{lin} E\right)$ é igual a uma função step linear. Da proposição 15.6.14, segue que todo elemento finito de $\left(D \xrightarrow{lin} E\right)$ é da forma $\coprod_{1 \leq i \leq n} [a_i, b_i f]$. Portanto, é suficiente provar que $\coprod_{1 \leq i \leq n} [a_i, b_i f]$ é igual a alguma função step linear. Para cada $1 \leq i \leq n$, escreve-se

$$\{d \in E^p | d \subseteq f(a_i) \cap b_i\} = \{\{\beta\} \in E^p | \beta \in f(a_i) \cap b_i\}$$

como $\{d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{ik}\} = \{\{\beta_{i1}\}, \{\beta_{i2}\}, \ldots, \{\beta_{ik}\}\}$. Seja $c_{ij} = \{\alpha_i\}$, tal que $d_{ij} \subseteq f(\{\alpha_i\}) \cap b_i$, ou seja, $\beta_{ij} \in f(\{\alpha_i\}) \cap b_i$, para cada $1 \leq j \leq k_i$, e seja

$$\coprod_{1\le i\le n}\coprod_{1\le j\le k_i}\left[c_{ij},d_{ij}\right]=\lambda x.\bigcup\left\{d_{ij}|c_{ij}\subseteq x\right\}$$
$$=\lambda x.\bigcup\left\{\left\{\beta_{ij}\right\}|c_{ij}\subseteq x\right\}$$

Tem-se que $\coprod_{1\le i\le n}\coprod_{1\le j\le k_i}\left[c_{ij},d_{ij}\right]=\coprod_{1\le i\le n}\left[a_i,b_i,f\right]$, pois, para cada i,

$$\bigcup\left\{d_{ij}|c_{ij}\subseteq x\right\}\subseteq\bigcup\left\{f\left(c_{ij}\right)\cap b_i|c_{ij}\subseteq x\right\}$$
$$\subseteq\left[a_i,b_i,f\right](x)$$

e, para cada primo $d=\{\beta\}\subseteq f\left(x\cap a_i\right)\cap b_i$ existe s tal que $d=d_{is}$ e $c_{is}\subseteq x\cap a_i$. É suficiente verificar que $\bigcup_{1\le i\le n}\left\{\left(c_{ij},d_{ij}\right)|1\le j\le k_i\right\}$ satisfaz as condições da definição 15.6.2. Considere $I\subseteq\bigcup_{1\le i\le n}\left\{(i,j)|1\le j\le k_i\right\}$, e, para todo $(i,j)\in I$, $c_{ij}\subseteq a$, para algum $a\in D$. Então, para cada $(i,j)\in I$, tem-se que $d_{ij}\subseteq f\left(c_{ij}\cap a_i\right)\cap b_i\subseteq f(a)$, o que prova a condição (i). A condição (ii) segue da definição de c_{ij}. ♦

15.6.16 Proposição

Os elementos primos completos de $\left(D\xrightarrow{lin}E\right)$ são da forma $\left[\{\alpha\},\{\beta\},f\right]$, onde f é uma função linear, $\{\alpha\}\in E^p$ é um elemento primo completo de D e $\{\beta\}\in E^p$ é um elemento primo completo de E tal que $\beta\in f(\{\alpha\})$.

Prova:

Segue da proposição 15.6.14 que cada $\left[\{\alpha\},\{\beta\},f\right]$ é um elemento primo completo. Na verdade, constituem todos os elementos primos completos porque para todo $[a,b,f]$, $[a,b,f]=\coprod_{j\in J}\left[\{\alpha_j\},\{\beta_j\},f\right]$, onde $\{\alpha\}\in E^p$, $\{\beta_j\}\in E^p$ são os elementos primos completos de D e E, respectivamente, tais que $\bigcup_{j\in J}\{\beta_j\}=f(\{\alpha\})\cap b$.

♦

15.6.17 Corolário

Um conjunto $\left\{\left(\{\alpha_i\},\{\beta_i\}\right)|i\in I\right\}\subseteq D^p\times E^p$ que admite um supremo linear determina um elemento primo completo $\coprod_{i\in I}\left[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}\right]$. ♦

15.7 Construções de Vizinhanças Lineares

Na seção 15.6 estudou-se uma caracterização dos elementos primos completos no espaço de funções lineares. É possível mostrar agora que a definição 15.5.2 introduz a noção de uma vizinhança linear. Suponha que D e E são espaços coerentes.

15.7.1 Proposição

Seja $\{(\{\alpha_i\},\{\beta_i\}) | i \in I\} \subseteq D^p \times E^p$ um conjunto que admite um supremo linear. Então tem-se que $f \in \uparrow\{\alpha_j\} \multimap \uparrow\{\beta_j\}$ para todo $j \in I$, onde f é uma abreviação para a função step $\coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\},\{\beta_i\}]$ determinada pelo conjunto $\{(\{\alpha_i\},\{\beta_i\}) | i \in I\} \subseteq D^p \times E^p$.

Prova:

Segue diretamente da proposição 15.6.8. ♦

15.7.2 Teorema

Sejam $A \in$ **KLN**(D) e $B \in$ **KLN**(E). Tem-se que $A \multimap B \in$ **KLN**$((D \xrightarrow{lin} E))$.

Prova:

Considerando a definição 15.5.1, segue de 15.4.2 que $A \multimap B$ é uma vizinhança estável. Mostra-se agora que $A \multimap B$ é uma vizinhança linear. Seja $X \subseteq (D \xrightarrow{lin} E)$ tal que para todo $f_a, f_b \in X$ ocorre que $\coprod\{f_a, f_b\} \in A \multimap B$. Por definição, $\mu A \subseteq \mu\left(\coprod\{f_a, f_b\}\right)^{-1}(B)$. Como A é compacto, μA é finito. Seja $\mu A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O fato de que $a_j \in \mu\left(\coprod\{f_a, f_b\}\right)^{-1}(B)$, para todo $1 \leq j \leq n$, implica que $\coprod\{f_a, f_b\}(a_j) \in B$, pelo lema 15.6.12. Então tem-se que $\coprod_{f \in X} f(a_j) \in B$, para todo $1 \leq j \leq n$, pois B é vizinhança linear. Isto significa que $a_j \in \mu\left(\coprod_{f \in X} f\right)^{-1}(B)$, para todo $1 \leq j \leq n$. Logo, conclui-se que $\mu A \subseteq \mu\left(\coprod_{f \in X} f\right)^{-1}(B)$, ou seja, $\coprod_{f \in X} f \in A \multimap B$. A prova de que $A \multimap B$ é compacto é análoga a do teorema 15.3.2.

Agora, considerando a definição 15.5.2, segue do teorema 15.4.2 que $A \multimap B$ é uma vizinhança estável. Ainda, considerando $X \subseteq [C \multimap D]$ tal que para todo $x,y \in X$, tem-se que $x \cup y \in A \multimap B$. Isto significa que $A \sqsubseteq_{\mu^*} F^{-1}_{lin(x \cup y)}[B]$, para todo $x,y \in X$, ou seja, $\mu A \subseteq \mu F^{-1}_{lin(x \cup y)}[B]$. Como A é compacto, μA é finito. Seja $\mu A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O fato de que $a_j \in \mu F^{-1}_{lin(x \cup y)}[B]$ implica que $F_{lin(x \cup y)}(a_j) \in B$. Logo, tem-se que $F_{lin(x)}(a_j) \cup F_{lin(y)}(a_j) \in B$, para todo $1 \leq j \leq n$ e $x,y \in X$. Como B é vizinhança linear, conclui-se que $\bigcup_{x \in X} F_{lin(x)}(a_j) \in B$, ou seja, $F_{lin(\bigcup X)}(a_j) \in B$. Isto quer dizer que $a_j \in \mu F^{-1}_{lin(\bigcup X)}[B]$, isto é, $\mu A \subseteq \mu F^{-1}_{lin(\bigcup X)}[B]$. Portanto, tem-se que $A \sqsubseteq_{\mu^*} F^{-1}_{lin(\bigcup X)}[B]$, ou seja, $\bigcup X \in A \multimap B$. A prova de que $A \multimap B$ é compacto é análoga a o teorema 15.3.2. ♦

Salienta-se que $\overline{e_0} \multimap \overline{e_1} = \{x \in D \multimap E | (e_0, e_1) \in x\}$, onde $\overline{e_0} = \{x_0 \in D | e_0 \in x_0\}$ e $\overline{e_1} = \{x_1 \in E | e_1 \in x_1\}$. De fato, seja $x \in D \multimap E$ e $(e_0, e_1) \in x$. Então tem-se que $\{e_1\} \subseteq F_{lin(x)}(\{e_0\})$ e $\{e_0\} \in \mu F^{-1}_{lin(x)} \overline{e_1}$. Portanto, tem-se que $x \in (\overline{e_0} \multimap \overline{e_1})$. Por outro lado, suponha que $x \in (\overline{e_0} \multimap \overline{e_1})$. Tem-se então que $\{e_0\} \in \mu F^{-1}_{lin(x)} \overline{e_1}$. Portanto, conclui-se que $\{e_1\} \supseteq F_{lin(x)}(\{e_0\})$ e $(e_0, e_1) \in x$.

Pela observação do parágrafo anterior, segue que cada vizinhança linear compacta de $(D \xrightarrow{lin} E)$ pode ser construída a partir de $A \multimap B$ utilizando-se união e interseção finitas. Além disso, para $x, y \in D \multimap E$, $x \subseteq y$ se e somente se $x \in (A \multimap B)$ implica em $y \in (A \multimap B)$ para toda $A \in \mathbf{LN}(D)$, $B \in \mathbf{LN}(E)$. Portanto a construção dada no teorema anterior está de acordo com os requisitos propostos.

15.7.3 Proposição

Sejam $f, g \in (D \xrightarrow{lin} E)$ tais que $f \leq_B g$. Então sempre que $f \in A \multimap B$ então tem-se que $g \in A \multimap B$, para toda $A \in \mathbf{LN}(D)$, $B \in \mathbf{LN}(E)$.
Prova:

Segue da proposição 15.3.3. ♦

O teorema a seguir estabelece que para um conjunto que admite um supremo linear, tomando-se a interseção de vizinhanças lineares $\uparrow\{\alpha_i\} \multimap \uparrow\{\beta_i\}$, com $I \in I$, obtém-se uma vizinhança linear principal consistindo de todas as funções lineares que dominam a função step linear $\coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}]$ segundo a ordem estável de Berry.

15.7.4 Teorema

Seja $\{(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}) | i \in I\} \subseteq D^p \times E^p$ um conjunto admitindo um supremo linear. Então tem-se que

$$\bigcap_{i \in I}(\uparrow\{\alpha_i\} \multimap \uparrow\{\beta_i\}) = \uparrow\left[\coprod_{i \in I}[\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}]\right].$$

Prova:

É análoga a do teorema 15.3.5. ♦

O teorema a seguir fornece uma caracterização para as vizinhanças lineares do produto tensorial.

15.7.5 Teorema

Sejam $A \in$**KLN**(D), $B \in$**KLN**(E). Então $A \otimes B \in$**KLN**($D \otimes E$), onde $A \otimes B =_{def} \{x \in D \otimes E | \exists x_0 \in A, x_1 \in B, x_0 \times x_1 \subseteq_{fin} x\}$ e $D \otimes E$ é o produto tensorial dos espaços coerentes D e E, definido em 3.6.2.

Prova:

Segue do teorema 15.4.3 que $A \otimes B$ é uma vizinhança estável. Mostra-se agora que $A \otimes B$, quando definido a partir de vizinhanças lineares $A \in$**KLN**(D) e $B \in$**KLN**(E), é também uma vizinhança linear.

Seja $X \subseteq D \otimes E$ tal que para todo $x,y \in X$ tem-se que $x \cup y \in A \otimes B$. Então tem-se que existem $x_0 \in A$, $x_1 \in B$ tais que $x_0 \times x_1 \subseteq_{fin} x \cup y$, para todo $x,y \in X$. Então existem $x_0 \in A$, $x_1 \in B$ tais que para todo $\alpha \in x_0, \beta \in x_1$ ocorre que $(\alpha,\beta) \in x$ ou $(\alpha,\beta) \in y$. Supor que $(\alpha,\beta) \in x$. Segue que existem $x_0 \in A$, $x_1 \in B$ tais que para todo $\alpha \in x_0, \beta \in x_1$ ocorre que $(\alpha,\beta) \in \bigcup X$. Isto significa que existem $x_0 \in A$, $x_1 \in B$ tais que $x_0 \times x_1 \subseteq_{fin} \bigcup X$, ou seja, $\bigcup X \in A \otimes B$. Resultado análogo obtém-se supondo $(\alpha,\beta) \in y$. Conclui-se que $A \otimes B$ é uma vizinhança linear. A prova de que $A \otimes B$ é compacta é similar a do teorema 15.4.3. ♦

Da prova do teorema 15.7.5 pode-se ver que $\overline{e_0} \otimes \overline{e_1} = \{x \in D \otimes E | (e_0, e_1) \in x\}$, onde $\overline{e_0} = \{x_0 \in D | e_0 \in x_0\}$ e $\overline{e_1} = \{x_1 \in E | e_1 \in x_1\}$. Também está claro que utilizando-se a união e interseção finita pode-se obter todas as vizinhanças lineares compactas de $D \otimes E$ a partir das vizinhanças lineares compactas da forma $A \otimes B$. Além disso, para todo $x,y \in D \otimes E$, tem-se que $x \subseteq y$ se e somente se $x \in A \otimes B$ implica $y \in A \otimes B$, para todo $A \in$**LN**(D),$B \in$**LN**(E). Portanto a construção dada no teorema 15.7.5 está de acordo com os requisitos propostos.

15.7.6 Teorema

Seja $A \in$**KLN**(D). Então $!A \in$**KLN**($!D$), onde $!A =_{def} \{x \in !D | x \cap \mu A \neq \emptyset\}$.

Prova:

Tem-se que $!A$ é uma vizinhança estável pelo teorema 15.4.3. Agora seja $X \subseteq !D$ um subconjunto tal que para todo $x,y \in X$ tem-se que $x \cup y \in !A$. Então ocorre que $(x \cup y) \cap \mu A \neq \emptyset$. Tem-se assim que $(x \cap \mu A) \cup (y \cap \mu A) \neq \emptyset$. Logo, conclui-se que $(x \cap \mu A) \neq \emptyset$ ou $(y \cap \mu A) \neq \emptyset$. Suponha que $(x \cap \mu A) \neq \emptyset$. Então conclui-se que $(\bigcup X \cap \mu A) \neq \emptyset$. O mesmo resultado se obtém supondo $(y \cap \mu A) \neq \emptyset$. Portanto, tem-se que $\bigcup X \in !A$. Logo, $!A$ é uma vizinhança linear. A prova de que $!A$ é compacto é análoga a do teorema 15.4.3. ♦

Observe que para todo $x,y \in !D$, $x \subseteq y$ se e somente se $x \in !A$ implica em $y \in !A$, para todo $A \in$**LN**(D). Portanto a construção dada no teorema 15.7.6 está de acordo com os requisitos propostos.

Salienta-se que, considerando-se $A \in$**KSN**(D), $B \in$**KSN**(E) e o isomorfismo $I: \left(D \xrightarrow{St} E\right) \to \left(!D \xrightarrow{lin} E\right)$, chega-se ao importante resultado de que $A \to B = (!A) \multimap B$, onde

$$A \to B \in \mathbf{KSN}(\left(D \xrightarrow{St} E\right)) \text{ e } (!A) \multimap B \in \mathbf{KSN}(\left(!D \xrightarrow{lin} E\right)).$$

Segue que:

15.7.7 Proposição

Sejam $A \in$**KLN**(D), $B \in$**KLN**(E) e o isomorfismo $I: \left(D \xrightarrow{St} E\right) \to \left(!D \xrightarrow{lin} E\right)$. Tem-se que $x \in A \multimap B$ se e somente se $x \in (!A) \multimap B$.

16 Uma Caracterização Topológica para Espaços Coerentes Bi-Estruturados: a estrutura topológica de informação

Seja $\mathsf{A} = (\Lambda_{\mathbb{A}}, \Sigma_{\mathbb{A}})$, onde $\Lambda_{\mathbb{A}} = \{\mathbb{A}, \wp(\mathbb{A})\}$, o sistema ordenado de 2ª ordem cuja representação global é dada pelo espaço coerente bi-estruturado $(\Lambda_{\Pi A}, \Sigma^{in}_{\Pi A}, \Sigma^{ap}_{\Pi A})$, com $\Lambda_{\Pi A} = \{\Pi A, \wp(\Pi A)\}$, obtido pelo processo de construção global a partir do sistema básico (Λ_A, Σ_A), onde $\Lambda_A = \{A, \wp(A)\}$.

A caracterização topológica proposta para $(\Lambda_{\Pi A}, \Sigma^{in}_{\Pi A}, \Sigma^{ap}_{\Pi A})$ está organizada em dois níveis: o de informação, que captura, internamente, as noções de estabilidade e linearidade na estrutura de informação $\Sigma^{in}_{\Pi A}$, e o de aplicação, que especifica, externamente, a ação da função distância generalizada, definida na estrutura de aplicação $\Sigma^{ap}_{\Pi A}$.

Neste capítulo introduz-se a estrutura topológica de informação para o espaço coerente bi-estruturado $(\Lambda_{\Pi A}, \Sigma^{in}_{\Pi A}, \Sigma^{ap}_{\Pi A})$, com base nas noções de espaços de vizinhanças introduzidos nos capítulos 13 e 14. No capítulo 17 é introduzida a estrutura topológica para a estrutura de aplicação, assim como o relacionamento entre os dois níveis de caracterização.

Para definir a estrutura topológica de informação, introduz-se o espaço de vizinhanças lineares (ΠA,**LN**(ΠA)) (veja capítulo 14), caracterizando-o em função de sua base de informação, que é enumerável.

A principal idéia aqui é de que um espaço coerente pode ser considerado como uma coleção de estados de computação de um certo tipo. As vizinhanças lineares podem ser entendidas como as propriedades destes estados de computação. Construções sobre espaços coerentes podem ser tomadas como as formas de combinar estes estados de computação entre si. As construções correspondentes sobre as vizinhanças lineares geram regras de prova para racionar sobre os estados de computação no mundo estável e linear.

É importante aqui a capacidade de determinar os objetos do espaço (estados de computação) por meio de suas propriedades, assim como as propriedades de um estado de computação devem ser determinadas pelas propriedades de seus componentes. As construções de vizinhanças lineares devem englobar estas duas condições.

Além disso, o espaço de vizinhanças lineares deve ser capaz de representar internamente a estrutura topológica de aplicação. Isto deve ser garantido pela existência de uma bijeção entre o conjunto dos interiores das vizinhanças lineares básicas relativas ao subespaço dos objetos quasi-totais e a base da topologia de aplicação também relativa ao mesmo subespaço.

16.1 Uma Caracterização Topológica para a Estrutura de Informação Σ_{IIA}^{in}

Nesta seção introduz-se a estrutura topológica de informação do espaço coerente bi-estruturado $(\Lambda_{IIA}, \Sigma_{IIA}^{in}, \Sigma_{IIA}^{ap})$, que é dada pelo espaço de vizinhanças lineares $(IIA, \mathbf{LN}(IIA))$ (definição 14.4.1).

Seja $X \in A$, onde A é o conjunto básico.

16.1.1 Definição. Vizinhança

Chama-se de vizinhança de um objeto $x \in IIA$, e denota-se por $\uparrow x$, a coleção de todos os objetos $y \in IIA$, tal que $x \subseteq y$, ou seja, $\uparrow x = \{y \in IIA | x \subseteq y\}$. ♦

16.1.2 Proposição

Tem-se que $\uparrow \{X\}$ é uma vizinhança linear.
prova:

Deve-se provar as condições da definição 14.4.1. Mostra-se primeiramente que $\uparrow \{X\}$ é um aberto Scott. Seja então $z \in \uparrow \{X\}$. Tem-se que $X \in z$. Logo, para todo $w \in IIA$ tal que $z \subseteq w$, também ocorre que $X \in w$, ou seja, $w \in \uparrow \{X\}$.

Agora, suponha que $B \subseteq IIA$ è dirigido e $\bigcup B \in \uparrow\{X\}$. Então tem-se que $\{X\} \subseteq \bigcup B$. Então segue que existem $y \in B$, tal que $X \in y$, ou seja, $\{X\} \subseteq y$. Logo, conclui-se que $y \in \uparrow \{X\}$, e, portanto, $B \cap \uparrow\{X\} \neq \varnothing$. Segue que $\uparrow \{X\}$ é um aberto Scott.

