

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Localização de Zeros Reais de Polinômios Intervalares

por

Jussara Maria Marins

Tese submetida à avaliação como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutora em Ciência da Computação

Prof. Dalcídio Moraes Claudio
Orientador

Porto Alegre, Setembro de 1996.



UFRGS
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
BIBLIOTECA

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Marins, Jussara Maria

Localização de Zeros Reais de Polinômios Intervalares / por Jussara Maria Marins. — Porto Alegre: CPGCC da UFRGS. 1996.

154 p.: il.

Tese (doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Porto Alegre, BR-RS, 1996. Orientador: Claudio, Dalcidio Moraes

Tese: Matemática Computacional, Computação Simbólica
Localização de zeros reais de polinômios intervalares, algoritmos numéricos, métodos algébricos

matemática computacional - SBU

Análise numérica

Zero: Polinômios

Análise: Intervalos

CNPq 1.01.04 00-3

UFRGS INSTITUTO DE INFORMÁTICA BIBLIOTECA		
N.º CHAMADA 518.5(043) M339w	N.º REG.: 32975	L. A.: 05/06/97
ORIGEM: ①	LATA: 09/105/97	PREÇO: R\$ 30,00
FUNDO: II	FORN.: II	

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Prof. Wrana Panizzi

Pró-Reitor de Pós-graduação: Prof. José Carlos Ferraz Hennemann

Diretor do Instituto de Informática: Prof. Roberto Tom Price

Coordenador do CPGCC: Prof. Flávio Rech Wagner

Bibliotecária-chefe do Instituto de Informática: Zita Prates de Oliveira

Agradecimentos

Agradeço a todos os que tornaram possível a realização deste trabalho.

Na realidade, *todos* significa vários nomes e motivações. Por isso citarei alguns, é inevitável esquecer com a memória que tenho. Estes foram os que esqueci de esquecer...

Foram diversas as pessoas que contribuíram intelectualmente para o trabalho com opiniões, correções e sugestões. Neste caso, incluem-se os membros do Grupo de Matemática Computacional, e neste, em especial a Paulo Werlang de Oliveira, a Beatriz Franciosi, a Tiarajú Diverio que na realidade representam bem o grupo como um todo. Agradeço muito à Maria Angélica Brunetto, em cujo trabalho reiniciei a árdua tarefa de definição da tese. Muitos foram os trabalhos que eu gostaria de ter feito, mas com ela consegui objetivar, concentrar-me num só, e desenvolvê-lo, espero que a contento. Agradeço ao Professor Vilmar Trevisan, co-orientador de Maria Angélica e esclarecedor de inúmeras dúvidas, foi também um orientador.

Agradeço aos colegas de início do curso, na fase dos créditos: à Leda, Sergio, Benedito, Carmem que hoje são amigas e amigos estimados. Agradecimento especial à Eronita, que sempre depositou em mim, grande confiança.

Agradeço ao professor emérito da UFRGS Manoel Luiz Leão por ter incentivado-me a seguir nesta área de trabalho e de pesquisa, pois cada vez mais me encanto com a Matemática e a Computação, quando ambas interagem.

Agradeço muito ao professor Dalcídio, mestre, orientador e incentivador do trabalho. São de praxe e até desnecessários os reiterados agradecimentos, já que o mantive como orientador desde a minha iniciação no trabalho científico, no Mestrado. É fácil trabalhar com uma pessoa que tem idéias e respeita as das demais pessoas. Com ele, muito aprendi.

Outras pessoas auxiliaram muito com a infra-estrutura e apoio como a Biblioteca, as Secretarias do Pós-Graduação e do Departamento de Informática Teórica e da Direção do Instituto de Informática.

Agradeço ao Instituto Tecnológico da Aeronáutica do Centro Técnico Aeroespacial que permitiu a realização deste trabalho. Agradeço a todos colegas e chefes que tive ao longo deste trabalho e em especial ao atual chefe do Departamento de Computação Científica, professor Nei Yoshihiro Soma, e ao colega Sergio Roberto Mattiello Pellegrino.

Agradeço ao Povo Brasileiro, que forneceu, através da CAPES, a bolsa para viabilizar economicamente este trabalho.

Além da contribuição intelectual e de apoio outras pessoas ajudaram substancialmente, não só para a realização deste trabalho, como também na minha vida em geral. São, coincidente e conseqüentemente grandes mulheres e grandes amigas. São

elas: Silvana de Liz, Cecília Calixtro dos Santos, Laira Toscani e Helena Bitencourt. São mestras e sabem disto.

Agradeço, aos meus anônimos Mestres Espirituais, que sempre e incansavelmente me levantavam quando eu caía. À Doutora Zuleika Bozzetti que me conduziu a eles e ao Professor Cícero Marcos Teixeira por me reconduzir a eles.

Agradeço, de toda minha alma, à minha grande família: meus avós, meus pais, minhas 4 irmãs e 2 irmãos, aos meus sogros, cunhados e cunhadas, tios e tias, primas e primos. Em especial, à minha pequena família: meu esposo e duas filhas, grande esteio, núcleo de evolução e fonte da minha perene aprendizagem, causa portanto, da felicidade que possuo hoje.

Agradeço, finalmente à Deus e a mim mesma por me permitir receber tanta ajuda e não ter desistido nesta longa jornada.

DEDICATÓRIA

Ao meu esposo Marcelo, incansável companheiro, amigo e amante.

As minhas filhas Ana Natacha e Alessandra que continuam desafiantes e cada vez mais amáveis e amadas.

Sumário

Lista de Figuras	8
Resumo	10
1 INTRODUÇÃO	12
1.1 Considerações Iniciais	12
1.2 Funções Intervalares	19
1.3 Polinômios Intervalares	21
1.3.1 Polinômios Intervalares – Abordagem Algébrica.	21
1.3.2 Funções Polinomiais Intervalares	26
1.3.3 Zeros de Polinômios Intervalares	28
1.4 Polinômios de Hurwitz	30
2 Localização e Separação dos Zeros de Polinômios	33
2.1 Enumeração dos Zeros	34
2.1.1 Princípio do Argumento	34
2.1.2 Regiões Circulares	35
2.1.3 Regiões Retangulares	38
2.1.4 Regiões Semiplanares	39
2.2 Separação dos Zeros de Polinômios Reais ou Complexos	40
2.2.1 Método de Pinkert	42
2.2.2 Método de Uspensky Modificado	42
2.2.3 Método de Collins-Krandick	47
2.2.4 Passos Principais do Método de Collins-Krandick	50
2.2.5 Algoritmo de Collins-Krandick	52
2.2.6 Exemplos	61
2.2.7 Método de Brunetto ou Wilf Modificado	70
2.2.8 Algoritmo de Brunetto	72
3 ENUMERAÇÃO E LOCALIZAÇÃO DE ZEROS DE POLINÔMIOS INTERVALARES	88
3.1 Colocação do Problema no Caso Intervalar	88
3.1.1 Caracterização da Família $[p]$	88
3.1.2 Enumeração dos Zeros de $[p]$	96
3.1.2.1 Enumeração dos Zeros Reais de $[p]$	96
3.1.2.2 Enumeração dos Zeros Complexos de $[p]$	97
3.1.2.3 Seqüência dos Zeros de $[p]$	98
3.1.3 Localização dos Zeros de $[p]$	103
3.1.4 Separação dos Zeros de $[p]$	103
3.2 Resultados Conhecidos	106
3.2.1 Polinômio Intervalar de Hurwitz	106
3.2.2 Zeros Reais de Polinômios Intervalares	116

3.2.3 Zeros Complexos de Polinômios Intervalares	120
4 Separação dos Zeros Reais do Polinômio Intervalar	125
4.1 Separação dos Zeros Reais de $[p](x)$	125
4.2 Separação dos Zeros Reais via Polinômios Limítrofes	131
4.3 Comparação dos Dois Algoritmos	140
4.3.1 Abordagem via C.B.Soh	140
4.3.2 Abordagem pelo Novo Algoritmo	141
5 Conclusão	143
5.1 Casos Reais Simples e Separáveis	144
5.2 Casos Reais ou Complexos	145
Bibliografia	148

Lista de Figuras

FIGURA 1.1 — Esquema da Divisão em (a)	24
FIGURA 1.2 — Esquema da Divisão em (b)	25
FIGURA 2.1 — Regiões de Pesquisa de Zeros	33
FIGURA 2.2 — Variação do Argumento: z_1 e z_n são zeros	35
FIGURA 2.3 — As Diversas Cotas	40
FIGURA 2.4 — Busca em Profundidade da Isola	46
FIGURA 2.5 — Imagem de $p(z) = z^4 + (-7 + 10i)z^3 + (-19 - 52i)z^2 + (107 + 28i)z - 62 + 54i$ no quadrado de lado 8	47
FIGURA 2.6 — Imagem de p no quadrado de lado 2	48
FIGURA 2.7 — Imagem de $p(z) = z^3 + (-1 - 2i)z^2 + (-4 - 14i)z - 12 + 18i$ com $b = 1$	49
FIGURA 2.8 — Ambigüidade na Origem	49
FIGURA 2.9 — Lado Axial	50
FIGURA 2.10 — Coordenadas para Especialização	51
FIGURA 2.11 — Caso I: <i>Bucle</i>	55
FIGURA 2.12 — Caso II(a) Só toca o eixo (b)Cruza o eixo	55
FIGURA 2.13 — Esquema do Caso 1	57
FIGURA 2.14 — Imagem de $p(z) = z^3 + (2 + 3i)z^2 + 2iz + 4 + 4i$ com $b = 1$	62
FIGURA 2.15 — Imagem de $p(z) = z^5 + (5 - 4i)z^4 + (6 - 18i)z^3 + (-18 - 36i)z^2 - 56z - 16 + 32i$ no quadrado de lado 1	64
FIGURA 2.16 — Zeros de $p(z) = z^5 + (\frac{7}{2} + \frac{i}{2})z^4 + (7 - i)z^3 + (\frac{11}{2} - \frac{3i}{2})z^2 + (6 - i)z - 2 - 2i$	65
FIGURA 2.17 — Imagem de $p(z) = z^5 + (\frac{7}{2} + \frac{i}{2})z^4 + (7 - i)z^3 + (\frac{11}{2} - \frac{3i}{2})z^2 + (6 - i)z - 2 - 2i$ no quadrado de lado 2	68
FIGURA 2.18 — Método de Wilf	70
FIGURA 2.19 — Divisão do Quadrado	71
FIGURA 2.20 — Identificação das Fronteiras	73
FIGURA 2.21 — Zeros de $p(z) = z^3 + (-1 - 2i)z^2 + (-4 - 14i)z - 12 + 18i$	76
FIGURA 2.22 — Quadrado $quad_{11}$	79
FIGURA 2.23 — Quadrado $quad_{12}$	80
FIGURA 2.24 — Quadrado $quad_{21}$	81
FIGURA 2.25 — Quadrado $quad_{22}$	82
FIGURA 2.26 — Quadrado $quad_{23}$	83
FIGURA 2.27 — Quadrado $quad_{31}$	84
FIGURA 2.28 — Quadrado $quad_{32}$	85
FIGURA 2.29 — Quadrado $quad_{33}$	86
FIGURA 2.30 — Quadrado $quad_{13}$	87
FIGURA 3.1 — Alguns polinômios de $x^3 + [-6, -3]x^2 + [-28, -19]x + [24, 60]$	90

FIGURA 3.2 — Polinômios Limítrofes de $[p] = x^4 + [0.75, 1.25]x^3 + [-18.75, -17.75]x^2 + [-16.25, -15.75]x + [31.75, 32.25]$	93
FIGURA 3.3 — Polinômios Limítrofes de $[p] = x^4 + [6.5, 7]x^3 + [5, 5.5]x^2 + [-32, -30]x + [-32, -30]$	94
FIGURA 3.4 — Polinômios Limítrofes de $[p] = x^7 + [-4, 1]x^6 + [3, 4]x^5 + [-5, 1]x^4 + [3, 4]x^3 + [-1, 2]x^2 + [5, 6]x + [-5, 3]$	95
FIGURA 3.5 — Polinômios Limítrofes de $[p](x) = x^4 + [-17, -16]x^3 + [34, 47]x^2 + [172, 432]x + [-1440, -420]$	97
FIGURA 3.6 — Polinômios limítrofes de $[p](x) = 2x^5 + [25, 26]x^4 + [94, 95]x^3 + [95, 96]x^2 + [-98, -97]x + [-120, -110]$	99
FIGURA 3.7 — Grau 2: Dois zeros negativos	100
FIGURA 3.8 — Grau 2: Todos zeros positivos	101
FIGURA 3.9 — Grau 2: Um zero negativo, um zero positivo	101
FIGURA 3.10 — Grau 3: Dois negativos, um positivo	102
FIGURA 3.11 — Polinômios Limítrofes de $x^3 + [-6, -4]x^2 + [-11, -1]x + [6, 30]$	105
FIGURA 3.12 — Polinômios limítrofes de $[p](x) = x^5 + [-4, -3]x^3 + [2, 3]x^2 + [1, 3]x + [-5, -4]$	106
FIGURA 3.13 — Polinômios de Kharitonov para $[p](z) = 2z^4 + [4, 5]z^3 + [9, 10]z^2 + [10, 11]z + [4, 5]$	108
FIGURA 3.14 — Polinômios de Kharitonov para $[p](z) = [1, 2]z^4 + [5, 7]z^3 + [6, 10]z^2 + [9, 10]z + [4, 5]$	109
FIGURA 3.15 — Polinômios de Kharitonov de $[p](x) = x^4 + [-17, -16]x^3 + [34, 47]x^2 + [172, 432]x + [-1440, -420]$	122
FIGURA 3.16 — Polinômios limítrofes de $[p](x) = x^4 + [-17, -16]x^3 + [34, 47]x^2 + [172, 432]x + [-1440, -420]$	123
FIGURA 4.1 — Intervalo com zeros de $p \in [p]$	133
FIGURA 4.2 — Polinômios Limítrofes de $[p](x) = x^3 + [18, 20]x^2 + [95, 124]x + [126, 240]$	134
FIGURA 4.3 — polinômios Limítrofes de $[p] = x^4 + [-26, -20]x^2 + [25, 64]$.	137
FIGURA 4.4 — Polinômios Limítrofes de $[p](x) = 2x^5 + [25, 26]x^4 + [95.5, 96]x^3 + [94.75, 95.25]x^2 + [-98, -97]x + [-120, -110]$	138
FIGURA 4.5 — Polinômios Limítrofes de $[p](x) = 2x^5 + 25x^4 + [95.5, 96]x^3 + [94.75, 95.25]x^2 + [-98, -97]x + [-120, -110]$	139

Resumo

Este trabalho contém um estudo para isolar os zeros reais de polinômios cujos coeficientes podem ser perturbados, isto é, os coeficientes possuem variações que constituem intervalos. Assim chamamos a tais polinômios de **Polinômios Intervalares** do mesmo modo que chamamos de *polinômios complexos* àqueles que possuem coeficientes complexos.

Isolar os zeros, delimitar regiões que os contenham, dizer se um polinômio é estável ou determinar qual a perturbação aceitável nos seus coeficientes, de modo a preservar certas características, são problemas que aparecem em diversos setores da Computação Científica e em especial, na Teoria de Controle.

Neste trabalho, a família dos polinômios intervalares é inicialmente analisada dentro das possibilidades algébricas que as operações intervalares, conforme definidas por Moore, permitem. Dentro deste contexto, são definidas as operações elementares entre polinômios intervalares assim como são estudadas as suas novas propriedades.

Em função das limitações inerentes à abordagem anterior, a família $[p]$ dos polinômios intervalares, é também, caracterizada por um novo enfoque, através de 4 polinômios reais específicos da família, – os polinômios limítrofes – a partir dos quais podemos obter informações relevantes a respeito da enumeração e localização dos seus zeros reais ou eventualmente sobre os zeros complexos.

Obtivemos, com o uso dos polinômios limítrofes, um resultado mais eficiente para determinar se um polinômio intervalar possui apenas zeros reais, de modo que, neste caso, eles possam ser isolados num algoritmo algébrico de complexidade menor, do que uma outra alternativa baseada no cálculo de autovalores.

Além disso, localizar os zeros de polinômios intervalares é uma fase importante para o cálculo aproximado ou mesmo exato da região que contém efetivamente os zeros do polinômio intervalar. Em geral, os métodos de cálculo aproximado dos zeros precisam de uma região inicial que contenha apenas um zero a ser pesquisado. Esta é uma fase crítica de todo o processo, feito pela abordagem algébrica ou pela abordagem de aproximações numéricas.

Real Zero Localization of Interval Polynomials

The aim of this work is to isolate through algebraic process the real polynomial roots that have coefficients which can be perturbed.

These perturbations (variations) on the coefficients can be enclosed in intervals. Then we call these polynomials, **interval polynomials**, in the same way that we call complex polynomial those ones formed with coefficients that are complex numbers.

One of the main points in the solution of polynomial problems is to limit the regions that have all roots, all the negative ones, the stability, and so on.

These questions present good solutions when the polynomials are real or complex. on the other hand, when the coefficients are perturbed or we need to decide what kind of variation can be done, in order to preserve the main features of the polynomial, then we are working with problems that appear in Scientific Computation and, specially, in Control Theory.

Besides this, we need to isolate the roots of interval polynomial before calculating them. In general, the methods for approximating zeros need an initial region that has just one root.

In the case where the accuracy is necessary or if we already know of the result instability, the algebraic processes are recommended.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Este trabalho contém um estudo para isolar os zeros reais de polinômios cujos coeficientes podem ser perturbados, isto é, os coeficientes possuem variações que constituem intervalos. Assim chamamos a tais polinômios de **Polinômios Intervalares** do mesmo modo que chamamos de *polinômios complexos* àqueles que possuem coeficientes complexos.

Neste capítulo trataremos das funções intervalares, dos polinômios intervalares apresentando uma visão geral da notação de funções intervalares usadas e por último, dos polinômios de Hurwitz que podem servir para fornecer informações para o problema geral da localização dos zeros.

Primeiramente faremos breves considerações sobre os ambientes onde são resolvidos os problemas da Computação Científica.

1.1 Considerações Iniciais

Estas abordagens são aqui apresentadas em conjunto mas não constituem uma classificação teórica que esgote todas as diferentes abordagens de resolver os problemas do cálculo de uma função por meio do computador.

Na Análise Numérica o cálculo da imagem de uma função f de variável real, complexa ou intervalar é de crucial importância quando sua avaliação é feita num computador. Embora o aumento da capacidade computacional (precisão¹, memória e velocidade) e o desenvolvimento de novos ambientes de programação (linguagens e ambientes para computação científica) influam nos resultados de um processo numérico, a **exatidão**² obtida não depende exclusivamente desses fatores, ver [KAU 84]. O problema do arredondamento deve ser considerado sob pena de termos um resultado completamente inútil.

O modo como é computada a função f pode ser o gargalo de muitos algoritmos e de seus correspondentes programas. Ao longo do tempo, surgiram abordagens diferentes para resolver estes problemas: *a Aritmética Computacional*, *a Aritmética*

¹É mensurada estaticamente e depende apenas do hardware do computador. A precisão é dada pelo tamanho em bits ou bytes dos registradores e da palavra de memória.

²É uma medida dinâmica e, às vezes, até mesmo imponderável e depende tanto do hardware como do software. Na parte do software depende do compilador, do algoritmo e de como o programa do usuário trata e opera os dados.

Ultra, os Métodos Autovalidáveis, a Análise Intervalar e a Computação Simbólica. As características de cada uma dessas abordagens são as seguintes:

(1) - Aritmética Computacional

Os diversos tipos de dados numéricos: inteiros, reais, complexos, intervalos, vetores e matrizes são mapeados em números de ponto-flutuante - e aqui levamos em conta as características físicas das máquinas. *O papel da Aritmética Computacional é o de dar uma fundamentação: formulação matemática da aritmética de ponto flutuante.* Isto é feito de dois modos no trabalho de Kulisch e Miranker, ver [KUL 81]. Num deles é feita a especificação formal da aritmética em anelóides ordenados ou parcialmente ordenados com os tipos numéricos já citados. Noutro, a formulação é baseada em semimorfismos do conjunto dos reais para outros conjuntos que englobem os mesmos tipos numéricos.

A primeira implementação das operações aritméticas por meio de semimorfismos foi feita por Kulisch entre 1977 e 1979, de modo que, para um determinado conjunto de números de ponto flutuante N é válido:

$$(\forall a, b \in N)[a \boxplus b := \square(a * b)],$$

onde \boxplus é uma operação aritmética em N correspondente à operação num dos conjuntos numéricos usuais como \mathcal{N} , \mathcal{Z} , \mathcal{Q} ou \mathcal{R} , ver [KUL 83].

A partir da formulação teórica da Aritmética Computacional pode ser desenvolvida uma aritmética prática (existente num computador) onde dada uma função f , uma variável $x \in X$ e um sistema de ponto-flutuante $F = F(n, b, e_1, e_2)$ onde n é a precisão, b é a base, e e_1 e e_2 são respectivamente o menor e o maior expoente, vale:

$$(\forall x \in X)[\nabla(f(x)) = \bar{f}(\nabla x)]$$

onde $\nabla x \in F$ e \bar{f} aproxima f em F .

Em outras palavras, mesmo que x ou $f(x)$ não tenham representações exatas em F a aritmética permite que o valor arredondado de $f(x)$ seja **correto**, na precisão dada, e não apenas o mais exato possível.

Exemplo 1.1.1 *Sejam $h, x, y, z, w, f \in \mathcal{R}$ dados por:*

$$\begin{aligned} h &= 1/3, & x &= 2/3 - h, & y &= 3/5 - h, \\ z &= (x + x + x) - h, & w &= (y + y + y + y + y) - h & f(z, w) &= z/w. \end{aligned}$$

Então temos numa aritmética de ponto flutuante usual que:

$$\nabla(f(z, w)) \neq \bar{f}(\nabla z, \nabla w),$$

o que pode ser visto quando $F = (16, 6, -64, 63)$ em uma máquina IBM 4341, por exemplo. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \nabla h &= 0.5 & \nabla x &= 0.166666 \\ \nabla y &= 0.1 & \nabla z &= -0.119209e(-6) \\ \nabla w &= -0.178813e(-6) & \bar{f} &= 0.666666. \end{aligned}$$

Usando a máquina Sun-Sparc no modo calculadora na notação científica temos:

$$\begin{aligned} \nabla h &= 0.5 & \nabla x &= 1.666666667 \\ \nabla y &= 10.000000000e(-2) & \nabla z &= -1.110223025e(-16) \\ \nabla w &= -1.110223025e(-16) & \bar{f} &= 1.0, \end{aligned}$$

quando é óbvio que numa aritmética exata teríamos $\nabla(f(z, w)) = 0$.

Existem linguagens e pacotes que visam obter o controle e melhoria da exatidão do cálculo do valor numérico de uma função como as linguagens Pascal- XSC (ver [KLA 92]), FORTRAN XSC, C, além de pacotes como o ACRITH e Numeric que podem resolver em parte ou no todo os problemas do arredondamento no cálculo numérico de funções. Assim por exemplo, a linguagem Pascal-XSC provê os tipos REAL, DOUBLE, INTERVAL, assim como, valores e matrizes sobre estes tipos básicos e também os métodos (ou operações) para manipulá-los.

(2) - Aritmética Ultra

Na Aritmética Computacional, provemos um ambiente computacional no qual os **tipos** de dados necessários à Análise Numérica são dados assim como as **operações** que os manipulam. Na Aritmética Ultra, ver [KAU 84], o objetivo é fornecer os *tipos e métodos* para a parte da Análise Numérica que trata dos problemas no espaço de funções. Por exemplo, o problema pode ser o de resolver uma equação integral ou uma equação diferencial com valor num contorno. Neste caso, os métodos a serem oferecidos pelo ambiente computacional são os de operações sobre funções, como diferenciação, integração e composição.

Isto é viabilizado pelo uso de técnicas de expansão de séries como uma metodologia aritmética.

Numa visão comparativa, podemos dizer que na Aritmética Computacional tratamos os números de ponto-flutuante como o tipo de dado básico enquanto que na Aritmética Ultra temos a função como o tipo básico. Enquanto o número real $a \in \mathfrak{R}$ é representado como uma expansão decimal, a função é representada como uma série de Fourier generalizada. Salientamos no quadro a seguir alguns pontos de comparação:

<p>Números Reais: $a \in \mathfrak{R}$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representação decimal $a = \sum_{i=M}^{\infty} \frac{a_i}{10^k}$ <p>"base" para a expansão: $e_k = 10^{-k}$, $i = M, M+1, \dots$</p> <p>"coeficientes" $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Arredondamento do número $\nabla a = \sum_{i=M}^N \tilde{a}_i \cdot \tilde{e}_i$ <ul style="list-style-type: none"> • tipo de dado $a_M a_{M-1} \dots a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} \dots a_{-N}$ <p>é uma seqüência finita de inteiros</p>	<p>Funções: $f \in L^2$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representação em Série de Fourier $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \phi_j$ <p>base: $\phi_j = e^{ijx}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $i = \sqrt{-1}$</p> <p>coeficientes:</p> $a_j = \frac{\langle f, \phi_j \rangle}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f \phi_j dx$ <ul style="list-style-type: none"> • Arredondamento de função $S_N f(x) = \sum_{j=-N}^N a_j \phi_j$ <ul style="list-style-type: none"> • tipo de dado $(a_{-N}, a_{-N+1}, \dots, a_0, a_1, a_2 \dots a_N)$ <p>é uma seqüência finita de reais</p>
---	---

Na Aritmética Ultra salientamos o fato que qualquer função pode ser aproximada localmente, por um polinômio.

Para lidar com números, precisamos de estruturas como as dos espaços vetoriais ou euclidianos como \mathbb{R} , \mathbb{R}^n ou \mathcal{C} . Quando lidamos com funções temos os espaços dos polinômios intervalares $\mathbb{R}^k[x](X)$ ou $L^2[-1, 1]$ que é o conjunto das funções contínuas em $[-1, 1]$ com a norma $\|f\|$, sendo $\{\phi_j\}_{j=0}^\infty$ uma base ortonormal em L^2 . Neste caso o operador projetivo S_N ou operador de arredondamento é dado por

$$S_N : \sum_{j=0}^{\infty} f_j \phi_j(x) \longrightarrow S_N f(x) := \sum_{j=0}^N f_j \phi_j(x),$$

onde $f_j = (f, \phi_j)$. Desse modo o operador S_N mapeia a série de Fourier generalizada para $f(x)$ na sua N ésima soma parcial.

Sejam dadas as funções $f, g \in L^2$, os seus tipos de dados associados na Aritmética Ultra são $S_N f, S_N g$ ou equivalentemente

$$f := (f_0, f_1, \dots, f_N)^T \text{ e } g := (g_0, g_1, \dots, g_N)^T.$$

Daí o arredondamento pode ser expresso da seguinte forma: $S_N f \sim f$, onde \sim indica a correspondência pelo mapeamento S_N .

As operações da Aritmética Ultra são, conseqüentemente, as seguintes:

$$\begin{aligned} f \pm g &\longrightarrow S_N f \pm S_N g \\ fg &\longrightarrow S_N(S_N f \cdot S_N g) \\ fh = 1 &\longrightarrow \min_{L_N \in S_N(L^2)} \|1 - h_N S_N f\| \\ \frac{d}{dx} f &\longrightarrow S_N \left[\frac{d S_N f}{dx} \right] \\ f^x &\longrightarrow S_N f^x S_N f \end{aligned}$$

É claro que a Aritmética Ultra pressupõe a definição de uma Aritmética Computacional, ver [KAU 84].

(3) - Métodos Autovalidáveis:

Neste caso, não trabalhamos com uma nova abordagem metodológica, e inclusive, usamos os mesmos métodos numéricos convencionais. O que fazemos é usar os teoremas do ponto-fixo, definidos predominantemente, no espaços de Banach, para fornecer a existência (Existenz), a unicidade (Eindeutigkeit) e limites (Einschliessung), ou uma inclusão de boa qualidade para a solução dos problemas computacionais da Análise Numérica; em particular, para os problemas que envolvem equações funcionais. Estes problemas podem ser:

- (a) equações funcionais,
 - (b) equações diferenciais,
 - (c) equações integrais,
 - (d) problemas gerais parametrizados,
- que podem ser simplificados no seguinte sistema de equações funcionais:

$$A(t) \cdot x(t) = b(t) \quad t \in [0, 1],$$

onde A é uma matriz de funções, b é um vetor de funções, que são dados e desejamos encontrar o vetor de funções x . O cômputo de uma estimativa de erro confiável para a solução envolve a determinação de um conjunto de funções vetoriais contendo a

solução $x(t)$ para todo t . Se $x(t) \in X(t)$, então para todas aproximações $\tilde{x}(t) \in X(t)$ a cota de erro máximo é

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq d(X(t)).$$

Assim os métodos auto-validáveis **E: Existenz, Einschliessung, Eindeutigkeit** têm as seguintes propriedades.

1. Para todo dado de entrada, um método E é capaz de:
 - (a) verificar se a solução do problema teórico existe (Existenz). Isto deve ser caracterizado pelo dado de entrada.
 - (b) incluir esta solução num conjunto de funções com diâmetro pequeno. (Einschliessung)
 - (c) verificar (se possível) a unicidade da solução dentro do conjunto dado. (Eindeutigkeit)
2. Se não existe solução, ou se o tempo computacional ou o tamanho da mantissa ou o método por si próprio não permitem a verificação necessária dos itens (a) e (b) de (1) então o método não irá produzir uma resposta. Esta seria sem significado ou errada.

(4) - Análise Intervalar

Segundo Moore, ver [MOO 79], a Análise Intervalar é um novo ramo da Matemática Aplicada. Mais especificamente estamos num ramo da Matemática Computacional. Basicamente a Matemática Computacional visa resolver problemas matemáticos que surgem com os erros de arredondamento e seus derivados, uma vez que a maioria dos números reais não admitem uma representação exata num computador.

A Análise Intervalar faz uso das técnicas da Análise Numérica que por sua vez já engloba resultados da análise propriamente dita e também da computação.

No enfoque da Análise Intervalar trabalhamos com um novo tipo de dado – o intervalo. O conjunto dos intervalos, como um novo conjunto numérico traz novidades e generalizações, de certa forma, do mesmo modo que o conjunto dos números complexos traz em relação aos reais. Nestas generalizações podemos "perder" certas propriedades. Por exemplo, no caso dos complexos em relação aos reais verificamos que o conjunto dos primeiros não é mais ordenado, no caso dos intervalos as suas operações também "perdem" certas propriedades. Contudo passamos a ter modelos mais próprios para a solução de certos problemas, de grande utilidade prática.

A vantagem desse enfoque é limitar – *achar cotas seguras* – para os erros decorrentes do processo de arredondamento.

Uma contribuição importante na Análise Intervalar é dada pela Análise Funcional – e isto é muito significativo, haja visto o enfoque da Aritmética Ultra, pois os números representáveis no computador podem também representar funções de muitos modos: como coeficientes de polinômios; coeficientes de Fourier; como coeficientes de funções de variável intervalar além da abordagem comum dada por um conjunto finito de pontos.

Para encontrar a solução numérica para equações com operadores (equações diferenciais ou integrais por exemplo) assim como as propriedades das soluções, o estudo dos espaços lineares é indispensável.

Os espaços lineares ou vetoriais fornecem os conceitos necessários em termos de **estruturas algébricas**. Contudo, ainda são necessários outros conceitos. Para o estudo dos limites das seqüências de pontos, da convergência usual e da continuidade de funções temos que utilizar os conceitos das **estruturas topológicas**, em particular com os espaços métricos onde podem ser definidas as noções de distância.

Embora as duas estruturas sejam independentes, podemos relacioná-las através do conceito da **norma** – uma generalização do valor absoluto – obtendo então os espaços de Banach, que são os espaços vetoriais munidos de uma norma e que são completos.

Surgem ainda outros problemas que resolvemos com conceito de produto interno, alcançando assim, a estrutura dos espaços de Hilbert. O conceito do produto interno permite a generalização do conceito da perpendicularidade do plano, para a ortogonalidade de dois vetores, tanto no caso dos espaços de dimensão infinita como finita.

Podemos precisar ainda de um terceiro tipo de estrutura – as **estruturas ordenadas**. Numa estrutura parcialmente ordenada, como por exemplo, o conjunto de funções, podemos redefinir os intervalos de Moore, as funções monótonas, as funções de variável intervalar, os reticulados, etc. de modo que a convergência seja baseada na ordem.

Temos então, nas estruturas ordenadas, o espaço de funções como sendo um conjunto de funções munido de uma topologia ou de uma ordem parcial. Num espaço de funções podemos trabalhar com os **operadores** como sendo funções de um espaço de funções para outro.

Assim, no espaço das funções de variável intervalar, podemos definir uma ordem e uma métrica que serão importantes na criação de algoritmos para resolver vários problemas.

Todos estes 4 contextos estão relacionados com a Matemática Numérica, onde trabalhamos com números de ponto-flutuante que são aproximações dos números reais. A Matemática Numérica trata do desenvolvimento dos métodos operacionais construtivos para a resolução aproximada de problemas que podem ser representados por um modelo matemático.

Na chamada Computação Científica temos problemas de diversas áreas que são modelados em problemas matemáticos que são resolvidos computacionalmente, por um dos enfoques anteriores. Usamos, então, números de ponto-flutuantes, que são entidades discretas para aproximar quantidades contínuas como os números reais. Uma outra abordagem temos na **Computação Simbólica** ou Computação Algébrica como era mais conhecida nos seus primórdios.

(5) - Computação Simbólica

Na Computação Simbólica, a ênfase está na computação discreta sobre símbolos que representam objetos matemáticos de natureza também discreta. O propósito dos sistemas de computação simbólica, na realidade não é restrito ao adjetivo algébrico, na medida que atende a diversos problemas de cálculo diferencial ou matricial e, justamente, através das características das linguagens de programação associadas pode prover soluções de forma **analítica** de vários problemas em Matemática.

Os ambientes de desenvolvimento de software científico segundo as duas abordagens: numérica e simbólica, assim como, possíveis integrações entre as duas são discutidas e analisadas em [BRU 94].

Os ambientes de computação simbólica como *Macsyma*, *Reduce*, *Maple*, *Mathematica* e outros, são sistemas que possuem 2 modos de trabalho: o interativo e o programativo. Na forma interativa o sistema responde a comandos "unitários" fornecidos diretamente pelo usuário. Na parte programativa temos as mesmas características de outras linguagens de programação: comandos de atribuição, de teste, iterativos, etc, assim como, as demais facilidades do modo interativo.

Além do processamento simbólico de expressões, fórmulas, polinômios e funções racionais de modo exato – incluindo avaliação numérica de precisão arbitrária (limitada, é claro, pela memória da máquina) quando necessário – podemos trabalhar também com números de ponto-flutuante estando então sujeito às características das aproximações utilizadas.

A partir do desenvolvimento das linguagens de programação orientadas a objetos alguns mecanismos para a abstração de dados também foram incorporados aos sistemas de computação simbólica. Passa então, a ser possível a implementação do conceito de intervalo em sistemas de computação simbólica.

Em [GLA 92] é descrita uma aritmética intervalar onde o tipo **intervalo** e suas operações são implementados no sistema REDUCE de dois modos diferentes: usando o tipo de dado big-float ou uma lista de números racionais.

Em [MEL 93] temos um pacote numérico: o NUMERIC baseado no modo aritmético com arredondamento do REDUCE, que implementa alguns algoritmos para fornecer aproximações baseadas em intervalos. As soluções, na realidade constituem um resultado, limitado inferior e superiormente. Não é propriamente uma implementação da aritmética intervalar e sim um pacote com algoritmos para cálculos numéricos de mínimos, soluções de equações, integrais, equações diferenciais ordinárias, limites de funções e ajuste de curvas que visam fornecer limites para os erros de arredondamento.

Um pacote de aritmética intervalar de precisão variável é descrito em [CON 93] que é implementado no sistema MAPLE de computação algébrica. As funções implementadas são as mesmas do pacote BIAS: Basic Interval Arithmetic Subroutines ver [KNU 93]

Outro pacote para aritmética intervalar de precisão variável: "VPI Arithmetic" é descrito em [ELY 93] onde as rotinas são implementadas em C++, agora sem as características dos sistemas de computação simbólica.

Na mesma direção temos o pacote PROFIL - Programmer's Runtime Optimized Fast Interval Library ver [KNU 93a] e [KNU 93b] onde está definida uma classe portátil do tipo "library" em C++ com rotinas para aritmética intervalar, baseado no BIAS.

Assim, mostramos, de modo geral, como podem ser tratadas as funções nos diversos ambientes citados.

Neste trabalho, vamos usar o sistema Macsyma, por já termos um conjunto de programas desenvolvidos em [BRU 94] para a localização de zeros de polinômios reais ou complexos.

1.2 Funções Intervalares

Na realidade todo valor computado por uma máquina digital (finita) é um número racional. Assim as funções computadas são também racionais, ver [MOO 66].

O cômputo da variação de valores (range) de funções racionais é de grande importância. Quando a avaliação de funções passa a ser executada na aritmética intervalar há a necessidade de:

- 1) - reduzir o número de ocorrências da variável;
- 2) - substituir os operadores da função por operações intervalares correspondentes;
- 3) - fazer a **avaliação intervalar** da função;
- 4) - avaliar se o resultado está bem definido.

Exemplo 1.2.1 *Seja a função real h dada por:*

$$h(x, a) = 1 + \frac{ax}{a-x} \text{ com } x \neq 1 \text{ e } x \neq 0.$$

Esta função pode ter diferentes expressões funcionais

$$\begin{aligned} h_1(x, a) &= 1 + \frac{a}{\frac{1}{x}-1} \\ h_2(x, a) &= 1 + \frac{a}{\frac{1-a}{x}} \end{aligned}$$

Para $a \in A = [0, 1]$ e $x \in X = [2, 3]$, temos que a imagem:

$$I(h, [2, 3], [0, 1]) = \left\{ 1 + \frac{ax}{1-x} \mid 2 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq a \leq 1 \right\} = [-1, 1]$$

é a mesma para ambas representações obviamente.

Contudo, substituindo as operações e operandos por intervalos do seguinte modo:

$$\begin{aligned} H([2, 3], [0, 1]) &= 1 + \frac{[0,1] \cdot [2,3]}{1-[2,3]} = [-2, 1] \\ H_1([2, 3], [0, 1]) &= 1 + \frac{A}{\frac{1}{[2,3]}-1} = [-1, 1], \end{aligned}$$

temos que $H([2, 3], [0, 1]) \neq H_1([2, 3], [0, 1])$.

Observamos que, em H_1 foi diminuído o número de ocorrências de x e seu diâmetro também diminuiu. Todas as formas de substituir ou a constante ou a variável, produziram expressões intervalares válidas.

Por exemplo, substituir a variável x por um intervalo $x = [-1, 1]$ em

$$\frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}}$$

não produz uma expressão intervalar válida pois $\frac{1}{[-1,1] \cdot [-1,1] + \frac{1}{2}}$ produz um quociente de $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ o que não permite a divisão intervalar.

Observamos também que a imagem de $h(a, x)$ está contida tanto em $H(A, X)$ como em $H_1(A, X)$.

Temos então as seguintes definições:

Definição 1.2.1 (Imagem de uma Função) *Seja f uma função real cuja expressão funcional contém as constantes $a^{(0)}, \dots, a^{(m)}$ e um número finito de operações. Então o intervalo dos valores funcionais, isto é, a imagem da função f é definida como:*

$$I(f, X, A^{(0)}, \dots, A^{(m)}) := \left\{ f(x, a^{(0)}, \dots, a^{(m)}) \mid x \in X, a^{(k)} \in A^{(k)}, k = 0(1)m \right\} \\ = \left[\min f(x, a^{(0)}, \dots, a^{(m)}), \max f(x, a^{(0)}, \dots, a^{(m)}) \right]$$

quando $x \in X$ e os valores $a^{(k)} \in A^{(k)}$, e $k = 0(1)m$, são independentes um do outro.

A definição de imagem de uma função independe das diferentes expressões funcionais de f .

Definição 1.2.2 (Avaliação Intervalar) *Seja dada uma função f e f a sua correspondente expressão. A Avaliação Intervalar de f ou Extensão Intervalar de f é obtida pela substituição de todos operandos de f por intervalos contidos no domínio de definição de f e de todas as operações pelas operações intervalares clássicas, cuja nova expressão intervalar F válida é tal que:*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) \in F(X_1, X_2, \dots, X_n, A_1, A_2, \dots, A_m)$$

Teorema 1.2.1 (Inclusão da Imagem) *Sejam dados f uma função real (ou racional) arbitrária. X e Y dois intervalos. Então*

$$X \subseteq Y \longrightarrow I(f, X, A^{(0)}, \dots, A^{(m)}) \subseteq I(f, Y, A^{(0)}, \dots, A^{(m)})$$

Teorema 1.2.2 (Inclusão Monotônica) *Seja dada f uma função contínua de variáveis reais $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ e $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, a^{(1)}, \dots, a^{(m)})$ uma expressão funcional correspondente. Além disso, seja a avaliação intervalar $F(Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)}, B^{(1)}, \dots, B^{(m)})$ definida para os intervalos $Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)}, B^{(0)}, \dots, B^{(m)}$.*

1. **Propriedade da Inclusão:** *para todo k, j , $1 \leq k \leq n$, $0 \leq j \leq m$, se*

$$X^{(k)} \subseteq Y^{(k)}, A^{(j)} \subseteq B^{(j)},$$

então,

$$I(f, X^{(1)}, \dots, X^{(n)}; A^{(0)}, \dots, A^{(m)}) \subseteq F(X^{(1)}, \dots, X^{(n)}; A^{(0)}, \dots, A^{(m)}).$$

2. **Propriedade de Inclusão Monotônica:** *Se para todo*

$$X^{(k)} \subseteq Z^{(k)} \subseteq Y^{(k)}, A^{(j)} \subseteq C^{(j)} \subseteq B^{(j)}$$

então

$$F(X^{(1)}, \dots, X^{(n)}; A^{(0)}, \dots, A^{(m)}) \subseteq F(Z^{(1)}, \dots, Z^{(n)}; C^{(0)}, \dots, C^{(m)}).$$

1.3 Polinômios Intervalares

Os polinômios podem ser vistos como funções de uma ou mais variáveis, reais ou complexas ou ainda como elementos de um anel sobre o corpo dos reais, complexos ou qualquer corpo.

1.3.1 Polinômios Intervalares – Abordagem Algébrica.

Os polinômios reais ou complexos são casos particulares do conceito mais geral de um elemento de um anel de polinômios com uma ou mais indeterminadas, com coeficientes num anel comutativo e com elemento unidade. Algebricamente, um polinômio é identificado por uma seqüência de termos $(a_i)_{i \in \mathcal{N}}$ (ou simplesmente (a_i)) de elementos de um anel comutativo com unidade, onde são definidas as operações de adição e multiplicação. Ver os conceitos de álgebra básica em [MON 71].

Seja A um anel e $S(\mathcal{N})$ o conjunto das seqüências de elementos de A . Sejam $p = (a_i)$ e $q = (b_i)$, onde $(a_i) \in S(\mathcal{N})$. Os polinômios $p+q$ e $p \cdot q$ são assim definidos:

$$\begin{aligned} r &= p + q & \text{onde } r &= (c_i) \text{ e } c_i = a_i + b_i, \\ s &= p \cdot q & \text{onde } s &= (d_i), \\ e & & d_i &= \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j. \end{aligned}$$

Sejam $f = (a_i)$ e n um número natural tal que: $a_i = 0 \forall i > n$, então chegamos na seguinte expressão usual do polinômio f na indeterminada X :

$$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{i=0}^n a_i X^i, \text{ com } a_n \neq 0.$$

onde n é o **grau do polinômio** que é indicado por ∂f e $A[X]$ o anel dos polinômios na indeterminada X com coeficientes em A .

Se K é um corpo e considerando o anel de polinômios na indeterminada X e com coeficientes em K , então $K[X]$ é um anel de integridade, e portanto, podemos ter o corpo das frações M de $K[X]$.

Assim temos:

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} + \frac{p}{q} &= \frac{fq + gp}{gp} & \text{e} & \quad \frac{f}{g} \cdot \frac{p}{q} = \frac{fp}{gq} \\ \text{e além disso} & \quad -\frac{f}{g} = \frac{-f}{g} = \frac{f}{-g} \end{aligned}$$

Nem todo elemento de $K[X]$ é inversível perante a multiplicação, e daí a divisão de p por q não é somente a multiplicação de p pelo inverso de q . A divisão de polinômios se comporta de acordo como o seguinte teorema, que é clássico e pode ser visto em [MON 71], além de muitas outras referências.

Teorema 1.3.1 (Algoritmo de Euclides para Polinômios) : *Sejam f e g dois polinômios pertencentes ao anel $A[X]$, onde A é um anel comutativo com elemento unidade. Suponhamos que: $f \neq 0$, o grau de f é n , o coeficiente dominante de f é a_n e f é um elemento inversível em A . Então, existe um único par (q, r) de elementos de $A[X]$ tal que:*

$$g = qf + r \text{ onde } \partial r < n \text{ se } r \neq 0.$$

Para um conjunto qualquer A e sendo B um anel comutativo com elemento unidade podemos calcular o valor de um polinômio num ponto $x \in B$. Assim, se

$$f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X] \text{ e } x \in B \text{ então,}$$

chamamos de valor que f assume em x ou valor de f quando substituímos X por x , ao elemento

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i. \quad (1.1)$$

Definição 1.3.1 (Função Polinomial) *Uma função polinomial é uma função que pode ser escrita na forma 1.1.*

Neste caso, a indeterminada X passa a ser considerada como uma variável independente com o seu significado usual.

Cada polinômio determina uma única função polinomial e toda função polinomial é obtida por pelo menos um polinômio. Uma aplicação ϕ entre o conjunto dos polinômios sobre a indeterminada X no anel $A[X]$ e o conjunto das funções polinomiais \mathcal{P} preserva as somas e os produtos dos polinômios para as funções polinomiais, mas não é injetora. Por exemplo, sobre o corpo Z_5 , dos inteiros mod 5 os polinômios $p_1 = x^5 - x$ e $p_2 = 0$ geram a mesma função que é identicamente nula.

Contudo tal identificação – entre polinômios e funções polinomiais, é possível se o conjunto B é um domínio de integridade infinito.

Normalmente, trabalhamos com o significado de polinômio como um elemento do Anel ou como a função polinomial, no corpo dos racionais, reais ou complexos.

Poderíamos pensar em fazer tal identificação com o conjunto dos intervalos de Moore e assim falarmos de *polinômios intervalares* do ponto de vista algébrico. Porém tal **identificação** não é possível quando o conjunto dos coeficientes passa a ser o conjunto dos intervalos reais ou mesmo os complexos, pois \mathcal{IR} não forma um corpo com as operações intervalares de Moore.

No entanto, a generalização dos coeficientes reais dos polinômios para coeficientes intervalares passa a ter seu significado de um modo diferente como propõe Moore, na seguinte definição:

Definição 1.3.2 (Polinômio Intervalar) *O Polinômio Intervalar em \mathcal{IR} de grau n , $n \in \mathcal{N}$, é aquele cujos coeficientes são intervalos reais e a variável é real ou intervalar.*

A representação é dada por:

$$[p](x) := \sum_{i=0}^n A_i x^i = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n,$$

no caso de $x \in \mathcal{R}$ ou, para $X \in \mathcal{IR}$ temos:

$$[P](X) := \sum_{i=0}^n A_i X^i = A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \cdots + A_n X^n.$$

Na realidade, $[p](x)$ indica uma família de polinômios reais:

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_i a_i x^i \mid a_i \in A_i, A_i \in \mathcal{IR}, i = 0(1)n \right\}.$$

A expressão $[p](x)$ é chamada de **Fecho Polinomial Intervalar** de p em [MOO 79].

Como as operações aritméticas intervalares estão bem definidas no conjunto \mathcal{IR} podemos definir a *adição e a multiplicação* de polinômios intervalares de maneira análoga às operações correspondentes no caso de reais ou complexos.

Assim se:

$$[p] \mapsto [p](x) := \sum_{i=0}^n A_i x^i.$$

$$[q] \mapsto [q](x) := \sum_{i=0}^m B_i x^i.$$

sendo \oplus a adição de intervalos em \mathcal{IR} , então a definição da adição de polinômios intervalares é indicada por \boxplus e temos:

$$[p] \boxplus [q] \mapsto [s](x) := \sum_{i=0}^l (A_i \oplus B_i) x^i, l = \max\{n, m\} \quad (1.2)$$

Analogamente, a multiplicação de polinômios intervalares é indicada por \boxtimes e temos:

$$[p] \boxtimes [q] \mapsto [m](s) := \sum_{k=0}^{m+n} C_k x^k, C_k = \sum_{i+j=k} A_i \odot B_j \quad (1.3)$$

O oposto do polinômio intervalar $[p]$ é indicado da maneira usual como:

$$-[p] \mapsto -[p](x) := \sum_{i=0}^n (-1) \odot A_i x^i \quad (1.4)$$

Definição 1.3.3 (Relação de Ordem entre Polinômios Intervalares) *Sejam n e m respectivamente os graus dos polinômios intervalares $[p] = [\alpha_n, \beta_n]x^n + [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]x^{n-1} + \dots + [\alpha_0, \beta_0]$ e $[q] = [\gamma_m, \delta_m]x^m + [\gamma_{m-1}, \delta_{m-1}]x^{m-1} + \dots + [\gamma_0, \delta_0]$ onde $m \leq n$. Então $[p] \subseteq [q]$ se $[\alpha_i, \beta_i] \subseteq [\gamma_i, \delta_i]$ para $i = 0(1)n$, se $m = n$, e para $i = 0(1)m$ ³ se $m < n$.*

Teorema 1.3.2 *A operação \boxplus dada por 1.2 está bem definida.*

Prova: *O polinômio soma é o polinômio obtido pela adição dos intervalos correspondentes aos coeficientes de igual potência, conforme consta da expressão 1.2. Como a adição de intervalos está bem definida, assim também está a função \boxplus .*

Teorema 1.3.3 *A operação \boxtimes dada por 1.3 está bem definida.*

Prova: *O polinômio produto é o polinômio obtido pela multiplicação dos intervalos correspondentes aos coeficientes tais que $i + j = k$ conforme consta da*

³esta notação $i = vi(inc)vf$ significa que i varia de vi até vf com incremento inc e substitui $i = 0, 1, \dots, n$, por exemplo.

$8x^2 + 4x + [2, 3]$	$\frac{2x + 3}{4x - 4}$
$\square - 12x$	
$-8x + [2, 3]$	
$\square + 12$	
$[14, 15]$	

FIGURA 1.1 — Esquema da Divisão em (a)

expressão 1.3. Como a multiplicação de intervalos está bem definida, assim também está a função \square .

Seguindo o algoritmo de Euclides, de forma adaptada, para as funções polinomiais intervalares temos alguns resultados semelhantes.

Exemplo 1.3.1 Para $p(x) = 8x^2 + 4x + 2$ e $d(x) = 2x + 3$ polinômios reais temos $q(x) = 4x - 4$ e $r(x) = 14$

(a) $[p](x) = 8x^2 + 4x + [2, 3]$ ou seja para $a_0 \in [2, 3]$ temos: $[q](x) = 2x - 4$ e $[r](x) = [14, 15]$ donde:

$$[p](x) = [q](x) \cdot [d](x) + [r]x$$

Mostrando o procedimento no modo esquemático usual temos os passos intermediários na figura 1.1.

(b) $[p](x) = 8x^2 + [4, 5]x + 2$ e $d(x) = 2x + 3$

$$[q](x) = 4x + \left[-4, -\frac{1}{2}\right] \quad [r](x) = [12.5, 14] \text{ e daí}$$

$$[q](x) \cdot (2x + 3) = 8x^2 + [4, 5]x - \left[\frac{21}{2}, 12\right]$$

$$[q](x) \cdot (2x + 3) + [r](x) = 8x^2 + [4, 5]x + \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$$

logo:

$$[q](x) \cdot d(x) + [r](x) \supseteq [p](x)$$

Ver o esquema na figura 1.2.

