

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Tese de Doutorado

# **Dinâmica Não-Linear em Armadilhas Magneto-Ópticas e em Plasmas de uma Componente\***

(Nonlinear Dynamics in Magneto-Optical Traps and in Single-Component  
Plasmas)

Luiz Gustavo Ferreira Soares

Tese de doutorado elaborada sob orientação do Prof. Dr. Fernando Haas e apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em preenchimento final dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Porto Alegre - RS  
Março de 2021

---

\*Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

# Agradecimentos

Com a entrega dessa tese e a sua respectiva defesa, um sonho será realizado. Dito isso, eu não poderia deixar de agradecer às pessoas e instituições que tornaram essa realização possível.

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, Delcy e Vanderlei, que me apoiaram e me ajudaram durante todo o período da pós-graduação. Viver em Porto Alegre seria algo muito difícil sem eles. Também, aos meus irmãos, Rafael e Felipe, que sempre me apoiaram.

Em segundo, aos amigos. Lucas Rinaldi, Rafael Guimarães, Victor Hugo Lessa e Hugo Muiños, que estão ao meu lado há muito tempo. Sem suas conversas, piadas, companhias, paciência, apoio e amor, eu não teria conseguido terminar esse processo. Aos amigos e amigas feitos em Porto Alegre, meu profundo agradecimento. Alexandre, Nicole, Sabrina, Demétrius, João, Horácio, Eduardo e Rodrigo, muito obrigado pelas conversas, apoio, por terem dividido suas opiniões, frustrações e experiências e por terem me recebido com carinho no IF, na sala M206. Também, meu agradecimento às minhas grandes amigas Yasmin e Tati.

Agradeço ao espaço, aos bons professores e à oportunidade de realizar meu mestrado e doutorado na UFRGS. Assim como os coletivos COLEP e TRANSEMEM (POA), que me ajudaram a construir minhas crenças sobre a educação.

De todo meu coração, agradeço ao meu orientador Fernando Haas que esteve comigo nesses últimos 6 anos. Nada disso seria possível sem a sua ajuda e constante presença. Meu muito obrigado.

Por fim, à CNPq pela bolsa, àqueles e àquelas que, de uma maneira ou de outra, estiveram presentes até aqui.

# Resumo

Uma nuvem de átomos confinados em uma armadilha magneto-óptica pode ser formalmente interpretada como um plasma colisional de uma componente confinado harmonicamente. Um modelo hidrodinâmico é aplicado para ambos os sistemas e, também, para um plasma de antiprótons não-colisional sujeito a um aprisionamento dependente do tempo. Uma equação geral de estado politrópica é assumida para os átomos confinados, enquanto que, para os plasmas, é assumida uma equação de estado adiabática. Para determinadas condições iniciais e campos de velocidade, o método de variáveis Lagrangianas reduz o problema a equações diferenciais ordinárias em casos limite. Estes limites são definidos de acordo com a prevalência das interações térmicas ou autoconsistentes. O caso térmico, dominado pelo gradiente de pressão, para uma equação de estado adiabática, leva a um oscilador não-linear dissipativo com uma força cúbica inversa, na forma de uma equação de Pinney amortecida. Uma solução analítica aproximada, derivada da teoria de perturbação de Kuzmak-Luke, permite a avaliação da dinâmica completamente não-linear. Para o caso não dissipativo, o caso térmico leva a uma equação de Pinney para uma armadilha dependente do tempo que admite soluções WKB e pode ser mapeada para uma equação de Bessel. Por outro lado, no caso do plasma frio, a abordagem das variáveis Lagrangianas permite a derivação de oscilações não-lineares amortecidas exatas. As condições de aplicabilidade dos dois regimes são discutidas. Além disso, o método variacional dependente do tempo para um *Ansatz* Gaussiano permite estudar o caso em que ambos efeitos são relevantes.

**Palavras-chave:** átomos frios confinados, armadilha magneto-óptica, elétrons confinados, antiprótons confinados, soluções de amplitude arbitrária, variáveis Lagrangianas, equação de Pinney, efeitos colisionais, condição limite de temperatura, regime de espalhamento, método variacional dependente do tempo, soluções WKB.

