

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA**

**TESTES DE AJUSTAMENTO DE MODELOS EM  
PROCESSOS COM LONGA DEPENDÊNCIA**

**Leonardo Oliveira Chieppe**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática  
como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em  
Matemática Pura com ênfase em Probabilidade e  
Estatística Matemática

**Profa. Dra. Sílvia Regina Costa Lopes**  
Orientadora

Porto Alegre, 17 de março de 2003.

## RESUMO

Estudamos neste trabalho, o nível de significância empírico dos testes portmanteau baseados nas estatísticas propostas por Ljung e Box (1978), Monti (1994) e Peña e Rodríguez (2002) nos processos  $ARFIMA(p, d, q)$ . Consideramos o processo  $ARFIMA(p, d, q)$  nas situações adequadas para representar séries temporais com características de longa dependência. Para estimar o parâmetro de diferenciação  $d$  utilizamos os métodos de estimação propostos por Geweke e Porter-Hudak (1983), Reisen (1994), Robinson (1994) e Fox e Taqqu (1983).

## ABSTRACT

We studied in this work, the empirical significance level of portmanteau tests based on statistics proposed by Ljung and Box (1978), Monti (1994) and Peña and Rodríguez (2002) in  $ARFIMA(p, d, q)$  processes. We considered the  $ARFIMA(p, d, q)$  process for suitable cases to represent time series with long memory property. To estimate the differentiation parameter  $d$ , we used the estimation methods proposed by Geweke and Porter-Hudak (1983), Reisen (1994), Robinson (1994) and Fox and Taqqu (1983).

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais pelo apoio incondicional. Não só nesse período, mas em toda minha fase acadêmica, independente das minhas escolhas. Devo tudo a eles e a Deus. Nunca poderei retribuí-los.

Especialmente à professora Sílvia Lopes, excelente profissional a qual muito admiro e pretendo me espelhar, pela oportunidade, por sua valorosa orientação e constante preocupação com minha formação.

Ao professor Valdério Reisen pelo constante incentivo e por possibilitar uma bolsa de Iniciação Científica, na qual tive grande aprendizado que possibilitou a realização do sonho de fazer um mestrado.

Aos colegas e professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS.

Aos amigos Cleber, Flávia, Lineia, Magali, Marlon, Wagner e Virgínia pelo companheirismo, auxílio na resolução de problemas e por tantas horas juntos. Sem dúvida, ajudaram para que esses dois anos transcorressem naturalmente.

Ao Daniel, Karina e Luana e seus familiares pela carinhosa acolhida logo que cheguei. Vocês foram e serão a minha família aqui no Rio Grande do Sul.

À Mariana (minha “assistente social”) pela amizade e por conseguir um lugar junto à “turma do 911”.

À Letícia, Rose e Jorge pela amizade.

À Rosane e Valéria, secretárias do Programa, pela atenção com a qual sempre me atenderam.

À CAPES pelo fundamental auxílio financeiro.

E a todos que, de alguma maneira, ajudaram ou torceram por mim.

Espero todos vocês quando quiserem conhecer o Espírito Santo.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS</b>	<b>4</b>
2.1	CONCEITOS BÁSICOS . . . . .	4
2.2	PROCESSOS $ARMA(p, q)$ . . . . .	10
2.3	PROCESSOS $ARIMA(p, d, q)$ . . . . .	11
2.4	TESTES DE HIPÓTESES . . . . .	12
<b>3</b>	<b>PROCESSOS <math>ARFIMA(p, d, q)</math></b>	<b>14</b>
3.1	DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES . . . . .	14
3.2	ESTIMADORES DOS PARÂMETROS $d$ . . . . .	17
3.2.1	ESTIMADOR $\hat{d}_{GPH}$ . . . . .	18
3.2.2	ESTIMADOR $\hat{d}_{sp}$ . . . . .	20
3.2.3	ESTIMADOR $\hat{d}_R$ . . . . .	21
3.2.4	ESTIMADOR $\hat{d}_{FT}$ . . . . .	22
3.3	ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA DE $\Phi(\mathcal{B})$ E $\Theta(\mathcal{B})$ . . . . .	23
3.3.1	EMV CONDICIONAL . . . . .	23
3.3.2	EMV INCONDICIONAL . . . . .	25
<b>4</b>	<b>ESTATÍSTICAS PARA O TESTE PORTMANTEAU</b>	<b>26</b>
4.1	DISTRIBUIÇÃO DOS RESÍDUOS NO PROCESSO $AR$ . . . . .	27
4.2	$Q_{BP}$ DE BOX-PIERCE E $Q_{LB}$ DE LJUNG-BOX . . . . .	35
4.2.1	$Q_{BP}$ E $Q_{LB}$ NOS PROCESSOS $AR$ , $ARIMA$ E $ARFIMA$ . . . . .	36
4.3	$Q_{MT}$ DE MONTI . . . . .	39
4.4	$Q_{PR}$ DE PEÑA-RODRÍGUEZ . . . . .	40
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÕES E RESULTADOS</b>	<b>45</b>
5.1	$ARFIMA(0, d, 0)$ . . . . .	49
5.2	$ARFIMA(1, d, 0)$ . . . . .	57
5.3	$ARFIMA(0, d, 1)$ . . . . .	67
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DE DADOS REAIS</b>	<b>76</b>

<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>85</b>
7.1	CONCLUSÕES . . . . .	85
7.2	TRABALHOS FUTUROS . . . . .	86
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>88</b>
	<b>ANEXO A</b>	<b>92</b>
	<b>ANEXO B</b>	<b>94</b>
	<b>ANEXO C</b>	<b>96</b>
	<b>ANEXO D</b>	<b>98</b>
	<b>ANEXO E</b>	<b>104</b>
	<b>ANEXO F</b>	<b>110</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Conforme Morettin e Tolo (1981), define-se uma série temporal como *uma seqüência de observações de um fenômeno ao longo do tempo*. Por exemplo, pode-se registrar as vendas mensais de uma empresa, o índice anual de inflação de um país, as temperaturas médias diárias de uma cidade, etc. Assim cada uma dessas seqüências de observações é uma série temporal.

O principal objetivo de se estudar uma série temporal é encontrar um modelo matemático que nos possibilite fazer previsões sobre os futuros valores dessa série. Um dos modelos, amplamente utilizado com este objetivo, é o proposto por G. E. P. Box e G. M. Jenkins na década de 70, que sugerem descrever uma série temporal na forma de polinômios: são os chamados *modelos autoregressivo integrado média móvel*, denotado por  $ARIMA(p, d, q)$ . Os parâmetros  $p$  e  $q$  são, respectivamente, o número de termos autoregressivos e média móvel que os polinômios terão e  $d$  é o número de diferenças inteiras necessárias para tornar a série temporal estacionária. A metodologia proposta consiste em identificar (estimar) os valores desses parâmetros (ajustar) e, posteriormente, analisar a adequação desse ajuste através de uma análise dos resíduos, para verificar se as suposições inicialmente feitas, de que os erros são um ruído branco, continuam válidas. Um dos procedimentos realizado nessa etapa é utilizar um teste portmanteau para verificar a independência dos resíduos, que são obtidos, substituindo os parâmetros no modelo previamente identificado, pelos seus respectivos estimadores.

Com o objetivo de testar a adequação do modelo identificado, Box e Pierce (1970) propuseram uma estatística de teste, posteriormente modificada por Ljung e Box (1978). Estas estatísticas são baseadas na função de autocorrelação residual e possuem uma distribuição de probabilidade Qui-quadrado. Monti (1994) propõe uma estatística de teste, também com uma distribuição de probabilidade Qui-quadrado, mas baseada na função de autocorrelação parcial residual. Peña e Rodríguez (2002) propõem uma quarta estatística de teste baseada numa versão corrigida da função de autocorrelação resi-

dual amostral que possui uma distribuição de probabilidade aproximada à distribuição Gama. Os testes portmanteau que consideramos neste trabalho são realizados no domínio do tempo, ou seja, utilizando estatísticas baseadas na função de autocorrelação dos resíduos. Também existem testes portmanteau no domínio da frequência, utilizando estatísticas baseadas na função densidade espectral (ver Priestley (1981)). Os testes portmanteau obtidos desta forma não serão tratados neste trabalho mas ficam como questões para serem estudadas posteriormente.

Longa dependência é uma característica de certas séries temporais onde valores observados em momentos distantes estão correlacionados. Essa característica, inicialmente identificada por Hurst (1956) em seus estudos sobre a fertilidade às margens do Rio Nilo, têm sido identificada, também, em séries de diferentes áreas de aplicação como Economia e Física, entre outras. Desde então, vários processos têm sido propostos afim de modelar este fenômeno. Mandelbrot e Ness (1968) introduziram o *fractional Brownian motion* e o *fractional Gaussian noise process*. Hosking (1981) introduziu uma generalização do clássico modelo  $ARIMA(p, d, q)$ , o *modelo fracionário autoregressivo integrado média móvel* - denotado por  $ARFIMA(p, d, q)$ . Nesse modelo, o parâmetro  $d$ , que no modelo  $ARIMA(p, d, q)$  assumia somente valores inteiros, pode assumir também valores fracionários. A mais importante característica desse modelo é apresentar longa dependência quando o parâmetro  $d \in (0; 0,5)$ , curta dependência quando  $d \in (-0,5; 0)$  e dependência intermediária quando  $d \in (0,5; 1)$ .

Como o comportamento, nos processos  $ARFIMA(p, d, q)$ , dos testes portmanteau baseados nas estatísticas propostas por Monti (1994) e Peña e Rodríguez (2002) não foram ainda pesquisados, o objetivo deste trabalho é exatamente verificar o nível de significância empírico destes testes nestes processos. Esta análise será feita através de simulações de Monte Carlo e comparada com o mesmo teste baseado na estatística proposta por Ljung e Box (1978). Para isto consideramos que o parâmetro  $d$  é estimado por três estimadores semi-paramétricos, a saber: o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983) que escreve a função periodograma (um estimador não consistente da função densidade espectral) como uma equação de regressão linear simples. Esta equação tem como um de seus parâmetros desconhecidos, o parâmetro  $d$ , e então, a partir dos estimadores de mínimos quadrados dessa regressão, encontra-se um estimador para  $d$ ; o estimador proposto por Reisen (1994) que utiliza a mesma idéia de Geweke e Porter-Hudak (1983), mas estimando a função densidade espectral pela função periodograma suavizado; o estimador proposto por Robinson (1994) é baseado no logaritmo da razão entre funções densidade espectral, obtidas através de diferentes frequências. Além destes estimadores, estamos considerando aqui um estimador, dito paramétrico, proposto por Fox e Taqqu (1986), que é um estimador de

máxima verossimilhança aproximado.

No Capítulo 2 introduzimos os conceitos básicos para a análise de uma série temporal, assim como as definições dos processos  $ARMA(p, q)$  e  $ARIMA(p, d, q)$ , além das noções básicas sobre testes de hipóteses. No Capítulo 3 definimos o processo  $ARFIMA(p, d, q)$  e um caso particular deste, o processo  $ARFIMA(0, d, 0)$ , além de suas principais propriedades e dos estimadores de seus parâmetros. No Capítulo 4 apresentamos as estatísticas para o teste portmanteau propostas por Box e Pierce (1970), Ljung e Box (1978), Monti (1994) e Peña e Rodríguez (2002) e os teoremas que garantem a distribuição de probabilidade destas estatísticas. No Capítulo 5 descrevemos todo o processo de simulação utilizado e seus resultados. No Capítulo 6 realizamos uma análise com dados reais como uma aplicação da teoria vista. No Capítulo 7 colocamos nossas conclusões e propomos assuntos para trabalhos futuros que envolvam essa linha de pesquisa.



# Capítulo 2

## ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

Uma *série temporal* é um conjunto de observações geradas seqüencialmente no tempo. Se esse conjunto é contínuo dizemos que a série temporal é *contínua* enquanto que se ele for discreto, a série temporal é dita ser *discreta*. Os principais objetivos ao se analisar uma série temporal são: (a) investigar o mecanismo gerador da série; (b) descrever o seu comportamento; (c) procurar periodicidades relevantes nos dados; ou (d) fazer previsões de valores futuros.

Estudaremos neste capítulo as definições básicas e necessárias para o estudo de uma série temporal discreta, que é o alvo do nosso trabalho. Definiremos, também, os processos  $ARMA(p, q)$  e  $ARIMA(p, d, q)$ , propostos por G. E. P. Box e G. M. Jenkins.

### 2.1 CONCEITOS BÁSICOS

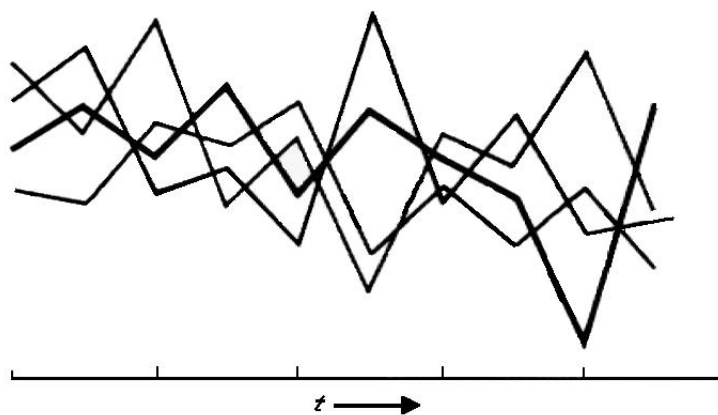


Figura 2.1: Processo Estocástico

**Definição 2.1** Um *processo estocástico* é uma família de variáveis aleatórias  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ , todas elas definidas em um mesmo espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , sendo  $\mathbb{T} \neq \emptyset$  um conjunto de índices. O conjunto de índices  $\mathbb{T}$  pode ser:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, [0, \infty)$  ou  $\mathbb{R}$ . Neste trabalho serão considerados somente os processos onde  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  ou  $T = \{1, \dots, n\}$ .

Na Figura 2.1 observa-se um processo estocástico, que nada mais é do que todas as possíveis trajetórias que poderíamos observar. O que chamamos de série temporal é uma das trajetórias observadas (em destaque), dentre as muitas possíveis.

A seguir daremos as definições de funções de grande importância na identificação e estimação de um modelo para uma dada série temporal.

**Definição 2.2** A *função de distribuição conjunta* de um número finito de variáveis aleatórias  $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$  da coleção  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  é definida como

$$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_{t_1}, \dots, X_{t_n} \leq x_{t_n}),$$

para todo  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $t_i \in \mathbb{T}$  e  $x_{t_i} \in \mathbb{R}$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Definição 2.3** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  um processo estocástico tal que  $Var(X_t) < \infty$ , para todo  $t \in \mathbb{T}$ . A *função de autocovariância* de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  - denotada por  $\gamma_X(\cdot, \cdot)$  - é dada por

$$\gamma_X(r, s) \equiv Cov(X_r, X_s) = \mathbb{E}[(X_r - \mathbb{E}(X_r))(X_s - \mathbb{E}(X_s))], \quad r, s \in \mathbb{T},$$

onde  $\mathbb{E}(X_t)$  representa a *esperança matemática* da variável aleatória  $X_t$ .

**Definição 2.4** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  um processo estocástico tal que  $Var(X_t) < \infty$ , para todo  $t \in \mathbb{T}$ . A *função de autocorrelação* de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  - denotada por  $\rho_X(\cdot, \cdot)$  - é dada por

$$\rho_X(r, s) = \frac{\gamma_X(r, s)}{\sqrt{Var(X_r)}\sqrt{Var(X_s)}}, \quad r, s \in \mathbb{T},$$

onde  $Var(X_t) = \gamma_X(t, t)$  representa a *variância* da variável aleatória  $X_t$ .

**Definição 2.5** Sejam  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  e  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  dois processos estocásticos univariados estacionários. A *função de covariância cruzada* entre  $X_t$  e  $Y_t$  - denotada por  $\gamma_{XY}(r, s)$  - é uma função do tempo  $(s - r)$  somente. Nesse caso,

$$\gamma_{XY}(r, s) \equiv Cov(X_r, Y_s) = \mathbb{E}[(X_r - \mathbb{E}(X_r))(Y_s - \mathbb{E}(Y_s))], \quad r, s \in \mathbb{T}.$$

**Definição 2.6** A função de autocorrelação parcial de um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  de ordem  $k$  - denotada por  $\phi_X(\cdot, \cdot)$  - é determinada pelo quociente entre o determinante de duas matrizes de ordem  $k \times k$  dada por

$$\phi_X(k, k) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(k-2) & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & 1 & \cdots & \rho_X(k-3) & \rho_X(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \cdots & \rho_X(1) & \rho_X(k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-1) \\ \rho_X(1) & 1 & \cdots & \rho_X(k-3) & \rho_X(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \cdots & \rho_X(1) & 1 \end{vmatrix}}. \quad (2.1)$$

As matrizes envolvidas na expressão (2.1) são formadas pela função de autocorrelação do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  de ordem  $j$ , para  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ .

Em um processo estocástico desejamos observar a propriedade de que duas partes com igual intervalo de tempo exibem características estatísticas similares. Definiremos formalmente, a seguir, como reconhecer a presença ou não dessa importante propriedade.

**Definição 2.7** Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  é dito ser *fortemente estacionário* se as funções de distribuição conjunta de  $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$  e  $\{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}\}$  são as mesmas, para todo  $n \in \mathbb{N}$  e para todo  $t_i, h, t_i + h \in \mathbb{T}$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Entretanto, essa é uma definição demasiadamente exigente que na prática dificilmente ocorre, então faz-se necessário uma definição mais razoável.

**Definição 2.8** Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  é dito ser *fracamente estacionário* ou simplesmente *estacionário* (como será chamado daqui por diante) se

- (i)  $\mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$ , para todo  $t \in \mathbb{T}$ ;
- (ii)  $\mathbb{E}(X_t) = \mu$ , uma constante independente de  $t$ ;
- (iii)  $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + t, s + t)$ , para quaisquer  $r, s, t \in \mathbb{T}$ .

Consideraremos, daqui por diante, que  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ .

**Observação:** Em um processo estacionário as funções de autocorrelação e de autocorrelação parcial possuem as seguintes propriedades:

- (a)  $\gamma_X(k) = \gamma_X(k, 0) = Cov(X_t, X_{t-k}) = Cov(X_{t+k}, X_t)$ , para quaisquer  $k, t \in \mathbb{Z}$ ;
- (b)  $\gamma_X(0) = Cov(X_t, X_t) = Var(X_t)$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ;
- (c)  $\rho_X(0) = 1$ ;
- (d)  $\gamma_X(k) = \gamma_X(-k)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;
- (e)  $\rho_X(k) = \rho_X(-k)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;
- (f)  $|\gamma_X(k)| \leq \gamma_X(0)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;
- (g)  $|\rho_X(k)| \leq 1$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Na próxima definição veremos que a *função densidade espectral* de um processo estocástico estacionário nada mais é do que a transformada de Fourier da função de autocovariância  $\gamma_X(\cdot)$ , quando esta for absolutamente convergente.

**Definição 2.9** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estocástico estacionário com função de autocovariância  $\gamma_X(\cdot)$  absolutamente convergente, isto é,  $\sum |\gamma_X(k)| < \infty$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . A *função densidade espectral* de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  - denotada por  $f_X(\cdot)$  - é dada por

$$\begin{aligned} f_X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_X(k) e^{-i\omega k} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \gamma_X(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_X(k) \cos(\omega k) \right], \text{ para todo } \omega \in [-\pi, \pi], \end{aligned}$$

onde foram utilizadas a igualdade dada em (d) na observação anterior e as propriedades trigonométricas para obtermos a segunda forma para  $f_X(\cdot)$ .

O Teorema 2.1, a seguir, apresenta três propriedades da função densidade espectral de um processo estocástico estacionário.

**Teorema 2.1** *Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estocástico estacionário com função de autocovariância  $\gamma_X(\cdot)$  absolutamente convergente. A função densidade espectral, dada pela Definição 2.9, tem as seguintes propriedades:*

- $f_X(\omega)$  é uma função real contínua;
- $f_X(\omega) = f_X(-\omega)$ , para todo  $\omega \in [-\pi, \pi]$  e
- $f_X(\omega) \geq 0$ , para todo  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Mais detalhes sobre a função densidade espectral e suas propriedades podem ser encontrados em Brockwell e Davis (1991) e Wei (1990).

A seguir definimos os estimadores obtidos pelo *método dos momentos* (estimadores naturais), para a esperança e para as funções de autocovariância, autocorrelação, autocorrelação parcial e densidade espectral de um processo estocástico estacionário  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  com

- $\mathbb{E}(X_t) = \mu$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$
- $Var(X_t) = \sigma^2$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$
- $Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_X(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

considerando uma série temporal com  $n$  observações,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , obtida a partir deste processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ .

**Definição 2.10** Um estimador natural para a esperança é a *média amostral* dada por

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

que é a média das  $n$  observações da série temporal  $\{X_t\}_{t=1}^n$ .

**Definição 2.11** Um estimador natural para a função de autocovariância é a *função de autocovariância amostral* dada por

$$\hat{\gamma}_X(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n (X_i - \bar{X})(X_{i-k} - \bar{X}), \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

**Observação:** Na Definição 2.11 o quociente  $n$  é preferível ao quociente  $n-k$ , apesar de assim obter-se um estimador viciado, porque desta forma  $\hat{\gamma}_X(\cdot)$  é função definida não negativa. O estimador baseado no quociente  $n-k$  tem menor vício mas maior variância comparado com o estimador acima definido (ver Wei (1990)).

**Definição 2.12** A *função de autocorrelação amostral* de ordem  $k$  é definida por

$$\hat{\rho}_X(k) = \frac{\hat{\gamma}_X(k)}{\hat{\gamma}_X(0)}, \quad \text{para todo } k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1)\},$$

onde  $\hat{\gamma}_X(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  é a *variância amostral* do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ .

**Definição 2.13** A *função de autocorrelação parcial amostral de ordem  $k$*  é obtida substituindo  $\rho_X(\cdot)$  por  $\hat{\rho}_X(\cdot)$  nas duas matrizes que aparecem na expressão (2.1).

Pela dificuldade de se calcular o determinante das matrizes resultantes da substituição de  $\rho_X(\cdot)$  por  $\hat{\rho}_X(\cdot)$ , mencionada na Definição 2.13, utilizaremos o seguinte método recursivo dado por Durbin (1960),

$$\hat{\phi}_X(1, 1) = \hat{\rho}_X(1),$$

$$\hat{\phi}_X(k+1, k+1) = \frac{\hat{\rho}_X(k+1) - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_X(k, j) \hat{\rho}_X(k-j+1)}{1 - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_X(k, j) \hat{\rho}_X(j)},$$

e

$$\hat{\phi}_X(k+1, j) = \hat{\rho}_X(k, j) - \hat{\phi}_X(k+1, k+1) \hat{\rho}_X(k, k-j+1), \quad j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

**Definição 2.14** Para um conjunto de  $n$  observações  $X_1, \dots, X_n$  de um processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , a *função periodograma* - denotada por  $I(\cdot)$  - é definida como

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \hat{\gamma}_X(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\gamma}_X(k) \cos(\omega k) \right], \quad \text{para todo } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.2)$$

Apesar da função periodograma ser um estimador assintoticamente não-viciado, ela é inconsistente para a função densidade espectral  $f_X(\cdot)$ . Definimos então, a seguir, um estimador consistente para  $f_X(\cdot)$ .

**Definição 2.15** A *função periodograma suavizado* - denotada por  $f_s(\cdot)$  - é definida como

$$f_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \lambda(k) \hat{\gamma}_X(k) \cos(\omega k), \quad \text{para todo } \omega \in [-\pi, \pi],$$

onde  $\lambda(\cdot)$  é uma função de ponderação conhecida como *janela espectral*.

Diferentes formas da janela espectral  $\lambda(\cdot)$  são sugeridas na literatura de séries temporais. Neste trabalho, utilizaremos somente a *janela de Parzen* que é dada por

$$\lambda(k) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{k}{u}\right)^2 + 6\left(\frac{|k|}{u}\right)^3, & \text{se } |k| \leq \frac{u}{2} \\ 2\left(1 - \frac{|k|}{u}\right)^3, & \text{se } \frac{u}{2} \leq |k| \leq u \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $u$  é definido como o ponto de truncamento desta janela. Neste trabalho, consideramos  $u = n^{0,9}$ , onde  $n$  é o tamanho amostral.

Nas Seções 2.2 e 2.3 introduziremos o processo  $ARMA(p, q)$  e  $ARIMA(p, d, q)$ , propostos por G. E. P. Box e G. M. Jenkins. Daremos antes, porém, duas importantes definições no contexto que segue.

**Definição 2.16** O processo  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito ser um *ruído branco* com média zero e variância  $\sigma_\varepsilon^2$  - denotado por  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$  - se e somente se

$$E(\varepsilon_t) = 0; \quad Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{e} \quad \gamma_\varepsilon(k) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

**Definição 2.17** O processo  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito ser composto por *variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas* (v.a. iid.) - denotado por  $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$  - se e somente se

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{e} \quad Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2.$$

## 2.2 PROCESSOS $ARMA(p, q)$

Definimos nessa seção o processo *autoregressivo média móvel* para séries temporais estacionárias, o qual inclui, como caso especial, o processo *autoregressivo* e o processo *média móvel*. Definimos também, a função densidade espectral deste processo.

**Definição 2.18** Sejam  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estocástico e  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  o processo ruído branco. Se  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  satisfaz a equação

$$\Phi(\mathcal{B})(X_t - \mu) = \Theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.4)$$

onde  $\mathcal{B}$  é o operador *backward-shift*, isto é,  $\mathcal{B}^k X_t = X_{t-k}$ ,  $\Phi(\cdot)$  e  $\Theta(\cdot)$  são polinômios de ordem  $p$  e  $q$  (inteiros), respectivamente, dados por

$$\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p$$

e

$$\Theta(z) = 1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \dots - \theta_q z^q, \quad (2.5)$$

onde  $\phi_i, 1 \leq i \leq p$ , e  $\theta_j, 1 \leq j \leq q$ , são constantes reais, então diz-se que  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um *processo autoregressivo média móvel de ordem  $(p, q)$* , com média  $\mu$  - denotado por  $ARMA(p, q)$ .

**Observação:** O processo *autoregressivo de ordem  $p$*  - denotado por  $AR(p)$  - é um caso particular do processo (2.4) quando  $\Theta(\mathcal{B}) = 1$ . Quando  $\Phi(\mathcal{B}) = 1$  o processo é dito ser *média móvel de ordem  $q$*  - denotado por  $MA(q)$ .

**Definição 2.19** Um processo  $ARMA(p, q)$  é dito ser *inversível* se existe uma seqüência de constantes  $\pi_j$  tais que

$$\sum_{j \geq 0} |\pi_j| < \infty \quad \text{e} \quad \varepsilon_t = \sum_{j \geq 0} \pi_j X_{t-j}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Estimar e fazer previsões com o processo  $ARMA(p, q)$ , dado por (2.4), somente é possível quando ele for estacionário e inversível e para garantirmos que isso ocorra, é necessário que as raízes das equações  $\Phi(\mathcal{B}) = 0$  e  $\Theta(\mathcal{B}) = 0$  estejam fora do círculo unitário. Assume-se que essas equações não possuem raízes comuns (ver Brockwell e Davis (1991), §3.1).

O Teorema 2.2 a seguir apresenta a função densidade espectral dos processos  $ARMA(p, q)$ , cuja demonstração pode ser encontrada em Brockwell e Davis (1991).

**Teorema 2.2** *Considere  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo  $ARMA(p, q)$  com média  $\mu = 0$  (sem perda de generalidade), satisfazendo a equação (2.4). Suponha que as equações  $\Phi(\mathcal{B}) = 0$  e  $\Theta(\mathcal{B}) = 0$ , onde os polinômios  $\Phi(\mathcal{B})$  e  $\Theta(\mathcal{B})$  são dados pela expressão (2.5), não possuem raízes em comum e não possuem raízes dentro do círculo unitário. Então, o processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  tem função densidade espectral dada por*

$$f_X(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\Theta(e^{-i\omega})|^2}{2\pi |\Phi(e^{-i\omega})|^2}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi. \quad (2.6)$$

## 2.3 PROCESSOS $ARIMA(p, d, q)$

Nesta seção definimos o processo *autoregressivo integrado média móvel* para séries temporais não estacionárias. Este modelo é uma forma mais geral do processo  $ARMA(p, q)$  dado na Seção 2.3.

**Definição 2.20** Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito ser um *processo autoregressivo integrado média móvel de ordem  $(p, d, q)$* , com média  $\mu$  - denotado por  $ARIMA(p, d, q)$  - se a diferenciação  $\nabla^d X_t$  ( $d$  inteiro,  $d \geq 1$ , onde  $\nabla^d = (1 - \mathcal{B})^d$ ) resultar em um processo  $ARMA(p, q)$ . Este processo é dado pela equação

$$\Phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^d(X_t - \mu) = \Theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.7)$$

onde  $\Phi(\mathcal{B})$  e  $\Theta(\mathcal{B})$  são os polinômios dados em (2.5) e  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é o processo ruído branco. O parâmetro  $d$  é chamado *parâmetro* ou *grau de diferenciação*.

### Observações:

(a) Para que o modelo (2.7) seja estacionário e inversível fazem-se necessárias as mesmas exigências do modelo (2.4);



(b) O processo  $ARMA(p, q)$  é um caso especial do processo  $ARIMA(p, d, q)$ , quando  $d = 0$ .

Maiores detalhes sobre os assuntos introduzidos nesse capítulo podem ser encontrados em Morettin e Tolo (1985), Wei (1990), Brockwell e Davis (1991) e Box *et al.* (1994).

## 2.4 TESTES DE HIPÓTESES

Apresentamos nesta seção a teoria básica sobre os testes de hipóteses. Testar hipóteses tem como finalidade avaliar afirmações sobre alguma estatística populacional através de dados amostrais.

Para as definições a seguir, considere o vetor aleatório contínuo  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , onde  $X$  tem função densidade de probabilidade  $f_\eta$ ,  $\eta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n$ . Assume-se que a forma funcional de  $f_\eta$  é conhecida, exceto pelo parâmetro  $\eta$ .

**Definição 2.21** Uma *hipótese paramétrica* é uma afirmação sobre um parâmetro  $\eta$ . Definimos a *hipótese nula* de um teste de hipóteses - denotada por  $H_0$  - quando  $H_0 : \eta \in \Theta_0 \subset \Theta$  e a *hipótese alternativa* - denotada por  $H_1$  - quando  $H_1 : \eta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0$ .

O problema de testar hipóteses pode ser descrito como segue: dada uma amostra aleatória  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  queremos encontrar uma regra que irá nos conduzir a uma decisão de rejeitar ou não a hipótese nula  $H_0$ . Em outras palavras, devemos particionar o espaço  $\mathbb{R}^n$  em dois conjuntos disjuntos  $C$  e  $C^c$  tais que, se  $X \in C$ , rejeita-se  $H_0 : \eta \in \Theta_0$ , e se  $X \in C^c$ , não rejeita-se  $H_0$ . Não rejeitar  $H_0$  significa aceitar que  $X$  tenha função densidade de probabilidade dada por  $f_\eta$ ,  $\eta \in \Theta_0$ .

**Definição 2.22** Suponha que  $X$  tenha função densidade de probabilidade  $f_\eta$ ,  $\eta \in \Theta$ . Um subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que, se  $X \in C$ , então  $H_0$  é rejeitada (com probabilidade 1), isto é,

$$C = \{X \in \mathbb{R}^n : H_0 \text{ é rejeitada}\},$$

é chamado de *região crítica*.

Em um teste de hipóteses pode-se cometer dois tipos de erros, definidos a seguir.

**Definição 2.23** Dado um teste de hipóteses qualquer, pode-se cometer o erro de rejeitar  $H_0$  quando ela deveria ser aceita (pelo fato dela trazer a verdadeira informação sobre o parâmetro testado) - denotado por *erro tipo I* - ou não rejeitar  $H_0$ , quando ela é falsa - denotado por *erro tipo II*.

		Verdadeiro	
		$H_0$	$H_1$
Decisão	$H_0$	correto	erro tipo II
	$H_1$	erro tipo I	correto

A seguir, definimos o nível de significância de um teste de hipóteses, que é a probabilidade máxima com a qual nos sujeitaremos a correr o risco de cometer um erro do tipo I, ao testarmos uma hipótese estabelecida. O nível de confiança, dado na Definição 2.25, é a confiança que teremos, após fixarmos um nível de significância, de que, corretamente, rejeitaremos ou não a hipótese nula  $H_0$ .

**Definição 2.24** Dado um teste de hipóteses qualquer, o *nível de significância* do teste é dado por

$$\alpha = \text{nível de significância} = \mathbb{P}(\text{erro tipo I}) = \mathbb{P}(\text{rejeitar } H_0/H_0 \text{ é verdadeira}).$$

**Definição 2.25** Dado um teste de hipóteses qualquer, se o nível de significância do teste é  $\alpha$ , então o *nível de confiança* do teste é dado por

$$1 - \alpha = \text{nível de confiança} = \mathbb{P}(\text{não rejeitar } H_0/H_0 \text{ é verdadeira}).$$

O poder do teste, dado na Definição 2.26, é a probabilidade que teremos, após fixarmos a probabilidade de ocorrer o erro tipo II, de rejeitar a hipótese nula  $H_0$ , quando ela for falsa. E, a seguir, definimos o que vem a ser um teste de hipóteses com nível de significância  $\alpha$ .

**Definição 2.26** Dado um teste de hipóteses qualquer, se  $\beta = \mathbb{P}(\text{erro tipo II})$ , então o *poder* do teste é dado por

$$1 - \beta = \text{poder do teste} = \mathbb{P}(\text{rejeitar } H_0/H_0 \text{ é falsa}).$$

**Definição 2.27** Considere  $H_0 : \eta \in \Theta_0$  contra a alternativa  $H_1 : \eta \in \Theta_1$ . Se

$$\mathbb{E}_\eta \varphi(X) \leq \alpha, \quad \text{para todo } \eta \in \Theta_0,$$

então,  $\varphi$  é dito ser um *teste de hipóteses com nível de significância*  $\alpha$ .

A teoria completa sobre testes de hipóteses pode ser encontrada em Rohatgi (1976).

# Capítulo 3

## PROCESSOS $ARFIMA(p, d, q)$

Um processo  $ARMA(p, q) \{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , dado pela expressão 2.4, é sempre dito ser um processo de memória curta, pois  $\rho_X(\cdot)$  decresce rapidamente quando  $k$  tende ao infinito. Entretanto, Hurst (1951) identifica em seus estudos em hidrologia, séries com características de longa dependência, que é a presença de correlação mesmo entre observações intercaladas por um longo período de tempo. Desde então, pesquisadores de diversas áreas vêm publicando trabalhos relacionados com longa dependência.

Neste capítulo estendemos a classe dos processos  $ARIMA(p, d, q)$  a uma outra denominada  $ARFIMA(p, d, q)$ , “*autoregressive fractionary integrated moving average*”, introduzido por Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981), que apresenta propriedade de *curta dependência* quando  $d \in (-0.5; 0.0)$  e de *longa dependência* quando  $d \in (0.0; 0.5)$ . Esta classe é, na verdade, uma generalização do processo  $ARIMA(p, d, q)$ , onde agora  $d \in \mathbb{R}$ . No domínio do tempo, processos com característica de longa dependência, apresentam funções de autocorrelações que decrescem lentamente e hiperbolicamente a zero, isto é,  $\rho_X(k) \sim k^{2d-1}$  (ver item (iv) do Teorema 3.1). No domínio da frequência, esta característica está relacionada com o fato de que a função densidade espectral tende a infinito quando a frequência se aproxima de zero, isto é,  $f_X(\omega) \sim \omega^{-2d}$  (ver item (iii) do Teorema 3.1).

