

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA**

**Grasiele Romanzini Bezerra**

**TESTANDO GRAVIDADE PÓS-NEWTONIANA PARAMETRIZADA COM  
LENTES GRAVITACIONAIS FORTES**

Porto Alegre (RS)

2019



Grasiele Romanzini Bezerra

**TESTANDO GRAVIDADE PÓS-NEWTONIANA PARAMETRIZADA COM  
LENTES GRAVITACIONAIS FORTES**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul sob orientação da Prof<sup>a</sup>. Cristina Furlanetto, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Bacharela em Física.

Porto Alegre (RS)

2019



# Agradecimentos

Ao povo brasileiro por me proporcionar a oportunidade de estudar na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, uma instituição de ensino pública, gratuita e de qualidade, que pertence e é mantida pelo povo.

A comunidade do Instituto de Física: professores, técnicos administrativos e colegas, pelos anos que aprendizagem que tive nesse lugar.

Aos colaboradores Gabriel Crisnejo e Martin Makler pelo apoio, pela troca de conhecimento e pela ajuda com o código.

A minha orientadora Cristina Furlanetto por ter acreditado em mim e aceitado me orientar.

Aos meus colegas Anderson, Cris, Eduardo, João, Erico e Otávio pelo apoio nos momentos difíceis, pela companhia na fila do RU, pela ajuda nos estudos e pelos rolês nos momentos de calma.

A minha amada esposa Patricia por compartilhar a vida comigo, pelo apoio, por nunca ter deixado de acreditar na minha capacidade e pela ajuda técnica computacional.

A minha família pelo suporte e pela confiança.

A todos, meu muito obrigada!

# Resumo

Uma forma de testar os limites de validade da Relatividade Geral (RG) é pela determinação do parâmetro de gravidade pós-newtoniana parametrizada,  $\gamma$ . Nesse trabalho utilizamos o raio de Einstein, a dispersão de velocidades, e desvio para o vermelho da lente e da fonte de lentes gravitacionais fortes, dos projetos BELLS, SLACS, LSD e SL2S, para impor vínculos ao parâmetro  $\gamma$ . Usando 103 sistemas de lentes obtemos  $\gamma = 1.037 \pm 0.032$ . Esse resultado é marginalmente inconsistente com a RG, que exige um valor de  $\gamma = 1$ .

Embora tenhamos reduzido as incertezas estatísticas, em comparação com trabalhos anteriores, aumentando o número de sistemas de lente na nossa amostra ainda temos incertezas sistemáticas consideráveis. Para um resultado mais consistente seria necessário uma melhor determinação dos parâmetros que descrevem a densidade de massa total, a densidade de luminosidade e a anisotropia na distribuição de velocidades das estrelas das galáxias que atuam como lentes.

## Sumário

1	Introdução . . . . .	1
2	Objetivos . . . . .	2
3	Metodologia . . . . .	2
3.1	Formalismo . . . . .	2
3.2	Determinação de $\gamma$ e tratamento estatístico . . . . .	7
3.3	Amostra . . . . .	8
4	Resultados . . . . .	11
5	Conclusões . . . . .	14

## 1 Introdução

A Teoria da Relatividade Geral (RG) vem sendo testada e comprovada com sucesso em menores escalas, como por exemplo no sistema solar [1, 2, 3]. Entretanto, quando se utiliza provas cosmológicas aparece algumas tensões entre resultados. Por exemplo, há uma tensão entre os resultados obtidos através da análise da radiação cósmica de fundo em microondas e os resultados obtidos a partir dos dados de supernova do tipo Ia para a medida da constante de Hubble [4, 5]. Estas tensões motivam novos testes da RG, em particular em grandes distâncias.

Uma abordagem para o teste da RG é a Gravidade Pós-Newtoniana Parametrizada (GPNP), através do parâmetro pós-Newtoniano,  $\gamma$ , que é independente da escala, com  $\gamma = 1$  no caso da RG [6, 7]. Este parâmetro pode ser usado para testar se há desvios em relação às previsões da RG em grandes distâncias, como em escalas de Kpc, típicas de galáxias.

No limite de um campo gravitacional fraco, a métrica do espaço tempo é caracterizada pelos potenciais Newtoniano,  $\Phi$ , e de curvatura,  $\Psi$ . O parâmetro pós-Newtoniano é dado pela razão entre estes dois potenciais

$$\gamma = \frac{\Psi}{\Phi}. \quad (1)$$

Uma maneira de obter uma medida desse parâmetro é através do lenteamento gravitacional forte em escala de galáxias. Lenteamento gravitacional ocorre quando a imagem de alguma galáxia distante é distorcida quando sua luz passa próximo a um objeto massivo (uma galáxia ou um aglomerado de galáxias). Esse efeito pode resultar em múltiplas imagens da galáxia fonte. Se a lente for aproximadamente esférica, uma galáxia elíptica por exemplo, e se houver alinhamento quase perfeito entre a fonte, a lente e o observador, a imagem da galáxia de fundo se deformará no chamado anel de Einstein. O raio desse anel, chamado raio de Einstein,  $\theta_E$ , depende da massa da lente, da curvatura do espaço e das distâncias de diâmetro angular entre observador, lente e fonte. Se o alinhamento não for perfeito, imagens múltiplas se formarão com separação angular muito próxima de  $2\theta_E$ . Conhecendo-se as distâncias e medindo-se o raio de Einstein, é possível estimar a massa relativística,  $M_E$ .

Por outro lado a medida das dispersões de velocidades da galáxia que atua como lente pode nos dar uma estimativa dinâmica da massa. No contexto da gravidade pós-newtoniana parametrizada podemos relacionar  $M_E$  e a massa dinâmica através:

$$M = \frac{1 + \gamma}{2} M_E, \quad (2)$$

onde  $M$  é a massa dinâmica total dentro do raio de Einstein.

Esta abordagem foi utilizada por Bolton et al. 2006 [8] com 15 sistemas de lentes gravitacionais obtendo um resultado  $\gamma = 0.98 \pm 0.07$ , por Schwab et al 2010 [9] com 53 sistemas de lentes gravitacionais e obtendo um resultado  $\gamma = 1.01 \pm 0.05$ . E mais recentemente foi

reproduzida por Cao et. al 2017 [7] com 80 sistemas e resultando em  $\gamma = 0.995 \pm 0.047$ , e por Collet et al 2018 [6] que utilizando um único sistema de lentes, ESO 325-G004, obteve  $\gamma = 0.97 \pm 0.09$ . As incertezas nessas medidas correspondem a um intervalo de confiança de 68%,  $1\sigma$ . Nesse trabalho usaremos uma abordagem semelhante a destes autores e testaremos a gravidade pós-newtoniana parametrizada com 103 sistemas de lentes gravitacionais.

## 2 Objetivos

O fenômeno de lente gravitacional e a medida da dispersão de velocidades estelares,  $\sigma$ , dos objetos que atuam como lentes nos permitem avaliar a métrica de campo gravitacional fraco. A dispersão de velocidades é sensível apenas ao potencial Newtoniano,  $\Phi$ , enquanto o lenteamento é sensível a soma dos potenciais Newtoniano,  $\Phi$ , e de curvatura,  $\Psi$ .

O objetivo deste trabalho é utilizar uma amostra de sistemas de lentes gravitacionais fortes em escala de galáxias medidas pelo *BOSS Emission-Line Lens Survey* (BELLS), *Sloan Lens ACS Survey* (SLACS), do *Lenses Structure and Dynamics Survey* LSD, que é uma versão antiga do SLACS, do *Strong Lensing Legacy Survey* (SL2S) [10] usadas por Cao et al 2017 [7] para medir a massa das galáxias lentes através do lenteamento gravitacional e das medidas espectroscópicas de dispersões de velocidades das estrelas destas e impor vínculos no parâmetro da GPNP que descreve desvio da Relatividade Geral (RG). Iremos adicionar novos sistemas do SLACS [11] e do BELLS [12, 13, 14, 15] para aumentar o tamanho da amostra e diminuir as incertezas estatísticas. A determinação de  $\gamma$  nos permitirá testar os limites de validade da RG.