# Abstract

Confined atomic clouds in a magneto-optical trap can be formally interpreted as a collisional harmonic trapped single-component plasma. A hydrodynamical model is applied for both systems and also for a non-collisional antiproton plasma subject to a time-dependent confinement. A general polytropic equation of state is assumed, while for the plasmas is assumed an adiabatic equation of state. For suitable initial conditions and velocity fields, the Lagrangian variables method reduces the problem to ordinary differential equations in the limiting cases. These cases are defined according to the prevalence of thermal or self-consistent interaction effects. The thermal case, dominated by gradient pressure, with an adiabatic equation of state leads to a dissipative nonlinear oscillator with an inverse cubic force, in the form of a damped Pinney equation. An accurate approximate analytic solution, derived from Kuzmak-Luke perturbation theory, allows the assessment of the fully nonlinear dynamics. For the non-dissipative case, the thermal regime leads to a Pinney equation with a time-dependent trap that admits WKB solutions and can be mapped into the Bessel equation. On the other hand, in the cold plasma case, the Lagrangian variables approach allows the derivation of exact damped nonlinear oscillations. The applicability conditions of the two regimes are discussed. Moreover, the time-dependent variational method for a Gaussian *Ansatz* allows to study the case where both effects are relevant.

**Keywords:** trapped cold atoms, magneto-optical trap , trapped electron gas, trapped antiprotons, arbitrary amplitude solution, Lagrangian variables, Pinney equation, collisional effects, temperature limited conditions, multiple-scattering regime, time-dependent variational method, WKB solutions.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Modelo simplificado de um MOT [24] . . . . .	11
Figura 2 – Armadilha de Penning-Malmberg: a. forma cilíndrica; b. potencial quadrupolar [60] . . . . .	13
Figura 3 – Forma do poço de potencial criado por uma armadilha de Penning na forma de ninho [78] . . . . .	14
Figura 4 – Função auxiliar $\rho$ em função do tempo. Curva azul: solução analítica da Eq. (5.24) com $A = 0.7$ e $\omega\tau_0 = 2.85$ . Curva laranja indica $\rho_{eq} = 1.5$ . Parâmetros indicados no texto. Condições iniciais: $\rho(0) = 1$ e $\dot{\rho}(0) = 0$ . . . . .	54
Figura 5 – Oscilações da densidade de átomos da Eq. (5.29), no referencial do laboratório, normalizada em relação ao valor assintótico $n_{eq} = n_0/\rho_{eq}^3$ . Curva tracejada, azul: $\omega\tau = 4.5$ ; curva com traço e ponto, laranja: $\omega\tau = 15.5$ ; curva completa, verde: $\omega\tau = 30.5$ . . . . .	56
Figura 6 – Oscilações da força coletiva, dentro da nuvem atômica, dada pela Eq. (5.30). Curva normalizada em relação à $F_{c0} = Qn_0\xi_0/48$ . Curva tracejada, azul: $\omega\tau = 4.5$ ; Curva com traço e ponto, laranja: $\omega\tau = 15.5$ ; curva completa, verde: $\omega\tau = 30.5$ . . . . .	56
Figura 7 – Forma genérica do potencial da Eq (5.33) (unidades arbitrárias). . . . .	57
Figura 8 – Força coletiva, Eq. (5.34), para um tempo fixo. Curva normalizada em relação à $F_{c0} = Qn_0\xi_0/(4\rho^2)$ . . . . .	58
Figura 9 – Solução numérica da Eq. (5.43) com $\bar{n}(0) = 1, \bar{n}'(0) = 0$ , para diferentes valores de $\eta = \Omega^2/\omega_p^2$ . Curva de cima, linha vermelha: $\eta = 1$ . Curva de baixo, pontilhado azul: $\eta = 2$ . . . . .	60
Figura 10 – Corte $R_0$ para soluções limitadas da Eq. (5.43) como função do parâmetro $\eta = \Omega^2/\omega_p^2$ . . . . .	61
Figura 11 – O número $N$ de átomos confinados, normalizado em relação ao número de partículas contidas na espera de Debye $g = 4\pi n_0\lambda^3/3$ , como função do parâmetro $\eta = \Omega^2/\omega_p^2$ . Da Eq. (5.45) e após a integração numérica da Eq. (5.43). . . . .	61
Figura 12 – Curva inferior, azul: função $f(\xi/\xi_0)$ da Eq. (5.48); curva superior, laranja: função $h(\xi/\xi_0)$ da Eq. (5.54). . . . .	63
Figura 13 – Pseudo-potencia, Eq. (5.77). Parâmetros indicados no texto. . . . .	67
Figura 14 – Solução numérica das Eqs. (5.74) e (5.75). Curva normalizada em relação à $\alpha_0$ . Parâmetros indicados no texto. Curva tracejada: $\alpha_{\perp}$ ; curva com pontos: $\alpha_z$ ; curvas cheias: soluções de equilíbrio $\alpha_{\perp eq}/\alpha_0 = 0.24$ e $\alpha_{zeq}/\alpha_0 = 0.19$ . Condições iniciais: $\alpha_{\perp 0} = \alpha_{z0} = \alpha_0$ e $\dot{\alpha}_{\perp 0} = \dot{\alpha}_{z0} = 0$ . . . . .	68
Figura 15 – Resultados da simulação numérica da anisotropia do parâmetro $\chi$ da Eq. (5.78). Curva azul: simulação numérica de $\chi$ . A curva horizontal mostra o estado de equilíbrio $\chi_{eq} = \alpha_{\perp eq}/\alpha_{zeq} = 1.26$ , para os mesmo parâmetros da Fig. 14 . . . . .	68

