VOZES DIVERSAS DIFERENTES SABERES

SALÃO DE INICIACAO CIENTIFICA XXX SIC

15 A 19 OUTUBRO CAMPUS DO VALE

UFRGS PROPESQ

UFRGS UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Regularidade das Soluções de Navier-Stokes

Henrique Borrin de Souza

Orientador: Diego Marcon Farias

IME - UFRGS

Resumo

Como objetivo deste trabalho, procurou-se investigar as soluções regulares das equações de Navier-Stokes, além de existência e unicidade. Investigou-se, além disso, propriedades do conjunto de singularidades do fluido, isto é, o conjunto de pontos onde a velocidade não tem um limitante superior.

Introdução

Ainda que muito progresso tenha sido feito na primeira metade do século XX por Leray [1], como regularidade, existência e unicidade de soluções fortes para um tempo finito e a noção de soluções fracas, não se sabe se soluções fracas são únicas ou se têm algum tipo de regularidade. Devido a dificuldade do problema, o instituto Clay oferece o prêmio de um milhão de dólares para quem conseguir garantir que as soluções do problema tem as propriedades acima indefinidamente no tempo [4]. O objetivo do prêmio é chamar atenção para um problema de mecânica clássica que ainda não foi solucionado, acreditando que o método aplicado na solução possa ser generalizado para outras equações diferenciais não-lineares.

As equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes podem ser entendidas em três partes: a primeira como a equação de continuidade do fluido, isto é, que a massa não é destruída nem criada no movimento do fluido. Matematicamente, temos que

$$\nabla \cdot (\rho\vec{u}) + \rho_t = 0, \tag{1}$$

onde ρ é a densidade de massa e $\vec{u}$ é a velocidade do fluido. A segunda pode ser entendida como a segunda lei de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) estendida para a mecânica do contínuo, obtendo

$$(\rho\vec{u})_t + (\vec{u}\cdot\nabla)(\rho\vec{u}) + \nabla P - \mu(\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \Delta\vec{u}) = \vec{f}_{ext}, \tag{2}$$

onde P é a pressão do fluido, μ é a viscosidade dinâmica e $\vec{f}_{ext}$ é a densidade de força externa aplicada ao fluido.

Por fim, a terceira parte é somente a condição inicial do sistema hidrodinâmico, ou seja,

$$\vec{u}(\vec{r}, t = 0) = \vec{u}_0. \tag{3}$$

Em geral, temos de antemão o conhecimento de ρ, $\vec{f}_{ext}$ e $\vec{u}_0$. Como as equações de Navier-Stokes tornam-se muito complicadas para o estudo de regularidade, toma-se como constante a densidade do fluido, obtendo

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{u} = 0;\\ &\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla P - \Delta\vec{u} = \vec{f}_{ext};\\ &\vec{u}(\vec{r}, 0) = \vec{u}_0, \end{aligned} \tag{4}$$

onde renormalizou-se as equações para eliminar constantes físicas.

Extensões das Equações de Navier-Stokes

Há diversos trabalhos que exploram outras equações de Navier-Stokes, como as equações de Euler, hiperdissipação e magnetohidrodinâmica.

1. As equações de Euler modelam um fluido ideal, ou seja, não há força de arraste ($\mu = 0$). Apesar de aparentemente simplificar o problema, a retirada do termo com o laplaciano reduz a garantia de suavidade das soluções, uma vez que ele atua como um regularizador;
2. As equações de Navier-Stokes hiperdissipativas modelam fluidos com dissipação mais rápida que o laplaciano usual, definindo $(\Delta)^\alpha$ a partir da modificação do expoente do núcleo de Poisson. Apesar da modificação do termo por outro aparentemente mais complexo, o problema de Navier-Stokes para o caso hiperdissipativo é mais fácil de estudar, uma vez que o novo operador garante mais regularidade para as soluções;
3. As equações de magnetohidrodinâmica modelam fluidos com carga elétrica, e, portanto, corrente elétrica. Então usa-se como força externa a força de Lorentz $\vec{f}_{ext} = \rho_E\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}$, com notação usual do eletromagnetismo. Para tal, despreza-se a corrente de deslocamento $c^{-2}\vec{E}_t$.

