

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE CIÊNCIAS BÁSICAS DA SAÚDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS:
QUÍMICA DA VIDA E SAÚDE

MARCILIO MARTINS DE OLIVEIRA

**OS ENTES PRIMITIVOS, O PONTO, A RETA E O PLANO NOS LIVROS
DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA**

Porto Alegre

2019

MARCILIO MARTINS DE OLIVEIRA

**OS ENTES PRIMITIVOS, O PONTO, A RETA E O PLANO NOS LIVROS
DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde do Instituto de Ciências Básicas da Saúde da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Educação em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Edmundo Lopez Bello

Porto Alegre

2019

OS ENTES PRIMITIVOS, O PONTO, A RETA E O PLANO NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde do Instituto de Ciências Básicas da Saúde da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Educação em Ciências, sob a orientação do Prof. Dr. Samuel Edmundo Lopez Bello.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Leo Anderson Meira Martins

Universidade federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Prof. Dr. Diogo Franco Rios

Universidade Federal de Pelotas (UFPel)

Prof. Dr. Rene Carlos Cardoso Baltazar Junior

Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

Porto Alegre

2019

CIP - Catalogação na Publicação

Oliveira, Marcílio Martins de

OS ENTES PRIMITIVOS, O PONTO, A RETA E O PLANO NOS
LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA / Marcílio Martins de Oliveira. -- 2019.
153 f.

Orientador: Samuel Edmundo Lopez Bello.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio
Grande do Sul, Instituto de Ciências Básicas da Saúde, Programa de Pós-
Graduação em Educação em Ciências:

Química da Vida e Saúde, Porto Alegre, BR-RS, 2019.

1. Entes primitivos. 2. Geometria. 3. Livros didáticos. 4.
Transposição Didática. I. Bello, Samuel Edmundo Lopez, orient. II.
Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS

com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

DEDICATÓRIA

Como não poderia deixar de ser, em primeiro lugar ao grande arquiteto da natureza, ou seja, Deus.

Aos meu pais 'Jorge Martins de Oliveira' (in memoriam), que foi, é e será sempre o meu mestre e a minha mãe 'Maria José Cordeiro de Oliveira' que continua sendo, minha mestra.

A 'Sílvia Margarete', a minha companheira neste longo e difícil trajeto do meu curso de doutorado.

Aos meus filhos: 'Thiago Carvalho Martins' (o meu primogênito), 'Marcilio Carvalho Martins' (o que tem o mesmo nome meu), 'Hugo Couto Martins' (o meu pequeno grande companheiro) e 'Igor Couto Martins' (o meu presente de Deus).

Aos meus irmãos: 'José Francisco de Oliveira', 'Jurandir Alves de Oliveira', 'Maria Lúcia Cordeiro de Oliveira', 'Jorge Cordeiro de Oliveira', 'Marcos Cordeiro de Oliveira' e 'Geralda Magela Cordeiro de Oliveira'.

A Professora Dra. Maria do Rocio Fontoura Teixeira, coordenadora do PPG Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde- Associação: UFRGS/UFSM/FURG, pela sua preciosa colaboração.

A Autarquia Educacional do Município de Belo jardim (AEB) e a Faculdade do Belo Jardim (FBJ), pelo apoio prestado ao longo dessa caminhada.

A todos os meus professores e professoras que tiveram participação, durante toda minha vida escolar, contribuindo na minha formação acadêmica.

A todos os colegas da minha turma do doutorado, pois compartilhamos muitas angústias, ansiedades, dificuldades, enfim, muitas emoções.

A todos os alunos que estudaram comigo, durante toda minha jornada como professor, pois na medida em que ensinei a eles também muito aprendi com eles.

Enfim, a todos familiares, amigos e amigas que de uma forma ou de outras torceram no sentido de que eu conseguisse realizar mais esse sonho de minha vida pessoal e acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Com o término desse trabalho, apresento os meus sinceros agradecimentos:

Em primeiríssimo lugar a Deus, que é o criador e condutor de toda a minha existência.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Samuel Lopez Bello, pela sua disponibilidade de prestar sua orientação, mesmo não sendo o orientador desde o início do processo de doutoramento, ele foi fundamental para a realização desse trabalho. Pelo seu companheirismo e compreensão das minhas dificuldades nesse momento decisivo da minha jornada acadêmica, com uma contribuição decisiva e que agradeço por tudo que fizeste e pelo que contigo aprendi.

Aos professores componentes da banca de qualificação e de defesa: Dr. Rene Carlos Cardoso Baltazar Junior, Dr. Leo Anderson Meira Martins e Dr. Diogo Franco Rios, pelas suas valiosas contribuições na elaboração desta tese.

Ao professor Dr. Marcelo Câmara dos Santos, que contribuiu de forma significativa na construção deste trabalho.

A todos os professores que ministraram disciplinas no curso de doutoramento, em Petrolina nos rincões do sertão pernambucano e em Recife capital do estado de Pernambuco, a maioria desses professores se deslocaram do Rio Grande do Sul para compartilharem conosco os seus preciosos conhecimentos.

Esta é a natureza do infinito:

Todas as coisas possuem seus próprios vórtices,
e quando um navegante da eternidade
alcança este vórtice, percebe que ele
turbilhonante gira no sentido inverso
e penetra numa esfera que se engloba como o sol, a lua,
ou como um firmamento de constelada magnitude (WILLIAM BLAKE, 1808).

Com um toque de gênio, Euclides ligou todo o seu trabalho à filosofia de Platão. No último livro dos Elementos, ele demonstrou que os únicos tipos possíveis de poliedros regulares eram os cinco sólidos platônicos que, para Platão, simbolizavam os elementos básicos de todo o universo (BERLINGHOFF & GOUVÊA, 2010).

RESUMO

Este estudo apresenta uma discussão sobre a Geometria Euclidiana, tendo como foco as noções primitivas de ponto, reta e plano, cujo objetivo foi evidenciar as mudanças e transformações que o saber sofre desde sua emergência na comunidade científica até sua entrada na sala de aula.

Para este propósito foram analisados livros didáticos de matemática de 5ª série e do 6º ano do ensino fundamental, sob uma perspectiva qualitativo-documental, tendo como arcabouço teórico a Transposição Didática de Yves Chevallard e os estudos em Geometria de David Hilbert.

Conclui-se que as abordagens das noções primitivas nos livros didáticos de matemática, geralmente, são transformados das referências acadêmicas a partir de estratégias que remetem ao uso da imaginação; ao uso de outras figuras geométricas, tais como: o cubo, o círculo e o trapézio ou, ainda, a partir de elementos do cotidiano como, marcas deixadas por um lápis, alfinetes, campos de futebol, entre outros.

Palavras-chave: Livros didáticos; Transposição Didática; Entes primitivos; Geometria.

ABSTRACT

This study presents a discussion of Euclidean geometry, focusing on the primitive notions of point, line and plane, whose objective is to highlight the changes and transformations that the knowledge of the scientific community of their emergence in the school. For the purpose, textbooks on 5th and 6th grade mathematics have been analyzed from a qualitative documentary perspective, based on the Yves Chevallard's Didactic Transposition and the studies on Geometry by David Hilbert. It is concluded that the approaches of the primitive notions in the didactic books of mathematics, are transformed from the academic references of strategies that refer to the use of the imagination; to the use of other geometric figures, such as: the cube, the circle and the trapeze, pines, stretched ropes, soccer fields, etc.

Keywords: Textbooks; Didactic transposition; primitive beings; Geometry.

RESUMÉ

Cette étude présente une discussion par rapport à la géométrie euclidienne, en se concentrant sur les notions primitives de point, de ligne droite et de plan, dont l'objectif était de mettre en évidence les changements et les transformations que la connaissance traverse depuis son émergence dans la communauté scientifique jusqu'à l'enseignement dans l'école. À cette fin, les manuels didactiques de mathématiques de 5e et 6e années ont été analysés dans une perspective documentaire et qualitative, sur la base du cadre théorique de la Transposition didactique d'Yves Chevallard et des études sur la géométrie de David Hilbert. Nous concluons que les approches des notions primitives dans les livres didactiques de mathématiques sont généralement transformées en références académiques à partir de stratégies faisant référence à l'utilisation de l'imagination; à l'utilisation d'autres figures géométriques, telles que: le cube, le cercle et le trapèze, ou même à partir d'éléments du quotidien, tels que des marques laissées par un crayon, des épingles, des cordes tendues, des terrains de football, etc.

Mots-clés: Manuels scolaires; Transposition didactique; Êtres primitives ; Géométrie.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Relação dos livros didáticos de Matemática analisados.....	34
Quadro 2: Locais de busca da pesquisa.....	35
Quadro 3: Cronologia ao longo dos 89 anos do PNLD.....	44
Quadro 4: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 1.....	83
Quadro 5: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 2.....	84
Quadro 6: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 3.....	85
Quadro 7: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 4.....	86
Quadro 8: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 5.....	87
Quadro 9: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 6.....	88
Quadro 10: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 7.....	89
Quadro 11: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 8.....	90
Quadro 12: Conceitos relevantes para a análise dos livros didáticos.....	92
Quadro 13: Conteúdo de Geometria no LIVRO 1.....	98
Quadro 14: Conteúdo de Geometria no LIVRO 2.....	99
Quadro 15: Conteúdo de Geometria no LIVRO 3.....	101
Quadro 16: Conteúdo de Geometria no LIVRO 4.....	103
Quadro 17: Conteúdo de Geometria no LIVRO 5.....	104
Quadro 18: Conteúdo de Geometria no LIVRO 6.....	105
Quadro 19: Conteúdo de Geometria no LIVRO 7.....	108
Quadro 20: Conteúdo de Geometria no LIVRO 8.....	110

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Etapas percorridas para a realização da pesquisa.....	35
Figura 2: A teia de relações que interligam os quatro polos.....	49
Figura 3: Esquema ilustrativo da evolução do campo da didática.....	55
Figura 4: O triângulo das situações didáticas.....	58
Figura 5: Os três andares da TD propostos por Arsac.....	61
Figura 6: Esquema da TD estudado por Chevallard.....	64
Figura 7: A ambiguidade.....	76
Figura 8: Circularidade.....	77
Figura 9: O Ponto.....	79
Figura 10: A Reta.....	80
Figura 11: O Plano.....	80
Figura 12: Retas paralelas.....	105
Figura 13: Exemplo de segmento de reta no LIVRO 7.....	109
Figura 14: Exemplo de reta no LIVRO 8.....	111
Figura 15: Exemplo de segmento de reta no LIVRO 8.....	111

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas
- Colted - Comissão do Livro Técnico e Livro Didático
- ECT - Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos
- FAE - Fundação de Assistência ao Estudante
- Fename - Fundação Nacional do Material Escolar
- FNDE-Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
- INL - Instituto Nacional do Livro
- ISO – International Organization for Standardization
- IPT - Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo
- LD – Livro Didático
- MEC – Ministério da Educação do Brasil
- PDDE - Programa Dinheiro Direto na Escola
- Plidef - Instituto Nacional do Livro Didático para o Ensino Fundamental
- PIBID - Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
- PNLA - Nacional do Livro Didático para a Alfabetização de Jovens e Adultos
- PNLD – Programa Nacional do Livro Didático
- PNLEM - Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
- RPM – Revista do Professor de Matemática
- TAD – Teoria Antropológica do Didático
- TD – Teoria da Transposição Didática
- SEB - Secretaria de Educação Básica

SIMAD - Sistema de Controle de Materiais Didáticos

SISCORT - Sistema de Controle de Remanejamento e Reserva Técnica

UNESCO - Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

Usaid - Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO.....	19
INTRODUÇÃO.....	22
CAPÍTULO I: CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	27
1.1 Do problema de pesquisa.....	27
1.2 Princípios metodológicos.....	30
1.3 Atitude procedimental para a pesquisa.....	32
CAPÍTULO II: DO MATERIAL EMPÍRICO DA PESQUISA	36
2.1 O Livro Didático (LD)	36
2.2 As Reformas curriculares.....	38
2.3 O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)	40
2.4 O Guia do Livro Didático.....	48
CAPÍTULO III: ABORDAGEM TEÓRICA.....	53
3.1 Tópicos sobre o campo da didática.....	53
3.2 A Didática da Matemática e a Didática da Matemática de influência francesa.....	55
3.3 A Teoria da Transposição Didática (TD).....	58
3.3.1 Saber sábio.....	61
3.3.2 Objetos a ensinar.....	62
3.3.3 Saber a ensinar.....	62
3.3.4 O saber escolar.....	63
3.3.5 Saber ensinado.....	63
3.4 Teoria Antropológica do Didático (TAD).....	65

3.5. Geometria dos conceitos de: ponto, reta e plano na comunidade científica.....	67
3.6. Dos conceitos de ponto, reta e plano na sala de aula.....	72
3.6.1 O Ponto.....	79
3.6.2 A Reta.....	80
3.6.3 O Plano.....	80
CAPÍTULO IV: ABORDAGEM ANALÍTICA E INTERPRETATIVA DOS DADOS.....	81
4.1. Dos conceitos de ponto, reta e plano nos livros didáticos de Matemática da 5ª série e do 6º ano do ensino fundamental.....	81
4.2 Discussões dos conceitos de ponto, reta e plano nos livros didáticos de Matemática da 5ª série e do 6º ano do ensino fundamental.....	91
LIVRO 1: PNLD 1996 (corresponde ao triênio 1996 – 1997 – 1998).....	99
LIVRO 2: PNLD 1999 (corresponde ao triênio 1999 – 2000 – 2001).....	100
LIVRO 3: PNLD 2002 (corresponde ao triênio 2002 – 2003 – 2004).....	102
LIVRO 4: PNLD 2005 (corresponde ao triênio 2005 – 2006 – 2007).....	104
LIVRO 5: PNLD 2008 (corresponde ao triênio 2008 – 2009 – 2010).....	105
LIVRO 6: PNLD 2011 (corresponde ao triênio 2011 – 2012 – 2013).....	106
LIVRO 7: PNLD 2014 (corresponde ao triênio 2014 – 2015 – 2016).....	109
LIVRO 8: PNLD 2017 (corresponde ao triênio 2017 – 2018 – 2019).....	111
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	112
REFERÊNCIAS.....	117
ANEXOS.....	124
Anexo A.....	123

Anexo B - LIVRO 1	124
Anexo C – LIVRO 2.....	128
Anexo D – LIVRO 3.....	132
Anexo E – LIVRO 4.....	135
Anexo F – LIVRO 5.....	138
Anexo G – LIVRO 6.....	141
Anexo H – LIVRO 7.....	144
Anexo I – LIVRO 8.....	147
Anexo J.....	150

APRESENTAÇÃO

Essa breve apresentação mostra um pouco do histórico da minha vida acadêmica e da trajetória de construção desta Tese, explicando como ela está composta. O objetivo desta apresentação é nortear o leitor no que ele irá encontrar nas páginas seguintes, com o intuito de tornar a leitura prazerosa, proveitosa e interessante, de forma que ele consiga se familiarizar com as reflexões levantadas ao longo de todo o corpo do texto.

Sou licenciado em Ciências com habilitação em Matemática e bacharel em Direito (advogado) com inscrição na OAB/PE. Possuo Pós-graduação *Lato Sensu* em Matemática e Mestrado em Ensino das Ciências. Com o ingresso no Programa de Pós-Graduação no Mestrado em Ensino das Ciências na Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), aprofundi um pouco mais o meu foco de pesquisa dentro da Educação Matemática, por ser um campo que responde às minhas inquietações no cotidiano profissional, como docente de matemática do Ensino Fundamental, Médio, Superior e da Pós-graduação (*Lato Sensu*).

Fui Professor efetivo de Matemática e Ciências da rede estadual de ensino do estado de Pernambuco, local do início da vida profissional como professor, atuando no ensino fundamental e médio. Ainda na rede estadual, coordenei bibliotecas escolares, criei a Sala de Ciências e o Pelotão de Saúde na escola José de Almeida Maciel no município de Pesqueira - PE, atuei em atividades burocráticas, e trabalhei como Inspetor Escolar na Gerência Regional de Educação (GRE) no município de Arcoverde – PE. Fui professor de Matemática em escolas da rede particular de ensino nos municípios de Pesqueira (Colégio Santa Dorotéia) e Caruaru (Colégio Diocesano) e atuei como professor de aulas particulares.

A minha vivência profissional é também na formação de professores como professor concursado da Faculdade do Belo Jardim (FBJ), localizada no município de Belo Jardim – PE, a qual é mantida pela Autarquia Educacional do mesmo Município. Neste local, em que trabalho há um bom tempo, lecionei nos cursos de licenciatura em Matemática, Biologia e Geografia. Porém, há alguns anos leciono exclusivamente no curso de licenciatura em Matemática,

formando profissionais que atuarão no ensino fundamental, médio e superior de Pernambuco e de outros estados do Brasil. Nesta mesma faculdade, também leciono na Pós-graduação (*Lato Sensu*), no Ensino da Matemática e as Novas Tecnologias. Atuei como coordenador do curso de licenciatura em Matemática, fui presidente do Sindicato dos Professores da FBJ e, atualmente, sou coordenador na área de Matemática, do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID).

Além da importância prática inerente a própria Geometria, sempre a percebi como um ramo da matemática muito importante, no sentido de mostrar que necessitamos fazer abstrações e usar a nossa imaginação. E, além do contato com os livros didáticos que utilizei como professor em sala de aula, também exerci a função de coordenador de biblioteca escolar, manuseando livros de todos os gêneros literários, incluindo os livros didáticos de Matemática e de outras áreas do conhecimento.

Prosseguindo com a educação continuada, ingressei no Programa de Pós-graduação Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde (PPGQVS), nível doutorado, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), mantendo o foco de pesquisa na Educação Matemática, sendo mais específico, no campo da Didática da Matemática de influência francesa. Assim, o presente trabalho está dividido em quatro capítulos:

- No capítulo I, denominado de Considerações Iniciais, são abordados o problema de pesquisa, os princípios metodológicos e os procedimentos da pesquisa.
- O capítulo II, chamado de Material Empírico da Pesquisa, apresenta reflexões sobre o Livro Didático (LD) e o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).
- No capítulo III, é apresentada a Abordagem Teórica, em que são referidos os estudos sobre a Didática da Matemática e a Didática da Matemática de influência francesa: a Teoria da Transposição Didática (TD), do francês Yves Chevallard que, em breves palavras, discute as transformações sofridas pelo saber desde o seu surgimento na comunidade científica até sua entrada na sala de aula e

consequentemente ao ser ensinado. Neste mesmo capítulo, é discutida a Teoria Antropológica do Didático (TAD), também de autoria de Chevallard. Igualmente, são discutidos os conceitos de ponto, reta e plano na comunidade científica e na sala de aula.

- O capítulo IV, denominado de Abordagem Analítica e Interpretativa dos dados, apresenta-se sob uma abordagem de tipo qualitativa, a análise documental dos livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental, escolhidos a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (LDB 9394/96). Para tanto, são analisados oito livros didáticos de Matemática.

Por fim, são apresentadas as Considerações Finais e, em seguida, são elencadas todas as Referências utilizadas no texto, seguidas dos documentos anexos.

INTRODUÇÃO

Afirmações sobre a origem da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos de forma escrita (BOYER, 1996, p. 4).

A matemática grega, segundo Berlinghoff & Gouvêa (2010, p.14), refere-se a língua em que foram escritos os trabalhos matemáticos pelos sábios daquela época. O grego era língua comum de grande parte do mundo mediterrâneo, situado entre a Europa, a Ásia e a África. Ainda, de acordo com os autores, não se sabe exatamente quando os gregos começaram a pensar na matemática. Suas próprias histórias dizem que o mais antigo argumento matemático remonta de 600 a.C. Nesse sentido, escreveram os mesmos autores:

É certo, por exemplo, que nem todos os matemáticos “gregos” nasceram na Grécia. Por exemplo, Arquimedes era de Siracusa (na Sicília, agora parte da Itália) e Euclides era, supostamente de Alexandria (no Egito). Na maior parte dos casos, nada sabemos sobre a real condição étnica, nacionalidade ou crença desses matemáticos. O que tinham em comum era uma tradição, um modo de pensar, uma língua e uma cultura (BERLINGHOFF & GOUVEIA, 2010, p. 14).

Segundo Eves (2004, p. 167), embora Euclides de Alexandria fosse autor de pelo menos dez trabalhos (textos razoavelmente completos dos quais cinco chegaram até nós), foi com a obra “Os Elementos”, escrita aproximadamente 300 anos a.C., que o autor se tornou famoso. Além de “Os Elementos”, segundo Boyer (1996, p. 70), as quatro obras de Euclides que sobreviveram até hoje foram: Os Dados, Divisão de figuras, Os Fenômenos e Óptica. A importância da obra “Os Elementos” é descrita por Eves:

Tão logo o trabalho apareceu, ganhou o mais alto respeito e, dos sucessores de Euclides até os tempos modernos, a mera citação do número de um livro e o de um a proposição de sua obra-prima é suficiente para identificar um teorema ou construção particular. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico (EVES, 2004, p. 167).

Em sua obra “Os Elementos”, Euclides tentou compilar todo o saber matemático daquela época. Composto por treze livros ou volumes de fundamental importância para o desenvolvimento do conhecimento científico,

acredita-se que pela primeira vez foi escrito um tratado com um aspecto mais didático. Foi uma obra que, ao longo do tempo, passou por várias revisões. Segundo Eves (2004, p. 168), mais de mil edições impressas da obra “Os Elementos” já apareceram desde a primeira delas em 1482. Ainda, de acordo com Eves, não se tem registro de nenhuma cópia de “Os Elementos” de Euclides que date da época do seu autor.

Segundo o artigo “A independência do axioma das paralelas e as Geometrias não – Euclidianas”, de Oliva, publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM), tem-se:

Os gregos realmente dispuseram-se a organizar a Geometria como uma ciência e trataram de ordenar os fatos geométricos procurando demonstrar certas proposições a partir de outras mais simples; culminaram nos anos 300 antes de Cristo com a publicação dos “Elementos” de Euclides (OLIVA, 1983, p. 28).

Trata-se da primeira exposição dedutiva da Geometria Elementar de que se tem notícias, partindo de certos postulados ou axiomas que eram proposições simples representando uma certa evidência natural (OLIVA, 1983, p. 29).

Cerca de 700 anos depois do tempo de Euclides, foi realizada uma revisão pelo comentador Thêon de Alexandria (335 – 395). As revisões modernas de “Os Elementos” se baseiam nessa revisão preparada por Thêon. De acordo com Eves (2004, p. 168), essa revisão foi, até o começo do século XIX, a mais antiga edição de “Os Elementos” que se conhecia. No entanto, conforme Eves:

[...] em 1808, quando Napoleão ordenou que fossem tomados de bibliotecas italianas e enviados a Paris os manuscritos de valor, F. Peyrard encontrou, na biblioteca do Vaticano, uma cópia do século X de uma edição da obra que é anterior à revisão de Thêon (EVES, 2004, p. 168).

No século XIX surgiram críticas pesadas com o amadurecimento do rigor matemático. Surgiu, então, a obra “Os Fundamentos da Geometria”, publicada em 1899 por David Hilbert (1862 – 1943), que segundo Berlinghoff & Gouvêa (2010) reescreveu a axiomática de Euclides, reorganizando e elaborando uma rigorosa apresentação lógico-dedutiva dessa geometria.

A matemática, a partir de 1900, ganhou um grande impulso e sua produção se expandiu. Segundo Berlinghoff & Gouvêa (2010, p. 54), o século XX (e talvez o novo século também) é justificadamente chamado de “idade de ouro da matemática”. No período das primeiras décadas do século XX, os filósofos

e matemáticos se debruçaram sobre os fundamentos da matemática e, segundo Berlinghoff & Gouvêa (2010,), surgiram duas correntes: os formalistas (que propunham entender a matemática em termos de manipulação formal de símbolos) e os intuicionistas (que argumentavam que muitas ideias matemáticas, na verdade, não eram bem fundamentadas). Ainda, segundo os mesmos autores, nenhuma das duas correntes perdurou:

As propostas dos intuicionistas eram radicais demais para a maioria dos matemáticos. As ideias dos formalistas eram mais próximas de serem aceitáveis, mas seu programa perdeu muito da sua atração depois dos anos 1930. O motivo foi que Kurt Godel (1906 -1978) encontrou um modo de demonstrar que era impossível encontrar uma demonstração de que não surgiriam contradições. O trabalho de Godel estabeleceu pela primeira vez que algumas coisas não podiam ser demonstradas (BERLINGHOFF & GOUVÊA 2010, p. 55).

O trabalho de Godel teve um efeito imediato: os matemáticos que trabalhavam com os fundamentos da matemática sofreram um golpe real e precisariam absorver, de alguma forma, suas demonstrações. Entretanto:

Para outros matemáticos, significava que o trabalho em fundamentos não lhes poderia dar muito auxílio na resolução de grandes problemas. Assim, eles continuaram o trabalho de tentar demonstrar teoremas e resolver problemas (BERLINGHOFF & GOUVÊA 2010, p. 55).

Já no fim dos anos 1930, surge um grupo de jovens matemáticos franceses, que reuniram-se com a intenção de revolucionar o assunto. Segundo Berlinghoff & Gouvêa (2010, p. 5), eles achavam que as novas ideias não tinham sido insuficientemente internalizadas pela comunidade matemática, especialmente na França. De acordo com esse grupo:

Era hora de derrubar a “velha guarda”. Seu plano era fazer duas coisas: Primeiro, coletivamente, escreveriam um livro-texto em muitos volumes, um compêndio de toda a matemática fundamental. Com aceno a Euclides, eles o chamaram de *Elementos de Matemática*. Como escreviam coletivamente, adotaram um pseudônimo: o autor do novo *Elementos* era Nicolas Bourbaki (BERLINGHOFF & GOUVÊA 2010, p. 55).

No Brasil, no ano de 2009, foi lançada a 1ª edição da tradução da obra “Os Elementos” de Euclides traduzida pelo professor Irineu Bicudo (1948 - 2018). De acordo com nota da Editora Unesp, é a primeira em seu gênero para o português a partir do texto grego e a primeira obra da área de matemática que

nos chegou na sua inteireza da antiguidade clássica. Esta obra é composta por 13 livros em que, além das definições, postulados e axiomas, demonstram-se 465 proposições, em forte sequência lógica, referentes à geometria Euclidiana da régua e compasso, e à aritmética ou teoria dos números. Os seis primeiros livros dão conta da geometria plana; os três seguintes, da teoria dos números; o livro X, o mais complexo, estuda uma classificação de incomensuráveis/irracionais; e os três últimos abordam a geometria no espaço ou estereometria.

Nos dias de hoje, o primeiro contato com as noções euclidianas de ponto, reta, plano se dá a partir das aulas e os livros escolares. Estes são distribuídos nas escolas públicas do Brasil através do Programa nacional do Livro Didático (PNLD) criado no ano de 1985. Os livros são escolhidos pelos professores das respectivas áreas do conhecimento a cada triênio. Essa distribuição de livros didáticos contempla todos os alunos da educação básica. Segundo Lajolo (1996, p. 17), o livro didático assumiu certa importância dentro da prática de ensino brasileira nestes últimos anos. Isso é notável, principalmente em países como o Brasil, carentes de políticas públicas que consigam diminuir as desigualdades sociais.

Os livros didáticos de matemática do 6^o ano e da 5^a série do ensino fundamental escolhidos para serem analisados neste estudo pertencem ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Como também se levou em consideração a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (LDB 9394/96), os livros didáticos analisados neste estudo são livros redigidos a partir do ano de 1996.

Da mesma forma, e como os conceitos de ponto, reta e plano da Geometria Plana são abordados nos livros didáticos de Matemática do 6^o ano (antiga 5^a série) do ensino fundamental, o olhar lançado neste estudo refere-se à questão dos entes primitivos da geometria Euclidiana propostos desde a obra “os elementos” e de como se operaram as suas transformações nos livros didáticos escolhidos. Usamos, para isso, a Teoria da Transposição Didática (TD) proposta pelo francês Yves Chevallard, em que o autor afirma (1991, p. 33): “todo projeto social de ensino

e de aprendizagem se constitui dialeticamente com a identificação e a designação de conteúdos de saberes a ensinar”.

CAPÍTULO I

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

1.1 Do problema de pesquisa

A matemática surgiu da construção humana em diversas épocas e em diferentes civilizações, não sendo possível precisar quando ela teve início. Nesse sentido escreveram Berlinghoff & Gouvêa:

Ninguém sabe quando começou a matemática. O que sabemos é que toda civilização que desenvolveu a escrita também mostra evidências de algum nível de conhecimento matemático. Nomes para números e formas e as ideias básicas sobre contagem e operações aritméticas parecem ser parte da herança comum da humanidade em toda parte. Antropólogos acharam muitos objetos pré-históricos que podem, talvez, ser interpretados como matemáticos. Os mais antigos de tais objetos foram encontrados na África e datam de 37 mil anos (BERLINGHOFF & GOUVÊA, 2010, p. 6).

A Geometria surgiu, também, como uma construção humana, principalmente pelas necessidades cotidianas dos egípcios de medirem e dividirem suas terras em decorrência das cheias do rio Nilo. Conforme Freitas & Botelho:

Originalmente, a palavra geometria significa medida de terra. Os antigos egípcios a usaram para medir suas terras às margens do Nilo. Os gregos a trataram com bases científicas. Euclides 300 a.C. reuniu os conhecimentos de geometria da época no seu famoso livro ELEMENTOS (FREITAS & BOTELHO, 1974, p. 21).

A Geometria desenvolveu-se ao longo do tempo e diversificou-se em vários ramos. Os estudos iniciais da Geometria Plana, que também pode ser denominada Geometria Euclidiana em homenagem a Euclides de Alexandria, se basearam nos conceitos de ponto, reta e plano

Aprofundando essa discussão acerca do surgimento da Geometria, vamos às primeiras linhas do resumo de Eudemo, reveladas por Levi:

Dizemos que, segundo a tradição geral, foram os egípcios os que primeiro inventaram a geometria, e que ela nasceu a partir da medição dos terrenos, que eles tinham que renovar continuamente pelo fato de as cheias do Nilo fazerem desaparecer os limites entre as propriedades. Em nenhum sentido se deve considerar assombroso que uma necessidade prática tenha produzido a invenção dessa e de outras ciências, por que tudo o que está submetido à geração procede do imperfeito ao perfeito. Há, portanto, um progresso natural da estimulação do raciocínio e deste à inteligência pura. Do mesmo modo, assim como o exato conhecimento dos números começou pelos fenícios em consequência do tráfico e das transações de que ocupavam, a geometria foi inventada pelos egípcios pela razão que acabo de me referir (LEVI, 2008, p. 30).

De acordo com o Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1998, p. 51), os conceitos geométricos constituem parte importante no currículo de Matemática do ensino fundamental porque, por meio destes conceitos, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive. Sobre o estudo da Geometria, os PCNs enfatizam:

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc (PCNs, 1998, p. 51).

Os conteúdos contemplados nos livros didáticos de Matemática, em sua maioria, abrangem o estudo da Geometria Plana ou Euclidiana. A abordagem desta matéria nos livros didáticos de matemática da 5ª série do ensino fundamental, atualmente denominada de 6º ano do ensino fundamental, em geral, apresenta os conceitos de ponto, reta e plano. Esses conceitos fazem com que os alunos precisem usar a imaginação para compreendê-los. Segundo Abbagnano (2012, p. 18), com a imaginação há “a possibilidade de evocar ou produzir imagens, independente da presença do objeto a que se referem”. De acordo com Aristóteles apud Abbagnano, imaginação é:

Em primeiro lugar de sensação, em segundo lugar da opinião. Imaginação não é sensação por que uma imagem pode existir mesmo quando não há sensação, como por exemplo, no sono. Imaginação não é opinião porque a opinião exige que se acredite naquilo que se opina, enquanto isso não acontece com a imaginação, que, portanto, também pode pertencer aos animais (ARISTÓTELES apud ABBAGNANO, 2012, p.140).

Como mencionado anteriormente os livros didáticos de matemática da 5ª série do ensino fundamental, atualmente chamados de 6º ano do ensino fundamental, apresentam os conceitos da Geometria Plana – ponto, reta e plano – e esses conceitos são entendidos de acordo com o que escreveu Abbagnano:

Em geral, todo processo que possibilita descrição, a classificação e a previsão dos objetos cognoscíveis. Assim entendido, esse termo tem significado generalíssimo e pode incluir qualquer espécie de sinal ou procedimento semântico, seja qual for o objeto a que se refere, abstrato ou concreto, próximo ou distante, universal ou individual (ABBAGNANO, 2012, p.149).