Figura 16 – Tabela retirada de [60]. Na tabela consta um breve histórico do desenvolvimento do estudo de física de plasmas não-neutros. Os números da direita representam o número das referências contidas em [60]. . . . .	72
Figura 17 – Densidade de elétrons da Eq. (6.15) com $c_1 = 0$ . . . . .	77
Figura 18 – Função auxiliar $\rho$ em função do tempo, da Eq. (6.19), aproximando de $\rho_{eq} = 0.72$ . Parâmetros: $n_0 = 10^{10} m^{-3}$ , $k_B T = 1 eV$ , $\xi_0 = 5 cm$ , $\omega_z = 5 \omega_p = 25\nu$ . Condições iniciais: $\rho(0) = 1, \dot{\rho}(0) = 0$ . Com $A = 0.24, \omega_z \tau_0 = 0.01$ . . . . .	78
Figura 19 – Campo elétrico da Eq. (6.21). Curva normalizada em relação ao $E_0 = m \omega_p^2 \xi_0 / (2e)$ . . . . .	79
Figura 20 – Função $f(\xi/\xi_0)$ , Eq. (6.24). . . . .	80
Figura 21 – Função $\psi$ da Eq. (6.32) para diferentes intensidades de amortecimento. Curva superior, azul: $\nu/\Omega' = 0$ ; curva do meio, laranja: $\nu/\Omega' = 1/100$ ; curva inferior, verde: $\nu/\Omega' = 1/10$ . Temos que $\psi \rightarrow 1/2$ para $\tau \rightarrow \infty$ , exceto no caso não amortecido. . . . .	82
Figura 22 – Campo elétrico da Eq. (6.48), com $\Delta = 10$ . Curva normalizada em relação ao $E_0 = m \omega_z^2 \xi_0 / (2e)$ . . . . .	85
Figura 23 – Distribuição da densidade dada pela Eq. (6.46), no referencial do laboratório. Curva normalizada pelo valor assintótico $n_{eq} = (\omega_z^2/\omega_p^2) n_0$ , com $\Delta = 10, \nu/\Omega' = 1/10$ para diferentes tempos. . . . .	85
Figura 24 – Escala termométrica logarítmica retirada de Ref. [131]. Representa a evolução no resfriamento de antiprótons. . . . .	87
Figura 25 – Solução WKB (6.76) da equação de Pinney. Função $\omega_z(\tau)$ definido na Eq. (6.54). Condições iniciais: $\rho(0) = 1, \dot{\rho}(0) = 0$ . Parâmetros indicados no texto. Curva monótona $\rho_*$ está definida no texto. . . . .	91
Figura 26 – Temperatura $T(\xi = 0) = T_0/\rho^2$ no centro, em unidades de energia, para $\kappa_B T_0 = 30 eV$ , utilizando a solução WKB (6.76) e os mesmos parâmetros da Fig. 25. . . . .	92
Figura 27 – Função característica espacial dos efeitos da carga $f = f(\xi/\xi_0)$ . Função definida na Eq. (6.77). . . . .	92
Figura 28 – Evolução temporal da função escalar $\rho$ dada pela solução aproximada (6.81). Função $\omega_z(t)$ definida na Eq. (6.54). Condições iniciais: $\rho(0) = 1$ e $\dot{\rho}(0) = 0$ . Parâmetros indicados no texto. A curva monótona $\rho_*$ está definida no texto. . . . .	94
Figura 29 – Temperatura $T = T_0/\rho^2$ , para $T_0 = 31 K$ , usando a solução aproximada (6.81) e os mesmo parâmetros da Fig. 28. . . . .	94
Figura 30 – Pseudo-potencial da Eq. (5.19). Parâmetros indicados no texto. . . . .	97
Figura 31 – Solução numérica da Eq. (6.96). Parâmetros indicados no texto. Condições iniciais: $\alpha = 1$ e $\dot{\alpha}_0 = 0$ . . . . .	98