### 3.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

**Definição 3.1** Sejam  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  o processo ruído branco dado pela Definição 2.16 e os polinômios  $\Phi(\cdot)$  e  $\Theta(\cdot)$  dados pela expressão (2.5). Se  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo linear satisfazendo

$$\Phi(\mathcal{B})\nabla^d(X_t - \mu) = \Theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad d \in (-0.5, 0.5), \quad (3.1)$$

onde, para algum número real  $d > -1$ , define-se o operador diferença  $\nabla^d \equiv (1 - \mathcal{B})^d$  como a expansão binomial,

$$\nabla^d = \sum_{k \geq 0} \binom{d}{k} (-\mathcal{B})^k = 1 - d\mathcal{B} - \frac{d(1-d)}{2!} \mathcal{B}^2 - \dots, \quad (3.2)$$

então  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é chamado de *processo autoregressivo fracionariamente integrado média móvel de ordem*  $(p, d, q)$ , com média  $\mu$ , - denotado por *ARFIMA*  $(p, d, q)$  - onde  $d$  é o *parâmetro* ou *grau de diferenciação*.

**Observações:**

(a) Na expressão (3.2) acima, a notação  $\binom{d}{k}$  significa

$$\binom{d}{k} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)},$$

onde  $\Gamma(\cdot)$  é a função Gama definida por  $\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx$ ,  $k > 0$ ;

(b) Um caso especial do processo *ARFIMA*  $(p, d, q)$  é quando  $p = q = 0$ , resultando no processo *ARFIMA*  $(0, d, 0)$  que é representado por

$$\nabla^d X_t = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Os Teoremas 3.1 e 3.2 a seguir apresentam algumas propriedades para os processos *ARFIMA*  $(0, d, 0)$  e para os processos *ARFIMA*  $(p, d, q)$ , respectivamente. As demonstrações desses teoremas podem ser encontradas em Hosking (1981), Brockwell e Davis (1991) e Cerezer (1999).

**Teorema 3.1** *Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo ARFIMA(0, d, 0) dado pela expressão (3.3). Então:*

(i) *Quando  $d < 0.5$ ,  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo estacionário e tem representação média móvel infinita (representação MA) dada por*

$$X_t = \Psi(\mathcal{B})\varepsilon_t = \sum_{k \geq 0} \psi_k \varepsilon_{t-k},$$

onde

$$\psi_k = \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d)}.$$

Quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\psi_k \sim \frac{k^{d-1}}{\Gamma(d)}$ .

(ii) Quando  $d > -0.5$ ,  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo inversível e tem representação autoregressiva infinita (representação AR) dada por

$$\Pi(\mathcal{B})X_t = \sum_{k \geq 0} \pi_k X_{t-k} = \varepsilon_t,$$

onde

$$\pi_k = \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)}.$$

Quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\pi_k \sim \frac{k^{-d-1}}{\Gamma(-d)}$ .

(iii) Se  $d \in (-0.5, 0.5)$ , a função densidade espectral de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dada por

$$f_X(\omega) = \left[ 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^{-2d}, \quad 0 < \omega \leq \pi.$$

Quando  $\omega$  está próximo de 0,  $f_X(\omega) \sim \omega^{-2d}$ .

(iv) Se  $d \in (-0.5, 0.5)$ , a função de autocovariância de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dada por

$$\gamma_X(k) = \frac{(-1)^k \Gamma(1-2d)}{\Gamma(k-d+1)\Gamma(1-k-d)} \sigma_\varepsilon^2, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

e a função de autocorrelação é dada por

$$\rho_X(k) = \frac{\Gamma(k+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(k-d+1)\Gamma(d)}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\rho_X(k) \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1}$ .

(v) Se  $d \in (-0.5, 0.5)$ , a função de autocorrelação parcial de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dada por

$$\phi_X(k, k) = \frac{d}{k-d}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

**Observação:** A função de autocorrelação  $\rho_X(k)$  têm um decaimento hiperbólico, quando  $k$  tende ao infinito e  $d > 0$ , enquanto a função densidade espectral  $f_X(\cdot)$  é ilimitada nas frequências próximas de zero.

**Teorema 3.2** *Sejam  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo ARFIMA( $p, d, q$ ) definido pela expressão (3.1) e  $d \in (-0.5, 0.5)$ . Suponha que as equações  $\Phi(\mathcal{B}) = 0$  e  $\Theta(\mathcal{B}) = 0$  não possuem raízes em comum e que as suas raízes estão fora do círculo unitário. Então,*

- (i) o processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é estacionário e inversível, com as representações AR e MA dadas, respectivamente, por

$$\sum_{k \geq 0} \pi_k X_{t-k} = \varepsilon_t \quad e \quad X_t = \sum_{k \geq 0} \psi_k \varepsilon_{t-k}$$

onde  $\psi_k$  e  $\pi_k$  são os coeficientes de  $\mathcal{B}^k$  na expansão de

$$\Psi(\mathcal{B}) = \frac{\Theta(\mathcal{B})}{\Phi(\mathcal{B})}(1 - \mathcal{B})^{-d} \quad e \quad \Pi(\mathcal{B}) = \frac{\Phi(\mathcal{B})}{\Theta(\mathcal{B})}(1 - \mathcal{B})^d,$$

respectivamente.

- (ii) considere que  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é ainda estacionário e inversível. Seja  $U_t = (1 - \mathcal{B})^d X_t$ . Então o processo  $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , dado por  $\Phi(\mathcal{B})U_t = \Theta(\mathcal{B})\varepsilon_t$ , é um processo ARMA( $p, q$ ) com função densidade espectral  $f_U(\cdot)$  e função de autocovariância  $\gamma_U(\cdot)$ . Seja  $Y_t = \frac{\Phi(\mathcal{B})}{\Theta(\mathcal{B})}X_t$ . Então,  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo ARFIMA(0,  $d$ , 0) com função densidade espectral  $f_Y(\cdot)$  e função de autocovariância  $\gamma_Y(\cdot)$ , dados no Teorema 3.1. Então,

- (a) A função densidade espectral de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ,  $f_X(\cdot)$ , é dada por

$$f_X(\omega) = f_U(\omega)f_Y(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\Theta(e^{-i\omega})|^2}{2\pi |\Phi(e^{-i\omega})|^2} \left[ 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^{-2d}, \quad (3.4)$$

para todo  $\omega \in [-\pi, \pi]$ . Quando  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\lim \omega^{2d} f_X(\omega)$  existe e é finito.

- (b) Seja  $\rho_X(\cdot)$  a função de autocorrelação do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . Então, quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\lim k^{1-2d} \rho_X(k)$  existe e é finito.

Mais detalhes sobre processos de longa dependência podem ser encontrados em Brockwell e Davis (1991) e Beran (1994).

O processo ARFIMA( $p, d, q$ ) definido neste capítulo será o foco de nosso trabalho. Na próxima seção estudamos alguns métodos de estimação do parâmetro  $d$ .

## 3.2 ESTIMADORES DOS PARÂMETROS $d$

O objetivo deste trabalho é verificar o nível de significância empírico das diversas estatísticas de teste portmanteau, que serão apresentadas no Capítulo 6, através de simulações de Monte Carlo, para os processos ARFIMA( $p, d, q$ ). Para isto, será necessário estimar os parâmetros do modelo identificado, ou seja, estimar  $d$  e os coeficientes dos polinômios  $\Phi(\cdot)$  e  $\Theta(\cdot)$  definidos na expressão (2.5) do Capítulo 2. Apresentamos, então, nesta seção, quatro métodos para estimar o parâmetro  $d$  que são:

1. o método de regressão utilizando a função periodograma proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983);
2. o método de regressão utilizando a função periodograma suavizado proposto por Reisen (1994);
3. o método baseado no logaritmo da razão entre funções densidade espectral proposto por Robinson (1994);
4. o método de aproximação da função de máxima verossimilhança proposto por Fox e Taqqu (1986).

Os três primeiros métodos estimam somente o parâmetro  $d$ , enquanto que o último estima também, simultaneamente, os coeficientes dos polinômios  $\Phi(\cdot)$  e  $\Theta(\cdot)$ . Quando forem utilizados os métodos 1, 2 e 3, esses polinômios serão estimados através do estimador de máxima verossimilhança dos processos  $ARMA(p, q)$ , que é dado na Seção 3.3.

### 3.2.1 ESTIMADOR $\hat{d}_{GPH}$

Nesta seção apresentamos o procedimento, proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), para encontrar o estimador do parâmetro  $d$  através do método de regressão, utilizando a função periodograma. Este método baseia-se na equação que exhibe a relação entre as funções densidade espectral de um processo  $ARFIMA(p, d, q)$  e de um processo  $ARMA(p, q)$ . Tal equação é reescrita de maneira que se assemelhe a uma equação de regressão linear simples. Todo o procedimento é descrito a seguir.

Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo  $ARFIMA(p, d, q)$ , com  $d \in (-0.5, 0.5)$ , dado na Definição 3.1. Este processo pode ser reescrito como

$$(1 - \mathcal{B})^d X_t = U_t, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z},$$

onde  $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo  $ARMA(p, q)$  dado pela expressão (2.4). Então a função densidade espectral de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  dado pelo item (ii) do Teorema 3.2 pode ser reescrito mais oportunamente como

$$f_X(\omega) = f_U(\omega) \left[ 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^{-2d}.$$

Tomando o logaritmo natural dos dois lados da expressão acima, temos

$$\ln f_X(\omega) = \ln f_U(\omega) - d \ln \left[ 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^2.$$

Adicionando e subtraindo  $\ln f_U(0)$  e  $\ln I(\omega)$ , onde  $I(\cdot)$  é a função periodograma dada na Definição 2.14, e usando uma propriedade da função logarítmica, temos

$$\ln I(\omega) = \ln f_U(0) - d \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\omega}{2} \right) \right]^2 + \ln \left[ \frac{f_U(\omega)}{f_U(0)} \right] + \ln \left[ \frac{I(\omega)}{f_X(\omega)} \right]. \quad (3.5)$$

Substituindo  $\omega$  pelas frequências de Fourier  $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, \frac{n}{2}\}$  na expressão (3.5), temos

$$\ln I(\omega_j) = \ln f_U(0) - d \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_j}{2} \right) \right]^2 + \ln \left[ \frac{f_U(\omega_j)}{f_U(0)} \right] + \ln \left[ \frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right]. \quad (3.6)$$

Considerando o limite máximo de  $j$  igual a  $g(n)$ , o qual é escolhido de forma que  $\frac{g(n)}{n} \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$  e para  $\omega_j \leq \omega_{g(n)}$ , onde  $\omega_{g(n)}$  é pequeno (neste trabalho  $g(n) = n^{0.9}$ ), então o termo  $\ln \left[ \frac{f_U(\omega_j)}{f_U(0)} \right]$  é desprezível se comparado com os outros termos de (3.6) (ver Reisen (1994)). Neste caso, obtemos uma equação aproximada para a expressão (3.6) dada por

$$\ln I(\omega_j) \simeq \ln f_U(0) - d \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_j}{2} \right) \right]^2 + \ln \left[ \frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right]. \quad (3.7)$$

Observe que a expressão (3.7) é uma forma aproximada da equação de regressão linear simples dada por

$$y_j \simeq \beta_1 + \beta_2 x_j + e_j, \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, g(n),$$

onde  $y_j = \ln I(\omega_j)$ ,  $x_j = \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_j}{2} \right) \right]^2$ ,  $e_j = \ln \left[ \frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right]$ ,  $\beta_2 = -d$ ,  $\beta_1 = \left( \ln f_U(0) - c \right)$  e  $c = \mathbb{E} \left( \ln \left[ \frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right] \right)$ .

Com isso o estimador de  $d$  pelo método da função periodograma, proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983) - denotado por  $\hat{d}_{GPH}$  - utiliza a regressão de mínimos quadrados de  $y_1, y_2, \dots, y_{g(n)}$  em  $x_1, x_2, \dots, x_{g(n)}$ , é dado por

$$\hat{d}_{GPH} = - \frac{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x}) y_j}{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}, \quad (3.8)$$

com

$$\mathbb{E}(\hat{d}_p) = d \quad \text{e} \quad \operatorname{Var}(\hat{d}_p) = \frac{\pi^2}{6 \sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2},$$

onde  $\bar{x}$  é a média de  $x_j$ .

O Teorema 3.3 a seguir, apresenta a distribuição assintótica de  $\hat{d}_p$  para processos  $ARFIMA(p, d, q)$ , quando  $d \in (-0.5, 0)$ . A demonstração do mesmo, pode ser encontrada em Geweke e Porter-Hudak (1983).



**Teorema 3.3** *Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo ARFIMA( $p, d, q$ ) dado pela Definição 3.1 com  $d \in (-0.5, 0)$  e  $I(\cdot)$  a função periodograma de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  dada pela expressão (2.2), nas frequências  $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$ , para  $j \in \{0, \dots, \frac{n}{2}\}$ . Seja  $\hat{d}_p$  o estimador de  $d$  dado pela expressão (3.8) e suponha que  $g(n) = n^\kappa$  para algum  $\kappa \in (0, 1)$  fixo (desta forma,  $\frac{g(n)}{n} \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$  e  $g(n) \rightarrow \infty$ ). Então,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}_p = d$ . Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\ln(n)]^2}{g(n)} = 0$  então*

$$\frac{\hat{d}_{GPH} - d}{\sqrt{\text{Var}(\hat{d}_{GPH})}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1),$$

onde  $\text{Var}(\hat{d}_p) = \frac{\pi^2}{6 \sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}$ .

### 3.2.2 ESTIMADOR $\hat{d}_{sp}$

No Capítulo 2, após a Definição 2.14 da função periodograma, observamos que esta é um estimador nao-viciado, mas inconsistente para a função densidade espectral de um processo. Reisen (1994) sugere, então, substituir a função periodograma, no estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), dado na Seção 3.2.1, pela função periodograma suavizado  $f_s(\cdot)$ , dada na Definição 2.15, utilizando como janela espectral  $\lambda(\cdot)$ , a janela de Parzen (ver expressão (2.3)). Como observamos na Seção 2.1, a função  $f_s(\cdot)$  é um estimador não viciado e consistente para a função densidade espectral  $f_X(\cdot)$  de um processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  estacionário.

Assim, substituindo a função periodograma pela função periodograma suavizado na equação (3.7) temos

$$\ln f_s(\omega_j) \simeq \ln f_U(0) - d \ln \left[ 2 \sin\left(\frac{\omega_j}{2}\right) \right]^2 + \ln \left[ \frac{f_s(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right]. \quad (3.9)$$

Analogamente à expressão (3.7), a expressão (3.9) é uma forma aproximada da equação de regressão linear simples, isto é,

$$y_j \simeq \beta_1 + \beta_2 x_j + e_j, \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, g(n),$$

onde  $y_j = \ln f_s(\omega_j)$ ,  $x_j = \ln [2 \sin(\frac{\omega_j}{2})]^2$ ,  $e_j = \ln \left[ \frac{f_s(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right]$ ,  $\beta_2 = -d$ ,  $\beta_1 = (\ln f_U(0) - c)$  e  $c = \mathbb{E} \left( \ln \left[ \frac{f_s(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right] \right)$ .

Assim, o estimador do parâmetro  $d$  pelo método da função periodograma suavizado - denotado por  $\hat{d}_{sp}$  - utiliza a regressão de mínimos quadrados de

$y_1, y_2, \dots, y_{g(n)}$  em  $x_1, x_2, \dots, x_{g(n)}$  e é dado por

$$\hat{d}_{sp} = -\frac{\sum_{j=1}^{g(n)}(x_j - \bar{x})y_j}{\sum_{j=1}^{g(n)}(x_j - \bar{x})^2}, \quad (3.10)$$

onde  $\bar{x}$  é a média de  $x_j$ . Com

$$\mathbb{E}(\hat{d}_{sp}) = d \quad \text{e} \quad \text{Var}(\hat{d}_{sp}) = 0,53928 \frac{\nu}{n \sum_{j=1}^{g(n)}(x_j - \bar{x})^2},$$

onde o valor  $0,53928 \frac{\nu}{n}$  é a variância assintótica de  $\ln \left[ \frac{f_s(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right]$ .

Maiores detalhes podem ser encontrados em Reisen (1994).

### 3.2.3 ESTIMADOR $\hat{d}_R$

Robinson (1994) propõe o estimador

$$\hat{d}_R = 0,5 - \frac{1}{2 \ln q} \ln \left\{ \frac{\hat{F}(q g(n))}{\hat{F}(g(n))} \right\}, \quad (3.11)$$

onde  $q \in (0, 1)$  e

$$\hat{F}(g(n)) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{g(n)} I(\lambda_j) \quad (3.12)$$

é o estimador da função de distribuição do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , dada por

$$F_X(\lambda) = \int_0^\infty f_X(\omega) d\omega,$$

com  $f_X(\cdot)$  a função densidade espectral de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . Observamos que o estimador  $\hat{F}(g(n))$  dado pela expressão (3.12) é uma média da função periodograma  $I(\cdot)$  dada pela expressão (2.2). O estimador  $\hat{d}_R$  é obtido através do logaritmo do quociente do estimador  $\hat{F}(\cdot)$  calculado sobre uma média da função periodograma para dois valores diferentes de regressores: o numerador é obtido através de  $q \times g(n)$ , enquanto que o denominador é obtido através de  $g(n)$ .

Sob certas condições de regularidade e assumindo que o processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é linear com diferenças martingale e ainda que

$$\frac{1}{g(n)} + \frac{g(n)}{n} \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty,$$

Robinson (1994) mostra que vale a convergência em probabilidade

$$\frac{\hat{F}(g(n))}{F(g(n))} \xrightarrow{P} 1, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Neste trabalho, utilizamos  $g(n) \in \{0, 7; 0, 8\}$  e as notações  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  para representar os respectivos casos. Quando  $g(n) = 0, 8$ , substituímos, na expressão (3.12),  $I(\cdot)$  pela função periodograma suavizado  $f_s(\cdot)$ , dada na Definição 2.15.

### 3.2.4 ESTIMADOR $\hat{d}_{FT}$

Os procedimentos de estimação citados nas Seções 3.2.1 a 3.2.3, estimam somente o parâmetro  $d$  do processo  $ARFIMA(p, d, q)$ . Para estimar os parâmetros restantes do modelo se utiliza o estimador de máxima verossimilhança do processo  $ARMA(p, q)$ , que é dado na Seção 3.3. Já o estimador de máxima verossimilhança do processo  $ARFIMA(p, d, q)$  estima simultaneamente todos os parâmetros.

Sowell (1991,1992) apresenta o estimador de máxima verossimilhança exato, entretanto, é complicado obter computacionalmente esse estimador. Propondo uma alternativa para esse problema, Fox e Taquq (1986) utiliza a proposta de Whittle (1951) para obter uma aproximação para o método da máxima verossimilhança.

O procedimento para encontrar o estimador de máxima verossimilhança é dado a seguir.

Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  um processo estacionário Gaussiano, com média  $\mu > 0$  e função densidade espectral dada por

$$f_X(\omega; \eta, \sigma^2) = \sigma^2 f(\omega; \eta), \quad \omega \in [-\pi; \pi],$$

onde  $\sigma^2 > 0$  (não precisa ser a variância de  $X_t$ ), e  $f(\cdot, \eta)$  é uma função da forma

$$f(\omega; \eta) \cong |\omega|^{-\alpha(\eta)} G_\eta(\omega), \quad \text{quando } \omega \rightarrow 0,$$

com  $0 < \alpha(\eta) < 1$ ,  $G_\eta(\omega)$  uma função que varia suavemente quando  $\omega \rightarrow 0$ , e  $\eta$  é o vetor dos parâmetros desconhecidos que desejamos estimar.

O método de máxima verossimilhança estima  $\eta$  e  $\sigma^2$  maximizando a função

$$f_X(X_1, \dots, X_n; \eta, \sigma^2) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n \exp \left[ - \frac{Z' S_n^{-1}(\eta) Z}{2n\sigma^2} \right],$$

com relação a  $\eta$  e  $\sigma^2$ , onde  $S_n(\eta)$  é a matriz de covariância de  $X_1, \dots, X_n$  e  $Z = (X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})'$  com  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

Como é complicado obter computacionalmente a inversa da matriz  $S_n(\eta)$ , Fox e Taqqu (1986) utilizam a matriz  $A_n(\eta)$  de ordem  $n \times n$ , proposta por Whittle (1951), para aproximar a inversa da matriz  $S_n(\eta)$ , onde o  $(j, k)$ -ésimo elemento é dado por

$$[A_n(\eta)]_{jk} = a_{j-k}(\eta) = a_s(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega s} [f_X(\omega; \eta)]^{-1} d\omega.$$

Assim, aplicar o método de máxima verossimilhança aproximado de Whittle (1951) para estimar  $\eta$  e  $\sigma^2$  significa maximizar

$$f_X(X_1, \dots, X_n; \eta, \sigma^2) \cong \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n \exp \left[ - \frac{Z' A_n(\eta) Z}{2n\sigma^2} \right], \quad (3.13)$$

com relação a  $\eta$  e  $\sigma^2$ . Os valores de  $\eta$  e  $\sigma^2$  que maximizam a equação (3.13) são denominados *estimadores de máxima verossimilhança* - denotados por  $\hat{\eta}_n$  e  $\hat{\sigma}_n^2$ , respectivamente. Isto é equivalente a escolher  $\hat{\eta}_n$  que minimize

$$\sigma_n^2(\eta) = \frac{Z' A_n(\eta) Z}{n}$$

e fazer  $\hat{\sigma}_n^2 = \sigma_n^2(\hat{\eta}_n)$ .

### 3.3 ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA DE $\Phi(\mathcal{B})$ E $\Theta(\mathcal{B})$

Após identificar um modelo, ou seja, identificar  $p$ ,  $d$  e  $q$ , a próxima etapa é estimar os parâmetros desse modelo. Consideremos o processo  $ARMA(p, q)$ , dado pela expressão (2.4). Discutimos, nesta seção, o procedimento para se obter os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ ,  $\mu = \mathbb{E}(X_t)$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$  e  $\sigma_\varepsilon^2 = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)$ .

#### 3.3.1 EMV CONDICIONAL

Para o processo  $ARMA(p, q)$  estacionário

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (3.14)$$

onde  $Y_t = X_t - \mu$  e  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um ruído branco com distribuição de probabilidade  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , a função densidade de probabilidade conjunta de  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$  é dada por

$$\mathbb{P}(\varepsilon | \phi, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-n/2} \exp \left\{ - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \right\}.$$

Reescrevendo a expressão (3.14) como

$$\varepsilon_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \cdots - \phi_p Y_{t-p},$$

podemos escrever a função de verossimilhança dos parâmetros  $(\phi, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon^2)$ .

Considere o vetor  $X = (X_1, \dots, X_n)'$  e assuma a condição inicial  $X_* = (X_{1-p}, \dots, X_{-1}, X_0)'$  e  $\varepsilon_* = (\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)'$ . O logaritmo natural da função de verossimilhança é dado por

$$\ln L_*(\phi, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma_\varepsilon^2) - \frac{S_*(\phi, \mu, \theta)}{2\sigma_\varepsilon^2}, \quad (3.15)$$

onde

$$S_*(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\phi, \mu, \theta | X_*, \varepsilon_*, X) \quad (3.16)$$

é a função da soma de quadrados condicional.

As quantidades  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\theta}$  que maximizam a expressão (3.15), são chamadas de estimadores de *máxima verossimilhança condicional* para os parâmetros  $\phi$ ,  $\mu$  e  $\theta$ , respectivamente.

Existem poucas alternativas para especificar as condições iniciais  $X_*$  e  $\varepsilon_*$ . Baseado nas suposições de que  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo estacionário e  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo ruído branco Gaussiano com distribuição  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , podemos substituir os desconhecidos valores de  $X_t$ ,  $t = 1 - p, \dots, -1, 0$ , do vetor  $X_*$ , pela média amostral  $\bar{X}$  e os desconhecidos valores de  $\varepsilon_t$ ,  $t = 1 - q, \dots, -1, 0$ , do vetor  $\varepsilon_*$ , pelo valor esperado de  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  que é zero. Para o processo dado pela expressão (3.14) podemos assumir que  $\varepsilon_p = \varepsilon_{p-1} = \cdots = \varepsilon_{p-(q-1)} = 0$  e calcular  $\varepsilon_t$  para  $t \geq (p+1)$  usando a expressão (3.14). Assim, a função da soma de quadrados condicional dada pela expressão (3.16) se torna

$$S_*(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=p+1}^n \varepsilon_t^2(\phi, \mu, \theta | X),$$

que, segundo Wei (1990), é a forma usada pela maioria dos programas computacionais.

Após obter os parâmetros estimados  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\theta}$ , a estimativa  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  de  $\sigma_\varepsilon^2$  é obtida da seguinte expressão

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{S_*(\hat{\phi}, \hat{\mu}, \hat{\theta})}{g},$$

onde  $g = n - (p + q + 1)$  é o número de termos usado na soma  $S_*(\hat{\phi}, \hat{\mu}, \hat{\theta})$  menos o número de parâmetros estimados.

### 3.3.2 EMV INCONDICIONAL

Segundo Box *et al.* (1994), o método para selecionar valores iniciais para  $X_*$  e  $\varepsilon_*$  utilizado no procedimentos de EMV Condicional (ver Seção 3.3.1), introduz vício no modelo. Desta forma, estes autores sugerem a seguinte função de verossimilhança incondicional

$$L(\phi, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{S(\phi, \mu, \theta)}{2\sigma_\varepsilon^2} \right\}, \quad (3.17)$$

onde  $S(\phi, \mu, \theta)$  é a função soma de quadrados incondicional, dada por

$$S(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=-\infty}^n [\mathbb{E}(\varepsilon_t | \phi, \mu, \theta, X)]^2, \quad (3.18)$$

onde  $\mathbb{E}(\varepsilon_t | \phi, \mu, \theta, X)$  é a esperança condicional de  $\varepsilon_t$  dado  $\phi$ ,  $\mu$ ,  $\theta$  e  $X$ . Tomando o logaritmo natural em ambos os lados da expressão (3.17), temos

$$\ln L(\phi, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma_\varepsilon^2) - \frac{S(\phi, \mu, \theta)}{2\sigma_\varepsilon^2}. \quad (3.19)$$

As quantidades  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\theta}$  que maximizam a expressão (3.19) são chamados de estimadores de *máxima verossimilhança incondicional* para os parâmetros  $\phi$ ,  $\mu$  e  $\theta$ , respectivamente.

Na prática, a expressão (3.18) é aproximada pela seguinte forma finita

$$S(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=-M}^n [\mathbb{E}(\varepsilon_t | \phi, \mu, \theta, X)]^2,$$

onde  $M$  é um inteiro suficientemente grande tal que

$$\left| \mathbb{E}(X_t | \phi, \mu, \theta, X) - \mathbb{E}(X_{t-1} | \phi, \mu, \theta, X) \right|$$

é menor do que um pequeno valor pré-determinado  $\epsilon$ , para  $t \leq -(M+1)$ . Isto implica que  $\mathbb{E}(X_t | \phi, \mu, \theta, X) \simeq \mu$  e  $\mathbb{E}(\varepsilon_t | \phi, \mu, \theta, X)$  é negligenciável para  $t \leq -(M+1)$ .

Após obter os parâmetros estimados  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\theta}$ , a estimativa  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  de  $\sigma_\varepsilon^2$  é obtida da seguinte expressão

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{S(\hat{\phi}, \hat{\mu}, \hat{\theta})}{n}.$$

# Capítulo 4

## ESTATÍSTICAS PARA O TESTE PORTMANTEAU

Após um modelo qualquer, como por exemplo, aqueles definidos no Capítulo 2, ter sido identificado e os parâmetros estimados, uma análise dos resíduos do ajuste desse modelo faz-se necessária. Neste caso, é preciso verificar se as suposições feitas inicialmente sobre os resíduos estão ou não satisfeitas após o ajuste do modelo. Isto é, deve-se verificar se, após o ajuste, os resíduos estimados podem ser considerados um processo ruído branco. Uma das ferramentas utilizadas é um teste de hipóteses para verificar se os resíduos podem ser considerados estatisticamente independentes: são os chamados *testes portmanteau*.

Definimos, neste capítulo, as estatísticas para o teste portmanteau propostas por Box e Pierce (1970), Ljung e Box (1978), Monti (1994) e Peña e Rodríguez (2002), que estudaremos neste trabalho. Esses artigos apresentam as estatísticas de teste e suas respectivas distribuições de probabilidade para o processo  $ARMA(p, q)$ . Para o processo  $ARFIMA(p, d, q)$  as estatísticas propostas por Monti (1994) e Peña e Rodríguez (2002) ainda não foram devidamente estudadas. Aqui neste capítulo, damos a idéia heurística sobre a distribuição de probabilidade destas estatísticas para o processo  $ARFIMA(p, d, q)$ . O artigo Li e McLeod (1986) apresenta um teorema (dado neste trabalho pelo Teorema 4.6) que nos permite encontrar a distribuição de probabilidade das estatísticas propostas por Box e Pierce (1970) e Ljung e Box (1978) para o processo  $ARFIMA(p, d, q)$ . O artigo Reisen *et al.* (2003) apresenta um estudo sobre o comportamento do nível de significância dessas duas últimas estatísticas.

Utilizando a notação dada na Seção 2.4, definimos a seguir as hipóteses do teste portmanteau.

**Definição 4.1** Sejam  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$  e  $\Omega_1 = \mathbb{R} - \Omega_0$ . Seja

$\eta = \rho_\varepsilon$  o parâmetro a ser testado, onde  $\rho_\varepsilon$  é a função de autocorrelação do processo  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . O teste *portmanteau* é um teste com as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \rho_\varepsilon \leq 0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \rho_\varepsilon > 0.$$

Na seção seguinte, derivamos a distribuição de probabilidade dos resíduos do processo autoregressivo.

## 4.1 DISTRIBUIÇÃO DOS RESÍDUOS NO PROCESSO *AR*

O processo geral  $AR(p)$ , com média zero, dado pela expressão (2.4) quando  $q = 0$ , isto é,

$$\Phi(\mathcal{B})X_t = \varepsilon_t, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

onde o polinômio  $\Phi(\mathcal{B})$  é definido por (2.5) e  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo ruído branco, pode ser expresso como um média móvel de ordem infinita escrevendo

$$\Psi(\mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{B})^{-1} = \sum_{i \geq 0} \psi_i \mathcal{B}^i,$$

com  $\psi_0 = 1$ , para obtermos

$$X_t = \Psi(\mathcal{B})\varepsilon_t = \sum_{i \geq 0} \psi_i \varepsilon_{t-i}. \quad (4.2)$$

Da equação  $\Psi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}) = 1$ , mostra-se que os coeficientes  $\psi_i$  e  $\phi_i$ , para cada  $i \in \mathbb{N}$ , satisfazem a seguinte relação

$$\psi_v = \begin{cases} \phi_1 \psi_{v-1} + \cdots + \phi_{v-1} \psi_1 + \phi_v, & v \leq p \\ \phi_1 \psi_{v-1} + \cdots + \phi_p \psi_{v-p}, & v \geq p. \end{cases}$$

Então, tomando  $\psi_v = 0$ , para  $v < 0$ , temos

$$\psi_0 = 1; \quad \Phi(\mathcal{B})\psi_v = 0, \quad v \neq 0. \quad (4.3)$$

Dada uma série temporal  $\{X_t\}_{t=1}^n$ , gerada pelo modelo (4.1) ou (4.2), podemos definir

$$\varepsilon_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = \Phi(\mathcal{B})X_t$$

cuja função de autocorrelação de ordem  $k$ , utilizando o valor dos parâmetros como verdadeiro para uma amostra de tamanho  $n$ , é dada por

$$\rho_\varepsilon^*(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^n \varepsilon_t \varepsilon_{t-k}}{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2}. \quad (4.4)$$



Seja  $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=1}^n$  os correspondentes resíduos quando (4.1) é ajustado e o estimador de mínimos quadrados de  $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p)'$  é obtido, isto é,

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\Phi}(\mathcal{B})X_t = \sum_{i=0}^p \hat{\phi}_i X_{t-i}.$$

A correspondente função de autocorrelação amostral de ordem  $k$  dos resíduos é dada por

$$\hat{\rho}_{\hat{\varepsilon}}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-k}}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2}. \quad (4.5)$$

Sabe-se que os resíduos  $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=1}^n$  satisfazem as condições de ortogonalidade

$$\sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t X_{t-i} = 0, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, p. \quad (4.6)$$

Como  $\hat{\Psi}(\mathcal{B}) = \hat{\Phi}^{-1}(\mathcal{B}) = (1 - \hat{\phi}_1 \mathcal{B} - \dots - \hat{\phi}_p \mathcal{B}^p)^{-1}$ , então  $X_t = \hat{\Psi}(\mathcal{B})\hat{\varepsilon}_t$ , para  $t \in \{1, \dots, n\}$ . Da expressão (4.6) temos que, para todo  $i = 1, \dots, p$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t X_{t-i} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t \left( \hat{\Psi}(\mathcal{B})\hat{\varepsilon}_{t-i} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t \left( \sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \hat{\varepsilon}_{t-i-k} \right) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \frac{\sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k}}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-(k+i)}}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2} = 0 \\ \text{pela expressão (4.5)} &\Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \hat{\rho}_{\hat{\varepsilon}}(k+i) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} \psi_k \hat{\rho}_{\hat{\varepsilon}}(k+i) + O_p(1/n) = 0, &\quad (4.7) \end{aligned}$$

onde a última equivalência decorre do fato de que  $\hat{\psi}_k = \psi_k + O_p(1/n)$  já que  $\hat{\psi}_k$  converge em probabilidade para  $\psi_k$ , quando  $n$  tende a infinito (ver Box e Pierce (1970)). No Anexo F mostramos a validade da antepenúltima igualdade.

Observe que na equação (4.7) estamos somando um número infinito de autocorrelações de uma série finita. Entretanto, conforme Box e Pierce (1970), como  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo estacionário temos que  $\psi_k \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ ; e a menos que  $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p)'$  esteja muito próximo ao limite da região de não estacionariedade, o decaimento de  $\psi_k$  é rápido de modo que essa soma

em  $k$  pode geralmente ir até um valor muito menor do que  $n$ . Mais precisamente, estamos assumindo que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N$  e para cada  $n$  existe uma seqüência  $m_n$  tal que

- (a) todo  $\psi_j$  é da ordem de  $1/\sqrt{n}$  ou menor, para  $j \geq m_n - p$  e
- (b) a razão  $m_n/n$  é de ordem  $1/\sqrt{n}$ .

Então, na discussão que segue, o erro cometido por se somar até  $k = m$  será ignorado (escreveremos  $m$  no lugar de  $m_n$ ); e (b) assegura que o efeito de comparar somente os  $n - k$  termos somados no numerador de  $\hat{\rho}_\varepsilon(\cdot)$  quando comparados com  $n$  termos do denominador pode também ser negligenciado.

O que faremos a seguir é obter uma expansão linear de  $\hat{\rho}_\varepsilon(\cdot)$  em termos de  $\rho_\varepsilon^*(\cdot)$ .

**Lema 4.1** *Considere  $\rho_\varepsilon^*(\cdot)$  a função de autocorrelação do processo  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  dada pela expressão (4.4). Considere ainda  $\hat{\rho}_\varepsilon(\cdot)$  a função de autocorrelação amostral dos resíduos  $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=1}^n$  dada pela expressão (4.5). Considere  $\phi_j$  e  $\hat{\phi}_j$ ,  $1 \leq j \leq p$ , os parâmetros reais e estimados do processo autoregressivo, dado por (4.1), respectivamente. Então,*

$$\hat{\rho}_\varepsilon(k) = \rho_\varepsilon^*(k) + \sum_{j=1}^p (\phi_j - \hat{\phi}_j) \psi_{k-j} + O_p\left(\frac{1}{n}\right), \quad (4.8)$$

para todo  $k = 1, 2, \dots, s$ , onde  $\psi_{k-j} = \frac{\sum_{i=0}^p \phi_i \rho_X(k-j+i)}{\sum_{i=0}^p \phi_i \rho_X(i)}$ .

