

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Método numérico adaptativo baseado em wavelets

por

Igor Fagundes da Silva

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Matheus Correia dos Santos
Orientador

Prof. Dr. Jean Carlo Pech de Moraes
Coorientador

Porto Alegre, fevereiro de 2021.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Fagundes da Silva, Igor

Método numérico adaptativo baseado em wavelets / Igor Fagundes da Silva.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2021.

82 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2021.

Orientador: dos Santos, Matheus Correia; Coorientador: Pech de Moraes, Jean Carlo

Dissertação: Matemática Aplicada,
Dissertação, Tese, Mestrado, Doutorado

Método numérico adaptativo baseado em wavelets

por

Igor Fagundes da Silva

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade
Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a
obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Matheus Correia dos Santos

Coorientador: Prof. Dr. Jean Carlo Pech de Moraes

Banca examinadora:

Prof. Dr. Arthur Miranda do Espírito Santo
UFRGS

Prof. Dr. Cilon Valdez Ferreira Perusato
UFPE

Prof. Dr. Julio Cesar Lombaldo Fernandes
UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
fevereiro de 2021.

Prof. Dr. Esequia Sauter
Coordenador

Sumário

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	viii
RESUMO	x
ABSTRACT	xi
1 INTRODUÇÃO	1
2 INTRODUÇÃO ÀS WAVELETS	5
2.1 Função Base	5
2.2 Análise Multirresolução	6
2.3 Análise por Fourier	9
2.4 Biortogonalidade	15
2.5 Propriedade da localidade	22
2.6 Momentos Nulos e Regularidade	24
2.7 Polinômio Espectral	26
2.8 Interpolação Wavelet	32
2.8.1 Erro de truncamento wavelet	37
3 DISCRETIZAÇÃO DIFERENCIAL	39
3.1 Operadores de Restrição e de Prolongamento	39
3.2 Fórmulas de discretização	40
3.2.1 Advecção Linear: $\mathcal{L}_1(u) = u_x$	40
3.2.2 Difusão: $\mathcal{L}_2(u) = u_{xx}$ e operadores diferenciais de ordem mais alta . .	41
3.2.3 Advecção Não Linear: $\mathcal{L}_{01}(u, v) = uv_x$	45
4 MÉTODO NUMÉRICO ADAPTATIVO USANDO WAVELETS	47

4.1 Malha adaptativa	47
4.2 Resultados Numéricos	50
4.2.1 Equação de Burgers com viscosidade	50
4.2.1.1 Interpolação de ordem 4 usando Diferenças finitas simples (ordem 2) (IO4D2):	53
4.2.1.2 Interpolação e Diferenças finitas de ordem 6 (IDO6):	57
4.2.2 Equação de Korteweg-de Vries	60
4.2.2.1 Interpolação e equação de Kdv de ordem 4:	65
4.2.2.2 Interpolação e equação de Kdv de ordem 6:	70
5 CONCLUSÕES	76
6 APÊNDICE	79
6.1 Matrizes Gama	79
6.1.1 Matriz Gama de ordem 4	79
6.1.2 Matriz Gama de ordem 6	80
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81

Lista de Figuras

Figura 2.1	Relação entre tempo e frequência da Transformada Wavelet . . .	23
Figura 2.2	Funções de escalonamento ϕ e wavelet ψ de Daubechies com K momentos nulos [11].	31
Figura 2.3	Função de escala de Deslauriers-Dubuc, $K = 2$	33
Figura 4.1	Para 257 pontos iniciais e $\epsilon = 0,001$, o erro de aproximação de $f(x)$ é dado por $7,7 \times 10^{-4}$, e o número de pontos finais por 41.	48
Figura 4.2	No ponto em destaque é feita a diferenciação espacial usando os pontos vizinhos. O círculo é um ponto eliminado [5].	49
Figura 4.3	IO4D2. $M = 128$, erro = 0,1309, 67 pontos	54
Figura 4.4	IO4D2. $M = 256$, erro = 0,0227, 85 pontos	55
Figura 4.5	IO4D2. $M = 512$, erro = 0,0056, 113 pontos	55
Figura 4.6	IO4D2. Gráfico logarítmico do erro em relação a M . O coeficiente angular da reta é -2,214.	56
Figura 4.7	IDO6. $M = 128$, erro = 0,0191, 75 pontos	57
Figura 4.8	IDO6. $M = 256$, erro = 0,0070, 95 pontos	58
Figura 4.9	IDO6. $M = 512$, erro = $8,6 \times 10^{-4}$, 119 pontos	58
Figura 4.10	IDO6. Gráfico logarítmico do erro em relação a M . O coeficiente angular da reta é -1,792.	59
Figura 4.11	Comparação gráfica entre as soluções analíticas e por Goda, $M = 256$, erro = 0,0233.	64
Figura 4.12	Gráfico do erro da aproximação pelo método Goda em função do nível de pontos M . O coeficiente angular da reta é -1,017.	65
Figura 4.13	Gráfico da solução u , ordem 4, com $M = 256$, $\epsilon = 10^{-5}$ e número de pontos finais igual a 212.	66
Figura 4.14	Gráfico do erro, ordem 4, em função da ordem do número de pontos (M) para $\epsilon = 10^{-5}$. O coeficiente angular é -1,096.	66
Figura 4.15	Gráfico do erro em função de ϵ , ordem 4, para $M = 256$.	67
Figura 4.16	Gráfico do erro em função de ϵ , ordem 4, para $M = 512$.	68

Figura 4.17	Gráfico da solução u , ordem 6, com $M = 256$, $\epsilon = 10^{-5}$ e número de pontos finais igual a 110.	70
Figura 4.18	Gráfico do erro, ordem 6, em função da ordem do número de pontos (M) para $\epsilon = 10^{-5}$. O coeficiente angular da reta é -1,202.	71
Figura 4.19	Gráfico do erro em função de épsilon ϵ , ordem 6, para $M = 256$.	72
Figura 4.20	Gráfico do erro em função de épsilon ϵ , ordem 6, para $M = 512$.	73

Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Coeficientes de Daubechies.	31
Tabela 2.2	Coeficientes $h[n]$ associados ao filtro interpolante P_H	37
Tabela 3.1	Coeficientes Gama normalizados de ordem 4	44
Tabela 3.2	Coeficientes Gama normalizados de ordem 6	45
Tabela 4.1	Comparação dos erros de cada ordem usado em Burgers, no tempo final $t_f = 0,5$. Os valores em parênteses são os números de pontos finais.	60
Tabela 4.2	Erro da aproximação pelo método Goda em função do nível de pontos M	64
Tabela 4.3	Número de pontos da solução final, ordem 4, em função de M e do erro para $\epsilon = 10^{-5}$	65
Tabela 4.4	Número de pontos da solução final, ordem 4, em função de ϵ e do erro, para $M = 256$	68
Tabela 4.6	Número de pontos da solução final, ordem 4, em função de ϵ e do erro, para $M = 512$	69
Tabela 4.8	Número de pontos da solução final, ordem 6, em função de M e do erro para $\epsilon = 10^{-5}$	70
Tabela 4.9	Número de pontos da solução final, ordem 6, em função de ϵ e do erro, para $M = 256$	72
Tabela 4.11	Número de pontos da solução final, ordem 6, em função de ϵ e do erro, para $M = 512$	74
Tabela 4.13	Comparação dos erros de cada método usado em Kdv, no tempo final. Os valores em parênteses são os números de pontos finais.	75
Tabela 6.1	Coeficientes Gama normalizados de ordem 4	80
Tabela 6.2	Coeficientes Gama normalizados de ordem 6	80

DECLARAÇÃO

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil

RESUMO

As wavelets são uma eficiente ferramenta para se analisar e decompor uma função em regiões de diferentes variabilidades. Através da análise multirresolução é possível criar bases de funções, que formam um sistema ortogonal, responsável pela geração destas wavelets. Generalizando os espaços de funções wavelets para sistemas biortogonais define-se a decomposição por wavelet de interpolação, o que permite a manipulação de uma função, definida numa malha irregular, pela interpolação nos valores pontuais desta malha. Estes tipos de wavelets também são usados na construção de operadores de diferenças finitas adaptativas, que serão aplicados na solução numérica das equações diferenciais parciais de Burgers com viscosidade e de Korteweg-de Vries por meio do software MATLAB. Resolvidas numericamente estas equações, serão feitas comparações com os erros das soluções ao se variar parâmetros de simulação.

ABSTRACT

Wavelets are an efficient tool to analyze and decompose a function in regions of different variability. Through multiresolution analysis it is possible to create function bases, which form an orthogonal system, responsible for the generation of these wavelets. Generalizing the spaces of wavelet functions to biorthogonal systems, the decomposition by interpolation wavelet is defined, which allows the manipulation of a function, defined in an irregular mesh, by interpolation in the point values of this mesh. These types of wavelets are also used in the construction of adaptive finite difference operators, which will be applied in the numerical solution of the partial differential equations of Burgers with viscosity and Korteweg-de Vries using MATLAB software. After solving these equations numerically, comparisons will be made with the errors of the solutions when varying simulation parameters.

1 INTRODUÇÃO

Uma função, ou sinal, pode apresentar diferentes regiões de variabilidades, onde em uns momentos há certa suavidade, em outros, há a ocorrência de diferentes tipos de mudanças bruscas como singularidades e descontinuidades. Com base nisso, as wavelets são uma poderosa ferramenta para se analisar e decompor uma função nestas regiões por meio da sua representação em diferentes escalas de tempo e de frequência. Um método clássico de se decompor uma função no domínio frequência é por meio da análise de Fourier. O problema é que este método extrai diferentes informações de frequência sem especificar os instantes onde elas ocorrem. É aí que as wavelets tem vantagem, pois permitem a extração de informações em diferentes regiões de uma função.

Dada uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ é possível a sua decomposição por meio de funções base, conhecidas como funções escala, ou funções escalonamento, que por meio de translações e mudanças em sua escala pode-se criar diferentes subespaços pertencentes a $L^2(\mathbb{R})$, cujas propriedades são descritas pela análise multirresolução [12]. Cada um destes subespaços é formado pela combinação linear das funções base transladadas numa dada escala, ou resolução, que está associado ao nível de detalhe de uma função. As translações estão associadas aos instantes onde se quer analisar os detalhes. Os subespaços mais refinados contém os de menores detalhes. O subespaço formado pela diferença entre um de maior resolução com o de menor resolução gera as wavelets.

O processo de se decompor uma função em seus coeficientes wavelets é conhecido como transformada wavelet discreta (DWT), enquanto que o processo inverso é dado pela transformada wavelet discreta inversa (IDWT).

Estes coeficientes permitem construir diferentes operadores diferenciais discretos, que são úteis na resolução numérica de equações diferenciais.

No capítulo 2 são introduzidos os principais tópicos envolvendo propriedades das wavelets. É descrita a análise multirresolução de funções base que formam sistemas ortogonais e sua relação no domínio frequência por meio de Fourier. Depois são descritas as propriedades da biortogonalidade [3], [11], onde os espaços de wavelets são formados por bases de Riesz, tendo-se, assim, bases não limitadas às ortogonais. Isto permite a definição das wavelets duais, que funcionam como uma espécie de um complemento a mais na decomposição. Estas análises possibilitam a construção de polinômios espectrais, ou seja, no domínio frequência, cujos coeficientes permitem o uso da decomposição wavelet. A ordem destes polinômios estão relacionados com o número de momentos nulos e com a regularidade das correspondentes wavelets. É feita uma breve descrição das wavelets ortogonais de Daubechies, as mais populares na literatura, cujo polinômio permite construir outro mais geral, no qual os seus coeficientes dão origem as wavelets de interpolação [5], [11], que formam um sistema biortogonal e serão usadas na construção dos operadores diferenciais discretos no capítulo seguinte. A ordem da interpolação wavelet é definida pela ordem do respectivo polinômio. Por fim, é feito uma análise do erro ao se truncar (i.e. eliminar) os coeficientes wavelets com valores menores que certa tolerância ϵ da decomposição wavelet por interpolação, processo que será útil na obtenção de uma malha irregular, no capítulo 4.

No capítulo 3 é feita a análise de construção dos operadores diferenciais discretos por meio de coeficientes wavelets biortogonais. Esta parte foi baseada no trabalho proposto por Domingues [5]. Mais especificamente, são discretizados os operadores de advecção linear $\mathcal{L}_1(u) = u_x$, de difusão $\mathcal{L}_2(u) = u_{xx}$, de dispersão $\mathcal{L}_3(u) = u_{xxx}$ e de advecção não linear $\mathcal{L}_{01}(u, v) = uv_x$. Esta análise fornece uma matriz formada pelos coeficientes wavelets de interpolação, definida como matriz Gama, cujos autovetores, devidamente normalizados, formam os coeficientes ponderados dos operadores diferenciais discretos [15]. Os autovalores dependem da ordem de diferenciação desejada. Por último, é visto que o operador discreto advectivo não linear se reduz, neste caso, ao operador advectivo linear.

No capítulo 4 tem-se a construção de uma malha adaptativa, onde a partir de uma malha regular de pontos, em um certo nível de refinamento, são feitas eliminações destes pelo critério de truncamento dos coeficientes wavelets [10]. Obtém-se, assim, uma malha irregular que é densa em regiões próximas a singularidades e mais esparsa em regiões mais suaves de uma função. Com o uso dos operadores diferenciais discretos, deduzidos no capítulo 3, nestes pontos relevantes, tem-se, então, a operação por diferenças finitas adaptativa, que serão aplicadas na solução numérica de equações diferenciais parciais (EDP) por meio do programa MATLAB. Estas EDPs são as equações de Burgers com viscosidade [16] e de Korteweg-de Vries (Kdv) [4]. Em ambas as equações serão estabelecidas as relações entre o espaçamento temporal e espacial para a estabilidade da solução numérica. No caso da equação de Burgers a resolução é de maneira explícita, onde os pontos da solução no passo de tempo futuro dependem somente dos pontos de tempos passados. Neste caso, os resultados numéricos serão analisados com o uso da interpolação wavelet de ordem 4 junto com diferenças finitas de ordem 2, e depois, com o uso da interpolação wavelet e diferenças finitas, ambas de ordem 6. Já a equação Kdv é resolvida de maneira implícita pelo método proposto por Goda [6], onde a solução numérica da EDP é obtida da resolução de um sistema linear no qual a matriz dos coeficientes depende dos valores pontuais da solução. Feito isto, este método será comparado e adaptado com as discretizações de ordens mais altas, que são a interpolação wavelet e diferenças finitas, ambas de ordem 4, num primeiro momento, e ambas de ordem 6, numa etapa posterior. Resolvida cada uma das equações, são feitas análises gráficas e tabeladas dos erros de aproximação das soluções, junto com o seus números de pontos no tempo final das simulações, ao se variar os parâmetros como o número de pontos das condições iniciais, a ordem do algoritmo (associado a interpolação e diferenças finitas) e a constante de tolerância ϵ .

No capítulo 5 são feitas as conclusões dos resultados numéricos das EDPS.

No apêndice tem as matrizes Gama de ordem 4 e 6 e os respectivos coeficientes Gama.

2 INTRODUÇÃO ÀS WAVELETS

Neste capítulo são apresentados os principais tópicos da teoria de wavelets. São descritas as definições da análise de multirresolução em $L^2(\mathbb{R})$ e sua relação com o domínio frequência. Além disso, tem-se a generalização da análise de multirresolução em sistemas biortogonais e as deduções das fórmulas clássicas de decomposição e de reconstrução. São dadas as principais propriedades das wavelets e as características dos polinômios espectrais associados a elas. É descrita a decomposição por wavelets de interpolação, que é o método utilizado neste trabalho, bem como as correspondentes fórmulas de decomposição e de reconstrução.

2.1 Função Base

A ideia fundamental no uso das wavelets é representar funções em diferentes escalas de tempo e de frequência. Esta função é decomposta usando uma base formada por wavelets transladadas de diferentes escalas, o que permite se obter detalhes de sua variabilidade ao longo do tempo.

Um método clássico e bastante conhecido de se decompor uma função tem como princípio a análise de Fourier, no qual a decomposição é feita por meio da superposição das funções base seno e cosseno, obtendo-se, com isto, através dos seus coeficientes de decomposição (também conhecidos como coeficientes de Fourier), informações sobre a sua frequência. Contudo, este método apresenta um fraco desempenho quando surge a necessidade de se analisar perturbações repentinas, como um pico de tensão numa rede elétrica, ou mesmo alguma descontinuidade. Para estes casos, as wavelets surgem como uma solução, pois elas conseguem extrair informações sobre a variabilidade em diferentes instantes de tempo e em diferentes escalas, ou resoluções, de uma função por meio dos coeficientes wavelets.

A fim de se aplicar a decomposição em termos de posição e de detalhe, tem-se a função mais simples, que serve de base para a construção das wavelets, conhecida como função de Haar, que é definida por:

$$\phi(x) = \chi_{[0,1)}. \quad (2.1)$$

Com isso, tem-se um espaço V_0 , que é dado por todas as combinações lineares dos elementos $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$, formado pelas translações da função de Haar ϕ . Fazendo um escalonamento, no domínio x , em cada função de V_0 , que define certo nível de detalhe ou resolução $j \in \mathbb{Z}$, dado por $\phi(2^j x)$, tem-se o espaço $V_j = \{\phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$.

Assim, por exemplo, para uma resolução j suficientemente alta, uma forma de se aproximar qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser feita pelo seguinte somatório:

$$f(x) \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \phi(2^j x - k),$$

onde f_k seriam as amostras de f em pontos uniformemente espaçados, $f_k = f\left(\frac{k}{2^j}\right)$.

Na próxima seção, são definidos espaços V_j mais gerais, correspondentes a diferentes funções ϕ , também conhecidas como funções escala, que servem de base para construção de wavelets mais gerais.

2.2 Análise Multirresolução

Seja $V_j, j \in \mathbb{Z}$, uma sequência de subespaços de funções em $L^2(\mathbb{R})$. A coleção de espaços $\{V_j; j \in \mathbb{Z}\}$ é chamada de uma análise multirresolução (MRA) de $L^2(\mathbb{R})$ com a função de escalonamento ϕ se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. (Aninhado) $V_j \subset V_{j+1}$;

2. (Densidade) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$;
3. (Separação) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;
4. (Dimensionamento) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0$;
5. (Base ortonormal) $\phi \in V_0$ e o conjunto $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base ortonormal para V_0 em $L^2(\mathbb{R})$.

A condição 1 implica que as funções mais refinadas conseguem representar as com menor nível de detalhe j , tendo-se a seguinte concatenação de subespaços:

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$$

A condição 2 tem como consequência que qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser aproximada em $L^2(\mathbb{R})$ por funções pertencentes aos espaços V_j ao se fazer $j \rightarrow \infty$.

A condição 3 significa que o espaço nulo $\{0\}$ esta contido em todos os espaços V_j , ou de outra forma, que nenhuma função $f \neq 0$ pode pertencer a todos estes espaços.

A condição 4 deriva da própria definição de escalonamento, feita na seção anterior.

Da condição 5, se $\{V_j; j \in \mathbb{Z}\}$ é uma análise de multirresolução com a função de escalonamento ϕ , então para $j \in \mathbb{Z}$, o conjunto de funções $\{\phi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base ortonormal para V_j :

$$\langle \phi_{jk}, \phi_{jl} \rangle = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j x - k) \overline{\phi(2^j x - l)} dx = \delta_{k,l} = \begin{cases} 0, & l \neq k \\ 1, & l = k \end{cases}.$$

Por meio da condição 1, a função ϕ pode ser representada pela relação de dupla escala:

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k) \quad (2.2)$$

onde $p_k = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x - k)} dx$ e $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |p_k|^2 < \infty$, devido à convergência de (2.2) em $L^2(\mathbb{R})$.

A função wavelet ψ é escolhida de modo a ser definida por:

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{p_{1-k}} \phi(2x - k) \quad (2.3)$$

Esta escolha garante a ortogonalidade com a função de escalonamento ϕ , desde que, usando as equações (2.2) e (2.3):

$$\begin{aligned} \langle \phi(x), \psi(x) \rangle &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_l \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{p_{1-k}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - l) \overline{\phi(2x - k)} dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_k \overline{p_{1-k}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta maneira, são definidos os espaços de detalhe, dados pelo conjunto $\{W_j; j \in \mathbb{Z}\}$ formado por $\{\psi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$ que é o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} , ou seja:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (2.4)$$

onde $W_j = V_{j+1} \setminus V_j$; Os espaços W_j pegam os detalhes no refinamento. Além do mais, $\{\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base ortonormal de W_j .

Por meio da relação (2.4) e do fato de que ao se fazer $j \rightarrow -\infty$ tem-se que $V_j \rightarrow \{0\}$, permite obter a relação:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = \bigoplus_{l=-\infty}^j W_l.$$

Ao se fazer $j \rightarrow \infty$, chega-se na decomposição do espaço $L^2(\mathbb{R})$:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j.$$

A função de Haar ϕ é representada pela relação de dupla escala por:

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1) \quad (2.5)$$

A correspondente wavelet de Haar tem a seguinte representação:

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) \quad (2.6)$$

Com base na MRA, consegue-se definir o operador projeção P_j de uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ no espaço V_j por:

$$P_j f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{jk} \rangle \phi_{jk}(x),$$

onde a sequência de coeficientes $\langle f, \phi_{jk} \rangle$ deve pertencer ao espaço $l^2(\mathbb{Z})$, ou seja:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_{jk} \rangle|^2 < \infty.$$

De modo análogo, tem-se a projeção Q_j no espaço W_j , dada por:

$$Q_j f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}(x),$$

onde $\langle f, \psi_{jk} \rangle_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$.