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
1.1	Armadilha magneto-óptica	10
1.2	Plasma de uma componente	12
1.3	Apresentação e organização da tese	13
<b>2</b>	<b>Armadilha Magneto-Óptica</b>	<b>16</b>
2.1	Átomos alcalinos e MOTs	16
2.2	Interação átomo - campo elétrico	16
2.2.1	Aproximação dipolar	17
2.2.2	Taxa de transição eletrônica	20
2.2.3	A força do laser para um átomo em repouso	21
2.2.4	Efeito Doppler	22
2.2.5	Efeito Zeeman	23
2.3	Força coletiva	26
2.3.1	Força fantasma	26
2.3.2	Força de espalhamento	27
2.3.3	Lei de Gauss para MOTs	28
<b>3</b>	<b>Modelo hidrodinâmico</b>	<b>30</b>
3.1	Modelo Hidrodinâmico	30
3.2	Equação da continuidade	31
3.3	Função de Wigner	32
3.4	Função de distribuição	35
3.5	Modelo de colisões binárias	37
3.6	Variáveis Lagrangianas	39
<b>4</b>	<b>Método variacional dependente do tempo</b>	<b>42</b>
4.1	O método	42
4.2	Densidade Lagrangiana para MOTs assimétricos	43
4.3	Densidade Lagrangiana para um plasma de antiprótons confinado numa armadilha dependente do tempo	46
<b>5</b>	<b>Dinâmica em MOTs</b>	<b>50</b>
5.1	Dinâmica em MOTs com simetria radial	50
5.2	Regime TL	53
5.2.1	$\gamma > 1$	53
5.2.2	Caso isotérmico $\gamma = 1$	56
5.3	Regime MS	57
5.4	Regime misto TL + MS ( $\gamma = 4/3$ )	59
5.5	Condições de validade	61
5.5.1	Condição de baixo amortecimento	61
5.5.2	Validade do regime TL	62

5.5.2.1	Equilíbrio térmico . . . . .	62
5.5.2.2	Equilíbrio harmônico . . . . .	63
5.6	Método variacional dependente do tempo aplicado à dinâmica de MOTs anisotrópicos	64
5.6.1	O caso do MOT . . . . .	67
5.6.2	Estabilidade linear . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Plasmas de uma componente . . . . .</b>	<b>71</b>
6.1	Plasma não-neutro . . . . .	71
6.2	Plasma de elétrons . . . . .	73
6.3	Confinamento harmônico . . . . .	74
6.4	Dinâmica de um plasma de elétrons unidimensional térmico colisional em uma armadilha de Penning-Malmberg . . . . .	75
6.4.1	Efeitos térmicos dominantes . . . . .	76
6.4.1.1	Condição de baixo amortecimento . . . . .	79
6.4.2	Condição de validade . . . . .	80
6.4.2.1	Equilíbrio térmico . . . . .	80
6.4.2.2	Equilíbrio harmônico . . . . .	81
6.5	Efeitos térmicos desprezíveis . . . . .	81
6.5.1	Condições iniciais admissíveis para um plasma frio . . . . .	82
6.5.2	Aplicações para um plasma frio . . . . .	83
6.5.3	Condição inicial homogênea . . . . .	83
6.5.4	Condição inicial Gaussiana . . . . .	84
6.6	Plasma de antiprótons . . . . .	86
6.7	Dinâmica de um plasma de antiprótons em uma armadilha de Penning-Malmberg dependente do tempo . . . . .	88
6.7.1	Efeitos térmicos dominantes . . . . .	89
6.7.1.1	Solução exata e aproximada da equação de Pinney . . . . .	90
6.7.2	Condições de validade . . . . .	92
6.7.3	Efeitos térmicos desprezíveis . . . . .	93
6.8	Método variacional dependente do tempo aplicado à dinâmica de um plasma de antiprótons em uma armadilha dependente do tempo . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Considerações finais . . . . .</b>	<b>99</b>
	<b>Apêndices . . . . .</b>	<b>101</b>
<b>A</b>	<b>O Método de Kuzmak-Luke . . . . .</b>	<b>101</b>
A.1	Equação de Pinney Dissipativa . . . . .	105
<b>B</b>	<b>Solução exata da equação de Pinney . . . . .</b>	<b>107</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>108</b>



# 1 Introdução

A análise não-linear de estruturas exatas ou aproximadas é um tradicional campo na física de plasmas [1]-[2]. Resultados recentes incluem a influência de ondas eletromagnéticas de grande amplitude em ondas de plasmas de elétrons [3], a dinâmica não-linear de um plasma não-relativístico frio magnetizado na presença de colisões elétron-íon [4], estruturas não-lineares em um gás de elétrons não-degenerado unidimensional [5], efeitos da temperatura em oscilações de grande amplitude em elétrons [6] e ondas estacionárias não-lineares em plasmas confinados [7].