Nas décadas de oitenta e noventa do século passado, antes da criação dos PCNs, os livros didáticos de Matemática do ensino fundamental traziam a parte da Geometria no final do livro em um ou mais de um capítulo. As aulas distribuídas para os alunos da 5ª série, aquele então, eram denominadas de Matemática e, em sala de aula, o professor administrava como trabalhar os conteúdos de Geometria. Atualmente, nos livros didáticos de Matemática, a Geometria vem sendo introduzida de forma intercalada aos outros conteúdos. Entretanto, ainda necessita de uma melhor adequação do seu ensino. Nesse sentido, tem-se que:

[...] a geometria é um ramo da matemática e este conhecimento faz parte das propostas curriculares da educação básica. Percebe-se que os conteúdos relacionados a este geralmente são apresentadas nos capítulos finais dos livros didáticos de matemática. Observa-se, entretanto, que a geometria, apesar de ser um conhecimento necessário, pois ela permite enxergar, como, por exemplos as formas geométricas nas variadas situações do nosso cotidiano, seja em prédios, na natureza e etc., há um grande descaso do seu ensino nas escolas. (Franklin Pacheco, et al....p. 102, 2017).

Foi entre os anos de 1980 e os anos 2010, o período em que eu lecionei na educação básica em turmas do 1º grau, que atualmente corresponde ao ensino fundamental, e turmas do 2º grau, hoje chamado de ensino médio, que percebi, por meio de conversas com colegas de trabalho, que eles evitavam, geralmente, ensinar os conteúdos de Geometria na sala de aula por diversos motivos, entre os quais posso citar: *a Geometria ser muito difícil e complicada, não ser necessário o ensino de Geometria, os alunos não gostarem dos conteúdos geométricos, etc.*

O trabalho de Euclides, “Os Elementos”, foi contemplado com inúmeros

estudos ao longo do tempo, passando por diversas revisões. Conseqüentemente, os conceitos do ponto, da reta e do plano abordados nos livros didáticos de Matemática não se apresentam como surgiram originalmente na obra. Considerando esse fato, tendo contato direto com os livros didáticos de Matemática ao longo da minha trajetória profissional e refletindo sobre as questões que foram levantadas por meus colegas de trabalho sobre o ensino da Geometria, surgiu a seguinte questão: *de que maneira os conceitos fundamentais de ponto, reta e plano da Geometria Euclidiana ou Geometria Plana são abordados nos livros didáticos de Matemática da 5ª série do ensino fundamental, hoje chamada de 6º ano do ensino fundamental utilizados em sala de aula, fornecidos pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)?*

1.2 Princípios Metodológicos

Este tópico apresenta os fundamentos metodológicos da pesquisa. São discutidos aqui, alguns aspectos a respeito da natureza da pesquisa qualitativa e documental utilizadas na elaboração deste estudo.

A pesquisa qualitativa apresenta algumas características como, por exemplo, a transitoriedade e a não neutralidade do pesquisador. De acordo com o autor a pesquisa qualitativa tem características próprias:

(a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios estáticos e generalistas (GARNICA, 2004, p.86).

Vale ressaltar que as características elencadas por Garnica (2004) não devem ser consideradas como regras rígidas que não podem sofrer transformações, uma vez que a pesquisa qualitativa está em constante movimento, atualizando-se num mundo com cada vez mais acesso às informações e sujeito a transformações. Nesse sentido:

O que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado "verdadeiro", dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado. Isso não quer dizer que se deva ignorar qualquer dado do tipo quantitativo ou mesmo qualquer pesquisa que seja feita baseada em outra noção de conhecimento (BORBA, 2014, p. 2).

Considerando, no entanto, que a abordagem qualitativa, enquanto exercício de pesquisa, não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada, ela permite que a imaginação e a criatividade levem os investigadores a propor trabalhos que explorem novos enfoques (GODOY, 1995, p. 21).

Complementando essa discussão, com relação à pesquisa qualitativa, nos reportamos ao fato da não necessidade de mensuração dos dados obtidos na pesquisa. Neste sentido, temos o que escreveu Oliveira:

A pesquisa qualitativa pode ser caracterizada como sendo uma tentativa de se explicar em profundidade o significado e características do resultado das informações obtidas através de entrevistas ou questões abertas, sem a mensuração quantitativa de características ou comportamento (OLIVEIRA 2003, p. 57).

A base empírica da pesquisa foi constituída por oito livros didáticos de Matemática da 5ª série/6º ano do ensino fundamental. Esses livros didáticos de matemática são equivalentes a documentos, de acordo com Ludke:

São considerados documentos quaisquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação sobre o comportamento humano. Estes incluem desde leis e regulamentos, normas, pareceres, cartas, memorandos, diários pessoais, autobiografias, jornais, revistas, discursos, roteiros de programas de rádio e televisão até livros, estatísticas e arquivos escolares (LUDKE, p. 38, 1986).

Essas fontes documentais, ou seja, os livros didáticos de matemática analisados neste trabalho, proporcionaram ao pesquisador elementos suficientes, dando respostas as questões levantadas na pesquisa.

Segundo Gil:

São capazes de proporcionar ao pesquisador dados em quantidade e qualidade suficiente para evitar a perda de tempo e o constrangimento que caracterizam muitas das pesquisas em que os dados são obtidos diretamente das pessoas. Sem contar que em muitos casos só se torna possível realizar uma investigação social por meio de documentos (GIL, 2008, p. 147).

Ampliando a discussão sobre a pesquisa documental, realizada com os livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano do ensino fundamental, acreditamos na importância destes documentos na pesquisa científica, como menciona Godoy:

Nesse sentido, acreditamos que a pesquisa documental representa uma forma que pode se revestir de um caráter inovador, trazendo contribuições importantes no estudo de alguns temas. Além disso, os documentos normalmente são considerados importantes fontes de dados para outros tipos de estudos qualitativos, merecendo, portanto, atenção especial (GODOY, 1995, p. 21).

Temos ainda, de acordo com o mesmo autor:

O exame de materiais de natureza diversa, que ainda não receberam um tratamento analítico, ou que podem ser reexaminados, buscando-se interpretações novas e/ou complementares, constitui o que estamos denominando pesquisa documental (GODOY (1995, p. 23).

1.3 Atitude Procedimental para a pesquisa

Para dar resposta a questão levantada nesta Tese, foram analisados oito exemplares de livros didáticos de Matemática, sendo cinco livros da 5ª série e três livros do chamado 6º ano do ensino fundamental. Os livros foram escolhidos pelo próprio pesquisador, seguindo dois critérios básicos: a) pertencerem ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)¹, criado no início do ano de 1985 em substituição ao antigo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Fundamental do Instituto Nacional do Livro (PLIDEF/INL)²; e b) serem edições posteriores ao ano de 1996, quando foi implementada a Lei de Diretrizes e

¹(O capítulo II trata do PNLD).

² Instituto Nacional do Livro Didático para o Ensino Fundamental do Instituto Nacional do Livro (Plidef/INL), que funcionou por meio de um sistema de coedição entre os setores público e privado entre os anos de 1971 e 1976. (VAHL & PERES, 2017, vol.47, n.164, pp.562-585).

Bases da Educação Brasileira (LDB 9394/96). Faz-se a ressalva que, com o advento da Lei 12.796 de 4 de abril de 2013³, a 5ª série do ensino fundamental passou a corresponder ao 6º ano do ensino fundamental. Na Tabela 1, estão elencados os oito livros didáticos de matemática analisados na pesquisa desta tese.

Para estabelecer o referencial teórico da Tese, foram realizadas buscas por artigos científicos nos sites da Internet⁴ de cunho acadêmico, em livros, revistas, etc. Também foram realizadas buscas de materiais diretamente nas bibliotecas e nos acervos *online* da Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFGRS), da Faculdade de Belo Jardim (FBJ), da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Os livros didáticos de matemática que foram utilizados na análise da pesquisa são oriundos do acervo pessoal do autor deste trabalho.

³Lei 12.796, de 4 de abril de 2013 (Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para dispor sobre a formação dos profissionais da educação e dar outras providências.), o Ensino Fundamental passa a ser composto por nove anos, com o ingresso do aluno a partir dos seis anos de idade ao invés dos sete anos exigidos anteriormente, nesse caso a 5ª série passa a corresponder ao 6º ano e a 6ª série ao 7º ano e assim sucessivamente” (BRASIL, 2018).

⁴Entre os *sites* pesquisados estão o “SciELO” (<https://www.scielo.org/>); o “Portal de Periódicos da CAPES” (<https://www.periodicos.capes.gov.br/>); e o “Google Acadêmico” (<https://scholar.google.com.br/>).

Nº	Nome do livro	Nome(s) do(s) autore(es)	PNLD correspondente
1	MATEMÁTICA IDEIAS E DESAFIOS (5ª série), 1996.	Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga	PNLD 1996 (1996 – 1997 - 1999)
2	MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA (5ª série – ensino fundamental), 1999.	José Jakubovic, Marília Centurión e Marcelo Lellis.	PNLD 1999 (1999 – 2000 – 2001)
3	APRENDENDO MATEMÁTICA (5ª série), 2002.	José Ruy Giovanni e Eduardo Parente	PNLD 2002 (2002 – 2003 – 2004)
4	TUDO É MATEMÁTICA (5ª série), 2005.	Luiz Roberto Dante	PNLD 2005 (2005 – 2006 – 2007)
5	MATEMÁTICA: Imenes e Lellis 6º ano, 2009.	Luis Márcio Imenes e Marcelo Lellis	PNLD 2008 (2008 – 2009 – 2010)
6	MATEMÁTICA IDEIAS E DESAFIOS (6º ano), 2012.	Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga	PNLD 2011 (2011 – 2012 – 2013)
7	Projeto Teláris: Matemática, 6º ano, 2014.	Luiz Roberto Dante	PNLD 2014 (2014 – 2015 – 2016)
8	Vontade de saber Matemática, 2017.	Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro	PNLD 2017 (2017 – 2018 – 2019)

Quadro 1: Relação dos livros didáticos de Matemática analisados na pesquisa.

Para uma melhor compreensão dos procedimentos utilizados nessa pesquisa, apresentamos uma representação gráfica (Figura 1), contendo as etapas que foram seguidas para a realização do estudo, e um quadro (Quadro 2) contendo os procedimentos de pesquisa realizados:

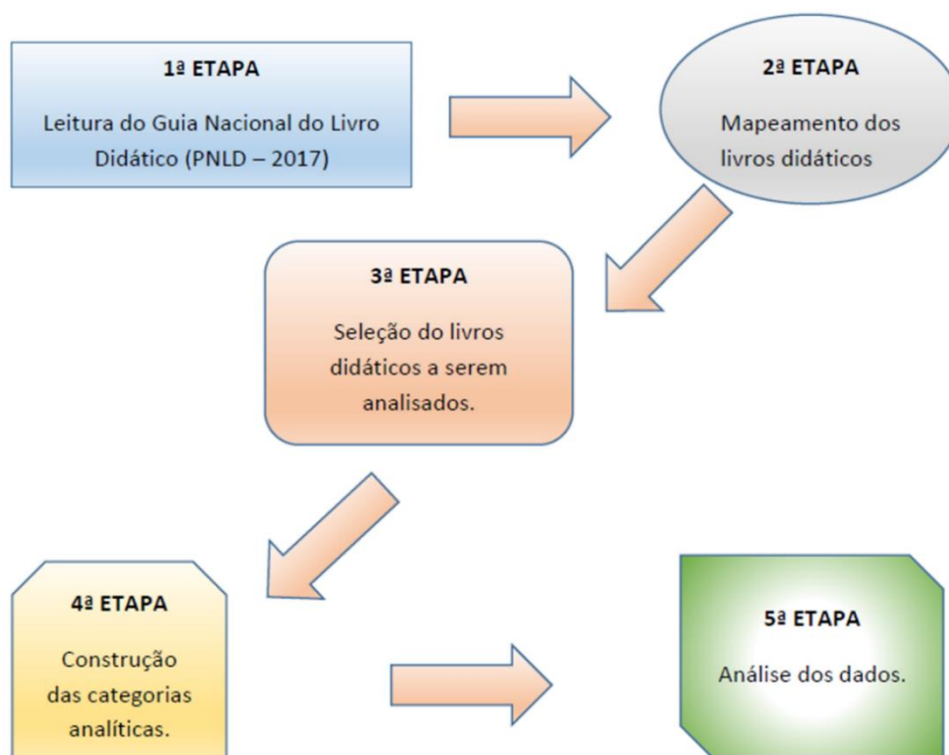


Figura 1: Etapas para a realização do estudo.

Fonte: Elaboração pelo próprio autor

ASSUNTOS PESQUISADOS	LOCAIS DE BUSCA
<ul style="list-style-type: none"> • Geometria Euclidiana ou Plana • Ponto • Reta • Plano • Livro Didático • Transposição Didática • Teoria Antropológica do Didático • Assuntos correlatos 	<ul style="list-style-type: none"> • Web: sites acadêmicos relacionados ao tema. • Bibliotecas de Universidades e Faculdades. • Acervo online das bibliotecas • Acervo pessoal do autor • Materiais de colegas professores.

Quadro 2: Locais de busca da pesquisa

CAPÍTULO II

DO MATERIAL EMPÍRICO DA PESQUISA

2.1 O Livro Didático

A imprensa foi inventada no ano de 1455 por Johannes Gensfleisch, conhecido como Johannes Gutenberg, cuja grande contribuição foi a de fornecer condições para a confecção de um volume maior de textos, nesse sentido, temos:

A inovação crucial de Gutenberg não foi propriamente a imprensa, uma vez que técnicas de impressão como a em madeira ou em cobre já existiam para folhetos; a mudança essencial foi a introdução dos tipos móveis de um número muito elevado de livros volumosos, estendendo e acelerando assim a reprodução de textos (SCHUBRING, 2003, p. 12).

A possibilidade de confeccionar um enorme número de textos influenciou diretamente na comunicação, possibilitando que informações restritas a determinados grupos de pessoas pudessem ser compartilhadas por diversos indivíduos que não tinham acesso a essas informações.

[...] na Idade Média as obras manuscritas eram restritas. Com o advento da imprensa, esse número tornou-se, para a época enorme. Cerca de nove milhões de exemplares de várias obras foram impressas até o ano de 1500, tornando possível um acesso a obras antes limitadas a poucos leitores (D'AMBROSIO, p. 6, 2008).

A partir da invenção da imprensa, o ensino deixa de utilizar apenas a oralidade como meio de transmitir as informações – isto é, deixa de ser baseado na simples transmissão por meio da fala e dos gestos – e passa a incorporar registros visuais. Segundo Silva (2010, p. 10), esse fato possibilitou avanços no ensino educacional, uma vez que o indivíduo não somente poderia assimilar situações por meio da oralidade, mas, doravante, teria a possibilidade de visualizar aquilo que era dito de maneira oral.

Na Europa surgiram os primeiros livros que abordavam assuntos ligados à área de matemática. Na Alemanha, precisamente, surgiram os primeiros livros-texto de matemática. Segundo Schubring (2003, p. 15), estes livros-texto impressos eram destinados aos propósitos do comércio e dos negócios, assim

como ocorria na civilização islâmica, que também utilizava livros de matemática com o mesmo propósito. A respeito da transmissão do saber matemático, temos:

O saber matemático é transmitido por dois caminhos privilegiados: pela comunicação pessoal ou oral e por textos escritos. Embora a matemática já exista desde pelo menos cinco mil anos, a forma que conhecemos do texto escrito – o livro impresso – só existe desde pouco mais de quinhentos anos (SCHUBRING, 2003, p. 16).

Segundo Zilberman (2003, p. 5), os livros infantis surgiram muito tempo depois, por volta dos séculos XVII e XVIII. Este fato só ocorreu porque a criança passou a ser vista como um indivíduo importante dentro da sociedade, conforme escreveram os autores:

A partir daí houve essa preocupação em instruir a criança e prepará-la para a vida em sociedade, dessa forma, verifica-se que quanto mais à família se preocupava em fazer com que seus filhos estudassem, mais a educação se transformava, se adaptando aos indivíduos que a compunham (ANDRADE & JOSÉ, 2018).

Um episódio que tem uma ligação muito acentuada ao contexto dos livros didáticos no Brasil é a formação da escola jesuítica, que aconteceu no período de 1534 a 1552. É um momento marcado pela educação católica, sendo centrada na catequização e o letramento dos indígenas que, no entanto, privilegiava os filhos dos colonizadores. Esse tipo de comportamento não ocorreu por acaso e, segundo o autor, temos:

Os colonizadores, sobretudo os que pertenciam as classes privilegiadas, entendiam que ao propiciarem acesso ao conhecimento as classes menos favorecidas da sociedade (como é o caso de negros e índios) possibilitariam a eles instruir-se, de modo que podiam, dentre outras coisas, tornarem-se críticos da própria sociedade em que viviam”. Nessa época se utilizam as impressões da obra de Euclides, “Os Elementos”, e já era perceptível a importância do uso do livro didático (ARANHA, 1989, p. 9).

No Brasil, o primeiro livro na área de Matemática foi escrito no ano de 1744 e o seu autor foi Fernandes Pinto Alpoim (1700 – 1765). Este primeiro livro escrito no Brasil tinha um objetivo muito específico e se dirigia basicamente aos militares:

Esse livro possuía uma especificidade bem definida de “instruir os militares para que pudessem oferecer a segurança da colônia, já que os livros trazidos da Europa não continham informações que se adequavam a realidade da colônia” (D’AMBROSIO, 2008, p. 12).

Uma questão interessante com relação a constituição da matemática como uma disciplina, se refere a ela ter ligação bastante estreita, em sua trajetória, com o saber técnico-militar. Neste sentido, tem-se:

Talvez seja possível dizer que a matemática se constitui na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico-militar, passando por sua ascendência, a saber, de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos (VALENTE, 2008, p. 141).

Enquanto recurso pedagógico, o livro didático de Matemática funciona como uma forte referência para a validação do ensino da Matemática na escola. Segundo Chervel (1991, p. 32), quer seja por parte de alunos ou de professores, o livro didático se constitui em uma importante fonte de informações para a elaboração de um tipo específico de conhecimento, onde generalidade e abstração assumem um estatuto diferenciado em relação às outras disciplinas escolares.

2.2 As Reformas Curriculares

A modernização da sociedade, a criação dos sistemas públicos de ensino e a expansão da oferta da educação levaram à necessidade da criação de um sistema organizado de informações para que os professores pudessem ter um êxito maior em suas práticas pedagógicas. As reformas curriculares que ocorreram no Brasil são importantes e estão ligadas às questões que perpassam pelo livro didático.

Segundo Pires (2008, p. 15), essas reformas curriculares são evidenciadas por dois marcos importantes: a reforma Francisco Campos (1891 – 1968), em 1931, e a reforma Gustavo Capanema (1900 – 1985), em 1942. Na primeira reforma, Euclides Roxo (1890 – 1950) teve um papel importante ao propor a unificação dos campos matemáticos – Álgebra, Aritmética e Geometria – numa

única disciplina, a Matemática, com a finalidade de abordá-los de forma articulada e inter-relacionada, uma vez que, anteriormente, cada tema era estudado como uma disciplina independente.

Ainda de acordo com Pires (2008, p. 15), Euclides Roxo também defendeu a ideia de que o ensino da geometria dedutiva deveria ser antecedido de uma abordagem prática da geometria, no entanto não é bem isso que aconteceu:

Se na Reforma Francisco Campos, a concepção de currículo foi ampliada para além da mera listagem de conteúdo a serem ensinados, incluindo uma discussão de orientações didáticas, na reforma seguinte, de 1942, essas reformas não se mantiveram, o que revela que as decisões curriculares, no Brasil, foram historicamente, marcadas por procedimentos bastante questionáveis, influenciados por questões políticas ou influências de alguns grupos ou mesmo de pessoas (PIRES, 2008, p. 15).

No século XX, podemos identificar três períodos bastantes significativos para o ensino de Matemática. Segundo Pires (2008, p. 16), o primeiro é caracterizado pela influência do Movimento da Matemática Moderna⁵ (de 1965 a 1980); o segundo é caracterizado por reformas lideradas por Secretarias Estaduais e Municipais de Ensino que buscavam se contrapor ao ideário do Movimento da Matemática Moderna (de 1980 a 1994); o terceiro é organizado em nível nacional a partir de 1995 e consubstanciado num documento divulgado ao conjunto das escolas brasileiras, denominado Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

De acordo com Brasil (1998), os PCNs nasceram da necessidade de se construir uma referência curricular nacional para o ensino fundamental que pudesse ser discutida e traduzida em propostas regionais nos diferentes estados e municípios brasileiros e em projetos educativos nas escolas e salas de aula. No que diz respeito ao ensino da Geometria, os PCNs (BRASIL, 1998, p. 51) estabelecem que, por meio dos conceitos geométricos, “(...) o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e

⁵Nas décadas de 1960 e 1970, um acontecimento que marcou a história da Educação Matemática e provocou mudanças significativas nas práticas escolares foi o movimento da Matemática Moderna. Desencadeado em âmbito internacional, esse movimento atingiu não somente a finalidade de ensino, como também os conteúdos tradicionais da Matemática, atribuindo uma importância primordial à axiomatização, às estruturas algébricas, à lógica e aos conjuntos (Pinto, 2005, p. 25-38).

representar, de forma organizada, o mundo em que vive”. De acordo com Fonseca (2009, p. 25), nos PCNs, o conteúdo de Geometria encontra-se distribuído em dois blocos: “Espaço e Forma” e “Grandezas e Medidas”, sendo que este último bloco permite as interligações dos campos da Aritmética e da Geometria:

No bloco “Espaço e forma”, é destacada a importância da Geometria no currículo de Matemática do ensino fundamental, visto que através dela o aluno desenvolve a compreensão do mundo em que vive, aprendendo a descrevê-lo, representá-lo e a se localizar nele (FONSECA, 2009, p. 25).

O período das Reformas Curriculares foi bastante significativo para educação nacional, trazendo mudanças importantes e uma compreensão da necessidade do diálogo mais aberto entre os professores, as escolas e todos os envolvidos na área da educação. Consolidando essa série de mudanças uma nova lei deveria nascer como sucedânea das quatro principais leis que, de forma fragmentária, regulavam a educação nacional: as Leis nºs 4024/61 e 5692/71, dispondendo sobre as diretrizes da educação; a Lei nº 5540/68, fixando normas de organização e o funcionamento do ensino superior; e a Lei nº 7.044, referente à profissionalização do então ensino de 2º grau. Com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (LDB 9394/96) promulgada em 1996, percebe-se a preocupação da criação de um ordenamento jurídico unificando as diretrizes da educação a nível nacional. Esse novo momento da educação nacional consequentemente influenciou a elaboração dos livros didáticos.

2.3 O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)

No Brasil, um dos instrumentos didáticos mais utilizados em sala de aula é o livro didático. A consolidação do uso do livro didático esteve intrinsecamente relacionada às mudanças profundas ocorridas nos âmbitos social, político e cultural. Segundo Andrade (2018, p. 27), nesse aspecto, verifica-se que o livro didático ganhou sentido nos espaços da sala de aula ao longo do tempo, dando suporte não somente a formação conceitual dos conteúdos inerentes às áreas do conhecimento científico, mas também no que concerne a otimização do tempo

e do período pedagógico na formação das crianças, jovens, adolescentes e adultos.

Devido à importância que o Livro Didático ocupa no contexto da educação no Brasil, o dia 27 de fevereiro foi instituído como o “Dia Nacional do Livro Didático”. Esta importância do livro didático no ensino brasileiro fica bem evidente conforme a reflexão de Freitas & Rodrigues:

O livro didático faz parte da cultura e da memória visual de muitas gerações e, ao longo de tantas transformações na sociedade, ele ainda possui uma função relevante para a criança, na missão de atuar como mediador na construção do conhecimento. O meio impresso exige atenção, intenção, pausa e concentração para refletir e compreender a mensagem, diferente do que acontece com outras mídias como a televisão e o rádio, que não necessariamente obrigam o sujeito a parar. O livro, por meio de seu conteúdo, mas também de sua forma, expressa em um projeto gráfico, tem justamente a função de chamar a atenção, provocar a intenção e promover a leitura (FREITAS & RODRIGUES, 2007).

De acordo com o site do FNDE, pode-se dizer que os livros didáticos, as obras literárias e os livros em braile chegaram às escolas brasileiras a partir do ano de 1929, quando foi criado o Instituto Nacional do Livro (INL) que era um órgão específico para legislar sobre a política do livro didático. O objetivo do INL era dar legitimação ao livro didático nacional e contribuir com o incremento de sua produção. Porém, só em 1934, no governo do presidente Getúlio Vargas, foram dadas as primeiras atribuições ao INL, que passou a elaborar uma enciclopédia e um dicionário, a editar obras literárias, e a apoiar a expansão do número de bibliotecas públicas a nível nacional.

No ano de 1938, foi instituída a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) por meio do Decreto – Lei nº 1.006, de 30 de dezembro. Com a CNLD, ficou estabelecida a primeira política de legislação e controle de produção e circulação do livro didático no País. Para consolidar esta legislação, foi lançado o Decreto-Lei nº 8.460, de 26 de dezembro de 1945, tratando das condições de produção, de importação e de utilização do livro didático, restringindo ao professor a escolha do livro a ser utilizado pelos alunos, conforme definido no art. 5º.

Ainda segundo o site do FNDE, no ano de 1966, foi fechado um acordo entre Brasil e Estados Unidos, através do Ministério da Educação (MEC) e

da Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional (USAID), permitindo a criação da Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (COLTED). Este acordo tinha o objetivo de coordenar as ações referentes à produção, edição e distribuição do livro didático. O acordo assegurou ao MEC recursos suficientes para a distribuição gratuita de 51 milhões de livros no período de três anos. Ao garantir o financiamento do governo a partir de verbas públicas, o programa adquiriu continuidade. De acordo com Silva (1998, p. 23), o livro didático passou a ser utilizado com mais frequência no Brasil durante este período.

Em 11 de março de 1970, foi lançada pelo MEC a Portaria nº 35, implementando o sistema de coedição de livros com as editoras nacionais, com recursos do Instituto Nacional do Livro (INL). No ano 1971, o Instituto Nacional do Livro desenvolveu o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF) que assumiu as atribuições da COLTED. Nesse mesmo ano, o convênio MEC/USAID foi extinto e foi implantado o sistema de contribuição financeira das unidades federadas para o Fundo do Livro Didático.

Em 4 de fevereiro de 1976, por meio do Decreto nº 77.107, o governo assumiu a compra de boa parcela dos livros para distribuir a parte das escolas e das unidades federadas. A Fundação Nacional do Material Escolar (FENAME) tornou-se responsável pela execução do programa do livro didático após a extinção do INL, com recursos provenientes do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e das contrapartidas mínimas estabelecidas para participação das Unidades da Federação. Porém, havia a exclusão da grande maioria das escolas municipais por questões de insuficiência financeira.

No ano de 1983, foi criada a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), que incorporou o PLIDEF e substituiu a FENAME. Nesse ano, foi proposta a participação dos professores na escolha dos livros e a ampliação do programa, com a inclusão das demais séries do ensino fundamental. Nesse momento houve um avanço significativo no processo de escolha do livro didático, pois com a participação dos professores e a ampliação da abrangência do livro didático, o processo tornou-se mais democrático.

Uma vez que os livros didáticos assumiram um papel bastante significativo para a educação no Brasil, foi criado por meio do Decreto nº 91.542 de 19 de agosto de 1985, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), em substituição ao antigo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF). O PNLD permanece até os dias atuais e trouxe diversas mudanças, como: a indicação do livro didático pelos professores; a reutilização do livro, implicando a abolição do livro descartável; o aperfeiçoamento das especificações técnicas para produção de livros, visando maior durabilidade e possibilitando a implementação de bancos de livros didáticos; a extensão da oferta de livros aos alunos de 1ª e 2ª séries das escolas públicas e comunitárias; e o fim da participação financeira dos estados, passando o controle do processo decisório para a FAE.

Através do PNLD, os livros didáticos de todas as áreas do conhecimento são distribuídos gratuitamente para os estudantes da Educação Básica da rede pública de ensino brasileira, assumindo importância relevante no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Conforme documento do FNDE:

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é o mais antigo dos programas voltados à distribuição de obras didáticas aos estudantes da rede pública de ensino brasileira e iniciou-se, com outra denominação, em 1929. Ao longo desses 80 anos, o programa foi aperfeiçoado e teve diferentes nomes e formas de execução. Atualmente, o PNLD é voltado à educação básica brasileira, tendo como única exceção os alunos da educação infantil (BRASIL 2018).

O Quadro 3 apresenta todo o processo histórico envolvendo o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) ao longo dos oitenta e nove anos de sua existência, até os dias atuais, de acordo com o site do FNDE.

Ano	Eventos	Atribuições
1929	Criação do Instituto Nacional do Livro (INL)	Órgão específico para legislar sobre as políticas do livro didático
1938	Criação da Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD): Decreto – Lei nº 1.006, de 30/12/1938.	Primeira política de legislação e controle de produção e circulação do livro didático no País.
1945	Decreto-Lei nº 8.460, de 26/12/45.	Legislação sobre as condições de produção, importação e utilização do livro didático.
1966	Criação da Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (COLTED)	Coordenar as ações referentes à produção, edição e distribuição do livro didático.
1971	Criação do Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF).	Assume as atribuições da COLTED e a contrapartida das Unidades da Federação.
1976	Criação da Fundação Nacional do Material Escolar (FENAME).	Execução do programa do livro didático, após a extinção do INL.
1983	Criação da Fundação de Assistência ao Estudante (FAE).	Incorpora o PLIDEF e substitui a FENAME; propõe a participação dos professores na escolha dos livros e a ampliação do programa.

1985	Criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD): Decreto nº 91.542, de 19/ 08/ 1985.	Substitui o PLIDEF, permanecendo até os dias atuais, trazendo diversas mudanças.
1993 e 1994	MEC/FAE/UNESCO: “Definição de Critérios para Avaliação dos Livros”.	Definição de critérios para avaliação dos livros didáticos.
1996	Criação do Guia de Livros Didáticos de 1ª a 4ª série.	Avaliação dos livros inscritos para o PNLD. O guia permanece até os dias atuais.
2000	Inclusão de dicionário no programa.	Distribuição de dicionários.
2003	Criação do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM): Resolução CD FNDE nº. 38, de 15.10.2003”.	Distribuição de livros didáticos para os alunos do Ensino Médio.
2004	Criação do Sistema de Controle de Remanejamento e Reserva Técnica (SISCORT).	Sistema direcionado a registrar e controlar o remanejamento de livros e a distribuição da Reserva Técnica (1ª a 4ª série).
2005	Ampliação do SISCORT.	As turmas de 5ª a 8ª séries são incluídas no sistema SISCORT

2007	Criação do Programa Nacional do Livro Didático para a Alfabetização de Jovens e Adultos (PNLA): resolução CD FNDE 18, de 24/04/2007.	Distribuição, a título de doação, de obras didáticas às entidades parceiras do Programa Brasil Alfabetizado (PBA).
2009	Resolução CD FNDE nº. 51, de 16/09/2009. Novas regras para participação no PNLD: Resolução CD FNDE nº 60.	Estabelece novas regras para participação no PNLD.
2010	Criação do Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE) -2010. Incorporação do PNLA ao PNLD EJA.	Ampliação do atendimento ao EJA: os alunos de 1º ao 9º ano passam a ser atendidos
2012	Publicação do Edital para formação de parcerias para estruturação e operação de serviço público e gratuito de disponibilização de materiais digitais a usuários da educação nacional.	Acordos de cooperação entre o FNDE e instituições interessadas para a estruturação e a operação de serviço virtual.
2014	É proposto o atendimento integral aos alunos e professores dos anos finais no ensino fundamental da rede pública.	Distribuição de livros reutilizáveis de língua portuguesa, matemática, ciências, história e geografia e livros consumíveis de língua estrangeira (inglês ou espanhol).