Considere $x,y \in \uparrow \{X\}$, tais que $x \cup y \in IIA$. Então tem-se que $\{X\} \subseteq x$ e $\{X\} \subseteq y$. Isto significa que $\{X\} \subseteq (x \cap y)$, e, portanto, $(x \cap y) \in \uparrow\{X\}$. Conclui-se que $\uparrow \{X\}$ é uma vizinhança estável.

Agora, suponha que $B \subseteq IIA$ é tal que para todo $x,y \in B$ tem-se que $(x \cup y) \in \uparrow\{X\}$. Isto significa que $\{X\} \subseteq (x \cup y)$, para todo $x,y \in B$, ou seja, tem-se que $X \in x$ ou $X \in y$. Portanto, é imediato que $X \in \bigcup B$, ou seja, $\bigcup B \in \uparrow\{X\}$. Conclui-se que $\uparrow \{X\}$ é uma vizinhança linear. ♦

16.1.3 Proposição

Para todo $\{X\} \in IIA$, $\{\{X\}\} = \mu(\uparrow \{X\})$.
prova:

Segue da definição 14.2.10 e proposição 14.4.5. ♦

Observe que $\{X\} \in IIA^0$, $\{X\} \in IIA_{uni}$. Segue que:

16.1.4 Proposição

$\uparrow\{X\}$ é uma vizinhança estável principal.

prova:

Segue da definição 14.2.9 e proposição 16.1.2. ♦

16.1.5 Proposição

$\uparrow\{X\}$ é uma vizinhança linear principal.

prova:

Segue da definição 14.4.4 e proposição 16.1.2. ♦

Seja $\mathrm{IL}A_{uni}$ a família de conjuntos coerentes unitários de $\mathrm{IL}A$.

16.1.6 Proposição

Para todo $U \in \mathbf{LN}(\mathrm{IL}A)$, existe um conjunto $K \subseteq \mathrm{IL}A_{uni}$, para o qual vale que para cada $\{X'\},\{X''\} \in K$, se tem $X' \cap X'' = \varnothing$, tal que $U = \bigcup\{\uparrow\{X\} \mid \{X\} \in K\}$.

prova:

Segue da proposição 14.4.6. ♦

16.1.7 Proposição

Para todo $U \in \mathbf{LN}(\mathrm{IL}A)$, tem-se que $U = \dot{\bigcup}\{\uparrow\{X\} \mid \{X\} \in \mathrm{IL}A\}$.

prova:

Segue da proposição 16.1.6 e corolário 14.8.7. ♦

16.1.8 Proposição

Tem-se que $\mathrm{B}^{lin}_{\mathrm{IL}A} = \{\uparrow\{X\} \mid \{X\} \in \mathrm{IL}A\}$ é uma base enumerável para ($\mathrm{IL}A$,$\mathbf{LN}(\mathrm{IL}A)$).

prova:

Segue da definição 14.1.2, corolário 14.4.7 e proposição 16.1.7, e do fato que o conjunto básico A é enumerável. ♦

16.1.9 Corolário

($\mathrm{IL}A$,$\mathbf{LN}(\mathrm{IL}A)$) é um espaço de vizinhanças lineares segundo contável.

prova:

Segue da definição 14.1.4 e da proposição 16.1.8. ♦

O resultado a seguir é imediato:

16.1.10 Proposição

Para todo $x \in \mathrm{IL}A$, se $x \in \uparrow\{X\}$ então tem-se que $i(x) \subseteq X$. ♦

16.1.11 Definição. Índice de uma Vizinhança Linear em $\text{II}A$

Chama-se de índice de uma vizinhança linear $U \in \mathbf{LN}(\text{II}A)$, e denota-se por $i(U)$, o conjunto formado por todos os índices dos pontos minimais de U, ou seja, $i(U) = \{i(m) | m \in \mu(U)\}$. ♦

16.1.12 Definição. Operador de Interior

Sejam $U \in \mathbf{LN}(\text{II}A)$ e $x \in \text{II}A$. Diz-se que $x \in \text{int}(U)$ se e somente se $x \in U$ e $i(x) \subset X$, para algum $X \in i(U)$, onde $i(U)$ é o índice de U definido em 16.1.11. ♦

16.1.13 Proposição

O operador int, como definido em 16.1.12, é realmente um operador de interior para EVGs.
prova:

De fato, sejam $U,V \in \mathbf{LN}(\text{II}A)$. Se $U \cap V = \emptyset$ então é imediato que $\text{int}(U \cap V) = \text{int}(U) \cap \text{int}(V)$. Considere então que $U \cap V \neq \emptyset$. Logo, pela proposição 16.1.6, tem-se que $U = \bigcup\{\uparrow\{X\} | \{X\} \in K_U\}$ e $V = \bigcup\{\uparrow\{Y\} | \{Y\} \in K_V\}$, para $K_U, K_V \subseteq \text{II}A_{uni}$, tal que para cada $\{X'\},\{X''\} \in K_U$, $X' \cap X'' = \emptyset$, e para cada $\{Y'\},\{Y''\} \in K_V$, $Y' \cap Y'' = \emptyset$. Então ocorre que $U \cap V = \bigcup\{\uparrow\{Z\} | \{Z\} \in K_U \cap K_V\}$, para $K_U \cap K_V \subseteq \text{II}A_{uni}$, tal que para cada $\{Z'\},\{Z''\} \in K_U \cap K_V$, $Z' \cap Z'' = \emptyset$. Seja $x \in \text{II}A$ tal que $i(x) = W$ e $x \in \text{int}(U \cap V)$. Então, pela definição 16.1.12, tem-se que $x \in U \cap V = \bigcup\{\uparrow\{Z\} | \{Z\} \in K_U \cap K_V\}$ e $W \subset Z'''$, para algum $Z''' \in i(U \cap V)$. Isto significa que $x \in U = \bigcup\{\uparrow\{X\} | \{X\} \in K_U\}$ e $W \subset Z'''$, para algum $Z''' \in i(U)$, assim como $x \in V = \bigcup\{\uparrow\{Y\} | \{Y\} \in K_V\}$ e $W \subset Z'''$ para algum $Z''' \in i(V)$. Conclui-se assim que $x \in (\text{int}(U) \cap \text{int}(V))$. Da mesma forma mostra-se que se $U \cap V \neq \emptyset$ e $x \in (\text{int}(U) \cap \text{int}(V))$ então $x \in \text{int}(U \cap V)$. Portanto, é válido que $\text{int}(U \cap V) = \text{int}(U) \cap \text{int}(V)$. ♦

16.1.14 Corolário

Para todo $x \in \text{II}A$, se $x \in \text{int}(\uparrow\{X\})$ então tem-se que $i(x) \subset X$. ♦

16.2 A Estrutura Topológica de Informação do Espaço Coerente Bi-Estruturado de Intervalos Racionais $\left(\Lambda_{\text{II}Q}, \Sigma^{in}_{\text{II}Q}, \Sigma^{ap}_{\text{II}Q}\right)$

Nesta seção aplicam-se os resultados obtidos em 16.1 para definir um espaço de vizinhanças lineares sobre o espaço coerente intervalar bi-estruturado $\left(\Lambda_{\text{II}Q}, \Sigma^{in}_{\text{II}Q}, \Sigma^{ap}_{\text{II}Q}\right)$, obtendo assim uma estrutura topológica de informação $(\text{II}Q, \mathbf{LN}(\text{II}Q))$ para a representação global do sistema dos números reais R e do sistema de intervalos reais IR.

Uma vizinhança linear principal é dada por $\uparrow\{[p,q]\}$, onde $[p,q]\in IQ$ e IQ é o conjunto de intervalos racionais.

Para toda vizinhanças linear $U \in$**LN**(IIQ), existe um conjunto $K \subseteq \mathrm{II}Q_{uni}$, para a qual vale que para cada $\{[p',q']\},\{[p'',q'']\}\in K$, se tem $[p',q']\cap[p'',q'']=\varnothing$, tal que $U=\bigcup\{\uparrow\{[p,q]\}|\{[p,q]\}\in K\}$. Isto significa que para todo $U \in$**LN**(IIQ), tem-se que $U=\dot{\bigcup}\{\uparrow\{[p,q]\}|\{[p,q]\}\in \mathrm{II}Q_{uni}\}$. Segue que $\mathrm{B}^{lin}_{\mathrm{II}Q}=\{\uparrow\{[p,q]\}|\{[p,q]\}\in \mathrm{II}Q_{uni}\}$ é uma base enumerável para (IIQ,**LN**(IIQ)), e, portanto, (IIQ,**LN**(IIQ)) é um espaço de vizinhanças lineares segundo contável, para o qual é possível definir um espaço de vizinhanças de informação linear (IIQ,$\mathcal{N}$), segundo a definição 14.4.4.

16.3 O Subespaço dos Objetos Quasi-Totais de IIQ

Obtém-se agora o subespaço de vizinhanças lineares dos objetos quasi-totais.

Para caracterizar as vizinhanças lineares relativas ao sistema $\mathsf{qtot}_{\mathrm{II}Q}$ dos objetos quasi-totais introduz-se a noção de bi-intervalo.

16.3.1 Definição. Bi-Intervalo Real (Racional) Fechado

Seja $\mathbb{IR}$ o conjunto dos intervalos reais e $[p;q]\in\mathbb{IR}$. Chama-se de bi-intervalo real fechado de guia $[p;q]$, e denota-se por $[[p;q]]$, o conjunto de intervalos reais cujos extremos variam entre p e q, isto é:

$$[[p;q]]=\{[a,b]\in\mathbb{IR}|\,p\le a\le b\le q\}.$$

O intervalo real $[p;q]$ é chamado de guia do bi-intervalo. O interior do bi-intervalo $[[p;q]]$, dado pelo conjunto de intervalos reais

$$(([p;q]))=\{X\in[[p;q]]|\,[p,p]<_{\mathbb{IR}} X<_{\mathbb{IR}}[q,q]\},$$

é denominado de bi-intervalo aberto real de guia $[p;q]$.

Os conjuntos $\{X\in[[p;q]]|\,l_{IQ}(X)=p\}$ e $\{X\in[[p;q]]|\,r_{IQ}(X)=q\}$ são os extremos inferior e superior do bi-intervalo $[[p;q]]$, respectivamente, onde $l_{IQ}(X)$ e $r_{IQ}(X)$ são os extremos inferior e superior de um intervalo real X. O conjunto de todos os bi-intervalos reais é denotado por $[\mathbb{IR}]$.

Analogamente define-se bi-intervalo racional fechado de guia $[p;q]$, cujo conjunto é denotado por $[IQ]$. ♦

16.3.2 Exemplo

Para maior compreensão, observe uma representação do bi-intervalo $[[3;5]]$ dada na figura 16.1.

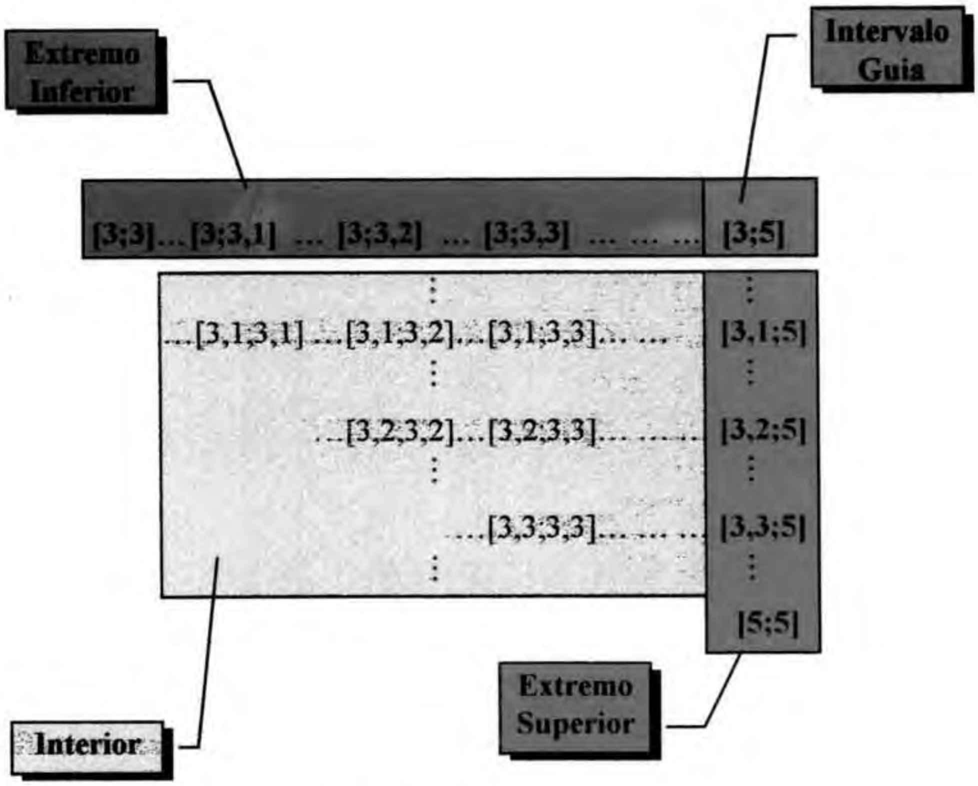


FIGURA 16.1 Bi-intervalo [[3;5]]

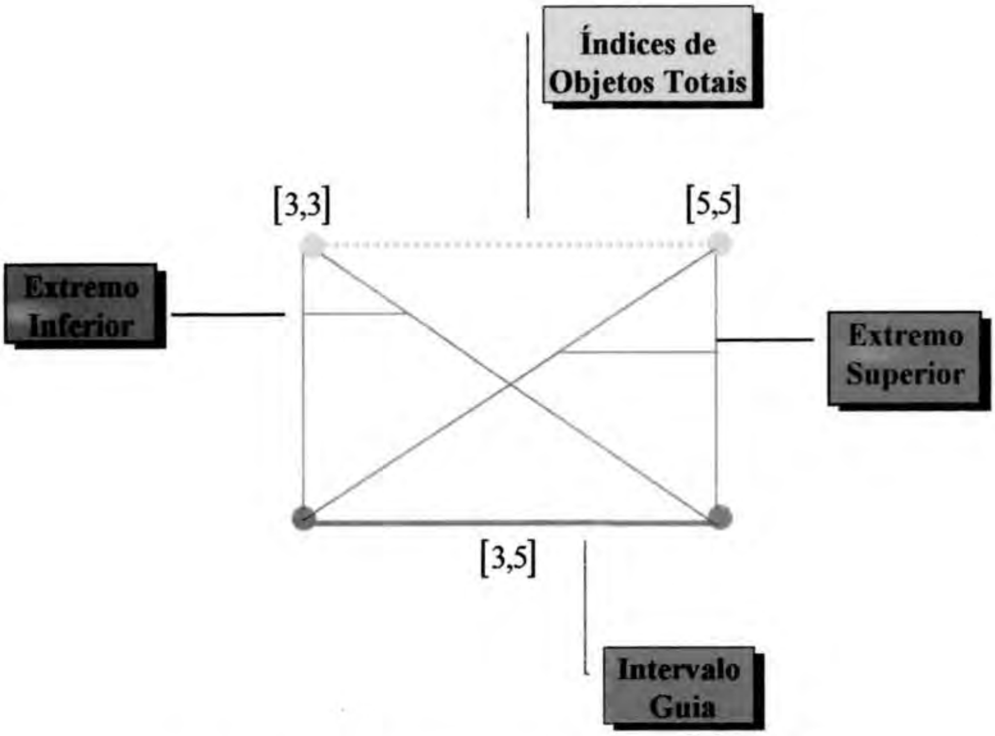


FIGURA 16.2 Interpretação do Bi-intervalo [[3;5]]

A figura 16.2 fornece uma interpretação gráfica do mesmo bi-intervalo $[[3;5]]$ representado na figura 16.1, considerando-se que cada intervalo representa o índice de um conjunto coerente. A ordem de informação ordena seus componentes de baixo para cima, começando pelo intervalo guia até os intervalos pontuais, que representam os índices dos objetos totais.

16.3.3 Proposição

Uma vizinhança linear relativa básica em *qtot*(II*Q*) é dada por $\uparrow\{[p,q]\}_{qtot} = \uparrow\{[p,q]\} \cap qtot(\mathrm{II}Q)$, com $[p,q] \in IQ$.

prova:

Segue da definição 14.2.17 e proposição 14.4.9. ♦

16.3.4 Proposição

(*qtot*(II*Q*),**LN**(*qtot*(II*Q*))), onde para todo $V \in$**LN**(*qtot*(II*Q*)), $V = U_{qtot} = qtot(\mathrm{II}Q) \cap U$, com $U \in$**LN**(II*Q*), é um subespaço de vizinhanças lineares de (II*Q*,**LN**(II*Q*)).

prova:

Segue das proposições 14.2.18 e 14.4.9. ♦

16.3.5 Corolário

O conjunto $\mathrm{B}^{in}_{qtot} = \left\{\uparrow\{[p,q]\}_{qtot} \mid \{[p,q]\} \in \mathrm{II}Q_{uni}\right\}$ é uma base de informação enumerável para (*qtot*(II*Q*),**LN**(*qtot*(II*Q*))). ♦

A seguinte proposição é imediata:

16.3.6 Proposição

Para todo $x \in qtot(\mathrm{II}Q)$, tem-se que $x \in \uparrow\{[p,q]\}_{qtot}$ se e somente o intervalo real que representa o índice real de *x*, *ir*(*x*), está no bi-intervalo cujo guia é o intervalo racional [*p*,*q*], isto é, $ir(x) \in [[p,q]]$.

prova:

Segue da proposição 16.1.10. ♦

16.3.7 Proposição

Toda vizinhança básica relativa $\uparrow\{[p,q]\}_{qtot}$ em *qtot*(II*Q*) é uma vizinhança linear.

prova:

De fato, tem-se que: (i) $x \in \uparrow\{[p,q]\}_{qtot}$ e $x \sqsubseteq y \in qtot(\mathrm{II}Q)$ implica em $ir(y) \in [[p,q]]$, e, portanto, $y \in \uparrow\{[p,q]\}_{qtot}$, pela proposição 16.3.6. Agora (ii) seja *A* um subconjunto dirigido tal que $\bigcup A \in \uparrow\{[p,q]\}_{qtot}$ e suponha que $\uparrow\{[p,q]\}_{qtot} \cap A = \varnothing$. Isto significa que para todo $x \in A$, ocorre que $i(x) \not\subseteq [p,q]$ e $i(\bigcup A) = \bigcap_{x \in A} i(x) \not\subseteq [p,q]$, o que é uma contradição, e, portanto, $\uparrow\{[p,q]\}_{qtot} \cap A \neq \varnothing$. Ainda, (iii) se $x,y \in \uparrow\{[p,q]\}_{qtot}$ tal que $x \cup y \in$ IIQ, então $x \cap y \in \uparrow\{[p,q]\}_{qtot}$, pela proposição 16.3.6, pois $ir(x \cap y) \in [[p,q]]$. Finalmente, (iv) considere um subconjunto A de $qtot$(IIQ) tal que para todo $x,y \in A$ tem-se que $x \cup y \in \uparrow\{[p,q]\}_{qtot}$. Observe que isto significa que $x \cup y \in qtot$(IIQ), e, portanto, $x \subseteq y$ ou $y \subseteq x$. Além disso, tem-se que $[p,q] \in x \cup y$, e, assim, sempre é válido que $[p,q] \in x$ ou $[p,q] \in y$, para cada $x,y \in A$. Conclui-se então que $[p,q] \in \bigcup A$, ou seja, $\bigcup A \in \uparrow\{[p,q]\}_{qtot}$. ♦

Segue que:

16.3.8 Proposição

Para todo $x \in qtot$(IIQ), tem-se que $x \in \operatorname{int}\left(\uparrow\{[p,q]\}_{qtot}\right)$ se e somente se $ir(x)$ está no interior do bi-intervalo $[[p;q]]$, isto é $x \in ([p;q])$.

16.4 O Subespaço dos Objetos Totais de IIQ

Obtém-se agora o subespaço de vizinhanças lineares dos objetos totais.