No esquema o símbolo \square indica que a multiplicação de $4x$ por $2x + 3$ não é realizada completamente, isto é, no caso de $4x$ por $2x$. O motivo é a não existência do inverso intervalar para multiplicação nem para a adição, este resultado não seria nulo como é necessário para o processo. Arbitramos, então o zero. Caso esta operação fosse executada o zero pertenceria ao resultado.

(c) $[p](x) = [8, 9]x^2 + 4x + 2$ $d(x) = 2x + 3$

$$[q](x) = \left[4, \frac{9}{2}\right]x + \left[-\frac{13}{4}, -4\right] \wedge [r](x) = \left[14, \frac{65}{4}\right]$$

$$[q](x) \cdot (2x + 3) = [8, 9]x^2 + \left[\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right]x + \left[-\frac{57}{4}, -12\right]$$

$$[q](x) \cdot d(x) + [r](x) = [8, 9]x^2 + \left[\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right]x + \left[-\frac{1}{4}, \frac{17}{4}\right]$$

logo: $[q](x) \cdot d(x) + [r](x) \supseteq [p](x)$

(d) $[p](x) = 8x^2 + [4, 5]x + [2, 3]$ $d(x) = 2x + 3$

$$[q](x) = 4x + \left[-4, -\frac{7}{2}\right]$$

$8x^2$	$+ [4, 5]x$	$+ 2$	$2x + 3$
\square	$- 12x$		$4x + [-4, 7/2]$
	$[-8, -7]x$	$+ 2$	
	\square	$- [-12, -21/2]$	
		$[25/2, 14]$	

FIGURA 1.2 — Esquema da Divisão em (b)

$$[r](x) = [12, 5, 15]$$

$$[q](x) \cdot d(x) = 8x^2 + [4, 5]x + [-12, -\frac{21}{2}]$$

$$[q](x) \cdot d(x) + [r](x) = 8x^2 + [4, 5]x + [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$$

$$\text{Novamente, } [q](x) \cdot d(x) + [r](x) \supseteq [p](x)$$

Se $p(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$ e $d(x) = d_1x + d_0$ e se um dos $p_i \in A_i$, temos que $p(x; y)$ é uma função de duas variáveis. Para $p(x; y) = p_2x^2 + yx + p_0$ temos $y \in A_1$ e daí:

$$p(x; y) \div d(x) = \frac{p_2}{d_1} \cdot x + \left(\frac{y}{d_1} - \frac{d_0 p_2}{d_1^2} \right)$$

$$\text{e } r(x; y) = p_0 - d_0 \left(\frac{y}{d_1} - \frac{d_0 p_2}{d_1^2} \right)$$

onde x e y são as variáveis reais e p_2, p_0, d_0 e d_1 são constantes reais.

Observação 1: Seja $I(q; x, A_i)$ a imagem de $q(x; y)$ para $y \in A_i$, seja $Q(x; A_i)$ a avaliação intervalar de $q(x; y)$, então pela propriedade da inclusão 1.2.2 temos:

$$I(q; x, A_1) \subseteq Q(x; A_1)$$

$$I(r; x, A_1) \subseteq R(x; A_1)$$

$$I(p; x, A_1) \subseteq Q(x; A_1) \cdot d(x) + r(x; A_1)$$

onde $R(x; A_1)$ é a avaliação intervalar de $r(x; A_1)$

Observação 2: As considerações anteriores são válidas se todos coeficientes são intervalares e daí:

$$I(q; x, A_0, A_1, A_2) \subseteq Q(x; A_0, A_1, A_2),$$

$$I(q; R, A_0, A_1, A_2) \subseteq R(x; A_0, A_1, A_2).$$

Observação 3: Generalizando: se para $n, m \in \mathcal{N}$,

$$[p](x; A_0, A_1, \dots, A_n)$$

$$[d](x; B_0, B_1, \dots, B_m) \quad m \leq n$$

indicam funções polinomiais intervalares então

$$[p](x; A_0, A_1, \dots, A_n) \subseteq [d](x; B_0, \dots, B_m) \cdot [q](x; A_0, \dots, A_n, B_0, B_1, \dots, B_m) + [r](x; A_0, A_1, \dots, A_n, B_0, B_1, \dots, B_m).$$

Deste modo, podemos dividir um polinômio $[p]$ por outro $[q]$ de modo que sigamos o algoritmo de Euclides adaptado, conforme exposto anteriormente.

Teorema 1.3.4 (Propriedades Básicas) *Sejam \boxplus e \boxminus respectivamente a adição e multiplicação de polinômios intervalares em \mathcal{IR} . Então, para $[p], [q]$ e $[r]$ polinômios intervalares em \mathcal{IR} valem as seguintes propriedades:*

1. *Comutatividade*

$$(a) [p] \boxplus [q] = [q] \boxplus [p]$$

$$(b) [p] \boxminus [q] = [q] \boxminus [p]$$

2. *Associatividade*

$$(a) ([p] \boxplus [q]) \boxplus [r] = [p] \boxplus ([q] \boxplus [r])$$

$$(b) ([p] \boxminus [q]) \boxminus [r] = [p] \boxminus ([q] \boxminus [r])$$

3. *Elemento Neutro:*

(a) $\exists! [0] \in \mathcal{IR}$, o polinômio intervalar nulo, tal que $(\forall [p] \in \mathcal{IR}) ([p] \boxplus [0] = [0] \boxplus [p] = [p])$, onde $[0] = [0, 0]x^0$.

(b) $\exists! [1] \in \mathcal{IR}$, o polinômio intervalar constante, tal que $(\forall [p] \in \mathcal{IR}) ([p] \boxminus [1] = [1] \boxminus [p] = [p])$, onde $[1] = [1, 1]x^0$.

4. (a) $[0] \subseteq [p] - [p]$.

(b) $[1] \subseteq [p]/[p]$ onde $0 \notin [p]$.

5. *Subdistributividade*

$$(a) [p] \boxminus ([q] \boxplus [r]) \subseteq [p] \boxminus [q] \boxplus [p] \boxminus [r]$$

(b) $a \cdot ([p] \boxplus [q]) = a \cdot [p] \boxplus a \cdot [q]$, onde $a \in \mathcal{R}$.

1.3.2 Funções Polinomiais Intervalares

A função polinomial real de uma variável real x e de grau $n, n \in \mathcal{N}$, e $n + 1$ constantes reais $a_i, i = 0(1)n$ é assim descrita:

$$\begin{aligned} p: \mathcal{R} &\longrightarrow \mathcal{R} \\ x &\longmapsto p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i. \end{aligned} \quad (1.5)$$

A função polinomial complexa é análoga à função real e temos a variável e as constantes complexas. Usualmente a variável complexa é indicada por z ou w e a função é assim anotada:

$$\begin{aligned} p: \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ z &\longmapsto p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

A função polinomial pode ser definida para mais de uma variável. No caso de duas variáveis reais x e y , a função polinomial de grau 2 tem sua expressão da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p: \mathcal{R} \times \mathcal{R} &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (x, y) &\longmapsto p(x, y), \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde $p(x, y) = a_2x^2y^2 + a_1xy^2 + a_0y^2 + b_2x^2y + b_1xy + b_0y + c_2x^2 + c_1x + c_0$ e daí:

$$p(x, y) = \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \cdot y^2 + \left(\sum_{i=0}^n b_i x^i \right) y + \sum_{i=0}^n c_i x^i.$$

Considerando o caso de uma variável, a **função polinomial intervalar** da variável real x , de grau n , $n \in \mathcal{N}$, pode ser definida de maneira análoga.

Definição 1.3.4 (Função Polinomial Intervalar) *É a função que pode ser dada na seguinte forma:*

$$\begin{aligned} [p]: \mathfrak{R} &\longrightarrow \mathcal{IR} \\ x &\longmapsto [p](x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n, \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde as constantes A_i , $i = 0(1)n$ são intervalos reais, ou seja, $A_i \in \mathcal{IR}$, $x \in \mathfrak{R}$ e $n \in \mathcal{N}$.

Esta função se enquadra no tipo 3 da classificação vista em [NIC 71] que é resumida no seguinte:

Funções de Imagem Real

1. $f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$

2. $f: \mathcal{IR} \longrightarrow \mathfrak{R}$

Funções da Imagem Intervalar

3. $f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{IR}$

4. $f: \mathcal{IR} \longrightarrow \mathcal{IR}$

Os dois primeiros casos são funções reais e a variável pode ser intervalar ou real. Os dois últimos são funções intervalares e a variável pode ser intervalar ou real.

No caso da variável intervalar, temos o tipo 4, assim representado:

$$\begin{aligned} [P]: \mathcal{IR} &\longrightarrow \mathcal{IR} \\ X &\longmapsto [P](X) = A_0 + A_1X + A_2X^2 + \cdots + A_nX^n. \end{aligned} \quad (1.9)$$

No caso da expressão 1.5 ou 1.6 o esquema de Horner dado por:

$$a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + x(\cdots a_n x)))) \quad (1.10)$$

fornece um procedimento que permite avaliar $p(x)$ com um número menor de multiplicações do que na expressão usual, pois,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + x(\cdots a_n x)))).$$

No caso 1.8 o esquema de Horner pode ser aplicado, pois para $A, B \in \mathcal{IR}$ e $a \in \mathfrak{R}$ é válido que $a(B + C) = aA + aC$

Teorema 1.3.5 *A função polinomial intervalar da variável real x , de grau n , $n \in \mathcal{N}$ é dada por:*

$$A_0 + x(A_1 + x(A_2 + \cdots + x(A_{n-1} + xA_n))).$$

No caso da expressão intervalar de 1.9 o esquema de Horner fornece o seguinte resultado:

$$A_0 + X(A_1 + X(A_2 + \cdots + X(A_{n-1} + A_nX))) \subseteq A_0 + A_1X + \cdots + A_nX^{n-1} + A_nX^n,$$

onde $X^n = X \cdot X^{n-1}$ e $X^2 = X \cdot X$.

Uma forma de tentarmos diminuir o diâmetro do intervalo final é avaliar as potências de $X = [x_1, x_2]$ da seguinte forma:

$$X^n = \begin{cases} [x_1^n, x_2^n] & \text{se } x_1 > 0 \text{ ou se } n \text{ é ímpar} \\ [x_2^n, x_1^n] & x_2 < 0 \text{ e } n \text{ par} \\ [0, |x|^n] & 0 \in X, n \text{ par.} \end{cases}$$

Do mesmo modo que um polinômio complexo se refere ao caso dos seus coeficientes serem complexos (consequentemente a variável é complexa) um polinômio intervalar se refere à imagem da função intervalar da variável real ou intervalar. isto é. dados pelo caso 1.8 ou 1.9.

1.3.3 Zeros de Polinômios Intervalares

No conjunto dos reais, ou dos complexos, o problema da resolução de equações está fundamentado pela teoria algébrica dos corpos. No caso de equações intervalares, no conjunto dos intervalos, não temos as mesmas propriedades de um corpo e, portanto, a resolução das equações não é a mesma.

Temos, neste caso, duas abordagens para delinear soluções, para este problema:

- (1) Procurar o intervalo que satisfaz a igualdade usual de Moore;
- (2) Usar a relação de aproximação, que será definida a seguir, para generalizar a igualdade de Moore ⁴.

Se temos, por exemplo, a equação intervalar de grau 1 dada por:

$$[2, 3] + x = [5, 7], \quad (1.11)$$

podemos "resolvê-la" das seguintes formas:

- 1) Usando a definição de intervalo de Moore, equacionamos:

$$2 + x_1 = 5 \quad \wedge \quad 3 + x_2 = 7$$

que resulta em $x_1 = 3$, e $x_2 = 4$ gerando um intervalo de Moore válido. Temos então o intervalo $x = [3, 4]$ que satisfaz a equação dada.

Neste enfoque, nem todas as equações intervalares, mesmo as do primeiro grau, possuem solução, pois, por exemplo a equação $[3, 8] + x = [-3, 4]$ não possui um intervalo solução que mantenha a igualdade usual e o conceito de intervalo.

Podemos propor, por outro lado, que a equação dada em 1.11 modela um problema para o qual desejamos saber qual o conjunto de valores de x que satisfazem as equações: $a + x = b$ onde $a \in [2, 3]$ e $b \in [5, 7]$. Neste caso, podemos ter a equação $3 + x = 5$ que está no universo de definição do problema, mas, cuja solução $x = 2$ não está no intervalo-solução de Moore. Tal pode ser resolvido usando a abordagem a seguir:

- 2) A relação de aproximação, é assim definida:

⁴Falamos de intervalo de Moore ou também em métrica de Moore para designar a abordagem clássica do conjunto dos intervalos com a métrica de Hausdorff, dada pela distância intervalar.

Definição 1.3.5 (Relação de Aproximação) *Seja dada a estrutura de ordem $(\mathcal{IR}, \sqsubseteq, \perp)$, que determina um conjunto parcialmente ordenado e completo: ou seja um cpo.⁵ Para $X, Y \in \mathcal{IR}$, temos que X aproxima Y , o que é indicado por $X \sqsubseteq Y$, se e somente se $Y \subseteq X$.*

Podemos interpretar $X \sqsubseteq Y$, em termos de *qualidade* de informação, como sendo X "pior" que Y e conseqüentemente Y "melhor" que X . Por exemplo, se queremos aproximar π então dizemos:

$$[3.0, 3.5] \sqsubseteq [3.14, 3.15] \sqsubseteq [3.141, 3.142] \sqsubseteq [3.1415, 3.1416]$$

ou seja, o primeiro elemento da seqüência tem menos ou tanta informação significativa a respeito de π quanto o último, que é o melhor da seqüência para aproximá-lo.

Definição 1.3.6 (Relação de Aproximação em $x: \equiv_x$) *Seja o cpo $(\mathcal{IR}, \sqsubseteq, \perp)$. Dados $A, B \in \mathcal{IR}$, dizemos que eles estão relacionados, para $x \in \mathcal{R}$ e denotamos a relação por $A \equiv_x B$ se e somente se*

$$A \sqsubseteq x \wedge B \sqsubseteq x.$$

Dizemos então A e B aproximam x . Como esta nova relação possui as mesmas propriedades de uma relação de equivalência (reflexividade, simetria e transitividade) e generaliza o conceito da igualdade de Moore, temos uma nova estrutura intervalar (\mathcal{IR}, \equiv_x) com as propriedades algébricas *correspondentes* a de um corpo, ver [CLA 93] e [KOR 94].

Usando a nova relação de aproximação e substituindo a equação dada por:

$$[2, 3] + x \equiv_\alpha [5, 7],$$

temos então

$$x = [5, 7] - [2, 3] \iff x = [2, 5]$$

onde $\alpha = b - a$. Agora, $\forall a \in [5, 7], \forall b \in [2, 3]$, então $X = [2, 5]$ contém todas as soluções das equações desejadas.

A seguinte definição configura uma abordagem semelhante.

Definição 1.3.7 (Zero de um Polinômio Intervalar) *Dado um polinômio intervalar $[p] = \sum_{i=0}^n [\alpha_i, \beta_i] x^i$, o Zero Intervalar de $[p]$ é dado por*

$$N = \{x_i | p(x_i) = 0 \wedge p(x) \in [p]\} \quad (1.12)$$

Neste sentido o zero intervalar é dado efetivamente por um conjunto.

Neste trabalho, vamos considerar como solução de uma equação polinomial intervalar ao conjunto de todas as soluções possíveis de todas equações polinomiais reais ou complexas $p(x) = 0$ que pertencem à família $[p]$.

⁵do inglês "complete partial order", onde \perp representa o menor elemento que é $[-\infty, +\infty]$.

1.4 Polinômios de Hurwitz

Na Teoria de Controle em Engenharia Elétrica é muito freqüente a necessidade de decidirmos se um dado polinômio possui a parte real de suas raízes, todas elas, negativas.

Seja p um polinômio dado por $p = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.

Definição 1.4.1 *Se todos os zeros z_i de um polinômio p estão no semiplano esquerdo, isto é, $Re(z_i) < 0$, então p é um polinômio de Hurwitz, ou polinômio estável.*

Em vez de calcular todos os zeros e avaliar a parte real podemos usar o teorema a seguir, cuja demonstração está em [GAN 59].

Teorema 1.4.1 (Critério de Hurwitz) *O polinômio p é de Hurwitz se e só se $D_k > 0, \forall k = 1(1)n$ onde:*

$$D_1 = a_1, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

Estes determinantes são chamados de **determinantes de Hurwitz**. Outro fato importante é dado em [HEN 74] com o próximo teorema.

Teorema 1.4.2 *O polinômio p é de Hurwitz se e só se $q_i(x)$ é dado por $q_i(x) = \gamma_i x$, com $\gamma_i > 0$ para $i = 1(1)n - 1$ onde $q_i(x)$ são obtidos da sequência de Sturm para*

$$\begin{aligned} f_0(x) &= a_n x^n - a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-4} x^{n-4} - a_{n-6} x^{n-6} + \dots \\ f_1(x) &= a_{n-1} x^{n-1} - a_{n-3} x^{n-3} + a_{n-5} x^{n-5} - a_{n-7} x^{n-7} + \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} f_0(x) &= q_1(x) f_1(x) - f_2(x) \\ f_1(x) &= q_2(x) f_2(x) - f_3(x) \\ &\vdots \\ f_{i-1}(x) &= q_i(x) \cdot f_i(x) - f_{i+1}(x) \\ f_{m-1}(x) &= q_m(x) \cdot f_m(x) \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Em [TRE 90] é desenvolvido um algoritmo algébrico eficiente para determinarmos se p é ou não de Hurwitz que usa mais dois fatos importantes:

1) A soma dos coeficientes de p , $\ell = \sum_{i=0}^n a_i$ deve ser maior que os coeficientes extremos. Ou seja: se p é um polinômio de Hurwitz então:

$$\begin{cases} \ell \geq 2^{n/2} (a_0 a_n)^{1/2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \ell > 2^{(n+1)/2} (a_0 a_n)^{1/2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

ver [BEA 91]

2) O uso de uma versão melhorada do algoritmo de Euclides baseada em sub-resultantes.

A melhoria desenvolvida no algoritmo de Trevisan é a seguinte:

Seja $\{p_i\}$ definida pelo algoritmo de Euclides como na seção 1.6 onde os valores iniciais são dados por:

$$p_0(x) = \begin{cases} f_0(\sqrt{x}) & \text{se } n \text{ é par} \\ f_0(\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (1.16)$$

$$p_1(x) = \begin{cases} f_1(\sqrt{x}) & \text{se } n \text{ é par} \\ f_1(\sqrt{x})\sqrt{x} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (1.17)$$

O algoritmo de Trevisan é o seguinte:

Hurwitz(p); $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$

H0: Se para algum i , $i = 0(1)n$, $a_i \leq 0$ então retorna "FALSO"

H1: $L \leftarrow \sum_{i=0}^n a_i$

H2: se n é par então $B \leftarrow 2^{n/2} \sqrt{a_0 a_n}$ e vai para *H4*

senão $B \leftarrow 2^{(n+1)/2} \sqrt{a_0 a_n}$

H3: se $L < B$ então retorna "FALSO"

senão $p_0 = a_n x^{(n+1)/2} - a_{n-2} x^{(n+1)/2-1} + \dots$

$p_1 = a_{n-1} x^{(n-1)/2} - a_{n-3} x^{(n-1)/2-1} + \dots$

control = $(n-1)/2$

vai para *H5*

H4: Se $L < B$ então retorna "FALSO"

senão $p_0 = a_n x^{n/2} - a_{n-2} x^{n/2-1} + \dots$

$p_1 = a_{n-1} x^{n/2} - a_{n-3} x^{n/2-1} + \dots$

control = $n/2$

H5: $p_2 \leftarrow -\text{Remainder}(p_0, p_1)$ ⁶

control \leftarrow control - 1

H6: se $\deg(p_2) \neq \text{control}$ ou $(lc(p_2) < 0)$ ⁷ então retorna FALSO

H7: se control = 0 então retorna VERDADEIRO

senão $p_0 \leftarrow p_1$

$p_1 \leftarrow p_2$

vai para *H5*.

Exemplo 1.4.1 Seja $p(x) = 2x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 4$, $n = 4$

H0: $\forall i, a_i > 0$

H1: $L = 2 + 5 + 10 + 10 + 4 = 31$

H2: $B = 2^{5/2} \sqrt{a_0 a_4} = 8\sqrt{2} \cong 11.3$

H4: Logo $L > B$

$p_0 = a_4 x^2 - a_2 x + a_0 = 2x^2 - 10x + 4$

$p_1 = a_3 x^2 - a_1 x = 5x^2 - 10x$

control = 2

H5: $p_2 = \text{resto}(p_0, p_1)$ $p_2 = +6x - 4$

control = 1 *H6:* $(\deg^8(p_2) = 1 \neq 2 - 1$ ou $lc(p_2) < 0)$? Falso!

H7: control = 0? Falso!

⁶função que dá o resto da divisão de p_0 por p_1 .

⁷função que retorna o coeficiente de mais alta ordem.

então

$$p_0 = 5x^2 - 10x$$

$$p_1 = 6x$$

$$H5: p_2 = 10x \text{ control} = 0$$

$$H6: (\deg(p_2) = 1 \neq 0 \text{ ou } \ell c(p_2) < 0)? \text{ Falso}$$

$$H7: (\text{control} = 0)? \text{ VERDADEIRO!} \implies p \text{ é polinômio de Hurwitz}$$

Exemplo 1.4.2 Não vamos fazer agora todos os passos:

$$(a) p(z) = z^4 + 7z^3 + 21z^2 + 31z + 20$$

$$\text{hurw}(p) = \text{true}$$

$$(b) p(z) = z^5 + z^4 + 5z^3 + 7z^2 + 4z + 8$$

$$\text{hurw}(p) = \text{false}$$

$$(c) p(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 4z + 1$$

$$\text{hurw}(p) = \text{false}$$

$$(d) p(z) = \underbrace{1z^4 + 4z^3 + 9z^2 + 8z + 5}_{\substack{a_4 \ a_3 \ a_2 \ a_1 \ a_0}}$$

Para exemplificar o critério de Hurwitz, vejamos:

$$D_1 = 8 \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 62 > 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 144$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 144$$

Com isso encerramos a parte introdutória com os resultados básicos e principais notações para os demais capítulos do trabalho.

No próximo capítulo faremos uma revisão geral do problema da separação dos zeros de polinômios no caso real e complexo, indicando primordialmente as maneiras algébricas de resolvê-lo.

Capítulo 2

Localização e Separação dos Zeros de Polinômios

As primeiras informações sobre os zeros de polinômios numa certa região, são em geral, dadas na enumeração.

Enumerar os zeros de um polinômio real ou complexo é dizer quantos zeros ele possui numa certa região delimitada.

Se a região for todo plano complexo então a solução é dada pelo Teorema Fundamental da Álgebra, ou seja, o número de zeros do polinômio, contando a multiplicidade de cada um deles, é igual ao valor do seu grau.

Se as regiões forem delimitadas por um círculo, retângulo ou semiplano temos soluções baseadas nos resultados de Schur-Cohn, [HEN 74], [SCH 83], Wilf, [WIL 78] e Routh, [HEN 74]. No caso mais geral, de regiões delimitadas por uma curva de Jordan (fechada e simples) a solução é dada pela aplicação do **Princípio do Argumento** da variável complexa. Na figura 2.1 temos os casos das regiões de procura possíveis, que estão hachuradas.

Quando a pesquisa se restringe às raízes reais temos que o número delas num intervalo real é dado pelo teorema de Sturm, 2.1.8 que será visto na secção 2.1.3.

Após a enumeração, temos a etapa chamada de *Localização dos Zeros*. Localizar os zeros dos polinômios é determinar limites ou cotas para de

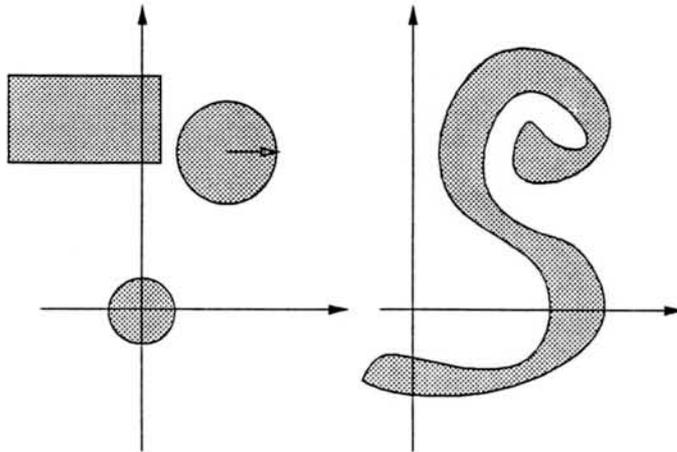


FIGURA 2.1 — Regiões de Pesquisa de Zeros

limitar a região inicial que contém todos os seus zeros. Esta região, portanto deve conter todos os zeros e ser ao mesmo tempo a menor possível.

O resultado da separação ou isolamento dos zeros de polinômios reais ou complexos consiste num conjunto de regiões disjuntas onde cada uma contém um único zero e cada zero pertence a uma região do conjunto.

Há diversas soluções da enumeração e localização e serão resumidas neste capítulo.

2.1 Enumeração dos Zeros

2.1.1 Princípio do Argumento

O Princípio do Argumento é visto dentro do estudo da integração de funções complexas e é em última análise uma aplicação do Teorema do Resíduo para a derivada logarítmica. Seja f uma função analítica que não é identicamente nula numa região R , então a derivada logarítmica de f é dada por f'/f . As singularidades da derivada logarítmica ocorrem nas singularidades isoladas de f .

Teorema 2.1.1 (Princípio do Argumento) *Seja dada uma função f analítica numa região R , conexa e simples. Seja Γ uma curva de Jordan orientada positivamente e que não passe por nenhum zero de f . O número de zeros no interior de Γ , cada zero contado com a sua multiplicidade, é igual ao número de voltas que a imagem da curva $f(\Gamma)$ faz em torno da origem.*

Prova:

O número de voltas da curva $f(\Gamma)$ está relacionado com a variação da função argumento de f . Seja $p(z)$ um polinômio complexo com q zeros no interior de Γ e r zeros fora de Γ , então:

$$p(z) = \underbrace{a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_q)}_{q \text{ vezes}} \underbrace{(z - z_{q+1}) \cdots (z - z_n)}_{r \text{ vezes}}.$$

Como para $z, w \in \mathcal{C}$ temos $\theta = \arg(z)$ e $\phi = \arg(w)$, então $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $w = |w|(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$ e $z \cdot w = |z| |w|[\cos(\phi + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta + \phi)]$, logo $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$.

Logo,

$$\arg(p(z)) = \arg a_n + \sum_{j=1}^q \arg(z - z_j) + \sum_{j=q+1}^n \arg(z - z_j).$$

À medida que z percorre Γ no sentido anti-horário o valor de $\arg(z - z_i)$ cresce por 2π quando $1 \leq j \leq q$ mas o mesmo não ocorre quando $q \leq j \leq n$. Tal pode ser visualizado na figura 2.2, onde z_1 é um zero no interior da curva Γ e z_n é um zero externo à curva.

Enquanto z passa de z_a para z_b , o $\arg(z_b - z_1)$ é maior que $\arg(z_a - z_1)$ e assim sucessivamente até ultrapassar $\arg(z_a - z_1)$ por 2π . Já quando z passa de z_a para z_b , $\arg(z_b - z_n)$ é menor que $\arg(z_a - z_n)$, $\arg(z - z_n)$ aumenta quando z passa por z_c e torna a diminuir, nunca ultrapassando 2π .

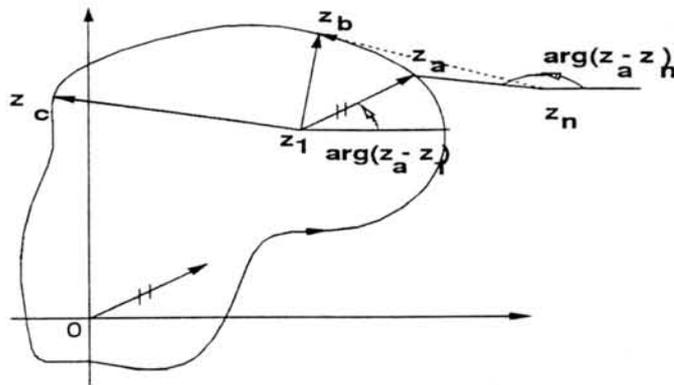


FIGURA 2.2 — Variação do Argumento: z_1 e z_n são zeros

Resumindo temos:

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

ou ainda

$$q = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg(p(z))$$

onde $\Delta_{\Gamma} \arg(p(z))$ indica a variação do argumento de $p(z)$ e pode ser dado por:

$$\arg(z) = \operatorname{Arctg} \frac{b}{a},$$

se $z = a + bi$ então, $\tan \arg(p(z)) = \frac{\operatorname{Im}(p(z))}{\operatorname{Re}(p(z))}$.

Assim o número de zeros de $p(z)$ que pertencem ao interior de Γ , contando suas multiplicidades é dado por N , onde

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (2.1)$$

Uma forma algorítmica para contar o número de voltas que $p(\Gamma)$ faz em torno da origem é analisar o número de vezes que $p(z)$ troca de quadrante quando z percorre Γ . Tal idéia foi desenvolvida por Collins e Krandick [COL 92] e é útil, não só para enumerar como também para separar os zeros.

2.1.2 Regiões Circulares

A enumeração em regiões circulares é dada pelo algoritmo de Schur-Cohn. Neste algoritmo determinamos o número de zeros que um polinômio real ou complexo tem no interior do círculo unitário.

Definição 2.1.1 (Polinômio Recíproco) Dado um polinômio p , o polinômio recíproco de p é dado por:

$$p^*(z) = p(1/z)$$

Lema 2.1.2 Seja p um polinômio de grau $n > 0$, não identicamente nulo, com zeros z_1, z_2, \dots, z_n incluindo os múltiplos. O polinômio recíproco p^* é um polinômio

de grau n , com zeros $z_k^* = 1/z_k$, $k = 1(1)n$. Se o ponto 0 é um zero então $1/0 := \infty$, isto é, é atribuído a $1/0$ o valor ∞ .

Seus coeficientes podem ser determinados pelos conjugados dos coeficientes de $p(z)$ na ordem inversa, ou seja, se

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad n > 0.$$

então o polinômio recíproco é dado por:

$$p^*(z) = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \dots + \bar{a}_{n-1} z + \bar{a}_n. \quad (2.2)$$

Definição 2.1.2 (Transformada de Schur) *Seja $p(z)$ um polinômio de grau $n \geq 1$, a transformada de Schur é um polinômio de grau $n - 1$ que é dado por:*

$$\begin{aligned} T(p(z)) &= \bar{a}_0 p(z) - a_n p^*(z) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\bar{a}_0 a_k - a_n \bar{a}_{n-1-k}) z^k. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A transformada de Schur de um polinômio de grau zero é o polinômio nulo. Além disso,

$$T(p(0)) = \bar{a}_0 a_0 - a_n \bar{a}_n = |a_0|^2 - |a_n|^2,$$

que é sempre um número real. Esta transformada pode ser aplicada repetidas vezes, $T^2(p), T^3(p), \dots$ ou seja,

$$T^k(p(z)) = T(T^{k-1}(p)) \quad k = 2(1)n.$$

A transformada $T^k(p)$ é um polinômio de grau $n - k + 1$ mesmo se o coeficiente a_0 é nulo. Denotamos então por γ_k tal valor:

$$\gamma_k := T^k(p(0)) \quad k = 1(1)n. \quad (2.4)$$

Teorema 2.1.3 *Seja p um polinômio de grau n , e $p \neq 0$. Todos os zeros de p estão fora do círculo unitário $|z| \leq 1$ se e somente se $\gamma_k > 0$, e $k = 1(1)n$.*

Teorema 2.1.4 *Seja p um polinômio de grau n . Sejam os números γ_k definidos em 2.4 satisfazendo a condição de $\gamma_k \neq 0$, $k = 1(1)n$. Se para aqueles índices k para os quais $\gamma_k < 0$ são denotados por k_j , $k_j = j$, $j = 1(1)m$ onde $k_1 < k_2 < \dots < k_m$, então o número de zeros $h(p)$ satisfazendo $|z| < 1$, contando a multiplicidade é dado por:*

$$h(p) = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} (n + 1 - k_j). \quad (2.5)$$

Outro modo de calcular $h(p)$ é considerar que $\sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} (n + 1)$ vale zero ou $n + 1$ de acordo com a paridade de m . Temos então

$$h(p) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m (-1)^j k_j & \text{se } m \text{ par,} \\ n + 1 + \sum_{j=1}^m (-1)^j k_j & \text{se } m \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (2.6)$$

O algoritmo de Schur-Cohn, portanto, calcula as seqüências das transformadas de Schur e o valor de $h(p)$.

Tal seqüência é determinada por:

$$f_{i+1}(z) = f_i(z) - m_{i+1}f_i^*(z) \quad i = 0(1)n - 1 \quad (2.7)$$

onde $m_{i+1} = \frac{a_{n-i}^{(i)}}{a_0^{(i)}}$, $f_i^*(z)$ é o polinômio recíproco de $f_i(z)$ e $f_i^{(0)} = p(z)$. Assim:

$$f_i^*(z) = \sum_{j=0}^n \bar{a}_i z^{n-i-j}. \quad (2.8)$$

Se todos os γ_k são não nulos, enumeramos os zeros de $p(z)$ no círculo unitário.

O número de zeros de $p(z)$ num círculo arbitrário, isto é, com centro em a e raio r pode ser determinado pelo número de zeros que

$$q(z) = p(a + rz) \quad (2.9)$$

tem no interior de círculo unitário.

No trabalho de Maria Angélica, ver [BRU 94], é apresentado um algoritmo baseado em processamento algébrico que implementa o cálculo dos coeficientes de f_{i+1} usando a parte primitiva.

Definição 2.1.3 (Parte Primitiva) Dado um polinômio $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ a parte primitiva é definida e anotada por:

$$pp(p(x)) := \frac{p(x)}{mdc(a_i)}.$$

O $mdc(a_i)$ indica o máximo divisor comum dos coeficientes a_i .

É importante notar que se dividirmos os polinômios $f_i(z)$ por uma constante o sinal de γ não se altera.

Em Schelin [SCH 83] é mostrado que o teste de γ_k pode ser substituído pelo teste de $|m_j| \geq 1$ para quando $f_i(0) \neq 0$. Temos assim, o seguinte algoritmo para enumeração de zeros de um polinômio real ou complexo no interior de uma região circular.

Algoritmo Algébrico de Schur

1. entrada $\{p, z_0, r\}$
2. $f[0] = pp(p, z_0 + rz)$
3. front = false
4. $m = 1$
5. for $j=0$ thru $n - 1$ do
 - 5.1 (for $k=0$ thru $n-j$ do
 - $fr[j] = fr[j] + \bar{f}[j] * z^k$
 - $m[j + 1] = a_{n-j}^{(j)} / \bar{a}_0^{(j)}$
 - if $|m[j + 1]| > 1$ then ($ki[m] = j + 1, m = m + 1$)
 - $f[j + 1] = f[j] - m[j + 1] * fr[j]$
 - if $a_0^{(j+1)} = 0$ then ($\{ \text{saída: "Pode haver zeros na fronteira"} \}$,
front=true)
 - $f[j + 1] = pp(f[j + 1])$
 - 5.2 if (front=false) then (if $(m - 1)$ é par then $h = \sum_{k=1}^m (-1)^k ki[k]$

else $h = n + 1 + \sum_{k=1}^m ki[k]$
 else ("pode haver zeros na fronteira").

6. fim

2.1.3 Regiões Retangulares

As regiões retangulares são casos particulares onde aplicamos o princípio do argumento e neste caso as variações em $\arg p(z)$ podem ser obtidas contando os polos (saltos) da função $\frac{Im(p(z))}{Re(p(z))}$ quando z percorre um retângulo R . Quando $p(z)$ cruza o eixo imaginário, no sentido anti-horário, a $\tan \arg(p(z))$ salta de ∞ para $-\infty$. A contagem dos saltos é dada pelo índice de Cauchy.

Definição 2.1.4 (Índice de Cauchy) *Seja p/q uma função real racional e $[\alpha, \beta]$ um intervalo real. O índice de Cauchy é dado pela diferença entre o número de pontos em $[\alpha, \beta]$ onde p/q salta de $-\infty$ para ∞ e o número de pontos onde p/q salta de ∞ para $-\infty$.*

Esta definição é complementada pelo seguinte teorema, (ver [MAR 49]) onde temos uma região definida pela fronteira anotada por δR .

Teorema 2.1.5 *Se $\delta R : z = z(x), \alpha \leq x \leq \beta$ é uma curva simples e fechada e p um polinômio definido sobre δR , então*

$$\nabla_{\delta R} \arg p(z) = -\pi I_{\alpha}^{\beta} \frac{Im(p)}{Re(p)}.$$

Se δR é um polígono de m lados, cada lado j de δR pode ser mapeado no eixo x através de uma transformação adequada t_j , gerando o polinômio p_j dado por $p_j = p(t_j(z))$. As transformações serão vistas em 2.2.7 na equação 2.22. Deste modo

$$\nabla_{\delta R} \arg(p(z)) = -\pi \sum_{i=1}^m I_l^0 \frac{Im(p_j)}{Re(p_j)},$$

onde m é o número de lados de δR e l é o comprimento do lado j .

O trabalho de Wilf ([WIL 78]) junta estes resultados no seguinte teorema:

Teorema 2.1.6 *Seja p um polinômio complexo sem zeros na fronteira de uma região poligonal de m lados. Então no interior de R o número de zeros de p é exatamente:*

$$N = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m I_{l_j}^0 \frac{Im(p_j)}{Re(p_j)}. \quad (2.10)$$

Definição 2.1.5 (Seqüência de Sturm) *Seja $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ uma seqüência de polinômios reais. Esta seqüência é chamada de seqüência de Sturm num intervalo aberto (a, b) onde tanto a como b podem ser infinitos, se*

- (1) $f_m(x)$ não se anula em (a, b) ;
- (2) em qualquer zero de $f_k(x)$, $k = 2(1)m - 1$ as duas funções adjacentes não são nulas e têm sinais opostos, isto é:

$$f_{k-1}(x^*) \cdot f_{k+1}(x^*) < 0,$$

onde x^* é um zero de f_k :

$$(3) \text{ e } f_1(a) \neq 0, f_1(b) \neq 0.$$

Indicamos por $V(x_0)$ o número de mudanças de sinal de $f_i(x_0)$, onde os valores nulos são ignorados. Se $a = \infty$ então $V(a)$ é definido por $V(a + \epsilon)$ onde ϵ é tal que nenhuma f_i se anula em $(a, a + \epsilon)$.

Seja p_i a seqüência gerada pela aplicação do teorema de Euclides, para os polinômios p_0 e p_1 de modo que seja p_2 o resto da divisão. Assim temos:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= q_1(x) \cdot p_1(x) - p_2(x) \\ p_1(x) &= q_2(x) \cdot p_2(x) - p_3(x) \\ &\vdots \\ p_{k-1} &= q_k(x) \cdot p_k(x) - p_{k+1}(x) \\ \dots &\dots \\ p_{m-1} &= p_m(x) \cdot p_m(x) \text{ e} \\ p_{k+1} &:= -\text{resto} \left(\frac{p_{k-1}}{p_k} \right). \end{aligned}$$

O polinômio $p_m(x)$ é não nulo. Se $p_m(x)$ não é constante, uma indução mostra que $p_m(x)$ é fator dos polinômios anteriores.

Teorema 2.1.7 *Sejam p_0 e p_1 dois polinômios reais diferentes do polinômio nulo e sejam p_1, p_2, \dots, p_m os polinômios gerados pelo algoritmo de Euclides. Os polinômios $f_k = \frac{p_k}{p_m}$, $k = 0(1)m$ formam uma seqüência de Sturm para qualquer intervalo $[a, b]$ tal que $p_0(a) \cdot p_0(b) \neq 0$.*

Teorema 2.1.8 (Sturm) *Sejam p_0 e p_1 dois polinômios reais diferentes do polinômio nulo e seja a seqüência $\{p_k\}$ gerada de p_0 e p_1 pelo algoritmo de Euclides, seja $V(x)$ o número de mudanças de sinal na seqüência $\{p_k(x)\}_k$. Então para qualquer a e b , $a < b$ e $p(a) \cdot p(b) \neq 0$, o índice da Cauchy é dado por:*

$$I_a^b \frac{p_1}{p_0} = V(a) - V(b). \quad (2.11)$$

A prova está em [HEN 74] e [RAL 65]. A partir deste resultado temos um modo operacional de dizer exatamente quantas raízes reais, agora distintas, temos num intervalo real $[a, b]$. Tal procedimento pode ser usado para separar recursivamente os zeros reais de um polinômio real em $[a, b]$, onde a seqüência começa com $f_0 = p(x)$ e $f_1 = p'(x)$.

2.1.4 Regiões Semiplanares

Se a região a ser pesquisada é um semiplano temos o teorema de Routh.

Teorema 2.1.9 (Routh) *Seja dado um polinômio p de grau n , tal que $p(z) = p_1(z) + ip_2(z)$ onde p_1 e p_2 são polinômios reais, sendo p_2 não nulo e tal que não tenha zeros reais, tendo p , n_1 zeros (contando as multiplicidades) no semiplano superior do plano complexo e n_2 zeros no semiplano inferior. Seja $V(x)$ a variação de sinal obtida no ponto x para a seqüência de Sturm iniciada com p_1 e p_2 onde $-\infty \leq x \leq \infty$. Então,*

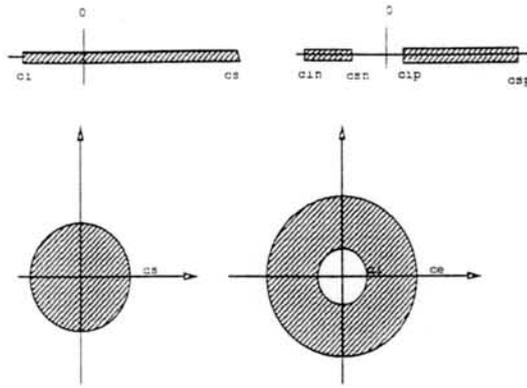


FIGURA 2.3 — As Diversas Cotas

$$n_1 = \frac{1}{2}[n + V(\infty) - V(-\infty)],$$

$$n_2 = \frac{1}{2}[n - V(\infty) + V(-\infty)].$$

Com o uso de transformações podemos determinar o número de zeros em semiplanos horizontais ou verticais arbitrários.

2.2 Separação dos Zeros de Polinômios Reais ou Complexos

Para separar ou isolar os zeros partimos do processo da enumeração e a seguir repartimos a região inicial em outras que são novamente avaliadas pela enumeração até que tenhamos regiões disjuntas com um só zero. Se a região for circular podem surgir problemas com a subdivisão do círculo original, pois em geral a subdivisão começa com uma bipartição e neste caso a bipartição não produz dois outros círculos disjuntos. No trabalho de Brunetto, ver [BRU 94], é feita a análise e a comparação dos resultados, pela separação das raízes a partir de discos e de quadrados.

Se desejamos isolar todas as raízes de $p(x) = 0$ então precisamos delimitar primeiro em que região fechada estão todas as raízes. Para isso calculamos as cotas das raízes, em geral, por um processo que fornece uma **cota** para as raízes positivas.

As cotas para as raízes negativas são obtidas pela transformação dada pela cota positiva do polinômio transformado pt :

$$pt(x) = p(-x).$$

No caso das raízes complexas podemos determinar o raio de um disco, centrado em $(0, 0)$ que contenha todas as raízes complexas e conseqüentemente as reais. Usando a transformação $p(1/x)$ podemos determinar um anel que contém todas as raízes. Assim as regiões a serem determinadas são vistas na figura 2.3 onde ci e cs são respectivamente a cota inferior e superior, cin , csn , cip , csp são as cotas negativas e positivas das raízes reais; ce e ci são as cotas externa e interna que delimitam o anel.

Há dezenas de maneiras diferentes de calcular estas cotas e que geram resultados diferentes, ver [MAR 49] e [COL 77]. Também há diferentes maneiras de avaliar o resultado desses processos, que podem incluir o tamanho do intervalo gerado, a complexidade teórica de tempo ou a menor cota superior.

Cauchy estabelece o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1 *Todos os zeros do polinômio $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$, $a_n \neq 0$, estão num círculo $|z| \leq r$, onde r é a raiz positiva da equação*

$$|a_0| + |a_1|z + \dots + |a_{n-1}|z^{n-1} - |a_n|z^n = 0.$$

Ver a prova em [MAR 49].

Assim

$$|p(z)| \geq |a_n||z^n| - (|a_0| + |a_1||z| + \dots + |a_{n-1}||z^{n-1}|),$$

e então o seguinte processo iterativo converge para a raiz de maior módulo, caso ela seja real. A cota de Cauchy, para um polinômio $p(x)$ é dada por β tal que toda raiz α satisfaz:

$$|\alpha| \leq \beta,$$

onde $\beta = \lim x_k$ e onde x_k é dado por:

$$x_k = \left(\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \cdot x_{k-1}^{n-1} + \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| \cdot x_{k-1}^{n-2} + \dots + \left| \frac{a_1}{a_n} \right| x_{k-1} + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right)^{\frac{1}{n}},$$

com $k = 0(1)\infty$.

A cota seguinte é a de Fujiwara, ver [FUJ 16] e é também citada em Davenport, como cota de Cauchy, ver [DAV 88].

$$|\alpha| \leq 2 \max \left\{ \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|, \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right|^{1/2}, \left| \frac{a_{n-3}}{a_n} \right|^{1/3}, \dots, \left| \frac{a_0}{a_n} \right|^{1/n} \right\}. \quad (2.12)$$

Esta cota pode ser determinada calculando

$$l = \max_{1 \leq i \leq n, a_{n-i} \neq 0} [(\log_2 |a_{n-i}/a_n|)/i],$$

e então, uma cota superior é dada por

$$\bar{b} = 2^{l+1}. \quad (2.13)$$

Esta cota é interessante por ser uma potência de 2, fato que é usado no algoritmo da subdivisão de Uspensky Modificado e outros.

2.2.1 Método de Pinkert

Seja A um polinômio complexo. O método de Pinkert é baseado nos teoremas de Routh e Sturm. A idéia geral é dada em [PIN 76]. Sejam dados:

$$A_1(w) = \sum_{j=0, j \text{ par}}^n a_j w^j,$$

$$A_2(w) = \sum_{j=1, j \text{ impar}}^n a_j w^j.$$

isto é, $A_1(w)$ é a parte real e $A_2(w)$ é a parte imaginária. Seja

$$H = \text{mdc}(A_1(w), A_2(w)).$$

Se α é zero de $A(w)$ então $A_1(\alpha)$ e $A_2(\alpha)$ são reais e α é raiz de H . Ao dividirmos $A(w)$ ¹ por H obtemos um polinômio sem zeros reais, que será denotado por \bar{P} . A este polinômio aplicamos o teorema de Routh, que permite saber o número de zeros nos semiplanos superior e inferior.

Para separar os zeros nos quadrantes, isto é, juntar as informações dos quatro semiplanos, usamos transformações que geram polinômios cujas raízes são os quadrados das raízes de $A(w)$.

Teorema 2.2.2 (Pinkert) *Seja A um polinômio de uma variável, sobre o corpo dos complexos de grau $n > 0$. O polinômio A é dado por $A(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j = a_n \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)$ com $\alpha_j \in \mathcal{C}$, $j = 1(1)n$. Sejam $A_1(x) = \sum_{j=0, j \text{ par}}^n a_j x^j$ e $A_2(x) = \sum_{j=1, j \text{ impar}}^n a_j x^j$ e $B = A_1^2(x) - A_2^2(x)$. Então $B(x) = A^*(x^2)$ é dado por:*

$$B(x) = (-1)^n a_n^2 \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j^2).$$

A prova está em [PIN 76].

2.2.2 Método de Uspensky Modificado

Este método isola as raízes reais de um polinômio com coeficientes reais. É uma alternativa para o método de Sturm. O fundamento é dado pela aplicação da regra de Descartes e de transformações adequadas. É uma variante do método de Vincent [USP 48].

Pela regra de Descartes temos que se o número de variações de sinais da seqüência dos coeficientes reais a_i , indicada por $V(a_i)$ ou $V(p)$ é nula, então $p(x)$ não tem zeros reais. Se $V(a_i) = 1$, então $p(x)$ tem exatamente um zero real positivo em $[0, \infty)$. A seguir analisamos $p(x)$ em duas regiões $(0, 1)$ e $(1, \infty)$ através das

¹ $A(w)$ é livre de quadrados, neste caso.

transformações seguintes:

$$p(x) = \begin{cases} (0, 1) & \longrightarrow p^*(x) = (x+1)^n p\left(\frac{1}{x+1}\right) & (A) \\ (1, \infty) & \longrightarrow p^{**}(x) = p(1+x) & (B) \end{cases} \quad (2.14)$$

A primeira transformação mapeia o círculo unitário no semiplano direito $Re(z) \geq 0$ de modo que os zeros de $p(x)$ em $(0, 1)$ equivalem aos zeros positivos de $p^*(x)$ e na segunda, os zeros de $p(x)$ em $(1, \infty)$ equivalem aos zeros de $p^{**}(x)$ que foram transladados de 1.

A regra de Descartes é aplicada a p^* e p^{**} e caso $V(p^*) > 1$ ou $V(p^{**}) > 1$, as transformações (A) e (B) são aplicadas sucessivamente até que o número de variações seja 1 ou 0.

A modificação do método feita por Collins, ver [COL 82], utiliza a cota de Fujiwara na sua segunda forma 2.13 e leva em conta o fato da cota ser uma potência de 2. Usa ainda as modificações a seguir.

O número de zeros de $p(x)$ em $(0, \bar{b})$, é equivalente ao número de zeros de \bar{p} em $(0, 1)$ onde

$$\bar{p}(x) = \begin{cases} p(2^k x) & \text{se } k > 0 \\ 2^{-kn} \cdot p(2^k x) & \text{se } k < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Assim consideramos apenas o intervalo $(0, 1)$ que agora é bissecionado até que tenhamos subintervalos com variações de sinais nulas ou unitárias.

Para mapear o intervalo $(0, 1/2)$, resultado da primeira bissecção, para $(0, 1)$ temos $\bar{b} = 2^{-1}$, pois $k = -1$ e a transformação é

$$p' : \bar{p}(x) = 2^n p\left(\frac{x}{2}\right). \quad (2.16)$$

Para o subintervalo $(1/2, 1)$ a transformação é:

$$p'' : \bar{p}(x) = p(x+1). \quad (2.17)$$

A cada bissecção o subintervalo da esquerda será mapeado para $(0, 1)$ por meio de 2.14(A) e o subintervalo da direita por meio de 2.14(B). Para isolar os zeros negativos trabalhamos com os zeros positivos de $p(-x)$. O algoritmo a seguir está implementado no programa desenvolvido em [BRU 94].

Algoritmo de Uspensky Modificado

Entrada: P, um polinômio primitivo livre de quadrados.

Saída: L, uma lista de intervalos para os zeros reais de P.

(1) Calcula da quota superior: $b : cota$ (conforme 2.13)

(2) Aplica transformação: calcula $\bar{p}(x)$ (conforme 2.15)

(3) Isola (\bar{p}, L') : Isola é um sub-algoritmo que separa todos os zeros reais de \bar{p} no intervalo $(0, 1)$. O resultado retorna em L' .

- (4) Troca todo intervalo (a_i, b_i) de L' por $(2^k a_i, 2^k b_i)$ e coloca o resultado em L .
- (5) Repete o processo para as raízes negativas, considerando $p(-x)$, e a saída em $L2$.
- (6) Retorna (concatena $(L, L2)$).

Sub-algoritmo Isola

Entrada: P , um polinômio livre de quadrados.