2015	É proposto o atendimento integral aos alunos e professores do ensino médio da rede pública. As editoras puderam apresentar obras multimídia.	Distribuição de livros de português, matemática, geografia, história, física, química, biologia, inglês, espanhol, filosofia e sociologia.
2016	É proposto o atendimento integral de alunos e professores dos anos iniciais do ensino fundamental da rede pública.	Distribuição de livros de Letramento e Alfabetização, Alfabetização Matemática, Língua Portuguesa, Matemática, História, Geografia, Ciências e Arte. As coleções eram formadas por dois tipos de composição.
2017	O Guia do Livro Didático apresenta orientações ampliadas.	Escolha dos livros didáticos de todas as áreas do conhecimento estudadas nos anos finais do ensino fundamental (6º ao 9º ano), como também a relação dos livros aprovados e resenhas desses livros.
2018	Criação da Resolução nº 15, de 26/07/18	Dispõe sobre as normas de conduta no âmbito da execução do PNLD e estabelece as diretrizes para execução do Programa.

Quadro 3: Cronologia ao longo dos 89 anos do PNLD

Sendo um programa de âmbito federal, o PNLD apresenta uma série de regras para que a distribuição de livros ocorra no ensino fundamental regular e no ensino médio regular e na EJA. Segundo informações do portal do FNDE (2018), as regras são as seguintes: a) a formalização dos entes interessados em aderir ao programa devem seguir os prazos e as normas previstas pelo MEC; b) os editais que estabelecem as regras para a inscrição

do livro didático devem ser publicados no Diário Oficial da União e disponibilizados no portal do FNDE na internet; c) a inscrição das editoras e a avaliação dos livros são realizadas pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT), e os livros selecionados são encaminhados à Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC); d) Guia do Livro disponibilizado pelo FNDE deve orientar a escolha dos livros a serem adotados pelas escolas; e) a escolha do livro deve ser feita de forma democrática, baseado no guia do livro didático, pelos professores e a gestão das escolas; f) o pedido dos livros deve ser feito via Internet; g) a aquisição dos livros deve ser realizada por inexigibilidade de licitação, prevista na Lei 8.666/93; h) a produção deve ser supervisionada pelos técnicos do FNDE; i) o Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT) deve acompanhar o processo de produção, sendo responsável pela coleta de amostras e pela análise das características físicas dos livros, de acordo com especificações da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), normas ISO e manuais de procedimentos de ensaio pré-elaborados; j) A distribuição dos livros deve ser feita por meio de um contrato entre o FNDE e a Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos (ECT), que deve levar os livros diretamente da editora para as escolas⁶; e k) os livros devem chegar às escolas entre outubro do ano anterior ao atendimento e o início do ano letivo. Nas zonas rurais, os livros são entregues nas sedes das prefeituras ou das secretarias municipais de educação, que devem efetivar a entrega dos livros. Estas informações estão disponíveis no site do FNDE (<https://www.fnde.gov.br/>).

2.4 O Guia do Livro Didático

O Guia do livro didático faz parte do PNLD e procura, entre outras coisas, fazer um estudo detalhado dos livros didáticos produzidos no Brasil. O guia passa por um minucioso processo de avaliação e traz as resenhas dos livros didáticos, conforme descrito a seguir:

⁶Essa etapa do PNLD conta com o acompanhamento de técnicos do FNDE e das secretarias estaduais de educação.

O presente Guia tem o objetivo de apoiar as reflexões e trocas de ideias nessa atividade tão importante. Os textos que o compõem são fruto de um minucioso processo de avaliação que envolveu professores universitários e do ensino básico de diversas instituições educacionais e regiões do país. No Guia, você encontra as Resenhas das coleções [...], aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático 2017. Elas são o componente principal do Guia e são apresentadas segundo a ordem de inscrições das obras no PNLD (GUIA DO LIVRO DIDÁTICO, 2017, p. 18).

Existe a necessidade de os professores se apropriarem das orientações do guia, compartilhando ideias entre os seus pares, para que os livros didáticos de Matemática possam garantir uma resposta adequada ao processo de ensino e aprendizagem, nesse sentido esclarece o Guia do Livro Didático:

Cabe à escola, em particular ao professor, a condução do processo de ensino e o acompanhamento da aprendizagem dos estudantes. Nessa tarefa complexa, a grande maioria dos educadores atribui ao livro um papel de destaque entre os recursos didáticos que podem ser utilizados. O livro didático traz para o processo de ensino e aprendizagem mais um elemento, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o estudante. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado (a Matemática); os métodos adotados para que os estudantes consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade. Estabelece-se, assim, uma teia de relações que interligam quatro polos. Um deles é formado pelo autor e o livro didático; os outros três são compostos, respectivamente, pelo professor, pelo estudante e pela Matemática (GUIA DO LIVRO DIDÁTICO, 2017).

Baseando-se na citação acima, foi construída, pelo autor do trabalho, um esquema de acordo com o apresentado pelo Guia do Livro Didático, representando os quatro polos que se interligam (Figura 2).

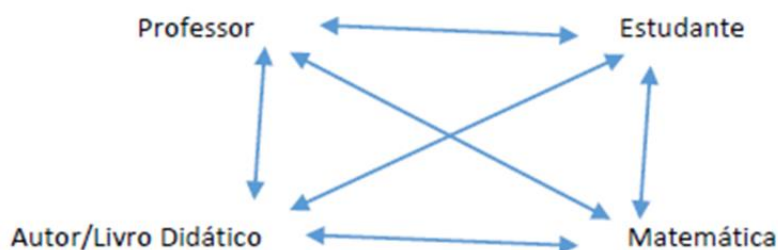


Figura. 2: A teia de relações que interligam os quatro polos.

Fonte: Guia do Livro Didático (2017)

Assim, o Guia do Livro Didático é importante, uma vez que apresenta aos professores um suporte para suas escolhas, principalmente por meio das resenhas, as quais apresentam seus textos estruturados em diversas seções que oferecem uma análise minuciosa de cada coleção. Na primeira seção da resenha, chamada de “Visão Geral” é apresentada, segundo o Guia do Livro Didático (2017): “uma síntese da avaliação da obra, com realce de suas principais características, especialmente no que diz respeito à abordagem dos conteúdos e à metodologia de ensino e aprendizagem”. Essas resenhas também distinguem as diversas coleções de livros, fazendo uma análise de cada coleção através dos pontos positivos e negativos das mesmas.

Os professores devem se orientar, na hora da escolha dos livros, pelo guia do livro fornecido pelo PNLD. O processo de escolha é realizado diretamente pelos professores em suas respectivas escolas e o período de utilização do livro é de três anos. Em 2015, por exemplo, foram escolhidos os livros didáticos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental para o triênio 2016 – 2019; sendo assim, haverá uma nova escolha em 2019 para o triênio 2020 – 2022. Como os livros são trocados apenas a cada três anos, estes são devolvidos ao final do ano letivo e utilizados por um outro aluno no ano seguinte. Para a escolha dos livros, os professores geralmente se reúnem por área de conhecimento, analisam os livros e elencam uma lista contendo duas opções. Depois da escolha dos Livros Didáticos pelos professores, a escola, por meio do pessoal da biblioteca escolar, entra no site do FNDE - PNLD e insere os códigos dos livros escolhidos na escola, gerando um comprovante da escolha contendo duas opções de livros escolhidos. Após o processo de escolha dos livros didáticos o responsável pela escolha nas escolas públicas, urbanas e rurais deverá acessar o site do Programa Dinheiro Direto na Escola (PDDE) para oficializar a compra.

Todas as áreas do conhecimento são importantes, uma vez que se complementam e propiciam ao ser humano, entre outras coisas, discernir sobre o seu papel dentro da sociedade. Também é necessário se ter uma atenção especial com a língua materna, no nosso caso o Português, pois o seu domínio é fundamental para se conseguir um bom desempenho em Matemática, bem como nas outras áreas do conhecimento. Com relação ao

ensino da matemática, campo no qual encontra-se inserida a geometria:

A Matemática é uma das mais importantes “ferramentas” para a humanidade e, sem ela, o homem jamais seria capaz de sair das cavernas para, tempos depois, inventar o computador e viajar pelo espaço sideral. Portanto, ensinar Matemática é ensinar a viver, é capacitar o aluno a perceber seu próprio corpo no espaço físico, estabelecendo relações de semelhanças e diferenças e deslocando-se com segurança em diferentes direções (SELBACH & ANTUNES, 2010).

Diante da relevância da Matemática para a humanidade, o Guia Nacional do Livro Didático prioriza a articulação dos conteúdos ensinados aos estudantes, com o cotidiano no qual esses estudantes estão inseridos. Neste sentido assim, o Guia descreve:

Ao se referir sobre o mundo atual, é possível observar a presença da matemática nas atividades humanas das diversas culturas. Muitas ações humanas requerem competências matemáticas que se tornam mais complexas à medida que as interações sociais e as relações de produção e de troca de bens e serviços se diversificam e se intensificam. Em sociedades como a nossa, permeadas por tecnologias de base científica e por um crescente acúmulo e troca das mais diversas informações, é consenso reconhecer que as competências matemáticas tornaram-se um imperativo (GUIA DO LIVRO DIDÁTICO, 2017, p. 06).

Uma novidade lançada pelo FNDE em 2018 foi o PNLD literário, em que a escola pode acessar o sistema do MEC e escolher livros literários para a educação infantil (creche e pré-escola) para os anos iniciais do ensino fundamental (1º ao 5º ano) e para o ensino médio. A partir de 2019, os livros didáticos do professor começaram a ser acompanhados de material digital, e cada coleção vem acompanhada de plano de desenvolvimento, sequências didáticas e uma proposta de acompanhamento da aprendizagem. Além destas mudanças, os livros para os alunos do 1º ao 5º ano começam a ser consumíveis, ou seja, não serão reaproveitados pelos alunos dos anos seguintes. Além destas mudanças, os alunos com necessidades especiais atualmente são atendidos com livros em libras, com caracteres ampliados e na versão MecDaisy⁷.

⁷O MecDaisy é um software desenvolvido pela UFRJ que permite a leitura/audição de livros no formato Daisy. O formato Daisy – Digital Accessible Information System – é um padrão de digitalização de documentos utilizado para a produção de livros acessíveis (Site da UFRJ).

É interessante observar a existência do aspecto comercial que envolve o livro didático, pois trata-se de milhões de exemplares que são distribuídos aos estudantes das escolas públicas todos os anos. Com um mercado tão grande, as editoras investem em marketing na tentativa de conquistar a preferência dos professores na escolha dos seus respectivos livros. Apenas para exemplificar, segundo um artigo do Jornal do Comércio do estado de Pernambuco (de 13 de agosto de 2014, VIDE ANEXO A, p. 123), foi estimada, pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), a compra de 90 milhões de exemplares de Livros Didáticos do Ensino Médio para o triênio 2015, 2016 e 2017.

CAPÍTULO III

ABORDAGEM TEÓRICA

3.1 Tópicos sobre o campo da didática

O pensamento pedagógico de Comênio será analisado e compreendido como expressão da transição entre a realidade pedagógica do mundo antigo e feudal e a sociedade capitalista posterior. Este pensamento, ao mesmo tempo em que questiona a sociedade e a educação em vias de superação, expressa a “nova” realidade emergente e coloca uma “nova” proposta para o ensino (VEIGA, 2003, p. 42).

De acordo com Castro (1991, p. 13), a didática surgiu no século XVII e constituiu um marco revolucionário e doutrinário no campo da Educação. A autora destaca que Comênio e Raquítio⁸ (1571 – 1635) foram os educadores responsáveis pelo aparecimento da didática, ambos pautados por ideais éticos e religiosos. Rousseau⁹ (1712 – 1778), no final do século XVIII, foi quem fez a segunda revolução da didática. Segundo Castro (1991, p. 15), Rousseau “não é um sistematizador da Educação, mas sua obra dá origem, de um modo marcante, a um novo conceito de infância”. Na primeira metade do século XIX, Johann F. Herbart¹⁰ (1776-1841) criou uma Pedagogia Científica fortemente influenciada por seus conhecimentos de Filosofia e de Psicologia. Em sua obra “O método dos passos formais”, ele situou-se no plano didático ao defender a ideia da “Educação pela Instrução” que, dada a relevância do aspecto metodológico para toda e qualquer situação de ensino, celebrizou o autor. No

⁸ Ratiqio (ou Ratke) foi um educador alemão cuja filosofia de ensino era baseada na de Francis Bacon. Pressupunha que a educação deveria começar nos conceitos particulares em direção ao geral; da língua materna às línguas estrangeiras.

⁹ Jean Jacques Rousseau nasceu em Genebra, Suíça, em 28 de junho de 1712 e faleceu em 2 de julho de 1778. Entre suas obras destacam-se: Discurso sobre a origem da desigualdade entre os homens; Do contrato social, e Emílio ou Da Educação (1762).

¹⁰ Johann F. Herbart nasceu em Oldenburgo, Alemanha, em maio de 1776, vindo a falecer em agosto de 1841, e trouxe grandes contribuições para pedagogia como ciência, emprestando rigor e uma certa cientificidade ao seu método.

século XX, com os estudos de Lev Vygotsky (1896-1934) e Jean Piaget (1896-1980), o modo como as crianças aprendem ganhou notório destaque.

No Brasil, o movimento da Escola Nova foi estabelecido em 1822 por Rui Barbosa (1849 – 1923). As ideias da Escola Nova começaram a propagar-se no final do século XIX, e buscavam superar os postulados da Escola Tradicional. Entre os anos 20 e 50, a Didática seguiu os novos postulados da Escola Nova que procurou reformular internamente a escola. Nos anos 60, a didática ganhou um enfoque humanista centrado no processo interpessoal, no qual uma ação intencional sistêmica procurou organizar as condições que facilitassem o processo de ensino-aprendizagem.

Desde os tempos de Comenius, a palavra “Didática” vem se referindo aos estudos sobre os métodos de ensino que levam a procedimentos gerais mais eficazes. Assim, a Didática historicamente se preocupa com o “como ensinar”, sendo que a questão do processo ensino-aprendizagem é basicamente pensada como métodos de ensino. Segundo Amora (2001, p. 227), a didática é a metodologia do ensino; a aplicação dos métodos científicos na orientação do ensino. Logo, encontramos a evidência de que a Didática também se preocupa com os métodos do ensino, ou seja, o “como fazer”. Em D’Amore (2007, p. 21), há a referência de uma “didática geral”, que atenderia todas as áreas do conhecimento, e de uma “didática especial”, específica para cada disciplina, como a Didática da Matemática, por exemplo. É importante ressaltar que ainda que existam correntes que veem a Didática como parte das Ciências da Educação, esta é uma disciplina autônoma e independente tais quais as disciplinas correlatas de Filosofia e de Pedagogia.

A figura 3, idealizada pelo autor da tese, representa como pode-se pensar o surgimento da didática geral e da didática específica, baseando-se em D’Amore (2007).

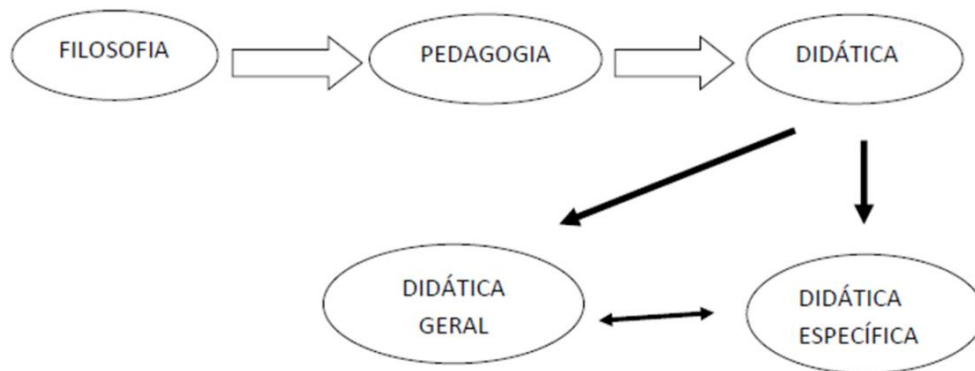


Figura 3: Esquema ilustrativo da evolução do campo da Didática.

Fonte: criação do próprio autor

Nessa perspectiva da Didática como uma disciplina independente e subdividida em duas, a Didática da Matemática representa uma Didática específica, entretanto, não deixa de manter relações intrínsecas com a Didática Geral. O presente estudo, não tem pretensão de aprofundar a discussão teórica sobre a Didática geral e a Didática específica, mas sim de percebermos a Didática da Matemática como um campo de pesquisa voltado para a sala de aula de Matemática.

3.2 A Didática da Matemática e a Didática da Matemática de influência francesa

A Educação Matemática é uma grande área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e aprendizagem da matemática, nos diversos níveis da escolaridade, quer em sua dimensão teórica ou prática. Nesse campo amplo da Educação Matemática, encontra-se inserida a Didática da Matemática:

A didática da matemática é uma das tendências da grande área da educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2002, p. 11).

A Didática da Matemática se apresenta como didática específica da disciplina de Matemática. Segundo Selbach (2010, p. 142), trata-se de um conjunto de relações explícitas ou implícitas entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio que envolve instrumentos e/ou objetos e um sistema educativo que tem a finalidade de conseguir que esses alunos se apropriem de um saber constituído ou em via de constituição. Compreendendo a Didática da Matemática como um campo de pesquisa, temos:

[...] a Didática da Matemática recai nas epistemologias de todas as investigações: é guiada pela teoria, pretende desenvolver a teoria, realiza cuidadosas análises bibliográficas, propõe afirmações que devem ser integradas em um corpo de conhecimentos em contínuo crescimento, está sujeita a reivindicações de rigor, deve oferecer aparatos de pesquisa reproduzíveis, deve estar de acordo com as premissas de validade, coerência, objetividade, etc. Pode-se também requerer que as pesquisas produzidas sejam originais e relevantes (D'AMORE, 2007, p. 67).

A percepção do campo do saber na relação entre professor e aluno, na sala de aula, passa a ser contemplada com mais ênfase a partir da Didática da Matemática:

A Didática da Matemática estuda os fenômenos do ensino/aprendizagem, ou seja, é o estudo de situações que respondem ao projeto social e visam à aquisição de certos conhecimentos pelos alunos, estudantes ou adultos em formação, tanto do ponto de vista das características destas situações como daquelas da aprendizagem que elas possibilitam (ALMOULOU, 1995, p. 1).

Na concepção de D'Amore (2007, p. 39), o nascimento da “didática das disciplinas”, e mais especificamente da Didática da Matemática, pode ser pensada desde a obra de Euclides, “Os Elementos”, que é considerada uma obra com objetivos didáticos. D'Amore também considera o conteúdo do Papiro Rhind, que apresenta um texto matemático contendo 85 problemas, como um manual prático/didático.

Tendo a finalidade de constituir uma Didática entendida como disciplina, o enfoque da Didática da Matemática se amplificou e se difundiu no mundo ocidental nos anos 70. No entanto, a complexidade do processo de ensino-aprendizagem era vista apenas como inerente à relação dual entre professor e aluno. O saber em questão não era contemplado, como se estivesse fora do processo ensino-aprendizagem. Na França, a Didática da Matemática começou

a ser entendida como um campo de pesquisa e não como uma disciplina pedagógica. Os educadores franceses Guy Brousseau e Yves Chevallard são os representantes dessas pesquisas em que a Didática da Matemática, em uma nova concepção, passou a considerar três elementos fundamentais que se relacionam: o professor, o aluno e o saber. Da mesma forma, os fenômenos que emergem dessa concepção têm repercussões dentro da sala de aula e fora dela, refletindo também os aspectos sociais que estão envolvidos no processo de ensino- aprendizagem.

Guy Brousseau foi um dos primeiros a propor, na Didática da Matemática francesa, que situações de sala de aula fossem experimentadas e analisadas cientificamente. Em 1986, Brousseau propôs a Teoria das Situações Didáticas, em que investigou as interações entre alunos, professores e conhecimentos, conferindo um papel ativo aos estudantes na busca pelo saber e considerando o erro como parte valiosa do processo de aprendizagem. Segundo o autor, uma situação didática é formada pelas múltiplas relações estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e a aprendizagem de um conteúdo específico. Ele propõe o estudo das condições nas quais são constituídos estes conhecimentos. O controle destas condições permitiria, na sua teoria, a reprodução e o aperfeiçoamento dos processos de aquisição escolar de conhecimentos. Brousseau descreveu como situação didática:

Um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de se conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de construção (BROUSSEAU 1997, p. 9).

A partir do que propõe Brousseau, a relação didática pode ser representada de forma esquemática em um triângulo (Figura 4), em que cada elemento da relação é representado como um polo. Assim, temos o polo do saber (S), o polo do professor (P) e o polo do aluno (A).

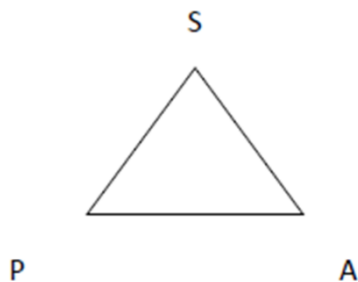


Figura 4: O triângulo das situações didáticas

Segundo Oliveira Martins (2008, p. 20), essa representação triangular nos permite estabelecer múltiplos olhares sobre seus componentes isoladamente e suas relações, entre as quais: as relações entre o professor e o aluno; as relações entre o professor e o saber; as relações entre o aluno e o saber; as relações entre os três ao mesmo tempo, ou seja, o professor, o aluno e o saber.

Em 1991, Chevallard propôs a Teoria da Transposição Didática e, em 1999, a Teoria Antropológica do Didático. Por embasarem este estudo, ambas as teorias serão discutidas com maior aprofundamento.

3.3 A Teoria da Transposição Didática (TD)

A transposição didática permite interpretar as diferenças que ocorrem entre a origem de um conceito da matemática, como ele encontra-se proposto nos livros didáticos, a intenção de ensino do professor e, finalmente, os resultados obtidos em sala de aula (PAIS, 2015, p. 12).

Segundo Menezes (2006, p. 30), o sistema didático é formado por três elementos que se configuram como partes constitutivas de uma relação dinâmica e complexa. Esses elementos são o professor, o aluno e o saber. Essa relação de três elementos ficou conhecida como o Triângulo das Situações Didáticas, como se referiu Guy Brousseau. Como destaca Schubauer-Leoni (1988b), dois elementos nesta relação são humanos (o professor e o aluno) e um elemento (o saber) não. Embora seja uma “produção humana” e não um “ser humano”, é o saber que determina, em larga escala, a forma como as relações irão se estabelecer.

A teoria da Transposição Didática foi proposta pelo francês Yves

Chevallard (1991) e tem como questão principal a noção de antropologia didática, que se ancora nos conceitos primitivos de instituições, de indivíduos e de objetos e nos conceitos de relações pessoais e institucionais com os objetos de estudo, de acordo com esse teórico:

O objeto O existe para o indivíduo X se X tem uma relação pessoal com ele, designada de $R(X, O)$: relação de X com O . Igualmente, o objeto O existe para a instituição I – é um objeto institucional para I – se I tem uma relação institucional com O , $R_I(O)$. Notemos que esse objeto existe – é um objeto – se é um objeto ao menos para um indivíduo X ou uma instituição I . Dado isto, dizemos que X conhece O se X tem uma relação com O (o que significa dizer que O existe para X). Diremos que, para o sujeito Z de uma instituição I , X conhece O e Z supõe um juízo de conformidade de $R(X, O)$ com $R_I(O)$ (CHEVALLARD, 1991, p. 148).

Assim, Yves Chevallard nos remete a um ambiente externo que ele denominou de Noosfera. Esse ambiente consiste em pessoas, entidades, etc., que estão envolvidas na transformação do saber antes de ele chegar à sala de aula. Então, com suas teorias da Transposição Didática e Antropológica do Didático¹¹, Chevallard acrescentou mais um elemento, as instituições, na tríade formada pelo professor, pelo aluno e pelo saber, ampliando a estrutura conceitual já existente na Didática da Matemática de influência francesa. Conforme Araújo:

O sistema didático concebido por esse pesquisador (Chevallard) é composto pelos sujeitos da instituição estudada, que ao menos inclui o professor e o aluno, e pelo objeto de estudo. Nesta abordagem, a aprendizagem é fruto das mudanças ocorridas na relação pessoal de uma determinada pessoa com o objeto (ARAÚJO, 2009, p. 26).

Segundo Pais (2015, p.17), a transposição didática pode ser entendida como um caso especial da transposição dos saberes, que é entendida no sentido da evolução das ideias, no plano histórico da evolução intelectual da humanidade. A transposição didática vai refletir sobre os caminhos percorridos pelo saber até sua chegada em sala de aula e sobre as transformações que esse saber sofreu desde seu surgimento na comunidade científica até a sua entrada na sala de aula, podendo ser associado a fabricação de um objeto, neste

¹¹ A ser discutida no próximo subcapítulo.

caso, um objeto de ensino. Conforme Chevalard:

[...] é como o trabalho de fabricar um objeto de ensino, ou seja, fazer um objeto de saber produzido pelo sábio. É um instrumento através do qual analisamos o movimento do saber sábio para o saber a ensinar e que através destes, chega-se ao saber ensinado (CHEVALLARD 1991).

Enquanto que a Didática da Matemática lança um olhar no jogo realizado entre professor, aluno e o saber matemático, em sua teoria da Transposição Didática, Chevallard (1991) centraliza esse olhar para o polo do “saber”, buscando entender como o saber construído na comunidade científica será ensinado (saber ensinado) e que transformações ocorrem durante o percurso realizado entre um saber e outro. Nesse sentido, o próprio Chevallard escreve:

Para que o ensino de um determinado objeto do saber seja possível, esse elemento deverá ter sofrido certas deformações, que o tornariam apto para ser ensinado. O saber tal como é ensinado, o saber ensinado, é necessariamente distinto do inicialmente designado como saber que deve ser ensinado, o saber a ensinar (CHEVALLARD, 1991, p. 16-17).

A ideia de transposição didática se baseia na construção de uma problemática antropológica, levando em consideração as exigências que surgem das inter-relações entre as noções de saberes e instituições. A questão do saber para Chevallard não surge simplesmente do nada; pelo contrário, o saber surge em um determinado momento e em uma determinada sociedade. Isto nos remete à questão de que os vários saberes podem surgir em vários momentos e em várias sociedades ao mesmo tempo, como demonstra a própria história da Matemática. Com relação ao saber a ensinar o autor escreve:

Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torna-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado transposição Didática (CHEVALLARD, 1991, apud PAIS, 2001).

Na concepção de Chevallard, existe distinção entre os saberes que passam por esse conjunto de transformações e adaptações. Assim, o autor utilizou vários conceitos para demonstrar a sua teoria da Transposição Didática. De uma maneira simplificada, a teoria pode ser decomposta em três “andares” (Figura 5). Nessa representação, o saber surge na comunidade científica (saber sábio),

sofre as adaptações e transformações e finalmente chega à sala de aula por intermédio do professor (saber ensinado). Porém, não é bem assim que devemos entender essa teoria, pois a mesma é bem mais complexa, conforme detalhado a seguir.

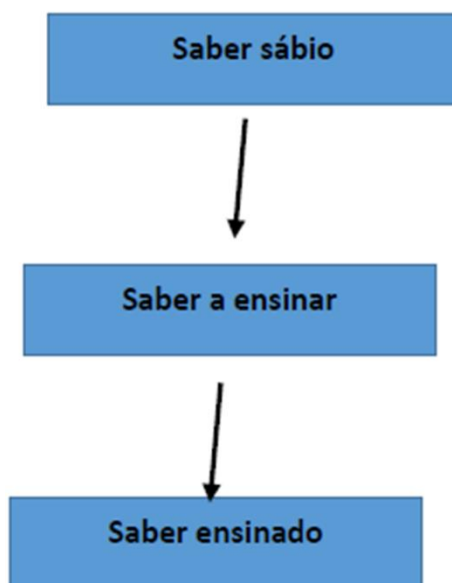


Figura 5: Os três andares da TD, proposto por Arsac

3.3.1 Saber sábio

O saber sábio está ligado diretamente ao próprio cientista. Segundo Pais, (2015, p. 21), o saber científico está associado à vida acadêmica, embora nem toda produção acadêmica represente um saber científico.

Se, por um lado, o saber científico é registrado por uma linguagem codificada, o saber escolar não deve ser ensinado nessa forma, tal como se encontram redigidos nos textos e relatórios técnicos. A desconsideração desse aspecto favorece a transformação da linguagem em uma dificuldade adicional (PAIS, 2015, p. 21).

Ao comunicar os resultados de sua pesquisa, o cientista geralmente não faz referência aos seus próprios conhecimentos, nem às estratégias por ele utilizadas. E também não divulga o tempo e nem a duração que seu trabalho demandou. Segundo Almouloud (1996, p. 51), o saber sábio em matemática, por exemplo, é despersonalizado, descontextualizado (ao nível das publicações), ordenado pelos problemas encontrados e sincretizado, isto é, os

saberes são ligados, sempre, ao nível dos saberes dos pesquisadores:

Para dar uma generalidade máxima aos resultados, ele esquece a origem dos problemas encontrados na partida. Nesta passagem da abstração, ele retém só os conceitos operatórios. Digamos que ele descontextualiza esse saber (ALMOULOU, 1996, p. 51).

3.3.2 Objetos a ensinar

Ao falarmos dos objetos a ensinar precisamos entender de onde eles surgem. Chevallard se referiu a esse ambiente de onde surgem estes objetos como Noosfera (a “*noosphere*”) que é o sistema social do ensino. Aqui no Brasil, por exemplo, a Noosfera pode ser entendida como o ambiente composto pelo Ministério da Educação (MEC), pelos autores dos livros didáticos, entre outros. Segundo Almouloud (1996, p. 51), “numerosos fatores intervêm neste nível: o tipo de sociedade, o modo da administração, o estado do sistema educativo, o nível do desenvolvimento tecnológico, a formação dos professores. Este é o primeiro ato da transposição didática.

3.3.3 Saber a ensinar

Na medida em que um determinado saber científico passa a ser considerado um saber a ser ensinado, este sofrerá adaptações e transformações antes da intermediação do professor, ou seja, antes do professor ensinar esse saber aos alunos. Araújo (2009, p. 29) acrescenta que “ele deve passar pelo controle social de aprendizagens, que define uma progressão no tempo sobre o que deve ser ensinado e como deve ser ensinado, bem como verifica a conformidade do desenvolvimento do conhecimento dos alunos de acordo com a progressão adotada.

Chevallard chama o saber a ensinar de “texto do saber”. É o saber que efetivamente chega aos alunos por meio do professor no ambiente escolar. Segundo Joshua & Dupin (1989, p. 184), a “extração do saber do domínio acadêmico para trazê-lo para o saber a ser ensinado, em sua maioria, não se constitui em uma tarefa fácil”. O saber a ensinar se refere as escolhas que o professor faz, dos conteúdos que ele acha que deve ensinar aos seus alunos.

Essas escolhas são feitas pelos professores através dos meios que ele dispõe para encontrar os objetos a ensinar como, por exemplo, os livros didáticos.

Em consonância com as reflexões realizadas, entendemos que as escolhas do professor geralmente são feitas por meio de escolhas anteriores as suas próprias escolhas, isto é, o saber que o professor ensina não depende simplesmente de uma escolha que foi realizada por ele, mas de um ambiente que norteia qual o saber a ser ensinado. Segundo Almouloud (1996, p. 53), “para tentar fazer o saber a ensinar um conjunto de conhecimentos estruturados e acessíveis aos alunos, os especialistas são, às vezes, obrigados a reescrever as definições e propriedades, repensar as articulações lógicas e transformar certas demonstrações”.

3.3.4 O saber escolar

Esse saber está diretamente ligado aos livros didáticos que apresentam de forma organizada, por meio de capítulos, os conteúdos que irão ser trabalhados nos respectivos anos escolares. Segundo Pais (2015, p. 52), “o saber escolar representa o conjunto dos conteúdos previsto na estrutura curricular das várias disciplinas escolares valorizadas no contexto da história da educação”. De acordo com Almouloud (1996, p. 53), o saber escolar “[...] contribui à instalação de uma cultura particular nos alunos da mesma época” e “[...] sua elaboração é o terceiro ato da transposição didática”.

Segundo Pais (2015, p. 22), “finalmente, enquanto o saber científico é validado pelos paradigmas da área, o saber escolar está sob o controle de um conjunto de regras que condiciona as relações entre professor, aluno e saber”.

3.3.5 Saber ensinado

O saber ensinado é o saber que o professor vai efetivamente ensinar aos seus alunos, passadas todas as etapas anteriores. Nesse sentido, um exemplo de transposição didática dada pelo próprio Chevallard, é o conceito de distância:

Desde a época em que podemos falar da influência de Euclides na geometria, a noção de distância entre dois pontos foi estudada de uma forma quase espontânea. Entretanto, em 1906, essa noção foi generalizada pelo matemático Fréchet (1878 – 1973) com o objetivo de trabalhar com os chamados espaços de funções (PAIS, 2015, p. 57).

