UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO
ESPECIALIZAÇÃO EM MERCADO DE CAPITAIS

MODERNA TEORIA DE CARTEIRAS: DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DE UM MODELO DE SELEÇÃO DE CARTEIRAS EFICIENTES

Orientador: Prof. Gilberto de Oliveira Kloeckner

Aluno: Guilherme Lima

Porto Alegre, Janeiro de 2007

RESUMO

Este estudo tem como tema o desenvolvimento e a aplicação de um modelo de seleção de carteiras eficientes – baseado nos estudos de Markowitz (1952) – através de três informações básicas: taxa de retorno de cada título integrante da carteira; variações destas taxas de retorno (variância ou desvio padrão das taxas de retorno); e das relações entre as taxas de retorno de cada título com a de todos os outros títulos (a covariância entre as taxas de retorno).

Para tanto, selecionaram-se cinqüenta ativos negociados na Bovespa e, com estes, estruturaram-se cinqüenta e duas carteiras, minimizando-se a variância para cada nível de retorno. Considerou-se que a proporção aplicada em cada ativo deveria ser maior ou igual a zero e, que a soma destas proporções deveria ser igual a 100%. Portanto, encontrou-se a fronteira eficiente baseando-se nas premissas de que vendas à descoberto, empréstimos e aplicações à taxa livre de risco não são permitidos. Além disso, foram estruturadas outras cinqüenta e duas carteiras diversificadas de forma aleatória, com 20 ativos cada, para serem comparadas com as carteiras diversificadas com a utilização do modelo de seleção de carteiras eficientes proposto. Para a estimação dos retornos, volatilidades e covariâncias utilizou-se o Modelo de Alisamento Exponencial (EWMA), supondo, assim, que os retornos históricos não possuem a mesma probabilidade de ocorrência.

O modelo de seleção de carteiras eficientes proposto neste estudo apresentou boas estimativas de retornos e volatilidades futuras, para o período estudado. As carteiras diversificadas com a utilização deste tiveram desempenho superior às carteiras diversificadas de forma aleatória. Portanto, o modelo para a seleção de carteiras eficientes proposto aparenta ser uma ferramenta útil e objetiva.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A análise de investimentos requer, primordialmente, uma estimativa dos rendimentos futuros que o emprego do capital pode propiciar. Ela compreende o estudo detalhado de características, das qualidades, das perspectivas e do valor de um investimento a ser escolhido. Compreende também um estudo comparativo para que se possa decidir com maior segurança o melhor investimento. Portanto, uma boa análise de investimento é uma tarefa de estimativa e comparação, envolvendo o exame das diversas hipóteses. Um investimento guarda três atributos essenciais: retorno, prazo e risco. Avaliar um investimento consiste em estimar sua rentabilidade, liquidez e o grau de risco envolvido.

Há aproximadamente 40 anos, a área de Finanças sofreu um grande impacto em seus princípios básicos ao adicionar o conceito de risco à análise de investimentos, permitindo mensurar matematicamente algo que não passava de abstração teórica. Markowitz (1952) propôs a teoria de carteiras, sugerindo, inicialmente, a união de dois ativos financeiros correlacionados negativamente, obtendo como resultado a redução no risco da carteira.

Alguns anos depois, Sharpe (1964) agregou aos conceitos de Markowitz os princípios de "carteira de mercado" e "investimento sem risco". Sharpe iniciou a criação de um modelo imaginando uma realidade na qual todos os investidores utilizam a teoria da seleção de carteiras de Markowitz através da média e variância e, supôs, também, que os investidores compartilham dos mesmos retornos esperados, variâncias e covariâncias. Porém ele não assume que todo investidor possui o mesmo grau de aversão ao risco. Assim os investidores sempre vão poder reduzir o grau de risco de suas aplicações à medida que sejam tomadores de parcelas maiores de ativos livres de risco em conjunto com de carteiras compostas de ativos com risco. Ainda hoje estas predições do modelo – CAPM - são as mais adequadas, apesar de todas as suas limitações. O CAPM implica que a distribuição dos retornos esperados de todos os ativos de risco é uma função linear do risco dos títulos, isto é, de sua covariância com a carteira de mercado – coeficiente beta. O CAPM não só ofereceu novos e poderosos argumentos na natureza do risco, mas permitiu a investigação empírica necessária para o atual desenvolvimento de Finanças. O modelo da média e variância de Markowitz, assim como o CAPM de Sharpe, entre outros, foram contribuições que tiveram seu valor científico reconhecido pelo Comitê do Prêmio Nobel de 1990.

Portanto, as teorias voltadas para a determinação de preços de ativos em mercados perfeitos utilizam a variância dos retornos como a medida relevante do risco de um título, dado que seu preço, em qualquer momento, deverá estar refletindo todas as informações existentes que lhe afetam.

2. SITUAÇÃO PROBLEMÁTICA

A Moderna Teoria de Carteiras fornece subsídio para que possamos utilizá-la na seleção de carteiras eficientes através da redução do seu risco total. Porém, o retorno esperado, a volatilidade e a covariância entre os retornos dos ativos podem ser estimados de inúmeras formas. Estas estimativas podem ser fornecidas por economistas, analistas de mercado, pela própria empresa, consultorias e, também, através da análise estatística de séries históricas. No último caso, o tratamento conferido aos dados será fundamental para se extrair informações inerentes aos ativos analisados.

Portanto, a eficiência na aplicação da Moderna Teoria da Seleção de Carteiras para encontrarmos carteiras eficientes está fundamentalmente nas estimativas de risco e retorno utilizadas. A proposta deste estudo é construir e analisar a eficiência de um modelo que gere tais estimativas e que estime as carteiras situadas na fronteira eficiente, ou seja, aquelas que para um determinado nível de retorno apresentem menor risco.

3. JUSTIFICATIVA DO TEMA

A aplicação de modelos para a seleção de carteiras eficientes está fundada em dados que refletem a expectativa futura de ganhos e da variabilidade em torno destes. Porém, estas expectativas podem variar de acordo com o investidor. Como conseqüência, aqueles que possuírem estimativas mais próximas da realidade futura tenderão a alocar seus recursos de forma mais eficiente.

O tema se justifica, pois existem inúmeras formas de se estimar os dados dos ativos a serem selecionados. O enfoque deste estudo é encontrar um modelo que forneça estimativas razoáveis de risco e retorno em carteiras de ações e que estime as carteiras situadas na fronteira eficiente.

4. OBJETIVOS

A seguir serão apresentados os objetivos geral e específicos do trabalho.

4.1 OBJETIVO GERAL

Desenvolver e analisar um modelo para estimação das carteiras situadas na fronteira eficiente.

4.1 OBJETIVOS ESPECÍCICOS

- Aplicar um modelo de geração de retornos e volatilidade esperados;
- Verificar a eficiência modelo de geração de retornos e volatilidade esperados aplicado, quanto à previsão/aproximação com os retornos e volatilidade efetivamente ocorridos;
- Construir a fronteira eficiente a partir dos retornos e volatilidades esperados gerados pelo modelo aplicado;
- Comparar o desempenho das carteiras diversificadas com a utilização do modelo de seleção de carteiras eficientes proposto com carteiras diversificadas de forma aleatória.

5. REVISÃO DE LITERATURA

5.1 DIVERSIFICAÇÃO

Através de um artigo, já considerado clássico para a Teoria Financeira, Markowitz (1952) propôs um modelo de diversificação por meio da combinação de ativos que não fossem perfeitamente correlacionados. Partindo da observação de que os investidores preferem diversificar suas aplicações, ao invés de concentrá-las em um único tipo de investimento, Markowitz metodizou um modelo de escolha de carteira a partir de duas variáveis: média e variância. Concluiu que os investidores tendem a selecionar carteiras eficientes, assim entendidas aquelas que, em função de um dado nível de retorno esperado, apresentem mínima variância de retorno ou, vice-versa, que em função de um dado nível de variância, apresentem máximo retorno médio. O modelo esbarrou no trabalhoso sistema de cálculos que acarreta.

Entretanto, Sharpe (1964) agregou ao modelo de Markowitz, dois conceitos que simplificaram substancialmente o cálculo do risco, conseguindo obter ampla aceitação pela operacionalidade permitida. São os conceitos de investimento sem risco e carteira de mercado. O investimento sem risco, ou taxa de juros livre de risco, torna-se muito importante quando da análise de um investimento com risco, já que o retorno do segundo deve ser superior ao oferecido pelo primeiro. Sharpe considerou a taxa de juros livre de risco como a base da estrutura das taxas de retorno, identificando os títulos do Governo Federal como componentes do primeiro nível da estrutura das taxas de retorno.

Outro conceito fundamental, também considerado por Sharpe, é a carteira de mercado, que representa todos os títulos com risco de um determinado mercado, através da participação proporcional de cada título, ao seu valor no mercado. Trata-se da carteira com a maior diversificação possível, onde se refletem apenas variações de retorno em função do risco não-diversificável. Sharpe, partindo de tais conceitos, construiu um novo modelo que, além de operacionalizável, mostra-se bastante eficiente, o CAPM. De início assume-se meramente que um investidor só aplica em um ativo com risco se seu retorno esperado for suficientemente elevado para compensar o risco. No equilíbrio, com todos os investidores agindo dessa forma e esgotando as possibilidades de arbitragem, tende a ocorrer relação linear direta entre o retorno médio do mercado e o desvio-padrão (risco). Podemos fazer uma analogia com a idéia de seleção natural: os ativos de maior retorno acabam sendo os de maior risco. Caso surja um ativo com risco relativamente baixo, naturalmente a sua procura pelos investidores aumenta, o que faz com que seu preço de mercado tenda a se elevar, e seu retorno, assim, diminua até atingir um patamar de equilíbrio. Por outro lado, se aparecer um ativo de risco relativamente alto, esgotadas as possibilidades de redução desse risco, o preço desse ativo tende a cair e seu retorno a aumentar até o equilíbrio.

Segundo Lamb (2001), o risco de uma carteira (risco total) pode ser dividido em risco diversificável e risco não diversificável. O risco diversificável corresponde ao efeito das variâncias individuais dos ativos, já o risco não diversificável corresponde ao efeito das covariâncias entre os ativos. O risco total da carteira cai com o aumento do número de títulos (desde que estes não sejam perfeitamente correlacionados) devido à redução da representatividade das variâncias individuais para o risco da carteira. O risco não diversificável – efeito das covariâncias – não é passível de diversificação. Portanto, em uma carteira, com retornos não perfeitamente correlacionados, o único risco relevante é o não-diversificável.

O CAPM, segundo Gitman (2001, p. 216), une risco não diversificável - coeficiente beta (ß) é a medida de risco não diversificável utilizada pelo modelo – e retorno para todos os ativos. O CAPM, além da equação do modelo propriamente dita, pode ser visualizado graficamente através da Linha do Mercado de Títulos.

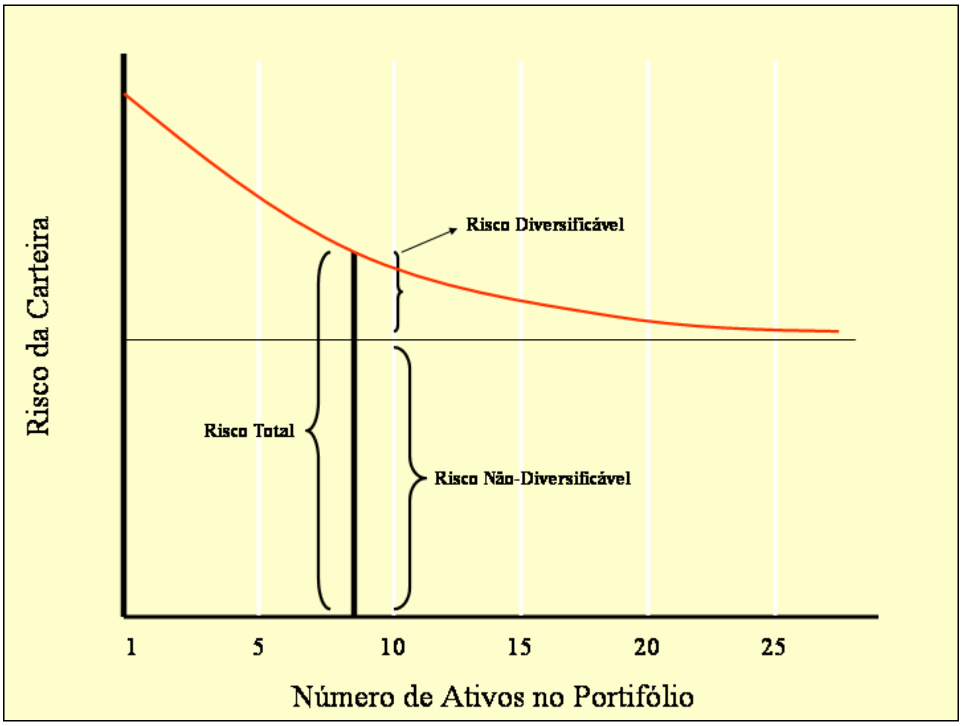

Figura 1 – Risco da Carteira e Diversificação

O conceito de correlação é essencial para o desenvolvimento de carteiras eficientes. A correlação, de acordo com Gitman (2001, p. 211), é uma medida estatística da relação entre séries de dados. O ponto importante é que ativos podem ser combinados de forma que a carteira resultante tenha menos risco do que qualquer um dos ativos independentemente, e sem qualquer perda no retorno. Quanto mais negativa a correlação entre os retornos dos ativos, maiores serão os benefícios de redução de risco da diversificação.

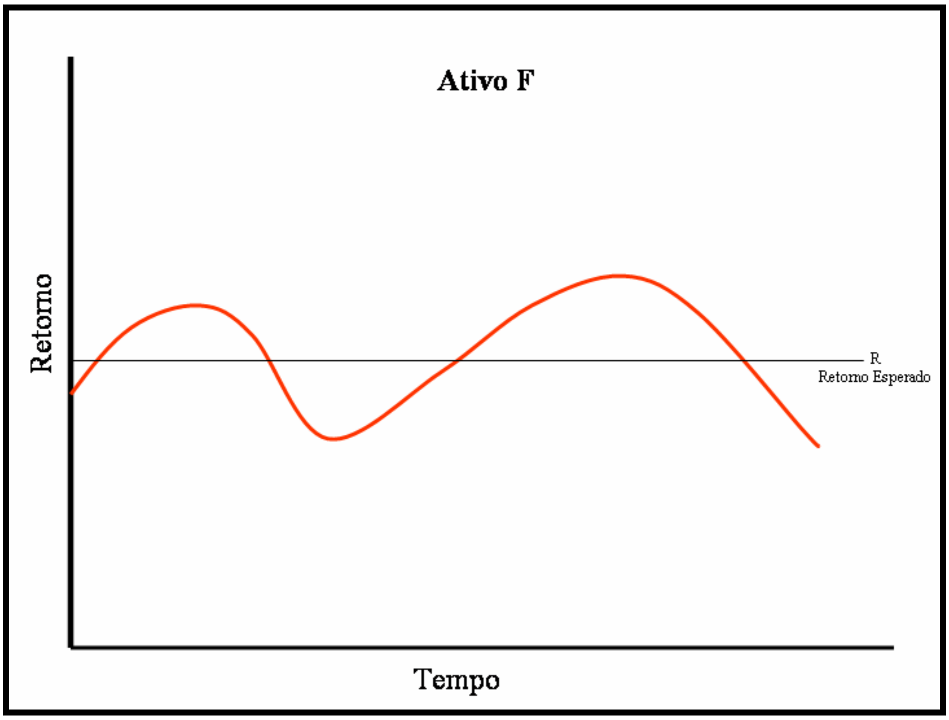

Figura 2 – Diversificação (Risco do ativo F)