2.3 Análise por Fourier

Da teoria clássica de Fourier, tem-se as relações dadas, respectivamente, pela transformada de Fourier (TF) de uma função f e sua inversa:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixw} dx ; f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{ixw} dw \quad (2.7)$$

Estas relações são úteis para determinar o comportamento no domínio frequência w de uma função. Através delas é possível se definir polinômios associados às funções ϕ e ψ , que posteriormente serão usadas nas construção de wavelets.

Usando a identidade de Parseval $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw$, tem-se a seguinte proposição:

Proposição 1. *A relação de ortonormalidade da função ϕ , no domínio frequência, é equivalente a:*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(w + 2\pi k)|^2 = 1, \forall w \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \delta_{0,k} &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\phi(x-k)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(w)|^2 e^{-ikw} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} |\hat{\phi}(w)|^2 e^{-ikw} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{\phi}(u + 2l\pi)|^2 e^{-iku} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(u + 2l\pi)|^2 \right) e^{-iku} du. \end{aligned}$$

Ou seja, a função $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(w + 2\pi l)|^2$ sendo 2π -periódica de valor unitário, tem como representação equivalente em série de Fourier $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ikw}$, onde todos os seus coeficientes de Fourier c_k são iguais a zero, exceto no índice $k = 0$, cujo o valor é 1, conforme se obteve na demonstração, $c_k = \delta_{0,k}$. \square

De modo análogo, uma função ψ é ortogonal a $\{\phi(x-l), l \in \mathbb{Z}\}$ se, e somente se:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(w + 2\pi k) \overline{\hat{\psi}(w + 2\pi k)} = 0, \forall w \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

Aplicando a TF na equação de escalonamento $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k)$,

tem-se que:

$$\hat{\phi}(w) = \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) P(e^{-i\frac{w}{2}}) \quad (2.10)$$

onde o polinômio P é dado por:

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k z^k \quad (2.11)$$

para $z = e^{-i\frac{w}{2}}$; ou $P(w) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{-ikw}$, que é uma função 2π -periódica pertencente a $L^2(\mathbb{T}) = L^2([-\pi, \pi])$. Da teoria de filtros em processamento digital de sinais, este polinômio também é conhecido como filtro de dupla escala do tipo passa-baixa, pois, no domínio w satisfaz $P(0) = 1$ e $P(\pm\pi) = 0$.

A condição $P(0) = 1$ se obtém através da integração da equação de dupla escala (2.2) e do uso da condição de ortonormalização $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$, obtendo-se, assim, a identidade:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = 2 \quad (2.12)$$

Para a justificativa da condição $P(\pm\pi) = 0$, usa-se a seguinte proposição [9]:

Proposição 2. *Se o módulo da TF da função de escalonamento ϕ for contínuo, então:*

$$\hat{\phi}(2k\pi) = 0, \text{ para todo } k \neq 0, k \in \mathbb{Z}$$

Demonstração. Por contradição, se $\hat{\phi}(2k_0\pi) \neq 0$ para algum $k_0 \neq 0, k_0 \in \mathbb{Z}$, então $\hat{\phi}(2k_0\pi) > C$, para alguma constante $C > 0$, logo

$$|\hat{\phi}(w)|^2 + |\hat{\phi}(w + 2k_0\pi)|^2 > 1 + \frac{1}{2}C^2 \text{ quando } w \in [-\epsilon, \epsilon]$$

para algum $\epsilon > 0$, pela continuidade de $|\hat{\phi}(w)|$ e $\hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx =$
1. Isto contradiz a identidade (2.8). \square

Assim, usando a equação (2.10), tem-se que $\hat{\phi}(2\pi k) = \hat{\phi}(\pi k)P(e^{-i\pi k})$,
onde

$$P(e^{-i\pi k}) = P(\pi k) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n e^{-ik\pi n} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n (-1)^{kn}.$$

A continuidade de $|\hat{\phi}(w)|$ e a identidade (2.8) implicam que $\hat{\phi}((2k_0 + 1)\pi) \neq 0$ para algum $k_0 \in \mathbb{Z}$. Então $\hat{\phi}(2(2k_0 + 1)\pi) = \hat{\phi}((2k_0 + 1)\pi)P(e^{-i\pi(2k_0+1)})$,
onde pela proposição (2) tem-se que $\hat{\phi}(2(2k_0 + 1)\pi) = 0$, logo

$$P(e^{-i\pi(2k_0+1)}) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n p_n = 0 \quad (2.13)$$

pois $2k_0 + 1$ é ímpar.

Para o caso da função de Haar, cujos os coeficientes p_k são $p_0 = p_1 = 1$,
o polinômio P é dado por:

$$P(w) = \frac{1 + e^{-ikw}}{2}.$$

O módulo deste polinômio é dado por:

$$|P(w)|^2 = P(w)\overline{P(w)} = \frac{1 + e^{-ikw}}{2} \frac{1 + e^{ikw}}{2} = \frac{1 + \cos(w)}{2} = \cos^2\left(\frac{w}{2}\right),$$

ou seja, $|P(w)| = \left| \cos\left(\frac{w}{2}\right) \right|$. Pelas propriedades da função cosseno, vê-se facilmente
que $P(0) = 1$ e $P(\pm\pi) = 0$.

Iterando a relação $\hat{\phi}(w) = \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right)P(e^{-i\frac{w}{2}})$ de maneira recursiva n vezes,
chega-se na expressão $\hat{\phi}(w) = \prod_{j=1}^n P(e^{-i\frac{w}{2^j}})\hat{\phi}\left(\frac{w}{2^n}\right)$, que no limite $n \rightarrow \infty$ é dado por

$\hat{\phi}(w) = \prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-i\frac{w}{2^j}})\hat{\phi}(0)$. Da condição de ortonormalização $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$ e das relações de Fourier (2.7), obtém-se a expressão de $\hat{\phi}(w)$ em função do polinômio P :

$$\hat{\phi}(w) = \prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-i\frac{w}{2^j}}).$$

Esta fórmula, por envolver infinitos produtos, tem mais utilidade para fins teóricos do que práticos [2].

A relação de ortonormalidade de ϕ em função do polinômio P satisfaz a seguinte proposição:

Proposição 3. *A função ϕ é ortonormal se, e somente se, seu polinômio de dupla escala P satisfaz a relação:*

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1, \quad z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \quad (2.14)$$

Demonstração. Para provar isto, usa-se as equações (2.8) e (2.10) e a periodicidade 2π de P :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(w + 2\pi k)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\frac{w}{2} + \pi k\right) P(e^{-i\frac{w}{2} - \pi k}) \right|^2 \\ &= |P(e^{-i\frac{w}{2}})|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\frac{w}{2} + 2\pi l\right) \right|^2 + |P(e^{-i\frac{w}{2} - \pi})|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\frac{w}{2} + 2\pi l + \pi\right) \right|^2 \\ &= |P(e^{-i\frac{w}{2}})|^2 \cdot 1 + |P(e^{-i\frac{w}{2} - \pi})|^2 \cdot 1, \end{aligned}$$

onde $-z = e^{-i\frac{w}{2} - \pi}$. □

Reescrevendo a função wavelet ψ e seu respectivo polinômio como:

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k \phi(2x - k) \quad (2.15)$$

e

$$Q(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k z^k, \quad (2.16)$$

a sua TF, de maneira análoga a da equação (2.10), é dada por:

$$\hat{\psi}(w) = \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) Q(e^{-i\frac{w}{2}}). \quad (2.17)$$

Usando esta expressão na equação (2.9), tem-se as seguintes duas relações de equivalência entre a ortogonalidade de ψ com a função de escala ϕ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-k)\phi(x-l)dx = 0, \forall k, l \in \mathbb{Z} \quad (2.18)$$

e

$$P(z)\overline{Q(z)} + P(-z)\overline{Q(-z)} = 0, \forall |z|=1. \quad (2.19)$$

O filtro $Q(w)$ é do tipo passa-banda, satisfazendo no domínio w , $Q(0) = 0$ e $Q(\pm\pi) = 1$.

A condição $Q(0) = 0$ se obtém, através da identidade (2.13):

$$Q(0) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{p_{1-k}} = 0.$$

Enquanto a condição $Q(\pm\pi) = 1$ se obtém, usando a identidade (2.12)

:

$$Q(\pi) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k (-1)^k = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{p_{1-k}} (-1)^k = 1.$$

O filtro da wavelet de Haar tem como coeficientes $q_0 = \overline{p_1} = 1$ e $q_1 = -\overline{p_0} = -1$, logo, o polinômio $Q(w)$ é dado por:

$$Q(w) = \frac{1 - e^{-ikw}}{2},$$

cujos módulo é se obtém de:

$$|Q(w)|^2 = Q(w)\overline{Q(w)} = \frac{1 - e^{-ikw}}{2} \frac{1 - e^{ikw}}{2} = \frac{1 - \cos(w)}{2} = \text{sen}^2\left(\frac{w}{2}\right),$$

ou seja, $|Q(w)| = \left| \operatorname{sen} \left(\frac{w}{2} \right) \right|$.

Das características da função seno, as propriedades $Q(0) = 0$ e $Q(\pm\pi) = 1$ são verificadas.

2.4 Biortogonalidade

Das relações de ortogonalidade (2.14) e (2.19), define-se a matriz:

$$M_{P,Q}(z) = \begin{pmatrix} P(z) & Q(z) \\ P(-z) & Q(-z) \end{pmatrix},$$

cuja inversa é sua transposta conjugada $\overline{M_{P,Q}(z)}^T$ para o caso ortogonal, ou seja,

$$M_{P,Q}(z) \overline{M_{P,Q}(z)}^T = \overline{M_{P,Q}(z)}^T M_{P,Q}(z) = I.$$

Com o objetivo de se obter uma relação inversa, não necessariamente ortogonal, para a matriz $M_{P,Q}(z)$, Chui [3] definiu as seguintes funções:

$$G(z) = \frac{Q(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)} \tag{2.20}$$

e

$$H(z) = \frac{-P(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)} \tag{2.21}$$

onde $\Delta_{P,Q}(z) = \det(M_{P,Q}(z))$ e $\Delta_{P,Q}(z) \neq 0$ em $|z|=1$. Através destas funções, tem-se a matriz $M_{G,H}(z)$, que satisfaz a relação:

$$M_{P,Q}(z) M_{G,H}(z)^T = M_{G,H}(z)^T M_{P,Q}(z) = I, \tag{2.22}$$

ou seja, a inversa de $M_{P,Q}(z)$ é dada por $M_{G,H}(z)^T$.

Estas matrizes vão ser úteis no próximo resultado sobre a decomposição em $L^2(\mathbb{R})$.

As funções G e H são dadas, respectivamente, pelos seguintes polinômios:

$$G(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k z^k, |z|=1 \quad (2.23)$$

e

$$H(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k z^k, |z|=1 \quad (2.24)$$

Para os próximos resultados a seguinte definição será útil:

Definição 2.1. (*Base de Riesz*) O conjunto dado por $\{\phi(x - k); k \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base de Riesz de um espaço V_0 se, e somente se, existirem constantes tais que $0 < A \leq B$, e para todo $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ tem-se que:

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \left\| \sum_k c_k \phi(x - k) \right\|^2 \leq B \sum_k |c_k|^2.$$

Então, definindo-se um conjunto $\{\phi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$ que forma uma base de Riesz do espaço V_j , para $j \in \mathbb{Z}$, tem-se o seguinte teorema que relaciona a soma $V_1 = V_0 \oplus W_0$ com os coeficientes dos polinômios dados acima:

Teorema 2.1. *Através da relação entre $M_{P,Q}(z)$ e $M_{G,H}(z)^T$, e da condição $\Delta_{P,Q}(z) \neq 0$ em $|z|=1$, tem-se a seguinte equação que relaciona a soma por decomposição $V_1 = V_0 \oplus W_0$ com os coeficientes g_k e h_k [3]:*

$$\phi(2x - l) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{2k-l} \phi(x - k) + h_{2k-l} \psi(x - k), l \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \quad (2.25)$$

Demonstração. Da relação $M_{P,Q}(z)M_{G,H}(z)^T = I$, tem-se o seguinte par de identidades:

$$\begin{cases} P(z)G(z) + Q(z)H(z) = 1 \\ P(z)G(-z) + Q(z)H(-z) = 0 \end{cases}, |z|=1 \quad (2.26)$$

Somando e subtraindo a segunda equação da primeira deste sistema, tem-se que:

$$\begin{cases} P(z)(G(z) + G(-z)) + Q(z)(H(z) + H(-z)) = 1 \\ P(z)(G(z) - G(-z)) + Q(z)(H(z) - H(-z)) = 1 \end{cases}, |z|=1 \quad (2.27)$$

Usando as equações (2.23) e (2.24), chega-se a:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(z) \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{2k} z^{2k} + Q(z) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} z^{2k} = 1 \\ P(z) \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{2k-1} z^{2k-1} + Q(z) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k-1} z^{2k-1} = 1 \end{array} \right., \quad |z|=1 \quad (2.28)$$

Multiplicando a primeira equação por $\hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right)$ e a segunda por $z\hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right)$, tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{2k} z^{2k} P(z) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} z^{2k} Q(z) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) z = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{2k-1} z^{2k} P(z) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k-1} z^{2k} Q(z) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Substituindo $z = e^{-i\frac{w}{2}}$ neste sistema e usando as relações (2.10) e (2.17), chega-se a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{2k} \hat{\phi}(w) e^{-ikw} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} \hat{\psi}(w) e^{-ikw} \\ \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) e^{-i\frac{w}{2}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{2k-1} \hat{\phi}(w) e^{-ikw} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k-1} \hat{\psi}(w) e^{-ikw} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Por meio da transformada inversa de Fourier, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\phi(2x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{2k} \phi(x-k) + h_{2k} \psi(x-k) \\ 2\phi(2x-1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{2k-1} \phi(x-k) + h_{2k-1} \psi(x-k) \end{array} \right. \quad (2.31)$$

A generalização deste sistema resulta na identidade (2.25) e na soma $V_1 = V_0 + W_0$.

De modo a provar que $V_0 \cap W_0 = 0$ e se obter a soma direta, considera-se a seguinte equação:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(x-k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \psi(x-k) = 0 \quad (2.32)$$

onde $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ pertencem a $l^2(\mathbb{Z})$. Usando as relações de dupla escala (2.2) e (2.15), tem-se que:

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k p_{l-2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k q_{l-2k} \right) \phi(2x - l) = 0 \quad (2.33)$$

Como o conjunto $\{\phi(2x - l), l \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base de Riesz de V_1 , tem-se que:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k p_{l-2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k q_{l-2k} = 0, l \in \mathbb{Z} \quad (2.34)$$

Multiplicando esta equação por z^l e aplicando novamente o somatório, obtém-se:

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k p_{l-2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k q_{l-2k} \right) z^l = 0 \quad (2.35)$$

Substituindo a relação $z^l = z^{2k+l-2k}$, esta equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^{2k} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{l-2k} z^{l-2k} \right) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k z^{2k} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} q_{l-2k} z^{l-2k} \right) = 0 \quad (2.36)$$

Este somatório pode ser escrito em notação polinomial por:

$$A(z^2)P(z) + B(z^2)Q(z) = 0 \quad (2.37)$$

onde $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ estão associados, respectivamente, a $A(z)$ e $B(z)$.

Trocando z por $-z$, tem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A(z^2)P(z) + B(z^2)Q(z) = 0 \\ A(z^2)P(-z) + B(z^2)Q(-z) = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

onde $A(z^2)$ e $B(z^2)$ são as variáveis desconhecidas e os coeficientes formam a matriz $M_{P,Q}(z)$. Em $|z|=1$ a condição $\Delta_{P,Q}(z) \neq 0$ garante que este sistema seja não singular, portanto, $A(z^2) = B(z^2) = 0$ e as sequências $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ são todas nulas, logo $V_0 \cap W_0 = 0$. \square

Usando a notação $G^*(z) = \overline{G(z)} = \overline{G\left(\frac{1}{z}\right)}$, $|z|=1$, tem-se o seguinte polinômio:

$$G^*(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g_{-k}} z^k, |z|=1 \quad (2.39)$$

que está associado a função de escalonamento $\tilde{\phi}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g_{-k}} \tilde{\phi}(2x - k)$.

A fim de se estabelecer uma relação entre as funções ϕ e $\tilde{\phi}$, tem-se a seguinte definição:

Definição 2.2. *Duas funções escala ϕ e $\tilde{\phi}$, que geram duas análises de multirresolução diferentes $\{V_j\}$ e $\{\tilde{V}_j\}$, respectivamente, de $L^2(\mathbb{R})$, são ditas "funções escala dual", se satisfazem:*

$$\langle \phi(\cdot - l), \tilde{\phi}(\cdot - k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - l) \overline{\tilde{\phi}(x - k)} dx = \delta_{l,k}, \forall k, l \in \mathbb{Z} \quad (2.40)$$

Usando-se a definição de dualidade (2.40), tem-se o seguinte teorema [3], cuja demonstração segue passos análogos ao da equação (2.14):

Teorema 2.2. *As duas funções ϕ e $\tilde{\phi}$ são duais entre si se, e somente se, os respectivos polinômios de dupla escala $P = P_\phi$ e $G^* = G_\phi^*$ satisfazem a relação:*

$$P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1, \forall |z|=1. \quad (2.41)$$

Em analogia à equação (2.39), a wavelet dual $\tilde{\psi}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{-k}} \tilde{\phi}(2x - k)$ tem como o polinômio de dupla escala correspondente:

$$H^*(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{-k}} z^k, |z|=1 \quad (2.42)$$

Assim, tem-se o teorema geral da biortogonalidade, cuja demonstração pode ser vista em [3]:

Teorema 2.3. *Sejam $P = P_\phi$ e $G^* = G_\phi^*$, onde ϕ e $\tilde{\phi}$ são duais entre si. Escolhendo $Q = Q_\psi$ e $H^* = H_{\tilde{\psi}}^*$, as funções $\phi, \tilde{\phi}, \psi$ e $\tilde{\psi}$ satisfazem:*

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, \forall j, k, l, m \in \mathbb{Z} \quad (2.43)$$

$$\begin{cases} \langle \phi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,l} \rangle = 0 \\ \langle \psi_{j,l}, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle = 0 \end{cases}, \forall j, k, l \in \mathbb{Z} \quad (2.44)$$

Ou seja, $V_j \perp \tilde{W}_j$ e $\tilde{V}_j \perp W_j$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

Com isso, tem-se as somas diretas $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ e $\tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

Para o caso ortogonal, os polinômios G e H se reduzem a $G = P$ e $H = Q$, a função wavelet ψ é dada por (2.3), e tem-se as igualdades $\tilde{\phi} = \phi$ e $\tilde{\psi} = \psi$.

Pela propriedade da biortogonalidade, os conjuntos formados por $\{\psi_{j,l}\}$ e $\{\tilde{\psi}_{j,l}\}$ formam bases do espaço $L^2(\mathbb{R})$, que pode ser decomposto nas seguintes duas formas:

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \\ \cdots \oplus \tilde{W}_{-1} \oplus \tilde{W}_0 \oplus \tilde{W}_1 \oplus \cdots \end{array} \right\} \quad (2.45)$$

Então, uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser dada pelas duas representações:

$$f(x) = \sum_{j,k} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) \quad (2.46)$$

ou

$$f(x) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}(x) \quad (2.47)$$

onde existem constantes $A > 0$ e $B > 0$ tais que [11]:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2,$$

$$\frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2.$$

Neste caso, as funções escala ϕ , wavelet ψ e as suas respectivas duais formam bases de Riesz dos seus correspondentes subespaços geradores.

Assim, é possível se definir algoritmos conhecidos como transformada wavelet discreta.

Com isso, através da decomposição:

$$V_J = W_{J-1} \oplus W_{J-2} \oplus \cdots \oplus W_{j_0} \oplus V_{j_0},$$

tem-se a aproximação de uma função f por:

$$f_J(x) = w_{J-1}(x) + w_{J-2}(x) + \cdots + w_{j_0}(x) + f_{j_0}(x),$$

onde $w_j \in W_j$, $j_0 \leq j \leq J-1$ e $f_{j_0} \in V_{j_0}$, e para um dado nível j :

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^j \phi(2^j x - k) \in V_j \quad (2.48)$$

e

$$w_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi(2^j x - k) \in W_j \quad (2.49)$$

cujos coeficientes são dados por $c_k^j = 2^{j/2} \langle f_j, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle$ e $d_k^j = 2^{j/2} \langle w_j, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle$.

Com isso, serão definidos algoritmos que, para uma dada representação de uma função f_J em um nível mais refinado de detalhe J , decompõem seus coeficientes $\{c_k^J\}$ em coeficientes de níveis menos refinados $\{d_k^{J-1}, \dots, d_k^{j_0}, c_k^{j_0}\}$, processo, este, conhecido como transformada wavelet discreta (DWT). O processo de se obter os coeficientes de níveis mais refinados dos de menor refinamento é conhecido como transformada wavelet discreta inversa (IDWT).