16.4.1 Proposição

Um vizinhança linear relativa básica em tot(IIQ) é dada por $\uparrow\{[p,q]\}_{tot} = \uparrow\{[p,q]\} \cap tot(\text{II}Q)$.
prova:

Segue da definição 14.2.17 e da proposição 14.4.9. ♦

16.4.2 Proposição

(tot(IIQ),**LN**(tot(IIQ))), onde para todo $V \in$ **LN**(tot(IIQ)), $V = U_{tot}$, com $U \in$ **LN**(IIQ), é um subespaço de vizinhanças lineares de (IIQ,**LN**(IIQ)).
prova:

Segue das proposições 14.2.18 e 14.4.9. ♦

16.4.3 Corolário

O conjunto $\mathrm{B}^{in}_{tot} = \left\{\uparrow\{[p,q]\}_{tot} \mid \{[p,q]\} \in \text{II}Q_{uni}\right\}$ é uma base de informação enumerável para (tot(IIQ),**LN**(tot(IIQ))). ♦

A seguinte proposição é imediata:

16.4.4 Proposição

Para todo $x \in tot(\Pi Q)$, tem-se que $x \in \uparrow\{[p,q]\}_{tot}$ se e somente se $x_p \leq_{tot} x \leq_{tot} x_q$. ♦

Observe que toda vizinhança básica $\uparrow\{[p,q]\}_{tot}$ em $tot(\Pi Q)$ é trivialmente uma vizinhança linear, pois em $tot(\Pi Q)$ a ordem de informação se torna trivial, uma vez que todo objeto total "concentra a totalidade de informação", e, portanto, não é aproximação de nem nenhum outro objeto do espaço, além de si próprio.

16.4.5 Proposição

Toda vizinhança básica relativa $\uparrow\{[p,q]\}_{tot}$ em $tot(\Pi Q)$ é uma vizinhança linear.

prova:

De fato, tem-se que: (i) $x \in \uparrow\{[p,q]\}_{tot}$ e $x \subseteq y \in tot(\Pi Q)$ implica em $x = y \in \uparrow\{[p,q]\}_{tot}$; (ii) todo subconjunto dirigido é da forma $A = \{a\}$, com $a \in tot(\Pi Q)$, e, portanto, se $\bigcup A = a \in \uparrow\{[p,q]\}_{tot}$, então, $\uparrow\{[p,q]\}_{tot} \cap A \neq \emptyset$; (iii) se $x,y \in \uparrow\{[p,q]\}_{tot}$ tal que $x \cup y \in \Pi Q$, então somente pode ser $x = y$, o que resulta em $x \cap y \in \uparrow\{[p,q]\}_{tot}$. Finalmente, (iv) considere um subconjunto A de $tot(\Pi Q)$ tal que para todo $x,y \in A$ tem-se que $x \cup y \in \uparrow\{[p,q]\}_{tot}$. Observe que isto significa que $x \cup y \in tot(\Pi Q)$, e, portanto, somente pode ser $x = y$, ou seja, o subconjunto em questão é da forma $A = \{a\}$, com $a \in tot(\Pi Q)$. Além disso, tem-se que $[p,q] \in a$, e, assim, sempre é válido que $[p,q] \in \bigcup A$, ou seja, $\bigcup A \in \uparrow\{[p,q]\}_{tot}$. ♦

Os resultado a seguir é imediato:

16.4.6 Proposição

Para todo $x \in tot(\Pi Q)$, tem-se que $x \in \text{int}(\uparrow\{[p,q]\}_{tot})$ se e somente se $x_p <_{tot} x <_{tot} x_q$. ♦

17 Uma Caracterização Topológica para Espaços Coerentes Bi-Estruturados: a estrutura topológica de aplicação

Seja $\mathsf{A} = (\Lambda_{\mathbb{A}}, \Sigma_{\mathbb{A}})$, onde $\Lambda_{\mathbb{A}} = \{\mathbb{A}, \wp(\mathbb{A})\}$, o sistema ordenado de 2ª ordem cuja representação global é dada pelo espaço coerente bi-estruturado $(\Lambda_{\mathrm{II}A}, \Sigma^{in}_{\mathrm{II}A}, \Sigma^{ap}_{\mathrm{II}A})$, com $\Lambda_{\mathrm{II}A} = \{\mathrm{II}A, \wp(\mathrm{II}A)\}$, obtido pelo processo de construção global a partir do sistema básico (Λ_A, Σ_A), onde $\Lambda_A = \{A, \wp(A)\}$.

No capítulo 16 apresentou-se uma caracterização topológica para a estrutura de informação $\Sigma^{in}_{\mathrm{II}A}$. Neste capítulo é introduzida uma caracterização topológica para a estrutura de aplicação $\Sigma^{ap}_{\mathrm{II}A}$, com uma discussão sobre o relacionamento entre os dois níveis de caracterização.

O objetivo principal deste capítulo é garantir que a estrutura de aplicação seja dotada de um EVG induzido pela função distância generalizada (veja seção 13.3) de tal forma que, considerando os objetos do espaço coerente como uma coleção de estados de computação de um certo tipo, seja possível estudar seu comportamento de forma quantitativa, isto é, através da propriedade de "proximidade quantitativa" - relativa à posição e não à quantidade de informação ("proximidade qualitativa") - representada em tal EVG. Assim, as construções em um EVG induzido por uma função distância generalizada geram regras para racionar sobre a posição relativa dos objetos segundo a relação de posição $\leq_{\mathrm{II}A}$, definida na estrutura de aplicação $\Sigma^{ap}_{\mathrm{II}A}$.

Salienta-se que deve ser garantida a existência de um Σ_{ap}-isomorfismo topológico entre o subsistema $\mathsf{tot}_{\mathrm{II}A}$ dos objetos totais e o sistema A, isto é, deve existir um homeomorfismo entre o subespaço topológico de aplicação dos objetos totais $tot(\mathrm{II}A)$ e o conjunto $\mathbb{A}$, munido de sua topologia usual. Da mesma forma, também deve existir um Σ_{ap}-isomorfismo topológico entre o subsistema $\mathsf{qtot}_{\mathrm{II}A}$ dos objetos quasi-totais e o sistema intervalar IA, isto é, deve existir um homeomorfismo entre o subespaço topológico de aplicação dos objetos quasi-totais $qtot(\mathrm{II}A)$ e o conjunto $\mathbb{IA}$ de intervalos de elementos de $\mathbb{A}$, munido de uma topologia adequada.

Além disso, deve-se alcançar um relacionamento entre a estrutura qualitativa de informação e a estrutura quantitativa de aplicação. Este relacionamento deve ser caracterizado pela existência de uma bijeção entre a base enumerável da topologia de aplicação relativa ao subespaço dos objetos quasi-totais e o conjunto dos interiores das vizinhanças lineares básicas também relativas ao mesmo subespaço, definidas no capítulo 16 para a estrutura de informação. Assim, garante-se que a topologia de aplicação pode ser representada internamente pelas vizinhanças lineares da estrutura de informação.

17.1 Uma Caracterização Topológica para a Estrutura de Aplicação

Considere a relação de posição $\leq_{\mathbb{A}}$, definida na estrutura $\Sigma_{\mathbb{A}}$ do sistema ordenado de 2ª ordem A, e a função distância $d_{\mathbb{A}}$, definida na subestrutura de medidas $M_{\mathbb{A}}$. Seja $\leq_A$ a relação de posição básica, definida na estrutura básica Σ_A, e d_A a função distância básica, definida na estrutura de medidas básica M_A.

A estrutura topológica de aplicação do espaço coerente bi-estruturado $(\Lambda_{\amalg A}, \Sigma_{\amalg A}^{in}, \Sigma_{\amalg A}^{ap})$ é definida como $(\amalg A, \mathcal{N}_{d_{\amalg A}}, \mathcal{O}_{ap}(\amalg A))$, onde $\mathcal{N}_{d_{\amalg A}}$ constitui um EVG induzido pela função distância generalizada $d_{\amalg A}$ (veja seção 13.3), obtida pelo processo de construção global a partir da função distância básica d_A, com uma topologia de aplicação associada $\mathcal{O}_{ap}(\amalg A)$.

Em cada etapa do processo de globalização a função distância generalizada $d_{\mathbb{S}}$ definida em uma estrutura $\Sigma_{\mathbb{S}}$ de um sistema ordenado de 2ª ordem $\mathsf{S} = (\Lambda_{\mathbb{S}}, \Sigma_{\mathbb{S}})$, onde $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, induz um EVG $\mathcal{N}_{d_{\mathbb{S}}}$, caracterizado em função de sua base $\mathrm{B}_{d_{\mathbb{S}}}$, com uma topologia de aplicação $\mathcal{O}_{ap}(\mathbb{S})$ de base $\beta_{d_{\mathbb{S}}}$. O resultado a seguir é conseqüência imediata da seção 13.3.

17.1.1 Proposição

Seja $\mathsf{S} = (\Lambda_{\mathbb{S}}, \Sigma_{\mathbb{S}})$, com $\Lambda_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}, \wp(\mathbb{S})\}$, um sistema ordenado de 2ª ordem e O o (uma aproximação do) elemento neutro para uma operação binária $\oplus_{\mathbb{S}}: \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ definida na estrutura $\Sigma_{\mathbb{S}}$. Tem-se que:

(i) uma bola aberta generalizada básica centrada em $s \in \mathbb{S}$ e de raio $\varepsilon >_{\mathbb{S}} \mathrm{O}$ é o conjunto dado por $\mathcal{B}_\varepsilon^{\mathbb{S}}(s) = \{x \in \mathbb{S} | d_{\mathbb{S}}(s,x) <_{\mathbb{S}} \varepsilon\}$;

(ii) $X \in F$ se e somente se existe $\varepsilon >_{\mathbb{S}} \mathrm{O}$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon^{\mathbb{S}}(s) \subseteq X$, para todo $F \in \mathcal{N}_{d_{\mathbb{S}}}$ e algum $s \in \mathbb{S}$;

(ii) para cada $F \in \mathcal{N}_{d_{\mathbb{S}}}$ e $X \in F$, existe $B \in \mathrm{B}_{d_{\mathbb{S}}}$ tal que existe $\varepsilon >_{\mathbb{S}} \mathrm{O}$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon^{\mathbb{S}}(s) \subseteq B \subseteq X$;

(iii) a coleção de conjuntos $U \subseteq \mathbb{S}$ tal que $U \subseteq \mathrm{int}(U)$ é a topologia de aplicação $\mathcal{O}_{ap}(\mathbb{S})$ associada a $\mathcal{N}_{d_{\mathbb{S}}}$;

(iv) O conjunto $\beta_{d_{\mathbb{S}}} = \{\mathcal{B}_\varepsilon^{\mathbb{S}}(s) | s \in \mathbb{S}, \varepsilon >_{\mathbb{S}} \mathrm{O}\}$ é a base para $\mathcal{O}_{ap}(\mathbb{S})$. ♦

Observe que $\mathcal{B}_\varepsilon^{\mathbb{S}}(s) \in \wp(\mathbb{S})$ e, portanto, $\mathcal{B}_\varepsilon^{\mathbb{S}}(s) \subseteq s' \in \mathbb{S}'$, para algum sistema $\mathsf{S}' = (\Lambda_{\mathbb{S}'}, \Sigma_{\mathbb{S}'})$ obtido a partir de S pelo processo de globalização.

17.2 A Estrutura Topológica Básica do Sistema Q dos Números Racionais

Seja $\mathsf{Q} = (\Lambda_Q, \Sigma_Q)$, com $\Lambda_Q = \{Q, \wp(Q)\}$, o sistema básico dos números racionais Q. A partir da definição da distância generalizada básica $d_Q: Q \times Q \to Q_-$ (veja proposição 11.2.1) na estrutura de medidas básica M_Q, tem-se a garantia dos resultados da proposição 3.1.1. Para o EVG básico $(Q, \mathcal{N}_{d_Q})$ induzido por d_Q, com topologia de aplicação associada básica $\mathcal{O}_{ap}(Q)$, tem-se que:

17.2.1 Proposição

Para todo $s \in Q$, tem-se que $s \in \mathcal{B}_\varepsilon^Q(r) = \{x \in Q | d_Q(r,x) <_Q \varepsilon\}$ se e somente se $r - \varepsilon <_Q s <_Q r + \varepsilon$, para algum $\varepsilon >_Q 0$. ♦

Caracteriza-se a base B_{d_Q} com $B \in B_{d_Q}$ se e somente se existe $\varepsilon >_Q 0$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon^Q(r) \subseteq B \subseteq X$, para algum $r \in Q$ e cada $X \in U$, tal que $U \in \mathcal{N}_{d_Q}$. O conjunto $\beta_{d_Q} = \{\mathcal{B}_\varepsilon^Q(r) | r \in Q, \varepsilon >_Q 0\}$ é a base para a topologia $\mathcal{O}_{ap}(Q)$ associada a $\mathcal{N}_{d_Q}$.

17.2.2 Corolário

A topologia $\mathcal{O}_{ap}(Q)$ é uma topologia de Hausdorff. ♦

17.3 A Estrutura Topológica do Sistema IQ dos Intervalos Racionais

Seja $\mathsf{IQ} = (\Lambda_{IQ}, \Sigma_{IQ})$, com $\Lambda_{IQ} = \{IQ, \wp(IQ)\}$, o sistema dos intervalos racionais IQ, obtido após uma [ ] - evolução sobre o sistema básico Q, regulada pelo próprio sistema IQ, pelo processo de construção global.

A distância generalizada $d_{IQ}: IQ \times IQ \to IQ_+$, definida sobre o conjunto dos intervalos racionais IQ, é obtida pela aplicação do construtor de funções sobre a distância básica d_Q (veja proposição 11.3.1). Aplicam-se assim os resultados da proposição 3.1.1. A função distância generalizada d_{IQ} induz um EVG intervalar $(IQ, \mathcal{N}_{d_{IQ}})$, com topologia de aplicação intervalar associada $\mathcal{O}_{ap}(IQ)$, que pode ser caracterizado em função de sua base $B_{d_{IQ}}$. Tem-se que $B \in B_{d_{IQ}}$ se e somente se existe $\varepsilon >_{IQ} 0$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon^{IQ}(X) = \{Y \in IQ | d_{IQ}(X,Y) <_{IQ} \varepsilon\} \subseteq B \subseteq Z$, para algum $X \in IQ$ e cada $Z \in F$, tal que $F \in \mathcal{N}_{d_{IQ}}$. Segue que conjunto $\beta_{d_{IQ}} = \{\mathcal{B}_\varepsilon^{IQ}([p,q]) | [p,q] \in IQ, \varepsilon >_{IQ} 0\}$ é base enumerável para a topologia $\mathcal{O}(IQ)$ associada a $\mathcal{N}_{d_{IQ}}$.

17.4 A Estrutura Topológica de Aplicação do Espaço Coerente Bi-Estruturado de Intervalos Racionais $(\Lambda_{\Pi Q}, \Sigma_{\Pi Q}^{in}, \Sigma_{\Pi Q}^{ap})$

Seja $(\Lambda_{\Pi Q}, \Sigma_{\Pi Q}^{in}, \Sigma_{\Pi Q}^{ap})$, com $\Lambda_{\Pi Q} = \{\Pi Q, \wp(\Pi Q)\}$ o espaço coerente bi-estruturado, obtido após uma *Coh* - evolução (regulado pelo subsistema dos objetos quasi-totais) sobre o sistema dos intervalos racionais IQ, pelo processo de construção global.

A distância generalizada $d_{\Pi Q}: \Pi Q \times \Pi Q \to \Pi Q_+$, definida sobre o espaço coerente intervalar bi-estruturado ΠQ, é obtida pela aplicação regulada do construtor de funções sobre a distância intervalar d_{IQ} (veja proposição 11.4.1). Assim os resultados da proposição 3.1.1 podem ser aplicados. A função distância generalizada $d_{\mathrm{II}Q}$ induz um EVG de aplicação $\left(\mathrm{II}Q, \mathcal{N}_{d_{\mathrm{II}Q}}\right)$, com topologia de aplicação associada $\mathcal{O}_{ap}(\mathrm{II}Q)$.

Observa-se que $d_{\mathrm{II}Q}$, quando restrita aos objetos totais coincide exatamente com a métrica euclidiana dos números reais (corolários 12.3.5 a 12.3.8), ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre os abertos básicos da topologia de Hausdorff em $\mathbb{R}$ e os abertos básicos da topologia de aplicação $\mathcal{O}_{ap}(tot(\mathrm{II}Q))$ do subespaço dos objetos totais, tal que $tot(\mathrm{II}Q)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

17.4.1 Proposição

Seja $\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\mathrm{II}Q}(x) = \{y \in \mathrm{II}Q | d_{\mathrm{II}Q}(x,y) <_{\mathrm{II}Q} \varepsilon\}$ a bola aberta em $\mathrm{II}Q$ centrada em $x \in \mathrm{II}Q$ e de raio $\varepsilon >_{\mathrm{II}Q} \mathrm{O}$. Então $\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\mathrm{II}Q}(x) \neq \varnothing$ se e somente se existe $X \in x$ tal que $D_{IQ}(X) < 2a$, para algum $[a,b] \in \varepsilon$, onde $D_{IQ}(X)$ é o diâmetro de um intervalo racional definido em 11.3.2.
prova:

Supor que existe $X = [p,q] \in x$ tal que $D_{IQ}(X) < 2a$, para algum $[a,b] \in \varepsilon$. Então existe $y \in \mathrm{II}Q$, $y = \{[p + D_{IQ}(X)/2, q - D_{IQ}(X)/2]\}$, tal que

$$d_{IQ}(X, [p + D_{IQ}(X)/2, q - D_{IQ}(X)/2]) = [0, D_{IQ}(X)/2] \in d_{\mathrm{II}Q}(x,y).$$

Isto significa que existe $Y \in d_{\mathrm{II}Q}(x,y)$, $Y = [0, D_{IQ}(X)/2]$, e existe $[a,b] \in \varepsilon$, tais que $Y = [0, D_{IQ}(X)/2] <_{IQ} [a,b]$, pois $D_{IQ}(X) < 2a$. Conclui-se que $d_{\mathrm{II}Q}(x,y) <_{\mathrm{II}Q} \varepsilon$, e, portanto, $y \in \mathcal{B}_{\varepsilon}^{\mathrm{II}Q}(x)$, ou seja, $\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\mathrm{II}Q}(x) \neq \varnothing$.

Agora, suponha que $\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\mathrm{II}Q}(x) \neq \varnothing$ e que para todo $X \in x$, $D_{IQ}(X) \geq 2a$, para todo $[a,b] \in \varepsilon$. Então existe $y \in \mathrm{II}Q$, tal que $d_{\mathrm{II}Q}(x,y) <_{\mathrm{II}Q} \varepsilon$. Logo, existe $Z \in d_{\mathrm{II}Q}(x,y)$ e existe $[a,b] \in \varepsilon$, tais que $Z <_{IQ} [a,b]$. Isto significa que existem $X = [p,q] \in x$ e $Y = [r,s] \in y$ tal que $d_{IQ}(X,Y) = Z <_{IQ} [a,b]$. Segue que

$$d_{IQ}(X,Y) = d_{IQ}([p,q],[r,s]) = [min\theta, max\theta] <_{IQ} [a,b],$$

onde $\theta = \{|p-r|, |p-s|, |q-r|, |q-s|\}$.