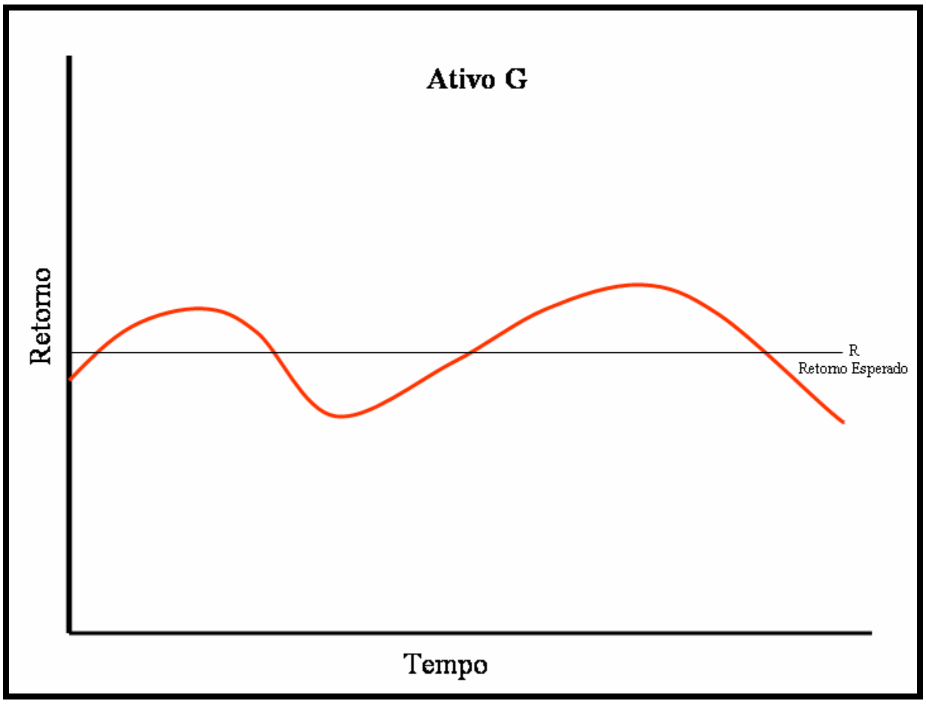

Figura 3 – Diversificação (Risco do ativo G)

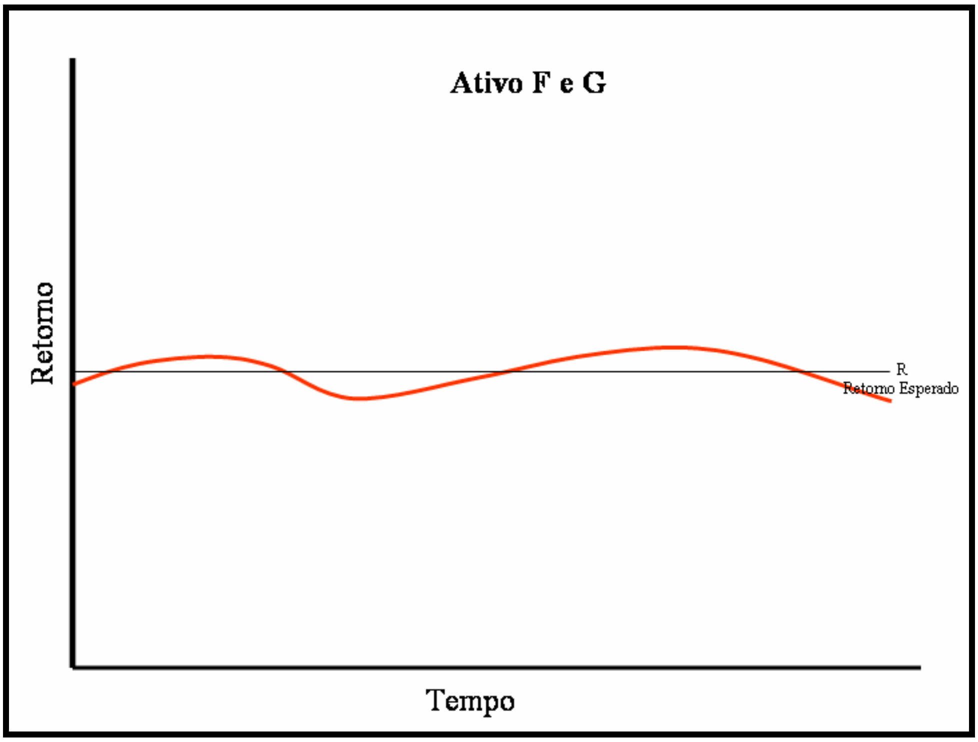

Figura 4 – Diversificação (Risco da Carteira F e G)

5.2 TEORIA DA UTILIDADE

Uma das principais preocupações em Finanças consiste em estudar como um investidor poderia melhor escolher sua composição de investimentos, analisados sob a ótica dos retornos esperados e riscos incorridos. Um investidor pode fazer escolhas, para compor seus investimentos, entre risco e retorno da mesma forma como um consumidor pode optar entre diferentes conjuntos de uma ou mais mercadorias. Por exemplo, o consumidor pode escolher entre ter 10 unidades de alimentação somado a 15 unidades de vestuário e ter 5 unidades de alimentação somado a 25 unidades de vestuário (RIBEIRO NETO e FAMA, 2004).

Pode-se usar uma forma gráfica para expressar as preferências do consumidor: as curvas de indiferença, as quais representam todas as combinações de conjuntos de mercadorias que geram mesmo nível de satisfação a uma pessoa. Para descrever a preferência de um consumidor em relação a todas as combinações de conjuntos de mercadorias existentes, pode-se traçar um conjunto de curvas de indiferença, denominada mapa de indiferença. É razoável que o consumidor prefira a curva que tenha as combinações entre maior número de mercadorias (RIBEIRO NETO e FAMA, 2004).

Um outro método para medir preferência envolve o uso de utilidade. Assim, pode-se preferir uma coisa a outra por causa de sua maior utilidade. Um objeto pode ter mesmo preço para todas as pessoas, porém a utilidade atribuída a ele difere de indivíduo para indivíduo. À medida que temos mais de alguma coisa, menor será a utilidade atribuída a ela. Assim, a utilidade marginal é decrescente (RIBEIRO NETO e FAMA, 2004).

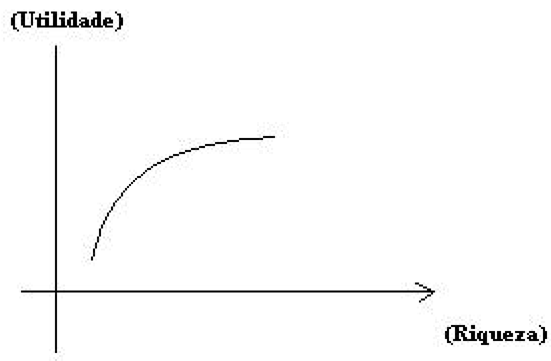

Figura 5 – Utilidade Marginal Decrescente

Tratando-se de investidores, o processo de escolha envolve a busca de maior retorno e maior segurança (menor risco). Antes de apresentar as curvas de indiferença dos diferentes tipos de investidores, vale lembrar que há 3 tipos de preferência com relação ao risco (RIBEIRO NETO e FAMA, 2004):

AVERSÃO AO RISCO	Quando um incremento de retorno seria exigido em vista de um aumento de risco.
INDIFERENÇA AO RISCO	Quando nenhuma mudança no retorno seria exigida em vista de um aumento de risco.
TENDÊNCIA AO RISCO	Quando uma diminuição de retorno poderia ser aceita em vista de um aumento de risco.

Quadro 1 - Preferência em Relação ao Risco

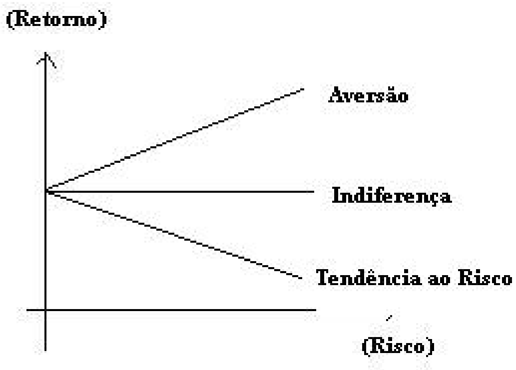

Figura 6 – Tipos de Preferência ao Risco

Dentro da primeira categoria (Aversão), pode-se dizer que há investidores que apresentam diferentes níveis de aversão ao risco. Assim, temos (RIBEIRO NETO e FAMA, 2004):

- Alta aversão ao risco - investidores deste tipo dão muito valor à segurança. Querem um retorno bastante alto para um aumento de risco. Suas curvas de indiferença sobem bastante (alta inclinação). Exemplo desse tipo de investidor: uma viúva idosa, que não gosta de risco (prefere um retorno mais modesto, desde que seguro);

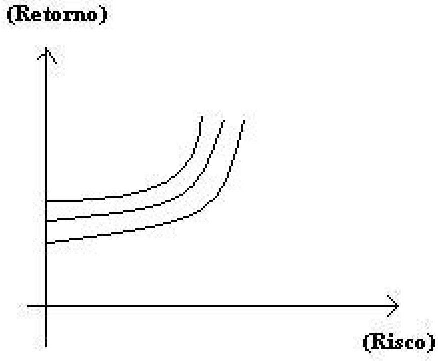

Figura 7 – Alta Aversão ao Risco

- Média aversão ao risco - investidores deste tipo querem um retorno entre médio e alto para um aumento de risco. As curvas de indiferença já não sobem tanto. Aqui se encaixam a maioria das pessoas;

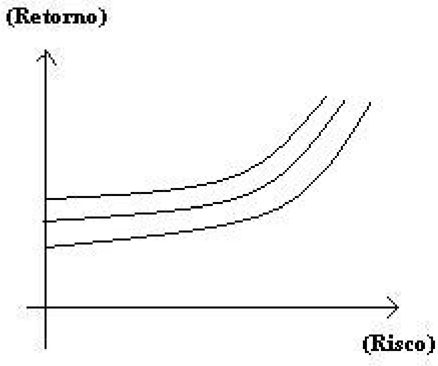

Figura 8 – Média Aversão ao Risco

- Baixa aversão ao risco - investidores deste tipo dão mais valor ao retorno do que ao risco. As curvas de indiferença sobem menos ainda (menor inclinação). Exemplo desse tipo de investidor: um executivo jovem e sem filhos (é mais ambicioso e se expõe mais ao risco).

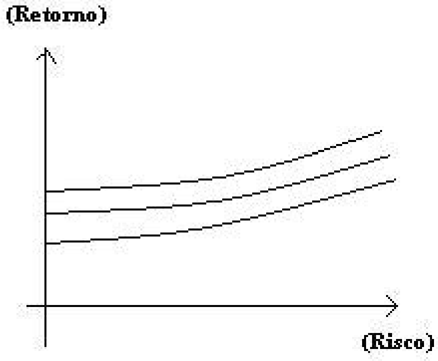

Figura 9 – Baixa Aversão ao Risco

Se duas ações possuem o mesmo valor esperado de retorno e desvios-padrão diferentes, o investidor racional vai escolher aquela com menor desvio. Se em um outro caso, as ações possuem o mesmo desvio-padrão, porém retornos diferentes, o investidor racional escolhe aquela com maior retorno esperado (RIBEIRO NETO e FAMA, 2004).

5.3 PRINCÍPIO DA DOMINÂNCIA

Segundo Haley e Schall (apud BALARINE, 1990) A premissa básica que rege as decisões individuais de investimentos é que os indivíduos gostam de retorno esperado e não gostam de variância ou desvio padrão de retornos, supondo que estas são as únicas características do fluxo de rendimentos que preocupam os indivíduos. Para melhor compreensão do assunto, observa-se no gráfico abaixo que o ativo II domina o ativo III, pois representando ambos no mesmo nível de risco (desvio-padrão = 7), o ativo II apresenta uma esperança matemática de retorno maior (8%). Comparando-se, agora, o ativo I e II, observa-se que o ativo I domina o ativo II, pois ao apresentarem a mesma expectativa de retorno (8%), o ativo I apresenta nível de risco inferior (desvio-padrão = 3). Obviamente, o ativo I também domina o ativo III, já que apresenta expectativa de retorno maior, com nível de risco inferior.

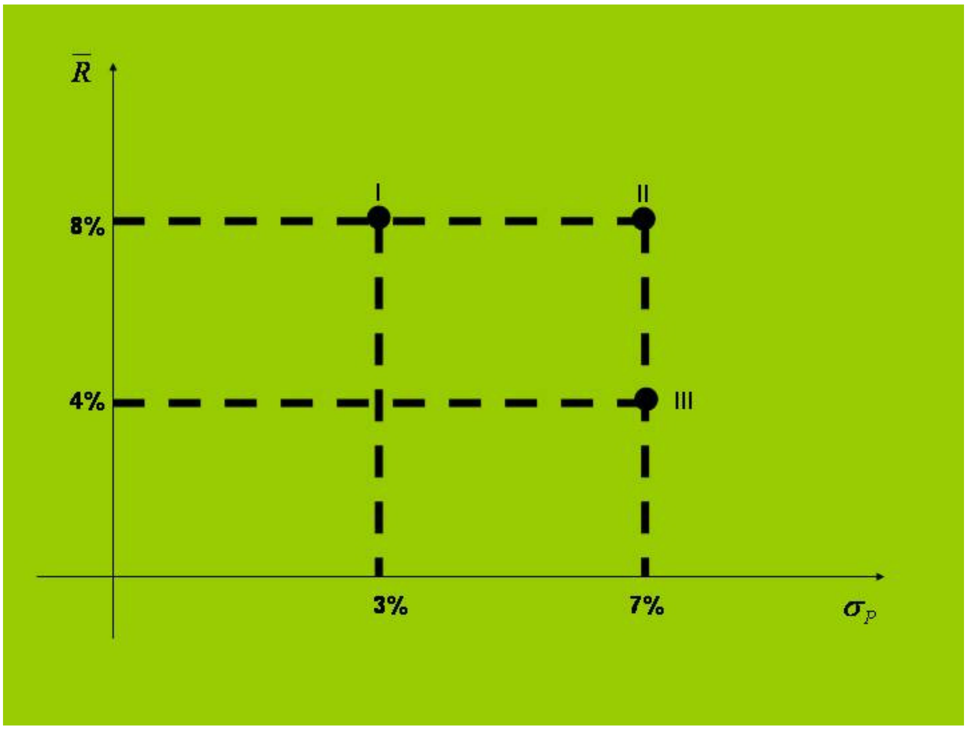

Figura 10 – Princípio da Dominância

5.4 ESSÊNCIA DA TEORIA DE CARTEIRAS

Segundo Elton et al. (2004, p. 67). O risco de uma carteira é igual ao valor esperado dos quadrados dos desvios do retorno da carteira em relação ao retorno médio da carteira, ou seja:

$$\sigma_P^2 = E(R_P - \overline{R_P})^2 \quad (5.4.1)$$

onde σ_P^2 é a variância da carteira, R_P é o retorno da carteira e $\overline{R}_P$ é o retorno médio da carteira. O retorno de uma carteira e o retorno médio da carteira são dados respectivamente pelas expressões:

$$R_{Pj} = \sum_{i=1}^{N} (X_i R_{ij}) \quad (5.4.2) \quad \rightarrow^{1} \quad R_P = X_1 R_{1j} + X_2 R_{2j} \quad (5.4.3)$$

onde R_{Pj} é o retorno da carteira no momento j, R_{ij} é o retorno do ativo i no momento j e X_i é a fração dos fundos do investidor aplicados no ativo i.

$$\overline{R}_P = \sum_{i=1}^{N} (X_i \overline{R}_i) \quad (5.4.4) \quad \rightarrow^{2} \quad \overline{R}_P = X_1 \overline{R}_1 + X_2 \overline{R}_2 \quad (5.4.5)$$

onde $\overline{R}_P$ é o retorno médio da carteira, $\overline{R}_i$ é o retorno médio do ativo i e X_i é a fração dos fundos do investidor aplicados no ativo i. Substituindo-se estas expressões na fórmula da variância da carteira, no caso de dois títulos, teremos:

$$\sigma_P^2 = E[(\underbrace{X_1 R_{1j} + X_2 R_{2j}}_{1}) - (\underbrace{X_1 \overline{R}_1 + X_2 \overline{R}_2}_{2})]^2$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_P^2 = E[X_1 (R_{1j} - \overline{R}_1) + X_2 (R_{2j} - \overline{R}_2)]^2$$

$$\downarrow^{3}$$

$$\sigma_P^2 = E[X_1^2 (R_{1j} - \overline{R}_1)^2 + 2 X_1 X_2 (R_{1j} - \overline{R}_1)(R_{2j} - \overline{R}_2) + X_2^2 (R_{2j} - \overline{R}_2)^2]$$

$$\downarrow^{4}$$

$$\sigma_P^2 = X_1^2 \underbrace{E[(R_{1j} - \overline{R}_1)^2]}_{VARIÂNCIA} + 2 X_1 X_2 \underbrace{E[(R_{1j} - \overline{R}_1)(R_{2j} - \overline{R}_2)]}_{COVARIÂNCIA} + X_2^2 \underbrace{E[(R_{2j} - \overline{R}_2)^2]}_{VARIÂNCIA}$$

[1] Retorno de uma carteira composta por dois ativos.

[2] Retorno médio de uma carteira composta por dois ativos.