Usando a relação $f_j(x) = f_{j-1}(x) + w_{j-1}(x)$ junto com as equações (2.2), (2.15), (2.25), (2.48) e (2.49) obtém-se os coeficientes $\{c_k^j\}$ e $\{d_k^j\}$ através das fórmulas clássicas recursivas de decomposição e de reconstrução:

Algoritmo de decomposição (DWT):

$$\begin{cases} c_k^{j-1} = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{2k-l} c_l^j \\ d_k^{j-1} = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{2k-l} c_l^j \end{cases} \quad (2.50)$$

Algoritmo de reconstrução (IDWT):

$$c_k^j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1} \quad (2.51)$$

No algoritmo de decomposição os coeficientes $\{c_k^{j-1}\}$ são obtidos através da convolução de $\{c_k^j\}$ com $\{g_k\}$ seguido de uma etapa de subamostragem, onde são eliminados elementos de índices ímpares. O mesmo se aplica para se obter $\{d_k^{j-1}\}$ de $\{c_k^j\}$ e $\{h_k\}$. Para o algoritmo de reconstrução é feita uma etapa de super amostragem, onde são adicionados zeros entre os elementos originais dos coeficientes $\{p_k\}$ e $\{q_k\}$. Depois disto, estes coeficientes são convoluídos, respectivamente, com $\{c_k^{j-1}\}$ e $\{d_k^{j-1}\}$. Os coeficientes mais refinados $\{c_k^j\}$ são obtidos da soma destas convoluções. Aplicando recursivamente estes algoritmos consegue-se atingir diferentes níveis de refinamento.

2.5 Propriedade da localidade

A função de escala ϕ geralmente apresenta suporte compacto, sendo que a sua forma mais simples é definida pela função de Haar, podendo ter formas mais complexas como as definidas por Daubechies. Através da expressão $\phi(2^j x + k)$ observa-se que o nível de resolução j determina um fator de expansão, para $j < 0$, ou de compressão, para $j > 0$, do comprimento do suporte de ϕ . Os diferentes valores de k apenas deslocam a função escala no eixo x em unidades de 2^{-j} para cada nível j . O mesmo ocorre para as wavelets.

No domínio frequência foi mostrado que a função escala é definida em termos de um filtro passa-baixa, ao passo que a função wavelet é definida em termos de um filtro passa-banda. Assim, o primeiro tende a atenuar as frequências mais altas, dando ênfase nas mais baixas, enquanto a wavelet tende a atenuar as frequências mais baixas e dar ênfase nas mais altas. O deslocamento k não altera o módulo do gráfico no domínio frequência, mas o nível j apresenta um relação inversa ao se passar de um domínio para outro, onde, por exemplo, uma expansão no eixo x corresponde a uma compressão no eixo w de mesmo fator 2^j . Esta relação é dada por [3], [5], [11]:

$$\Delta x^j \times \Delta w^j = \text{constante}, \quad (2.52)$$

onde a variação em ambos os domínios ocorre em um dado nível j . Isto pode ser visto na figura 2.1, que relaciona o tempo x com a frequência w de uma transformada wavelet. Pode se ver nesta figura que para uma determinada função wavelet, numa mesma faixa de tempo, quanto maior o refinamento j (eixo crescente da frequência), maior o conteúdo de frequência que esta função carrega. Os retângulos em destaque nesta figura representam a mesma área, conforme a relação (2.52).

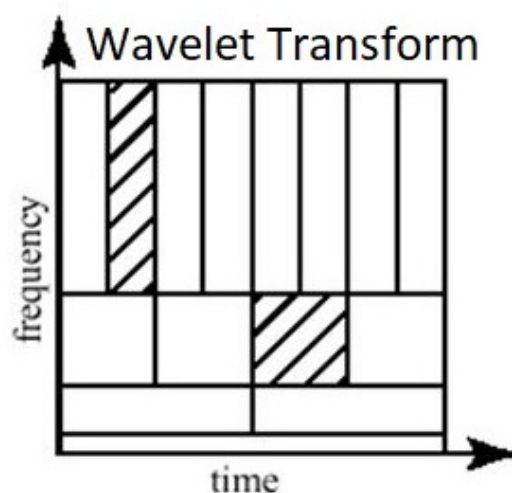


Figura 2.1: Relação entre tempo e frequência da Transformada Wavelet

2.6 Momentos Nulos e Regularidade

Do uso das relações $Q(z) = \Delta_{P,Q}(-z)G(-z)$ e $H(z) = \frac{-P(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)}$, vistas na seção de biortogonalidade, e da substituição $z = e^{-i\frac{w'}{2}} = e^{-iw}$, tem-se que $Q(w) = \Delta_{P,Q}(w + \pi)G(w + \pi)$ e $H(w) = \frac{-P(w + \pi)}{\Delta_{P,Q}(w)}$, respectivamente. Para filtros com números de coeficientes finitos, que correspondem a funções escalas e wavelets com suporte compacto, o determinante $\Delta_{P,Q}(z)$ é dado por um monômio da seguinte forma [11]:

$$\Delta_{P,Q}(w) = ce^{-i(2l+1)w},$$

onde $0 \neq c \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{Z}$.

Vê-se que esta função determinante apresenta módulo sempre constante, não dependendo da frequência w . Assim, se a multiplicidade do zero em $P(\pi)$ é igual a $p + 1$, o filtro H apresenta o mesmo número de zeros $p + 1$ em $w = 0$. De maneira análoga, uma multiplicidade $p^* + 1$ do zero em $G(\pi)$ corresponde a esta mesma multiplicidade do zero em $w = 0$ de Q .

Com isso, usando a relação da derivada de uma transformada de Fourier de uma função com sua inversa, tem-se que:

$$\left. \frac{d^l \hat{\psi}(w)}{dw^l} \right|_{w=0} = 0, \quad l = 0, \dots, p^* \quad (2.53)$$

é equivalente a

$$\int x^l \psi(x) dx = 0, \quad l = 0, \dots, p^* \quad (2.54)$$

ou seja, o número de momentos nulos de uma wavelet é igual a multiplicidade do zero em $w = 0$ do seu filtro Q .

De maneira análoga, tem-se que para a wavelet dual $\tilde{\psi}$:

$$\left. \frac{d^l \tilde{\psi}(w)}{dw^l} \right|_{w=0} = 0, \quad l = 0, \dots, p \quad (2.55)$$

é equivalente a

$$\int x^l \tilde{\psi}(x) dx = 0, \quad l = 0, \dots, p \quad (2.56)$$

Assim, chega-se no seguinte teorema que relaciona a regularidade de uma função com seus coeficientes wavelets:

Teorema 2.4. *Seja $p + 1$ o número de momentos nulos de $\tilde{\psi}$. Se f for uma função com derivada $f^{(s)}$ contínua no suporte de $\tilde{\psi}_{j,k}$, $0 \leq s \leq p + 1$, então o coeficiente wavelet $d_k^j = \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle$ satisfaz a estimativa:*

$$|d_k^j| \leq C 2^{-j(s+1/2)} \|f^{(s)}\|_\infty \quad (2.57)$$

onde C é uma constante dependente de $\tilde{\psi}$ e da norma $\|f^{(s)}\|_\infty$ no suporte de $\tilde{\psi}_{j,k}$.

Demonstração. Pela propriedade dos momentos nulos de $\tilde{\psi}$, tem-se que $\langle g, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle = 0$ para todo polinômio g de grau $\leq s - 1 \leq p$. Para esta demonstração, em particular, será usado como polinômio a aproximação de Taylor de f , $p_\xi(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k$ em uma certa vizinhança de ξ . Para o caso mais geral, ver [5], [11]. Consideram-se, então, os coeficientes wavelets:

$$\begin{aligned} |d_k^j| &= |\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle| = |\langle f - p_\xi, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle| \\ &= \left| \int (f(x) - p_\xi(x)) \tilde{\psi}_{j,k}(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\text{supp } \tilde{\psi}_{j,k}} |f(x) - p_\xi(x)| |\tilde{\psi}_{j,k}(x)| dx \\ &\leq \max_{x, \xi \in \text{supp } \tilde{\psi}_{j,k}} |f(x) - p_\xi(x)| \int_{\text{supp } \tilde{\psi}_{j,k}} |\tilde{\psi}_{j,k}(x)| dx. \end{aligned}$$

O erro por aproximação de Taylor fornece:

$$\max_{x, \xi \in \text{supp } \tilde{\psi}_{j,k}} |f(x) - p_\xi(x)| \leq \frac{|\text{supp } \tilde{\psi}_{j,k}|^s 2^{-js}}{s!} \|f^{(s)}\|_\infty = C_1 2^{-js} \|f^{(s)}\|_\infty.$$

Usando a definição $\tilde{\psi}_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\tilde{\psi}(2^j x - k)$ e a mudança de variável $y = 2^j x - k$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp } \tilde{\psi}_{j,k}} |\tilde{\psi}_{j,k}(x)| dx &= 2^{-j/2} \int_{\text{supp } \tilde{\psi}_{j,k}} |\tilde{\psi}(2^j x - k)| dx \\ &= 2^{-j/2} \int_{\text{supp } \tilde{\psi}} |\tilde{\psi}(y)| dy \\ &= C_2 2^{-j/2}. \end{aligned}$$

logo,

$$|d_k^j| \leq C 2^{-j(s+1/2)} \|f^{(s)}\|_\infty. \quad \square$$

Este teorema mostra que os coeficientes wavelets d_k^j tendem a ser significativos em regiões onde ocorrem variações bruscas na função f . Estes coeficientes, todavia, tendem a ser desprezíveis quanto maiores forem os níveis de detalhes j , o número de momentos nulos de $\tilde{\psi}$ (ou de zeros em $P(\pi)$) e a suavidade da função f , conseguindo-se, assim, uma maior economia na decomposição de funções com singularidades localizadas.

2.7 Polinômio Espectral

A fim de se obter polinômios cujos coeficientes permitam a construção de wavelets, começa-se analisando a seguinte identidade, associada com a condição de ortonormalidade (2.14):

$$|H_P(w)|^2 + |H_P(w + \pi)|^2 = 1, \quad (2.58)$$

no qual a função H_p é dada pelo polinômio de dupla escala:

$$H_p(w) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_p[k] e^{-ikw}. \quad (2.59)$$

Com isso, define-se o Espectro de Potência:

$$P_H(w) = |H_P(w)|^2 = H_P(w) \overline{H_P(w)}, \quad (2.60)$$

que é uma função que permite analisar o comportamento do módulo de H_p no domínio frequência. Se os coeficientes $h_p[k]$ forem reais, que é o caso deste trabalho, $P_H(w)$ apresenta simetria par, ou seja, $P_H(w) = P_H(-w)$. Assim, se estabelece o Filtro de Autocorrelação:

$$P_H(w) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] e^{-inw} = \left(\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_p[k] e^{-ikw} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_p[l] e^{ilw} \right),$$

onde os coeficientes $h[n]$ são dados pela autocorrelação de $h_p[n]$:

$$h[n] = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_p[k] h_p[k - n] \quad (2.61)$$

Este coeficiente apresenta simetria par $h[n] = h[-n]$, pois se está considerando que os coeficientes $h_p[n]$ sejam reais. Além disso, das relações de ortonormalidade de uma função escala ϕ , $h[n]$ é zero nos índices pares, conforme a seguinte relação:

$$h[2m] = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_p[k] h_p[k - 2m] = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

Demonstração. Usando a relação de dupla escala $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_p[k] \phi(2x - k)$, e aplicando o produto interno, tem-se que:

$$\begin{aligned} \delta_{0,m} &= \langle \phi(x), \phi(x - m) \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_p[k] \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_p[l] \langle \phi(2x - k), \phi(2x - 2m - l) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_p[k] \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_p[l] \delta_{k,l+2m} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_p[k] h_p[k - 2m]. \end{aligned}$$

□

Da relação de dupla escala (2.10), obtém-se, também, que a função de escalonamento associada a P_H , $\phi_H(x)$ é dada pela autocorrelação de $\phi_P(x)$, que está

associada a H_P :

$$\phi_H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_p(u) \phi_p(u-x) du \quad (2.63)$$

Usando $z = e^{-iw}$, a função P_H é dada, por meio das equações (2.58) e (2.60), e supondo coeficientes reais, por:

$$P_H(z) = H_P(z)H_P(z^{-1}) \text{ e } P_H(z) + P_H(-z) = 1.$$

Para se obter o polinômio espectral $P_H(z)$ com base em suas propriedades, analisa-se a distribuição de suas raízes no plano complexo z . Usando coeficientes reais e simétricos $h(n)$, tem-se que $P_H(z) = P_H(1/z)$, assim, a cada raiz z_i há a presença da raiz $1/z_i$. As raízes sobre o círculo unitário z_j devem ocorrer aos pares pela hipótese $P_H(w) \geq 0$ (equação (2.60)). Por fim, para cada z_i , $1/z_i$ e z_j há a presença das raízes complexas conjugadas \bar{z}_i , $1/\bar{z}_i$ e \bar{z}_j .

Para uma fatoração generalizada $P_H(z) = H1(z)H2(z)$, onde $H1$ e $H2$ representam filtros biortogonais, há a seguinte regra da separação das raízes z de P_H entre $H1$ e $H2$ [18]:

- $H1$ e $H2$ terem coeficientes reais, z e \bar{z} devem estar juntas.
- $H1$ e $H2$ terem simetria par em w , z e z^{-1} devem estar juntas.
- $H1$ e $H2$ serem ortogonais, z e z^{-1} devem ir separadamente, que é o caso $P_H(z) = H1(z)H1(z^{-1})$.

Os coeficientes do polinômio P_H , $h[n]$, neste caso mais geral, são dados por uma expressão análoga a da equação (2.61), chamada de correlação entre os coeficientes de $H1$ e de $H2$. Os coeficientes $h[n]$ apresentam as mesmas propriedades das deduzidas para o caso ortogonal, pois a função P_H é a mesma, não dependendo de como é feita a fatoração entre os filtros biortogonais. Com isso, pode-se usar os coeficientes tabelados na literatura, tanto de diferentes tipos de filtros ortogonais

quanto de biortogonais, para se obter os coeficientes do polinômio P_H . De forma inversa, construindo-se o polinômio P_H , pode-se obter diferentes filtros de escala, dependendo de como é feita a fatoração, para a construção dos diversos tipos de wavelets.

Da teoria de wavelets tem-se o seguinte polinômio proposto por Daubechies, também conhecido como Filtro Interpolador de Lagrange [5]:

$$P_H(w) = \cos^{2K} \left(\frac{w}{2} \right) \sum_{m=0}^{K-1} \binom{K-1+m}{m} \sin^{2m} \left(\frac{w}{2} \right), \quad K \geq 1 \quad (2.64)$$

Este filtro tem máxima planicidade em $\bar{w} = 0$ e $\bar{w} = \pm\pi$, ou seja

$$\frac{d^m P_H(\bar{w})}{d\bar{w}^m} = 0, \quad 1 \leq m \leq 2K - 1,$$

onde $P_H(w) \geq 0$ para $-\pi \leq w \leq \pi$, e $P_H(w) = 0$ em $w = \pm\pi$. Os coeficientes correspondentes $h[n]$ apresentam as simetrias já apresentadas e são nulos para $|n| > 2K$.

Através das identidades $\cos^2 \left(\frac{w}{2} \right) = \frac{1 + \cos(w)}{2}$, $\sin^2 \left(\frac{w}{2} \right) = \frac{1 - \cos(w)}{2}$, $\cos(w) = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, e da substituição $z = e^{-iw}$ em $P_H(w)$, chega-se a:

$$P_H(z) = \left(\frac{1+z}{2} \right)^K \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^K \sum_{m=0}^{K-1} \binom{K-1+m}{m} \left(\frac{1-z}{2} \right)^m \left(\frac{1-z^{-1}}{2} \right)^m, \quad K \geq 1,$$

que é uma expressão onde se consegue obter os coeficientes, ou mesmo extrair as raízes.

O polinômio que se obtém da fatoração ortogonal de P_H , onde $H1$ e $H2$ são ortonormais entre si, é conhecido como filtro de Daubechies [5], [11], [18], dado por:

$$H_p(z) = \left(\frac{1+z}{2} \right)^K R_p(z), \quad K \geq 1 \quad (2.65)$$

onde $R_p(z)$ é um polinômio de ordem $K - 1$. Este filtro sendo um polinômio de ordem $2K - 1$, o número de seus coeficientes não nulos $h_p[n]$ é igual a $2K$, onde $0 \leq n \leq 2K - 1$. Com isso, tem-se o teorema a seguir para se obter wavelets de Daubechies, cuja demonstração se encontra em [11]:

Teorema 2.5. *Se ψ é uma wavelet com K momentos nulos que gera uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, então o seu suporte tem um valor de pelo menos $2K - 1$. Uma wavelet de Daubechies tem um suporte mínimo igual a $[-K + 1, K]$. O suporte da correspondente função de escala ϕ é igual a $[0, 2K - 1]$.*

De acordo com este teorema, as wavelets de Daubechies são as que tem o menor suporte para um dado valor de K , e, conseqüentemente, o correspondente filtro de escala H_p apresenta o menor número de coeficientes. O número de zeros em $H_p(\pi)$, correspondente a raiz $z = -1$ na expressão (2.65), fornece o número de coeficientes, a quantidade de momentos nulos da wavelet ψ (de acordo com a seção sobre momentos nulos e regularidade) e informações sobre o suporte de ϕ e ψ . O caso para $K = 1$ corresponde à função de Haar, vista anteriormente.

Na tabela 2.1 estão aproximações [2] de alguns dos coeficientes de Daubechies associados ao número de momentos nulos K .

Na figura 2.2 estão as funções de escalonamento ϕ e wavelet ψ de Daubechies com $K = 2, 3$. Pode-se ver que seus suportes estão de acordo com o resultado acima.

Na próxima seção, para o processo de construção de wavelets interpolantes, que podem ser obtidas da autocorrelação dos filtros de Daubechies, se faz o uso apenas dos coeficientes de P_H . Pode-se tratar a fatoração desta forma como $H1 = P_H$ e a sua dual como $H2 = 1$, cuja função escala correspondente é dada pela delta de Dirac δ [5], [11].

Tabela 2.1: Coeficientes de Daubechies.

Índice n	Número de momentos nulos K		
	$K = 1$	$K = 2$	$K = 3$
0	1	0,683013	0,470467
1	1	1,183013	1,141117
2	0	0,316987	0,650365
3	0	-0,183013	-0,190934
4	0	0	-0,120832
5	0	0	0,049817

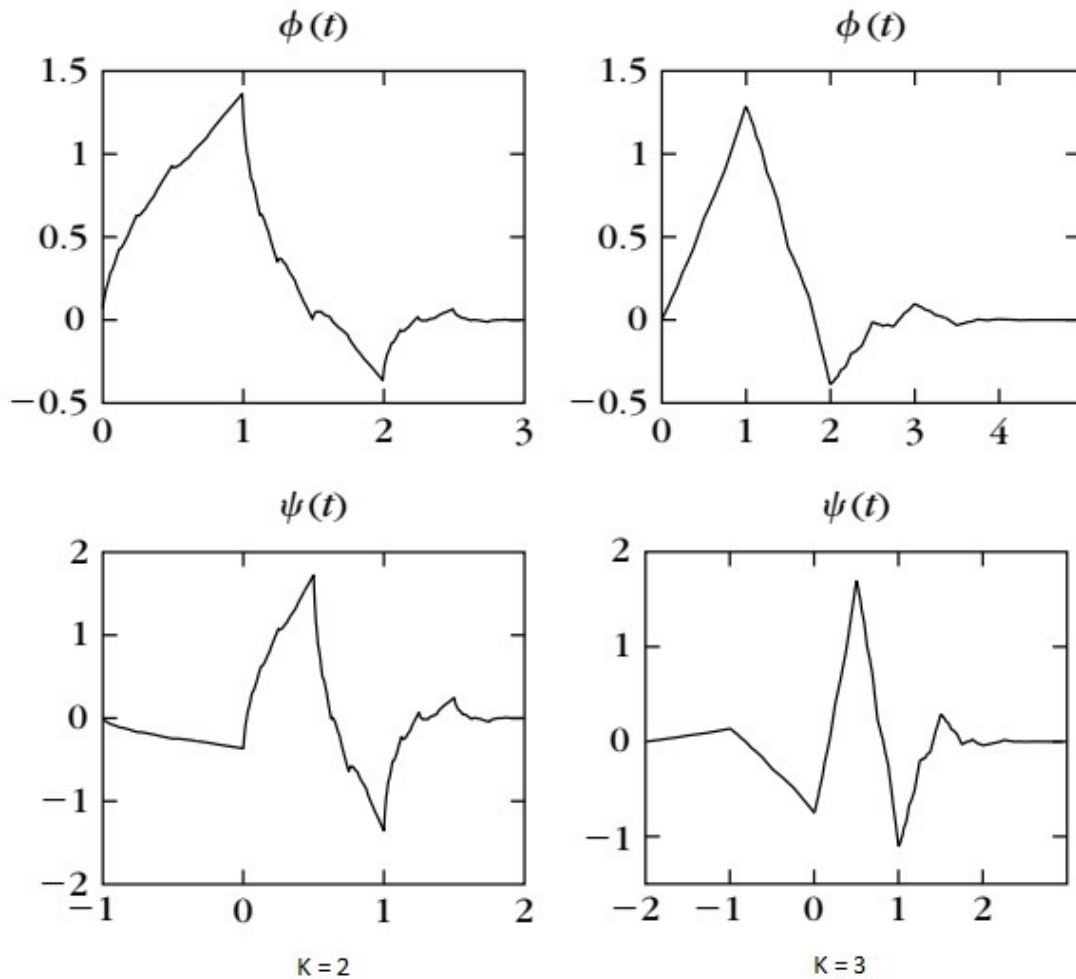


Figura 2.2: Funções de escalonamento ϕ e wavelet ψ de Daubechies com K momentos nulos [11].