Considere então as seguintes situações: (i) $[p,q] <_{IQ} [r,s]$, ou (ii) $[p,q] \subseteq [r,s]$, ou (iii) $[r,s] \subseteq [p,q]$, ou (iv) $[r,s] <_{IQ} [p,q]$. Supor (i). Então é válido que $d_{IQ}(X,Y) = [r-q, s-q+2a+\delta] <_{IQ} [a,b]$, para $\delta > 0$. Como $\vartheta = s - q + \delta > 0$, então tem-se que $s - q + 2a + \delta = 2a + \vartheta > a$, o que é uma contradição. Analisa-se agora (ii). Então é válido que $d_{IQ}(X,Y) = [min\{r-p, q-s\}, max\{s-p, q-r\}] <_{IQ} [a,b]$. Entretanto, observe que $max\{s-p, q-r\} > a$, o que é outra contradição. A situação (iii) é análoga à (ii) e a consideração (iv) é similar à (i). Conclui-se então que existe $X \in x$ tal que $D_{IQ}(X) < 2a$, para algum $[a,b] \in \varepsilon$. ♦

17.4.2 Proposição

Seja $\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x)$ a bola aberta em ΠQ centrada em $x \in \Pi Q$ e de raio $\varepsilon >_{\Pi Q} O$, não vazia. Então, para todo $y \in \Pi Q$, tem-se que $y \in \mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x)$ se e somente se existem $Y \in y$, $X = [p,q] \in x$ e $[a,b] \in \varepsilon$, tais que Y está no interior do bi-intervalo de guia $[q-a, p+a]$, ou seja

$$Y \in ([q-a;p+a]) = \{Z \in [[q-a;p+a]] | [q-a,q-a] <_{IQ} Z <_{IQ} [p+a,p+a]\}.$$

prova:

Seja $y \in \Pi Q$ tal que $y \in \mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x)$. Então, tem-se que $d_{\Pi Q}(x,y) <_{\Pi Q} \varepsilon$. Portanto, existem $Y = [r,s] \in y$ e $X = [p,q] \in x$, tais que $d_{IQ}(X,Y) <_{IQ} [a,b]$, para algum $[a,b] \in \varepsilon$. Considere então as seguintes situações: (i) $[p,q] <_{IQ} [r,s]$, ou (ii) $[p,q] \subseteq [r,s]$, ou (iii) $[r,s] \subseteq [p,q]$, ou (iv) $[r,s] <_{IQ} [p,q]$. Supor (i). Então é imediato que $q < r$ e, portanto, $r > q-a$. Além disso, é válido que $d_{IQ}(X,Y) = [r-q, s-p] <_{IQ} [a,b]$, o que significa que $s-p < a$, ou seja, $s < p+a$. Logo, tem-se que $[q-a,q-a] <_{IQ} [r,s] <_{IQ} [p+a,p+a]$. Considere agora (ii). Então é válido que $d_{IQ}(X,Y) = [min\{r-p, q-s\}, max\{s-p, q-r\}] < [a,b]$, ou seja, $max\{s-p, q-r\} < a$. Segue que $s-p < a$ e $q-r < a$, isto é, $s < p+a$ e $r > q-a$. Portanto, neste caso, também é válido que $[q-a,q-a] <_{IQ} [r,s] <_{IQ} [p+a,p+a]$. A situação (iii) é análoga à (ii) e o caso (iv) é similar ao (i).

Agora, suponha que existem $Y = [r,s] \in y$, $X = [p,q] \in x$ e $[a,b] \in \varepsilon$, tais que

$$Y \in ([q-a;p+a]) = \{Z \in [[q-a;p+a]] | [q-a,q-a] <_{IQ} Z <_{IQ} [p+a,p+a]\}.$$

Observe que $max\{|p-r|, |p-s|, |q-r|, |q-s|\} < a$, e, portanto, $d_{IQ}(X,Y) <_{IQ} [a,b]$, para algum $[a,b] \in \varepsilon$. Segue que $d_{\Pi Q}(x,y) <_{\Pi Q} \varepsilon$, e, portanto, $y \in \mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x)$. ♦

O EVG de aplicação $(\Pi Q, \mathcal{N}_{d_{\Pi Q}})$ pode ser caracterizado em função de sua base $B_{d_{\Pi Q}}$. Segue que $B \in B_{d_{\Pi Q}}$ se e somente se existe $\varepsilon >_{\Pi Q} O$ tal que $\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x) \subseteq B \subseteq X$, para algum $x \in \Pi Q$ e cada $X \in U$, tal que $U \in \mathcal{N}_{d_{\Pi Q}}$. O conjunto $\{\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x) | x \in \Pi Q, \varepsilon >_{\Pi Q} O\}$ é uma base enumerável para $\mathcal{O}_{ap}(\Pi Q)$.

17.4.3 Corolário

Sejam $\left(\Pi Q, \mathcal{N}_{d_{\Pi Q}}\right)$ o EVG de aplicação induzido pela função distância generalizada $d_{\Pi Q}$ e $B_{d_{\Pi Q}}$ a base de $\mathcal{N}_{d_{\Pi Q}}$. Seja $\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x)$ a bola aberta em ΠQ centrada em $x \in \Pi Q$ e de raio $\varepsilon >_{\Pi Q} O$, não vazia. Então, para todo $y \in \Pi Q$ e $B \in B_{d_{\Pi Q}}$, tal que $\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x) \subseteq B$, tem-se que $y \in B$ se e somente se existem $Y \in y$, $X = [p,q] \in x$ e $[a,b] \in \varepsilon$, tais que Y está no bi-intervalo de guia $[q-a, p+a]$, ou seja, $Y \in [[q-a, p+a]]$.

17.5 O Homeomorfismo entre o Subsistema qtot$_{\Pi Q}$ dos Objetos Quasi-Totais e o Sistema IR dos Intervalos Reais Estendido

Seja $\mathrm{qtot}_{\Pi Q} = \left(\Lambda_{qtot(\Pi Q)}, \Sigma^{in}_{qtot(\Pi Q)}, \Sigma^{ap}_{qtot(\Pi Q)}\right)$, com $\Lambda_{qtot(\Pi Q)} = \{qtot(\Pi Q), \wp(qtot(\Pi Q))\}$ o subsistema dos objetos quasi-totais de ΠQ, com estrutura de informação $\Sigma^{in}_{qtot(\Pi Q)}$ e estrutura de aplicação $\Sigma^{ap}_{qtot(\Pi Q)}$, onde $\leq_{qtot}$ é a relação de posição relativa a $qtot(\Pi Q)$, d_{qtot} é a semi-pseudométrica dada pela função distância generalizada restrita a $qtot(\Pi Q)$. A estrutura topológica de aplicação do subespaço dos objetos quasi-totais de ΠQ é dada por $\left(\mathcal{N}_{qtot}, \mathcal{O}_{ap}(qtot(\Pi Q))\right)$.

A base do SVG $\left(\Pi Q, \mathcal{N}_{d_{\Pi Q}}\right)$, induzido por $d_{\Pi Q}$, relativa a $qtot(\Pi Q)$, é construída tomando-se a interseção das vizinhanças básicas de $\mathcal{N}_{d_{\Pi Q}}$ com $qtot(\Pi Q)$. Seja $B_{d_{\Pi Q}}$ a base de $\mathcal{N}_{d_{\Pi Q}}$. O conjunto $B^{ap}_{qtot} = \left\{B \cap qtot(\Pi Q) | B \in B_{d_{\Pi Q}}\right\} = \left\{B_{qtot} | B \in B_{d_{\Pi Q}}\right\}$ é uma base enumerável para o SVG de aplicação $\left(qtot(\Pi Q), \mathcal{N}_{qtot}\right)$ do subespaço dos objetos quasi-totais.

A base da topologia $\mathcal{O}_{ap}(\Pi Q)$ associada a $\mathcal{N}_{d_{\Pi Q}}$ pode ser restrita a $qtot(\Pi Q)$, simplesmente tomando-se a interseção dos abertos básicos com $qtot(\Pi Q)$. Segue que:

17.5.1 Proposição

O conjunto

$$\beta^{ap}_{qtot} = \left\{\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x) \cap qtot(\Pi Q) | x \in \Pi Q, \varepsilon >_{\Pi Q} O\right\} = \left\{\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x)_{qtot} | x \in \Pi Q, \varepsilon >_{\Pi Q} O\right\}$$

é uma base enumerável para a topologia $\mathcal{O}_{ap}(qtot(\Pi Q))$ do subespaço dos objetos quasi-totais. ♦

17.5.2 Proposição

Para todo $y \in qtot(\text{II}Q)$ e $x \in \text{II}Q$, tem-se que $y \in \mathcal{B}_{\varepsilon}^{\text{II}Q}(x)_{qtot}$, com $\varepsilon >_{\text{II}Q} O$, se e somente se $ir(y)$ está no interior do bi-intervalo $[[q-a, p+a]]$, para algum $X = [p,q] \in x$ e $[a,b] \in \varepsilon$, isto é,

$$ir(y) \in ([q-a; p+a]) = \{Z \in [[q-a; p+a]] | [q-a, q-a] <_{IQ} Z <_{IQ} [p+a, p+a]\}.$$

prova:

Segue das proposições 17.4.2 e 17.5.1. ♦

17.5.3 Proposição

Para todo $y \in qtot(\text{II}Q)$, $x \in \text{II}Q$ e $B \in \mathrm{B}_{d_{\text{II}Q}}$, tal que $\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\text{II}Q}(x) \subseteq B$, com $\varepsilon >_{\text{II}Q} O$, tem-se que $y \in \mathcal{B}_{\varepsilon}^{\text{II}Q}(x)_{qtot}$ se e somente se $ir(y)$ está no bi-intervalo $[[q-a, p+a]]$, para algum $X = [p,q] \in x$ e $[a,b] \in \varepsilon$, com $x \in \text{II}Q$, isto é, $ir(y) \in [[q-a, p+a]]$.

prova:

Segue do corolário 17.4.3. ♦

Considere agora o Σ_{ap}-isomorfismo $\phi: qtot(\text{II}Q) \cup \wp(qtot(\text{II}Q)) \to \mathbb{IR}^* \cup \wp(\mathbb{IR}^*)$, tal que

$$x \mapsto \begin{cases} ir(x) & \text{se } x \in qtot(\text{II}Q), \\ \{ir(w) \in \mathbb{IR}^* | w \in x\} & \text{se } x \in \wp(qtot(\text{II}Q)), \end{cases}$$

introduzido em 10.6, onde ir é o índice real definido em 7.2.1. Mostra-se que ϕ também preserva a estrutura topológica.

Para isso considere o isomorfismo inverso

$$\phi^{-1}: \mathbb{IR}^* \cup \wp(\mathbb{IR}^*) \to qtot(\text{II}Q) \cup \wp(qtot(\text{II}Q)),$$

dado por

$$W \mapsto \begin{cases} x_W & \text{se } W \in \mathbb{IR}^*, \\ \{x_{W'} \in qtot(\text{II}Q) | W' \in W\} & \text{se } W \in \wp(\mathbb{IR}^*), \end{cases}$$

x_W é o quasi-total cujo índice real é $W \in \mathbb{IR}^*$, isto é, $x_W = \{[p,q] \in IQ | W \subseteq [p,q]\}$.

17.5.4 Teorema

Seja $(qtot(\text{II}Q), \mathcal{O}_{ap}(qtot(\text{II}Q)))$ o subespaço dos objetos quasi-totais de $\text{II}Q$ com a topologia de aplicação $\mathcal{O}_{ap}(qtot(\text{II}Q))$. Então $(qtot(\text{II}Q), \mathcal{O}_{ap}(qtot(\text{II}Q)))$ é homeomorfo ao conjunto dos intervalos reais estendido $\mathbb{IR}^* = \mathbb{IR} \cup \{\mathbb{R}\}$, munido de uma topologia gerada por $\{([p',q']) \in [\mathbb{IR}] | [p',q'] \in IQ\}$.

prova:

Basta provar que $\{\phi^{-1}(([p,q]))|[p,q]\in IQ\}$ é justamente a base $\beta^{ap}_{qtot}=\{\mathcal{B}^{\Pi Q}_{\varepsilon}(x)_{qtot}|x\in\Pi Q\}$ de $(qtot(\Pi Q),\mathcal{O}_{ap}(qtot(\Pi Q)))$ [DUG 66]. De fato, pela proposição 17.5.2, segue que existe $x\in\Pi Q$ e $\varepsilon>_{\Pi Q}\mathrm{O}$, com $[q-a,p-a]\in x$ e $[a,b]\in\varepsilon$, tal que

$$\phi^{-1}(([p,q]))=\{x_{W'}\in qtot(\Pi Q)|W'\in([p,q])\}=\mathcal{B}^{\Pi Q}_{\varepsilon}(x)\cap qtot(\Pi Q)=\mathcal{B}^{\Pi Q}_{\varepsilon}(x)_{qtot},$$

para todo $([p,q])\in\{([p',q'])\in[\mathbb{IR}]|[p',q']\in IQ\}$. ♦

17.6 O Homeomorfismo entre o Subsistema $\mathbf{tot}_{\Pi Q}$ dos Objetos Totais e o Sistema **R** dos Números Reais

Seja $\mathsf{tot}_{\Pi Q}=\left(\Lambda_{tot(\Pi Q)},\Sigma^{in}_{tot(\Pi Q)},\Sigma^{ap}_{tot(\Pi Q)}\right)$, com $\Lambda_{tot(\Pi Q)}=\{tot(\Pi Q),\wp(tot(\Pi Q))\}$ o subsistema dos objetos totais, com estrutura de informação $\Sigma^{in}_{tot(\Pi Q)}$ e estrutura de aplicação $\Sigma^{ap}_{tot(\Pi Q)}$, onde $\leq_{tot}$ é a relação de posição relativa a $tot(\Pi Q)$, d_{tot} é a métrica dada pela função distância generalizada restrita a $tot(\Pi Q)$. A estrutura topológica de aplicação do subespaço dos objetos totais é dada por $(\mathcal{N}_{tot},\mathcal{O}_{ap}(qtot(\Pi Q)))$.

A base do SVG $\left(\Pi Q,\mathcal{N}_{d_{\Pi Q}}\right)$, induzido por $d_{\Pi Q}$, relativa a $tot(\Pi Q)$, é construída tomando-se a interseção das vizinhanças básicas de $\mathcal{N}_{d_{\Pi Q}}$ com $tot(\Pi Q)$. Seja $\mathrm{B}_{d_{\Pi Q}}$ a base de $\mathcal{N}_{d_{\Pi Q}}$. O conjunto $\mathrm{B}^{ap}_{tot}=\{B\cap tot(\Pi Q)|B\in\mathrm{B}_{d_{\Pi Q}}\}=\{B_{tot}|B\in\mathrm{B}_{d_{\Pi Q}}\}$ é uma base enumerável para o SVG de aplicação $(tot(\Pi Q),\mathcal{N}_{tot})$ do subespaço dos objetos quasi-totais.

A base da topologia $\mathcal{O}_{ap}(\Pi Q)$ associada a $\mathcal{N}_{d_{\Pi Q}}$ pode ser restrita a $tot(\Pi Q)$, simplesmente tomando-se a interseção dos abertos básicos com $tot(\Pi Q)$. Tem-se que:

17.6.1 Proposição

O conjunto

$$\beta^{ap}_{tot}=\{\mathcal{B}^{\Pi Q}_{\varepsilon}(x)\cap tot(\Pi Q)|x\in\Pi Q,\varepsilon>_{\Pi Q}\mathrm{O}\}=\{\mathcal{B}^{\Pi Q}_{\varepsilon}(x)_{tot}|x\in\Pi Q,\varepsilon>_{\Pi Q}\mathrm{O}\}$$

é uma base enumerável para a topologia de aplicação $\mathcal{O}_{ap}(tot(\Pi Q))$ do subespaço dos objetos totais.

17.6.2 Proposição

Para todo $y \in tot(\Pi Q)$, tem-se que $y \in \mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x)_{tot}$, com $\varepsilon >_{\Pi Q} O$, se e somente se $x_{q-a} <_{tot} y <_{tot} x_{p-a}$, para algum $X = [p,q] \in x$ e $[a,b] \in \varepsilon$.
prova:

Segue das proposições 17.4.2 e 17.6.1. ♦

17.6.3 Proposição

Para todo $y \in tot(\Pi Q)$ e $B \in \mathrm{B}_{d_{\Pi Q}}$, tal que $\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x) \subseteq B$, tem-se que $y \in \mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x)_{tot}$ se e somente se $x_{q-a} \leq_{tot} y \leq_{tot} x_{p-a}$, para algum $X = [p,q] \in x$ e $[a,b] \in \varepsilon$.
prova:

Segue do corolário 17.4.3. ♦

Considere agora o Σ_{ap}-isomorfismo $\Phi: \mathbb{R} \cup \wp(\mathbb{R}) \to tot(\Pi Q) \cup \wp(tot(\Pi Q))$, tal que

$$\Phi(w) = \begin{cases} x_w & \text{se } w \in \mathbb{R}, \\ \{x_{w'} \in tot(\Pi Q) | w' \in w\} & \text{se } w \in \wp(\mathbb{R}), \end{cases}$$

introduzido em 10.4, onde $x_w = \{[p,q] \in IQ | p \leq w \leq q\}$ é o conjunto ligado a w, definido em 10.4.2. Mostra-se que Φ também preserva a estrutura de topológica.

17.6.4 Teorema

Seja $(tot(\Pi Q), \mathcal{O}_{ap}(tot(\Pi Q)))$ o subespaço dos objetos totais de ΠQ com a topologia de aplicação $\mathcal{O}_{ap}(tot(\Pi Q))$. Então $(tot(\Pi Q), \mathcal{O}_{ap}(tot(\Pi Q)))$ é homeomorfo ao espaço dos números reais $\mathbb{R}$ com a topologia usual de Hausdorff.
prova:

Basta provar que $\Phi\{f[(p,q)] | p,q \in Q\}$ é justamente a base $\beta_{tot}^{ap} = \{\mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x)_{tot} | x \in \Pi Q\}$ de $(tot(\Pi Q), \mathcal{O}_{ap}(tot(\Pi Q)))$ [DUG 66]. De fato, pela proposição 17.6.2, segue que existe $x \in \Pi Q$ e $\varepsilon >_{\Pi Q} O$, com $[q-a, p-a] \in x$ e $[a,b] \in \varepsilon$, tal que

$$\Phi[(p,q)] = \{x_w \in tot(\Pi Q) | p < w < q\} = \mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x) \cap tot(\Pi Q) = \mathcal{B}_{\varepsilon}^{\Pi Q}(x)_{tot},$$

para todo $(p,q) \in \{(p',q') \subseteq \mathbb{R} | p',q' \in Q\}$. ♦

17.7 A Representação Interna da Estrutura Topológica de Aplicação

17.7.1 Definição. Representação Interna

Diz-se que a estrutura topológica de aplicação $\left(\mathrm{II}A, \mathcal{N}_{d_{\mathrm{II}A}}, \mathcal{O}_{ap}(\mathrm{II}A)\right)$ de um espaço coerente bi-estruturado $\left(\Lambda_{\mathrm{II}A}, \Sigma^{in}_{\mathrm{II}A}, \Sigma^{ap}_{\mathrm{II}A}\right)$, com $\Lambda_{\mathrm{II}A} = \{\mathrm{II}A, \wp(\mathrm{II}A)\}$, obtido pelo processo de construção global, é representada internamente pela estrutura topológica de informação $(\mathrm{II}A, \mathbf{SN}(\mathrm{II}A))$ se e somente se existir uma bijeção entre os interiores das vizinhanças lineares básicas relativas ao subespaço dos objetos quasi-totais (totais) e os abertos básicos da topologia de aplicação relativa ao mesmo subespaço. ♦

17.7.2 Proposição

Seja β^{ap}_{qtot} a base da topologia de aplicação $\mathcal{O}_{ap}(qtot(\mathrm{II}Q))$ do subespaço dos objetos quasi-totais. Seja $\beta^{in}_{qtot} = \left\{\mathrm{int}\left(\uparrow \{[p,q]\}_{qtot}\right) \mid p,q \in Q\right\}$ o conjunto dos interiores dos elementos da base do subespaço de vizinhanças lineares dos objetos quasi-totais introduzido em 16.3. Tem-se que $\beta^{ap}_{qtot} = \beta^{in}_{qtot}$.

prova:

Seja $y \in \beta^{ap}_{qtot}$. Pela proposição 17.5.2, tem-se que $ir(y)$ está no interior de algum bi-intervalo $[[r;s]]$. Logo, pela proposição 16.3.8, conclui-se que $y \in \beta^{in}_{qtot}$. O inverso é provado de forma análoga. ♦

17.7.3 Proposição

Seja β^{ap}_{tot} a base da topologia de aplicação $\mathcal{O}_{ap}(tot(\mathrm{II}Q))$ do subespaço dos objetos totais. Seja $\beta^{in}_{tot} = \left\{\mathrm{int}\left(\uparrow \{[p,q]\}_{tot}\right) \mid p,q \in Q\right\}$ o conjunto dos interiores dos elementos da base do subespaço de vizinhanças lineares dos objetos totais introduzido em 16.4. Tem-se que $\beta^{ap}_{tot} = \beta^{in}_{tot}$.

prova:

Seja $y \in \beta^{ap}_{tot}$. Pela proposição 17.6.2, tem-se que $x_r <_{tot} y <_{tot} x_s$, para $x_r, x_s \in tot(\mathrm{II}Q)$. Logo, pela proposição 16.4.6, conclui-se que $y \in \beta^{in}_{tot}$. O inverso é provado de forma análoga. ♦

17.7.4 Teorema

A estrutura topológica de aplicação $\left(\mathrm{II}Q, \mathcal{N}_{d_{\mathrm{II}Q}}, \mathcal{O}_{ap}(\mathrm{II}Q)\right)$ do espaço coerente intervalar bi-estruturado $\mathrm{II}Q$ é representada internamente pela estrutura topológica de informação $(\mathrm{II}Q, \mathbf{SN}(\mathrm{II}Q))$.

prova:

Segue das proposições 17.7.2 e 17.7.3. ♦

17.7.5 Corolário

A topologia usual de $\mathbb{R}$ tem uma representação no espaço coerente intervalar bi-estruturado $\mathrm{II}Q$. ♦

18 Outras Possíveis Aplicações da Metodologia e das Estruturas Propostas

Com os resultados que foram sendo obtidos no decorrer da realização deste trabalho e através das sugestões recebidas a partir das discussões com os orientadores, colegas do grupo de pesquisa, e também quando da apresentação destas idéias na ocasião da defesa da proposta de tese, em encontros, palestras e congressos nacionais e internacionais, vislumbrou-se a aplicação da metodologia em desenvolvimento também em outras áreas, como em fundamentos de Inteligência Artificial e em Sistemas de Inteligência Artificial Distribuída, por exemplo. Então procurou-se adotar um enfoque genérico, que não fosse restrito ao contexto da Matemática Intervalar, para tornar possível sua utilização em áreas diversificadas, ampliando, assim, a sua aplicabilidade.