[3] Lembrando que: $(X + Y)^2 = X^2 + XY + XY + Y^2 = X^2 + 2XY + Y^2$

$$\downarrow$$

$$\sigma_P^2 = X_1^2\sigma_1^2 + 2X_1X_2E[(R_{1j} - \overline{R}_1)(R_{2j} - \overline{R}_2)] + X_2^2\sigma_2^2$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_P^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2\sigma_{12} \quad (5.4.6)$$

ou seja, a variância de uma carteira se resume ao somatório das variâncias dos ativos individuais ponderadas pelo quadrado de sua participação na carteira mais o somatório das covariâncias das combinações de ativos multiplicadas pela participação de cada ativo na carteira. A covariância aparece multiplicada por dois pois $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Generalizando a fórmula da variância para N ativos, temos:

$$\sigma_P^2 = \sum_{j=1}^{N}(X_j^2\sigma_j^2) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{K=1 \\ K \neq J}}^{N}(X_J X_K \sigma_{JK}) \quad (5.4.7)$$

Continuando a análise da fórmula, podemos considerar uma situação onde todos os ativos são independentes e, assim, a covariância entre eles é igual a zero. Portanto no caso de todos os ativos independentes, a variância da carteira é simplesmente o somatório das variâncias de cada ativo multiplicadas pelo quadrado da participação do ativo na carteira. Conseqüentemente:

$$\sigma_P^2 = \sum_{J=1}^{N}(X_J^2\sigma_J^2) \quad (5.4.8)$$

[4] Lembrando que: O valor esperado da soma de uma série de retornos é igual à soma dos valores esperados de cada retorno e, ainda, que o valor esperado de uma constante multiplicada por um retorno é igual a constante multiplicada pelo retorno esperado.

Além disso, suponhamos, ainda, que seja aplicado o mesmo montante em cada ativo. Com N ativos, a proporção aplicada em cada um deles é $1/N$; portanto, teremos:

$$\sigma_P^2 = \sum_{J=1}^{N} (1/N)^2 \sigma_J^2$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{N} \underbrace{\left[\sum_{J=1}^{N} \frac{\sigma_J^2}{N} \right]}_{MÉDIA}$$

O termo entre colchetes é uma média da variância. Então temos:

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{1}{N} \right) \overline{\sigma_J^2} \quad (5.4.9)$$

onde $\overline{\sigma_J^2}$ é a variância média das ações contidas na carteira. Pode-se notar que a medida que N cresce a variância da carteira vai ficando cada vez menor. Quando N é extremamente alto, a variância da carteira se aproxima de zero. Por conseguinte, se tivermos um numero grande de ativos com retornos independentes, a variância da carteira formada por estes ativos tenderá a zero. Segundo Elton et al. (2004, p. 71), na maioria dos mercados a covariância entre os ativos é positiva, mas mesmo assim, o risco da carteira pode ser muito inferior ao risco de um único ativo.

Se considerarmos que os retornos dos ativos têm correlação entre si, mas que a aplicação é a mesma em cada ativo teremos:

$$\sigma_P^2 = \sum_{j=1}^{N} (X_j^2 \sigma_j^2) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{K=1 \\ K \neq J}}^{N} (X_J X_K \sigma_{JK})$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{J=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_J^2 + \sum_{J=1}^{N}\sum_{\substack{K=1\\K\neq J}}^{N}\left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{N}\right)\sigma_{JK}$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{1}{N}\right)\sum_{J=1}^{N}\left[\frac{\sigma_J^2}{N}\right] + \left(\frac{N-1}{N}\right)\sum_{J=1}^{N}\sum_{\substack{K=1\\K\neq J}}^{N}\left[\frac{\sigma_{JK}}{N(N-1)}\right]$$

Os dois termos entre colchetes são médias. O segundo termo é uma média porque há N valores de J e (N-1) valores de K. Isto porque K deve ser diferente de J, sendo assim K possui um valor a menos que J. Note-se que, com isso, elimina-se a covariância do ativo com ele mesmo que é igual à variância do ativo, sendo contabilizado na primeira expressão da fórmula referente à média ponderada das variâncias dos ativos individuais. Portanto há N(N-1) covariâncias envolvidas. Assim, o segundo termo da fórmula nada mais é do que o somatório das covariâncias dividido pelo número de covariâncias e, portanto, é uma média. Então teremos:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{n}\overline{\sigma_J^2} + \frac{N-1}{N}\overline{\sigma_{JK}} \quad (5.4.10)$$

Segundo Elton et al. (2004, p. 71), esta é uma expressão muito mais realista do que ocorre quando aplicamos em uma carteira de ativos. A contribuição da variância dos ativos individuais à variância da carteira tende a zero quando N é bastante elevado. Entretanto, a contribuição das covariâncias converge para covariância média quando N é elevado. O risco individual dos títulos pode ser eliminado por meio da diversificação, mas a contribuição das covariâncias não pode ser eliminada desta maneira. Esta relação fica ainda mais clara reescrevendo a expressão acima da seguinte forma:

$$\sigma_P^2 = \underbrace{\frac{1}{N}(\overline{\sigma_J^2} - \overline{\sigma_{KJ}})}_{1} + \underbrace{\overline{\sigma_{JK}}}_{2} \quad (5.4.11)$$

O primeiro termo é $(1/N)$ vezes a diferença entre a variância do retorno de títulos individuais e a covariância média. O segundo termo é a covariância média. Observa-se de forma muito clara que a primeira parte da expressão, quando N é suficientemente grande, tende a zero, enquanto a segunda parte da expressão tende à covariância média da carteira. A variância mínima ocorre em carteiras muito grandes, e é igual à média das covariâncias entre os retornos de todas as ações existentes na população. O efeito da diversificação não é igual em todos os países, visto que as covariâncias diferem de um país para o outro. Portanto, em cada país, é possível reduzir diferentes proporções do risco total da carteira.

A segunda parte da fórmula da variância de uma carteira (covariâncias) não pode ser reduzida pela simples diversificação aleatória de uma carteira. A covariância pode ser positiva ou negativa. Será positiva quando os movimentos dos retornos dos ativos ocorrerem na mesma direção, ou seja, quando um ativo apresenta um retorno positivo, o outro tende a ter retorno positivo também e vice-versa. Será negativa quando os movimentos dos retornos dos ativos ocorrerem em direções opostas, ou seja, quando um ativo apresenta um retorno positivo, o outro tende a ter retorno negativo e vice-versa. Portanto a covariância é uma medida de como os retornos dos ativos variam em conjunto, isto é, se os desvios positivos de um ativo estão associados a desvios positivos (covariância positiva) ou negativos (covariância negativa).

Para muitas finalidades, de acordo com Elton et al. (2004, p. 68), é útil padronizar a covariância. Dividindo-se a covariância entre os retornos dos dois ativos pelo produto dos desvios padrão dos dois ativos, obtém-se uma variável com as mesmas propriedades da covariância, mas dentro de um intervalo entre -1 e +1. Esta medida é chamada de coeficiente de correlação. Portanto, tem-se:

$$\rho_{IK} = \frac{\sigma_{IK}}{\sigma_I \sigma_K} \quad (5.4.12)$$

A divisão pelo produto dos desvios-padrão não modifica as propriedades da covariância. Simplesmente a normaliza para que assuma valores entre -1 e +1. Conseqüentemente, pode-se reduzir o risco causado pelo efeito das covariâncias com combinações de ativos em que as covariâncias se anulem, ou melhor, que o efeito destas seja minimizado.

Visto isso, cabe salientar que uma carteira formada por dois ativos perfeitamente correlacionados – correlação positiva perfeita - ou seja, quando $\rho = +1$, o retorno e o risco da carteira formada são obtidos como médias ponderadas dos retornos e dos riscos dos ativos individuais. Não há redução do risco, pois o efeito de possuir uma carteira de ativos perfeitamente correlacionados é semelhante ao de possuir um único ativo.

Já em uma carteira com dois ativos com correlação negativa perfeita os ativos movimentam-se juntos, porém, em direções opostas. Quando isto acontece será possível construir uma carteira sem risco, ou seja, é possível eliminar o risco sistemático e o risco não-sistemático.

Uma carteira com dois ativos sem correlação entre si não possuirá uma combinação dos ativos que resulte em risco zero, pois o risco não diversificável desaparece – efeito das correlações – mas o risco diversificável permanece, pois a carteira possui somente dois ativos. Sendo assim, o risco total da carteira será uma média ponderada das variâncias ou desvios-padrão dos ativos individuais.

Portanto, a essência da teoria de carteiras é minimizar o risco total da carteira utilizando a diversificação como forma de reduzir o risco diversificável – não sistemático - (1 – efeito causado pela variância dos ativos individualmente) e a combinação de ativos com coeficientes correlação nulos, positivos e negativos de forma a minimizar o efeito das covariâncias (2 – efeito causado pelas covariâncias dos ativos entre si) para reduzir o risco não diversificável, ou seja, o risco sistemático (figura 1).

Como já visto, o risco de uma carteira resulta das contribuições dos riscos individuais de cada título e das covariâncias ou correlações entre os retornos dos títulos. Para obter-se a variância de uma carteira, de acordo com Lamb (2006) será necessário construir a matriz de variâncias e covariâncias dos retornos dos títulos. O exemplo abaixo pode ser reproduzido para qualquer número de ativos.

Seja uma carteira composta por três títulos, o título 1, o título 2 e o título 3, com participações de $X_1\%$, $X_2\%$ e $X_3\%$ e com desvios-padrão σ_1, σ_2 e σ_3 , respectivamente, teríamos uma matriz de variâncias e covariâncias com n=3.

Tabela 1 – Matriz de Variâncias e Covariâncias

-------------------------	$X_1\sigma_1$	$X_2\sigma_2$	$X_3\sigma_3$
$X_1\sigma_1$	$X_1^2\sigma_1^2$	$X_2X_1\sigma_{21}$	$X_3X_1\sigma_{31}$
$X_2\sigma_2$	$X_1X_2\sigma_{12}$	$X_2^2\sigma_2^2$	$X_3X_2\sigma_{32}$
$X_3\sigma_3$	$X_1X_3\sigma_{13}$	$X_2X_3\sigma_{23}$	$X_3^2\sigma_3^2$

A variância da carteira é dada por:

$$\sigma_P^2 = X_1{}^2\sigma_1{}^2 + X_2{}^2\sigma_2{}^2 + X_3{}^2\sigma_3{}^2 + 2X_1X_2\sigma_{12} + 2X_1X_3\sigma_{13} + 2X_2X_3\sigma_{23} \quad (5.4.13)$$

onde σ_P^2 é a variância do carteira e σ_{xy} representa a covariância entre dois ativos. Observa-se que a matriz possui **N(N-1)** covariâncias. O "efeito diversificação" em uma carteira de títulos é devido à rápida redução relativa da representatividade das variâncias para o risco da carteira, com o aumento do número de títulos na carteira.

Segundo Lamb (2006) o risco total da carteira cai com o aumento do número de títulos. Este efeito se deve a rápida redução da representatividade das variâncias individuais para o risco da carteira. Ao fim, resta o efeito das covariâncias (correlações) que não é diversificável. Portanto, em uma carteira de títulos com retornos não perfeitamente correlacionados, o único risco relevante é o risco não-diversificável.

5.5. FRONTEIRA EFICIENTE

A fronteira eficiente, de acordo com Carvalho (2004), é uma metodologia para a escolha de carteiras proposta por Harry M. Markowitz em 1952. A utilização de conceitos estatísticos foi de extrema importância para o desenvolvimento dessa metodologia e a complexidade dos cálculos para a época, tornou-a quase impraticável. Apenas com o advento dos microcomputadores e sua posterior popularização é que a utilização da fronteira eficiente como método de escolha de carteiras se tornou factível.

Atualmente, a utilização da técnica para o cálculo da fronteira eficiente é bastante simples, os cálculos não são mais um fator impeditivo para que a metodologia seja seguida. As ferramentas hoje existentes são capazes de fazer todos os cálculos com extrema agilidade.

Apesar desta facilidade, para compreender corretamente a técnica da fronteira eficiente é necessário que se conheça como os cálculos são feitos.

5.5.1 Carteiras Eficientes

Como já visto, o retorno esperado de uma carteira é dado por:

$$\overline{R}_P = \sum_{i=1}^{N} (X_i \overline{R}_i)$$

onde, $\overline{R}_P$ é o retorno da carteira, X_i é a proporção do ativo i na carteira, $\overline{R}_i$ é o retorno médio do ativo i e N é o número de ativos na carteira. Vimos também que o retorno esperado de uma carteira de dois ativos pode ser dado por:

$$\overline{R_P} = X_1 \overline{R}_1 + X_2 \overline{R}_2$$

onde X_1 é a fração da carteira aplicada no ativo 1, X_2 é a fração da carteira aplicada no ativo 2, $\overline{R}_P$ é o retorno esperado da carteira, $\overline{R}_1$ é o retorno esperado do ativo 1 e $\overline{R}_2$ é o retorno esperado do ativo 2. Supondo que todo o patrimônio do investidor deve ser aplicado temos:

$$X_1 + X_2 = 1$$

e

$$X_2 = 1 - X_1$$

Inserindo este termo na equação do retorno esperado de uma carteira – equação mostrada acima – teremos:

$$\overline{R_P} = X_1\overline{R}_1 + X_2\overline{R}_2$$

$$\downarrow$$

$$\overline{R_P} = X_1\overline{R}_1 + (1 - X_1)\overline{R}_2 \quad (5.4.14)$$

Substituindo-se o mesmo termo na fórmula da variância de uma carteira com dois ativos temos:

$$\sigma_P^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2\sigma_{12}$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_P^2 = [X_1^2\sigma_1^2 + (1 - X_1)^2\sigma_2^2 + 2X_1(1 - X_1)\sigma_{12}] \quad (5.4.15)$$

Desenvolvendo ainda mais a fórmula, ao se ter o desvio-padrão como resposta e, substituindo-se σ_{12} por $\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$ teremos:

$$\sigma_P = [X_1^2\sigma_1^2 + (1 - X_1)^2\sigma_2^2 + 2X_1(1 - X_1)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2]^{1/2} \quad (5.4.16)$$

Com tais fórmulas é possível fazer uma análise gráfica mais facilmente. Para tanto serão apresentados quatro casos: dois ativos com correlação positiva perfeita (+1); dois ativos com correlação negativa perfeita; dois ativos com correlação nula; dois ativos com correlação intermediária.

1. Correlação Positiva Perfeita

Segundo Elton et al. (2004, p. 80), substituindo-se a variável ρ_{12} por 1 na equação acima teremos:

$$\sigma_P = [X_1^2\sigma_1^2 + (1 - X_1)^2\sigma_2^2 + 2X_1(1 - X_1)\sigma_1\sigma_2]^{1/2}$$

Sabendo-se que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ teremos:

$$\sigma_P = X_1\sigma_1 + (1 - X_1)\sigma_2 \quad (5.4.17)$$

Como já visto, o retorno esperado de uma carteira com dois ativos pode ser dado por:

$$\overline{R_P} = X_1\overline{R}_1 + (1 - X_1)\overline{R}_2$$

Com o auxílio destas duas fórmulas e com os dados dos retornos e desvios-padrão dos ativos pode-se construir um gráfico da seguinte forma.