No decorrer das discussões sobre a teoria da Transposição Didática de Chevallard, podemos perceber a sua complexidade, no sentido de envolver diversos elementos em sua trajetória. De maneira sintética, Yves Chevallard estudou a transposição didática conforme representado no esquema abaixo (Figura 6).

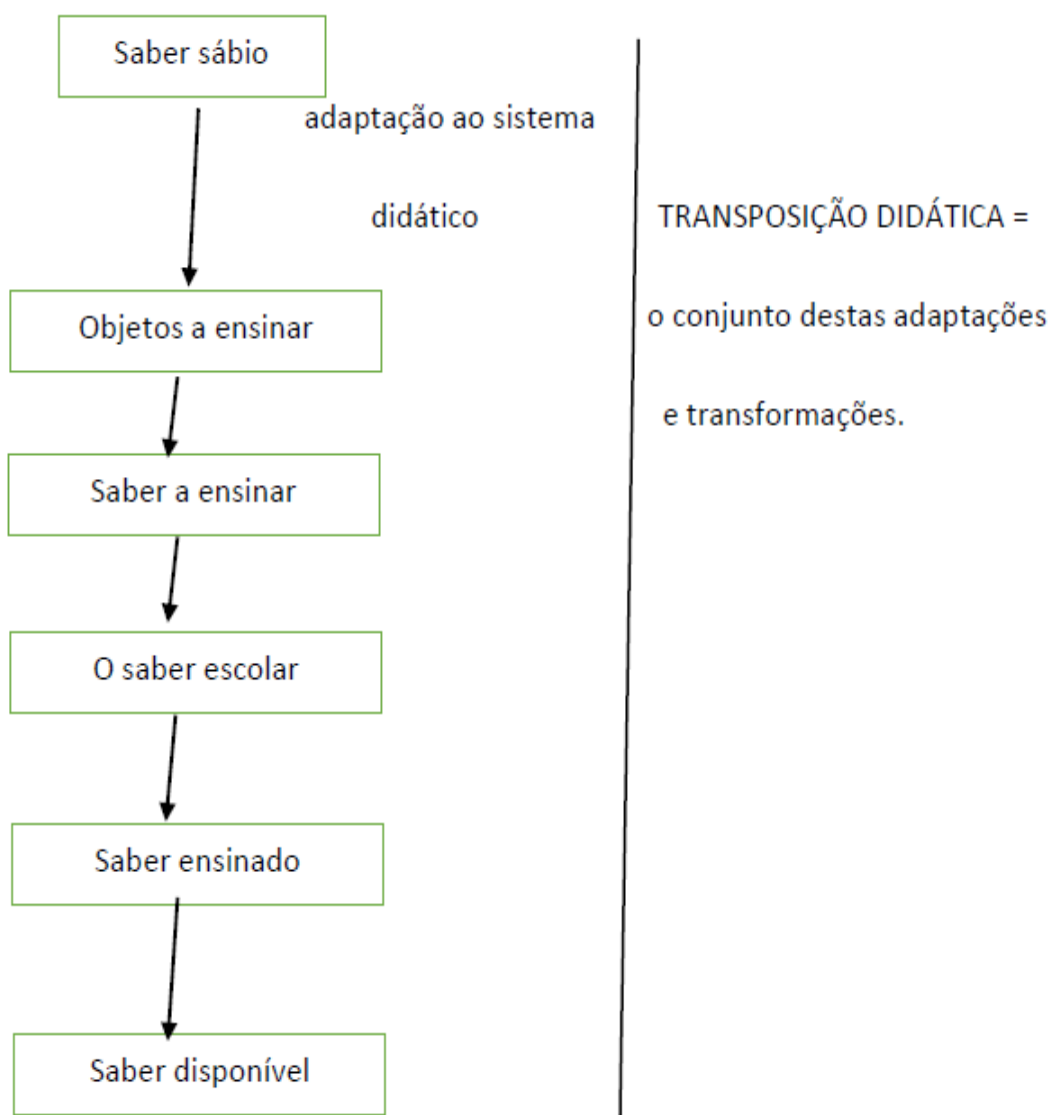


Figura 6: Esquema da TD estudado por Chevallard

3.4 Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Chevallard ampliou a discussão da Transposição Didática por meio de uma nova teoria cujo nome é Teoria Antropológica do Didático (TAD). Essa teoria surgiu da problemática ecológica, que consiste em um meio de questionar o real, ou seja: o que existe e o porquê existe, como, também, o que não existe e o porquê não existe. A Teoria Antropológica do Didático tem como conceito fundamental o de objeto que, sendo material ou não, deve existir pelo menos para um indivíduo. Conforme Chevallard (1998, p.91):

O alargamento do quadro determinado pela necessidade de análise conduziu-me a propor uma teorização em que todo objeto possa aparecer: a função logarítmica é, certamente, um objeto (matemático), mas também há também o objeto “escola”, o objeto “professor”, o objeto “aprender”, o objeto “saber”, o objeto “dor de dente”, o objeto “fazer pipi”, etc. Assim, passa-se de uma máquina a pensar um universo didático restrito a um conjunto de máquinas de alcance mais amplo, apto, em princípio, a nos permitir situar didática no seio da antropologia (CHEVALLARD, 1998, p.91).

Sabe-se que a antropologia é o estudo ou reflexão acerca do ser humano e de tudo que lhe é característico. Nesse sentido, percebe-se que Chevallard faz uma ampliação ou complemento da Teoria da Transposição Didática ao lançar a ideia da Teoria Antropológica do Didático. Os objetos são ampliados em sua nova visão, surgindo outros objetos que se relacionam com o objeto a ser ensinado, deixando de ser um conjunto restrito para ser situado na antropologia didática. Segundo Chevallard (2003, p. 81), um “objeto é toda entidade, material ou não, que existe para ao menos um indivíduo”.

Com a ampliação desses objetos, tem-se as instituições, como por exemplo a escola, onde o saber a ser ensinado (noosfera), de forma acadêmica, vai interagir com outros objetos materiais ou não, formando uma antropologia didática com o intuito de que esse saber a ser ensinado se transforme em saber ensinado (professor) e consiga seu objetivo, que é se transformar em um saber aprendido (construído), nesse sentido o referido autor escreveu:

Em muitos casos, no entanto, as subordinações às quais um indivíduo X se submete na instituição de formação tendem a lhe impor relações que, em curto prazo, entram em conflito com as suas próprias relações pessoais. A pessoa emerge do abismo provocado por suas submissões passadas e presentes, sem nunca se reduzir a qualquer delas, mesmo se alguma delas aparece de forma dominante em um determinado tipo de situação. Seria um grande erro crer que um aluno, por exemplo, é ou deveria ser o sujeito dócil de uma disciplina (francês, matemática, inglês, ciências econômicas e sociais, etc. Outras subjugações, exógenas, anteriores, talvez serão vividas por ele como mais vitais, ou simplesmente com melhores garantias da integridade e do desenvolvimento de sua pessoa, enquanto as subjugações impostas pela formação escolar serão sentidas (pontual ou globalmente) como uma ameaça à sua integridade pessoal – coisa particularmente sensível em meio popular (CHEVALLARD, 2003, p.89).

Segundo Chevallard (1998, p.91), como ponto crucial, a Teoria Antropológica do Didático “situa a atividade matemática, e conseqüentemente a atividade de estudo em matemática, no conjunto das atividades humanas e das instituições, sociais”. Em suas ideias, o autor vincula a didática da matemática com objetos distintos: a matemática de início, e, em seguida, solidariamente, os alunos, os professores, os livros, etc.

Nota-se que nessa nova teoria, Chevallard avança no sentido de incluir as instituições como partes importantes nas transformações que o saber recebe até sua entrada na sala de aula. Sobre a relação de Chevallard com o saber matemático, com relação a inclusão das instituições:

Para Chevallard, o saber matemático é, por conseguinte, fruto da ação humana institucional, isto é, algo que é produzido, utilizado, ensinado ou, mais geralmente, transposto em instituições, o que torna necessária a elaboração de um, método de análise que permita a descrição e o estudo das condições de realização das práticas institucionais (ARAÚJO, 2009, p. 38).

Segundo Lucas *et al.* (2014, p. 1- 25), a Teoria Antropológica do Didático investiga “as condições que permitem, facilitam ou favorecem o desenvolvimento de determinadas atividades didático-matemáticas numa dada Instituição” e “as restrições que dificultam, entorpecem ou, inclusivamente, impedem que se pratique essas atividades”.

3.5 Geometria dos conceitos de: ponto, reta e plano na comunidade científica

Segundo a BADEM (2009, p. 181), Geometria é a parte da Matemática que estuda o espaço e as figuras que nele podem se encerrar. De acordo com Junior (2000, p. 21), a Geometria é o ramo da Matemática que estuda as figuras geométricas e suas propriedades. Entre as diversas ramificações da Geometria pode-se citar: Geometria Plana ou Euclidiana, Geometria Analítica, Geometria Cinemática, Geometria Projetiva, Geometria Descritiva, Geometria Elíptica (Riemann), Geometria do Espaço, Geometria Hiperbólica (Lobatchevsk) e Geometria Diferencial.

Acredita-se que a Geometria nasceu das necessidades dos egípcios de delimitarem terras nas margens do rio Nilo, provavelmente por meio de observações e experimentos. Segundo Junior (2000, p. 7), seria essa a origem da Geometria, mais tarde levada a Grécia:

A origem da palavra geometria provém da palavra grega geometrein: geo, que significa terra e metrein, que significa medir; assim, geometria foi originalmente a ciência de medir terras (REZENDE & BONTRIM, 2008, p. 18).

Segundo Junior (2000, p.7), a mais antiga referência à palavra Geometria data do século V a.C. e foi feita pelo filósofo e escritor grego Heródoto, ao descobrir a história e os costumes dos egípcios. Através dessa referência, pode-se compreender o significado original desse termo:

Segundo Heródoto, um rei dividira o território do Egito entre todo o povo, dando a cada egípcio um lote de terra quadrado e de mesmo tamanho. Essa divisão veio acompanhada da imposição de pagamento de um tributo anual. Entretanto, qualquer homem que o rio Nilo despojasse de uma parte de sua terra poderia dirigir-se ao rei e expor-lhe o fato. O rei mandava então que seus funcionários medissem a extensão do decréscimo do lote, para que fosse concedida a seu detentor uma redução no tributo bruto proporcional à perda (JUNIOR, p. 7, 2000).

São os gregos que não se contentam com os conhecimentos empíricos e avançam nos princípios geométricos por meio de demonstrações dedutivas rigorosas, tratando a geometria com bases científicas. O conhecimento sobre Geometria, referida como a “medida da terra”, desenvolveu-se ao longo do

tempo e diversificou-se em vários ramos. Conforme Edson & Alberto (1974, p.18), Euclides, em 300 a.C., reuniu os conhecimentos de geometria da época no seu famoso livro “Os Elementos”:

[...] é o tipo de geometria que se aprende na escola, essa geometria a maioria de nós usa para visualizar o universo físico. Se trata do texto do matemático grego Euclides, Os Elementos, escrito por volta de 300 A.C. Nossa imagem do universo físico é baseada nessa geometria, que foi pintada, em grande parte, por Isaac Newton no século XVII (GREENBERG, 1994, p.1).

O surgimento da Geometria Euclidiana ou Geometria Plana remonta aos trabalhos de Euclides de Alexandria. Segundo Levi (2008, p.7), foi Euclides que, entre outras coisas, conjecturou e demonstrou que existem infinitos números primos (indivisíveis). Também encontramos na literatura que Euclides foi educado em Atenas e frequentou a academia de Platão. A obra de Euclides é bastante relevante e conseguiu se perpetuar através do tempo para se tornar a base da Geometria Plana.

A grande importância que Euclides possuía se reflete no fato de que Ptolomeu, herdeiro do trono de Alexandre o Grande, o procurou para trabalhar no Museum, o centro de aprendizado helenístico que possuía uma das mais famosas e importantes bibliotecas daquela época:

Quando Alexandre, o Grande, morreu em 323 A.C., seu império africano foi herdado por Ptolomeu, seu general macedônio favorito, que governou como rei de 305 a 285 A.C. Supõe-se que Ptolomeu trouxe Euclides de Atenas para Alexandria, para integrar o corpo do grande centro de aprendizado helenístico – conhecido como Museum, com sua famosa biblioteca – que lá ele fundou (SIMMONS, 1987, p. 38).

A obra de Euclides, “Os Elementos”, é composta de treze livros ou volumes e foi escrita em Alexandria, por volta de 300 a.C. Essa obra engloba uma coleção de definições, postulados (axiomas), proposições (teoremas e construções) e provas matemáticas das proposições. Os treze livros cobrem o que hoje conhecemos por Geometria Euclidiana e a versão grega antiga da teoria dos números elementares. Segundo Levi, tem-se que:

Mais precisamente, Euclides introduziu explicitamente o formato (também chamado método) axiomático, que consiste em começar listando os conceitos básicos e os postulados – ou seja, ideias não deriváveis de outras ideias no mesmo sistema – e derivar (definir ou deduzir) os demais a partir deles (LEVI, 2008, p. 8).

“Os Elementos” de Euclides, segundo Berlinghoff & Gouvêa (2010, p. 10), é uma coleção dos resultados matemáticos mais importantes da tradição grega, organizados de modo sistemático e apresentados como ciência dedutiva formal. Por causa de sua importância, esse antigo texto é considerado como um dos mais estudados, conforme aponta Eves:

Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos *Elementos* já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria (EVES, 2004, p. 167-168).

A primeira edição conhecida de “Os Elementos” é de 1482 e, devido ao lapso temporal, fica evidente que não se trata do texto original de Euclides, uma obra escrita há mais de dois mil anos. Neste sentido, temos:

Tendo essa obra sido escrita por volta do final do século IV a.C., é difícil que se possa imaginar ter chegado até nós o manuscrito do seu autor, o chamado manuscrito autógrafo. De fato, não possuímos tais manuscritos dos autores clássicos – gregos e latinos (BICUDO, 2009, p. 21).

Os Elementos é um texto escrito em torno de 300 a.C., e Euclides não teve a preocupação de situar sua obra no contexto histórico. O que a obra se propôs, no entanto, foi iniciar pelo começo da Geometria, segundo escreveu Simmons:

Os Elementos propôs-se iniciar pelo começo da Geometria, nada requerendo do leitor de experiência ou conhecimento anteriores. Não obstante ele não oferece nenhuma explicação preliminar e em nenhum lugar fornece observações iluminadoras de qualquer sorte. Não faz tentativa de situar seu conteúdo em algum contexto histórico ou matemático e em nenhuma parte o nome de alguém é mencionado. Sua impessoalidade pétrea tonteia a mente (SIMMONS, 1987, p. 21).

Segundo Boyer (1996, p. 69), Euclides e Os Elementos são frequentemente considerados sinônimos; na realidade ele escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos variados, desde a óptica, astronomia,

música e mecânica (para os gregos a Matemática era composta por: geometria, aritmética, música e mecânica) até um livro sobre secções cônicas. Naquela época, era comum os trabalhos serem chamados de “Os Elementos”. Entretanto, a obra de Euclides conseguiu se sobrepor às obras anteriores. Segundo Eves (2004, p. 167), “parece que esse trabalho notável imediata e completamente superou todos os Elementos precedentes; de fato, nenhum vestígio restou de esforços anteriores.” Porém, é importante ressaltar que a partir dos anos 90, na história da matemática, não existe consenso quanto a essa colocação feita por Eves.

De acordo com Roque (2012, p. 163-164), Os Elementos de Euclides se compõem dos seguintes livros:

Livro I (primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema “de Pitágoras”);

Livro II (contém a chamada “álgebra geométrica”, trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados);

Livros III e IV (trata das propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos);

Livro V (traz a teoria das proporções de Eudoxo, as razões entre grandezas de mesma natureza); Livro VI (aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas);

Livros VII a IX (traz o estudo dos números inteiros – proporções numéricas, números primos e progressões geométricas);

Livro X (trata das propriedades e classificação das linhas incomensuráveis);

Livros XI a XIII (tratam da geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares).

Observando a composição da obra de Euclides, nota-se que ela não se restringiu apenas a área da Geometria, mas também apresenta contribuições em outras áreas da matemática. As ideias de ponto, reta e plano são apresentadas em seu primeiro livro, entre os primeiros princípios, conforme escreveu a Roque:

“Os Elementos” inicia com a apresentação de vinte e três definições de ponto, linha, reta (entre outras formas como círculo) sem quaisquer comentários. A partir da nona definição, Euclides apresenta algumas figuras. Em seguida, são apresentados três postulados que são proposições geométricas específicas, doze axiomas e quarenta e oito proposições, com seus respectivos problemas e teoremas. Em suas sete primeiras definições encontram-se o ponto, a reta e o plano (ROQUE, 2012, p. 163-164).

Em seguida, são apresentadas as primeiras definições encontradas no Livro I da obra de Euclides, Os Elementos, de acordo com alguns autores:

Segundo Commandino (1944, p. 4), as sete primeiras definições de Os Elementos de Euclides são:

- I. Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma.
- II. Linha é o que tem comprimento sem largura.
- III. As extremidades das linhas são ponto.
- IV. Linha reta é aquela que está posta igualmente entre as suas extremidades.
- V. Superfície é o que tem comprimento e largura.
- VI. As extremidades da superfície são linhas.
- VII. Superfície plana é aquela, sobre a qual assenta toda uma linha reta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.

Segundo Roque (2012, p. 167), as seis primeiras definições de Os Elementos de Euclides são:

- 1. Ponto é aquilo de que nada é parte
- 2. E linha é comprimento sem largura
- 3. E extremidades de uma linha são pontos
- 4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma
- 5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura
- 6. E extremidades de uma superfície são retas

Na tradução de “Os Elementos” escrita pelo professor Irineu Bicudo, são apresentados vinte e três definições, cinco postulados e nove noções comuns no

livro I. Segundo Bicudo (2009, p. 97), as sete primeiras definições¹² são:

- I. Ponto é aquilo de nada é parte.
- II. E linha é comprimento sem largura.
- III. E extremidades de uma linha são pontos.
- IV. E a linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
- V. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
- VI. E extremidades de uma superfície são reta.
- VII Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.

Foi a partir da negação do quinto postulado de Euclides conhecido atualmente como Axioma das Paralelas, cuja denominação é devida ao matemático escocês Jonh Playfair (1748 – 1819), que surgiram as geometrias não -Euclidianas. Segundo Andrade (2008, pág. 7), a busca pela contestação do modelo absoluto para o espaço passou a ser uma obsessão e não tardou a surgir candidatos ao Panteão. Entre os matemáticos que contribuíram para os estudos da Geometria não-euclidiana, estão os quatro gênios da matemática Nikolai Lobachevsky (1792–1856), Janos Bolyai (1802–1860), Carl Friedrich Gauss (1777–1855) e Bernhard Riemann (1826-1866). Entre as chamadas geometrias não- euclidianas temos: a Geometria Hiperbólica ou de Lobatchevsk apresentada em 1826, a Geometria de Compasso ou de Mascheroni, que se baseia em postulados que não são os de Euclides, entre outras geometrias. Uma vez que o foco desse estudo está no campo da Geometria Euclidiana ou Geometria Plana, o surgimento e o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas não serão abordados.

3.6 Dos conceitos de ponto, reta e plano na sala de aula

Em “Os Elementos”, Euclides descreveu em uma formulação racional, a geometria intuitiva do espaço (estudo dos objetos que possuem mais de uma

¹²Essa apresentação das sete primeiras definições fornecidas por Bicudo (2009), serão utilizadas, posteriormente, como embasamento na análise dos dados desse trabalho.

dimensão e ocupam lugar no espaço). O autor parte, em sua obra, de definições ou locuções básicas, definindo ponto como “o que não tem partes”, linha como “comprimento sem espessura” e reta como “linha que descansa por igual em todos os seus pontos”.

Conforme Bicudo (2009, p. 63), na Antiguidade e na Idade Média, o modo de abordagem de uma obra e do seu ensino era o *Comentário*. No Ocidente, o comentário tomou várias formas. Bicudo (2009, p. 63) cita, por exemplo, a maneira especial empregada por Boécio nas suas exposições das *Categorias* e do *De interpretatione* de Aristóteles, em que ele faz os comentários por partes do texto, ou seja, ele destrincha o texto e faz os comentários sobre cada parte da forma mais simples possível. Como comentarista, Boécio se aproxima bastante de Proclus em seu Comentário ao livro I de “Os Elementos”. Proclus é conhecido como um dos grandes comentaristas da obra de Euclides, “Os Elementos”.

Ainda, de acordo com Bicudo (2009, p. 63), Proclus depois de um longo Prólogo em duas partes, trata pormenorizada e separadamente das “Definições”, dos “Postulados”, dos “Axiomas” (“Noções Comuns”, como está nos *Elementos*) e das “Proposições”. Bicudo (2009) também cita que antes de Proclus existiram outros comentaristas como, por exemplo, Herão de Alexandria, Porfírio, Pappus e Simplício. Entre os vários comentaristas da obra de Euclides, se destaca Théon de Alexandria, pai de Hipátia¹³. Cerca de 700 anos depois de Euclides, Théon trouxe a público uma edição com algumas alterações no texto. Desde então, Bicudo (2009, p. 26), afirma que “qualquer edição dos Elementos feita anteriormente a 1814 era baseada numa família de manuscritos cujo arquétipo era o texto dado à luz de Théon”.

O fim do século XIX foi marcado por um importante acontecimento, pois em 1900, os organizadores do Congresso Internacional de Matemática convidaram David Hilbert (1862 – 1943), na época o mais eminente matemático alemão e renomado professor da universidade de Gottingen, para fazer uma conferência.

¹³Nascida aproximadamente no ano de 370 d.C., Hipátia foi uma das maiores pensadoras de seu tempo, além de uma das primeiras mulheres a estudar e ensinar matemática, astronomia e filosofia (<http://mulheresnamatematica.sites.uff.br>).

O seu discurso obteve repercussão a nível internacional:

O discurso de Hilbert focalizou o papel de problemas não resolvidos na condução da pesquisa matemática. Ele esboçou 23 problemas que achava que seriam importantes no novo século. Na maior parte, adivinhou corretamente. A investigação desses problemas levou, direta ou indiretamente, a muitos avanços na matemática. A solução de apenas uma parte de um problema de Hilbert trazia reconhecimento internacional para quem o resolvesse (BERLINGHOFF & GOUVÉA, 2010, p. 53)

Hilbert foi um dos maiores matemáticos da transição do século dezenove para o século vinte e, de algum modo, conseguiu constituir o programa da Matemática para as décadas seguintes. Sua enorme contribuição é demonstrada pelo que Levi escreveu:

Foi o grande David Hilbert, no final do século XIX, quem exaltou e advertiu para as virtudes da axiomática. Utilizou-a em matemática e em física, a tornou seu cânone (Hilbert, 1918). Entre as virtudes da axiomática, figuram as seguintes: economia, aceleração da dedução, facilitação do exame de coerência lógica, esclarecimento de suposições, individualização dos conceitos básicos ou primitivos (definidores), e busca de fundamentos cada vez mais profundos (LEVI, 2008, p. 8).

Depois de fazer um estudo sistemático dos axiomas da geometria Euclidiana, pode-se dizer que o trabalho de Hilbert em geometria teve a maior influência nessa área desde Euclides. Em 1900, no congresso de Paris, David Hilbert propôs 23 problemas que estariam ou deveriam estar presentes na atenção dos matemáticos do novo século. Muitos dos problemas propostos por Hilbert não foram resolvidos:

Embora a Matemática tenha se desenvolvido em muitos caminhos não previstos em 1900, grande parte desses 23 problemas de fato se relacionava com conceitos e teorias que vieram a ser trabalhados por notáveis matemáticos do século vinte. Muitos dos problemas propostos por Hilbert ainda não foram resolvidos (CLÁUDIA ARAÚJO, RPM nº 42, 2000, p. 11).

Segundo Araújo (RPM, nº 40, 2000, p. 11), as contribuições de Hilbert são contadas nas mais diversas áreas de pesquisa, como lógica matemática, equações diferenciais, teoria dos números e física matemática. Os chamados espaços de Hilbert, por exemplo, encontram aplicação na teoria quântica. No campo da Geometria, David Hilbert também traz importantes contribuições, com o estudo da axiomatização, conforme aponta Araújo:

No campo da Geometria, Hilbert realizou estudos sobre axiomatização, que culminaram na publicação da obra *Fundamentos de Geometria*, em 1899, que exerceu forte influência sobre a Matemática do século vinte (CLÁUDIA ARAÚJO, RPM nº 42, 2000, p. 11).

Porém, Hilbert não podia prever como a matemática iria se desenvolver no século XX, principalmente com a chegada do homem à lua e a era da computação, as quais contribuíram para o desenvolvimento da matemática e de outras áreas do conhecimento:

O crescimento fenomenal que tinha começado nos anos 1800 continuava, e o conhecimento matemático dobrava a cada 20 anos mais ou menos. Mais matemática original foi produzida depois que os astronautas caminharam pela primeira vez na lua do que em todos os séculos anteriores. Na verdade, calcula-se que 95% da matemática conhecida hoje tenha sido produzida a partir de 1900 (BERLINGHOFF & GOUVÊA, 2010, p. 53).

Entretanto, conforme supracitado, a obra de Euclides foi bastante revisada e esses conceitos sofreram transformações que foram incorporadas nos livros didáticos com o intuito de facilitar a aprendizagem. Segundo Cajori, os livros didáticos desde muito tempo se baseiam na revisão de “Os Elementos” feita por Théon:

A revisão de Teon foi a base para praticamente todas as outras que a sucederam, os conteúdos de Geometria Euclidiana ou Plana contidos nos livros didáticos de Matemática se baseiam nessa revisão ocorrida há cerca de 700 anos. Mas, entre os manuscritos enviados do Vaticano a Paris por Napoleão I, foi encontrada uma cópia dos Elementos anterior a revisão de Theon (CAJORI, 2007, p. 46).

O ser humano vive em sociedade e necessita saber lidar com as diversidades que esse tipo de convivência traz; principalmente, saber resolver problemas dos mais variados tipos que surgem no cotidiano. Logo, faz-se necessário que o indivíduo desenvolva aptidões para dar conta dessas demandas diárias. Por meio de atividades práticas o homem descobriu as propriedades geométricas. A Geometria proporciona um olhar mais aprofundado do mundo que nos cerca por meio da abstração e dos seus conceitos que se organizam de forma a contribuir com um pensamento mais sistematizado e organizado. No entanto, conforme Rezende & Bontorim, no contexto do ensino Matemática, tem-se a Geometria Euclidiana que:

é estudada nas escolas desde o Ensino Fundamental. É simples para ser trabalhada, portanto adequada para ser utilizada desde a escola elementar. É baseada no texto do matemático grego Euclides, Elementos, escrito por volta do ano 300 a.C. (REZENDE & BONTORIM, 2008).

Por meio do estudo das propriedades geométricas, percebeu-se que a partir de algumas destas podiam ser obtidas de outras por meio de dedução lógica. Segundo Junior (2000, p. 10), “assim, surgiu a ideia de selecionar algumas das propriedades conhecidas, a partir das quais se pudessem deduzir todas as demais”.

A Geometria Plana é o ramo da Matemática que estuda as figuras geométricas e suas propriedades, e se baseia nos axiomas de Euclides. Para que possam ser estudadas, as figuras geométricas, na Geometria Plana, necessitam estar convenientemente definidas. Quando se estabelece uma definição, podem surgir duas questões importantes – a ambiguidade (Figura 7) e a circularidade (Figura 8) – que podem tornar esta definição inadequada.

A seguir, de acordo com Gonçalves Junior (2000, p. 8), são apresentadas a ambiguidade e a circularidade, com figuras construídas, pelo autor da tese, com base nas figuras encontradas no livro de Gonçalves Junior:

Ambiguidade

Definição de quadrado: “É uma figura geométrica com quatro lados iguais”. As figuras têm quatro lados iguais e, portanto, se enquadram nessa definição de quadrado e suas exigências. Há, no entanto, um problema: estas não são quadrados. A definição fornecida é ambígua: dá margem a múltiplas interpretações. Ela está, portanto, mal estabelecida.

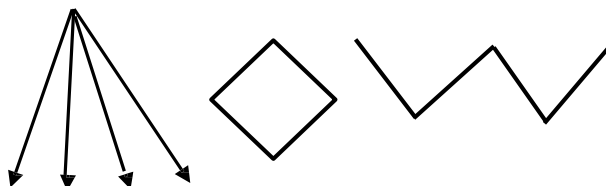


Figura 7: Ambiguidade

Circularidade

1ª Definição: “Reta é a união de todos os pontos colineares”. 2ª Definição: “Pontos colineares são pontos alinhados”. 3ª Definição: “Pontos alinhados são pontos da mesma reta”. Nesse exemplo, os elementos que se quer definir acabam ficando, na verdade, sem definição. Não se diz, de fato, o que cada um é; afirma-se tão somente que o primeiro é o segundo, que o segundo é o terceiro e que este por sua vez é o primeiro. Há aqui um círculo vicioso.

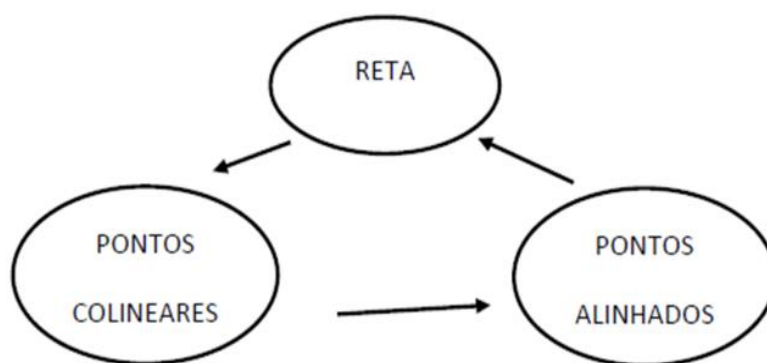


Figura 8: Circularidade

Uma característica inerente das definições é a recorrência. De acordo com Gonçalves Junior (2000, p. 10), “toda definição é recorrente, pois uma coisa só pode ser definida recorrendo-se a uma ou mais coisas anteriormente definidas”. Com a percepção de que toda definição é recorrente, tem-se uma questão lógica a ser respondida no sentido de saber qual foi a primeira das definições. Para dar resposta a essa questão, é que certamente existe um conceito não-definido para dar suporte à definição inicial, nesse sentido Freitas & Botelho acrescentam:

O ideal na geometria como em qualquer ciência seria definir todos os conceitos de que precisamos por meio de outros já conhecidos. É fácil perceber que se assim quisermos fazer na realidade não poderemos nem começar, pois aí faltariam os conceitos iniciais. Então o que fazemos é aceitar alguns conceitos iniciais, os mais simples e, a partir deles, apoiados desenvolvermos o nosso estudo (FREITAS & BOTELHO, 1974, p. 13).

As noções primitivas dão início a Geometria Plana. Nesse sentido, o ponto é a base de toda a Geometria, uma vez que é a partir de conjuntos de pontos que são formadas as figuras geométricas. O ponto é um objeto que não possui definição, dimensão e forma; portanto, é impossível encontrar qualquer medida de ponto como, por exemplo, comprimento, largura, altura, área ou volume. As retas são conjuntos de pontos compreendidos como linhas infinitas que não fazem curvas. Mesmo sendo formado por pontos, a reta também não possui definição. O plano é o objeto formado pelo enfileiramento de retas. Essas noções primitivas que não são definidas, segundo Gonçalves Junior (2000, p. 9), podem ser de dois tipos: os objetos não definidos e as relações não definidas. O ponto, a reta e o plano, ainda que as suas representações geométricas e espaciais sejam importantes, são exemplos de objetos não definidos. A pertinência e a continência são exemplos de relações não definidas. Assim, as relações existentes entre os objetos são estabelecidas pelas propriedades, como, por exemplo, numa reta em que há infinitos pontos que pertencem a ela. Esta propriedade estabelece uma relação de pertinência entre o objeto ponto e o objeto reta.