O interesse principal da física não-linear é lidar com sistemas físicos descritos por equações diferenciais ordinárias ou parciais não-lineares. Para equações periódicas não-lineares, por exemplo, a não-linearidade faz com que a amplitude do movimento influencie na dinâmica do sistema. Além disso, equações não-lineares perdem o princípio da superposição, ou seja, se tivermos uma equação diferencial de segunda ordem com termos não-lineares e analisarmos seus termos separados, a soma das soluções das equações particulares não será necessariamente uma solução para quando todos os termos são considerados. Dessa maneira, equações diferenciais não-lineares necessitam de modelos e métodos matemáticos diversos, variando em detalhes e complexidade, podendo ser abordados por métodos topológicos, analíticos ou numéricos. Sistemas assim são de grande importância em várias áreas da ciência [8].

Nosso objetivo principal neste trabalho é desenvolver modelos matemáticos para descrever como se comporta a distribuição de partículas dentro do seu volume, ou seja, a sua densidade ao longo do tempo (entre outras quantidades físicas relevantes para cada situação). Esse tratamento será realizado em três sistemas distintos, a saber: átomos alcalinos confinados por uma armadilha magneto-óptica, um plasma de elétrons colisional confinado e um plasma de antiprótons confinado sujeito a um resfriamento adiabático. Para isso, é necessário fazer uso da física não-linear e resolver um sistema de equações diferenciais parciais. Dessa forma, vamos considerar estruturas não-lineares dependentes do tempo derivadas por meio do modelo hidrodinâmico acrescido dos métodos analíticos das variáveis Lagrangianas e do método variacional dependente do tempo. Além disso, faremos uso da abordagem numérica quando os métodos analíticos não forem suficientes ou impossíveis de serem aplicados. O motivo que nos permitirá estudar esses três distintos é justificado pelas semelhanças nas diversas equações hidrodinâmicas.

O modelo hidrodinâmico se preocupa com a dinâmica de fluidos (líquidos e gases), e podemos aplicá-lo a um sistema, desde que um volume elementar seja grande o suficiente para conter um número grande de constituintes e, também, ser pequeno em comparação ao volume total. Dessa forma, podemos descrever o movimento das partículas por meio do seu comportamento médio. Assim, não precisamos ter conhecimento do que acontece internamente. Caso o interesse seja esse, é necessário utilizar o modelo da teoria cinética. O método das variáveis Lagrangianas têm sido aplicado com frequência no contexto de plasma de elétrons não-relativísticos [1, 6, 9, 10, 11, 12] e relativísticos [13]. Ao aplicar essas variáveis, poderemos sair da descrição de um fluido no referencial

do laboratório (variáveis Eulerianas) e descrever o seu movimento em seu próprio referencial (variáveis Lagrangianas), ou seja, passarmos a acompanhar o fluido [2]. O uso dessa transformação simplifica as equações a serem estudadas. Já o outro método consiste em minimizar a ação dada uma densidade Lagrangiana, isto é, por meio de um funcional, geraremos as equações que descrevem os sistemas considerados. Também, o método variacional dependente do tempo pode simplificar sistemas não-lineares, como em condensados de Bose-Einstein [14, 15, 16, 17] e em gases quânticos de elétrons [16, 18, 19]. Ambos os métodos utilizados nos permitirão reduzir um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares em equações diferenciais ordinárias não-lineares.

## 1.1 Armadilha magneto-óptica

O desenvolvimento da técnica de resfriar átomos por meio da exposição de um campo elétrico externo, ou seja, na presença de luz, proporcionou a descoberta e o estudo da matéria ultra-fria. A denominação ultra-fria é adotada, pois existe em condições abaixo da temperatura do hélio líquido ( $\sim 1$  K), podendo chegar a temperaturas do intervalo entre micro- e nanokelvins, com comprimentos típicos da ordem de micrômetros [20, 21].

Entre as técnicas de confinar e resfriar átomos nessa faixa de temperatura, é a armadilha magneto-óptica (*magneto-optical trap*), ou comumente denominada como MOT, a mais bem-sucedida. Esta armadilha é composta de três pares de lasers contrapropagantes com polarizações circulares e opostas, que são posicionados de maneira que cada par é ortogonal aos demais. Juntamente aos lasers, há um gradiente de campo magnético externo aplicado. Esse campo é proporcionado por um par de bobinas anti-Helmholtz [22, 23, 24]. O esquema para essa configuração é mostrado na Fig. 1, em que os pares de lasers são representados pelas setas vermelhas. O sentido da polarização é dado por  $\sigma$ , em que  $\sigma^+$  é a polarização circular à esquerda e  $\sigma^-$  é a polarização circular à direita. As bobinas estão representadas pelos círculos em marrom, o sentido das correntes em cada uma delas é indicado pelas setas pretas. As linhas de campo magnético são denotadas pelas setas em azul e crescem no sentido das setas.