Saída: L , uma lista de zeros de P no intervalo $(0,1)$

- (1) Aplica a transformação 2.14 em $P : P^* = (x+1)^n * P(1/(x+1))$ Os zeros de P em $(0, 1)$ são transformados nos zeros de P^* em $(0, \infty)$
- (2) Se $\text{var}(P^*) = 0$ então retorna $\{L=()\}$
- (3) Se $\text{var}(P^*)=1$ então retorna $\{L=((0,1))\}$
- (4) Bisseciona o intervalo
- (4.1) Calcula o ponto médio. Se $P(1/2)=0$ então inclui $(1/2,1/2)$ em L e reduz o grau de P , substituindo P por $P/(2^*x-1)$.
- (4.2) Metade esquerda: $P' = 2^n P(x/2)$ Os zeros de P em $(0,1/2)$ são transformados nos zeros de P' em $(0,1)$.
- (4.3) Isola(P', L'),
- (4.3.1) Troca todo intervalo (a'_i, b'_i) em L' por $(a'_i/2, b'_i/2)$ em L .
- (4.4) Metade direita: $P'' = \overline{P}(x+1)$ os zeros de P em $(1/2,1)$ são transformados nos zeros de P'' em $(0, 1)$
- (4.4.1) Isola(P'', L''),
- (4.4.2) Troca todo intervalo (a''_i, b''_i) em L'' por $((a''_i + 1)/2, (b''_i + 1)/2)$ em L .
- (4.5) Retorna $L = L' \cup L''$.

Exemplo 2.2.1 Seja $p(w) = w^3 - \frac{7}{3}w^2 - \frac{7}{12}w + \frac{5}{12}$. Seguindo o algoritmo temos:

- (1) Cálculo da cota superior: $b = 8, k = 3$
- (2) Cálculo de $\bar{p} = p(8w) = 521w^3 - \frac{448}{3}w^2 - \frac{14}{3}w + \frac{5}{12}$
- (3) $L' = \text{isola}(\bar{p})$ (Será desenvolvido a seguir.)
- (4) $L = \text{Troca}(L', 0,1/8)$
- (5) Mostra L .
- (6) Cálculo das negativas.

Resultado de (3):

$\text{isola}(\bar{p})$

- (1) Cálculo da transformação 2.14: $pstar = p^* = (w+1)^3 p(\frac{1}{w+1})$

$$pstar1 = p^*(w) = \frac{5}{12}w^3 - \frac{41}{12}w^2 - \frac{1889}{12}w + \frac{4301}{12}$$

(2) e (3) não se aplicam.

(4) Cálculo de $V(p^*)$:

$V(pstar) = 2 > 1 \implies$ Subdivide

(4.1) $\bar{p}(1/2) \neq 0$

(4.2) Cálculo da transformação 2.16.

$plinha1 = \bar{p}'(w) = \frac{1536w^3 - 896w^2 - 96w + 10}{3}$

(4.3) Chama isola novamente: nível 2.

- (A) (4.3.1) $L' = \text{isola2e}(\text{plinha1})$ % Pesquisa parte Esquerda
 (B) (4.3.2) $L' = \text{Troca}(L', 0, 2)$
 (B') (4.4) Cálculo da transformação 2.17

$$p2linha1 = \bar{p}(w + 1)$$

- (C) (4.4.1) $L'' = \text{isola2d}(p2linha1)$ % pesquisa parte direita.
 (D) (4.4.2) $L'' = \text{Troca}(L'', 1, 2)$
 (D') (4.5) Retorna $L = L' \cup L''$.

Resultado de isola2e(plinha1)

- (1) $pstar2 = p^*(\text{plinha1}) = \frac{10}{3}w^3 - \frac{26}{3}w^2 - 326w + 198$.
 $v(pstar2) = 2 > 1 \implies$ Subdivide:
 (2) e (3) Não se aplicam.
 (4.1) $\bar{p}(1/2) \neq 0$
 (4.2) Cálculo de 2.16

$$plinha2 = \frac{1536w^3 - 1792w^2 - 224w + 80}{3}$$

- (4.3) Chama isola novamente: nível 3
 (4.3.1) $\text{isola3e}(\text{plinha2})$ % Pesquisa parte esquerda. (II)
 (F) (4.3.2) $L' = \text{troca}(L', 0, 2)$
 (G) (4.4) Cálculo da transformação 2.17

$$p2linha2 = \text{plinha}(w + 1)$$

- (4.4.1) $L'' = \text{isola3d}(p2linha2)$ % Pesquisa parte direita (III)
 (H) (4.4.2) $L'' = \text{troca}(L'', 1, 2)$
 (I) (4.5) Retorna $L = L' \cup L''$

II - Resultado de isola3e(plinha2)

- (1) $pstar3 = \frac{80}{3}w^3 + \frac{16}{3}w^2 - \frac{2000}{3} - \frac{400}{3}$

$$V(pstar3) = 1$$

Logo há um zero de $pstar$ em $(0, \infty)$, o que equivale a um zero de $plinha2$ em $(0, 1)$.

- (2) Não se aplica.
 (3) $L = \{[0, 1]\}$ e acaba o desenvolvimento de isola3e .
 Retorna a $\text{isola2e}(\text{plinha1})$ em (F) (4.3.2).

$$L' = \text{Troca}(L', 0, 2)$$

$L' = \{[0, 1/2]\}$ e acaba isola3e .

Retorna a (4.4) em (G)

$$p2linha2 = 512w^3 + \frac{3712}{3}w^2 + 920w + 158$$

III Resultado de isola3d(p2linha2)

- (1) $pstar4 = -\frac{400}{3}w^3 - \frac{400}{3}w^2 + 1072w + 1584$

$$V(pstar4) = 1$$

(2) Não se aplica.

(3) Como $V(pstar4) = 1$ então há um zero em $(0, \infty)$, o que equivale a um zero de $p2linha2$ em $(0, 1)$.

Dá $L'' = \{[0, 1]\}$ e acaba o desenvolvimento de isola3d .

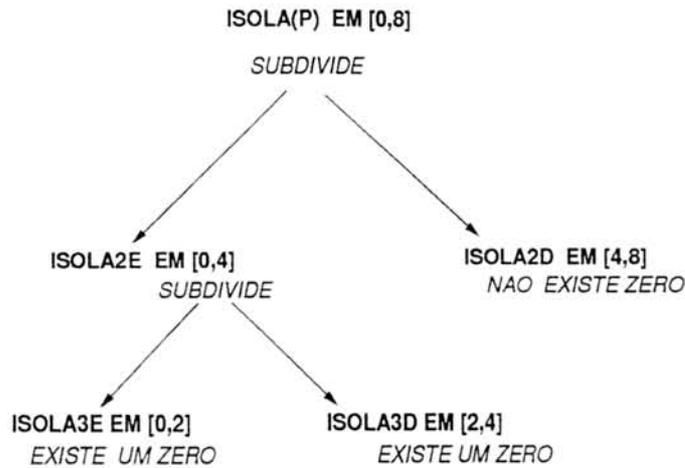


FIGURA 2.4 — Busca em Profundidade da Isola

Retorna a (4.4.2) em (H).

$L'' = Troca(L'', 1, 2)$

$L'' = \{[\frac{1}{2}, 1]\}$ e acaba isola3d

Retorna a (4.5) em (I)

(4.5) $L = \{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\}$

Termina isola2e.

Retorna a (4.3.2) em (B).

$L' = Troca(L', 0, 2)$

$L' = \{[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]\}$

(4.4) $p2linha1 = 512w^3 + \frac{3712}{3}w^2 + 920w + 198$

IV - Resultado da isola2d(p2linha1)

(1) $pstar5 = 198w^3 + 1514w^2 + \frac{11014}{3}w + \frac{8602}{3}$

$$V(pstar5) = 0$$

(2) Como $V(pstar5)$ é nulo então $L'' = \{[]\}$ e acaba isola2d.

Retorna a (4.4.2) em (D).

$L'' = troca(L'', 1, 2)$

$L'' = \{[]\}$ e a metade direita não possui zeros e é descartada.

em (D') $L = L' \cup L'' = \{[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]\}$

Retorna ao (4) original:

$L = troca(L, 0, 1/8)$

$L = \{[0, 2], [2, 4]\}$

E acaba finalmente isola(p).

Resumindo o processo da busca em profundidade temos o esquema da figura

2.4.

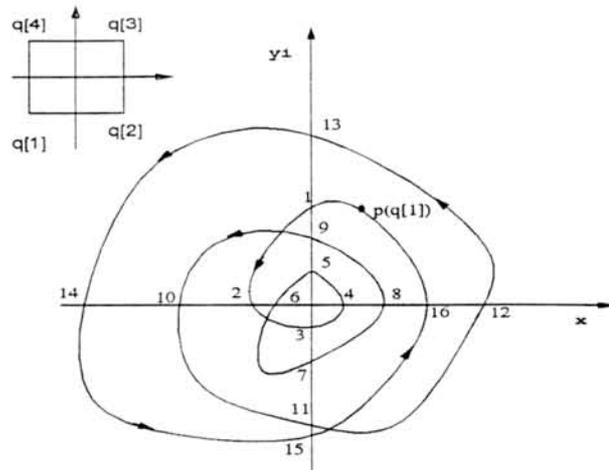


FIGURA 2.5 — Imagem de $p(z) = z^4 + (-7 + 10i)z^3 + (-19 - 52i)z^2 + (107 + 28i)z - 62 + 54i$ no quadrado de lado 8

2.2.3 Método de Collins-Krandick

Este método utiliza o princípio do argumento e sua idéia é *analisar as mudanças na variação de $\arg(p(z))$, pelas trocas de quadrante na seqüência de $p(z)$, quando z percorre uma curva Γ* . A medida que z varia, $p(z)$ vai mudando de valores e de quadrantes. As mudanças de quadrante ocorrem sempre em pontos do eixo x , parte real de $p(z)$ ou em pontos do eixo y de acordo com a parte imaginária de $p(z)$.

Exemplo 2.2.2 *Seja $p(z) = z^4 + (-7 + 10i)z^3 + (-19 - 52i)z^2 + (107 + 28i)z - 62 + 54i$ e a curva Γ dada por um quadrado de lado 8 centrado em $(0, 0)$.*

A imagem da curva $p(z)$ quando z percorre Γ é mostrada, aproximadamente e fora de escala na figura 2.5.

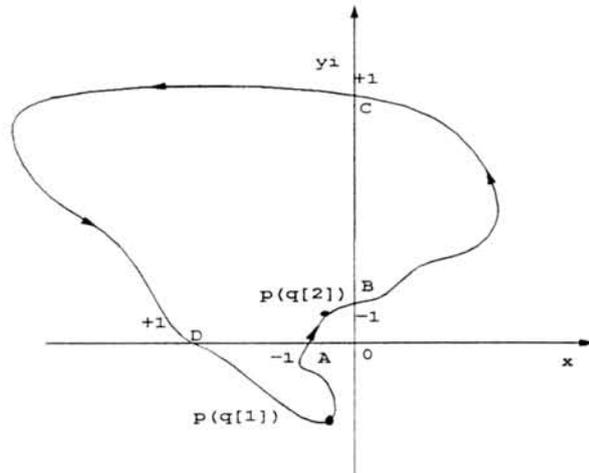
Acompanhando a curva $p(\Gamma)$ notamos que a sua imagem completa 4 voltas a partir de $p(q[1])$, por exemplo, em torno da origem, no sentido anti-horário.

Na figura estão salientados 16 pontos onde a curva corta um dos eixos. Observamos que uma volta completa passa por 4 quadrantes, logo uma mudança de quadrante corresponde a $\pi/2$ de uma volta. Contar as trocas de quadrantes e dividi-las por 4 fornece o número de voltas. Na figura do exemplo, há 16 cruzamentos no mesmo sentido, logo temos $16/4$ ou $\frac{16\pi/2}{2\pi} = 4$ zeros no interior do quadrado. Efetivamente os zeros são: $(1 - 2i)$, $(2 - 2i)$ e $(2 - 3i)$ que é duplo.

Exemplo 2.2.3 *Considerando o mesmo polinômio com um quadrado de lado 1. O gráfico aproximado de $p(\Gamma)$ é mostrado na figura 2.6.*

*Neste caso, acompanhando a curva a partir de $p(q[1])$, no sentido antihorário, isto é, de $q[1]$ para $q[2]$ no quadrado Γ , $p(\Gamma)$ vai de $p(q[1])$ a $p(q[2])$ passando pelo eixo x no ponto A , no sentido **horário**, passando do terceiro para o segundo quadrante; continuando, a curva corta o eixo y em B , também no mesmo sentido, passando para o primeiro quadrante. Depois a curva passa pelo eixo y em C , agora no sentido **antihorário**, passando para o segundo quadrante; finalmente a curva retorna ao ponto $p(q[1])$ passando pelo ponto D cortando o eixo x , também no sentido **antihorário**.*

Para contar o número de voltas, devemos cuidar o sentido do percurso de $p(\Gamma)$ nos pontos que cruzam os eixos no mesmo sentido que o do

FIGURA 2.6 — Imagem de p no quadrado de lado 2

percurso de z no quadrado Γ , estes contam positivamente, ao passo que os demais contam negativamente.

Assim, no exemplo anterior, os pontos A e B contam negativamente e os pontos C e D contam positivamente. Cada cruzamento ocorreu fora da origem e em pontos que não são vértices do quadrado. Estes pontos contam $\pi/2$, ou seja, $1/4$ de uma volta 2π . Logo, na seqüência A, B, C, D temos:

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0.$$

Logo não há zeros no quadrado de lado 2.

Outra situação importante que pode ocorrer é quando $p(\Gamma)$ passa pela origem. Convém relembrar o fato que sendo $p(z)$ um polinômio complexo, pode ser representado através de dois outros polinômios reais. Assim para $z = x + yi$ temos:

$$p(z) = p(x + yi) = p_1(x, y) + ip_2(x, y), \quad (2.18)$$

onde p_1 e p_2 são polinômios reais agora de duas variáveis.

Exemplo 2.2.4 Seja $p(z) = z^3 + (-1 - 2i)z^2 + (-4 - 14i)z - 12 + 18i$, onde $b = 1$ então

$$p_1(x, y) = -3xy^2 + y^2 + 4xy + 14y + x^3 - x^2 - 4x - 12,$$

$$p_2(x, y) = -y^3 + 2y^2 + 3x^2y - 2xy - 4y - 2x^2 - 14x + 18.$$

No caso de $p(\Gamma)$ passar pela origem num ponto z_0 , temos um zero na fronteira e

$$p(z_0) = 0 \iff p(x + yi) = 0 \iff p_1(x_0, y_0) = 0 \wedge p_2(x_0, y_0) = 0. \quad (2.19)$$

Graficamente, temos uma ambigüidade, (isto é, há um zero de p_1 e de p_2) quanto à mudança de argumento. Para evitar essa ambigüidade, estabele outro caminho que z irá percorrer, e que pode envolver ou não o zero.

A imagem aproximada de $p(z)$ ao longo do quadrado de lado 1 é dada na figura 2.7.

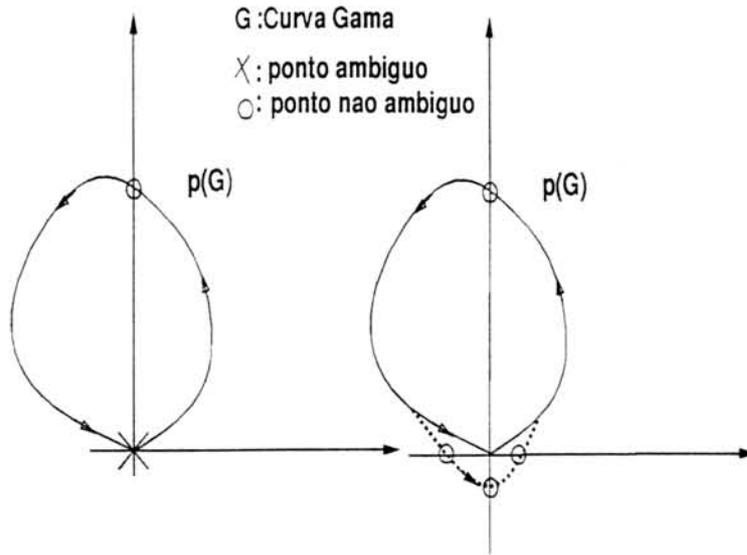


FIGURA 2.7 — Imagem de $p(z) = z^3 + (-1 - 2i)z^2 + (-4 - 14i)z - 12 + 18i$ com $b = 1$

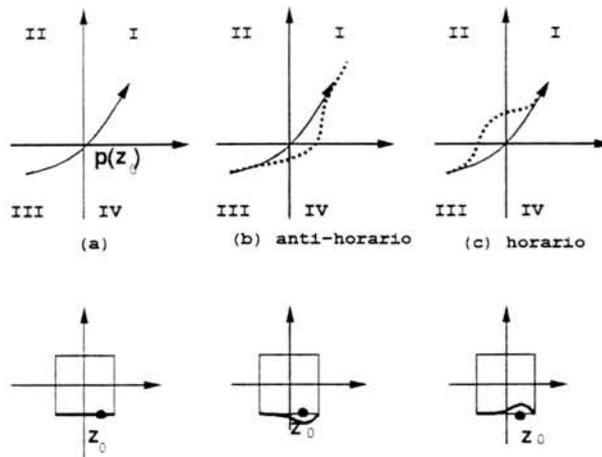


FIGURA 2.8 — Ambigüidade na Origem

Neste caso, para contar o zero há um desvio da origem e conseqüentemente 3 cruzamentos, perfazendo um total de 4, indicando então $4/4=1$ volta, ou seja, há um zero no quadrado e ele está na fronteira.

Os casos da figura 2.8 mostram exemplos onde contamos o zero: parte (b) e onde não o contamos: parte(c), quando a curva cruza ambos os eixos.

Outra situação que pode ocorrer com a curva resultante $p(\Gamma)$ é que a imagem de um lado L do quadrado esteja inteiramente sobre um dos eixos coordenados. Neste caso, temos um *lado axial* na nomenclatura de Collins. Tal é visto na figura 2.9.

Analisando os vários casos que podem ocorrer, temos que a imagem do trecho da curva referente a $p(L)$ está inteiramente num dos eixos coordenados ou sua intersecção com um dos eixos ocorre num único ponto. Logo, a quantidade de lados axiais ou pontos de intersecção ocorrem em **número finito**. Estes são considerados os **Pontos Críticos**.

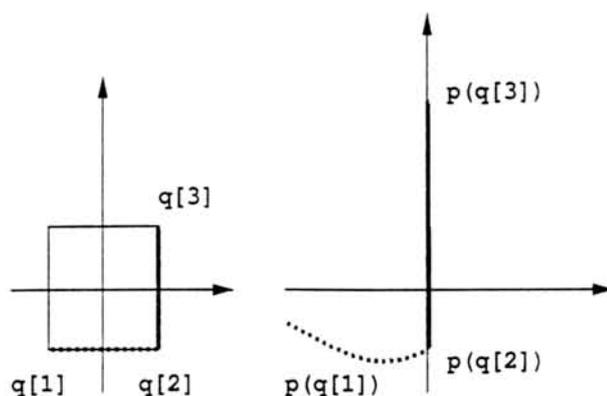


FIGURA 2.9 — Lado Axial

Na implementação deste método, são necessárias as facilidades algébricas que permitem construir o algoritmo com essas idéias delineadas.

As transformações em 2.18 são feitas em cada lateral gerando polinômios reais p_1 e p_2 que podem ter seus zeros separados exatamente. Em seguida o princípio do argumento é aplicado na análise dos pontos críticos. Algebricamente os pontos críticos são constituídos de **intervalos** resultantes da separação dos zeros de p_1 e p_2 .

2.2.4 Passos Principais do Método de Collins-Krandick

(1) Representação Real

Dado o polinômio complexo $p(z)$ este é transformado em p_1 e p_2 tais que:

$$p(z) = p_1(x, y) + p_2(x, y)i.$$

É a parte mais simples e algebricamente é feita pela substituição da variável complexa z por $x + yi$.

(2) Especialização

É o cálculo do valor da imagem do polinômio sobre o quadrado, feito algebricamente, substituindo as ordenadas das laterais e recalculando um novo polinômio, o *polinômio especializado*.

Os polinômios p_1 e p_2 são de duas variáveis e pela especialização se tornam polinômios numa só variável s que assume de fato, ora a variável x ora y .

Sejam a_0 e a_1 os pontos que delimitam uma lateral de um retângulo, ver figura 2.10.

Para as laterais horizontais $L1$ ou $L3$, temos que a coordenada de y é fixa. Assim, $\overline{p}_1(x) = p_1(x, s)$, $\overline{p}_2 = p_2(x, s)$, onde s é a coordenada imaginária fixa da lateral.

Para as laterais verticais $L2$ ou $L4$, temos que a coordenada de x é fixa. Assim, $\overline{p}_1(y) = p_1(s, y)$, $\overline{p}_2(y) = p_2(s, y)$, onde s é a coordenada real de a_0 que é fixa na respectiva lateral.

Se η é um zero de $p_1(y)$ então temos um ponto axial que é indicado por $c = (s, \eta)$ e $c \in L$ com $p(c)$ no eixo imaginário. Igualmente se μ é um zero de $p_2(x)$ temos um ponto axial que fica no eixo real.

(3) Cálculo dos Fatores Livres de Quadrado

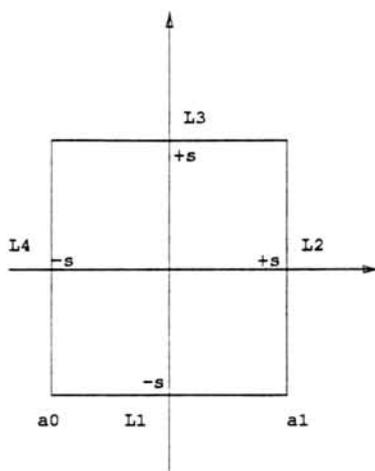


FIGURA 2.10 — Coordenadas para Especialização

Um ponto crítico $c = (s, \eta)$ será classificado de acordo com o comportamento de p_1 e p_2 em η , levando em conta a multiplicidade de m_k de η em p_k , $k = 1, 2$.

A multiplicidade é obtida pela fatoração livre de quadrados para cada polinômio especializado.

(4) Localização dos pontos críticos

Os pontos críticos num lado são localizados em duas etapas. Primeiro os zeros de \bar{p}_1 e \bar{p}_2 são isolados pelo algoritmo de Uspensky Modificado. A seguir os intervalos que estão associados a diferentes polinômios são refinados por um processo de bissecção até que todos subintervalos sejam disjuntos e então são ordenados em ordem crescente para as laterais $L1$ e $L2$, e em ordem decrescente para as laterais $L3$ e $L4$, para manter o percurso no sentido antihorário.

(5) Classificação dos pontos críticos

A classificação de um ponto crítico consiste em determinar o comportamento da imagem de $p_1(z)$ e $p_2(z)$ nas vizinhanças deste ponto crítico.

Se nenhum dos polinômios é identicamente nulo, e se o ponto crítico não for um canto do retângulo, as mudanças de quadrantes podem ser obtidas pela simples verificação das multiplicidades obtidas no processo de fatoração livre de quadrados para cada polinômio especializado.

Collins-Krandick em seu artigo consideram os seguintes casos para o comportamento da imagem de $p(z)$ sobre Γ .

Casos: Seja η o ponto crítico.

- 1. Se η está num lado não axial, então a imagem de $p(z)$ sobre Γ pode:
 - 1a) tocar um eixo, não na origem, sem cruzá-lo;
 - 1b) cruzar um eixo, não na origem;
 - 1c) cruzar ambos eixos na origem;
 - 1d) cruzar um eixo, mas não o outro, na origem.
- 2. Se η está num lado axial, $p(\eta) = 0$ então $p(z)$ vai de uma metade do eixo para sua outra metade.
- 3. Se η é canto do retângulo, o comportamento de $p(z)$ depende se os lados incidentes a η são ambos não axiais ou um é axial e o outro não é.

- **3a)** Se ambos os lados são não axiais $p(z)$ pode se comportar como listado em 1.
- **3b)** Se ambos os lados são axiais, $p(z)$ pode:
 - * **3.b.1)** permanecer no mesmo eixo;
 - * **3.b.2)** mudar da metade de um eixo para sua outra metade;
 - * **3.b.3)** virar à direita de um semi-eixo na sua outra metade do outro semi-eixo;
 - * **3.b.4)** virar à esquerda de um semi-eixo na sua outra metade do outro semi-eixo;
- **3c)** Se η está num lado que é axial e o outro não, $p(z)$ pode:
 - * **3.c.1)** ir de um quadrante tradicional num semi-eixo adjacente, ou vice-versa;
 - * **3.c.2)** ir de um quadrante tradicional num semi-eixo não adjacente, necessariamente cruzando a origem, ou vice-versa;

2.2.5 Algoritmo de Collins-Krandick

O seguinte algoritmo está implementado com os recursos do sistema Macsyma e consta de duas partes: a criação da lista de pontos críticos e a sua posterior classificação.

Primeira Parte: Criação da Lista dos Pontos Críticos

```
change p(z):=
1. Início das variáveis;
1.1 var: variável principal de p.
1.2 n: grau(p,var).
1.3 ntroca : 0,
1.4 b : tam.
1.5 nbis : 0,
1.6 q[1]:-b-bi,
.   q[2]: b-bi,
.   q[3]: b+bi,
.   q[4]: -b+bi,
1.7 conta[i] : 0 , i=1(1)4,
.   contac[i] : 0 , i=1(1)4,
/* especialização */
2. pe :expand(subst((x+yi),var,p)).
.   2.1 pr: Pr(pe),
.   2.2 pi: Im(pe),
3. para cada lateral i=1(1)4 faça:

.   /* início das lista */
.   3.1 l1p:l1n:l1[i]:l2[i]:[],
.   3.2 se i = 1 ou 3
.   então especializa(pr,pi,y,b,i),
.   gera  $\bar{p}_1[i], \bar{p}_2[i], \bar{p}_{n_1}[i], \bar{p}_{n_2}[i]$ 
```

```

.      vari:x.
se i = 2 ou 4
então especializa(pr,pi,x,b,i),
.      gera  $\bar{p}_1[i], \bar{p}_2[i], \bar{pn}_1[i], \bar{pn}_2[i]$ 
.      vari:y.
3.3 ni[i]:grau( $\bar{p}_1[i], \text{vari}$ ),
.      ni[i]:grau( $\bar{p}_2[i], \text{vari}$ ).
3.4 se  $\bar{p}_1[i] = 0$  ou  $\bar{p}_2[i] = 0$ 
.      então eixo_axial[i] : verdadeiro
.      senão eixo_axial[i] : falso,
/* 3.5 separa os zeros de  $\bar{p}_1[i], \bar{p}_2[i]$  */
/* separa os zeros positivos de  $\bar{p}_1[i]$  */
.      3.5.1 l1p:usp( $\bar{p}_1[i], \text{vari}, \text{ni}[i]$ ),
/* separa os zeros negativos de  $\bar{p}_1[i], \bar{p}_2[i]$  */
.      3.5.2 l1n[p]:usp( $\bar{pn}_1[i], \text{vari}, \text{ni}[i]$ ),
.      l1[i]:sort(append(l1p[i],l1n[i])),
/* separa os zeros positivos de  $\bar{p}_2[i]$  */
.      3.5.3 l2p:usp( $\bar{p}_2[i], \text{vari}, \text{ni}[i]$ ),
/* separa os zeros negativos de  $\bar{pn}_2[i]$  */
.      3.5.4 l2n[p]:usp( $\bar{pn}_2[i], \text{vari}, \text{ni}[i]$ ),
.      l2[i]:sort(append(l2p[i],l2n[i])),
/* refina as listas : compara os intervalos das duas
listas, verificando se não há sobreposições entre eles.
Em caso, afirmativo, bissecciona
até que não haja sobreposições . */
.      3.5.5. refina(l1[i],l2[i]),
/* inicialmente as multiplicidades são colocadas em 1,
posteriormente será calculada a multiplicidade */
.      3.5.6 coloca_multipl(l1[i],l2[i]),
/* inicialmente os intervalos são colocados
como "n": não ambíguos */
.      3.5.7 seta_n_ambiguo(l1[i],l2[i]),
/* testa se cada intervalo pertence às duas listas, caso afirma-
tivo, coloca o ponto crítico como "a":ambíguo */
.      3.5.8 testa_ambigüidade(l1[i],l2[i]),
/* juntar as duas lista numa só, identificando a primeira como
sendo referente ao polinômio  $\bar{p}_1$  e a segundo ao polinômio  $\bar{p}_2$  */
.      3.5.9 lcomb[i]:identifica_pol(l1[i],l2[i]) .
/* coloca os intervalos na ordem de percurso: Lateral 1, lateral
2, Lateral 3, lateral 4 */
.      3.5.10 Se i=1 ou i=2
.      então lcomb[i]:sort(lcomb[i])
.      senão lcomb[i]:reverse(lcomb[i]),
/* testa se ponto crítico é canto */
.      3.5.11 testa_canto(lcomb[i]),
/* acrescenta o lado a cada parte da lista */
.      3.5.12 lcomb[i]:lis.

```

/ junta em lcomb[i] os pontos críticos que aparecem em duas laterais consecutivas */*

. gera lista dos pontos críticos

3.5.13 lista:junta(lcomb[i]).

/ 4. Classificação . */*

4.1 se lista#[i] então classifica(lista),

5. ntroca:ntroca/4,

A Estrutura de Dados da Lista

Os pontos críticos gerados pelo algoritmo anterior constituem uma lista composta por outras listas. Cada parte da lista corresponde aos dados de um ponto crítico. Assim a lista tem a seguinte forma:

- lista:[[dados do ponto crítico 1],[dados do ponto crítico 2], ..., [dados do ponto crítico m]]

onde m é o comprimento final da lista.

- [dados do ponto crítico] : [ei,es,mult,tipo,poli,canto,lado] onde

- ei = extremidade inferior do intervalo que contém o ponto crítico.

- es = extremidade superior do intervalo que contém o ponto crítico.

Estes dados são oriundos inicialmente da separação dos zeros exata, via método de Uspensky Modificado.

- $mult$ = multiplicidade do zero que pertence ao ponto crítico.

Inicialmente é colocada em 1, e atualizada pela rotina `sqfr` do `Macsyma`.

- $poli$ = " p_1 " se ponto crítico se refere ao polinômio \bar{p}_1 , senão é " p_2 ".

- $canto$ = 1 ou 0 conforme ponto crítico se refere ou não a um canto do quadrado ou retângulo, ou seja um vértice.

- $lado$ = 1, 2, 3, 4 conforme for a lateral do quadrado onde localizamos o ponto crítico.

- $tipo$ = "n" ou "a", conforme o ponto crítico se refere a um só dos polinômios \bar{p}_1 ou \bar{p}_2 , senão é "a" para o caso ambíguo.

O cerne do algoritmo é a classificação dos pontos críticos.

Os casos citados em **1** podem ocorrer quando percorremos o quadrado centrado na origem ou não, enquanto que, os citados em **2** ou **3** podem ocorrer quando percorremos os retângulos originados da subdivisão do quadrado, num dos seus eixos.

Vamos analisar o **caso 1**, da secção anterior, em extensão.

Inicialmente os 4 casos são agrupados pelo **tipo**. Temos então os casos **(1a)** e **(1b)** como não ambíguos, e os casos **(1c)** e **(1d)** como ambíguos.

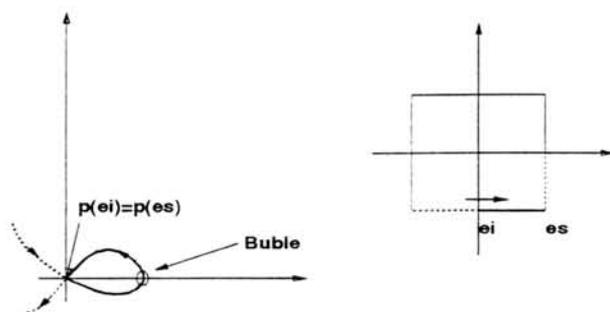
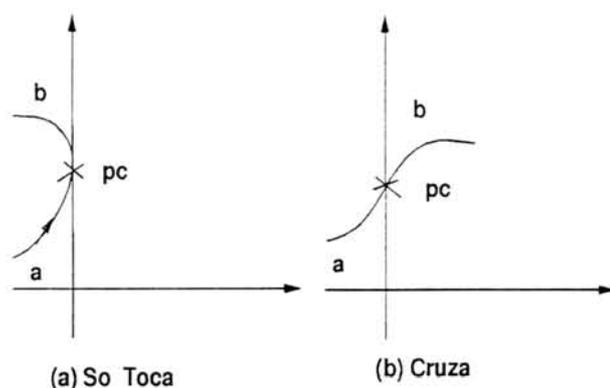
FIGURA 2.11 — Caso I: *Bucle*

FIGURA 2.12 — Caso II(a) Só toca o eixo (b)Cruza o eixo

A seguir os pontos são testados para determinarmos se constituem cantos ou não.

Casos não Ambíguos

Estes pontos serão subdivididos em 3 subcasos: **I**, **II** e **III**. Um ponto crítico pc que constitui um intervalo propriamente dito, possui $ei \neq es$. Estes constituem a maioria dos pontos quando percorremos o quadrado. É o tipo **I:Intervalo**. Eventualmente, pode ocorrer a situação onde $ei \neq es$ mas $quad(ei) = quad(es)$ que será classificado como intervalo **I: bucle**². Isto é exemplificado na figura 2.11. Quando $ei \neq es$ e $quad(ei) \neq quad(es)$ temos que o ponto crítico η constitui um intervalo usual onde a curva corta um dos eixos, mas não na origem. É o caso I-intervalo. Quando ocorre o *bucle* ele será tratado diferentemente para analisar o sentido do percurso, se horário ou anti-horário.

Um ponto crítico não ambíguo que está resumido a um canto do quadrado ou retângulo constitui um intervalo degenerado, onde $ei = es$, é o **caso II**. A sua classificação será feita em função da análise dos valores dos quadrantes do ponto crítico anterior e posterior ao canto. A imagem de $p(z)$ num canto pode só tocar num eixo ou efetivamente cruzá-lo, conforme mostra a figura 2.12.

²um laço, em francês ou um "loop" em inglês.

Pode ocorrer que um ponto crítico não seja canto mas $ei = es$ determinando também um intervalo degenerado, causado pela localização exata de um dos zeros de $\bar{p}_{1,2}$. Este subcaso será indicado por **Caso III** cujo tratamento é análogo ao caso II.

Casos Ambíguos

Estes pontos serão subdivididos em 2 subcasos: **IV ou V**. Na ambigüidade, $quad(ei) = quad(es)$, isto é, quando a curva passa na origem, temos que decidir se a curva cruza ambos os eixos ou só um deles. Neste caso devemos analisar os resultados referentes ao quadrante anterior e posterior, além de decidir se contamos ou não o zero da fronteira. No quadrado inicial, os zeros da fronteira são sempre contados. Quando houver subdivisões, devemos ter um esquema para contar os zeros em certas laterais de modo que um zero não seja contado mais de uma vez.

Temos assim o esquema de classificação do **caso 1** na figura 2.13

Segunda Parte: Algoritmo da Classificação

```

classifica(lista):=
1. início da variáveis
/* início dos casos 1a),1b),1c) e 1d) */
1.1 incr:0.
1.2 primeira:true.
1.3 aux:part(lista,1),
.   ei:part(aux,1),
.   es:part(aux,2),
.   tipo:part(aux,4),
.   poli:part(aux,5),
.   canto:part(aux,6),
.   lado:part(aux,7).
1.4 se comptot > 1
.   então auxseg:part(lista,2),
.         eiseg:part(auxseg,1),
.         esseg:part(auxseg,2),
.         cantoseg:part(auxseg,6),
.         ladoseg:part(auxseg,7),
.   senão auxseg:aux,
.         eiseg:ei,
.         esseg:es,
.         cantoseg:canto,
.         ladoseg:lado.
1.5 auxu:part(lista.comptot),
.   eiu:part(auxu,1),
.   esu:part(auxu,2),
.   cantoant:part(auxu,6),
.   ladou:part(auxu,7),
1.6 quadei:quadrante(ei),
.   quades:quadrante(es),
.   quadant:quadrante(esu),

```

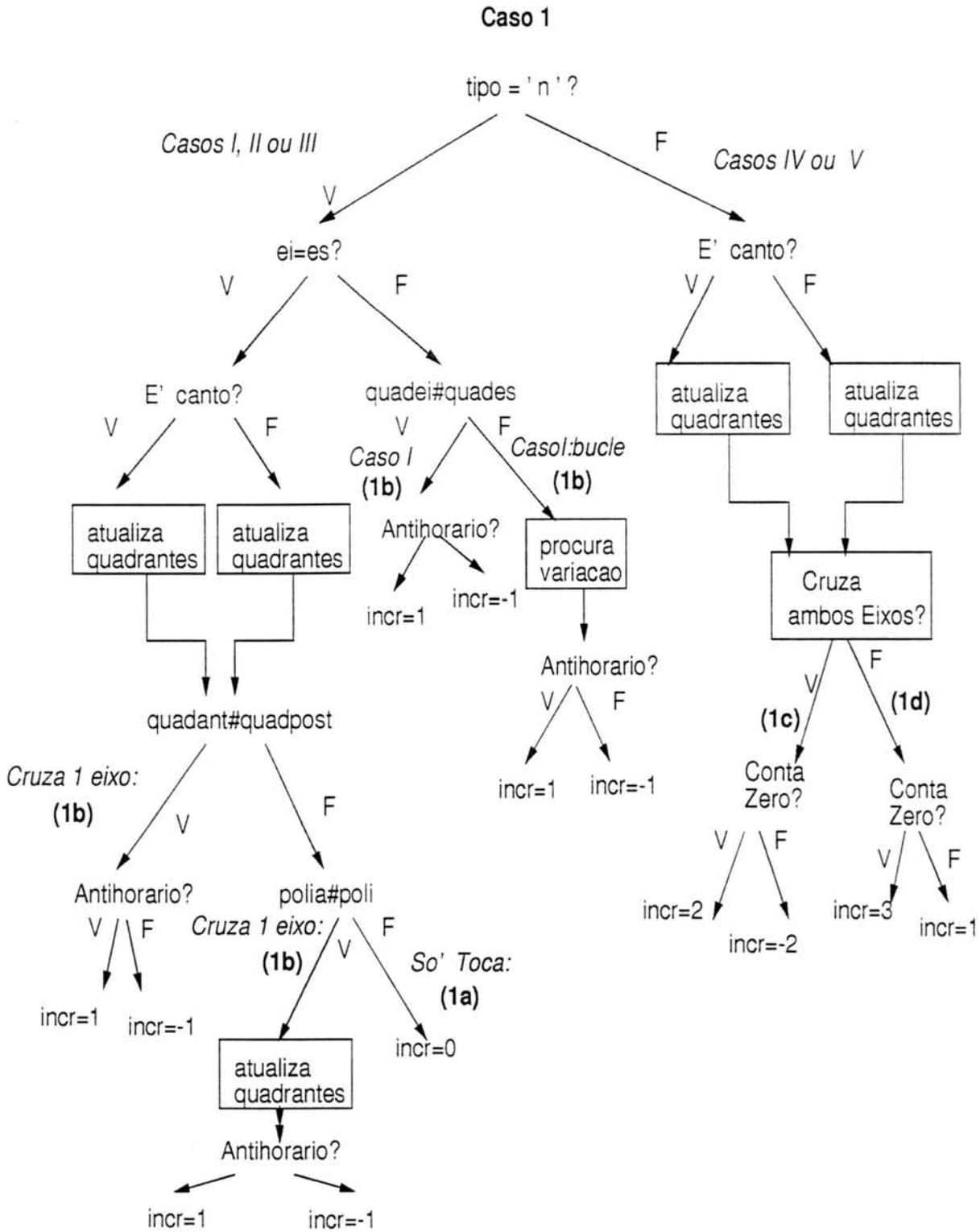


FIGURA 2.13 — Esquema do Caso 1

- . quadprox:quadrante(esseg).
- 2. para cada parte k da lista faça:

2.1 se não(primeira) então

```

. /* 2.1.1 atualiza dados do ponto crítico atual: k */
. aux:part(lista,k),
. ei:part(aux,1),
. es:part(aux,2),
. mult:part(aux,3),
. tipo:part(aux,4),
. poli:part(aux,5),
. canto:part(aux,6),
. lado:part(aux,7),
. /* 2.1.2 atualiza quadrante anterior */
. quadant:quades,
. /* 2.1.3 atualiza quadrante atual */
. quades:quadrante(es),
. quadei:quadrante(ei),
. /* 2.1.4 verifica qual é o próximo índice */
. se  $k < \text{comptot}$  então  $pk:pk+1$ 
.     senão  $pk:1$ ,
. /* atualiza dados do próximo */
. auxseg:part(lista,pk),
. eiseg:part(auxseg,1),
. esseg:part(auxseg,2),
. multseg:part(auxseg,3),
. tiposeg:part(auxseg,4),
. poliseg:part(auxseg,5),
. cantoseg:part(auxseg,6),
. ladoseg:part(auxseg,7),

```

/* classificação */

2.2 se não(eixo_axial[lado])

```

. então /* Ponto Crítico não está num lado axial */
. /* 2.2.1 */
. (se tipo = "n" então
. /* Casos I, II ou III*/
. (se  $ei=es$ 
. então
. (se canto = 0 então /* caso III:Intervalo Degenerado */
.     senão /*caso II: Canto Não Ambíguo */
. /* atualiza ponto crítico anterior */
. eiant:part(auxant,1),
. esant:part(auxant,2),
. tipoa:part(auxant,4),

```

```

ladoant:part(aurant,7).
/* verifica vazio antes do lado */3
se vazio_antes
    então /* atualiza quadrante anterior */
        quadant:qmv
        /* verifica vazio depois do lado*/
        se vazio_depois então quadant:qmv
            senão /*reavalia */
                quadant:qmv.
        senão /* verifica vazio depois */
            se vazio_depois então /* atualiza próximo */
                quadprox:qmv,
                senão /*reavalia */
                    quadprox:qmv.
/* recalcula valores no ponto ajustado */
calceps(lado,ei.canto),
quadant:qeiant.
quadprox:qeipost.
/* Decide se cruza 1 eixo ou se apenas toca 1 eixo */
se quadant # quadprox
    então /* Caso 1b): Cruza 1 eixo () */
        /* verifica sentido */
        se antihorario então incr:1
            senão incr:-1.
    senão se polia # poli
        então se quadei # quadprox
            então
                /* cruza entre quadei quadprox */
                se antihorario então incr:1
                    senão incr:-1,
                senão
                    /*cruza ainda entre quades quadprox*/
                    se antihorario então incr:1
                        senão incr:-1,
                senão /* Caso 1a):Só toca:não cruza*/
                    incr:0,
        ) Fim do caso II ou III
/* 2.2.2 Caso I */
senão /* Caso I: Intervalo usual ou bucle */
    se quadei#quades
        então /* Caso I 'bucle' */
            /* calcula ponto médio até achar variação de quadrantes para

```

³Pode ocorrer que num determinado trecho de uma lateral, a imagem de $p(z)$ não mude de quadrante, não constando esse trecho, portanto, na lista de intervalos que constituem pontos críticos. Este trecho é denominado de vazio, pois ao se constatar sua existência pode haver mudanças com relação ao quadrante anterior ou posterior ao ponto crítico, que está sendo analisado.

```

esquerda ou para direita */
    bucle(poli,ei,es,lado)
    if quadei # quades
        então se antihorário então incr:1
            senão incr:-1,
        senão /* Caso I: Intervalo Usual 1b) */
            se antihorário então incr:1
                senão incr:-1
    )/* Fim do Caso "n: não ambíguo"
/* 2.2.3 Caso "a" : IV ou V */
    (se canto = 0 então /* caso IV : Intervalo Dcgerado */
        senão /*caso V : Canto Ambíguo */
        /* atualiza ponto crítico anterior */
        eiant:part(auxant,1),
        esant:part(auxant,2),
        tipoa:part(auxant,4),
        ladoant:part(auxant,7).
        /* verifica vazio antes do lado */
        se vazio_antes
            então /* atualiza quadrante anterior */
                quadant:qmv
                /* verifica vazio depois do lado*/
                se vazio_depois então quadant:qmv
                    senão /*reavalia */
                        quadant:qmv,
                senão /* verifica vazio depois */
                    se vazio_depois então /* atualiza próximo */
                        quadprox:qmv.
                        senão /*reavalia */
                            quadprox:qmv.
        /* recalcula valores no ponto ajustado */
        calceps(lado,ei,canto),
        quadant:qeiant,
        quadprox:qeipost,
        /* decide se cruza ambos eixos ou se apenas 1 eixo */
        se cruza_ambos(quadant,quadprox)
            então /* Cruza ambos os eixos */
                se conta[lado] /* Verifica se conta o zero da fronteira*/
                    então incr:2
                        senão /* Não conta */
                            incr:-2.
                senão /* Cruza um só eixo */
                    se conta[lado] então incr:34
                        senão incr:-1,

```

⁴Diferente no previsto pelo artigo

```

.   )/* Fim do Caso "a: ambíguo"
.
. /* Início do caso 2 */
.   /* 2.3: Ponto Crítico está num lado axial */
.   senão
.     se eixo_axial[lado]
.       então /* Caso 2*/
.         se canto = 0 então /* Não é canto */
.           senão
.             (se quadei=8 e quades=4
.               então se conta[lado] então incr:2
.                 senão incr:-2,
.             senão se quadei=4 e quades=8
.               então se conta[lado] então incr:2
.                 senão incr:-2,
.             senão se quadei=6 e quades=2
.               então se conta[lado] então incr:2
.                 senão incr:-2,
.             senão se quadei=2 e quades=6
.               então se conta[lado] então incr:2
.                 senão incr:-2
.           ) /* Fim do caso 2*/
.         senão /* 2.4 - Caso 3 */
.           /* não será tratado agora */
.         primeira:falso,
.       /* fim do laço */
.     ntroca:ntroca+incr.
.   Fim do Algoritmo da Classificação .

```

2.2.6 Exemplos

Nos exemplos a seguir, citaremos apenas os resultados parciais referentes aos polinômios transformados $\bar{p}_1[i]$, $\bar{p}_2[i]$, $i : 1(1)4$, e a lista dos pontos críticos após a preparação para a classificação. Na classificação serão indicados os quadrantes das extremidades que determinarão a análise para a classificação seguindo os dois algoritmos dados.

Exemplo 2.2.5 Dado o polinômio $p(z) = z^3 + (2 + 3i)z^2 + 2iz + 4 + 4i$ vejamos os resultados principais, para a enumeração dos seus zeros no quadrado Γ centrado na origem, e de lado=1. O gráfico aproximado de está na figura 2.14.

Os seus zeros são exatamente $z_1 = 2i$, $z_2 = i$, $z_3 = -2 - 2i$.

Resultados Parciais:

1. Início dos variáveis.
2. Especialização:
3. Para cada lateral:

Lateral 1:

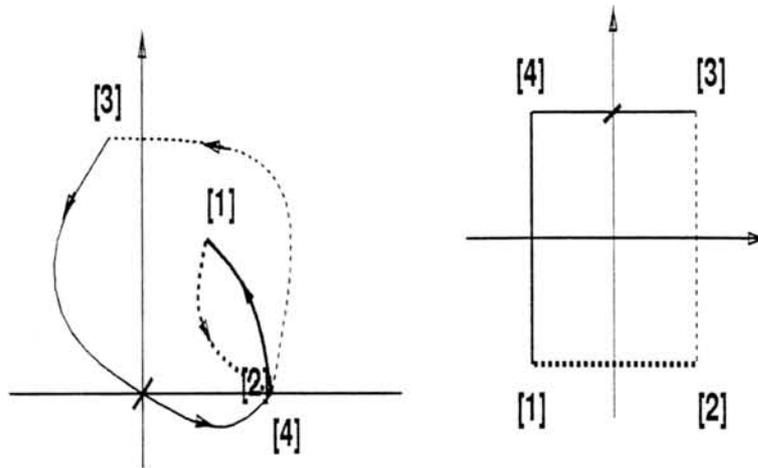


FIGURA 2.14 — Imagem de $p(z) = z^3 + (2 + 3i)z^2 + 2iz + 4 + 4i$ com $b = 1$

Separação:

$$\bar{p}_1[1] = x^3 + 2x^2 + 3x + 4,$$

$$3.5.1 \text{ l1p}=[], \text{ 3.5.2 l1n}=[], \text{ l1[1]}=[]$$

$$\bar{p}_2[1] = 2x - 2$$

$$3.5.3 \text{ l2p}=[[1,1]], \text{ 3.5.4 l2n}=[], \text{ l2[1]}=[[1,1]].$$

3.5.5 Não há sobreposições

$$3.5.12 \text{ lcomb[1]}=[1,1,1,n,p2,2,1].$$

Lateral 2:

separação:

$$\bar{p}_1[2] = -5y^2 - 8y + 7,$$

$$3.5.1 \text{ l1p}=[[0,1]], \text{ 3.5.2 l1n}=[], \text{ l1[2]}=[[0,1]]$$

$$\bar{p}_2[2] = -y^3 + 7y^2 + 7y + 9,$$

$$3.5.3 \text{ l2p}=[], \text{ 3.5.4 l2n}=[[-1,-1]], \text{ l2[2]}=[[-1,-1]].$$

3.5.5 Não há sobreposições

$$3.5.12 \text{ lcomb[2]}=[[-1,-1,1,n,p2,2,2],[0,1,1,n,p1,0,2]].$$

Lateral 3:

separação:

$$\bar{p}_1[3] = x^3 + 2x^2 - 9x,$$

$$3.5.1 \text{ l1p}=[[0,0]], \text{ 3.5.2 l1n}=[], \text{ l1[3]}=[[0,0]]$$

$$\bar{p}_2[3] = 6x^2 + 6x$$

$$3.5.3 \text{ l2p}=[[0,0]], \text{ 3.5.4 l2n}=[[-1,-1]], \text{ l2[3]}=[[0,0],[-1,-1]].$$

3.5.5 Não há sobreposições.

$$3.5.12 \text{ lcomb[3]}=[[0,0,1,a,p1,0,3],[-1,-1,1,n,p2,4,3]].$$

Lateral 4:

separação:

$$\bar{p}_1[4] = y^2 + 4y + 5,$$

$$3.5.1 \text{ l1p}=[], \text{ 3.5.2 l1n}=[], \text{ l1[4]}=[]$$

$$\bar{p}_2[4] = -y^3 - 3y^2 - y + 5$$

$$3.5.3 \text{ l2p}=[[1,1]], \text{ 3.5.4 l2n}=[], \text{ l2[4]}=[[1,1]].$$

3.5.5 Não há sobreposições

$$3.5.12 \text{ lcomb[4]}=[[1,1,1,n,p2,4,4]].$$

O resultado do comando 3.5.13 que é a lista dos pontos críticos, está colocado na tabela a seguir, e constituem uma linha da tabela, onde estão citadas as informações de cada ponto. Neste comando, apenas pesquisamos as listas $lcomb[i]$ e retiramos a repetição do ponto crítico referente ao canto que aparece duas vezes, uma para cada lateral.

4. Classificação:

Os dados resultantes da classificação serão colocados na seguinte tabela, para simplificar a saída.

k	ei	es	tipo	poli	canto	lat	qant	qei	qes	qprox	classif	incr
1	1	1	n	p2	2	1	4	4	4	5		0
							5	5	5	5	II:1a	0
2	0	1	n	p1	0	2	4	5	7	9	I:1b	+1
3	0	0	a	p1	0	3	7	9	9	4		
							7	7	3	3	IV:1c	+2
4	-1	-1	n	p2	4	3	9	4	4	4		
							3	3	5	5	II:1d	+1

Os casos onde houve a necessidade de reavaliar a situação do ponto crítico anterior e posterior é mostrada na repetição da linha com os novos valores atualizados. Isto ocorreu no primeiro, terceiro e quarto ponto.

Assim temos $ntrocas = (1 + 2 + 1)/4 = 1$.

De fato há um só zero no quadrado inicial, que está localizado na fronteira, e foi contado no programa.

Exemplo 2.2.6 Dado o polinômio $p(z) = z^5 + (5 - 4i)z^4 + (6 - 18i)z^3 + (-18 - 36i)z^2 - 56z - 16 + 32i$ vejamos os resultados principais, para a enumeração dos seus zeros no quadrado centrado na origem e de lado=1.

Os seus zeros são exatamente $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -2 - 2i$, $z_4 = -1 + 2i$, $z_5 = -2 + 2i$ Para $b = 1$ temos o seguinte quadrado e o gráfico aproximado de $p(\Gamma)$ na figura 2.15.