2.8 Interpolação Wavelet

É possível interpolar uma função f por meio de uma função de escala interpolante, que satisfaz a seguinte definição:

Definição 2.3. *Uma função de escala contínua ϕ é denominada interpolante se:*

$$\phi(n) = \delta_{0,n} = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Tendo uma função de escala ϕ que satisfaz esta definição, define-se o espaço $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$ de funções interpolantes, onde uma função $f \in V_j$ é dada por:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2^j}\right) \phi(2^j x - n).$$

Pode-se ver que os coeficientes $f\left(\frac{n}{2^j}\right)$ são simples avaliações da função f nos pontos uniformemente espaçados $x_n^j = \frac{n}{2^j}$.

Usando o próprio filtro interpolante P_H , visto na seção anterior, como polinômio de escala, é possível se obter uma função de escala ϕ com propriedades interpolantes devido a equação (2.63) e a propriedade de ortonormalização.

A função com estas propriedades é conhecida como função de escala de Deslauriers-Dubuc [5], [11], [13], figura 2.3, que pode ser obtida por meio da autocorrelação das funções de escala de Daubechies. Devido a isto, esta função interpolante apresenta seu suporte em $[-2K + 1, 2K - 1]$, pelo que foi visto na seção anterior. Seus coeficientes nos índices ímpares, que são usados no algoritmo de interpolação, são dados pela seguinte fórmula [5], [11]:

$$h[2m + 1] = (-1)^{K-m} \frac{\prod_{i=0}^{2K-1} (i - K + 1/2)}{(m + 1/2)(K - m - 1)!(K + m)!}, \quad -K \leq m < K \quad (2.66)$$

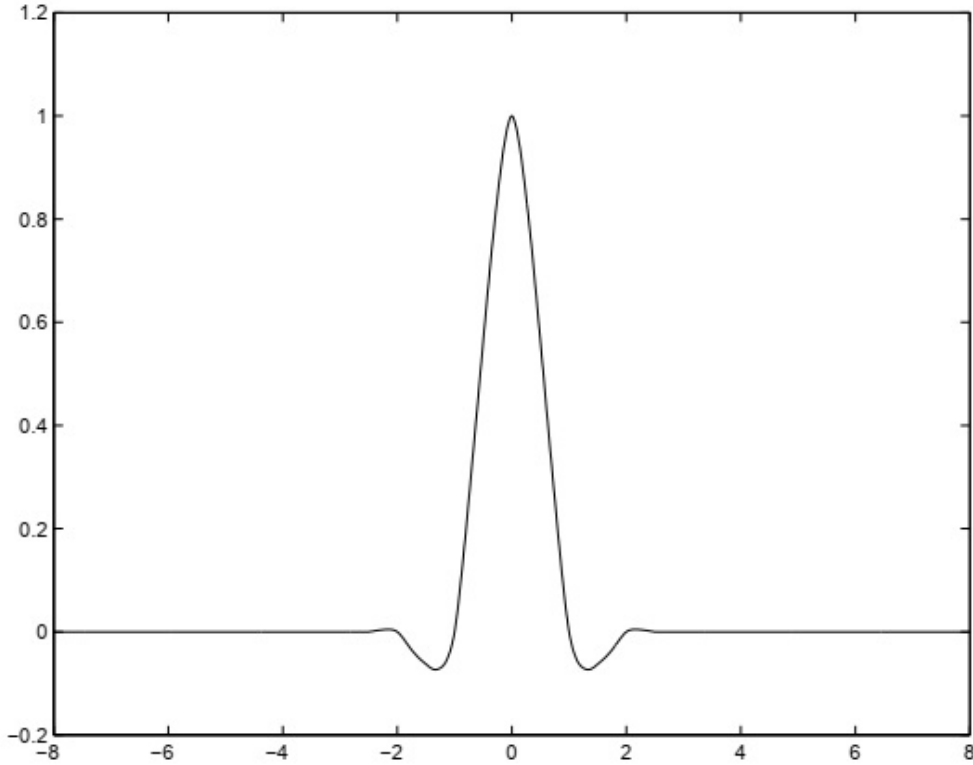


Figura 2.3: Função de escala de Deslauriers-Dubuc, $K = 2$.

Assim, um modo de se definir o operador de interpolação de uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$, no espaço V_j , é por meio da seguinte projeção ortogonal [11]:

$$P_{V_j} f(x) = 2^j \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f(\cdot), \tilde{\phi}(2^j(\cdot) - n) \rangle \phi(2^j x - n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2^j}\right) \phi(2^j x - n) \quad (2.67)$$

onde a função de escala dual $\tilde{\phi}(x) = \delta(x)$, o que permite se obter a propriedade interpolante nos pontos x_n^j , $P_{V_j} f\left(\frac{n}{2^j}\right) = f\left(\frac{n}{2^j}\right)$.

Entretanto, é possível se trabalhar com bases de wavelets de espaços mais gerais de funções uniformemente contínuas [11], onde neste caso, não se tem mais a restrição $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$.

A fim de se analisar uma função $f(x)$ amostrada de modo mais refinado entre os pontos $x = \frac{n}{2^j}$ e $x = \frac{n+1}{2^j}$, cria-se o espaço de detalhe W_j , que fornece os

valores de $f(x)$ em pontos intermediários $x = \frac{n + 1/2}{2^j}$. Com isso, tem-se a wavelet de interpolação:

$$\psi(x) = \phi(2x - 1) \quad (2.68)$$

Esta wavelet difere das wavelets mais gerais pelo fato de não apresentar nenhum momento nulo.

Usando a notação $\phi_{j,n} = \phi(2^j x - n)$ e $\psi_{j,n} = \psi(2^j x - n) = \phi_{j+1,2n+1}$ (devido a equação (2.68)), tem-se o seguinte teorema que descreve como se obter a decomposição por wavelets de interpolação, onde o espaço W_j é o complemento não ortogonal de V_j em V_{j+1} [11]:

Teorema 2.6. *Para todo $j \in \mathbb{Z}$, $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Se $f \in V_{j+1}$, então*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2^j}\right) \phi_{j,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_j[n] \psi_{j,n},$$

onde

$$d_j[n] = f\left(\frac{n + 1/2}{2^j}\right) - P_{V_j} f\left(\frac{n + 1/2}{2^j}\right) \quad (2.69)$$

Demonstração. Para todo $f \in V_{j+1}$, tem-se que $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2^{j+1}}\right) \phi_{j+1,n}$. A função $f - P_{V_j} f \in V_{j+1}$ e se anula em $\left\{\frac{n}{2^j}\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Então, esta função pode ser decomposta sobre as funções de interpolação intermediárias $\phi_{j+1,2n+1} = \psi_{j,n}$:

$$f(x) - P_{V_j} f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_j[k] \psi_{j,k}(x) \in W_j \quad (2.70)$$

logo, $V_{j+1} \subset V_j \oplus W_j$. Sabe-se que $V_j \subset V_{j+1}$ e $W_j \subset V_{j+1}$. Então $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Fazendo $x = \frac{2n + 1}{2^{j+1}}$ em (2.70), chega-se à expressão de $d_j[n]$.

□

Este teorema mostra que ao se refinar o esquema de interpolação com a adição de pontos intermediários, adicionam-se elementos com o coeficiente $d_j[n]$,

que é conhecido como erro de interpolação. Com isso, é possível definir algoritmos de decomposição e de reconstrução interpolantes.

Para isso, a função f é calculada em uma escala $N \geq 2^j \geq 1$ através de suas amostras $\{f\left(\frac{n}{N}\right); n \in \mathbb{Z}\}$. Em cada escala 2^j , usando a equação (2.67), tem-se que:

$$P_{V_j} f \left(\frac{n+1/2}{2^j} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f \left(\frac{k}{2^j} \right) \phi(n-k+1/2).$$

Avaliando $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \phi(2x-k)$ em $x = n/2$, tem-se que $\phi(n/2) = h[n]$ (devido a propriedade interpolante de ϕ), ou seja,

$$\phi(n-k+1/2) = h[2n-2k+1],$$

logo, a projeção no ponto intermediário é dada por:

$$P_{V_j} f \left(\frac{2n+1}{2^{j+1}} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f \left(\frac{k}{2^j} \right) h[2n+1-2k].$$

Fazendo $f \in V_{j+1}$, tem-se que $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n^j \phi_{j,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^j \psi_{j,n}$, onde $d_n^j = f \left(\frac{2n+1}{2^{j+1}} \right) - P_{V_j} f \left(\frac{2n+1}{2^{j+1}} \right)$.

Portanto, através das amostragens, tem-se as fórmulas de decomposição e de reconstrução interpolantes:

Decomposição:

$$\begin{aligned} f_n^j &= f \left(\frac{2n}{2^{j+1}} \right) = f_{2n}^{j+1} \\ d_n^j &= f_{2n+1}^{j+1} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{2k}^{j+1} h[2n+1-2k] \end{aligned} \tag{2.71}$$

Reconstrução:

$$\begin{aligned} f_{2n}^{j+1} &= f\left(\frac{2n}{2^{j+1}}\right) = f_n^j \\ f_{2n+1}^{j+1} &= d_n^j + \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k^j h[2n+1-2k] \end{aligned} \quad (2.72)$$

Na decomposição, para se obter os coeficientes f_n^j do nível j , são feitas amostras nos índices pares da função f amostrada no nível $j+1$. Para a obtenção dos coeficientes d_n^j é feita a convolução dessas amostras pares da função f com os coeficientes de índices ímpares do filtro de escala $h[n]$. Então é feita a diferença entre as amostras de índices ímpares da função f no nível $j+1$ com a convolução, obtendo-se os coeficientes d_n^j . Para a reconstrução basta aplicar os passos inversos da decomposição.

Desse modo, para uma $f \in V_J$, tem-se a decomposição generalizada:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2^{j_0}}\right) \phi_{j_0, n} + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_j[n] \psi_{j, n},$$

onde j_0 representa o nível menos refinado, e J o mais refinado.

Quanto à regularidade dos coeficientes wavelets interpolantes, Domingues propôs um resultado análogo ao caso (2.57), conforme a seguinte proposição [5]:

Proposição 4. *Se f for $2K$ vezes continuamente diferenciável no intervalo $[x_{n-m+1}^j, x_{n+m}^j]$, em que $m = K$, pode-se estimar o coeficiente wavelet d_n^j como:*

$$|d_n^j| \leq C(K) 2^{-j(2K)} \max_{x_{n-m+1}^j \leq s \leq x_{n+m}^j} |f^{(2K)}(s)| \quad (2.73)$$

sendo $f^{(2K)}$ a derivada $2k$ -ésima de f e $C(K)$ é uma constante dependente apenas de K .

Na tabela 2.2 encontram-se os coeficientes $h[n]$, associados ao filtro interpolante P_H , em função do índice n , $-5 \leq n \leq 5$. O conjunto de filtros são

mostrados para ordem $2K = 2, 4, 6$ (o número efetivo de coeficientes usados nos cálculos). Como $h[0] = 1$ para todos os casos, o índice 0 não é mostrado na tabela. Nos demais índices pares pode-se ver que os valores de $h[n]$ são sempre nulos, conforme visto anteriormente.

Tabela 2.2: Coeficientes $h[n]$ associados ao filtro interpolante P_H .

Ordem ($2K$)	Índice n	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
$2K = 2$	$2h[n]$	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$2K = 4$	$16h[n]$	0	0	-1	0	9	9	0	-1	0	0
$2K = 6$	$256h[n]$	3	0	-25	0	150	150	0	-25	0	3

2.8.1 Erro de truncamento wavelet

Nesta parte será analisado como se comporta o erro de se eliminar os coeficientes wavelets com valores pequenos da decomposição wavelet por interpolação de uma função f definida em um intervalo finito.

Seja esta função, composta por um total de N pontos (amostras), decomposta da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N_{j_0}-1} f\left(\frac{n}{2^{j_0}}\right) \phi_{j_0,n} + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{n=0}^{N_j-1} d_j[n] \psi_{j,n} \quad (2.74)$$

onde N_{j_0} e N_j são, respectivamente, o número dos coeficientes nos níveis j_0 e j .

Define-se um conjunto indexado, associado aos coeficientes wavelets significativos, por:

$$\Lambda_\epsilon^j = \{n : 0 \leq n \leq N_j - 1 \wedge |d_j[n]| > \epsilon\}$$

onde $\epsilon > 0$.

Já o conjunto de índices dos coeficientes insignificativos é definido por:

$$R_\epsilon^j = \Lambda_0^j \setminus \Lambda_\epsilon^j$$

A decomposição ϵ -truncada de f é definida por:

$$f_\epsilon(x) = \sum_{n=0}^{N_{j_0}-1} f\left(\frac{n}{2^{j_0}}\right) \phi_{j_0,n} + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{n \in \Lambda_\epsilon^j} d_j[n] \psi_{j,n} \quad (2.75)$$

Com isso, o erro de truncamento é dado por:

$$e_\epsilon(x) = f(x) - f_\epsilon(x) = \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{n \in R_\epsilon^j} d_j[n] \psi_{j,n} \quad (2.76)$$

Aplicando a norma infinita no erro, tem-se que:

$$\|e_\epsilon(x)\|_\infty \leq \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{n \in R_\epsilon^j} \max(|d_j[n] \psi_{j,n}|) \quad (2.77)$$

usando a definição de wavelet interpolante e de R_ϵ^j , tem-se que:

$$\|e_\epsilon(x)\|_\infty < \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{n \in R_\epsilon^j} \epsilon \quad (2.78)$$

Definindo N_ϵ como o número de pontos dos coeficientes significativos, tem-se a seguinte estimativa para a cota superior do erro:

$$\|e_\epsilon(x)\|_\infty < (N - N_\epsilon)\epsilon. \quad (2.79)$$

Pode-se ver que a cota do erro de truncamento depende do número de pontos que são eliminados $N - N_\epsilon$ e da constante ϵ .

3 DISCRETIZAÇÃO DIFERENCIAL

Neste capítulo é apresentado como operadores diferenciais são discretizados em termos de decomposição por wavelets. Na seção 3.1 é descrita a abordagem teórica do processo de discretização através dos operadores de restrição e de prolongamento. Na seção 3.2 são deduzidas as equações de discretização para os casos de advecção linear $\mathcal{L}_1(u) = u_x$, de difusão $\mathcal{L}_2(u) = u_{xx}$, de dispersão $\mathcal{L}_3(u) = u_{xxx}$ e de advecção não linear $\mathcal{L}_{01}(u, v) = uv_x$. Estes métodos são baseados no trabalho de Domingues [5].

3.1 Operadores de Restrição e de Prolongamento

Sejam os operadores diferenciais: $\mathcal{L}_1(u) = u_x$, $\mathcal{L}_2(u) = u_{xx}$, $\mathcal{L}_3(u) = u_{xxx}$ e $\mathcal{L}_{01}(u, v) = uv_x$.

Se V é um espaço de funções, e S^j é definido como um espaço discreto de espaçamento 2^{-j} , tem-se os seguintes operadores:

$$\begin{aligned} r^j : V &\longrightarrow S^j \text{ operador de restrição} \\ \Pi^j : S^j &\longrightarrow V \text{ operador de prolongamento} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde os operadores de restrição e de prolongamento são definidos por:

$$\begin{aligned} \text{operador de restrição: } (r^j u)(s) &= 2^j \int u(x) \tilde{\phi}_s^j(x) dx \\ \text{operador de prolongamento: } (\Pi^j u^j)(x) &= \sum_k u_k^j \phi_k^j(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $\tilde{\phi}_s^j(x) = \tilde{\phi}(2^j x - s)$ e $\phi_s^j(x) = \phi(2^j x - s)$.

Com isso, se obtém as discretizações diferenciais L^j :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d(u) \sim (L^j)^d(u^j) &= r^j[\mathcal{L}_d(\Pi^j u^j)] \\ \mathcal{L}_{01}(u, v) \sim L^j(u^j, v^j) &= r^j[\mathcal{L}_{01}(\Pi^j u^j, \Pi^j v^j)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde u^j e v^j representam as versões discretizadas das funções u e v , respectivamente, e $d \in \{1, 2, 3\}$ representa qualquer uma das ordens de diferenciação.

Se $\Pi^j r^j$ é um operador de projeção, isto é, satisfaz $(\Pi^j r^j)^2 = \Pi^j r^j$, então o esquema de aproximação $\{r^j, \Pi^j\}$ é dito conservativo.

Para o esquema $\{r^j, \Pi^j\}$ ser conservativo deve-se ter a relação de biortogonalidade:

$$\int \phi(x - k) \tilde{\phi}(x - l) dx = \delta_{kl}$$

onde, neste caso, $P^j = \Pi^j r^j$ é a projeção biortogonal sobre o espaço V [5].

3.2 Fórmulas de discretização

3.2.1 Advecção Linear: $\mathcal{L}_1(u) = u_x$

Usando (3.2) e a primeira equação de (3.3), define-se a aproximação do operador L^j em u^j :

$$\begin{aligned} (L^j u^j)(s) &= (r^j[\mathcal{L}_1(\Pi^j u^j)])(s) = \left(r^j \sum_k u_k^j \mathcal{L}_1 \phi(2^j x - k) \right) (s) \\ &= \left(r^j \sum_k u_k^j \frac{d\phi}{dx}(2^j x - k) \right) (s) \\ &= \sum_k u_k^j \left(r^j \frac{d\phi}{dx}(2^j x - k) \right) (s) \\ &= \sum_k u_k^j \left(2^j \int \frac{d\phi}{dx}(2^j x - k) \tilde{\phi}(2^j x - s) dx \right) \\ &= \sum_k u_k^j \left(2^j \int \frac{d\phi}{dy}(y + s - k) \tilde{\phi}(y) dy \right) \end{aligned}$$

onde na última igualdade foi feita a mudança de variável $y = 2^j x - s$.

Assim, definem-se os coeficientes gama $\Gamma^{(1)}$ e o operador de diferenças finitas de 1^a ordem em função destes coeficientes:

$$L_1(u^j)(s) = L^j(u^j)(s) = 2^j \sum_k u_k^j \Gamma^{(1)}[k - s] \quad (3.4)$$

onde

$$\Gamma^{(1)}[k] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(x) \frac{d\phi}{dx}(x - k) dx \quad (3.5)$$

Da equação (2.63), define-se $\phi_M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \tilde{\phi}(u + x) du$, onde $\phi_M(x)$ é uma possível função de escalonamento associada a um polinômio espectral de ordem M. Derivando $\phi_M(x)$, chega-se em outra definição do coeficiente gama:

$$\Gamma^{(1)}[k] = \left. \frac{d\phi_M(x)}{dx} \right|_{x=k} \quad (3.6)$$

Derivando a relação de dupla escala $\phi_M(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] \phi_M(2x - n)$, tem-se que $\frac{d\phi_M(x)}{dx} = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] \frac{d\phi_M}{d(2x)}(2x - n)$. Usando a definição (3.6) de $\Gamma^{(1)}$ nessa equação, tem-se que:

$$\Gamma^{(1)}(x) = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] \Gamma^{(1)}(2x - n)$$

Fazendo a transformação de variáveis $x = l$ e $m = 2l - n$, onde $l, m \in \mathbb{Z}$, chega-se a:

$$\Gamma^{(1)}[l] = 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} h[2l - m] \Gamma^{(1)}[m] \quad (3.7)$$

Agora, a fim de se dar continuidade na discussão da solução da equação (3.7), que está relacionada a discretização de um operador diferencial de 1^a ordem, será considerado o caso para operadores diferenciais de ordem mais alta.

3.2.2 Difusão: $\mathcal{L}_2(u) = u_{xx}$ e operadores diferenciais de ordem mais alta

Aplicando L^j em u^j , d vezes, tem-se que:

$$(L^j u^j)^{(d)}(s) = \sum_k u_k^j \left(2^j \int \frac{d^{(d)}\phi}{dx^{(d)}}(2^j x - k) \tilde{\phi}(2^j x - s) dx \right)$$

Usando as relações $y = 2^j x - s$ e $dy^{(d)} = (2^j)^d dx^{(d)}$ nesta equação, de maneira análoga ao do caso da advecção linear, chega-se ao operador de diferenças finitas de ordem d e aos coeficientes $\Gamma^{(d)}$:

$$L_d(u^j)(s) = L^j(u^j)^{(d)}(s) = (2^j)^d \sum_k u_k^j \Gamma^{(d)}[k - s] \quad (3.8)$$

onde

$$\Gamma^{(d)}[k] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(x) \frac{d^{(d)}\phi}{dx^{(d)}}(x - k) dx \quad (3.9)$$

E assim, de modo análogo ao caso de $\Gamma^{(1)}$, tem-se as demais expressões envolvendo $\Gamma^{(d)}$, onde d representa a ordem de diferenciação:

$$\Gamma^{(d)}[k] = \left. \frac{d^{(d)}\phi_M(x)}{dx^{(d)}} \right|_{x=k} \quad (3.10)$$

e

$$\Gamma^{(d)}[l] = 2^d \sum_{m \in \mathbb{Z}} h[2l - m] \Gamma^{(d)}[m] \quad (3.11)$$

Usando integração por partes repetidas vezes em (3.9), junto com o auxílio da equação (3.10), e assumindo que as respectivas integrais e derivadas estão bem definidas, tem-se a seguinte relação de simetria:

$$\Gamma^{(d)}[k] = (-1)^d \Gamma^{(d)}[-k] \quad (3.12)$$

Se $h[n]$ é zero fora do intervalo $-(2K - 1) \leq n \leq 2K - 1$, então também é zero fora do intervalo $-(2K - 1) + 2l \leq m \leq 2K - 1 + 2l$. A função de escalonamento $\phi_M(x)$, tendo suporte compacto, tem seu suporte no intervalo $[-(2K - 1), 2K - 1]$, logo, com o adicional da equação (3.10), ambos $h[n]$ e $\Gamma^{(d)}[m]$ têm tamanho $2(2K - 1) + 1$. A equação (3.11) pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$([H] - 2^{-d} I) [\Gamma^{(d)}] = 0 \quad (3.13)$$

onde $[H]$ é uma matriz quadrada de ordem $2(2K - 1) + 1$ formada pelos coeficientes $h[n]$, e $[\Gamma^{(d)}]$ é o vetor formado pelos coeficientes gama.