18.1 Aplicações em Sistemas de Inteligência Artificial Distribuída

Observa-se a possibilidade de que os espaços coerentes bi-estruturados possam ser aplicados em sistemas de inteligência artificial distribuída, para modelar a dinâmica de teorias de cláusulas, com o objetivo de expressar a análise topológica (métrica) das bases de conhecimento evolutivas introduzidas por Oliveira [OLI 94] [OLF 95]. Acredita-se que o relacionamento entre a dinâmica da teoria de cláusulas e o processo de programação indutiva em lógica possa fornecer um tratamento denotacional dos processos de aprendizado e o intercâmbio de conhecimento em Inteligência Artificial Distribuída.

18.2 Aplicações em Fundamentos de Inteligência Artificial

Uma outra aplicação possível do processo de construção global e evolução de sistemas foi evidenciada por Rocha Costa [COS 97], quando da exposição de suas idéias relativas às construções autorreguladas.

Aquele autor observa que as idéias de autonomia e auto-organização constituem problemas permanentemente em aberto para as abordagens da Inteligência Artificial inspiradas nas Teorias Gerais de Sistemas e na Cibernética. O enfoque adotado na pesquisa de fundamentos da Inteligência Artificial que está desenvolvendo é o de entender a autonomia de um sistema como sendo seu "fecho operacional" (no sentido de F. Varela [VAR 89]) e a auto-organização como "auto-construção", isto é, como "construção autorregulada" (no sentido de J. Piaget [PIA 73]).

Rocha Costa propôs um modelo básico de construção autorregulada abstraído do processo de construção global para sistemas ordenados de 2ª ordem. Nesta proposta, foi possível observar um entendimento do processo de construção de uma forma mais geral, possibilitando uma visão mais abrangente da metodologia desenvolvida.

Através de uma macro visão, cada etapa da construção pode ser entendida como uma operação de escolha do sistema básico B, seguida de uma potenciação sobre esse sistema, obtendo um sistema P(B), garantindo a inclusão do sistema original. Em seguida são realizadas uma série de restrições, tantas quanto forem necessárias, até que o sistema evoluído possa ser considerado bem-comportado. Veja figura 18.1. Na figura 18.2 é possível visualizar a seqüência de etapas do processo construtivo através da visão macro.

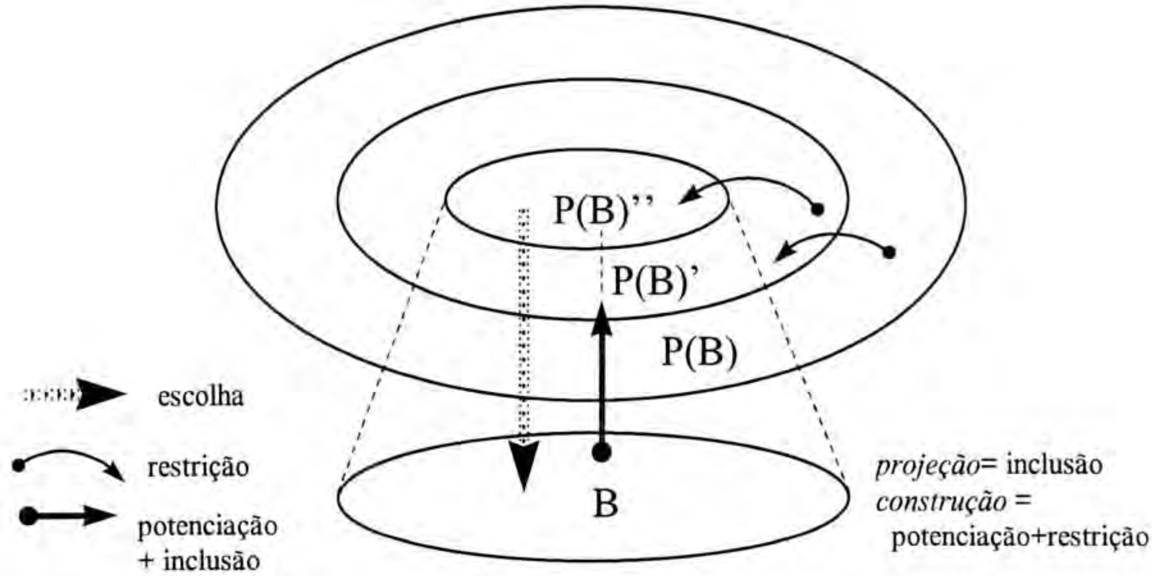


FIGURA 18.1 Visão Macro do Processo de Construção Global: cada etapa da construção

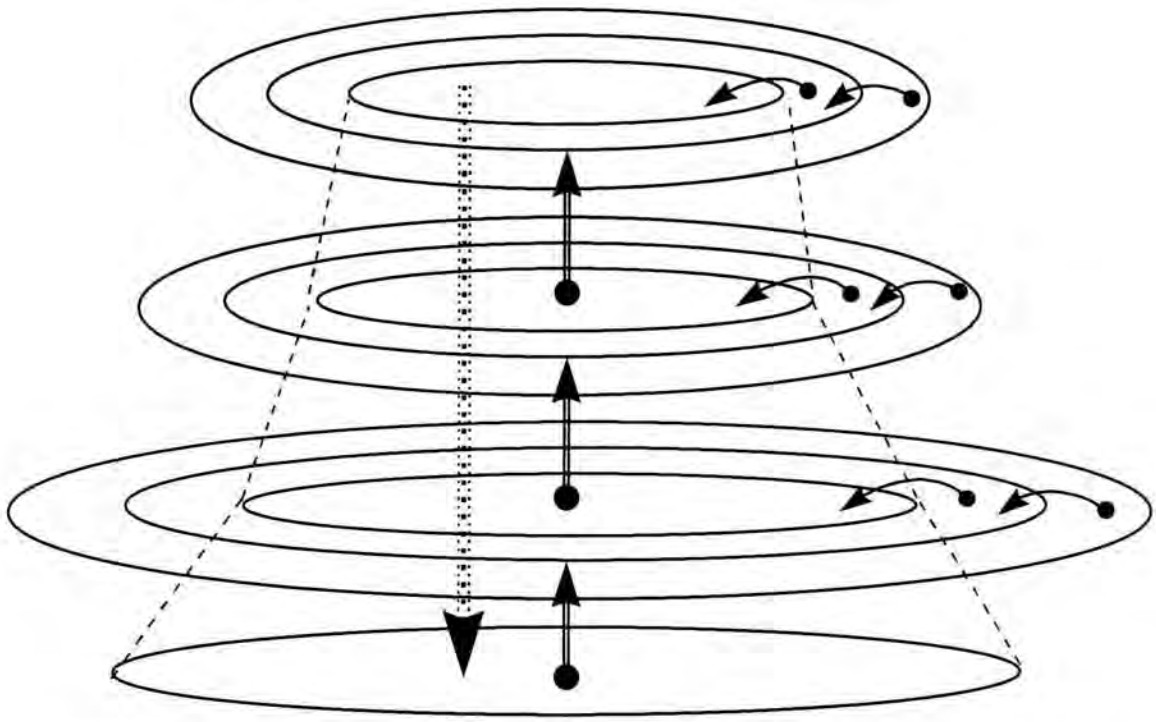


FIGURA 18.2 Visão Macro do Processo de Construção Global: seqüência de etapas

Considerando-se agora uma visão micro, é possível visualizar, na figura 18.3, a evolução de um relacionamento externo entre objetos de um mesmo sistema paralelamente à evolução da estrutura interna (potenciação seguida de restrição).

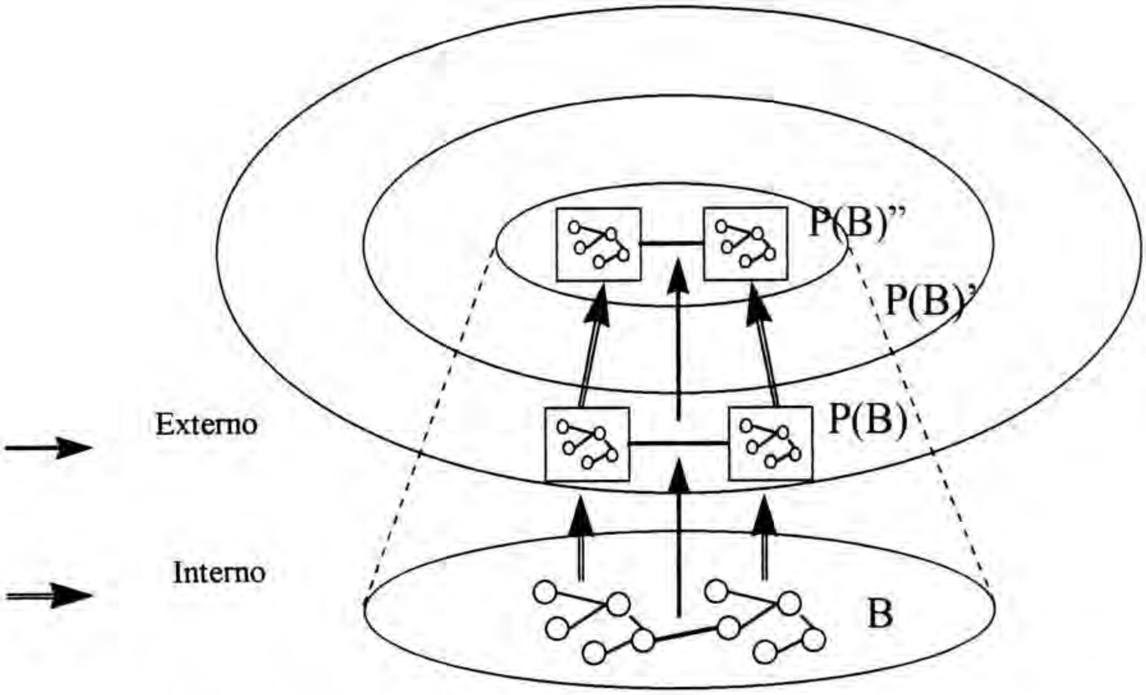


FIGURA 18.3 Visão Micro do Processo de Construção Global

A autorregulação da construção, em cada passo, está esquematizada na figura 18.4.

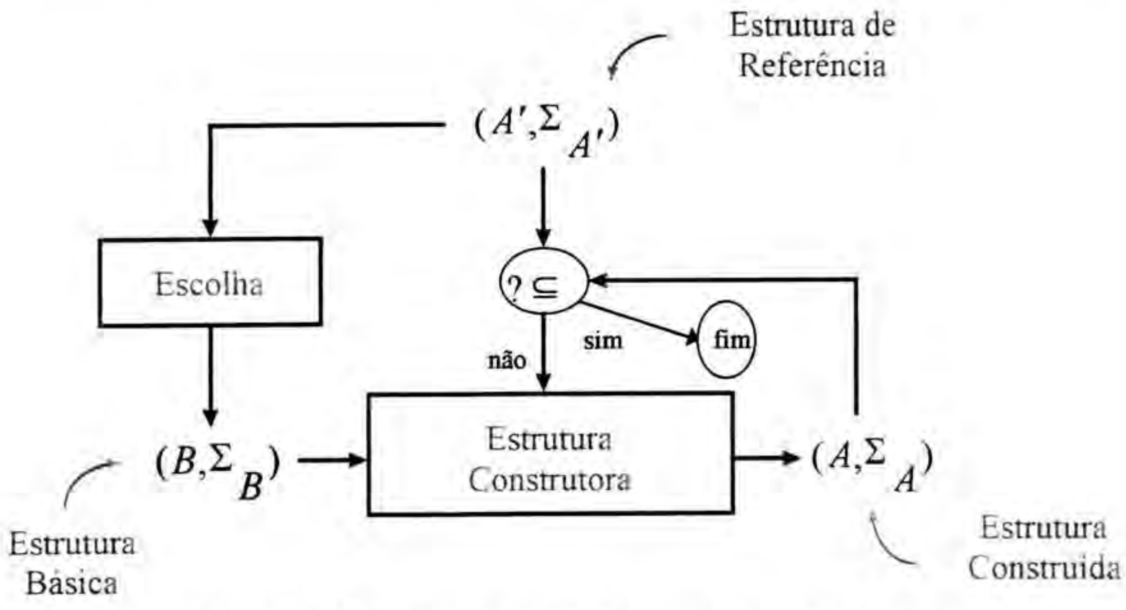


FIGURA 18.4 Autorregulação da Construção em cada Etapa

Rocha Costa [COS 93] [COS 90], em sua tese de doutorado, introduziu uma formalização inicial do processo de desenvolvimento de mecanismos computacionais, estabelecendo, primeiramente, um conjunto D de mecanismos parciais (etapas estruturais, comportamentais e funcionais), sobre o qual é definida uma relação de desenvolvimento $\Rightarrow \subseteq D \times D$, dada por uma ordem parcial.

Observa-se que $\mathbf{D} = (D, \Rightarrow, d_0)$ é um domínio, onde a ordem de informação é representada pela relação de desenvolvimento e d_0 é o menor elemento deste domínio, representando um mecanismo inicial.

O autor restringiu então o universo deste domínio pela introdução de um conjunto **K** de fatores de desenvolvimento dado por um conjunto de relações como, por exemplo, uma relação de habilitação comportamental, uma relação de requisitos estruturais, uma relação de habilitação funcional, uma relação de requisitos comportamentais, dentre outras. Assim, dado um conjunto **K** de fatores de desenvolvimento, pode-se definir uma família de etapas admissíveis para **K**. Obtém-se assim uma estrutura de desenvolvimento como um par $(\mathbf{D}_K, \mathbf{K})$, onde $\mathbf{D}_K = (D_K, \Rightarrow, d_0)$ é o subdomínio de mecanismos parciais admissíveis para **K**, d_0 é um mecanismo inicial admissível para **K**, e $\Rightarrow \sqsubseteq D \times D$ preserva a admissibilidade das etapas de desenvolvimento.

Observa-se aqui que é possível considerar o conjunto **K** de fatores de desenvolvimento como um conjunto de critérios de consistência interna, capazes de caracterizar uma estrutura interna admissível (estrutura de desenvolvimento) para o domínio $\mathbf{D}_K$.

Rocha Costa considerou também a restrição imposta pelo ambiente externo **A** e definiu um sistema de mecanismos computacionais como a terna $\mathbf{M} = (\mathbf{D}_{K,A}, \mathbf{K}, \mathbf{A})$, onde $\mathbf{D}_{K,A}$ é o subdomínio dos mecanismos parciais admissíveis para **K** e **A**.

Observa-se agora que, considerando-se o conjunto **A** de fatores ambientais como um conjunto de critérios de consistência externa, pode-se interpretar o sistema de mecanismos **M** segundo a abordagem adotada nesta tese, ou seja, como um sistema bi-estruturado de mecanismos computacionais, onde os objetos totais do domínio são os mecanismos ideais ou completos, e os objetos quasi-totais são aqueles que são completos relativamente a uma variação ou margem de erro admissível.

Como conclusão, observa-se que a metodologia desenvolvida pode colaborar para a formalização das idéias indicadas [COS 93], relativamente à evolução ou construção autorregulada de mecanismos computacionais. Através do processo de construção global torna-se possível definir o conceito de evolução de sistemas de mecanismos, no sentido de se poder determinar os construtores de sistemas adequados para que, a partir de um sistema básico de mecanismos, seja possível proceder à evolução (construção e regulação) de sistemas de mecanismos.

19 Conclusão

Esta tese é resultado de um trabalho que procura a integração entre os aspectos práticos dos processos computacionais correntes da Computação Científica e da Matemática Intervalar e os aspectos de fundamentação oferecidos pela teoria dos Domínios, em particular, pela teoria dos Espaços Coerentes.

Com este objetivo principal, desenvolveu-se uma metodologia para a obtenção de representações construtivas - caracterizadas como representações globais - de sistemas ordenados de 2ª ordem, baseadas em estruturas de espaços coerentes, com aplicação fundamental na Computação Científica e Matemática Intervalar.

Procurou-se adotar um enfoque genérico, para tornar possível sua aplicação também em outras áreas, conforme exposto no capítulo 18.

19.1 Considerações sobre o Processo de Construção Global e a Representação de Sistemas com Aplicação em Computação Científica e Matemática Intervalar

Atualmente a Matemática Intervalar consolida-se como uma das soluções para o problema do controle do erro em Computação Científica. Entretanto, observa-se que os problemas relativos à fundamentação das estruturas da Matemática Intervalar e dos processos computacionais envolvendo estas estruturas ainda estão em aberto. Veja seções 2.1 e 2.2.

Algumas alternativas nesse sentido, visando, principalmente, a construção e a representação computacional dos números reais e a computação efetiva com números reais podem ser encontradas. Salientam-se, dentre outros, os trabalhos de Benedito Acióly (seção 2.3.5), de Di Gianantonio (seção 2.3.7), e, mais recentemente, os trabalhos de Martin Escardó, Abbas Edalat e Peter Potts (seção 2.3.7), todos baseando-se fundamentalmente na Teoria dos Domínios.

A abordagem adotada por Escardó, Edalat e Potts (seção 2.3.7), que, baseados em um domínio contínuo de intervalos reais - os reais parciais -, desenvolveram um conceito de números reais efetivos, apresenta natureza que consideramos infinitária. O principal objetivo desta abordagem é fornecer acesso computacional direto aos número reais e intervalos de reais, objetos considerados infinitos relativamente à informação que contém, incluindo tais conceitos de forma explicita nas linguagens de programação, para que os programadores possam manipular as representações de números reais e intervalos de reais pela própria linguagem de programação. Pode-se concluir que, neste caso, os números reais não são construídos, e, embora infinitos, são considerados efetivos.

Salienta-se que a abordagem adotada no trabalho desenvolvido nesta tese difere conceitualmente da abordagem adotada por Escardó, Edalat e Potts. Optou-se aqui pelo ponto de vista tradicional da teoria da computação, adotando-se uma abordagem considerada finitária, onde somente objetos finitos (no sentido de seu conteúdo de informação) são efetivos e representáveis em linguagem de programação, enquanto que os objetos infinitos são entidades ideais limites que não são explicitamente representáveis.

Dentre a diversidade de estruturas de domínio que poderiam ser adotadas, observou-se que os Espaços Coerentes constituem uma estrutura de domínio adequada para construir os números reais e intervalos de reais de modo finitário, e para modelar semanticamente os processos computacionais correspondentes como eles ocorrem na prática corrente da programação científica, mais especificamente, da matemática intervalar. Considerando-se as idéias originais sugeridas por Rocha Costa [COS 94], foi possível observar que a noção de computação por construção está explícita nestas estruturas, que se mostraram perfeitamente adequadas à metodologia de construção desenvolvida.

Por outro lado, observa-se que a abordagem finitária proposta neste trabalho e a abordagem infinitária de Escardó, Edalat e Potts parecem não ser contraditórias, pois é possível recuperar as propriedades e entidades infinitas como propriedades e entidades que são construídas a partir de quasi-propriedades generalizadas e entidades parciais em espaços coerentes.