Resultados Parciais:

1. Início dos variáveis.

2. Especialização

$$p(x, y) = iy^5 + 5xy^4 - 4iy^4 - 10ix^2y^3 - 20ixy^3 - 16xy^3 - 6iy^3 - 18y^3 - 10x^3y^2 + 24ix^2y^2 - 30x^2y^2 + 54ixy^2 - 18xy^2 + 36iy^2 + 18y^2 + 5ix^4y + 20ix^3y + 16x^3y + 18ix^2y + 54x^2y - 36ixy + 72xy - 56iy + x^5 - 4ix^4 - 18ix^3 + 6x^3 - 36ix^2 - 18x^2 - 56x - 32i - 16$$

3. Para cada lateral:

Lateral 1:

Separação::

$$\bar{p}_1[1] = x^5 + 5x^4 - 20x^3 - 102x^2 - 125x + 25$$

$$3.5.1 \text{ l1p} = [[0,1]], 3.5.2 \text{ l1n} = [], \text{ l1}[1] = [[0,1]]$$

$$\bar{p}_2[1] = -9x^4 - 38x^3 - 20x^2 + 110x + 125$$

$$3.5.3 \text{ l2p} = []$$

$$3.5.4 \text{ l2n} = [], \text{ l2}[1] = []$$

3.5.5 Não há sobreposições

$$3.5.12 \text{ lcomb}[1] = [[0,1,1,n,p1,0,1]]$$

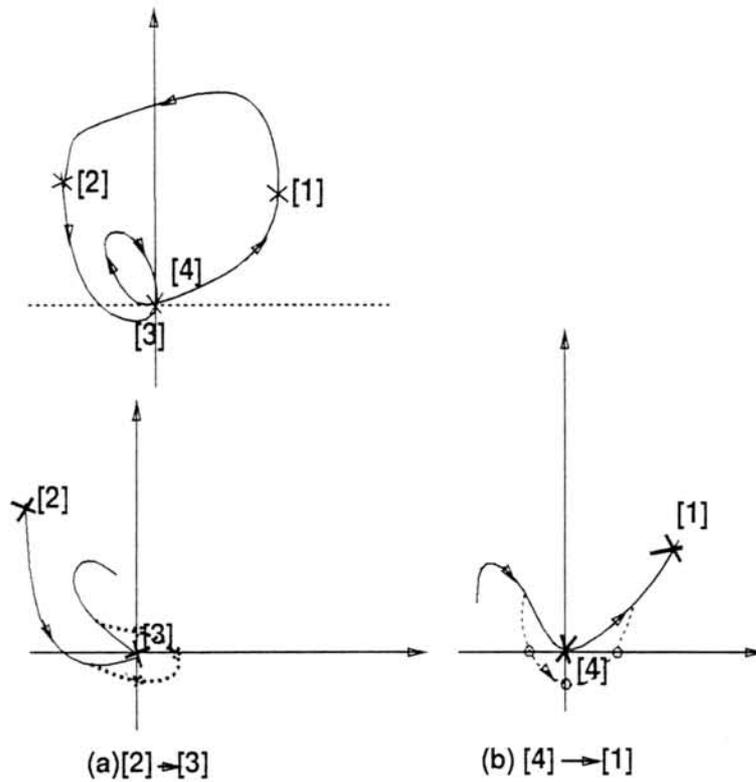


FIGURA 2.15 — Imagem de $p(z) = z^5 + (5 - 4i)z^4 + (6 - 18i)z^3 + (-18 - 36i)z^2 - 56z - 16 + 32i$ no quadrado de lado 1

Lateral 2:

Separação::

$$\bar{p}_1[2] = 10y^4 - 34y^3 - 40y^2 + 142y - 78.$$

$$3.5.1 \text{ l1p} = [[1,1]], \quad 3.5.2 \text{ l1n} = [], \quad \text{l1}[2] = [[1,1]]$$

$$\bar{p}_2[2] = y^5 - 4y^4 - 36y^3 + 114y^2 - 49y - 26.$$

$$3.5.3 \text{ l2p} = [[1,1]], \quad 3.5.4 \text{ l2n} = [[-1,0]], \quad \text{l2}[2] = [[-1,0], [1,1]].$$

3.5.5 Não há sobreposições

$$3.5.12 \text{ lcomb}[2] = [[-1,0,1.n,p2,0,2], [1,1,1,a,p1,3,2]]$$

Lateral 3:

Separação::

$$\bar{p}_1[3] = x^5 + 5x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 13x - 11,$$

$$3.5.1 \text{ l1p} = [[1,1]], \quad 3.5.2 \text{ l1n} = [[-1,-1]], \quad \text{l1}[3] = [[-1,-1], [1,1]]$$

$$\bar{p}_2[3] = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3,$$

$$3.5.3 \text{ l2p} = [[1,1]],$$

$$3.5.4 \text{ l2n} = [[-1,-1]], \quad \text{l2}[3] = [[-1,-1], [1,1]].$$

3.5.5 Não há sobreposições

$$3.5.12 \text{ lcomb}[3] = [[1,1,1,a,p1,3,3], [-1,-1,1,a,p1,4,3]]$$

Lateral 4:

Separação::

$$\bar{p}_1[4] = -2y^3 + 16y^2 - 34y + 20,$$

$$3.5.1 \text{ l1p} = [[1,1]], \quad 3.5.2 \text{ l1n} = [], \quad \text{l1}[4] = [[1,1]]$$

$$\bar{p}_2[4] = y^5 - 4y^4 + 4y^3 + 6y^2 - 17y + 10,$$

$$3.5.3 \text{ l2p} = [[1,1], [1,2]], \quad 3.5.4 \text{ l2n} = [], \quad \text{l2}[4] = [[1,1]].$$

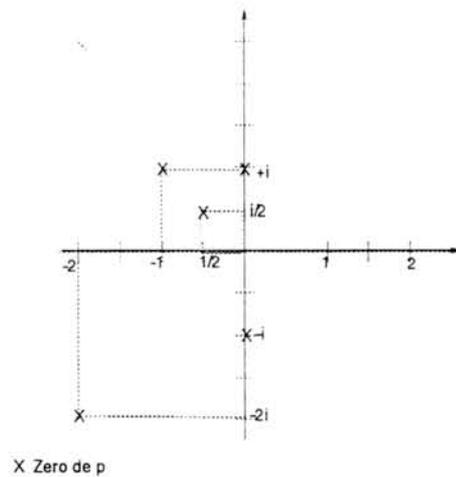


FIGURA 2.16 — Zeros de $p(z) = z^5 + (\frac{7}{2} + \frac{i}{2})z^4 + (7-i)z^3 + (\frac{11}{2} - \frac{3i}{2})z^2 + (6-i)z - 2 - 2i$

3.5.5 Não há sobreposições

3.5.12 lcomb[4]=[[1,1,1,a,p1,4,4]].

4. Classificação :

Os dados resultantes da classificação serão colocados na seguinte tabela.

k	ei	es	tipo	poli	canto	lat	qant	qei	qes	qprox	classif	incr
1	0	1	n	p1	0	1	9	5	7	7	I:1b	+1
2	-1	0	n	p2	0	2	7	7	1	9	I:1b	+1
3	1	1	a	p1	3	2	1	9	9	9	V:1d	+3
4	-1	-1	a	p1	4	3	9	9	9	5	V:1d	+3

Logo. $ntrocas = \frac{1+1+3+3}{4} = 2$

Exemplo 2.2.7 Seja $p(z) = z^5 + (\frac{7}{2} + \frac{i}{2})z^4 + (7-i)z^3 + (\frac{11}{2} - \frac{3i}{2})z^2 + (6-i)z - 2 - 2i$ com $b = 1$ e cujos zeros são $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, $z_4 = -1 + i$, e $z_5 = -2 - 2i$. O quadrado com a localização dos zeros está na figura 2.16.

Resultados Parciais:

1. Início dos variáveis.

2. Especialização.

3. Para cada lateral:

Lateral 1:

Separação::

$$\bar{p}_1[1] = x^5 + \frac{7x^4}{2} - x^3 - \frac{37x^2}{2} - 15x.$$

$$\bar{p}_2[1] = -\frac{9x^4}{2} - 15x^3 - \frac{31x^2}{2} + 5x$$

$$3.5.1 \text{ l1p} = [[0,0]],$$

$$3.5.2 \text{ l1n} = [[-1,-1]], \text{ l1[1]} = [[-1,-1],[0,0]]$$

$$3.5.3 \text{ l2p} = [[0,0],[0,1]],$$

$$3.5.4 \text{ l2n} = [], \text{ l2[1]} = [[0,0],[0,1]]$$

3.5.5 Não há sobreposições

$$3.5.12 \text{ lcomb}[1]=[[[-1,-1,1,n,p1,1,1],[0,0,1,a,p1,0,1],[0,1,1,n,p2,2,1]].$$

Lateral 2:

Separação::

$$\bar{p}_1[2] = \frac{17y^4}{2} + y^3 - \frac{115y^2}{2} + 5y + 25.$$

$$\bar{p}_2[2] = y^5 + \frac{y^4}{2} - 31y^3 + \frac{3y^2}{2} + 57y - 5.$$

$$3.5.1 \text{ l1p}=[[0,1]],$$

$$3.5.2 \text{ l1n}=[[-1,0]], \text{ l1}[2]=[[[-1,0],[0,1]]$$

$$3.5.3 \text{ l2p}=[[0,1]],$$

$$3.5.4 \text{ l2n}=[], \text{ l2}[2]=[[0,1]].$$

3.5.5 Há sobreposições . refina:

$$\text{ l1}[2]=[[[-1,0],[1/2,1],[0,1/2]] \text{ l2}[2]=[[0,1/2]]$$

$$3.5.12 \text{ lcomb}[2]=[[[-1,0,1,n,p1,0,2],[0,1/2,1,n,p2,0,2],[1/2,1,n,p1,0,2]]$$

Lateral 3:

Separação::

$$\bar{p}_1[3] = x^5 + \frac{7x^4}{2} - 5x^3 - \frac{25x^2}{2} - 5x,$$

$$\bar{p}_2[3] = \frac{11x^4}{2} + 13x^3 + \frac{13x^2}{2} - x$$

$$3.5.1 \text{ l1p}=[[0,0]],$$

$$3.5.2 \text{ l1n}=[[-1,-1],[-1,0]], \text{ l1}[3]=[[[-1,-1],[-1,0],[0,0]]$$

$$3.5.3 \text{ l2p}=[[0,0],[0,1]],$$

$$3.5.4 \text{ l2n}=[[-1,-1]], \text{ l2}[3]=[[[-1,-1],[0,0],[0,1]].$$

$$\text{ lcomb}[3]=[[[0,1,1,n,p2,0,3],[0,0,1,a,p1,0,3],[-1,0,1,n,p1,0,3],$$

$$[-1,-1,1,n,p2,4,3]].$$

3.5.5 Não há sobreposições

Lateral 4:

Separação::

$$\bar{p}_1[4] = -\frac{3y^4}{2} - 3y^3 + \frac{9y^2}{2} + 3y - 3.$$

$$\bar{p}_2[4] = y^5 + \frac{y^4}{2} - 3y^3 - \frac{9y^2}{2} + 7y - 1$$

$$3.5.1 \text{ l1p}=[[0,1],[1,1]],$$

$$3.5.2 \text{ l1n}=[[-1,-1]], \text{ l1}[4]=[[[-1,-1],[0,1],[1,1]]$$

$$3.5.3 \text{ l2p}=[[0,1],[1,1]].$$

$$3.5.4 \text{ l2n}=[], \text{ l2}[4]=[[0,1],[1,1]].$$

3.5.5 Há sobreposições

$$\text{ l1}[4]=[[[-1,-1],[1/2,1],[1,1]], \text{ l2}[4]=[[[0,1/2],[1,1]]$$

$$3.5.12 \text{ lcomb}[4]=[[[1/2,1,1,n,p1,0,4], [1,1,1,a,p1,4,4], [0,1/2,1,n,p2,0,4],$$

$$[-1,-1,1,n,p1,1,4]].$$

4. Classificação:

Os dados resultantes da classificação serão colocados na seguinte tabela.

k	ei	es	tipo	poli	canto	lat	qant	qei	qes	qprox	classif	incr
1	0	0	a	p1	0	1	2	9	9	9		
							3	3	7	1	IV:1c	+2
2	0	1	n	p2	0	1	9	9	1	1	I:1b	+1
3	-1	0	n	p1	0	2	1	1	3	3	I:1b	+1
4	0	1/2	n	p2	0	2	3	3	5	5	I:1b	+1
5	1/2	1	n	p1	0	2	5	5	7	7	I:1b	+1
6	0	1	n	p2	0	3	7	7	9	9	I:1b	+1
7	0	0	a	p1	0	3	9	9	9	9		
							7	1	5	9	IV:1c	+2
8	-1	0	n	p1	0	3	9	9	9	9	I:buc	
							3	9	5	7		+1
9	-1	-1	a	p1	4	3	5	9	9	9		
							9	7	5	7	V:1d	+3
10	1/2	1	n	p1	0	4	9	9	7	7	I:1b	+1
11	0	1/2	n	p2	0	4	7	7	1	2	I:1b	+1
12	-1	-1	n	p1	1	4	1	2	2	9		
							1	1	3	3	II:1b	+1

Assim temos $ntrocas = \frac{8 \times 1 + 2 \times 2 + 1 + 3}{4} = 4$.

De fato, há um só zero no interior do quadrado inicial e três zeros localizados na fronteira que foram contados no programa, perfazendo o total de 4 zeros no quadrado.

Exemplo 2.2.8 Seja considerado agora o mesmo polinômio $p(z) = z^5 + (\frac{7}{2} + \frac{i}{2})z^4 + (7 - i)z^3 + (\frac{11}{2} - \frac{3i}{2})z^2 + (6 - i)z - 2 - 2i$ com $b = 2$.

Resultados Parciais:

1. Início dos variáveis.
2. Especialização
3. para cada lateral:

Lateral 1:

Separação::

$$\bar{p}_1[1] = x^5 + \frac{7x^4}{4} - 29x^3 - \frac{169x^2}{2} - 20x + 42,$$

$$3.5.1 \text{ llp} = [[0, 2]],$$

$$3.5.2 \text{ lln} = [[-2, -2], [-2, 0]], \text{ ll}[1] = [[-2, -2], [-2, 0], [0, 2]]$$

$$\bar{p}_2[1] = -\frac{19x^4}{2} - 29x^3 + \frac{49x^2}{2} + 101x + 24$$

$$3.5.3 \text{ l2p} = [[0, 2]]$$

$$3.5.4 \text{ l2n} = [[-2, -2], [-2, 0]] \text{ l2}[1] = [[-2, -2], [-2, 0], [0, 2]]$$

3.5.5 Há sobreposições

$$\text{ll}[1] = [[-2, -2], [-2, -1], [0, 1]] \text{ l2}[1] = [[-2, -2], [-1, 0], [1, 2]]$$

$$3.5.12 \text{ lcomb}[1] = [[-2, -2, 1, a, p1, 1, 1], [-2, -1, 1, n, p1, 0, 1], [-1, 0, 1, n, p2, 0, 1], [0, 1, 1, n, p1, 0, 1], [1, 2, 1, n, p2, 0, 1]].$$

Lateral 2:

separação

$$\bar{p}_1[2] = \frac{27y^4}{2} + 3y^3 - \frac{423y^2}{2} + 3y + 180,$$

$$3.5.1 \text{ llp} = [[0, 2]],$$

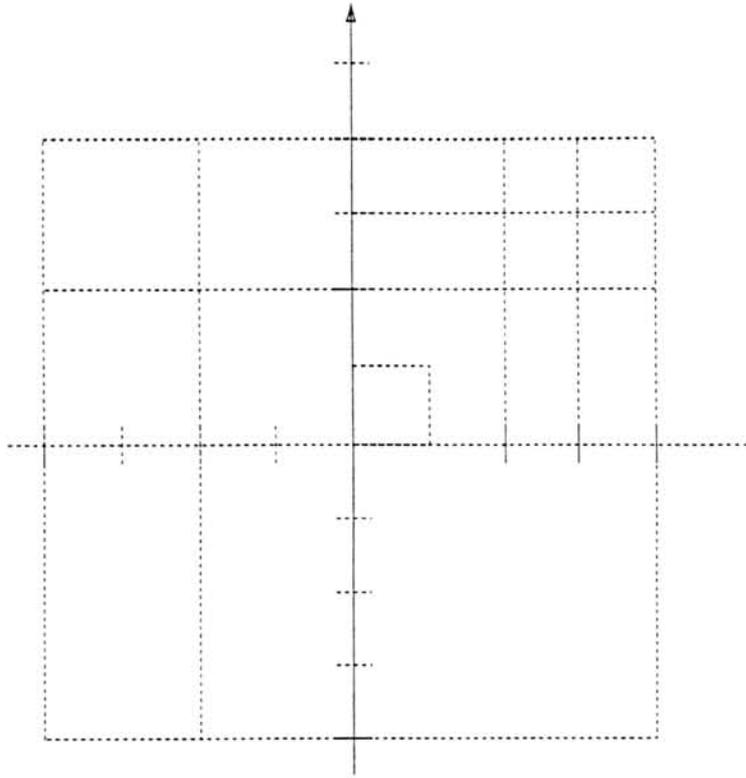


FIGURA 2.17 — Imagem de $p(z) = z^5 + (\frac{7}{2} + \frac{i}{2})z^4 + (7 - i)z^3 + (\frac{11}{2} - \frac{3i}{2})^2 + (6 - i)z - 2 - 2i$ no quadrado de lado 2

$$3.5.2 \quad l1n = [[-2, 0]], \quad l1[2] = [[-2, 0], [0, 2]]$$

$$\bar{p}_2[2] = y^5 + \frac{y^4}{2} - 75y^3 + \frac{9y^2}{2} + 304y - 10.$$

$$3.5.3 \quad l2p = [[0, 2]].$$

$$3.5.4 \quad l2n = [], \quad l2[2] = [[0, 2]].$$

3.5.5 Há sobreposições - refina

$$l1[2] = [[-2, 0], [1/2, 1]] \quad l2[2] = [[0, 1/2]]$$

$$3.5.12 \quad lcomb[2] = [[-2, 0, 1, n, p1, 0, 2], [0, 1/2, 1, n, p2, 0, 2], [1/2, 1, 1, n, p1, 0, 2]]$$

Lateral 3:

separação

$$\bar{p}_1[3] = x^5 + \frac{7x^4}{2} - 37x^3 - \frac{145x^2}{2} - 24x + 30,$$

$$3.5.1 \quad l1p = [[0, 2]],$$

$$3.5.2 \quad l1n = [[-2, -1], [-1, 0]], \quad l1[1] = [[-2, -1], [-1, 0], [0, 2]]$$

$$\bar{p}_2[3] = \frac{21x^4}{2} + 27x^3 - \frac{103x^2}{2} - 79x$$

$$3.5.3 \quad l2p = [[0, 0], [0, 2]]$$

$$3.5.4 \quad l2n = [[-2, 0]], \quad l2[1] = [[-2, 0], [0, 0], [0, 2]].$$

3.5.5 Há sobreposições - refina

$$l1[3] = [[-2, -7/4], [-1, 0], [0, 1]] \quad l2[3] = [[-3/2, -1], [0, 0], [1, 2]]$$

$$3.5.12 \quad lcomb[3] = [[1, 2, 1, n, p2, 0, 3], [0, 1, 1, n, p1, 0, 3], [0, 0, 1, n, p2, 0, 3], [-1, 0, 1, n, p1, 0, 3], [-3/2, -1, 1, n, p2, 0, 3], [-2, -7/4, 1, n, p1, 0, 3]]$$

Lateral 4:

Separação:

$$\bar{p}_1[4] = \frac{13y^4}{2} - 5y^3 + \frac{65y^2}{2} + 23y - 20,$$

$$3.5.1 \quad l1p = [[0, 2]], \quad 3.5.2 \quad l1n = [[-2, 2], [-2, 0]], \quad l1[1] = [[-2, -2], [-2, 0], [0, 2]]$$

$$\bar{p}_2[4] = y^5 + \frac{y^4}{2} - 19y^3 - \frac{33y^2}{2} + 36y + 10,$$

$$3.5.3 \text{ l2p} = [[0,2]], \quad 3.5.4 \text{ l2n} = [[-2,-2],[-2,0]] \quad \text{l2[1]} = [[-2,-2],[-2,0],[0,2]].$$

3.5.5 Há sobreposições

$$\text{l1[4]} = [[-2,-2],[-2,-1],[0,1]] \quad \text{l2[4]} = [[-2,-2],[-1,0],[1,2]]$$

$$3.5.12 \text{ lcomb[4]} = [[1,2,1,n,p2,0,4], [0,1,1,n,p1,0,4], [-1,0,1,n,p2,0,4], [-2,-1,1,n,p1,0,4], [-2,-2,1,a,p1,1,4]]$$

4. Classificação :

Os dados resultantes da classificação serão colocados na seguinte tabela, para simplificar a saída.

k	ei	es	tipo	poli	canto	lat	qant	qei	qes	qprox	classif	incr
1	-2	-1	n	p1	0	1	9	9	3	3	I:1b	+1
2	-1	0	n	p2	0	1	3	3	5	5	I:1b	+1
3	0	1	n	p1	0	1	5	5	7	7	I:1b	+1
4	1	2	n	p2	0	1	7	7	1	1	I:1b	+1
5	-2	0	n	p1	0	2	1	1	3	3	I:1b	+1
6	0	1/2	n	p2	0	2	3	3	5	5	I:1b	+1
7	1/2	1	n	p1	0	2	5	5	7	7	I:1b	+1
8	1	2	n	p2	0	3	7	7	1	1	I:1b	+1
9	0	1	n	p1	0	3	1	1	4	4	I:1b	+1
10	0	0	n	p2	0	3	4	4	4	4		
							1	3	5	7	III:1b	+1
11	-1	0	n	p1	0	3	4	4	7	7	I:1b	+1
12	-3/2	-1	n	p2	0	3	7	7	1	1	I:1b	+1
13	-2	-7/4	n	p1	0	3	1	1	3	3	I:1b	+1
14	1	2	n	p2	0	4	3	3	5	5	I:1b	+1
15	0	1	n	p1	0	4	5	5	7	7	I:1b	+1
16	-1	0	n	p2	0	4	7	7	1	1	I:1b	+1
17	-2	-1	n	p1	0	4	1	1	9	9	II:1b	+1
18	-2	-2	a	p1	1	4	9	9	9	9	II:1b	+1
							1	3	1	3	V:1d	+3

Assim temos $ntrocas = \frac{16 \times 1 + 1 + 3}{4} = 5$, sendo que agora apenas um zero está na fronteira do quadrado caracterizando um ponto crítico ambíguo que é canto, para $k = 18$ que foi considerado na lateral 4 e o ponto crítico $k = 10$ foi gerado pela localização exata de um zero, a saber o zero nulo, de $\bar{p}_3[3]$.

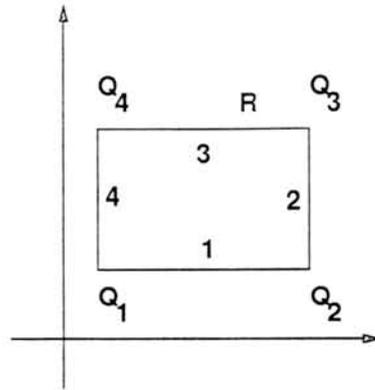


FIGURA 2.18 — Método de Wilf

2.2.7 Método de Brunetto ou Wilf Modificado

O processo de Wilf, ver [WIL 78] combina as seqüências de Sturm e o princípio do argumento para enumerar os zeros no interior de uma região retangular. Combinando as fórmulas 2.10 e 2.11 encontramos o número de zeros no interior do retângulo R é dado por:

$$N(p, R) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 (V_k(|Q_{k+1} - Q_k|) - V_k(0)). \quad (2.20)$$

onde $V_k(t)$ indica o número de variações de sinal na $k^{\text{ésima}}$ seqüência de Sturm avaliada em t . Pode ser escrita ainda como:

$$N = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 (V(l_j) - V(0)) \quad (2.21)$$

onde l_j é a lateral j .

Sejam Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 os vértices de um Retângulo R no plano complexo e $p(z)$ o polinômio do qual desejamos o número de zeros. Ver a figura 2.18.

Procedimento

- (1) Obter o polinômio transformado correspondente à lateral mapeada no eixo x com seu ponto inicial na origem $(0, 0)$. Este polinômio é indicado por:

$$pm_j(z) = p(t_j(z)) \quad \text{onde}$$

isto significa substituir z por $Q_k + i^{k-1}t$ onde t é uma variável real, ou seja tomar a direção $Q_k Q_{k+1}$.

$$pm_j(z) = \alpha_j(z) + i\beta_j(z)$$

$$\begin{aligned} t_1 &= Q_1 + z & t_2 &= Q_2 + iz \\ t_3 &= Q_3 - z & t_4 &= Q_4 - iz \end{aligned} \quad (2.22)$$

- (2) Separar a parte imaginária e real de pm_j em dois polinômios $\alpha_j(z)$ e $\beta_j(z)$.

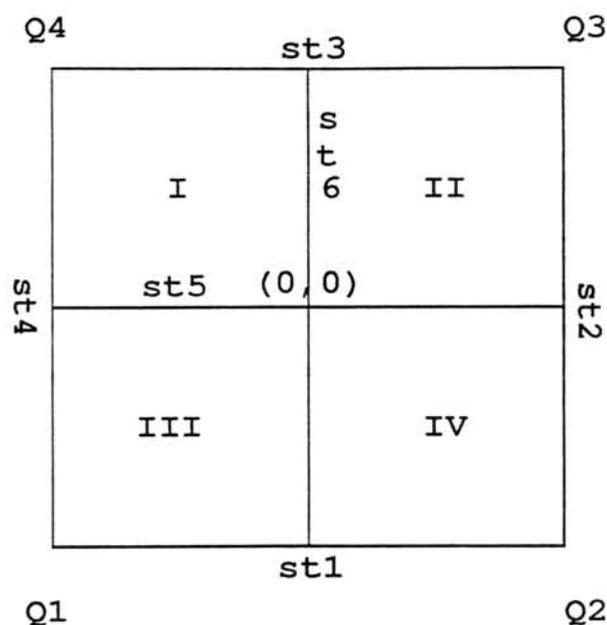


FIGURA 2.19 — Divisão do Quadrado

- (3) Gerar a seqüência de Sturm associada à lateral j calculando o número de zeros em cada lateral e aplicar a fórmula 2.20.

No procedimento implementado no trabalho de [BRU 94] partimos de um quadrado de semi-lado pela cota usada no método de Uspensky Modificado, usando 2.12 e calculamos o total de zeros pela fórmula 2.21.

Para isolar cada zero num subquadrado, subdividimos o quadrado original no seguinte procedimento recursivo:

- (1) obter o centro do quadrado: z_c
- (2) determinar os polinômios transformados que fazem o mapeamento da linha horizontal central e da linha vertical central no eixo x :

$$p(z + z_c) \quad p(iz + z_c).$$

- (3) gerar duas novas seqüências de Sturm para os polinômios gerados.
- (4) obter os extremos de cada intervalo de acordo com a seqüência que está sendo utilizada, determinando o número de zeros neste subquadrado.

Na figura 2.19 que mostra o quadrado bissecionado, ST_i indica a seq. de Sturm para cada lateral, $i = 1(1)4$ e no caso dos subquadrados, usamos ST_5 na horizontal e ST_6 na vertical.

A contagem de zeros em cada subquadrado é feita de modo análogo, com a fórmula 2.21 onde é feita a reutilização das seqüências deslocando devidamente as origens de cada uma delas.

Esta fórmula exige que não haja zeros na fronteira. Como o processo, no quadrado inicial parte de uma cota, assumimos que não há restrições no início. Durante a subdivisão isto pode ocorrer. Se o mdc dos polinômios iniciais da seqüência

de Sturm para cada lateral j , indicado por h_j for constante, então não existem zeros sobre a lateral j . Caso contrário, pode haver ou não zeros sobre a lateral. Se h_j não é constante, verificamos se ele possui zeros reais ou não, utilizando a seqüência de Sturm para o polinômio e sua derivada: $f_0 = h_j$, e $f_1 = h'_j$. Se h_j não contém zeros reais, o procedimento continua como no caso em h_j é constante: caso contrário, o lado associado é marcado que contém zeros e seu número é acrescentado a b_j .

A fórmula final, neste caso, fica modificada para

$$N = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 (V(l_j) - V(0)) - \sum_{j=1}^4 b_j. \quad (2.23)$$

2.2.8 Algoritmo de Brunetto

As estruturas usadas no algoritmo são básicas e constituídas principalmente de listas, vetores e pilhas.

Estruturas de Dados do Algoritmo

- $q[i], i : 1(1)4$ vetor dos vértices do quadrado ou subquadrado.
- lp lista dos vértices noroeste dos quadrados onde pesquisamos o número de zeros, seguido do tamanho do lado do quadrado.

$lp = [q[i], 2 * b]$, b : cota superior dos zeros do polinômio.

- $lstu$: lista dos polinômios que constituem a seqüência de Sturm, para cada lateral do quadrado, seguido do nível da subdivisão, vértice do canto noroeste, $flagf[i]$ variável lógica indicando se há ou não zeros na fronteira, $lfront$: seqüência de Sturm da fronteira.

$lstu : [f[0], f[1], \dots, f[m], \text{nível}, q[i], flagf[i], lfront, \dots]$

- $lisol$ lista dos subquadrados isolados, isto é, contém apenas um zero complexo, e l o tamanho do lado do quadrado.

$lisol : [[q[i], l_i], [q[j], l_j], \dots]$

- $list_interv$ lista dos intervalos que contém zeros, que estão numa das fronteiras dos sub-quadrados da subdivisão.

- $pilha$ pilha com nível da subdivisão, l tamanho do lado do subquadrado atual e zc centro do subquadrado atual.

- $pilha2$ pilha com a seqüência de índices do quadrado pai.

- $pilha3$ pilha com a diferença entre o total de zeros já localizados e o número de zeros a localizar, na atual subdivisão.

- $nzeros[i]$ vetor que armazena o número de zeros de cada lateral $i : 1(1)4$.

- $nzerof[i]$ vetor que armazena o número de zeros correspondentes às fronteiras $i : 1(1)8$, conforme a figura 2.20 a seguir.

Vejamos o algoritmo principal detalhado:

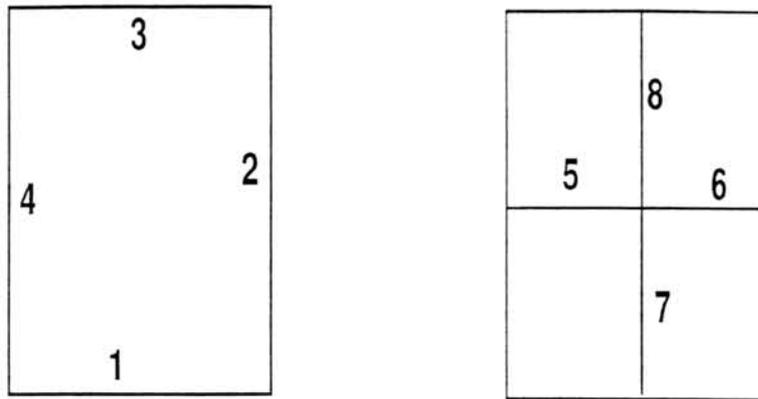


FIGURA 2.20 — Identificação das Fronteiras

```

loczero(pol):=
1. f:expand(pol),
2. z:variável_principal(f),
3. n:grau(f) 4.lcoef:pilha:pilha2:pilha3:[],
. lstu:lisol:list_interv:[],
. nível:0,
5. b:cotasuperior(f),
6. nzeros[i]:0 , nzerosf[i]:0 , i:0(1)4.
7. nzerof[i]:0 , i:5(1)8,
8. separapartes(f), /* gera  $\alpha$  e  $\beta$  */
.  $\alpha$ :content(Re(f)),  $\beta$ :content(Im(f)), */
9.  $\beta = 0$  então flagreal : verdadeiro
. senão flagreal : falso,
10. q[1]: -b-bi, q[2]: b-bi, q[3]:b+bi, q[4]:-b+bi.
11. lp:[q[4],2*b],
/* gera as transformações t[1],t[2],t[3],t[4] */
12. obtem_transf(q[1],q[2],q[3],q[4])
13. para i:1 até 4 faça:
. 13.1 obtem_sturm(i,f),
. /* determina o polinômio transformado  $fc[i]:pm_j(z)$ 
. separa as partes real e imaginária  $\alpha_1$  e  $\beta_1$ 
. determina se há zeros na fronteira do quadrado  $Q_I$ 
. determina os polinômios iniciais  $f[0]$  e  $f[1]$  para formar
. a seqüência de sturm */
. 13.2 gera_sturm();
. /* determina a seqüência de Sturm para  $f[0]$  e  $f[1]$ 
. laux: seqüência de sturm sti:[ f[0],f[1],f[2],f[3],...f[m] ] */
. 13.3 flagf[i] : falso,
. 13.4 laux: append(laux,[nível,flagf[i],q[i]]),
. 13.5 se i=4 então dof: cabs(q[1]-q[i])
. senão dif[i]:cabs(q[i+1]-q[i]),
. 13.6 calc_nzeros(dif[i],0),
. /* calcula o número de zeros no intervalo  $dif[i]$ , pela
. seqüência de Sturm */

```

- . 13.7 *lstu: endcons(lstu.laux)*,
- 14. *totzeros* : $\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^4 \text{nzeros}[i])$,
- 15. *totzloc*: *totzeros*.
- 16. *search(lp,lstu)*.
- 17. *saida(lisol,list_interv)*.

Algoritmo Recursivo para Pesquisar e isolar os zeros

```

search(lista,lstu,pai) :=
se lista =[] então pára : saída: lisol,
. senão
1. /* atualiza dados do quadrado pai e 4 subquadrados */

    1.1 l:último(lista)/2,
    1.2 nível : nível + 1.
    1.3 zc : centro do quadrado pai,
    1.4 nzerof[j]:0. j:5(1)8,

2. /* faz as transformações para eixo vertical (5)
e horizontal (6) */

    2.1 determina as transformações t[5] e t[6]
    2.2 obtem_sturm(5,f).
    /* determina fc[5] */
    2.3 gera_sturm(),
    /* determina seqüência :st5, */
    2.4 obtem_sturm(6,f).
    /* determina fc[6] */
    2.5 gera_sturm();
    /* determina seqüência :st6 */
    2.6 lstu:append(lstu,[st5].[st6]),

3. para cada sub-quadrado k do quadrado pai e
enquanto há zeros para localizar faça:

    3.1 obtem_cantos(centro,l,k),
    /* determina os novos vértices do subquadrado 1 e altera a lista
lista:append(lista,[q[4]],1).
    3.2 calc_totzeros(lstu,l,k),
    /* determina o numero de zeros em cada lateral em nzeros[i]
se há zeros na fronteira , calcula o número desses zeros em nze-
roff[i], usando a fórmula 2.23.
coloca tais zeros na list_interv, determina totzeros */
    3.3 se totzeros > 1
. então /* repassa listas das seqüências e sturm */
. 3.3.1 define_lista_st(k,lstu)
. /* gera lspar */

```

```

.   3.3.2 lscall : último(lista),
.   3.3.3 empilha (zc,l, nível) na pilha.
.       empilha(pai) na pilha2.
.       empilha(totzloc-totzeros) na pilha3
.   3.3.4 totzloc:totzeros,
.       se nível > 0 então pai :k.
.   3.3.5 search(lscall,lspar,pai),
.   3.3.6 se pilha3 = []
.       3.3.6.1 então totzloc:0.
.       senão
.           3.3.6.2 totzloc: desempilha(pilha3),
.           3.3.6.3 nível :desempilha(pilha),
.           3.3.6.4 l : desempilha(pilha),
.           3.3.6.5 zc:desempilha(pilha),
.           3.3.6.6 pai:desempilha(pilha2),
.           3.3.6.7 lista:remove(primeiro(lista),lista),
.   3.3.7 senão
.       3.3.7.1 se totzeros = 1
.           3.3.7.2 então totzloc:totzloc-1
.           3.3.7.3 lisol:lisol+último(lista)
.       3.3.7.4 senão remove quadki da lista 3.4 se fla-
.       greal e nível =1
.           então se k + 1 > 2 então pode parar.

```

4. saída (lisol,list_interv).

Exemplo 2.2.9 Seja o polinômio $p(z) = z^3 + (-1 - 2i)z^2 + (-4 - 14i)z - 12 + 18i$ cujos zeros são $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -3 - 2i$ e $z_3 = 3 + 3i$ que estão localizados na figura 2.21.

Seguindo o algoritmo temos:

1. $f : z^3 - z^2 - 2iz^2 - 4z - 14iz - 12 + 18i$,
2. $z:z$,
3. $n:3$,
4. $\text{pilha:pilha2:pilha3:[]}$, $\text{lisol:list_interv:[]}$
5. $b:8$,
6. $\text{nzeros}[i]:0$, $\text{nzerof}[i]:0$ para $i:1(1)4$,
7. $\text{nzerof}[i]:0$, $i:5(1)8$,
8. $\text{separapartes}(f)$
9. $\alpha : z^3 - z^2 - 4z - 12$, $\beta : 2 \cdot (z^2 - 7z + 9)$,
9. flagreal:falso ,
10. $\text{q}[1]:-8-8i$, $\text{q}[2]:8-8i$, $\text{q}[3]:8+8i$, $\text{q}[4]:-8+8i$, nível:0
11. $\text{lp}:[-8+8i,16]$ /* quadrado original */
12. $\text{obtem_transf}(\text{q}[1],\text{q}[2],\text{q}[3],\text{q}[4])$,
13. para cada lateral $i:1(1)4$ faça:

lateral 1

- 13.1 $\text{obtem_sturm}(1,f)$

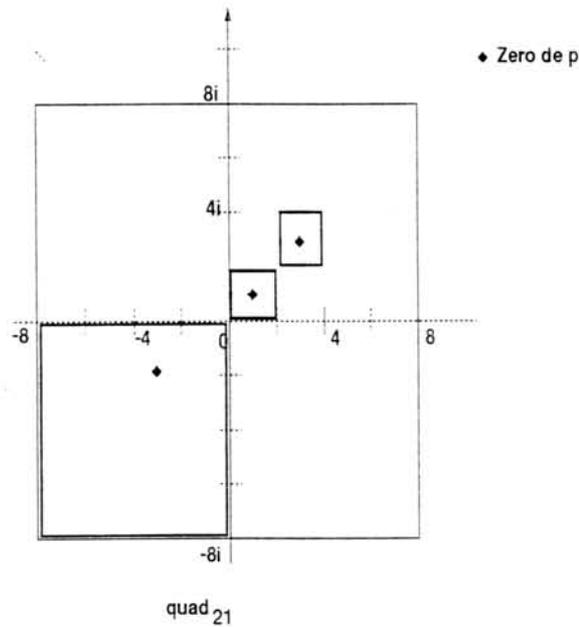


FIGURA 2.21 — Zeros de $p(z) = z^3 + (-1 - 2i)z^2 + (-4 - 14i)z - 12 + 18i$

polinômio transformado :

$$fc[1] : z^3 - 26iz^2 - 25z^2 + 418iz - 20z - 990i - 1188$$

separapartes:

$$\alpha_1 : z^3 - 25z^2 - 20z - 1188, \quad \beta_1 : -13z^2 + 209z - 495$$

$h[1] : mdc(\alpha_1, \beta_1) : 1 \equiv cste \rightarrow$ não há zeros na fronteira do quadrado Q_I , nesta lateral ($i=1$).

/ inicia a sequência de sturm */*

$$f[0] : \alpha_1, \quad f[1] : \beta_2$$

$$13.2 \text{ gera_sturm}(); \text{ laux}:[st1]:[\alpha_1, \beta_1, 11353z - 86064, -1]$$

$$13.3 \text{ flagf}[1]:\text{falso.}$$

acrescenta a laux nível, vértice, flagf, sequência de sturm para a fronteira, que no caso é vazia **/*

$$13.4 \text{ laux}:[st1,0,-8i-8,\text{falso},[]]$$

$$13.5 \text{ dif}[1]:\text{cabs}(q[2]-q[1]):16,$$

13.6 */* calcula número de zeros reais correspondente a esta lateral */*

$$\text{calc_nzeros}(16,0) \rightarrow \underline{\text{nzeros}[1]:1}$$

$$13.7 \text{ lstu}: \text{lstu} + \text{laux},$$

lateral 2

$$13.1 \text{ obtem_sturm}(2,f)$$

polinômio transformado :

$$fc[1] : -iz^3 + 26iz^2 - 23z^2 - 52iz - 414z - 958i - 1436$$

separapartes:

$$\alpha_2 : -23z^2 + 414z - 1436, \quad \beta_2 : -z^3 + 26z^2 + 52z - 958$$

$h[2] : mdc(\alpha_2, \beta_2) : 1 \equiv cste \rightarrow$ não há zeros na fronteira do quadrado Q_I , nesta lateral ($i=2$).

/ inicia a sequência de sturm */*

$$f[0] : \alpha_2, \quad f[1] : \beta_2$$

13.2 gera_sturm();
 laux:[st2]: $[\alpha_2, \beta_2, 23z^2 + 414z + 1436.151 - 16z, 1]$
 13.3 flagf[2]:falso,
 acrescenta a laux nível.vértice.flagf, seqüência de sturm para a fronteira, que no caso é vazia */
 13.4 laux:laux+[st2,0,8i-8,falso,[]]
 13.5 dif[1]:cabs(q[3]-q[2]):16,
 13.6 /* calcula número de zeros reais correspondente a esta lateral */
 calc_nzeros(16,0) → nzeros[2]:2
 13.7 lstu: lstu+laux,

lateral 3

13.1 obtem_sturm(3,f)
 polinômio transformado :
 $f_c[3] : z^3 - 22iz^2 + 23z^2 - 322iz - 12z + 770i - 700$
 separapartes:
 $\alpha_3 : -z^3 + 23z^2 + 12z - 700, \beta_3 : 11z^2 - 161z - 385$
 $h[3] : mdc(\alpha_3, \beta_3) : 1 \equiv cste \rightarrow$ não há zeros na fronteira do quadrado Q_I , nesta lateral (i=3).
 /* inicia a seqüência de sturm */
 $f[0] : \alpha_3, f[1] : \beta_3$
 13.2 gera_sturm(); laux:[st3]: $[\alpha_3, \beta_3, 8008 - 1173z, 1]$
 13.3 flagf[3]:falso,
 acrescenta a laux nível.vértice.flagf, seqüência de sturm para a fronteira, que no caso é vazia */
 13.4 laux:laux+[st3,0,8i+8,falso,[]]
 13.5 dif[3]:cabs(q[3]-q[2]):16,
 13.6 /* calcula número de zeros reais correspondente a esta lateral */
 calc_nzeros(16,0) → nzeros[3]:1
 13.7 lstu: lstu+laux,

lateral 4

13.1 obtem_sturm(4,f)
 polinômio transformado :
 $f_c[4] : iz^3 - 22iz^2 + 25z^2 - 44iz - 382z + 1250i + 900$
 separapartes:
 $\alpha_4 : 25z^2 + 382z + 900, \beta_4 : z^3 - 22z^2 - 44z - 1250$
 $h[3] : mdc(\alpha_4, \beta_4) : 1 \equiv cste \rightarrow$ não há zeros na fronteira do quadrado Q_I , nesta lateral (i=4).
 /* inicia a seqüência de sturm */
 $f[0] : \alpha_4, f[1] : \beta_4$
 13.2 gera_sturm();
 laux:[st4]: $[\alpha_4, \beta_4, 57088z - 466225, -1]$
 13.3 flagf[4]:falso,
 acrescenta a laux nível.vértice.flagf, seqüência de sturm para a fronteira, que no caso é vazia */
 13.4 laux:laux+[st4,0,8i-8,falso,[]]

13.5 dif[1]:cabs(q[4]-q[1]):16,

13.6 /* calcula número de zeros reais correspondente a esta lateral */
 calc_nzeros(16.0) → nzeros[4]:2

13.7 lstu: lstu+laux,

14. $totzeros = \frac{1}{2}(1 + 2 + 1 + 2) = 3$.

Logo há 3 zeros no quadrado Q_I .

15.totzloc:3,

16. search(lp,lstu,0) /* Search 1 */

lp:[-8+8i,16]

lstu:[**st1**=[$z^3 - 25z^2 - 20z + 1188, -13z^2 + 209z - 495, 11353z - 86064, -1, 0, -8i - 8$,
 falso,[]], **st2**=[$-23z^2 + 414z - 1436, -z^3 + 26z^2 - 52z - 958, 23z^2 - 414z + 1436, 151 -$
 $16z, 1, 0, 8 - 8i, falso, []$], **st3**=[$-z^3 + 23z^2 - 12z - 700, 11z^2 - 161z + 385, 8008 -$
 $1173z, 1, 0, 8i + 8, falso, []$], **st4**=[$25z^2 - 382z + 900, z^3 - 22z^2 - 44z + 1250, -25z^2 + 382z -$
 $900, 57088z - 4666225, -1, 8i - 8, falso, []$]

nível:0,

1. /* atualiza dados para quadrado pai */

1.1) l:último(lista)/2:8.

1.2) nível:1,

1.3) zc:0,

/* centro do quadrado pai */

1.4) nzerof[i]:0, para i:5(1)8,

2./* faz as transformações para eixo vertical(6) e horizontal(7) */

2.1) t[5]:z+zc, t[6]:zc+iz,

2.2) obtem_sturm(5,f),

fc[5]: $z^3 - 2iz^2 - z^2 - 14iz - 4z + 18i - 12$,

$\alpha_5 : z^3 - z^2 - 4z - 12, \beta_5 : z^3 - z^2 - 4z - 12$

h[5]:1 $\equiv cste \rightarrow$ não há zeros no eixo x .

f[0]: $\alpha - 5$ f[1]: β_5

2.3) gera_sturm();

laux:st5:[$\alpha_5, \beta_5, 84 - 16z, 1$]

lfront:[]

laux:[st5,1,0,falso,[]]

2.4) lstu:lstu+laux,

2.5 obtem_sturm(6,f),

fc[6]: $-iz^3 + 2iz^2 + z^2 - 4iz + 14z + 18i - 12$

$\alpha_6 : z^2 - 14z - 12, \beta_6 : -z^3 + 2z^2 - 4z + 18$

h[6]:1 $\equiv cste \rightarrow$ Não há zeros no eixo y .

f[0]: α_6 f[1]: β_6

2.6) gera_sturm();

laux:st6:[$\alpha_6, \beta_6, -z^2 - 14z + 12, 8z - 7, 1$],

lfront:[]

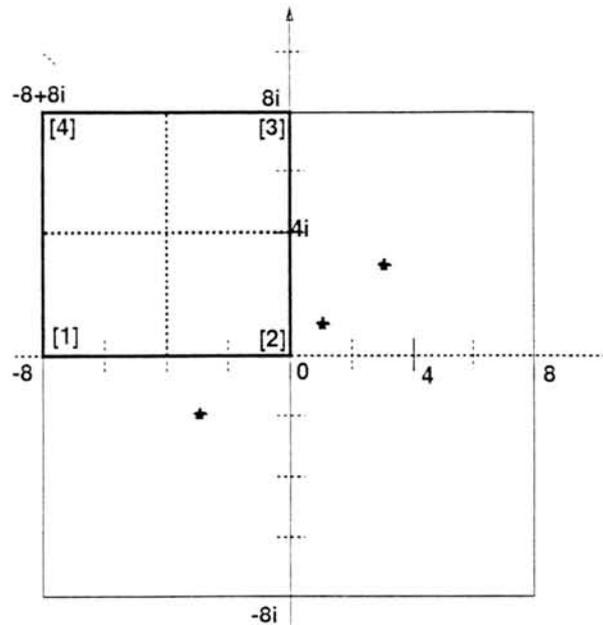
laux:[st6,1,0,falso,[]],

2.7) lstu:lstu+laux,

3. para cada subretângulo de Q_I faça:

quad=1 e seja, k=1

obtem_cantos(zc,l,1)

FIGURA 2.22 — Quadrado $quad_{11}$

Ver figura 2.22

lista: $[[8i-8,16],[8i-8,8]]$

3.2) $calc_totzeros(lstu,k=1,pai=0)$,

nzeros[1]:0, nzeros[2]:-1, nzeros[3]:0, nzeros[4]:1

Não há zeros na fronteira

nzerof[1]:0, nzerof[2]:0, nzerof[3]:0, nzerof[4]:0,

$totzeros : \frac{0-1+0+1}{2}$

totzeros:0

3.3) $totzeros \neq 1$ vai para 3.3.7

3.3.7) $totzeros \neq 1$ vai para 3.3.7.4

3.3.7.4) lista : $remove(último(lista),lista)=[8i-8,16]$

$totzloc=3$ 3.4) $k+1 \not> 2 \rightarrow$ continua no próximo subquadrado.

quad=1, k=2

3.1) $obtem_cantos(zc,1,2)$

Ver figura 2.23.

lista: $[8i-8,16],[8i,8]$

3.2) $calc_totzeros(lstu,2,0)$,

nzeros[1]:1, nzeros[2]:1, nzeros[3]:1, nzeros[4]:1,

Não há zeros na fronteira

nzerof[1]:0, nzerof[2]:0, nzerof[3]:0, nzerof[4]:0,

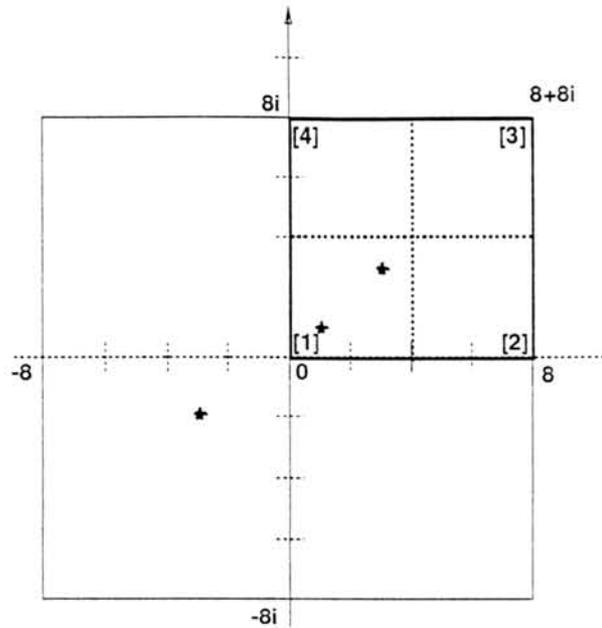
$totzeros : \frac{1}{2}((1+1+1+1) - (0+0+0+0))$

totzeros:2 > 1 \rightarrow subdividirá o quadrado Q_{12} .

preparação

3.3.1 define $lista_st(2,lstu)/*$ repassa a seqüências $*/$

lpar: $[st1=(st5):[\alpha_5, \beta_5, 84-16z, 1, 1, 0, falso, []], st2=(st2): [-23z^2+414z-1436, -z^3+26z^2-52z-958, 23z^2-414z+1436, 151-16z, 1, 0, 8-i.falso, []], st3=(st3): [-z^3+23z^2-12z-700, 11z^2-161z+385, 8008-1173z, 1, 0, 8i+8.falso, []], st4=(st6):[\alpha_6, \beta_6, -z^2-$

FIGURA 2.23 — Quadrado $quad_{12}$

$14z + 12.8z - 7.1, 0, \text{falso}, []]$,

3.3.2 `lscall:[8i,8]`,

3.3.3 empilha($zc=0.l=8.nível=1$) na pilha,

empilha($pai=2$) na pilha2,

empilha($3-2=1$) na pilha3

3.3.4 `totzloc:2`.

3.3.5 **search(lscall,lspar,pai): Search 2**

1. /* atualiza dados para quadrado */

1.1) `l:último(lista)/2:4`.

1.2) `nível:2`,

1.3) `zc:4i+4`,

/* centro do quadrado */

1.4) `nzerof[i]:0`, para $i:5(1)8$.

2./* faz as transformações para eixo vertical(6) e horizontal(7) */

2.1) `t[5]:z+zc`, `t[6]:z+iz`,

2.2) `obtem_sturm(5,f)`,

`fc[5]:z3 + 10iz2 + 11z2 + 58iz + 4z + 42i - 36`,

$\alpha_5 : z^3 + 11z^2 + 4z - 36$, $\beta_5 : 5z^2 + 29z - 21$

`h[5]:1` $\equiv cste \rightarrow$ não há zeros no eixo x .