O ponto, a reta e o plano são definições primitivas que devem ser aceitas sem contestação e a partir delas surgiram os fundamentos da Geometria Plana ou Euclidiana. Estes postulados ou axioma primitivos da geometria são aceitos sem que seja necessária a prova, contanto que não exista a contraprova, conforme corrobora Gonçalves Junior:

Axiomas ou propriedades primitivas ou postulados: são as propriedades selecionadas para servir de fundamentação à Geometria. Em grego, axioma, significa “dignos de confiança.” Teoremas: são as demais propriedades que podem ser deduzidas a partir dos postulados, o termo postulado é proveniente da palavra grega que significa “*penso, medito.*” (GONÇALVES JUNIOR, 2000, p. 10).

As definições ou locuções primitivas (básicas) da geometria plana nos remete a acreditar, ter confiança, pensar e meditar. Nesse sentido, a imaginação ganha sua abrangência no indivíduo, uma vez que a própria noção de ponto nos leva a pensar no que não tem tamanho, nem largura, nem espessura. Pode-se ter apenas a ideia de que um ponto pode ser representado, por exemplo, por uma estrela no firmamento; entretanto não se deve confundir

um objeto geométrico com sua representação gráfica. Por exemplo, uma estrela no céu não é um ponto, mas apenas o representa.

No que se refere exclusivamente as noções primitivas da Geometria (o ponto, a reta e o plano), parece inexistirem práticas pedagógicas nas salas de aula de Matemática do ensino fundamental que não estejam relacionadas com as abordagens contidas nos livros didáticos de Matemática. Segundo Rezende & Bontorim (2008, p. 12), o plano é visto como o conjunto em que os pontos são seus elementos e as retas seus subconjuntos. Essa abordagem é recorrente nos livros didáticos de matemática e estes conceitos são repassados em sala de aula conforme eles se apresentam escritos nos livros didáticos de Matemática. Isso pode ser uma consequência da pouca variação na abordagem destes conceitos nos livros didáticos, que seguem sempre um mesmo raciocínio, e possivelmente justifica a dificuldade em encontrar práticas pedagógicas diferentes do que é abordado no livro texto adotado nas salas de aula de matemática do ensino fundamental.

A seguir, será apresentado como são, usualmente, representados o ponto, a reta e o plano.

3.6.1 O Ponto

É um conceito primitivo e, como tal, não se define. É representado (notação) pelas letras latinas maiúsculas do alfabeto latino. O conjunto de todos os pontos é o espaço (Figura 9), complementando o conceito de ponto, escreveram Freitas & Botelho:

Temos a ideia intuitiva do que é um ponto, mas não podemos defini-lo. Conhecemos imagens de um ponto quando, por exemplo, tocamos a ponta do giz no quadro, ou a ponta do lápis no papel, ou observamos uma estrela distante. São apenas imagens de um ponto, pois ele não tem dimensão, logo não pode ser medido; é apenas uma ideia podendo simplesmente ser concebido (FREITAS & BOTELHO, 1974).

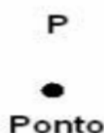


Figura. 9: Representação gráfica do Ponto

Fonte: Gonçalves Júnior (2000, p. 10)

3.6.2 A Reta

Também é um conceito primitivo que não se define. É representado (notação) pelas letras latinas minúsculas. Conforme Freitas & Botelho (1974, 9), as imagens que podemos ter de uma reta são, por exemplo, de um raio de luz, um fio bem esticado, entre outras. A reta é apenas uma ideia e a concebemos como sendo ilimitada (Figura10).



Figura 10: Representação gráfica da Reta

Fonte: Gonçalves Júnior (2000, p. 10)

3.6.3 O Plano

Também é um conceito primitivo, logo não se define. É representado (notação) pelas letras minúsculas gregas. Segundo Freitas e Botelho (1974, p. 10), a imagem que podemos ter de um plano é, por exemplo, da superfície de um lago com águas paradas. O plano é uma ideia e o concebemos como ilimitado em todos os sentidos (Figura 11).

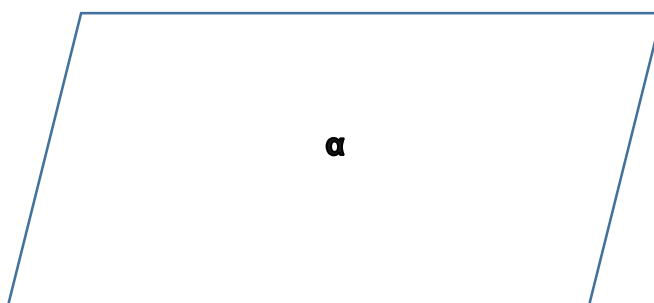


Fig. 11: Representação Gráfica do Plano

Fonte: Gonçalves Júnior (2000, p. 10)

CAPÍTULO IV

ABORDAGEM ANALÍTICA E INTERPRETATIVA DOS DADOS

4.1 Dos conceitos de ponto, reta e plano nos livros didáticos de Matemática da 5ª série e do 6º ano do ensino fundamental

Os conceitos primitivos da Geometria Plana ou Euclidiana são o modo como os elementos matemáticos são compreendidos, esses elementos dão base para a construção dos conhecimentos geométricos. Tais elementos são: o ponto, a reta, o plano e o espaço, e não existe definição precisa para eles.

O conhecimento gerado na comunidade científica não entra na sala de aula da mesma forma como foi criado nessa comunidade, ele sofre mudanças e transformações. Segundo a Teoria da Transposição Didática de Yves Chevallard (1991), essas mudanças e transformações ocorrem em um ambiente chamado de Noosfera. No Brasil, um dos meios de entrada do conhecimento na sala de aula são os livros didáticos, que são distribuídos pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), vinculado ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE).

Para a escolha dos oito livros didáticos de Matemática da 5ª série e do 6º ano do ensino fundamental analisados neste estudo, como já mencionado anteriormente, levou-se em consideração a data de criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) no ano de 1985, e a implantação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (LDB 9394/96), no ano de 1996. Assim, os oito livros didáticos analisados são livros impressos a partir de 1996.

O processo de escolha dos livros didáticos utilizado pelo autor deste trabalho foi aleatório, isto é, não foi levado em consideração o autor e a editora dos livros, mas se eles pertenciam ao período acima descrito. O universo de livros analisados foi de oito livros didáticos de Matemática: quatro livros da 5ª série e quatro livros do 6º ano do ensino fundamental. Com a finalidade de uma melhor sistematização, estes livros foram numerados de 1 a 8 (Quadro 1). A sequência dos livros é iniciada pelo livro mais antigo até o livro mais recente.

No final deste trabalho, existem anexos referentes a cada um dos oito livros didáticos, contendo figuras das capas dos livros e das concepções de ponto, reta e plano nos respectivos livros didáticos. Os anexos foram assim distribuídos: anexo B - Livro 1, anexo C – Livro 2, anexo D – Livro 3, anexo E – Livro 4, anexo F – Livro 5, anexo G – Livro 6, anexo H – Livro 7 e anexo I – Livro 8.

Na análise realizada neste estudo, apresentamos, inicialmente, um quadro contendo os conceitos de ponto, reta e plano que são abordados nos livros didáticos de Matemática da 5ª série e do 6º ano do ensino fundamental. Em seguida, são apresentadas as concepções de ponto reta e plano tomadas do Livro I de Os Elementos de Euclides, traduzidas pelo professor Irineu Bicudo (2009) e os conceitos, de acordo com Chevallard (1991), de saber científico, saber a ensinar, saber escolar e saber ensinado, bem como outros conceitos, tais como de imaginação, ideia, etc. Finalizando, foram discutidos os conceitos – ponto, reta e plano – estabelecidos nos livros didáticos de matemática (saber escolar) e na comunidade científica (saber científico).

Por uma questão de organização e de uma melhor formatação, os quadros são apresentados em uma única página. Consequentemente, eles aparecem em sua forma integral, isto é, sem haver rupturas nos quadros. Os quadros foram distribuídos seguindo a sequência numérica dos oito livros didáticos de Matemática da 5ª série e do 6º ano do ensino fundamental.

LIVRO 1: PNLD 1999 (corresponde ao triênio 1996 – 1997 – 1998)

- MATEMÁTICA IDEIAS E DESAFIOS (5ª série) – Iracema More e Dulce Satiko Onaga, São Paulo: Saraiva, 1996.

ENTES PRIMITIVOS DA GEOMETRIA	LIVRO 1 MATEMÁTICA IDEIAS E DESAFIOS (5ª série) – Iracema More e Dulce Satiko Onaga, São Paulo: Saraiva, 1996.
PONTO	- Uma estrela no céu, um grão de areia, a marca da ponta de um lápis nos dão a ideia de um ponto. Num mapa as cidades são representadas por pontos.
RETA	- Um raio de sol, um fio de linha esticado nos dão ideia de uma reta. As retas são imaginadas sem começo, sem fim e sem espessura.
PLANO	- A superfície de uma foto, a superfície da capa de um livro nos dão ideia de uma parte de um plano. Os planos são imaginados estendendo-se em todas as direções e sem espessura.

Quadro 4: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 1.

LIVRO 2: PNLD 1999 (corresponde ao triênio 1999 – 2000 – 2001)

- MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA (5ª série – ensino fundamental) – Jakubo, Centurión e Lellis. São Paulo: Scipione, 1999.

ENTES PRIMITIVOS DA GEOMETRIA	LIVRO 2 MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA (5ª série – ensino fundamental) – Jakubo, Centurión, Lellis. São Paulo: Scipione, 1999.
PONTO	- O cubo: A intersecção de três faces tem em comum um ponto. Os pontos são tão pequenos que não chegam a ter tamanho algum. Para representar um ponto fazemos uma marca bem pequena no papel.
RETA	- O segmento de reta comum a duas faces de um cubo quando prolongado indefinidamente nas duas extremidades. As retas não têm largura.
PLANO	-Prolongando indefinidamente uma face de um cubo em todas as direções.

Quadro 5: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 2.

LIVRO 3: PNLD 2002 (corresponde ao triênio 2002 – 2003 – 2004)

- APRENDENDO MATEMÁTICA (5ª série) – José Ruy Giovanni e Eduardo Parente, São Paulo: FTD, 2002.

	LIVRO 3
ENTES PRIMITIVOS DA GEOMETRIA	-APRENDENDO MATEMÁTICA (5ª série) – José Ruy Giovanni e Eduardo Parente, São Paulo: FTD, 2002.
PONTO	- A marca feita pela ponta de um lápis, o furo feito por uma agulha, a localização de uma cidade em um mapa nos dá a ideia de ponto.
RETA	- Imaginando-se um raio de luz, o encontro de duas paredes ou um barbante bem esticado prolongado indefinidamente temos a ideia de reta.
PLANO	- Imaginando-se o tampo de uma mesa, a superfície de uma parede bem lisa prolongados indefinidamente temos a ideia de ponto.

Quadro 6: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 3.

LIVRO 4: PNLD 2005 (corresponde ao triênio 2005 – 2006 – 2007)

- TUDO É MATEMÁTICA (5ª série) – Luiz Roberto Dante, São Paulo: Ática, 2005.

ENTES PRIMITIVOS DA GEOMETRIA	<u>LIVRO 4</u> TUDO É MATEMÁTICA (5ª série) – Luiz Roberto Dante, São Paulo: Ática, 2005.
PONTO	- O centro do campo de futebol, por exemplo, nos dá ideia de ponto.
RETA	- Observe, na figura do campo de futebol, as partes que aparecem em azul. Cada uma delas dá a ideia de mais uma figura geométrica: o segmento de reta. Pense agora em um segmento de reta AB que se prolonga indefinidamente nos dois sentidos. A figura correspondente é uma reta.
PLANO	- Imagine o piso do campo se expandindo indefinidamente em todas as direções e você terá a ideia do que seja um plano.

Quadro 7: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 4.

LIVRO 5: PNLD 2008 (corresponde ao triênio 2008 – 2009 – 2010)

- MATEMÁTICA: Imenes e Lellis 6º ano. Luis Márcio Imenes, Marcelo Lellis. São Paulo: Moderna, 2008.

	LIVRO 5
ENTES PRIMITIVOS DA GEOMETRIA	MATEMÁTICA: Imenes e Lellis 6º ano. Luis Márcio Imenes, Marcelo Lellis. São Paulo: Moderna, 2008.
PONTO	- Não aborda o conceito de forma explícita.
RETA	- Não aborda o conceito de forma explícita.
PLANO	- Não aborda o conceito de forma explícita.

Quadro 8: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 5.

LIVRO 6: PNLD 2011 (corresponde ao triênio 2011 – 2012 – 2013)

- MATEMÁTICA: BIANCHINI (6º ano) – Edwaldo Bianchini. São Paulo: Moderna, 2011.

ENTES PRIMITIVOS DA GEOMETRIA	LIVRO 1 MATEMÁTICA: BIANCHINI (6º ano) – Edwaldo Bianchini, São Paulo: Moderna, 2011.
PONTO	<p>- Noção aceita sem definição na Geometria, por isso é chamada noção primitiva. Pode ser associada, de maneira intuitiva, a diferentes objetos que nos rodeiam.</p> <p>Cada estrela que vemos no céu dá a ideia de ponto.</p>
RETA	<p>- Noção aceita sem definição na Geometria, por isso é chamada noção primitiva. Pode ser associada, de maneira intuitiva, a diferentes objetos que nos rodeiam.</p> <p>Um raio de luz dá a ideia de uma reta.</p>
PLANO	<p>- Noção aceita sem definição na Geometria, por isso é chamada noção primitiva. Pode ser associada, de maneira intuitiva, a diferentes objetos que nos rodeiam.</p> <p>O espelho d'água de um lago dá a ideia de um plano.</p>

Quadro 9: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 6.

LIVRO 7: PNLD 2014 (corresponde ao triênio 2014 – 2015 – 2016)

- PROJETO TELÁRIS: MATEMÁTICA 6 (6º ano) – Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2014.

	LIVRO 7
ENTES PRIMITIVOS DA GEOMETRIA	PROJETO TELÁRIS: MATEMÁTICA 6 (6º ano) – Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2014.
PONTO	- O centro do campo de futebol nos dá a ideia de ponto.
RETA	- O segmento de reta representado pela largura do campo, prolongado nos dois sentidos.
PLANO	- O gramado (ou piso) do campo se expandindo em todas as direções.

Quadro 10: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 7.

LIVRO 8: PNLD 2017 (corresponde ao triênio 2017 – 2018 – 2019)

- Vontade de saber Matemática - Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro. São Paulo: FTD, 2017.

	<u>LIVRO 8</u>
ENTES PRIMITIVOS DA GEOMETRIA	Vontade de saber Matemática. Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro. São Paulo: FTD, 2017
PONTO	- Uma parte da reta compreendida entre dois de seus pontos é chamado segmento de reta.
RETA	- A reta é uma linha que não tem começo nem fim, ou seja não tem extremidades.
PLANO	- O livro não apresenta o conceito de forma explícita.

Quadro 11: Conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 8.

4.2 Discussões dos conceitos de ponto, reta e plano nos livros didáticos de matemática da 5ª série e do 6º ano do ensino fundamental

Finalmente, enquanto o saber científico é validado pelos paradigmas da área, o saber escolar está sob o controle de um conjunto de regras que condiciona as relações entre professor, aluno e saber” (PAIS, 2015, p.22).

Nesta seção, serão realizadas as discussões e ou/comentários sobre os conceitos de ponto, reta e plano abordados nos oito livros didáticos de matemática da 5ª série e do 6º ano do ensino fundamental. Para uma melhor compreensão desta análise, também são apresentados diversos conceitos, com a finalidade de dar suporte a essas discussões e ou/comentários.

Nas sete primeiras definições do livro I da tradução - Os Elementos de Euclides – realizada por Bicudo (2009, p. 97), que é uma tradução mais recente em português da obra de Euclides, tem-se as definições do ponto, da reta e do plano:

- Ponto é aquilo de que nada é parte.
- E linha é comprimento sem largura.
- E extremidades de uma linha são pontos.
- E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
- E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
- E extremidades de uma superfície são retas.
- Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.

Como já foi mencionado, na teoria da Transposição Didática de Chevallard (1991), ele faz a distinção entre os saberes, isto é, saber científico, saber a ensinar e saber escolar. No Quadro 12 são elencados estes conceitos e outros conceitos relevantes para as discussões e ou/comentários nos livros didáticos analisados neste estudo.

CONCEITO	O QUE SIGNIFICA
<i>O saber científico:</i>	- corresponde ao saber produzido pelos cientistas, na comunidade científica.
<i>O saber a ensinar</i>	- é o saber pensado e selecionado pelo ambiente que ele chamou de Noosfera (MEC, secretarias de educação, autores de livros didáticos, etc.). Em nosso caso, correspondendo aos livros didáticos de matemática.
<i>O saber escolar</i>	- este saber está diretamente ligado aos livros didáticos, que se apresentam de forma organizada, por meio de capítulos, os conteúdos que irão ser trabalhados nos respectivos anos escolares.
<i>O saber ensinado</i>	- corresponde ao resultado do trabalho do professor em sala de aula.
Abstração	- é operação mediante a qual alguma coisa é escolhida como objeto de percepção, atenção, observação, consideração, pesquisa, estudo etc., e isolada de outras coisas com que está numa relação qualquer (ABBAGNANO, 2012, p. 36).
Conceito	- todo processo que possibilita a descrição, a classificação e a previsão dos objetos cognoscíveis, ou seja, são todos os objetos que se pode conhecer (DUROZOI, 1993, p. 26).
Ideia	- um objeto qualquer do pensamento, isto é, como uma representação em geral (ABBAGNANO, 2012, p. 40).
Imaginação	- é a possibilidade de evocar ou produzir imagens, independente da presença do objeto a que se referem (ABBAGNANO, 2012, p. 45).
Noção	- dois significados fundamentais: um muito geral, em que noção é qualquer ato de operação cognitiva, e outro específico, em que é uma classe de atos ou operações cognitivas (DUROZOI, 1993, p. 36).

Quadro 12: Conceitos relevantes para a análise dos livros didáticos.

Tomando como base a Teoria da transposição Didática de Yves Chevallard (1991), “o saber científico”, em nosso estudo, corresponde aos conceitos de ponto, reta e plano originários da comunidade científica.

É relevante destacar que os conceitos de ponto, reta e plano oriundos do trabalho de Euclides, Os Elementos, foram escritos há aproximadamente 300 a.C. e, uma vez que este trabalho foi bastante revisado, como já discutido anteriormente, deve ser considerado o lapso temporal dessa obra até os dias atuais.

Considerando este fato, o saber científico no qual nos referimos, conseqüentemente, se encontra disseminado nesse emaranhado de revisões e estudos realizados sobre esta obra, neste sentido, foram realizadas estas breves discussões sobre o assunto.

Segundo Cajori (2007, p. 46): uma das revisões que merece destaque é a de Théon de Alexandria, por ser considerada a revisão que deu origem ao que basicamente se utiliza nos livros didáticos de Matemática. Nessa época, as pessoas que faziam revisões eram chamadas de comentaristas, isto é, faziam comentários sobre uma determinada obra.

De acordo com Ávila (1992, p. 18), o livro de Euclides “faz uma apresentação admiravelmente bem-feita da Geometria, tudo muito organizado na roupagem da lógica”. As proposições (hoje chamadas de teoremas) são os resultados e cada uma das proposições são demonstradas baseadas em proposições precedentes. Ainda, segundo Ávila (Revista do Professor de Matemática n. 22, 1992, p. 18), “cada proposição depende de alguma ou várias das anteriores, de sorte que, para o processo ter começo, é preciso formular algumas proposições iniciais que ficam sem demonstrações”. Essas proposições iniciais não demonstradas são chamadas de postulados ou axiomas.

Em sua obra – Os Elementos - Euclides formulou cinco postulados:

1. Por dois pontos passa uma reta e somente uma.
2. A partir de qualquer ponto de uma dada reta é possível marcar um segmento de comprimento dado sobre a reta dada.
3. É possível descrever um círculo de centro e raios dados.
4. Todos os ângulos retos são iguais. (Euclides define “ângulo reto” como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais).
5. Postulado de Euclides: Se uma reta t corta duas outras r e s (todas num mesmo plano) de modo que um dos pares de ângulos colaterais internos tem soma inferior a dois ângulos retos, então as retas r e s , quando prolongadas suficientemente, se cortam do lado de t em que se encontram os referidos ângulos colaterais internos.

(ÁVILA, 1992, p. 18).

Muitos matemáticos tentaram demonstrar o postulado das paralelas, também conhecido como o 5º postulado de Euclides, porém não obtiveram êxito. Segundo Ávila (1992, p. 26), “embora a visualização geométrica seja um poderoso auxiliar no aprendizado da Geometria, ela pode, muitas vezes, nos levar a conclusões ou raciocínios falsos.” Dentre os vários matemáticos que cometeram equívocos, vamos destacar Girolano Saccheri (1667-1733). Ele também foi um dos estudiosos que tentou demonstrar o postulado das paralelas sem conseguir êxito.

Por causa dos erros encontrados na demonstração do postulado das paralelas, segundo Ávila (1992, p. 27): “os matemáticos começaram a perceber que estavam sendo mal guiados pela maneira como os entes geométricos – principalmente a linha reta – vinham sendo visualizados ao longo dos séculos”. Estes estudiosos conseguiram perceber que “essa visualização era apenas um modo de ser desses entes”. Ainda de acordo com Ávila (1992, p. 27): “outros modelos deveriam existir, obedecendo os mesmo quatro primeiros postulados de Euclides, mas não ao quinto. Assim, nasceram as chamadas geometrias não euclidianas”.

O ilustre matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) desenvolveu várias pesquisas importantes em Matemática pura e aplicada. Segundo Ávila (Revista do Professor de Matemática n. 22, 1992, p. 17), seu nome está ligado tanto a questões de Astronomia, Mecânica e Física Matemática, como de Análise, Equações Diferenciais e Teoria dos números.

Ainda, segundo Ávila, Legendre foi um cientista de grande mérito e também um “autêntico professor”, que se preocupava até mesmo com questões de ensino elementar:

Neste domínio seu trabalho mais importante foi um livro chamado *Éléments de Géométrie*, publicado no final do século XVIII e que dominaria o ensino de Geometria por cerca de 100 anos. Esse livro ficou muito popular, pois era bem mais acessível aos estudantes que o antigo e difícil tratado original de Euclides. Tanto assim que o livro de Legendre, além de usado nas escolas francesas, foi traduzido em vários outros países, inclusive no Brasil, onde foi largamente usado, alcançando mais de 25 edições (ÁVILA, Revista do Professor de Matemática n. 22, 1992, p. 17).

Vários matemáticos como Saccheri e Legendre foram estimuladores dos estudos críticos dos fundamentos da Geometria, da Análise e de outros domínios da Matemática. Porém, no campo da Geometria, foi David Hilbert (1862 – 1943) quem culminou esses estudos publicando o livro intitulado de *Fundamentos da Geometria*. Segundo Ávila (Revista do Professor de Matemática, n. 22, 1992, p. 27): “foi o primeiro trabalho bem - acabado sobre a organização axiomática da Geometria” (VIDE ANEXO – J, p. 150).

Hilbert e outros matemáticos do século passado acabaram descobrindo que a obra de Euclides, não obstante sua admirável estrutura e organização, continha várias falhas: muitas das demonstrações estavam incompletas, por se apoiarem frequentemente na visualização geométrica e não apenas nos postulados, como deveria ser. Mais ainda, constataram que os cinco postulados de Euclides eram insuficientes, e muitos outros seriam necessários para construir o edifício da Geometria (GERALDO ÁVILA, RPM nº 22, p. 27).

A Geometria só passa a ser estudada na escola secundária (educação básica) a partir do século XX, antes era estudada exclusivamente nas universidades, como relatado por Berlinghoff & Gouvêa:

No século XX, o ensino da geometria migrou das universidades para as escolas secundárias. A “demonstração em duas colunas”, em que cada passo na coluna da esquerda precisa ser justificado pôr uma razão na coluna da direita, parece ter sido inventada no início do ano de 1900. No entanto, sua estrutura rígida levava com demasiada frequência os estudantes a “aprender” as demonstrações de cor, memorizando sem entender o argumento ou o significado. Como resultado, muitos estudantes consideravam a geometria na escola secundária como um ritual, penoso, irrelevante, sem conexão com o “mundo real” (BERLINGHOFF & GOUVÊA, 2010, p. 163).

Com essas reflexões até aqui realizadas e com a análise dos livros didáticos de matemática, tendo como suporte a teoria da Transposição Didática

de Chevallard (1991), podemos sinalizar a existência do saber científico e do saber escolar, em nosso caso, relacionados aos entes primitivos da Geometria - ponto, reta e plano. O saber científico surge na obra de Euclides, já saturado para pesquisa matemática por ter suas definições e suas propriedades delimitadas e imutáveis. Entretanto, esse saber se transformou em saber escolar nas condições expostas por Valente & Leme:

Assim sendo, podemos evidenciar as diferenças entre dois saberes, um saber científico – e no caso da geometria euclidiana, um saber já morto para a pesquisa matemática – com definições, propriedades delimitadas, imutável; e um saber escolar, fruto de interações, apropriações das diferentes culturas escolares. (VALENTE & LEME, Revista Educação em Questão v. 47, n. 33, p. 196).

Na teoria da Transposição Didática existe referência a uma transposição didática externa e uma transposição interna, sendo esta última relacionada com o trabalho realizado pelo professor em sala de aula. Com a Teoria Antropológica do Didático, Chevallard amplia a discussão e insere o conceito de instituições, para Chevallard o saber escolar está diretamente ligado aos livros didáticos, que se apresentam de forma organizada, por meio de capítulos, os conteúdos que irão ser trabalhados nos respectivos anos escolares, em nosso caso específico, correspondendo aos livros didáticos de matemática. Com relação a geometria escolar, Valente e Leme escreveram:

A geometria escolar, relativamente à geometria euclidiana, armazenada nos Elementos, tem características distintas, ela se transforma e se recria a cada momento histórico. As legislações impostas, os métodos pedagógicos em circulação, a presença ou ausência de materiais didáticos, os manuais didáticos de orientação de seu ensino para professores são elementos que integram o processo contínuo de produção da geometria escolar em cada tempo. O conjunto desses elementos dá forma e significado à geometria escolar (VALENTE & LEME, p. 196).

Os livros didáticos de Matemática analisados nos remetem a certas reflexões, podendo-se perceber que os conceitos - ponto, reta e plano - abordados nestes livros, não estão relacionados com o encadeamento lógico - dedutivo da Geometria surgido na época de Euclides, mas sim com os avanços dos estudos da Geometria na comunidade científica:

Nenhum texto didático escrito para alunos de um Estado brasileiro ou escrito para ser usado em todo país é dirigido especificamente para o leitor que dele se utiliza. Os livros didáticos ou paradidáticos são produzidos em quantidade e se destinam a alunos de uma determinada série, mas é impossível para os autores conhecer as características e particularidades específicas de seu leitor. A situação é claramente diferente quando se refere a uma revista. A compra dela não é imposta, e quem a lê pode selecionar matérias que mais lhe agrada ou compreende melhor (ANTUNES, 2012, p. 15).

Nos livros didáticos de Matemática da 5ª série e do 6º ano do ensino fundamental, para cada livro didático analisado, foi construído um quadro contendo os conteúdos geométricos abordados nesses livros, isto é:

Quadro 13 correspondendo aos conteúdos geométricos do LIVRO 1.

Quadro 14 correspondendo aos conteúdos geométricos do LIVRO 2.

Quadro 15 correspondendo aos conteúdos geométricos do LIVRO 3.

Quadro 16 correspondendo aos conteúdos geométricos do LIVRO 4.

Quadro 17 correspondendo aos conteúdos geométricos do LIVRO 5.

Quadro 18 correspondendo aos conteúdos geométricos do LIVRO 6.

Quadro 19 correspondendo aos conteúdos geométricos do LIVRO 7.

Quadro 20 correspondendo aos conteúdos geométricos do LIVRO 8.

LIVRO 1: MATEMÁTICA IDEIAS E DESAFIOS (5ª série) – Iracema More e Dulce Satiko Onaga, São Paulo: Saraiva, 1996.

Este exemplar é um livro muito bem ilustrado, constituído de doze capítulos, o qual o décimo primeiro trata da Geometria, conforme descrito no quadro abaixo:

Nome da Unidade	Conteúdo trabalhado
11 Geometria – Introdução	<ul style="list-style-type: none"> • Figuras geométricas; • Conceitos fundamentais; • Retas e partes da reta; • Retas no plano; • Ângulos; • Polígonos.

Quadro 13: Conteúdo de Geometria no LIVRO 1.

No LIVRO 1 os conceitos de ponto, reta e plano são abordados como ideais, as autoras não deixam explicitado que esses conceitos não podem ser definidos. Essas ideias apresentadas pelas autoras são exemplificadas através da ilustração de várias figuras. O livro também faz alusão ao uso da imaginação para se conseguir evocar ou produzir as imagens desses objetos geométricos. Segundo Abbagnano (2012, p. 45), imaginação entendida como a possibilidade de evocar ou produzir imagens, independente da presença do objeto a que se referem.

De acordo com as autoras More & Onaga (1996, p. 222 – 223 - 224): “o ponto é uma ideia, como por exemplo uma estrela no céu ou grão de areia ou a marca da ponta de um lápis no papel”. As retas são imaginadas sem começo, sem fim e sem espessura, e as autoras definem retas como: “um raio de sol, um fio de linha esticado nos dão ideia de uma reta”. Os planos são imaginados estendendo-se em todas as direções e sem espessura. Com relação ao plano, as autoras escreveram: “a superfície de uma foto, a superfície da capa de um livro nos dão ideia de uma parte de um plano”. (VIDE ANEXO – B, p. 124).

Percebe-se que para a abordagem dos conceitos dos entes primitivos da Geometria nesse exemplar de livro didático do ano de 1996, as autoras recorrem ao uso da ideia e da imaginação, utilizando exemplos de objetos reais, procurando fazer a ligação entre esses objetos reais e os objetos geométricos. Uma questão oportuna para ser enfatizada nessa discussão consiste em o livro não fazer referência que não se pode confundir o objeto representado com o objeto geométrico em si. Por exemplo, uma estrela no céu é apenas uma representação do objeto geométrico ponto, portanto, uma estrela no céu não é um ponto, mas apenas a sua representação. Segundo Gonçalves Júnior (2000, p. 11): Não se deve confundir um objeto geométrico com sua representação gráfica. Por exemplo, uma pequena marca de tinta não é um ponto, mas apenas o representa. A representação consiste, de acordo com Amora (2001, p.630), na reprodução do que se imagina.

LIVRO 2: MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA (5ª série – ensino fundamental) – Jakubo, Centurión e Lellis. São Paulo: Scipione, 1999.

Este exemplar pertence ao PNLD 1999 e apresenta a parte da Geometria no seu segundo capítulo. Apresenta bastante ilustrações, principalmente de figuras geométricas, e é apresentado conforme o quadro a seguir:

Nome da Unidade	Conteúdo trabalhado
2. Geometria	<ul style="list-style-type: none"> • Geometria; • Ângulos • Polígonos: triângulos, quadriláteros e pentágonos • Figuras planas mais comuns • Quebra – cabeça: ação sobre composição e decomposição de figuras planas • Figuras espaciais mais comuns.

Quadro 14: Conteúdo de Geometria no LIVRO 2.

No LIVRO 2, o conceito de ponto é apresentado por meio da intersecção das três faces de um cubo, pressupondo que os alunos já tenham conhecimento dessa figura geométrica. O conceito de reta é dado como sendo o prolongamento indefinidamente do segmento de reta formado por duas faces comuns de um cubo e, para o plano, é dado como o prolongamento da face de um cubo em todas as direções.

Com essa abordagem, os autores pretendem que o aluno faça a associação entre os elementos do cubo com os objetos geométricos: o ponto, a reta e o plano. Eles não fazem menção ao uso da imaginação, porém com essa abordagem, fica implícito que, para entender os conceitos desses entes primitivos da Geometria, o aluno necessita fazer uso da imaginação. Os autores também não mencionam que os entes primitivos da Geometria não podem ser definidos; esses objetos são apresentados como parte integrante do cubo. Como no LIVRO 1, esse livro não faz referência da necessidade de não se confundir a representação com os objetos geométricos.

Segundo Jakubo, Centurión & Lellis (1999, p. 58), a Geometria é a parte da Matemática que estuda as figuras e suas propriedades. A Geometria estuda figuras abstratas de uma perfeição não existente na realidade. Entende-se abstrato segundo Amora (2001, p. 6), como o que indica uma qualidade fora do objeto a que pertence ou o que se considera só no campo das ideias.