Salienta-se também que as propostas de fundamentação encontradas muitas vezes se preocupam apenas com a construção dos objetos, não abordando paralelamente o aspecto de construção também da estrutura - algébrica, relacional, topológica, de medidas, dentre outras - que acompanha estes objetos. Isto significa considerar apenas a "natureza" interna dos objetos, sem levar em conta o "ambiente" externo que lhe confere características essenciais para sua existência. Estas abordagens consideram que estas características externas não são de natureza computacional, e, portanto, não são inerentes aos objetos parciais, sendo somente identificadas no subespaço dos objetos totais.

Entretanto, observa-se que um objeto não existe isoladamente, mas faz parte de uma estrutura mais geral, que lhe confere suas propriedades e lhe determina sua aplicabilidade. Portanto, considera-se importante que uma construção envolvendo uma classe de objetos envolva também a construção da estrutura que acompanha este objeto como um todo.

Assim, a metodologia desenvolvida foi denominada de global pois permite que as características externas à construção interna dos reais (objetos totais) e intervalo reais (objetos quasi-totais), como suas operações algébricas, sua ordem de posição, sua distância euclidiana, sua topologia de Hausdorff, dentre outras, possam também ser obtidas pelo processo construtivo, ao mesmo tempo em que os reais e intervalos reais são construídos. Além disso, ao mesmo tempo em que esta construção externa procede, sua representação computacional interna é garantida por uma estrutura de informação de Espaço Coerente com morfismos estáveis e lineares.

Considerando-se um sistema como o produto final existente, o passo inicial da construção é analisar sua origem ou suas raízes. Verifica-se que este produto final pode ser obtido a partir de um sistema mais simples, por um processo que permite, em cada etapa, que cada sistema derive, por construção, do sistema da etapa anterior, garantindo assim sua evolução em perfeita integração entre o nível de formação da natureza interna do objeto e o nível que lhe confere suas características externas. Este é o princípio fundamental do processo de globalização.

Finalmente salientam-se outros aspectos da metodologia desenvolvida. A característica de extensibilidade das estruturas construídas confere a esta metodologia sistemática uma possibilidade permanente de ampliação na sua aplicabilidade. Sua natureza construtiva permite sua fácil compreensão. A representação em dois níveis, se dotada de lógica compatível, permite a flexibilidade de se escolher, dependendo do tipo de aplicação, em que nível se quer raciocinar. Isto significa que a complexidade da natureza interna pode ficar escondida para um analista matemático, que se interessa apenas pelos aspectos externos e sua aplicação em computação científica. Por outro lado, um teórico em computação pode apenas se interessar em verificar a estrutura interna de informação, desconhecendo características externas que não lhe despertam interesse.

19.2 Principais Resultados Alcançados

19.2.1 Resultados genéricos

Girard [GIR 86] introduziu os Espaços Coerentes com o objetivo de obter uma estrutura para fornecer uma semântica para a Lógica Linear [GIR 87] [LAF 88]. Os espaço coerentes constituem uma simplificação da noção de Domínios de Scott [SCO 72a] [SCO 76] [SCO 82], apresentando natureza construtiva com características finitárias. A noção de espaço coerente recebeu aqui uma nova interpretação, compatível com o processo construtivo que foi desenvolvido, e, nesse sentido foram introduzidos os espaços coerentes com objetos indexados, os espaços coerentes gerados por conjuntos básicos e os espaços coerentes bi-estruturados, estruturas fundamentais para o desenvolvimento do trabalho.

Estendeu-se também a noção de "sistema" [MAN 89] ou de "estrutura relacional" [BRI 77], ou de Σ- estrutura [GRA 79] [ACI 91], obtendo-se o conceito de sistemas ordenados de 2ª ordem, uma classe mais geral na qual se incluem os principais tipos de dados da Computação Científica e da Matemática Intervalar - os sistemas de números reais e de intervalos de reais - assim como os sistemas de representação que se pretende usar para representá-los - espaços coerentes bi-estruturados -. O fato dos sistemas serem de 2ª ordem possibilita que eles apresentem, adicionalmente ao que apresentam os sistemas de 1ª ordem, relações e funções sobre partes (subconjuntos) do conjunto universo.

Desenvolveu-se uma metodologia para obter, através de um processo construtivo, uma representação global, com uma estrutura semântica baseada em Espaços Coerentes, para os sistemas ordenados de 2ª ordem, em particular, para os sistemas da computação científica, como o dos números reais e intervalos de reais.

Os sistemas de representação foram dotados de uma bi-estrutura. A estrutura de aplicação - relacional, funcional, de medidas, topológica -, onde é definida a ordem parcial de posição que dá ao sistema o seu caráter de sistema ordenado, e da qual se deriva a ordem de informação contida na estrutura de informação, é determinada pela utilização pretendida para o sistema de representação em questão. No caso dos sistemas de representação para a Computação Científica e a Matemática Intervalar, relativos ao números reais e aos intervalos reais, na estrutura de aplicação foram definidos a relação de posição $\leq$, as operações algébricas, funções como as funções trigonométricas, a distância, o diâmetro e o módulo, a topologia induzida pela distância. O caráter sistemático do processo construtivo permite que esta estrutura possa ser estendida, de acordo com a aplicação em questão.

Por outro lado, a estrutura de informação do sistema de representação está associada ao processo de construção dos elementos do conjunto universo da representação, chamados de objetos, do conjunto das aproximações destes objetos e de sua topologia de informação.

A representação em duas estruturas foi obtida pela coordenação de dois processos de construção relacionados: o que constrói a estrutura de informação e o que trata da construção da estrutura de aplicação. Obteve-se, assim, um espaço coerente bi-estruturado através de evoluções sucessivas específicas a partir de um sistema básico, com certas características especiais, determinado de acordo com o sistema a ser representado.

Estas evoluções são realizadas de tal forma que a estrutura do sistema representado pode ser recuperada na estrutura de aplicação do espaço coerente bi-estruturado, através do isomorfismo (para a estrutura de aplicação) existente entre o sistema representado e o subsistema dos objetos totais. Da mesma forma, exige-se que o sistema dos intervalos de elementos do sistema representado, estendido de modo adequado, e o subsistema dos objetos quasi-totais sejam isomorfos relativamente à estrutura de aplicação.

Além disso, existe uma representação linear interna, para cada aspecto da estrutura de aplicação, na estrutura de informação, garantindo desta forma o caráter computacional da representação.

Para os sistemas ordenados de 2ª ordem foram definidas transformações de universo, como subsistema, de estrutura, como redução e expansão, e globais, como as noções fundamentais de construção e evolução de sistemas.

Procurou-se introduzir também uma abordagem categórica, pela definição da categoria **SO2**, cujos objetos são os sistemas ordenados de 2ª ordem e cujos morfismos são os homomorfismos fortes de sistemas ordenados de 2ª ordem. Todas as transformações de sistemas ordenados de 2ª ordem - subsistema, redução, expansão, construção, evolução - constituem endofunctores na categoria **SO2**.

Mostrou-se que o processo de construção global determina uma adjunção entre duas subcategorias da categoria **SO2** dos sistemas ordenados de 2ª ordem: a subcategoria dos sistemas representados $\mathbf{SO2_R}$, que apresentam apenas uma estrutura, e a subcategoria das representações globais e seus subsistemas $\mathbf{SO2_G}$, que são bi-estruturadas.

19.2.2 Resultados relativos aos números reais e intervalos reais

A metodologia desenvolvida foi aplicada para obter uma representação global construtiva do sistema dos números reais $\mathsf{R} = (\Lambda_{\mathbb{R}};\Sigma_{\mathbb{R}})$, com $\Lambda_{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R}, \wp(\mathbb{R})\}$, e o sistema dos intervalos reais estendido $\mathsf{IR} = (\Lambda_{\mathbb{IR}^*};\Sigma_{\mathbb{IR}^*})$, com $\Lambda_{\mathbb{R}^*} = \{\mathbb{IR}^*, \wp(\mathbb{IR}^*)\}$, $\mathbb{IR}^* = \mathbb{IR} \cup \{\mathbb{R}\}$.

Assim, considerando-se como sistema básico o subsistema dos números racionais $\mathsf{Q} = (\Lambda_Q;\Sigma_Q)$, com $\Lambda_Q = \{Q, \wp(Q)\}$, onde a estrutura básica Σ_Q é obtida por restrição de $\Sigma_{\mathbb{R}}$ a Q tal que Σ_Q seja bem definida, mostrou-se que o processo de construção global determina um espaço coerente bi-estruturado de intervalos racionais $\mathsf{IIQ} \equiv (\Lambda_{\text{II}Q};\Sigma^{in}_{\text{II}Q};\Sigma^{ap}_{\text{II}Q})$, com $\Lambda_{\text{II}Q} = \{\text{II}Q, \wp(\text{II}Q)\}$, gerado pelo sistema básico Q.

Observa-se que as evoluções do processo de construção global foram realizadas de tal forma que as estruturas dos sistemas representados, R e IR, puderam ser recuperadas na estrutura de aplicação do espaço coerente bi-estruturado IIQ.

Foram estudados os Σ_{ap} - isomorfismos relativos à estrutura de aplicação considerada. Provou-se que o sistema dos intervalos reais estendido IR e o subsistema $qtot_{IIQ}$ dos objetos quasi-totais de IIQ são Σ_{ap} - isomorfos relativamente à ordem de posição, às operações algébricas e às funções unárias elementares, isto é IR $\cong_{ap}$ $qtot_{IIQ}$. Além disso, o subsistema tot_{IIQ} dos objetos totais de IIQ, relativamente à sua estrutura de aplicação, apresentou-se como um corpo ordenado completo que pode ser identificado com o sistema dos números reais R, isto é, R $\cong_{ap}$ tot_{IIQ}.

Foi introduzida uma subestrutura de medidas elementares - representada pelas funções diâmetro, módulo e distância - para IIQ. Para isso, estudou-se o comportamento dos objetos de forma quantitativa, desconsiderando uma análise da qualidade da informação por eles representada, ou seja, observando apenas a sua posição relativa pela relação de posição $\leq_{IIQ}$ definida na estrutura de aplicação do espaço coerente bi-estruturado IIQ.

Através de uma generalização da noção de distância, obteve-se a definição de uma função distância generalizada na subestrutura de medidas M_{IIQ} da estrutura de aplicação Σ^{ap}_{IIQ} de IIQ, pelas sucessivas evoluções do processo de construção global, a partir da definição da função distância básica d_Q na estrutura Σ_Q do sistema básico Q dos números racionais. De maneira similar foram construídas a função diâmetro e a função valor absoluto, que também receberam definições generalizadas.

Mostrou-se que a função distância definida na subestrutura de medidas M_{IIQ}, quando restrita ao subsistema dos objetos quasi-totais $qtot_{IIQ}$, é uma semi-pseudométrica generalizada que apresenta o significado intuitivo desejado para uma função distância no sistema dos intervalos reais IR. Além disso, provou-se que esta função distância, quando restrita ao subsistema dos objetos totais tot_{IIQ}, coincide exatamente com a métrica usual definida para o sistema dos números reais R. Estes dois fatos caracterizaram novamente os Σ_{ap} - isomorfismos entre R e IR e sua representação global IIQ.

De maneira similar, provou-se que a função valor absoluto definida na subestrutura de medidas M_{IIQ}, quando restrita ao subsistema dos objetos totais tot_{IIQ}, coincide exatamente com a norma Euclidiana definida para o sistema dos números reais R. Resultado análogo foi obtido para a função valor absoluto restrita ao subsistema dos objetos quasi-totais $qtot_{IIQ}$ e uma função valor absoluto intervalar adequada definida no sistema dos intervalos reais IR.

No sentido de fornecer a fundamentação para uma caracterização topológica adequada dos espaços coerentes bi-estruturados obtidos pelo processo de construção global, ainda que seja uma caracterização topológica em um sentido generalizado, introduziu-se uma noção de espaço de vizinhanças generalizadas.

Desta forma, obteve-se uma caracterização topológica elegante para os espaços coerentes bi-estruturados, com funções estáveis e lineares na sua estrutura de informação, determinando uma estrutura topológica de informação para o sistema de representação global, que captura, internamente, as noções de estabilidade e linearidade na estrutura de informação, e, paralelamente, uma estrutura topológica generalizada de aplicação, que especifica, externamente, a ação da função distância generalizada definida na estrutura de aplicação, assim como estabelecendo um relacionamento entre os dois níveis de caracterização.

Para caracterizar a estrutura topológica generalizada de informação, relativa aos aspectos topológicos generalizados para a categoria monoidal fechada dos espaços coerentes com funções estáveis e lineares, introduziu-se a noção de vizinhanças lineares com base na noção de vizinhanças estáveis introduzidas em [ZHA 92], que determinam um espaço disjuntivo sobre o qual é possível definir diversos conceitos topológicos interessantes. Introduziu-se assim um espaço de vizinhanças lineares, caracterizando-o em função de sua base de informação, que é enumerável.

Para obter uma estrutura topológica generalizada de aplicação, capaz de caracterizar a estrutura dos sistemas ordenados de 2ª ordem em cada etapa do processo de globalização, utilizou-se uma noção mais geral dos espaços de vizinhança induzidos por uma função distância generalizada, com uma topologia associada.

Mostrou-se a existência de um Σ_{ap} - isomorfismo topológico entre o subsistema $\mathsf{tot}_{\mathsf{IIQ}}$ dos objetos totais e o sistema R, isto é, um homeomorfismo entre o subespaço topológico de aplicação dos objetos totais *tot*(II*Q*) e o conjunto dos reais $\mathbb{R}$, munido de sua topologia usual. Da mesma forma provou-se que existe um Σ_{ap} - isomorfismo topológico entre o subsistema $\mathsf{qtot}_{\mathsf{IIQ}}$ dos objetos quasi-totais e o sistema dos intervalos reais IR, isto é, um homeomorfismo entre o subespaço topológico de aplicação dos objetos quasi-totais *qtot*(II*Q*) e o conjunto $\mathbb{IR}^*$ de intervalos reais estendido, munido de uma topologia adequada.

Também foram estudadas as vizinhanças estáveis introduzidas por Zhang [ZHA 89] [ZHA 92], relativamente a espaços de funções estáveis e outras construções com espaços coerentes, e, com base nestas noções, foram introduzidas vizinhanças lineares em espaços de funções lineares.

Com isso, alcançou-se um relacionamento entre a estrutura qualitativa de informação e a estrutura quantitativa de aplicação, mostrando-se que o espaço de vizinhanças lineares definido na estrutura de informação é capaz de representar internamente a estrutura topológica de aplicação, pela existência de uma bijeção entre o conjunto dos interiores das vizinhanças lineares básicas relativas ao subespaço dos objetos quasi-totais e a base enumerável da topologia de aplicação também relativa ao mesmo subespaço.

19.3 Considerações sobre a Continuidade do Trabalho

Observa-se aqui que este trabalho de fundamentação constitui apenas a base para o desenvolvimento de diversos trabalhos relacionados, sejam em áreas de fundamentação envolvendo domínios, espaço coerentes, semântica, e processos construtivos e evolutivos de sistemas em geral, como nas áreas de aplicação, como a Matemática Intervalar, a Computação Científica, além de outras áreas da Ciência da Computação, como a Inteligência Artificial, por exemplo. Veja capítulo 18.

Como continuidade imediata e natural sugere-se um estudo sobre a semântica dos processos computacionais intervalares, através do espaço coerente bi-estruturado intervalar utilizado para representar globalmente reais e intervalos de reais.

Entretanto, é importante salientar que ainda ficaram em aberto alguns aspectos internos da construção proposta, que ainda devem ser investigados, considerados aqui como fundamentais para garantir a efetiva aplicabilidade da metodologia desenvolvida. Resumem-se aqui alguns destes aspectos:

19.3.1 Computabilidade

Embora tenha-se verificado que a abordagem de caráter finitário adotada neste trabalho não seja incompatível com a abordagem infinitária adotada por Escardó, Edalat e Potts (seção 2.3.7), salienta-se que um trabalho importante a ser realizado é tornar explícita a conexão entre as duas abordagens, no que diz respeito aos aspectos de computabilidade de números, intervalos e funções, para que se determine, de maneira mais precisa e formal, o modo pelo qual as representações infinitárias, modeladas pelo domínio contínuo $\mathbf{I}\mathbb{R}$, aparecem no contexto das representações finitárias, modeladas pelo espaço coerente $\mathrm{II}Q$ desenvolvido no presente trabalho.

19.3.2 A Lógica

Verifica-se que estudar as estruturas envolvidas no processo construtivo, com suas relações, funções e topologia, assim como certas relações entre estas estruturas, sem prover uma lógica, não é suficiente.

Considerando-se a caracterização topológica desenvolvida, seria importante também estudar os aspectos lógicos do processo, pela introdução de uma lógica que permita raciocinar nestas estruturas em dois níveis: o da estrutura de informação, pela lógica de informação [ACC 97] - da ordem e do espaço de vizinhanças lineares interno, e o da estrutura de aplicação, pela lógica de aplicação - da relação de posição e da topologia externa associada ao espaço de vizinhanças gerado pela distância generalizada, assim como o relacionamento entre estes níveis, possivelmente pela linearização da lógica de aplicação.

Este trabalho poderia ser realizado, por exemplo, segundo a Teoria dos Modelos [ARJ 89] [BRI 77], que é considerada uma combinação [CHA 77] de Álgebra Universal [JAC 95] e Lógica e consiste em um ramo da Lógica que trata das relações entre as estruturas matemáticas e as linguagens formais, ou através da abordagem lógica à topologia [VIC 87].

19.3.3 A Subestrutura de Medidas

A subestrutura de medidas que foi introduzida neste trabalho (capítulos 11 e 12) pode ser considerada elementar. Na verdade, foram definidas apenas as funções diâmetro, módulo e distância.

Observa-se que seria interessante mostrar a evolução da representação global no sentido de uma teoria de medidas propriamente dita, construindo modelos para espaços de medidas assim como para distribuições de probabilidade sobre espaços clássicos como em [EDA 95] [EDA 97]. A partir do trabalho sugerido em 19.3.1, seria interessante prover uma teoria de medidas computacional e uma teoria de integração, no sentido de se obter uma generalização da noção de integração em funções em espaço coerentes bi-estruturados, de tal forma que os Σ_{ap} - isomorfismos garantam a reprodução da integração de funções reais e intervalares pelas funções definidas nos subsistemas de objetos totais e quasi-totais.

19.3.4 Aplicação em outras estruturas

Uma questão freqüente relativamente a metodologia desenvolvida relaciona-se com os tipos de estruturas que podem ser representadas.

Na verdade esta questão ainda está em aberto, pois não houve uma caracterização efetiva das estruturas para as quais é possível obter uma representação global. Os requisitos exigidos - um conjunto munido de uma estrutura de funções e relações quaisquer, onde seja definida uma relação de posição, para o qual existe um subconjunto enumerável, que, sendo tomado como sistema básico, possa evoluir para um espaço coerente bi-estruturado de intervalos, tal que possam ser estabelecidos os isomorfismos, para sua estrutura de aplicação, entre o sistema dos objetos quasi-totais e o sistema de intervalos do sistema original - ainda podem ser considerados muito amplos. Neste sentido, sugere-se uma investigação sobre a aplicação efetiva da metodologia em estruturas outras que não as utilizadas em Computação Científica e Matemática Intervalar.

19.4 Considerações Finais

Procurou-se conduzir este trabalho segundo os critérios de formalismo e rigor exigidos por uma pesquisa de cunho teórico, fundamentada em princípios e teorias da matemática e análise. Entretanto, salienta-se aqui que, em todas as fases do desenvolvimento desta tese, fomos guiados sempre pela intuição e visão dos orientadores, que definiram não somente a direção do trabalho como também a extensão e profundidade adequada com que os assuntos deveriam ser tratados.

Bibliografia

[ABR 87] ABRAMSKY, S. **Domain Theory in Logical Form.** London: Department of Computer Science/Imperial College, 1987.

[ABR 94] ABRAMSKY, S. ; JUNG, A. Domain Theory. **Handbook of Logic in Computer Science.** [S.l.]: Clarendon Press, 1994.

[ALE 68] ALEFELD, G. **Intervallrechnung über den komplexen Zahlen und einig Anwendungen.** [S.l.]: Universität Karlsuhe, 1968. Thesis.