**Prova:** Iniciamos observando que a raiz do erro quadrático médio de  $\hat{\phi}_j$ ,  $1 \leq j \leq p$ , definido por  $\sqrt{\mathbb{E}(\phi_j - \hat{\phi}_j)^2}$ , é da ordem de  $1/\sqrt{n}$ , e pode-se aproximar  $\hat{\rho}_\varepsilon(\cdot)$  pela expansão de Taylor de primeira ordem sobre  $\phi = \hat{\phi}$ , ou seja,

$$\hat{\rho}_\varepsilon(k) = \rho_\varepsilon^*(k) + \sum_{j=1}^p (\phi_j - \hat{\phi}_j) \hat{\delta}_{jk} + O_p\left(\frac{1}{n}\right), \quad (4.9)$$

onde  $\hat{\delta}_{jk} = -\frac{\partial \rho_\varepsilon^*(k)}{\partial \phi_j} \Big|_{\phi=\hat{\phi}}$ . Observe que  $\frac{\partial}{\partial \phi_j} [\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2] \Big|_{\phi=\hat{\phi}} = 0$ , de forma que

$$\hat{\delta}_{jk} = - \left[ \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2 \right]^{-1} \frac{\partial c_k}{\partial \phi_j} \Big|_{\phi=\hat{\phi}}, \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{t=k+1}^n \varepsilon_t \varepsilon_{t-k} = \sum_{t=k+1}^n [\Phi(\mathcal{B})X_t][\Phi(\mathcal{B})X_{t-k}] \\ &= \sum_{t=k+1}^n \sum_{i=0}^p \sum_{l=0}^p \phi_i \phi_l X_{t-i} X_{t-k-l}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

com  $\phi_0 = -1$ . Assim, da expressão (4.11), para  $k$  e  $j$  fixos, temos que

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial c_k}{\partial \phi_j} \right|_{\phi=\hat{\phi}} &= \left. \frac{\partial}{\partial \phi_j} \left( \sum_{t=k+1}^n \sum_{i=0}^p \sum_{l=0}^p \sum_t \phi_i \phi_l X_{t-i} X_{t-k-l} \right) \right|_{\phi=\hat{\phi}} \\
&= \sum_{t=k+1}^n \left. \frac{\partial}{\partial \phi_j} \left( \sum_{i=0}^p \sum_{l=0}^p \sum_t \phi_i \phi_l X_{t-i} X_{t-k-l} \right) \right|_{\phi=\hat{\phi}} \\
&= \sum_{t=k+1}^n \left( \sum_{i=0}^p \phi_i X_{t-i} X_{t-k-j} + \sum_{i=0}^p \phi_i X_{t-j} X_{t-k-i} \right) \Big|_{\phi=\hat{\phi}} \\
&= \sum_{t=k+1}^n \left( \sum_{i=0}^p \hat{\phi}_i X_{t-i} X_{t-k-j} + \sum_{i=0}^p \hat{\phi}_i X_{t-j} X_{t-k-i} \right) \\
&= \sum_{i=0}^p \hat{\phi}_i \sum_{t=k+1}^n X_{t-i} X_{t-k-j} + \sum_{i=0}^p \hat{\phi}_i \sum_{t=k+1}^n X_{t-j} X_{t-k-i} \\
&= \sum_{t=1}^n X_t^2 \left\{ \sum_{i=0}^p \hat{\phi}_i \frac{\sum_{t=k+1}^n X_{t-i} X_{t-k-j}}{\sum_{t=1}^n X_t^2} + \sum_{i=0}^p \hat{\phi}_i \frac{\sum_{t=k+1}^n X_{t-j} X_{t-k-i}}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \right\} \\
&= \sum_{t=1}^n X_t^2 \left\{ \sum_{i=0}^p \hat{\phi}_i \hat{\rho}_X(k+j-i) + \sum_{i=0}^p \hat{\phi}_i \hat{\rho}_X(k+i-j) \right\}, \\
&= \sum_{t=1}^n X_t^2 \sum_{i=0}^p \hat{\phi}_i [\hat{\rho}_X(k-i+j) + \hat{\rho}_X(k+i-j)].
\end{aligned} \tag{4.12}$$

onde a penúltima igualdade decorre da Definição 2.12. Para verificar a validade da terceira igualdade para um  $p$  fixo, ver Anexo A. Segue, das expressões (4.10) e (4.12) que

$$\hat{\delta}_{jk} = - \frac{\sum_{t=1}^n X_t^2}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2} \sum_{i=0}^p \hat{\phi}_i [\hat{\rho}_X(k-i+j) + \hat{\rho}_X(k+i-j)], \tag{4.13}$$

onde

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_t^2 &= \left( \hat{\Phi}(\mathcal{B})X_t \right) \left( \hat{\Phi}(\mathcal{B})X_t \right) = \left( \sum_{i=0}^p \hat{\phi}_i X_{t-i} \right) \left( \sum_{j=0}^p \hat{\phi}_j X_{t-j} \right) = \\
&= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j X_{t-i} X_{t-j}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Portanto, da expressão (4.14), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^n X_t^2} &= \frac{\sum_{t=1}^n \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j X_{t-i} X_{t-j}}{\sum_{t=1}^n X_t^2} = \frac{\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \sum_{t=1}^n X_{t-i} X_{t-j}}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^n X_t^2} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-i} X_{t-j}}{\sum_{t=1}^n X_t^2}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^n X_t^2} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \hat{\rho}_X(i-j). \quad (4.15)$$

Substituindo o resultado da expressão (4.15) na expressão (4.13), obtemos que

$$\hat{\delta}_{jk} = - \frac{\sum_{i=0}^p \hat{\phi}_i [\hat{\rho}_X(k-i+j) + \hat{\rho}_X(k+i-j)]}{\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \hat{\rho}_X(i-j)}. \quad (4.16)$$

Vamos aproximar  $\hat{\delta}_{jk}$  substituindo  $\hat{\phi}$ 's e  $\hat{\rho}_X$ 's em (4.17) por  $\phi$ 's e  $\rho_X$ 's (os parâmetros e a função de autocorrelação do processo autoregressivo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ) e denotaremos o resultado por  $\delta_{jk}$ . Isto é,

$$\delta_{jk} = - \frac{\sum_{i=0}^p \phi_i [\rho_X(k-i+j) + \rho_X(k+i-j)]}{\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \phi_i \phi_j \rho_X(i-j)}. \quad (4.17)$$

Agora aplicando a fórmula de Bartlett's (ver Bartlett (1946), equação (7)) temos que

$$\hat{\rho}_X(k) = \rho_X(k) + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

e pela observação feita no início dessa prova,  $\hat{\phi}_j = \phi_j + O_p(1/\sqrt{n})$ . Portanto,

$$\hat{\delta}_{jk} = \delta_{jk} + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

o que assegura que

$$\hat{\rho}_\varepsilon(k) = \rho_\varepsilon^*(k) + \sum_{j=1}^p (\phi_j - \hat{\phi}_j) \delta_{jk} + O_p\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4.18)$$

Utilizando a seguinte relação recursiva, a qual é satisfeita pela função de autocorrelação de um processo autoregressivo, isto é,

$$\rho_X(v) - \phi_1 \rho_X(v-1) - \dots - \phi_p \rho_X(v-p) = \Phi(\mathcal{B}) \rho_X(v) = 0, \quad v \geq 1. \quad (4.19)$$

Observe que podemos simplificar o numerador e o denominador da expressão (4.17) como segue, através do uso da expressão (4.19)

$$\begin{aligned} \text{numerador de (4.17)} &= \sum_{i=0}^p \phi_i [\rho_X(k-i+j) + \rho_X(k+i-j)] = \\ &= \phi_0 [\rho_X(k+j) + \rho_X(k-j)] + \phi_1 [\rho_X(k+j-1) + \rho_X(k-j+1)] + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\phi_p[\rho_X(k+j-p) + \rho_X(k-j+p)] = \\
& = \phi_0\rho_X(k+j) + \phi_1\rho_X(k+j-1) + \cdots + \phi_p\rho_X(k+j-p) + \phi_0\rho_X(k-j) + \\
& \quad +\phi_1\rho_X(k-j+1) + \cdots + \phi_p\rho_X(k-j+p) = \\
& = \sum_{i=0}^p \phi_i\rho_X(k-j+i),
\end{aligned}$$

pois  $\Phi(\mathcal{B})\rho_X(k+j) = 0$ , para  $k+j > 1$  e  $\phi_0 = -1$ , e ainda,

$$\begin{aligned}
\text{denominador de (4.17)} & = -\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \phi_i\phi_j\rho_X(i-j) = \\
& = -\sum_{i=0}^p \phi_i[\phi_0\rho_X(i) + \phi_1\rho_X(i-1) + \cdots + \phi_p\rho_X(i-p)] = \\
& = -\left\{ \left[ \phi_0^2\rho_X(0) + \phi_0\phi_1\rho_X(-1) + \cdots + \phi_0\phi_p\rho_X(-p) \right] + \left[ \phi_1\phi_0\rho_X(1) + \phi_1^2\rho_X(0) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \cdots + \phi_1\phi_p\rho_X(-p+1) \right] + \cdots + \left[ \phi_p\phi_0\rho_X(p) + \phi_p\phi_1\rho_X(p-1) + \cdots + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \phi_p^2\rho_X(0) \right] \right\} = -[\rho_X(0) - \phi_1\rho_X(1) - \cdots - \phi_p\rho_X(p)] = \\
& = \sum_{i=0}^p \phi_i\rho_X(i).
\end{aligned}$$

Então, a expressão (4.17) pode ser reescrita como

$$\delta_{jk} = \frac{\sum_{i=0}^p \phi_i\rho_X(k-j+i)}{\sum_{i=0}^p \phi_i\rho_X(i)}.$$

Portanto,  $\delta_{jk}$  depende somente de  $(k-j)$ , e definimos  $\delta_{k-j} \equiv \delta_{jk}$ . Então,

- (a)  $\delta_0 = \frac{\sum_{i=0}^p \phi_i\rho_X(i)}{\sum_{i=0}^p \phi_i\rho_X(i)} = 1$ ;
- (b) Se  $k < j$ ,  $v = k - j < 0$  e  $\delta_v = \frac{\sum_{i=0}^p \phi_i\rho_X(v+i)}{\sum_{i=0}^p \phi_i\rho_X(i)} = 0$ ; e
- (c)  $\Phi(\mathcal{B})\delta_v = \frac{\sum_{i=0}^p \phi_i[\Phi(\mathcal{B})\rho_X(v+i)]}{\sum_{i=0}^p \phi_i\rho_X(i)} = 0$ ,  $v \geq 1$ .

Da expressão (4.9) e comparando os itens (a), (b) e (c) acima com os correspondentes resultados em (4.3) para  $\psi_v$ , temos que  $\delta_v = \psi_v$ , isto é,  $\psi_{k-j} = \delta_{k-j} \equiv \delta_{jk}$ . Portanto, da expressão (4.18), concluímos que

$$\hat{\rho}_\varepsilon(k) = \rho_\varepsilon^*(k) + \sum_{j=1}^p (\phi_j - \hat{\phi}_j)\psi_{k-j} + O_p\left(\frac{1}{n}\right), \quad (4.20)$$

para todo  $k = 1, 2, \dots, m$ . Isto conclui a prova do Lema 4.1. □

O Teorema 4.1 a seguir, demonstrado por Box e Pierce (1970), deriva as distribuições de  $\rho_\epsilon^*(\cdot)$  e  $\hat{\rho}_\epsilon(\cdot)$  do processo autoregressivo dado pela expressão (4.1).

**Teorema 4.1** *Considere  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo autoregressivo dado pela expressão (4.1). Sejam  $\rho_\epsilon^*(\cdot)$  e  $\hat{\rho}_\epsilon(\cdot)$  as funções de autocorrelações dos erros  $\epsilon_t$  e dos resíduos  $\hat{\epsilon}_t$ , respectivamente. Então,*

$$\rho_\epsilon^*(\cdot) \sim N\left(0, \frac{1}{n}I\right)$$

e

$$\hat{\rho}_\epsilon(\cdot) \sim N\left(0, \frac{1}{n}[I - X\Sigma^{-1}X']\right),$$

onde  $I$  é a matriz identidade de posto  $m - p$ ,  $I - X\Sigma^{-1}X'$  é uma matriz idempotente de posto  $m - p$  e  $\Sigma = (X'X)$  com

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \psi_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \psi_2 & \psi_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{m-1} & \psi_{m-2} & \dots & \psi_{m-p} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

**Prova:** A forma matricial do resultado do Lema 4.1 é dada por

$$\hat{\rho}_\epsilon = \rho_\epsilon^* + X(\phi - \hat{\phi}), \quad (4.22)$$

onde  $\hat{\rho}_\epsilon = (\hat{\rho}_\epsilon(1), \dots, \hat{\rho}_\epsilon(m))'$ . Tomando a transposta da expressão (4.22) e multiplicando ambos os lados da expressão resultante por  $X\Sigma^{-1}X'$ , onde  $\Sigma = X'X$ , temos que

$$\hat{\rho}_\epsilon' X \Sigma^{-1} X' = \rho_\epsilon^{*'} X \Sigma^{-1} X' + (\phi - \hat{\phi})' X' X \Sigma^{-1} X'. \quad (4.23)$$

Da expressão (4.7) obtemos que

$$\hat{\rho}_\epsilon' X = 0,$$

e, da transposta da expressão (4.22), obtemos que

$$(\phi - \hat{\phi})'X' = \hat{\rho}'_{\varepsilon} - \rho_{\varepsilon}^{*'}.$$

Assim, da expressão (4.23), temos que

$$0 = \rho_{\varepsilon}^{*'}X\Sigma^{-1}X' + \hat{\rho}'_{\varepsilon} - \rho_{\varepsilon}^{*'}.$$

Então,

$$\hat{\rho}_{\varepsilon} = \rho_{\varepsilon}^{*}(I - X\Sigma^{-1}X'). \quad (4.24)$$

Do artigo Anderson (1942) sabe-se que  $\rho_{\varepsilon}^{*}(\cdot)$  é aproximadamente normal para  $n$  moderadamente grande. O vetor da função de autocorrelação dos erros é portanto aproximadamente uma transformação linear de uma variável normal multivariada e então é normalmente distribuída. Especificamente,

$$\rho_{\varepsilon}^{*}(\cdot) \sim N\left(0, \frac{1}{n}I\right).$$

Da expressão (4.24), como

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\hat{\rho}_{\varepsilon}(\cdot)\right) &= \text{Var}\left(\rho_{\varepsilon}^{*}(\cdot)(I - X\Sigma^{-1}X')\right) = \\ &= (I - X\Sigma^{-1}X')(I - X\Sigma^{-1}X')' \text{Var}\left(\rho_{\varepsilon}^{*}(\cdot)\right) = (I - X\Sigma^{-1}X')\frac{1}{n}I, \end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned} (I - X\Sigma^{-1}X')(I - X\Sigma^{-1}X')' &= (I - X\Sigma^{-1}X')(I - X(\Sigma^{-1})'X') = \\ &= I - X(\Sigma^{-1})'X' - X\Sigma^{-1}X' + X\Sigma^{-1}X'X(\Sigma^{-1})'X' = \\ &= I - X(\Sigma^{-1})'X' - X\Sigma^{-1}X' + X\Sigma^{-1}\Sigma(\Sigma^{-1})'X' = \\ &= I - X(\Sigma^{-1})'X' - X\Sigma^{-1}X' + X(\Sigma^{-1})'X' = I - X\Sigma^{-1}X'. \end{aligned}$$

Então,

$$\hat{\rho}_{\varepsilon}(\cdot) \sim N\left(0, \frac{1}{n}[I - X\Sigma^{-1}X']\right).$$

Como a matriz  $I - X\Sigma^{-1}X'$  é idempotente de posto  $m - p$ , a distribuição de  $\hat{\rho}_{\varepsilon}(\cdot)$  tem uma singularidade  $p$ -dimensional. □

O seguinte teorema propõe uma segunda derivação para encontrar a distribuição da função de autocorrelação amostral dos resíduos de um modelo  $ARMA(p, q)$ . Sua principal vantagem é que esta pode ser estendida para situações mais gerais. A prova deste teorema pode ser encontrada em McLeod (1978).

Considere  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ,  $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  e  $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  os processos estocásticos, com média zero, dados, respectivamente, por

$$\Phi(\mathcal{B})X_t = \Theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad \Phi(\mathcal{B})V_t = -\varepsilon_t \quad \text{e} \quad \Theta(\mathcal{B})U_t = \varepsilon_t.$$

Sejam  $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  e  $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  definidos através dos seguintes operadores inversos

$$\Psi(\mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{B})^{-1} = \sum_{i \geq 0} \psi_i \mathcal{B}^i, \quad (4.25)$$

$$\Pi(\mathcal{B}) = \Theta(\mathcal{B})^{-1} = \sum_{j \geq 0} \pi_j \mathcal{B}^j, \quad (4.26)$$

onde  $\psi_l = \pi_l = 0$ , para  $l < 0$ .

**Teorema 4.2** *Considere  $\hat{\rho}_\varepsilon(\cdot)$  a função de autocorrelação amostral dos resíduos  $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=1}^n$ . Então, a distribuição assintótica de  $\hat{\rho}_\varepsilon(\cdot)$  é dada por*

$$\hat{\rho}_\varepsilon(\cdot) \sim N\left(0, I - \frac{1}{n} X \Lambda^{-1} X'\right), \quad (4.27)$$

onde  $I$  é a matriz identidade de ordem  $m \times m$  e a matriz  $\Lambda$  é dada por  $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{i,j=1}^n$  cujo  $(i,j)$ -ésimo elemento é dado por

$$\Lambda_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_V(i-j) & \gamma_{VU}(i-j) \\ \gamma_{UV}(i-j) & \gamma_U(i-j) \end{pmatrix},$$

isto é, onde cada elemento  $(i, j)$  dessa matriz é a função de autocovariância e função de covariância cruzada (ver Definições 2.3 e 2.5) A matriz  $X$  em (4.27) é dada por  $X = \begin{pmatrix} -\psi'_{i-j} & \pi'_{i-j} \end{pmatrix}$ , onde os coeficientes  $\psi_i$  e  $\pi_j$  são dados, respectivamente, pelas expressões (4.25) e (4.26).

Nas seções seguintes discutiremos as estatísticas de teste portmanteau  $Q_{BP}$ ,  $Q_{LB}$ ,  $Q_{MT}$  e  $Q_{PR}$  propostas, respectivamente, por Box e Pierce (1970), Ljung e Box (1978), Monti (1994) e Peña e Rodríguez (2002) e suas respectivas distribuições de probabilidade.

## 4.2 $Q_{BP}$ DE BOX-PIERCE E $Q_{LB}$ DE LJUNG-BOX

O artigo Box e Pierce (1970) propõe a seguinte estatística para o teste portmanteau

$$Q_{BP}(m) = n \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_\varepsilon^2(k), \quad (4.28)$$



onde  $\hat{\rho}_\varepsilon(\cdot)$  é definido por (4.5) e  $m$  é o número de ordens da função de autocorrelação amostral dos resíduos  $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=1}^n$  a ser considerada no cálculo da estatística.

O artigo Box e Pierce (1970) comprova, através de simulações de 50 séries com tamanho amostral  $n = 200$ , a adequação das aproximações utilizadas na derivação da distribuição de probabilidade de  $\hat{\rho}_\varepsilon(\cdot)$  (ver Teorema 4.1) e encontraram também que a  $Var(\hat{\rho}_\varepsilon(\cdot))$  é super-estimada pelo fator  $(n+2)/(n-k)$  o que causa uma discrepância entre as médias teórica e empírica da estatística  $Q_{BP}(\cdot)$ . Diversos trabalhos discutem este problema, entre eles, Davies *et al.* (1977) e Prothero e Wallis (1976). Ljung e Box (1978), visando corrigir o problema apresentado por  $Q_{BP}(\cdot)$ , propõe a seguinte estatística de teste

$$Q_{LB}(m) = n(n+2) \sum_{k=1}^m (n-k)^{-1} \hat{\rho}_\varepsilon^2(k), \quad (4.29)$$

isto é, a estatística  $Q_{LB}(\cdot)$  é a estatística  $Q_{BP}(\cdot)$  definida na expressão (4.28) incorporando o fator de correção  $(n+2)/(n-k)$ . Estes autores concluem que o teste baseado nessa estatística providencia uma substancial melhora e deve ser adequada a maioria das propostas práticas.

#### 4.2.1 $Q_{BP}$ E $Q_{LB}$ NOS PROCESSOS $AR$ , $ARIMA$ E $ARFIMA$

Enunciaremos, nessa seção, os teoremas que indicam a distribuição de probabilidade das estatísticas definidas por (4.28) e (4.29) nos processos  $AR$ ,  $ARIMA$  e  $ARFIMA$ .

**Teorema 4.3** *Sejam  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo  $AR(p)$  dado pela expressão (4.1),  $\hat{\rho}_\varepsilon$  a função de autocorrelação amostral dos resíduos deste processo e as estatísticas  $Q_{BP}(\cdot)$  e  $Q_{LB}(\cdot)$  como definidas em (4.28) e (4.29), respectivamente. Se o modelo é corretamente identificado, então as estatísticas  $Q_{BP}(\cdot)$  e  $Q_{LB}(\cdot)$  são assintoticamente distribuídas como uma Qui-quadrado com  $m - p$  graus de liberdade.*

**Prova:** De acordo com o que vimos no Teorema 4.1, se o modelo é apropriado e os parâmetros de  $\Phi(\mathcal{B})$ , definido em (2.5), são conhecidos, então o processo dos erros  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é formado por variáveis não correlacionadas e sua função de autocorrelação amostral  $\rho_\varepsilon^*(\cdot)$  é aproximadamente  $N(0, (1/n)I)$ . Assim  $n \sum_{k=1}^m \rho_\varepsilon^{2*}(k)$  e, conseqüentemente,  $n(n+2) \sum_{k=1}^m (n-k)^{-1} \rho_\varepsilon^{2*}(k)$  possuem distribuição Qui-quadrado com  $m$  graus de liberdade. Se  $m$  é tomado suficientemente grande, então espera-se que as estatísticas (4.28) e (4.29) sejam distribuídas como uma Qui-quadrado com  $m - p$  graus de liberdade.  $\square$

O artigo Ljung e Box (1978) compara os testes baseados nas estatísticas  $Q_{BP}(\cdot)$  e  $Q_{LB}(\cdot)$  para  $n \in \{50, 100, 200\}$ ,  $m \in \{10, 20, 30\}$  em um processo  $AR(1)$  com  $\phi_1 = 0,5$ . Este artigo mostra que os níveis de significância empíricos de  $Q_{LB}(\cdot)$  estão mais próximos dos níveis de significância nominais do que os níveis de significância empíricos de  $Q_{BP}(\cdot)$ .

Apesar do resultado do Teorema 4.3 ser válido somente quando  $m$  é suficientemente grande, Ljung (1986), através de simulações de Monte Carlo, verifica o comportamento da estatística  $Q_{BP}(\cdot)$ , considerando  $m \in \{2, 3, 5, 10\}$  num processo  $AR(1)$  com  $\phi_1 \in \{0,40; 0,70; 0,80; 0,90; 0,99\}$ . Este artigo mostra que a distribuição de probabilidade Qui-quadrado com  $m - p = m - 1$  graus de liberdade é adequada, a não ser para os valores de  $\phi_1$  próximos dos limites de não estacionariedade e não invertibilidade. Para a estatística  $Q_{LB}(\cdot)$ , considerando  $m \in \{2, 3, 5, 10, 20\}$  num processo  $AR(1)$  com  $\phi_1 \in \{0,40; 0,70; 0,90; 0,99\}$ , Ljung (1986) conclui que a distribuição de probabilidade Qui-quadrado com  $m - p = m - 1$  graus de liberdade pode ser utilizada para  $m = 2$  e  $m = 3$ , se  $\phi_1 \leq 0,70$ . Para  $\phi_1$  próximo a 1 o valor de  $m$  deve ser maior.

A relação (4.19), utilizada na prova do Lema 4.1, cujo resultado possibilitou a obtenção da distribuição de  $\hat{\rho}_\varepsilon(\cdot)$  para o processo  $AR(p)$ , não é satisfeita pelo processo  $MA(q)$ , ou mais geralmente, pelo processo  $ARIMA(p, d, q)$ . Entretanto, uma importante propriedade desses processos, dado no seguinte teorema, nos possibilita uma generalização. A demonstração pode ser encontrada em Box e Pierce (1970), §5.1.

**Teorema 4.4** *Sejam  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  o processo  $ARIMA(p, d, q)$ , com média  $\mu = 0$ , dado pela expressão (2.7) e  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  o processo  $AR(p+q)$ , dado pela expressão (4.1). Se  $\Phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^d X_t = \Theta(\mathcal{B})\varepsilon_t$  e  $\Phi(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B})Y_t = \varepsilon_t$  são processos estocásticos obtidos com o mesmo processo de ruído branco  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , então os resíduos desses modelos e, conseqüentemente, as funções de autocorrelações amostrais dos resíduos são aproximadamente as mesmas, quando estes são ajustados pelo estimador de mínimos quadrados.*

O Teorema 4.5, a seguir, determina a distribuição assintótica das estatísticas  $Q_{BP}(\cdot)$  e  $Q_{LB}(\cdot)$  dadas pelas expressões (4.28) e (4.29), respectivamente, para o processo  $ARIMA(p, d, q)$ . Sua demonstração é uma aplicação dos Teoremas 4.3 e 4.4.

**Teorema 4.5** *Sejam  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  o processo  $ARIMA(p, d, q)$ , com média  $\mu = 0$ , dado pela expressão (2.7) e as estatísticas  $Q_{BP}(\cdot)$  e  $Q_{LB}(\cdot)$  como definidas em (4.28) e (4.29), respectivamente. Se o modelo é corretamente identificado e ajustado pelo estimador de mínimos quadrados,  $Q_{BP}(\cdot)$  e  $Q_{LB}(\cdot)$  são*

assintoticamente distribuídas como uma Qui-quadrado com  $m - p - q$  graus de liberdade.

**Prova:** Pelo Teorema 4.4 as funções de autocorrelações amostrais dos resíduos do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  são aproximadamente as mesmas de um processo  $AR(p+q)$ . Então, pelo Teorema 4.3,  $Q_{BP}(\cdot)$  e  $Q_{LB}(\cdot)$  possuem distribuição assintótica Qui-quadrado com  $m - p - q$  graus de liberdade.  $\square$

O Teorema 4.6 apresentado por Li e McLeod (1986), e dado a seguir, possibilita identificar as distribuições de  $Q_{BP}(\cdot)$  e  $Q_{LB}(\cdot)$  no processo  $ARFIMA(p, d, q)$ . Sua demonstração é uma extensão trivial do Teorema 4.2 que, conforme dito anteriormente, foi apresentado por McLeod (1978).

**Teorema 4.6** *Para algum  $m \geq 1$  fixo,  $\sqrt{n\{\hat{\rho}_\varepsilon(1), \dots, \hat{\rho}_\varepsilon(m)\}}$  é assintoticamente normal com média zero e matriz de covariância  $I - XV^{-1}X'$ , onde  $\hat{\rho}_\varepsilon(\cdot)$  é a função de autocorrelação dos resíduos  $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , definida em (4.4),  $I$  é a matriz identidade de ordem  $m \times m$ ,  $X$  é matriz de ordem  $(p+q+1) \times (p+q+1)$  dada por*

$$X = \begin{pmatrix} -\phi'_{i-j} & -\theta'_{i-j} & K \end{pmatrix},$$

onde  $K = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m-1}\right)'$  e

$$V = \begin{pmatrix} V_{p,q} & J \\ J' & \frac{\pi^2}{6} \end{pmatrix},$$

onde  $V_{p,q}$  é a matriz de informação do processo  $ARMA$  em  $(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$  e  $J = [\eta_V(0), \dots, \eta_V(p-1), \eta_U(0), \dots, \eta_U(q-1)]'$  com

$$\eta_V(l) = \sum_{i \geq 0} \frac{\phi'_i}{l+i+1}, \quad e \quad \eta_U(l) = \sum_{i \geq 0} \frac{\theta'_i}{l+i+1},$$

onde,  $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  e  $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  são processos autoregressivos auxiliares dados, respectivamente, por  $\Phi(\mathcal{B})V_t = -\varepsilon_t$  e  $\Theta(\mathcal{B})U_t = \varepsilon_t$ , de forma que  $\partial \varepsilon_t / \partial \phi_j = V_{t-j}$  e  $\partial \varepsilon_t / \partial \theta_j = U_{t-j}$ .

**Observação:** Pode ser mostrado que  $I - XV^{-1}X'$  é aproximadamente idempotente com posto  $m - (p+q+1)$ , para  $m$  suficientemente grande, e portanto  $Q_{BP}(\cdot)$  e  $Q_{LB}(\cdot)$  são aproximadamente distribuídas como uma Qui-quadrado com  $m - (p+q+1)$  graus de liberdade.

Através de experimentos de Monte Carlo, o artigo Ljung e Box (1978) observa que o teste baseado na estatística  $Q_{LB}(\cdot)$  providencia substancial

melhora, para pequenas amostras, quando comparado ao teste baseado na estatística  $Q_{BP}(\cdot)$ , para o processo  $AR(1)$ . Ljung (1986) verifica o uso de uma distribuição de probabilidade aproximada para o teste baseado na estatística  $Q_{LB}(\cdot)$ , também para o processo  $AR(1)$ . Li e McLeod (1986) mostram resultado de  $Q_{LB}(\cdot)$  para o processo  $ARFIMA(0, d, 0)$ . O artigo Reisen *et al.* (2003) faz uma comparação dos níveis de significância de  $Q_{BP}(\cdot)$  e  $Q_{LB}(\cdot)$  para os processos  $ARFIMA(0, d, 0)$ ,  $ARFIMA(1, d, 0)$  e  $ARFIMA(0, d, 1)$ , considerando os estimadores  $d_{GPH}$ ,  $d_{sp}$ ,  $d_R$  e  $d_{FT}$  citados no Capítulo 3. Este artigo conclui que o teste baseado na estatística  $Q_{LB}(\cdot)$  é superior ao baseado na estatística  $Q_{BP}(\cdot)$ , no sentido de que os níveis de significância empíricos do primeiro se aproximam mais dos níveis nominais do que o do segundo. O comportamento de ambos os testes depende principalmente do processo, dos valores dos parâmetros, do estimador do parâmetro  $d$  e do valor de  $m$  considerados.

### 4.3 $Q_{MT}$ DE MONTI

Monti (1994) propõe a seguinte estatística de teste baseada na soma do quadrado das funções de autocorrelação parcial amostral dos resíduos, dada pela expressão

$$Q_{MT}(m) = n(n+2) \sum_{k=1}^m (n-k)^{-1} \hat{\phi}_{\varepsilon}^2(k, k), \quad (4.30)$$

onde  $\hat{\phi}_{\varepsilon}(k, k)$  é a função de autocorrelação parcial amostral dos resíduos  $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=1}^n$  de ordem  $k$ , dada pela Definição 2.13.

A seguir, derivamos a distribuição assintótica da estatística  $Q_{MT}(\cdot)$  dada por (4.30).

Considere

$$\phi_{\varepsilon}^{(l)} = \left( \phi_{\varepsilon}(1, 1), \phi_{\varepsilon}(2, 2), \dots, \phi_{\varepsilon}(l, l) \right)' \quad (4.31)$$

o vetor das  $l$  primeiras funções de autocorrelação parcial dos erros  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . Se  $\rho_{\varepsilon}(\cdot)$  e  $\phi_{\varepsilon}(\cdot, \cdot)$  são a função de autocorrelação e a função de autocorrelação parcial dos erros  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , respectivamente, então o vetor  $\phi_{\varepsilon}^{(l)}$  definido pela expressão (4.31) com componentes dados por (4.32) pode ser obtido pelo algoritmo de Durbin (1960), dado na Definição 2.13, através da seguinte expressão

$$\phi_{\varepsilon}(k, k) = \frac{\rho_{\varepsilon}^{(k)} - \rho_{\varepsilon}^{(k-1)'} T_{k-1}^{-1} \rho_{\varepsilon}^{(k-1)*}}{1 - \rho_{\varepsilon}^{(k-1)'} T_{k-1}^{-1} \rho_{\varepsilon}^{(k-1)*}}, \quad 1 \leq k \leq l, \quad (4.32)$$

onde  $\rho_\varepsilon^{(l)} = (\rho_\varepsilon(1), \rho_\varepsilon(2), \dots, \rho_\varepsilon(l))'$ ,  $\rho_\varepsilon^{(l)*} = (\rho_\varepsilon(l), \rho_\varepsilon(l-1), \dots, \rho_\varepsilon(1))'$  e  $T_k$  é a matriz Toeplitz de ordem  $k \times k$ , tal que o  $(i, j)$ -ésimo elemento é dado por  $T_k(i, j) = \hat{\rho}_\varepsilon(|i - j|)$ . Então,  $\hat{\phi}_\varepsilon(\cdot, \cdot)$  pode ser obtido analogamente a  $\phi_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ , substituindo as funções de autocorrelação parcial amostral de  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  pelas funções de autocorrelação parcial amostral de  $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=1}^n$  em (4.32).

Através do Teorema 4.7, dado a seguir, Monti (1994) demonstra a distribuição assintótica de probabilidade da estatística  $Q_{MT}(\cdot)$ .

**Teorema 4.7** *Sejam  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  o processo  $ARIMA(p, d, q)$ , com média  $\mu = 0$ , dado pela expressão (2.7). Se o modelo é corretamente identificado, a estatística  $Q_{MT}(\cdot)$ , definida pela expressão (4.30) é assistoticamente distribuída, como uma variável aleatória com distribuição de probabilidade Qui-quadrado com  $m - p - q$  graus de liberdade.*

Através de experimentos de Monte Carlo, Monti (1994) compara o nível de significância e o poder dos testes baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$ , nos processos  $AR(1)$  e  $MA(1)$ , considerando  $n = 100$ ,  $m \in \{7, 10, 15, 20\}$  e  $\phi_1, \theta_1 \in \{0, 1; 0, 4; 0, 7; 0, 9\}$ . Este artigo mostra que a estatística  $Q_{MT}(\cdot)$  não é sensível a mudanças no valor de  $m$  como acontece com  $Q_{LB}(\cdot)$ . O artigo Kwan e Wu (1997) investiga o comportamento da estatística  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$  quanto ao nível de significância empírico e o poder empírico destes testes para pequenos tamanhos de amostra ( $n \in \{50, 75, 100\}$ ) e  $2 \leq m \leq 20$ . O artigo Kwan e Wu (1997) indica que o nível de significância empírico pode ser afetado com os diferentes valores de  $m$  e que o poder empírico destas estatísticas são similares para determinados valores de  $m$ .

## 4.4 $Q_{PR}$ DE PEÑA-RODRÍGUEZ

O artigo Peña e Rodríguez (2002) propõe um teste portmanteau baseado em uma nova estatística de teste. As simulações de Monte Carlo mostram que, dependendo do modelo e do tamanho amostral, este teste é mais poderoso do que os propostos por Box e Pierce (1970), Ljung e Box (1978) e Monti (1994). O teste é baseado na  $m$ -ésima raiz do determinante da  $m$ -ésima matriz de autocorrelação. A estatística proposta é dada por

$$Q_{PR}(m) = n \left[ 1 - |R_m|^{1/m} \right], \quad (4.33)$$

onde  $|R_m|$  é o determinante da matriz  $R_m$  de ordem  $(m + 1) \times (m + 1)$  das funções de autocorrelações residuais amostrais, dada por

$$R_m \equiv (r_l)_{l=0}^m = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & \cdots & r_m \\ r_1 & 1 & \cdots & r_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_m & r_{m-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

onde  $r_l = \sqrt{\frac{n+2}{n-l}} \hat{\rho}_{\hat{\varepsilon}}(l)$ , para  $l = 1, \dots, m$ , onde  $\hat{\rho}_{\hat{\varepsilon}}(\cdot)$  é a função de autocorrelação amostral dos resíduos  $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=1}^n$ , definida pela expressão (4.5).

A distribuição assintótica da estatística de teste é uma combinação linear da distribuição  $\chi^2$  e pode ser aproximada por uma distribuição *Gama* (ver Teorema 4.8).