A equação (3.13) tem solução não trivial se 2^{-d} for um autovalor de $[H]$, para $d = 0, 1, \dots, 2K - 1$ [15].

De modo a se obter a normalização dessa solução, dada pelo autovetor $[\Gamma^{(d)}]$, usa-se uma propriedade conhecida na literatura, onde é possível expandir polinômios por meio de funções de escalonamento [1], [5], [7], [11], [15]. Usando a propriedade dos momentos nulos de wavelets, pode-se expandir um monômio da seguinte forma, por meio da função de escala interpolante $\phi_M(x)$:

$$x^d = \sum_{l \in \mathbb{Z}} M_l^d \phi_M(x - l), \quad d = 0, \dots, 2K - 1 \quad (3.14)$$

onde

$$M_l^d = \int_{-\infty}^{\infty} x^d \phi_M(x - l), \quad d = 0, \dots, 2K - 1 \quad (3.15)$$

é conhecido como d -ésimo momento de $\phi_M(x - l)$. Como se está considerando uma função interpolante $\phi_M(x)$, neste caso $M_l^d = l^d$.

Diferenciando a equação (3.14) d vezes, tem-se que:

$$d! = \sum_{l \in \mathbb{Z}} M_l^d \frac{d^{(d)} \phi_M}{dx^{(d)}}(x - l)$$

Multiplicando essa equação por $\tilde{\phi}_M(x) = \delta(x)$ e integrando, tem-se que:

$$d! \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_M(x) dx = \sum_{l \in \mathbb{Z}} M_l^d \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_M(x) \frac{d^{(d)} \phi_M}{dx^{(d)}}(x - l) dx$$

Usando a propriedade da delta de Dirac e a condição $M_l^d = l^d$, chega-se à equação de normalização:

$$d! = \sum_{l \in \mathbb{Z}} l^d \Gamma^{(d)}[l] \quad (3.16)$$

O caso particular para $d = 1$ reduz-se à advecção linear, para $d = 2$, tem-se a difusão.

Assim, de modo a se obter os coeficientes gama de uma determinada ordem $2K$ (correspondente aos coeficientes $h[n]$), calcula-se o autovetor da matriz $[H]$ correspondente ao autovalor 2^{-d} , onde d representa a ordem de diferenciação desejada, e então usa-se a equação de normalização (3.16) neste autovetor, que deve satisfazer a condição de simetria (3.12).

Para os coeficientes gama de ordem 2, a matriz $[H]$ fornece apenas os autovalores 1 e $1/2$, que correspondem, respectivamente, aos autovetores normalizados, de acordo com (3.16), $[\Gamma^{(0)}]^T = (0, 1, 0)$ e $[\Gamma^{(1)}]^T = (-1/2, 0, 1/2)$, sendo este último a diferença de primeira ordem centrada mais simples. Então, pode-se considerar que para este caso (coeficientes gama de ordem 2) os demais operadores de diferenças se reduzem aos operadores diferenciais centrados clássicos. Por exemplo, o operador de diferenças finitas de segunda ordem é representado por $(1/2, -1, 1/2)$ e o de terceira ordem por $(-1/2, 1, 0, -1, 1/2)$. Os coeficientes gama de ordens mais altas são calculados por meio do programa MATLAB. Neste trabalho estes coeficientes são obtidos das matrizes $[H]$ de ordem 4 e de ordem 6, cujos valores estão no apêndice.

Na tabela 3.1 estão os valores dos coeficientes gama $[\Gamma^{(1)}]$ e $[\Gamma^{(3)}]$, de ordem 4, para os índices $0 \leq n \leq 3$, devido à condição de simetria (3.12). Para este caso particular, ao invés de a matriz $[H]$ ter o autovalor $1/4$, esta possui o par complexo de autovalores $1/4 \pm 6,4765 \times 10^{-9}i$, o que torna a existência dos coeficientes $[\Gamma^{(2)}]$ indeterminada nesta situação [15].

Tabela 3.1: Coeficientes Gama normalizados de ordem 4

Índice n	0	1	2	3
$\Gamma^{(1)}[n]$	0	2/3	-1/12	0
$\Gamma^{(3)}[n]$	0	-1	1/2	0

Já na tabela 3.2 estão os valores dos coeficientes gama $[\Gamma^{(1)}]$, $[\Gamma^{(2)}]$ e $[\Gamma^{(3)}]$, de ordem 6, para os índices $0 \leq n \leq 5$.

Tabela 3.2: Coeficientes Gama normalizados de ordem 6

Índice n	0	1	2	3	4	5
$\Gamma^{(1)}[n]$	0	272/365	-53/365	16/1095	1/2920	0
$\Gamma^{(2)}[n]$	-295/56	356/105	-92/105	4/35	3/560	0
$\Gamma^{(3)}[n]$	0	-38/25	179/200	-2/25	-3/400	0

3.2.3 Advecção Não Linear: $\mathcal{L}_{01}(u, v) = uv_x$

Usando (3.2) e a segunda equação de (3.3) em u^j e v^j , de maneira análoga a advecção linear, chega-se a:

$$L^j(u^j, v^j)(s) = 2^j \sum_m \sum_n u_m^j v_n^j \Gamma(s - m, s - n) \quad (3.17)$$

onde

$$\Gamma(p, q) = \int \tilde{\phi}(x) \phi(x + p) \frac{d\phi}{dx}(x + q) dx \quad (3.18)$$

Usando as relações de dupla escala $\phi(x) = \sum_k h[k] \phi(2x - k)$ e $\tilde{\phi}(x) = \sum_k \tilde{h}[k] \tilde{\phi}(2x - k)$ em (3.18), obtém-se:

$$\Gamma(p, q) = \sum_a \sum_b \sum_c \tilde{h}[a] h[b] h[c] \int \tilde{\phi}(2x - a) \phi(2x + 2p - b) \frac{d\phi}{dx}(2x + 2q - c) dx \quad (3.19)$$

Por meio das mudanças de variáveis $k = a$, $l = a + 2p - b$ e $m = a + 2q - c$ na equação acima, tem-se que:

$$\Gamma(p, q) = \sum_k \sum_l \sum_m \tilde{h}[k] h[k + 2p - l] h[k + 2q - m] \Gamma(l, m) \quad (3.20)$$

Escolhendo $\phi = \phi_M$ (a função de escala interpolante) e $\tilde{\phi} = \delta$, a equação (3.18) fica:

$$\Gamma(p, q) = \phi_M(p) \left. \frac{d\phi_M}{dx}(x) \right|_{x=q} \quad (3.21)$$

Para $p, q \in \mathbb{Z}$, a propriedade interpolante de ϕ_M reduz esta equação para:

$$\Gamma^{(1)}(q) = \Gamma(0, q) = \left. \frac{d\phi_M}{dx}(x) \right|_{x=q} \quad (3.22)$$

Com isso, e o fato de que $\delta(x) = 2\delta(2x)$ a equação (3.20) é reduzida em:

$$\Gamma^{(1)}(q) = 2 \sum_l \sum_m h[0-l]h[2q-m]\Gamma(l, m) = 2 \sum_m h[2q-m]\Gamma^{(1)}(m) \quad (3.23)$$

Ou seja, para o caso não linear, usando os coeficientes $h(n)$ diretamente associados ao polinômio espectral, a discretização diferencial é dada simplesmente por:

$$L^j(u^j, v^j)(s) = 2^j u_s^j \sum_k v_k^j \Gamma^{(1)}[k-s] \quad (3.24)$$

4 MÉTODO NUMÉRICO ADAPTATIVO USANDO WAVELETS

Este capítulo aborda como as wavelets são usadas no processo de discretização de EDPs de modo a se obter informações nas regiões de maior variabilidade da solução. Serão apresentados métodos adaptativos onde as wavelets são usadas para decidir regiões de maior variação nas funções e assim, refinar a malha para poder cobrir mais detalhes. Em compensação, regiões onde uma função não sofre tantas variações podem ser aproximadas com menos pontos. Na seção 4.1 são descritos os passos gerais do método numérico usado na resolução de uma EDP, baseados em diferenças finitas adaptativas. Na seção 4.2 adapta-se este método para resolver a equação de Burgers e, com algumas modificações, para resolver a equação de Korteweg-de Vries. Depois são analisados os resultados numéricos e gráficos, como erros de aproximação e número de pontos das soluções finais.

4.1 Malha adaptativa

Uma malha adaptativa M permite representar uma função pontualmente de maneira precisa com uma certa economia no número de pontos. Em regiões próximas a singularidades maior será a densidade de pontos na malha, enquanto em regiões mais suaves mais esparsa será a distribuição destes pontos.

A malha adaptativa M usada é formada pelo conjunto de pontos $x_k^j = \frac{k}{2^j}$, onde $j, k \in \mathbb{Z}$, sendo que j representa os diferentes níveis de refinamento. Escolhendo-se um malha regular X^J , onde J é o nível mais alto de refinamento, a malha M é definida por:

$$M = X^{j_0} \cup \bigcup_{j=j_0}^{J-1} \Lambda^j \quad (4.1)$$

onde j_o representa o nível menos refinado e $\Lambda^j \subset X^{j+1} \setminus X^j$ para $j_o \leq j < J$. Os valores de uma função f na malha M são definidos por f^M .

Dada uma função f e uma tolerância ou precisão ϵ , a malha escolhida para representar esta função será definida por meio da representação wavelet. Conforme explicado no final da seção 2.8, são eliminados da malha M os pontos pertencentes ao conjunto Λ^j cujos coeficientes wavelets $|d_k^j| < \epsilon$, $\epsilon > 0$. Obtém-se, assim, uma malha truncada M_ϵ .

Como exemplo considere a função f dada por:

$$f(x) = 5\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2e^{-12500(x-1/4)^2}. \quad (4.2)$$

Usando um filtro de ordem 4, para $\epsilon = 0.001$ e $3 \leq j < 8$, a malha e a aproximação são dados na figura 4.1, onde pode-se ver uma maior concentração de pontos em regiões de maior variabilidade no entorno do pico. Nesta figura o número de pontos iniciais é dado por $2^8 + 1$, e o erro é dado pelo valor máximo absoluto da diferença da aproximação final com a condição inicial.

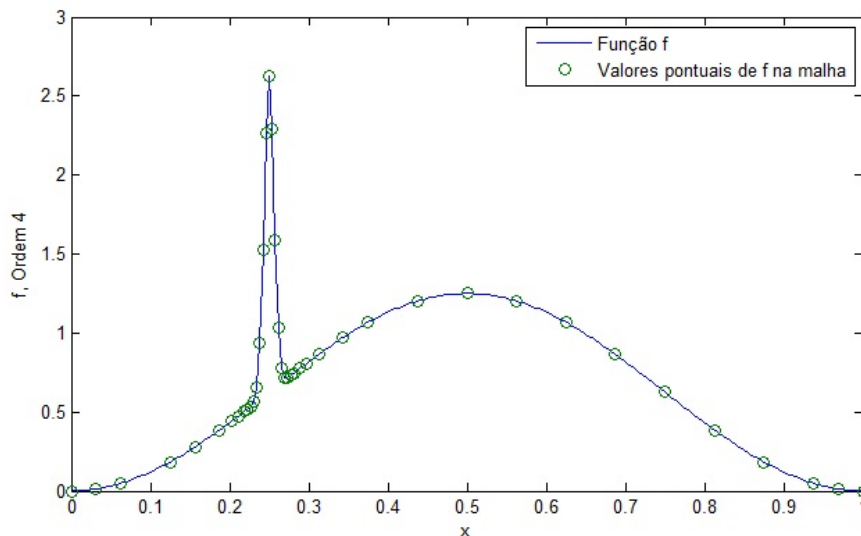


Figura 4.1: Para 257 pontos iniciais e $\epsilon = 0,001$, o erro de aproximação de $f(x)$ é dado por $7,7 \times 10^{-4}$, e o número de pontos finais por 41.

Para a diferenciação espacial usa-se diferenças finitas com espaçamento uniforme Δx , dado pela distância entre os pontos do nível mais refinado da malha. Para o operador de diferenças finitas adaptativa L^j será usado a partir de agora a seguinte notação: L_d , onde $d \in \{1, 2, 3\}$ representa a ordem de diferenciação, que é definido em termo dos coeficientes gama por:

$$L_d(f)(x) = \frac{1}{\Delta x^d} \sum_k \Gamma^{(d)}[k] f(x + k\Delta x). \quad (4.3)$$

O cálculo desta derivada utiliza os valores vizinhos da malha uniforme mesmo que alguns destes pontos sejam eliminados durante o processo de truncamento, conforme é mostrado na figura 4.2.

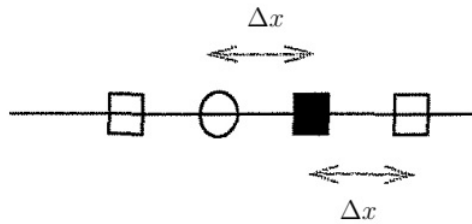


Figura 4.2: No ponto em destaque é feita a diferenciação espacial usando os pontos vizinhos. O círculo é um ponto eliminado [5].

Na evolução temporal é utilizada uma discretização, com o passo de tempo Δt proporcional a Δx , para o cálculo da solução em $t + \Delta t$ a partir da solução em t . O objetivo aqui é usar a malha adaptativa para se obter a aproximação da solução numérica $u(x, t)$ de uma EDP de evolução do tipo abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D(u), \quad t > 0, \quad x \in [0, L]; \quad u = u(x, t) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (4.4)$$

onde o operador D representa um operador envolvendo derivadas espaciais, e $L > 0$.

Para a implementação do algoritmo as etapas para a solução numérica da EDP por wavelets e diferenças finitas seguem os seguintes passos, dados uma tolerância ϵ e um nível de resolução J fixados:

- Discretiza-se a função, que é a condição inicial, com o nível de resolução mais alto J usando um total de $M + 1 = 2^J + 1$ pontos. Da equação (4.4) tem-se que $\Delta x = L/M$.
- A evolução da solução segue:
 - Decompõe-se a função nos seus coeficientes wavelets até um nível menos refinado $j_0 < J$ da malha em geral.
 - Eliminam-se pontos pelo critério de truncamento.
 - Calcula-se a solução, que no momento possui, apenas, os pontos relevantes, no próximo passo de tempo $t + \Delta t$ aplicando (4.4).
 - Reconstrói-se a solução com o mesmo número de pontos iniciais $M+1$, no domínio espacial original, através da interpolação spline cúbica (cujo comando está presente no MATLAB), que é o método mais comum encontrado na literatura.
- Repete-se o ciclo até um tempo final t_f desejado.

4.2 Resultados Numéricos

Nesta etapa serão tratadas duas EDPs. Num primeiro momento será feita a análise numérica da equação de Burgers. Depois esta análise será adaptada para a equação de Kdv.

4.2.1 Equação de Burgers com viscosidade

A equação de Burgers é dada por:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.5)$$

onde $t \geq 0$, $x \in [0, 1]$ e o coeficiente de viscosidade $\mu > 0$. As condições de fronteiras e inicial são dadas por:

$$\begin{cases} u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x) \end{cases} \quad (4.6)$$

A solução analítica da equação de Burgers, com as condições (4.6), avaliadas no domínio espacial $[0, 1]$ e $\mu = 10^{-2}/\pi$, é dada por [17]:

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\mu t} + \frac{1}{4\pi\mu} \cos(2\pi y)\right) dy}{t \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\mu t} + \frac{1}{4\pi\mu} \cos(2\pi y)\right) dy}.$$

Discretizando a equação (4.5) tem-se que:

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + u(x, t + \Delta t) L_1(u)(x) = \mu L_2(u)(x). \quad (4.7)$$

Então, o cálculo de $u(x, t + \Delta t)$, na malha irregular, é dado por:

$$u(x, t + \Delta t) = \frac{u(x, t) + \Delta t \mu L_2(u)(x)}{1 + \Delta t L_1(u)(x)}. \quad (4.8)$$

A fim de se analisar a estabilidade desta aproximação numérica usa-se o esquema exponencial de von Neumann [14], [19] no qual tem-se um fator de crescimento por meio de um modo de Fourier:

$$u(x, t) = w^t e^{rxi}, \quad (4.9)$$

onde w é o fator de crescimento que será usado para a análise de estabilidade, $i = \sqrt{-1}$, r é uma constante real, t e x são as variáveis temporal e espacial, respectivamente.

Apesar da equação (4.5) ser não linear, pode-se supor que a solução varia pouco (localmente) comparado com o erro, pois já se tem um conhecimento prévio do comportamento desta solução ao longo do tempo. Com isso, o primeiro

termo u na expressão $u\partial_x u$ pode ser assumido localmente como uma constante a , conforme a equação discretizada (4.7) fica:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \mu L_2(u)(x) - \Delta t a L_1(u)(x) \quad (4.10)$$

Fazendo a substituição $u(x, t) = w^t e^{rxi}$ nesta equação, obtém-se:

$$w^{t+\Delta t} e^{rxi} = w^t e^{rxi} + \Delta t \mu \frac{w^t}{\Delta x^2} \sum_k \Gamma^{(2)}[k] e^{r(x+k\Delta x)i} - \Delta t a \frac{w^t}{\Delta x} \sum_k \Gamma^{(1)}[k] e^{r(x+k\Delta x)i} \quad (4.11)$$

Definindo $\lambda_1 = \frac{\Delta t \mu}{\Delta x^2}$ e $\lambda_2 = \frac{\Delta t a}{\Delta x}$ e simplificando por meio das condições de simetria (3.12), a equação fica:

$$w^t w^{\Delta t} e^{rxi} = w^t e^{rxi} \left(1 + 2\lambda_1 \sum_{k \geq 0} \Gamma^{(2)}[k] \cos(rk\Delta x) - i2\lambda_2 \sum_{k \geq 0} \Gamma^{(1)}[k] \text{sen}(rk\Delta x) \right) \quad (4.12)$$

Escolhendo um $\Delta x \ll 1$, o fator Δx^2 faz com que $\lambda_1 \gg \lambda_2$, então o termo imaginário pode ser desprezado e a equação acima é aproximada por:

$$w^{\Delta t} \approx \left(1 + 2\lambda_1 \sum_{k \geq 0} \Gamma^{(2)}[k] \cos(rk\Delta x) \right) \quad (4.13)$$

Para a estabilidade deve-se ter $|w^{\Delta t}| < 1$. A fim de se ter uma ideia mais clara desta condição, considera-se o caso de diferenças finitas simples de 2° ordem, ou seja, $\Gamma^{(2)} = (1, -2, 1)$. A condição fica:

$$|1 + 2\lambda_1(-2 + \cos(r\Delta x))| < 1 \quad (4.14)$$

ou de outra forma:

$$-1 < \lambda_1(-2 + \cos(r\Delta x)) < 0 \quad (4.15)$$

A soma entre parênteses é sempre negativa, então, substituindo $\lambda_1 = \frac{\Delta t \mu}{\Delta x^2}$ tem-se que a menor cota para Δt em função de Δx , para este caso, é dada por:

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{3\mu} \quad (4.16)$$

Para ordens mais altas a condição $|w^{\Delta t}| < 1$ fornece a seguinte desigualdade:

$$\lambda_1 < \frac{1}{\max_{k \geq 0} |\sum_{k \geq 0} \Gamma^{(2)}[k] \cos(rk\Delta x)|} \quad (4.17)$$

Usando $\max_{k \geq 0} \left| \sum_{k \geq 0} \Gamma^{(2)}[k] \cos(rk\Delta x) \right| \leq \sum_{k \geq 0} |\Gamma^{(2)}[k]|$, uma estimativa para uma relação mais generalizada entre Δt em função de Δx é dada por:

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{\mu \sum_{k \geq 0} |\Gamma^{(2)}[k]|} \quad (4.18)$$

Pode-se ver que das estimativas (4.16) e (4.18), ao se aumentar o número de pontos da malha, o espaçamento temporal deve ser reduzido por um fator aproximadamente quadrático, e a condição (4.18) implica que ao se aumentar a ordem de diferenciação a redução de Δt deve ser ainda menor resultando em um alto custo computacional.

Com isso, são analisadas as soluções para duas ordens distintas do polinômio interpolador, onde o erro de truncamento $\epsilon = 10^{-7}$ e o nível mais esparsos é de $j_0 = 3$. É calculado como o erro $\|\cdot\|_\infty$ entre a solução aproximada e a solução analítica varia com o valor dos níveis de pontos $M = (128, 256, 512)$, bem como o número de pontos finais. Em cada gráfico o número de pontos iniciais é sempre dado por $M+1$, e a solução aproximada é sempre calculada em $t = 0, 5$.

4.2.1.1 Interpolação de ordem 4 usando Diferenças finitas simples (ordem 2) (IO4D2):

Neste caso o espaçamento temporal é definido por $\Delta t = \frac{\Delta x^2}{4\mu}$.

Na figura 4.3 é mostrada a simulação para $M = 128$. Em $t = 0$ a condição inicial tem 129 pontos. A solução aproximada em $t = 0, 5$ tem 67 pontos. O erro de aproximação é de 0,1309.