Os átomos mais comuns de serem confinados são átomos alcalinos (átomos com um elétron de valência na camada s) tais como: lítio [25], sódio [26], potássio [27, 28], rubídio [22, 29, 30, 31] e césio [31, 32, 33, 34]. Entretanto, é possível confinar também átomos de outras famílias tais como: átomos de prata [35] e rádio [36]. A utilização dessa armadilha é importante para realizar *optical lattices* (potenciais periódicos artificiais criados por meio da luz) [37, 38], observar efeitos quânticos coletivos [39] e para melhorar a performance de relógios atômicos [40, 41]. Além disso, a dinâmica de átomos frios compartilha diversas semelhanças com um gás de antiprótons em baixas temperaturas [42] e compartilha analogias com modelos astrofísicos para estrelas pulsantes [43]. Caso seja somada a técnica de resfriamento por evaporação ao aprisionamento por meio de um MOT, é possível obter um estado da matéria conhecido como condensado de Bose-Einstein (*Bose-Einstein condensate*, ou BEC) [44]. Esse condensado é caracterizado por uma quantidade macroscópica relevante de átomos que ocupam o estado de menor energia acessível. Além da sua importância na produção de BECs, átomos alcalinos são interessantes, pois permitem um tratamento físico e matemático simplificado, uma vez que as interações envolvem o único elétron

de valência.

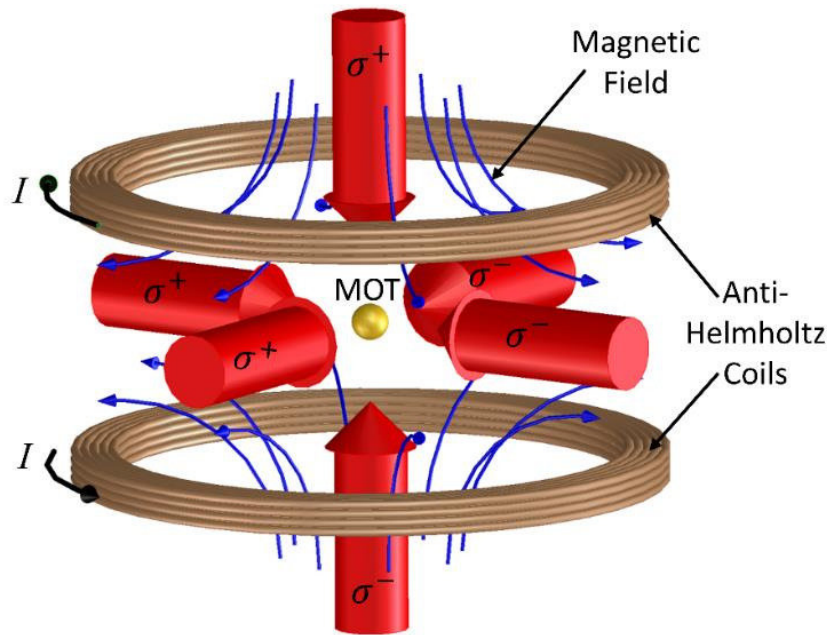


Figura 1 – Modelo simplificado de um MOT [24]

O resfriamento e confinamento devido a um MOT é consequência da soma de dois processos: o resfriamento Doppler [31, 45] e o aprisionamento magnético que surge devido ao efeito Zeeman. Estes dois processos ocorrem porque o nível de energia de um átomo que se move no espaço, na presença de campos elétrico e magnético externos, dependerá tanto da velocidade quanto da posição. Dessa forma, é possível manipular experimentalmente de tal maneira, que as forças derivadas dessa dependência sejam descritas por uma força dissipativa e outra harmônica. Estudos prévios deste tipo de sistema encontrados na literatura limitaram-se à tratamentos de aproximação linear [46, 47, 48] ou à análise numérica [40, 41]. Também, para o caso estacionário, uma primeira tentativa analítica foi realizada por meio de séries de Taylor [49]. Aqui forneceremos uma solução por um método alternativo, o qual nos permitirá ter acesso à dinâmica não-linear e dependente do tempo. Contudo, nosso tratamento é restringido ao regime de baixa saturação. Esse regime é obtido quando a razão entre a intensidade do laser incidente e seu valor de saturação é muito menor que a unidade. O valor de saturação mede quanta intensidade é necessária para alcançar o máximo de espalhamento [50].