Para a obtenção da estatística  $Q_{PR}(\cdot)$ , dada na expressão (4.33), é necessário primeiro calcular o determinante da matriz  $R_m$ . Damos, a seguir, uma expressão recursiva para o cálculo deste determinante (ver expressão (4.37) para o valor da  $m$ -ésima raiz do determinante de  $R_m$ ), que será de grande utilidade nas aplicações e nas simulações apresentadas no Capítulo 6. Observe que a expressão (4.34) pode ser reescrita através da seguinte expressão recursiva

$$R_m = \begin{bmatrix} 1 & r^{(m)'} \\ r^{(m)} & R_{m-1} \end{bmatrix},$$

onde  $r^{(m)} = (r_1, \dots, r_m)'$  é o vetor das  $m$  primeiras componentes do vetor  $r$  definido na expressão (4.34). E esta pode ser reescrita como o produto das seguintes matrizes

$$R_m = \begin{bmatrix} I & r^{(m)} R_{m-1}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - r^{(m)'} R_{m-1}^{-1} r^{(m)} & r^{(m)} \\ 0 & R_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ R_{m-1}^{-1} r^{(m)'} & I \end{bmatrix}.$$

Usando as propriedades de determinante de uma matriz particionada e lembrando que o determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes das matrizes, da igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} |R_m| &= \begin{vmatrix} 1 - r^{(m)'} R_{m-1}^{-1} r^{(m)} & r^{(m)} \\ 0 & R_{m-1} \end{vmatrix} = |R_{m-1}| \left[ 1 - r^{(m)'} R_{m-1}^{-1} r^{(m)} \right] = \\ &= |R_{m-1}| \left[ 1 - A_m^2 \right], \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde  $A_m^2 = r^{(m)'} R_{m-1}^{-1} r^{(m)}$  é o quadrado do coeficiente de correlação múltiplo no ajuste linear de  $\hat{\varepsilon}_t = \sum_{j=1}^m b_j \hat{\varepsilon}_{t-j} + u_t$ . Pelo uso recursivo da expressão (4.35), temos que

$$\begin{aligned}
|R_m| &= (1 - A_m^2) |R_{m-1}| = (1 - A_m^2)(1 - A_{m-1}^2) |R_{m-2}| = \\
&= (1 - A_m^2)(1 - A_{m-1}^2)(1 - A_{m-2}^2) |R_{m-3}| = \cdots = \\
&= (1 - A_m^2)(1 - A_{m-1}^2) \cdots (1 - A_2^2) |R_1| = \\
&= (1 - A_m^2)(1 - A_{m-1}^2) \cdots (1 - A_2^2)(1 - A_1^2) |R_0|.
\end{aligned}$$

Então, como  $|R_0| = 1$ , temos que

$$|R_m| = \prod_{i=1}^m (1 - A_i^2). \quad (4.36)$$

Assim,

$$|R_m|^{1/m} = \left[ \prod_{i=1}^m (1 - r^{(i)'} R_{i-1}^{-1} r^{(i)}) \right]^{1/m}. \quad (4.37)$$

Podemos obter uma segunda expressão para o cálculo de  $|R_m|^{1/m}$ , observando que  $1 - A_i^2 = SQR(1, i)/SQT$  onde  $SQR(1, i)$  é a soma do quadrado dos resíduos na decomposição ANOVA da regressão  $\hat{\varepsilon}_t = \sum_{j=1}^i b_j \hat{\varepsilon}_{t-j} + u_t$  e  $SQT = \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2$  é a soma dos quadrados total. Analogamente,  $1 - A_{i-1}^2 = SQR(1, i-1)/SQT$ . Desta forma,

$$\frac{1 - A_i^2}{1 - A_{i-1}^2} = \frac{SQR(1, i)}{SQR(1, i-1)} = 1 - \hat{\phi}_{\hat{\varepsilon}}^2(i, i),$$

onde  $\hat{\phi}_{\hat{\varepsilon}}^2(i, i) = [SQR(1, i-1) - SQR(1, i)]/SQR(1, i-1)$ ,  $i \geq 2$ , é o  $(i, i)$ -ésimo coeficiente de autocorrelação parcial dos resíduos. Para  $i = 1$ ,  $\hat{\phi}_{\hat{\varepsilon}}^2(1, 1) = A_1^2$ . Assim, da expressão (4.37), temos que

$$\begin{aligned}
|R_m| &= (1 - A_1^2)(1 - A_2^2) \cdots (1 - A_{m-1}^2)(1 - A_m^2) = \\
&= (1 - A_1^2) \frac{(1 - A_2^2)}{(1 - A_1^2)} \cdots \frac{(1 - A_{m-1}^2)}{(1 - A_{m-2}^2)} \frac{(1 - A_m^2)}{(1 - A_{m-1}^2)} \left[ (1 - A_1^2) \cdots (1 - A_{m-1}^2) \right] = \\
&= (1 - A_1^2)(1 - \hat{\phi}_{\hat{\varepsilon}}^2(2, 2)) \cdots (1 - \hat{\phi}_{\hat{\varepsilon}}^2(m, m)) \left[ (1 - A_1^2) \cdots \right. \\
&\quad \left. \cdots (1 - A_{m-1}^2) \right] = \\
&= (1 - A_1^2)(1 - \hat{\phi}_{\hat{\varepsilon}}^2(2, 2)) \cdots (1 - \hat{\phi}_{\hat{\varepsilon}}^2(m, m))(1 - A_1^2) \left[ \frac{(1 - A_2^2)}{(1 - A_1^2)} \cdots \right. \\
&\quad \left. \cdots \frac{(1 - A_{m-1}^2)}{(1 - A_{m-2}^2)} \right] \left[ (1 - A_1^2) \cdots (1 - A_{m-2}^2) \right] = \\
&= (1 - A_1^2)^2 (1 - \hat{\phi}_{\hat{\varepsilon}}^2(2, 2))^2 \cdots (1 - \hat{\phi}_{\hat{\varepsilon}}^2(m-1, m-1))^2 \\
&\quad (1 - \hat{\phi}_{\hat{\varepsilon}}^2(m, m)) \left[ (1 - A_1^2) \cdots (1 - A_{m-2}^2) \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - A_1^2)^3 (1 - \hat{\phi}_\varepsilon^2(2, 2))^3 \cdots (1 - \hat{\phi}_\varepsilon^2(m-2, m-2))^3 \\
&\quad (1 - \hat{\phi}_\varepsilon^2(m-1, m-1))^2 (1 - \hat{\phi}_\varepsilon^2(m, m)) \left[ (1 - A_1^2) \cdots \right. \\
&\quad \left. \cdots (1 - A_{m-3}^2) \right] = \\
&= \cdots = (1 - A_1^2)^m (1 - \hat{\phi}_\varepsilon^2(2, 2))^{m-1} \cdots (1 - \hat{\phi}_\varepsilon^2(m-2, m-2))^3 \\
&\quad (1 - \hat{\phi}_\varepsilon^2(m-1, m-1))^2 (1 - \hat{\phi}_\varepsilon^2(m, m)) \\
&= \prod_{i=1}^m (1 - \hat{\phi}_\varepsilon^2(i, i))^{m+1-i},
\end{aligned}$$

pois  $1 - \hat{\phi}_\varepsilon^2(1, 1) = \frac{1-A_1^2}{1-A_0^2} = 1 - A_1^2$ , já que  $A_0^2$  não está definido. Obtemos, então a seguinte expressão alternativa para a expressão (4.37):

$$|R_m|^{1/m} = \prod_{i=1}^m \left[ 1 - \hat{\phi}_\varepsilon^2(i, i) \right]^{(m+1-i)/m}.$$

**Observação:** Neste trabalho utilizamos a expressão (4.37) para o cálculo de  $|R_m|^{1/m}$ .

O seguinte teorema determina a distribuição assintótica de  $Q_{PR}(\cdot)$ . Sua demonstração pode ser encontrada em Peña e Rodríguez (2002).

**Teorema 4.8** *Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  o processo ARIMA( $p, d, q$ ), com média  $\mu = 0$ , dado pela expressão (2.7). Se o modelo é corretamente identificado, a estatística  $Q_{PR}(\cdot)$  definida pela expressão (4.33), é assintoticamente distribuída como  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{1,i}^2$ , onde  $\chi_{1,i}^2$ , para  $1 \leq i \leq m$ , são variáveis aleatórias Qui-quadradas, com 1 grau de liberdade, independentes. Os valores reais  $\lambda_i$ , para  $1 \leq i \leq m$ , são os autovalores da matriz  $(I - Y_m V_m^{-1} Y_m') W_m$ , onde  $W_m$  é uma matriz diagonal dada por*

$$W_m = \text{diag}(w_m(1), \dots, w_m(m)), \quad \text{com} \quad w_m(i) = \frac{m-i+1}{m},$$

para  $i = 1, \dots, m$ . A matriz  $I$  é a matriz identidade de ordem  $m \times m$ ,  $V_m$  é a matriz de informação dos parâmetros  $\phi$  e  $\theta$  e  $Y_m$  é uma matriz de ordem  $m \times (p+q)$ , com elementos  $\psi_i$  e  $\pi_j$  definidos por  $\Phi(\mathcal{B})^{-1} = \sum_{i \geq 0} \phi_i B^i$  e  $\Theta(\mathcal{B})^{-1} = \sum_{j \geq 0} \pi_j B^j$ .

**Observação:** Pela dificuldade de se calcular os autovalores da matriz  $(I - Y_m V_m^{-1} Y_m') W_m$ , Peña e Rodríguez (2002) aproximam a distribuição exata de  $Q_{PR}(\cdot)$ , dada no Teorema 4.8, por uma distribuição Gama - denotada por  $\mathcal{G}(g_1, g_2)$ . Os parâmetros  $g_1$  e  $g_2$  são dados por (ver seção 3.2 de Peña e Rodríguez (2002))

$$g_1 = \frac{3m[(m+1) - 2(p+q)]^2}{2[2(m+1)(2m+1) - 12m(p+q)]}$$



e (4.38)

$$g_2 = \frac{3m[(m+1) - 2(p+q)]}{2(m+1)(2m+1) - 12m(p+q)},$$

(ver Anexo B para os cálculos que obtém estes parâmetros).

Observe que  $g_1 = 2^{-1} g_2[(m+1) - 2(p+q)]$ . Então, a esperança e a variância de  $\mathcal{G}(g_1, g_2)$  são dados respectivamente, por

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{G}(g_1, g_2)\right) = \frac{g_1}{g_2} = \frac{(m+1)}{2} - (p+q)$$

e

$$Var\left(\mathcal{G}(g_1, g_2)\right) = \frac{g_1}{g_2^2} = \frac{(m+1)(2m+1) - 6m(p+q)}{2}.$$

O artigo Peña e Rodrigues (2000) faz um estudo comparativo do nível de significância, no processo  $AR(1)$ , e do poder dos testes, nos processos  $AR(1)$  e  $MA(1)$ , baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$ , dadas, respectivamente, pelas expressões (4.29), (4.30) e (4.33). Este artigo mostra a adequação da aproximação citada na observação acima.

**Observação:** A distribuição de probabilidade das estatísticas  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  propostas, respectivamente, por Monti (1994) e Peña e Rodríguez (2002) para os processos  $ARFIMA(p, d, q)$  ainda não foram derivadas até o presente momento. Aqui, neste trabalho, utilizamos uma idéia heurística: consideramos que a distribuição de probabilidade da estatística  $Q_{MT}(\cdot)$  é uma Qui-quadrado com  $m - (p + q + 1)$  graus de liberdade, tendo em vista que agora nestes processos temos mais um parâmetro a ser estimado além dos parâmetros autoregressivos e médias móveis. Pela mesma razão, a estatística  $Q_{PR}(\cdot)$  tem uma distribuição de probabilidade *Gama* com parâmetros  $\tilde{g}_1$  e  $\tilde{g}_2$  dados por

$$\tilde{g}_1 = \frac{3m[(m+1) - 2(p+q+1)]^2}{2[2(m+1)(2m+1) - 12m(p+q+1)]}$$

e (4.39)

$$\tilde{g}_2 = \frac{3m[(m+1) - 2(p+q+1)]}{2(m+1)(2m+1) - 12m(p+q+1)}.$$

Observe que os parâmetros  $\tilde{g}_1$  e  $\tilde{g}_2$  são os mesmos parâmetros  $g_1$  e  $g_2$  dados pela expressão (4.38), com a mudança de que onde era  $p + q$  naquela expressão, consideramos agora  $p + q + 1$ .

# Capítulo 5

## SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos o método de simulação de um processo  $ARFIMA(p, d, q)$  e a estimação dos seus parâmetros através dos diversos métodos apresentados no Capítulo 3. Após a realização dessas estimativas calculamos as estatísticas de teste  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$ , dadas, respectivamente, pelas expressões (4.29), (4.30) e (4.33) e obtemos o nível de significância empírico dos testes baseados nestas estatísticas. Apresentamos nas Seções 5.1, 5.2 e 5.3 os resultados das simulações dos processos  $ARFIMA(0, d, 0)$ ,  $ARFIMA(1, d, 0)$  e  $ARFIMA(0, d, 1)$ , respectivamente. Apesar de introduzirmos no Capítulo 4 a estatística de teste  $Q_{BP}(\cdot)$ , não a incluiremos neste trabalho porque um estudo semelhante ao que fizemos, comparando  $Q_{BP}(\cdot)$  e  $Q_{LB}(\cdot)$  já foi realizado por Reisen *et al.* (2003).

Os programas de simulação foram desenvolvidos na linguagem Fortran Workstation 4.0 para gerar 500 amostras de tamanho  $n = 1000$  de processos  $ARFIMA(0, d, 0)$ ,  $ARFIMA(1, d, 0)$  e  $ARFIMA(0, d, 1)$ . Utilizamos, também, algumas subrotinas da biblioteca IMSL.

**Observação:** Veja na Definição 3.1 do processo  $ARFIMA(p, d, q)$  que a expansão binomial, dada pela expressão (3.2), é uma série numérica, o que é impossível de se obter computacionalmente. Para contornar esse problema computacional, truncamos essa série em um valor limite  $r$  menor do que o tamanho da amostra  $n$ , obtendo

$$\nabla_r^d(\mathcal{B}) = \sum_{k=0}^r \binom{d}{k} (-\mathcal{B})^k. \quad (5.1)$$

Conforme Li e McLeod (1986), o “novo” modelo obtido é estacionário para  $r \geq 0$ , pois as raízes de  $\nabla_r^d(\mathcal{B}) = 0$  estão fora do círculo unitário (ver Henrici (1974), página 462). Neste trabalho utilizamos  $r = 999$ . Baillie *et al.* (1996)

também utilizam um valor de  $r$  dessa ordem.

Para simular amostras de um processo  $ARFIMA(p, d, q)$ , utilizamos o método descrito por Hosking (1982).

As etapas para a simulação de amostras de tamanho  $n$  de um processo  $ARFIMA(0, d, 0)$  são as seguintes:

- I. Gerar, através da subrotina RNNOR, uma variável aleatória  $N(0,1)$ , com  $n$  observações, para simular um processo ruído branco  $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  dado na Definição 2.16;
- II. Calcular a função de autocorrelação parcial através das equações

$$\phi_Y(t, t) = \frac{d}{t-d} \quad \text{e} \quad \phi_Y(t, j) = \phi_Y(t-1, j) - \phi_Y(t, t)\phi_Y(t-1, t-j),$$

para  $j = 1, 2, \dots, t-1$  e  $t = 1, 2, \dots, n$ , dadas por Hosking (1984);

- III. Calcular a média e a variância da variável aleatória  $Y_t$  dadas por

$$m_t = \sum_{j=1}^t \phi_X(t, j)X_{t-j} \quad \text{e} \quad v_t = (1 - \phi_X(t, t)^2)v_{t-1},$$

onde  $v_0 = \sigma_\epsilon^2 = 1$ , para  $t = 1, 2, \dots, n-1$ ;

- IV. Gerar uma variável aleatória  $Y_t$ , com distribuição Normal com média  $m_t$  e variância  $v_t$ , para  $t = 1, 2, \dots, n-1$ .

Assim, obtemos uma amostra  $\{Y_t\}_{t=1}^n$  do processo  $ARFIMA(0, d, 0)$  dado por  $(1 - \mathcal{B})^d Y_t = \epsilon_t$ . Uma série temporal (amostra)  $\{X_t\}_{t=1}^n$  é obtida de um processo  $ARFIMA(p, d, q)$  dado por  $\Phi(\mathcal{B})X_t = \Theta(\mathcal{B})Y_t$ , se a seguinte etapa é realizada após as etapas I a IV acima.

- V. Gerar  $X_t$  pela seguinte equação recursiva:

$$X_t = \sum_{j=1}^p \phi_X(j)X_{t-j} - \sum_{j=1}^q \theta_j Y_{t-j} + Y_t, \quad \text{para} \quad t = 1, \dots, n.$$

Após simular um processo  $ARFIMA(p, d, q)$ , as seguintes etapas devem ser realizados para se estimar os seus parâmetros com o objetivo de encontrar os resíduos  $\{\hat{\epsilon}_t\}_{t=1}^{n-10}$ . Posteriormente, desejamos calcular os níveis de significância empíricos das estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$ , dadas, respectivamente, pelas expressões (4.29), (4.30) e (4.33), quando utilizamos os estimadores  $\hat{d}_{GPH}$ ,  $\hat{d}_{sp}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  ou  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  e  $\hat{d}_{FT}$  descritos no Capítulo 3.

- VI.** Estimar o *parâmetro de diferenciação*  $d$  através dos estimadores  $\hat{d}_{GPH}$ ,  $\hat{d}_{sp}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,7)}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  e  $\hat{d}_{FT}$ , descritos no Capítulo 3. Quando utilizamos o estimador proposto por Fox e Taqqu (1986) para obtermos os níveis de significância empíricos das estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$ , a etapa VIII, dada a seguir para estimar os coeficientes dos polinômios  $\Phi(\cdot)$  e  $\Theta(\cdot)$  não é realizada, pois este método obtém estas estimativas simultaneamente ao estimar o parâmetro  $d$ ;
- VII.** Diferenciar a série original para se obter  $\{U_t\}_{t=1}^{n-10}$  um processo *ARMA*  $(p, q)$ , isto é, calcular a seguinte expressão

$$U_t = \nabla_{999}^{\hat{d}_i}(\mathcal{B})X_t = \sum_{k=0}^{999} \binom{\hat{d}_i}{k} (-1)^k X_{t-k}, \quad i \in \{GPH, sp, R, FT\};$$

- VIII.** Estimar os coeficientes dos polinômios  $\Phi(\cdot)$  e  $\Theta(\cdot)$ , dados pela expressão (2.5), através da subrotina NSLSE.

Para obtermos o nível de significância empírico (erro tipo I) dos testes baseados nas estatística  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  realizamos as seguinte etapas:

- IX.** Após obter as estimativas do processo *ARFIMA* $(p, d, q)$ , estimar os resíduos  $\hat{\varepsilon}_t$  através da expressão

$$\hat{\varepsilon}_t = \frac{\hat{\Phi}(\mathcal{B})}{\hat{\Theta}(\mathcal{B})}U_t,$$

onde  $U_t$  é a série diferenciada obtida na etapa VII;

- X.** Calcular  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  através de suas respectivas expressões (4.29), (4.30) e (4.33). Observe que, para o cálculo de  $Q_{PR}(\cdot)$ , é necessário inverter matriz e multiplicar matriz por vetor. Para realizar estes procedimentos foram utilizadas as subrotinas LINDS e MURRV da biblioteca IMSL, respectivamente;
- XI.** Calcular os graus de liberdade da distribuição de probabilidade de cada estatística. Quando a série temporal  $\{X_t\}_{t=1}^n$  for diferenciada pelos estimadores  $\hat{d}_{GPH}$ ,  $\hat{d}_{sp}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$ ,  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$  têm distribuição de probabilidade Qui-quadrado com  $m - (p + q)$  graus de liberdade e  $Q_{PR}(\cdot)$  tem distribuição de probabilidade  $\mathcal{G}(g_1, g_2)$ , com  $g_1$  e  $g_2$  dados pela expressão (4.38) e quando a série temporal  $\{X_t\}_{t=1}^n$  foi diferenciada pelo estimador  $\hat{d}_{FT}$ ,  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$  têm distribuição de probabilidade Qui-quadrado com  $m - (p + q + 1)$  graus de liberdade e  $Q_{PR}(\cdot)$  tem distribuição de probabilidade  $\mathcal{G}(g_1, g_2)$ , com  $\tilde{g}_1$  e  $\tilde{g}_2$  dados pela expressão (4.39);

- XII.** Fixar um nível de significância empírico  $\alpha$  (utilizamos, neste trabalho  $\alpha \in \{0,01; 0,05; 0,10\}$ ) e calcular o ponto crítico para cada estatística, ou seja, o valor no qual nos baseamos para decidir se rejeitamos ou não a hipótese nula  $H_0$ . A subrotina CHIIN fornece o ponto crítico para a distribuição de probabilidade Qui-quadrado e a função GAMIN para a distribuição de probabilidade *Gama*. Estas duas subrotinas fazem parte da biblioteca IMSL;
- XIII.** Como sabemos qual o verdadeiro processo que foi gerado (*ARFIMA*  $(0, d, 0)$ , *ARFIMA*  $(1, d, 0)$  ou *ARFIMA*  $(0, d, 1)$ ), podemos contar quantas das 1000 amostras geradas foram rejeitadas erroneamente pelos testes *portmanteau* baseado nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$ , isto é, calcular o nível de significância empírico dos testes quando a série temporal foi diferenciada por  $\hat{d}_{GPH}$ ;
- XIV.** Como descrevemos os procedimentos para obter o nível de significância empírico dos testes quando a série temporal for diferenciada por  $\hat{d}_{GPH}$ , é necessário repetir as etapas VII-XIII outras 4 vezes para se obter o nível de significância empírico dos testes quando a série temporal for diferenciada por  $\hat{d}_{sp}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,7)}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  e  $\hat{d}_{FT}$ , observando que para este último estimador não é realizada a etapa VIII.

### Observações:

(a) Para estimar os parâmetros do processo *ARFIMA*  $(p, d, q)$ , as subrotinas mencionadas utilizam métodos numéricos de convergência. As amostras para as quais esses limites de convergência não foram atingidos, foram descartadas.

(b) Como o estimador de Fox e Taqqu (1986) estima simultaneamente todos os parâmetros do processo *ARFIMA*  $(p, d, q)$ , as estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$  têm distribuição de probabilidade Qui-quadrado com  $m - (p + q + 1)$  graus de liberdade e  $Q_{PR}(\cdot)$  tem distribuição de probabilidade *Gama* com parâmetros dados pela expressão (4.39). Para obtermos as estimativas dos coeficientes de  $\Phi(\cdot)$  e  $\Theta(\cdot)$  quando estimamos  $d$  através dos outros métodos ( $\hat{d}_{GPH}$ ,  $\hat{d}_{sp}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$ ) precisamos diferenciar a série (que foi gerada como um processo *ARFIMA*  $(p, d, q)$ ) obtendo um processo *ARMA*  $(p, q)$ . Nestes casos, as estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$  têm distribuição de probabilidade Qui-quadrado com  $m - (p + q)$  graus de liberdade e  $Q_{PR}(\cdot)$  tem distribuição de probabilidade *Gama* com parâmetros dados pela expressão (4.38).

Nas Seções 5.1, 5.2, 5.3 a seguir, apresentamos resultados das simulações dos processos *ARFIMA*  $(0, d, 0)$ , *ARFIMA*  $(1, d, 0)$  e *ARFIMA*  $(0, d, 1)$ , respectivamente.

## 5.1 ARFIMA(0, d, 0)

Nesta seção apresentamos os resultados das simulações do processo *ARFIMA*(0,  $d$ , 0). Foram gerados processos com  $d = 0, 2$  e  $d = 0, 4$ .

Nas Tabelas 5.1 a 5.3, a seguir, apresentamos os níveis de significância empírico dos testes baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  dadas, respectivamente, pelas expressões (4.29), (4.30) e (4.33), para  $\alpha \in \{0, 01; 0, 05; 0, 10\}$  e  $m \in \{2; 5; 10; 50; 100\}$ . Na Tabela 5.1 estão os casos em que a série originalmente gerada pelo procedimento descrito neste capítulo, foi diferenciada pelos estimadores  $\hat{d}_{GPH}$  e  $\hat{d}_{sp}$ . Na Tabela 5.2 estão os casos em que a série foi diferenciada pelos estimadores  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  e na Tabela 5.3 estão os casos em que a série foi diferenciada pelo estimador  $\hat{d}_{FT}$ , descritos no Capítulo 3. Por questão de estética dividimos os resultados em três tabelas.

**Tabela 5.1:** Nível de significância empírico dos testes baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  quando utilizados os métodos  $\hat{d}_{GPH}$  e  $\hat{d}_{sp}$ .

Método	$m$	$\alpha = 0, 01$			$\alpha = 0, 05$			$\alpha = 0, 10$		
		$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
$d = 0, 2$										
$\hat{d}_{GPH}$	2	0,546	0,552	0,564	0,634	0,632	0,638	0,684	0,682	0,682
	5	0,512	0,520	0,558	0,590	0,596	0,638	0,662	0,668	0,682
	10	0,498	0,492	0,540	0,552	0,566	0,620	0,626	0,618	0,670
	50	0,382	0,352	0,510	0,478	0,478	0,586	0,538	0,522	0,630
	100	0,350	0,304	0,514	0,450	0,412	0,582	0,512	0,466	0,634
$\hat{d}_{sp}$	2	0,498	0,502	0,506	0,596	0,592	0,626	0,660	0,656	0,676
	5	0,472	0,470	0,518	0,568	0,554	0,608	0,614	0,616	0,650
	10	0,436	0,430	0,496	0,526	0,514	0,576	0,586	0,574	0,626
	50	0,320	0,296	0,402	0,422	0,408	0,472	0,490	0,482	0,516
	100	0,268	0,232	0,382	0,420	0,356	0,456	0,478	0,442	0,510
$d = 0, 4$										
$\hat{d}_{GPH}$	2	0,592	0,594	0,622	0,676	0,674	0,696	0,730	0,734	0,748
	5	0,570	0,568	0,620	0,654	0,656	0,690	0,706	0,706	0,742
	10	0,510	0,522	0,596	0,602	0,608	0,682	0,666	0,672	0,718
	50	0,374	0,356	0,542	0,496	0,476	0,632	0,562	0,538	0,688
	100	0,346	0,304	0,560	0,446	0,398	0,632	0,500	0,474	0,678
$\hat{d}_{sp}$	2	0,494	0,494	0,520	0,604	0,604	0,628	0,670	0,666	0,666
	5	0,468	0,468	0,518	0,582	0,580	0,614	0,640	0,636	0,670
	10	0,416	0,402	0,500	0,534	0,528	0,602	0,594	0,598	0,652
	50	0,276	0,260	0,378	0,406	0,386	0,482	0,484	0,460	0,548
	100	0,266	0,224	0,384	0,364	0,318	0,478	0,436	0,404	0,532

Observe que, na Tabela 5.1, em nenhuma situação os níveis de significância empíricos atingem os níveis de significância nominais ( $\alpha$ ). Observe ainda que os valores dos níveis de significância empíricos estão sempre acima dos nominais em qualquer uma das três estatísticas e para qualquer valor de  $m$ , independente do valor de  $d$ .

**Tabela 5.2:** Nível de significância empírico dos testes baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  quando utilizado o método  $\hat{d}_R$  com  $g(n) = n^{0,7}$  e  $g(n) = n^{0,8}$ .

Método	$m$	$\alpha = 0,01$			$\alpha = 0,05$			$\alpha = 0,10$		
		$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
$d = 0,2$										
$\hat{d}_R^{(0,7)}$	2	0,154	0,156	0,172	0,254	0,256	0,262	0,338	0,332	0,346
	5	0,126	0,126	0,156	0,194	0,192	0,238	0,274	0,270	0,310
	10	0,104	0,098	0,122	0,170	0,170	0,214	0,244	0,238	0,262
	50	0,074	0,040	0,090	0,150	0,124	0,176	0,200	0,182	0,234
	100	0,076	0,030	0,132	0,134	0,108	0,216	0,210	0,170	0,268
$\hat{d}_R^{(0,8)}$	2	0,028	0,024	0,058	0,102	0,100	0,132	0,170	0,158	0,212
	5	0,030	0,028	0,036	0,090	0,098	0,098	0,144	0,150	0,152
	10	0,028	0,022	0,030	0,094	0,090	0,094	0,148	0,154	0,150
	50	0,012	0,010	0,026	0,080	0,066	0,084	0,140	0,126	0,144
	100	0,024	0,010	0,096	0,098	0,062	0,170	0,154	0,124	0,232
$d = 0,4$										
$\hat{d}_R^{(0,7)}$	2	0,368	0,350	0,382	0,524	0,518	0,540	0,612	0,608	0,616
	5	0,344	0,296	0,376	0,480	0,452	0,520	0,564	0,544	0,592
	10	0,278	0,240	0,316	0,424	0,376	0,462	0,520	0,486	0,548
	50	0,184	0,118	0,120	0,318	0,236	0,218	0,412	0,314	0,272
	100	0,188	0,068	0,062	0,306	0,168	0,122	0,384	0,270	0,186
$\hat{d}_R^{(0,8)}$	2	0,254	0,232	0,272	0,456	0,440	0,484	0,594	0,576	0,596
	5	0,202	0,170	0,252	0,402	0,362	0,434	0,506	0,480	0,552
	10	0,168	0,142	0,184	0,318	0,282	0,358	0,418	0,386	0,472
	50	0,102	0,054	0,050	0,236	0,168	0,116	0,336	0,254	0,196
	100	0,118	0,038	0,032	0,218	0,126	0,080	0,302	0,204	0,126

Na Tabela 5.2, quando a série foi diferenciada pelo estimador  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  na etapa **VII**, os níveis de significância empíricos se apresentam mais baixos do que na Tabela 5.1. Quando a série foi diferenciada por  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  os níveis de significância empíricos são ainda mais baixos do que quando a série foi diferenciada por  $\hat{d}_R^{(0,7)}$ , mas poucos casos atingem os níveis nominais desejados, independente do tamanho de  $m$ . Observe também que, nas três estatísticas, os

níveis empíricos diminuem quando  $m$  aumenta e estes, em geral, são menores para  $Q_{LB}(\cdot)$ . Uma questão que fica como sugestão para próximos trabalhos é investigar se aumentando o valor de  $g(n)$  os níveis empíricos diminuiriam mais.

**Tabela 5.3:** Nível de significância empírico dos testes baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  quando utilizado o método  $\hat{d}_{FT}$ .

Método	$m$	$\alpha = 0,01$			$\alpha = 0,05$			$\alpha = 0,10$		
		$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
$\hat{d}_{FT}$		$d = 0,2$								
	2	0,018	0,016	0,028	0,054	0,060	0,102	0,114	0,116	0,172
	5	0,012	0,016	0,024	0,058	0,056	0,056	0,122	0,120	0,108
	10	0,014	0,012	0,024	0,056	0,060	0,042	0,100	0,106	0,112
	50	0,010	0,004	0,024	0,068	0,050	0,090	0,108	0,096	0,154
	100	0,020	0,008	0,118	0,078	0,060	0,212	0,138	0,114	0,266
		$d = 0,4$								
	2	0,008	0,008	0,022	0,050	0,052	0,098	0,112	0,110	0,172
	5	0,016	0,014	0,024	0,062	0,064	0,068	0,110	0,108	0,120
	10	0,012	0,016	0,014	0,062	0,064	0,062	0,108	0,106	0,112
	50	0,024	0,018	0,024	0,064	0,048	0,078	0,132	0,112	0,136
	100	0,032	0,010	0,096	0,092	0,054	0,162	0,144	0,114	0,212

A Tabela 5.3, onde os níveis empíricos foram obtidos após diferenciarmos a série original pela estimativa obtida por  $\hat{d}_{FT}$ , é a que apresenta os níveis de significância empíricos mais próximos dos níveis nominais para as três estatísticas de teste. Entretanto, para a estatística  $Q_{PR}(\cdot)$ , os níveis empíricos estão um pouco acima dos níveis nominais.

Quando a série original foi diferenciada pelos estimadores  $\hat{d}_{GPH}$ ,  $\hat{d}_{sp}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  (ver Tabelas 5.1 e 5.2) os níveis de significância nominais diminuem à medida que  $m$  aumenta, sendo que a estatística  $Q_{PR}(\cdot)$  é a que menos sofre com essa mudança. No caso da Tabela 5.3, os níveis de significância nominais das estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  aumentam à medida que  $m$  aumenta, sendo que  $Q_{PR}(\cdot)$  é a que mais sofre, enquanto que para a estatística  $Q_{MT}(\cdot)$  os níveis mudam pouco com o crescimento do valor de  $m$ .

Com o intuito de mostrarmos as características das estimativas de cada uma das estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  calculamos a média, o desvio



padrão e o erro quadrático médio. Nas Tabelas 5.4 à 5.6, a seguir, comparamos a média empírica com o valor esperado teórico (V.E.) da distribuição de probabilidade das estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$ , respectivamente. Apresentamos também o desvio padrão (D.Padrão) e o erro quadrático médio (EQM), obtidos quando diferenciamos a série original pelos estimadores descritos no Capítulo 3.

**Tabela 5.4:** Estatísticas das estimativas de  $Q_{LB}(\cdot)$ .

Método	V.E.	$d = 0, 2$			$d = 0, 4$		
		Média	D.Padrão	EQM	Média	D.Padrão	EQM
$\hat{d}_{GPH}$	2	32,57	64,90	5250,86	42,44	125,06	17376,92
	5	47,12	106,15	13446,69	69,54	268,45	76702,47
	10	59,31	144,02	24193,95	101,47	480,68	240811,20
	50	113,92	264,94	82981,60	279,41	1883,72	3619164,00
	100	178,49	375,86	172779,50	485,41	3541,58	12752930,00
$\hat{d}_{sp}$	2	26,13	52,54	3427,18	27,33	59,62	4272,25
	5	38,10	80,23	7861,31	42,16	104,39	12620,35
	10	47,39	97,04	11625,96	57,10	154,59	27065,96
	50	91,52	110,89	20612,17	134,11	400,36	177847,30
	100	149,13	136,65	40815,09	225,69	675,30	505869,50
$\hat{d}_R^{(0,7)}$	2	5,18	7,27	77,48	9,63	10,02	185,47
	5	7,85	7,82	119,64	14,08	11,70	323,92
	10	12,95	9,14	245,93	19,95	13,91	575,25
	50	54,48	16,32	3212,63	65,05	31,92	5196,52
	100	105,47	22,28	11577,67	120,42	52,43	17147,59
$\hat{d}_R^{(0,8)}$	2	2,57	2,70	12,92	6,61	5,12	64,63
	5	5,53	3,93	43,82	10,82	7,14	159,41
	10	10,68	5,35	138,46	16,57	9,93	359,81
	50	51,36	10,66	2730,57	60,28	25,76	4248,13
	100	101,87	15,91	10589,61	114,30	42,06	14738,67
$\hat{d}_{FT}$	1	1,26	1,51	3,39	1,23	1,48	2,89
	4	4,17	2,97	24,50	4,22	2,95	23,26
	9	9,13	4,41	99,27	9,12	4,57	96,95
	49	49,62	10,04	2543,07	49,79	11,69	2576,17
	99	99,97	15,37	10189,31	100,84	17,99	10410,97

Observe que, na Tabela 5.4, quando a série foi diferenciada pelos estimativas obtidas pelos estimadores  $\hat{d}_{GPH}$ ,  $\hat{d}_{sp}$  e  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  as médias empíricas das estimativas de  $Q_{LB}(\cdot)$  não ficaram próximas dos valores esperados. Quando foi utilizado a estimativa obtida por  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  a média empírica se aproximou do valor esperado, somente quando  $d = 0, 2$ . Somente para o caso em que foi utilizada a estimativa obtida por  $\hat{d}_{FT}$ , a média empírica se aproximou do valor

esperado independente do valor de  $d$ . Observe ainda que o desvio padrão e o erro quadrático médio das estimativas de  $Q_{LB}(\cdot)$  são sempre menores no caso em que foi utilizado a estimativa obtida por  $\hat{d}_{FT}$ , independente do valor de  $d$ .