Soluções Fortes

O trabalho de Leray [1] foi o mais influente para o entedimento das soluções de Navier-Stokes. Para tal, estuda-se primeiro a versão (mais) simplificada das equações de Navier-Stokes, chamadas equações de Stokes, que são da forma

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{u} = 0;\\ &\vec{u}_t + \nabla P - \Delta\vec{u} = \vec{f}_{ext};\\ &\vec{u}(\vec{r}, 0) = \vec{u}_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Essas equações podem ser entendidas como o limite hidrodinâmico de número de Reynolds nulo, isto é, para situações onde o fluxo é laminar e, portanto, a contribuição não-linear é desprezível. Como as equações de Stokes são lineares, temos soluções bem conhecidas através dos núcleos do Calor e de Oseen [5] e Leray usou esse fato para estendê-las para as equações de Navier-Stokes através da identificação $\vec{f}_{ext} = -(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$, procurando soluções na forma distribucional. O trabalho de Leray obteve muito sucesso devido a garantia de existência (através de iteração de Picard), unicidade e regularidade das soluções $\vec{u} \in C((0,T); L^2) \cap C((0,T); L^\infty)$ e $P \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$, ou seja, a energia cinética do fluido é contínua, com velocidades limitadas em quase todo ponto e soma forças normais localmente limitadas, além de satisfazer

$$\frac{1}{2}\|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{2}\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla\vec{u}(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,ds - \int_0^t \|\vec{u}\cdot\vec{f}_{ext}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\,ds, \tag{6}$$

ou seja, a energia cinética inicial distribui-se em energia cinética final, energia dissipada e induzida por forças externas.

Note que não se tem garantia que $T = \infty$. Caso seja provado verdade, então o problema de Navier-Stokes é concluído.

Soluções Fracas

Leray também foi pioneiro na construção de soluções fracas, que tem como principal característica a mudança do termo não linear $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$ para $(\vec{u}_\epsilon\cdot\nabla)\vec{u}$, onde $\vec{u}_\epsilon = \eta_\epsilon * \vec{u}$, η_ϵ o molificador (ou regularizador) usual. Temos como definição de solução fraca àquela que satisfaz as equações de Navier-Stokes no sentido distribucional em todo tempo **exceto** num conjunto Υ de medida nula, além de satisfazer (6) na forma de inequação. Leray (e Hopf, para domínios limitados [6]) consegue demonstrar existência global das soluções fracas, com a propriedade

$$\vec{u} \in L^\infty((0,\infty); L^2) \cap L^2((0,\infty); H^1). \tag{7}$$

mas regularidade e unicidade mostraram-se desafios não solucionados até hoje.

Na segunda metade do século XX, James Serrin consegue mostrar que a partir da hipótese de $\vec{u} \in L^{s'}(0,T); L^s(\Omega))$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, com $3/s + 2/s' < 1$, $s', s < \infty$, que $\vec{u}$ é suave espacialmente caso $\vec{f}_{ext}$ seja suave. Desde Serrin, esse resultado foi melhorado para os casos limites e para igualdade, ou seja, $3/s + 2/s' \leq 1$, $s', s \leq \infty$.

No final do século XX, o trio Caffarelli-Kohn-Nirenberg [3] estudam o caso $s = \infty$, $s' = \infty$. Note que não se sabe se as velocidades são limitadas em quase todo ponto. Definindo o conjunto de pontos que não obedecem essa propriedade por S (conhecido como conjunto de singularidades), bastaria mostrar que $S = \emptyset$ para obtermos regularidade espacial. O que Caffarelli-Kohn-Nirenberg conseguem demonstrar, entretanto, é que

$$\mathcal{P}^1(S) = 0, \tag{8}$$

isto é, a dimensão de Hausdorff (para cilindros parabólicos) do conjunto de singularidades é no máximo igual a 1. Qualitativamente, temos que as singularidades não podem se agrupar em estruturas “mais complexas"que uma reta contínua. Em particular, temos que singularidades espaciais (que se mantém para todo tempo) devem ser isoladas o suficiente para que não formem uma estrutura espacial com dimensão de Hausdorff, isto é, $\mathcal{P}^1(S \cap (\Omega \times \{t\})) = 0$.

Conclusão

As equações de Navier-Stokes, apesar de modelarem fenômenos clássicos como a hidrodinâmica, representam uma fronteira no estudo de equações diferenciais parciais não-lineares. Caso seja provada verdadeira a hipótese de existência de solução única regular para todo tempo, teremos uma revolução nos métodos de resolução de equações diferenciais parciais, visto que é esperado método de demonstração aplicado no problema de Navier-Stokes possa ser estendido à outras equações não-lineares.

Referências

[1] Leray, S.; Predazzi, Sur le mouvement d'un liquide visquex emplissant l'espace, Acta Math. 63, 1934, pp. 193-248;

[2] Serrin, J., On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations, Arch Ration. Mech. Anal. 9,1962, pp. 187-195;

[3] Caffarelli, L., Kohn, R., Nirenberg, L., Partial regularity of suitable weak solution of the Navier-Stokes equations, Comm. Pure Appl. Math., 35(6), 1982, pp. 771-831.;

[4] Fefferman, C., Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006, pp. 57-67;

[5] Oseen, C., Sur les formules de green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelquesunes de leurs applications, Acta. Math. 34, 1911, pp. 205-288;

[6] Hopf, E., Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Gryndgleichungen, Math. Nachr. 4, 1951, pp. 213-231.