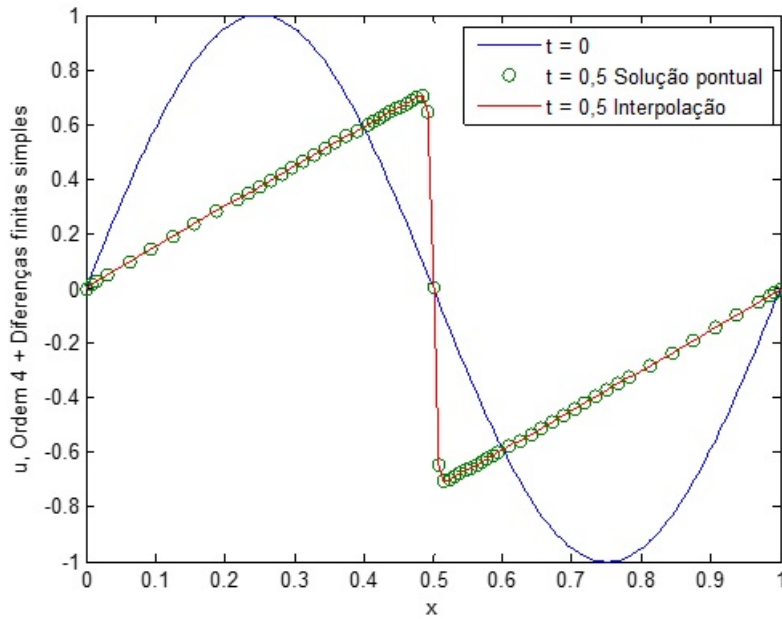


Figura 4.3: IO4D2. $M = 128$, erro = 0,1309 , 67 pontos

Na figura 4.4 é mostrada a simulação para $M = 256$. Em $t = 0$ a condição inicial tem 257 pontos. A solução aproximada em $t = 0,5$ tem 85 pontos. O erro de aproximação é de 0,0227.

Na figura 4.5 é mostrada a simulação para $M = 512$. Em $t = 0$ a condição inicial tem 513 pontos. A solução aproximada em $t = 0,5$ tem 113 pontos. O erro de aproximação é de 0,0056.

Nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5 pode-se ver uma maior concentração de pontos em torno de $x = 0,5$ e nas extremidades $x = 0$ e $x = 1$. Ao se aumentar o nível de pontos M , menor se torna o erro de aproximação e maior a densidade de pontos na malha, conforme pode ser visto nos círculos ao longo das curvas em $t = 0,5$.

Na figura 4.6 é mostrada a curva logarítmica do erro em função do nível de pontos M em $t = 0,5$. A inclinação desta curva apresenta um coeficiente angular de -2,214, o que implica que o erro é proporcional a $M^{-2,214}$ ou a $\Delta x^{2,214}$, ou seja, ao

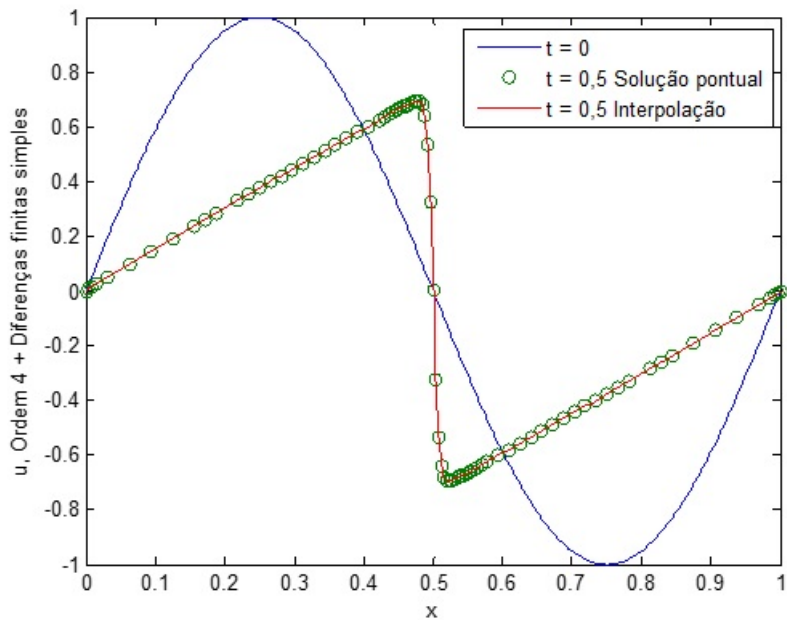


Figura 4.4: IO4D2. $M = 256$, erro = 0,0227 , 85 pontos

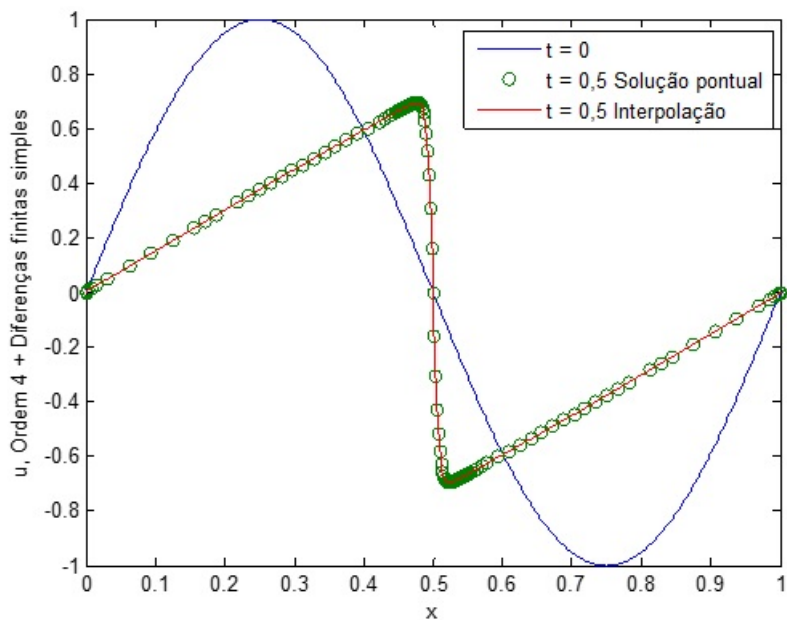


Figura 4.5: IO4D2. $M = 512$, erro = 0,0056 , 113 pontos

se reduzir pela metade o valor de M , o erro tende a sofrer um acréscimo em torno de 4,6 vezes.

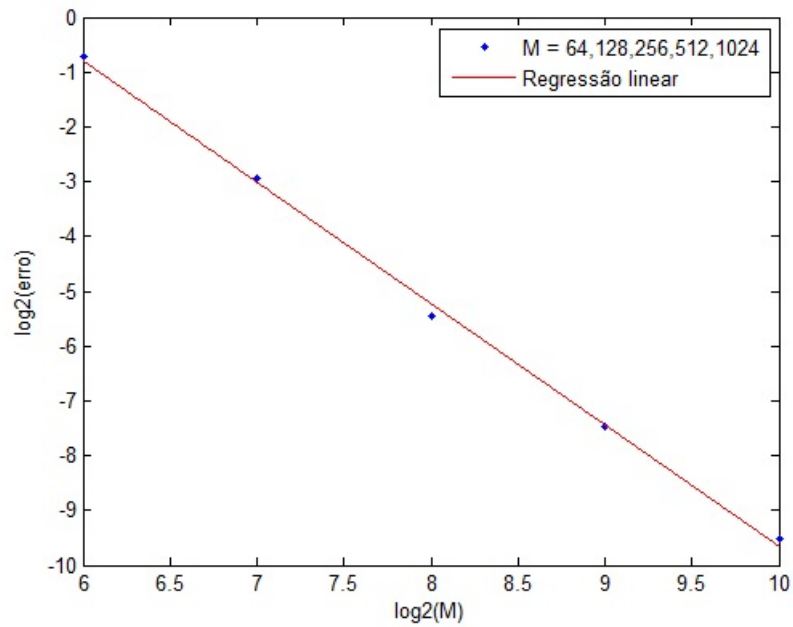


Figura 4.6: IO4D2. Gráfico logarítmico do erro em relação a M . O coeficiente angular da reta é -2,214.

4.2.1.2 Interpolação e Diferenças finitas de ordem 6 (IDO6):

Neste caso o espaçamento temporal é definido por $\Delta t = \frac{\Delta x^2}{10\mu}$.

Na figura 4.7 é mostrada a simulação para $M = 128$. Em $t = 0$ a condição inicial tem 129 pontos. A solução aproximada em $t = 0,5$ tem 75 pontos. O erro de aproximação é de 0,0191.

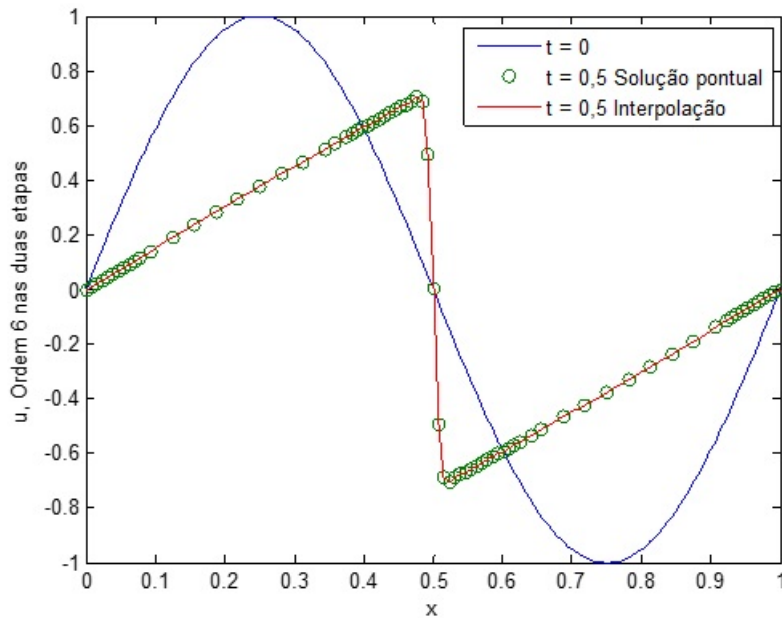


Figura 4.7: IDO6. $M = 128$, erro = 0,0191 , 75 pontos

Na figura 4.8 é mostrada a simulação para $M = 256$. Em $t = 0$ a condição inicial tem 257 pontos. A solução aproximada em $t = 0,5$ tem 95 pontos. O erro de aproximação é de 0,0070.

Na figura 4.9 é mostrada a simulação para $M = 512$. Em $t = 0$ a condição inicial tem 513 pontos. A solução aproximada em $t = 0,5$ tem 119 pontos. O erro de aproximação é de $8,6 \times 10^{-4}$.

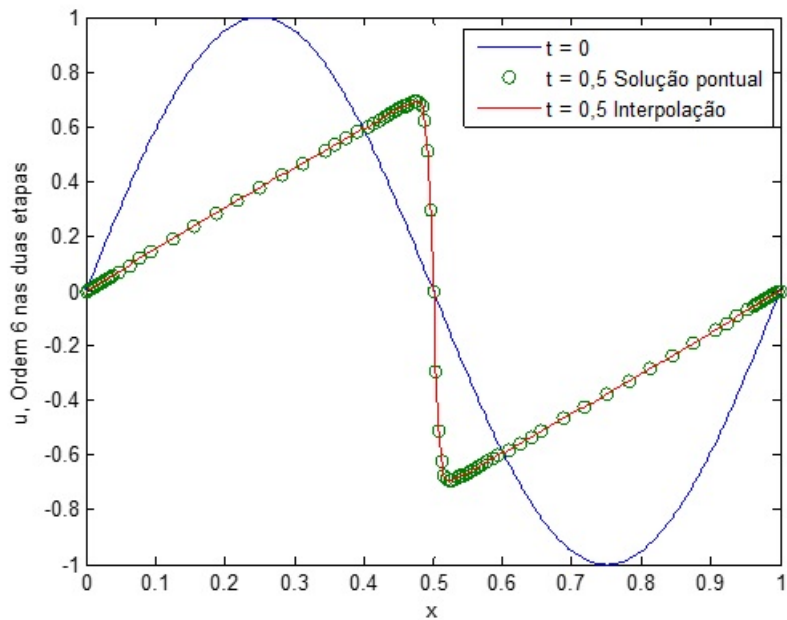


Figura 4.8: IDO6. $M = 256$, erro = 0,0070 , 95 pontos

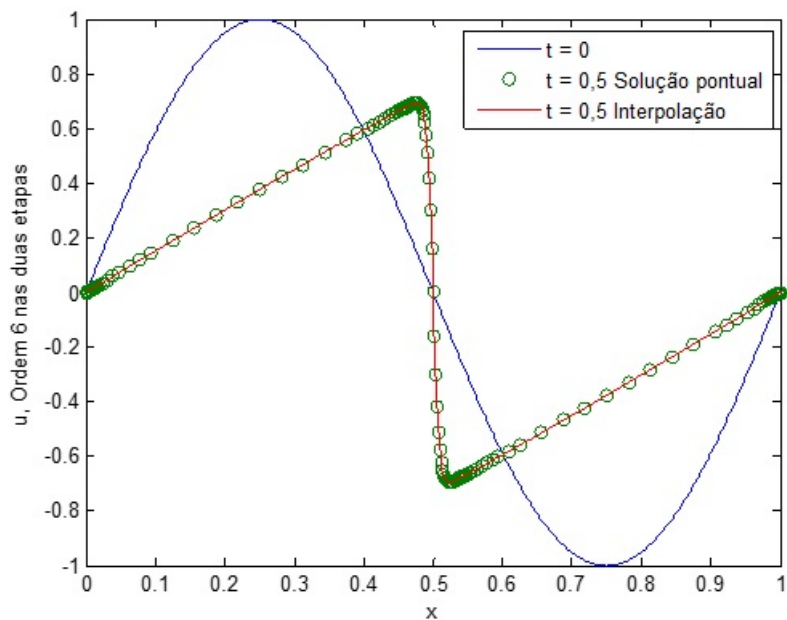


Figura 4.9: IDO6. $M = 512$, erro = $8,6 \times 10^{-4}$, 119 pontos

Nas figuras 4.7, 4.8 e 4.9 pode-se ver uma maior concentração de pontos em torno de $x = 0,5$ e nas extremidades $x = 0$ e $x = 1$. Ao se aumentar o nível de pontos M , menor se torna o erro de aproximação e maior a densidade de pontos na malha, conforme pode ser visto nos círculos ao longo das curvas em $t = 0,5$.

Na figura 4.10 é mostrada a curva logarítmica do erro em função do nível de pontos M em $t = 0,5$. A inclinação desta curva apresenta um coeficiente angular de $-1,792$, o que implica que o erro é proporcional a $M^{-1,792}$ ou a $\Delta x^{1,792}$, ou seja, ao se reduzir pela metade o valor de M , o erro tende a sofrer um acréscimo em torno de 3,4 vezes.

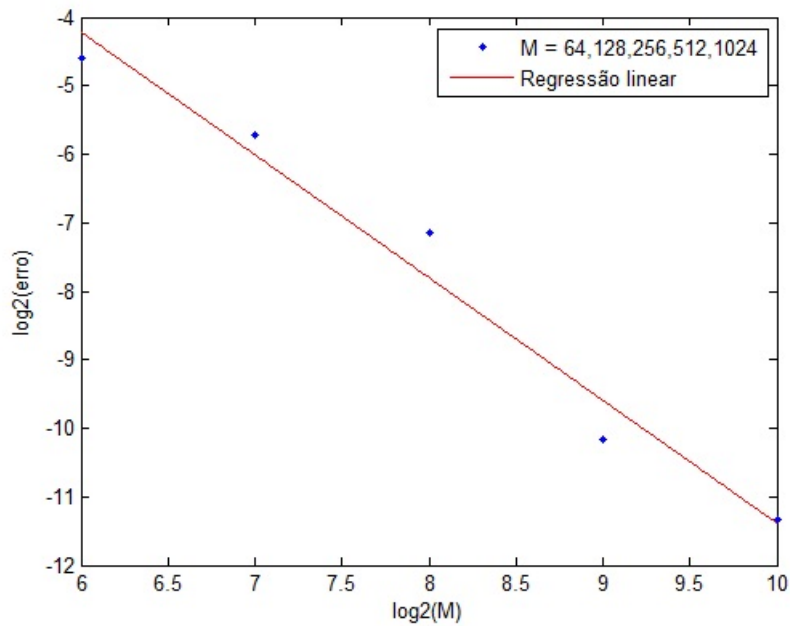


Figura 4.10: IDO6. Gráfico logarítmico do erro em relação a M . O coeficiente angular da reta é $-1,792$.

Na tabela 4.1 estão resumidas as comparações dos erros da solução numérica de Burgers, em cada ordem, para diferentes níveis de pontos M . Também são mostrados os números dos pontos finais das simulações, em parênteses. Pode-se ver que ao se aumentar a ordem do algoritmo, menor se torna o erro da solução aproximada, e o número de pontos finais tende a ser maior, com exceção para $M =$

1024, que ficou igual nos dois casos. Por fim, o acréscimo do erro é maior no caso de ordem 4 do que no de ordem 6, ao se reduzir pela metade o valor de M , conforme visto anteriormente nas inclinações das curvas logarítmicas dos erros.

Tabela 4.1: Comparação dos erros de cada ordem usado em Burgers, no tempo final $t_f = 0,5$. Os valores em parênteses são os números de pontos finais.

$\epsilon = 10^{-7}$	ordem 4 e dif2	ordem 6
$M = 64$	0,6122 (51)	0,0411 (57)
$M = 128$	0,1309 (67)	0,0191 (75)
$M = 256$	0,0227 (85)	0,0070 (95)
$M = 512$	0,0056 (113)	$8,6 \times 10^{-4}$ (119)
$M = 1024$	0,0014 (155)	$3,9 \times 10^{-4}$ (155)

4.2.2 Equação de Korteweg-de Vries

Nesta subsecção o método numérico usado no caso anterior será adaptado para resolver a equação de Korteweg-de Vries (Kdv), que é dada por:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = 0, \quad (4.19)$$

onde $t \geq 0$, $x \in [0, 30]$.

Essa equação tem soluções explícitas conhecidas [20], como por exemplo

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - a) \right),$$

onde c e a são constantes quaisquer.

As condições de fronteiras e inicial são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} u(0, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (0 - ct - a) \right) \\ u(L, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (L - ct - a) \right) \\ u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - a) \right) \end{cases} \quad (4.20)$$

Para discretizar a equação (4.19) faz-se o uso proposto por Goda [6], juntamente com a discretização de operadores encontrados no capítulo anterior. Este procedimento ajuda a prevenir possíveis problemas de instabilidades na solução devido ao fator Δx^3 presente no operador diferencial de terceira ordem. Para isso, no lugar dos operadores diferenciais tradicionais, serão usados os de diferenças finitas adaptativas L_d , onde $d \in \{1, 3\}$.

Sendo Δt e Δx os incrementos no tempo e no espaço, respectivamente, a solução de diferenças aproximada $u(n\Delta t, j\Delta x)$ é dada por u_j^n , onde $n, j \in \mathbb{Z}^+$.

Inicia-se reescrevendo a discretização proposta por Goda na equação (4.19) da seguinte forma:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{3} (u_j^n L_1(u_j^{n+1}) + L_1(u_j^n u_j^{n+1})) + L_3(u_j^{n+1}) = 0. \quad (4.21)$$

Os termos que contêm os operadores de diferenças finitas na equação acima são dados, em função dos coeficientes gama, por:

$$L_1(u_j^{n+1}) = \frac{1}{\Delta x} \sum_k \Gamma^{(1)}[k] u_k^{n+1}, \quad (4.22)$$

$$L_1(u_j^n u_j^{n+1}) = \frac{1}{\Delta x} \sum_k \Gamma^{(1)}[k] u_k^n u_k^{n+1} \quad (4.23)$$

e

$$L_3(u_j^{n+1}) = \frac{1}{\Delta x^3} \sum_k \Gamma^{(3)}[k] u_k^{n+1}. \quad (4.24)$$

Substituindo estas três últimas equações em (4.21) tem-se que:

$$u_j^{n+1} + \sum_k \left(\frac{\Delta t}{3\Delta x} (u_j^n + u_k^n) \Gamma^{(1)}[k] + \frac{\Delta t}{\Delta x^3} \Gamma^{(3)}[k] \right) u_k^{n+1} = u_j^n. \quad (4.25)$$

Usando a notação vetorial para um total de N pontos $U^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n)^T$, a equação acima pode ser escrita na forma matricial como:

$$M U^{n+1} = U^n, \quad (4.26)$$

onde M é uma matriz quadrada de ordem N , cujos elementos em termos de linhas e colunas são dados por:

$$M(k, k) = 1, \quad (4.27)$$

na diagonal principal e nas demais diagonais por:

$$M(k, k + l) = \frac{\Delta t}{3\Delta x}(u_k^n + u_{k+l}^n)\Gamma^{(1)}[l] + \frac{\Delta t}{\Delta x^3}\Gamma^{(3)}[l], \quad (4.28)$$

onde $1 \leq k \leq N$ e $l \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Neste caso, para a resolução da equação de Kdv, diferente da equação de Burgers, cuja a solução foi obtida de maneira explícita, deve-se obter a solução de maneira implícita resolvendo o sistema (4.26), cuja matriz M depende dos valores pontuais da solução u . Para isso deve-se usar todos os pontos amostrados na resolução deste sistema. Então, tendo a solução na etapa $n + 1$, extrai-se os pontos relevantes, cuja informação foi salva na etapa de truncamento. Esta inconveniência de se usar todos os pontos para a resolução do sistema é compensada pelo fato de M ser uma matriz esparsa, o que facilita o cálculo com este tipo de matriz.