Os autores utilizam objetos reais tais como: o aro da cesta de basquete (sugere uma circunferência), portas e janelas (sugerem retângulos) e o dado (sugere um cubo) para se ter uma boa ideia das figuras geométricas. A figura do dado (VIDE ANEXO - C, p. 128), representando o cubo, dá o suporte para a abordagem dos conceitos de ponto, reta e plano.

LIVRO 3: APRENDENDO MATEMÁTICA (5ª série) – José Ruy Giovanni e Eduardo Parente, São Paulo: FTD, 2002.

Neste exemplar que faz parte do PNLD 2002, os autores apresentam os conteúdos de geometria, com bastante ilustrações, na segunda e sexta unidades do livro, de acordo com o quadro abaixo:

Nome da Unidade	Conteúdo trabalhado
2 Percepção geométrica	<ul style="list-style-type: none"> • Trabalhando com figuras geométricas espaciais; • Os sólidos geométricos; • Explorando alguns sólidos geométricos • Trabalhando com figuras geométricas planas; • O ponto, a reta e o plano; • Revisão; • Auto avaliação.
6 Geometria: conceitos fundamentais e construções	<ul style="list-style-type: none"> • Segmento de reta: medida de um segmento, segmentos congruentes; • A semirreta e a reta: retas perpendiculares e retas paralelas, traçando curvas com linhas retas; • Simetria; • Ângulos: medindo ângulos, ângulos: reto, agudo e obtuso; • Polígonos; • Circunferência; • Revisão; • Auto avaliação.

Quadro 15: Conteúdo de Geometria no LIVRO 3.

É na unidade 2 com o título de Percepção geométrica, que os autores abordam o trabalho com figuras geométricas espaciais (reconhecer os principais sólidos geométricos, identificar faces, arestas e vértices de sólidos geométricos, desenhar os principais sólidos geométricos) e também trabalham com figuras geométricas planas (identificar ponto, reta e plano, como ideias intuitivas, reconhecer quando uma figura geométrica é plana ou não, identificar e desenhar vistas de frente, de e de cima de sólidos).

Segundo Giovanni & Parente (2002, p. 50) os conceitos básicos da Geometria (o ponto a reta e o plano) são primitivos, criados por nossa imaginação e, por isso, não podem ser definidos formalmente. Para esses mesmos autores, esses conceitos podem ser formados intuitivamente por nós, segundo Amora (2001, p. 399) intuição é: “o discernimento à primeira vista ou a percepção clara e pronta sem a necessidade da intervenção do raciocínio”, ou seja, os autores pressupõem que os alunos podem estabelecer esses conceitos intuitivamente. Ainda, segundo os autores esses conceitos de ponto, reta e plano são abordados também como ideia, no sentido de um objeto qualquer do pensamento.

Neste livro, os autores deixam bem claro que os conceitos primitivos da Geometria (ponto, reta e plano) não podem ser definidos por se tratarem de objetos criados por nossa imaginação, eles também utilizam figuras para a representação dos objetos geométricos (VIDE ANEXO D, p. 132).

LIVRO 4: TUDO É MATEMÁTICA (5ª série) – Luiz Roberto Dante, São Paulo: Ática, 2005.

Neste exemplar pertencente ao PNLD 2005, o autor traz os conteúdos de geometria distribuídos nos capítulos 4 e 8, conforme o quadro a seguir.

Nome da Unidade	Conteúdo trabalhado
4 Geometria: sólidos geométricos, regiões planas e contornos	<ul style="list-style-type: none"> • Introdução; • Figuras geométricas: uma primeira classificação; • Classificação dos sólidos geométricos; • Elementos de um poliedro: vértice, face e aresta; • As três dimensões do bloco retangular; • Os prismas e as pirâmides; • Os principais corpos redondos; • Regiões planas; • Contornos importantes; • Classificação dos contornos; • Simetria; • Revisão cumulativa; • Para ler, pensar e divertir-se.
8 Geometria: ângulos, polígonos e circunferências	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Introdução;</i> • <i>As primeiras figuras;</i> • <i>Ângulos;</i> • <i>Construção com régua e esquadro;</i> • <i>Polígonos;</i> • <i>Circunferências.</i>

Quadro 16: Conteúdo de Geometria no LIVRO 4.

O LIVRO 4 também aborda os conceitos de ponto, reta e plano como ideias. O autor deste livro utiliza, para o ponto, a figura do centro de um campo de futebol. A reta é apresentada da seguinte maneira, segundo Dante (2005, p. 188): “observe, na figura do campo de futebol, as partes que aparecem em azul. Cada uma delas dá a ideia de mais uma figura geométrica: o segmento de reta.

Pense agora em um segmento de reta AB que se prolonga indefinidamente nos dois sentidos. A figura correspondente é uma reta”. E para o plano, também é utilizada a figura do campo de futebol. A ideia do plano surge da imaginação do piso do campo se expandindo indefinidamente em todas as direções (VIDE ANEXO E, p. 135).

No livro não é explicitado que o ponto, a reta e o plano não podem ser definidos, como também não se deve confundir a representação do objeto geométrico com o objeto real. Percebe-se também nessa abordagem que autor se utiliza de objetos reais para nos dar a ideia dos objetos imaginários.

LIVRO 5 : MATEMÁTICA: Imenes e Lellis 6º ano. Luis Márcio Imenes, Marcelo Lellis. São Paulo: Moderna, 2008.

Neste exemplar pertencente ao PNLD 2008, os autores apresentam três unidades envolvendo os conteúdos geométricos, que são distribuídos nos capítulos 2, 4 e 7, conforme o quadro a seguir:

Nome da Unidade	Conteúdo trabalhado
2 Formas tridimensionais	<ul style="list-style-type: none"> • Prismas e pirâmides; • Cilindro, cone e esfera.
4 Formas planas	<ul style="list-style-type: none"> • Giros, cantos e ângulos; • Perpendiculares e paralelas; • Mosaicos e polígonos; • Quadriláteros.
7 Construções geométricas	<ul style="list-style-type: none"> • Construções em papel quadriculado; • Construções com régua e esquadro; • Construções com régua e compasso.

Quadro 17: Conteúdo de Geometria no LIVRO 5.

No LIVRO 5, os conceitos de ponto, reta e plano não são abordados de uma forma explícita; conseqüentemente, também não é explicitado que esses conceitos não podem ser definidos.

O livro aborda os conteúdos geométricos, sem fazer menção de forma específica ao ponto, a reta e o plano. No subtítulo do capítulo quatro do livro, intitulado de Perpendiculares e paralelas esses conceitos são apresentados como partes integrantes de outras figuras. Segundo Imenes & Lellis (2008, p. 76): “nesses desenhos, é comum o traçado de linhas retas e perpendiculares e o de linhas retas paralelas. Vamos aprender a desenhá-las usando esquadro e régua”, também são apresentados alguns desenhos e o roteiro para a construção dessas linhas utilizando o compasso e a régua, conforme demonstra a figura 12:

Em Imenes & Lellis (2008, p. 77), encontramos também: “Duas retas paralelas nunca se encontram. Elas mantem sempre uma mesma distância.”

Observe que as retas s, t e u são paralelas entre si e oblíquas em relação a r.

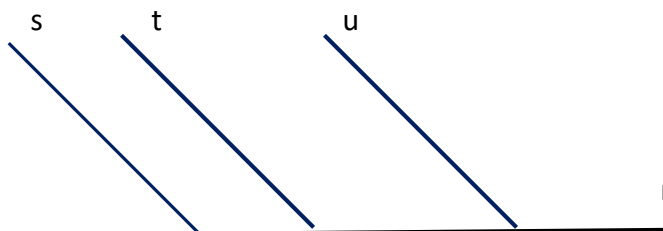


Fig. 12: Retas paralelas

Fonte: Imenes & Lellis (2008, p. 77).

Os autores, apesar de fazerem uso do ponto, da reta e do plano não tem a preocupação de mostrar, em seu livro, que esses entes são a origem da Geometria Plana, que não podem ser definidos e diferentemente dos outros livros não se utilizam da imaginação para a abordagem destes conceitos. (VIDE ANEXO F, p. 138).

LIVRO 6: MATEMÁTICA: BIANCHINI (6º ano) – Edwaldo Bianchini. São Paulo: Moderna, 2011.

Neste exemplar, que faz parte do PNL D 2011, os conteúdos geométricos também são contemplados com três unidades, distribuídas nos capítulos três, cinco e nove, de acordo com o quadro abaixo:

Nome da Unidade	Conteúdo trabalhado
3 Estudando figuras geométrica	<ul style="list-style-type: none"> • A Geometria na arte; • Um pouco de história; • As figuras planas e as não planas; • Os sólidos geométricos; • Corpos redondos e poliedros; • Conhecendo mais sobre poliedros; • Prismas, pirâmides; • Noções primitivas: o ponto, a reta e o plano; • Trabalhando a informação: construindo um gráfico de colunas.
5 Retas e ângulos	<ul style="list-style-type: none"> • Posições relativas de duas retas em um plano; • Semirreta; • Segmento de reta; • Ângulos: o ângulo e o giro, medida de um ângulo, construção de um ângulo com o transferidor, ângulo reto, ângulos agudo e obtuso, construção de retas perpendiculares. • Para saber mais: ilusão de óptica; • Diversificando.
9 Polígonos e poliedros	<ul style="list-style-type: none"> • Linhas poligonais: interior, exterior e convexidade; • Polígonos: elementos de um polígono, classificação dos polígonos; • Triângulos: classificação quanto aos lados, classificação quanto aos ângulos, construção de triângulos; • Quadriláteros; • Planificação dos poliedros

Quadro 18: Conteúdo de Geometria no LIVRO 6.

No LIVRO 6, de acordo com Bianchini (2011, p.86), os conceitos de ponto, reta e plano são abordados como noções primitivas que são aceitas sem definição. Segundo Abbagnano (2012, p. 59), noção tem dois significados fundamentais: um muito geral, em que noção é qualquer ato de operação cognitiva, e outro específico, em que é uma classe de atos ou operações cognitivas.

Segundo Bianchini (2011, p.86), essas noções podem ser associadas de maneira intuitiva a diversos objetos que nos rodeiam. Então, o autor associa o ponto a cada estrela no céu que vemos, a reta a um raio de luz e o plano ao espelho d'água de um lago (VIDE ANEXO - G, p. 141). O autor também utiliza associações entre os objetos reais com os objetos geométricos (ponto, reta e plano). O autor deixa explicitado que o ponto, a reta e o plano não podem ser definidos, no entanto não se preocupa com a questão de que não se pode confundir os objetos reais com os objetos geométricos.

LIVRO 7 :PROJETO TELÁRIS: MATEMÁTICA 6 (6º ano) – Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2014.

Neste exemplar pertencente ao PNLD 2014, os conteúdos geométricos são abordados em dois capítulos, conforme quadro a seguir:

Nome da Unidade	Conteúdo trabalhado
3 Geometria: sólidos geométricos, ângulos e polígonos	<ul style="list-style-type: none"> • Introdução • Sólidos geométricos • Ponto, reta e plano • Ângulos • Retas paralelas e retas concorrentes • Construções com régua e esquadro; • Regiões planas e contornos.
9 Perímetros, áreas e volumes	<ul style="list-style-type: none"> • Introdução; • Perímetro; • Medida de uma superfície: área de uma região plana; • Outras situações envolvendo perímetros e áreas; • Volume.

Quadro 19: Conteúdo de Geometria no LIVRO 7.

O LIVRO 7 apresenta um subtítulo especificamente com o nome de ponto, reta e plano, (VIDE ANEXO - H, p. 144). Esses conceitos são abordados como ideias, no sentido de um objeto qualquer do pensamento, isto é, como uma representação em geral. Segundo Dante (2014, p. 74), ao examinarmos o desenho de um campo de futebol com as linhas demarcatórias, podemos ter a ideia de várias figuras geométricas, entre elas: a de um ponto (o centro do campo) e a de um plano (o gramado ou piso do campo se expandindo indefinidamente em todas as direções).

Para a ideia de reta, o autor primeiramente apresenta o conceito de segmento de reta (por exemplo a linha que divide o campo ao meio). A reta se

apresenta como o prolongamento indefinidamente desse segmento de reta nos dois sentidos, conforme a figura 13.



Figura 13: Exemplo de segmento de reta no livro didático 7.

O autor deste livro também recorre ao uso da imaginação para a abordagem dos entes primitivos da Geometria, segundo Dante (2014, p. 74): “imagine o gramado (ou piso) do campo se expandindo indefinidamente em todas as direções e você terá a ideia de um plano”.

É interessante, neste livro, a ligação que autor faz dos objetos geométricos com objetos reais e pertencentes ao cotidiano do aluno, pois o campo de futebol é bastante conhecido por ser um dos esportes mais praticados no país. Porém, também neste exemplar de livro didático, não existe menção ao fato de que não deve confundir a representação dos objetos geométricos com os próprios objetos geométricos.

LIVRO 8: Vontade de saber Matemática - Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro. São Paulo: FTD, 2017.

Este livro didático de Matemática pertencente ao PNLD 2017 é iniciado com conteúdo de geometria e, nos capítulos 7 e 8, retoma com mais conteúdo de geometria, conforme o quadro abaixo:

Nome da Unidade	Conteúdo trabalhado
1 Formas geométricas espaciais	<ul style="list-style-type: none"> • As formas geométricas espaciais; • Poliedros e não poliedros; • Paralelepípedo e cubo; • Prisma e pirâmide; • Cone, cilindro e esfera; • Vistas; • Revisão; • ENEM e OBMEP.
7 ângulos e retas	<ul style="list-style-type: none"> • As ideias de ângulo; • Medindo ângulos; • Retas e Segmentos de reta; • Retas paralelas e concorrentes; • Revisão; • ENEM e OBMEP.
8 Polígonos, formas circulares e simetria	<ul style="list-style-type: none"> • Polígonos; • Triângulos; • Quadriláteros; • Formas circulares; • Figuras simétricas; • Revisão; • Resolvendo problemas; • ENEM e OBMEP.

Quadro 20: Conteúdo de Geometria no LIVRO 8.

O LIVRO 8 apresenta os conceitos de ponto, reta e plano de uma forma textual. Segundo Souza & Pataro (2017, p. 168), em Matemática, a reta é uma linha que não tem começo nem fim, ou seja, não tem extremidades. Para indicar uma reta, utilizamos letras minúsculas. Como exemplo, os autores colocaram uma figura com duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal, e nomearam as retas de r, s e t, conforme figura a seguir:

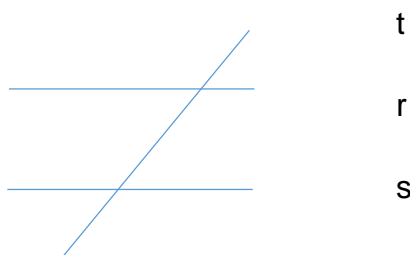


Figura 14: Exemplo de reta no LIVRO 8.

Entretanto, com relação ao objeto geométrico plano, o livro não faz nenhuma menção. Os autores deste livro não apresentam o conceito do ponto por meio de ideias, mas fazem menção ao ponto da seguinte maneira (2017, p. 168): “uma parte da reta compreendida entre dois de seus pontos é chamado segmento de reta”. Veja figura, a seguir:



Figura 15: Exemplo de segmento de reta no LIVRO 8.

A abordagem dos conceitos de ponto, reta e plano no LIVRO 8 apresenta uma concepção bem diferente dos livros anteriores, nesse livro não há uma referência direta aos entes primitivos, os autores simplesmente incorporam esses entes de uma forma que eles aparecem naturalmente nos conteúdos geométricos abordados, como bem exemplifica a Figura 18, conseqüentemente não há menção quanto a esses entes primitivos da geometria não poderem ser definidos (VIDE ANEXO - I, p. 147).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma vez que os chamados “elementos fundamentais da Geometria” – o ponto, a reta e o plano – são abstrações que se situam além das circunstâncias materiais, em muitos casos, as questões se baseiam na tentativa de estabelecer conexões entre os conceitos e entes geométricos e coisas concretas (como as superfícies da mesa, da bola, do para-lama, e da parede e os cabelos da cabeça), de modo a proporcionar uma “visualização” que contribua para a compreensão desse conceitos e entes (FONSECA et al..., 2009, p.84).

Esse estudo surgiu, como já mencionado, de minha vivência como professor de Matemática da educação básica em escolas públicas, particulares e como coordenador de biblioteca escolar, tendo tido sempre contato com os livros didáticos, principalmente com os livros didáticos da área de Matemática. Como coordenador de biblioteca, também mantive contato com os livros didáticos das outras áreas do conhecimento nos diversos anos de escolaridade. Com o ingresso no mestrado, o campo de pesquisa da dissertação foi o da Didática da Matemática; sendo mais específico, na área da Didática da Matemática de influência francesa.

A teoria da Transposição Didática do francês Yves Chevallard (1991) fez com que eu refletisse como os conceitos primitivos da Geometria – o ponto, a reta e o plano, que surgiram na obra de Euclides “Os Elementos”, escrita aproximadamente 300 a.C. – perpassaram através do tempo. A obra de Euclides passou por inúmeras revisões, estudos e edições. Então, o objetivo deste trabalho foi o de analisar, usando como embasamento a teoria acima mencionada, como esses conceitos são abordadas nos livros didáticos de Matemática da 5ª série e do 6º ano do ensino fundamental pertencentes ao Programa Nacional do livro Didático (PNLD), escritos a partir do ano de 1996, ano de implantação da nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (LDB/96).

Os oito livros didáticos analisados representam o saber escolar que, de acordo com Chevallard (1991), está ligado diretamente aos livros didáticos por meio de regras organizadas e que condicionam as relações entre o aluno, o professor e o saber. Segundo Valente & Leme (2013), é um saber escolar, fruto

de interações, apropriações das diferentes culturas escolares, ou seja, é a Geometria que se transforma e se recria a cada momento histórico.

Nesse aspecto, pontuamos a questão das abordagens dos conteúdos geométricos nos livros didáticos, no sentido da sua distribuição nos respectivos livros: no LIVRO 1, do ano de 1996, os conteúdos de Geometria são apresentados em único capítulo no final do livro; o LIVRO 2, do ano de 1999, traz os conteúdos geométricos em único capítulo, neste caso no primeiro capítulo; nos LIVROS 3 e 4, dos anos 2002 e 2005, respectivamente, estes conteúdos geométricos são contemplados em dois capítulos distribuídos no início e no meio dos livros. Os LIVROS 5 e 6, dos anos de 2008 e 2011, respectivamente, contemplam os conteúdos geométricos com 3 capítulos distribuídos ao longo do livro; os LIVROS 7 e 8 dos anos 2014 e 2017, respectivamente, trazem esses conteúdos em 2 capítulos distribuídos no início e final do livro.

Percebe-se então, mudanças na distribuição dos conteúdos geométricos nos livros didáticos de Matemática analisados, provavelmente essas mudanças se devam a uma nova visão dada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (LDB/96) e a implantação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), introduzidos a partir do ano de 1997. Esses parâmetros trouxeram uma nova concepção para a Geometria enfatizando a importância, dos conteúdos geométricos, a serem ensinados no ensino fundamental.

Geralmente, os autores dos livros didáticos analisados neste estudo seguem uma mesma linha em suas abordagens dos conceitos de ponto, reta e plano. Essas abordagens se referem a esses conceitos por meio de ideias que remetem ao uso da imaginação. Para as representações dessas ideias, dos objetos geométricos ponto, reta e plano, os autores destes livros didáticos utilizam outras figuras geométricas, tais como: o cubo, o círculo e o trapézio. Também são utilizadas figuras do cotidiano dos alunos como, por exemplo, carros, aviões, campos de futebol, relógios e etc. Vale ressaltar que as representações dessas ideias não podem ser confundidas com os próprios objetos geométricos, uma vez que esses entes se situam no âmbito da imaginação do indivíduo. Entretanto, os autores não informam nos livros essa

questão que é bastante pertinente para o estudo dos entes primitivos da geometria.

Dos livros analisados, apenas um autor se referiu ao ponto, reta e plano como noções primitivas. Segundo Bianchini (2011, p.86): “essas noções podem ser associadas de maneira intuitiva, a diversos objetos que nos rodeiam”. Então, o autor associa o ponto: cada estrela no céu que vemos nos dá a ideia de um ponto; a reta é associada da seguinte maneira: um raio de luz dá a ideia de uma reta e o plano é associado, assim: o espelho d’água de um lago dá a ideia de um plano. Esses conceitos são abordados pelos autores dos livros didáticos de matemática, de uma maneira, que talvez, possamos compreender como bastante uniforme.

O saber escolar, como foi discutido acima, é o saber que se encontra presente nos livros didáticos de Matemática, porém esse saber é, podemos assim dizer, derivado de um ou outro saber, isto é, o saber científico, que de acordo com Chevallard (1991), é o saber produzido pela comunidade científica.

Na obra de Euclides (Os Elementos), tomando como base a tradução de Bicudo (2009, p. 97), o ponto, a reta e o plano são apresentados como verdades iniciais por meio de definições e não estão associados a figuras que pudessem representar as ideias do que são um ponto, uma reta e um plano. Segundo Bicudo (2009, p. 97), temos: Ponto - Ponto é aquilo de que nada é parte. Reta - E a linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma. Plano - Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma. Também é necessário ressaltamos que antes da definição de reta, por exemplo, existem outras para embasar essa definição, segundo Bicudo (2009, p. 97), “E linha é comprimento sem largura. E extremidades de uma linha são pontos”.

Os livros didáticos se utilizam de vários conceitos e representações para as ideias de ponto reta e plano, também fazem uso da abstração, entende-se por abstrato segundo, Amora (2001, p. 6): “o que indica uma qualidade fora do objeto a que pertence ou o que se considera só no campo das ideias”. Para alguns autores esses conceitos podem ser formados intuitivamente, segundo Amora (2001, p. 399): “intuição é podemos ter uma percepção clara e pronta sem a necessidade da intervenção do raciocínio”.

O quarto postulado de Euclides diz que retas paralelas nunca se interceptam, desde a época da sua proposição esse postulado apresentou inúmeras dificuldades aos matemáticos e gerou polêmica, por conta disso muitos matemáticos tentaram evitar a sua utilização e até negá-lo. Só no século XIX foi que matemáticos como o francês Legendre (1752 – 1833), o alemão Gauss (1777 – 1855), o húngaro Bolyai (1802 – 1860), o alemão Riemann (1826 – 1866) e o russo Lobachevski (1792 – 1856) conseguiram demonstrar a sua validade. Entretanto, eles perceberam que suprimindo o quinto postulado de Euclides, poderiam surgir outras geometrias, chamadas de geometrias não Euclidianas.

Foi a partir do século XIX que se desenvolveram sistemas axiomáticos mais adequados à crescente exigência de rigor matemático. O sistema mais difundido e aceito é o que foi publicado por David Hilbert (1862-1943), matemático e filósofo alemão. Sua obra "Fundamentos da Geometria" (1899) está entre as maiores contribuições à Matemática do século XX.

Atualmente, o tratamento da Geometria precisa de três objetos, esses objetos não precisam ser definidos, são eles: ponto, reta e plano. Para expressar relações, temos três termos primitivos, que são: pertence, entre e congruente. O sistema axiomático de Hilbert apresenta cinco grupos de axiomas: (a) pertinência; (b) ordem; (c) congruência; (d) paralelismo; (e) continuidade e completividade linear. Ele não faz diferença entre axiomas e postulados, e não inclui definições.

Para Euclides temos que:

Ponto é o que não tem partes, o que não tem grandeza alguma.

- Reta é o comprimento sem largura
- Plano é o que tem comprimento e largura.

Para Hilbert temos que:

- Ponto, reta e plano são elementos considerados primitivos, são aceitos sem demonstração, não necessitam de definição.

Após essas discussões fica evidente que os conceitos – ponto, reta e plano, apesar de serem oriundos da obra de Euclides - Os Elementos - não são

abordados nos livros didáticos de matemática diretamente desta obra, mas de todo um processo histórico, envolvendo diversos matemáticos ao longo do tempo, de evolução da Geometria através dos tempos, que com certeza tem em David Hilbert um autor fundamental neste processo.

Tomando como base a importância encontrada no trabalho de Hilbert, em seu livro os Fundamentos da Geometria (1899), para a Geometria atualmente estudada, fica evidente a relevância desta tese no sentido de que ela além de contribuir com uma discussão bastante abrangente no campo da Geometria, também apresenta possibilidades de novos estudos e reflexões, como por exemplo, um aprofundamento nas contribuições de Hilbert para o campo da Geometria estudada nos dias de hoje.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. Tradução da 1ª edição brasileira coordenada e revisada por Alfredo Basi; revisão e tradução dos novos textos Ivone Castilho Benedetti – 6ª ed. – São Paulo, SP: Editora WMF Martins Fontes, 2012.

AG ALMOULOU, Saddo. **A didática da Matemática**. São Paulo: PUC, 1995.

BADEM, Enciclopédia. **Biblioteca auxiliar do estudante moderno**. São Paulo: Livraria Editora Itacema, 1985.

AMORA, Antônio Soares. **Minidicionário Soares Amora da língua portuguesa**. 10 ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

ARANHA, Maria Lúcia de Arruda. **História da educação**. São Paulo: Moderna, 1989.

ARAÚJO, Abraão Juvêncio de. **O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria Antropológica do Didático**. Recife – PE: UFRPE, 2009.

ARAÚJO, Cláudia A. C. de. **Operações com segmentos segundo Hilbert**. Revista do Professor de Matemática (RPM), nº 42. Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo: USP, 2000.

ARRUDA, Gracione Maia Pereira da Costa. **The contribution of Comenius to child's education**. 2007. 84 f. Dissertação (Mestrado em Religião). São Paulo: Universidade Presbiteriana Mackenzie, 2007.

ÁVILA, Geraldo. **Legendre e o postulado das paralelas**. Revista do Professor de Matemática (RPM), nº 22. Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo: USP, 1992.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. São Paulo: Blucher, 2010.

BIANCHINI, Edvaldo. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2006.

BICUDO, Irineu. **Os Elementos/Euclides**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2ª ed. – São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

BRASIL: MEC/FNDE. **Guia de livros didáticos ensino fundamental anos finais matemática**, PNDL 2017, Brasília - 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs): Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL: Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para dispor sobre a formação dos profissionais da educação e dar outras providências.

BRASIL, Ministério da Educação. Guia de Livros Didáticos – PNLD 2008 – Matemática, 2008.

BRASIL: MEC/FNDE. **Guia de livros didáticos ensino fundamental anos finais matemática**, PNDL 2017, Brasília - 2017.

BRASIL. Lei de diretrizes e bases da educação brasileira (LDB).

BRITO MENEZES, A. P. A. **Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª série do Ensino Fundamental**. Tese de Doutorado não publicada. Programa de Pós-graduação em Educação. Recife: UFPE, 2006.

BROUSSEAU, G. **Fondementes et méthodes de la didactique. Recherches em Didactique des Mathématiques**, n. 7. 2, 33 – 115. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1987.

CAJORI, Florian. **Uma história da Matemática**. (Tradução Lázaro Coutinho). Rio de Janeiro, RJ: Editora Ciência Moderna LTDA., 2007.

CELSO, Antunes. **O uso inteligente dos livros didáticos e paradidáticos**. São Paulo: Paulus, 2012.

CHEVALLARD, Y. *La Transposition Didactique*. Paris: Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Yves. **LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA: Del saber sábio al saber enseñado**. Buenos Aires, Argentina: Aique grupo Editor S.A., 1991.

CHEVALLARD, Yves. **La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique**. En R. Noirfalise y M-J. Perrin-Glorian (coord.), Actes de l'École d'Été de didactique des mathématiques (pp. 83-122). Saint-Sauves d'Auvergne, 1995.

CHERVEL, A. **La Culture Scolaire**. Paris, Editora Belin, 1990.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

D'AMORE, Bruno. **Elementos da Didática da Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática** (5ª série). São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **PROJETO TELÁRIS: MATEMÁTICA 6 (6º ano)** – São Paulo: Ática, 2014.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FNDE – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/homeindex?arquivo=livrodidatico.html>. Acesso em 20 fev. 2018.

FONSECA, Maria da Conceição F. R. et al. – 3 ed. **O ensino de geometria na escola fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais**. Belo Horizonte – MG: Autêntica Editora, 2009.

FREITAS, José Edson de Medeiros; BOTELHO, Carlos Alberto de Lima. Recife – PE: Edições Esuda, 1974.

GEORGES, Ifrhar. **Os números: história de uma grande invenção**. Tradução Stella Maria de Freitas Senra – 11. ed. – São Paulo: Globo, 2005.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. - 6. ed. - São Paulo: Atlas, 2008.

GIOVANNI, José Rui; PARENTE, Eduardo. **APRENDENDO MATEMÁTICA (5ª série)** – São Paulo: FTD, 2002.

GODOY, Arilda Schmidt Godoy. **Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais.** São Paulo - Brasil: Revista de Administração de Empresas / EAESP / FGV, 1995.

GONÇALVES, Oscar Júnior. **Matemática por assunto: geometria plana e espacial.** São Paulo: Editora Scipione, 2000.

GUIA DO LIVRO DIDÁTICO. **Guia de livros didáticos ensino fundamental anos finais matemática.** BRASIL: MEC/FNDE. PNDL 2017, Brasília - 2017.

GREENBERG, Marvin J. Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history. I. Title. QA445.G84, 1994.

IMENES, Luis Márcio; LELLIS, Marcelo. **MATEMÁTICA: Imenes e Lellis 6º ano.** São Paulo: Moderna, 2009.

JAKUBOVIC, José; MARCELO, Lelis; MARÍLIA Centuirón. **Matemática na medida certa, 5ª série.** São Paulo: Scipione, 1999.

LAJOLO, Marisa. **Livro didático: um (quase) manual de usuário.** Em aberto. Brasília, n. 69, v. 16, jan./mar. 1996.

LDB: Lei de diretrizes e bases da educação nacional. – Brasília: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2017, p. 58.

LEVI, Beppo. **Lendo Euclides: A matemática e a geometria sob um olhar renovador.** Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008.

LUDKE, M. et al. **A pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática ideias e desafios (5ª série).** São Paulo: Saraiva, 1998.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática ideias e desafios (6º ano).** São Paulo: Saraiva, 2012.

OLIVA, W. M. **A independência do axioma das paralelas e as Geometrias Não - Euclidianas**. Revista do Professor de Matemática (RPM), nº 2. Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo: USP, 1983.

OLIVEIRA, Marcilio Martins de Oliveira de. **O contrato didático: análise de contratos diferenciais dos professores de matemática em turmas do 7º ano do ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação. Recife: UFRPE, 2010.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses**. Recife: Edições Bagaço, 2003.

PACHECO, Franklin Fernando Ferreira et al....Uma análise em livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental acerca da proposta do ensino de polígonos sob a ótica da teoria de Van Hiele. Florianópolis (SC): REVEMAT v.12, n. 2, p. 115-115, 2017.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte, MG: Autênciã, 2002.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCNs): Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília:MEC/SEF, 1997.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Educação Matemática e sua influência no Processo de Organização e Desenvolvimento Curricular no Brasil**. Boletim de Educação Matemática, vol. 21, n. 29, pp. 13-42, 2008.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SELBACH, Simone. Matemática e didática. **Coleção como bem ensinar (coordenação Celso Antunes)**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

SCHUBRING, Gert. **Análise histórica de livros de Matemática: notas de aula.** (Tradução Maria Laura Magalhães Gomes). Campinas, SP: Autores Associados, 2003.

SILVA, B. A. **Contrato Didático/Educação Matemática: Uma Nova Introdução.** Anna Franchi... [et al]; organizadora: Silvia Dias Alcantara Machado. 3ª ed. Revista – São Paulo: EDUC, 2008.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. Noções primitivas de Geometria: ponto, reta e plano.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica.** Tradução Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

SOUZA, Joamir; PATARO, Patrícia Moreno. **Vontade de saber Matemática.** Joamir. São Paulo: FTD, 2017.

VAHL, Mônica Maciel and PERES, Eliane. **O programa do livro didático para o ensino fundamental (1971-1976).** *Cad. Pesqui.* [online]. 2017, vol.47, n.164, pp.562-585. ISSN 0100-1574. <http://dx.doi.org/10.1590/198053143792>.

VEIGA, Ilma Passos Alencastro. **Didática: O ensino e suas relações.** Campinas, SP: Papirus, 2003.