## 3 Metodologia

### 3.1 Formalismo

A métrica de Schwarzschild pode ser escrita em termos do parâmetro pós-newtoniano (PPN) como na equação a seguir [7],

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\gamma GM}{c^2 r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (3)$$

onde  $ds^2$  é o elemento de distância do espaço-tempo, que deve se manter invariante frente a transformações de coordenadas,  $G$  é a constante da gravitação universal,  $M$  é a massa que está deformando o espaço-tempo,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $c^2 dt^2$  é o diferencial correspondente a coordenada de tempo,  $dr^2$  o diferencial correspondente a coordenada radial  $r$ . Como a métrica de Schwarzschild apresenta um potencial esfericamente simétrico o termo angular,  $d\Omega^2$ , aparece separado do termo radial. Por fim,  $\gamma$  é parâmetro pós-newtoniano (PPN), o qual na RG corresponde a  $\gamma = 1$ .

Da teoria de lentes gravitacionais, para um sistema de lentes fortes, múltiplas imagens da fonte podem ser formadas. Se houver alinhamento quase perfeito entre a fonte, a lente e o observador, e a lente for aproximadamente esférica (uma galáxia elíptica, por exemplo), se formará um anel de luz ao redor da lente, o anel de Einstein. O raio angular desse anel, raio de Einstein  $\theta_E$  [16], pode ser escrito em termos do PPN segundo a equação

$$\theta_E = \left( \frac{2(1 + \gamma)GM_E}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_s D_l} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

onde  $M_E$  é a massa limitada por um cilindro de raio igual ao raio de Einstein, e comprimento infinito na direção da linha de visada.  $M_E$  é também chamada de massa relativística.  $D_s$  é a distância de diâmetro angular da fonte,  $D_l$  é a distância de diâmetro angular da lente e  $D_{ls}$  é a distância de diâmetro angular entre a lente e a fonte. Rearranjando os termos e substituindo  $R_E = D_l \theta_E$  obtemos

$$\frac{GM_E}{R_E} = \frac{1}{1 + \gamma} \frac{c^2}{2} \frac{D_s}{D_{ls}} \theta_E. \quad (5)$$

Por outro lado, a medida espectroscópica das dispersões de velocidades,  $\sigma$ , das estrelas em galáxias elípticas pode nos dar uma estimativa massa dinâmica da lente. Assumindo que o perfil de densidade de massa  $\rho(r)$  e o perfil de densidade de luminosidade  $\nu(r)$  são dados por leis de potências

$$\rho(r) = \rho_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\alpha}, \quad (6)$$

$$\nu(r) = \nu_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\delta}, \quad (7)$$

onde  $r$  é a coordenada esférica radial do centro da lente,  $\alpha$  e  $\delta$  são parâmetros ajustáveis. Sabemos que para obter a distribuição de massa é necessário integrar a distribuição de densidade em um elemento de volume

$$M = \int \rho dv. \quad (8)$$

Para calcular a massa contida em um cilindro de raio igual ao raio de Einstein,  $M_E$ , iremos projetar a densidade do cilindro, ao longo da linha de visada, em um disco de distribuição de densidade superficial  $\Sigma(r)$ , como esquematizado na Figura 1:

$$\Sigma(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r(z)) dz = 2 \int_0^{\infty} \rho(r(z)) dz. \quad (9)$$

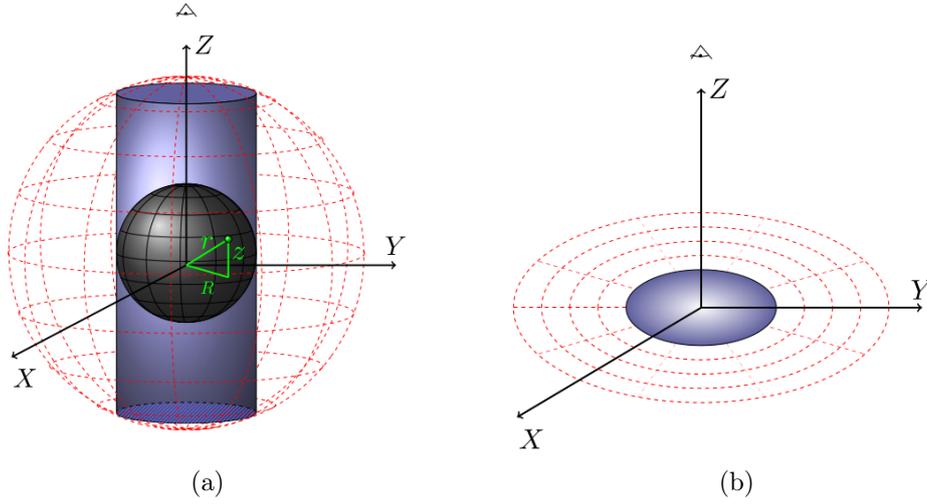


Fig. 1: Distribuição de massa (a) cilíndrica e esférica e (b) a projeção dessas em um disco no plano XY.

A equação (6) é uma distribuição esférica de densidade, por essa razão será necessário realizar uma transformação de coordenadas tal que  $r^2 = z^2 + R^2$  e com o elemento de distância  $dz = r dr / \sqrt{r^2 + R^2}$ . Considerando isso e substituindo (6) em (9) obtemos

$$\Sigma(R) = 2 \frac{\rho_0}{r_0^{-\alpha}} \int_R^{\infty} \frac{r^{1-\alpha}}{\sqrt{r^2 + R^2}} dr. \quad (10)$$

Podemos fazer uma substituição tal que  $u = \frac{R}{r}$ , com o diferencial  $dr = -\frac{R}{u^2} du$ , obtendo assim uma nova integral

$$\Sigma(R) = 2 \frac{\rho_0}{r_0^{-\alpha}} R^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{u^{\alpha-2}}{\sqrt{1-u^2}} du. \quad (11)$$

Por fim fazemos a substituição  $w = u^2$  e  $du = dw / 2\sqrt{w}$ , obtemos:

$$\Sigma(R) = \frac{\rho_0}{r_0^{-\alpha}} R^{1-\alpha} \int_0^1 w^{(\frac{\alpha-1}{2})-1} (1-w)^{\frac{1}{2}-1} dw. \quad (12)$$

A integral da equação (12) é uma função beta de Euler, a qual é dada por

$$B(x, y) = \int_0^1 w^{x-1} (1-w)^{y-1} dw. \quad (13)$$

Substituindo (13) em (12) obtemos uma forma relativamente simples para a densidade superficial de massa,

$$\Sigma(R) = \frac{\rho_0}{r_0^{-\alpha}} R^{1-\alpha} B\left(\frac{\alpha-1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (14)$$

Para obter a massa cilíndrica,  $M_E$ , basta integrar  $\Sigma(R)$  na superfície da Figura 1(b),

$$M_E = \int \Sigma(R) dS = \int_0^{R_E} \frac{\rho_0}{r_0^{-\alpha}} R^{1-\alpha} B\left(\frac{\alpha-1}{2}, \frac{1}{2}\right) 2\pi R dR. \quad (15)$$

Resolvendo a equação (15), obtemos que a massa envolvida por um cilindro de raio igual ao raio de Einstein é dado por

$$M_E = 2\pi \frac{\rho_0}{r_0^{-\alpha}} B\left(\frac{\alpha-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \frac{R_E^{3-\alpha}}{3-\alpha}. \quad (16)$$

Podemos expandir a função beta da equação (16) em funções gamas de Euler, usando a relação

$$B\left(\frac{\alpha-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{\pi}\lambda(\alpha), \quad (17)$$

onde  $\lambda(\alpha) = \Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . Substituindo a equação (17) na equação (16), obtemos uma relação mais simples para a massa relativística

$$M_E = 2\pi \frac{\rho_0}{r_0^{-\alpha}} \sqrt{\pi}\lambda(\alpha) \frac{R_E^{3-\alpha}}{3-\alpha}. \quad (18)$$