`f[0]: $\alpha - 5$` `f[1]: β_5`

2.3) `gera_sturm()`;

`laux:st5:[$\alpha_5, \beta_5, 253z+482, 1$]`

`lfront:[]`

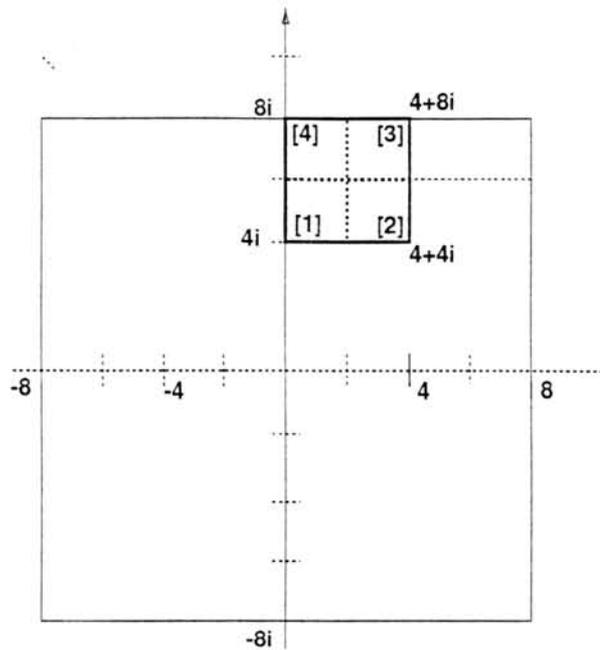
`laux:[st5,2,4i+4,falso,[]]`

2.4) `lstu:lstu+laux`,

2.5) `obtem_sturm(6,f)`,

`fc[6]:-iz3 - 10iz2 - 11z2 + 4iz + 58z + 42i - 36`

$\alpha_6 : 11z^2 - 58z - 36$, $\beta_6 : -z^3 - 10z^2 + 4iz + 42$

FIGURA 2.24 — Quadrado $quad_{21}$

$h[6]:1 \equiv cste \rightarrow$ Não há zeros no eixo y .

$f[0]:\alpha_6 \quad f[1]:\beta_6$

2.6) `gera_sturm()`;

`laux:st6:[$\alpha_6, \beta_6, 11z^2 + 58z + 36, -1948z - 3477, 1$],`

`lfront:[]`

`laux:[st6,1,0,falso,[]],`

2.7) `lstu:lstu+laux,`

3. `totzloc:3`

quad=2 e k=1

3.1) `obtem_cantos(zc,l,1)`

Ver figura 2.24.

`lista:[8i-8,8,[8i,4]]`

3.2) `calc_totzeros(lstu2,k=1,pai=2),`

`nzeros[1]:-1, nzeros[2]:0, nzeros[3]:1, nzeros[4]:0`

Não há zeros na fronteira

`nzerof[1]:0, nzerof[2]:0, nzerof[3]:0, nzerof[4]:0,`

`totzeros : $\frac{1}{2}((-1 + 0 + 1 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0))$`

`totzeros:0`

3.3 `totzeros $\neq 1$` vai para 3.3.7 3.3.7) `totzeros $\neq 1$` vai para 3.3.7.4

3.3.7.4) `lista2 : remove(último(lista),lista)=[8i,8]`

`totzloc=2`

Como não houve zeros em $quad_{21}$ continuamos com 2 zeros a serem localizados.

3.4) $k + 1 \neq 2 \rightarrow$ continua no próximo subquadrado.

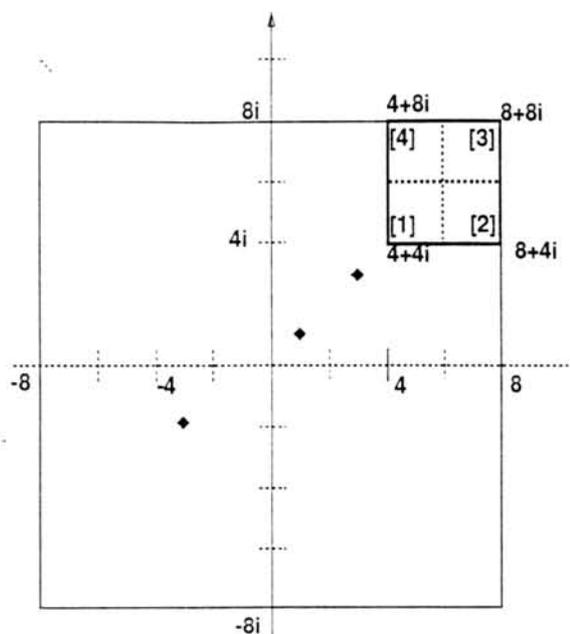
quad=2, k=2

3.1) `obtem_cantos(zc=4i+4,l=4,k=2)`

Ver figura 2.25.

`lista:[8i,8,[8i+4,4]]`

3.2) `calc_totzeros(lstu2,k=2,pai=2),`

FIGURA 2.25 — Quadrado $quad_{22}$

$nzeros[1]:-1, nzeros[2]:1, nzeros[3]:0, nzeros[4]:0,$

Não há zeros na fronteira

$nzerof[1]:0, nzerof[2]:0, nzerof[3]:0, nzerof[4]:0,$

$totzeros : \frac{1}{2}((-1 + 1 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0))$

$totzeros:0$

3.3) $totzeros \neq 1$ vai para 3.3.7

3.3.7) $totzeros \neq 1$ vai para 3.3.7.4 lista2:[8i,8]

3.4) nível $\neq 1 \rightarrow$ continua no próximo quadrado.

quad=2, k=3

3.1) $obtem_cantos(zc=4i+4,l=4,k=3)$

Ver figura 2.26.

lista2:[8i,8,[4i,4]]

3.2) $calc_totzros(lstu2.k=3,pai=2),$

$nzeros[1]:1, nzeros[2]:1, nzeros[3]:1, nzeros[4]:1,$

Não há zeros na fronteira

$nzerof[1]:0, nzerof[2]:0, nzerof[3]:0, nzerof[4]:0,$

3.3) $totzeros = \frac{1}{2}(1 + 1 + 1 + 1)$ $totzeros=2 > 1$ \rightarrow subdividirá novamente. preparação

lspar3: $st1 = [z^3 - z^2 - 4z - 12, -z^2 - 7z + 9, 84 - 61z, 1, 1, 0, falso, []], st2 = [-11z - 58z - 36, -z^3 - 10z^2 + 4z + 42, 11z^2 + 58z + 36, -1948z - 3477, 1, 2, 4i + 4, falso, []], st3 = (st5) : [z^3 + 11z^2 + 4z - 36, 5z^2 + 29z + 21, 253z + 482, 1, 2, 4i + 4, falso, []] st4 = (st6) : [z^2 + 14z - 12, -z^3 + 2z^2 - 4z + 18, -z^2 - 14z + 12, 8z + 12, 8z - 7, 1, 1, 0, falso, []]$

3.3.2) $lscall3:[4i,4],$

3.3.3) $empilha(zc=4i+4,l=4,nivel=2)$ na pilha.

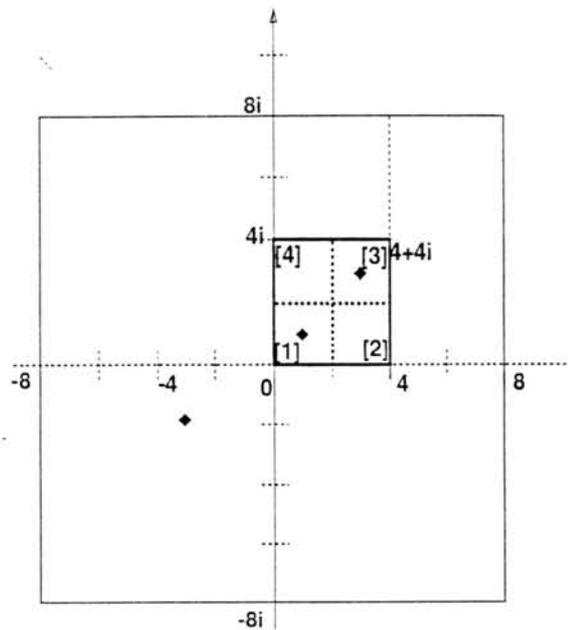
$empilha(pai=3)$ na pilha2

$empilha(2-2=0)$ na pilha3.

3.3.4) $totzloc=2$

3.3.5) **search(lscall,lspar,pai) : Search 3**

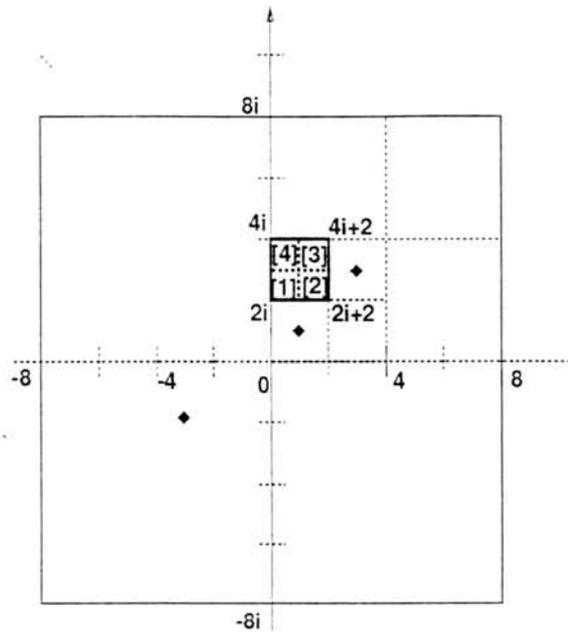
1. /* atualiza dados para quadrado */

FIGURA 2.26 — Quadrado $quad_{23}$

```

1.1) l:último(lista)/2:2.
1.2) nível:3,
1.3) zc:2i+2.
/* centro do quadrado */
1.4) nzerof[i]:0, para i:5(1)8.
2./* faz as transformações para eixo vertical(6) e horizontal(7) */
2.1) t[5]:z+zc, t[6]:zc+iz.
2.2) obtem_sturm(5,f),
fc[5]:z3 + 4iz2 + 5z2 - 2iz - 10i + 8,
α5 : z3 + 5z2 + 8, β5 : 4z2 - 2z - 10
h[5]:1 ≡ cste → não há zeros no eixo x.
f[0]:α - 5 f[1]:β5
2.3) gera_sturm():
laux:st5:[α5, β5, ..., 1]
lfront:[]
laux:[st5,2,4i+4,falso,[]]
2.4) lstu:lstu+laux,
2.5) obtem_sturm(6,f),
fc[6]:-iz3 - 10iz2 - 11z2 + 4iz + 58z + 42i - 36
α6 : 11z2 - 58z - 36, β6 : -z3 - 10z2 + 4iz + 42
h[6]:1 ≡ cste → Não há zeros no eixo y.
f[0]:α6 f[1]:β6
2.6) gera_sturm():
laux:st6:[α6, β6, ..., 1],
lfront:[]
laux:[st6,1,0,falso,[]],
2.7) lstu:lstu+laux.
3. totzloc:2

```

FIGURA 2.27 — Quadrado $quad_{31}$

quad=3 e k=1

3.1) `obtem_cantos(zc.l.1)`

Ver figura 2.27.

`lista:[4i,4,[4i.2]]`

3.2) `calc_totzeros(lstu3.k=1.pai=3),`

`nzeros[1]:-1, nzeros[2]:1, nzeros[3]:0, nzeros[4]:0`

Não há zeros na fronteira

`nzerof[1]:0, nzerof[2]:0, nzerof[3]:0, nzerof[4]:0,`

`totzeros : $\frac{1}{2}((-1 + 1 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0))$`

`totzeros:0`

3.3 `totzeros` $\neq 1$ vai para 3.3.7

3.3.7) `totzeros` $\neq 1$ vai para 3.3.7.4

3.3.7.4) `lista3: remove(último(lista),lista)=[4i,4]`

`totzloc=2`

Como não houve zeros em $quad_{21}$ continuamos com 2 zeros a serem localizados.

3.4) $k + 1 \neq 2 \rightarrow$ continua no próximo subquadrado.

quad=3, k=2

3.1) `obtem_cantos(zc=2i+2,l=2,k=2)`

Ver figura 2.28.

`lista3:[4i,4,[4i+2,2]]`

3.2) `calc_totzeros(lstu3,k=3,pai=2),`

`nzeros[1]:0, nzeros[2]:1, nzeros[3]:0, nzeros[4]:1,`

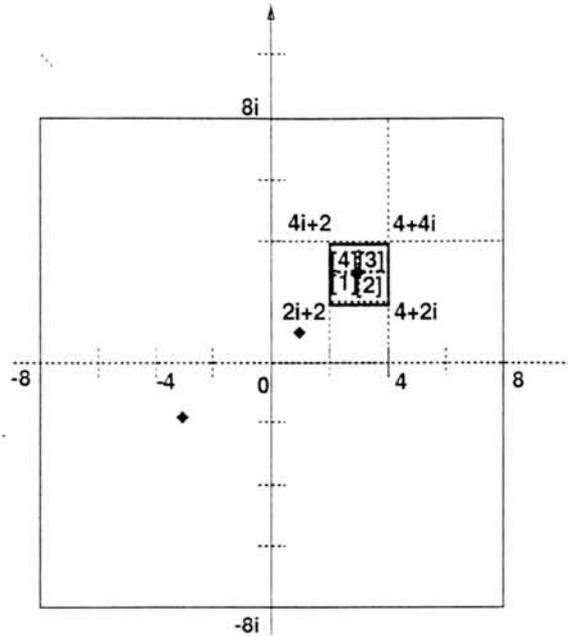
Não há zeros na fronteira

`nzerof[1]:0, nzerof[2]:0, nzerof[3]:0, nzerof[4]:0,`

`totzeros : $\frac{1}{2}((0 + 1 + 0 + 1) - (0 + 0 + 0 + 0))$`

`totzeros:1`

3.3) `totzeros` $\neq 1 = 1$ vai para 3.3.7.1

FIGURA 2.28 — Quadrado $quad_{32}$

3.3.7.1 $totzeros=1 \rightarrow$ vai para 3.3.7.2

3.3.7.2 $totzloc:2-1:1$

3.3.7.3 $lisol:[[4i+2,2]]$

Logo no quadrado $quad_{32}$ há um zero localizado.

quad=3, k=3

3.1) $obtem_cantos(zc=2i+2,l=2,k=2)$

Ver figura 2.29.

$lista3:[4i,4,[4i+2,2],[2i,2]]$

3.2) $calc_totzeros(lstu3,k=3,pai=2)$.

$nzeros[1]:0, nzeros[2]:1, nzeros[3]:0, nzeros[4]:1$.

Não há zeros na fronteira

$nzerof[1]:0, nzerof[2]:0, nzerof[3]:0, nzerof[4]:0$,

$totzeros : \frac{1}{2}((0+1+0+1) - (0+0+0+0))$

$totzeros:1$

3.3) $totzeros \neq 1 = 1$ vai para 3.3.7.1

3.3.7.1 $totzeros=1 \rightarrow$ vai para 3.3.7.2

3.3.7.2) $totzloc : 1 - 1 = 0$ Logo não há mais zeros a localizar, no quad 3.

3.3.7.3 $lisol:[[4i+2,2],[2i,2]]$

Não avalia $quad_{34}$ pois $totzloc=0$.

Volta a Search 2

3.3.6) $desempilhar$ 3.3.6.2) $totzloc:desempilha(pilha3):0$,

3.3.6.3) $nível:desempilha(pilha):2$,

3.3.6.4) $l:desempilha(pilha):4$,

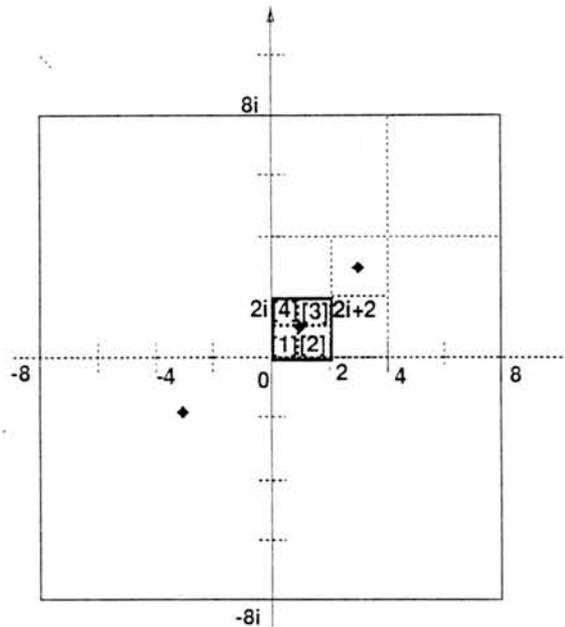
3.3.6.5) $zc:desempilha(pilha):4i+4$

3.3.6.6) $pai:desempilha(pilha2):2$,

3.3.6.7) $lista2:remove(primeiro(lista3),lista3):[4i+2,2]$

Volta a Search 1

3.3.6) $desempilhar$

FIGURA 2.29 — Quadrado $quad_{33}$

3.3.6.2) `totzloc:desempilha(pilha3):1,`

3.3.6.3) `nível:desempilha(pilha):1.`

3.3.6.4) `l:desempilha(pilha):8.`

3.3.6.5) `zc:desempilha(pilha):0`

3.3.6.6) `pai:desempilha(pilha2):2`

3.) volta a $quad_{13}$

3.1) `obtem_cantos(zc,l,pai)`

Ver figura 2.30.

`lista2:[16,[8i,8],[-8,8]].`

3.2) `calc_totzeros(lstu.k,pai),`

`nzeros[1]:1, nzeros[2]:0, nzeros[3]:0, nzeros[4]:1`

Não há zeros na fronteira

`nzerof[1]:0, nzerof[2]:0, nzerof[3]:0, nzerof[4]:0,`

`totzeros : $\frac{1}{2}((1 + 0 + 0 + 1) - (0 + 0 + 0 + 0))$`

`totzeros:1`

3.3) `totzeros \neq 1 = 1` vai para 3.3.7.2

3.3.7.2) `totzloc : 1 - 1 = 0` Logo não há mais zeros a localizar, no quad 1 e daí não precisa pesquisar o quadrado $quad_{14}$.

3.3.7.3) `lisol:[[4i+2,2],[2i,2],[-8,8]]`

3.4 termina laço do 3.

acaba search inicial- volta ao loczero

4. `lisol=[[4i+2,2],[2i,2],[-8,8]]`

`list_interv:[]`

A solução é pois:

- Há um zero no quadrado $quad_{32}$ com os vértices:

$q[1]=2i, q[2]=2i+4, q[3]=4i+4$ e $q[4]=2i$, cujo canto noroeste é $4i + 2$ e tem lado 2.

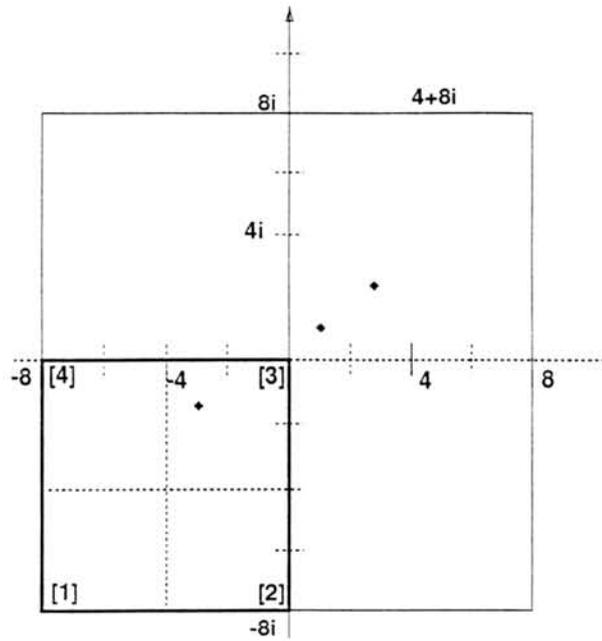


FIGURA 2.30 — Quadrado $quad_{13}$

- Há um zero no quadrado $quad_{33}$ com vértices:
 $q[1]=0$, $q[2]=2$, $q[3]=2i+2$ e $q[4]=2i$, cujo canto noroeste é $2i$ e tem lado 2.
- Há um zero no quadrado $quad_{13}$ com os vértices:
 $q[1]=-8i-8$, $q[2]=-8i$, $q[3]=0$ e $q[4]=-8$, cujo canto noroeste é $q[4]=-8$ e tem lado 8.

Capítulo 3

ENUMERAÇÃO E LOCALIZAÇÃO DE ZEROS DE POLINÔMIOS INTERVALARES

Inicialmente apresentaremos os problemas que surgem na enumeração e localização dos zeros dos polinômios intervalares, os resultados sobre polinômios intervalares de Hurwitz e a seguir os novos resultados que podem ser usados para a localização propriamente dita de zeros de polinômios intervalares.

3.1 Colocação do Problema no Caso Intervalar

No caso de polinômios intervalares a questão da enumeração e localização dos zeros não se coloca de maneira análoga ao caso real nem ao complexo, pois na realidade estamos tratando de uma família de polinômios.

3.1.1 Caracterização da Família $[p]$

Vamos tratar neste trabalho dos polinômios intervalares como sendo uma família de polinômios reais sobre a variável real x . Esta família é dada pelo grau e pelos coeficientes intervalares, segundo o conceito de Moore, e que são indicados por $A_i = [\alpha_i, \beta_i]$ onde $i = 0(1)n$. Para que todos membros da família tenham um único grau digamos n , é necessário que A_n não contenha o zero, ou seja, para $A_n = [\alpha_n, \beta_n]$ então $0 \notin A_n$ e $\alpha_n > 0$ ou $\beta_n < 0$. O polinômio intervalar será indicado entre colchetes com a variável entre parenteses: $[p](x)$. A família será indicada apenas pelo polinômio entre colchetes: $[p]$. O polinômio intervalar na variável x é indicado pela notação $[p](x)$ e dado por:

$$[p](x) := [\alpha_n, \beta_n]x^n + [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]x^{n-1} + \dots + [\alpha_1, \beta_1]x + [\alpha_0, \beta_0]$$

onde $[\alpha_i, \beta_i] \in \mathcal{IR}$, o conjunto dos intervalos reais de Moore.

O gráfico de cada polinômio real da família $[p]$ pode ser visualizado aproximadamente através do gráfico de certos polinômios. Nesta família vamos destacar alguns polinômios especiais, que desempenham uma certa função. Seja $[p]$ o polinômio

intervalar de grau n

$$[p](x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0,$$

onde $A_i = [\alpha_i, \beta_i] \in \mathcal{IR}$, $x \in \mathcal{R}$. Vamos destacar os seguintes polinômios:

Definição 3.1.1 (Polinômios Extremais) *São polinômios reais formados pelas possíveis combinações dos extremos dos coeficientes intervalares.*

Se um polinômio tem k coeficientes intervalares então o número de polinômios extremais é dado por 2^k . Alguns autores também os chamam de polinômios vértices.

Definição 3.1.2 (Polinômio Médio) *Seja dado $[p](x) = \sum_{i=0}^n [\alpha_i, \beta_i] x^i$. O Polinômio Médio é o polinômio real formado pelo ponto médio de cada coeficiente intervalar.*

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} x^i$$

Os polinômios extremais do polinômio $[p](x) = x^3 + [-6, -3]x^2 + [-28, -19]x + [24, 60]$ são os seguintes:

$$\begin{array}{ll} x^3 - 6x^2 - 28x + 24, & x^3 - 3x^2 - 28x + 24, \\ x^3 - 6x^2 - 28x + 60, & x^3 - 3x^2 - 28x + 60, \\ x^3 - 6x^2 - 19x + 24, & x^3 - 3x^2 - 19x + 24, \\ x^3 - 6x^2 - 19x + 60, & x^3 - 3x^2 - 19x + 60. \end{array}$$

Apenas 6 deles são vistos na figura 3.1. O polinômio médio é $p(x) = x^3 - 4.5x^2 - 23.5x + 42$.

Do conjunto dos polinômios extremais quatro deles se destacam, pois constituem *limites* de qualquer membro da família. Em termos pictóricos, isto significa que todos polinômios têm seus gráficos na região delimitada por eles. Algebricamente isto é estabelecido pelo seguinte teorema.

Teorema 3.1.1 *Na família intervalar $[p]$, existem 4 polinômios reais tais que:*

$$(\forall p(x) \in [p](x))(\forall x \leq 0)[p_2(x) \leq p(x) \leq p_1(x)], \quad (3.1)$$

$$(\forall p(x) \in [p](x))(\forall x \geq 0)[p_4(x) \leq p(x) \leq p_3(x)]. \quad (3.2)$$

Estes 4 polinômios são determinados por:

$$\begin{array}{l} p_1(x) := \beta_0 + \alpha_1 x + \beta_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \dots \\ p_2(x) := \alpha_0 + \beta_1 x + \alpha_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \dots \\ p_3(x) := \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \dots \\ p_4(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \dots \end{array} \quad (3.3)$$

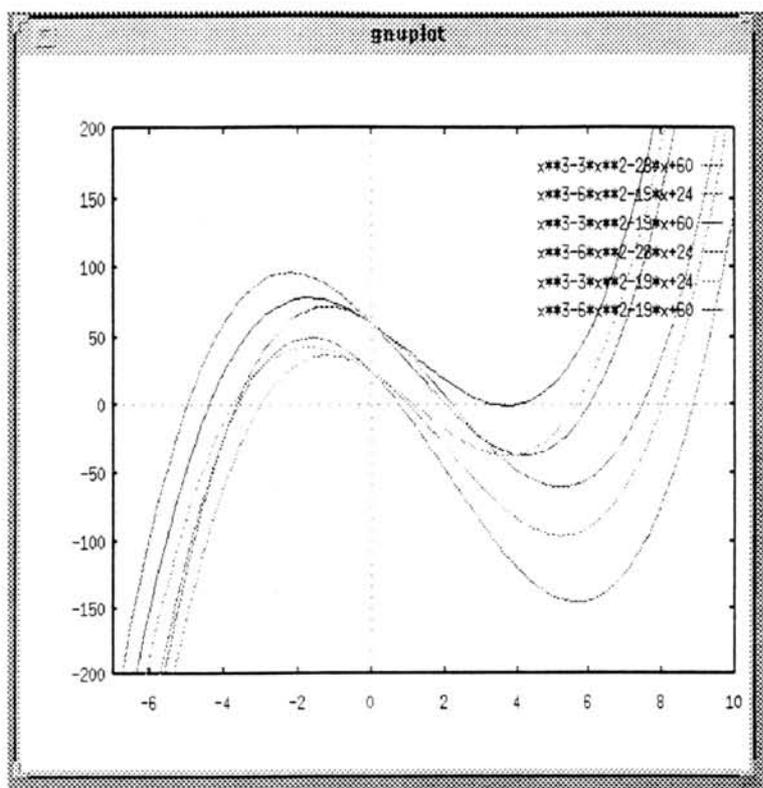


FIGURA 3.1 — Alguns polinômios de $x^3 + [-6, -3]x^2 + [-28, -19]x + [24, 60]$

Prova:

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in [p](x)$, ou seja $a_i \in [\alpha_i, \beta_i]$, $i = 0(1)n$ e daí $\alpha_i \leq a_i \leq \beta_i$.

Caso I: Seja $x \geq 0$. Vamos mostrar que $p_4(x) \leq p(x) \leq p_3(x)$.

Para $x \geq 0$ temos $a_i x^i \leq \beta_i x^i$ e portanto $\sum_{i=0}^n a_i x^i \leq \sum_{i=0}^n \beta_i x^i$. Logo, $p(x) \leq p_3(x)$.

Analogamente, temos $\alpha_i x^i \leq a_i x^i$ e portanto, $\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i \leq \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

Assim,

$$(\forall x \geq 0)[p_4(x) \leq p(x) \leq p_3(x)].$$

Caso II: Seja $x < 0$. Vamos mostrar que $p(x) \leq p_1(x)$

Consideremos dois casos:

Caso (a): n é par:

Para $x < 0$ e $i = 0(2)n$, ou seja, i é par, vale que $x^i > 0$. Daí como $a_i \leq \beta_i$, então

$$a_i x^i \leq \beta_i x^i, i = 0(2)n \quad (3.4)$$

Para $i = 1(2)n - 1$, ou seja, i é ímpar, vale que $x^i < 0$. Daí, como $\alpha_i \leq a_i$ então

$$a_i x^i \leq \alpha_i x^i, i = 1(2)n - 1. \quad (3.5)$$

Somando 3.4 e 3.5 temos:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \leq \sum_{i=0, \text{ pares}}^n \beta_i x^i + \sum_{i=1, \text{ ímpares}}^{n-1} \alpha_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \leq \beta_0 + \alpha_1 x + \beta_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \dots$$

ou seja, para $x < 0$, $p(x) \leq p_1(x)$.

Caso (b): n é ímpar:

Neste caso, a fórmula 3.4 fica:

$$a_i x^i \leq \beta_i x^i, \quad i = 0(2)n - 1 \quad (3.6)$$

e a fórmula 3.5 fica:

$$a_i x^i \leq \alpha_i x^i, \quad i = 1(2)n. \quad (3.7)$$

Somando ambas chegamos, analogamente que $(\forall x < 0)[p(x) \leq p_1(x)]$.

Caso III: Seja $x < 0$. Vamos mostrar que $p_2(x) \leq p(x)$

caso (c): n é ímpar:

Para $x < 0$ e $i = 0(2)n - 1$ vale, para os índices pares que $x^i > 0$ e como $\alpha_i \leq a_i$ temos

$$\alpha_i x^i \leq a_i x^i, \quad i = 0(2)n - 1 \quad (3.8)$$

Para $i = 1(2)n$, ou seja, para os índices ímpares, como $a_i \leq \beta_i$ e $x^i < 0$, temos $a_i x^i \geq \beta_i x^i$, então:

$$\beta_i x^i \leq a_i x^i, \quad i = 1(2)n. \quad (3.9)$$

Somando 3.8 e 3.9 temos:

$$\sum_{i=0, \text{pares}}^{n-1} \alpha_i x^i + \sum_{i=1, \text{ímpares}}^n \beta_i x^i \leq \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$\alpha_0 + \beta_1 x + \alpha_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \dots \leq \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Assim, $p_2(x) \leq p(x)$.

Caso (d): n é par:

Neste caso, a fórmula 3.8 fica:

$$\alpha_i x^i \leq a_i x^i, \quad i = 0(2)n. \quad (3.10)$$

A fórmula 3.9 fica:

$$\beta_i x^i \leq a_i x^i, \quad i = 1(2)n - 1. \quad (3.11)$$

Somando 3.10 e 3.11 chegamos, analogamente que:

$$(\forall x < 0)[p_2(x) \leq p(x)]$$

cqd

Definição 3.1.3 (Polinômios Limítrofes) Os polinômios $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ e $p_4(x)$ são chamados de *limitrofes*. Os polinômios p_1 e p_3 são chamados de *limitrofes maximais*, sendo p_1 o maximal negativo e p_3 o maximal positivo. Os polinômios p_2 e p_4 são chamados de *limitrofes minimais*, sendo p_2 o minimal negativo e p_4 o minimal positivo.

Os polinômios limítrofes de $[p](x) = x^3 + [-6, -3]x^2 + [-28, -19]x + [24, 60]$ são os seguintes:

$$\begin{aligned} p_4(x) &= x^3 - 6x^2 - 28x + 24, & p_3(x) &= x^3 - 3x^2 - 19x + 60, \\ p_1(x) &= x^3 - 3x^2 - 28x + 60, & p_2(x) &= x^3 - 6x^2 - 19x + 24. \end{aligned}$$

Eles podem ser vistos na figura 3.1 junto com outros extremais.

Disposição dos Zeros dos Polinômios Limítrofes

Seja $[p](x)$ um polinômio intervalar de grau n da variável real x e sejam $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ e $p_4(x)$ seus polinômios limítrofes. A seqüência dos zeros dos limítrofes segue uma disposição ou colocação característica e constante. Os zeros reais estão naturalmente ordenados no eixo x . Os zeros complexos, se houverem, ocorrerão sempre aos pares, pois $[p]$ é real. Os zeros complexos podem ser ordenados no eixo x , pelas suas respectivas partes reais.

Notação: Zeros dos Polinômios Limítrofes:

Vamos indicar por

z_{ij} os j zeros dos polinômios limítrofes p_i .

o índice i indica o índice do polinômio.

Por exemplo z_{23} indica o terceiro zero de p_2 e z_{31} indica o primeiro zero de p_3 . Naturalmente, os zeros conjugados têm iguais partes reais.

Qualquer polinômio $p(x) \in [p](x)$ está na "faixa" entre $p_1(x)$ e $p_2(x)$ para $x < 0$, e entre $p_3(x)$ e $p_4(x)$ para $x \geq 0$. O comportamento gráfico dos polinômios de $[p]$ está obviamente restrito ao comportamento gráfico dos polinômios limítrofes. Quanto maior for o diâmetro dos coeficientes de $[p]$, principalmente no que tange aos de maior grau, mais variado será o comportamento de cada um dos polinômios da família. Esta variação se refere no gráfico, à localização e ao tipo do zero. Vejamos alguns exemplos, onde mostraremos os gráficos dos polinômios limitrofes e seus zeros.

Exemplo 3.1.1 *Seja $[p] = x^4 + [0.75, 1.25]x^3 + [-18.75, -17.75]x^2 + [-16.25, -15.75]x + [31.75, 32.25]$ Os limitrofes são:*

$$p_1(x) = x^4 + 0.75x^3 - 17.75x^2 - 16.25x + 32.25;$$

$$p_2(x) = x^4 + 1.25x^3 - 18.75x^2 - 15.75x + 31.75;$$

$$p_3(x) = x^4 + 1.25x^3 - 17.75x^2 - 15.75x + 32.25;$$

$$p_4(x) = x^4 + 0.75x^3 - 18.75x^2 - 16.25x + 31.75.$$

Os zeros estão arredondados para o número de máquina mais próximo, com 4 casas decimais, e são os seguintes:

$$z_{11} = -3.720; \quad z_{12} = -2.119; \quad z_{13} = 1.000; \quad z_{14} = 4.089.$$

$$z_{21} = -4.344; \quad z_{22} = -1.822; \quad z_{23} = 0.988; \quad z_{24} = 3.967.$$

$$z_{31} = -4.159; \quad z_{32} = -1.967; \quad z_{33} = 1.022; \quad z_{34} = 3.853.$$

$$z_{41} = -3.942; \quad z_{42} = -1.979; \quad z_{43} = 0.968; \quad z_{44} = 4.203.$$

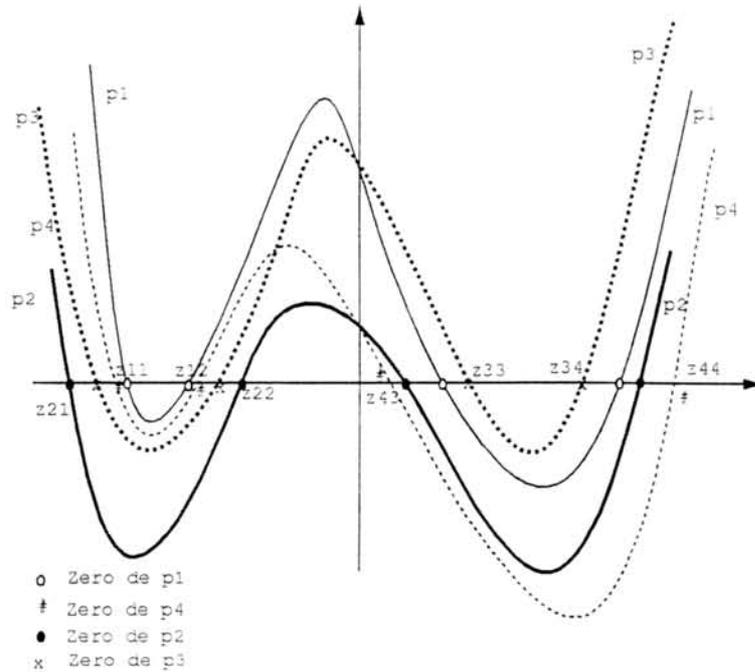


FIGURA 3.2 — Polinômios Limítrofes de $[p] = x^4 + [0.75, 1.25]x^3 + [-18.75, -17.75]x^2 + [-16.25, -15.75]x + [31.75, 32.25]$

A seqüência dos zeros é:

$$z_{21}, z_{31}, z_{41}, z_{11}, z_{12}, z_{42}, z_{32}, z_{22}, z_{43}, z_{23}, z_{13}, z_{33}, z_{34}, z_{24}, z_{14}, z_{44}$$

Os polinômios limítrofes e os zeros aparecem, fora de escala e aproximadamente na figura 3.2.

No eixo negativo os limites dos intervalos são dados pelos polinômios p_2 e p_1 ao passo que no eixo positivo, pelos zeros de p_3 e p_4 . Estes pontos delimitam todos os zeros de qualquer $p \in [p]$. Todos os zeros são reais e podemos dizer que no intervalo $[z_{21}, z_{11}]$ todo $p \in [p]$ possui seu primeiro zero negativo; em $[z_{12}, z_{22}]$ seu segundo zero negativo; em $[z_{43}, z_{33}]$ seu primeiro zero positivo e em $[z_{34}, z_{44}]$ o segundo e último zero positivo.

Exemplo 3.1.2 Seja $[p] = x^4 + [6.5, 7]x^3 + [5, 5.5]x^2 + [-32, -30]x + [-32, -30]$ Os limitrofes são:

$$p_1(x) = x^4 + 6.5x^3 + 5.5x^2 - 32x - 30;$$

$$p_2(x) = x^4 + 7x^3 + 5x^2 - 30x - 32;$$

$$p_3(x) = x^4 + 7x^3 + 5.5x^2 - 30x - 30;$$

$$p_4(x) = x^4 + 6.5x^3 + 5x^2 - 32x - 32.$$

Ver figura 3.3. Os zeros são:

$$z_{11,12} = -3.805 \pm 1.167i; \quad z_{13} = -0.928; \quad z_{14} = 2.038.$$

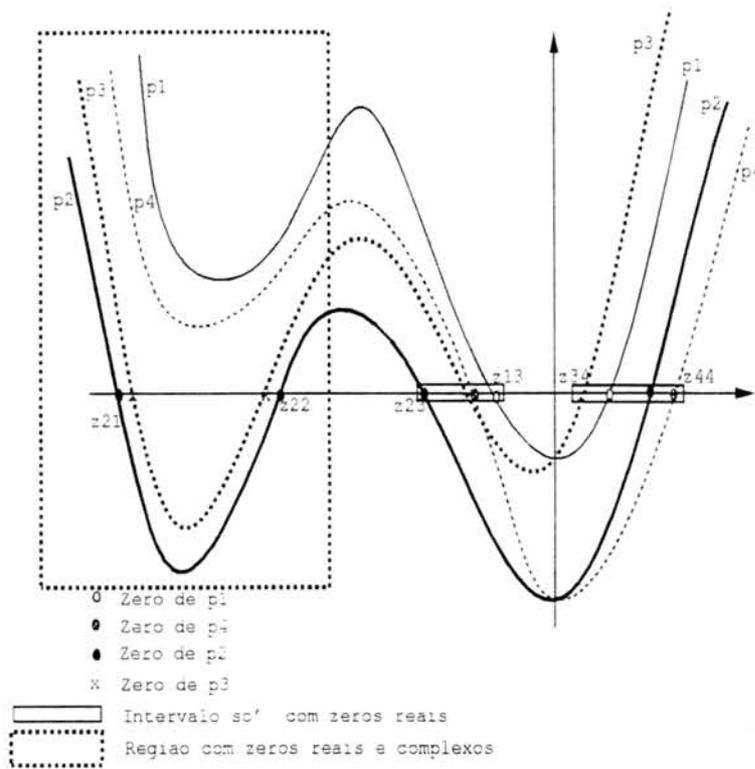


FIGURA 3.3 — Polinômios Limítrofes de $[p] = x^4 + [6.5, 7]x^3 + [5, 5.5]x^2 + [-32, -30]x + [-32, -30]$

$$z_{21} = -5.114; \quad z_{22} = -2.745; \quad z_{23} = -1.139; \quad z_{24} = 2.0.$$

$$z_{31} = -4.858; \quad z_{32} = -3.082; \quad z_{33} = -1.021; \quad z_{34} = 1.962.$$

$$z_{41,42} = -3.779 \pm 0.913i; \quad z_{43} = -1.018; \quad z_{44} = 2.077.$$

A seqüência dos zeros é:

$$z_{21}, z_{31}, z_{41} \equiv z_{42}, z_{11} \equiv z_{12}, \quad z_{32}, z_{22}, \quad z_{23}, z_{33}, z_{43}, z_{13}, \quad z_{34}, z_{24}, z_{14}, z_{44}$$

Analisando os resultados dos zeros dos limitrofes e os seus gráficos, podemos dizer que na região retangular salientada na figura 3.3, qualquer polinômio ou possui 2 zeros negativos ou possui 2 zeros complexos. No intervalo $[z_{23}, z_{13}]$ cada polinômio possui um zero negativo e em $[z_{34}, z_{44}]$ um zero positivo.

Exemplo 3.1.3 Seja $[p] = x^7 + [-4, 1]x^6 + [3, 4]x^5 + [-5, 1]x^4 + [3, 4]x^3 + [-1, 2]x^2 + [5, 6]x + [-5, 3]$ Os limitrofes são:

$$p_1(x) = x^7 + x^6 + 3x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x + 3;$$

$$p_2(x) = x^7 - 4x^6 + 4x^5 - 5x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x - 5;$$

$$p_3(x) = x^7 + x^6 + 4x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 6x + 3;$$

$$p_4(x) = x^7 - 4x^6 + 3x^5 - 5x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 5.$$

Ver figura 3.4. Os zeros são:

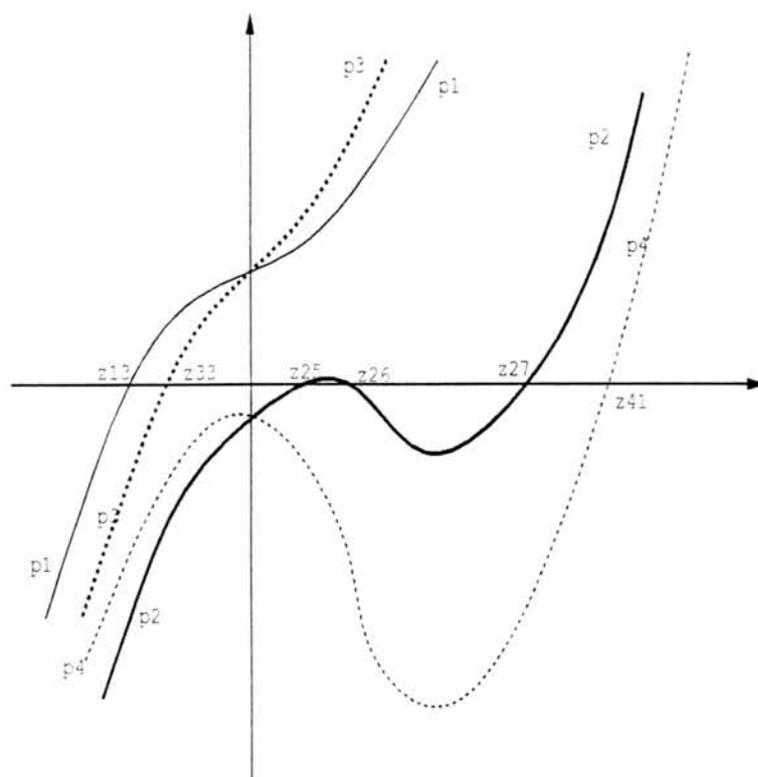


FIGURA 3.4 — Polinômios Limítrofes de $[p] = x^7 + [-4, 1]x^6 + [3, 4]x^5 + [-5, 1]x^4 + [3, 4]x^3 + [-1, 2]x^2 + [5, 6]x + [-5, 3]$

$$z_{11,12} = -0.72 \pm 1.05i; \quad z_{13} = -0.59; \quad z_{14,15} = -0.29 \pm 1.45i; \quad z_{16,17} = 0.81 \pm 0.85i.$$

$$z_{21,22} = -0.69 \pm 0.71i; \quad z_{23,24} = -0.17 \pm 1.30i; \quad z_{25} = 0.940; \quad z_{26} = 1.00; \quad z_{27} = 3.08$$

$$z_{31,32} = -0.59 \pm 1.04i; \quad z_{33} = -0.49; \quad z_{34,35} = -0.42 \pm 1.70i; \quad z_{36,37} = 0.77 \pm 0.87i.$$

$$z_{41,42} = -0.70 \pm 0.70i; \quad z_{43,44} = 0.11 \pm 1.29i; \quad z_{45,46} = 0.85 \pm 0.35i; \quad z_{47} = 3.47.$$

A seqüência dos zeros é:

$$z_{11} \equiv z_{12}, \quad z_{41} \equiv z_{42}, \quad z_{21} \equiv z_{22}, \quad z_{31} \equiv z_{32}, \quad z_{13}, \quad z_{33}, \quad z_{34} \equiv z_{35}$$

$$z_{14} \equiv z_{15}, \quad z_{43} \equiv z_{44}, \quad z_{23} \equiv z_{24}, \quad z_{36} \equiv z_{37}, \quad z_{45} \equiv z_{46}, \quad z_{25}, \quad z_{26}, \quad z_{27}, \quad z_{47}$$

Neste exemplo, não podemos separar as informações relativas a cada zero de cada polinômio ou mesmo de alguns dos zeros.

Observamos que quando os zeros são todos reais a seqüência pode ser particionada em n grupos. Caso contrário, isto não acontece. Além disso, nos dois primeiros exemplos o zero não está em nenhum dos coeficientes da família, ao passo que, no terceiro há zeros em vários coeficientes, produzindo um "faixa" onde não conseguimos isolar os zeros reais, ou os complexos em regiões bem delimitadas graficamente.

3.1.2 Enumeração dos Zeros de $[p]$

Enumerar os zeros da família $[p]$ é enumerar os zeros de cada um dos polinômios da família.

3.1.2.1 Enumeração dos Zeros Reais de $[p]$

A **Regra de Descartes** está na base dos processos de enumeração vistos no capítulo dois. Esta regra pode ser facilmente adaptada ao caso intervalar.

Teorema 3.1.2 (Regra de Descartes para o polinômio intervalar) *Seja dado um polinômio intervalar $[p]$ de grau n , na variável x . Se $(\forall i, i = 0(1)n)[\alpha_i \geq 0 \vee \beta_i \leq 0]$ então vale a Regra de Descartes, isto é, o número de zeros positivos de qualquer $p(x) \in [p]$ nunca é maior que o número de trocas de sinal T , na seqüência dos seus coeficientes não nulos. Se é menor, então é sempre por um número par.*

Prova:

Todo polinômio $p \in [p]$ tem coeficientes reais e como o sinal de cada coeficiente intervalar não muda, pela hipótese, então a seqüência de sinais de qualquer p é a mesma que a seqüência dos sinais dos coeficientes $A_i, i = 0(1)n$. Logo podemos aplicar a regra de Descartes para a seqüência dos sinais de A_i .

cqd

Exemplo 3.1.4 *Seja*

$$[p](x) = x^4 + [-17, -16]x^3 + [34, 47]x^2 + [172, 432]x + [-1440, -420]$$

A seqüência dos sinais é $+, -, +, +, -$ e portanto $T = 3$. Analisando o gráfico de $[p]$ pelos polinômios limítrofes, vemos que há polinômios com 3 zeros positivos e outros com um só zero positivo. Analisando a seqüência dos sinais de $[p](-x)$ temos o seguinte polinômio transformado: $[p](-x) = x^4 + [16, 17]x^3 + [34, 47]x^2 + [-432, -172]x + [-1440, -420]$ cuja seqüência de sinais é $+, +, +, -, -$ que resulta em $T' = 1$. Assim todo polinômio $p \in [p]$ possui um zero negativo. Ver figura 3.5.

Se, por outro lado, ocorre que algum dos coeficientes de $[p]$ possui o zero, isto é, troca de sinal, então existem duas possibilidades de variação de cada coeficiente nesta situação: o valor positivo e o negativo. Assim, se em k coeficientes tivermos que $0 \in A_k, 0 \leq k \leq n - 1$, então teremos 2^k seqüências de sinais diferentes, produzindo, cada uma delas, um valor para T .

A enumeração efetiva dos zeros de um polinômio real pode ser obtida pelos métodos vistos na capítulo dois, tendo cada um suas peculiaridades. A enumeração dos polinômios limítrofes, mesmo analisando o maximal e o minimal de cada semi-eixo, não é suficiente para determinar o número de zeros de qualquer polinômio da família. Vejamos os resultados do exemplo anterior.

Exemplo 3.1.5 *Os polinômios limítrofes do polinômio anterior são:*

$$p_1(x) = x^4 - 17x^3 + 47x^2 + 172x - 420, \quad p_2(x) = x^4 - 16x^3 + 34x^2 + 432x - 1440$$

$$p_3(x) = x^4 - 16x^3 + 47x^2 + 432x - 420, \quad p_4(x) = x^4 - 17x^3 + 34x^2 + 172x - 1440$$

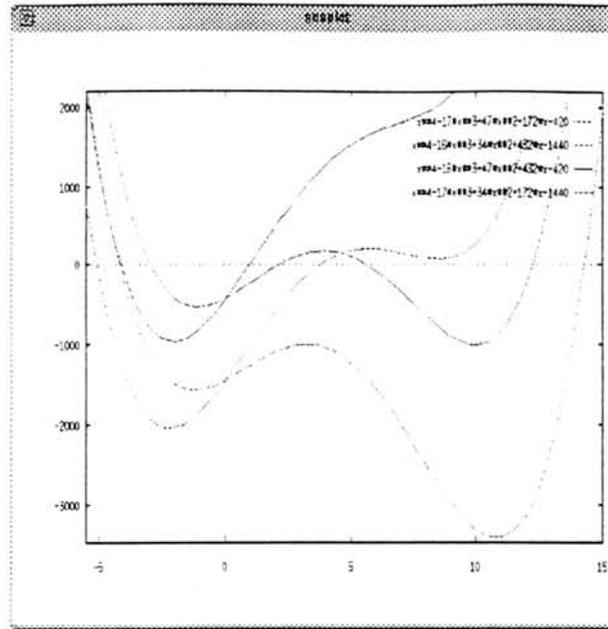


FIGURA 3.5 — Polinômios Limítrofes de $[p](x) = x^4 + [-17, -16]x^3 + [34, 47]x^2 + [172, 432]x + [-1440, -420]$

O número efetivo de zeros positivos de p_3 e p_4 é 1, respectivamente o maximal e o minimal, mas o número de zeros positivos de p_1 é três, e p_1 evidentemente, está na faixa determinada por p_3 e p_4 . O resultado é compreensível uma vez que $T = 3$.

Assim sendo, a Regra de Descartes é válida para polinômios intervalares desde que $0 \notin A_i$, $i = 0(1)n$, e então temos algumas situações onde a enumeração é univocamente definida. Neste caso, se o número de trocas de sinal T é nulo então podemos garantir que nenhum polinômio $p \in [p]$ possui zeros positivos. Se $T = 1$ então podemos garantir que todos polinômios $p \in [p]$ possuem um zero positivo. Analogamente, os resultados valem para T' , o número de trocas de sinal de $[p](-x)$.

3.1.2.2 Enumeração dos Zeros Complexos de $[p]$

Uma regra menos geral que a regra de Descartes é a regra de **Gua** pois ela não fornece o número dos zeros e sim um indicativo de que pode haver zeros complexos. Contudo, poder ser que um polinômio tenha zeros complexos mas a hipótese da regra não seja satisfeita, a condição é apenas suficiente.

Teorema 3.1.3 (Regra de Gua para Polinômios Reais) Dado $p(x)$ de grau n sem zeros nulos e se para algum k , $1 \leq k < n$, tivermos

$$a_k^2 \leq a_{k-1} \cdot a_{k+1}$$

então $p(x)$ possui zeros complexos.