VALENTE, W. R. **Oswaldo Sangiorgi e o movimento da matemática moderna no Brasil.** In: Revista Diálogo Educativo. V. 8. N. 25. Curitiba – PR, 2008.

VALENTE, Wagner **Rodrigues. História da educação matemática: interrogações metodológicas.**2005.

VERGNAUD, G. (1990). **La théorie des champs conceptuels.** *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 10-23, 133-170.

ZILBERMAN, Regina. **A literatura infantil na Escola.** 11 ed. São Paulo: Global, 2003.

WALKER, Daniel. **Comenius: o criador da didática moderna.** Juazeiro do Norte - CE: HB Editora, 2001, p. 80.

_____. Aritmética e geometria nos anos iniciais: o passado presente. Revista Educação em Questão. Natal (RN), v. 47, N. 33, p. 178 – 206, set./dez. 2013.

ANEXOS

A - Recorte do artigo Jornal do Comércio: Recife - PE, 13 de agosto de 2014.

Disponível Guia de livros didáticos

Os professores do ensino médio já podem pesquisar os livros que vão escolher para uso nas escolas da rede pública a partir do próximo ano. O Guia de Livros Didáticos 2015, que contém resenhas e informações de cada uma das obras selecionadas para o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), está disponível no portal eletrônico do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE).

Os professores devem informar no sistema eletrônico do FNDE, no período de 22 de agosto a 1º de setembro, quais os livros escolhidos. Segundo a autarquia, com o guia em mãos, professores, diretores e coordenadores pedagógicos podem conhecer melhor os livros e selecionar os mais adequados ao método de ensino de cada escola.

Na hora da escolha, devem ser selecionadas duas opções de cada componente curricular, de editoras diferentes. Caso não seja possível a aquisição dos livros da primeira opção, o FNDE comprará as obras da segunda opção. Para facilitar, o FNDE disponibiliza em seu por-

tal uma série de documentos de apoio, como orientações para a escolha, compromissos da escola e normas de conduta.

Estima-se a compra de 90 milhões de exemplares

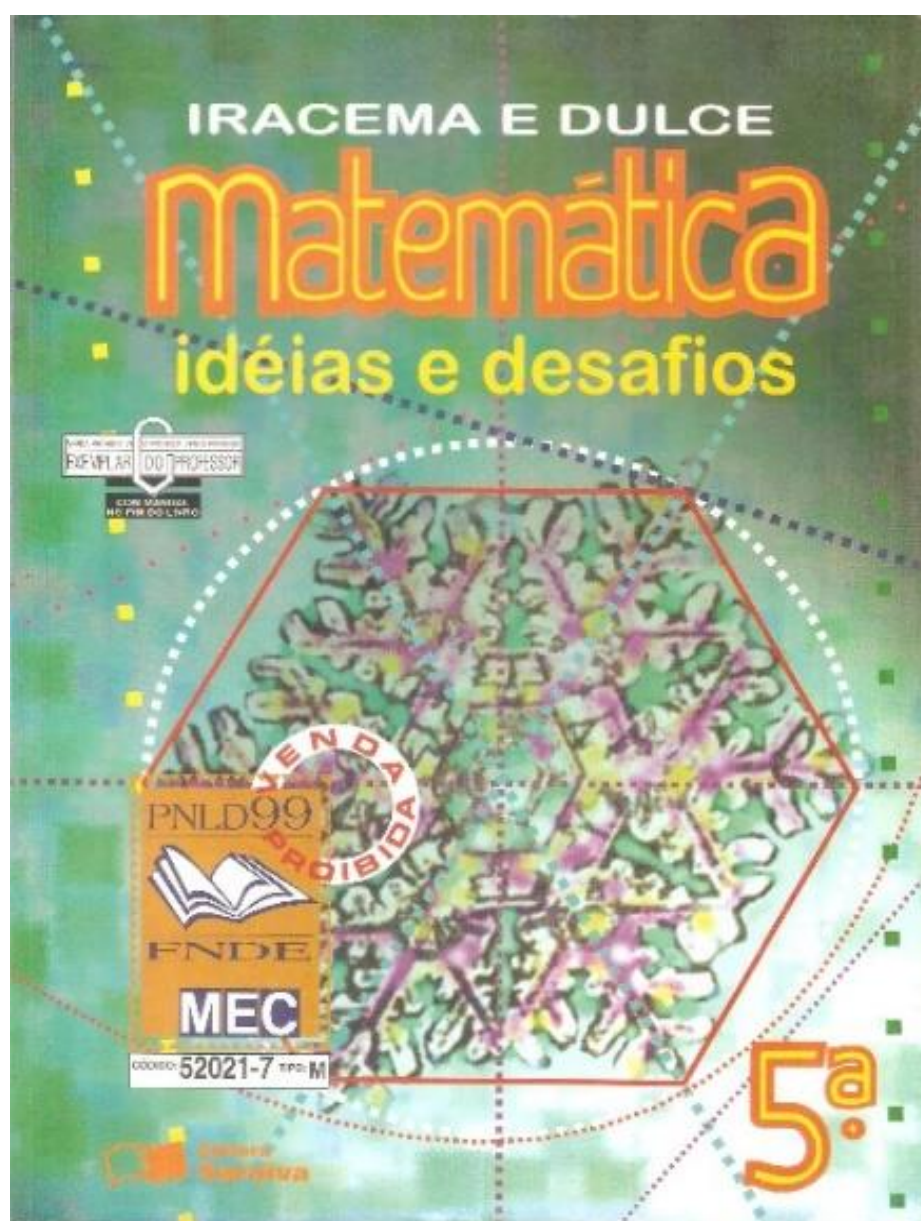
Pelo PNLD, a cada ano um grupo de séries é beneficiado com os livros reutilizáveis, e em 2015 será o ensino médio. Serão escolhidas obras destinadas a alunos e professores, de português, matemática, história, geografia, física, química, biologia, filosofia, sociologia, língua estrangeira (inglês e espanhol) e arte.

O FNDE estima compras em torno de 90 milhões de exemplares para atender os sete milhões de alunos do Ensino Médio. Também haverá aquisição de livros para reposição e complementação no ensino fundamental.

Os anexos, a seguir, contemplam as figuras scaneadas dos livros didáticos de Matemática da 5ª série e do 6º ano do ensino fundamental, iniciando com a figura da capa dos livros e em seguida com a abordagem dos autores desses livros sobre os conceitos de ponto, reta e plano. Os anexos seguem a ordem em que os livros didáticos de matemática foram distribuídos no texto da pesquisa.

B - Livro 1: PNLD 1996 (corresponde ao triênio 1996 – 1997 – 1998)

MATEMÁTICA IDEIAS E DESAFIOS (5ª série) – Iracema More e Dulce Satiko Onaga, São Paulo: Saraiva, 1996.

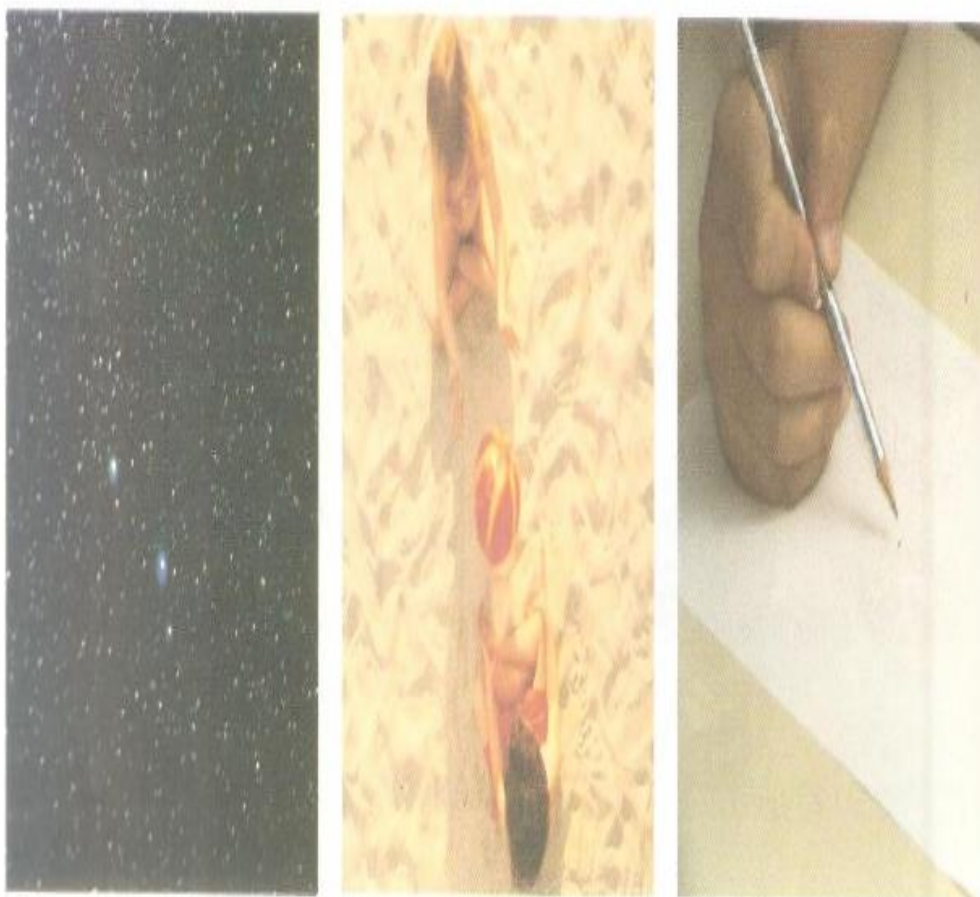


Anexo B: Capa do livro 1 do ano de 1996.

2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

PONTO

Uma estrela no céu, um grão de areia, a marca da ponta de um lápis no papel nos dão a idéia de um ponto.



222

Num mapa, as cidades são representadas por pontos.



Costuma-se indicar um ponto com uma letra maiúscula do nosso alfabeto. Observe as representações de alguns pontos:

• A
(ponto A)

• M
(ponto M)

• B
(ponto B)

• R
(ponto R)

Os pontos são imaginados sem "tamanho", isto é, sem dimensão.

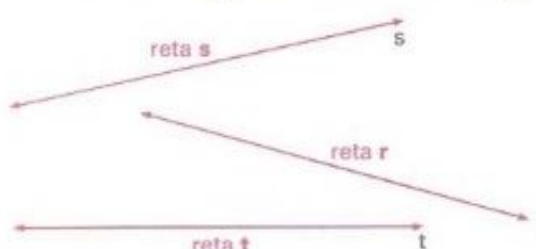
As figuras geométricas são formadas por um conjunto de pontos.



Um raio de sol, um fio de linha esticado dão idéia de uma **reta**. As retas são imaginadas sem começo, sem fim e sem espessura.

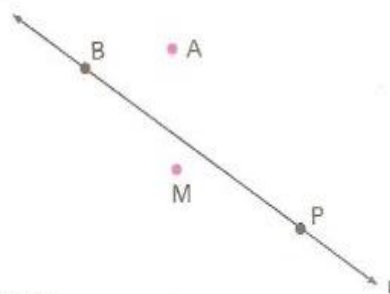
Costuma-se indicar uma reta com letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Na figura ao lado, temos as representações das retas **s**, **t** e **r**.



Observe a reta r e os pontos A , B , M e P na figura:

B pertence à reta r . ————— $B \in r$
 P pertence à reta r . ————— $P \in r$
 A não pertence à reta r . ————— $A \notin r$
 M não pertence à reta r . ————— $M \notin r$



Existem muitos outros pontos que pertencem à reta r .

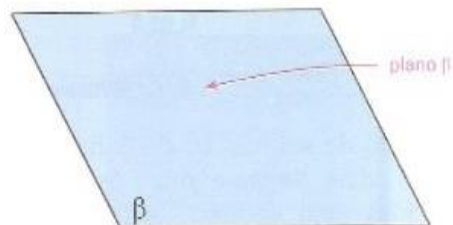
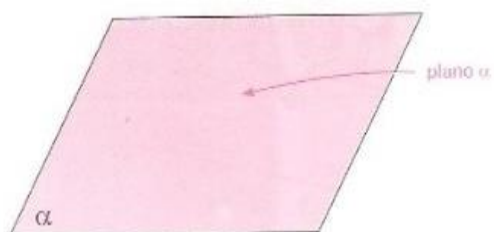
Uma **reta** é formada por infinitos pontos.

PLANO



A superfície de uma foto, a superfície da capa de um livro nos dão idéia de uma parte de um **plano**. Os planos são imaginados estendendo-se em todas as direções e sem espessura.

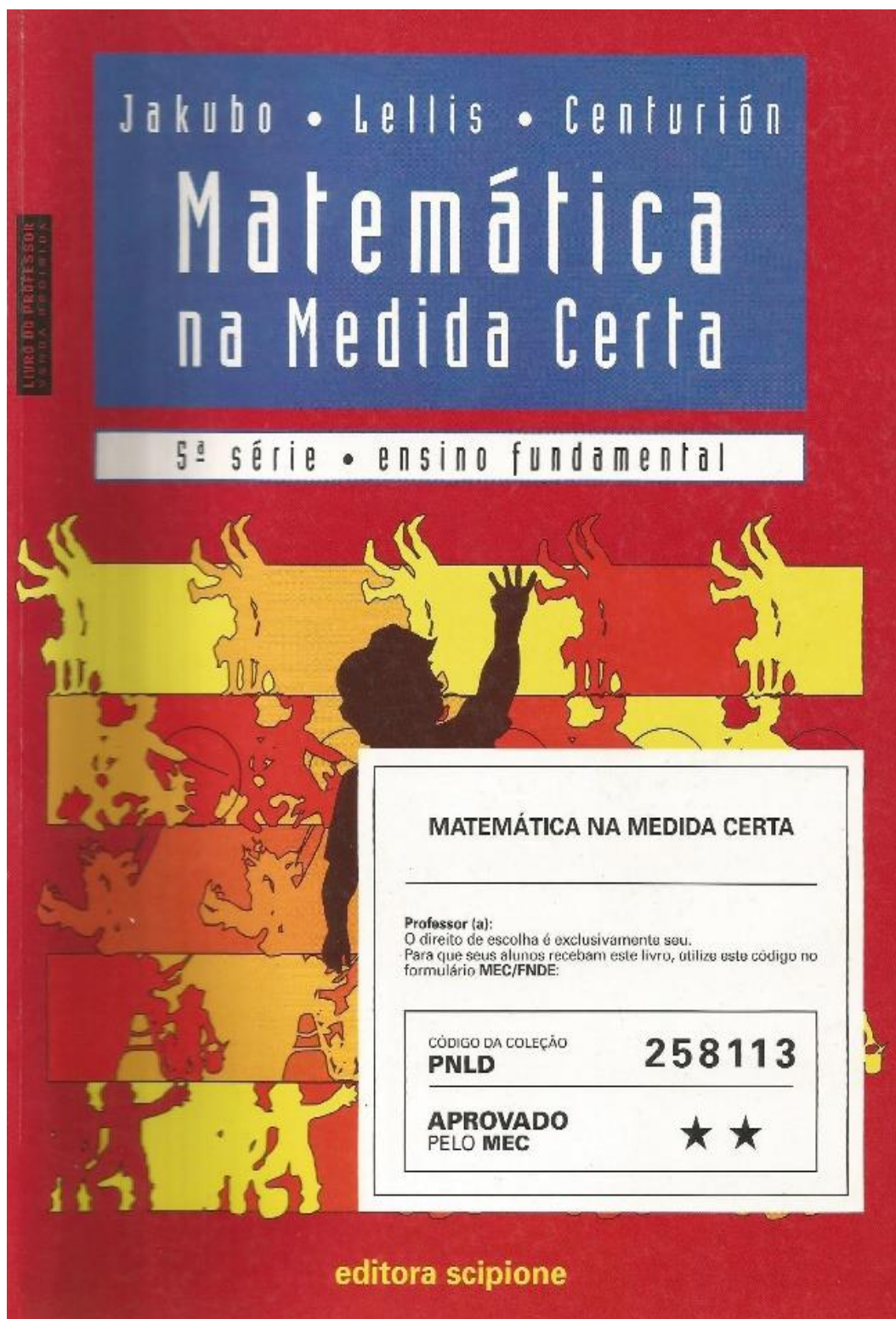
Costuma-se indicar um plano com uma letra minúscula do alfabeto grego: α (alfa), β (beta), γ (gama) etc.



Um **plano** é formado por infinitos pontos.

C - Livro 2: PNLD 1999 (corresponde ao triênio 1999 – 2000 – 2001)

- MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA (5ª série – ensino fundamental) – Jakubo, Centurión, Lellis. São Paulo: Scipione, 1999.

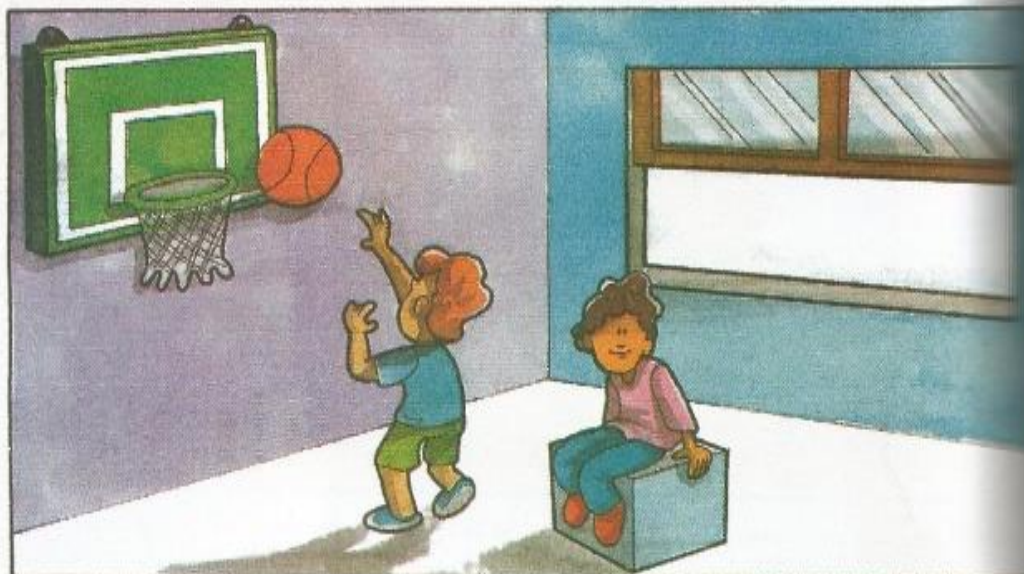


Anexo C: Capa do livro 2 do ano de 1999.

1. Geometria

A geometria é a parte da matemática que estuda as figuras e suas propriedades. A geometria estuda figuras abstratas, de uma perfeição não existente na realidade. Apesar disso, podemos ter uma boa idéia das figuras geométricas, observando objetos reais. Veja estes exemplos:

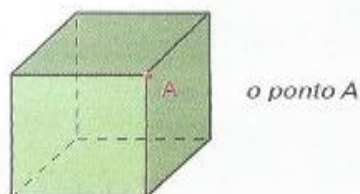
- O aro da cesta de basquete sugere uma circunferência.
- Portas e janelas sugerem retângulos.
- O dado sugere um cubo.



As figuras básicas

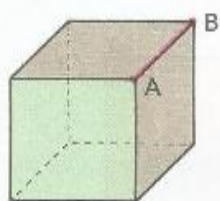
Aproveitaremos o cubo, figura bastante conhecida de todos, para mencionar as figuras básicas da geometria: o **ponto**, a **reta** e o **plano**.

No cubo seguinte, três faces são visíveis, e três não. As três faces visíveis têm em comum apenas o **ponto A**.



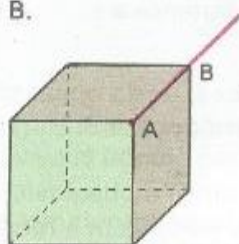
Os matemáticos consideram que os pontos são tão pequenos que não chegam a ter tamanho algum. Para representar um ponto fazemos uma marca bem pequena no papel e para nomeá-lo usamos uma letra maiúscula: A, B, C, etc.

Considere agora a face superior do cubo e a face que vemos à direita. Estas faces têm em comum o **segmento de reta \overline{AB}** , com extremidades nos pontos A e B.

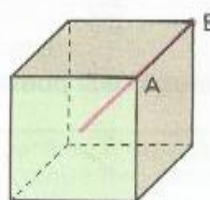


o segmento \overline{AB}
("tem começo e fim")

Nas próximas figuras, indicamos a **semi-reta \overrightarrow{AB}** , de origem A, e a **semi-reta \overrightarrow{BA}** , de origem B.

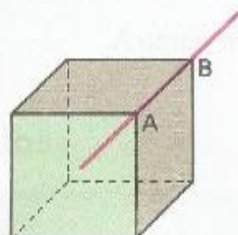


a semi-reta \overrightarrow{AB}
(sua origem é A e "ela não tem fim")



a semi-reta \overrightarrow{BA}
(sua origem é B e "ela não tem fim")

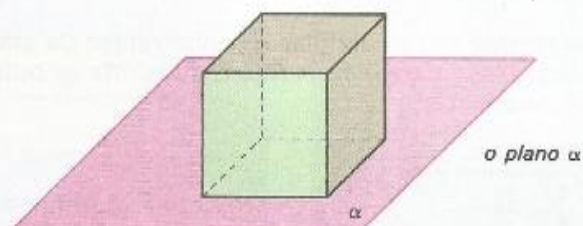
A seguir, indicamos a **reta \overleftrightarrow{AB}** .



a reta \overleftrightarrow{AB}
("não tem começo nem fim")

Os matemáticos consideram que as retas não têm largura. Para nomeá-las, além de notações como \overleftrightarrow{AB} , é muito comum o uso de letras minúsculas: r, s, t, etc.

Prolongando indefinidamente uma face de um cubo em todas as direções, como indica a próxima figura, temos um plano.



Os planos não têm espessura. Para nomeá-los, usamos letras gregas, principalmente as três primeiras: α (alfa), β (beta) e γ (gama).

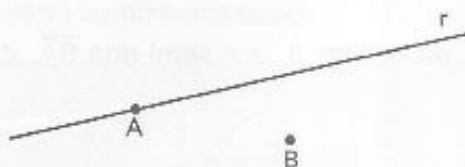
Agora adivinhe de onde vem a palavra alfabeto!

As figuras geométricas são conjuntos de pontos. Assim, planos, retas e circunferências são figuras geométricas.



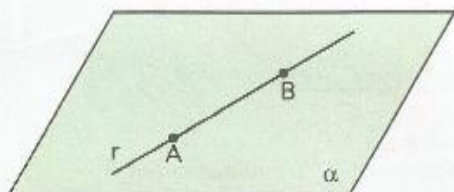
Exemplos

- Vamos representar os pontos A, B e a reta r.



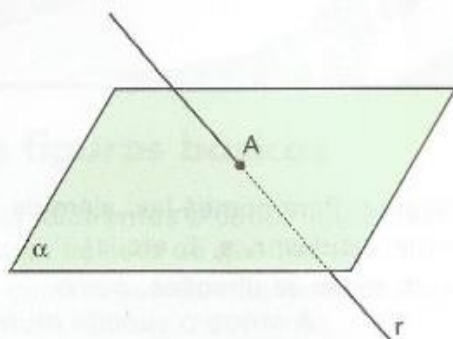
O ponto A pertence à reta r.
O ponto B não pertence a r.

- Veja agora o plano α , seus pontos A e B e a reta r que passa por A e B.



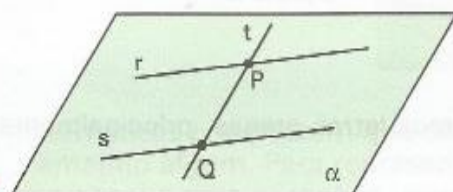
Os pontos A e B pertencem à reta r.
Os pontos A e B pertencem ao plano α .
A reta r está contida no plano α .

- Agora veja uma reta r que fura o plano α em um ponto A.



O ponto A pertence à reta r e ao plano α ,
mas a reta r não está contida no plano α .

- Agora, vamos representar retas paralelas e concorrentes de um plano α . As retas r e s, que não se cortam, são paralelas. A reta t, que corta as outras duas, é concorrente com r e com s.

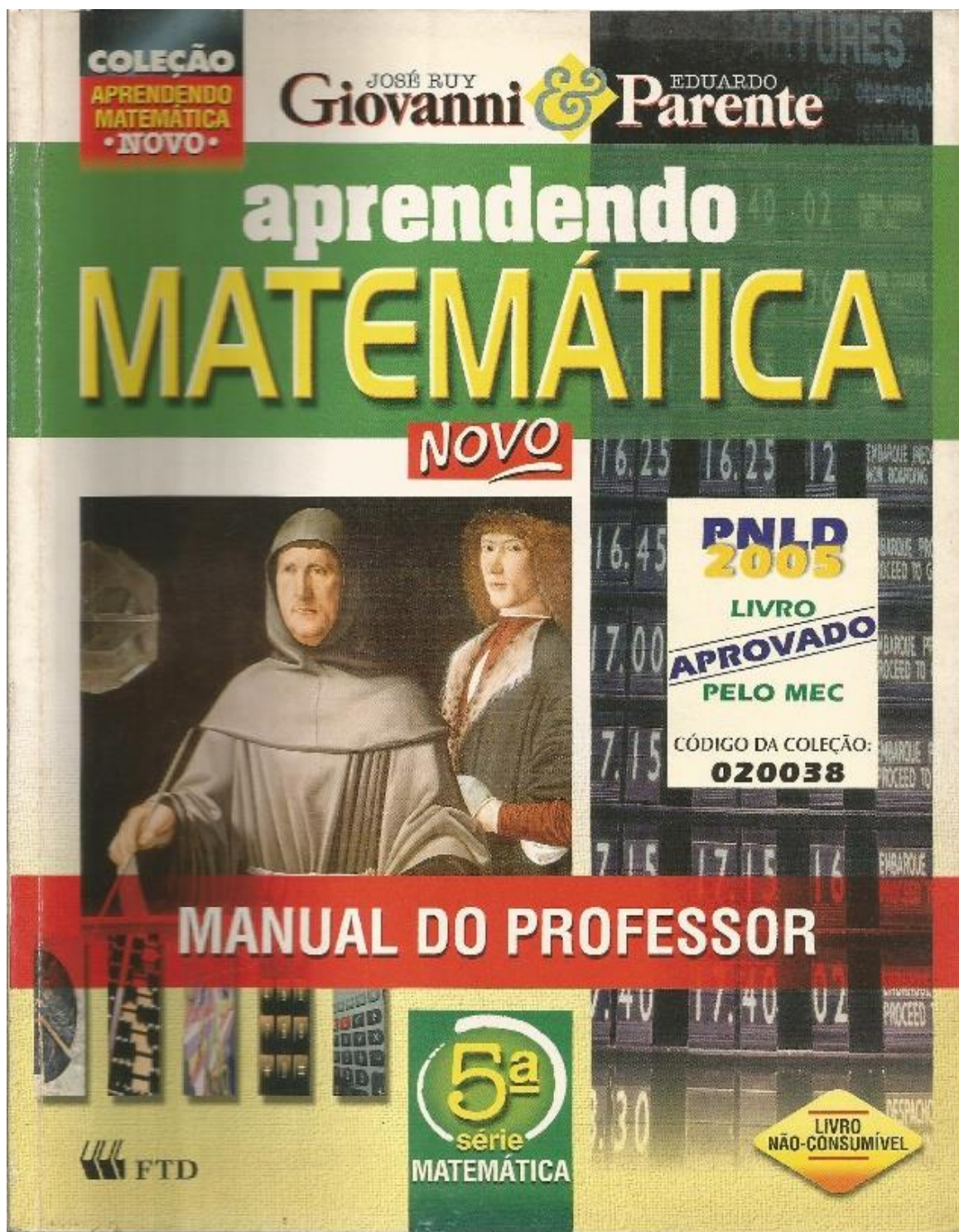


O ponto P pertence às retas r e t, pois
resulta de sua intersecção.

O ponto Q pertence às retas s e t, pois
resulta de sua intersecção.

D - Livro 3: PNLD 2002 (corresponde ao triênio 2002 – 2003 – 2004)

- APRENDENDO MATEMÁTICA (5ª série) – José Ruy Giovanni e Eduardo Parente, São Paulo: FTD, 2002.



Anexo D: Capa do livro 3 do ano de 2002.

20

SEGMENTO
DE RETA

Copie este mosaico no seu caderno usando papel quadriculado. Descubra o padrão que se repete e continue um pouco mais o desenho.



Para continuar o desenho você usou algumas idéias importantes da *Geometria*, tais como: pontos, segmentos de reta, ângulos, polígonos etc.

Com a ajuda de uma régua, ligamos os dois pontos indicados.



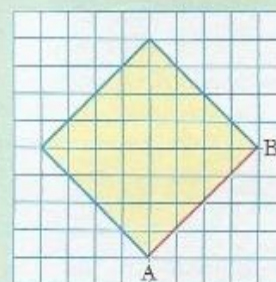
A figura geométrica traçada é chamada de *segmento de reta*.



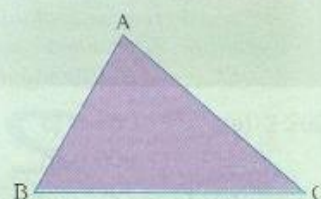
No mosaico, você traçou vários segmentos de reta. Volte a essa figura e identifique, pelo menos, cinco deles.

Agora, observe a figura ao lado. Cada lado do quadrado é um segmento de reta. Destacamos o segmento com extremidades em *A* e *B*.

Indicamos por segmento \overline{AB} ou, simplesmente, \overline{AB} .



Assim, nesta outra figura, temos representados três segmentos de reta: \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} .



21

A SEMI-RETA
E A RETA

Imagine um dos lados desse quadrado prolongando-se indefinidamente em um dos sentidos.

Temos, assim, a idéia de uma semi-reta.

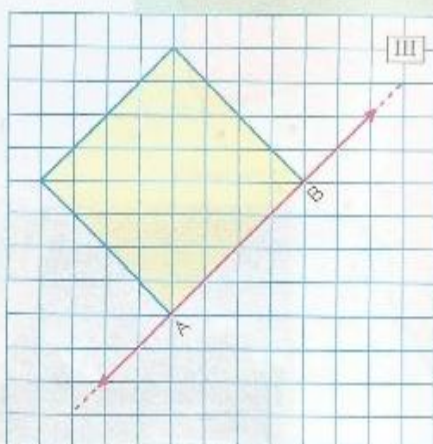
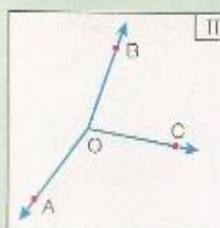
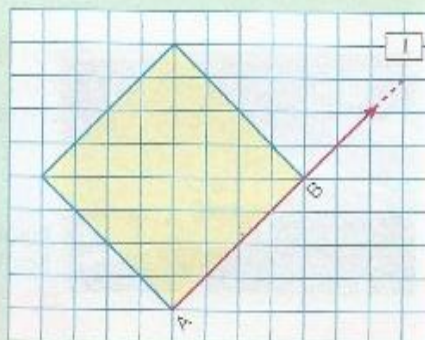
A semi-reta tem começo, mas não tem fim.

Na figura I está destacada a semi-reta com origem no ponto A e que passa pelo ponto B .

Indicamos essa semi-reta por \overrightarrow{AB} .

Na figura II estão indicadas três semi-retas: \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} .

Agora, imagine um dos lados desse quadrado prolongando-se indefinidamente nos dois sentidos.

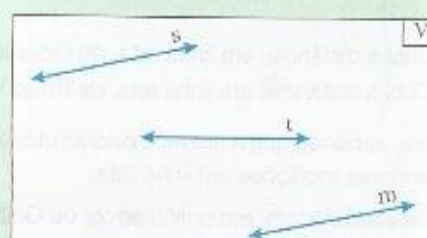
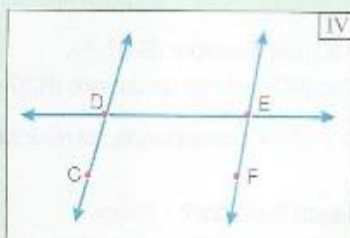


Temos, assim, a idéia de uma reta. A reta não tem começo nem fim. Na figura III aparece destacada a reta que passa pelos pontos A e B .

Esta reta é indicada por \overleftrightarrow{AB} .