A distribuição de massa dinâmica, ou massa esférica,  $M(r)$ , pode ser calculada integrando a distribuição de densidade esférica da equação (6) no volume de uma esfera de um raio  $r$  qualquer

$$M(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = 4\pi \frac{\rho_0}{r_0^{-\alpha}} \frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha}. \quad (19)$$

Podemos então escrever  $M(r)$  em termos de  $M_E$ :

$$M(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\lambda(\alpha)} \left(\frac{r}{R_E}\right)^{3-\alpha} M_E. \quad (20)$$

A medida da dispersão de velocidades das estrelas em uma galáxia elíptica que atue como lente pode nos dar uma estimativa de sua massa dinâmica. A dispersão de velocidades radial de matéria luminosa,  $\sigma_r^2$ , nas galaxias que atuam como lentes, pode ser derivada da equação de Jeans [17, 18], pode ser escrita como

$$\sigma_r^2(r) = \frac{G \int_r^\infty dr' \nu(r') M(r') (r')^{2\beta-2}}{r^{2\beta} \nu(r)}, \quad (21)$$

onde  $\beta$  é o parâmetro que caracteriza a distribuição anisotrópica das velocidades das estrelas das galáxias que atuam como lentes e é dado por

$$\beta = 1 - \frac{\sigma_t^2}{\sigma_r^2}, \quad (22)$$

onde  $\sigma_t^2$  e  $\sigma_r^2$  são as componentes radiais e tangenciais da dispersão de velocidades, respectivamente. Nesse trabalho, vamos assumir que em uma distribuição anisotrópica  $\beta \neq 0$  e que  $\beta$  é independente de  $r$ .

Inserindo as equações (7) e (20) na equação (21) e resolvendo as integrais obtemos

$$\sigma_r^2(r) = \left[ \frac{GM_E}{R_E} \right] \frac{2}{\sqrt{\pi}(\xi - 2\beta)\lambda(\alpha)} \left( \frac{r}{R_E} \right)^{2-\alpha}, \quad (23)$$

com  $\xi = \delta + \alpha - 2$ , a qual é uma previsão teórica para as dispersões de velocidades das estrelas nas galáxias lentes.

A dispersão de velocidades das estrelas das galáxias lentes medidas através dos espectros pode resultar em um valor diferente do previsto teoricamente. Isso se dá principalmente pelo espalhamento da luz da galáxia observada devido à atmosfera terrestre. Quando a razão entre o diâmetro de abertura da fibra do espectrômetro,  $\theta_{ap}$ , e o *seeing* devido ao espalhamento da luz pela atmosfera,  $\sigma_{atm}$ , for menor que 1.5 [9], podemos aproximar a função de abertura fotométrica efetiva,  $w$ , pela expressão

$$w(R) \approx e^{-\theta/2\tilde{\sigma}_{atm}^2}, \quad (24)$$

onde  $\theta = R/D_L$  e  $\tilde{\sigma}_{atm}^2 \approx \sigma_{atm}^2(1 + \chi^2/4 + \chi^4/40)$  com  $\chi = \theta_{ap}/\sigma_{atm}$  [9, 7].

Além disso, a dispersão de velocidades observada será uma média ponderada pela luminosidade ao longo da linha de visada sobre a abertura fotométrica efetiva. Levando em conta esses dois efeitos, temos

$$\langle \sigma_\star^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty R w(R) \int_{-\infty}^\infty \nu(r) \left(1 - \beta \frac{R^2}{r^2}\right) \sigma_r^2(r) dz dR}{\int_0^\infty R w(R) \int_{-\infty}^\infty \nu(r) dz dR}. \quad (25)$$

As integrais duplas do numerador e do denominador de (25) são muito semelhantes, começamos resolvendo a primeira, substituindo  $\nu(r)$  e  $\sigma_r^2(r)$  pelas equações (7) e (23), respectivamente. Assim obtemos

$$\langle \sigma_{\star}^2 \rangle = \frac{\int_0^{\infty} R w(R) dR \int_{-\infty}^{\infty} \nu_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\delta} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left[ \frac{GM_E}{R_E} \right] \frac{2}{\sqrt{\pi}(\xi-2\beta)\lambda(\alpha)} \left( \frac{r}{R_e} \right)^{2-\alpha} dz}{\int_0^{\infty} R w(R) dR \int_{-\infty}^{\infty} \nu_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\delta} dz}. \quad (26)$$

Fazendo a transformação de coordenadas  $z = \sqrt{r^2 + R^2}$  e integrando obtemos:

$$\langle \sigma_{\star}^2 \rangle = \frac{\left[ \frac{GM_E}{R_E} \right] \frac{2}{\sqrt{\pi}(\xi-2)\lambda(\alpha)} \frac{1}{R_E^{2-\alpha}} \left[ B\left(\frac{\xi-1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \beta B\left(\frac{\xi+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] \int_0^{\infty} R^{1-\delta} R w(R) dR}{B\left(\frac{\delta-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_0^{\infty} R^{2-\delta} w(R) dR}. \quad (27)$$

Resolvendo a última integral e expandindo as funções betas, obtemos finalmente uma equação que relacione os parâmetros que temos interesse em determinar com valores que podem ser medidos através de observações.

$$\langle \sigma_{\star}^2 \rangle = \left[ \frac{GM_E}{R_E} \right] \left( \frac{2\tilde{\sigma}_{atm}^2}{\theta_E^2} \right)^{1-\alpha/2} \frac{1}{(\xi-2\beta)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\lambda(\xi) - \beta\lambda(\xi+2)}{\lambda(\alpha)\lambda(\delta)} \right) \frac{\Gamma(\frac{3-\xi}{2})}{\Gamma(\frac{3-\delta}{2})}. \quad (28)$$

Na próxima seção apresentaremos o tratamento estatístico da nossa amostra. Para facilitar a notação, de agora em diante, abreviaremos  $\langle \sigma_{\star}^2 \rangle$  por  $\bar{\sigma}_{\star}^2$ .

### 3.2 Determinação de $\gamma$ e tratamento estatístico

Iremos comparar a dispersão de velocidade medida através espectro das galáxias,  $\sigma_0$ , com o calculado pelo modelo,  $\bar{\sigma}_{\star}$ , através da equação (28). Temos que  $\bar{\sigma}_{\star} = \bar{\sigma}_{\star}(\alpha, \delta, \beta, \theta_E; \gamma)$  é uma função que depende dos observáveis  $(\alpha, \delta, \beta, \theta_E)$  e do parâmetro  $\gamma$ .

Vamos considerar que a probabilidade de medir uma certa dispersão de velocidades  $\sigma_0$  obedece uma distribuição gaussiana, com média dada pelo valor  $\bar{\sigma}_{\star}$  e variância dada pela incerteza na medida da dispersão de velocidades,  $\epsilon_0$  [9]

$$P(\sigma_0|\bar{\sigma}_{\star}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon_0} \exp \left[ -\frac{(\bar{\sigma}_{\star} - \sigma_0)^2}{2\epsilon_0^2} \right]. \quad (29)$$

Para calcular a distribuição de probabilidades do parâmetro  $\gamma$ , vamos fixar o valor de  $\delta = 2.40$ , valor médio calculado por Schwab et al 2010 [9] e considerar que  $\alpha$  e  $\beta$  também possuem uma distribuição gaussiana. Para  $P(\alpha)$  iremos considerar a média  $\langle \alpha \rangle = 2.00$  e a dispersão  $\sigma_{\alpha} = 0.08$  sugeridas por Schawab et al. 2010 [9]. Para  $P(\beta)$  usamos a média  $\langle \beta \rangle = 0.18$  e a dispersão  $\sigma_{\beta} = 0.13$  como sugerido por Cao et al. 2017 [7]. É importante citar que, como mensurado por Xu et al 2016 [19],  $\beta$  depende fortemente das dispersões de velocidades e seu valor médio pode variar de 0.10 a 0.30 para galáxias de massa intermediárias ( $200 \text{ kms}^{-1} < \sigma_{ap} \leq 300 \text{ kms}^{-1}$ ) [7, 19]. A distribuição de probabilidades de  $\gamma$  é dada por

$$P(\sigma_0|\gamma) = \int d\alpha P(\alpha) \int d\beta P(\beta) P(\sigma_0|\bar{\sigma}_{\star}(\alpha, \beta, \gamma)). \quad (30)$$

Nessa análise estamos assumindo a independência das medidas de  $\sigma_0$  de cada sistema e que todos os valores de  $\gamma$  possuem o mesmo peso estatístico. A distribuição de densidade de probabilidades total de  $\gamma$  é proporcional ao produtório das distribuições de densidades de probabilidades individuais de  $\gamma$  para cada sistema de lentes,

$$P(\gamma|\{\sigma_{0,i}\}) \propto P(\gamma)P(\{\sigma_{0,i}\}|\gamma) \propto P(\gamma) \prod_{i=1}^{103} P(\sigma_{0,i}|\gamma). \quad (31)$$

Na próxima seção iremos apresentar a amostra usada em nossa análise.