Teorema 3.1.4 (Regra de Gua para Polinômios Intervalares) Seja $[p]$ tal que $0 \notin A_i = [\alpha_i, \beta_i]$, $i = 0(1)n$. Se para algum k , $1 \leq k < n$, tivermos, para $P_k = A_{k-1} \times A_{k+1} = [\pi_k, \rho_k]$,

$$\min\{\alpha_k^2, \beta_k^2\} \leq \rho_k, \quad (3.12)$$

então $[p]$ possui polinômios com zeros complexos.

Prova:

Na fórmula anterior o produto é o produto intervalar, que contém justamente todos os produtos possíveis de qualquer elemento dos dois fatores A_{k-1} e A_{k+1} . Como no lado esquerdo da fórmula 3.12 estamos considerando o mínimo dos quadrados dos extremos do intervalos A_k segue que esta fórmula generaliza a condição de Gua para intervalos. Logo, se a regra de Gua é satisfeita em um dos polinômios da família $[p]$, então a condição 3.12 também é satisfeita.

cqd

Exemplo 3.1.6 Seja $[p](x) = [1, 2]x^5 + [2, 3]x^4 + x^3 + 2x^2 + [-6, -5]x + [3, 4]$

Para $k = 3$ vale que $\min\{1^2, 1^2\} = 1$ e $[2, 3] \times [2, 2] = [4, 6]$ Logo $1 < 6$ então $[p]$ possui polinômios com zeros complexos, a saber todos polinômios limítrofes têm zeros complexos.

3.1.2.3 Seqüência dos Zeros de $[p]$

Observando a seqüência dos zeros dos limítrofes podemos chegar a algumas conclusões. Seja \mathcal{O}_- a seqüência de todos os zeros reais negativos dos polinômios maximal e minimal negativos. Seja \mathcal{O}_+ a seqüência dos zeros reais positivos dos polinômios maximal e minimal positivos. Vamos renomear um zero de um polinômio maximal por Z (maiúsculo) e um zero de um minimal por z (minúsculo).

No exemplo 3.1.1, observando a figura 3.2, e omitindo os zeros que não são referentes ao maximal ou ao minimal, temos:

$$\mathcal{O}_- = \{z_{21}, Z_{11}, Z_{12}, z_{22}\}$$

$$\mathcal{O}_+ = \{z_{43}, Z_{33}, Z_{34}, z_{44}\}$$

Para cada seqüência de zeros consecutivos do mesmo polinômio, consideremos apenas um deles, desprezando os índices, temos:

$$\mathcal{O}'_- = \{z, Z, z\}$$

$$\mathcal{O}'_+ = \{z, Z, z\}$$

Observamos que há $\#\mathcal{O}'_- - 1 = 3 - 1 = 2$ intervalos que possuem zeros reais negativos de $[p]$, a saber $[z_{21}, Z_{11}]$ e $[Z_{12}, z_{22}]$. O mesmo vale para a seqüência dos positivos e temos $\#\mathcal{O}'_+ - 1 = 3 - 1 = 2$ e os intervalos são $[z_{43}, Z_{33}]$ e $[Z_{34}, z_{44}]$.

No exemplo 3.1.2 temos:

$$\mathcal{O}_- = \{z_{21}, z_{22}, z_{23}, Z_{13}\}$$

$$\mathcal{O}_+ = \{Z_{34}, z_{44}\}$$

$$\mathcal{O}'_- = \{z, Z\}$$

$$\mathcal{O}'_+ = \{Z, z\}$$

Logo, temos $\#\mathcal{O}'_- - 1 = 2 - 1 = 1$ um intervalo com um zero negativo e um positivo, que são: $[z_{23}, Z_{13}]$ e $[Z_{34}, z_{44}]$, respectivamente, pois $\#\mathcal{O}'_+ - 1 = 2 - 1 = 1$.

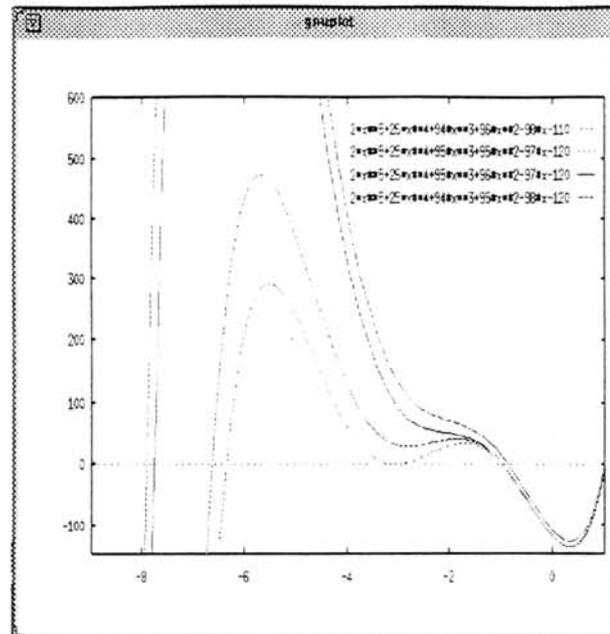


FIGURA 3.6 — Polinômios limítrofes de $[p](x) = 2x^5 + [25, 26]x^4 + [94, 95]x^3 + [95, 96]x^2 + [-98, -97]x + [-120, -110]$

Já no exemplo 3.1.3 não existe um intervalo que contenha todos os zeros reais negativos ou positivos, de forma isolada.

Exemplo 3.1.7 Seja $[p](x) = 2x^5 + [25, 26]x^4 + [94, 95]x^3 + [95, 96]x^2 + [-98, -97]x + [-120, -110]$, visto na figura 3.6

$$\mathcal{O}_- = \{Z_{11}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}, Z_{12}\} \quad \mathcal{O}_+ = \{Z_{13}, z_{44}\}$$

$$\mathcal{O}'_- = \{Z, z, Z\} \quad \mathcal{O}'_+ = \{Z, z\}$$

Assim temos $\#\mathcal{O}'_- - 1 = 3 - 1 = 2$ intervalos que só contém zeros reais negativos de qualquer $p \in [p]$, a saber $[z_{11}, z_{21}]$ e $[z_{24}, Z_{12}]$ e temos $\#\mathcal{O}'_+ = 2 - 1 = 1$ intervalo que contém só zeros positivos que é $[Z_{13}, z_{44}]$.

Se todos polinômios de $[p]$ possuem só zeros reais e distintos, então a seqüência de zeros obedece a um padrão que varia conforme n for par ou ímpar e o sinal do coeficiente dominante for positivo ou negativo. Vamos considerar, sem perda de generalidade, que $\alpha_n > 0$.

Vejamos os casos possíveis:

Seja $n = 2$, então temos três situações para o gráfico dos limítrofes e para os zeros de $[p]$.

(a) Todos os zeros são negativos, ver figura 3.7. Os intervalos são:

$$Z = [z_{21}, Z_{11}] \cup [Z_{12}, z_{21}]$$

(b) Todos são positivos, ver figura 3.8. Os intervalos são:

$$Z = [z_{41}, Z_{31}] \cup [Z_{32}, z_{42}]$$

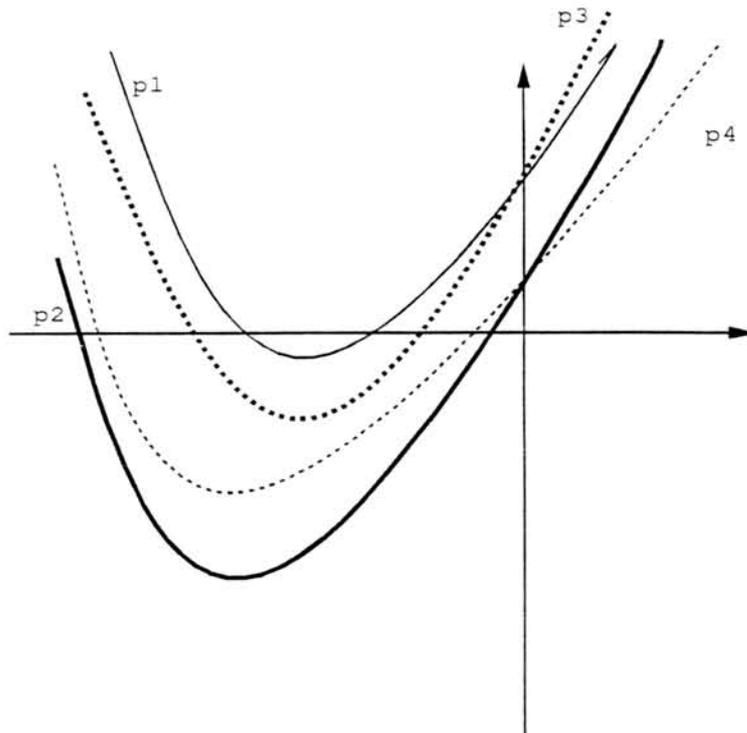


FIGURA 3.7 — Grau 2:Dois zeros negativos

(c) Um é negativo e o outro é positivo, ver figura 3.9.

$$Z = [z_{21}, Z_{11}] \cup [Z_{31}, z_{42}]$$

Seja $n = 3$, então temos quatro situações para o gráfico dos limítrofes e para os zeros de $[p]$.

(a) Todos os zeros são negativos:

$$Z = [Z_{11}, z_{21}] \cup [z_{22}, Z_{12}] \cup [Z_{13}, z_{23}]$$

(b) Todos são positivos;

$$Z = [Z_{31}, z_{41}] \cup [z_{42}, Z_{32}] \cup [Z_{33}, z_{43}]$$

(c) Um zero é negativo e dois positivos:

$$Z = [Z_{11}, z_{21}] \cup [z_{42}, Z_{32}] \cup [Z_{33}, z_{43}]$$

(d) Dois zeros negativos e um positivo: Ver figura 3.10.

$$Z = [Z_{11}, z_{21}] \cup [z_{22}, Z_{12}] \cup [Z_{33}, z_{43}]$$

Seja $n = 4$, então temos cinco situações :

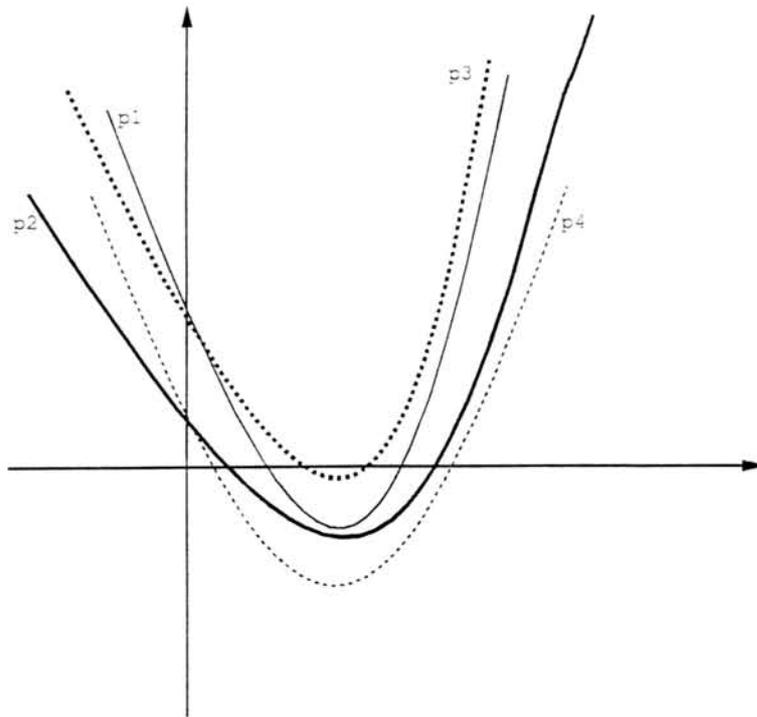


FIGURA 3.8 — Grau 2: Todos zeros positivos

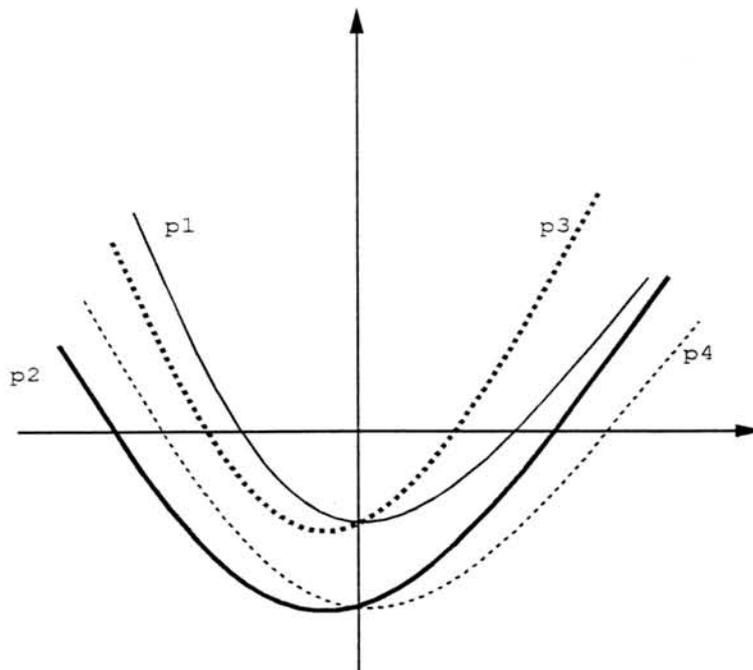


FIGURA 3.9 — Grau 2: Um zero negativo, um zero positivo

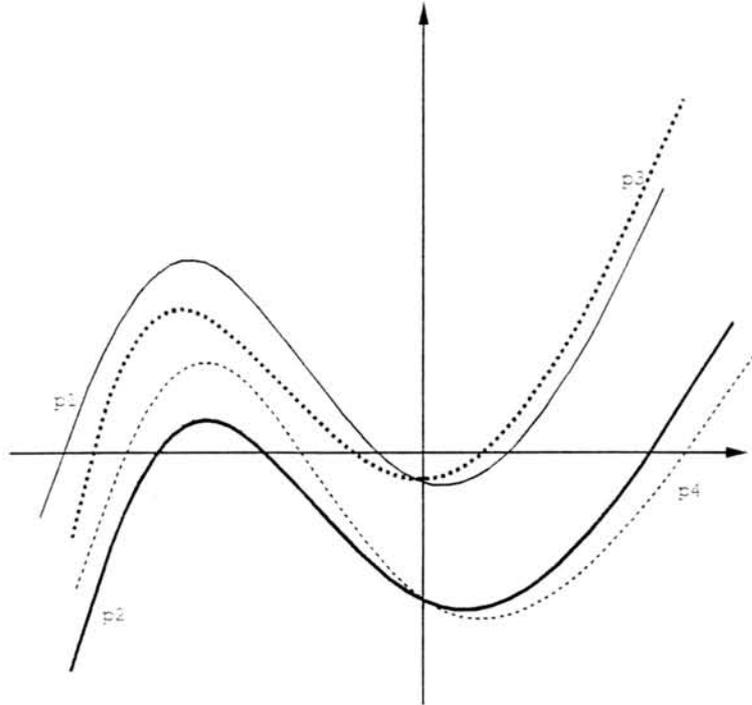


FIGURA 3.10 — Grau 3: Dois negativos, um positivo

(a) Todos os zeros são negativos:

$$Z = [z_{21}, Z_{11}] \cup [Z_{12}, z_{22}] \cup [z_{23}, Z_{1,3}] \cup [Z_{14}, z_{24}]$$

(b) Todos são positivos:

$$Z = [z_{41}, Z_{31}] \cup [Z_{32}, z_{42}] \cup [z_{43}, Z_{33}] \cup [Z_{34}, z_{44}]$$

(c) Um zero é negativo e três positivos:

$$Z = [z_{21}, Z_{11}] \cup [Z_{31}, z_{42}] \cup [z_{43}, Z_{33}] \cup [Z_{34}, z_{44}]$$

(d) Dois zeros negativos e dois positivos:

$$Z = [z_{21}, Z_{11}] \cup [Z_{12}, z_{22}] \cup [z_{42}, Z_{33}] \cup [Z_{34}, z_{44}]$$

(e) Três zeros negativos e um positivo:

$$Z = [z_{21}, Z_{11}] \cup [Z_{12}, z_{22}] \cup [z_{13}, Z_{23}] \cup [Z_{34}, z_{44}]$$

Teorema 3.1.5 *Seja $[p]$ um polinômio intervalar que possui só zeros reais. Seja $\alpha_n > 0$, s.p.g. Os zeros de qualquer $p \in [p]$ estão situados entre os zeros dos polinômios limítrofes da seguinte maneira:*

(I) *Se n é par:*

(a) Todos zeros são negativos:

$$Z = [z_{21}, Z_{11}] \cup [Z_{12}, z_{22}] \cup [z_{23}, Z_{1,3}] \cup \dots \cup [Z_{1n}, z_{2n}]$$

(b) Todos zeros são positivos:

$$Z = [z_{41}, Z_{31}] \cup [Z_{32}, z_{42}] \cup [z_{43}, Z_{33}] \cup \dots \cup [Z_{3n}, z_{4n}]$$

(c) k zeros negativos e $n - k$ zeros positivos: $k = 1(1)n - 1$

$$Z = \underbrace{[z_{21}, Z_{11}] \cup [Z_{12}, z_{22}] \cup \dots \cup [z_{1k}, Z_{2k}] \cup [z_{4k}, Z_{3k}]}_{\text{negativos}} \cup \underbrace{[Z_{3k+1}, z_{4k+1}] \cup \dots \cup [Z_{3n}, z_{4n}]}_{\text{positivos}}$$

(II) Se n é ímpar:

(a) Todos zeros são negativos:

$$Z = [Z_{11}, z_{21}] \cup [z_{22}, Z_{12}] \cup \dots \cup [Z_{1n}, z_{2n}]$$

(b) Todos zeros são positivos:

$$Z = [Z_{31}, z_{41}] \cup [z_{42}, Z_{32}] \cup \dots \cup [Z_{3n}, z_{4n}]$$

(c) k zeros são negativos e $n - k$ zeros são positivos:

$$Z = \underbrace{[Z_{11}, z_{21}] \cup [z_{22}, Z_{12}] \cup \dots \cup [z_{2k}, Z_{1k}]}_{\text{negativos}} \cup \underbrace{[Z_{3k}, z_{4k}] \cup \dots \cup [Z_{3n}, z_{4n}]}_{\text{positivos}}$$

Os demais métodos para enumerar os zeros de $[p]$ citados no capítulo dois tais como Schur ou Routh não podem ser imediatamente aplicados ao caso intervalar.

3.1.3 Localização dos Zeros de $[p]$

A localização dos zeros de $[p]$ depende naturalmente da localização dos zeros dos polinômios limítrofes de uma maneira muito simples.

No caso das cotas dos zeros reais temos que para $[p](x) = \sum_{i=0}^n A_i x^i$ com $A_i = [\alpha_i, \beta_i]$ e α_n positivo, então a cota dos zeros positivos de $[p]$ é dada pela cota dos zeros positivos de p_4 , caso contrário pela cota de p_3 .

A cota dos zeros negativos será dada pela cota de p_2 se n for par, caso contrário será dada pela cota de p_1 , para α_n positivo. Se $\alpha_n \leq 0$, invertemos os polinômios.

Se for considerada uma cota também válida para os zeros complexos, então simplificamos o procedimento tomando simplesmente a maior cota dos 4 polinômios limítrofes. Iremos usar sempre a cota de Fujiwara para todos zeros, inclusive dos complexos, dada no capítulo dois, por 2.12.

3.1.4 Separação dos Zeros de $[p]$

Os resultados válidos para a *enumeração* não são fechados, isto é, permitem apenas que tenhamos um conjunto de possibilidades para a solução .

Para a família $[p](x)$ a *localização* pela maior cota dos polinômios limítrofes fornece um único resultado. A partir deste resultado podemos começar a pesquisar maneiras para fazer a separação dos zeros da família.

Em alguns casos, podemos localizar uma região em que cada polinômio da família possui um só zero real ou um só zero complexo, mas nem sempre isto ocorre. Vejamos alguns exemplos. Os resultados a seguir foram obtidos mediante análise dos polinômios limítrofes.

Exemplo 3.1.8 *Seja $[p](x) = x^3 + [-6, -3]x^2 + [-28, -19]x + [24, 60]$. Ver alguns polinômios na figura 3.1. Os polinômios limítrofes são os seguintes:*

$$p_1(x) = x^3 - 3x^2 - 28x + 60; \quad p_2(x) = x^3 - 6x^2 - 19x + 24;$$

$$p_3(x) = x^3 - 3x^2 - 19x + 60; \quad p_4(x) = x^3 - 6x^2 - 28x + 24$$

A separação destes polinômios pelo método de Uspensky Modificado fornece:

$$L1 = [[-16, 0], [0, 4], [4, 8]]; \quad L2 = [[-16, 0], [8, 8], [0, 8]]; \\ L3 = [[-16, 0], [4, 4], [0, 4]]; \quad L4 = [[-16, 0], [0, 8], [8, 16]]$$

Todos polinômio $p(x) \in [p]$ possuem só zeros reais e daí temos seus zeros isolados nos seguintes intervalos:

$$[-6, 0], [0, 4], [4, 16]$$

ou seja, cada um dos infinitos polinômios reais da família $[p](x)$ possuirá um zero negativo em $[-6, 0]$ e dois zeros positivos, um em $[0, 16]$ e outro em $[4, 10]$, todos eles simples.

Este resultado é confirmado teoricamente com os teorema 3.2.7 e 4.2.4.

Porém, no exemplo seguinte, não podemos isolar todos os zeros.

Exemplo 3.1.9 *Seja $[p](x) = x^3 + [-6, -4]x^2 + [-11, -1]x + [6, 30]$. Ver o gráfico dos polinômios limítrofes na figura 3.11*

Os polinômios limítrofes são:

$$p_1(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30; \quad p_2(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6;$$

$$p_3(x) = x^3 - 4x^2 - x + 30; \quad p_4(x) = x^3 - 6x^2 - 11x + 6$$

A separação destes polinômios fornece:

$$L1 = [[-16, 0], [0, 4], [4, 8]]; \quad L2 = [[-16, 0], [0, 4], [4, 8]]; \\ L3 = [[-16, 0]]; \quad L4 = [[-16, 0], [0, 4], [4, 8]]$$

Neste caso, não são satisfeitas as condições dos teoremas. Contudo, podemos garantir que em $[-4, 0]$ cada polinômio real possui um zero real simples, mas no caso do eixo positivo tal não ocorre. Temos: $p_1(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ que pertence à família mas possui zeros complexos no semiplano positivo.

Assim, se delimitarmos a região do plano complexo dada pelo quadrado de vértices $(0, 0), (4, 0), (4, 50), (0, 50)$, (onde 4 é uma extremidade do intervalo da

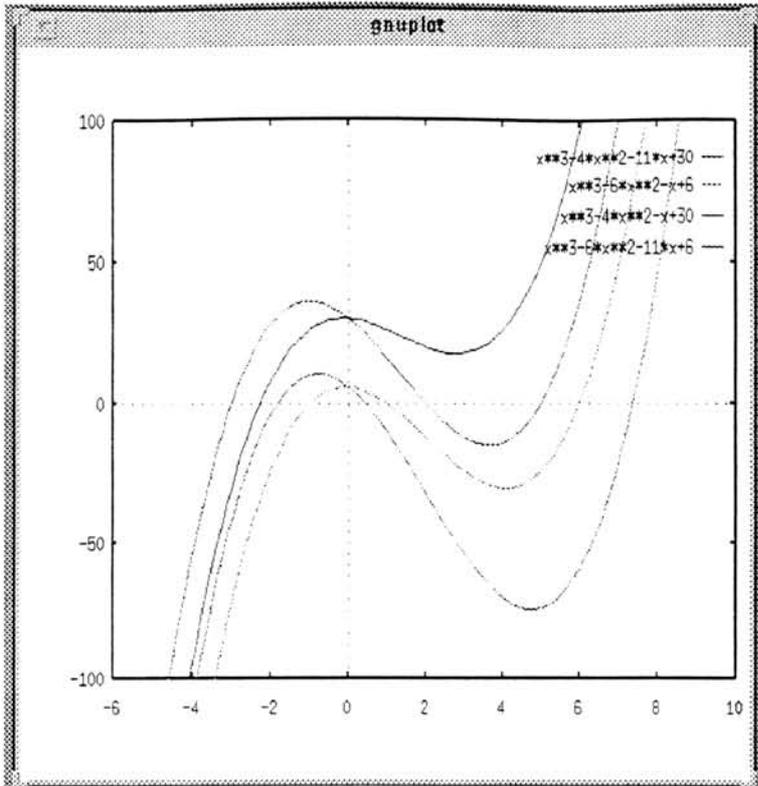


FIGURA 3.11 — Polinômios Limítrofes de $x^3 + [-6, -4]x^2 + [-11, -1]x + [6, 30]$

separação de p_1 e 50 é uma cota para p_1 para $x \in [0, 4]$ constatamos que $[p](x)$ possui ou um zero real simples ou um zero complexo. Inclusive podemos ter um polinômio que tenha um zero duplo em $[0, 8]$ e só um zero real negativo. Esta é a melhor informação a ser dada.

Exemplo 3.1.10 Seja $[p](x) = x^5 + [-4, -3]x^3 + [2, 3]x^2 + [1, 3]x + [-5, -4]$. Os polinômios limítrofes são:

$$p_1(x) = x^5 - 4x^3 + 3x^2 + x - 4; \quad p_2(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 5$$

$$p_3(x) = x^5 - 3x^3 + 3x^2 + 3x - 4; \quad p_4(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 + x - 5$$

Ver figura 3.12. A separação fornece:

$$L1 = [[-4, -2], [-2, 0], [0, 2]]; \quad L2 = [[0, 2]];$$

$$L3 = [[-2, \frac{-3}{2}], [\frac{-3}{2}, -1], [1, 1]]; \quad L4 = [[-4, -2], [-2, 0], [0, 4]]$$

Logo em $[0, 4]$ há um zero positivo mas não podemos separar os zeros reais negativos. Há zeros complexos com parte real positiva e negativa. Isto é obtido da separação dos zeros complexos:

$$LC1 = [[8i, 8]]; \quad LC2 = [[-4 + 4i, 4], [4i, 4]]$$

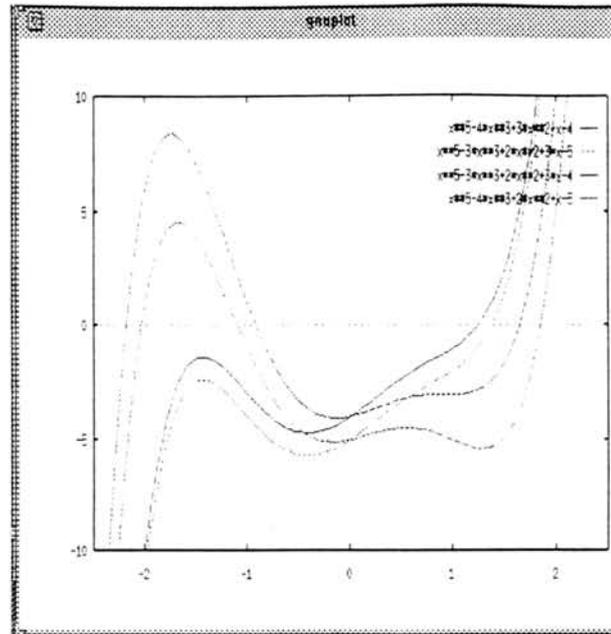


FIGURA 3.12 — Polinômios limitrofes de $[p](x) = x^5 + [-4, -3]x^3 + [2, 3]x^2 + [1, 3]x + [-5, -4]$

$$LC3 = [[4i, 4]; \quad LC4 = [[8i, 8]]$$

Logo em $[0, 4]$ há um zero positivo para todo $p(x) \in [p]$. Há polinômios com zeros complexos com parte real positiva e negativa e há polinômios com dois zeros reais negativos mas há polinômios que não possuem zeros negativos, a saber p_2 .

Neste caso, os polinômios que possuem dois zeros negativos não podem ser separados em dois intervalos menores apenas baseados na informação da separação dos limitrofes. Isto ocorre pois podemos ter inclusive polinômios com um zero duplo, e em princípio mais de um. O intervalo onde estes zeros duplos podem ocorrer depende de outros resultados: encontrar o mínimo de p_1 e p_3 no intervalo $[0, -3]$; o máximo de p_2 e p_4 neste mesmo intervalo. Mas determinando este intervalo, onde pode haver zeros duplos, poderíamos, então, isolar o primeiro intervalo só com um zero negativo para todos polinômios que tivessem dois zeros negativos, e a seguir o outro intervalo com o segundo zero negativo. Observamos, então que no intervalo $[-3, 0]$ os zeros negativos de $[p]$ não são separáveis.

3.2 Resultados Conhecidos

Vamos apresentar a seguir, um resumo dos trabalhos que tratam diretamente ou indiretamente a questão de *estabilidade* de polinômios intervalares como um subsídio para o problema colocado e a questão da separação propriamente dita.

3.2.1 Polinômio Intervalar de Hurwitz

O primeiro trabalho publicado sobre a estabilidade de um polinômio intervalar é devido a Vladimir L. Kharitonov. Nesse trabalho, Kharitonov apresenta o resultado seminal onde prova o teorema que recebeu o seu nome, ver [KHA 78].

Teorema 3.2.1 (Kharitonov 1) *Seja $[p](x) = \sum_{i=0}^n [\alpha_i, \beta_i]z^i$. A estabilidade de Hurwitz para os quatro polinômios vértices:*

$$\begin{aligned} p^{(1)}(z) &= \alpha_0 + \alpha_1 z + \beta_2 z^2 + \beta_3 z^3 + \alpha_4 z^4 + \alpha_5 z^5 + \beta_6 z^6 + \dots \\ p^{(2)}(z) &= \beta_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \beta_3 z^3 + \beta_4 z^4 + \alpha_5 z^5 + \alpha_6 z^6 + \dots \\ p^{(3)}(z) &= \beta_0 + \beta_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \beta_4 z^4 + \beta_5 z^5 + \alpha_6 z^6 + \dots \\ p^{(4)}(z) &= \alpha_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \alpha_4 z^4 + \beta_5 z^5 + \beta_6 z^6 + \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

é necessária e suficiente para que todo polinômio da família $[p](x)$ seja de Hurwitz.

Os quatro polinômios acima são chamados de *polinômios vértices de Kharitonov* ou simplesmente **polinômios de Kharitonov**.

Em trabalho mais recente, ([KHA 93]), Kharitonov estende a condição de estabilidade do polinômio intervalar a outras regiões que não só o semiplano esquerdo do plano complexo.

Um polinômio é D -estável (ou também D -estável de Hurwitz) se todos os seus zeros estão na região D .

Teorema 3.2.2 (Kharitonov 2) *Seja*

$$D_\alpha = \{z = re^{i\phi} | r > 0 \wedge \phi \in (\pi - \alpha, \pi + \alpha)\}$$

onde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

A estabilidade dos polinômios vértices dados por

$$\{p(z) \in [p](z) | a_k \in \{[\alpha_k, \beta_k]\}, k = 0(1)n\}$$

implica na D_α -estabilidade de toda família.

Podem ocorrer reduções para alguns ângulos. Se $\alpha = \pi/3$, por exemplo, o número de polinômios de teste é reduzido de 2^{n+1} para 6 polinômios, ver [SOH 90].

Exemplo 3.2.1 *Seja $[p](z) = 2z^4 + [4, 5]z^3 + [9, 10]z^2 + [10, 11]z + [4, 5]$. Ver figura 3.13. Então os polinômios de teste são:*

$$\begin{aligned} p^{(1)}(z) &= 4 + 10z + 10z^2 + 5z^3 + 2z^4 \\ p^{(2)}(z) &= 5 + 10z + 9z^2 + 5z^3 + 2z^4 \\ p^{(3)}(z) &= 5 + 11z + 9z^2 + 4z^3 + 2z^4 \\ p^{(4)}(z) &= 4 + 11z + 10z^2 + 4z^3 + 2z^4 \end{aligned}$$

Testando os quatro polinômios reais com o algoritmo de Trevisan citado na secção 1.4, temos:

$$\begin{aligned} \text{hurw}(p^{(1)}(z)) &= \text{true}, \\ \text{hurw}(p^{(2)}(z)) &= \text{true}, \\ \text{hurw}(p^{(3)}(z)) &= \text{true}, \\ \text{hurw}(p^{(4)}(z)) &= \text{true}. \end{aligned}$$

No próximo exemplo, veremos que com uma variação semelhante a do exemplo anterior, não ocorre o mesmo resultado.

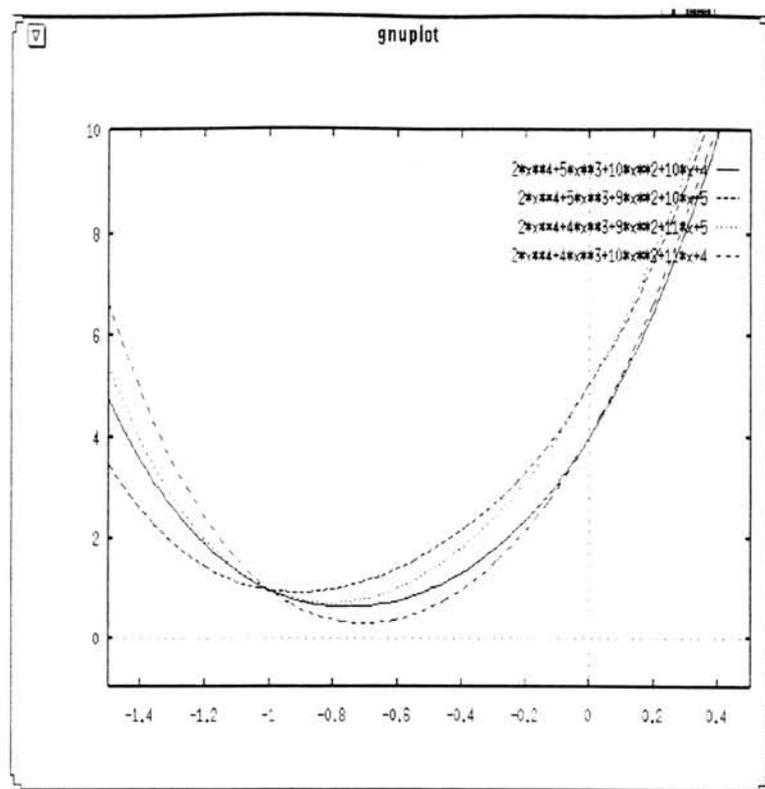


FIGURA 3.13 — Polinômios de Kharitonov para $[p](z) = 2z^4 + [4, 5]z^3 + [9, 10]z^2 + [10, 11]z + [4, 5]$

Exemplo 3.2.2 Seja $[p](z) = [1, 2]z^4 + [5, 7]z^3 + [6, 10]z^2 + [9, 10]z + [4, 5]$. Ver figura 3.14. Então os polinômios de teste são:

$$\begin{aligned} p^{(1)}(z) &= 4 + 9z + 10z^2 + 7z^3 + z^4, \\ p^{(2)}(z) &= 5 + 9z + 6z^2 + 7z^3 + 2z^4, \\ p^{(3)}(z) &= 5 + 10z + 6z^2 + 5z^3 + 2z^4, \\ p^{(4)}(z) &= 4 + 10z + 10z^2 + 5z^3 + z^4. \end{aligned}$$

Testando os quatro polinômios reais com o mesmo algoritmo da seção 1.4 temos:

$$\text{hurw}(p^{(1)}(z)) = \text{false},$$

$$\text{hurw}(p^{(2)}(z)) = \text{false},$$

$$\text{hurw}(p^{(3)}(z)) = \text{true},$$

$$\text{hurw}(p^{(4)}(z)) = \text{true}.$$

Logo $[p](z)$ do segundo exemplo não é um polinômio intervalar de Hurwitz. Estes dois exemplos sugerem a seguinte questão:

Dado um polinômio de Hurwitz qual a variação que podem ter seus coeficientes de modo que o polinômio modificado ainda seja de Hurwitz?

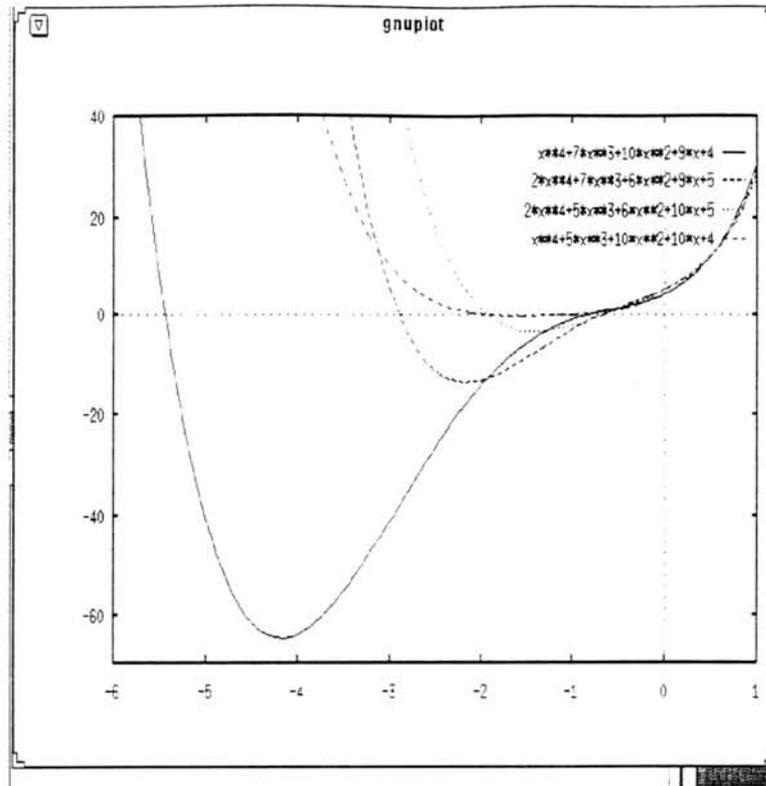


FIGURA 3.14 — Polinômios de Kharitonov para $[p](z) = [1, 2]z^4 + [5, 7]z^3 + [6, 10]z^2 + [9, 10]z + [4, 5]$

No trabalho de Guiver e Bose, ([BOS 83]) tal problema é resolvido para polinômios de grau $n \leq 4$, onde é dada a máxima amplitude para a_i , ou seja o maior intervalo $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ que contenha a_i e que $[p](x)$ seja de Hurwitz.

Para o caso de um polinômio de grau n qualquer Barmish [BAR 84] desenvolveu um trabalho baseado no teorema 3.2.1 de Kharitonov. A variação é suposta estar restrita a um conjunto de pesos não negativos w_i , e $\bar{w}_i, i = 0(1)n - 1$ onde o polinômio de grau n é unitário. Assim se:

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

então $q(x) = x^n + \gamma_{n-1}x^{n-1} + \dots + \gamma_2x^2 + \gamma_1x + \gamma_0$ é dito ϵ -admissível se os coeficientes γ_i são tais que

$$a_i - w_i\epsilon < \gamma_i < a_i + \bar{w}_i\epsilon \quad i = 0(1)n - 1.$$

Neste trabalho são construídas 4 matrizes $Q_i(\epsilon)$, $i = 1(1)4$, para o teste da condição de Hurwitz onde os coeficientes considerados são os extremos inferiores ou superiores conforme a regra de construção dos 4 polinômios $p^{(i)}(z)$ do teorema de Kharitonov 1.

Seja $\Delta_{ij}(\epsilon)$ o $j^{\text{ésimo}}$ menor principal dominante das matrizes $Q_i(\epsilon), i = 1(1)4$, e definimos

$$\epsilon_i^* := \min\{\epsilon \geq 0 \mid \exists j \in N, j \leq n \text{ tal que } \Delta_{ij}(\epsilon) \leq 0\}, \quad (3.14)$$

e então segue:

$$\epsilon_{max} = \min\{\epsilon_i^*\}, \quad i = 1(1)4.$$

Exemplo 3.2.3 Seja $p(x) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 8x + 3$, que é um polinômio de Hurwitz. Seja $w_i = \bar{w}_i = 1$. O polinômio intervalar resultante é:

$$q(x) = x^4 + [5 - \epsilon, 5 + \epsilon]x^3 + [8 - \epsilon, 8 + \epsilon]x^2 + [8 - \epsilon, 8 + \epsilon]x + [3 - \epsilon, 3 + \epsilon].$$

Assim os polinômios de Kharitonov são: $q^{(1)}(x) = (3 - \epsilon) + (8 - \epsilon)x + (8 + \epsilon)x^2 + (5 + \epsilon)x^3 + x^4$ e $q^{(3)} = 3 + \epsilon + (8 + \epsilon)x + (8 - \epsilon)x^2 + (5 - \epsilon)x^3 + x^4$ e analogamente temos os demais dois casos. A matriz é referente ao polinômio $q^{(3)}(x)$ é:

$$Q_3(\epsilon) = \begin{bmatrix} 5 - \epsilon & 8 + \epsilon & 0 & 0 \\ 1 & 8 + \epsilon & 3 - \epsilon & 0 \\ 0 & 5 - \epsilon & 8 + \epsilon & 0 \\ 0 & 1 & 8 - \epsilon & 3 - \epsilon \end{bmatrix}$$

e analogamente construímos as demais matrizes.

Para que o menor principal dominante de $Q_i(\epsilon)$ seja positivo temos as seguintes condições:

$$\begin{aligned} Q_1(\epsilon) : & \quad \epsilon < 5 \quad \epsilon < 8 \quad \epsilon^2 - 75\epsilon + 181 > 0 \\ Q_2(\epsilon) : & \quad \epsilon < 3 \quad \epsilon < 8 \quad \epsilon^2 + 75\epsilon + 181 > 0 \\ Q_3(\epsilon) : & \quad \epsilon < 3 \quad \epsilon < 5 \quad \epsilon^2 + 55\epsilon + 181 > 0 \\ Q_4(\epsilon) : & \quad \epsilon < 8 \quad \quad \quad \epsilon^2 + 55\epsilon + 181 > 0 \end{aligned}$$

Usando 3.14 temos

$$\epsilon_1^* = 2.5, \quad \epsilon_2^* = 3, \quad \epsilon_3^* = 3, \quad \epsilon_4^* = 1.81$$

Logo $\epsilon_{max} = 1.81$.

A matriz Q_i tem uma construção diferente da feita anteriormente em 1.13 mas ambas são equivalentes, e neste caso a regra geral é:

$$\mathcal{H}(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}) = \begin{bmatrix} \gamma_{n-1} & \gamma_{n-3} & \gamma_{n-5} & \dots & \gamma_{n-1-2l} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-4} & \dots & \gamma_{n-2l} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{n-1} & \gamma_{n-3} & \dots & \gamma_{n+1-2l} & \gamma_{n-1-2l} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_{n-2} & \dots & \gamma_{n+2-2l} & \gamma_{n-2l} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{n-1} & \dots & \gamma_{n+3-2l} & \gamma_{n+1-2l} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & & & & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

Em 1983, Stanislaw Bialas ([BIA 83a] e [BIA 83]) provou alguns resultados de menor importância que os de Kharitonov, mas de uma maneira diferente.

Em 1984, ele publicou um trabalho [BIA 84] no mesmo problema da variação dos coeficientes onde obtém resultados semelhantes ao de Guiver e Bose mas com uma redução do custo computacional.

No trabalho citado acima, ele considerou que o polinômio estável está na seguinte forma:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_0 \quad \text{com } a_0 > 0 \quad (3.15)$$

Sejam dados os limites dos coeficientes a_i pelos reais $b_k, c_k, k = 0(1)n$. Assim, $a_k \in [\underline{a}_k, \bar{a}_k]$, onde para $t \geq 0$ é definido:

$$\underline{a}_k(t) := a_k - b_k t, \quad \bar{a}_k(t) := a_k + c_k t, \quad k = 0(1)n. \quad (3.16)$$

Desejamos o maior $t_0 \geq 0$ tal que $\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$ seja estável para todo $\alpha_k \in (\underline{a}_k(t_0), \bar{a}_k(t_0)) \cup \{a_k\}, k = 0(1)n$.

Pelo critério de Routh-Hurwitz ([GAN 59]), de acordo com a equação 1.13 o polinômio 3.15 é estável se os determinantes de Hurwitz são positivos.

$$d_{m,j}(0) > 0, \quad m = 1(1)n, \quad j = 1(1)4.$$

Para $m = 1(1)n$ seja $\tau_{m,j}$ a menor raiz não negativa do polinômio $d_{m,j}(t)$, caso contrário, se $d_{m,j} > 0$ para todo $t \geq 0$ então $\tau_{m,j} = \infty$. Seja

$$\tau' := \begin{cases} a_0 b_0^{-1} & b_0 > 0, \\ \infty & b_0 = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Seja t_0 definido por:

$$t_0 := \min_j \{\tau_{n,j}, \tau'\} \quad (3.18)$$

Agora o mínimo é tomado só sobre os determinantes de mais alta ordem, enquanto que no trabalho de Barmish o mesmo era feito sobre todos os determinantes $d_{m,j}$. O seu resultado principal é o seguinte:

Teorema 3.2.3 (Bialas) *Seja o polinômio*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_0$$

estável e t_0 dado por 3.18. Então

(1) *Se $0 < t_0 < \infty$ cada polinômio*

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n, \quad (3.19)$$

onde $\alpha_k \in (\underline{a}_k(t_0), \bar{a}_k(t_0)) \cup \{a_k\}, k = 0(1)n$ é estável e existe $\beta_k \in \{\underline{a}_k(t_0), \bar{a}_k(t_0)\} \cup \{a_k\}, k = 0(1)n$ tal que o polinômio $\beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} x + \beta_n$ não é estável.

(2) *Se $t_0 = \infty$ então $b_k = 0, k = 0(1)n$ e todos polinômios especificados em 3.19 com coeficientes $\alpha_k(t) \in [a_k, \bar{a}_k(t)], k = 0(1)n, t \geq 0$ são estáveis.*

A redução do custo computacional é obtida se:

1. no processo de cálculo dos determinantes $d_{n,j}$ e de seus zeros, para n pequeno é usado o critério de Lienard-Chipart [GAN 59];
2. para $b_k = c_k, k = 0(1)n$, então para $t > 0$ os 4 polinômios de teste são iguais dois a dois, nos índices 1 e 3 e para 2 e 4, conforme 3.20 e daí

$$d_{n,1}(t) = d_{n,3}(-t), \quad \text{e} \quad d_{n,2}(t) = d_{n,4}(-t)$$

Logo só dois polinômios são computados.

3. Os coeficientes dos determinantes de Hurwitz podem ser computados pelo processo de Routh, dado a seguir:

Sejam $h_j(x, t)$, $j = 1(1)4$, os polinômios de teste:

$$\begin{aligned} h_1(x, t) &= \underline{a}_0(t)x^n + \underline{a}_1(t)x^{n-1} + \bar{a}_2(t)x^{n-2} + \bar{a}_3(t)x^{n-3} + \underline{a}_4(t)x^{n-4} + \dots \\ h_2(x, t) &= \bar{a}_0(t)x^n + \underline{a}_1(t)x^{n-1} + \underline{a}_2(t)x^{n-2} + \bar{a}_3(t)x^{n-3} + \bar{a}_4(t)x^{n-4} + \dots \\ h_3(x, t) &= \bar{a}_0(t)x^n + \bar{a}_1(t)x^{n-1} + \underline{a}_2(t)x^{n-2} + \underline{a}_3(t)x^{n-3} + \bar{a}_4(t)x^{n-4} + \dots \\ h_4(x, t) &= \underline{a}_0(t)x^n + \bar{a}_1(t)x^{n-1} + \bar{a}_2(t)x^{n-2} + \underline{a}_3(t)x^{n-3} + \underline{a}_4(t)x^{n-4} + \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

São criados 4 arrays $\gamma_{m,s}^{(j)}$. $m = 0(1)n$ e $s = 1(1)[n/2] + 1$ iniciando com as seguintes duas linhas:

$$\begin{array}{cccc} \gamma_{0,1}^{(j)}(t) & \gamma_{0,2}^{(j)}(t) & \gamma_{0,3}^{(j)}(t) & \dots \text{ coeficientes ordem par} \\ \gamma_{1,1}^{(j)}(t) & \gamma_{1,2}^{(j)}(t) & \gamma_{1,3}^{(j)}(t) & \dots \text{ coeficientes de ordem ímpar} \end{array}$$

que são os coeficientes de $h_j(x, t)$, $j = 1(1)4$, que formam a base da seguinte relação de recorrência. As linhas subseqüentes são dadas

$$\gamma_{m,s} := \frac{1}{\delta_m^{(j)}(t)} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_{m-2,s+1}^{(j)}(t) & \gamma_{m-2,1}^{(j)}(t) \\ \gamma_{m-1,s+1}^{(j)}(t) & \gamma_{m-1,1}^{(j)}(t) \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

onde $m = 2(1)n$, $s = 1(1)[n/2] + 1$ e ainda

$$\delta_m^{(j)}(t) = \begin{cases} 1 & m = 2, 3 \\ \gamma_{m-3,1}^{(j)}(t) & m = 1, 4. \end{cases}$$

Como os determinantes de Hurwitz $d_{m,j}(0)$ são sempre positivos a divisão em 3.21 é sempre possível; os determinantes $d_{m,j}(t)$ são iguais aos resultados da primeira coluna da matriz gerada por 3.21, ou seja:

$$d_{m,j}(t) = \gamma_{m,1}^{(j)} \quad m = 1(1)4.$$

Exemplo 3.2.4 Seja $f(x) = 4x^5 + 5x^4 + 26x^3 + 30x^2 + 7x + 2$ e sejam $b_k = c_k = 1$ Como n é pequeno usamos o critério de Lienard-Chipart, logo:

$$t_0 = \min\{a_0, a_1, a_3, a_5, \tau_{2,j}, \tau_{4,j}\},$$

onde $\tau_{2,j}$: é a menor raiz não negativa de $d_{2,j}$ que é determinante de ordem 2 de $h_j(x, t)$ então: $\underline{a}_k(t) = a_k - t$, $\bar{a}_k(t) = a_k + t$. Assim:

$$h_1(x, t) = (4 - t)x^5 + (5 - t)x^4 + (26 + t)x^3 + (30 + t)x^2 + (7 - t)x + (2 - t),$$

$$h_2(x, t) = (4 + t)x^5 + (5 - t)x^4 + (26 - t)x^3 + (30 + t)x^2 + (7 + t)x + (2 - t).$$

$$\text{Logo. } D_1 = d_{0,1} = a_0 = 4 - t$$

Colocando em outra forma e substituindo os valores:

m/s	1	2	3
0	$4 - t$	$26 - t$	$7 - t$
1	$5 - t$	$30 + t$	$2 - t$
2	$10 + 5t$	$27 - 6t$	*
3	$165 + 217t - t^2$	$20 - 5t^2$	*
4	$851 + 1124t - 31t^2$	*	*

vemos então que:

$$d_{1,1} = 5 - t, \dots, d_{4,1} = 851 + 1024t - 31t^2.$$

O esquema para $h_2(x, t)$ é:

m/s	1	2	3
0	$4 + t$	$26 - t$	$7 + t$
1	$5 - t$	$30 + t$	$2 - t$
2	$10 - 65t$	27	*
3	$20 - 140t + 65t^2$	$165 - 1913t^2$	*
4	$851 + 9620t - 4225t^2$	*	*

e agora vemos que

$$d_{0,1} = 4 + t, \dots, d_{4,1} = 851 + 9620t - 4225t^2.$$

Calculando, numericamente, as raízes necessárias para $m = 2$ e $m = 4$ temos:

$$t_0 = 0.0852$$

Esta é a variação permitida em cada coeficiente de $f(x)$ dado, de modo que ele ainda seja estável.

Tal procedimento é automatizável e temos os problemas de calcular os determinantes algebricamente (em função de t) e as raízes dos polinômios gerados.

Outra abordagem para o problema é feita por Mohammad Argoun ([ARG 86] e [ARG 87]) em dois trabalhos baseados na divisão do polinômio original em dois outros, um nas potências pares e outro nas ímpares, com o objetivo de permitir uma maior flexibilidade no cálculo dos limites das perturbações possíveis aos coeficientes de modo a manter a estabilidade. A escolha dos limites de perturbação possíveis são feitas ora maximizando-as num grupo e diminuindo os limites no outro grupo ou alternando as mudanças de acordo com as necessidades do problema.