**Tabela 5.5:** Estatísticas das estimativas de  $Q_{MT}(\cdot)$ .

Método	V.E.	$d = 0, 2$			$d = 0, 4$		
		Média	D.Padrão	EQM	Média	D.Padrão	EQM
$\hat{d}_{GPH}$	2	28,65	47,95	3104,12	34,98	78,68	7374,45
	5	35,29	52,07	3936,68	42,21	84,87	8936,47
	10	41,38	53,21	4522,11	48,71	87,11	9906,91
	50	81,86	55,50	9741,79	89,23	89,81	15940,07
	100	132,12	57,03	20648,78	139,73	89,26	27364,29
$\hat{d}_{sp}$	2	22,62	39,30	2044,16	23,34	43,84	2444,58
	5	28,21	42,17	2559,37	29,35	48,91	3225,05
	10	33,76	42,81	2955,09	35,12	50,82	3782,33
	50	73,81	44,11	7359,92	75,32	53,75	8497,10
	100	124,06	45,75	17430,98	125,83	53,96	18638,57
$\hat{d}_R^{(0,7)}$	2	5,00	6,71	67,97	8,95	8,86	151,51
	5	7,67	7,22	107,80	12,73	9,41	240,47
	10	12,71	8,22	223,98	18,06	10,53	422,53
	50	53,46	12,69	2997,45	58,86	14,70	3632,75
	100	103,64	16,81	10981,45	109,39	17,77	12193,90
$\hat{d}_R^{(0,8)}$	2	2,56	2,73	12,99	6,31	4,75	57,38
	5	5,55	3,96	44,33	10,14	6,10	132,04
	10	10,67	5,24	137,14	15,39	7,43	279,75
	50	51,25	10,13	2708,17	56,02	12,40	3247,01
	100	101,38	14,34	10443,45	106,52	15,84	11512,63
$\hat{d}_{FT}$	1	1,27	1,54	3,50	1,23	1,47	2,84
	4	4,20	2,99	24,92	4,23	2,92	23,15
	9	9,19	4,38	100,05	9,11	4,50	96,16
	49	49,75	9,70	2548,75	49,28	10,24	2493,86
	99	99,89	14,07	10135,97	99,68	14,19	10056,87

Analogamente ao que ocorreu para as estimativas de  $Q_{LB}(\cdot)$  (ver Tabela 5.3), para as estimativas de  $Q_{MT}(\cdot)$  as médias empíricas se aproximaram dos valores esperados somente quando foram utilizadas as estimativas obtidas por  $\hat{d}_{FT}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  quando  $d = 0, 2$ . Novamente, as estimativas da estatística de teste, agora  $Q_{MT}(\cdot)$ , apresentaram menor desvio padrão e menor erro quadrático médio quando a série foi diferenciada pela estimativa obtida por  $\hat{d}_{FT}$ .

**Tabela 5.6:** Estatísticas das estimativas de  $Q_{PR}(\cdot)$ .

Método	V.E.	$d = 0, 2$			$d = 0, 4$		
		Média	D.Padrão	EQM	Média	D.Padrão	EQM
$\hat{d}_{GPH}$	1,5	25,65	44,23	2599,88	31,32	71,58	6069,42
	3,0	30,22	47,24	3128,40	36,09	74,48	6809,69
	5,5	34,98	49,30	3635,01	41,19	76,24	7464,10
	25,5	65,58	62,54	8177,93	73,39	83,77	12330,10
	50,5	107,90	95,60	20722,24	121,39	123,82	29938,53
$\hat{d}_{sp}$	1,5	20,30	36,50	1733,86	20,82	39,61	1982,94
	3,0	23,96	38,75	2063,02	24,63	43,06	2437,28
	5,5	27,81	40,03	2361,68	28,68	45,17	2835,84
	25,5	50,89	44,20	4519,29	52,28	49,29	5115,85
	50,5	80,81	56,64	9699,82	82,44	57,40	10018,13
$\hat{d}_R^{(0,7)}$	1,5	4,29	6,31	56,52	7,77	7,99	117,90
	3,0	5,76	6,60	74,44	9,91	8,55	163,25
	5,5	8,03	6,93	109,22	12,49	8,87	224,76
	25,5	28,30	9,52	879,94	29,80	10,57	975,76
	50,5	55,40	15,06	3273,82	50,65	12,85	2689,32
$\hat{d}_R^{(0,8)}$	1,5	2,21	2,52	10,36	5,45	4,46	45,39
	3,0	3,47	2,81	18,59	7,38	4,82	71,88
	5,5	5,93	3,45	44,73	9,98	5,50	122,01
	25,5	26,05	6,86	715,27	27,44	7,88	793,26
	50,5	53,09	13,11	2969,44	48,74	11,13	2460,49
$\hat{d}_{FT}$	0,5	0,82	0,96	1,31	0,82	0,96	1,10
	2,0	2,23	1,71	7,01	2,24	1,72	6,36
	4,5	4,66	2,59	26,65	4,66	2,55	24,62
	24,5	25,45	6,53	680,25	24,74	6,42	633,62
	49,5	53,83	12,96	3043,79	51,31	12,53	2748,53

Os resultados apresentados na Tabela 5.6 mostram que também para as estimativas de  $Q_{PR}(\cdot)$  as médias empíricas estão próximas dos valores esperados nos casos em que a série foi diferenciada por  $\hat{d}_{FT}$ , independente do valor esperado e do valor de  $d$ . O mesmo pode ser dito quando a série foi diferenciada por  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  e  $d = 0, 2$ . Quando  $d = 0, 4$  estes valores estiveram próximos somente quando o valor esperado é igual 25,5 ou 50,5. Os menores valores para o desvio padrão e para o erro quadrático médio foram obtidos quando utilizamos  $\hat{d}_{FT}$ , a não ser quando o valor esperado é 49,5.

Os resultados das Tabelas 5.4 à 5.6 refletem aqueles obtidos nas Tabelas 5.1 à 5.3. Observe que, tanto para  $d = 0, 2$  quanto para  $d = 0, 4$ , para as três estatísticas ( $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$ ), as médias empíricas estão próximas do valor esperado de suas distribuições de probabilidade somente quando a série original foi diferenciada por  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  e  $\hat{d}_{FT}$ . Entretanto, para o caso  $\hat{d}_R^{(0,8)}$

o desvio padrão é maior do que para o caso  $\hat{d}_{FT}$ , o que levou os níveis de significância empíricos daquele caso não se aproximarem tanto dos níveis nominais como neste. Quando a série foi diferenciada por  $\hat{d}_{GPH}$ ,  $\hat{d}_{sp}$  e  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  as médias empíricas não se aproximaram do valor esperado das respectivas distribuições de probabilidade.

Objetivando explicar os resultados apresentados nas Tabelas 5.1 à 5.3 calculamos a média, o desvio padrão e o erro quadrático médio (EQM) das estimativas do parâmetro  $d$  obtidas pelos estimadores que introduzimos no Capítulo 3. A Tabela 5.7, a seguir, apresenta estas estatísticas.

**Tabela 5.7:** Estatísticas das estimativas do parâmetro  $d$ .

Método	$d = 0, 2$			$d = 0, 4$		
	Média	D.Padrão	EQM	Média	D.Padrão	EQM
$\hat{d}_{GPH}$	0,1915	0,1373	0,0189	0,4072	0,1455	0,0212
$\hat{d}_{sp}$	0,1630	0,1115	0,0138	0,3763	0,1123	0,0132
$\hat{d}_R^{(0,7)}$	0,1818	0,0478	0,0026	0,3392	0,0357	0,0050
$\hat{d}_R^{(0,8)}$	0,1846	0,0340	0,0014	0,3473	0,0276	0,0035
$\hat{d}_{FT}$	0,1960	0,0266	0,0007	0,3970	0,0268	0,0007

Em média, todos os estimadores obtiveram boas estimativas, sendo que, tanto para  $d = 0, 2$  quanto para  $d = 0, 4$ ,  $\hat{d}_{FT}$  obteve as melhores estimativas com menores desvio padrão e vício. Este resultado está de acordo com outros trabalhos que verificam o comportamento deste estimador no processo  $ARFIMA(0, d, 0)$  (ver Souza (2000)). As estimativas com maior erro quadrático médio foram obtidas por  $\hat{d}_{GPH}$ , para os dois valores de  $d$  investigados.

As Figuras 5.1 e 5.2, a seguir, mostram o box-plot das estimativas dos estimadores do parâmetro  $d$ , obtidas a partir do processo  $ARFIMA(0, d, 0)$  quando  $d = 0, 2$  e  $d = 0, 4$ , respectivamente. Observe que, em ambos os casos, as estimativas obtidas por  $\hat{d}_{FT}$  estão mais concentradas em torno do verdadeiro valor de  $d$ , seguido pelas estimativas obtidas por  $\hat{d}_R^{(0,8)}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,7)}$ ,  $\hat{d}_{sp}$  e  $\hat{d}_{GPH}$ . Entretanto, em média, as estimativas obtidas por  $\hat{d}_{GPH}$  estão mais próximas do verdadeiro valor de  $d$  do que as obtidas por  $\hat{d}_{sp}$ .

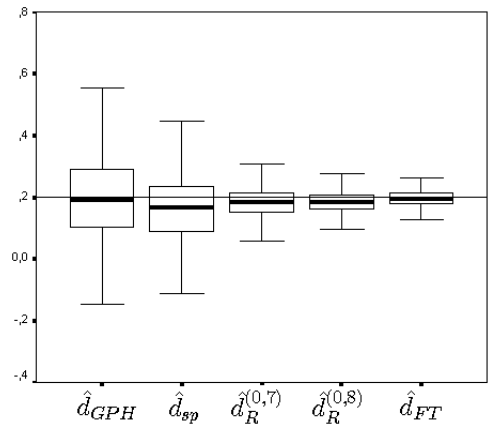


Figura 5.1: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $d = 0, 2$ .

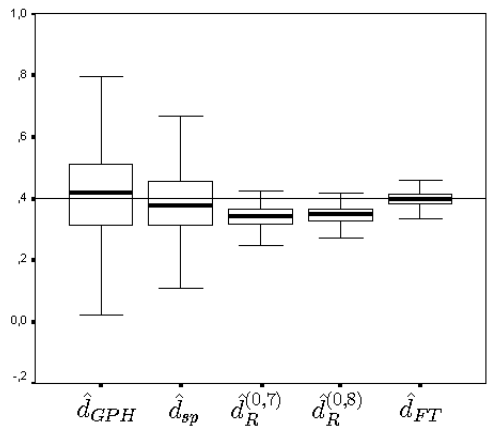


Figura 5.2: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $d = 0, 4$ .

Observe, nas Figuras 5.1 e 5.2 e nas Tabelas 5.1 à 5.3, a relação existente entre a variabilidade dos estimadores e os níveis de significância empíricos obtidos quando os diferentes métodos foram utilizados. No caso do estimador  $\hat{d}_{FT}$ , que teve a menor variabilidade das estimativas de  $d$  e o menor

erro quadrático médio (ver Figuras 5.1 e 5.2), foi onde ocorreram os melhores resultados. Já no caso do estimador  $\hat{d}_{GPH}$ , onde ocorreu a maior variabilidade e maior erro quadrático médio, obtivemos os piores resultados. Nos casos dos estimadores  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$ , quando  $d = 0,4$  as estimativas de  $d$ , em média, não foram tão boas quanto para  $d = 0,2$  ocasionando níveis empíricos maiores quando  $d = 0,4$ .

Observamos que, com os resultados desta seção, os níveis de significância dos testes baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  estão relacionados com a variabilidade dos métodos de estimação do parâmetro  $d$  que está sendo utilizado. Somente o estimador  $\hat{d}_{FT}$  se mostrou adequado, já que a variabilidade dos outros estimadores pode nos levar a rejeitar um modelo que pode ser adequado.

## 5.2 *ARFIMA*(1, $d$ , 0)

Nesta seção apresentamos os resultados das simulações do processo *ARFIMA* (1,  $d$ , 0). Foram gerados processos com  $d = 0,2$  e  $\phi_1 \in \{-0,9; -0,7; -0,5; -0,3; -0,1; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ .

Nas Tabelas 5.8 a 5.12, a seguir, apresentamos os níveis de significância empírico dos testes baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  para  $\alpha \in \{0,01; 0,05; 0,10\}$  e  $m \in \{5; 10; 50; 100\}$ . E estamos considerando os casos em que a série originalmente gerada pelo procedimento descrito neste capítulo, foi diferenciada pelos estimadores  $\hat{d}_{GPH}$ ,  $\hat{d}_{sp}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,7)}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  e  $\hat{d}_{FT}$ , descritos no Capítulo 3.

**Tabela 5.8:** Nível de significância empírico dos testes, utilizando o estimador  $\hat{d}_{GPH}$ , quando  $d = 0, 2$ .

$m$	$\phi_1$	$\alpha = 0, 01$			$\alpha = 0, 05$			$\alpha = 0, 10$		
		$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
5	-0,9	0,508	0,512	0,600	0,628	0,624	0,684	0,672	0,684	0,742
	-0,7	0,466	0,480	0,550	0,576	0,586	0,644	0,650	0,656	0,688
	-0,5	0,456	0,466	0,526	0,544	0,552	0,598	0,602	0,610	0,670
	-0,3	0,392	0,396	0,440	0,486	0,494	0,560	0,570	0,576	0,608
	-0,1	0,310	0,320	0,346	0,412	0,418	0,444	0,488	0,488	0,546
	0,1	0,250	0,254	0,270	0,350	0,366	0,366	0,452	0,456	0,458
	0,3	0,098	0,102	0,104	0,186	0,202	0,204	0,298	0,302	0,302
	0,5	0,028	0,040	0,044	0,108	0,108	0,122	0,182	0,188	0,192
	0,7	0,038	0,038	0,062	0,116	0,118	0,144	0,174	0,174	0,208
	0,9	0,318	0,350	0,478	0,540	0,554	0,656	0,662	0,678	0,748
10	-0,9	0,460	0,472	0,562	0,556	0,564	0,654	0,612	0,630	0,710
	-0,7	0,428	0,434	0,516	0,520	0,524	0,612	0,580	0,590	0,670
	-0,5	0,404	0,416	0,498	0,508	0,514	0,582	0,564	0,584	0,626
	-0,3	0,346	0,370	0,432	0,466	0,474	0,524	0,524	0,528	0,588
	-0,1	0,262	0,272	0,338	0,374	0,382	0,448	0,448	0,464	0,516
	0,1	0,210	0,228	0,284	0,332	0,334	0,376	0,416	0,424	0,456
	0,3	0,112	0,116	0,126	0,192	0,188	0,226	0,260	0,254	0,304
	0,5	0,040	0,048	0,048	0,108	0,120	0,124	0,168	0,180	0,190
	0,7	0,040	0,036	0,046	0,092	0,094	0,108	0,174	0,184	0,206
	0,9	0,240	0,246	0,392	0,428	0,438	0,600	0,564	0,586	0,678
50	-0,9	0,308	0,302	0,472	0,420	0,414	0,548	0,480	0,474	0,596
	-0,7	0,278	0,290	0,484	0,384	0,404	0,572	0,470	0,466	0,626
	-0,5	0,258	0,248	0,462	0,384	0,380	0,552	0,460	0,472	0,606
	-0,3	0,228	0,212	0,396	0,336	0,330	0,504	0,416	0,412	0,548
	-0,1	0,150	0,136	0,302	0,224	0,218	0,404	0,286	0,288	0,468
	0,1	0,112	0,102	0,280	0,192	0,180	0,370	0,284	0,288	0,434
	0,3	0,050	0,056	0,188	0,134	0,124	0,278	0,206	0,204	0,332
	0,5	0,032	0,020	0,130	0,082	0,080	0,232	0,144	0,152	0,296
	0,7	0,024	0,014	0,114	0,082	0,088	0,218	0,140	0,144	0,304
	0,9	0,114	0,084	0,172	0,264	0,226	0,348	0,368	0,352	0,458
100	-0,9	0,280	0,222	0,478	0,378	0,344	0,544	0,464	0,422	0,594
	-0,7	0,232	0,230	0,504	0,340	0,334	0,580	0,408	0,410	0,618
	-0,5	0,230	0,190	0,472	0,328	0,296	0,554	0,400	0,386	0,594
	-0,3	0,190	0,160	0,430	0,292	0,276	0,508	0,370	0,354	0,558
	-0,1	0,122	0,100	0,362	0,202	0,168	0,452	0,296	0,244	0,508
	0,1	0,098	0,066	0,336	0,180	0,150	0,406	0,242	0,232	0,454
	0,3	0,044	0,034	0,272	0,136	0,114	0,340	0,218	0,170	0,396
	0,5	0,034	0,014	0,244	0,076	0,054	0,334	0,132	0,102	0,402
	0,7	0,018	0,012	0,236	0,080	0,054	0,358	0,132	0,120	0,452
	0,9	0,094	0,054	0,340	0,210	0,176	0,508	0,314	0,282	0,614

**Tabela 5.9:** Nível de significância empírico dos testes, utilizando o estimador  $\hat{d}_{sp}$ , quando  $d = 0, 2$ .

$m$	$\phi_1$	$\alpha = 0, 01$			$\alpha = 0, 05$			$\alpha = 0, 10$		
		$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
5	-0,9	0,476	0,472	0,572	0,594	0,596	0,670	0,656	0,660	0,722
	-0,7	0,402	0,396	0,478	0,516	0,512	0,564	0,570	0,570	0,614
	-0,5	0,380	0,384	0,444	0,496	0,482	0,542	0,546	0,554	0,588
	-0,3	0,274	0,280	0,352	0,448	0,446	0,486	0,524	0,520	0,552
	-0,1	0,232	0,226	0,244	0,332	0,328	0,368	0,402	0,404	0,434
	0,1	0,178	0,184	0,194	0,300	0,302	0,316	0,382	0,384	0,388
	0,3	0,058	0,066	0,054	0,148	0,154	0,146	0,226	0,228	0,244
	0,5	0,018	0,014	0,026	0,074	0,074	0,084	0,124	0,126	0,150
	0,7	0,038	0,034	0,054	0,102	0,102	0,122	0,162	0,154	0,204
	0,9	0,274	0,300	0,442	0,486	0,514	0,642	0,618	0,622	0,706
10	-0,9	0,394	0,394	0,520	0,512	0,522	0,616	0,592	0,586	0,672
	-0,7	0,346	0,352	0,440	0,460	0,472	0,542	0,530	0,540	0,598
	-0,5	0,346	0,340	0,418	0,432	0,430	0,502	0,504	0,504	0,572
	-0,3	0,256	0,260	0,326	0,376	0,374	0,466	0,472	0,456	0,530
	-0,1	0,212	0,198	0,240	0,308	0,296	0,344	0,364	0,362	0,422
	0,1	0,154	0,160	0,200	0,284	0,274	0,320	0,354	0,356	0,404
	0,3	0,068	0,074	0,080	0,166	0,168	0,186	0,226	0,226	0,248
	0,5	0,018	0,022	0,022	0,082	0,078	0,094	0,128	0,130	0,138
	0,7	0,030	0,028	0,048	0,086	0,088	0,102	0,142	0,146	0,170
	0,9	0,214	0,218	0,360	0,392	0,404	0,552	0,540	0,532	0,658
50	-0,9	0,276	0,234	0,384	0,368	0,356	0,472	0,430	0,428	0,522
	-0,7	0,222	0,204	0,324	0,322	0,298	0,422	0,394	0,380	0,480
	-0,5	0,228	0,198	0,320	0,318	0,292	0,394	0,380	0,370	0,470
	-0,3	0,178	0,158	0,262	0,282	0,230	0,364	0,340	0,328	0,436
	-0,1	0,100	0,084	0,164	0,166	0,160	0,246	0,250	0,240	0,304
	0,1	0,074	0,054	0,132	0,160	0,144	0,230	0,224	0,212	0,308
	0,3	0,034	0,020	0,100	0,110	0,098	0,174	0,186	0,176	0,230
	0,5	0,020	0,010	0,062	0,070	0,064	0,140	0,120	0,112	0,182
	0,7	0,028	0,008	0,064	0,072	0,070	0,150	0,118	0,116	0,236
	0,9	0,088	0,066	0,132	0,232	0,206	0,284	0,334	0,312	0,402
100	-0,9	0,234	0,176	0,338	0,330	0,282	0,430	0,408	0,360	0,472
	-0,7	0,186	0,132	0,310	0,288	0,236	0,396	0,354	0,326	0,446
	-0,5	0,180	0,124	0,274	0,282	0,226	0,376	0,350	0,296	0,442
	-0,3	0,166	0,110	0,270	0,258	0,200	0,354	0,312	0,278	0,400
	-0,1	0,102	0,058	0,172	0,166	0,128	0,254	0,246	0,198	0,314
	0,1	0,066	0,044	0,160	0,128	0,098	0,248	0,208	0,168	0,306
	0,3	0,038	0,022	0,136	0,106	0,076	0,222	0,174	0,134	0,260
	0,5	0,026	0,012	0,102	0,070	0,042	0,178	0,116	0,094	0,232
	0,7	0,012	0,012	0,114	0,068	0,052	0,232	0,124	0,094	0,302
	0,9	0,078	0,042	0,234	0,180	0,148	0,420	0,280	0,258	0,524



**Tabela 5.10:** Nível de significância empírico dos testes, utilizando o estimador  $\hat{d}_R^{(0,7)}$ , quando  $d = 0, 2$ .

$m$	$\phi_1$	$\alpha = 0, 01$			$\alpha = 0, 05$			$\alpha = 0, 10$		
		$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
5	-0,9	0,240	0,222	0,352	0,370	0,348	0,456	0,454	0,448	0,550
	-0,7	0,126	0,126	0,206	0,238	0,232	0,316	0,338	0,330	0,382
	-0,5	0,102	0,094	0,144	0,200	0,198	0,264	0,268	0,270	0,346
	-0,3	0,052	0,052	0,094	0,150	0,146	0,198	0,228	0,224	0,280
	-0,1	0,026	0,020	0,028	0,058	0,062	0,096	0,100	0,102	0,156
	0,1	0,018	0,018	0,016	0,046	0,050	0,068	0,086	0,090	0,106
	0,3	0,004	0,004	0,006	0,038	0,040	0,056	0,084	0,080	0,096
	0,5	0,004	0,006	0,012	0,038	0,036	0,058	0,078	0,074	0,108
	0,7	0,014	0,018	0,038	0,076	0,076	0,094	0,120	0,122	0,158
	0,9	0,388	0,414	0,584	0,660	0,682	0,780	0,770	0,780	0,846
10	-0,9	0,188	0,174	0,258	0,304	0,286	0,370	0,368	0,370	0,446
	-0,7	0,120	0,110	0,150	0,200	0,192	0,246	0,288	0,294	0,306
	-0,5	0,080	0,076	0,108	0,156	0,150	0,200	0,240	0,234	0,264
	-0,3	0,056	0,052	0,064	0,134	0,128	0,144	0,204	0,204	0,226
	-0,1	0,022	0,016	0,026	0,064	0,062	0,068	0,104	0,112	0,106
	0,1	0,014	0,012	0,022	0,064	0,052	0,066	0,098	0,092	0,110
	0,3	0,004	0,004	0,006	0,044	0,036	0,052	0,094	0,080	0,102
	0,5	0,010	0,010	0,008	0,044	0,042	0,052	0,082	0,088	0,086
	0,7	0,024	0,016	0,022	0,068	0,068	0,076	0,150	0,148	0,150
	0,9	0,298	0,310	0,480	0,520	0,526	0,704	0,668	0,676	0,806
50	-0,9	0,110	0,078	0,090	0,190	0,146	0,170	0,252	0,228	0,228
	-0,7	0,086	0,064	0,070	0,170	0,150	0,142	0,236	0,222	0,200
	-0,5	0,068	0,040	0,048	0,132	0,100	0,104	0,196	0,176	0,154
	-0,3	0,048	0,030	0,052	0,118	0,096	0,122	0,190	0,168	0,170
	-0,1	0,022	0,012	0,014	0,056	0,060	0,052	0,092	0,092	0,094
	0,1	0,022	0,018	0,042	0,046	0,046	0,100	0,106	0,112	0,156
	0,3	0,006	0,000	0,058	0,054	0,050	0,122	0,096	0,108	0,178
	0,5	0,014	0,004	0,100	0,056	0,058	0,224	0,112	0,102	0,288
	0,7	0,024	0,014	0,174	0,094	0,092	0,324	0,154	0,168	0,440
	0,9	0,134	0,118	0,234	0,308	0,274	0,424	0,438	0,424	0,532
100	-0,9	0,100	0,056	0,078	0,178	0,114	0,144	0,228	0,176	0,214
	-0,7	0,070	0,038	0,078	0,138	0,108	0,126	0,200	0,174	0,182
	-0,5	0,068	0,024	0,050	0,138	0,080	0,124	0,186	0,146	0,158
	-0,3	0,062	0,028	0,078	0,122	0,100	0,146	0,188	0,146	0,198
	-0,1	0,016	0,006	0,056	0,062	0,044	0,128	0,120	0,102	0,170
	0,1	0,020	0,008	0,110	0,072	0,046	0,182	0,112	0,098	0,246
	0,3	0,018	0,010	0,164	0,060	0,040	0,256	0,106	0,090	0,322
	0,5	0,018	0,006	0,280	0,046	0,028	0,424	0,108	0,090	0,502
	0,7	0,020	0,018	0,474	0,084	0,070	0,650	0,140	0,122	0,722
	0,9	0,112	0,064	0,366	0,246	0,214	0,526	0,370	0,330	0,626

**Tabela 5.11:** Nível de significância empírico dos testes, utilizando o estimador  $\hat{d}_R^{(0,8)}$ , quando  $d = 0, 2$ .

$m$	$\phi_1$	$\alpha = 0, 01$			$\alpha = 0, 05$			$\alpha = 0, 10$		
		$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
5	-0,9	0,928	0,894	0,976	0,990	0,984	0,998	0,996	0,992	1,000
	-0,7	0,828	0,784	0,914	0,952	0,942	0,982	0,980	0,976	0,992
	-0,5	0,582	0,538	0,708	0,804	0,774	0,914	0,914	0,890	0,958
	-0,3	0,178	0,160	0,210	0,406	0,374	0,466	0,554	0,524	0,632
	-0,1	0,010	0,010	0,002	0,054	0,052	0,034	0,090	0,090	0,084
	0,1	0,010	0,006	0,008	0,040	0,040	0,026	0,074	0,074	0,050
	0,3	0,020	0,020	0,016	0,098	0,100	0,082	0,190	0,190	0,174
	0,5	0,026	0,026	0,026	0,106	0,112	0,098	0,192	0,192	0,170
	0,7	0,022	0,024	0,038	0,094	0,088	0,096	0,152	0,146	0,166
	0,9	0,422	0,466	0,614	0,696	0,724	0,800	0,790	0,810	0,862
10	-0,9	0,854	0,788	0,928	0,956	0,920	0,984	0,974	0,962	0,992
	-0,7	0,748	0,646	0,820	0,882	0,844	0,950	0,940	0,916	0,972
	-0,5	0,522	0,394	0,594	0,724	0,642	0,810	0,842	0,784	0,888
	-0,3	0,190	0,140	0,180	0,344	0,302	0,376	0,478	0,424	0,504
	-0,1	0,012	0,010	0,012	0,062	0,044	0,042	0,126	0,128	0,084
	0,1	0,008	0,008	0,008	0,046	0,046	0,044	0,090	0,098	0,086
	0,3	0,022	0,024	0,040	0,100	0,102	0,128	0,156	0,170	0,212
	0,5	0,024	0,038	0,048	0,104	0,134	0,140	0,222	0,242	0,248
	0,7	0,034	0,022	0,030	0,138	0,138	0,118	0,216	0,228	0,222
	0,9	0,322	0,334	0,520	0,566	0,564	0,730	0,690	0,702	0,828
50	-0,9	0,640	0,442	0,540	0,772	0,628	0,694	0,836	0,716	0,792
	-0,7	0,522	0,338	0,408	0,694	0,546	0,562	0,778	0,666	0,662
	-0,5	0,302	0,172	0,186	0,470	0,338	0,316	0,588	0,464	0,416
	-0,3	0,134	0,056	0,048	0,256	0,172	0,134	0,334	0,284	0,222
	-0,1	0,014	0,012	0,010	0,050	0,048	0,034	0,094	0,094	0,064
	0,1	0,018	0,012	0,064	0,048	0,044	0,144	0,092	0,098	0,198
	0,3	0,012	0,010	0,176	0,070	0,082	0,360	0,134	0,144	0,462
	0,5	0,026	0,022	0,374	0,090	0,116	0,554	0,176	0,200	0,658
	0,7	0,034	0,030	0,360	0,118	0,142	0,540	0,198	0,228	0,632
	0,9	0,158	0,128	0,262	0,338	0,294	0,456	0,460	0,454	0,564
100	-0,9	0,542	0,266	0,244	0,692	0,482	0,410	0,760	0,600	0,506
	-0,7	0,432	0,200	0,174	0,614	0,398	0,302	0,700	0,520	0,382
	-0,5	0,252	0,100	0,062	0,380	0,232	0,130	0,470	0,328	0,192
	-0,3	0,124	0,058	0,040	0,238	0,130	0,090	0,324	0,204	0,126
	-0,1	0,022	0,008	0,028	0,068	0,046	0,066	0,128	0,116	0,110
	0,1	0,016	0,008	0,164	0,066	0,050	0,278	0,110	0,096	0,356
	0,3	0,026	0,012	0,462	0,084	0,064	0,598	0,144	0,124	0,692
	0,5	0,022	0,012	0,744	0,084	0,076	0,862	0,158	0,144	0,916
	0,7	0,022	0,028	0,746	0,108	0,094	0,838	0,168	0,182	0,886
	0,9	0,124	0,078	0,398	0,268	0,230	0,568	0,394	0,358	0,658

**Tabela 5.12:** Nível de significância empírico dos testes, utilizando o estimador  $\hat{d}_{FT}$ , quando  $d = 0, 2$ .

$m$	$\phi_1$	$\alpha = 0, 01$			$\alpha = 0, 05$			$\alpha = 0, 10$		
		$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
5	-0,9	0,088	0,088	0,238	0,132	0,126	0,408	0,198	0,196	0,506
	-0,7	0,012	0,012	0,148	0,072	0,076	0,262	0,126	0,138	0,334
	-0,5	0,004	0,004	0,090	0,042	0,044	0,202	0,112	0,116	0,276
	-0,3	0,006	0,006	0,106	0,062	0,062	0,196	0,124	0,132	0,274
	-0,1	0,012	0,010	0,094	0,034	0,036	0,198	0,102	0,100	0,276
	0,1	0,016	0,018	0,140	0,062	0,064	0,268	0,132	0,130	0,352
	0,3	0,030	0,030	0,190	0,086	0,084	0,312	0,162	0,162	0,380
	0,5	0,012	0,010	0,206	0,076	0,074	0,346	0,144	0,148	0,410
	0,7	0,024	0,020	0,198	0,088	0,094	0,342	0,158	0,160	0,430
	0,9	0,008	0,008	0,014	0,038	0,034	0,036	0,052	0,052	0,070
10	-0,9	0,090	0,090	0,104	0,130	0,126	0,166	0,174	0,182	0,242
	-0,7	0,012	0,018	0,028	0,062	0,062	0,098	0,120	0,128	0,164
	-0,5	0,008	0,008	0,016	0,042	0,056	0,062	0,102	0,100	0,124
	-0,3	0,014	0,018	0,020	0,056	0,056	0,074	0,112	0,108	0,146
	-0,1	0,006	0,008	0,016	0,034	0,040	0,054	0,084	0,102	0,108
	0,1	0,008	0,010	0,020	0,054	0,054	0,094	0,110	0,110	0,148
	0,3	0,022	0,024	0,032	0,086	0,078	0,124	0,146	0,144	0,194
	0,5	0,012	0,012	0,028	0,044	0,046	0,112	0,092	0,108	0,160
	0,7	0,018	0,014	0,034	0,060	0,058	0,116	0,130	0,128	0,198
	0,9	0,004	0,006	0,008	0,024	0,030	0,036	0,064	0,070	0,066
50	-0,9	0,094	0,088	0,106	0,118	0,118	0,176	0,160	0,148	0,240
	-0,7	0,018	0,014	0,054	0,068	0,068	0,114	0,120	0,128	0,156
	-0,5	0,020	0,012	0,028	0,062	0,054	0,074	0,104	0,098	0,142
	-0,3	0,016	0,010	0,030	0,072	0,052	0,098	0,132	0,124	0,156
	-0,1	0,010	0,008	0,020	0,042	0,036	0,050	0,072	0,080	0,096
	0,1	0,018	0,012	0,018	0,048	0,054	0,076	0,112	0,108	0,128
	0,3	0,014	0,006	0,034	0,084	0,068	0,080	0,136	0,134	0,140
	0,5	0,016	0,008	0,024	0,062	0,062	0,068	0,116	0,104	0,116
	0,7	0,014	0,002	0,036	0,070	0,062	0,120	0,110	0,116	0,202
	0,9	0,012	0,002	0,012	0,050	0,038	0,064	0,100	0,084	0,132
100	-0,9	0,098	0,084	0,174	0,146	0,122	0,268	0,184	0,162	0,364
	-0,7	0,020	0,010	0,100	0,058	0,036	0,174	0,116	0,112	0,226
	-0,5	0,022	0,010	0,074	0,058	0,048	0,154	0,102	0,092	0,200
	-0,3	0,032	0,016	0,088	0,082	0,068	0,170	0,146	0,114	0,232
	-0,1	0,006	0,006	0,058	0,050	0,030	0,138	0,112	0,100	0,186
	0,1	0,018	0,010	0,066	0,074	0,052	0,150	0,116	0,098	0,204
	0,3	0,030	0,016	0,058	0,082	0,058	0,120	0,136	0,118	0,176
	0,5	0,020	0,008	0,028	0,064	0,040	0,070	0,126	0,100	0,102
	0,7	0,010	0,008	0,090	0,064	0,050	0,178	0,122	0,100	0,254
	0,9	0,016	0,006	0,098	0,060	0,036	0,190	0,118	0,082	0,268

As Tabelas 5.8 à 5.12 mostram o que ocorreu com os níveis de significância empíricos com a inclusão de um termo autoregressivo. Nos casos em que a série foi diferenciada pelos estimadores  $\hat{d}_{GPH}$  e  $\hat{d}_{sp}$  estes níveis estão acima dos níveis de significância nominais (ver Tabelas 5.8 e 5.9, respectivamente) como aconteceu no processo  $ARFIMA(0, d, 0)$  (ver Tabela 5.1). Quando a série foi diferenciada pelos estimadores  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  (ver Tabelas 5.10 e 5.11, respectivamente) quanto mais próximo dos limites da não estacionaridade de  $\phi_1$  maiores estão os níveis empíricos, distanciando-se dos níveis nominais. Como no processo  $ARFIMA(0, d, 0)$ , no processo  $ARFIMA(1, d, 0)$ , quando a série foi diferenciada por  $\hat{d}_{FT}$  (ver Tabela 5.12), os níveis empíricos se apresentam mais próximos dos níveis nominais desejados. Para a estatística  $Q_{PR}(\cdot)$  ocorreram níveis empíricos maiores e mais distantes dos níveis nominais do que para as estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$ .

A Tabela 5.13, a seguir, apresenta a média, o desvio padrão e o erro quadrático médio das estimativas do parâmetro  $d$  do processo  $ARFIMA(1, d, 0)$ , obtidas pelos estimadores introduzidos no Capítulo 3. Consideramos os casos em que  $\phi_1 \in \{-0,9; -0,7; -0,5; -0,3; -0,1; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ .

**Tabela 5.13:** Estatísticas das estimativas do parâmetro  $d = 0, 2$ .

Método	$\phi_1$	Média	D.Padrão	EQM	$\phi_1$	Média	D.Padrão	EQM
$\hat{d}_{GPH}$	-0,9	0,1923	0,1271	0,0162	0,1	0,1973	0,1420	0,0201
$\hat{d}_{sp}$		0,1657	0,1033	0,0118		0,1633	0,1123	0,0139
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		0,1529	0,0538	0,0051		0,1850	0,0494	0,0027
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		0,0793	0,0386	0,0161		0,2116	0,0302	0,0010
$\hat{d}_{FT}$		0,1503	0,1911	0,0389		0,1775	0,0478	0,0028
$\hat{d}_{GPH}$	-0,7	0,2017	0,1341	0,0180	0,3	0,2077	0,1375	0,0189
$\hat{d}_{sp}$		0,1714	0,1033	0,0115		0,1770	0,1115	0,0129
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		0,1613	0,0515	0,0041		0,2186	0,0460	0,0025
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		0,0880	0,0423	0,0143		0,2845	0,0261	0,0078
$\hat{d}_{FT}$		0,1958	0,0324	0,0011		0,1540	0,1291	0,0187
$\hat{d}_{GPH}$	-0,5	0,2073	0,1379	0,0190	0,5	0,2206	0,1399	0,0200
$\hat{d}_{sp}$		0,1751	0,1094	0,0126		0,1880	0,1124	0,0128
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		0,1620	0,0513	0,0041		0,2755	0,0352	0,0069
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		0,0988	0,0428	0,0121		0,3634	0,0181	0,0270
$\hat{d}_{FT}$		0,1932	0,0338	0,0012		0,1454	0,1089	0,0148
$\hat{d}_{GPH}$	-0,3	0,2004	0,1397	0,0195	0,7	0,2527	0,1375	0,0217
$\hat{d}_{sp}$		0,1666	0,1101	0,0132		0,2173	0,1107	0,0125
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		0,1619	0,0517	0,0041		0,3653	0,0260	0,0280
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		0,1188	0,0413	0,0083		0,4363	0,0103	0,0559
$\hat{d}_{FT}$		0,1888	0,0361	0,0014		0,1716	0,0926	0,0094
$\hat{d}_{GPH}$	-0,1	0,2012	0,1314	0,0172	0,9	0,4495	0,1354	0,0805
$\hat{d}_{sp}$		0,1703	0,1041	0,0117		0,4144	0,1109	0,0583
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		0,1740	0,0469	0,0029		0,4676	0,0085	0,0717
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		0,1581	0,0352	0,0030		0,4867	0,0031	0,0822
$\hat{d}_{FT}$		0,1869	0,0367	0,0015		0,2014	0,0541	0,0029

A Figura 5.3, a seguir, apresenta o box-plot das estimativas do parâmetro  $d$ . Essa figura é uma representação gráfica dos resultados apresentados na Tabela 5.13.

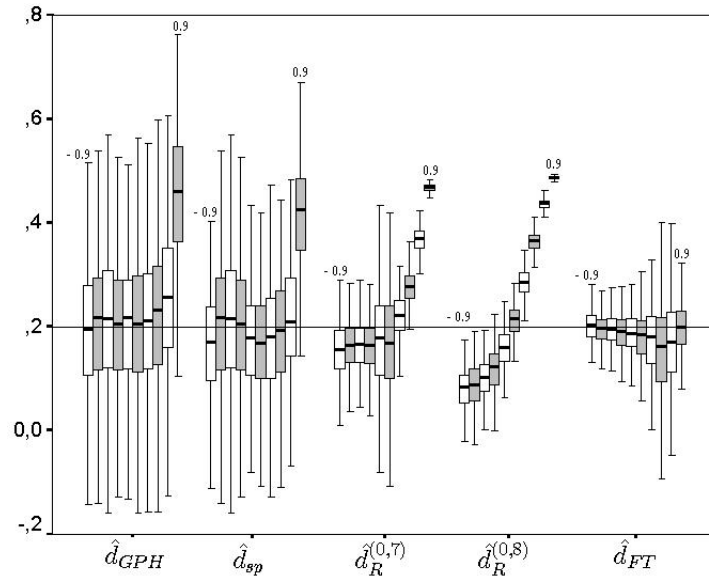


Figura 5.3: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $d = 0,2$ .

Na grande maioria dos casos as melhores estimativas do parâmetro  $d$ , em média, foram obtidas pelos estimadores  $\hat{d}_{GPH}$  e  $\hat{d}_{FT}$ , entretanto a variabilidade do primeiro é sempre mais alta. Isto explica o fato, de que nesse caso, os níveis de significância empíricos dos testes são mais altos do que os níveis nominais (ver Tabela 5.8). O mesmo acontece para o caso em que a série original foi diferenciada pelo estimador  $\hat{d}_{sp}$  (ver Tabela 5.9). As estimativas obtidas pelos estimadores  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$ , em média, não foram próximas do verdadeiro valor de  $d$ , por isso, em poucos casos os níveis empíricos se aproximaram dos níveis nominais (ver Tabelas 5.10 e 5.11).

A Tabela 5.14, a seguir, mostra a média, o desvio padrão e o erro quadrático médio das estimativas do parâmetro  $\phi_1$  do processo  $ARFIMA(1, 0.2, 0)$ , para os mesmos valores de  $\phi_1$  considerados neste estudo. Estas estimativas foram obtidas após diferenciarmos a série originalmente gerada, pelos estimadores introduzidos no Capítulo 3.

**Tabela 5.14:** Estatísticas das estimativas do parâmetro  $\phi_1$ .

Método	$\phi_1$	Média	D.Padrão	EQM	$\phi_1$	Média	D.Padrão	EQM
$\hat{d}_{GPH}$	-0,9	-0,8938	0,0277	0,0008	0,1	0,1152	0,1597	0,0257
$\hat{d}_{sp}$		-0,8914	0,0236	0,0006		0,1461	0,1308	0,0192
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		-0,8919	0,0183	0,0004		0,1136	0,0596	0,0037
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		-0,8780	0,0188	0,0008		0,0850	0,3708	0,0016
$\hat{d}_{FT}$		-0,8906	0,1874	0,0351		0,1197	0,0592	0,0039
$\hat{d}_{GPH}$	-0,7	-0,6865	0,0732	0,0055	0,3	0,2968	0,1478	0,0218
$\hat{d}_{sp}$		-0,6794	0,0538	0,0033		0,3272	0,1249	0,0163
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		-0,6810	0,0344	0,0015		0,2773	0,0534	0,0034
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		-0,6438	0,0342	0,0043		0,2102	0,0331	0,0092
$\hat{d}_{FT}$		-0,7010	0,0536	0,0029		0,3421	0,1297	0,0186
$\hat{d}_{GPH}$	-0,5	-0,4859	0,1076	0,0118	0,5	0,4774	0,1427	0,0208
$\hat{d}_{sp}$		-0,4723	0,0869	0,0083		0,5510	0,1166	0,0137
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		-0,4738	0,0469	0,0029		0,4208	0,0434	0,0081
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		-0,4262	0,0432	0,0073		0,3344	0,0285	0,0282
$\hat{d}_{FT}$		-0,4944	0,0350	0,0013		0,5468	0,1100	0,0143
$\hat{d}_{GPH}$	-0,3	-0,2762	0,1386	0,0197	0,7	0,6408	0,1245	0,0190
$\hat{d}_{sp}$		-0,2552	0,1086	0,0138		0,6749	0,1002	0,0106
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		-0,2616	0,0560	0,0046		0,5425	0,0337	0,0260
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		-0,2224	0,0474	0,0083		0,4740	0,0263	0,0518
$\hat{d}_{FT}$		-0,2862	0,0427	0,0020		0,7138	0,0822	0,0070
$\hat{d}_{GPH}$	-0,1	-0,0794	0,1427	0,0208	0,9	0,7078	0,1193	0,0511
$\hat{d}_{sp}$		-0,0559	0,1176	0,0156		0,7427	0,0920	0,0332
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		-0,0699	0,0545	0,0039		0,7060	0,0241	0,0382
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		-0,0547	0,0444	0,0040		0,6876	0,0260	0,0458
$\hat{d}_{FT}$		-0,0837	0,0480	0,0026		0,8925	0,0353	0,0013

As Figuras D.1 a D.10, no Anexo D, apresentam o box-plot das estimativas do parâmetro  $\phi_1$ , quando  $\phi_1$  assume os valores indicados no início desta seção. Estas estimativas foram obtidas após a série original ter sido diferenciada pelos estimadores introduzidos no Capítulo 3. Estas figuras representam graficamente os resultados apresentados na Tabela 5.14.

Observe que as estimativas do parâmetro  $\phi_1$ , em média, foram próximas do verdadeiro valor. Entretanto, para as estimativas obtidas quando a série foi diferenciada pelo estimador  $\hat{d}_{FT}$  o desvio padrão e o erro quadrático médio foram menores, a não ser para o caso em que  $\phi_1 = -0,9$ .

### 5.3 $ARFIMA(0, d, 1)$

Nesta seção apresentamos os resultados das simulações do processo  $ARFIMA(0, d, 1)$ . Foram gerados processos com  $d = 0, 2$  e  $\theta_1 \in \{-0, 9; -0, 7; -0, 5; -0, 3; -0, 1; 0, 1; 0, 3; 0, 5; 0, 7; 0, 9\}$ .

Nas Tabelas 5.15 à 5.19, a seguir, apresentamos os níveis de significância empírico dos testes baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  para  $\alpha \in \{0, 01; 0, 05; 0, 10\}$  e  $m \in \{5; 10; 50; 100\}$ . E estamos considerando os casos em que a série originalmente gerada pelo procedimento descrito neste capítulo, foi diferenciada pelos estimadores  $\hat{d}_{GPH}$ ,  $\hat{d}_{sp}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,7)}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  e  $\hat{d}_{FT}$ , descritos no Capítulo 3.



**Tabela 5.15:** Nível de significância empírico dos testes, utilizando o estimador  $\hat{d}_{GPH}$ , quando  $d = 0, 2$ .

$m$	$\theta_1$	$\alpha = 0, 01$			$\alpha = 0, 05$			$\alpha = 0, 10$		
		$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
5,0	-0,9	0,322	0,348	0,450	0,460	0,470	0,552	0,546	0,548	0,628
	-0,7	0,398	0,412	0,492	0,520	0,524	0,566	0,570	0,578	0,622
	-0,5	0,414	0,418	0,482	0,522	0,526	0,572	0,600	0,596	0,638
	-0,3	0,358	0,374	0,430	0,496	0,506	0,538	0,552	0,560	0,594
	-0,1	0,302	0,304	0,354	0,450	0,442	0,498	0,524	0,522	0,542
	0,1	0,208	0,212	0,256	0,336	0,340	0,360	0,428	0,420	0,440
	0,3	0,146	0,142	0,142	0,264	0,256	0,260	0,342	0,338	0,316
	0,5	0,068	0,068	0,054	0,130	0,136	0,110	0,180	0,182	0,188
	0,7	0,032	0,030	0,040	0,090	0,088	0,110	0,148	0,146	0,180
	0,9	0,266	0,258	0,342	0,444	0,444	0,540	0,554	0,556	0,630
10,0	-0,9	0,262	0,286	0,410	0,378	0,390	0,508	0,456	0,472	0,572
	-0,7	0,354	0,370	0,456	0,450	0,458	0,540	0,522	0,546	0,590
	-0,5	0,342	0,374	0,452	0,456	0,464	0,552	0,538	0,548	0,602
	-0,3	0,310	0,324	0,424	0,448	0,458	0,526	0,538	0,542	0,592
	-0,1	0,260	0,272	0,346	0,392	0,392	0,460	0,448	0,456	0,524
	0,1	0,206	0,200	0,258	0,312	0,318	0,374	0,384	0,394	0,446
	0,3	0,152	0,146	0,142	0,238	0,244	0,280	0,330	0,324	0,364
	0,5	0,080	0,072	0,066	0,152	0,150	0,138	0,220	0,216	0,212
	0,7	0,044	0,048	0,046	0,108	0,104	0,102	0,158	0,164	0,180
	0,9	0,200	0,200	0,350	0,400	0,406	0,524	0,520	0,520	0,630
50,0	-0,9	0,126	0,150	0,364	0,226	0,236	0,476	0,300	0,296	0,536
	-0,7	0,218	0,212	0,404	0,310	0,314	0,518	0,406	0,402	0,562
	-0,5	0,206	0,208	0,408	0,314	0,298	0,500	0,378	0,370	0,556
	-0,3	0,180	0,184	0,384	0,272	0,280	0,466	0,364	0,340	0,530
	-0,1	0,162	0,148	0,324	0,244	0,244	0,418	0,346	0,322	0,484
	0,1	0,146	0,114	0,288	0,234	0,224	0,382	0,320	0,290	0,456
	0,3	0,084	0,070	0,140	0,158	0,136	0,250	0,226	0,200	0,336
	0,5	0,060	0,034	0,070	0,116	0,090	0,138	0,176	0,154	0,196
	0,7	0,054	0,038	0,044	0,104	0,084	0,096	0,168	0,150	0,150
	0,9	0,200	0,200	0,350	0,400	0,406	0,524	0,520	0,520	0,630
100,0	-0,9	0,108	0,098	0,426	0,208	0,192	0,508	0,264	0,252	0,562
	-0,7	0,194	0,162	0,442	0,302	0,244	0,524	0,358	0,328	0,564
	-0,5	0,176	0,130	0,428	0,262	0,228	0,512	0,328	0,294	0,556
	-0,3	0,140	0,112	0,428	0,258	0,226	0,498	0,338	0,298	0,550
	-0,1	0,146	0,102	0,360	0,228	0,188	0,444	0,280	0,268	0,500
	0,1	0,128	0,088	0,346	0,216	0,168	0,452	0,280	0,254	0,514
	0,3	0,078	0,050	0,218	0,138	0,102	0,326	0,208	0,174	0,392
	0,5	0,056	0,030	0,136	0,122	0,088	0,230	0,204	0,154	0,314
	0,7	0,068	0,040	0,074	0,130	0,092	0,136	0,188	0,140	0,202
	0,9	0,140	0,088	0,220	0,272	0,200	0,344	0,332	0,284	0,438

**Tabela 5.16:** Nível de significância empírico dos testes, utilizando o estimador  $\hat{d}_{sp}$ , quando  $d = 0, 2$ .

$m$	$\theta_1$	$\alpha = 0,01$			$\alpha = 0,05$			$\alpha = 0,10$		
		$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
5,0	-0,9	0,236	0,238	0,324	0,358	0,354	0,470	0,442	0,436	0,528
	-0,7	0,320	0,318	0,384	0,428	0,432	0,520	0,528	0,536	0,568
	-0,5	0,316	0,324	0,372	0,414	0,418	0,468	0,486	0,484	0,532
	-0,3	0,282	0,296	0,324	0,402	0,400	0,454	0,484	0,486	0,534
	-0,1	0,260	0,250	0,288	0,366	0,374	0,380	0,428	0,434	0,450
	0,1	0,216	0,216	0,236	0,310	0,314	0,332	0,400	0,396	0,408
	0,3	0,146	0,146	0,138	0,222	0,214	0,222	0,294	0,288	0,280
	0,5	0,052	0,050	0,038	0,124	0,130	0,112	0,174	0,180	0,162
	0,7	0,020	0,016	0,022	0,066	0,066	0,070	0,112	0,120	0,138
	0,9	0,312	0,296	0,400	0,528	0,526	0,604	0,632	0,630	0,692
10,0	-0,9	0,176	0,182	0,284	0,296	0,288	0,396	0,388	0,376	0,468
	-0,7	0,254	0,254	0,342	0,374	0,350	0,476	0,466	0,474	0,536
	-0,5	0,256	0,258	0,360	0,374	0,376	0,440	0,446	0,448	0,508
	-0,3	0,274	0,264	0,330	0,376	0,362	0,428	0,448	0,440	0,502
	-0,1	0,230	0,212	0,278	0,322	0,324	0,368	0,386	0,386	0,436
	0,1	0,194	0,192	0,238	0,294	0,284	0,326	0,354	0,348	0,398
	0,3	0,118	0,112	0,158	0,228	0,230	0,220	0,294	0,288	0,304
	0,5	0,060	0,054	0,054	0,120	0,120	0,124	0,224	0,210	0,190
	0,7	0,024	0,030	0,024	0,074	0,082	0,068	0,132	0,136	0,140
	0,9	0,220	0,208	0,404	0,430	0,430	0,574	0,546	0,548	0,674
50,0	-0,9	0,064	0,054	0,200	0,156	0,134	0,284	0,228	0,206	0,342
	-0,7	0,118	0,110	0,234	0,236	0,204	0,344	0,296	0,290	0,402
	-0,5	0,148	0,126	0,282	0,230	0,228	0,386	0,292	0,292	0,438
	-0,3	0,152	0,140	0,244	0,236	0,216	0,322	0,312	0,284	0,404
	-0,1	0,142	0,120	0,194	0,218	0,202	0,286	0,274	0,264	0,350
	0,1	0,148	0,106	0,186	0,222	0,196	0,260	0,292	0,266	0,324
	0,3	0,086	0,062	0,090	0,140	0,136	0,162	0,194	0,168	0,224
	0,5	0,040	0,030	0,036	0,114	0,080	0,078	0,168	0,150	0,124
	0,7	0,038	0,028	0,030	0,086	0,074	0,068	0,138	0,132	0,112
	0,9	0,130	0,104	0,314	0,266	0,240	0,468	0,368	0,344	0,550
100,0	-0,9	0,080	0,038	0,224	0,164	0,118	0,294	0,206	0,186	0,344
	-0,7	0,118	0,082	0,246	0,218	0,166	0,336	0,288	0,216	0,388
	-0,5	0,122	0,062	0,260	0,218	0,156	0,348	0,278	0,236	0,406
	-0,3	0,132	0,092	0,236	0,206	0,172	0,328	0,290	0,252	0,384
	-0,1	0,124	0,086	0,212	0,180	0,162	0,290	0,264	0,222	0,344
	0,1	0,144	0,086	0,180	0,202	0,150	0,276	0,266	0,222	0,328
	0,3	0,074	0,042	0,084	0,126	0,090	0,166	0,172	0,146	0,234
	0,5	0,042	0,018	0,036	0,092	0,058	0,092	0,166	0,118	0,152
	0,7	0,056	0,026	0,036	0,108	0,080	0,066	0,178	0,126	0,132
	0,9	0,130	0,080	0,224	0,254	0,200	0,348	0,344	0,260	0,440

**Tabela 5.17:** Nível de significância empírico dos testes, utilizando o estimador  $\hat{d}_R^{(0,7)}$ , quando  $d = 0, 2$ .

$m$	$\theta_1$	$\alpha = 0,01$			$\alpha = 0,05$			$\alpha = 0,10$		
		$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
5,0	-0,9	0,062	0,062	0,118	0,140	0,132	0,254	0,216	0,218	0,334
	-0,7	0,046	0,046	0,108	0,118	0,136	0,220	0,190	0,198	0,300
	-0,5	0,038	0,034	0,066	0,088	0,094	0,152	0,140	0,148	0,216
	-0,3	0,032	0,034	0,052	0,082	0,080	0,116	0,134	0,130	0,176
	-0,1	0,024	0,024	0,042	0,072	0,070	0,096	0,130	0,132	0,138
	0,1	0,022	0,020	0,032	0,056	0,058	0,082	0,116	0,110	0,134
	0,3	0,012	0,012	0,024	0,090	0,092	0,092	0,140	0,144	0,158
	0,5	0,084	0,088	0,064	0,224	0,222	0,180	0,330	0,332	0,284
	0,7	0,544	0,544	0,438	0,710	0,712	0,588	0,792	0,800	0,682
	0,9	0,954	0,954	0,946	0,964	0,964	0,960	0,970	0,970	0,966
10,0	-0,9	0,040	0,036	0,094	0,092	0,084	0,178	0,162	0,166	0,260
	-0,7	0,038	0,036	0,070	0,092	0,092	0,164	0,172	0,182	0,244
	-0,5	0,022	0,024	0,050	0,092	0,080	0,102	0,126	0,126	0,160
	-0,3	0,022	0,026	0,034	0,072	0,068	0,096	0,126	0,134	0,160
	-0,1	0,022	0,022	0,036	0,062	0,062	0,080	0,108	0,112	0,122
	0,1	0,026	0,026	0,026	0,078	0,082	0,072	0,118	0,118	0,122
	0,3	0,024	0,016	0,018	0,088	0,090	0,076	0,162	0,160	0,150
	0,5	0,172	0,142	0,092	0,348	0,314	0,252	0,440	0,418	0,368
	0,7	0,782	0,746	0,666	0,852	0,838	0,812	0,906	0,902	0,896
	0,9	0,978	0,978	0,968	0,982	0,982	0,978	0,984	0,982	0,982
50,0	-0,9	0,018	0,008	0,050	0,064	0,044	0,142	0,098	0,090	0,208
	-0,7	0,012	0,006	0,062	0,076	0,070	0,142	0,126	0,132	0,218
	-0,5	0,014	0,008	0,040	0,046	0,040	0,102	0,080	0,090	0,150
	-0,3	0,024	0,014	0,040	0,074	0,066	0,096	0,120	0,114	0,154
	-0,1	0,022	0,018	0,030	0,064	0,048	0,084	0,102	0,092	0,118
	0,1	0,020	0,014	0,012	0,078	0,066	0,064	0,132	0,110	0,126
	0,3	0,040	0,014	0,014	0,096	0,072	0,046	0,164	0,132	0,088
	0,5	0,180	0,082	0,064	0,306	0,188	0,136	0,396	0,286	0,194
	0,7	0,798	0,608	0,632	0,858	0,736	0,732	0,882	0,810	0,788
	0,9	0,988	0,974	0,976	0,992	0,986	0,980	0,992	0,988	0,984
100,0	-0,9	0,032	0,018	0,134	0,100	0,058	0,200	0,142	0,116	0,260
	-0,7	0,036	0,014	0,124	0,084	0,058	0,220	0,126	0,104	0,280
	-0,5	0,018	0,004	0,092	0,064	0,030	0,164	0,098	0,092	0,228
	-0,3	0,022	0,016	0,110	0,068	0,058	0,194	0,114	0,114	0,244
	-0,1	0,026	0,016	0,076	0,052	0,044	0,154	0,108	0,082	0,196
	0,1	0,024	0,014	0,064	0,066	0,048	0,122	0,118	0,100	0,174
	0,3	0,040	0,006	0,026	0,080	0,050	0,062	0,156	0,116	0,108
	0,5	0,156	0,050	0,032	0,262	0,142	0,072	0,352	0,210	0,090
	0,7	0,766	0,496	0,438	0,834	0,612	0,524	0,858	0,706	0,606
	0,9	0,988	0,954	0,952	0,992	0,972	0,968	0,992	0,984	0,974

**Tabela 5.18:** Nível de significância empírico dos testes, utilizando o estimador  $\hat{d}_R^{(0,8)}$ , quando  $d = 0, 2$ .

$m$	$\theta_1$	$\alpha = 0,01$			$\alpha = 0,05$			$\alpha = 0,10$		
		$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
5,0	-0,9	0,098	0,108	0,242	0,242	0,266	0,510	0,384	0,416	0,648
	-0,7	0,070	0,070	0,174	0,192	0,198	0,358	0,304	0,324	0,504
	-0,5	0,028	0,026	0,060	0,094	0,090	0,190	0,182	0,192	0,312
	-0,3	0,016	0,016	0,022	0,068	0,070	0,070	0,130	0,124	0,140
	-0,1	0,008	0,006	0,004	0,034	0,038	0,020	0,070	0,072	0,044
	0,1	0,028	0,024	0,012	0,076	0,072	0,062	0,140	0,140	0,096
	0,3	0,366	0,344	0,340	0,614	0,606	0,640	0,734	0,728	0,738
	0,5	0,984	0,984	0,986	0,994	0,992	0,996	0,996	0,996	0,998
	0,7	0,998	0,998	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	0,9	0,996	0,996	0,996	0,998	0,998	0,996	0,998	0,998	0,998
10,0	-0,9	0,050	0,060	0,194	0,182	0,206	0,418	0,304	0,330	0,548
	-0,7	0,052	0,056	0,162	0,150	0,152	0,308	0,250	0,262	0,442
	-0,5	0,026	0,030	0,056	0,082	0,078	0,158	0,146	0,154	0,274
	-0,3	0,014	0,016	0,036	0,072	0,076	0,104	0,128	0,130	0,164
	-0,1	0,010	0,008	0,012	0,044	0,044	0,034	0,070	0,076	0,070
	0,1	0,028	0,024	0,016	0,088	0,086	0,076	0,152	0,136	0,122
	0,3	0,418	0,342	0,394	0,606	0,544	0,616	0,690	0,656	0,726
	0,5	0,988	0,982	0,984	0,992	0,992	0,994	0,994	0,994	0,996
	0,7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	0,9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
50,0	-0,9	0,024	0,010	0,310	0,080	0,076	0,470	0,150	0,134	0,586
	-0,7	0,020	0,018	0,268	0,108	0,084	0,460	0,186	0,168	0,586
	-0,5	0,008	0,004	0,158	0,046	0,046	0,318	0,110	0,104	0,412
	-0,3	0,012	0,014	0,102	0,056	0,058	0,210	0,106	0,100	0,306
	-0,1	0,012	0,006	0,044	0,050	0,040	0,098	0,094	0,078	0,140
	0,1	0,026	0,010	0,008	0,090	0,066	0,042	0,166	0,132	0,094
	0,3	0,324	0,144	0,146	0,464	0,330	0,284	0,562	0,430	0,370
	0,5	0,974	0,918	0,930	0,988	0,958	0,966	0,990	0,978	0,974
	0,7	1,000	0,998	1,000	1,000	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000
	0,9	1,000	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
100,0	-0,9	0,038	0,020	0,498	0,116	0,072	0,638	0,176	0,150	0,724
	-0,7	0,034	0,018	0,488	0,106	0,082	0,664	0,174	0,140	0,738
	-0,5	0,012	0,004	0,344	0,058	0,034	0,502	0,122	0,100	0,580
	-0,3	0,014	0,010	0,230	0,074	0,052	0,368	0,110	0,104	0,474
	-0,1	0,018	0,008	0,102	0,040	0,036	0,194	0,078	0,070	0,250
	0,1	0,034	0,010	0,042	0,082	0,050	0,080	0,140	0,096	0,116
	0,3	0,266	0,096	0,074	0,394	0,220	0,108	0,512	0,338	0,158
	0,5	0,952	0,818	0,814	0,976	0,910	0,886	0,984	0,948	0,906
	0,7	1,000	0,994	0,994	1,000	1,000	0,998	1,000	1,000	0,998
	0,9	1,000	0,994	0,998	1,000	0,998	0,998	1,000	0,998	1,000

**Tabela 5.19:** Nível de significância empírico dos testes, utilizando o estimador  $\hat{d}_{FT}$ , quando  $d = 0, 2$ .

$m$	$\theta_1$	$\alpha = 0,01$			$\alpha = 0,05$			$\alpha = 0,10$		
		$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
5,0	-0,9	0,008	0,008	0,146	0,064	0,068	0,280	0,126	0,122	0,354
	-0,7	0,012	0,012	0,102	0,054	0,060	0,224	0,118	0,122	0,316
	-0,5	0,008	0,008	0,080	0,040	0,040	0,168	0,082	0,086	0,228
	-0,3	0,014	0,014	0,094	0,056	0,058	0,194	0,112	0,122	0,272
	-0,1	0,014	0,014	0,098	0,062	0,068	0,200	0,114	0,110	0,278
	0,1	0,020	0,018	0,124	0,062	0,062	0,210	0,106	0,108	0,316
	0,3	0,010	0,008	0,156	0,064	0,064	0,280	0,140	0,146	0,386
	0,5	0,024	0,026	0,194	0,078	0,086	0,326	0,174	0,160	0,404
	0,7	0,012	0,014	0,164	0,072	0,074	0,306	0,128	0,130	0,386
	0,9	0,472	0,462	0,650	0,580	0,570	0,742	0,638	0,630	0,776
10,0	-0,9	0,000	0,004	0,030	0,044	0,042	0,070	0,100	0,102	0,154
	-0,7	0,012	0,014	0,020	0,050	0,044	0,074	0,116	0,118	0,154
	-0,5	0,010	0,010	0,016	0,044	0,046	0,042	0,074	0,080	0,108
	-0,3	0,014	0,014	0,010	0,046	0,048	0,072	0,102	0,102	0,124
	-0,1	0,008	0,008	0,018	0,052	0,054	0,074	0,098	0,104	0,134
	0,1	0,014	0,020	0,022	0,068	0,070	0,080	0,094	0,100	0,132
	0,3	0,004	0,002	0,014	0,056	0,054	0,084	0,114	0,126	0,180
	0,5	0,014	0,010	0,030	0,058	0,058	0,112	0,132	0,132	0,190
	0,7	0,024	0,024	0,032	0,066	0,068	0,118	0,136	0,132	0,194
	0,9	0,578	0,578	0,590	0,664	0,662	0,676	0,706	0,702	0,724
50,0	-0,9	0,004	0,004	0,012	0,030	0,030	0,036	0,064	0,060	0,102
	-0,7	0,010	0,008	0,024	0,050	0,036	0,074	0,098	0,086	0,126
	-0,5	0,006	0,002	0,004	0,032	0,036	0,038	0,074	0,076	0,088
	-0,3	0,010	0,014	0,018	0,056	0,054	0,062	0,098	0,098	0,098
	-0,1	0,014	0,012	0,024	0,058	0,044	0,070	0,092	0,090	0,106
	0,1	0,010	0,008	0,008	0,060	0,054	0,082	0,126	0,110	0,150
	0,3	0,010	0,008	0,018	0,052	0,050	0,054	0,110	0,102	0,100
	0,5	0,014	0,006	0,018	0,050	0,046	0,066	0,104	0,096	0,108
	0,7	0,026	0,024	0,028	0,088	0,058	0,072	0,142	0,132	0,124
	0,9	0,666	0,596	0,588	0,708	0,670	0,670	0,740	0,712	0,710
100,0	-0,9	0,014	0,016	0,030	0,072	0,044	0,092	0,114	0,088	0,152
	-0,7	0,020	0,008	0,046	0,074	0,054	0,110	0,106	0,102	0,184
	-0,5	0,004	0,004	0,030	0,050	0,020	0,100	0,086	0,070	0,130
	-0,3	0,014	0,010	0,058	0,060	0,050	0,116	0,104	0,098	0,164
	-0,1	0,016	0,012	0,064	0,048	0,040	0,120	0,090	0,084	0,174
	0,1	0,018	0,006	0,064	0,062	0,046	0,132	0,100	0,094	0,198
	0,3	0,020	0,006	0,048	0,050	0,034	0,108	0,108	0,098	0,152
	0,5	0,012	0,000	0,034	0,054	0,042	0,098	0,116	0,086	0,158
	0,7	0,044	0,022	0,042	0,108	0,074	0,098	0,170	0,128	0,158
	0,9	0,660	0,540	0,508	0,702	0,634	0,576	0,724	0,674	0,616

Novamente, como nos processos  $ARFIMA(0, d, 0)$  e  $ARFIMA(1, d, 0)$ , no processo  $ARFIMA(0, d, 1)$  os níveis de significância empíricos se aproximaram dos níveis nominais, somente quando a série original foi diferenciada pelo estimador  $\hat{d}_{FT}$ . Neste caso, o nível empírico do teste baseado na estatística  $Q_{PR}(\cdot)$  é mais alto do que os níveis empíricos dos testes baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$ .

A Tabela 5.20, a seguir, apresenta a média, o desvio padrão e o erro quadrático médio das estimativas do parâmetro  $d$  do processo  $ARFIMA(0, d, 1)$ , obtidas pelos estimadores introduzidos no Capítulo 3 quando  $\theta_1$  assume os valores já mencionados no início desta seção.

**Tabela 5.20:** Estatísticas das estimativas do parâmetro  $d = 0, 2$ .

Método	$\theta_1$	Média	D.Padrão	EQM	$\theta_1$	Média	D.Padrão	EQM
$\hat{d}_{GPH}$	-0,9	0,2414	0,0853	0,0038	0,1	0,2013	0,1360	0,0061
$\hat{d}_{sp}$		0,2012	0,0734	0,0033		0,1666	0,1114	0,0050
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		0,2032	0,0438	0,0020		0,1721	0,0511	0,0023
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		0,2556	0,0297	0,0013		0,1511	0,0370	0,0017
$\hat{d}_{FT}$		0,1943	0,0267	0,0012		0,1891	0,0460	0,0021
$\hat{d}_{GPH}$	-0,7	0,2309	0,1138	0,0051	0,3	0,1834	0,1294	0,0058
$\hat{d}_{sp}$		0,1936	0,0877	0,0039		0,1545	0,1027	0,0046
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		0,2045	0,0439	0,0020		0,1285	0,0531	0,0024
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		0,2583	0,0299	0,0013		0,0417	0,0452	0,0020
$\hat{d}_{FT}$		0,1963	0,0274	0,0012		0,1698	0,0544	0,0024
$\hat{d}_{GPH}$	-0,5	0,2259	0,1253	0,0056	0,5	0,1824	0,1373	0,0061
$\hat{d}_{sp}$		0,1963	0,0977	0,0044		0,1521	0,1122	0,0050
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		0,2027	0,0436	0,0020		0,0510	0,0613	0,0027
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		0,2501	0,0285	0,0013		-0,1499	0,0580	0,0026
$\hat{d}_{FT}$		0,1931	0,0307	0,0014		0,1728	0,0873	0,0039
$\hat{d}_{GPH}$	-0,3	0,2242	0,1223	0,0055	0,7	0,1177	0,1410	0,0063
$\hat{d}_{sp}$		0,1896	0,1026	0,0046		0,0964	0,1093	0,0049
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		0,1971	0,0472	0,0021		-0,1852	0,0824	0,0037
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		0,2382	0,0310	0,0014		-0,4410	0,0675	0,0030
$\hat{d}_{FT}$		0,1944	0,0335	0,0015		0,1228	0,1174	0,0053
$\hat{d}_{GPH}$	-0,1	0,2027	0,1316	0,0059	0,9	-0,0800	0,1385	0,0062
$\hat{d}_{sp}$		0,1693	0,1057	0,0047		-0,0980	0,1020	0,0046
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		0,1852	0,0454	0,0020		-0,6411	0,1012	0,0045
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		0,2062	0,0319	0,0014		-0,7152	0,0774	0,0035
$\hat{d}_{FT}$		0,1890	0,0367	0,0016		-0,3278	0,2602	0,0116

A Figura 5.4, a seguir, apresenta o box-plot das estimativas do parâmetro  $d$ . Essa figura é uma representação gráfica dos resultados apresentados na Tabela 5.20.

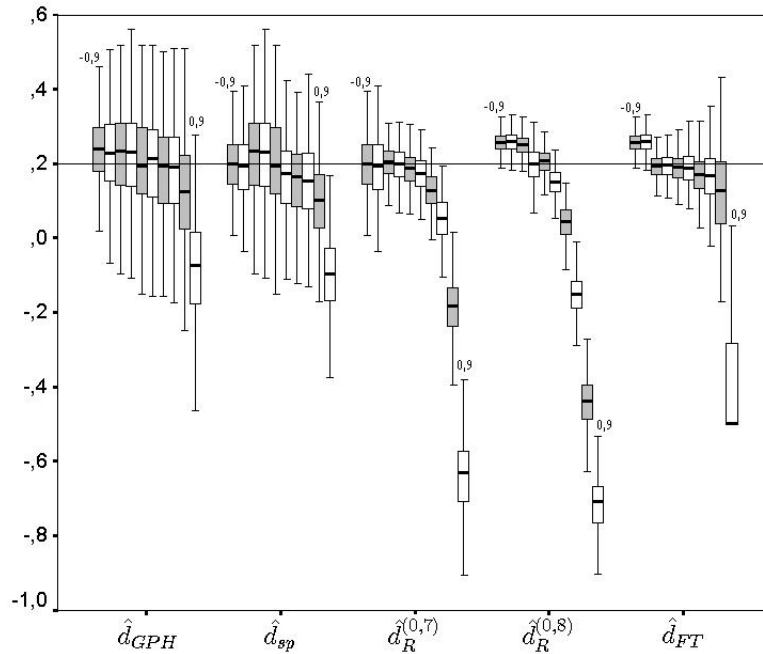


Figura 5.4: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $d = 0,2$ .

Observe que as estimativas obtidas pelos estimadores  $\hat{d}_{GPH}$  e  $\hat{d}_{sp}$  foram, em média, próximas do verdadeiro valor de  $d$ , entretanto, com alta variabilidade. As estimativas obtidas pelos estimadores  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$ , apesar de menor variabilidade, em média, não estiveram próximas de  $d = 0,2$ , se distanciando ainda mais, quando  $\theta_1$  se aproxima de 1. As melhores estimativas foram obtidas pelo estimador  $\hat{d}_{FT}$ . Neste caso, as estimativas também pioraram, no sentido de que se distanciaram do verdadeiro valor  $d = 0,2$ , quando  $\theta_1$  se aproxima de 1. Observe como os métodos  $\hat{d}_R$  e  $\hat{d}_{FT}$  são sensíveis quando  $\theta_1$  se aproxima de 1. Já os métodos  $\hat{d}_{GPH}$  e  $\hat{d}_{sp}$  sofrem menos com a aproximação de  $\theta_1$  à 1.