### 3.3 Amostra

O resultado obtido por Cao et al. 2017 [7] se baseou em 118 sistemas de lentes contidas na Tabela 1 do artigo de Cao et al. 2015 [10]. Dessas, 25 são do projeto *Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) Emission-Line Lens Survey* (BELLS), 57 do projeto *Sloan LensACS Survey* (SLACS), cujos dados são provenientes do *Sloan Digital Survey* (SDSS - III), 5 do *Lenses Structure and Dynamics Survey* (LSD), que é uma versão antiga do SLACS e 31 do projeto *Strong Lensing Legacy Survey* (SL2S), o qual é um projeto dedicado a encontrar galáxias que atuem como lentes gravitacionais. A esta amostra foram incluídos 40 sistemas descobertos pelo SLACS e retirados de Leaf et al 2018 [11], e 5 sistemas do BELLS retirados de Amvrosiadis et al 2017 [12].

Seguindo a mesma abordagem feita por Cao et al. 2017 [7], devido ao fato do parâmetro de anisotropia das velocidades das estrelas das galáxias que atuam como lentes,  $\beta$ , depender fortemente das dispersões de velocidades das mesmas, restringimos os valores de dessa dispersão de velocidades,  $\sigma_{ap}$ , ao intervalo  $200 \text{ kms}^{-1} < \sigma_{ap} \leq 300 \text{ kms}^{-1}$  [19], que resultou em 103 sistemas de galáxias representadas na Figura 2. A amostra está também descrita na Tabela 1, onde a primeira coluna é o nome do sistema, a segunda o desvio para o vermelho da lente, a terceira o desvio para o vermelho da fonte, a quarta a dispersão de velocidades observada, a quinta o raio de Einstein, a sexta o projeto responsável pelo sistema, a sétima o raio de abertura da fibra do espectrômetro, a oitava o raio efetivo da galáxia lente. A nona coluna é a dispersão de velocidades reescalada para uma abertura circular de raio igual a metade do raio efetivo da galáxia ( $\theta_{ef}$ ) e pesado pelo raio de abertura da fibra,  $\sigma_0 = \sigma_{ap}(\theta_{ef}/2\theta_{ap})^{-0.04}$ . Para uma única galáxia poderia ser usado simplesmente  $\sigma_{ap}$ , mas como estaremos lidando com uma amostra é necessário que se faça essa correção para garantir que estamos medindo a dispersão de velocidades no mesmo intervalo para todas as galáxias da amostra. Por fim, a última coluna é o *seeing* atmosférico.

O *seeing* atmosférico,  $\sigma_{atm}$ , foi tomado como a média dos valores dos projetos [20]. Para as amostras do SLACS foi usado 1.4" [21], para os sistemas do BELLS usamos 1.8" [22], para as amostras do LSD foi usado 1.25" [23], para os sistemas do SL2S as informações foram tiradas de Sonnenfeld et al 2013 [24].

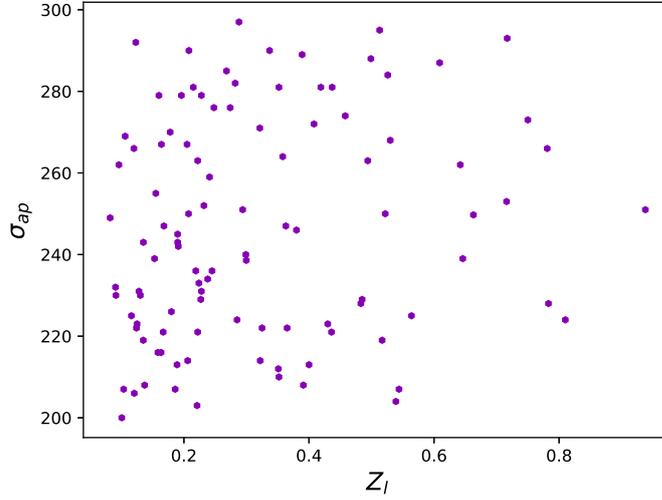


Fig. 2: Gráfico da dispersão de velocidades pelo desvio para o vermelho da lente para os 103 sistemas utilizados na nossa análise depois da restrição  $200 \text{ km s}^{-1} < \sigma_{ap} \leq 300 \text{ km s}^{-1}$ .

Nome	$z_l$	$z_s$	$\sigma_{ap}$ ( $Kms^{-1}$ )	$\theta_E$ ( $''$ )	Projeto	$\theta_{ap}$ ( $''$ )	$\theta_{ef}$ ( $''$ )	$\sigma_0$ ( $Kms^{-1}$ )	$\sigma_{atm}$ ( $''$ )
J0151+0049	0.517	1.364	219 $\pm$ 39	0.68	BELLS	1	0.89	226 $\pm$ 40	1.8
J0747+4448	0.437	0.897	281 $\pm$ 52	0.61	BELLS	1	2.87	277 $\pm$ 51	1.8
J0830+5116	0.530	1.332	268 $\pm$ 36	1.14	BELLS	1	1.10	274 $\pm$ 37	1.8
J0944-0147	0.539	1.179	204 $\pm$ 34	0.72	BELLS	1	1.35	207 $\pm$ 35	1.8
J1215+0047	0.642	1.297	262 $\pm$ 45	1.37	BELLS	1	1.42	266 $\pm$ 46	1.8
J1337+3620	0.564	1.182	225 $\pm$ 35	1.39	BELLS	1	1.60	227 $\pm$ 35	1.8
J1542+1629	0.352	1.023	210 $\pm$ 16	1.04	BELLS	1	1.45	213 $\pm$ 16	1.8
J1545+2748	0.522	1.289	250 $\pm$ 37	1.21	BELLS	1	2.65	247 $\pm$ 37	1.8
J1601+2138	0.544	1.446	207 $\pm$ 36	0.86	BELLS	1	0.63	217 $\pm$ 38	1.8
J1631+1854	0.408	1.086	272 $\pm$ 14	1.63	BELLS	1	2.07	272 $\pm$ 14	1.8
J1637+1439	0.391	0.874	208 $\pm$ 30	0.65	BELLS	1	0.89	215 $\pm$ 31	1.8
J2125+0411	0.363	0.978	247 $\pm$ 17	1.2	BELLS	1	1.47	250 $\pm$ 17	1.8
J2303+0037	0.458	0.936	274 $\pm$ 31	1.02	BELLS	1	1.35	278 $\pm$ 31	1.8
J0029-0055	0.227	0.931	229 $\pm$ 18	0.96	SLACS	1.5	2.16	232 $\pm$ 18	1.4
J0037-0942	0.196	0.632	279 $\pm$ 10	1.53	SLACS	1.5	2.19	283 $\pm$ 10	1.4
J0044+0113	0.120	0.196	266 $\pm$ 13	0.79	SLACS	1.5	2.61	267 $\pm$ 13	1.4
J0109+1500	0.294	0.525	251 $\pm$ 19	0.69	SLACS	1.5	1.38	259 $\pm$ 20	1.4
J0157-0056	0.513	0.924	295 $\pm$ 47	0.79	SLACS	1.5	1.06	308 $\pm$ 49	1.4
J0330-0020	0.351	1.071	212 $\pm$ 21	1.1	SLACS	1.5	1.20	220 $\pm$ 22	1.4
J0728+3835	0.206	0.688	214 $\pm$ 11	1.25	SLACS	1.5	1.78	219 $\pm$ 11	1.4
J0808+4706	0.219	1.025	236 $\pm$ 11	1.23	SLACS	1.5	2.42	238 $\pm$ 11	1.4
J0822+2652	0.241	0.594	259 $\pm$ 15	1.17	SLACS	1.5	1.82	264 $\pm$ 15	1.4
J0841+3824	0.116	0.657	225 $\pm$ 11	1.41	SLACS	1.5	4.21	222 $\pm$ 11	1.4
J0903+4116	0.430	1.065	223 $\pm$ 27	1.29	SLACS	1.5	1.78	228 $\pm$ 28	1.4
J0936+0913	0.190	0.588	243 $\pm$ 12	1.09	SLACS	1.5	2.11	246 $\pm$ 12	1.4
J0946+1006	0.222	0.608	263 $\pm$ 21	1.38	SLACS	1.5	2.35	266 $\pm$ 21	1.4