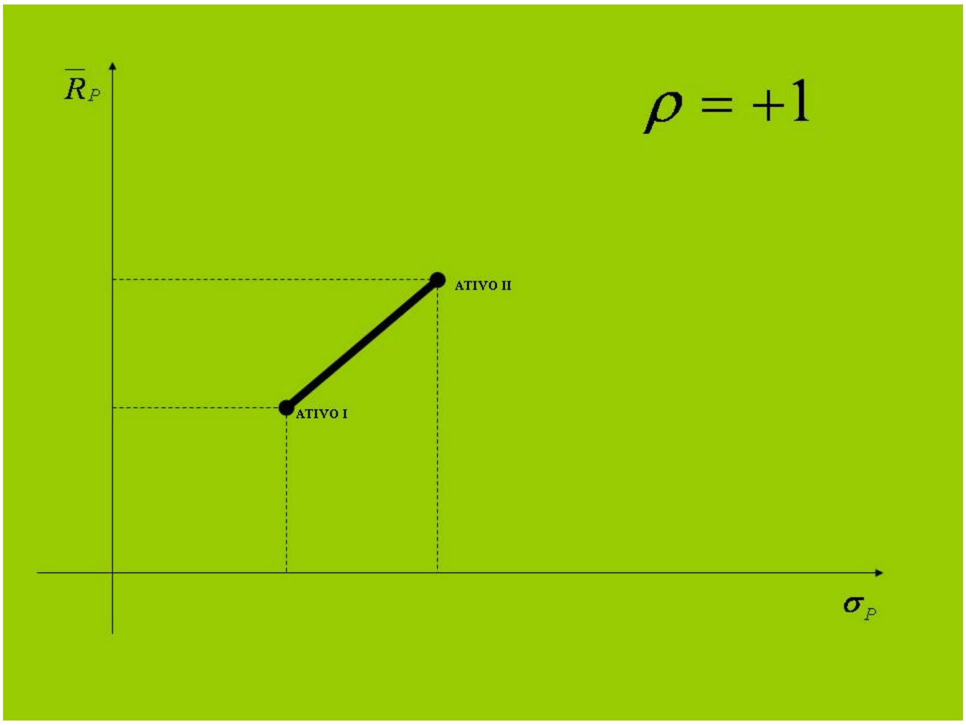

Figura 11 – Correlação Positiva Perfeita

2. Correlação Negativa Perfeita

Já na correlação negativa perfeita, de acordo com Elton et al. (2004, 81) os ativos variam perfeitamente em conjunto, porém em direções opostas. Substituindo-se a variável ρ_{12} na fórmula do desvio-padrão da carteira por -1 teremos:

$$\sigma_P = [X_1^2\sigma_1^2 + (1 - X_1)^2\sigma_2^2 + 2X_1(1 - X_1)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2]^{1/2}$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_P = [X_1^2\sigma_1^2 + (1 - X_1)^2\sigma_2^2 - 2X_1(1 - X_1)\sigma_1\sigma_2]^{1/2}$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_P = -X_1\sigma_1 + (1 - X_1)\sigma_2 \quad (5.4.18)$$

Como já visto, o retorno esperado de uma carteira com dois ativos pode ser dado por:

$$\overline{R_P} = X_1 \overline{R}_1 + (1 - X_1)\overline{R}_2$$

Por conseguinte, com o auxílio destas duas fórmulas, e com os dados dos retornos e desvios-padrão dos ativos pode-se construir um gráfico da seguinte forma:

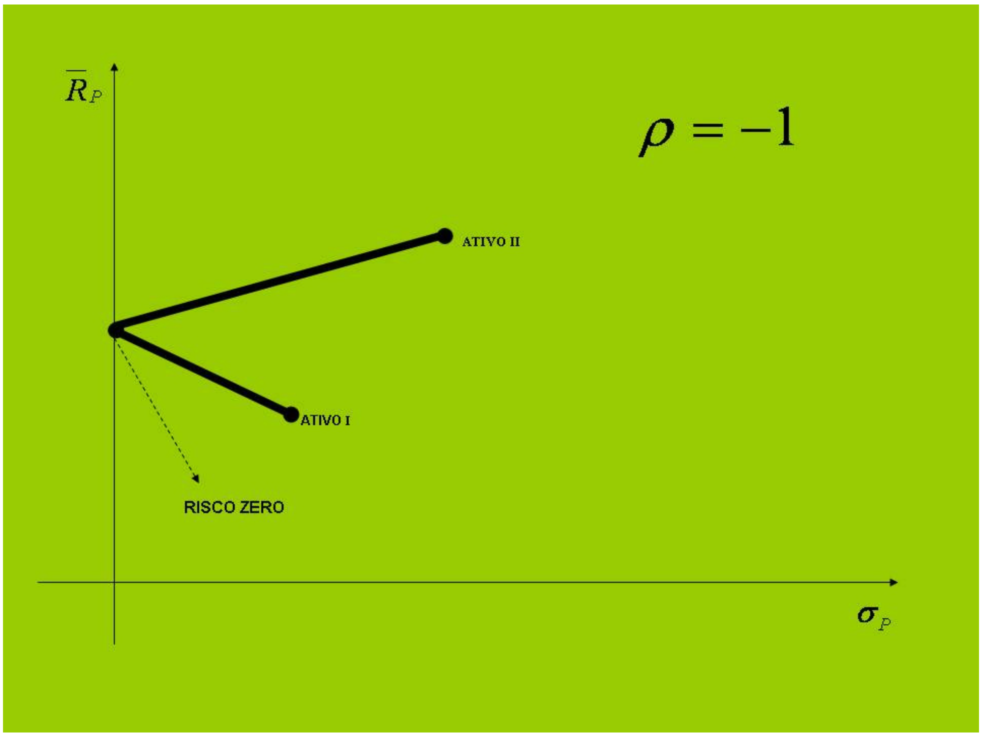

Figura 12 – Correlação Negativa Perfeita

Analisando o gráfico acima observa-se que quando a correlação entre dois títulos for negativa perfeita sempre poderá achar-se uma combinação em que o risco resultante seja igual a zero. Igualando-se a equação do desvio-padrão a zero poderemos achar a participação ótima de X_1.

$$\sigma_P = -X_1\sigma_1 + (1 - X_1)\sigma_2$$

$$\downarrow$$

$$X_1 = \frac{\sigma_2}{(\sigma_2 + \sigma_1)} \quad (5.4.19)$$

Como foi visto utilizamos duas equações distintas para chegarmos ao desvio-padrão da carteira: uma para correlação positiva perfeita e outra para correlação negativa perfeita. São elas:

$$\sigma_P = X_1\sigma_1 + (1 - X_1)\sigma_2$$

e

$$\sigma_P = -X_1\sigma_1 + (1 - X_1)\sigma_2$$

Existem portanto duas equações que relacionam σ_P a X_1.Para chegarmos a equação que defina σ_P para qualquer valor de X_1 podemos isolar X_1 e substituir na expressão do retorno esperado da carteira:

$$\sigma_P = X_1\sigma_1 + (1 - X_1)\sigma_2$$

$$\downarrow$$

$$X_1 = \frac{\sigma_P - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

$$\downarrow$$

$$\overline{R}_P = \frac{\sigma_P - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\overline{R}_1 + \left(1 - \frac{\sigma_P - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\right)\overline{R}_2$$

$$\downarrow$$

$$\overline{R}_P = \left(\overline{R}_2 - \frac{\overline{R}_1 - \overline{R}_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\sigma_2\right) + \left(\frac{\overline{R}_1 - \overline{R}_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\right)\sigma_P \quad (5.4.20)$$

Observando as duas relações vistas até agora no mesmo gráfico podemos perceber, com o auxílio da fórmula do desvio-padrão de uma carteira, que para qualquer valor de X_1 entre 0 e 1, quanto menor for a correlação, menor será o desvio-padrão da carteira. . O desvio-padrão atinge o seu valor mínimo quando $\rho = -1$ (curva) e atinge seu valor máximo quando $\rho = +1$ (curva). Portanto, estas duas curvas devem representar os limites dentro dos quais devem estar todas as carteiras formadas por esses dois títulos, para valores intermediários do coeficiente de correlação.

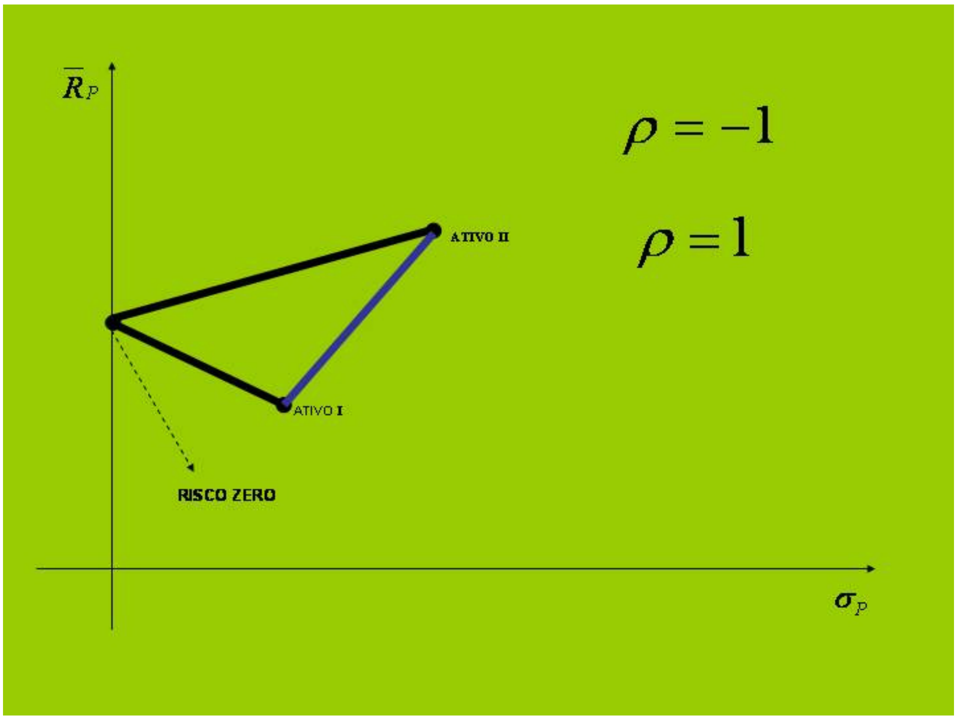

Figura 13 – Correlação Positiva Perfeita X Correlação Negativa Perfeita

3. <u>Correlação Nula</u>

Neste caso, de acordo com Elton et al. (2004, p. 83), a expressão do retorno continua inalterada, porém na expressão do desvio-padrão da carteira o termo correspondente ao risco causado pelas covariâncias desaparece e a expressão do desvio-padrão passa a ser:

$$\sigma_P = [X_1^2\sigma_1^2 + (1 - X_1)^2\sigma_2^2]^{1/2} \quad (5.4.21)$$

A representação gráfica do risco e do retorno dessas carteiras é demonstrada abaixo:

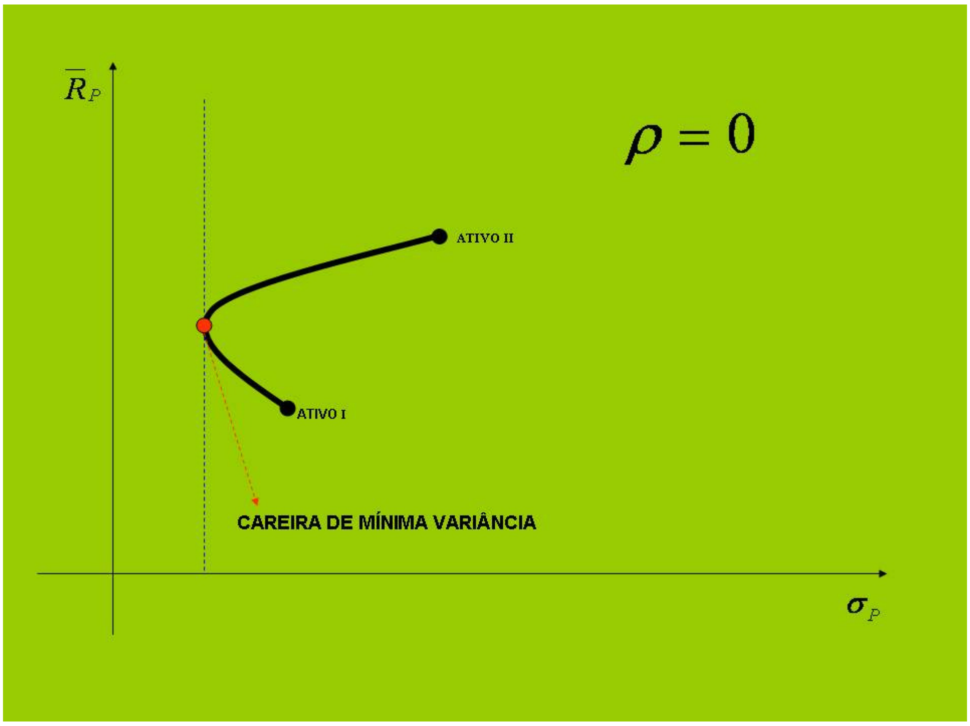

Figura 14 – Correlação Nula

Um ponto que merece detalhamento é o que representa a carteira de menor risco – carteira de menor variância. Como já visto, o risco da carteira pode ser dado por:

$$\sigma_P = [X_1^2\sigma_1^2 + (1 - X_1)^2\sigma_2^2 + 2X_1(1 - X_1)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2]^{1/2}$$

Portanto, para acharmos a carteira com menor risco, de acordo com Elton et al. (2004, p. 84) é preciso encontrar a derivada da função em relação a X_1 e igualarmos esta derivada a zero. Por conseguinte, o valor de X_1 que minimiza o risco é dado por:

$$\frac{\partial \sigma_P}{\partial X_1} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{[2X_1\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 + 2X_1\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 4X_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12}]}{[X_1^2\sigma_1^2 + (1-X_1)^2\sigma_2^2 + 2X_1(1-X_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}]^{1/2}}$$

Igualando-se isto a zero e resolvendo para X_1 teremos:

$$X_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \quad (5.4.22)$$

Como no caso analisado $\rho_{12} = 0$ teremos:

$$X_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (5.4.23)$$

4. Correlação Intermediária

A correlação entre duas ações quaisquer, de acordo com Elton et al. (2004, p. 84), é quase sempre maior do que zero e consideravelmente inferior a um. Para mostrar uma relação mais próxima do que ocorre na prática vamos analisar uma situação na qual $\rho = 0,5$. Lembremos que:

$$\sigma_P = [X_1^2\sigma_1^2 + (1-X_1)^2\sigma_2^2 + 2X_1(1-X_1)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2]^{1/2}$$

$$\downarrow^{5}$$

[5] Para determinar o valor de X_1 que minimiza o risco da carteira é necessário calcular a derivada da função em relação a X_1 e igualar a zero.

$$\frac{\partial\sigma_P}{\partial X_1}=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{[2X_1\sigma_1^2-2\sigma_2^2+2X_1\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}-4X_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12}]}{[X_1^2\sigma_1^2+(1-X_1)^2\sigma_2^2+2X_1(1-X_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}]^{1/2}}$$

$$\downarrow$$

$$X_1=\frac{\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}$$

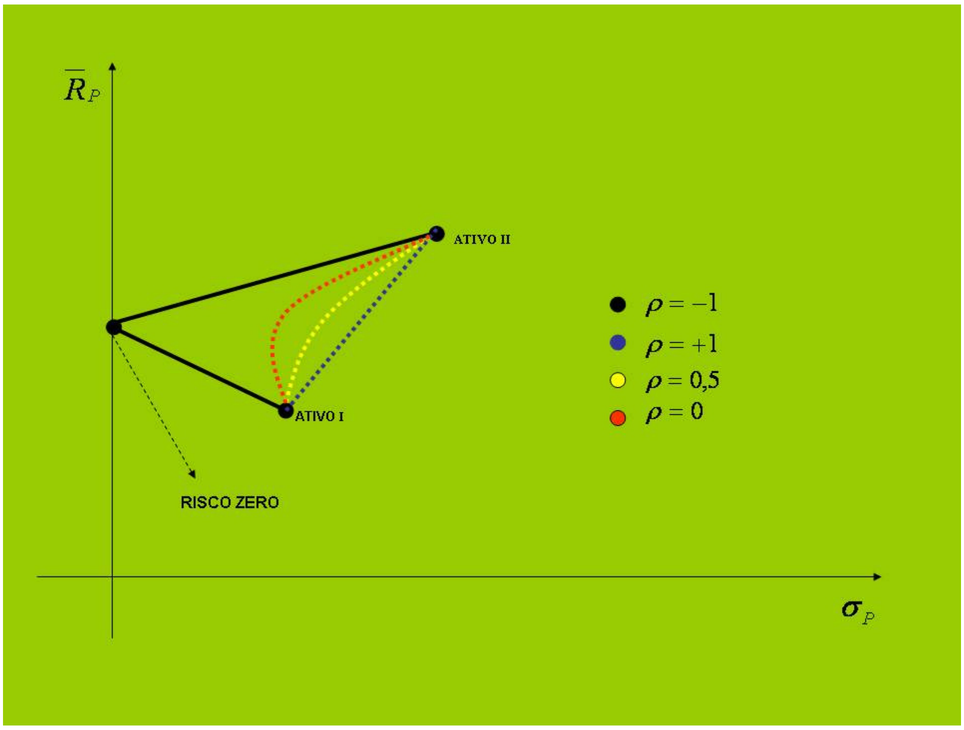

Figura 15 – Fronteira Eficiente para Vários Coeficientes de Correlação

Através do gráfico acima é possível perceber que para dois ativos sempre haverá uma correlação na qual não exista uma combinação entre os ativos que proporcione uma carteira com risco menor do que o do ativo menos arriscado. É fácil determinar o coeficiente de correlação no qual isto ocorre. Supondo que o ativo 2 seja o menos arriscado e que aplicássemos 100% (X_2=1) dos recursos nele, então $X_1=0$. Substituindo na fórmula X_1 por zero e calculando ρ_{12} teremos:

$$X_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}$$

$$\downarrow$$

$$0 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}$$

$$\downarrow$$

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (5.4.24)$$

Segundo Elton et al. (2004, p. 85), quando esta situação ocorrer ($X_1 = 0$), a "carteira" de mínima variância envolverá aplicação de 100% dos recursos no ativo menos arriscado. Se $\rho > \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ então a combinação de mínimo risco envolverá venda a descoberto.