**Tabela 5.21:** Estatísticas das estimativas do parâmetro  $\theta_1$ .

Método	$\theta_1$	Média	D.Padrão	EQM	$\theta_1$	Média	D.Padrão	EQM
$\hat{d}_{GPH}$	-0,9	-0,8899	0,0181	0,0004	0,1	0,1017	0,1461	0,0213
$\hat{d}_{sp}$		-0,8953	0,0170	0,0003		0,0658	0,1201	0,0156
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		-0,8950	0,0153	0,0003		0,0710	0,0677	0,0041
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		-0,8879	0,0158	0,0004		0,0481	0,0407	0,0043
$\hat{d}_{FT}$		-0,8901	0,0200	0,0005		0,0888	0,0542	0,0031
$\hat{d}_{GPH}$	-0,7	-0,6831	0,0539	0,0032	0,3	0,2781	0,1446	0,0213
$\hat{d}_{sp}$		-0,6986	0,0412	0,0017		0,2474	0,1164	0,0163
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		-0,6944	0,0291	0,0008		0,2196	0,0603	0,0101
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		-0,6730	0,0269	0,0015		0,1194	0,0501	0,0351
$\hat{d}_{FT}$		-0,6969	0,0253	0,0006		0,2656	0,0622	0,0050
$\hat{d}_{GPH}$	-0,5	-0,4810	0,0832	0,0073	0,5	0,4717	0,1477	0,0226
$\hat{d}_{sp}$		-0,5000	0,0667	0,0044		0,4421	0,1220	0,0182
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		-0,4968	0,0382	0,0015		0,3301	0,0668	0,0333
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		-0,4673	0,0328	0,0021		0,0644	0,0834	0,1967
$\hat{d}_{FT}$		-0,5027	0,0323	0,0010		0,4671	0,0925	0,0096
$\hat{d}_{GPH}$	-0,3	-0,2771	0,1025	0,0110	0,7	0,6101	0,1403	0,0277
$\hat{d}_{sp}$		-0,3056	0,0868	0,0075		0,5946	0,1105	0,2331
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		-0,3003	0,0470	0,0022		0,2512	0,1266	0,2174
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		-0,2674	0,0390	0,0026		-0,1832	0,1544	0,8039
$\hat{d}_{FT}$		-0,3032	0,0408	0,0017		0,6230	0,1115	0,0183
$\hat{d}_{GPH}$	-0,1	-0,0924	0,1300	0,0169	0,9	0,6612	0,1483	0,0790
$\hat{d}_{sp}$		-0,1242	0,1036	0,0113		0,6503	0,1103	0,0745
$\hat{d}_R^{(0,7)}$		-0,1097	0,0513	0,0027		-0,1807	0,2309	1,2211
$\hat{d}_R^{(0,8)}$		-0,0910	0,0394	0,0016		-0,3241	0,1945	1,5362
$\hat{d}_{FT}$		-0,1070	0,0462	0,0022		0,3627	0,2760	0,3647

As Figuras E.1 a E.10, no Anexo E, apresentam o box-plot das estimativas do parâmetro  $\theta_1$ , quando  $\theta_1$  assume os valores indicados no início desta seção. Estas estimativas foram obtidas após a série original ter sido diferenciada pelos estimadores introduzidos no Capítulo 3. Estas figuras representam graficamente os resultados apresentados na Tabela 5.21.



# Capítulo 6

## ANÁLISE DE DADOS REAIS

Neste capítulo, aplicamos os testes portmanteau baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$ , dadas, respectivamente, pelas expressões (4.29), (4.30) e (4.33) aos modelos encontrados por Souza (2000) ao realizar um estudo sobre uma série temporal que é a diferença entre outras duas, a saber: “long: Yield on 20 year UK Gilts”; “short: 91 day UK Treasury Bill Rate”, obtidas do livro Mills (1994).

As séries temporais “long” e “short” possuem 148 observações trimestrais entre os anos 1952 a 1988. A Figura 6.1, a seguir, mostra a representação gráfica destas duas séries.

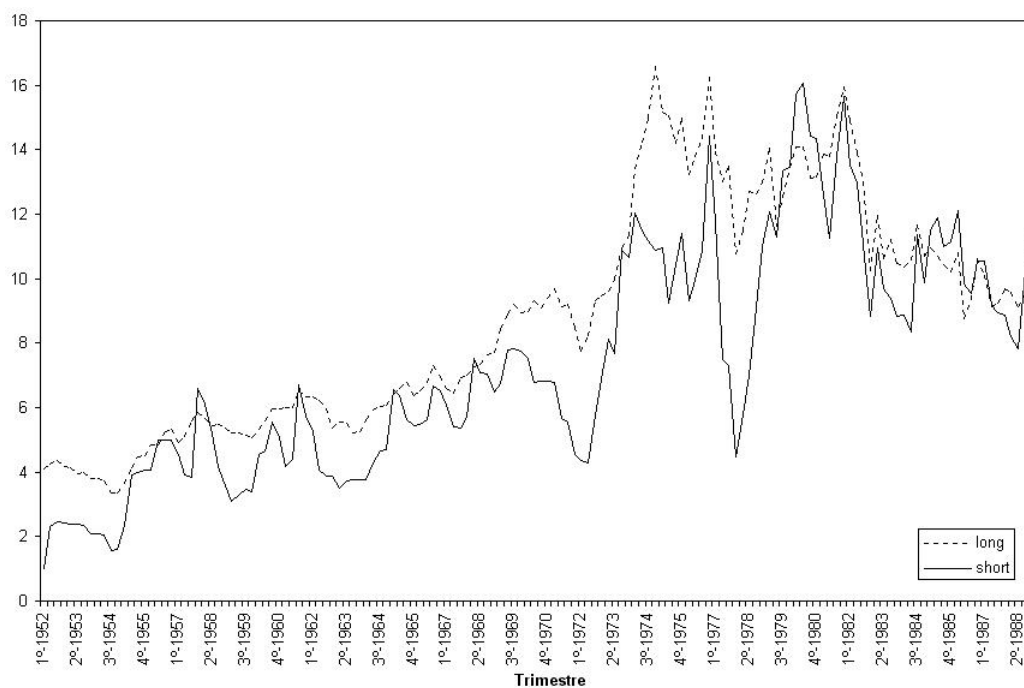


Figura 6.1: Gráfico das séries temporais “long” e “short”.

A série temporal “UK interest rate spread”, que é a diferença entre as séries “long” e “short” é uma importante variável no estudo da estrutura da taxa de juros (ver Mills (1994)). Esta série, cuja representação gráfica é dada na Figura 6.2, a seguir, é composta de 148 observações com média 1,46 e desvio padrão 1,61.

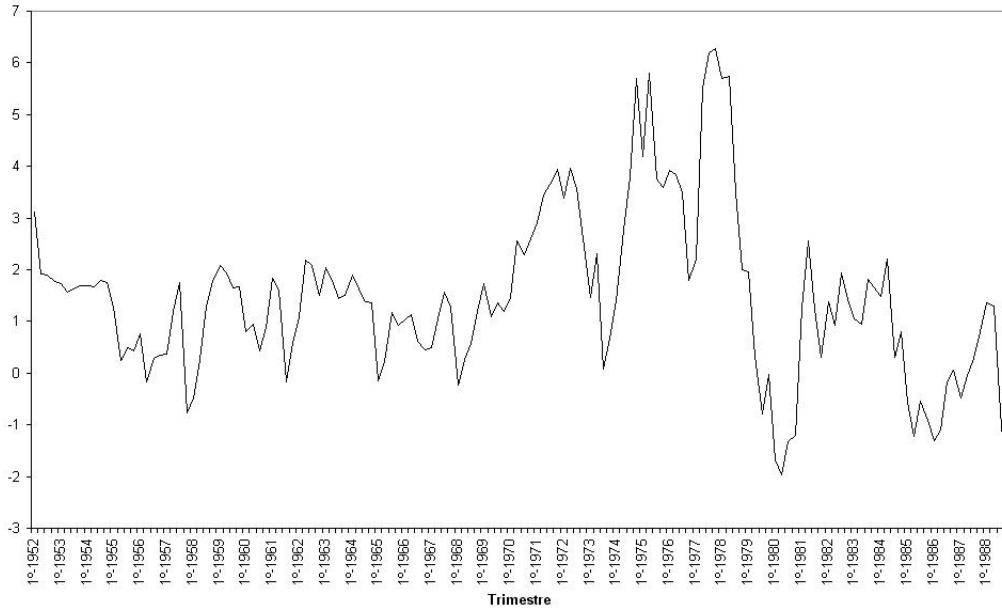


Figura 6.2: Gráfico da série temporal “UK interest rate spread”.

Souza (2000) identifica os processos  $AR(1)$  e  $ARFIMA(1, d, 0)$  como adequados para descrever a série “UK interest rate spread”. No processo de identificação e estimação foram utilizadas as primeiras 140 observações, após a extração da média da série.

Na Tabela 6.1, são dadas as estimativas dos parâmetros  $d$  e  $\phi_1$  a partir dos métodos propostos nas Seções 3.2 e 3.3. Entre parênteses aparecem as estimativas obtidas por Souza (2000). Apesar de serem utilizados os mesmos estimadores, em alguns casos, essas estimativas se diferem por estarmos considerando diferentes valores para alguns parâmetros dos estimadores. Souza (2000) utiliza o estimador de Robinson somente com  $g(n) = n^{0,5}$  e não com  $g(n) = n^{0,7}$  e  $g(n) = n^{0,8}$  como utilizamos neste trabalho e denotamos, respectivamente, por  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$ . As estimativas obtidas por Souza (2000) utilizando o estimador de Robinson com  $g(n) = n^{0,5}$  estão listadas entre parênteses na coluna  $\hat{d}_R^{(0,7)}$ .

**Tabela 6.1:** Estimativas dos parâmetros para os modelos  $AR(1)$  e  $ARFIMA(1, d, 0)$ .

Estimativa	$ARFIMA(1, d, 0)$					$AR(1)$
	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_{sp}$	$\hat{d}_R^{(0,7)}$	$\hat{d}_R^{(0,8)}$	$\hat{d}_{FT}$	
$\hat{d}$	0,4295 (0,427)	0,3127 (0,319)	0,4385 (0,699)	0,4576 -	0,1267 (0,131)	- -
$\hat{\phi}_1$	0,5065 (0,509)	0,6201 (0,613)	0,4975 (0,236)	0,4784 -	0,7691 (0,763)	0,8496 (0,848)

Observe que, na Tabela 6.1, as estimativas que obtemos estão próximas das estimativas encontradas por Souza (2000). Como dissemos anteriormente, as pequenas variações que ocorrem se devem a diferentes valores utilizados para o número de regressores para o estimador de Robinson (ver Seção 3.2.3).

A Tabela 6.2, a seguir, apresenta as estatísticas de teste  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$ , calculadas considerando  $m \in \{5; 12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108\}$ , para verificar a hipótese de independência dos resíduos ao se ajustar o processo  $AR(1)$ , com  $\phi_1 = 0,8496$ , à série temporal “UK interest rate spread”.

**Tabela 6.2:** Estatísticas de teste para o processo  $AR(1)$ .

$m$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
5	1,0290	1,0322	0,4313
12	13,0222	11,9534	4,4937
24	28,7145	28,3023	15,7326
36	41,5169	37,1452	26,6520
48	49,3338	46,5074	35,3086
60	61,0945	59,2150	47,6453
72	70,1423	69,0977	69,2055
84	84,0767	75,9764	82,4731
96	94,6881	84,1451	80,2603
108	102,5523	96,1417	73,4744

A Tabela 6.3, a seguir, apresenta as estatísticas de teste  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$ , obtidas dos resíduos do ajuste do processo  $ARFIMA(1, d, 0)$  à série

temporal “UK interest rate spread”. Esse resíduo foram calculados para os casos em que  $\phi_1$ , dado na Tabela 6.1, foi estimado após diferenciarmos a série pelos estimadores  $\hat{d}_{GPH}$ ,  $\hat{d}_{sp}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$ , introduzidos no Capítulo 3. As estatísticas foram calculadas para verificar a hipótese de independência dos resíduos. Conforme a Observação (b), dada na página 49 deste trabalho, devemos comparar as estatísticas dadas na Tabela 6.3 com os pontos críticos dados na Tabela 6.4. As Tabelas 6.5 e 6.6 apresentam os resultados análogos para o caso em que estimamos os parâmetros do processo  $ARFIMA(1, d, 0)$  pelo estimador de Fox e Taqu (1986).

**Tabela 6.3:** Estatísticas de teste para o processo  $ARFIMA(1, d, 0)$ .

$m$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
	$\hat{d}_{GPH}$			$\hat{d}_{sp}$		
5	1,4607	1,6368	0,8372	1,1812	1,2999	0,7148
12	13,5415	12,2625	5,5390	12,9550	11,7930	5,1111
24	30,4482	30,5083	16,7817	29,6738	29,9524	15,5288
36	41,2004	36,1780	28,8643	40,3055	35,9923	26,2613
48	48,8077	43,0327	38,5218	47,9902	42,9944	35,0336
60	59,8704	56,6450	51,5201	59,1407	56,5301	46,6920
72	70,9596	63,8145	75,7693	70,2181	63,7868	73,1096
84	84,4955	73,0942	80,0348	84,0673	73,2867	83,4445
96	97,7083	80,9560	75,5044	97,4056	81,1482	79,6878
108	103,8307	93,3754	67,6176	103,5392	93,9014	72,4507
	$\hat{d}_R^{(0,7)}$			$\hat{d}_R^{(0,8)}$		
5	1,4771	1,6563	0,8391	1,5094	1,6946	0,8399
12	13,5948	12,3013	5,5713	13,7120	12,3850	5,6402
24	30,5247	30,5477	16,9202	30,6952	30,6304	17,2379
36	41,2889	36,1881	29,1622	41,4850	36,2105	29,8497
48	48,8860	43,0333	38,9206	49,0592	43,0344	39,8412
60	59,9441	56,6559	52,0877	60,1095	56,6814	53,4099
72	71,0295	63,8149	78,1827	71,1858	63,8167	77,4505
84	84,5506	73,0767	81,6321	84,6811	73,0397	80,3599
96	97,7477	80,9386	76,9225	97,8438	80,9027	75,4556
108	103,8684	93,3314	68,9879	103,9610	93,2400	67,3246

A Tabela 6.4, a seguir, apresenta os pontos críticos das distribuições de probabilidade Qui-quadrado e *Gama* - denotados, respectivamente, por  $\chi^2_{\alpha; GL}$  e  $\mathcal{G}(g_1, g_2)$  para o nível de significância  $\alpha \in \{0, 01; 0, 05; 0, 10\}$ . A coluna  $GL = m - (p + q) = m - 1$ , apresenta os graus de liberdade da distribuição Qui-quadrado e as colunas  $g_1$  e  $g_2$ , se referem aos valores dos parâmetros da distribuição  $\mathcal{G}(g_1, g_2)$ , dados pela expressão (4.38), para os correspondentes valores de  $m$ .

**Tabela 6.4:** Pontos críticos das distribuições de probabilidade Qui-quadrado e *Gama*.

$m$	$GL$	$g_1$	$g_2$	$\alpha$	$\chi_{\alpha; GL}^2$	$\mathcal{G}(g_1, g_2)$
5	4	1,6667	0,8333	0,01	13,2768	7,2036
				0,05	9,4878	5,0311
				0,10	7,7795	4,0624
12	11	4,3043	0,7826	0,01	24,7254	13,4509
				0,05	19,6752	10,4584
				0,10	17,2750	9,0522
24	23	8,8085	0,7660	0,01	41,6384	22,3719
				0,05	35,1725	18,5253
				0,10	32,0069	16,6607
36	35	13,3099	0,7606	0,01	57,3421	30,5439
				0,05	49,8019	26,0641
				0,10	46,0588	23,8597
48	47	17,8105	0,7579	0,01	72,4433	38,3534
				0,05	64,0011	33,3459
				0,10	59,7743	30,8587
60	59	22,3109	0,7563	0,01	87,1657	45,9377
				0,05	77,9305	40,4680
				0,10	73,2789	37,7333
72	71	26,8112	0,7552	0,01	101,6370	53,3643
				0,05	91,6670	47,4783
				0,10	86,6291	44,5208
84	83	31,3114	0,7545	0,01	115,8908	60,6729
				0,05	105,2643	54,4048
				0,10	99,8746	51,2430
96	95	35,8115	0,7539	0,01	129,9864	67,8886
				0,05	118,7490	61,2655
				0,10	113,0323	57,9138
108	107	40,3116	0,7535	0,01	143,9530	75,0288
				0,05	132,1420	68,0726
				0,10	126,1184	64,5429

Observe que os valores das estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$ , apresentadas na Tabela 6.2, são sempre menores que os correspondentes pontos críticos da distribuição de probabilidade Qui-quadrado, dados na Tabela 6.4, sejam quais forem os valores de  $m$  e de  $\alpha$ . Isto nos leva a não rejeitar a hipótese de que os resíduos do ajuste de um processo  $AR(1)$ , com  $\phi_1 = 0,8496$ , sejam independentes e, conseqüentemente, este processo é adequado para descrever o comportamento da série “UK interest rate spread”. O mesmo acontece para a estatística  $Q_{PR}(\cdot)$  quando comparado com os correspondentes pontos críticos da distribuição de probabilidade *Gama*, para  $m \in \{5; 12; 24\}$  e

$\alpha \in \{0,01; 0,05; 0,10\}$ . Para  $m \in \{36; 48; 108\}$  os valores da estatística  $Q_{PR}(\cdot)$  são menores do que os correspondentes pontos críticos da distribuição de probabilidade *Gama*, somente quanto  $\alpha = 0,01$ . Isso significa que, para um nível de significância  $\alpha = 0,05$  ou  $\alpha = 0,10$ , rejeitamos a hipótese de que os resíduos do ajuste do processo  $AR(1)$ , com  $\phi_1 = 0,8496$ , sejam independentes e, conseqüentemente, este processo não é adequado para descrever a série temporal em questão. Para  $m \in \{60; 72; 84; 96\}$  a estatística nos leva a rejeitar a hipótese de independência dos resíduos do ajuste do processo  $AR(1)$ , com  $\phi_1 = 0,8496$ , seja qual for o nível de confiança  $\alpha$ .

No caso do ajuste do processo  $ARFIMA(1, d, 0)$ , a comparação das estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$ , apresentadas na Tabela 6.3, com os correspondentes pontos críticos (dados na Tabela 6.1) nos levam a concluir que os resíduos deste ajuste são independentes, ou seja, o processo é adequado para descrever a série, seja qual for o valor de  $m$  e do estimador de  $d$  utilizado. Nessas mesmas tabelas comparamos a estatística  $Q_{PR}(\cdot)$  com os correspondentes pontos críticos. Observe que, para determinados valores de  $m$  e de  $\alpha$  o valor da estatística é maior do que o do ponto crítico, o que nos leva a rejeitar a hipótese de adequação do processo  $ARFIMA(1, d, 0)$ . Entretanto, segundo os resultados de nossas simulações, esta estatística pode estar rejeitando erroneamente este processo devido ao estimador que está sendo utilizado e sua variabilidade (ver Tabelas 5.8 à 5.11).

A Tabela 6.5, a seguir, apresenta as estatísticas de teste  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$ , obtidas dos resíduos do ajuste do processo  $ARFIMA(1, d, 0)$  à série considerada. Estes resíduos foram calculados para o caso em que todos parâmetros do processo  $ARFIMA(1, d, 0)$  foram estimados simultaneamente pelo estimador de Fox e Taqqu (1986). As estatísticas foram calculadas considerando os valores de  $m$  aqui estipulados para verificar a hipótese de independência dos resíduos. Baseado em nossos estudos simulados, essa é a melhor situação a ser analisada, pois foi onde os níveis de significância empíricos mais se aproximaram dos níveis nominais (veja Tabela 5.12).

**Tabela 6.5:** Estatísticas de teste para o processo  $ARFIMA(1, d, 0)$ .

$m$	$Q_{LB}$	$Q_{MT}$	$Q_{PR}$
	$\tilde{d}_{FT}$		
5	0,7418	0,7896	0,3329
12	12,4176	11,4719	4,3919
24	29,1582	29,2171	14,7337
36	40,1611	35,3928	25,1036
48	47,8874	42,9049	33,4796
60	59,0047	56,4651	44,6050
72	69,4774	63,8145	64,6556
84	83,7373	73,4191	77,0577
96	96,5616	81,2126	74,7786
108	102,5031	94,1772	68,2427

A Tabela 6.6, a seguir, apresenta os pontos críticos das distribuições de probabilidade Qui-quadrado e *Gama* - denotados, respectivamente, por  $\chi^2_{\alpha; GL}$  e  $\mathcal{G}(g_1, g_2)$  - para os valores de  $m$  e  $\alpha$  já estipulados. A coluna  $GL = m - (p + q + 1) = m - 2$ , apresenta os graus de liberdade da distribuição Qui-quadrado para os correspondentes valores de  $\alpha$  e  $GL$ . As colunas  $\tilde{g}_1$  e  $\tilde{g}_2$  se referem aos valores dos parâmetros da distribuição  $\mathcal{G}(g_1, g_2)$ , dados pela expressão (4.39), para os correspondentes valores de  $m$ .

**Tabela 6.6:** Pontos críticos das distribuições de probabilidade Qui-quadrado e *Gama*.

$m$	GL	$\tilde{g}_1$	$\tilde{g}_2$	$\alpha$	$X_{\alpha; GL}^2$	$\mathcal{G}(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)$
5	3	2,5000	2,5000	0,01	11,3451	3,0173
				0,05	7,8147	2,2141
				0,10	6,2514	1,8473
12	10	4,0276	0,8950	0,01	23,2098	11,2724
				0,05	18,3071	8,7070
				0,10	15,9872	7,5054
24	22	8,4717	0,8068	0,01	40,2894	20,6545
				0,05	33,9244	17,0509
				0,10	30,8133	15,3067
36	34	12,9586	0,7854	0,01	56,0609	28,9876
				0,05	48,6024	24,6911
				0,10	44,9031	22,5788
48	46	17,4527	0,7788	0,01	71,2014	36,8846
				0,05	62,8296	32,0292
				0,10	58,6405	29,6190
60	58	21,9494	0,7702	0,01	85,9502	44,5256
				0,05	76,7778	39,1881
				0,10	72,1598	36,5209
72	70	26,4473	0,7666	0,01	100,4408	51,9927
				0,05	90,5279	46,2250
				0,10	85,5206	43,3281
84	82	30,9458	0,7609	0,01	114,7095	59,3320
				0,05	104,1358	53,1718
				0,10	98,7745	50,0653
96	94	35,4447	0,7623	0,01	128,8170	66,5720
				0,05	117,6290	60,0486
				0,10	111,9387	56,7482
108	106	39,9439	0,7608	0,01	142,7935	73,7320
				0,05	131,0290	66,8690
				0,10	125,0303	63,3873

Observe que comparando os resultados apresentados nas Tabelas 6.5 e 6.6, rejeitamos a hipótese de que os resíduos do ajuste do processo  $ARFIMA(1, d, 0)$  à série temporal em questão são independentes para o caso da estatística  $Q_{PR}(\cdot)$ , quando  $m \in \{36; 48; 60; 72; 84; 96; 108\}$ . Considerando as estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$  não rejeitamos essa hipótese, sejam quais forem os valores de  $m$  e de  $\alpha$ .

Para verificar a adequação do processo  $AR(1)$  à série temporal em questão, podemos realizar o teste baseado nas três estatísticas de teste ( $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$ )



e  $Q_{PR}(\cdot)$ ), pois, conforme Peña e Rodríguez (2002), estas estatísticas são adequadas para tal situação. Os resultados que encontramos nos levam a não rejeitar a hipótese nula. Baseado nos resultados das simulações apresentados no Capítulo 5, no intuito de verificar a adequação do processo  $ARFIMA(1, d, 0)$ , devemos realizar o teste de hipótese baseado nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$ , já que, como vimos, o teste baseado na estatística  $Q_{PR}(\cdot)$  pode, com maior probabilidade, rejeitar um processo adequado. Os resultados obtidos com  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$  nos levam a não rejeitar a hipótese nula. Em outras palavras, para ambos os processos, não há indícios para rejeitarmos a hipótese de que os resíduos do ajuste destes processos à série temporal analisada sejam independentes. Lembramos que, somente a realização deste teste não garante a adequação destes processos, faz-se necessário, ainda, um estudo para verificar a normalidade ou não destes resíduos. No entanto, este não é o interesse maior deste trabalho.

# Capítulo 7

## CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

### 7.1 CONCLUSÕES

Com os resultados obtidos nas simulações apresentados no Capítulo 5, concluímos que os testes portmanteau baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$  e  $Q_{MT}(\cdot)$  podem ser utilizados para verificar a hipótese de independência dos resíduos do ajuste dos processos  $ARFIMA(p, d, q)$  à uma série temporal. Entretanto, o teste baseado na estatística  $Q_{PR}(\cdot)$  não se mostrou adequado, pois os níveis de significância empíricos obtidos nesse caso foram sempre maiores dos que os níveis de significância nominais. Isto pode ter ocorrido tendo em vista que utilizamos a idéia heurística que tínhamos à respeito da distribuição de probabilidade dessa estatística, nos processos  $ARFIMA(p, d, q)$ . Como mostramos no Anexo B, a distribuição de probabilidade da estatística  $Q_{PR}(\cdot)$  pode ser aproximada por uma distribuição  $\mathcal{G}(g_1, g_2)$ , com os parâmetros  $g_1$  e  $g_2$ , dados pela expressão (4.38). Esta aproximação é verdadeira para um processo  $ARIMA(p, d, q)$ , como foi provado por Peña e Rodríguez (2002). No entanto, para um processo  $ARFIMA(p, d, q)$  utilizamos, neste trabalho, a aproximação para uma distribuição  $\mathcal{G}(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)$ , onde os parâmetros  $\tilde{g}_1$  e  $\tilde{g}_2$  são dados pela expressão (4.39). Para a estatística de teste  $Q_{MT}(\cdot)$  a idéia heurística que apresentamos pareceu adequada, já que os níveis de significância do teste baseado nessa estatística ficaram próximos dos níveis nominais quando o estimador do parâmetro  $d$  utilizado foi  $\hat{d}_{FT}$ .

Os níveis de significância empíricos dos testes estão intimamente ligados com a variabilidade dos estimadores dos parâmetros dos processos  $ARFIMA(p, d, q)$ . Portanto, como as estimativas do parâmetro  $d$ , obtidas pelo estimador  $\hat{d}_{FT}$ , em geral, foram as mais próximas do verdadeiro valor de  $d$ , este estimador deve ser utilizado, sempre que possível. Ao utilizarmos os esti-

madores  $\hat{d}_{GPH}$ ,  $\hat{d}_{sp}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  poderemos rejeitar um modelo erroneamente, já que seus níveis de significância empíricos, em geral, estiveram acima dos níveis nominais. Entre os estimadores ditos semi-paramétricos que incluímos neste trabalho, o que se mostrou mais adequado foi  $\hat{d}_R^{(0,8)}$ .

Nos três casos investigados ( $ARFIMA(0, d, 0)$ ,  $ARFIMA(1, d, 0)$  e  $ARFIMA(0, d, 1)$ ) os melhores resultados, no sentido de proximidade dos níveis de significância empíricos e nominais, foram obtidos quando a série temporal originalmente gerada foi diferenciada pela estimativa obtida pelo estimador  $\hat{d}_{FT}$ , a não ser no processo  $ARFIMA(0, d, 1)$  quando  $\theta_1 = 0,9$ , pois nesse caso as estimativas obtidas por este estimador não foram adequadas (ver Tabela 5.20 e Figura 5.4).

No estudo sobre a série temporal “UK interest rate spread”, concluímos que não há indícios para rejeitar a adequação desta série pelos processos  $AR(1)$  e  $ARFIMA(1, d, 0)$ . De acordo com os resultados que obtivemos, os resíduos do ajuste destes processos, à série temporal em questão, podem ser considerados independentes.

## 7.2 TRABALHOS FUTUROS

Algumas questões sobre os testes portmanteau baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  para os processos  $ARFIMA(p, d, q)$ , ainda não respondidas neste trabalho, ficam como sugestões para futuros estudos, entre elas:

- estudar o comportamento do poder dos testes baseados nas estatísticas  $Q_{LB}(\cdot)$ ,  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$ , ou seja, estudar a probabilidade empírica de rejeitar a hipótese nula de que o processo ajustado é adequado, dado que o processo é inadequado (ver Definição 2.26);
- derivar matematicamente as distribuições de probabilidade das estatísticas  $Q_{MT}(\cdot)$  e  $Q_{PR}(\cdot)$  para os processos  $ARFIMA(p, d, q)$ , já que, como descrevemos no Capítulo 4, o que utilizamos neste trabalho, no caso dos processos  $ARFIMA(p, d, q)$ , é uma idéia heurística do que nos parece acontecer, mas que nos resultados apresentados no Capítulo 5, vimos que essa idéia não parece adequada quando utilizamos a estatística  $Q_{PR}(\cdot)$ ; e

- estudar o comportamento dos testes portmanteau no domínio da frequência para os processos  $ARFIMA(p, d, q)$ .

# REFERÊNCIAS

- [1] Anderson, R.L. (1942). “Distribution of the Serial Correlation Coefficient”. *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. **13**, pp. 1-13.
- [2] Baillie, R.T., T. Bollerslev e H.O. Mikkelsen (1996). “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”. *Journal of Econometrics*, Vol. **74**, pp. 3-30.
- [3] Bartlett, M.S. (1946). “On the Theoretical Specification and Sampling Properties of Autocorrelated Time Series”. *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, Vol. **8**, pp. 27-41.
- [4] Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*. New York: Chapman & Hall.
- [5] Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. New York: John Wiley.
- [6] Box, G.E.P., G.M. Jenkins e G.C. Reinsel (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. New Jersey: Prentice Hall.
- [7] Box, G.E.P. e D.A. Pierce (1970). “Distribution of Residual Autocorrelation in Autoregressive Integrated Moving Average Time Series Models”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **65**(332), pp. 1509-1526.
- [8] Brockwell, P.J. e R.A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.
- [9] Fox, R. e M.S. Taqqu (1986). “Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series”. *The Annals of Statistics*, Vol. **14**, pp. 517-532.
- [10] Geweke, J. e S. Porter-Hudak (1983). “The Estimation and Application of Long Memory Time Series Model”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **4**(4), pp. 221-238.

- [11] Granger, C.W.J. e R. Joyeux (1980). “An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **1**(1), pp. 15-29.
- [12] Henrici, P. (1974). “Applied and Computational Complex Analysis”. Vol. **1**. New York: John Wiley.
- [13] Hosking, J.R.M. (1981). “Fractional Differencing”. *Biometrika*, Vol. **68**(1), pp. 165-167.
- [14] Hosking, J. (1982). “Some models of persistence in time series analysis: theory and practice”. *Time Series Analysis: Theory and Practice*, Vol. **1**, pp. 641-653.
- [15] Hosking, J. R. M. (1984). “Modelling Persistence in Hydrological Time Series Using Fractional Differencing”. *Water Resources Research*, Vol. **20**(12), pp. 1898-1908.
- [16] Hurst, H.E. (1951). “Long-term storage capacity of reservoirs”. *Transactions of American Society in Civil Engineers*, Vol. **116**, pp. 165-167.
- [17] Karlin, S. e H.M. Taylor (1975). *A First Course in Stochastic Processes*. San Diego: Academic Press.
- [18] Li, W.K. e A.I. McLeod (1986). “Fractional time series modelling”. *Biometrika*, Vol. **73**(1), pp. 217-221.
- [19] Lopes, S.R.C., B.P. Olbermann e V.A. Reisen (2002). “Non-stationary Gaussian ARFIMA Processes: Estimation and Application”. *Brazilian Review of Econometrics*, Vol. **22**(1), pp. 103-126.
- [20] Lopes, S.R.C., B.P. Olbermann e V.A. Reisen (2003). “A Comparison of Estimation Methods in Non-stationary ARFIMA Processes”. Aceito para publicação no *Journal of Statistical Computation and Simulation*.
- [21] Ljung, G.M. (1986). “Diagnostic testing of univariate time series models”. *Biometrika*, Vol. **73**(3), pp. 725-730.
- [22] Mills, T.C. (1994). *The Econometric Modelling of Financial Time Series*. New York: Cambridge University Press.
- [23] McLeod, A.I. (1978). “On the Distribution of Residual Autocorrelations in Box-Jenkins Models”. *Journal of Royal Statistical Society*, Vol. **40**(3), pp. 296-302.

- [24] Morettin, P.A. e C.M.C. Toloi (1985). *Previsão de Séries Temporais*. São Paulo: Atual.
- [25] Peña, D. e J. Rodríguez (2002). “A Powerful Portmanteau Test of Lack of Fit for Time Series”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **97**(458), pp. 601-610.
- [26] Priestley, M.B. (1981). *Spectral Analysis in Time Series*. New York: Academic Press.
- [27] Reisen, V.A., M.R. Sena Jr. e S.R.C. Lopes (2001). “Error and Model Misspecification in ARFIMA Processes”. *Brazilian Review of Econometrics*, Vol. **21**(1), pp. 101-135.
- [28] Reisen, V.A., L.O. Chieppe e S.R.C. Lopes (2003). “Empirical Significance Levels of Two Portmanteau Tests for Stationary Long Memory Processes”. Em fase de revisão.
- [29] Reisen, V.A. (1994). “Estimation of the Fractional Difference Parameter in the ARIMA(p,d,q) model using the Smoothed Periodogram”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **15**(3), pp. 335-350.
- [30] Reisen, V.A. e S.R.C. Lopes (1999). “Some Simulations and Applications of Forecasting Long-Memory Time Series Models”. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. **80**(2), pp. 269-287.
- [31] Robinson, P.M. (1994). “Semiparametric Analysis of Long-Memory Time Series”. *The Annals of Statistics*, Vol. **22**(1), pp. 515-539.
- [32] Rohatgi, V.K. (1976). *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. New York: John Wiley.
- [33] Satterthwaite, F.E. (1941). “Synthesis of Variance”. *Psychometrika*, Vol. **6**, pp. 309-316.
- [34] ——— (1946). “An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components”. *Biometrics Bulletin*, Vol. **2**, pp. 110-114.
- [35] Sowell, F. (1992). “Maximum Likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models”. *Journal of Econometrics*, Vol. **53**, pp. 165-188.
- [36] Souza, V.J. (2000) “Previsão em Séries Temporais com Característica de Longa Dependência”. *Dissertação de Mestrado*. Instituto de Ciências Exatas da UFMG, Belo Horizonte.

- [37] Wei, W. (1990). *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*. New York: Addison Wesley.
- [38] Whittle, P. (1951). *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*. New York: Hafner.



# ANEXO A

Apesar de não provarmos matematicamente verificamos, neste anexo, a validade para um determinado  $p$  fixo, a saber  $p = 2$ , da igualdade

$$\frac{\partial}{\partial \phi_j} \left( \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \sum_t \phi_i \phi_j X_{t-i} X_{t-k-j} \right) \Big|_{\phi=\hat{\phi}} = \sum_{i=0}^p \phi_i X_{t-i} X_{t-k-j} + \sum_{i=0}^p \phi_i X_{t-j} X_{t-k-i}, \quad (\text{A.1})$$

para  $j = 1, \dots, p$ .

Esta igualdade é utilizada para a obtenção da expressão (4.12) na Seção 4.1 deste trabalho.