Nome	$z_l$	$z_s$	$\sigma_{ap}$ ( $Km_s^{-1}$ )	$\theta_E$ ( $''$ )	Projeto	$\theta_{ap}$ ( $''$ )	$\theta_{ef}$ ( $''$ )	$\sigma_0$ ( $Km_s^{-1}$ )	$\sigma_{atm}$ ( $''$ )
J1016+3859	0.168	0.439	247 ±13	1.09	SLACS	1.5	1.46	254 ±13	1.4
J1020+1122	0.282	0.553	282 ±18	1.2	SLACS	1.5	1.59	289 ±18	1.4
J1023+4230	0.191	0.696	242 ±15	1.41	SLACS	1.5	1.77	247 ±15	1.4
J1106+5228	0.096	0.407	262 ±13	1.23	SLACS	1.5	1.68	268 ±13	1.4
J1134+6027	0.153	0.474	239 ±12	1.1	SLACS	1.5	2.02	243 ±12	1.4
J1142+1001	0.222	0.504	221 ±22	0.98	SLACS	1.5	1.91	225 ±22	1.4
J1143-0144	0.106	0.402	269 ±13	1.68	SLACS	1.5	4.80	264 ±13	1.4
J1153+4612	0.180	0.875	226 ±15	1.05	SLACS	1.5	1.16	235 ±16	1.4
J1204+0358	0.164	0.631	267 ±17	1.31	SLACS	1.5	1.47	275 ±17	1.4
J1205+4910	0.215	0.481	281 ±14	1.22	SLACS	1.5	2.59	283 ±14	1.4
J1213+6708	0.123	0.640	292 ±15	1.42	SLACS	1.5	3.23	291 ±15	1.4
J1218+0830	0.135	0.717	219 ±11	1.45	SLACS	1.5	3.18	218 ±11	1.4
J1250+0523	0.232	0.795	252 ±14	1.13	SLACS	1.5	1.81	257 ±14	1.4
J1251-0208	0.224	0.784	233 ±23	0.84	SLACS	1.5	2.61	234 ±23	1.4
J1402+6321	0.205	0.481	267 ±17	1.35	SLACS	1.5	2.70	268 ±17	1.4
J1403+0006	0.189	0.473	213 ±17	0.83	SLACS	1.5	1.46	219 ±17	1.4
J1416+5136	0.299	0.811	240 ±25	1.37	SLACS	1.5	1.43	247 ±26	1.4
J1436-0000	0.285	0.805	224 ±17	1.12	SLACS	1.5	2.24	227 ±17	1.4
J1451-0239	0.125	0.520	223 ±14	1.04	SLACS	1.5	2.48	225 ±14	1.4
J1525+3327	0.358	0.717	264 ±26	1.31	SLACS	1.5	2.90	264 ±26	1.4
J1531-0105	0.160	0.744	279 ±14	1.71	SLACS	1.5	2.50	281 ±14	1.4
J1621+3931	0.245	0.602	236 ±20	1.29	SLACS	1.5	2.14	239 ±20	1.4
J1627-0053	0.208	0.524	290 ±14	1.23	SLACS	1.5	1.98	295 ±14	1.4
J1630+4520	0.248	0.793	276 ±16	1.78	SLACS	1.5	1.96	281 ±16	1.4
J1636+4707	0.228	0.674	231 ±15	1.09	SLACS	1.5	1.68	236 ±15	1.4
J2300+0022	0.228	0.464	279 ±17	1.24	SLACS	1.5	1.83	285 ±17	1.4
J2303+1422	0.155	0.517	255 ±16	1.62	SLACS	1.5	3.28	254 ±16	1.4
J2321-0939	0.082	0.532	249 ±8	1.6	SLACS	1.5	4.11	246 ±8	1.4
J2341+0000	0.186	0.807	207 ±13	1.44	SLACS	1.5	3.15	207 ±13	1.4
Q0047-2808	0.485	3.595	229 ±15	1.34	LSD	1.25	0.82	239 ±16	0.7
CFRS03-1077	0.938	2.941	251 ±19	1.24	LSD	1.25	1.60	256 ±19	0.8
HST14176	0.810	3.399	224 ±15	1.41	LSD	1.25	1.06	232 ±16	0.75
J0212-0555	0.750	2.740	273 ±22	1.27	SL2S	0.9	1.22	277 ±22	0.95
J0213-0743	0.717	3.480	293 ±34	2.39	SL2S	1	1.97	293 ±34	0.6
J0214-0405	0.609	1.880	287 ±47	1.41	SL2S	1	1.21	293 ±48	0.7
J0217-0513	0.646	1.847	239 ±27	1.27	SL2S	1.5	0.73	253 ±29	0.6
J0219-0829	0.389	2.150	289 ±23	1.3	SL2S	1	0.95	298 ±24	0.7
J0223-0534	0.499	1.440	288 ±28	1.22	SL2S	1	1.31	293 ±28	0.6
J0225-0454	0.238	1.199	234 ±21	1.76	SL2S	1	2.12	233 ±21	0.7
J0226-0420	0.494	1.232	263 ±24	1.19	SL2S	1	0.84	272 ±25	0.6
J0232-0408	0.352	2.340	281 ±26	1.04	SL2S	1	1.14	287 ±27	0.7
J0849-0251	0.274	2.090	276 ±35	1.16	SL2S	0.9	1.34	279 ±35	0.8
J0850-0347	0.337	3.250	290 ±24	0.93	SL2S	0.7	0.28	309 ±26	0.6
J0855-0147	0.365	3.390	222 ±25	1.03	SL2S	0.7	0.69	228 ±26	0.7
J0855-0409	0.419	2.950	281 ±22	1.36	SL2S	0.7	1.13	283 ±22	0.6
J1359+5535	0.783	2.770	228 ±29	1.14	SL2S	1	1.13	233 ±30	0.8
J1405+5243	0.526	3.010	284 ±21	1.51	SL2S	1	0.83	294 ±22	0.65
J1406+5226	0.716	1.470	253 ±19	0.94	SL2S	1	0.80	262 ±20	0.9
J1411+5651	0.322	1.420	214 ±23	0.93	SL2S	1	0.85	221 ±24	1.3
J1420+5258	0.380	0.990	246 ±23	0.96	SL2S	1	1.11	252 ±24	0.8
J1420+5630	0.483	3.120	228 ±19	1.4	SL2S	1	1.62	230 ±19	1