A fim de se analisar a estabilidade desta aproximação numérica reescreve-se a equação (4.25) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x, t + \Delta t) &+ \sum_k \frac{\Delta t}{3\Delta x}(u(x, t) + u(x + k\Delta x, t))\Gamma^{(1)}[k]u(x + k\Delta x, t + \Delta t) \\ &+ \sum_k \frac{\Delta t}{\Delta x^3}\Gamma^{(3)}[k]u(x + k\Delta x, t + \Delta t) = u(x, t). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Por meio da substituição $u(x, t) = w^t e^{rx_i}$ e da suposição de que o primeiro termo u na expressão $u\partial_x u$ é uma constante a , a fim de se eliminar a não linearidade, a equação acima fica:

$$w^{t+\Delta t} e^{rx_i} + \sum_k \left(\frac{\Delta t}{3\Delta x} 2a\Gamma^{(1)}[k] + \frac{\Delta t}{\Delta x^3}\Gamma^{(3)}[k] \right) w^{t+\Delta t} e^{r(x+k\Delta x)_i} = w^t e^{rx_i}. \quad (4.30)$$

Definindo $\lambda_1 = \frac{2a \Delta t}{3\Delta x}$ e $\lambda_2 = \frac{\Delta t}{\Delta x^3}$ a equação acima fica, por meio de simplificações:

$$w^{\Delta t} + \sum_k (\lambda_1 \Gamma^{(1)}[k] + \lambda_2 \Gamma^{(3)}[k]) w^{\Delta t} e^{r(k\Delta x)i} = 1. \quad (4.31)$$

Usando as condições de simetria (3.12), tem-se que:

$$w^{\Delta t} = \frac{1}{1 + i2 \sum_{k \geq 1} (\lambda_1 \Gamma^{(1)}[k] + \lambda_2 \Gamma^{(3)}[k]) \text{sen}(rk\Delta x)}. \quad (4.32)$$

Esta equação garante que $|w^{\Delta t}| < 1$ para quaisquer valores de λ_1 e λ_2 , logo, esta aproximação numérica é incondicionalmente estável em termos da relação entre Δx e Δt . Nos algoritmos de Kdv o espaçamento temporal foi definido arbitrariamente por $\Delta t = \Delta x$.

Na figura 4.11 estão os gráficos da solução analítica e da solução obtida pelo método de Goda, usando um total de 257 pontos. O erro entre as duas soluções é dado por $\|\cdot\|_\infty$.

Na figura 4.12 e na tabela 4.2 estão representados os erros de se aproximar a solução final usando o método de Goda em função dos níveis de pontos $M = (64, 128, 256, 512, 1024)$ no tempo final $t_f = 5$. O total de pontos é sempre dado por $M+1$.

Na figura 4.12, a inclinação da curva logarítmica do erro em função do nível de pontos M apresenta um coeficiente angular de -1,017, o que implica que o erro é proporcional a $M^{-1,017}$ ou a $\Delta x^{1,017}$, ou seja, ao se reduzir pela metade o valor de M , o erro tende a sofrer um acréscimo em torno de 2 vezes, conforme pode ser visto na tabela 4.2.

Com isso, são analisadas as soluções para duas ordens distintas, tanto da interpolação wavelet (onde o nível mais esparsa é de $j_0 = 3$) quanto do método de diferenças finitas adaptativas. É calculado como o erro absoluto máximo da

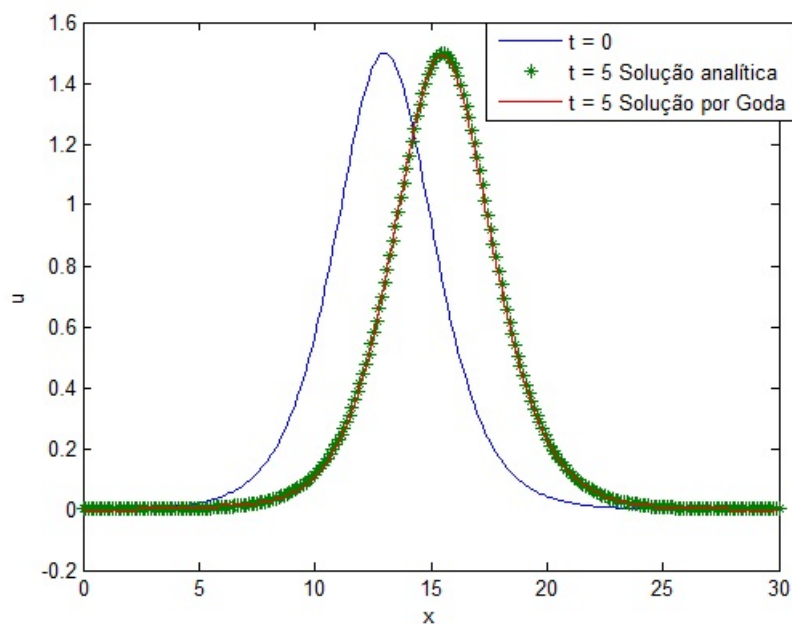


Figura 4.11: Comparação gráfica entre as soluções analíticas e por Goda, $M = 256$, erro = 0,0233.

Tabela 4.2: Erro da aproximação pelo método Goda em função do nível de pontos M .

M	64	128	256	512	1024
Erro	0,0964	0,0480	0,0233	0,0116	0,0058

solução final varia com o valor dos níveis de pontos $M = (64,128,256,512,1024)$ em um gráfico, cujos pontos iniciais são sempre $M+1$, no tempo $t_f = 5$ para $\epsilon = 10^{-5}$. Depois são analisados como esse erro varia para diferentes valores de ϵ , uma vez para $M = 256$ e outra para $M = 512$. Em cada caso será analisado o número de pontos da solução final aproximada.

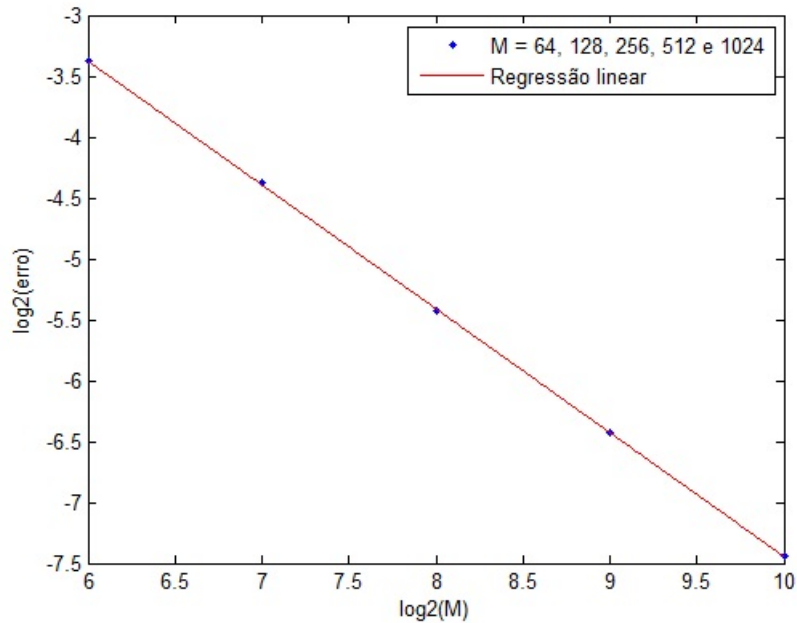


Figura 4.12: Gráfico do erro da aproximação pelo método Goda em função do nível de pontos M . O coeficiente angular da reta é -1,017.

4.2.2.1 Interpolação e equação de Kdv de ordem 4:

Na figura 4.13 é mostrado o gráfico da simulação, ordem 4, para $\epsilon = 10^{-5}$ e $M = 256$.

Na figura 4.14 é mostrado a curva logarítmica do erro, para ordem 4, em função do nível de pontos M em $t = 5$. A inclinação desta curva apresenta um coeficiente angular de -1,096, o que implica que o erro é proporcional a $M^{-1,096}$ ou a $\Delta x^{1,096}$, ou seja, ao se reduzir pela metade o valor de M , o erro tende a sofrer um acréscimo em torno de 2,14 vezes, conforme pode ser visto na tabela 4.3.

Tabela 4.3: Número de pontos da solução final, ordem 4, em função de M e do erro para $\epsilon = 10^{-5}$.

M	64	128	256	512	1024
Erro	0,0805	0,0427	0,0218	0,0074	0,0043
N^o de pontos	64	128	212	119	114

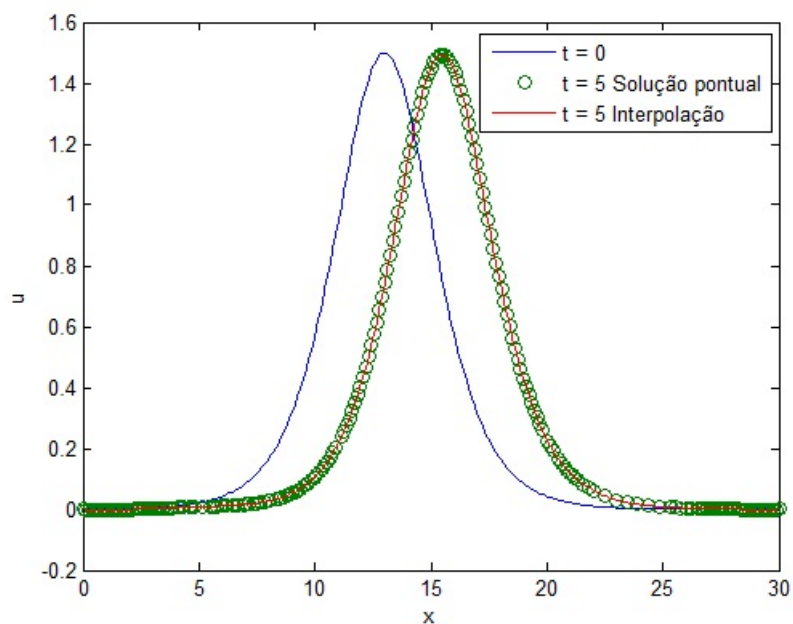


Figura 4.13: Gráfico da solução u , ordem 4, com $M = 256$, $\epsilon = 10^{-5}$ e número de pontos finais igual a 212.

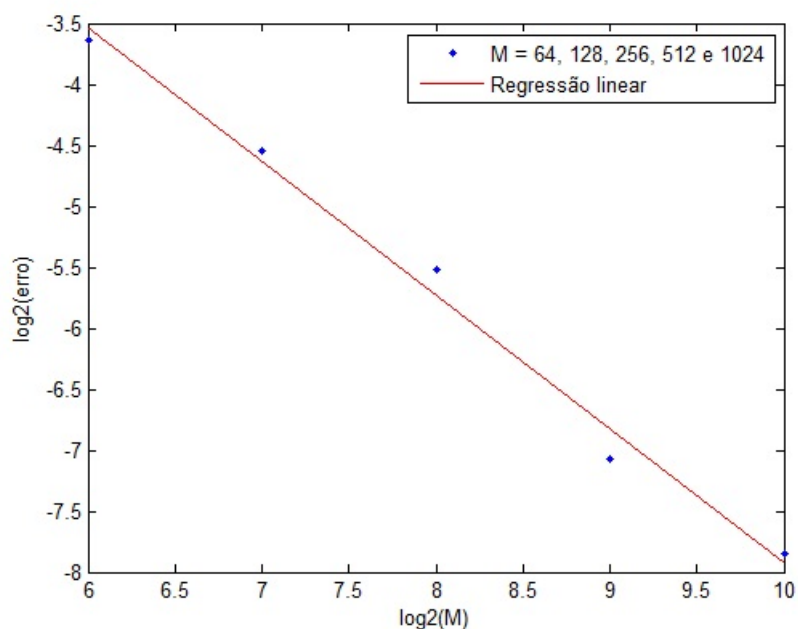


Figura 4.14: Gráfico do erro, ordem 4, em função da ordem do número de pontos (M) para $\epsilon = 10^{-5}$. O coeficiente angular é $-1,096$.

Na figura 4.15 é mostrada a curva logarítmica do erro, ordem 4, para diferentes valores de ϵ , quando $M = 256$. É feita uma interpolação nos pontos que aparecem no gráfico. Estes erros, junto com o número de pontos finais, estão na tabela 4.4. Conforme estes dados, pode-se ver que o erro permanece aproximadamente constante quando $\epsilon < 10^{-5}$, e para $10^{-6} < \epsilon < 10^{-2,5}$ ocorrem flutuações nos valores destes erros, onde o erro mínimo acontece em $\epsilon = 10^{-4}$. Nesta tabela também pode-se ver que o número de pontos finais tende a diminuir com o aumento de ϵ .

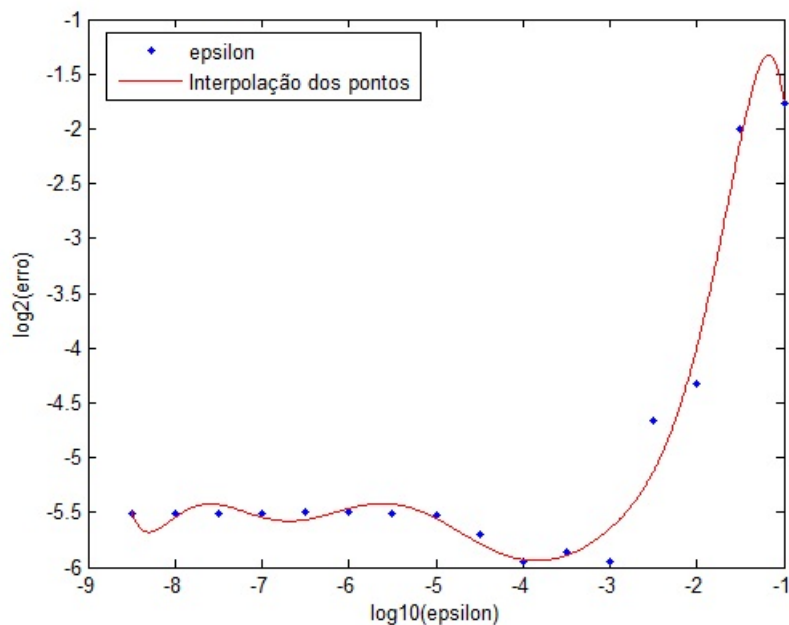


Figura 4.15: Gráfico do erro em função de ϵ , ordem 4, para $M = 256$.

Na figura 4.16 é mostrada a curva logarítmica do erro, ordem 4, para diferentes valores de ϵ , quando $M = 512$. Estes erros, junto com o número de pontos finais, estão na tabela 4.6. Conforme estes dados, pode-se ver que o erro permanece aproximadamente constante quando $\epsilon < 10^{-6}$, e para $10^{-6,5} < \epsilon < 10^{-3}$ ocorrem flutuações nos valores destes erros, onde o erro mínimo acontece em $\epsilon = 10^{-4}$. Nesta tabela também pode-se ver que, de maneira geral, o número de pontos finais tende a diminuir com o aumento de ϵ .

Tabela 4.4: Número de pontos da solução final, ordem 4, em função de ϵ e do erro, para $M = 256$.

$\log(\epsilon)$	Erro	N ^o de pontos
-8,5	0,0220	257
-8	0,0220	257
-7,5	0,0220	257
-7	0,0220	256
-6,5	0,0221	257
-6	0,0221	248
-5,5	0,0220	251
-5	0,0218	212
-4,5	0,0193	77
-4	0,0162	57
-3,5	0,0171	39
-3	0,0163	30
-2,5	0,0396	20
-2	0,0500	17
-1,5	0,2497	11
-1	0,2947	9

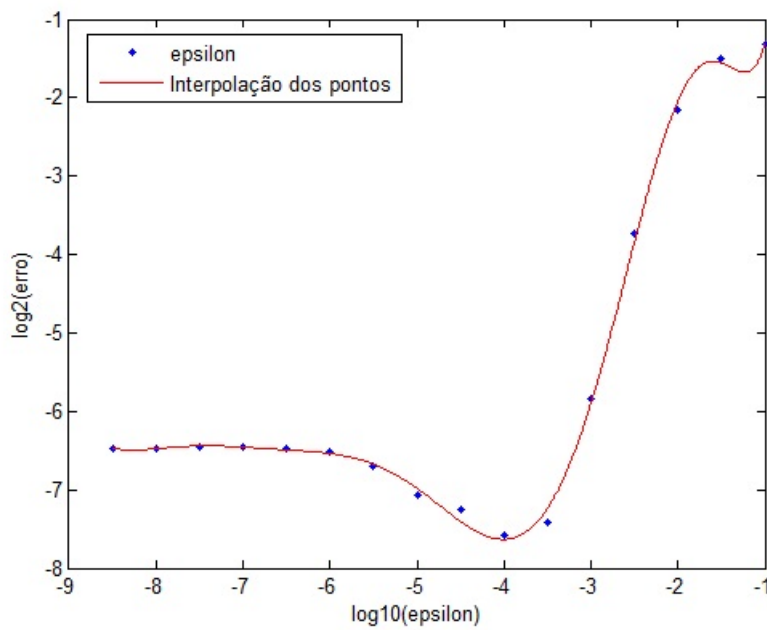


Figura 4.16: Gráfico do erro em função de ϵ , ordem 4, para $M = 512$.

Tabela 4.6: Número de pontos da solução final, ordem 4, em função de ϵ e do erro, para $M = 512$.

ϵ (em potência de 10)	Erro	N ^o de pontos
-8,5	0,0113	512
-8	0,0113	512
-7,5	0,0114	504
-7	0,0113	498
-6,5	0,0113	484
-6	0,0109	475
-5,5	0,0097	244
-5	0,0074	119
-4,5	0,0065	70
-4	0,0052	56
-3,5	0,0059	38
-3	0,0174	30
-2,5	0,0751	21
-2	0,2243	17
-1,5	0,3512	11
-1	0,4034	9

4.2.2.2 Interpolação e equação de Kdv de ordem 6:

Na figura 4.17 é mostrado o gráfico da simulação, ordem 6, para $\epsilon = 10^{-5}$ e $M = 256$.

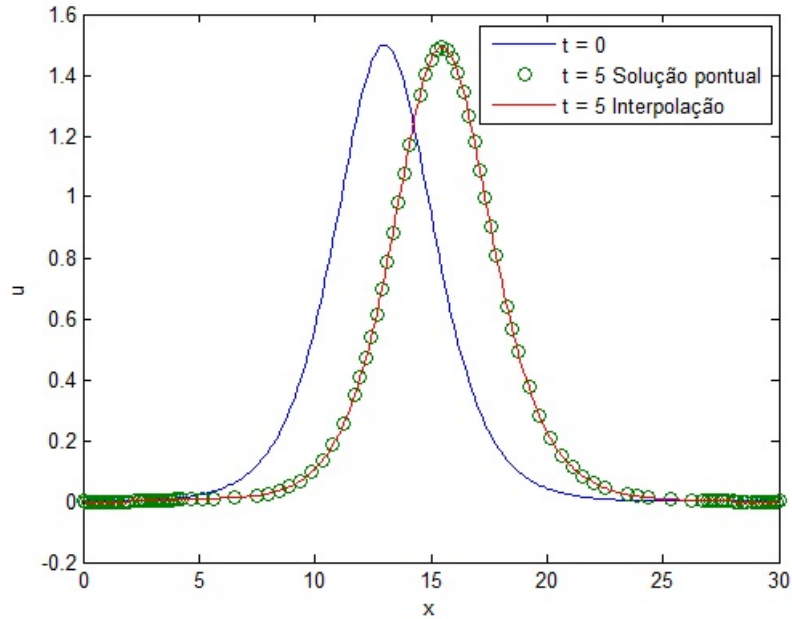


Figura 4.17: Gráfico da solução u , ordem 6, com $M = 256$, $\epsilon = 10^{-5}$ e número de pontos finais igual a 110.

Na figura 4.18 é mostrado a curva logarítmica do erro, para ordem 6, em função do nível de pontos M em $t = 5$. A inclinação desta curva apresenta um coeficiente angular de $-1,202$, o que implica que o erro é proporcional a $M^{-1,202}$ ou a $\Delta x^{1,202}$, ou seja, ao se reduzir pela metade o valor de M , o erro tende a sofrer um acréscimo em torno de 2,3 vezes, conforme pode ser visto na tabela 4.8.

Tabela 4.8: Número de pontos da solução final, ordem 6, em função de M e do erro para $\epsilon = 10^{-5}$.