Até agora podemos observar três características que envolvem a composição de carteiras:

1. Quanto menor o coeficiente de correlação (mais próximo de -1) entre os ativos, mantidos os outros atributos constantes, maior será o benefício proporcionado pela diversificação;
2. Combinações de dois ativos jamais podem ter mais risco do que o encontrado em uma linha reta ligando os dois ativos no espaço retorno esperado-desvio-padrão;
3. A composição de dois ativos que gerará a carteira de mínima variância é dada por:

$$X_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}$$

Portanto, podemos definir "Fronteira Eficiente" como sendo uma função côncava no espaço retorno esperado-desvio-padrão que se estende da carteira de mínima variância à carteira de retorno máximo, ou ainda como o subconjunto de carteiras que serão preferidas por todos os investidores que têm aversão ao risco e que têm preferência por retornos mais altos.

5.5.2 Possibilidades da Fronteira Eficiente

1. Fronteira Eficiente com a Possibilidade de Captação e Aplicação Sem Risco

Segundo Elton et al. (2004, p. 91), introduzindo na análise o conceito de um ativo livre de risco a fronteira eficiente ficará bastante simplificada. Podemos tratar uma aplicação sem risco como o equivalente a um investimento em um ativo com retorno garantido, como por exemplo, títulos públicos ou a caderneta de poupança. Já a captação de empréstimo pode ser considerada como equivalente à venda deste tipo de título a descoberto, permitindo, assim, que empréstimos sejam feitos à taxa livre de risco. Como o retorno é dado como garantido (R_F) podemos considerar que $\sigma_F = 0$, ou seja, o desvio-padrão do título tem desvio-padrão zero.

Supõe-se que o investidor possa captar e emprestar dinheiro à taxa livre de risco e que seja X a proporção de fundos originais que o investidor aplica na carteira I. Deve ser lembrado que X pode ser maior que 1, porque estamos supondo que o investidor pode tomar dinheiro emprestado à taxa livre de risco e aplicar mais do que seus fundos originais na carteira I. Sendo X a proporção de fundos aplicados na carteira I, (1-X) deve ser a proporção de fundos aplicados no ativo livre de risco. O Retorno esperado da combinação entre o ativo livre de risco e a carteira com risco é dado por:

$$\overline{R_C} = (1 - X)R_F + X\overline{R_I}$$

O risco da combinação é dado por:

$$\sigma_C = [(1 - X)^2 \sigma_F^2 + X^2 \sigma_I^2 + 2X(1 - X)\sigma_I \sigma_F \rho_{FI}]^{1/2}$$

Como $\sigma_F = 0$, então:

$$\sigma_C = (X^2 \sigma_I^2)^{1/2}$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_C = X\sigma_I$$

Resolvendo esta expressão para obtermos o valor de X, teremos:

$$X = \frac{\sigma_C}{\sigma_I}$$

Substituindo esta expressão na fórmula do retorno da combinação, teremos:

$$\overline{R}_C = \left(1 - \frac{\sigma_C}{\sigma_I}\right)R_F + \frac{\sigma_C}{\sigma_I}\overline{R}_I$$

$$\downarrow$$

$$\overline{R}_C = R_F + \left(\frac{\overline{R}_I - R_F}{\sigma_I}\right)\sigma_C \quad (5.4.25)$$

Esta é a equação de uma reta. Todas as aplicações ou empréstimos sem risco com a carteira I situam-se numa linha reta no espaço retorno esperado-desvio-padrão. O intercepto da reta é R_F , e a inclinação é dada por:

$$b = \left(\frac{\overline{R}_I - R_F}{\sigma_I} \right) \quad (5.4.26)$$

e passa pelo ponto ($\sigma_I , \overline{R}_I$), como apresentado na figura abaixo:

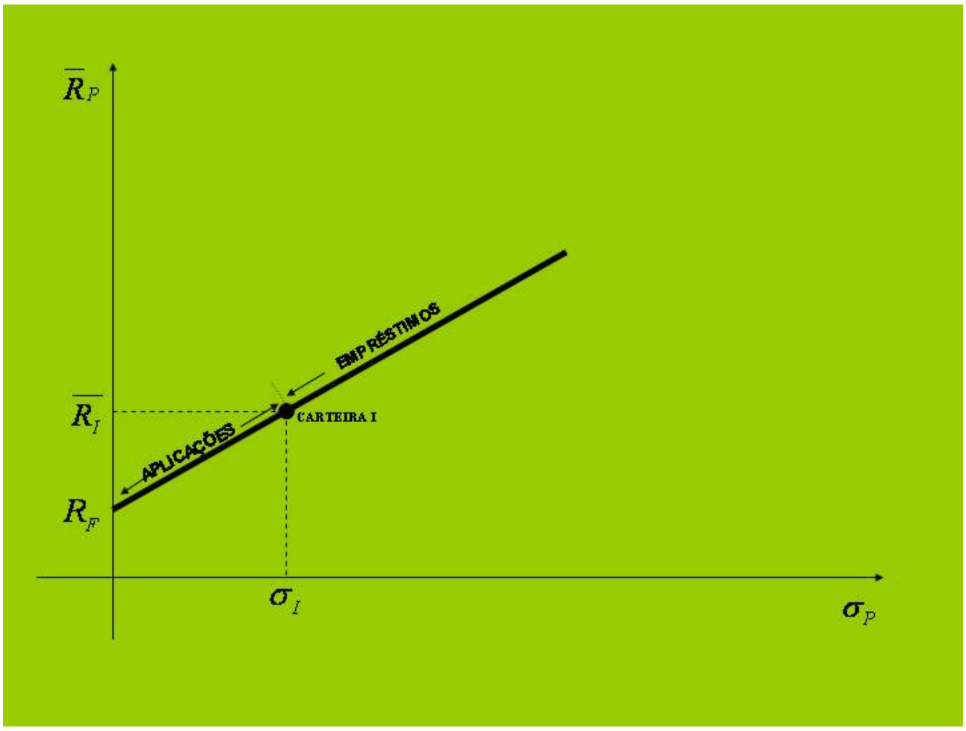

Figura 16 – Ativo Livre de Risco Combinado com a Carteira I

A esquerda do ponto I encontramos combinações da carteira I com empréstimos à taxa livre de risco. Abaixo se encontra uma figura com combinações do ativo livre de risco com outras carteiras. Nota-se que é desejável a maior inclinação da reta possível, pois este será o conjunto de combinações com melhor relação risco-retorno. Portanto, o ponto III é o ponto de tangência entre a fronteira eficiente (formada pelas diversas combinações de cada carteira com o ativo livre de risco) e um raio que parte da taxa livre de risco.

Segundo Elton et al. (2004, p. 92), todos os investidores que acreditassem estar diante da fronteira eficiente e das oportunidades de compra e venda do ativo livre de risco às taxas da figura abaixo escolheriam a carteira III.

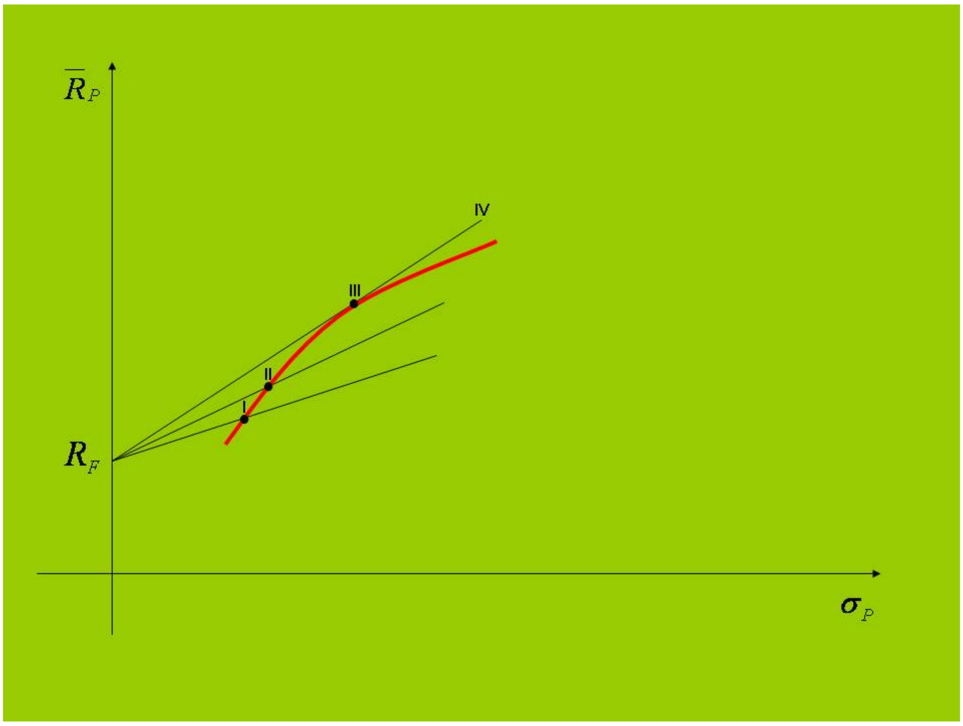

Figura 17 – Ativo Livre de Risco Combinado com Diferentes Carteiras com Risco

Alguns investidores, de acordo com Elton et al. (2004, p. 92), se tivessem forte aversão ao risco, escolheriam uma carteira no segmento $R_F - III$, aplicando parte dos seus recursos em um ativo sem risco e parte na carteira com risco III. Outros, com tolerância ao risco bem maior, escolheriam carteiras situadas no segmento $R_F - IV$, tomando recursos emprestados e aplicando seu capital original, mais os fundos emprestados, na carteira III. E, ainda, outros poriam todos os seus fundos na carteira III. Portanto, no caso de haver possibilidade de captação a aplicação de recursos sem risco, a identificação da carteira III transforma-se numa solução do problema de carteiras.

Porém, como sabemos, a maioria dos investidores tem a capacidade de aplicar à taxa livre de risco, porém não tem capacidade de tomar dinheiro emprestado a essa taxa. Neste caso a fronteira eficiente passará a ser $R_F - III - IV$ da figura abaixo. Alguns investidores terão carteiras com risco situadas entre III e IV. Entretanto, qualquer investidor que possuísse alguma aplicação no ativo sem risco investiria todos os seus fundos restantes na carteira III.

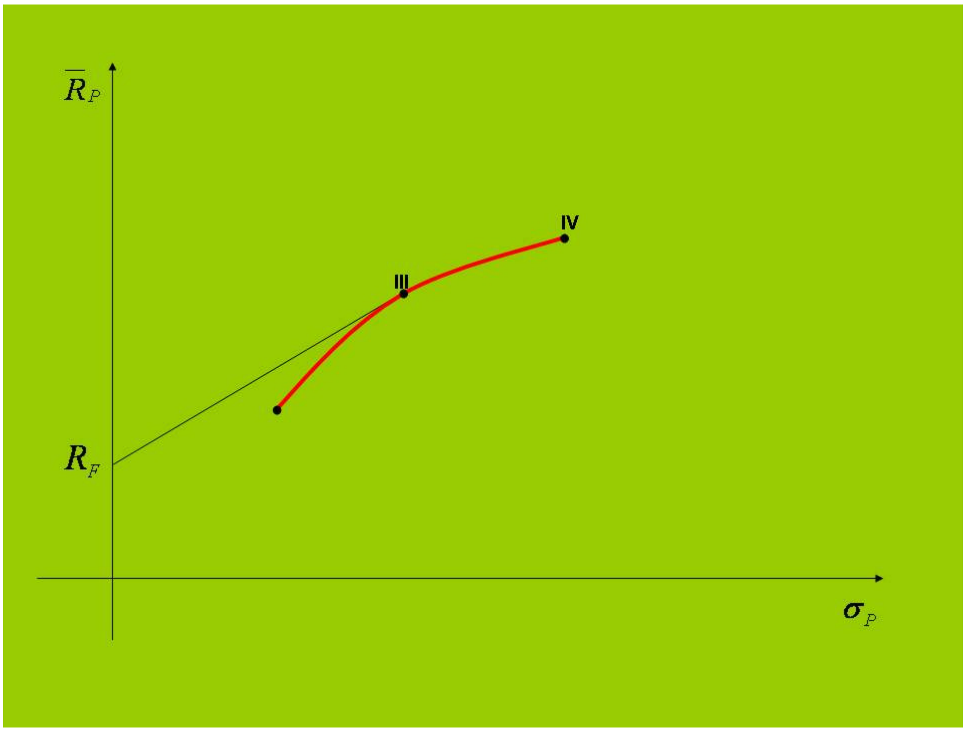

Figura 18 – Fronteira Eficiente com Aplicação e sem Empréstimo a R_F

Outra possibilidade é a de que os investidores apliquem a uma taxa diferente – mais alta – quando tomam dinheiro emprestado. Sendo a taxa de empréstimo representada por $R_F^{'}$, a fronteira eficiente passaria a ser $R_F - III - IV - V$, como mostra a figura abaixo.

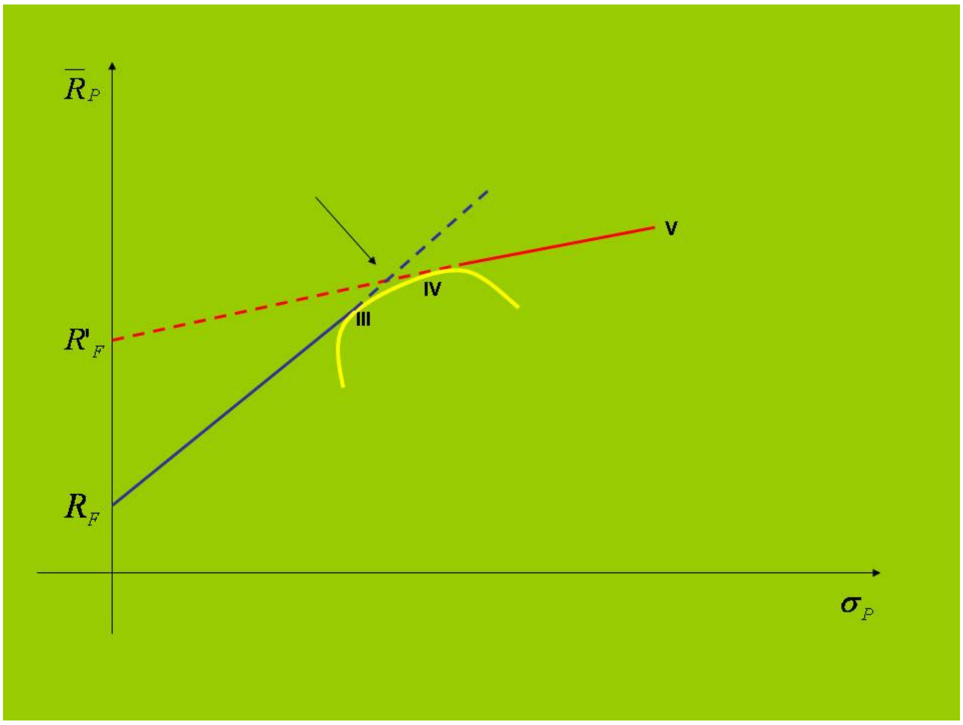

Figura 19 – Fronteira Eficiente com Aplicação e Empréstimos a Taxas Distintas

Neste caso, de acordo com Elton et al. (2004, p. 93), existe uma pequena faixa de carteiras com risco representando uma alternativa para os investidores. Se R_F e $R_F^{'}$ não forem muito distantes uma da outra, a hipótese de aplicação e empréstimo a mesma taxa poderia ser uma boa aproximação da faixa ótima $III - IV$ de carteiras com risco para os investidores.

5.5.3 Cálculo da Fronteira Eficiente

Para calcularmos a fronteira eficiente, de acordo com Elton et al. (2004, p. 103), devemos primeiramente saber quais são as possibilidades que o mercado financeiro disponibiliza para cada investidor. Portanto, podemos calcular a fronteira eficiente supondo:

1. As vendas à descoberto são permitidas e é possível aplicar e tomar dinheiro emprestado à taxa livre de risco;

2. As vendas à descoberto são permitidas mas não é possível aplicar e tomar dinheiro emprestado à taxa livre de risco;
3. As vendas à descoberto não são permitidas mas é possível aplicar e tomar dinheiro emprestado à taxa livre de risco;
4. Nem vendas à descoberto nem aplicações ou empréstimos à taxa livre de risco são permitidas.

1 .<u>Vendas à descoberto , aplicações e empréstimos à taxa livre de risco permitidos</u>

Segundo Elton et al. (2004, p. 103), a existência de uma taxa livre de risco para empréstimos e aplicações acarreta em que haja somente uma carteira com risco que seja preferível a todas as demais carteiras. Além disso, no espaço retorno esperado-desvio-padrão, esta carteira situa-se no raio que liga o ativo sem risco a uma carteira com risco e que está localizado o máximo possível para a direita na direção anti-horária. Por exemplo, na figura abaixo, as carteira situadas no raio $R_F - II$ são preferíveis a todas as outras carteiras de ativos com risco.