Nome	$z_l$	$z_s$	$\sigma_{ap}$ ( $Kms^{-1}$ )	$\theta_E$ ( $''$ )	Projeto	$\theta_{ap}$ ( $''$ )	$\theta_{ef}$ ( $''$ )	$\sigma_0$ ( $Kms^{-1}$ )	$\sigma_{atm}$ ( $''$ )
J2203+0205	0.400	2.150	213 ±21	1.95	SL2S	1	0.99	219 ±22	0.9
J2221+0115	0.325	2.350	222 ±23	1.4	SL2S	1	1.12	227 ±24	0.96
J2222+0012	0.436	1.360	221 ±22	1.44	SL2S	1	1.56	223 ±22	0.9
J0143-1006	0.221	1.1046	203 ±17	1.23	SLACS2017	1.5	3.24	202 ±17	1.4
J0159-0006	0.1584	0.7477	216 ±18	0.92	SLACS2017	1.5	1.58	222 ±18	1.4
J0753+3416	0.1371	0.9628	208 ±12	1.23	SLACS2017	1.5	1.89	212 ±12	1.4
J0757+1956	0.1206	0.8326	206 ±11	1.62	SLACS2017	1.5	3.67	204 ±11	1.4
J0920+3028	0.2881	0.3918	297 ±17	0.70	SLACS2017	1.5	4.25	293 ±17	1.4
J0955+3014	0.3214	0.4671	271 ±33	0.54	SLACS2017	1.5	2.95	271 ±33	1.4
J1010+3124	0.1668	0.4245	221 ±11	1.14	SLACS2017	1.5	3.26	220 ±11	1.4
J1041+0112	0.1006	0.2172	200 ±7	0.60	SLACS2017	1.5	2.50	201 ±7	1.4
J1051+4439	0.1634	0.538	216 ±16	0.99	SLACS2017	1.5	1.66	221 ±16	1.4
J1101+1523	0.178	0.5169	270 ±15	1.18	SLACS2017	1.5	0.89	283 ±16	1.4
J1127+2312	0.1303	0.361	230 ±9	1.25	SLACS2017	1.5	2.69	231 ±9	1.4
J1137+1818	0.1241	0.4627	222 ±8	1.29	SLACS2017	1.5	1.79	227 ±8	1.4
J1144+0436	0.1036	0.2551	207 ±14	0.76	SLACS2017	1.5	1.22	215 ±15	1.4
J1213+2930	0.0906	0.5954	232 ±7	1.35	SLACS2017	1.5	1.73	237 ±7	1.4
J1330+1750	0.2074	0.3717	250 ±12	1.01	SLACS2017	1.5	2.85	251 ±12	1.4
J1433+2835	0.0912	0.4115	230 ±6	1.53	SLACS2017	1.5	3.23	229 ±6	1.4
J1543+2202	0.2681	0.3966	285 ±16	0.78	SLACS2017	1.5	2.32	288 ±16	1.4
J1550+2020	0.1351	0.3501	243 ±9	1.01	SLACS2017	1.5	1.68	249 ±9	1.4
J1633+1441	0.1281	0.5804	231 ±9	1.39	SLACS2017	1.5	2.39	233 ±9	1.4
J2324+0105	0.1899	0.2775	245 ±15	0.59	SLACS2017	1.5	1.10	255 ±16	1.4
J001615.8+032435	0.663	2.765	250±65	5.22	BELLS	1	1.485	253±66	1.8
J090311.6+003906	0.2997	3.042	239±16	1.52	BELLS	1	1.815	240±17	1.8
J110016.3+571736	0.781	1.651	266±63	1.14	BELLS	1	5.65	255±61	1.8

Tab. 1: Amostra usada em nossa análise, apenas aquelas que possuem  $\sigma_{ap}$  no intervalo  $200 \text{ kms}^{-1} < \sigma_{ap} \leq 300 \text{ kms}^{-1}$ .

## 4 Resultados

Seguindo a metodologia discutida na Seção 3, usamos a amostra da Seção 3.3 para calcular a densidade de probabilidades de  $\gamma$ , usando a equação (30), e ajustando uma curva gaussiana a essa função de probabilidades condicionadas encontramos que  $\gamma = 1.037 \pm 0.032$ . Na Figura 3, a curva verde representa a densidade de probabilidade total para  $\gamma$ , as demais curvas correspondem as densidades de probabilidade de  $\gamma$  para cada sistema individual da amostra, sendo as curvas azuis os sistemas com desvio para o vermelho da galáxia lente  $z_l < 0.5$  e as curvas vermelhas sistemas com desvio para o vermelho da galáxia lente  $z_l \geq 0.5$ . Esse resultado é marginalmente inconsistente com o esperado  $\gamma = 1$  da RG, dentro de um intervalo de confiança de 68%. Comparando com a literatura temos Bolton et al. 2006 [8] que realizou essa análise com 15 sistemas de lentes e obteve como resultado  $\gamma = 0.98 \pm 0.07$ , Schwab et al. 2010 [9] usou 53 sistemas e obteve  $\gamma = 1.01 \pm 0.05$ , e finalmente Cao et al. 2017 [7], que possuía 80 sistemas e chegou ao resultado  $\gamma = 0.995 \pm 0.047$ . Como esperado, o aumento no número de lentes neste

trabalho resultou na diminuição da incerteza estatística. No entanto, os erros sistemáticos podem ser comparáveis ou em alguns casos dominantes sobre as incertezas estatísticas.

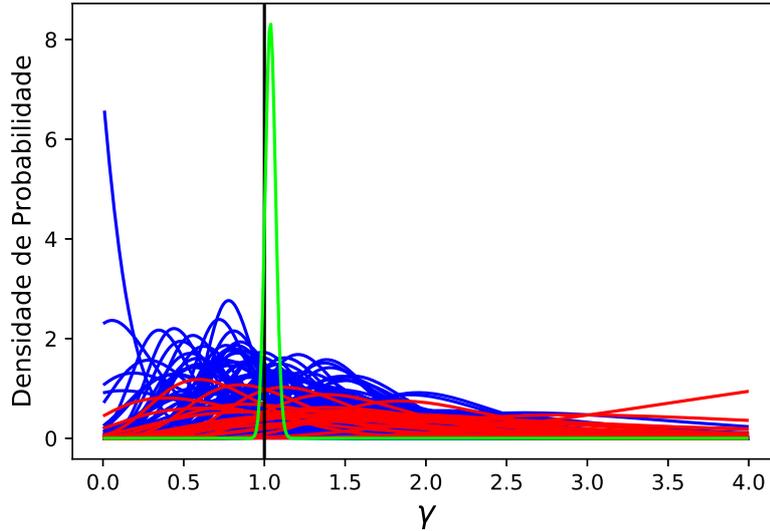


Fig. 3: Gráfico da densidade de probabilidade do parâmetro  $\gamma$ . A curva verde representa a dispersão de probabilidades total do parâmetro  $\gamma$ , e através dela é possível obter um valor médio de  $\gamma = 1.037 \pm 0.032$ . As curvas azuis são as densidades de probabilidades individuais dos sistemas cujas lentes possuem desvio para o vermelho  $z_l < 0.5$ . As curvas vermelhas são as densidades de probabilidades individuais dos sistemas cujas lentes possuem desvio para o vermelho  $z_l \geq 0.5$ . A linha preta em  $\gamma = 1$  é o valor esperado para a RG.

Na Tabela 2 mostramos os testes da variação do parâmetro  $\gamma$  nos limites dos parâmetros do perfil de densidade de massa,  $\alpha$ , da anisotropia das velocidades das estrelas na galáxia que atua como lente,  $\beta$ , e do perfil de densidade de luminosidade,  $\delta$ . O objetivo é mostrar o quão sensível é  $\gamma$  às mudanças nesses parâmetros. Notamos que os erros sistemáticos podem causar uma mudança de até  $\sim 17\%$  no valor do parâmetro  $\gamma$ . Também é importante notar que  $\alpha$  é o parâmetro que causa o maior desvio em  $\gamma$ .