[ALE 83] ALEFELD, G.; HERZBERGER, J. **Introduction to Interval Computations**. New York: Academic Press, 1983.

[ALV 97] ALVAREZ, M.; EDALAT, A. **Extensions of Valuations.** London: Department of Computing/ Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1997. Disponível no WWW em http://theory.doc.ic.ac.uk:80/people/Edalat/extensionofvaluations.ps.Z.

[ACI 90] ACIÓLY, B.; DIMURO, G. P.; CLAUDIO, D. M. Uma Teoria de Informação - Uma Abordagem para a Teoria dos Intervalos. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 13., 1990, Águas de Lindóia. **Resumos das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1990. 184 p. p.22.

[ACI 91] ACIÓLY, B. M. **Fundamentação Computacional da Matemática Intervalar.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1991. 253p.

[ACI 91a] ACIÓLY, B. ; CLAUDIO, D. M.; DIMURO, G. P. Toward a Computational Interval Mathematics. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER ARTHMETIC AND SCIENTIFIC COMPUTING, 1991, Oldenburg. **Proceedings...** Oldenburg: Universität Oldenburg, 1991.

[ACI 92] ACIÓLY, B. M. **Um Misto de Visão Clássica e Moderna de Topologia.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1991. 114p. (RP - 191).

[ACC 96] ACCORSI, R. et al. Um Confronto entre Métodos Pontuais, Intervalares e Precondicionados usando a Matriz de Hilbert. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 19., 1996, Goiânia. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1996. p.250-251

[ACC 97] ACCORSI, R.; SELLANES, R. G. S. ; DIMURO, G.P. Lógica linear- Uma Visão Computacional. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 20., 1997, Gramado. **Resumos...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1997. p.512-513.

[AGU 95] AGUIAR, M. S.; REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P. Uma Biblioteca Matricial Intervalar para o Ambiente de Técnicas Intervalares. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 18., 1995, Curitiba. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1995. v.1, p.155-159.

[AGU 96] AGUIAR, M. S.; REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P. An Object Oriented Library for Intervalar Linear Algebra. In: WORKSHOP ON COMPUTER ARITHMETIC, INTERVAL AND SYMBOLIC COMPUTATION, 2., 1996, Recife. **Anais...** Recife: UFPE-DI, 1996. p.7-9.

[ALE 83] ALEFELD, G.; HERZBERGER, J. **Introduction to Interval Computations**. New York: Academic Press, 1983.

[ASP 91] ASPERTI, A.; LONGO, G. **Categories, Types and Structures:** an Introduction to Category Theory for the Working Computer Scientist. Cambridge: MIT Press, 1991. 306p.

[BOI 96] DU BOIS, A. R. ; REISER, R. H. S.; DIMURO, G.P. Lógica Intervalar. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 19., 1996, Goiânia. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1996. p.226-227

[BAM 93] BARNSLEY, M. F. ; SLOAN, A. D. **Fractais Everywhere**. New York: Academic Press, 1993.

[BAR 84] BARENDREGT, H. P. **The Lambda Claculus:** its Syntax and Semantics. Amsterdan: North-Holland, 1984.

[BAR 85] BARNSLEY, M. F. ; DEMKO, S. Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals. **The Proceedings of the Royal Society of London,** London, v.399, p.243-275, 1985.

[BAR 88] BARNSLEY, M. F. ; SLOAN, A. D. A Better Way to Compress Images. **Byte Magazine**, [S.l], p.215-223, Jan. 1988.

[BAR 92] BARBOZA, L. V.; DIMURO. G. P. Por que o Computador Erra? Uma Visão Didática. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 15., 1992, São Carlos. **Resumo das Comunicações**. São Carlos: SBMAC, 1992. 152p. p.66.

[BAR 93] BARBOZA, L. V.; DIMURO. G. P. Avaliação de Funções Intervalares Racionais. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 16., 1993, Uberlândia. **Resumo das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1993. 242 p. p.157.

[BAR 9?] BARR, M.; WELLS, C. **Category Theory for Computing Science.** New York: Prentice Hall, [199?].

[BAU 8?] BAUMANN, E. Optimal Centered Forms. In: FREIBURGER INTERVAL-BERICHT. **Proceedings...** Freiburg: Universität Freiburg/West Germany, [198?]. p. 5-21.

[BED 93] BEDREGAL, B.R.C. Rational Intervals: An Effectively Given Information System for the Real Numbers. **Scientific Computation and Mathematical Modelling**, Sofia, p.159-170, 1993.

[BED 94] BEDREGAL, B.R.C. **Sistemas de Informação Contínuos.** Recife: CPGCC da UFPE, 1994. 109 p.

[BER 78] BERRY, G. Stable Models of Typed Lambda-Claculi. In: ICALP CONFERENCE, 5., 1978, Udine. **Proceedings...** Udine: [s.n.], 1978.

[BET 91] BETHKE, I. Coherence Spaces are Untopological. **Theoretical Computer Science,** Amsterdam, v. 85, p.353-357, 1991.

[BLA 97] BLANCK, J. Domain Representability of Metric Spaces. **Annals of Pure and Applied Logic,** [S.l.], v.83, p.225-247, 1997.

[BON 95] BONSANGUE, F.; BREUGEL, F.; RUTTEN, J.J.M.M. **Generalized Ultrametric Spaces:** Completion, Topology, and Powerdomains via the Yoneda Embedding. Amsterdam: Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1995. 43p. (Report, CS-R9560).

[BRI 77] BRIDGE, J. **Beginnining Model Theory.** Oxforf: Oxford University Press, 1977. 143p.

[BUS 63] BUSHAW, D. **Elements of General Topology.** New York: John Wiley & Sons, 1963. 165p.

[CAD 93] CADORE, L.; CLAUDIO, D. M. Aritmética Intervalar Estendida com Intervalos Dirigidos. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 16., 1993, Uberlândia. **Resumo das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1993. 242 p. p. 153.

[CEC 66] CECH, E. **Topological Spaces.** New York: Wiley, 1966. 893 p.

[CHA 77] CHANG, C. C. ; KEISLER, H. J. **Model Theory.** Amsterdam: North Holland, 1977.

[CLA 89] CLAUDIO, D. M.; MARINS, J. M. **Cálculo Numérico e Computacional - Teoria e Prática.** São Paulo: Atlas, 1989. 464p.

[CLA 92] CLAUDIO, D.M.; ESCARDÓ, M.N. ; FRANCIOSI, B.R.T. An Order-Theoretic Approach to Interval Analyis. **Interval Computations**, Moscow, v.3, n.5, p.38-45, 1992.

[CLA 94] CLAUDIO, D. M. **Interval Approximation Theory.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1994. 17p. (RP 226).

[COE 91] COELHO, A. et al.Métodos Computacionais Intervalares para o Cálculo de Imagens de Funções Racionais. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 14., 1991, Nova Friburgo. **Resumo das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1991. 154p. p.38.

[COQ 87] COQUAND, T.; GUNTER, C.; WINSKEL, G. **Di-Domains as a Model of Polymorphism.** Cambridge: Computer Laboratory, Cambridge University, 1987. (TR-107).

[COR 88] CORLISS, G. F. **How Can You Apply Interval Techniques in an Industrial Setting?** Milwaukee: Marquette University, 1988. (Technical Report, 301).

[COS 90] COSTA, A. C. R. **Preliminary Thoughts on Agents and their Development.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 199. (RP 122).

[COS 93] COSTA, A. C. R. **Inteligência de Máquina:** Esboço de uma Abordagem Construtivista. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 199. 168p.

[COS 94] COSTA, A. C. R. **$\Re$ as a Coherence Space.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1994. 2p. Notas de Pesquisa.

[COS 97] COSTA, A. C. R. **Construções Autorreguladas.** Trabalho apresentado no Dia da Teoria, 1., Pelotas, 1997. Disponível no WWW em http://descartes.ucpel.tche.br/~gmc/I-Dia-Teoria/construc.html.

[DAV 91] DAVEY, B. A.; PRIESTLEY, H. A. **Introduction to Lattices and Order**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 248p.

[DED 01] DEDEKIND, R. **Essays on the Theory of Numbers.** New York: Dover Publications Inc., 1901. 115p.

[DEV 91] DEVLOO, P. R. B.; ALVES FILHO, J. S. R. **On the Use of the Object Oriented Programming Philosophy in Scientific Computing**. São José dos Campos: Divisão de Engenharia Mecânica do INPE, 1991.

[DIM 89] DIMURO, G. P. **A Teoria dos Intervalos e Métodos Computacionais para Imagens de Funções**. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1989. 127 p. (TI - 115).

[DIM 91] DIMURO, G. P. **Domínios Intervalares da Matemática Computacional**. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1991. 321p.

[DIM 91a] DIMURO, G. P.; ACIÓLY, B. M.; CLAUDIO, D. M. About Range of Functions - A Domain Approach. In: INTERNATIONAL AMSZE CONFERENCE "INFORMATION & SYSTEM", 1991, Hangzhou. **Proceedings...** Beijing: International Academic Publishers, 1991. v.2, p. 553-556.

[DIM 91b] DIMURO, G. P.; ACIÓLY, B. M.; CLAUDIO, D. M. The Partial Real Interval Domain. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER ARITHMETIC AND SCIENTIFIC COMPUTAION, 1991, Oldenburg. **Proceedings...** Oldenburg: Universität Oldenburg, 1991.

[DIM 91c] DIMURO, G. P.; CLAUDIO, D. M. Aritmética Intervalar no Domínio Contínuo $\Re$ dos Intervalos Reais Parciais. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 14., 1991, Nova Friburgo. **Resumo das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1991. 154 p. p. 37.

[DIM 92] DIMURO, G. P.; BARBOZA, L. V.. A Programação Orientada a Objetos na Computação Científica e sua Aplicação na Teoria Dos Domínios Contínuos Intervalares. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 15., 1992, São Carlos. **Resumo das Comunicações**. São Carlos: SBMAC, 1992. 152p. p.142.

[DIM 93] DIMURO, G. P. et al. Uma Biblioteca Intervalar Orientada a Objetos para Controle Automático do Erro em Computação Científica. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 16., 1993, Uberlândia. **Resumo das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1993. 242 p. p.155.

[DIM 93b] DIMURO, G. P.; BARBOZA, L. V.; SANTOS, C. P. A Matemática Intervalar em Ciência e Tecnologia - Uma Aplicação Técnica segundo uma Abordagem Orientada a Objetos. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 16., 1993, Uberlândia. **Resumo das Comunicações**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1993. 242 p. p.155.

[DIM 94] DIMURO, G. P.; CLAUDIO, D. M. A Matemática Intervalar como Fundamentação para a Análise Numérica e Computação Científica. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 17., 1994, Vitória. **Anais...** Vitória: SBMAC, 1994. v.1, p.137-141.

[DIM 95] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R.; CLAUDIO, D. M.. Espaços Coerentes. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 18., 1995, Curitiba. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1995. v.1, p.188-192.

[DIM 96a] DIMURO, G. P. **Uma Construção dos Reais Computáveis utilizando Espaços Coerentes de Intervalos**. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1996. 150 p. (E.Q. - 05).

[DIM 96b] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. M. Espaços Coerentes e Intervalos. Encontro de Verão da Matemática Computacional, 1., 1996, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1996. p. 20-21.

[DIM 96c] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R.; CLAUDIO, D. M.. A Coherence Space of Rational Intervals. In: WORKSHOP ON COMPUTER ARITHMETIC, INTERVAL AND SYMBOLIC COMPUTATION, 2., 1996, Recife. **Anais...** Recife: UFPE-DI, 1996. p.26-28.

[DIM 96d] DIMURO, G.P. ; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. M. Uma Construção dos Números Reais Computáveis Utilizando Espaços Coerentes de Intervalos Racionais. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 19., 1996, Goiânia. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1996. p.130-131

[DIM 97a] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. M. A Coherence Space of Rational Intervals for a Construction of $\mathbb{IR}$. **Reliable Computing**, St. Petersburg, 1997. Ainda não publicado.

[DIM 97b] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. M. Bi-Structured Coherence Spaces and Global Constructive Representation of Data Types for Scientific Computation. In: WORKSHOP SOBRE MÉTODOS FORMAIS E QUALIDADE DE SOFTWARE, 1., 1997, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: UFRGS, 1997. p.43-51.

[DIM 97c] DIMURO, G. P. et al. Representing Data Types for Scientific Computation using Bi-Structured Coherence Spaces. In: WORKSHOP ON COMPUTATION AND APPROXIMATION, 3., 1997, Birmingham. **Procedings...** Ainda não publicado.

[DIM 97d] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. M. Bi-Structured Coherence Spaces and Global Constructive Representation of $\mathbb{R}$. Trabalho apresentado em BRAZIL JOINT USA WORKSHOP ON FORMAL FOUNDATIONS OF SOFTWARE SYSTEMS, 1., 1997, Rio de Janeiro.

[DIM 97e] DIMURO, G.P. ; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. M. Uma Caracterização Topológica para O Espaço Coerente Intervalar Bi-Estruturado. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 20., 1997, Gramado. **Resumos...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1997. p.249-250.

[DIM 97f] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. M. Global Representation of Second Order Ordered Systems. In: SECOND BRAZIL JOINT USA WORKSHOP ON FORMAL FOUNDATIONS OF SOFTWARE SYSTEMS, 2., 1997, New Orleans. **Proceedings...** Ainda não publicado.

[DIM 98] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. A Measure System for the Bi-Structured Coherence Space of Rational Intervals. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTERVAL METHODS AND THEIR APPLICATION IN GLOBAL OPTIMIZATION (INTERVAL'98), 4., 1998, Nanjing. **Proceedings...** Nanjing: Department of Mathematics/Nanjing University, 1998. Ainda não publicado.

[DIV 95] DIVERIO, T. A. **Uso Efetivo da Matemática Intervalar em Supercomputadores Vetoriais.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1995. 291p.

[DUG 66] DUGUNDJI, J. **Topology.** Boston: Allyn and Bacon Inc., 1966. (Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics). 447p.

[EDA 93] EDALAT, A.; SMYTH, M. B. Information Categories. **Applied Categorical Strctures,** [S.l.], v.1, p. 197-232, 1993.

[EDA 95] EDALAT, A. Domain Theory and Integration. **Theotetical Computer Science,** Amsterdam, v.151, n.1, p.163-193, Nov. 1995. Trabalho apresentado no Workshop on Topology and Completion in Semantics, 1993, Chartres, France.

[EDA 95a] EDALAT, A.; ESCARDÓ, M. H. **Integration in Real PCF.** London: Department of Computing/Imperial College, 1995. 10p. Trabalho apresentado em Logic in Computer Science, 1996.

[EDA 95b] EDALAT, A. Dynamical Systems, Measures and Fractals via Domain Theory. **Information and Computation,** Cambridge, v.120, n.1, p.32-48, July 1995.

[EDA 96] EDALAT, A. Power Domains and Iterated Functions Systems. **Information and Computation,** Cambridge, v.124, n.2, p.182-197, Feb. 1996.

[EDA 97] EDALAT, A. **Domains for Computation in Mathematics, Physics and Exact Real Arithmetic.** London: Department of Computing/ Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1997. Trabalho apresentado em Summer School on New Paradgms for Computation on Classical Spaces/Workshop on Coputation and Approximation, 3. ,1997, Birmingham.

[EDA 97a] EDALAT, A. **Applications of Domain Theory in Iterated Function Systems.** London: Department of Computing/ Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1997. Trabalho apresentado em Summer School on New Paradgms for Computation on Classical Spaces/Workshop on Coputation and Approximation, 3., 1997, Birmingham.

[EDA 97b] EDALAT, A.; SÜNDERHAUF, P. **A Domain Theoretic Approach to Computability on the Real Line.** London: Department of Computing/ Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1997. Disponível no WWW em http://theory.doc.ic.ac.uk/people/Edalat/reals.ps.Z.

[ERS 72] ERSHOV, Y. L. Computational Functionals of Finite Types. **Algebra and Logic,** [S.l.], v.11, n.4, p. 367-437, 1972.

[ESC 93] ESCARDÓ, M. H.; CLAUDIO, D. M. **Scott Domain Theory as a Foundation for Interval Analysis.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1993. 41p. (RP-218).

[ESC 94] ESCARDÓ, M. H. **Towards a Notion of Primitive recursive Real Function.** London: Department of Computing/Imperial College, 1994. 23p.

[ESC 95] ESCARDÓ, M. H. **Induction and Recursion on the Real Line.** London: Department of Computing/Imperial College, 1995. 26p.

[ESC 96] ESCARDÓ, M. H. PCF Extended With Real Numbers. **Theoretical Computer Science**, Amsterdam, v. 162, n.1, p.79-115, 1996.

[ESC 97] ESCARDÓ, M. H.; STREICHER, T. Induction and Recursion on the Partial Real Line via Biquotients of Befree Algebras. In: IEEE SYMPOSIUM ON LOGIC IN COMPUTER SCIENCE, 12., 1997. **Proceedings...** [S.l]: IEEE, 1997.

[GIA 93] GIANANTONIO, P. **A functional Approach to Real Number Computation.** Pisa: University of Pisa, 1993.

[GIA 96] GIANANTONIO, P. Real Number Computability and Domain Theory. **Information and Computation**, Cambridge, v.127, n.1, p.11-25, 1996.

[GIE 80] GIERS, K. et al. **A Compedium of Continuous Lattice**. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[GIR 86] GIRARD, Jean-Yves. The System F of Variable Types, Fifteen Years Later. **Theorical Computer Science**, Amsterdam, n.45, p.159-192, 1986.

[GIR 87] GIRARD, Jean-Yves. Linear Logic. **Theorical Computer Science**, Amsterdam, n.50, p.1-102, 1987.

[GIR 89] GIRARD, Jean-Yves; LAFONT, Y.;TAYLOR, P. **Proofs and Types.** Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 176p.

[GIR 90] GIRARDI, M. R.; PRICE, R. T. O Paradigma de Desenvolvimento por Objetos. **Revista de Informática Teórica e Aplicada**, Porto Alegre, v.2, n.1, p.69-94, maio 1990.

[GIR 96] GIRARD, Jean-Yves. **Coherent Banach Spaces:** A Continuous Denotational Semantics. Marseille: Institut de Mathématique de Luminy, 1996. 23p.

[GOL 79] GOLDBLATT, R. **The Categorical Analysis of Logic.** Amsterdan: North-Holland, 1979. 496p. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, v. 98).

[GRA 79] GRÄTZER, G. **Universal Algebra.** Berlin: Springer-Verlag, 1979.

[GRZ 55] GRZEGORCZYK, A. Computable Functionals. **Fundamenta Mathematica**, [S.l.], v. 42, p.168-202, 1955.

[GRZ 57] GRZEGORCZYK, A. On the Definition of Computable Real Continuous Functions. **Fundamenta Mathematica**, [S.l.], v. 44, p.61-71, 1957.

[GUN 92] GUNTER, C. A. **Semantics of Programming Languages.** Cambridge: MIT Press, 1992.

[HAN 69] HANSEN, E. R. The Centered Forms. **Topics in Interval Analysis.** Oxford: Hansen, 1969.

[HAN 80] HANSEN, E. R. Global Optimization using Interval Analysis - the Multidimensional Case. **Numerisch Mathematik**, [S.l.], v.34, n.1, p.247-270, 1980.

[HOL 96] HOLBIG, C.A. **Métodos Intervalares para Resolução de Sistemas de Equações Lineares.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1996. 96p.

[HOO 93] HOOFMAN, R. Continuous Information Systems. **Information and Computation**, Cambridge, v.105, p.42-71, 1993.

[HUT 81] HUTCHINSON, J. E. Fractals and Self-Similarity. **Indiana University Mathematics Journal,** [S.l.], v.30, p.713-747, 1981.

[HUT 95] HUTH, M. A Maximal Monoidal Closed Category of Distributive Algebraic Domains. **Information and Computation,** Cambridge, v.116, n.1, p.10-25, Jan. 1995.

[JAC 95] JACOBSON, N. **Basic Algebra II.** New York: W. H. Freeman, 1995. 686p.

[JOH 82] JOHNSTONE, P. T. **Stone Spaces.** Cambridge: Cambridge University Press, 1982. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v.3).

[JON 89] JONES, C.; PLOTKIN, G. A Probalistic Powerdomain of Evaluations. In: IEEE SYMPOSIUM ON LOGIC IN COMPUTER SCIENCE, 4., 1989. **Proceedings...** [S.l]: IEEE, 1989.