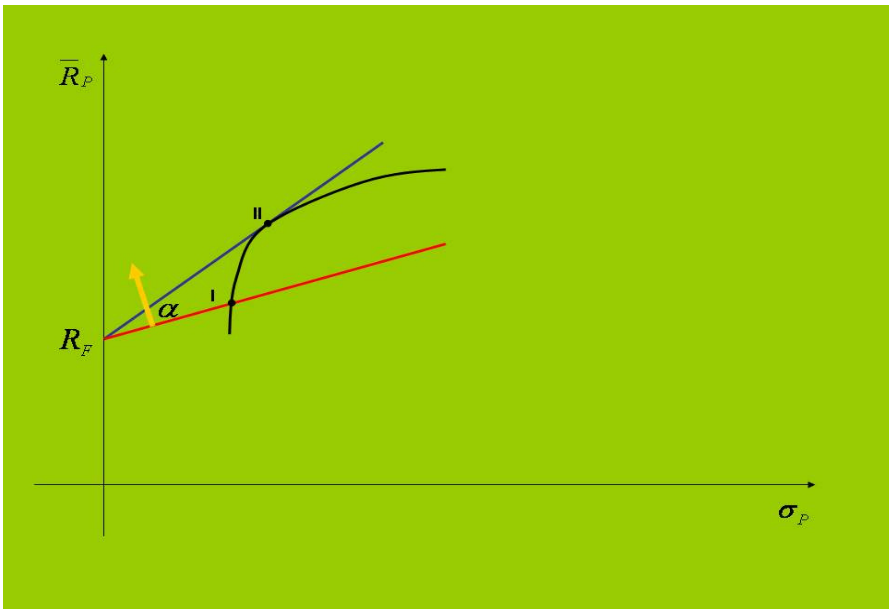

Figura 20 –Combinações entre Ativo sem risco e Carteiras com Risco

A fronteira eficiente corresponde a todo o comprimento do raio que parte de R_F e passa por II. Pontos diferentes desse raio representam proporções distintas de empréstimo e ou aplicação com a carteira ótima de ativos com risco.

Uma forma equivalente de identificar o raio $R_F - II$, de acordo com Elton et al. (2004, p. 104), consiste em reconhecer que ele é o raio com a maior inclinação. Recorde que a inclinação de uma linha que ligue um ativo sem risco a uma carteira de ativos com risco é igual ao quociente entre o retorno esperado da carteira, menos a taxa livre de risco, e o desvio-padrão do retorno da carteira. Portanto, o conjunto eficiente é determinado pela identificação da carteira com maior quociente entre o retorno excedente (retorno esperado menos a taxa livre de risco) e desvio-padrão que satisfaz a restrição de que a soma das proporções investidas nos ativos seja igual a um. Teremos então:

- maximizar a função objetivo

$$\theta = \frac{\overline{R}_P - R_F}{\sigma_P}$$

- sujeito à restrição

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

2. *Vendas à descoberto permitidas e aplicações e empréstimos à taxa livre de risco não permitidas*

Segundo Elton et al. (2004, p. 106), quando o investidor não deseja fazer a suposição de que será capaz de tomar dinheiro emprestado ou emprestar dinheiro à taxa de juros livre de risco, pode-se supor que esta taxa existe e determinar a carteira ótima. Em seguida pode-se alterar a taxa livre de risco até traçar toda a fronteira eficiente. Também é possível construí-la por meio de combinações de quaisquer duas carteiras que estejam situadas na fronteira, ou seja, a identificação da carteira ótima para quaisquer dois valores arbitrários de R_F é suficiente para traçar a fronteira eficiente.

3. *É possível aplicações e empréstimos à taxa livre de risco, mas vendas à descoberto não são permitidas*

Segundo Elton et al. (2004, p. 107), a carteira ótima é aquela que maximiza a inclinação da linha que liga a taxa de juros livre de risco a uma carteira de ativos com risco. Entretanto, os investidores não podem aplicar proporções negativas de títulos. Portanto, teremos:

- maximizar a função objetivo

$$\theta = \frac{\overline{R}_P - R_F}{\sigma_P}$$

- sujeito às restrições

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

e

$X_i >= 0$ para todos os valores de i.

4. <u>*Vendas à descoberto, aplicações e empréstimos à taxa livre de risco não permitidos*</u>

Recorde que um conjunto de carteiras eficientes é determinado minimizando-se o risco para qualquer nível de retorno esperado. Segundo Elton et al. (2004, p. 104), se especificarmos o retorno e minimizarmos o risco, obteremos um ponto da fronteira eficiente. Assim, para conseguirmos um ponto da fronteira eficiente minimizamos o risco para certo nível de retorno, porém sujeito às restrições:

- minimizar

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i^2\sigma_i^2)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}(X_iX_j\sigma_{ij})$$

- sujeito às restrições

$$\sum_{i=1}^{N}X_i=1$$

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i\overline{R}_i)=R_P$$

$X_i >= 0$ para todos os valores de i.

Variando-se $\overline{R}_P$ entre o retorno da carteira de mínima variância e o retorno da carteira de máximo retorno, produz-se o conjunto de carteiras eficientes.

6. MÉTODO

6.1 PROCESSO DE AMOSTRAGEM

Segundo Malhotra (2001, p. 301), a maioria dos projetos de pesquisa tem como objetivo obter informações sobre as características ou parâmetros de uma população. Uma população é o agregado, ou soma, de todos os elementos que compartilham algum conjunto de características comuns, conformando o universo para o problema de pesquisa. Um censo é a enumeração completa dos elementos de uma população ou de objetos de estudo. Já uma amostra é um subgrupo dos elementos da população selecionado para a participação do estudo.

A população alvo, de acordo com Malhotra (2001, p. 301), é a coleção de elementos ou objetos que possuem a informação procurada pelo pesquisador e sobre os quais devem ser feitas inferências. Já o arcabouço amostral é uma representação dos elementos da população-alvo, ou seja, consiste em uma lista ou conjunto de instruções para identificar a população-alvo. Neste estudo, a população-alvo será o conjunto de ações transacionadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) no mercado à vista e o arcabouço amostral será a lista destas.

A amostra foi composta de 50 ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo, negociadas no mercado à vista, com cotações históricas disponíveis no período de setembro 1997 a outubro de 2006 e pertencentes ao índice IBrX. Estas, foram selecionadas em ordem decrescente de participação no índice IBrX, entretanto as ações que apresentavam períodos de um mês ou mais sem negociação foram excluídas da amostra.

Ativos selecionados (código de negociação):

AMBV3	SBSP3
AMBV4	SDIA4
ARCE3	TLPP4
ARCZ6	UBBR11
BBAS3	USIM5
BBDC3	VALE3
BBDC4	VALE5
BRKM5	VCPA4
CMIG4	WEGE4
CPLE6	FFTL4
CPSL3	PRGA3
CRUZ3	SUZB5
CSNA3	DURA4
ELET3	BRTO4
ELET6	ACES4
GGBR4	PTIP4
GOAU4	RSID3
ITAU4	TLPP3
ITSA4	CNFB4
KLBN4	CMIG3
LAME4	CTNM4
NETC4	CGAS5
PCAR4	POMO4
PETR3	UNIP6
PETR4	RAPT4

Quadro 2 – Ativos selecionados para a Amostra

6.2 PROCESSO DE COLETA DE DADOS

Os dados necessários para a realização deste estudo foram extraídos com o auxílio do software "Metastock Professional 8.0"[6] de um banco de dados fornecido pelo site "www.analistademercado.com.br". As séries históricas obtidas não foram submetidas a

[6] Metastock Professional 8.0 é um software utilizado para administração de base de dados e análise gráfica.

índices de correção de inflação, e não se adicionou o dividendo distribuído aos preços.

6.3 ANÁLISE DOS DADOS

As medidas estatísticas utilizadas durante o desenvolvimento do modelo de estimação de risco e retornos em carteiras são descritas abaixo.

6.3.1 Risco e Retorno de Ativos Individuais

6.3.1.1 Retorno de Um Ativo

Assumindo-se que a série de dados seja discreta, o retorno de um ativo pode ser dado por:

$$R_t = \frac{P_t - P_{(t-1)}}{P_{(t-1)}} \quad (6.3.3.1.1)$$

onde R_t é o retorno da ação no momento t, P_t é o preço da ação no momento t, e $P_{(t-1)}$ é o preço da ação no momento anterior a t. Quando se assume que a série de dados é contínua, normalmente o retorno é definido como a diferença dos logaritmos neperianos dos preços das ações, onde R_t é o retorno da ação no momento t, P_t é o preço da ação no momento t, $P_{(t-1)}$ é o preço da ação em momento anterior a t, e $\ln$ significa logaritmos neperianos:

$$R_{(t)} = \ln \frac{P_t}{P_{(t-1)}} \quad (6.3.3.1.2)$$

$$\mathrm{R_t} = \ln \mathrm{P_t} - \ln \mathrm{P_{(t-1)}} \quad (6.3.3.1.3)$$

6.3.1.2 Retorno Esperado de Um Ativo

Ao se trabalhar com riscos, de acordo com Elton et al. (2004, p. 60), a primeira alteração a ser feita é a utilização da palavra “esperança”. Desta forma, os cálculos de retorno médio, por exemplo, passam a ter como resultado o retorno médio esperado. O valor médio, a média ou retorno esperado[7], quando todos os retornos possuem a mesma probabilidade de ocorrência, é calculado pela média aritmética simples dos retornos:

$$\overline{R_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{R_{ij}}{N} \quad (6.3.1.2.1)$$

onde $\overline{R_i}$ é o retorno esperado do ativo i, R_{ij} é o retorno do ativo i no momento j e N é o número de observações.

Quando os retornos não possuem a mesma probabilidade de ocorrência o retorno esperado é dado por:

$$\overline{R_i} = \sum_{j=1}^{N} (P_{ij} . R_{ij}) \quad (6.3.1.2.2)$$

onde $\overline{R_i}$ é o retorno esperado do ativo i, R_{ij} é o retorno do ativo i no momento j e P_{ij} é a probabilidade de ocorrência.

[7] As expressões *valor médio, retorno esperado* e *média* serão utilizados como sinônimos.

6.3.1.3 Variância de um Ativo

Segundo Elton et al. (2004, p. 62), a variância de um ativo é a média aritmética do quadrado dos desvios centrados na média. Os desvios são elevados ao quadrado e, portanto, positivos para corrigir o problema de a média aritmética dos desvios ser igual a zero e, portanto, não ser útil como medida de dispersão. A variância é dada por:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_{ij} - \overline{R_i})^2}{N} \quad (6.3.1.3.1)$$

para retornos com igual probabilidade de ocorrência e

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{N} [P_{ij}(R_{ij} - \overline{R_i})^2] \quad (6.3.1.3.2)$$

para retornos com probabilidades de ocorrência diferentes. Onde R_{ij} é o retorno do ativo i no momento j , $\overline{R_i}$ é o retorno médio do ativo i , N é o número de períodos e P_{ij} é a probabilidade de ocorrência dos retornos. Entretanto, de acordo com Elton et al. (2004, p. 60), tais fórmulas são para o cálculo da variância supondo que o investidor esteja estimando os retornos e suas probabilidades, porém é muito comum que os retornos e suas probabilidades sejam obtidos a partir de dados históricos. Neste caso, muitos autores defendem a utilização da variância com denominador $(N-1)$. Desta forma obtém-se uma estimativa não viesada da variância, mas que possui a desvantagem de ser ineficiente, ou seja, produz uma estimativa mais pobre da verdadeira variância. O uso de N como denominador dá a melhor estimativa do verdadeiro valor, ou seja, é a estimativa de máxima verossimilhança. Embora seja melhor estimativa, à medida que cresce, ela não converge para o verdadeiro valor. A divisão por $(N-1)$ produz um dado que converge para o verdadeiro valor quando N cresce, ou seja, é tecnicamente não viesada, mas não é a estimativa mais eficiente para um N finito. O uso de uma ou outra fórmula depende qual propriedade se tenha como mais importante.

6.3.1.4 Desvio-Padrão de um Ativo

O indicador mais comum do risco de um ativo é o desvio-padrão, que mensura a dispersão em torno do valor esperado. Segundo Elton et al. (2004, p. 63), desvio padrão é dado pela raiz quadrada da variância (ELTON et al., 2004):

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} \quad (6.3.1.4.1)$$

6.3.2 Risco e Retorno em Carteiras

O risco de qualquer investimento proposto em um único ativo, de acordo com Gitman (2001, p. 211), não deve ser visto independentemente de outros ativos. Novos investimentos devem ser considerados sob o prisma de seu impacto sobre o risco e retorno da carteira de ativos. A meta de um administrador financeiro é criar uma carteira eficiente que maximize o retorno para um dado nível de risco, e, ou, minimize o risco para um dado nível de retorno.

Segundo (LAMB, 2006), o risco de uma carteira de ativos é medida pelo desvio-padrão da carteira e o risco com o qual o ativo irá contribuir ao ser adicionado a uma carteira pelo coeficiente beta. O risco de uma carteira resulta das contribuições dos riscos individuais de cada título e das covariâncias (ou das correlações) entre os riscos dos títulos. Portanto, o desvio-padrão de uma carteira de ativos não é mensurado apenas através de uma combinação linear dos desvios-padrão dos ativos que a compõe, a título do que é feito para o cálculo dos retornos de uma carteira.

6.3.2.1 Retorno de Carteiras

Segundo Elton et al. (2004, p. 67), o retorno de uma carteira é dado pela média ponderada – pela participação de cada ativo na carteira - dos retornos dos ativos individuais. Portanto, é dado por:

$$R_{Pj} = \sum_{i=1}^{N} (X_i R_{ij})$$

onde, R_{Pj} é o retorno do carteira P no momento J, X_i é a participação do ativo i na carteira, R_{ij} é o retorno do ativo i no momento J e N é o número de ativos na carteira.

6.3.2.2 Retorno Esperado de Carteiras

Segundo Elton et al. (2004, p. 67), O retorno esperado de uma carteira é dado pela média ponderada – pela participação de cada ativo na carteira - dos retornos esperados dos ativos individuais. Portanto, é dado por:

$$\overline{R}_P = \sum_{i=1}^{N} (X_i \overline{R}_i)$$

onde, $\overline{R}_P$ é o retorno esperado da carteira, X_i é a participação do ativo i, $\overline{R}_i$ é o retorno esperado do ativo i e N é o número de ativos na carteira.

6.3.2.3 Covariância

Segundo Elton et al. (2004, p. 68), a covariância é a medida de como os retornos de dois ativos se movem juntos. A covariância é muito importante, porém é de difícil entendimento, por isto uma medida muito utilizada é a padronização da covariância que recebe o nome de correlação. A covariância de uma combinação de ativos é dada pela média aritmética dos produtos dos desvios em relação à média. É, portanto, uma medida de como se relacionam os desvios entre as variáveis. A covariância, para retornos equiprováveis, é dada:

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} \quad (6.3.2.3.1)$$

onde x_i é o retorno do ativo x no momento i, y_i é o retorno do ativo y no momento i, $\bar{x}$ é o retorno médio do ativo x, $\bar{y}$ é o retorno médio do ativo y e N é o número de observações. A covariância para retornos com probabilidades de ocorrência diferentes é dada por:

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{N} p_i[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})] \quad (6.3.2.3.2)$$

onde x_i é o retorno do ativo x no momento i, y_i é o retorno do ativo y no momento i, $\bar{x}$ é o retorno médio do ativo x, $\bar{y}$ é o retorno médio do ativo y e p_i é a probabilidade de ocorrência dos retornos.

6.3.2.4 Correlação

A correlação, de acordo com Gitman (2001, p. 211), é a medida estatística da relação, se existir, entre séries de números representando dados de qualquer tipo. Se duas séries se movem na mesma direção, elas são correlacionadas positivamente. Se as séries se movem em direções opostas, estas são correlacionadas negativamente.

A correlação, de acordo com Elton et al. (2004, p. 68), é uma padronização da covariância e, portanto, possui as mesmas características desta, porém dentro de um intervalo entre -1 e +1. Pode ser encontrada dividindo-se a covariância entre dois ativos pelo produto dos seus desvios-padrão. Portanto, pode ser dada por:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \times \sigma_2} \quad (6.3.2.4.1)$$

onde σ_{12} é a covariância entre os ativos 1 e 2, σ_1 é o desvio-padrão do ativo 1 e σ_2 é o desvio-padrão do ativo 2. Segundo Gitman (2001, p. 211), quando o grau de correlação é igual a +1, diz-se que a série possui uma correlação positiva perfeita. Já quando a série possui o grau de correlação igual a –1, diz-se que a série possui uma correlação negativa perfeita. As séries correlacionadas perfeita e positivamente se movem exatamente juntas; as séries correlacionadas perfeita e negativamente se movem juntas em direções exatamente opostas.