Seja o polinômio de Hurwitz dado na forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (3.22)$$

Sejam $\delta_i, i = 0(1)n$ as quantidades com as quais os coeficientes a_i são alterados. O objetivo é achar os limites em Δa_i tal que:

$$|\delta a_i| \leq \Delta a_i, \quad i = 0(1)n.$$

de modo que o polinômio alterado $\tilde{P}(x)$ com os coeficientes $a_i + \delta_i a_i$, $i = 0(1)n$, ainda seja estável.

O polinômio $P(x)$ se subdivide em

$$P(x) = R(x) + Q(x) \text{ e}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_mx^m, \\ Q(x) &= a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots + a_lx^l, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $\begin{cases} m = n & l = n - 1 & \text{se } n \text{ par.} \\ m = n - 1 & l = n & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$

A idéia básica é primeiro permitir a variação nos coeficientes ímpares e encontrar as perturbações permitidas para este grupo. Depois se considera o outro grupo.

Teorema 3.2.4 (Argoun 1) *Uma condição necessária e suficiente nas perturbações permitidas nos coeficientes ímpares de $P(x)$ em 3.22 de modo a manter a estabilidade de $\tilde{P}(x)$, é:*

$$\max_{\Delta a_i} |\Delta Q(w_k)| \leq |Q(iw_k)| \quad \forall w_k, \quad (3.24)$$

onde

$$\Delta Q(w_k) = \Delta a_1 w_k + \Delta a_3 w_k^3 + \dots + \Delta a_l w_k^l. \quad (3.25)$$

Em 3.24 temos k desigualdes, $k = 1(1)m/2$ onde w_k são as frequências de intersecção com o eixo imaginário que são dadas pelas raízes de $R(iw)$.

Se as perturbações são feitas nas potências pares e ímpares então são necessários determinar os polinômios:

$$Q_1(x) = Q(x) - \Delta Q(x), \quad (3.26)$$

$$Q_2(x) = Q(x) + \Delta Q(x), \quad (3.27)$$

onde $\Delta Q(x)$ é um polinômio com coeficientes ímpares que satisfaz 3.25.

Sejam w_{\min_l} e w_{\max_l} as frequências de intersecção mínima e máxima de $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ com o eixo x , onde l indica o número de intersecções que depende de n .

Teorema 3.2.5 (Argoun 2) *O polinômio perturbado $\tilde{P}(x)$ será de Hurwitz se e somente se as perturbações do conjunto de coeficientes pares satisfazem:*

$$\Delta R(iw_l) \leq |R(iw_l)| (\forall w_l) [w_{\min_l} \leq w_l \leq w_{\max_l}]. \quad (3.28)$$

A partir destes dois teoremas temos um procedimento para estabelecer variações nos coeficientes de um polinômio estável, de modo a manter a estabilidade.

Dadas as incertezas δa_i , $i = 0(1)n$ limitadas por Δa_i , seguimos os seguintes passos, para modificação nos coeficientes ímpares:

Passos:

- Determinar: $Q(x)$, $Q(iw)$, $R(x)$ e $R(iw)$;
- Calcular as raízes de $R(iw)$ que são indicadas por w_k ;

- Calcular $\Delta Q(w_k)$ e $|Q(iw_k)|$;
- Verificar se os valores obtidos satisfazem 3.24.
- Determinar \tilde{a}_i .

Caso positivo o polinômio perturbado por δa_i é ainda de Hurwitz; caso contrário alterar as variações procurando aquelas que satisfazem 3.24.

No caso dos coeficientes pares, acrescentamos os seguintes itens.

- Determinar $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ conforme 3.26 e 3.27.
- Calcular as raízes, ou seja as frequências de intersecção com o eixo x .
- Repetir de 3 a 5 do caso anterior.

3.2.2 Zeros Reais de Polinômios Intervalares

Para simplificar o problema geral da localização dos zeros de polinômios intervalares partimos para a restrição usual de localizar primeiro seus zeros reais, se houverem. Nesta direção o artigo de C.B. Soh mostra as condições necessárias e suficientes para que um polinômio intervalar tenha somente zeros reais ([SOH 91]).

A idéia básica dos resultados obtidos está no uso de **resultantes** de dois polinômios, ver [MIG 92] e na localização dos autovalores das matrizes associadas a eles.

Sejam dados dois polinômios f e g numa variável x com coeficientes num corpo K . Assim se f e g têm um fator comum não trivial h , digamos $f = f_1h$ e $g = g_1h$ então a equação

$$uf + vg = 0. \quad (3.29)$$

com $\deg(u) < \deg(v)$ onde $\deg(p)$ indica o grau do polinômio p e $\deg(v) < \deg(f)$, tem solução $u = g_1$ e $v = f_1$. Por outro lado, se há soluções não nulas da equação então, os polinômios admitem um fator comum não trivial. Assim, se

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j.$$

então a equação 3.29 é equivalente ao sistema de equações lineares homogêneas de $n + m$ variáveis e $n + m$ equações e portanto admite solução não trivial se e somente se o seguinte determinante não é nulo.

$$\begin{vmatrix} a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_m & \dots & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_1 & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_n & \dots & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & b_1 & b_0 \end{vmatrix} \quad (3.30)$$

Definição 3.2.1 (Resultante) *Dados f e g dois polinômios de grau m e n respectivamente então o resultante é dado pelo determinante $|c_{i,j}|$ onde*

$$c_{i,j} = a_{m-j+i} \quad i=1(1)n,$$

$$c_{n+i,j} = b_{n-j+i} \quad i = 1(1)m$$

e $a_i = 0$ para $i \notin \{0, 1, 2, \dots, m\}$ e $b_j = 0$ para $j \notin \{0, 1, \dots, n\}$ e é indicado e anotado por

$$Res(f, g)$$

Assim, o resultante pode ser dado por 3.30.

A matriz resultante R é não singular se, e somente se, $a(x)$ e $b(x)$ não tem raízes comuns, ver [DAV 87].

Em seu artigo C.B. Soh usa a seguinte matriz equivalente, que produz o mesmo resultante para os polinômios $a(x)$ e $b(x)$:

$$R(a, b) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Neste caso, $a(x)$ e $b(x)$ são de grau m e portanto $R(a, b)$ é de ordem $2m \times 2m$.

Definição 3.2.2 (Autovalores e Autovetores) Dada uma matriz de ordem n , $A = (a_{i,j})$ num espaço vetorial V , sobre um corpo K um autovalor, ou valor característico, é um escalar $c \in K$ tal que existe um vetor não nulo $\alpha \in V$ tal que $A\alpha = c\alpha$. Se c é um autovalor de A , então todo α tal que $A\alpha = c\alpha$ é denominado de autovetor ou vetor característico de c .

Os autovalores são calculados pela resolução da equação :

$$\det(A - cI) = 0.$$

onde I é a matriz identidade de ordem n .

Seja o polinômio intervalar $[p](x)$ dado por

$$[p](x) = [\alpha_n, \beta_n]x^n + [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]x^{n-1} + \dots + [\alpha_1, \beta_1]x + [\alpha_0, \beta_0]. \quad (3.32)$$

e genericamente $I(x) \in [p](x)$ é dado por:

$$I(x) = t_n x^n + t_{n-1} x^{n-1} + \dots + t_1 x + t_0, \quad (3.33)$$

onde $\alpha_i < t_i < \beta_i$, $i = 0(1)n$.

No caso do exemplo **exemplo 3.1.2** os polinômios limítrofes estão na figura 3.11.

Notações:

$$\begin{array}{lll} R_i^1 = R(a, b) & a(x) = p_i(x) & b(x) = \frac{dp_i(x)}{ds} \\ R_i^2 = R(a, b) & a(x) = p_i(x) & b(x) = (s - \tau) \frac{dp_i(x)}{ds} \\ R_i^3 = R(a, b) & a(x) = (s - \tau)(s - \xi) \left(\frac{dp_i(x)}{ds} \right) & b(x) = p_i(x) \end{array} \quad (3.34)$$

onde τ e ξ são reais dados e $i = 1(1)4$

Quando usamos R^1 , R^2 ou R^3 os resultantes se referem a um polinômio qualquer de $[p](x)$ ao invés dos polinômios maximais ou minimais.

Os resultados seguintes, ver [SOH 91], são baseados no seguinte teorema de Fu e Barmish.

Teorema 3.2.6 *Sejam A_1 e A_2 duas matrizes reais $p \times p$ e seja*

$$A_r = (1 - r)A_0 + rA_1 \quad 0 \leq r \leq 1$$

a notação da combinação linear das duas matrizes. Seja A_0 não singular. Então

1. A_r é não singular para $r \in [0, 1]$ se, e somente se, $A_0^{-1} \cdot A_1$ não tem autovalores em $(-\infty, 0]$.
2. A máxima variação (k_{min}, k_{max}) para todo A_k ser não singular é dado por

$$k_{min} = \frac{1}{\lambda_{min}^{-}(-A_0^{-1}A_1)}, \quad (3.35)$$

$$k_{max} = \frac{1}{\lambda_{max}^{+}(-A_0^{-1}A_1)}. \quad (3.36)$$

onde $\lambda_{max}^{+}(B)$ indica o autovalor máximo (real) de uma matriz B e analogamente $\lambda_{min}^{-}(B)$ indica o autovalor mínimo (real); se não há autovalores negativos, então $\lambda_{min}^{-}(B) = 0$ e se não há autovalores positivos, então $\lambda_{max}^{+}(B) = 0$.

São os seguintes os resultados importantes, para o estabelecimento da condição da existência só de zeros reais.

Teorema 3.2.7 (Soh 1) A família de polinômios intervalares $[p](x)$ tem só raízes reais e distintas se, e somente se, as duas condições seguintes são válidas:

1. $p_1(x)$ e $p_3(x)$ tem só zeros reais e distintos;
2. $(R_1^1)^{-1} \cdot R_2^1$ e $(R_3^1)^{-1} \cdot R_4^1$ não tem autovalores reais negativos.

Teorema 3.2.8 (Soh 2) Cada polinômio da família $[p](x)$ tem só zeros reais e distintos, com h zeros no intervalo $(-\infty, \tau)$ e $n - h$ zeros no intervalo (τ, ∞) se, e somente se as duas condições seguintes são válidas:

1. $p_1(x)$ e $p_3(x)$ tem só zeros reais e distintos distribuídos da mesma maneira; e
2. $(R_1^2)^{-1} \cdot R_2^2$ e $(R_3^2)^{-1} \cdot R_4^2$ não tem autovalores reais negativos.

Teorema 3.2.9 (Soh 3) Cada polinômio da família $[p](x)$ tem só zeros reais e distintos, com g zeros no intervalo $(-\infty, \xi)$; h zeros no intervalo (ξ, τ) e l zeros em (τ, ∞) onde $g + h + l = n$ se, e somente se:

1. $p_1(x)$ e $p_3(x)$ tem só zeros reais e distintos distribuídos da mesma maneira; e
2. $(R_1^3)^{-1} \cdot R_2^3$ e $(R_3^3)^{-1} \cdot R_4^3$ não tem autovalores reais negativos.

Com estes resultados já podemos ter uma indicação segura e direta da enumeração dos polinômios de $[p](x)$ através dos polinômios p_1 e p_3 .

Agora, nas condições dos teoremas 3.2.7, 3.2.8 e 3.2.9, o problema de separar os zeros pode ser feito pelo processo recursivo da bisseção que neste caso deve ser aplicado em conjunto para estes quatro polinômios.

Vejamos um exemplo onde tal separação pode ser feita, com o uso do teorema 3.2.7.

Exemplo 3.2.5 Vejamos a aplicação do teorema 1 para

$$[p](x) = s^3 + [-6, -3]s^2 + [-28, -19]s + [24, 60].$$

Os 4 polinômios limítrofes são:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= s^3 - 3s^2 - 28s + 60, & p'_1(x) &= 3s^2 - 6s - 28, \\ p_2(x) &= s^3 - 6s^2 - 19s + 24, & p'_2(x) &= 3s^2 - 12s - 19, \\ p_3(x) &= s^3 - 3s^2 - 19s + 60, & p'_3(x) &= 3s^2 - 6s - 19, \\ p_4(x) &= s^3 - 6s^2 - 28s + 24, & p'_4(x) &= 3s^2 - 12s - 28. \end{aligned}$$

Calculando os resultantes, temos $R_1^1 = R(p_1, p'_1)$, dado por:

$$R_1^1 = \begin{bmatrix} 60 & -28 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & -28 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & -28 & -3 & 1 \\ -28 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -28 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $R_2^1 = R(p_2, p'_2)$ temos:

$$R_2^1 = \begin{bmatrix} 24 & -19 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & -19 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -19 & -6 & 1 \\ -19 & -12 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 12 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & -12 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $R_3^1 = R(p_3, p'_3)$ temos:

$$R_3^1 = \begin{bmatrix} 60 & -19 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & -19 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & -19 & -3 & 1 \\ -19 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $R_4^1 = R(p_4, p'_4)$ temos:

$$R_4^1 = \begin{bmatrix} 24 & -28 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & -28 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -28 & -6 & 1 \\ -28 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -28 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinando $(R_1^1)^{-1} \cdot R_2^1$ encontramos os seguintes autovalores:¹

$$a_1 = 1.0; a_2 = 1.0, a_{3,4} = 0.976... \pm 0.213...i; a_5 = 0.437... a_6 = 2.285...$$

Para $(R_3^1)^{-1} \cdot R_4^1$ encontramos os seguintes autovalores: $d_1 = 0.627...; d_2 = 1.0; d_3 = 1.0; d_{4,5} = 1.135 \pm 0.0133...i; d_6 = 154.828...$

Portanto, todos os zeros que são reais, são positivos e $p_1(x)$ e $p_3(x)$ só têm zeros reais, os quais podem ser separados exatamente pelo método de Uspenski Modificado, implementado em [BRU 94], que produz 3 intervalos reais para cada um deles. É a seguinte a localização de p_1 e p_3 :

$$L_1 = [[-8, 0], [0, 4][4, 8]]$$

$$L_3 = [[-8, 0], [0, 4][4, 4]]$$

A figura 3.1 anterior mostra o gráfico dos polinômios limítrofes de $[p](x)$.

Podemos aplicar o teorema 3.2.8 ou 3.2.9 escolhendo os valores de τ ou ξ adequadamente. Esta escolha adequada é necessária, pois se escolhermos um valor que seja raiz de algum p_i teremos uma matriz não inversível. Por exemplo, se $\xi = 4$, a matriz R_3^3 não é inversível, pois 4 é raiz de p_3 .

Algoritmo 1

1. entrada: $\{[p](x), n\}$
2. calcular $M_1 = (R_1^1)^{-1} \cdot R_2^1$ e $M_2 = (R_3^1)^{-1} \cdot R_4^1$
3. verificar se os autovalores reais de M_1 e M_2 são todos positivos. e então ir para 4;
- senão saída: "Não há só zeros reais"
4. isolar zeros de p_1, p_2, p_3 e p_4 .
5. combinar as informações do passo 4.
6. saída $\{listadeintervalos\}$

No algoritmo acima o ponto de maior complexidade é o cálculo algébrico do polinômio característico e o cálculo numérico aproximado dos auto-valores.

3.2.3 Zeros Complexos de Polinômios Intervalares

Ainda do mesmo autor C.B.Soh ([SOH 92]) estabelece condições necessárias e suficientes para determinar se um polinômio intervalar tem um dado número de raízes no semiplano esquerdo e as outras raízes no semiplano direito. Nos próximos resultados temos as seguintes notações:

Para $f(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$, $a_n \neq 0$ onde $\alpha_i \leq a_i \leq \beta_i$, $i = 0(1)n$ e $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Definimos:

$$\begin{aligned} h_m(u) &= \alpha_0 + \beta_2 u + \alpha_4 u^2 + \beta_6 u^3 + \dots \\ h_M(u) &= \beta_0 + \alpha_2 u + \beta_4 u^2 + \alpha_6 u^3 + \dots \\ g_m(u) &= \alpha_1 + \beta_3 u + \alpha_5 u^2 + \beta_7 u^3 + \dots \\ g_M(u) &= \beta_1 + \alpha_3 u + \beta_5 u^2 + \alpha_7 u^3 + \dots \end{aligned} \tag{3.37}$$

¹Calculados aproximadamente pelo Macsyma

Então os 4 polinômios de Kharitonov são dados por:

$$f_{mm}(s) = h_m(s^2) + sg_m(s^2), \quad (3.38)$$

$$f_{mM}(s) = h_M(s^2) + sg_M(s^2), \quad (3.39)$$

$$f_{Mm}(s) = h_m(s^2) + sg_m(s^2), \quad (3.40)$$

$$f_{MM}(s) = h_M(s^2) + sg_M(s^2). \quad (3.41)$$

Calculando algebricamente as expressões chegamos a:

$$h_m(s^2) = \alpha_0 + \beta_2s^2 + \alpha_4s^4 + \beta_6s^6 + \dots \quad (3.42)$$

$$sg_m(s^2) = \alpha_1 + \beta_3s^2 + \alpha_5s^5 + \beta_7s^7 + \dots \quad (3.43)$$

e então somando 3.42 e 3.43 chegamos a:

$$f_{mm} = \alpha_0 + \alpha_1s + \beta_2s^2 + \beta_3s^3 + \alpha_4s^4 + \alpha_5s^5 + \dots$$

que é o polinômio $p^{(1)}(x)$ de Kharitonov dado no teorema 1. Analogamente se verifica a igualdade dos demais 3 polinômios f_{mM} , f_{Mm} e f_{MM} aos polinômios $p^{(2)}$, $p^{(3)}$ e $p^{(4)}$ de Kharitonov.

Sejam dadas ainda as seguintes combinações afins:

$$F_1(s, \lambda) = (1 - \lambda)f_{mm}(x) + \lambda f_{MM}(x),$$

$$F_2(s, \lambda) = (1 - \lambda)f_{Mm}(x) + \lambda f_{MM}(x),$$

$$F_3(s, \lambda) = (1 - \lambda)f_{MM}(x) + \lambda f_{mM}(x),$$

$$F_4(s, \lambda) = (1 - \lambda)f_{mM}(x) + \lambda f_{mm}(x).$$

Teorema 3.2.10 Cada polinômio em $F_i(s, \lambda)$, $i = 1(1)4$ e $\lambda \in [0, 1]$ tem k zeros no semiplano esquerdo e $n - k$ zeros no semiplano direito, se e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

1- Ao menos um dos polinômios de Kharitonov tem a mesma distribuição de zeros;

2- α_0 e β_0 são não nulos e têm o mesmo sinal;

3- Para cada zero real negativo de $g_m(u)$, digamos u_j , os valores de $h_m(u_j)$ e $h_M(u_j)$ são não nulos e têm o mesmo sinal;

4- Para cada zero real negativo de $h_M(u)$, digamos u_j os valores de $g_m(u_j)$ e $g_M(u_j)$ são não nulos e têm o mesmo sinal;

5- Para cada zero real negativo de $g_M(u)$, digamos u_j , os valores de $h_m(u_j)$ e $h_M(u_j)$ são não nulos e têm o mesmo sinal;

6- Para cada zero real negativo de $h_m(u)$, digamos u_j os valores de $g_m(u_j)$ e $g_M(u_j)$ são não nulos e têm o mesmo sinal.

Corolário:

Cada polinômio da família $[p](x)$ tem k zeros no semiplano esquerdo e $n - k$ zeros no semiplano direito se, e somente se as condições 1-6 do teorema anterior são asseguradas

Exemplo 3.2.6 Seja $[p](x) = x^4 + [-17, -16]x^3 + [34, 47]x^2 + [172, 432]x + [-1440, -420]$. Os polinômios de Kharitonov são vistos na figura 3.15 e os polinômios limítrofes são vistos na figura 3.16.

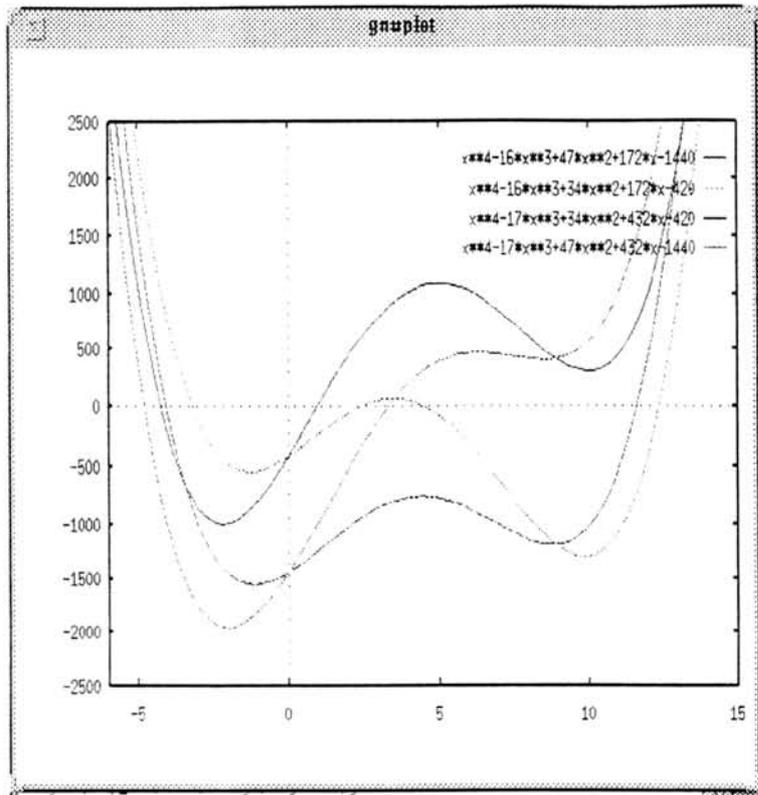


FIGURA 3.15 — Polinômios de Kharitonov de $[p](x) = x^4 + [-17, -16]x^3 + [34, 47]x^2 + [172, 432]x + [-1440, -420]$.

Os 4 polinômios de Kharitonov são:

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= -1440 + 172x + 47x^2 - 16x^3 + x^4, \\ p^{(2)} &= -420 + 172x + 34x^2 - 16x^3 + x^4, \\ p^{(3)} &= -420 + 432x + 34x^2 - 17x^3 + x^4, \\ p^{(4)} &= -1440 + 432x + 47x^2 - 17x^3 + x^4 \end{aligned}$$

e os demais polinômios necessários são:

$$\begin{aligned} h_m(u) &= -1440 + 47u + u^2, \\ h_M(u) &= -420 + 34u + u^2, \\ g_m(u) &= 172 - 16u, \\ g_M(u) &= 432 - 17u, \end{aligned}$$

cujos zeros são, respectivamente:

$$\begin{aligned} h_m(u) &: -68.134; 21.134 \\ h_M(u) &: -43.627; 9.627 \\ g_m(u) &: 10.75 \\ g_M(u) &: 25.411 \end{aligned}$$

Análise das condições do teorema:

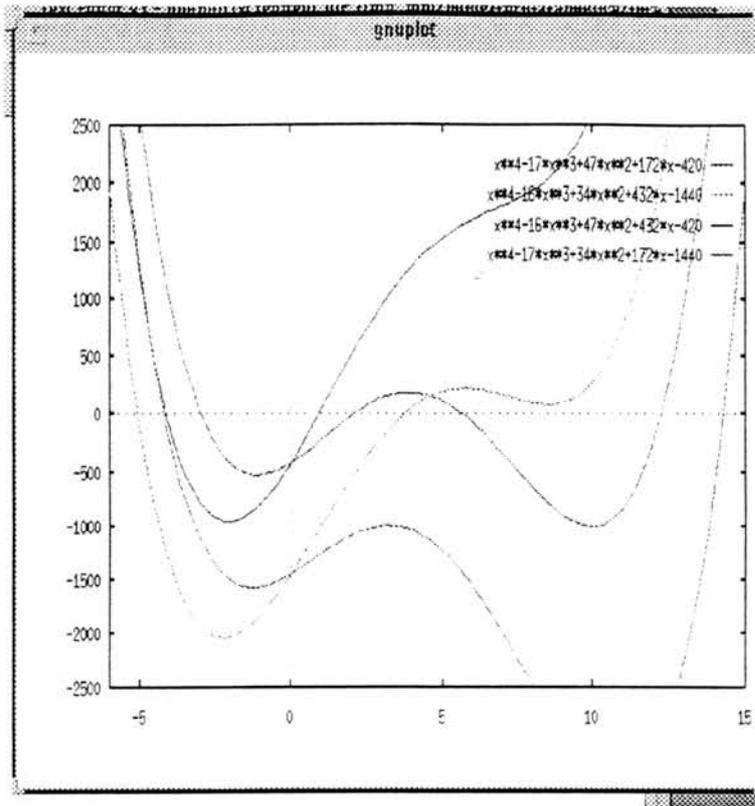


FIGURA 3.16 — Polinômios limítrofes de $[p](x) = x^4 + [-17, -16]x^3 + [34, 47]x^2 + [172, 432]x + [-1440, -420]$.

1- *Separação dos zeros dos 4 polinômios, pelo método de Uspenski Modificado e de Brunetto, ver capítulo dois.*

$$p^{(1)} : LR = [[-64, 0], [8, 16]] \quad LC = [[32i, 32]],$$

onde LR é a lista dos intervalos que contém um só zero e LC é a lista de quadrados do plano complexo onde o primeiro ponto indica as ordenadas do vértice do canto noroeste do quadrado de lado com o valor do segundo número da lista. Quando o polinômio original é real os zeros complexos, se houverem, ocorrem em pares conjugados; tal quadrado não precisa ser repetido no semiplano inferior.

$$p^{(2)} : LR = [[-64, 0], [0, 4], [4, 8], [8, 16]] \quad LC = [[]],$$

$$p^{(3)} : LR = [[-64, 0], [0, 8]] \quad LC = [[34i, 34]],$$

$$p^{(4)} : LR = [[-64, 0], [0, 8]] \quad LC = [[34i, 34]].$$

2- α_4 e β_4 têm o mesmo sinal.

3 e 5- Não se aplicam pois não possuem zeros reais negativos.

4- Zero negativo de $h_M(u)$ é $u_1 = -43.627$, e

$$g_m(-43.627) = 869.72 \neq 0,$$

$$g_M(-43.627) = 913.54 \neq 0,$$

possuem o mesmo sinal

6 - Zero negativo de $h_m(u)$: $u_1 = -68.134$

$$g_m(-68.134) = 1262.08 \neq 0$$

$$g_M(-68, 134) = 1590.21 \neq 0$$

Conclusão:

Há certamente um zero real negativo em cada polinômio de $[p](x)$, ou seja, um zero no semiplano esquerdo e conseqüentemente 3 zeros no semiplano direito.

É importante observar que a decisão sobre a natureza dos zeros não é decidida pelo corolário.

Estes são os principais resultados conhecidos sobre os assuntos direta ou indiretamente relacionados com a separação dos zeros de polinômios intervalares.

Com esta secção encerramos os artigos clássicos e atuais, a respeito de resultados sobre localização e separação de zeros polinômios intervalares. Existem outros resultados mais específicos e atuais para certas famílias formadas de combinações lineares ou não de elementos polinomiais, onde um determinado parâmetro λ , em geral, possui uma variação num intervalo. Estes tópicos, embora importantes para certos problemas de Teoria de Controle, não faz parte deste trabalho.

No próximo capítulo trataremos da separação dos zeros reais baseados nestes resultados e em novos resultados obtidos neste trabalho.

Capítulo 4

Separação dos Zeros Reais do Polinômio Intervalar

Na seção 3.1, vimos que nem sempre conseguimos isolar os zeros da família $[p](x)$ do mesmo modo que isolamos os zeros de um só polinômio, real ou complexo. Neste capítulo veremos os novos resultados, obtidos neste trabalho, a respeito das condições necessárias para podermos separar garantidamente, via um algoritmo eficiente, os zeros dos polinômios intervalares.

4.1 Separação dos Zeros Reais de $[p](x)$

No caso de polinômios reais não temos um teste que garanta uma condição necessária e suficiente para existência ou não de zeros reais. Uma condição suficiente para que um polinômio real com coeficientes *positivos* tenha todos os seus zeros reais e distintos é vista em [KUR 92].

Efetivamente, podemos aplicar o teorema de Sturm para contar o número de zeros distintos num intervalo e inclusive determinar sua multiplicidade.

No caso da família $[p](x)$ satisfazer as hipóteses dadas nos teoremas de 1 a 3 de C.B. Soh, na seção 3.2.2, podemos obter informações tais como:

- Num intervalo $[\alpha, \beta]$ todos polinômios de $[p](x)$ possuem h zeros reais simples.
- Cada zero real simples z_i de cada polinômio de $[p](x)$ está situado num intervalo $[\gamma_i, \delta_i], i = 0(1)n$

Um procedimento simples para isolar os zeros reais de $[p](x)$ é aplicar as condições do teorema 3.2.7 e a partir da verificação da condição por ele especificada, caso seja positiva, podemos isolar os zeros reais do polinômio intervalar $[p]$, aplicando os resultados já conhecidos, isolando os zeros dos polinômios limítrofes $p_i(x), i = 1(1)4$. No algoritmo, a seguir, $R_i^j, i = 1(1)4, j = 1(1)3$, indica o resultante do polinômio limítrofe i no nível j , conforme notação dada em 3.34.

Os passos do algoritmo serão detalhados a seguir.

Algoritmo 1

1. entrada: $\{[p](x), n\}$
2. calcular $M_1 = (R_1^1)^{-1} \cdot R_2^1$ e $M_2 = (R_3^1)^{-1} \cdot R_4^1$
3. verificar se os autovalores reais de M_1 e M_2

- . são todos positivos.
- . então
- . 3.1. separar os zeros de p_1, p_2, p_3 e p_4 .
- . 3.2 combinar as informações da separação
- . 3.3 saída $\{listadeintervalos\}$
- . senão 3.4 saída: "Não há só zeros reais"

Este procedimento, na realidade, remete a outro problema que é combinar as informações da separação dos 4 polinômios.

Considerando o mesmo exemplo 3.2.5 onde $[p](s) s^3 + [-6, -3]s^2 + [-28, -19]s + [24, 60]$, temos pelo teorema 3.2.7 que a família admite só zeros reais. Aplicando o método de Uspensky modificado nos 4 polinômios limítrofes temos:

$$p_1(s) = s^3 - 3s^2 - 28s + 60 : LR = [[-8, 0], [0, 4], [4, 8]], b = 16$$

$$p_2(s) = s^3 - 6s^2 - 19s + 24 : LR = [[-8, 0], [8, 8], [0, 8]], b = 16$$

$$p_3(s) = s^3 - 3s^2 - 19s + 60 : LR = [[-8, 0], [4, 4], [0, 4]], b = 16$$

$$p_4(s) = s^3 - 6s^2 - 28s + 24 : LR = [[-8, 0], [0, 8], [8, 16]], b = 16$$

onde LR é a lista dos intervalos oriunda da separação.

Observando o gráfico, que pode ser visto na figura 3.1 verificamos que a combinação : (uniões, intersecções e subdivisões) fornece os seguintes intervalos, que foram devidamente ajustados pois 4 é um zero de p_3 .

$$LISTA = [[-8, 0], [0, 3.5][3.5, 16]]$$

Observações sobre a combinação de intervalos

A cada polinômio limítrofe é aplicado a separação pelo método de Uspensky Modificado que gera uma lista de subintervalos, conforme vimos em diversos exemplos. Em cada subintervalo, da lista de cada polinômio limítrofe $p_i(x)$, existe um único zero deste p_i . Contudo, este subintervalo pode conter mais de um zero, ou mesmo nenhum, de outro polinômio limítrofe p_j , com $i \neq j$.

Por exemplo, o segundo intervalo da lista do polinômio p_4 que é $[0, 8]$, contém, evidentemente só um zero de p_4 mas contem 2 zeros de p_3 . Considerando apenas a intersecção dos segundos intervalos dos 4 polinômios teremos o intervalo degenerado $[4, 4]$ que indica o zero exato de p_3 e só deste. Assim, fazemos a união dos segundos intervalos e através de outras subdivisões chegamos ao intervalo $[0, 3.5]$ que contém um zero de cada polinômio de $[p](x)$.

Devido a este fato temos as seguintes considerações:

1. Mesmo considerando cada semi-eixo, temos que levar em conta todos os 4 polinômios e não só o polinômio maximal e minimal.
2. Somente a intersecção ou só a união dos subintervalos ordenados de cada uma das listas não fornece uma lista que contenha a separação adequada:
3. É preciso considerar a intersecção dos subintervalos ordenados e verificar se não se perdeu alguma informação , recalculando se no intervalo-intersecção todos os 4 polinômios possuem algum zero; caso contrário tomar a união;

4. Verificar se a união dos subintervalos ordenados não possui mais de um zero. Caso isto ocorra não é aconselhado fazer o divisão ao meio, pois na separação dos polinômios individuais, isto já foi feito. Podemos subdividir o intervalo em outros pontos e repetir o teste.

No algoritmo 1 acima a rotina de maior complexidade é o cálculo algébrico do polinômio característico e o cálculo numérico aproximado dos auto-valores.

Detalhando o algoritmo acima temos os seguintes algoritmos:

Algoritmo 1a do Cálculo dos Polinômios Limítrofes:

Os polinômios são calculados a partir da lista de coeficientes que tem a seguinte estrutura:

$$\text{lcoef} : [[[\text{li}_1, \text{ls}_1, \text{gt}_1], \dots, [\text{li}_i, \text{ls}_i, \text{gt}_i], \dots, [\text{li}_m, \text{ls}_m, \text{gt}_m]]$$

e possui m termos, $m \leq n + 1$. O termo $[\alpha_i, \beta_i]x^i$ do polinômio intervalar $[p]$ de grau n é indicado pela sublista $[\text{li}_i, \text{ls}_i, \text{gt}_i]$ onde α_i corresponde ao limite inferior dado por li_i , β_i corresponde a ls_i e gt_i ao grau deste termo.

Os polinômios limítrofes são armazenados como polinômios usuais do *Mac-syma*.

polsoh(m,lcoef):=

1. *var*: x ,
2. $p1:p2:p3:p4:0$,
3. para $i:1(1)m$ faça:
 - $p3 : p3 + \text{ls}_i \cdot \text{var}^{\text{gt}_i}$,
 - $p4 : p4 + \text{li}_i \cdot \text{var}^{\text{gt}_i}$,
4. para $i:1(1)m$ faça:
 - se $\text{oddp}(\text{gt}_i)$ ¹
 - então $p1 : p1 + \text{li}_i \cdot \text{var}^{\text{gt}_i}$,
 - $p2 : p2 + \text{ls}_i \cdot \text{var}^{\text{gt}_i}$,
 - senão $p1 : p1 + \text{ls}_i \cdot \text{var}^{\text{gt}_i}$,
 - $p2 : p2 + \text{li}_i \cdot \text{var}^{\text{gt}_i}$,
5. saída ($p1, p2, p3, p4$).

Algoritmo 1b para o cálculo das matrizes resultantes

mat1(p1,p2,p3,p4):=

1. para cada polinômio p (de 1 a 4) faça:
 - 1.1 *var*:variável principal de (p),
 - 1.2 n : grau(p),
 - 1.3 para $i:1(1)n$ faça:
 - para $j:1(1)i-1$ faça $r[i,j]:0$,
 - $k:0$,
 - para $j:i(1)i+n$ faça:
 - $r[i,j]:\text{coeff}(p, \text{var}, k)$ ²

¹função lógica que verifica se o número é ímpar

²função que fornece o coeficiente de ordem k da variável var do polinômio p

```

.     k:k+1
.     para j:i+n+1(1)2*n faça r[i,j]:0.
.     /* cálculo da segunda parte da matriz */
.     i:1,
.     b:diff(p,var).3
.     para l:n+1(1)2*n faça:
.         para j:1(1)i-1 faça r[l,j]:0.
.         k:0,
.         para j:1(1)i+n faça:
.             r[i,j]:coeff(b,var,k),
.             k:k+1,
.         para j:i+n+1(1) 2*n faça r[i,j]:0,
.         i:i+1,
2. se p=p1 então gera matriz r1 a partir de r,
.     se p=p2 então gera matriz r2 a partir de r,
.     se p=p3 então gera matriz r2 a partir de r,
.     se p=p4 então gera matriz r2 a partir de r,
3. negativo1:negativo2:falso.
4. prod1:inverso(r1)*r2.
5. calcular autovalores(prod1)
6. se algum autovalor real é negativo então negativo1:true
7. prod2:inverso(r3)*r4,
8. calcular autovalores(prod2),
9. se algum autovalor real é negativo então negativo2:true
10. saída(negativo1,negativo2).

```

Algoritmo 1c da Combinação das Informações da separação dos polinômios limítrofes

```

sepint(nzer):=
/* nzer: número de zeros que será localizado */
1. para jinc:1(1)nzer faça: /* para cada polinômio */
.     1.1 para k1:1(1)4 faça
.         la[k1]:intervalo de ordem k1 do polinômio de ordem jinc
.         /* calcula a interseção do intervalo i dos 4 polinômios */
.         rint:la[1],
.         runi:la[1],
.         para j:2(1)4 faça rint:interserção (rint,la[j]),
.         se rint=[]
.             então para j3:2(1)4 faça runi:união(runi,la[j3]),
.                 rl[jinc]:runi,
.                 senão rl[jinc]:rint,
.     1.2 para j2:1(1)4 faça
.         nzint[j2]:sturm(pj2(x),rl[jinc]),
.     1.3 unico:verdadeiro,

```

³função que faz a derivada

```

.   1.4 para j:1(1)4 faça:
.     se nzint#1 então unico:false.
.     se unico então lf[jinc]:rl[jinc]
.       senão subdivide(rl[jinc]),
.         lf[jinc]:raux.
.   1.5 lfa:endcons((lf[jinc],lfa).
.   fim.

```

Algoritmo 1d da Subdivisão

```

subdivide(int):=
/* int:[a,b] */
1. ptm:(a+b)/2,
2. me:[a,ptm], md:[ptm,b],
3. para i:1(1)4 faça:
.   3.1 nze[i]:sturm(pi,me),
.   3.2 nzd[1]:sturm(pi,md),
4. unicoe:unicod: verdadeiro.
5. forae:forad:false,
6. para i:1(1)4 faça:
.   se nze[i]#1 então unicoe:falso,
.   se nzd[i]#1 então unicod:falso,
7. se nze[1]=0 e nze[2]=0 e nze[3]=0 e nze[4]=0
.   então forae:verdadeiro,
8. se nzd[1]=0 e nzd[2]=0 e nzd[3]=0 e nzd[4]=0
.   então forad:verdadeiro,
9. se forae então se unidod então raux:md
.   senão subdivide(md)
.   senão se unicoe então raux:me,
.   senão subdivide(me)
10. fim

```

Algoritmo 1e da Separação

```

separ(lcoef):=
1. polsoh(lcoef),
2. varp:variável principal(p1),
3. grau:grau(p1),
/* gera p1,p2,p3 e p4 */
4. mat1(p1,p2,p3,p4),
/* calcula r1,r2,r3,r4, negativo1 e negativo2 */
5. se não(negativo1) e não(negativo2)
.   então list[1]:usp(p1),
.     list[2]:usp(p2),
.     list[3]:usp(p3),
.     list[4]:usp(p4),
.   /* gera lfa */
.   sepint(grau),
.   saída lfa:lista dos intervalos separados

```

senão saída" [p] não tem só zeros reais"
6. fim

Exemplo 4.1.1 Seja dado o polinômio $p(x) = x^4 + [0.75, 1.25]x^3 + [-18.75, -17.75]x^2 + [-16.25, -15.75]x + [31.75, 32.25]$. Os resultados parciais da separação são os seguintes:

1. Polinômios Limítrofes:

$$p_1(x) = x^4 + 0.75x^3 - 17.75x^2 - 16.25x + 32.25$$

$$p_2(x) = x^4 + 1.25x^3 - 18.75x^2 - 15.75x + 31.75$$

$$p_3(x) = x^4 + 1.25x^3 - 17.75x^2 - 15.75x + 32.25$$

$$p_4(x) = x^4 + 0.75x^3 - 18.75x^2 - 16.25x + 31.75$$

2. Aplicação do teorema 1 de Soh. 3.2.7.

2.1 Matrizes Resultantes:

$$R_1^1 = \begin{bmatrix} 32.25 & -16.25 & -17.75 & 0.75 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32.25 & -16.25 & -17.75 & 0.75 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32.25 & -16.25 & -17.75 & 0.75 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32.25 & -16.25 & -17.75 & 0.75 & 1 \\ -16.25 & -35.5 & 2.25 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16.25 & -35.5 & 2.25 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16.25 & -35.5 & 2.25 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16.25 & -35.5 & 2.25 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2^1 = \begin{bmatrix} 31.75 & -15.75 & -18.75 & 1.25 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31.75 & -15.75 & -18.75 & 1.25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 31.75 & -15.75 & -18.75 & 1.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 31.75 & -15.75 & -18.75 & 1.25 & 1 \\ -15.75 & -37.5 & 3.75 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15.75 & -37.5 & 3.75 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15.75 & -37.5 & 3.75 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15.75 & -37.5 & 3.75 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1^3 = \begin{bmatrix} 32.25 & -15.75 & -17.75 & 1.25 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32.25 & -15.75 & -17.75 & 1.25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32.25 & -15.75 & -17.75 & 1.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32.25 & -15.75 & -17.75 & 1.25 & 1 \\ -15.75 & -35.5 & 3.75 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15.75 & -35.5 & 3.75 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15.75 & -35.5 & 3.75 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15.75 & -35.5 & 3.75 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1^4 = \begin{bmatrix} 31.75 & -16.25 & -18.75 & 0.75 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31.75 & -16.25 & -18.75 & 0.75 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 31.75 & -16.25 & -18.75 & 0.75 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 31.75 & -16.25 & -18.75 & 0.75 & 1 \\ -16.25 & -37.5 & 2.25 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16.25 & -37.5 & 2.25 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16.25 & -37.5 & 2.25 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16.25 & -37.5 & 2.25 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 Autovalores, calculados numericamente.

$$\begin{aligned} lr4 &= [y = 0.74188411182036d0 \\ y &= 0.2077659725807d0i + 0.8399936105956d0, \\ y &= 0.8399936105956d0 - 0.2077659725807d0i \\ y &= 0.2627070131337d0i + 1.06402762340084d0 \\ y &= 1.06402762340084d0 - 0.2627070131337d0i \\ y &= 0.12112637288774d0i + 1.24885364576102d0 \\ y &= 1.24885364576102d0 - 0.12112637288774d0i \\ y &= 2.26224161694596d0] \end{aligned}$$

2.3 negativo1:falso, negativo2:falso.

Logo todos os zeros de $[p]$ são reais e distintos. 3. Separação :

3.1 Listas de intervalos separados pelo método de Uspensky Modificado

$$list[1] = [[-4, -3], [-3, -2], [0, 4], [4, 8]]$$

$$list[2] = [[-8, -4], [-4, 0], [0, 2], [2, 4]]$$

$$list[3] = [[-8, -4], [-4, 0], [0, 2], [2, 4]]$$

$$list[4] = [[-8, -4], [-4, 0], [0, 2], [2, 4]]$$

3.2 Combinação final:

$$lf : [[-8, -\frac{7}{2}], [-\frac{7}{2}, 0], [0, 2], [2, 8]]$$

4.2 Separação dos Zeros Reais via Polinômios Limítrofes

A nova abordagem proposta consiste em analisar o número de zeros reais positivos e negativos de cada um dos polinômios limítrofes. Uma análise simples que surge intuitivamente é que se os limítrofes possuem só zeros reais então toda a família possuiria só zeros reais.

Tal fato não acontece, pois conforme C.B. Soh mostra inicialmente em seu artigo, há uma família cujos polinômios limítrofes possuem só zeros reais mas existem também em $[p]$ um polinômio que possui zeros complexos. O exemplo é $[p](x) =$

$x^2 + [-3, 3]x + 2$ cujos limítrofes, iguais dois a dois, são:

$$p_1(x) = p_4(x) = x^2 - 3x + 2 \quad e \quad p_2(x) = p_3(x) = x^2 + 3x + 2$$

Seus zeros são todos reais, a saber 1 e 2 para $p_1(x) = p_4(x)$ e -1 e -2 para $p_3(x) = p_2(x)$. O polinômio $p_c(x) = x^2 + 2$ está em $[p]$ e possui zeros complexos.

Além de observarmos a condição da existência de só zeros reais nos limítrofes é ainda necessário observar que o comportamento dos membros da família $[p]$ é diferente em cada um dos semi-eixos. Assim no semi-eixo negativo os limítrofes são $p_1(x)$ e $p_2(x)$ ao passo que $p_3(x)$ e $p_4(x)$ estão no interior da faixa dos limítrofes. No semi-eixo positivo ocorre o inverso: $p_1(x)$ e $p_4(x)$ são os limítrofes.

Os seguintes lemas procuram desenvolver alguns resultados iniciais. Sejam consideradas as seguintes notações, para um polinômio intervalar $[p]$, seus polinômios limítrofes $p_i(x)$, $i = 1(1)4$ e $p(x)$ um polinômio qualquer de $[p]$:

Notações:

- T : número de trocas de sinal nos coeficientes de $[p](x)$;
- T' : número de trocas de sinal nos coeficientes de $[p](-x)$;
- $n_zr(p)$: número de zeros reais de p ;
- $n_zp(p)$: número de zeros positivos de p ;
- $n_zn(p)$: número de zeros negativos de p ;
- $n_zc(p)$: número de zeros complexos de p ;
- $n_zcpp(p)$: número de zeros complexos de p com parte real positiva;
- $n_zcpn(p)$: número de zeros complexos de p com parte real negativa.

Lema 4.2.1 (Condição para os Zeros Positivos) *Sejam p_3 e p_4 os polinômios limítrofes positivos de $[p]$. Se*

$$(LCP) \quad n_zp(p_3) = n_zp(p_4) = \mu \quad (4.1)$$

então todo $p \in [p]$ têm pelo menos μ zeros positivos.

Prova:

Sejam z_{3i} os zeros positivos de p_3 , $i = 1(1)\mu$ e sejam z_{4j} , $j = 1(1)\mu$. Sejam ainda, z_{3l} e z_{4l} dois zeros consecutivos de p_3 e p_4 e seja $Z = [z_{3l}, z_{4l}]$ um intervalo no qual estão os zeros de $p \in [p]$ localizados entre p_3 e p_4 .

Como $n_zp(p_3) = n_zp(p_4) = \mu$ então há μ seqüências de intervalos que serão do tipo:

$$[z_{4i}, z_{3i}] \quad \text{ou} \quad [z_{3i}, z_{4i}], \quad i = 1(1)\mu$$

alternadamente. Considerando um desses intervalos $[z_{3l}, z_{4l}]$ podemos dizer s.p.g. que

$$\text{Im}(p_3([z_{3l}, z_{4l}])) = [0, +] \quad e \quad \text{Im}(p_4([z_{3l}, z_{4l}])) = [-, 0]$$

onde $+$ e $-$ indicam, respectivamente um valor positivo e outro negativo. Ver figura 4.1.

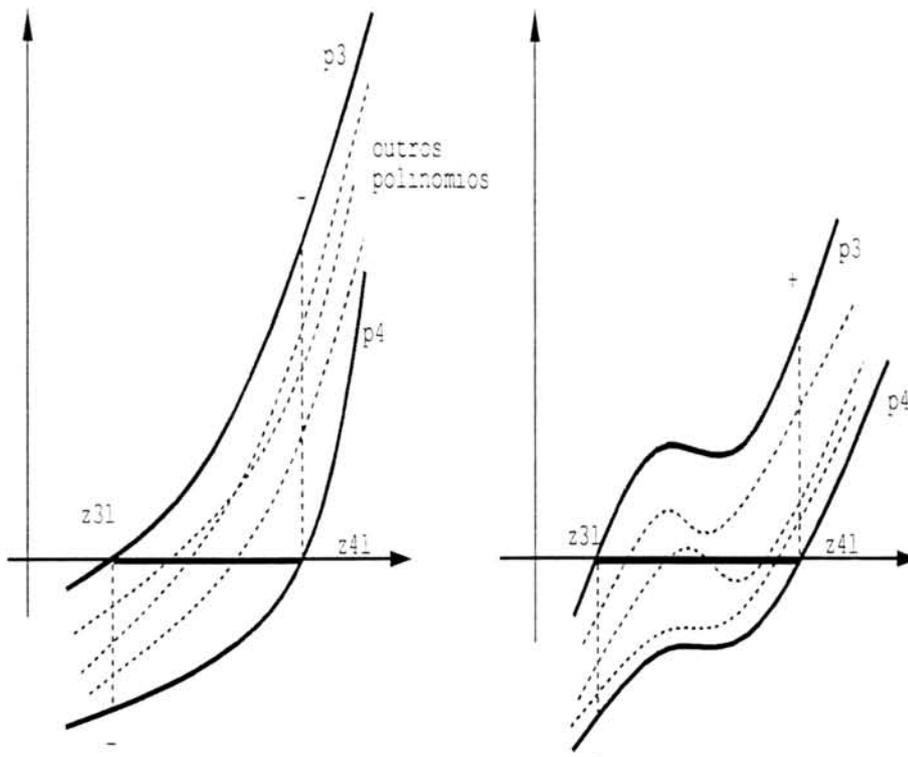


FIGURA 4.1 — Intervalo com zeros de $p \in [p]$

Como p_3 e p_4 são limítrofes:

$$(\forall p \in [p])[p(z_{31}) \cdot p(z_{41}) \leq 0] \tag{4.2}$$

então $(\exists z \in [z_{31}, z_{41}])[p(z) = 0]$ e daí há pelo menos um zero de p em $[z_{31}, z_{41}]$. Como há μ intervalos onde 4.2 vale, então qualquer $p(x) \in [p]$ tem pelo menos μ zeros reais positivos.

Lema 4.2.2 (Condição para os Zeros Negativos) Sejam p_1 e p_2 os polinômios limítrofes negativos de $[p]$. Se

$$(LCN) \quad nzn(p_1) = nzn(p_2) = \eta \tag{4.3}$$

então todo $p \in [p]$ têm pelo menos η zeros positivos.

prova:

É análoga ao lema anterior.

Exemplo 4.2.1 Seja $[p](x) = x^3 + [18, 20]x^2 + [95, 124]x + [126, 240]$ cujos polinômios limítrofes são:

$$p_1(x) = x^3 + 20x^2 + 95x + 240 \quad p_2(x) = x^3 + 18x^2 + 124x + 126$$

$$p_3(x) = x^3 + 20x^2 + 124x + 240 \quad p_4(x) = x^3 + 18x^2 + 95x + 126$$

Ver figura 4.2.

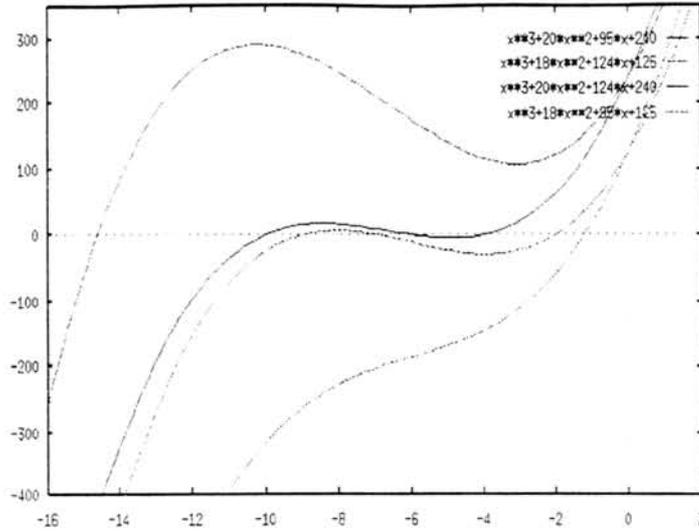


FIGURA 4.2 — Polinômios Limítrofes de $[p](x) = x^3 + [18, 20]x^2 + [95, 124]x + [126, 240]$

Separação dos Zeros Reais:

$$\text{list}[1] = [[-16, -8]], \quad \text{list}[2] = [[-8, 0]]$$

$$\text{list}[3] = [[-16, -8], [-8, -4], [-4, -4]]$$

$$\text{list}[4] = [[-16, -8], [-8, -4], [-4, 0]]$$

Assim temos: $\text{nz}(p_1) = \text{nz}(p_2) = 1$ o que satisfaz a condição do lema 4.2.2 e daí podemos garantir que há pelo menos um zero negativo em cada polinômio da família dada. Na realidade pelo gráfico da figura 4.2 confirmamos que todos polinômios possuem um zero negativo e além disso há polinômios que possuem 3 zeros negativos, a saber o polinômio p_3 e p_4 que são limítrofes no eixo positivo.