M	64	128	256	512	1024
Erro	0,0902	0,0462	0,0214	0,0087	0,0032
N° de pontos	65	124	110	85	78

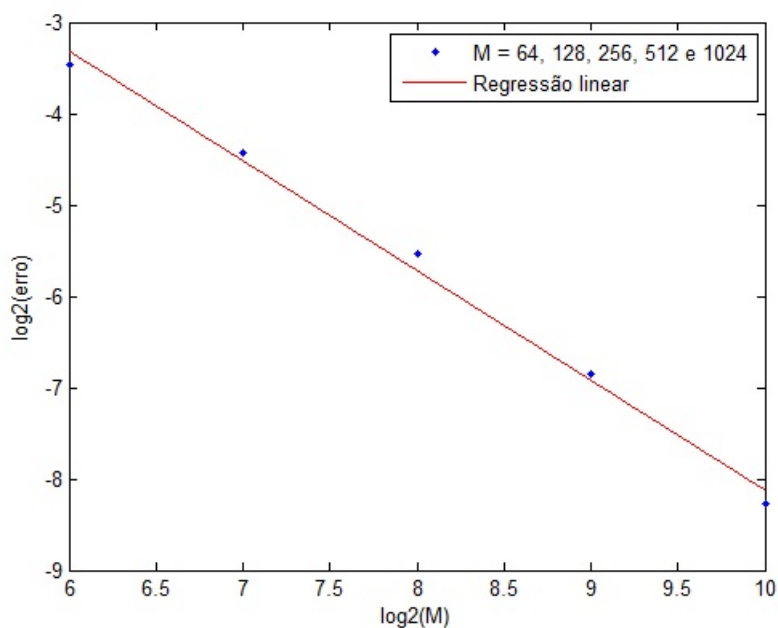


Figura 4.18: Gráfico do erro, ordem 6, em função da ordem do número de pontos (M) para $\epsilon = 10^{-5}$. O coeficiente angular da reta é -1,202.

Na figura 4.19 é mostrada a curva logarítmica do erro, ordem 6, para diferentes valores de ϵ , quando $M = 256$. Estes erros, junto com o número de pontos finais, estão na tabela 4.9. Conforme estes dados, pode-se ver que o erro permanece aproximadamente constante quando $\epsilon < 10^{-5,5}$, e para $10^{-6} < \epsilon < 10^{-2}$ ocorrem flutuações nos valores destes erros, onde o erro mínimo acontece em $\epsilon = 10^{-3}$. Nesta tabela também pode-se ver que o número de pontos finais tende a diminuir com o aumento de ϵ .

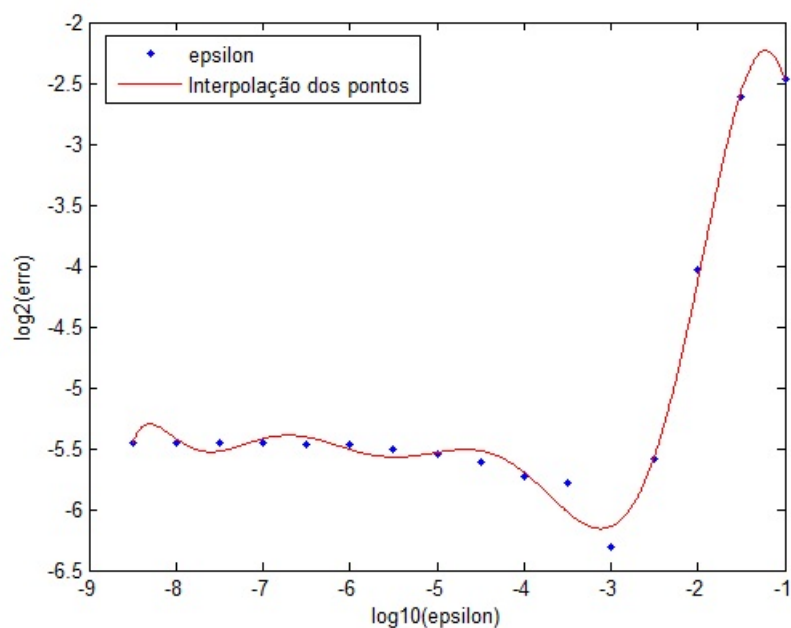


Figura 4.19: Gráfico do erro em função de ϵ , ordem 6, para $M = 256$.

Tabela 4.9: Número de pontos da solução final, ordem 6, em função de ϵ e do erro, para $M = 256$.

ϵ (em potência de 10)	Erro	N ^o de pontos
-8,5	0,0229	255
-8	0,0229	256
-7,5	0,0228	251
-7	0,0227	249
-6,5	0,0227	242
-6	0,0226	241
-5,5	0,0219	222
-5	0,0214	110
-4,5	0,0205	58
-4	0,0188	47
-3,5	0,0182	30
-3	0,0126	25
-2,5	0,0207	21
-2	0,0613	15
-1,5	0,1638	9
-1	0,1804	9

Na figura 4.20 é mostrada a curva logarítmica do erro, ordem 6, para diferentes valores de ϵ , quando $M = 512$. Estes erros, junto com o número de pontos finais, estão na tabela 4.11. Conforme estes dados, pode-se ver que o erro permanece aproximadamente constante quando $\epsilon < 10^{-6,5}$, e para $10^{-7} < \epsilon < 10^{-3}$ ocorrem flutuações nos valores destes erros, onde o erro mínimo acontece em $\epsilon = 10^{-4}$. Nesta tabela também pode-se ver que, de maneira geral, o número de pontos finais tende a diminuir com o aumento de ϵ .

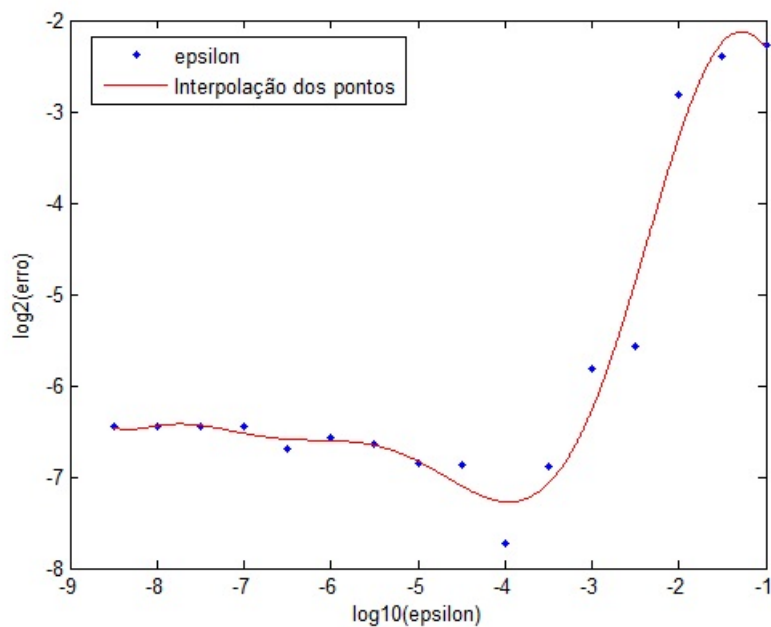


Figura 4.20: Gráfico do erro em função de ϵ , ordem 6, para $M = 512$.

Com base nesses dados obtidos, observa-se que tanto no método de ordem 4 quanto no de ordem 6, conforme se diminui o valor de ϵ , os erros no caso $M = 512$ tendem a ser menores do que no caso $M = 256$. Também se observa que para cada um destes valores de M , os erros no método de ordem 6 tendem a ser maiores do que no de ordem 4, embora que na medida que se diminui o valor de ϵ a diferença entre estes erros tende a diminuir, e os respectivos números de pontos finais no método de ordem 6 tendem a ser menores do que no de ordem 4. As irregularidades nos erros das soluções aproximadas, vistas nas regiões de flutuações,

Tabela 4.11: Número de pontos da solução final, ordem 6, em função de ϵ e do erro, para $M = 512$.

ϵ (em potência de 10)	Erro	N ^o de pontos
-8,5	0,0114	499
-8	0,0115	476
-7,5	0,0115	463
-7	0,0115	485
-6,5	0,0096	475
-6	0,0106	382
-5,5	0,0100	175
-5	0,0087	85
-4,5	0,0085	55
-4	0,0047	43
-3,5	0,0085	29
-3	0,0177	26
-2,5	0,0209	22
-2	0,1427	17
-1,5	0,1899	9
-1	0,2082	9

se devem ao acúmulo dos erros das sucessivas etapas de truncamento, de interpolação e de reconstrução durante a evolução temporal numérica das EDPs [8], [15].

Na tabela 4.13 estão resumidas as comparações dos erros da solução numérica, junto com os resultados por Goda (equivalente a ordem 2), da equação de Kdv, em cada ordem, para diferentes níveis de pontos M . Também são mostrados os números dos pontos finais das simulações, em parênteses. Em todos os casos o método de Goda apresentou maiores erros. O método de ordem 6 teve erros maiores que o de ordem 4, com exceção nos casos $M = 256$ e $M = 1024$, onde foram menores. Mas de modo geral, quanto maior a ordem do algoritmo, mais íngreme é a curva do erro em função do nível M .

Além disso, vê-se que os números de pontos finais para o método de ordem 6 foram menores do que o de ordem 4, para $M > 64$, sendo que inclusive é observado, em ambos os casos, que a partir de certo nível M , quanto maior o seu valor, menores tendem a ser os números de pontos finais das simulações.

Tabela 4.13: Comparação dos erros de cada método usado em Kdv, no tempo final. Os valores em parênteses são os números de pontos finais.

$\epsilon = 10^{-5}$	ordem 4	ordem 6	Goda
$M = 64$	0,0805 (64)	0,0902 (65)	0,0964
$M = 128$	0,0427 (128)	0,0462 (124)	0,0480
$M = 256$	0,0218 (212)	0,0214 (110)	0,0233
$M = 512$	0,0074 (119)	0,0087 (85)	0,0116
$M = 1024$	0,0043 (114)	0,0032 (78)	0,0058

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho tirou-se proveito das propriedades das wavelets de representarem de maneira eficiente funções seccionalmente contínuas em termos de compressão de dados. Foi visto uma descrição geral das propriedades da MRA de bases ortogonais de wavelets do espaço $L^2(\mathbb{R})$. Utilizando a análise por Fourier estas propriedades foram representadas no domínio frequência, o que permitiu a definição de polinômios de escala, que se mostraram úteis na construção de wavelets. Por meio de bases de Riesz definiu-se o conceito de dualidade, e com isso, tem-se o teorema geral da biortogonalidade, que fornece uma decomposição mais geral do espaço $L^2(\mathbb{R})$ sobre espaços de wavelets e suas duais. Isto fornece a base para a construção dos algoritmos DWT e IDWT. A multiplicação entre um polinômio de escala associado a uma wavelet com outro, associado com sua dual, fornece o polinômio espectral, cujos coeficientes dão base para a construção das wavelets de interpolação, as usadas neste trabalho.

Por meio dos operadores de restrição e de prolongamento, aplicados em bases de wavelets biortogonais, foram definidos operadores diferenciais discretos em termos de coeficientes Gama, que estão relacionados com a ordem de diferenciabilidade e do algoritmo de interpolação wavelet. No caso, para se obter estes coeficientes deve-se resolver um problema de autovalor.

A construção de uma malha adaptativa permite comprimir o número de pontos da solução aproximada das EDPs (neste caso, as equações de Burgers e de Kdv) por meio da escolha de uma constante de truncamento ϵ , usada como critério na eliminação de pontos de uma malha regular, em um dado nível de refinamento, e obter, assim, uma malha irregular.

Para a simulação da equação de Burgers foram usados algoritmos de interpolação wavelet de ordem 4 e 6. Na parte de diferenças finitas, a indeterminação

dos coeficientes $\Gamma^{(2)}$ de ordem 4, devido aos autovalores complexos conjugados, fez com que fossem utilizados diferenças finitas simples de ordem 2 junto com os coeficientes de interpolação de ordem 4. Para o caso de ordem 6 não houve este problema, então tanto a parte de interpolação quanto a de diferenciação usaram a mesma ordem.

Os resultados numéricos do caso Burgers mostraram que mesmo usando um valor bem pequeno para a constante ϵ , os algoritmos de interpolação e de discretização wavelet forneceram um número significativamente reduzido do total de pontos para as soluções finais aproximadas. Como esperado, ao se aumentar o número de pontos da condição inicial o erro da solução aproximada tendeu a ser menor. Também observou-se que este aumento dos pontos iniciais forneceu uma proporção cada vez menor do total de pontos da solução. Por fim, o aumento da ordem de interpolação e de discretização wavelet acarretou na redução do erro.

Na simulação da equação Kdv tanto os algoritmos de interpolação wavelet quanto os de diferenças finitas tinham ordem 4 e 6, respectivamente. A solução numérica foi obtida neste caso, ao contrário do caso Burgers, de maneira implícita (com base no método de Goda [6]), onde teve que ser resolvido uma equação matricial. Então, para se obter a solução no próximo passo de tempo deve-se usar todos os pontos amostrais da solução e depois selecionar os pontos com base na malha irregular. Este inconveniente é compensado, pois, a matriz de coeficientes deste problema é esparsa.

Os resultados numéricos para Kdv mostraram que os algoritmos de interpolação e de discretização wavelet apresentaram menores erros na solução aproximada final do que o método de Goda. A implementação de ordem 6 tendeu a apresentar erros um pouco maiores do que o de ordem 4, para a maioria dos casos. Também foi observado nestes dois casos que, a partir de certo nível M de pontos iniciais, o seu aumento tendeu a reduzir cada vez mais os números de pontos finais das simulações. Conforme o valor de ϵ foi sendo reduzido, os erros no método de

ordem 6, que tenderam a serem um pouco maiores do que no de ordem 4, foram se aproximando aos de menor ordem, ficando quase próximos (apesar das flutuações nos erros para valores intermediários de ϵ). Essas aparentes faltas de padronizações nos erros das soluções aproximadas se devem a acumulação de erros nas etapas de truncamento e de interpolações durante a evolução temporal numérica das EDPs. Estas observações implicam que, para este caso (equação Kdv), para uma mesma faixa de erro e mantendo os demais parâmetros iguais, o número de pontos fornecido pelo método de ordem 6 teve uma tendência a ser menor do que o de ordem 4.

Fazendo uma síntese geral dos resultados de todas essas simulações, quanto maior o número de pontos das condições iniciais, maior foi a compressão de dados das soluções aproximadas finais em ambos os tipos de equações.

Então, como observações finais, este trabalho representa uma boa consulta introdutória para pós-graduandos que tenham como tópico de pesquisa o uso de wavelets na solução de EDPs, inclusive alunos da graduação podem se beneficiar desses conceitos introdutórios, contanto que tenham conhecimentos prévios da análise de Fourier.

Como sugestões para trabalhos futuros neste tópico tem-se:

- A utilização de outros métodos de diferenças finitas na etapa de diferenciação espacial das EDPs.
- A adaptação de todo o algoritmo para a solução de EDPs em dimensões espaciais superiores, ou até mesmo para a resolução de equações mais complexas de Navier-Stokes.

6 APÊNDICE

6.1 Matrizes Gama

A seguir serão mostrados os valores numéricos das matrizes $[H]$ e dos possíveis coeficientes gama $[\Gamma^{(d)}]$, que satisfazem a equação 3.13, por meio do software MATLAB. Os autovalores que fornecem estes coeficientes são dados por 2^{-d} , onde d representa a ordem de diferenciação, e os coeficientes gama devem satisfazer a equação 3.16. Devido à condição de simetria 3.12, seus valores estão tabelados para os índices $n \geq 0$

6.1.1 Matriz Gama de ordem 4

A matriz $[H]$, para este caso, é dada por:

$$\begin{pmatrix} -1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9/16 & 0 & -1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9/16 & 1 & 9/16 & 0 & -1/16 & 0 & 0 \\ -1/16 & 0 & 9/16 & 1 & 9/16 & 0 & -1/16 \\ 0 & 0 & -1/16 & 0 & 9/16 & 1 & 9/16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/16 & 0 & 9/16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/16 \end{pmatrix}$$

Na tabela 6.1 estão os valores de todos os coeficientes gama $[\Gamma^{(d)}]$, $0 \leq d \leq 3$, de ordem 4, para os índices $0 \leq n \leq 3$. Para este caso particular, ao invés de a matriz $[H]$ ter o autovalor $1/4$ esta possui o par complexo de autovalores $1/4 \pm 6,4765 \times 10^{-9}i$, o que torna a existência dos coeficientes $[\Gamma^{(2)}]$ indeterminada nesta situação [15].

Tabela 6.1: Coeficientes Gama normalizados de ordem 4

Índice n	0	1	2	3
$\Gamma^{(0)}[n]$	1	0	0	0
$\Gamma^{(1)}[n]$	0	2/3	-1/12	0
$\Gamma^{(3)}[n]$	0	-1	1/2	0

6.1.2 Matriz Gama de ordem 6

A matriz $[H]$, para este caso, é dada por:

$$\begin{pmatrix} 3/256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25/256 & 0 & 3/256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 75/128 & 0 & -25/256 & 0 & 3/256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 75/128 & 1 & 75/128 & 0 & -25/256 & 0 & 3/256 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25/256 & 0 & 75/128 & 1 & 75/128 & 0 & -25/256 & 0 & 3/256 & 0 & 0 \\ 3/256 & 0 & -25/256 & 0 & 75/128 & 1 & 75/128 & 0 & -25/256 & 0 & 3/256 \\ 0 & 0 & 3/256 & 0 & -25/256 & 0 & 75/128 & 1 & 75/128 & 0 & -25/256 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/256 & 0 & -25/256 & 0 & 75/128 & 1 & 75/128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/256 & 0 & -25/256 & 0 & 75/128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/256 & 0 & -25/256 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/256 \end{pmatrix}$$

Na tabela 6.2 estão os valores de todos os coeficientes gama $[\Gamma^{(d)}]$, $0 \leq d \leq 5$, de ordem 6, para os índices $0 \leq n \leq 5$.

Tabela 6.2: Coeficientes Gama normalizados de ordem 6

Índice n	0	1	2	3	4	5
$\Gamma^{(1)}[n]$	0	272/365	-53/365	16/1095	1/2920	0
$\Gamma^{(2)}[n]$	-295/56	356/105	-92/105	4/35	3/560	0
$\Gamma^{(3)}[n]$	0	-38/25	179/200	-2/25	-3/400	0
$\Gamma^{(4)}[n]$	-81/16	41/10	-77/40	3/10	9/160	0
$\Gamma^{(5)}[n]$	0	22/13	-31/26	2/13	3/52	0

Referências Bibliográficas

- [1] AMARATUNGA, K.; WILLIAMS, J. Wavelet-Galerkin solution of boundary value problems. **Archives of Computational Methods in Engineering**, Barcelona, v.4, n.3, p.243-294, set. 1997.
- [2] Boggess, Albert; Narcowich, Francis J, **A First Course in Wavelets with Fourier Analysis**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
- [3] Chui, Charles K. **An Introduction to Wavelets**. San Diego: Academic Press, 1992.
- [4] Djidjeli, Kamal; Price, W Geraint; Twizell, Ellis H; Wang, Yigong. Numerical methods for the solution of the third-and fifth-order dispersive Korteweg-de Vries equations. **Journal of computational and applied mathematics**, Amsterdam, v.58, n.3, p.307-336, abr. 1995.
- [5] Domingues, Margarete Oliveira. **Análise wavelet na simulação numérica de equações diferenciais parciais com adaptabilidade espacial**, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 214f. Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.
- [6] Goda, Katuhiko. On Stability of Some Finite Difference Schemes for the Korteweg-de Vries Equation. **Journal of the Physical Society of Japan**, Tóquio, v.39, n.1, p.229-236, dec. 1975.
- [7] Goedecker, Stefan; Ivanov, Oleg. Solution of multiscale partial differential equations using wavelets. **Computers in Physics**, College Park, v.12, n.6, p.548-555, dec. 1998.
- [8] Harten, Ami. Adaptive Multiresolution Schemes for Shock Computations. **Journal of Computational Physics**, Amsterdam, v.115, n.2, p.319-338, dec. 1994.
- [9] Hernández, Eugenio; Weiss, Guido. **A First Course on Wavelets**. Boca Raton: CRC Press, 1996.
- [10] Holmström, Mats; Waldén, Johan. Adaptive Wavelet Methods for Hyperbolic PDEs. **Journal of scientific computing**, Berlin, v.13, n.1, p.19-49, mar. 1998.
- [11] Mallat, Stéphane. **A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way**. 3.ed. San Diego: Academic Press, 1992.
- [12] Meyer, Yves. **Ondelettes et opérateurs**. Paris: Hermann, 1990.

- [13] Morante Blanco, Rodrigo. **Um método adaptativo de diferenças finitas utilizando wavelets e sua aplicação na resolução numérica de um modelo transiente de micropropulsores a hidrazina**, IMECC-UNICAMP, 2002. 90f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matematica, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2002.
- [14] Mukundan, Vijitha; Awasthi, Ashish. Linearized Implicit Numerical Method for Burgers' Equation. **Nonlinear Engineering**, Varsóvia, v.5, n.4, p.219-234, jun. 2016.
- [15] Nielsen, Ole Møller. **Wavelets in Scientific Computing**, Technical University of Denmark, 1998. 247f. Ph.D. thesis, Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, Denmark, 1998.
- [16] Ray, Santanu Saha; Gupta, Arun Kumar. **Wavelet Methods for Solving Partial Differential Equations and Fractional Differential Equations**. Boca Raton: CRC Press, 2018.
- [17] Sarker, Ronobir C; Andallah, LS. Numerical Solution of Burger's equation via Cole-Hopf transformed diffusion equation. **International Journal of Scientific and Engineering Research**, Mandsour, v.4, n.6, p.243-294, jun. 2013.
- [18] Strang, Gilbert; Nguyen, Truong. **Wavelets and Filter Banks**. Amsterdam: Elsevier, 2008.
- [19] Ucar, Yusuf; Yagmurlu, Nuri Murat; Tasbozan, Orkun. Numerical Solutions of the Modified Burgers' Equation by Finite Difference Methods. **Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics**, Varsóvia, v.13, n.1, p.19-30, jun. 2017.
- [20] Zabusky, Norman J; Kruskal, Martin D. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. **Physical review letters**, College Park, v.15, n.6, p.240-243, ago. 1965.