Na Figura 4 mostramos o deslocamento da densidade de probabilidades de  $\gamma$  devido aos parâmetros responsáveis pelos erros sistemáticos. No gráfico 4(a) fixamos os parâmetros de anisotropia das velocidades das estrelas na galáxia que atua como lente,  $\beta$ , e do perfil de densidade de luminosidade,  $\delta$ , e testamos a sensibilidade de  $\gamma$  nos limites do parâmetro do perfil de densidade de massa,  $\alpha$ . No gráfico 4(b) fixamos os parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$ , e testamos a sensibilidade de  $\gamma$  nos limites do parâmetro  $\beta$ . No gráfico 4(c) fixamos os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , e testamos a sensibilidade de  $\gamma$  nos limites do parâmetro  $\delta$ . A Figura 4(a) é a que apresenta maior separação entre as curvas, pois  $\gamma$  tem mais sensibilidade ao parâmetro  $\alpha$ .

Sistemática			Parâmetro PPN
$\alpha = 1.92$	$\beta = 0.18$	$\delta = 2.40$	$\gamma = 0.875 \pm 0.023$
$\alpha = 2.08$	$\beta = 0.18$	$\delta = 2.40$	$\gamma = 1.169 \pm 0.027$
$\alpha = 2.00$	$\beta = 0.05$	$\delta = 2.40$	$\gamma = 0.921 \pm 0.024$
$\alpha = 2.00$	$\beta = 0.31$	$\delta = 2.40$	$\gamma = 1.095 \pm 0.027$
$\alpha = 2.00$	$\beta = 0.18$	$\delta = 2.29$	$\gamma = 1.119 \pm 0.026$
$\alpha = 2.00$	$\beta = 0.18$	$\delta = 2.51$	$\gamma = 0.888 \pm 0.023$

Tab. 2: Sensibilidade de  $\gamma$  em relação aos parâmetros do perfil de densidade de massa,  $\alpha$ , de anisotropia das velocidades das estrelas na galáxia que atua como lente,  $\beta$ , e do perfil de densidade de luminosidade,  $\delta$ , responsáveis pelos erros sistemáticos.

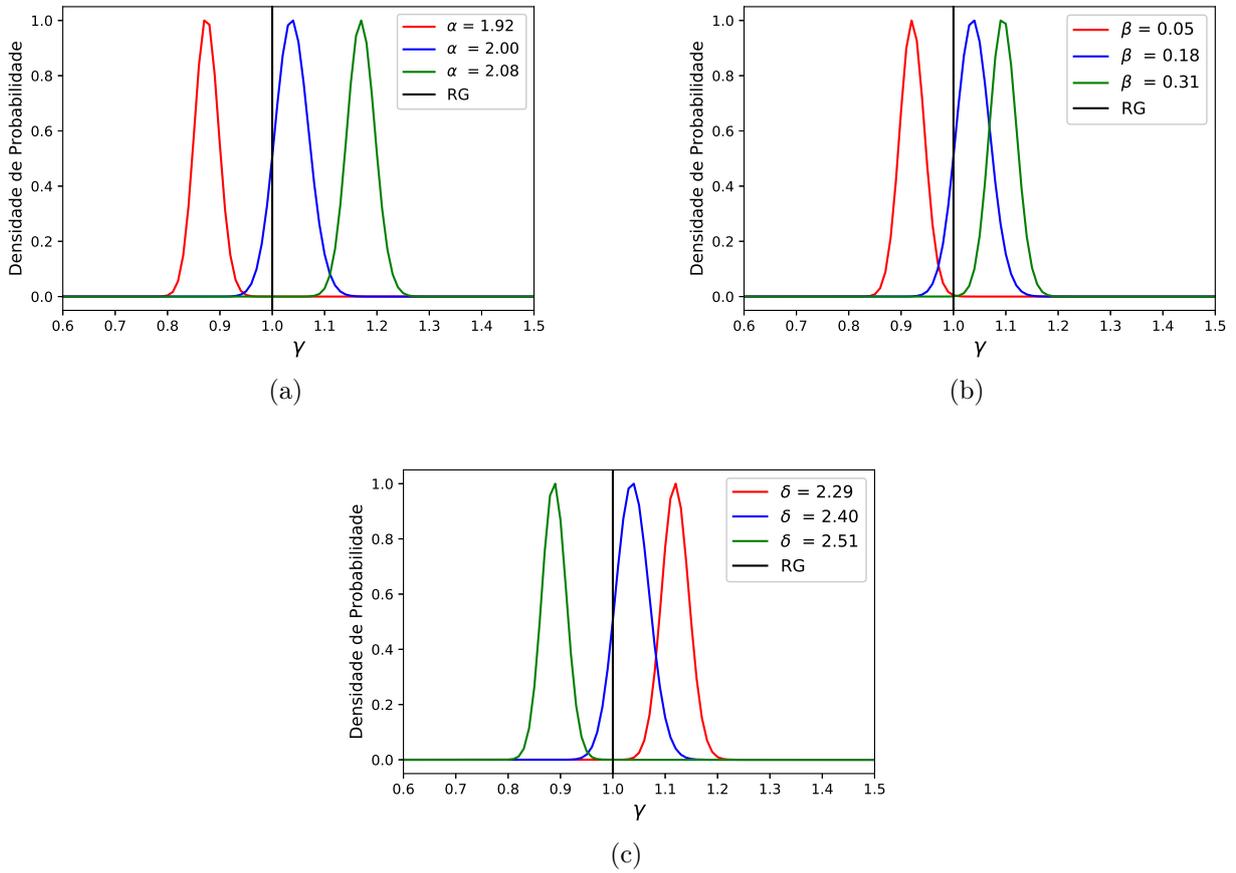


Fig. 4: Densidade de probabilidade de  $\gamma$  nos limites do (a) parâmetros do perfil de densidade de massa,  $\alpha$ , (b) parâmetro de anisotropia das velocidades das estrelas na galáxia que atua como lente,  $\beta$ , e (c) parâmetro do perfil de densidade de luminosidade,  $\delta$ , responsáveis pelos erros sistemáticos.

## 5 Conclusões

Neste trabalho usamos sistemas de lentes gravitacionais fortes para obter vínculos no parâmetro pós-newtoniano (PPN),  $\gamma$ . Usamos uma amostra com 103 sistemas de lentes gravitacionais, onde as lentes eram galáxias elípticas. Os dados são provenientes dos projetos BELLS, SLACS LSD e SL2S.

Obtivemos um valor de  $\gamma = 1.037 \pm 0.032$  para o parâmetro PPN. Esse resultado é marginalmente inconsistente com o esperado para a Relatividade Geral (RG),  $\gamma = 1$ . Bolton et al. 2006 [8] realizou essa análise com 15 sistemas de lentes e obteve  $\gamma = 0.98 \pm 0.07$ , Schwab et al. 2010 [9] usou 53 sistemas e obteve  $\gamma = 1.01 \pm 0.05$ , e Cao et al. 2017 [7], usou 80 sistemas e chegou ao resultado  $\gamma = 0.995 \pm 0.047$ . O resultado desse trabalho está claramente se deslocando para valores de  $\gamma$  maiores que 1.

Mostramos também que o aumento no número de sistemas da amostra reduz consideravelmente as incertezas estatísticas. No entanto, os erros sistemáticos se mantêm comparáveis, ou até maiores, que as incertezas estatísticas. Uma forma de melhor analisar as incertezas sistemáticas poderia se dar por, em primeiro momento, uma melhor análise da dispersão de valores do parâmetro da lei de potências da distribuição de densidade de luminosidade,  $\delta$ . Também seria possível realizar um cálculo de  $\gamma$  deixando o parâmetro da lei de potências da distribuição de densidade de massa  $\alpha$  e o parâmetro  $\delta$  livres, para assim ter dimensão das potenciais degenerescências do parâmetro PPN.

Para uma diminuição real dos erros sistemáticos seria necessário uma medida melhor do parâmetro  $\alpha$ , e do parâmetro da anisotropia na distribuição das velocidades das estrelas da galáxia elíptica que atua como lente,  $\beta$ . O parâmetro  $\delta$  pode vir a ser medido diretamente das imagens das galáxias elípticas que atuam como lentes.