No regime de baixa saturação, os átomos confinados por meio de um MOT podem ser interpretados como um plasma de uma única componente, isto é, um plasma composto por somente partículas de um mesmo sinal de carga. Dessa maneira, os átomos confinados podem ser descritos formalmente como um sistema que interage por uma força do tipo coulombiana com uma carga efetiva, que é da ordem de entre um mil a um milhão menor que a carga elementar do elétron [51, 52]. Tais similaridades tornam possível tomar os momentos da função de distribuição da teoria cinética, obtendo, assim, equações hidrodinâmicas para quantidades macroscópicas, as quais podem se tornar um sistema completo de equações ao adotar um equação de estado, isto é, truncar a segunda ordem dos momentos. Portanto, podemos descrever formalmente nuvens atômicas em

MOTs usando modelos hidrodinâmicos já conhecidos da física de plasmas. No contexto de plasmas, duas escalas são importantes, sendo elas: uma de tempo, dada pelo inverso da frequência de plasma, e uma de distância, dada pelo comprimento de Debye. Essas escalas também serão úteis para o contexto da dinâmica em um MOT, porém no seu devido contexto.

## 1.2 Plasma de uma componente

Um plasma não-neutro difere de um plasma comum por não satisfazer a condição global da neutralidade das cargas. O estudo desse tipo de sistema abarca: condições de equilíbrio [53], transições de fase [54], propagações de ondas [55], feixes intensos e não contínuos de partículas carregadas [56, 57] e, também, com aplicabilidade em astrofísica [58]. Além disso, um plasma não-neutro pode ser classificado como de uma única componente quando seu constituinte apresenta o mesmo sinal de carga. Entre os plasmas de uma única componente, plasmas formados somente por elétrons têm sido produzidos e estudados desde os anos 70 [59].

O confinamento de partículas de mesmo sinal pode ser dado por meio de duas armadilhas. A primeira, é conhecida como armadilha de Penning-Malmberg [55, 60, 61, 62, 63, 64]. Esta é formada por um cilindro condutor dividido em três seções. As duas extremidades têm uma diferença de potencial em relação à região central, de tal forma que se cria uma força elétrica estática que confina axialmente a amostra [53]. Além disso, é aplicado um campo magnético uniforme na direção axial e este produz o confinamento na direção radial em decorrência da força de Lorentz. Uma configuração assim é dita cilíndrica. Armadilhas de Penning com potencial quadrupolar também são possíveis de serem criadas e são importantes para medidas de espectroscopia [65]. Já a segunda é conhecida como armadilha de Paul [66, 67]. Nesse tipo de aprisionamento, o confinamento é produzido por uma combinação de potenciais eletrostáticos e campos elétricos que oscilam na frequência de rádio. Também, é de interesse que tenhamos a presença de um confinamento harmônico externo na direção de simetria. Este confinamento pode ser obtido por meio de um potencial quadrupolar, desde que as dimensões da amostra sejam menores que as dimensões da armadilha [68, 69, 70], assim como por meio de potencial ponderomotivo originado na armadilha de Paul. Para campos intensos, dada uma armadilha de Penning-Malmberg, a geometria relevante que descreve a dinâmica dos elétrons é unidimensional e na direção axial. Diversos estudos foram realizados nesse tipo de sistema, tais como: descrição de vórtices [60, 64], estudo de transporte [55], soluções analíticas para grandes amplitudes [6, 11, 12] e ondas não-lineares [10, 59]. Ambas configurações da Penning-Malmberg podem ser vistas na Fig.2.

O plasma formado por antiprótons é outro plasma não-neutro de importância. Nas últimas décadas, um dos objetivos da física é criar de antimatéria para a comparação com a matéria e fazer testes de simetrias fundamentais [71]. Alguns grupos como: ATRAP [72, 73, 74], ATHENA [75, 76] e ASACUSA [77] dedicam seus esforços para esses objetivos. Para isso, a criação de anti-hidrogênio é um passo fundamental.

O anti-hidrogênio é formado por um pósitron (anti-partícula do elétron) que orbita um antipróton (anti-partícula do próton). Para formá-lo, é necessário confinar antiprótons em um poço