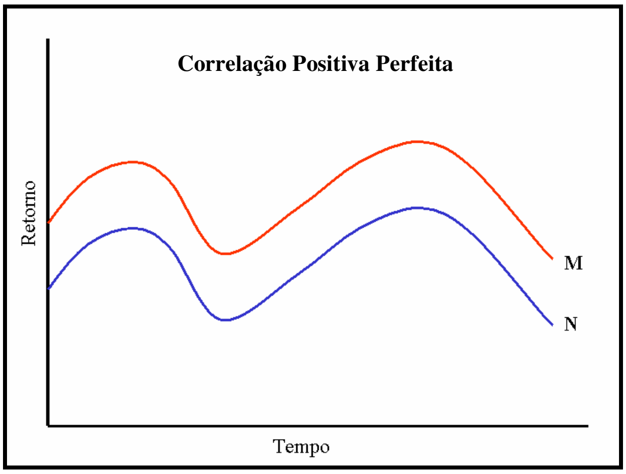

Figura 21 – Correlação entre as Séries M e N

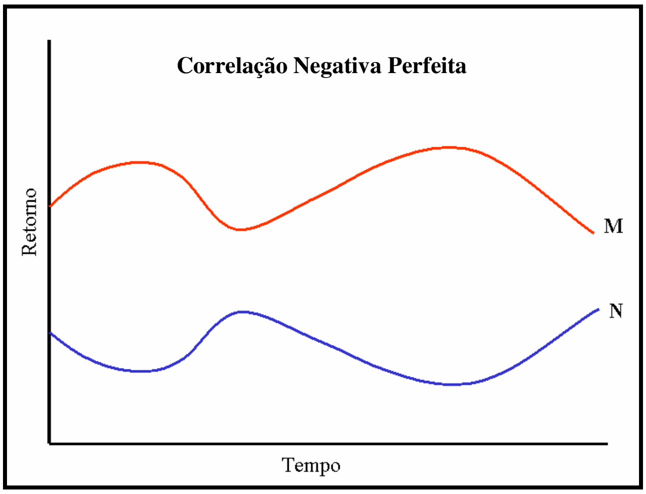

Figura 22 – Correlação entre as Séries M e N

6.3.2.5 Variância e Desvio-Padrão em Carteiras

Segundo Elton et al. (2004, p. 71) a Variância de uma carteira é dada por:

$$\sigma_P^2 = \sum_{j=1}^{N}(X_j^2\sigma_j^2) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{K=1 \\ K\neq J}}^{N}(X_J X_K \sigma_{JK})$$

onde o primeiro termo representa o somatório do risco das variâncias de cada ativo ponderadas pela sua participação na carteira e, a segunda, representa o risco das covariâncias entre os ativos. Esta fórmula é conseqüência de substituições e reorganizações da expressão abaixo:

$$\sigma_P^2 = E(R_P - \overline{R_P})^2$$

Já o desvio-padrão nada mais é do que a extração da raiz quadrada da variância.

6.3.3 Modelo de Alisamento Exponencial (EWMA)

Segundo Lamb (2006), os modelos utilizados para estimar a volatilidade de ativos precisam considerar que as volatilidades, assim como as correlações, entre os retornos dos ativos não são constantes, ou seja, variam no decorrer do tempo. Um dos modelos usados para melhor estimar as volatilidades é o Modelo de Alisamento Exponencial.

Nesta abordagem, os pesos α_i decrescem de forma exponencial,das observações mais recentes para as observações mais afastadas no tempo. Os pesos α_i são tais que $\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i$, onde λ é uma constante com valor tal que $0 \le \lambda \le 1$.

No modelo EWMA a volatilidade pode ser dada por:

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{N-1}^2 + (1-\lambda)\mu_{n-1}^2 \quad (6.3.3.1)$$

onde σ_N^2 é a estimativa da volatilidade para o período N, σ_{N-1}^2 é a volatilidade no período anterior, μ_{N-1}^2 é o retorno mais recente observado e λ é uma constante entre 0 e 1. A volatilidade, de acordo com Lamb (2006), é calculada a partir da estimativa corrente para a taxa de variância dos retornos do ativo e da observação mais recente deste. O valor de λ deve expressar a sensibilidade da volatilidade às observações mais recentes do preço do ativo. Um valor baixo para λ (mais próximo de zero) significa uma elevada variação na volatilidade, enquanto um valor elevado (mais próximo de 1) para λ significa uma volatilidade mais constante, uma volatilidade que responde mais lentamente às variações de preços de ativos.

6.3.3 Modelo de Seleção de Carteiras Eficientes

Em primeiro lugar, foram calculados os retornos mensais dos ativos pertencentes à amostra no período de setembro 1997 a outubro de 2006 de acordo com a expressão (6.3.3.1.1). Em seguida a série histórica dos retornos foi dividida em dois períodos: o primeiro período vai de setembro 1997 a outubro de 2005 (95 retornos), e o segundo vai de novembro de 2005 a outubro de 2006 (12 retornos). O primeiro período foi utilizado para gerar as estimativas de retornos dos ativos de acordo com a expressão (6.3.1.2.2), assim como para gerar as estimativas das variâncias nos retornos dos ativos de acordo com a expressão (6.3.1.3.2) e também para gerar as estimativas das covariâncias entre os ativos de acordo com a expressão (6.3.2.3.2). A probabilidade de ocorrência de cada retorno foi definida de acordo com a expressão (6.3.3.1 - Modelo de Alisamento Exponencial) com um $\lambda = 0{,}93$. O segundo período foi utilizado para calcular a média aritmética simples dos retornos dos ativos e, estes dados, utilizados para testar se as estimativas de retornos geradas se aproximam do ocorrido.

O retorno esperado das carteiras foi definido de acordo com a expressão (5.4.4), ou seja, a média ponderada (pela participação de cada ativo na carteira) dos retornos esperados dos ativos. Já o retorno ocorrido das carteiras de acordo com a expressão (5.4.3), ou seja, a média ponderada (pela participação de cada ativo na carteira) dos retornos (ocorridos) dos ativos.

A variância esperada das carteiras foi definida de acordo com a expressão (5.4.7), ou seja, o somatório das variâncias esperadas dos ativos individuais ponderadas pelo quadrado de sua participação na carteira mais o somatório das covariâncias esperadas entre as combinações de ativos multiplicadas pela participação de cada ativo na carteira. Já a variância ocorrida das carteiras foi definida como a média aritmética dos quadrados dos desvios entre os retornos ocorridos e o esperado destas. Os desvios-padrão foram encontrados, simplesmente, extraindo-se a raiz quadrada das variâncias.

Em seguida, delineou-se a fronteira eficiente através da estimação de cinqüenta e duas carteiras. Para tanto, com o auxílio do recurso "Solver" do software "Microsoft Excel XP[8]" se minimizou as variâncias destas para diferentes níveis de retornos[9], admitindo-se apenas proporções positivas dos ativos nas carteiras e, ainda, que a soma de todas as proporções aplicadas seja igual a um. Portanto, trata-se de um problema onde, supõe-se que vendas à descoberto, empréstimos e aplicações à taxa livre de risco não são permitidos, conforme condições abaixo:

- minimizar

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i^2\sigma_i^2)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}(X_i X_j \sigma_{ij})$$

[8] Aplicativo de planilhas eletrônicas que integra o pacote Microsoft Office XP.
[9] Os diferentes níveis de retornos vão da carteira de mínima variância até a rentabilidade da carteira com maior índice de Sharpe (quociente entre excesso de retorno desvio-padrão). A taxa de juros livre de risco, neste estudo, foi definida como a taxa Selic na data de início do trabalho (13,75% a.a).

- sujeito às restrições

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$X_i >= 0$ para todos os valores de i.

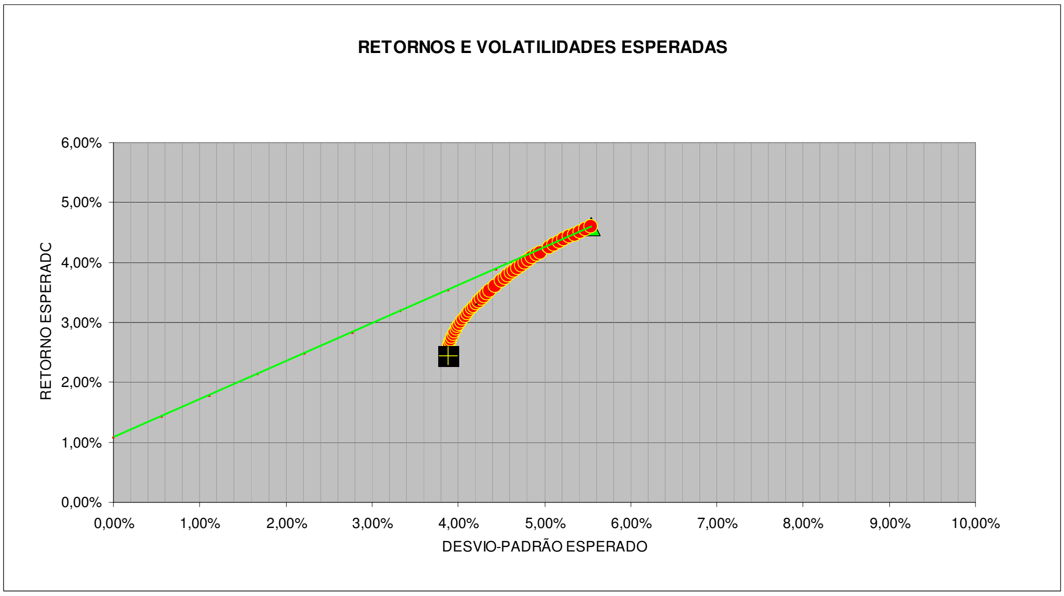

Figura 23 – Retornos e Volatilidades Esperadas

Calculou-se o coeficiente de correlação entre os retornos estimados das carteiras e os efetivamente ocorridos. O mesmo procedimento foi realizado em relação à volatilidade (variância padronizada, ou seja, desvio-padrão) das carteiras.

Com o objetivo comparar o desempenho das carteiras geradas pelo modelo de seleção de carteiras eficientes com carteiras diversificadas de forma aleatória foram compostas 52 carteiras diversificadas ao acaso. Para cada carteira foram sorteados 20 ativos e, a cada um destes, foi dado a participação de 5% na composição da carteira.

7. RESULTADOS

7.1 ESTIMATIVAS

Para medir a associação entre as estimativas de retornos e os retornos efetivamente ocorridos calculou-se o coeficiente de correlação entre estes. Encontrou-se $\rho = 0,8424$, conforme tabela 2, o que indica uma forte associação entre os retornos previstos e os retornos ocorridos. Porém, o acréscimo de retorno para cada unidade de risco foi visivelmente maior nos dados estimados do que nos dados ocorridos, como pode ser observado no gráfico abaixo e na tabela 2. Além disso, observa-se que ocorre uma relação linear positiva entre os retornos previstos e os retornos ocorridos até a faixa de retornos previstos de 4%, conforme figura 25, logo após esta faixa a relação começa a se inverter. Isto, provavelmente, se deve ao fato de que quanto maior o retorno determinado menores são as possibilidades de combinações dos ativos para formarem a carteira e, conseqüentemente, menor será o número de ativos que irá compor esta. Portanto à medida que cresce o risco das carteiras tornam-se mais difíceis as previsões dos seus retornos.

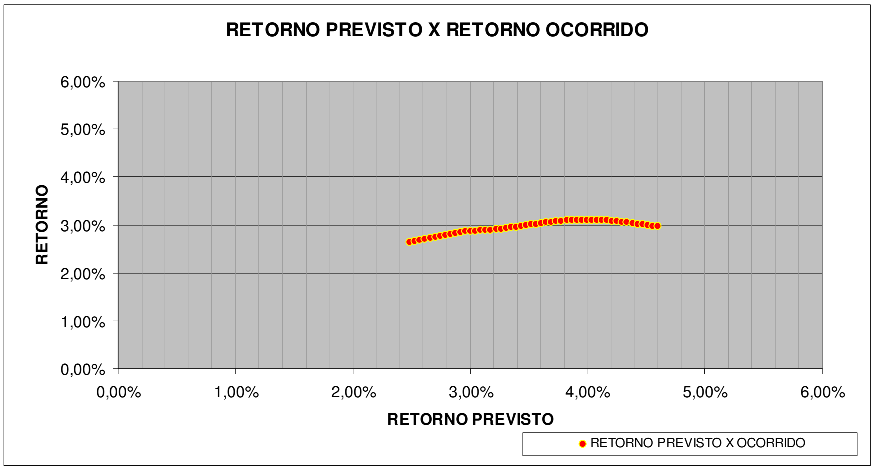

Figura 24 – Retorno Previsto X Retorno Ocorrido

Já o coeficiente de correlação entre as volatilidades estimadas e as volatilidades ocorridas foi de $\rho = 0{,}9922$, conforme tabela 2, o que indica uma forte correlação entre os dados. Diferentemente do que ocorreu com os retornos, as estimativas de volatilidades foram muito próximas das volatilidades ocorridas, o que associado a forte correlação entre as variáveis indica que o modelo fornece boas estimativas de volatilidades futuras.

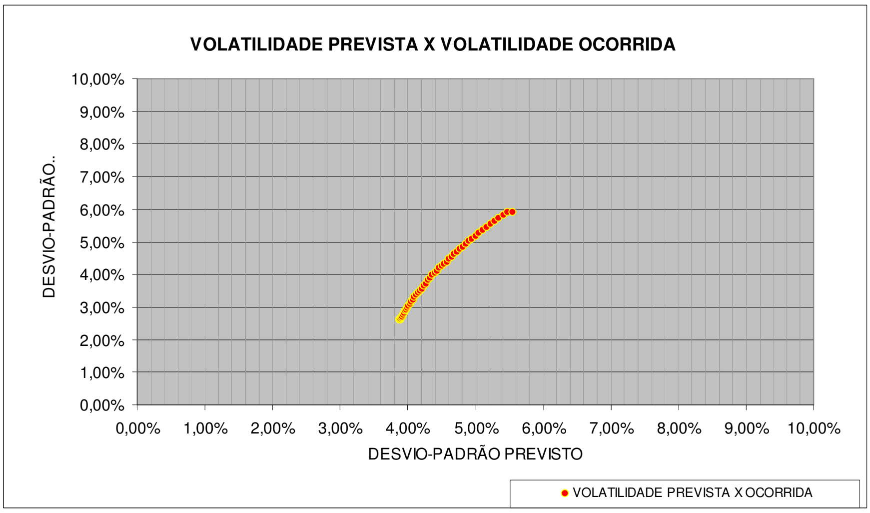

Figura 25 – Volatilidade Prevista X Volatilidade Ocorrida

Os dados previstos, assim como os dados ocorridos são apresentados na tabela abaixo:

Tabela 2 – Retornos e Volatilidades

	RETORNO PREVISTO (X)	RETORNO OCORRIDO (Y)	VOLATILIDADE PREVISTA (X)	VOLATILIDADE OCORRIDA (Y)
MÍNIMA VARIÂNCIA	0,0244546815	0,0262608109	0,0388211543	0,0259176905
CARTEIRA 1	0,0248853604	0,0264259505	0,0388311587	0,0259002053
CARTEIRA 2	0,0253160394	0,0265911811	0,0388611567	0,0258824824
CARTEIRA 3	0,0257467185	0,0267563541	0,0389111020	0,0261219232
CARTEIRA 4	0,0261773974	0,0269400059	0,0389801583	0,0263967578
CARTEIRA 5	0,0266080765	0,0271378291	0,0390679286	0,0266973694
CARTEIRA 6	0,0270387554	0,0273291418	0,0391742792	0,0270037578
CARTEIRA 7	0,0274694344	0,0275183924	0,0392956458	0,0274509643
CARTEIRA 8	0,0279001135	0,0277363117	0,0394309968	0,0280252957
CARTEIRA 9	0,0283307924	0,0279543697	0,0395803535	0,0286000404
CARTEIRA 10	0,0287614713	0,0281675690	0,0397438518	0,0291970787
CARTEIRA 11	0,0291921503	0,0283791846	0,0399220312	0,0298018774
CARTEIRA 12	0,0296228293	0,0285908057	0,0401147280	0,0304066080
CARTEIRA 13	0,0300535083	0,0286950516	0,0403198337	0,0309159946
CARTEIRA 14	0,0304841873	0,0287215393	0,0405372952	0,0315439418
CARTEIRA 15	0,0309148663	0,0287731964	0,0407684915	0,0322463341
CARTEIRA 16	0,0313455453	0,0288296764	0,0410120837	0,0329507780
CARTEIRA 17	0,0317762242	0,0288859910	0,0412678333	0,0336552677
CARTEIRA 18	0,0322069032	0,0289729040	0,0415358301	0,0343232718
CARTEIRA 19	0,0326375822	0,0291248461	0,0418143693	0,0348851798
CARTEIRA 20	0,0330682612	0,0292767469	0,0421012806	0,0356089525
CARTEIRA 21	0,0334989402	0,0294281991	0,0423963920	0,0363280962
CARTEIRA 22	0,0339296193	0,0295781635	0,0426994655	0,0370276803
CARTEIRA 23	0,0343602982	0,0297248441	0,0430102911	0,0382880210
CARTEIRA 24	0,0347909772	0,0298713564	0,0433286878	0,0389901894
CARTEIRA 25	0,0352216562	0,0300176462	0,0436544899	0,0396923130
CARTEIRA 26	0,0356523351	0,0301639540	0,0439875326	0,0403945349
CARTEIRA 27	0,0360830141	0,0303102100	0,0443276529	0,0410966777
CARTEIRA 28	0,0365136931	0,0304566037	0,0446746890	0,0417976897
CARTEIRA 29	0,0369443721	0,0305863521	0,0450282630	0,0424913575
CARTEIRA 30	0,0373750511	0,0306977855	0,0453873472	0,0431673359
CARTEIRA 31	0,0378057301	0,0307908462	0,0457522616	0,0438431997
CARTEIRA 32	0,0382364091	0,0308839959	0,0461230707	0,0445190372
CARTEIRA 33	0,0386670880	0,0309771071	0,0464996334	0,0452388774
CARTEIRA 34	0,0390977671	0,0310261096	0,0468827385	0,0460340642
CARTEIRA 35	0,0395284461	0,0309990744	0,0472822020	0,0468293283
CARTEIRA 36	0,0399591250	0,0309720073	0,0477003141	0,0476242784
CARTEIRA 37	0,0403898040	0,0309449851	0,0481365887	0,0484196008
CARTEIRA 38	0,0408204830	0,0309179041	0,0485905366	0,0492295228
CARTEIRA 39	0,0412511620	0,0308742849	0,0490618077	0,0500394093
CARTEIRA 40	0,0416818410	0,0308307683	0,0495500426	0,0508575194
CARTEIRA 41	0,0421125200	0,0307634383	0,0500553585	0,0516828431
CARTEIRA 42	0,0425431989	0,0306761627	0,0505803291	0,0525081571
CARTEIRA 43	0,0429738779	0,0305888942	0,0511247755	0,0534133824
CARTEIRA 44	0,0434045569	0,0304566294	0,0516885080	0,0543327032
CARTEIRA 45	0,0438352359	0,0303165870	0,0522716241	0,0552519450
CARTEIRA 46	0,0442659148	0,0301765959	0,0528734944	0,0561712056
CARTEIRA 47	0,0446965938	0,0300365312	0,0534934860	0,0570903189
CARTEIRA 48	0,0451272729	0,0298964361	0,0541309763	0,0580095525
CARTEIRA 49	0,0455579518	0,0297565339	0,0547853543	0,0590918233
CARTEIRA 50	0,0459886309	0,0296165009	0,0554560224	0,0591636237
MELHOR SHARPE	0,0459886308	0,0296164936	0,0554560224	0,0591636237
CORRELAÇÃO	0,8424		0,9922	

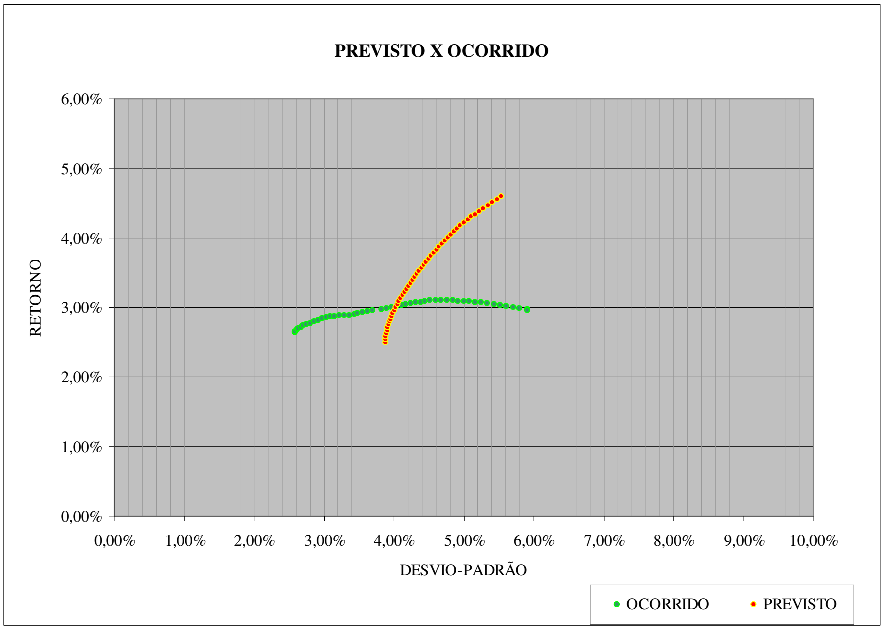

Figura 26– Previsto X Ocorrido

Portanto, a correlação entre os dados estimados e os efetivamente ocorridos mostrou-se bastante forte. Além disso, os dados estimados foram bem próximos, principalmente as volatilidades, dos dados ocorridos. Por conseguinte, devido a forte correlação, o modelo poderia ser corrigido por uma equação (reta de regressão) para apresentar estimativas mais precisas, ou seja, ainda mais próximas da realidade.

7.2 DESEMPENHO DAS CARTEIRAS

As carteiras otimizadas pelo modelo proposto apresentaram composição entre 9 e 14 ativos. Já as carteiras diversificadas aleatoriamente foram compostas por 20 ativos cada e, portanto, mais diversificadas que as anteriores. Apesar disso, o desempenho das carteiras formadas com a utilização do modelo de otimização de carteiras (carteiras eficientes) frente ao desempenho das carteiras diversificadas de forma aleatória foi, em todos os casos, superior.

Tabela 3 – Desempenho das Carteiras

	CARTEIRAS EFICIENTES			CARTEIRAS DIVERSIFICADAS ALEATORIAMENTE		
	RETORNO	VOLATILIDADE	ÍNDICE DE SHARPE	RETORNO	VOLATILIDADE	ÍNDICE DE SHARPE
CARTEIRA 1	0,026260811	0,025917691	0,596769987	0,020872685	0,050222219	0,200683558
CARTEIRA 2	0,026425951	0,025900205	0,603548861	0,018495835	0,04417521	0,17434947
CARTEIRA 3	0,026591181	0,025882482	0,610346016	0,022402243	0,039883696	0,291054576
CARTEIRA 4	0,026756354	0,026121923	0,611074571	0,019367485	0,040031328	0,214171616
CARTEIRA 5	0,026940006	0,026396758	0,61166962	0,015773829	0,040723774	0,122285276
CARTEIRA 6	0,027137829	0,026697369	0,612192077	0,026712492	0,040345296	0,394558536
CARTEIRA 7	0,027329142	0,027003758	0,61233073	0,017669631	0,037064765	0,185505549
CARTEIRA 8	0,027518392	0,027450964	0,609249319	0,0203287	0,040156807	0,237438913
CARTEIRA 9	0,027736312	0,028025296	0,604539584	0,023820455	0,037561174	0,346808754
CARTEIRA 10	0,02795437	0,02860004	0,600015188	0,020825469	0,036038809	0,278354311
CARTEIRA 11	0,028167569	0,029197079	0,595047816	0,016530931	0,032088793	0,178785793
CARTEIRA 12	0,028379185	0,029801877	0,590072675	0,017974115	0,035246065	0,203716481
CARTEIRA 13	0,028590806	0,030406608	0,58529694	0,020652049	0,03419032	0,288331259
CARTEIRA 14	0,028695052	0,030915995	0,579025218	0,019886277	0,041790074	0,217572381
CARTEIRA 15	0,028721539	0,031543942	0,568338235	0,0222311	0,04517378	0,25318202
CARTEIRA 16	0,028773196	0,032246334	0,557560598	0,018378082	0,038221074	0,198429031
CARTEIRA 17	0,028829676	0,032950778	0,547354764	0,016278989	0,040328285	0,136010696
CARTEIRA 18	0,028885991	0,033655268	0,537570525	0,016777021	0,037210643	0,160790276
CARTEIRA 19	0,028972904	0,034323272	0,529640444	0,015367623	0,041403746	0,110466144
CARTEIRA 20	0,029124846	0,03488518	0,525464828	0,018429308	0,039678664	0,192430806
CARTEIRA 21	0,029276747	0,035608953	0,519050253	0,022276048	0,038647108	0,297102097
CARTEIRA 22	0,029428199	0,036328096	0,512944249	0,020048451	0,04286799	0,215884615
CARTEIRA 23	0,029578164	0,03702768	0,507302976	0,018041467	0,043182097	0,167837055
CARTEIRA 24	0,029724844	0,038288021	0,494434879	0,022704575	0,043591084	0,273236238
CARTEIRA 25	0,029871356	0,038990189	0,489288347	0,022704575	0,036031741	0,330560318
CARTEIRA 26	0,030017646	0,039692313	0,484318843	0,016880074	0,039957013	0,152317761
CARTEIRA 27	0,030163954	0,040394535	0,479521375	0,024833568	0,042204077	0,332661153
CARTEIRA 28	0,03031021	0,041096678	0,474887509	0,025296736	0,046675288	0,310717423
CARTEIRA 29	0,030456604	0,04179769	0,470425345	0,022213474	0,042978442	0,265704451
CARTEIRA 30	0,030586352	0,042491358	0,465799216	0,017752342	0,034081274	0,204171694
CARTEIRA 31	0,030697786	0,043167336	0,461086467	0,019334052	0,038481168	0,221930394
CARTEIRA 32	0,030790846	0,0438432	0,45610118	0,022937634	0,043964243	0,27621818
CARTEIRA 33	0,030883996	0,044519037	0,451269526	0,016987542	0,046835177	0,132243145
CARTEIRA 34	0,030977107	0,045238877	0,446147146	0,021860821	0,040145433	0,27567045
CARTEIRA 35	0,03102611	0,046034064	0,439504938	0,024327547	0,041061154	0,329597055
CARTEIRA 36	0,030999074	0,046829328	0,431463872	0,023050223	0,034559588	0,354642893
CARTEIRA 37	0,030972007	0,047624278	0,423693479	0,023684851	0,043330375	0,297503546
CARTEIRA 38	0,030944985	0,048419601	0,416175964	0,015786912	0,034734435	0,143747876
CARTEIRA 39	0,030917904	0,049229523	0,408778958	0,023920769	0,039970577	0,328413023
CARTEIRA 40	0,030874285	0,050039409	0,401291184	0,020438944	0,036596089	0,263553649
CARTEIRA 41	0,030830768	0,050857519	0,393980231	0,019741579	0,040792736	0,219344645
CARTEIRA 42	0,030763438	0,051682843	0,386386004	0,020565449	0,035253692	0,277177715
CARTEIRA 43	0,030676163	0,052508157	0,378650722	0,023657856	0,039015887	0,329710434
CARTEIRA 44	0,030588894	0,053413382	0,370599693	0,015446644	0,038141658	0,121985602
CARTEIRA 45	0,030456629	0,054332703	0,361894718	0,010940619	0,04710776	0,003114299
CARTEIRA 46	0,030316587	0,055251945	0,353339162	0,023366175	0,037118934	0,33870219
CARTEIRA 47	0,030176596	0,056171206	0,345064426	0,023302723	0,046257496	0,270416958
CARTEIRA 48	0,030036531	0,057090319	0,337055748	0,023880221	0,035420885	0,369451789
CARTEIRA 49	0,029896436	0,058009553	0,329299645	0,021688729	0,045373912	0,240111941
CARTEIRA 50	0,029756534	0,059091823	0,32090096	0,019118676	0,056115291	0,148351102
CARTEIRA 51	0,029616501	0,059163624	0,318144641	0,029616494	0,03016727	0,623940534
CARTEIRA 52	0,029616494	0,059163624	0,318144518	0,026260811	0,031228937	0,495274622

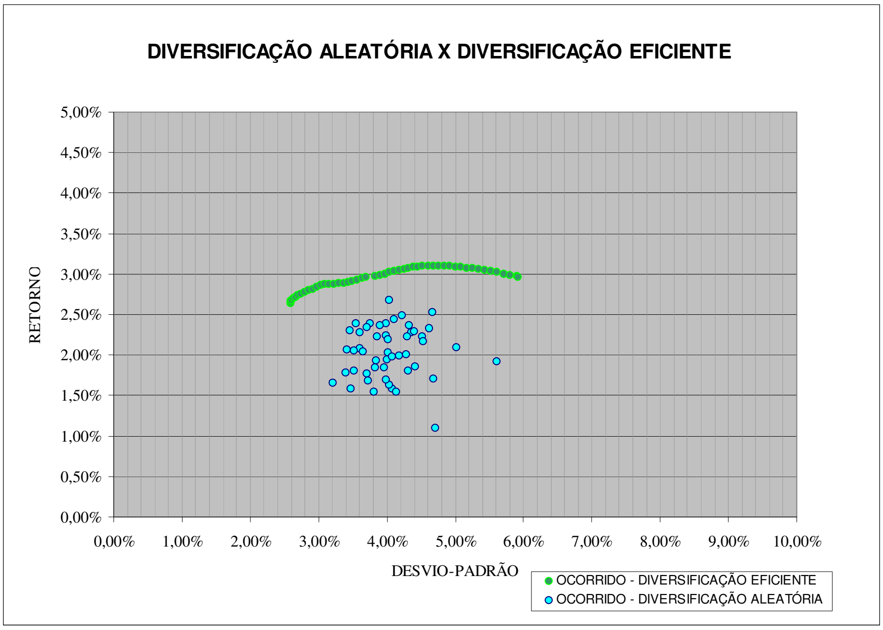

Figura 27 – Diversificação Aleatória X Diversificação Eficiente

A figura 28 deixa claro que as carteiras eficientes "dominam" as carteiras diversificadas aleatoriamente, pois para o mesmo nível de risco, em todos os casos, há uma carteira que oferece um retorno maior. Isto mostra que o grau de diversificação da carteira, ou seja, o numero de ativos que a compõem, não é o único fator relevante para a redução do risco desta. Portanto, as iterações entre os retornos dos títulos que irão compor uma carteira, ou seja, a covariância entre estes, é de suma importância para que se possa chegar a uma carteira diversificada de forma eficiente.

8. CONCLUSÃO

Os modelos de seleção de carteiras eficientes baseados em retorno e variância podem ser elaborados com inúmeras estimativas distintas. Os dados podem ser estimados por especialistas em um determinado setor, por economistas, analistas de mercado, entre outros.

Outra possibilidade é estimar estas medidas através de métodos estatísticos aplicados aos dados históricos disponíveis, como feito neste estudo. O tratamento conferido aos dados históricos também pode ser feito de inúmeras maneiras, como se considerar probabilidades dos retornos equiprováveis ou utilizar um modelo de ponderação dos dados, ou seja, a eficiência do modelo dependerá das suas estimativas. Na prática, o que pode ser feito é imputarmos no modelo estimativas futuras de risco e retorno. Conseqüentemente, quanto mais próximas da realidade estiverem essas estimativas, mais próximas estarão as carteiras eficientes estimadas da verdadeira fronteira eficiente.

O modelo de otimização de carteiras proposto neste estudo apresentou boas estimativas de retornos e volatilidades futuras, para o período estudado. As carteiras diversificadas com a utilização deste tiveram desempenho superior às carteiras diversificadas de forma aleatória. Portanto, um modelo de otimização de carteiras não é uma “bola de cristal”, mas sim uma ferramenta objetiva para medirmos o retorno e o risco de uma carteira desejada.

REFERÊNCIAS

BALARINE, Oscar Fernando. *Administração e Finanças para Construtores e Incorporadores***.** Porto Alegre: EDIPUCRS, 1990.

CARVALHO, Guilherme Afonso. *Inserção do Capital de Risco no Cálculo de Portifólio Eficiente no Brasil***.** Rio de Janeiro: IBMEC, 2004, Monografia.

ELTON, E. J.; **GRUBER**, M. J.; **BROWN**, S. J. ; **GOETZMAN**, W. N..*Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos***.** Rio de Janeiro: Atlas, 2004.

GITMAN, Lawrence J. Princípios de Administração Financeira. 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

LAMB, Roberto. *Análise do Risco* **-** Especialização em Mercado de Capitais. Porto Alegre: UFRGS, 2006, p. 59-68.

MALHOTRA, Naresh. *Pesquisa de Marketing: Uma Orientação Aplicada*. 4 ed. São Paulo: Bookman, 2001.

MARKOWITZ, Harry. *Portfolio Selection.* Journal of Finance, março de 1952, v. 7, p. 77-91.

RIBEIRO NETO, Ramon Martinez; FAMA, Rubens. *Beta Contabilístico: Uma aplicação no Mercado Financeiro Brasileiro*. São Paulo: USP, 2004, p. 1-16.

SHARPE, William F. *Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk.* Journal of Finance, setembro de 1964, v.19, p. 425-443.