A expressão do lado esquerdo de (A.1) quando  $p = 2$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_j} \left( \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_t \phi_i \phi_j X_{t-i} X_{t-k-j} \right) &= \frac{\partial}{\partial \phi_j} (\phi_0 \phi_0 X_t X_{t-k} + \phi_0 \phi_1 X_t X_{t-k-1} + \\ &+ \phi_0 \phi_2 X_t X_{t-k-2} + \phi_1 \phi_0 X_{t-1} X_{t-k} + \phi_1 \phi_1 X_{t-1} X_{t-k-1} + \phi_1 \phi_2 X_{t-1} X_{t-k-2} + \\ &+ \phi_2 \phi_0 X_{t-2} X_{t-k} + \phi_2 \phi_1 X_{t-2} X_{t-k-1} + \phi_2 \phi_2 X_{t-2} X_{t-k-2}). \end{aligned}$$

Então, para  $j = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left( \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_t \phi_i \phi_j X_{t-i} X_{t-k-j} \right) &= 2\phi_0 X_t X_{t-k} + \phi_1 X_t X_{t-k-1} + \\ &+ \phi_2 X_t X_{t-k-2} + \phi_1 X_{t-1} X_{t-k} + \phi_2 X_{t-2} X_{t-k} = \\ &= \sum_{i=0}^p \phi_i X_{t-i} X_{t-k-0} + \sum_{i=0}^p \phi_i X_{t-0} X_{t-k-i}, \end{aligned}$$

o que mostra a igualdade (A.1) quando  $p = 2$  e  $j = 0$ .

Para  $j = 1$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_1} (\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_t \phi_i \phi_j X_{t-i} X_{t-k-j}) &= \phi_0 X_t X_{t-k-1} + \phi_0 X_{t-1} X_{t-k} + \\ &+ 2\phi_1 X_{t-1} X_{t-k-1} + \phi_2 X_{t-1} X_{t-k-2} + \phi_2 X_{t-2} X_{t-k-1} = \\ &= \sum_{i=0}^p \phi_i X_{t-i} X_{t-k-1} + \sum_{i=0}^p \phi_i X_{t-1} X_{t-k-i}, \end{aligned}$$

o que mostra a igualdade (A.1) quando  $p = 2$  e  $j = 1$ .

Para  $j = 2$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_2} (\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_t \phi_i \phi_j X_{t-i} X_{t-k-j}) &= \phi_0 X_t X_{t-k-2} + \phi_1 X_{t-1} X_{t-k-2} + \\ &+ \phi_2 X_{t-2} X_{t-k} + \phi_1 X_{t-2} X_{t-k-1} + 2\phi_2 X_{t-2} X_{t-k-2} = \\ &= \sum_{i=0}^p \phi_i X_{t-i} X_{t-k-2} + \sum_{i=0}^p \phi_i X_{t-2} X_{t-k-i}. \end{aligned}$$

o que mostra a igualdade (A.1) quando  $p = 2$  e  $j = 2$ .

# ANEXO B

De acordo com o artigo Peña e Rodríguez (2002) (ver seção 3.2 deste artigo), a distribuição de probabilidade de  $Q_{PR}(\cdot)$  pode ser aproximada por uma distribuição  $\mathcal{G}(g_1, g_2)$ , onde os parâmetros  $g_1$  e  $g_2$  são definidos por

$$g_1 = \frac{b}{2} \quad \text{e} \quad g_2 = \frac{1}{2a},$$

com  $a$  e  $b$  dados por

$$a = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} \quad \text{e} \quad b = \frac{(\sum_{i=1}^m \lambda_i)^2}{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2}. \quad (\text{B.1})$$

No apêndice deste mesmo artigo está demonstrado que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = \frac{m+1}{2} - (p+q) \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 = \frac{1}{6m}(m+1)(2m+1) - (p+q). \quad (\text{B.2})$$

Desta forma, esta distribuição tem média e variância dadas por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{(m+1)}{2} - (p+q) \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{(m+1)(2m+1)}{3m} - 2(p+q).$$

Assim, segue das expressões (B.1) e (B.2) que

$$a = \frac{\frac{(m+1)(2m+1)}{6m} - (p+q)}{\frac{m+1}{2} - (p+q)} \quad \text{e}$$

$$b = \frac{\left[\frac{m+1}{2} - (p+q)\right]^2}{\frac{(m+1)(2m+1)}{6m} - (p+q)} = \frac{6m \left[\frac{m+1}{2} - (p+q)\right]^2}{(m+1)(2m+1) - 6m(p+q)}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 g_2 &= \frac{1}{2a} = \frac{\frac{m+1}{2} - (p+q)}{2\left[\frac{(m+1)(2m+1)}{6m} - (p+q)\right]} = \frac{\frac{(m+1)-2(p+q)}{2}}{2\left[\frac{(m+1)(2m+1)-6m(p+q)}{6m}\right]} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow g_2 = \frac{3m[(m+1) - 2(p+q)]}{2[(m+1)(2m+1) - 6m(p+q)]}, \quad (\text{B.3})
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{b}{2} = \frac{3m\left[\frac{m+1}{2} - (p+q)\right]^2}{(m+1)(2m+1) - 6m(p+q)} = \frac{\frac{3m}{4}[(m+1) - 2(p+q)]^2}{(m+1)(2m+1) - 6m(p+q)} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow g_1 = \frac{3m[(m+1) - 2(p+q)]^2}{2[2(m+1)(2m+1) - 12m(p+q)]}. \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

Com as expressões (B.3) e (B.4) observamos que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \frac{g_1}{g_2} = g_1(g_2)^{-1} = \frac{3m[(m+1)-2(p+q)]^2}{4[(m+1)(2m+1)-6m(p+q)]} \frac{2[(m+1)(2m+1)-6m(p+q)]}{3m[(m+1)-2(p+q)]} = \\
 &= \frac{(m+1)-2(p+q)}{2} = \frac{m+1}{2} - (p+q).
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \frac{g_1}{g_2^2} = g_1(g_2)^{-2} = \frac{3m[(m+1)-2(p+q)]^2}{4[(m+1)(2m+1)-6m(p+q)]} \left(\frac{2[(m+1)(2m+1)-6m(p+q)]}{3m[(m+1)-2(p+q)]}\right)^2 = \\
 &= \frac{(m+1)(2m+1)-6m(p+q)}{3m} = \frac{(m+1)(2m+1)}{3m} - 2(p+q).
 \end{aligned}$$

Portanto, isto comprova a informação dada no início deste anexo.

# ANEXO C

No Capítulo 5, fizemos uma observação sobre a impossibilidade de se obter computacionalmente a expansão binomial, dada pela expressão (3.2), e utilizada na definição do processo  $ARFIMA(p, d, q)$ . Um modelo alternativo obtido, substituindo-se essa expansão binomial por  $\nabla_r^d(\cdot)$ , dada pela expressão (5.1) é uma solução aproximada deste problema.

Nesse anexo apresentamos um estudo sobre o filtro

$$\begin{aligned}\nabla_r^d(1) &= \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{d}{k} = \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^r \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)}\end{aligned}$$

utilizado na expressão (5.1). Desejamos verificar o quanto este filtro, que é um truncamento da série numérica

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{d}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} = 0$$

se aproxima da soma igual à zero.

A Tabela C.1, a seguir, apresenta o valor de  $\nabla_r^d(1)$  para diversos valores de  $d \in [0, 2]$ , para os casos em que  $r = 999$  e  $r = 10000$ .

**Tabela C.1:** Valores de  $\nabla_{999}^d(1)$  e  $\nabla_{10000}^d(1)$  para  $d \in [0, 2]$ .

$d$	$\nabla_{999}^d(1)$	$\nabla_{10000}^d(1)$	$d$	$\nabla_{999}^d(1)$	$\nabla_{10000}^d(1)$
0,00	1,00000000	1,00000000	1,05	-0,00003435	-0,00000306
0,05	0,68637630	0,61171700	1,10	-0,00004696	-0,00000373
0,10	0,46902650	0,37253930	1,15	-0,00004790	-0,00000339
0,15	0,31896530	0,22578900	1,20	-0,00004320	-0,00000272
0,20	0,21578160	0,13613150	1,25	-0,00003633	-0,00000204
0,25	0,14513890	0,08160412	1,30	-0,00002913	-0,00000145
0,30	0,09700425	0,04860728	1,35	-0,00002256	-0,00000100
0,35	0,06437497	0,02874804	1,40	-0,00001698	-0,00000068
0,40	0,04238097	0,01686718	1,45	-0,00001244	-0,00000042
0,45	0,02764813	0,00980654	1,50	-0,00000894	-0,00000028
0,50	0,01784796	0,00564186	1,55	-0,00000628	-0,00000019
0,55	0,01137969	0,00320585	1,60	-0,00000428	-0,00000009
0,60	0,00714848	0,00179472	1,65	-0,00000290	-0,00000010
0,65	0,00440910	0,00098653	1,70	-0,00000190	-0,00000008
0,70	0,00265679	0,00052977	1,75	-0,00000113	0,00000001
0,75	0,00155205	0,00027582	1,80	-0,00000073	-0,00000004
0,80	0,00086781	0,00013745	1,85	-0,00000041	-0,00000003
0,85	0,00045346	0,00006401	1,90	-0,00000021	-0,00000002
0,90	0,00020990	0,00002640	1,95	-0,00000008	-0,00000001
0,95	0,00007262	0,00000814	2,00	0,00000000	0,00000000
1,00	0,00000000	0,00000000			

Como, neste trabalho, consideramos o tamanho amostral  $n = 1000$ , tomamos como ponto de truncamento  $r = 999$ . Observe que para  $d = 0,2$  e  $d = 0,4$  obtemos, respectivamente,

$$\nabla_{999}^{0,2}(1) = 0,21578160 \quad \text{e} \quad \nabla_{999}^{0,4}(1) = 0,04238097,$$

que são valores que não estão próximos de zero. Isto implica que este truncamento pode estar afetando negativamente nossos resultados. Observe ainda que mesmo truncando esse somatório em  $r = 10000$ , que é um valor razoavelmente grande em termos computacionais,

$$\nabla_{10000}^{0,2}(1) = 0,13613150 \quad \text{e} \quad \nabla_{10000}^{0,4}(1) = 0,01686718.$$

Baillie *et al.* (1996), utilizando  $r = 1000$  e  $d = 0,75$ , relata que também encontrou  $\nabla_{999}^{0,75}(1) = 0,00155$ . Observamos que a utilização de  $r = 10000$  implicaria em um tempo computacional maior na obtenção das simulações realizadas neste trabalho.

# ANEXO D

As Figuras D.1 a D.10, a seguir, apresentam o box-plot das estimativas do parâmetro  $\phi_1$ , quando  $\phi_1 \in \{-0,9; -0,7; -0,5; -0,3; -0,1; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ . Estas estimativas foram obtidas através da subrotina NSLSE da biblioteca IMSL, após gerarmos 500 amostras do processo  $ARFIMA(1, d, 0)$ , com  $d = 0,2$  e a série original ter sido diferenciada pelos estimadores introduzidos no Capítulo 3. Estas figuras representam graficamente os resultados apresentados na Tabela 5.14. Observe que, apesar das escalas destes gráficos serem diferentes devido aos diferentes valores reais de  $\phi_1$  (representados por uma linha horizontal), todas foram fixadas em  $\phi_1 \pm 0,6$ , para que o tamanho das caixas nos gráficos não dessem uma falsa impressão de que em alguns casos uma estimativa varia mais ou menos do que as outras. Os símbolos  $\hat{d}_{GPH}$ ,  $\hat{d}_{sp}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,7)}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  e  $\hat{d}_{FT}$ , abaixo de cada caixa nos gráficos, indicam que as estimativas de  $\phi_1$  foram obtidas após diferenciarmos a série temporal pelos respectivos estimadores.

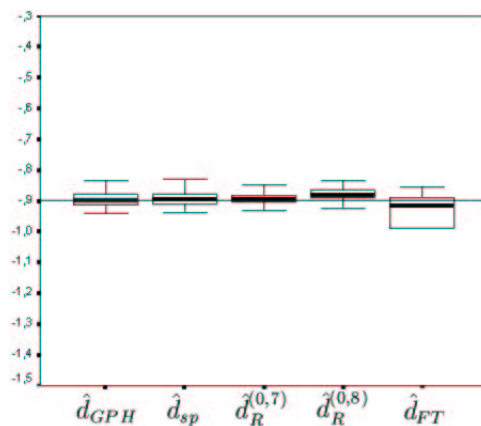


Figura D.1: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\phi_1 = -0,9$ .

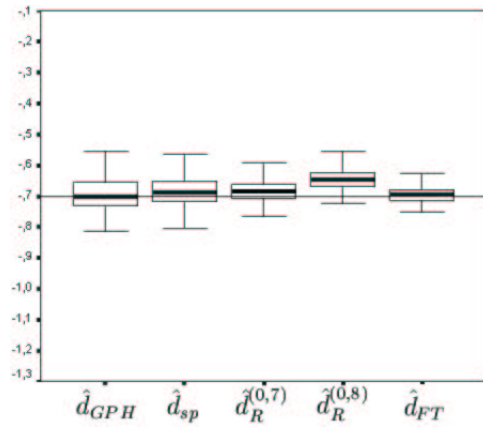


Figura D.2: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\phi_1 = -0,7$ .

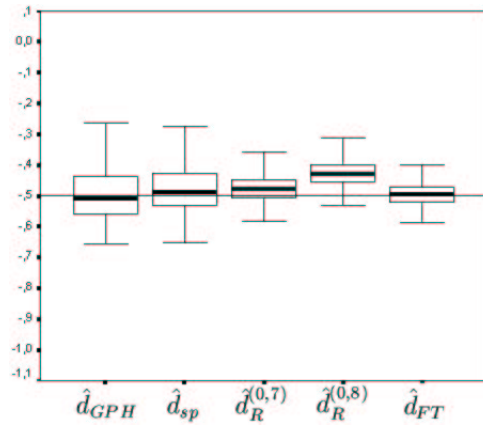


Figura D.3: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\phi_1 = -0,5$ .



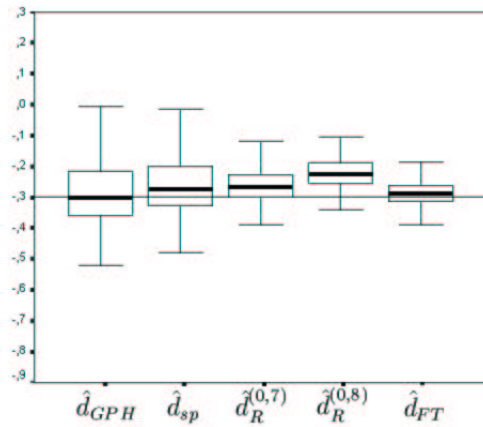


Figura D.4: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\phi_1 = -0,3$ .

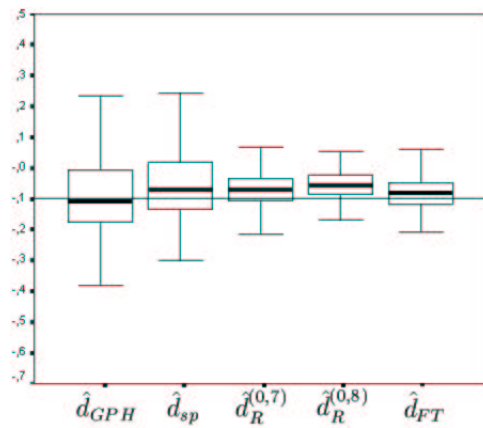


Figura D.5: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\phi_1 = -0,1$ .

Observe que, nas Figuras D.1 à D.5, para  $\phi_1$  assumindo valores negativos, em geral, a variabilidade das estimativas aumenta à medida que  $\phi_1$  aproxima-se de zero. Esta característica independe do estimador utilizado para diferenciar a série temporal, a não quando foi utilizado  $\hat{d}_{FT}$ . Nesse caso, a variabilidade das estimativa parece permanecer constante à medida que  $\phi_1$  se aproxima de zero. Em média, as estimativas estão próximas do verdadeiro valor de  $\phi_1$  (linha horizontal), entretanto, observe que, quando a série temporal foi diferenciada pelos estimadores  $\hat{d}_R^{(0,7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0,8)}$ , principalmente, as estimativas se afastam do verdadeiro valor de  $\phi_1$  à medida que o mesmo se aproxima de zero.

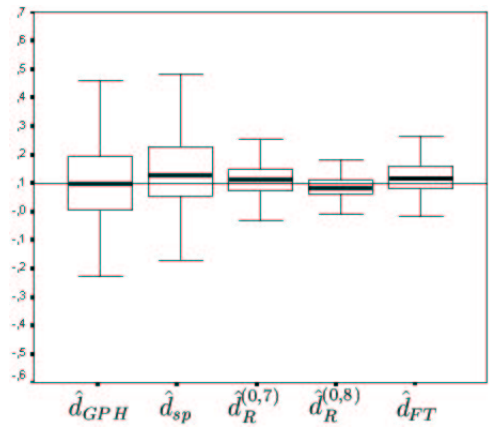


Figura D.6: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\phi_1 = 0, 1$ .

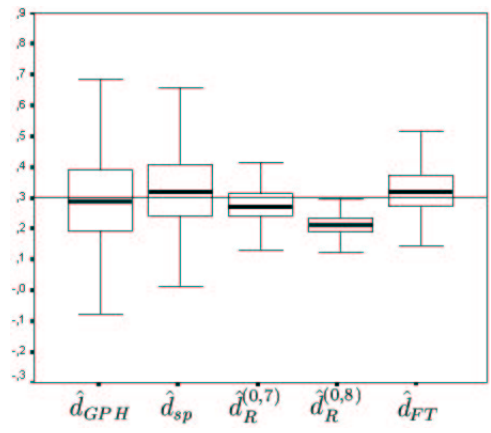


Figura D.7: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\phi_1 = 0, 3$ .

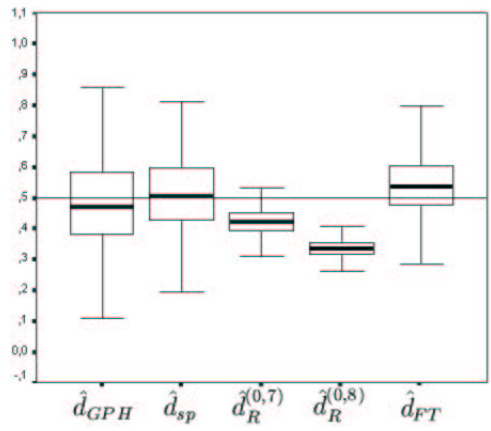


Figura D.8: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\phi_1 = 0,5$ .

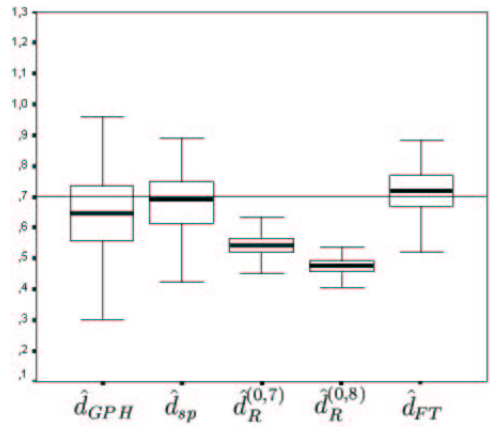


Figura D.9: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\phi_1 = 0,7$ .

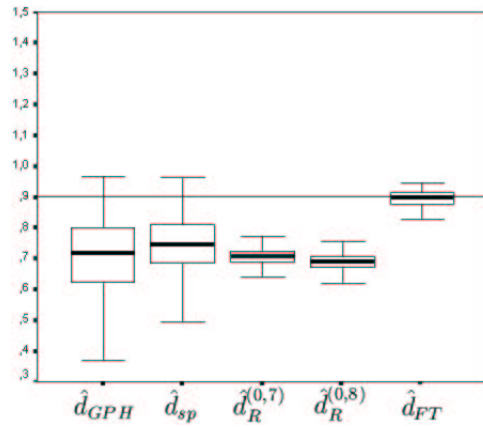


Figura D.10: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\phi_1 = 0,9$ .

Para  $\phi_1$  assumindo valores positivos (ver Figuras D.6 à D.10), as estimativas não sofrem tanta variabilidade, como para as situações em que  $\phi_1$  assume valor negativo. Entretanto, à medida que  $\phi_1$  se afasta de zero (ou se aproxima do limite da não estacionariedade), em média, as estimativas se afastam do verdadeiro valor de  $\phi_1$ , exceto no caso em que a série temporal foi diferenciada pelo estimador  $\hat{d}_{FT}$ .

# ANEXO E

As Figuras E.1 a E.10, a seguir, apresentam o box-plot das estimativas do parâmetro  $\theta_1$ , quando  $\theta_1 \in \{-0,9; -0,7; -0,5; -0,3; -0,1; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ . Estas estimativas foram obtidas através da subrotina NSLSE da biblioteca IMSL, após gerarmos 500 amostras do processo  $ARFIMA(0, d, 1)$ , com  $d = 0,2$  e a série original ter sido diferenciada pelos estimadores introduzidos no Capítulo 3. Estas figuras representam graficamente os resultados apresentados na Tabela 5.21. Observe que, apesar das escalas destes gráficos serem diferentes devido aos diferentes valores reais de  $\theta_1$  (representados por uma linha horizontal), todas foram fixadas em  $\theta_1 \pm 0,6$ , para que o tamanho das caixas nos gráficos não dessem uma falsa impressão de que em alguns casos uma estimativa varia mais ou menos do que as outras. Os símbolos  $\hat{d}_{GPH}$ ,  $\hat{d}_{sp}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,7)}$ ,  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  e  $\hat{d}_{FT}$ , abaixo de cada caixa nos gráficos, indicam que as estimativas de  $\theta_1$  foram obtidas após diferenciarmos a série temporal pelos respectivos estimadores.

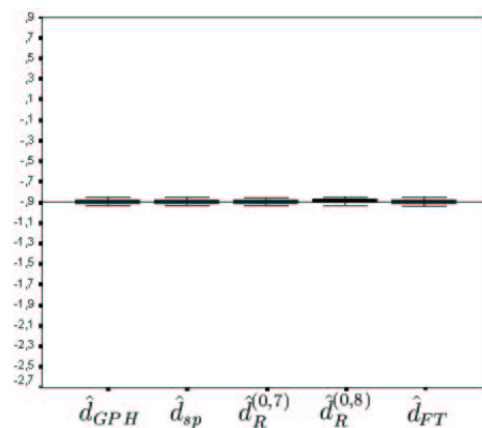


Figura E.1: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\theta_1 = -0,9$ .

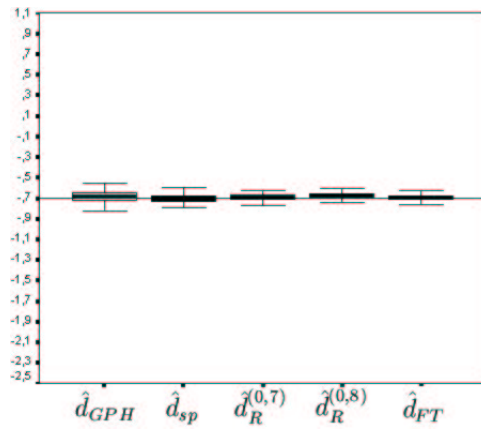


Figura E.2: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\theta_1 = -0,7$ .

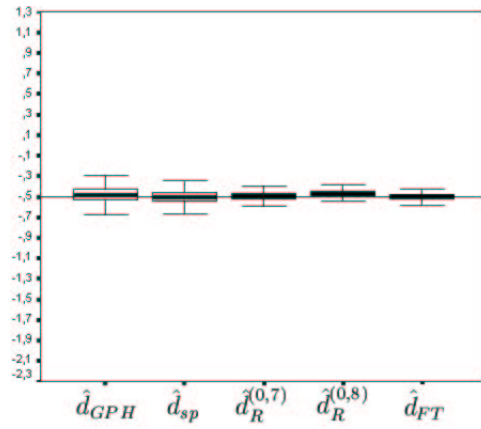


Figura E.3: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\theta_1 = -0,5$ .

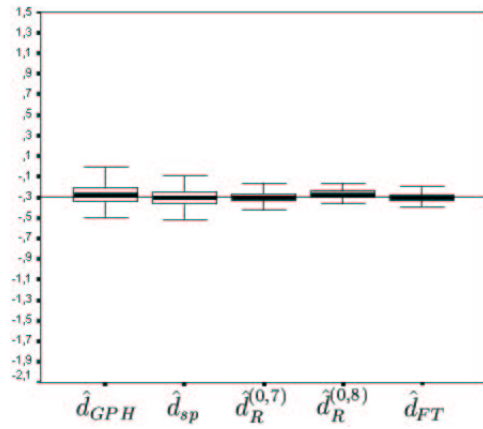


Figura E.4: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\theta_1 = -0,3$ .

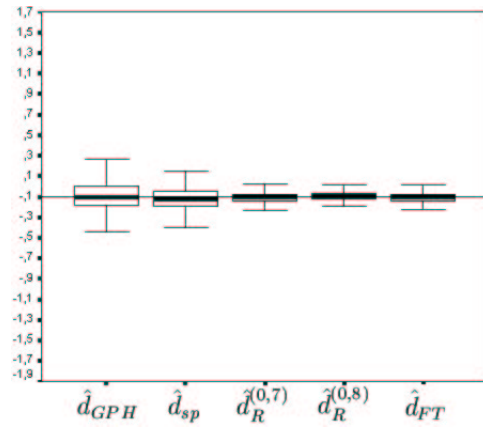


Figura E.5: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\theta_1 = -0,1$ .

Observe que, nas Figuras E.1 à E.5, para  $\theta_1$  assumindo valores negativos, em geral, a variabilidade das estimativas, aumenta à medida que  $\theta_1$  aproxima-se de zero. Sendo que quando foi utilizado para diferenciar a série temporal os estimadores  $\hat{d}_R^{(0,8)}$  e  $\hat{d}_{FT}$ , esse aumento na variabilidade é menor. Em média, as estimativas estão muito próximas do verdadeiro valor de  $\theta_1$  (linha horizontal).

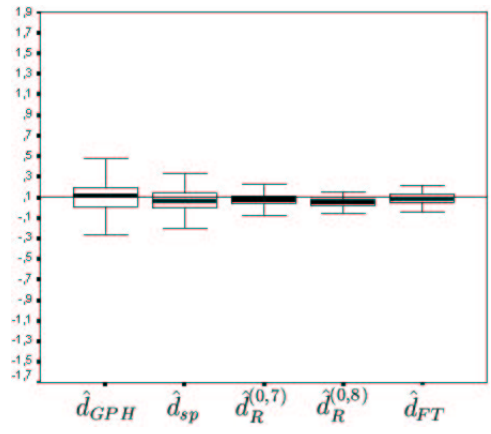


Figura E.6: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\theta_1 = 0, 1$ .

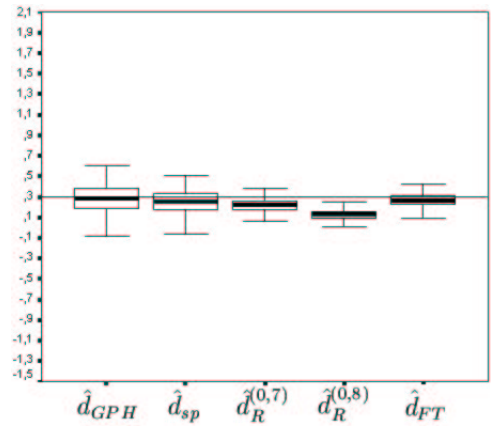


Figura E.7: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\theta_1 = 0, 3$ .



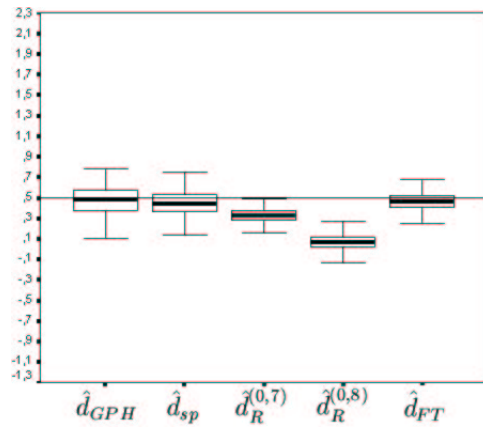


Figura E.8: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\theta_1 = 0, 5$ .

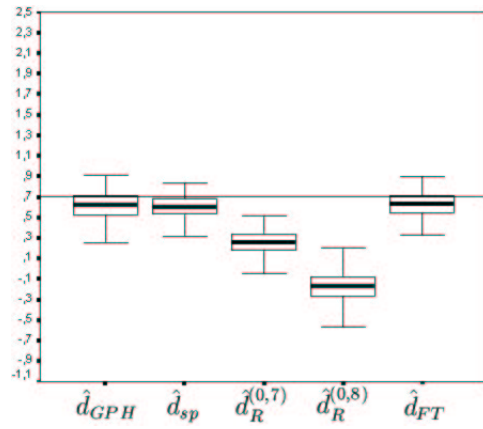


Figura E.9: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\theta_1 = 0, 7$ .

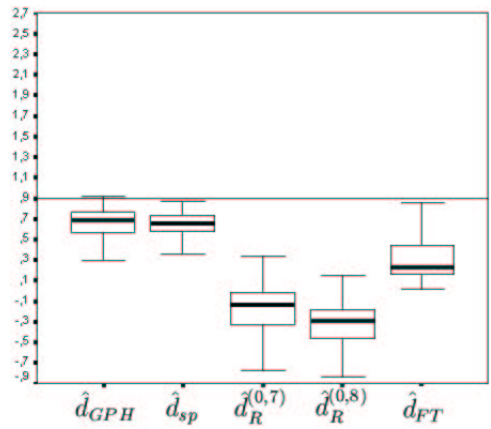


Figura E.10: Box-Plot das estimativas do parâmetro  $\theta_1 = 0,9$ .

Para  $\theta_1$  assumindo valores positivos (ver Figuras E.6 à E.10), a variabilidade das estimativas de  $\theta_1$  aumentam à medida que esse parâmetro se afasta de zero (ou se aproxima de 1). Entretanto, para os estimadores  $\hat{d}_R^{(0.7)}$  e  $\hat{d}_R^{(0.8)}$ , em média, à medida que  $\theta_1$  se afasta de zero, as estimativas se afastam do verdadeiro valor de  $\theta_1$  (linha horizontal). Quando  $\theta_1 = 0,9$  isto também ocorre para todos os estimadores de  $d$  utilizados.

# ANEXO F

Apesar de não provarmos matematicamente verificamos, neste anexo, a validade da seguinte equivalência

$$\sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \frac{\sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k}}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-(k+i)}}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2} = 0,$$

utilizada na demonstração da expressão (4.7).

Observe inicialmente que é preciso verificar a equivalência

$$\sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} = 0, \quad (\text{F.1})$$

já que

$$\sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \frac{\sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k}}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} = 0$$

e

$$\sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k}}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} = 0.$$

Provaremos a expressão (F.1) para o valor  $p = 2$ . Neste caso  $1 \leq i \leq 2$ . Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} &= \hat{\psi}_0(\hat{\varepsilon}_3 \hat{\varepsilon}_{3-i} + \hat{\varepsilon}_4 \hat{\varepsilon}_{4-i} + \cdots + \hat{\varepsilon}_n \hat{\varepsilon}_{n-i}) + \hat{\psi}_1(\hat{\varepsilon}_3 \hat{\varepsilon}_{3-i-1} + \\ &+ \hat{\varepsilon}_4 \hat{\varepsilon}_{4-i-1} + \cdots + \hat{\varepsilon}_n \hat{\varepsilon}_{n-i-1}) + \hat{\psi}_2(\hat{\varepsilon}_3 \hat{\varepsilon}_{3-i-2} + \hat{\varepsilon}_4 \hat{\varepsilon}_{4-i-2} + \cdots + \hat{\varepsilon}_n \hat{\varepsilon}_{n-i-2}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\hat{\psi}_3(\hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_{3-i-3} + \hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_{4-i-3} + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-i-3}) + \hat{\psi}_4(\hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_{3-i-4} + \hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_{4-i-4} + \\
& + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-i-4}) + \cdots
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} &= \hat{\psi}_0(\hat{\varepsilon}_1\hat{\varepsilon}_{1-i} + \hat{\varepsilon}_2\hat{\varepsilon}_{2-i} + \hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_{3-i} + \hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_{4-i} + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-i}) + \\
& + \hat{\psi}_1(\hat{\varepsilon}_2\hat{\varepsilon}_{2-i-1} + \hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_{3-i-1} + \hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_{4-i-1} + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-i-1}) + \hat{\psi}_2(\hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_{3-i-2} + \\
& \hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_{4-i-2} + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-i-2}) + \hat{\psi}_3(\hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_{4-i-3} + \hat{\varepsilon}_5\hat{\varepsilon}_{5-i-3} + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-i-3}) + \\
& \hat{\psi}_4(\hat{\varepsilon}_5\hat{\varepsilon}_{5-i-4} + \hat{\varepsilon}_6\hat{\varepsilon}_{6-i-4} + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-i-4}) + \cdots.
\end{aligned}$$

Se  $p = 2$ ,  $1 \leq i \leq 2$ . Então, quando  $i = 1$ ,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} &= \hat{\psi}_0(\hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_3 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-1}) + \hat{\psi}_1(\hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_1 + \\
& + \hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_2 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-2}) + \hat{\psi}_2(\hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_1 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-3}) + \\
& + \hat{\psi}_3(\hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_{-1} + \hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_0 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-4}) + \hat{\psi}_4(\hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_{-2} + \hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_{-1} + \\
& + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-5}) + \cdots
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} &= \hat{\psi}_0(\hat{\varepsilon}_1\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}_2\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_3 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-1}) + \\
& + \hat{\psi}_1(\hat{\varepsilon}_2\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_2 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-2}) + \hat{\psi}_2(\hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_0 + \\
& \hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_1 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-3}) + \hat{\psi}_3(\hat{\varepsilon}_4\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}_5\hat{\varepsilon}_1 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-4}) + \\
& \hat{\psi}_4(\hat{\varepsilon}_5\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}_6\hat{\varepsilon}_1 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n\hat{\varepsilon}_{n-5}) + \cdots.
\end{aligned}$$

Assim, como  $\hat{\varepsilon}_l = 0$ ,  $l \leq 0$ , então

$$\sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} = \sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} = 0.$$

Quando  $i = 2$ ,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} &= \hat{\psi}_0(\hat{\varepsilon}_3 \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_4 \hat{\varepsilon}_2 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n \hat{\varepsilon}_{n-2}) + \hat{\psi}_1(\hat{\varepsilon}_3 \hat{\varepsilon}_0 + \\
&+ \hat{\varepsilon}_4 \hat{\varepsilon}_1 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n \hat{\varepsilon}_{n-3}) + \hat{\psi}_2(\hat{\varepsilon}_3 \hat{\varepsilon}_{-1} + \hat{\varepsilon}_4 \hat{\varepsilon}_0 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n \hat{\varepsilon}_{n-4}) + \\
&+ \hat{\psi}_3(\hat{\varepsilon}_3 \hat{\varepsilon}_{-2} + \hat{\varepsilon}_4 \hat{\varepsilon}_{-1} + \cdots + \hat{\varepsilon}_n \hat{\varepsilon}_{n-5}) + \hat{\psi}_4(\hat{\varepsilon}_3 \hat{\varepsilon}_{-3} + \hat{\varepsilon}_4 \hat{\varepsilon}_{-2} + \\
&+ \cdots + \hat{\varepsilon}_n \hat{\varepsilon}_{n-6}) + \cdots
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} &= \hat{\psi}_0(\hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_{-1} + \hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_0 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n \hat{\varepsilon}_{n-2}) + \\
&+ \hat{\psi}_1(\hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_{-1} + \hat{\varepsilon}_3 \hat{\varepsilon}_0 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n \hat{\varepsilon}_{n-3}) + \hat{\psi}_2(\hat{\varepsilon}_3 \hat{\varepsilon}_{-1} + \\
&\hat{\varepsilon}_4 \hat{\varepsilon}_0 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n \hat{\varepsilon}_{n-4}) + \hat{\psi}_3(\hat{\varepsilon}_4 \hat{\varepsilon}_{-1} + \hat{\varepsilon}_5 \hat{\varepsilon}_0 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n \hat{\varepsilon}_{n-5}) + \\
&\hat{\psi}_4(\hat{\varepsilon}_5 \hat{\varepsilon}_{-1} + \hat{\varepsilon}_6 \hat{\varepsilon}_0 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n \hat{\varepsilon}_{n-6}) + \cdots.
\end{aligned}$$

Analogamente, como  $\hat{\varepsilon}_l = 0$ ,  $l \leq 0$ , então

$$\sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} = \sum_{k \geq 0} \hat{\psi}_k \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i-k} = 0.$$

conforme queríamos verificar.