## Referências

- [1] J. H. Taylor et al. “Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR 1913+16”. Em: *Nature* 277 (fev. de 1979).
- [2] B. Bertotti et al. “A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft”. Em: *Nature* 425 (set. de 2003).
- [3] Neil Ashby. “Relativity and the Global Positioning System”. Em: *Physics Today* 55.5 (maio de 2002), pp. 41–47. DOI: 10.1063/1.1485583.
- [4] Planck Collaboration et al. “Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters”. Em: *Astronomy & Astrophysics* 571 (nov. de 2014). arXiv: 1303.5076, A16. ISSN: 0004-6361, 1432-0746. DOI: 10.1051/0004-6361/201321591. (Acesso em 30/09/2019).
- [5] Adam G. Riess et al. “A 2.4% DETERMINATION OF THE LOCAL VALUE OF THE HUBBLE CONSTANT”. Em: *The Astrophysical Journal* 826.1 (jul. de 2016), p. 56. ISSN: 1538-4357. DOI: 10.3847/0004-637X/826/1/56. (Acesso em 30/09/2019).

- [6] Thomas E. Collett et al. “A precise extragalactic test of General Relativity”. Em: *Science* 360.6395 (jun. de 2018), pp. 1342–1346. ISSN: 0036-8075, 1095-9203. DOI: 10.1126/science.aao2469. URL: <http://www.sciencemag.org/lookup/doi/10.1126/science.aao2469> (acesso em 26/09/2019).
- [7] Shuo Cao et al. “TEST OF PARAMETRIZED POST-NEWTONIAN GRAVITY WITH GALAXY-SCALE STRONG LENSING SYSTEMS”. Em: *The Astrophysical Journal* 835.1 (jan. de 2017), p. 92. ISSN: 1538-4357. DOI: 10.3847/1538-4357/835/1/92. URL: <http://stacks.iop.org/0004-637X/835/i=1/a=92?key=crossref.d066e7b8013870245a1c339c4439180f> (acesso em 26/09/2019).
- [8] Adam S. Bolton et al. “Constraint on the post-Newtonian parameter on galactic size scales”. Em: *Physical Review D* 74.6 (set. de 2006), p. 061501. ISSN: 1550-7998, 1550-2368. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.061501. (Acesso em 30/09/2019).
- [9] Josiah Schwab et al. “GALAXY-SCALE STRONG-LENSING TESTS OF GRAVITY AND GEOMETRIC COSMOLOGY: CONSTRAINTS AND SYSTEMATIC LIMITATIONS”. Em: *The Astrophysical Journal* 708.1 (jan. de 2010), pp. 750–757. ISSN: 0004-637X, 1538-4357. DOI: 10.1088/0004-637X/708/1/750. (Acesso em 30/09/2019).
- [10] Shuo Cao et al. “COSMOLOGY WITH STRONG-LENSING SYSTEMS”. Em: *The Astrophysical Journal* 806.2 (jun. de 2015), p. 185. ISSN: 1538-4357. DOI: 10.1088/0004-637X/806/2/185. URL: <http://stacks.iop.org/0004-637X/806/i=2/a=185?key=crossref.895ab40f88416d58dded288c7202a35f> (acesso em 30/09/2019).
- [11] Kyle Leaf e Fulvio Melia. “Model selection with strong-lensing systems”. Em: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 478.4 (ago. de 2018), pp. 5104–5111. ISSN: 0035-8711, 1365-2966. DOI: 10.1093/mnras/sty1365. URL: <https://academic.oup.com/mnras/article/478/4/5104/5003396> (acesso em 26/09/2019).
- [12] A Amvrosiadis et al. “ALMA observations of lensed Herschel sources: testing the dark matter halo paradigm”. Em: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 475.4 (abr. de 2018), pp. 4939–4952. ISSN: 0035-8711, 1365-2966. DOI: 10.1093/mnras/sty138. URL: <https://academic.oup.com/mnras/article/475/4/4939/4819290> (acesso em 30/09/2019).
- [13] M. Negrello et al. “The Detection of a Population of Submillimeter-Bright, Strongly Lensed Galaxies”. Em: *Science* 330.6005 (nov. de 2010), pp. 800–804. ISSN: 0036-8075, 1095-9203. DOI: 10.1126/science.1193420. URL: <http://www.sciencemag.org/cgi/doi/10.1126/science.1193420> (acesso em 26/09/2019).
- [14] R. S. Bussmann et al. “GRAVITATIONAL LENS MODELS BASED ON SUBMILLIMETER ARRAY IMAGING OF *HERSCHEL* -SELECTED STRONGLY LENSED SUB-MILLIMETER GALAXIES AT  $z > 1.5$ ”. Em: *The Astrophysical Journal* 779.1 (nov. de 2013), p. 25. ISSN: 0004-637X, 1538-4357. DOI: 10.1088/0004-637X/779/1/

25. URL: <http://stacks.iop.org/0004-637X/779/i=1/a=25?key=crossref.9556846ba6677e049a9db6b3592498f1> (acesso em 30/09/2019).
- [15] H. Nayyeri et al. “CANDIDATE GRAVITATIONALLY LENSED DUSTY STAR-FORMING GALAXIES IN THE *HERSCHEL* WIDE AREA SURVEYS”. Em: *The Astrophysical Journal* 823.1 (maio de 2016), p. 17. ISSN: 1538-4357. DOI: 10.3847/0004-637X/823/1/17. URL: <http://stacks.iop.org/0004-637X/823/i=1/a=17?key=crossref.8562c2a65f5e8bd195460eae06f451da> (acesso em 30/09/2019).
- [16] P. Schneider. *Extragalactic astronomy and cosmology: an introduction*. Berlin ; New York: Springer, 2006. ISBN: 978-3-540-33174-2.
- [17] J. Binney et al. *Galactic Dynamics*. Princeton series in astrophysics. Princeton University Press, 1987. ISBN: 9780691084459. URL: <https://books.google.com.br/books?id=01yNf7mipb0C>.
- [18] James Binney. “The radius-dependence of velocity dispersion in elliptical galaxies”. Em: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 190.4 (abr. de 1980), pp. 873–880. ISSN: 0035-8711. DOI: 10.1093/mnras/190.4.873. eprint: <http://oup.prod.sis.lan/mnras/article-pdf/190/4/873/18194217/mnras190-0873.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/190.4.873>.
- [19] Dandan Xu et al. “The inner structure of early-type galaxies in the Illustris simulation”. Em: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 469.2 (abr. de 2017), pp. 1824–1848. ISSN: 1365-2966. DOI: 10.1093/mnras/stx899. URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stx899>.
- [20] Shuo Cao et al. “Limits on the power-law mass and luminosity density profiles of elliptical galaxies from gravitational lensing systems”. Em: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 461.2 (jun. de 2016), pp. 2192–2199. DOI: 10.1093/mnras/stw932.
- [21] Adam S. Bolton et al. “The Sloan Lens ACS Survey. V. The Full ACS Strong-Lens Sample”. Em: *The Astrophysical Journal* 682.2 (ago. de 2008), pp. 964–984. ISSN: 0004-637X, 1538-4357. DOI: 10.1086/589327. (Acesso em 30/09/2019).
- [22] Adam S. Bolton et al. “THE BOSS EMISSION-LINE LENS SURVEY. II. INVESTIGATING MASS-DENSITY PROFILE EVOLUTION IN THE SLACSBELLS STRONG GRAVITATIONAL LENS SAMPLE”. Em: *The Astrophysical Journal* 757.1 (set. de 2012), p. 82. DOI: 10.1088/0004-637x/757/1/82.
- [23] Tommaso Treu e Leon V. E. Koopmans. “Massive Dark Matter Halos and Evolution of Early-Type Galaxies to  $z \approx 1$ ”. Em: *The Astrophysical Journal* 611.2 (ago. de 2004), pp. 739–760. DOI: 10.1086/422245.
- [24] Alessandro Sonnenfeld et al. “THE SL2S GALAXY-SCALE LENS SAMPLE. V. DARK MATTER HALOS AND STELLAR IMF OF MASSIVE EARLY-TYPE GALAXIES OUT TO REDSHIFT 0.8”. Em: *The Astrophysical Journal* 800.2 (fev. de 2015), p. 94. DOI: 10.1088/0004-637x/800/2/94.