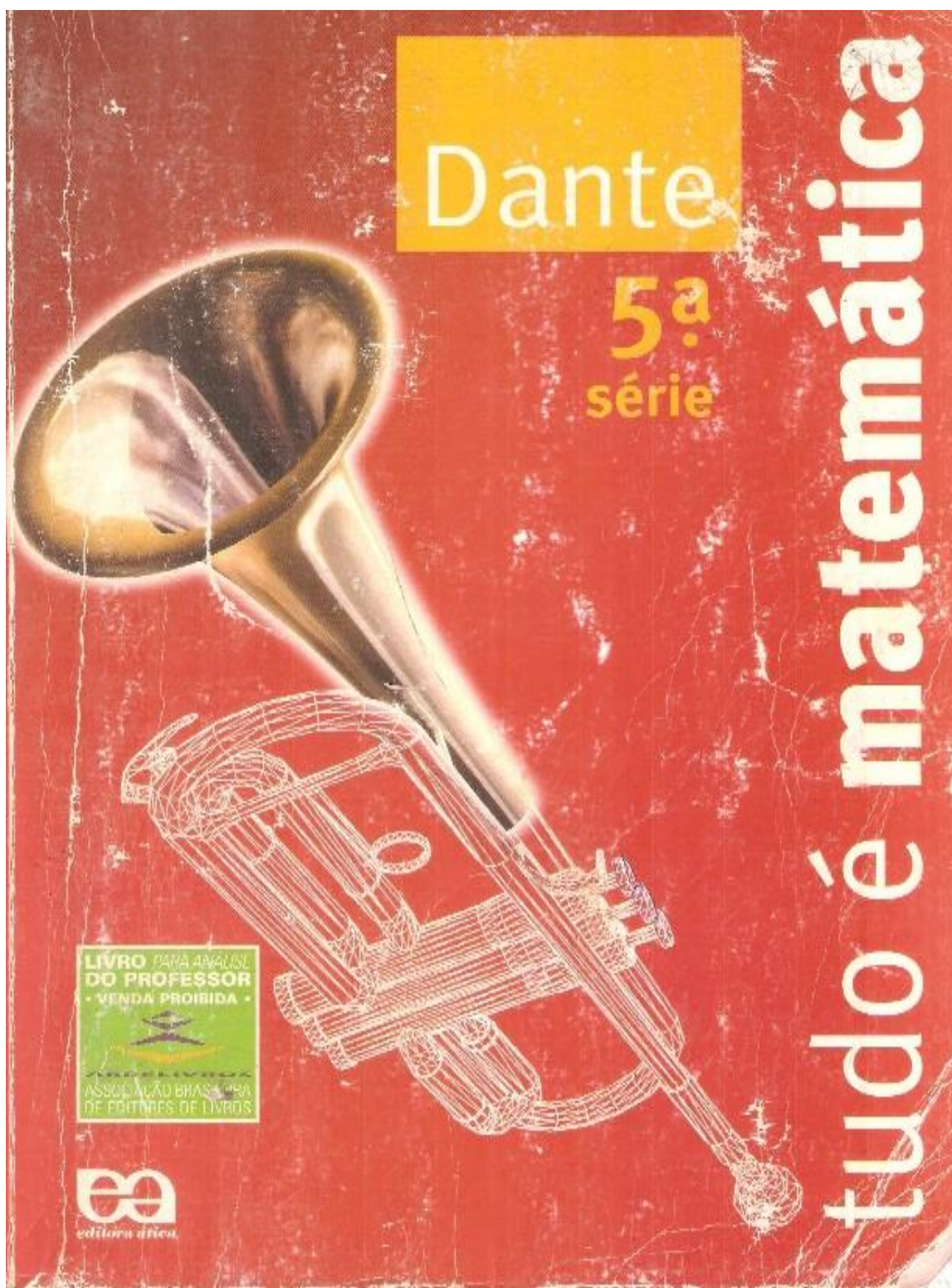
Na figura IV estão indicadas três retas: \overleftrightarrow{CD} , \overleftrightarrow{DE} e \overleftrightarrow{EF} .

Podemos também indicar retas por letras minúsculas do nosso alfabeto, como na figura V.



E - Livro 4: PNLD 2005 (corresponde ao triênio 2005 – 2006 – 2007)

TUDO É MATEMÁTICA (5ª série) – Luiz Roberto Dante, São Paulo: Ática, 2005.

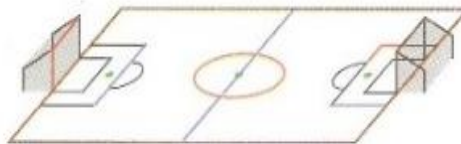


Anexo E: Capa do livro 4 do ano de 2005.

As primeiras figuras

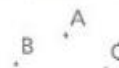
Observe o desenho de um campo de futebol com as linhas demarcatórias.

Através desse desenho ou de partes dele, podemos ter idéia de várias figuras geométricas que estudaremos neste capítulo.

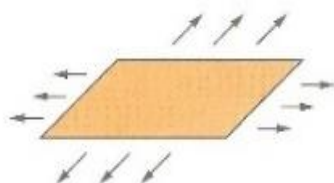


- O que aparece em verde, como o centro do campo, por exemplo, nos dá idéia de *ponto*.

Veja ao lado como representamos os pontos. Cada um é indicado por uma letra maiúscula.



- Imagine o piso do campo se expandindo indefinidamente em todas as direções e você terá idéia do que seja um *plano*.



Costumamos indicar cada plano por uma letra grega: α (alfa), β (beta), γ (gama), etc.



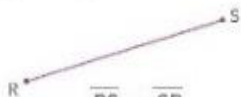
- Observe, na figura do campo de futebol, as partes que aparecem em azul. Cada uma delas dá idéia de mais uma figura geométrica: o *segmento de reta*.

Veja o desenho e a representação de alguns segmentos de reta:



\overline{AB} ou \overline{BA}

Os pontos **A** e **B** são suas extremidades.



\overline{RS} ou \overline{SR}



\overline{PQ} ou \overline{QP}

- Pense agora em um segmento de reta \overline{AB} que se prolonga indefinidamente nos dois sentidos. A figura correspondente é uma *reta*.



\overleftrightarrow{AB} : reta que passa pelos pontos **A** e **B**.

Pode também ser indicada por \overleftrightarrow{BA} , ou por uma letra minúscula (r , por exemplo).

- Mais uma vez pense em um segmento de reta \overline{AB} , mas agora sendo prolongado apenas em um sentido (de **A** para **B**, por exemplo). A figura correspondente é uma *semi-reta*, que indicamos por \overrightarrow{AB} .



O ponto **A** é a origem dessa semi-reta.

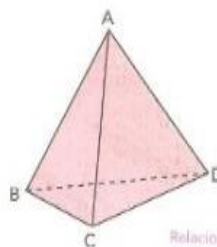
Veja outro exemplo de semi-reta: \overrightarrow{EF} .
A origem dessa semi-reta é o ponto **E**.



- 1 Copie em seu caderno os seis pontos indicados ao lado, com as posições e as letras correspondentes. Use a régua e trace \overline{MR} , \overline{PS} e \overleftrightarrow{EB} . Em cada uma das figuras escreva o nome. No segmento de reta escreva quais são as extremidades. Na semi-reta indique a origem.

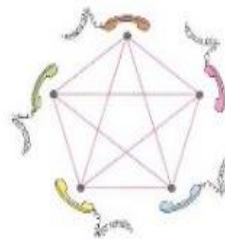


- 2 Considere a pirâmide da figura ao lado.
- Qual é a figura correspondente a cada vértice? *Ponto.*
 - Qual é a figura correspondente a cada aresta? *Segmento de reta.*
 - Todos os pontos de uma pirâmide estão em um único plano? *Não, pois a pirâmide é tridimensional.*
 - Todos os pontos de uma das faces estão em um único plano? *Sim.*
 - Quantas e quais são as arestas dessa pirâmide? *São: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{BD} , \overline{AC} e \overline{AD} .*



Relacione a resposta do item d com o fato de cada face receber o nome de região plana.

- 3 **Desafio** Quantas ligações diretas podemos fazer entre cinco telefones? Copie a figura em seu caderno e indique cada ligação com um segmento de reta. *10 ligações.*



- 4 Marque um ponto A em seu caderno. Trace retas passando por esse ponto. Quantas retas você pode traçar passando pelo ponto A? *Infinitas.*



- 5 Agora, marque em seu caderno dois pontos: B e M. Quantas retas você pode traçar passando por esses dois pontos? *Uma única.*



- 6 Em relação aos pontos assinalados com letras na figura abaixo, responda em seu caderno:

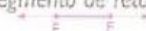
- Quais pertencem à reta p? *S, R, B e F.*
- Quais pertencem ao segmento de reta \overline{HA} ? *H, R e A.*
- Quais pertencem à semi-reta \overrightarrow{BR} ? *B, R e S.*
- Quais não pertencem à reta q? *S, B e F.*
- Qual pertence às retas p e q ao mesmo tempo? *R.*



Comente com os alunos que R é ponto comum às retas p e q.

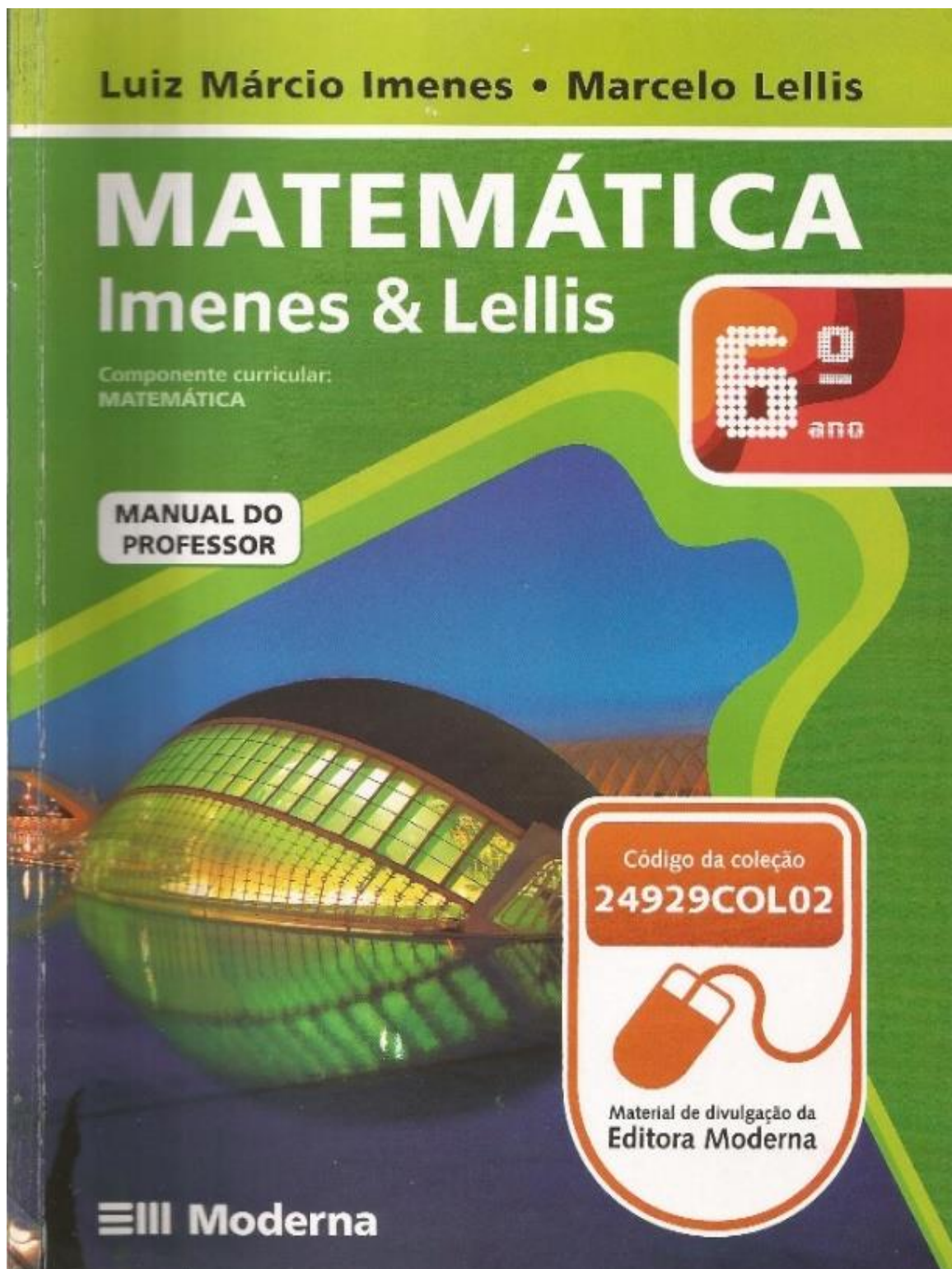


Discuta com seus colegas: O que diferencia um segmento de reta \overline{EF} de uma reta \overleftrightarrow{EF} ? \overline{EF} é uma parte limitada de \overleftrightarrow{EF} e esta é limitada nos dois sentidos.



F - Livro 5: PNLD 2008 (corresponde ao triênio 2008 – 2009 – 2010)

- MATEMÁTICA: Imenes e Lellis 6º ano. Luis Márcio Imenes, Marcelo Lellis. São Paulo: Moderna, 2009.



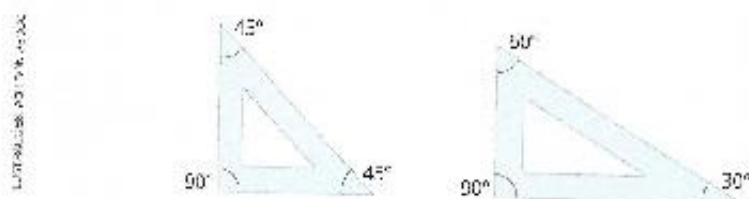
Anexo F: Capa do livro 5 do ano de 2009.

■ Perpendiculares e paralelas

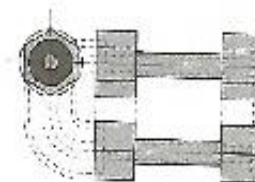
Para serrar a madeira formando um ângulo reto, os marceneiros usam os esquadros, que podem ser considerados moldes do ângulo reto.



Os desenhistas e os projetistas também usam esquadros, que existem em dois tipos:




Com esquadros, réguas e outros instrumentos, esses profissionais desenham plantas de casas e desenhiam peças que serão produzidas pela indústria.



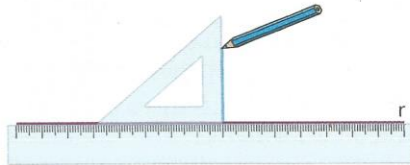
Nesses desenhos, é comum o traçado de linhas retas perpendiculares e linhas retas paralelas. Vamos aprender a desenhá-las usando esquadros e réguas.

Construção de linhas retas perpendiculares

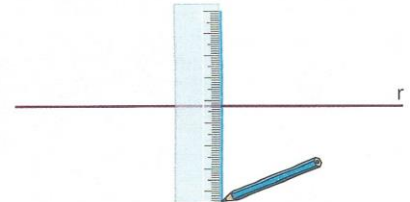
- Trace a reta **r**.



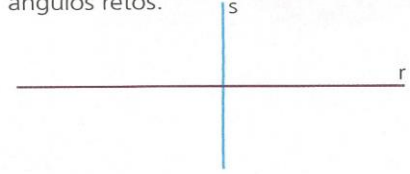
- Apoie um lado do ângulo reto do esquadro na régua. Trace a reta **s**.



- Prolongue a reta **s** com uma régua.




- Observe que você traçou duas retas perpendiculares, **r** e **s**. Elas formam ângulos retos.



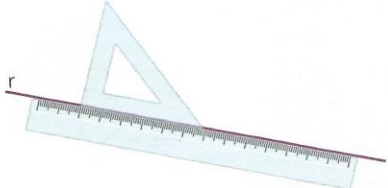
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Construção de linhas retas paralelas

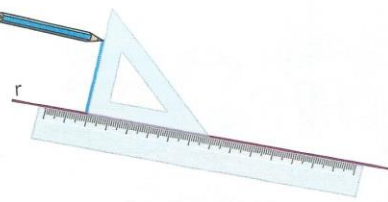
- Trace a reta **r**.



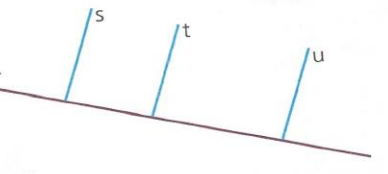
- Mantendo a régua fixa sobre **r**, apoie o esquadro sobre a régua.



- Deslize o esquadro sobre **r** e trace as retas **s**, **t** e **u** perpendiculares à **r**.

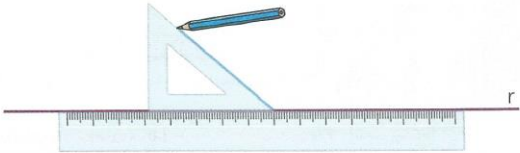


- Note que as retas **s**, **t** e **u** são paralelas entre si e perpendiculares à **r**.

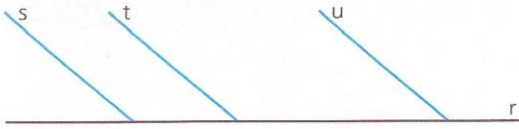


Você também pode traçar retas paralelas desta maneira:


- Deslize o esquadro como no exemplo anterior, mas faça os traços utilizando o lado do ângulo de 45°. Se estiver usando o esquadro de 30° e de 60°, faça o traço utilizando o lado comum aos ângulos de 30° e de 60°.



- Observe que as retas **s**, **t** e **u** são paralelas entre si e oblíquas em relação à **r**.



Duas retas paralelas nunca se encontram. Elas mantêm sempre uma mesma distância entre si.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

KANTON

G - Livro 6: PNLD 2011 (corresponde ao triênio 2011 – 2012 – 2013)

- MATEMÁTICA: BIANCHINI (6º ano) – Edwaldo Bianchini. São Paulo: Moderna, 2011



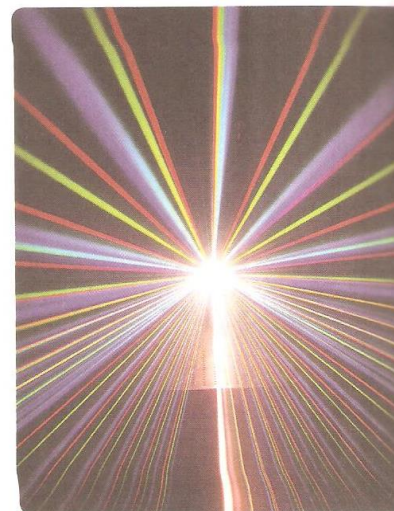
Anexo G: Capa do livro 6 do ano de 2011.

6 Noções primitivas

O ponto, a reta e o plano são noções aceitas sem definição na Geometria, por isso são chamadas **noções primitivas**. Essas noções podem ser associadas, de maneira intuitiva, a diferentes objetos que nos rodeiam.



Cada estrela que vemos no céu dá a ideia de um ponto.



Um raio de luz dá a ideia de uma reta.



O espelho d'água de um lago dá a ideia de um plano.

Dizemos que a estrela, o raio de luz e o espelho d'água do lago dão ideia de ponto, reta e plano, respectivamente, isto é, são objetos que representam as noções primitivas da Geometria.

● O ponto e a reta

Graficamente, um **ponto** pode ser representado como \bullet e é indicado por letras maiúsculas do nosso alfabeto:



Quando há uma coleção com um ou mais pontos, temos uma **figura**. Por exemplo:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Uma **reta** também é uma figura com infinitos pontos. Graficamente, uma reta pode ser representada da seguinte maneira:



Uma reta é indicada por letras minúsculas do nosso alfabeto:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

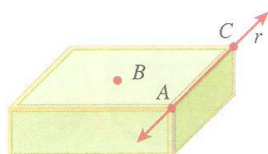
Uma reta não tem começo nem fim nem espessura. Veja uma reta e alguns de seus pontos:



Os pontos E, G, C, M, Z e H pertencem à reta t. Nesse caso, dizemos que esses pontos são **colineares**.

Três ou mais pontos são colineares quando pertencem a uma mesma reta.

Observe os pontos A, B e C que estão representados na figura a seguir.



Os pontos A, B e C não são colineares, pois não há reta que contenha esses três pontos.

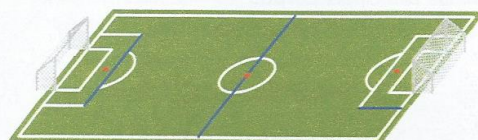
H - Livro 7: PNLD 2014 (corresponde ao triênio 2014 – 2015 – 2016)

PROJETO TELÁRIS: MATEMÁTICA 6 (6º ano) – Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2014.



Anexo H: Capa do livro 7 do ano de 2014.

3 Ponto, reta e plano

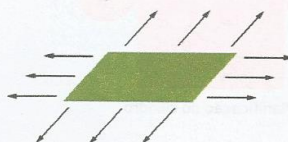


CASA DE TIPOS/ARQUIVO DA EDITORA

Examine o desenho de um campo de futebol com as linhas demarcatórias.

Por meio deste desenho ou de partes dele, podemos ter ideia de várias figuras geométricas que estudaremos neste capítulo.

- O que aparece em vermelho, como o centro do campo, por exemplo, nos dá ideia de um **ponto**.
Veja ao lado como representamos os pontos.
Cada um é indicado por uma letra maiúscula.
- Imagine o gramado (ou piso) do campo se expandindo indefinidamente em todas as direções e você terá ideia do que seja um **plano**. Costumamos indicar cada plano por uma letra grega: α (alfa), β (beta), γ (gama), etc.



- Observe, na figura do campo de futebol, as partes que aparecem em azul. Cada uma delas dá ideia de mais uma figura geométrica: o **segmento de reta**.
Veja o desenho e a representação de um segmento de reta:



Os pontos A e B são as extremidades deste segmento.

- Pense agora em um segmento de reta \overline{AB} que se prolonga indefinidamente nos dois sentidos. A figura correspondente é uma **reta**.



\overleftrightarrow{AB} : reta que passa pelos pontos A e B.

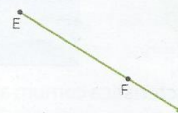
Pode também ser indicada por \overleftrightarrow{BA} , ou por uma letra minúscula (r , por exemplo).

- Mais uma vez pense em um segmento de reta \overline{AB} , mas agora sendo prolongado apenas em um sentido (de A para B, por exemplo). A figura correspondente é uma **semirreta**, que indicamos por \overrightarrow{AB} .



O ponto A é a origem desta semirreta.

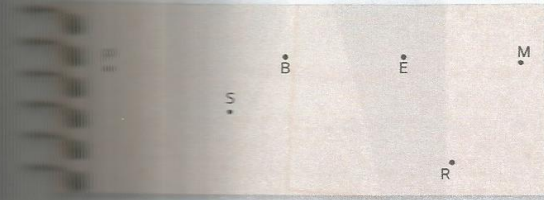
Veja outro exemplo de semirreta: \overrightarrow{EF} .



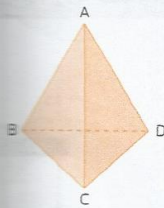
A origem desta semirreta é o ponto E.

Exercícios

- Marque seis pontos em seu caderno com as posições e as letras indicadas abaixo. Use a régua e trace \overline{MR} , \overline{PS} e \overline{EB} . Escreva o nome de cada figura. No segmento de reta escreva quais são as extremidades, e na semirreta indique a origem.



- Considere a pirâmide da figura abaixo.



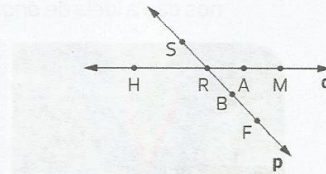
- Qual é a figura correspondente a cada vértice?
 - Qual é a figura correspondente a cada aresta?
 - Todos os pontos de uma pirâmide estão em um único plano?
 - Quantas e quais são as arestas desta pirâmide?
- Marque um ponto **A** em seu caderno. Trace retas passando por esse ponto. Quantas retas você pode traçar passando pelo ponto **A**?
 - Agora, marque em seu caderno dois pontos: **B** e **C**. Quantas retas você pode traçar passando por esses dois pontos?
 - Desenhe a figura correspondente a:
 - uma semirreta com origem em um ponto **P** e que passa por um ponto **M**;
 - um segmento de reta com extremidades nos pontos **H** e **S**, um ponto **A** que pertence a esse segmento e um ponto **B** que não pertence a esse segmento;
 - uma reta que tem **X**, **Y** e **Z** como três de seus pontos, com **Z** entre **X** e **Y**.



Atenção!
Não escreva no livro!
Faça os exercícios no caderno.



- Em relação aos pontos assinalados com letras na figura abaixo, responda em seu caderno.

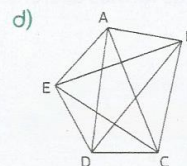
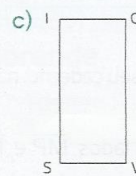
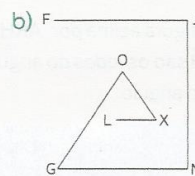
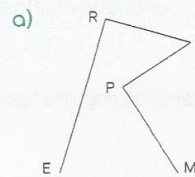


- Quais pertencem à reta **p**?
- Quais pertencem ao segmento de reta \overline{AH} ?
- Quais pertencem à semirreta \overline{BR} ?
- Quais não pertencem à reta **q**?
- Qual pertence às retas **p** e **q** ao mesmo tempo?

30. Atividade em equipe

Discuta com seus colegas: o que diferencia um segmento de reta \overline{EF} de uma reta \overleftrightarrow{EF} ?

- Quantos segmentos de reta com extremidades nos pontos assinalados com letras estão traçados em cada figura? Escreva quais são eles.



Anexo H(2): Concepções de ponto, reta e plano no livro 7 de 2014.

I - Livro 8: PNLD 2017 (corresponde ao triênio 2017 – 2018 – 2019)

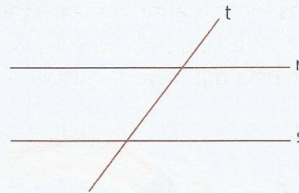
VONTADE DE SABER MATEMÁTICA (6º ano) – Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro. São Paulo: FTD, 2017.



Anexo I: Capa do livro 8 do ano de 2017.

Retas e segmentos de reta

Em Matemática, a **reta** é uma linha que não tem começo nem fim, ou seja, não tem extremidades. Para indicar uma reta, utilizamos letras minúsculas. Veja como representar as retas **r**, **s** e **t**.



Uma parte da reta compreendida entre dois de seus pontos é chamada **segmento de reta**. Assim, dizemos que um segmento de reta tem começo e fim e, sendo assim, pode ser medido. Para indicar um segmento de reta utilizamos letras maiúsculas. Veja a apresentação do segmento de reta **CD**.



Indicamos o segmento de reta por **CD** ou \overline{CD} .

Retas paralelas e retas concorrentes

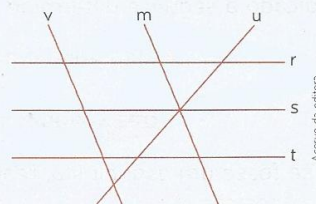
Atualmente, alguns carros vêm equipados com um aparelho chamado **GPS**, que auxilia na localização de lugares e trajetos.

Veja a seguir um mapa em um navegador GPS.



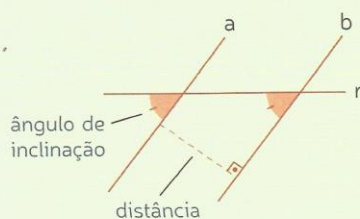
Representando as ruas que aparecem no mapa com retas, temos:

Peça aos alunos que citem outros pares de retas que são paralelas e outros que são concorrentes.



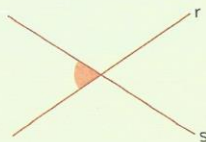
As retas r e s , na representação do mapa, não se cruzam, mantendo sempre a mesma distância uma da outra. Já as retas r e u se cruzam em um único ponto. Nesse caso, dizemos que as retas r e s são **paralelas** e que as retas r e u são **concorrentes**.

- Duas retas são **paralelas** quando elas nunca se cruzam, ou seja, permanecem à mesma distância uma da outra. O ângulo de inclinação de duas ou mais retas paralelas em relação à outra é sempre igual.



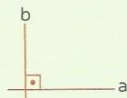
- Note que os ângulos de inclinação das retas a e b em relação à reta r são iguais. Indicamos as retas paralelas a e b por $a//b$.

- Duas retas são **concorrentes** quando elas se cruzam em um único ponto. Nesse caso, as retas r e s são concorrentes.

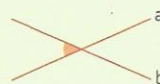


Se duas retas são concorrentes e:

- formam um ângulo de 90° entre si, então elas são **perpendiculares**.
- não são perpendiculares entre si, então elas são **obíquas**.



Indicamos as retas perpendiculares a e b por $a \perp b$.



Ilustrações: Camilla Ferreira

➤ Traçando retas paralelas e retas perpendiculares

Utilizando esquadros, podemos traçar retas paralelas e retas perpendiculares.



Ilustrações:
Fernan Fortesca

Realize na lousa, junto com os alunos, os procedimentos apresentados para traçar retas paralelas e perpendiculares. Caso não haja esquadros para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar as atividades propostas neste capítulo ou, então, veja a possibilidade de trazer alguns esquadros para a sala de aula.

Traçando retas paralelas

- Traçamos uma reta r qualquer. Em seguida, posicionamos o esquadro de 45° na posição indicada.



Ilustrações:
Van Ferreira

J - Axiomas da Geometria Euclidiana Plana (ou Parabólica) propostos por Hilbert

I. Termos Indefinidos

1. Ponto, reta, plano, pertence, está entre e congruência.

II. Axiomas de Incidência

1. Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.

3. Existem pelo menos três pontos que não pertencem a uma mesma reta.

III. Axiomas de Ordem

1. Se um ponto B está entre A e C, então os três pontos pertencem a uma mesma reta e B está entre C e A.

2. Para quaisquer dois pontos distintos A e C, existe pelo menos um ponto B pertencente a reta AC tal que B está entre A e C.

3. Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.

4. (Pasch) Sejam A, B e C três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja l uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se l intercepta o segmento AB, ela também intercepta o segmento AC ou o segmento BC.

IV. Axiomas de Congruência

1. Se A e B são dois pontos distintos numa reta l e A' e um outro ponto de uma reta l', não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto B' em (um dado lado da reta) l', tais que os segmentos AB, e A'B' sejam congruentes.

2. Se um segmento A'B' e um segmento A''B'', são congruentes a um mesmo segmento AB, então os segmentos A'B' e A''B'' são congruentes entre si.

3. Sobre uma reta l , sejam AB e BC dois segmentos da mesma que, exceto por B não tem pontos em comum. Além disto, sobre uma outra ou a mesma reta l' , sejam $A'B'$ e $B'C'$ dois segmentos que, exceto por B' não tem pontos em comum. Neste caso se $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, então $AC \cong A'C'$.

4. Se $\triangle ABC$ e um triângulo e se $\hat{B} \rightarrow B_0 C_0$ e um raio, então existe exatamente um raio $\hat{A} \rightarrow A_0 B_0$ em cada lado de $B_0 C_0$ tal que $\angle A_0 B_0 A_0 \cong \angle ABC$. Além disso, cada \hat{A} e congruente a si mesmo.

5. Se para dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_0 B_0 C_0$ as congruências $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ são válidas, então a congruência $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ é satisfeita.

V. Axioma das Paralelas

1. Seja l uma reta e A um ponto não em l . Então existe no máximo uma reta no plano que passa por A e não intercepta l .

VI. Axiomas de Continuidade

1. Axioma de Arquimedes: Se AB e CD são segmentos, então existe um número natural n tal que n cópias de CD construídas contiguamente de A ao longo do raio AB passara além do ponto B .

2. Axioma da Completude da Reta: Uma extensão de um conjunto de pontos sobre uma reta com suas relações de congruência e ordem que poderiam preservar as relações existentes entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de congruência e ordem que seguem dos axiomas acima (menos o das paralelas) é impossível.

Para obtermos os Axiomas da Geometria Euclidiana Espacial (ou Sólida) devemos acrescentar ainda os seguintes:

VII. Axiomas sobre Planos

1. Em todo plano existe ao menos três pontos não colineares.
2. Nem todos os pontos pertencem ao mesmo plano.
3. Três pontos não colineares pertencem a um único plano.

4. Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então toda a reta está contida no plano.
5. Se dois planos tem em um ponto em comum eles tem um segundo ponto em comum.