Outro fator importante é o número de trocas de sinal de $[p](-x)$ que é $T' = 3$ mostrando que tal resultado é esperado. O número de trocas de sinal de $[p](x)$ é $T = 0$ permitindo então decidir que neste exemplo temos que todos polinômios $p \in [p]$ não possuem zero real positivo e que no eixo negativo em $[-16, 0]$ temos ou três zeros negativos ou dois zeros complexos com parte real negativa e um zero negativo. Além disso, pelo próprio gráfico verificamos que p_1 e p_2 possuem zeros complexos com parte real negativa. Esta é a melhor informação que podemos obter dos dados acima.

Exemplo 4.2.2 Seja $[p](x) = 4x^5 + [-20, -1]x^4 + [45, 46]x^3 + [-60, -59]x^2 + [46, 47]x + [-20, -15]$

$$p_1(x) = 4x^5 - x^4 + 45x^3 - 59x^2 + 46x - 15; \quad p_2(x) = 4x^5 - 20x^4 + 46x^3 - 60x^2 + 47x - 20;$$

$$p_3(x) = 4x^5 - x^4 + 46x^3 - 59x^2 + 47x - 15; \quad p_4(x) = 4x^5 - 20x^4 + 45x^3 - 60x^2 + 46x - 20$$

Separação dos Reais:

$$list[1] = [[0, 1]]; \quad list[2] = [[1, 2]]; \quad list[3] = [[0, 1]]; \quad list[4] = [[2, 2]]$$

Logo: $nzp(p_3) = nzp(p_4) = \eta = 1$ e então temos que, todo $p \in [p]$ possui pelo menos um zero positivo.

Pela separação dos complexos, fornecida na lista $lisol[i]$, $i = 1(1)4$ pelo método de Brunetto, temos que:

$$lisol[1] = [[16i - 16, 16], [16i, 16]], \quad lisol[2] = [[2i, 1], [i + 1, 1]],$$

$$lisol[3] = [[16i - 16, 16], [16i, 16]], \quad lisol[4] = [[i, 1/2], [i + 1/2, 1/2]].$$

Logo:

$$nzcpp(p_1) = 1 \quad nzcpp(p_2) = 2 \quad nzcpp(p_3) = 1 \quad nzcpp(p_4) = 2$$

Como $T = 5$ e $T' = 0$ então não há zeros negativos e há zeros positivos. Há zeros complexos com parte real positiva e então podemos dizer que pode haver polinômios com ou 3 zeros positivos e 2 complexos com parte real positiva ou 1 zero positivo e 4 zeros complexos com parte real positiva.

Teorema 4.2.3 *Sejam p_1, p_2, p_3 e p_4 os polinômios limítrofes de $[p]$. Se valem as condições:*

$$(LCP) \quad nzp(p_3) = nzp(p_4) = \mu$$

$$(LCN) \quad nzn(p_1) = nzn(p_2) = \eta$$

então todo polinômio $p \in [p]$ possui pelo menos $\eta + \mu$ zeros reais.

Prova:

Decorre dos lemas 4.2.1 e 4.2.2 onde somamos os zeros negativos com os positivos.

Vamos considerar que o polinômio intervalar $[p]$ possui coeficientes cujos intervalos reais ou são ‘positivos’ ou são ‘negativos’, isto é, se $[p](x) := \sum_{i=0}^n A_i x^i$ então $0 \notin A_i, i = 0(1)n$.

O número de zeros reais de um polinômio real é exatamente determinado pelo método de Sturm.

Teorema 4.2.4 (Da Nova Condição) *Sejam p_1, p_2, p_3 e p_4 os polinômios limítrofes do polinômio intervalar $[p]$ de grau n , com zeros reais e distintos. Se valem as condições:*

$$(LCP) \quad nzp(p_3) = nzp(p_4) = \mu$$

$$(LCN) \quad nzn(p_1) = nzn(p_2) = \eta$$

e além disso vale:

$$(TCS) \quad nzn(p_1) + nzp(p_3) = n \quad \wedge \quad nzn(p_2) + nzp(p_4) = n \quad (4.4)$$

então $[p]$ só possui zeros reais e distintos.

Prova:

Por absurdo:

Suponhamos que a fórmula 4.4 seja válida. Suponhamos ainda que $[p]$ possui um polinômio $p_c(x)$ com zeros complexos. Seja $z_c = a + bi$, um zero complexo de $p_c(x)$. Como $p_c(x)$ possui coeficientes reais então $z'_c = a - bi$ também é zero de $p_c(x)$. Então:

$$n_{zr}(p_c) \leq n - 2 \quad (4.5)$$

Sejam μ e η tais que $n_{zp}(p_3) = \mu$, e $n_{zn}(p_1) = \eta$ e $\mu + \eta = n$ por 4.4. Seja $[z_i, Z_i], i = 1(1)\mu$, um intervalo definido a partir de dois zeros consecutivos de p_3 e p_4 . Isto é, z_i é zero de p_3 e Z_i é zero de p_4 , senão vale o contrário.

Como p_3 e p_4 são limítrofes positivos e existem μ intervalos deste tipo. Então, pelo lema 4.2.1, $p_c(x)$ se anula pelo menos uma vez nestes intervalos. Logo, há pelo menos μ zeros positivos em p_c .

Como p_1 e p_2 são os limítrofes negativos, analogamente concluímos que há pelo menos η zeros negativos em p_c . Logo:

$$n_{zr}(p_c) \geq \eta + \mu$$

Mas $\eta + \mu = n$ o que é absurdo com 4.5.

cqd

Com este novo teorema temos uma maneira mais eficiente de determinarmos se $[p]$ possui ou não todos seus zeros reais e positivos.

Algoritmo 2: Nova Condição

1. entrada: $\{[p](x), n\}$
2. calcular a cota dos zeros dos polinômios limítrofes
3. contar o número de zeros reais de cada polinômio acima
4. se nova condição é válida
 - . então
 - 4.1. separar os zeros de p_1, p_2, p_3 e p_4 .
 - 4.2. combinar as informações da separação
 - 4.3. saída $\{listadeintervalos\}$
 - 4.4. saída: "Não se garante a existência só zeros reais"

Exemplo 4.2.3 Seja $[p] = x^4 + [-26, -20]x^2 + [25, 64]$. Ver figura 4.3.

Separação dos Zeros:

$$list[1] = [[-4, -4], [-4, 0], [0, 4], [4, 4]] \quad list[2] = [[-8, -4], [-4, 0], [0, 4], [4, 4]]$$

$$list[3] = [[-4, -4], [-4, 0], [0, 4], [4, 4]] \quad list[4] = [[-8, -4], [-4, 0], [0, 4], [4, 4]]$$

Logo temos:

$$n_{zn}(p_i) = 2, \quad n_{zp}(p_i) = 2, \quad i : 1(1)4$$

Assim $n_{zn}(p_1) + n_{zp}(p_1) = 4 \wedge n_{zn}(p_3) + n_{zp}(p_3) = 4 \wedge n_{zn}(p_2) + n_{zp}(p_2) = 4 \wedge n_{zn}(p_4) + n_{zp}(p_4) = 4$, e portanto $[p]$ só possui zeros reais e distintos.

A separação é análogo ao processo anterior.

Exemplo 4.2.4 Seja $[p](x) = x^5 + [-3.5, -3]x^4 + [-3.4, -3.2]x^3 + [13, 14]x^2 + [-2.5, -2]x + [-2, -1]$ Aplicando a nova condição calculamos:

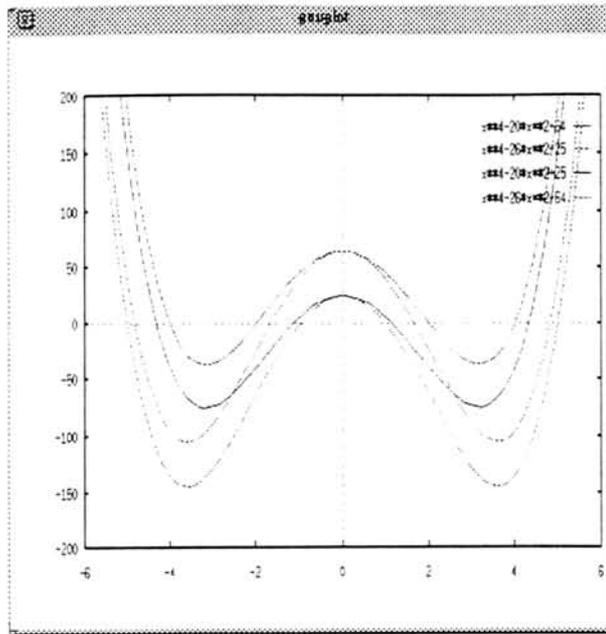


FIGURA 4.3 — polinômios Limítrofes de $[p] = x^4 + [-26, -20]x^2 + [25, 64]$

1. *Polinômios limítrofes:*

$$p_1(x) = x^5 - 3x^4 - 3.4x^3 + 14x^2 - 2.5x - 1$$

$$p_2(x) = x^5 - 3.5x^4 - 3.2x^3 + 13x^2 - 2x - 2$$

$$p_3(x) = x^5 - 3x^4 - 3.2x^3 + 14x^2 - 2x - 1$$

$$p_4(x) = x^5 - 3.5x^4 - 3.4x^3 + 13x^2 - 2.5x - 2$$

2. *Cotas:*

A cota de p_1 é 4, de p_2 é 8 de p_3 é 4 e de p_4 é 4.

3. *Cálculo da nova condição :*

3.1 *Separação :*

$$\text{list}[1] = [[-4, -2], [-2, 0], [0, 2]]$$

$$\text{list}[2] = [[-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 4]]$$

$$\text{list}[3] = [[-4, -2], [-2, 0], [0, 2]]$$

$$\text{list}[4] = [[-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 4]]$$

$$\text{nzn}(p_1) = 2, \quad \text{nzp}(p_3) = 1 \rightarrow \text{nzn}(p_1) + \text{nzp}(p_3) \neq 5 \wedge$$

$$\text{nzn}(p_2) = 2, \quad \text{nzp}(p_4) = 3 \rightarrow \text{nzn}(p_2) + \text{nzp}(p_4) = 5$$

Logo as duas condições não são satisfeitas, e portanto não podemos garantir que $[p]$ possui só zeros reais.

Para obtermos o mesmo resultado através do teorema 3.2.7 teríamos que calcular as 4 matrizes, duas inversões matriciais, dois produtos matriciais e o cálculo dos autovalores de matrizes de ordem 10, para chegarmos à mesma conclusão.

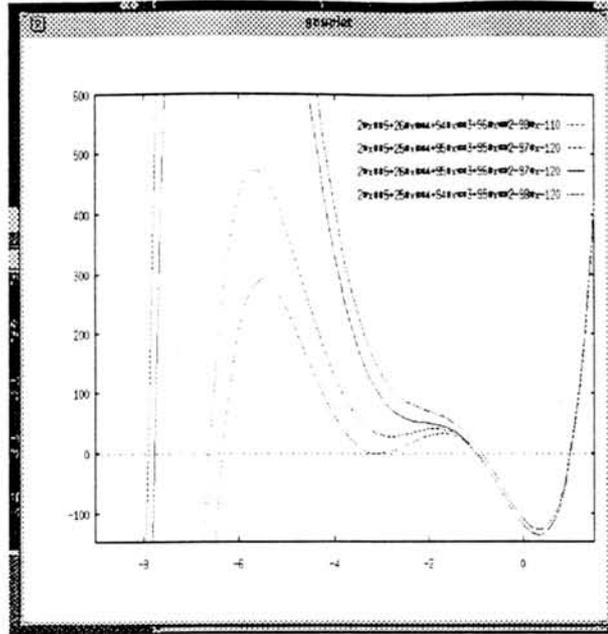


FIGURA 4.4 — Polinômios Limítrofes de $[p](x) = 2x^5 + [25, 26]x^4 + [95.5, 96]x^3 + [94.75, 95.25]x^2 + [-98, -97]x + [-120, -110]$

Exemplo 4.2.5 Seja $[p](x) = x^5 + [-10, -8]x^4 + [-26, -20]x^3 + [200, 208]x^2 + [25, 64]x + [-600, -200]$ Aplicando a nova condição calculamos:

1. Polinômios limítrofes:

$$p_1(x) = x^5 - 8x^4 - 26x^3 + 208x^2 + 25x - 200$$

$$p_2(x) = x^5 - 10x^4 - 20x^3 + 200x^2 + 64x - 600$$

$$p_3(x) = x^5 - 8x^4 - 20x^3 + 208x^2 + 64x - 200$$

$$p_4(x) = x^5 - 10x^4 - 26x^3 + 200x^2 + 25x - 600$$

2. Cotas:

A cota de p_1 é $b = 8$ de p_2 é $b = 16$, de p_3 é 8 e de p_4 é 16 .

3. Separação dos limítrofes:

$$\text{list}[1] = [[-8, -4], [-4, 0], [0, 4], [4, 8], [8, 8]]$$

$$\text{list}[2] = [[-8, -4], [-4, 0], [0, 4], [4, 8], [8, 16]]$$

$$\text{list}[3] = [[-8, -4], [-4, 0], [0, 4]]$$

$$\text{list}[4] = [[-8, -4], [-4, 0], [2, 3], [3, 4], [8, 16]]$$

4. Cálculo da nova condição :

$$\text{nzn}(p_1) = 2, \quad \text{nzp}(p_3) = 1 \rightarrow \text{nzn}(p_1) + \text{nzp}(p_3) \neq 5 \wedge$$

$$\text{nzn}(p_2) = 2, \quad \text{nzp}(p_4) = 3 \rightarrow \text{nzn}(p_2) + \text{nzp}(p_4) = 5$$

Logo as duas condições não são satisfeitas, e não podemos garantir que $[p]$ só possui zeros reais.

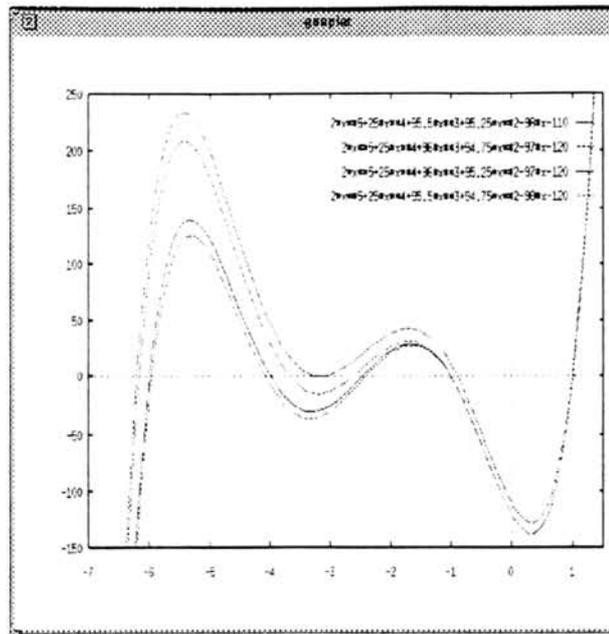


FIGURA 4.5 — Polinômios Limítrofes de $[p](x) = 2x^5 + 25x^4 + [95.5, 96]x^3 + [94.75, 95.25]x^2 + [-98, -97]x + [-120, -110]$

Exemplo 4.2.6 Seja $[p](x) = 2x^5 + 25x^4 + [95.5, 96]x^3 + [94.75, 95.25]x^2 + [-98, -97]x + [-120, -110]$ Ver figura 4.5

1. Polinômios limítrofes:

$$p_1(x) = 2x^5 + 25x^4 + 95.5x^3 + 95.25x^2 - 98x - 110$$

$$p_2(x) = 2x^5 + 25x^4 + 96x^3 + 94.75x^2 - 97x - 120$$

$$p_3(x) = 2x^5 + 25x^4 + 96x^3 + 95.25x^2 - 97x - 120$$

$$p_4(x) = 2x^5 + 25x^4 + 95.5x^3 + 94.75x^2 - 98x - 120$$

Ver figura 4.5.

2. Cotas:

As cotas são todas iguais a 32.

3. Separação dos limítrofes:

$$\text{list}[1] = [[-8, -4], [-\frac{13}{4}, -\frac{51}{16}], [-\frac{51}{16}, -\frac{25}{8}], [-2, 0], [0, 32]]$$

$$\text{list}[2] = [[-6, -5], [-5, -4], [-4, -2], [-2, 0], [0, 32]]$$

$$\text{list}[3] = [[-8, -4], [-4, -3], [-3, -2], [-2, 0], [0, 32]]$$

$$\text{list}[4] = [[-8, -4], [-4, -3], [-3, -2], [-2, 0], [0, 32]]$$

4. Cálculo da nova condição:

4.1 Pelos dados anteriores, temos:

$$\text{nzn}(p_1) = 4, \quad \text{nzp}(p_3) = 1 \rightarrow \text{nzn}(p_1) + \text{nzp}(p_3) = 5 \wedge$$

$$\text{nzn}(p_2) = 4, \quad \text{nzp}(p_4) = 1 \rightarrow \text{nzn}(p_2) + \text{nzp}(p_4) = 5$$

Logo, em $[p](x)$ só há polinômios com zeros reais.

4.2 Combinação Final:

Lista final= $[[-8, -\frac{45}{8}], [-\frac{45}{8}, -\frac{13}{4}][-\frac{13}{4}, -2], [-2, 0], [0, 32]]$

4.3 Comparação dos Dois Algoritmos

Vamos citar os algoritmos principais novamente, salientando os subalgoritmos que estão sendo efetivamente usados. Nestes, na entrada temos $[p]$ que representa, conforme já dito, o polinômio intervalar de grau n e $m = 2 \cdot n$ é a ordem da matriz dos resultantes.

4.3.1 Abordagem via C.B.Soh

Passos do Algoritmo 1

1. entrada($[p]$).
2. construção dos 4 polinômios: ($\text{polsoh}[p] \rightarrow p1, p2, p3, p4$)
3. construção das 4 matrizes, para os Resultantes ($2n \times 2n$) :
($\text{mat1}(p1, p2, p3, p4)$):
 - 3.1. cálculo de 2 inversões matriciais, ($2n \times 2n$)
 - 3.2. cálculo de 2 produtos matriciais ($2n \times 2n$),
 - 3.3. cálculo de 2 determinantes, ($2n \times 2n$)
 - 3.4. cálculo de $2n$ zeros,
 - 3.5. cálculo da condição ,
 - 3.6 se condição é verdadeira então
 - 3.6.1 separa zeros:
 - 3.6.1.1 cálculo das cotas
 - 3.6.1.2 $\text{usp}(p1), \text{usp}(p2), \text{usp}(p3), \text{usp}(p4)$,
 - 3.6.2 int:combina(n):
 - 3.6.2.1 $\text{sturm}(p1, \text{int}), \text{sturm}(p2, \text{int})$,
 - $\text{sturm}(p3, \text{int}), \text{sturm}(p4, \text{int})$,
 - subdivide: $\text{sturm}(p, \text{esq})$ e $\text{sturm}(p, \text{dir})$,
4. fim

No passo 2 temos cerca de $\mathcal{O}(n^2)$ operações realizadas pois temos a construção de um polinômio de grau n , a partir dos $n + 1$ coeficientes. Utilizamos n produtos e n potências da variável principal. Neste caso, não podemos aplicar o algoritmo de Horner, pois não estamos calculando o valor do polinômio num ponto.

Já no passo 3, na construção das matrizes temos n^2 atribuições por matriz. Para construir esta matriz é calculado a derivada de um polinômio. O cálculo da derivada de um polinômio envolve cerca de $\mathcal{O}(n)$ operações .

No passo 3.1, o cálculo da inversão das matrizes é mais demorado, que o passo anterior. Levando em conta só a ordem m da matriz a complexidade da inversão, pelo método clássico de Gauss é de $\mathcal{O}(m^3)$.

No passo 3.2 temos o produto que é igualmente da ordem de $\mathcal{O}(m^3)$.

No Maxima, o tempo de execução é também proporcional ao tamanho dos elementos operados, pois a aritmética exata implementada trabalha com precisão variada. Assim um cálculo da inversa de uma matriz de ordem m com elementos

de tamanho de 3 dígitos, por exemplo, tem seu tempo de execução menor, que uma outra matriz de elementos de tamanho de 6 dígitos.

Assim, levando em conta que sendo k o tamanho dos coeficientes, no passo 2 temos uma complexidade de $\mathcal{O}(n^2(k \log(k)))$. No passo 3 temos $\mathcal{O}(n^2(k \log(k)))$ e nos passos 3.2 e 3.3 temos $\mathcal{O}(m^3(k \log(k)))$.

O passo de maior complexidade é o passo 3.3 onde o cálculo do determinante, calculado de forma exata é dado por $\mathcal{O}(m^3(k \log(k)))$ e m é a ordem da matriz. Este passo é o de maior tempo na prática. Para o cálculo do determinante de um polinômio de grau 10, podemos esperar cerca de meia hora para obter o resultado final.

O cálculo dos zeros, para determinar os autovalores é feito de forma numérica e aproximada, pelo comando `allroots`. O tempo de execução é proporcional ao grau do polinômio, que neste caso é de $2n$, sendo então que a complexidade é $\mathcal{O}(n(k \log(k)))$. No passo 3.6.1 temos apenas testes sobre $2n$ zeros para verificar se estes possuem parte real negativa.

O tempo de execução do passo 3.6.1.1 é proporcional ao grau do polinômio e portanto, levamos cerca de $\mathcal{O}(n(k \log(k)))$ operações.

Nos passos 3.6.1.2 e 3.6.1.2 temos os algoritmos `usp` e `sturm` implementados em [BRU 94] onde é desenvolvido o estudo de suas complexidades. Não o faremos aqui. Estes dois algoritmos são também usados na nova abordagem e portanto não influem na comparação entre os dois métodos.

4.3.2 Abordagem pelo Novo Algoritmo

Algoritmo Novo

1. *entrada*[p],
2. *construção dos polinômios*, `polsoh`
3. *cálculo das cotas*: b ,
4. *cálculo do número de zeros reais*:
 - . `sturm(p1,[-b,0]), sturm(p1,[0,b]),`
 - . `sturm(p2,[-b,0]), sturm(p2,[0,b]),`
 - . `sturm(p3,[-b,0]), sturm(p3,[0,b]),`
 - . `sturm(p4,[-b,0]), sturm(p4,[0,b]),`
5. *cálculo da nova condição* : 4 *adições*
6. *se condição é verdadeira* 7 *se condição é verdadeira então*
 - . 7.1 *separa zeros*:
 - 7.1.1 *cálcula cotas*:
 - . 7.1.2 `usp(p1),usp(p2),usp(p3),usp(p4),`
 - . 7.2 *int:combina(n)*: 7.2.1 `sturm(p1,int),sturm(p2,int),`
 - . `sturm(p3,int), sturm(p4,int),`
 - . `subdivide:sturm(p,esq) e sturm(p,dir),`
8. *fim*

Subalgoritmo `sturm`

`sturm(pol,int):=`

1. z : *variável principal de pol*,

2. *graup*: grau de pol em z .
3. *ai*: extremidade inferior de int.
4. *bi*: extremidade superior de int.
5. *f[0]*: pol.
6. *f[1]*: derivada(pol) em z .
7. `obtem_sturm()`.
8. `nz:calc_nzeros(ai,bi)`.
9. *fim*

Neste Subalgoritmo, dois são os procedimentos básicos: o de gerar uma seqüência de Sturm e o de calcular o número de zeros num intervalo.

A separação, comum aos dois algoritmos, é feita pelo método de **Uspensky Modificado** e pelo cálculo do número de zeros em diversos intervalos.

Novamente, o estudo da complexidade está no trabalho já citado ([BRU 94]).

Comparando os dois algoritmos, na abordagem via C. B. Soh e na abordagem via Nova Condição temos uma diminuição grande do tempo de execução, uma vez que não é preciso calcular o determinante de uma matriz de tamanho $m = 2 \times n$ e nem o cálculo aproximado dos zeros para determinar os autovalores. Na nova abordagem temos um algoritmo, onde no ponto diferencial temos complexidade $\mathcal{O}(n^2(k \log(k)))$ enquanto que usando a condição de C.B. Soh temos a complexidade de $\mathcal{O}(m^3(k \log(k)))$.

A nova abordagem, portanto provê um método totalmente algébrico e mais rápido que a abordagem via C.B.Soh.

Capítulo 5

Conclusão

Os resultados de C.B. Soh com os teoremas 3.2.7, 3.2.8 e 3.2.9 foram os pontos importantes para o início deste trabalho. A partir deles iniciamos a pesquisa de ampliações do seu resultado e de um resultado equivalente com menor trabalho computacional.

Em condições especiais da família $[p]$, a respeito da natureza dos autovalores dos resultantes ou do número de zeros dos polinômios limítrofes, conforme especificado nos teoremas do capítulo quatro, podemos localizar uma seqüência de intervalos reais de modo que todos os zeros de cada polinômio $p \in [p]$ estejam num desses intervalos, e que cada intervalo da seqüência possua um zero de cada polinômio da família. Tal resultado é obtido de 2 modos diferentes, com complexidades igualmente diferentes porém, ambos utilizam os polinômios limítrofes.

Para verificar a condição de Soh em 3.2.7 temos uma complexidade da ordem de $\mathcal{O}(n^3)$ só no cálculo dos autovalores, ao passo que, para verificar a nova condição em 4.2.4, não só não utilizamos nenhum procedimento de tal complexidade, como também usamos as informações que são necessárias para a própria separação, com algoritmo de complexidade de $\mathcal{O}(n^2)$ mais duas somas e 2 testes de igualdades entre elementos destas mesmas informações.

Há um evidente ganho de tempo na nova abordagem proposta, baseada apenas na contagem e separação dos zeros dos polinômios limítrofes em relação à abordagem de C.B. Soh que utiliza o cálculo de autovalores das matrizes de certos resultantes entre os limítrofes. Se o polinômio é do grau n então estas matrizes são da ordem de $2n$.

Além da diferença no ganho de tempo, também na nova abordagem podemos utilizar inteiramente algoritmos implementados simbolicamente. Isto nos traz a vantagem, de que quando trabalhamos com polinômios com coeficientes no domínio gaussiano e de fatoração livre de quadrados (exigência para isolar os zeros reais de um polinômio real pelo método de Uspensky Modificado), **temos resultados exatos** e não apenas com uma boa exatidão numérica. Em certos casos, isto pode compensar o gasto maior em tempo, por trabalharmos com manipulação simbólica.

Embora a contagem do número de zeros reais assim como a sua separação seja feita algoritmicamente do modo algébrico sobre os polinômios limítrofes, tais algoritmos podem também ser implementados numericamente. Em ambos os casos teremos, é claro, as limitações e problemas de cada uma das abordagens.

5.1 Casos Reais Simples e Separáveis

Quando conseguimos isolar uma região ou um intervalo real onde temos um só zero de cada $p \in [p]$, dizemos que este zero real ou mesmo complexo é **separável**. Vamos levar em conta as variáveis, já identificadas no capítulo anterior, que são abreviaturas a respeito do número de zeros reais positivos ou negativos, complexos com parte real positiva ou negativa.

- T : número de trocas de sinal nos coeficientes de $[p](x)$;
- T' : número de trocas de sinal nos coeficientes de $[p](-x)$;
- $n_zr(p)$: número de zeros reais de p ;
- $n_zp(p)$: número de zeros positivos de p ;
- $n_zn(p)$: número de zeros negativos de p ;
- $n_zc(p)$: número de zeros complexos de p ;
- $n_zcpp(p)$: número de zeros complexos de p com parte real positiva;
- $n_zcpn(p)$: número de zeros complexos de p com parte real negativa.

Definição 5.1.1 (Zeros Reais Simples e Separáveis) *Seja $[p]$ um polinômio intervalar e p_1, p_2, p_3 e p_4 seus polinômios limítrofes. Se os polinômios limítrofes satisfazem a nova condição 4.2.4*

$$(LCP) \quad n_zp(p_3) = n_zp(p_4) = \mu$$

$$(LCN) \quad n_zn(p_1) = n_zn(p_2) = \eta$$

e além disso vale:

$$(TCS) \quad n_zn(p_1) + n_zp(p_3) = n \quad \wedge \quad n_zn(p_2) + n_zp(p_4) = n$$

então dizemos que todos os zeros reais de cada $p \in [p]$ são simples e separáveis.

Caso contrário, podemos ter situações onde delimitamos um intervalo que possui apenas um zero de cada $p \in [p]$, mas nem todos os demais são separáveis e simples.

Vamos salientar ainda outros casos em que temos uma informação exata e fechada. Isto quer dizer que o resultado a ser obtido da separação é todo obtido pelo algoritmo e possui um significado único, sem alternativas. Serão designados casos (A).

- (A1) Se vale (LCP), (LCN) e (TCN) então todo $p \in [p]$ possui só zeros reais simples, resultado do teorema 4.2.4.

Os próximos itens são resultados da generalização do Teorema de Descartes 3.1.2, para polinômios intervalares.

- (A2) Se $T' = 0$ então todo $p \in [p]$ não possui zeros negativos;

- (A3) Se $T = 0$ então todo $p \in [p]$ não possui zeros positivos;
- (A4) Se $T' = 1$ então todo $p \in [p]$ possui um zero negativo;
- (A5) Se $T = 1$ então todo $p \in [p]$ possui um zero positivo.

Em todas as situações dadas em (A) teremos como resultado uma seqüência de intervalos, numa lista, em que cada elemento contém um só zero de qualquer $p \in [p]$ e que todos os zeros de qualquer polinômio da família $[p]$ está num destes elementos.

5.2 Casos Reais ou Complexos

Quando não são satisfeitas as condições anteriores mas ainda temos as condições válidas para os lemas 4.2.1 e 4.2.2 então podemos ter, eventualmente, alguns zeros separados, mas nem todos.

No caso do plano complexo, embora possamos separar os zeros complexos dos polinômios limítrofes, não podemos garantir o mesmo comportamento para os demais polinômios da família. Os resultados gráficos mostram que há situações onde o intervalo que contém zeros reais não é excludente com o intervalo que contém as partes reais dos zeros complexos. Somente em alguns casos especiais, mediante uma análise gráfica ou mediante pesquisa de mínimos ou máximos locais de cada um dos polinômios limítrofes, podemos chegar a separar as regiões que possuem só zeros complexos da regiões que possuem só reais.

O teorema 3.2.11 de Soh e seu corolário fornecem condições para que tenhamos k zeros no semiplano esquerdo e $n - k$ no semiplano direito, porém este resultado não é suficiente para separar as regiões onde teremos que cada $p \in [p]$ terá um zero complexo e que cada zero esteja confinado a uma das regiões isoladas.

Podemos ter, a partir dos resultados da separação dos zeros tanto reais como complexos dos polinômios limítrofes, uma lista de situações onde podemos identificar algumas informações relevantes. Estas informações são obtidas da separação dos zeros reais e complexos dos polinômios limítrofes $p_i(x)$, $i = 1(1)4$.

Analisando os polinômios maximal e minimal no semiplano negativo e positivo temos então diversas situações para os valores do número de zeros reais ou complexos.

Trabalhando com estes valores temos situações onde podemos agrupar um conjunto de informações associado a uma região. Neste trabalho, esta região é fornecida pela separação ou dos zeros reais ou dos zeros complexos de cada um dos polinômios limítrofes. No caso de regiões que constituem intervalos, como é o caso da separação dos zeros reais, a subdivisão é simples e feita num ponto de quebra, gerando dois subintervalos. Quando a região é um quadrado ou retângulo a subdivisão pode ser feita de diversas maneiras, mas em geral, o retângulo é dividido por um ou dois segmentos de retas paralelos aos seus lados, gerando dois ou quatro subretângulos. A cada subdivisão novas avaliações devem ser feitas em cada parte. No caso dos intervalos o processo continua, de modo algoritmicamente, simples. Contudo no caso dos retângulos gerados pela separação dos complexos tal reavaliação não é elementar.

Além disso, pode ocorrer que embora a realiação seja executada o número de informações não possa ser aumentado. Isto é visto no exemplo 3.1.9 e 3.1.10 onde a

subdivisão da região implica em perda de informação referente a todos polinômios. Isto significa que não há um limite, dado por um ponto determinado algebricamente, onde a partir do qual tenhamos um conjunto maior de informações. Ou seja, se subdividirmos a região, mediante mais trabalho evidentemente, o conjunto das informações continuará o mesmo ou diminuirá. No exemplo 3.1.9, no retângulo de vértices $(0,0)$, $(0,100)$, $(10,100)$ e $(10,0)$, temos que todo $p \in [p]$ possui *ou* dois zeros reais *ou* um zero complexo. Se subdividirmos este retângulo não podemos garantir a mesma informação nem outra mais qualitativa, para *todos* $p \in [p]$.

Vejam as seguintes situações de verificação algorítmica e que produzem uma informação resultados não fechada, isto é, com alternativas. São os casos rotulados de B .

- (B1) Se $nzn(p_1(x)) = nzn(p_2(x)) = \eta$ então todo polinômio $p \in [p]$ tem pelo menos η zeros negativos. Lema 4.2.2.
- (B2) Se $nzp(p_3(x)) = nzp(p_4(x)) = \mu$ então todo polinômio $p \in [p]$ tem pelo menos μ zeros positivos. Lema 4.2.1.

Há diversas outras situações que não são evidentes e podem vir a ser comprovadas ou refutadas com alguma informação extra. São os casos (C).

- (C1: Conjetura 1) Se $nzn(p_1(x)) = nzn(p_2(x)) = \eta$ e $nzcnp(p_1(x)) = nzcnp(p_2(x)) = nzcnp(p_3(x)) = nzcnp(p_4(x)) = 0$ então todo polinômio $p \in [p]$ tem exatamente η zeros negativos.
- (C2: Conjetura 2) Se $nzp(p_3(x)) = nzp(p_4(x)) = \mu$ e $nzcnp(p_1(x)) = nzcnp(p_2(x)) = nzcnp(p_3(x)) = nzcnp(p_4(x)) = 0$ então todo polinômio $p \in [p]$ tem exatamente μ zeros positivos.

Graficamente, observamos que quando há um polinômio da família $[p]$ com um zero complexo e seus coeficientes são alterados dentro de intervalos A_i , o polinômio modificado poderá vir a cortar o eixo x gerando dois novos zeros reais. Porém, quando tal *não* ocorre e se todos os polinômios limítrofes possuem o mesmo número de zeros negativos η , que satisfaz LCN então deve ser provável que todos polinômios de $[p]$ tenham o mesmo número.

No exemplo 4.2.1, que satisfaz LCN observamos que o maximal e minimal negativos possuem zeros complexos com parte real negativa e efetivamente há outros polinômios com mais de η zeros negativos. No exemplo 4.2.2 isto também ocorre. Já no exemplo 4.2.5 temos exatamente 2 zeros negativos e nenhum dos limítrofes negativos possui zero complexo com parte real negativa. O mesmo não ocorre com o eixo positivo, onde não se satisfaz nem o LCP .

Confirmar ou refutar tais conjecturas faz parte de trabalhos futuros.

Conforme já vimos no exemplo 3.2.6, a existência de do mesmo número de zeros complexos: $nzcnp(p_3) = nzcnp(p_4) = \theta = 1$ nos polinômios maximal e minimal no eixo positivo, não implica que todos polinômios da família tenham pelo menos o mesmo número de zeros complexos, que no caso é um, pois o polinômio p_1 não possui zeros complexos com parte real positiva, alias nem negativa. Porém se o resultado da separação dos zeros complexos dos limítrofes, maximal e minimal, produz quadrados ou eventualmente retângulos cujas fronteiras que coincidam com o eixo real não

tenham zeros reais então esta região poderá possuir só zeros complexos. Determinar condições para que esta região possua só zeros complexos é também um futuro trabalho.

Outros trabalhos futuros podem ser dirigidos a ampliar as condições sobre outras família de polinômios que não apenas a dos polinômios intervalares. Alguns trabalhos nesta área já existem e trabalham com famílias de certas funções não lineares, ver [KRA 85].

Assim, conseguimos neste trabalho, determinar uma nova condição para que um polinômio intervalar possua somente zeros reais, e neste caso, separá-las, com um algoritmo, onde na parte significativa, isto é, o cálculo da nova condição, temos complexidade de $\mathcal{O}(n^2(k \log(k)))$ enquanto que, com a condição de C.B. Soh o algoritmo tem uma complexidade de $\mathcal{O}(m^3(k \log k))$ com $m = 2 \cdot n$.

Bibliografia

- [ALE 83] ALEFELD, Götz.; HERZBERGER, J. **Introduction to Interval Computations**. New York: Academic Press, 1983. 381 p.
- [ARG 86] ARGOUN, M.B. Allowable coefficient perturbation with preserved stability of a Hurwitz polynomial. **International Journal Control**, London, v.44, n.4. p.927-934, 1986.
- [ARG 87] ARGOUN, M.B. Stability of a Hurwitz polynomial under coefficient perturbations: necessary and sufficient conditions. **International Journal Control**, London, v. 45, n. 2, p.739-744, 1987.
- [BAC 75] BACHMANN, K.H. Einschließung der Nullstellen von Intervallpolynomem. **Beiträge Numerischen Mathematik**, Secaucus, NJ, v.4, p.23-32, 1975.
- [BAR 89] BARBEAU, E. J. **Polynomials**. New York:Springer-Verlag, 1989. 441p. (Problem Books in Mathematics).
- [BAR 84] BARMISH, ROSS B. Invariance of strict Hurwitz property of polynomials with perturbed coefficients. **IEEE Trans. on Automatic Control**, New York, v. AC 29, n.10, p.935-936, 1984.
- [BEA 91] BEAUZAMY, B. Degree free upper estimates in polynomial factorization. A publicar.
- [BIA 83] BIALAS, S. On Certain properties of Hurwitz determinants for interval polynomials. **Computing**, New York, v.30, p.149-155, 1983.
- [BIA 83a] BIALAS, S. A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices. **International Journal Control**, London, v.37, n.4, p.717-722, 1983.
- [BIA 84] BIALAS, S.; GARLOF, J. **Stability of polynomials under coefficient perturbation**. Freiburg: Institut für Angewandte Mathematik, Universität Freiburg i. Br., 1984. 76 p. (Freiburger Intervall Berichte)
- [BOS 83] BOSE, N.K.; GUIVER, J.P. Strictly Hurwitz property invariance of quartics under coefficient perturbations. **IEEE Trans. Automat. Control**, New York, v. 28, n.1, p.106-107, 1983.

- [BRU 94] BRUNETTO, Maria Angélica O.C. **Métodos Algébricos para Isolar os Zeros de Polinômios Complexos**. Porto Alegre:CPGCC UFRGS, 1994. 132p.Tese de Doutorado.
- [CAM 93] CAMARGO, M. A. O.; TREVISAN, V.; CLAUDIO, D. Counting polynomial zeros in a disk using Symbolic Computation. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICAL MODELLING AND SCIENTIFIC COMPUTATION, 1993. Bulgária. **Proceedings...** Sofia:DATECS, 1993. 191p. p.3-6.
- [CLA 89] CLAUDIO, Dalcidio M.; MARINS, Jussara M. **Cálculo Numérico Computacional**. São Paulo: Atlas, 1989. 464 p.
- [CLA 93] CLAUDIO, Dalcidio M. **Teoria das aproximações intervalares**. Porto Alegre:CPGCC- UFRGS, 1993. 21p.(RP 226)
- [CON 93] CONNELL.A.E.; CORLESS.R. An experimental interval arithmetic package in Mapple. **Interval Computations**, St. Petersburg, n.2, p.121-133. 1993.
- [COL 76] COLLINS, G. E.; LOOS, G. K. Polynomial real root isolation by differentiation. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SYMBOLIC AND ALGEBRAIC COMPUTATION ISSAC, 1976. **Proceedings ...** [S.l.:s.n], 1976.
- [COL 77] COLLINS, G. E. Infallible Calculation of Polynomial Zeros to Specified Precision. G. E. Collins In: RICE, J.R. **Mathematical Software**. New York:Academic Press, 1977. 388p. p.35-68.
- [COL 82] COLLINS, G. E.; LOOS, G. K. Real Zeros of Polynomial. **Computing**, Berlin, Suppl. n.4, p.83-94, 1982.
- [COL 92] COLLINS, G. E. and KRANDICK, W. An Efficient Algorithm for Infallible Polynomial Complex Root Isolation. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SYMBOLIC AND ALGEBRAIC COMPUTATION ISSAC, USA, **Proceedings...** [S.l.:s.n], 1992. p. 189-194.
- [DAV 87] DAVENPORT, H. H. **Survey of Symbolic Applications for Numerical Computation**. [S.l.:s.n], 1987.(Doc. 03/2-7/1/b01.f - DIAMOND).
- [DAV 88] DAVENPORT, J. H.; SIRET, Y.; TOURNIER, E. **Computer Algebra Systems and Algorithms for Algebraic Computations**.San Diego, CA: Academic Press, 1988. 267 p.
- [ELY 93] ELY, Jeffrey S. The VPI software package for variable precision interval arithmetic. **Interval Computations**, St. Petersburg, n.2, p.135-153, 1993.

- [FUJ 16] FUJIWARA, M. Über die obere Schranke des absoluten Betrags der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. **Tôhoku Math J.** [S.1], v. 10, p.167-170, 1916.
- [GAN 59] GANTMACHER, F.R. **Applications of the theory of matrices.** New York: Interscience, 1959.
- [GLA 92] GLAZUNOV, Nicolay M. On Interval Extensions of Computer Algebra Systems. **Interval Computations**, St. Petersburg, v.3, n.5, p.81-87, 1992.
- [HAM 93] HAMMER, R. et al. **Numerical toolbox for verified computing I: Basic numerical problems.** Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [HEN 74] HENRICI, Peter. **Applied and computational complex analysis.** New Jersey: John Wiley & Sons, 1974. v.1.
- [HEN 69] HENRICI, P.; GARGANTINI, I. Uniformly convergent Algorithms for the simultaneous Approximation of all zeros of a polynomial. In: DEJON, P.; HENRICI, P. **Constructive aspects of the fundamental theorem of algebra.** New York: Wiley, 1969.
- [HOF 71] HOFFMAN, Keneth; KUNZE, Ray. **Álgebra Linear.** São Paulo: Ed. da USP, 1971. 354p.
- [HOH 96] HÖHER, Charles Leandro; DIVERIO, Tiarajú Asmuz. **Programando em PASCAL-XSC.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1996.
- [KHA 78] KHARITONOV, V.L. Asymptotic stability of equilibrium position of a family of Systems of linear differential equations. **Differential equations**, [S.1], v. 14, p.1483-1485, 1978.
- [KHA 93] KHARITONOV, V.L. Stability of interval systems scientific computation mathematical modelling. In: MARKOV S.(ed) INTERNATIONAL CONFERENCE IN SCIENTIFIC COMPUTATION MATHEMATICAL, 1993. **Proceedings ...** [S.L.:S.N], pp.15-18.
- [KAU 84] KAUCHER, E.W.; MIRANKER, W.L. **Self-validating numerics for function space problems.** Orlando: Academic Press, 1984.
- [KAU 91] KAUCHER, E.; MARKOV, S. M.; MAYER, G. (Eds.) Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICAL MODELLING AND SCIENTIFIC COMPUTATION, 1991. **Proceedings...** Oldenburg: Oldenburg Universität, 1991.
- [KLA 92] KLATTE, R. et al. **PASCAL-XSC: Language Reference with Examples.** Berlin: Springer-Verlag, 1992. 344p.
- [KNU 69] KNUTH, D. **The Art of computer programming: seminumerical algorithms.** New York: Addison-Wesley, 1969. v.2.

- [KNU 93] KNÜPPEL,O. **BIAS: Basic interval arithmetic subroutines.** Freiburg: Institut für Angewandte Mathematik,Universität Freiburg i. Br., 1993. (Berichte des Forschungsschwerpunktes Informations und Kommunikationstechnik, Berichte 93.3)
- [KNU 93a] KNÜPPEL,O. **PROFIL: Programmer's runtime optimized fast interval library.** Freiburg: Institut für Angewandte Mathematik,Universität Freiburg i. Br., 1993.(Berichte des Forschungsschwerpunktes Informations und Kommunikationstechnik, Berichte 93.4)
- [KNU 93b] KNÜPPEL,O. **PROFIL: Programmer's runtime optimized fast interval library - extensions.** Freiburg: Institut für Angewandte Mathematik,Universität Freiburg i. Br., 1993. (Berichte des Forschungsschwerpunktes Informations und Kommunikationstechnik, Berichte 93.5)
- [KOR 94] KORZENOWSKI,Heidi. **Estudo sobre resolução de equações de coeficientes intervalares.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1994. 132p. Dissertação de Mestrado
- [KRA 84] KRAWCZYK, Rudolf; NEUMAIER, A. **An improved interval Newton operator.** Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik,Universität Freiburg i. Br., 1984. p.1-26. (Freiburger Intervall-Berichte n. 4)
- [KRA 84a] KRAWCZYK, Rudolf. **A Lipschitz operator for function strips.** Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik,Universität Freiburg i. Br., 1984. p. 9-19. (Freiburger Intervall-Berichte n. 5)
- [KRA 85] KRAWCZYK, Rudolf; NEUMAIER, A. **Interval Newton Operators for Function Strips.** Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik,Universität Freiburg i. Br., 1985. p.1-34. (Freiburger Intervall-Berichte n. 7)
- [KRA 85a] KRAWCZYK, Rudolf. **Properties of Interval Operators.** Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik,Universität Freiburg i. Br., 1985. p. 1-20. (Freiburger Intervall-Berichte n. 3)
- [KRA 86] KRAWCZYK, Rudolf. **Optimal Enclosure of a Generalized Zero Set of a Function Strip.** Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik,Universität Freiburg i. Br., 1986. p. 1-18. (Freiburger Intervall-Berichte n. 2)
- [KUL 81] KULISCH,Ulrich.W.;MIRANKER, W.L. **Computer arithmetic in theory and practice.** New York: Academic Press, 1981. 231 p.

- [KUL 83] KULISCH, Ulrich. A new arithmetic for scientific computation. In: KULISCH, Ulrich W.; MIRANKER, Willard L. **A new approach to scientific computation**. New York: Academic Press, 1983. 384p. p.1-26.
- [KUL 86] KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. The arithmetic of the digital computer: a new approach. **SIAM Review**, Philadelphia, v.28, n.1. 1986.
- [KUL 87] KULISCH, U.; MIRANKER, W. L. **Computer arithmetic: theory and practice**. New York: Academic Press, 1987. 384p.
- [KUL 88] KULISCH, U.; STETTER, H. J. (Eds.) **Scientific computation with automatic result verification**. Wien: Springer Verlag, 1988.
- [KUR 92] KURTZ, D.C. A sufficient condition for all the roots of a polynomial to be real. **Annals Mathematical Monthly** p.259-263. 1992.
- [MAR 49] MARDEN, M. **The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable**. New York: AMS, 1949 183p. (American Mathematical Society Surveys III)
- [MEL 93] MELENK, H. **Numeric** Berlin: Konrad-Zuse Zentrum fuer Informationstechnik. Disponível por FTP anônimo em <ftp://ftp.cesup.ufrgs.br/pub/reduce/doc>, e-mail: Melenk@sc.zib-berlin.de (julho de 1995)
- [MIG 92] MIGNOTTE, Maurice. **Mathematics fo computer algebra** . New York: Springer Verlag, 1992. 346 p.
- [MON 71] MONTEIRO, J. **Elementos de álgebra**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971. 552p.
- [MOO 66] MOORE, Ramon E. **Interval analysis**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966. 232 p.
- [MOO 79] MOORE, Ramon E. **Methods and applications of interval analysis**. Philadelphia: SIAM, 1979. 187 p.
- [NIC 71] NICKEL, Karl. **Numerische Mathematik**. Karlsruhe: Universität Karlsruhe, 1971. 187 p.
- [NIC 80] NICKEL, Karl L. E. **Interval Mathematics**. New York: Academic Press, 1980. 554p.
- [OLI 95] OLIVEIRA, Paulo Werlang de. **Análise Intervalar**. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1995. 182p. Dissertação de Mestrado.
- [OLI 96] OLIVEIRA, Paulo Werlang de; DIVERIO, Tiarajú Asmuz.; CLAUDIO, Dalcidio Moraes. **Fundamentos da Matemática Intervalar**. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1996.

- [PIN 76] PINKERT, J. R. An Exact Method for finding the roots of a complex polynomial. **ACM Transactions on Mathematical Software**, New York, v.2, n.4, p.351-363, 1976.
- [PRE 88] PRESS, W. H. et al. **Numerical Recipes in C: The art of Scientific Computation**. New York:Cambridge University Press, 1988. 735p.
- [RUM 79] RUMP, S. M. Polynomial minimum root separation. **Mathematics of Computation**, Washington, v.33, n.145, p.327-336, 1979.
- [RAL 65] RALSTON, Anthony : RABINOWITZ, Philip. **A first course in Numerical analysis**. New York: McGraw-Hill, 1965. 555p.
- [RAL 80] RALL, L. B. **Representations of intervals and optimal error bounds**. Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik, Universität Freiburg i. Br., p. 25-42. 1980 (Freiburger Intervall-Berichte n. 7)
- [RAT 87] RATSCHKE, H. **Interval mathematics**. Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik, Universität Freiburg i. Br., 1987. 44p.
- [RUD 66] RUDIN, Walter. **Real and complex analysis**. New York: McGraw-Hill, 1966. 412p.
- [SCH 83] SCHELIN, C. W. Counting zeros of real polynomials within the unit disk. **SIAM Journal Numerical Analysis**, Philadelphia, v.20, n.1, p.1023-1031. 1983.
- [SOH 90] SOH, Y.C.; FOO, Y. Generalization of strong Kharitonov theorems to left sector. **IEEE Trans. on Automatic Control**, New York, v. 35, n. 12, p.1378 - 1382, 1990.
- [SOH 91] SOH, C.B. Necessary and sufficient conditions for interval polynomial to have only real roots. **Linear Algebra and its Applications**, New York, v.144, p.121-133, 1991.
- [SOH 92] SOH, C.B. On Root distribution criterium for interval polynomials. **IEEE Trans. on Automatic Control**, New York, v.37, n.12, p.1977-1988, 1988.
- [TRE 90] TREVISAN, V. Recognition of Hurwitz polynomials. **SIGSAM Bulletin**, New York, v.24, n.4, p.26-32, Oct. 1990.
- [TRE 92] TREVISAN, V. Computação Algébrica e Simbólica. In: MINICURSO - XV CNMAC, 1992, São Carlos, Brasil. **Anais...**, São Carlos-Sp, 1992. 96p.
- [TRE 95] TREVISAN, Vilmar. Polynomial Factorization II. III ESCOLA DE ÁLGEBRA, Campinas, **Anais...** pp.235-251, 1994.

- [WIL 78] WILF, Herbert. S. A Global Bisection algorithm for computing the zeros of polynomials in the complex plane. **Journal of the ACM**, New York. v.25. n.3,p.415-420, 1978.
- [USP 48] USPENSKY, J. V. **Theory of Equations**. New Jersey:McGraw-Hill. 1948. 353p.

Informática



UFRGS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Localização de Zeros Reais de Polinômios Intervalares

por

Jussara Maria Marins

Defesa de Tese apresentada aos Senhores:

Prof. Dr. Vilmar Trevisan (IM/UFRGS)

Prof. Dr. Luiz Alberto Vieira Dias (INPE/SP)

Profa. Dra. Laira Vieira Toscani

Vista e permitida a impressão.

Porto Alegre, 27/02/97.

Prof. Dr. Dalcídio Moraes Claudio,
Orientador.

Prof. Flávio Rech Wagner
Coordenador do Curso de Pós-Graduação
em Ciência da Computação - CP
Instituto de Informática - UFRGS