[JUN 89] JUNG, A. **Cartesian Closed Categories of Domains.** Amsterdam: Centre for Mathematics and Computer Science, 1989.

[JUN 97] JUNG, A. **An Introduction to Edalat's Theory of R-Integration.** Birmingham: School of Computer Science/ University of Birmingham, 1997. Trabalho apresentado em Summer School on New Paradgms for Computation on Classical Spaces/Workshop on Coputation and Approximation, 3.,1997, Birmingham.

[KAM 84] KAMIMURA, T.; TANG, A. Total Objects of Domains. **Theoretical Computer Science**, Amsterdam, n.29, p.155-166, 1984.

[KAM 84a]KAMIMURA, T.; TANG, A. Effectively Given Spaces. **Theoretical Computer Science**, Amsterdam, n.34, p.275-288, 1984.

[KEL 55] KELLEY, J. **General Topology.** New York: American Book Company, 1955. 297 p. (The University Series in Higher Mathematics).

[KOR 94] KORZENOWSKI, H. **Estudo Sobre Resoluções de Equações de Coeficientes Intervalares**. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1994. 132p.

[KUL 81] KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. **Computer Arithmetic in Theory and Practice**. New York: Academic Press, 1981.

[KUL 83] KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. A New Approach to Scientific Computation. In: SIMPOSIUM ON A NEW APPROACH TO SCIENTIFIC COMPUTATION, 1982, Yorktown Heights. **Proceedings...** New York: Academic Press, 1983. 384 p.

[LAC 55] LACOMBE, D. Extension de la Notion de Fonction Récusive aux Functions d'une ou Plusieurs Variable Réeles I. **Comptes Rendus,** [S.l.], v. 240, p.2478-80, 1955.

[LAF 88] LAFONT, Y. **Introduction to Linear Logic.** Isle of Thorns: [s.n.], 1988. (Lecture Notes for the Summer School on Constructive Logics and Category Theory).

[LAV 8?] LAVEUVE, S. E. **Definition Einer Kahan-arithmetik Und Ihre Implementierung.** [S.l.]: Institut für Praktisch Mathematik/Universität Karlsruhe/ BRD, [198?]. p.236-245.

[LAW 73] LAWVERE, F. W. Metric Spaces, Generalized Logic, and Closed Categories. In: SEMINARIO MATEMATICO E FISICO DE MILANO, 43., 1973, Milão. **Rendiconti.** [S.l: s.n.], 1973. p.135-166.

[LAW 82] LAWSON, J. Valuations on continuous Lattices. In: **Continuous Lattices and Related Topics**. Bremen: Universität Bremen, 1982. (Mathematik Arbeitspapiere, v.27).

[LAW 87] LAWSON, S. D. **The Versatile Continuous Order**. Baton Range: Department of Mathematics/ Louisiana State University, 1987.

[LAW 97] LAWSON, J. **Elements of Domaim Theory.** Baton Rouge: Department of Mathematics/ Louisiana State University, 1997. Trabalho apresentado em Summer School on New Paradgms for Computation on Classical Spaces/Workshop on Coputation and Approximation, 3.,1997, Birmingham.

[LOR 9?] LORKOWSKI, J.; KREINOVICH, V. **If We Measure a Number, We Get an Interval. What If We Measure a Function Or an Operator?** El Paso: Computer Science Departament/University of Texas, [199?]. 12p.

[MAN 89] MANZANO, M. A. **Teoria de Modelos.** Madrid: Alianza Editorial, 1989. 289p.

[MAR 81] MARKOV, S. On an Interval Arithmetic and its Application. In: SYMPOSIUM ON COMPUTER ARITHMETIC, 5., 1981, Ann Arbor. **Proceedings...** Ann Arbor: IEEE Computer Cociety Press, 1981. p.274-277.

[MAR 84] MARTIN-LÖF, P. **Intuitionistic Type Theory.** Napoli: Bibliopolis, 1984.

[MAR 92] MARKOV, S. On the presentation of Ranges of Monotonic Functions using Interval Arithmetic. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTERVAL AND STOCHASTIC METHODS IN SCIENCE AND ENGINEERING, 1992, Moscou. **Proceedings...** Moscou: Ed. A. Voshinin, 1992.

[MAR 92a] MARKOV, S. Extended Interval Arithmetic Involving Infinite Intervals. **Mathematica Balkanica**, [S.l.], v.6, n.3, p.269-304, 1992.

[MAR 94] MARKOV, S. **On an Arithmetic for Directed Intervals and its Application:** the Real Arithmetic Case. Sofia: Ann. Univ. Sofia/ Fac. Math., 1994.

[MAR 95] MARKOV, S. On Directed Interval Arithmetics and its Applications. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON REAL NUMBERS AND COMPUTERS, 1995, Saint-Etienne. **Proceedings...** Sofia: U. of Mines, 1995. p.249-260.

[MAR 9?] MARKOV, S.; POPOVA, E. ; ULLRICH, C. **On the Solution of linear Algebraic Equations Involving Interval Coefficients**. [S.l.]: Institute of Biophysics/Bulgarian Academy of Sciences and Institute of informatis/University of Basel, [199?]. 10p.

[MOO 66] MOORE , R. E. **Interval Analysis**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1966.

[MOO 79] MOORE, R. E. **Methods and Applications of Interval Analysis**. Philadelphia: SIAM, 1979. 190p.

[MOO 88] MOORE, R. E. **Realiability in Computing:** The Role of Interval Methods in Scientific Computing. New York: Academic Press, 1988.

[NEU 89] NEUMAIER, A. **Interval Methods for Systems of Equations.** Freiburg: Cambridge University Press, 1989. 359p.

[NIC 75] NICKEL, K. L. E. **Interval Mathematics**. New York: Springer-Verlag, 1975.

[NIC 85] NICKEL, K. L. E. **Interval Mathematics**. New York: Springer-Verlag, 1985.

[NOR 89] NORBERG, T. Existence Theorems for Measures on Continuous Posets, with Application to Ramdom Set Theory. **Math. Scand.,** [S.l.], v.67, p.15-51, 1989.

[OLI 94] OLIVEIRA, F. M. **Critérios de Equilibração para Sistemas de Tutores Inteligentes**. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1994. 119p.

[OLI 95] OLIVEIRA, P. W. **Análise Intervalar.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1995. 182p.

[OLF 95] OLIVEIRA, F. M. Measuring Agreement and Harmony in Multi-Agent Societies: a first approach. In: WAINER, Jacques; CARVALHO, Ariadne (Eds.). **Advances in artificial intelligence**. New York: Springer-Verlag, 1995. 342p. p.232-241.

[PHO 94] PHOA, W. From Terms Models to Domais. **Information and Computation**, Orlando, v.109, n.1-2, p.211-255, Feb./Mar 1994.

[PIA 73] PIAGET, J. **Biologia e Conhecimento.** Petrópolis: Vozes, 1973.

[PIE 91] PIERCE, B. C. **Basic Category Theory for Computer Scientists.** Cambridge: MIT Press, 1991. (Foundation of Computing Series).

[PLO 77] PLOTKIN, G. LCF considered as a Programming Language. **Theoretical Computer Science**, Amsterdam, v.5, n.1, p.233-255, 1977.

[PLO 81] PLOTKIN, G. **Post-Graduate Lecture Notes in Advanced Domain Theory.** Edinburgh: Department of Computer Science/University of Edinburgh, 1981.

[POS 71] POSTON, T. **Fuzzy Geometry.** [S.l.]: University of Warwick, 1971.

[POT 96] POTTS, P. J.; EDALAT, A. **Exact Real Arithmetic based on Linear Fractional Transformations.** London: Department of Computing/ Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1996. Disponível no WWW em http://www-tfm.doc.ic.ac.uk/~pjp.

[POT 97] POTTS, P. J. **Efficient and Strict Algorithms for Exact Real Arithmetic.** London: Department of Computing/ Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1997. Trabalho apresentado em Summer School on New Paradgms for Computation on Classical Spaces/Workshop on Coputation and Approximation, 3. , 1997, Birmingham.

[POT 97a] POTTS, P. J.; EDALAT, A. **Exact Real Computer Arithmetic.** London: Department of Computing/ Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1997. Disponível no WWW em http://www-tfm.doc.ic.ac.uk/~pjp.

[POT 97a] POTTS, P. J.; EDALAT, A.; ESCARDÓ, M. Semantics fo Exact Real Arithmetic. In: IEEE SYMPOSIUM ON LOGIC IN COMPUTER SCIENCE, 12., 1997. **Proceedings...** [S.l]: IEEE, 1997.

[POU 88] POUR-EL, M. B.; RICHARDS, J. I. **Computability and Analysis in Physics.** New York: Springer-Verlag, 1988.

[PRE 88] PREUSS, G. **Theory of Topological Structures.** Dordrecht: D. Reidel, 1988.

[RAL 86] RALL, L. B. Improved Interval Bounds for Range of Functions. In: SYMPOSIUM ON INTERVAL MATHEMATICS, 1985, Freiburg. **Proceedings...** Berlin: Springer-Verlag, 1986. p.143-150. (Lecture Notes in Computer Science, v.212).

[RAT 84] RATSCHEK, H.; ROKNE, J. **Computer Methods for the Range of Functions**. England: Ellis Horwood, 1984. 168p.

[RAT 88] RATSCHEK, H.; ROKNE, J. **New Computer Methods for Global Optimazation**. England: Ellis Horwood, 1988. 229p.

[REI 94] REISER. R.H.S.; DIMURO, G.P. Álgebra Matricial Intervalar. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 17., 1994, Vitória. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1994. v.1, p.352-356.

[REI 95] REISER. R.H.S.; CLAUDIO, D. M.; DIMURO, G.P. Precondicionamento em SELAS Intervalares. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 18., 1995, Curitiba. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1995. 130 p. v.1, p. 123-126.

[REI 96a] REISER, R. H. S.; DIMURO, G.P. ; COSTA, A. C. R. et al. Estudo da Linearidade das Funções Trigonométricas no Espaço Coerente de Intervalos Racionais. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 19., 1996, Goiânia. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1996. p.116-117.

[REI 96b] REISER, R. H. S. et al. The Interval Gauss-Seidel Iteration. In: WORKSHOP ON COMPUTER ARITHMETIC, INTERVAL AND SYMBOLIC COMPUTATION, 2., 1996, Recife. **Anais...** Recife: UFPE-DI, 1996. p.72-74.

[REI 97a] REISER, R. H. S. **Estudo da Categoria Computável dos Espaços Coerentes Gerados por Conjuntos Básicos com Aplicação em Análise Real.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1997. 121p.

[REI 97b] REISER, R. H. S. et al. Representação de Funções no Espaço Coerente Bi-Estruturado II*Q*. In: WORKSHOP SOBRE MÉTODOS FORMAIS E QUALIDADE DE SOFTWARE, 1., 1997, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: UFRGS, 1997. p.43-60.

[REI 97c] REISER, R. H. S. et al. Representação de Funções em Espaços Coerente Bi-Estruturados. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 20., 1997, Gramado. **Resumos...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1997. p.530-531.

[REI 97d] REISER, R. H. S. et al. A Representation System for Functions in the Category of Bi-Structured Coherence Spaces. In: BRAZIL JOINT USA WORKSHOP ON FORMAL FOUNDATIONS OF SOFTWARE SYSTEMS, 1., 1997, Rio de Janeiro. Ainda não publicado.

[REI 97e] REISER, R. H. S. et al. The Recursive Functions on Bi-Structured Coherence Spaces. In: SECOND BRAZIL JOINT USA WORKSHOP ON FORMAL FOUNDATIONS OF SOFTWARE SYSTEMS, 2., 1997, New Orleans. Ainda não publicado.

[REN 94] REISSIG, N. C.; DIMURO. G. P. O Ambiente de Técnicas Intervalares. In: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE INFORMATICA, 20., 1994, Estado de Mexico. **Memorias.** Estado de Mexico: Megabyte Ed., 1994. 1470p. p.861-872.

[ROG 67] ROGERS, H. JR. **Theory of Recursive Functions and Effective Computability.** [S.l]: MacGraw-Hill Book Company, 1967.

[SAH 80] SAHEB-DJAHROMI, N. CPO's of measures for non-determinism. **Theoretical computer Science,** Amsterdam, v.12, n.1, p.19-37, 1980.

[SAN 94] SANTOS, C. P.; AGUIAR, M. S. ; DIMURO, G. P. As Técnicas Intervalares em Substituição ao Método Clássico de Estimativa de Erro. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 17., 1994, Vitória. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1994. v.1, p.309-313.

[SCO 70] SCOTT, D. Outline of a Mathematical Theory of Computation. In: ANNUAL PRINCETON CONFERENCE ON INFORMATION SCIENCE AND SYSTEMS, 1., 1970, Princeton. **Proceedings...** [S.l.: s.n], 1970. p.169-176.

[SCO 72] SCOTT, D. Continuous Lattices. In: TOPOSES, ALGEBRAIC, GEOMETRY AND LOGIC. **Proceedings...** Berlin: Springer-Verlag, 1972. p.97-136. (Lecture Notes in Matehematics, n. 274).

[SCO 72a] SCOTT, D. Lattice Theory, Data Types and Semantics. **Formal Semantics and Programming Languages**. Englewood Cliff: Prentice Hall, 1972. p.65-106.

[SCO 73] SCOTT, D. Models for Various Type-Free Calculi. In: LOGIC, METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE, 4., 1973. **Proceedings...** Amsterdan: North-Holland, 1973. p.157-187.

[SCO 76] SCOTT, D. Data Types as Lattices. **SIAM Journal of Computing**, Philadelphia, v.5, n.1, p.522-587, 1976.

[SCO 82] SCOTT, D. Domains for Denotational Semantics. In: COLLOQUIUM ON AUTOMATA LANGUAGES AND PROGRAMMING. **Proceedings...** Berlin: Springer-Verlag, 1982. p.577-613. (Lecture Notes in Computer Science, v.140).

[SCO 82a] SCOTT, D. Lectures on a Mathematical Theory of Computation. In: **Theoretical Foundations of Programming Methodology**. Dordrecht: D. Reidel, 1982. p.145-292. (Nato Advanced Study Institutes Series, Series C, v. 91).

[SCO 90] SCOTT, D.; GUNTER, C. A. Semantic Domains. **Handbook of Theoretical Computer Science,** Amsterdam, p.635-674, 1990.

[SEL 96] SELLANES, R. G. S. **Estratégias de Computação Seqüenciais e Paralelas sobre Espaços Coerentes.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1996. 143p.

[SIE 52] SIERPINSKI, W. **General Topology.** Toronto: University of Toronto Press, 1952.

[SMA 90] SMALE, S. Some Remarks on the Foundation of Numerical Analysis. **SIAM Review**, [S.l.], v.32, n.2, p.211-220, June 1990.

[SMY 77] SMYTH, M. B. Effectively given Domains. **Theorical Computer Science**, Amsterdam, v.5, n.1, p.257-274, 1977.

[SMY 83] SMYTH, M. B. Powerdomains and Predicate Transformers: a Topological View. In: COLLOQUIUM ON AUTOMATA LANGUAGES AND PROGRAMMING, 10., 1983, Barcelona. **Proceedings...** Berlin: Springer-Verlag, 1983. p.662-675. (Lecture Notes in Computer Science, v. 154).

[SMY 87] SMYTH, M. B. **Quasi Uniformities:** Reconciling Domains with Metric Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1987. p.236-253 (Lectures Notes in Computer Science, v. 298). Trabalho apresentado no Workshop on Mathematical Foundations of Programming Language Semantics, 3., 1987, New Orleans.

[SMY 90] SMYTH, M. B. Topology. In: **Handbook of Logic in Computer Science**. Oxford: [s.n.], 1990.

[SMY 91] SMYTH, M. B. Totally Bounded Spaces and Compact Ordered Spaces as Domais of Computation. **Topology and Category Theory In Computer Science,** [S.l.], p.207-229, 1991.

[SMY 95] SMYTH, M. B. Semi-metrics, Closure Spaces and Digital Topology. **Theoretical Computer Science,** Amsterdam, v.151, n.1, p.257-276, Nov. 1995.

[STO 77] STOY, J. E. **Denotational Semantics**: The Scott-Strachey Aproach To Programming languages. Cambridge: MIT Press, 1977.

[STO 88] STOLTENBERG-HANSEN, V.; TUCKER, J. V. Complete Local Rings as Domains. **Journal of Symbolic Logic,** [S.l.], v.53, p.603-624, 1988.

[STO 94] STOLTENBERG-HANSEN, V.; LINDSTRÖM, I.; GRIFFOR, E. R. **Mathematical Theory of Domains.** Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 349p.

[STO 95] STOLTENBERG-HANSEN, V.; TUCKER, J. V. Effective Algebras. **Handbook of Logic In Computer Science,** Oxford University Press, v.4, p.357-526, 1995.

[STR 86] STROUSTRUP, B. **The C++ Programming Language**. Menlo Park: Addison-Wesley, 1986.

[TRO 88] TROELSTRA, A. S.; DALEN, D. V. **Constructivism in Mathematics, an Introduction.** Amsterdam: Elsevier Science, 1988. v.1. 314p. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, n.121).

[TRO 92] TROELSTRA, A. S. **Lectures on Linear Logic.** Stanford: CSLI/Leland Stanford Junior University, 1992. (Lecture Notes, n.29).

[VAR 89] VARELA, F. J. **Autonomie et Connaissance - essai sur le vivant.** Paris: Seuil, 1989.

[VIC 87] VICKERS, S. **Topology via Logic.** Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

[VIC 93] VICKERS, S. Information Systems for Continuous Posets. **Theoretical Computer Science,** Amsterdam, v.114, p.201-229, 1993.

[WEI 80] WEIHRAUCH, K.; SCHREIBER, U. **Berechenbarkeit auf CPO's**. [S.l.]: Rheinisch-Westfalische Hochschule Aachen, 1980.

[WEI 81] WEIHRAUCH, K.; DEIL, T. Embedding Metric Spaces into CPO's. **Theoretical Computer Science,** Amsterdam, v.16, p.5-24, 1981.

[WEI 97] WEIHRAUCH, K. A Foundation for Computable Analysis. In: DISCRETE MATHEMATICS AND THEORETICAL COMPUTER SCIENCE, 1996, Singapore. **Proceedings...** Berlin: Springer-Verlag, 1997. p.66-89.

[ZHA 89] ZHANG, G. d-I Domains as Informationa Systems. New York: Springer-Verlag, 1989. p.773-788 (Lectures Notes in Computer Science, v. 372). Trabalho apresentado no International Colloquium in Automata, Launguages and programminh, 16., 1989, Stresa.

[ZHA 89a] ZHANG, G. **Logic of Domains.** Cambridge: University of Cambridge, Computer Laboratory, 1989. 250p. (T.R. 185).

[ZHA 91] ZHANG, G. **Logic of Domains**. Boston: Birkhäuser, 1991. (Progress in Theoretical Computer Science).

[ZHA 92] ZHANG, G. Stable Neighbourhoods. **Theoretical Computer Science,** Amsterdam, v.93, n.1, p.143-157, Feb. 1992.

[ZHA 92a] ZHANG, G. d-I Domains as Prime Information Systems. **Information and Computation,** Orlando, v.100, n.2, p.151-177, Oct. 1992.

[ZHA 96] ZHANG, G. Quasi-Prime Algebraic Domains. **Theoretical Computer Science,** Amsterdam, v.155, n.1, p.221-264, Feb. 1996.

[ZHA 96a] ZHANG, G. The Largest Cartesian Closed Category of Stable Domains. **Theoretical Computer Science,** Amsterdam, v.166, n.1-2, p.203-219, Oct. 1996.

Informática UFRGS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Uma Representação Construtiva Global para Sistemas Ordenados de 2ª Ordem em Espaços Coerentes Intervalares Bi-Estruturados com Aplicação em Matemática Intervalar

por

Graçaliz Pereira Dimuro

Tese apresentada aos Senhores:

Prof. Dr. Benedito Melo Acioly (UFRN)

Profa. Dra. Laira Vieira Toscani

Prof. Dr. Edward Hermann Haeusler (PUC-RJ)

Vista e permitida a impressão.
Porto Alegre, 06/04/98.

Prof. Dr. Dalcidio Moraes Claudio (PUCRS),
Orientador.

Prof. Dr. Antônio Carlos da Rocha Costa (UCPel),
Co-orientador.