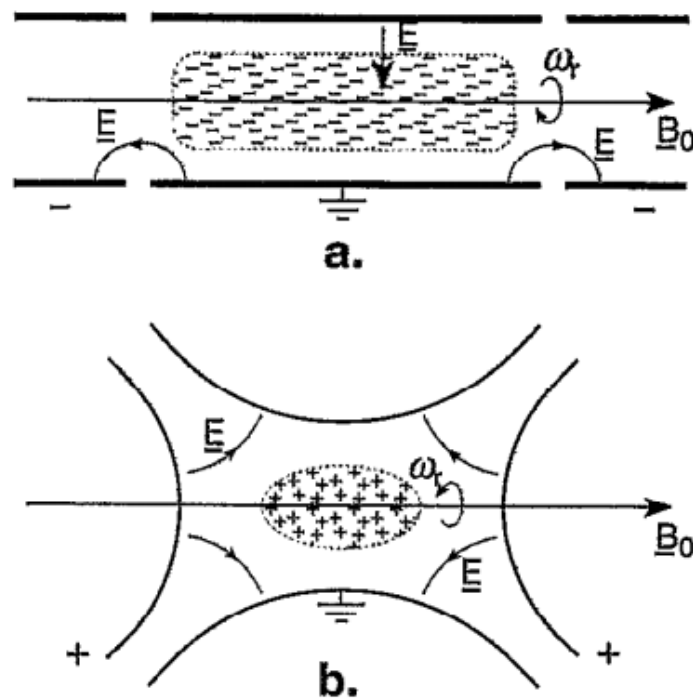


Figura 2 – Armadilha de Penning-Malmberg: a. forma cilíndrica; b. potencial quadrupolar [60]

de potencial, o que é somente possível para temperaturas da ordem de alguns Kelvins [42, 72]. O confinamento dessas anti-partículas se dá pela mesma armadilha que confina elétrons, a armadilha de Penning-Malmberg. Essa armadilha pode ser modificada para aprisionar tanto antiprótons e pósitrons numa mesma região e formar anti-hidrogênios. O nome que se dá a essa nova forma de aprisionamento é denominada de armadilha de Penning na "forma de ninho" (*nested Penning trap*) [71, 78]. Como podemos ver na Fig. 3, o poço de potencial confina cargas opostas usando poços adjacentes de diferentes sinais. Outra possível forma de confinamento se dá pela armadilha de Penning-Ioffe [73], a qual consiste na adição de correntes paralelas numa distribuição cilíndrica. Dessa forma, o estudo do aprisionamento e resfriamento de antiprótons é de fundamental relevância. Entre os métodos utilizados para o resfriamento de um gás de antiprótons, após serem previamente resfriados por meio de colisões com partículas carregadas (elétrons ou pósitrons), o resfriamento adiabático se mostrou bastante eficiente, alcançando temperaturas em torno de 3.5K [42, 72]. Nesse tipo de processo a frequência é lentamente diminuída de tal forma que a energia do sistema se mantenha aproximadamente constante.

### 1.3 Apresentação e organização da tese

Nos modelos que apresentaremos, haverá termos provenientes de: uma força harmônica, uma força dissipativa, uma interação autoconsistente e outra referente aos efeitos térmicos. Para os átomos, as duas primeiras são originadas pela armadilha, enquanto a interação autoconsistente é descrita por uma força coletiva que satisfaz formalmente a lei de Gauss. Essa força é a soma de dois efeitos distintos, sendo eles: uma compressão causada pelo desbalanceamento da intensidade

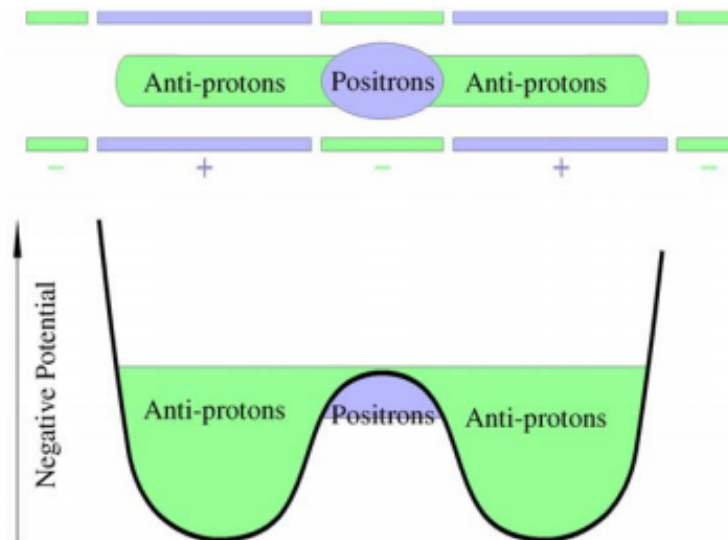


Figura 3 – Forma do poço de potencial criado por uma armadilha de Penning na forma de ninho [78]

de laser, que chega a uma determinada posição no interior da nuvem atômica; e uma expansão devido ao espalhamento de fótons internos do sistema. Uma vez que a segunda interação sobrepõe a primeira, a força coletiva será de repulsão. Já para um plasma de elétrons colisional e um plasma de antiprótons, a força harmônica é originada por um aprisionamento externo, enquanto o termo dissipativo advém de colisões com átomos neutros. Além disso, a interação autoconsistente é dada pelo campo elétrico interno. Para descrever os efeitos térmicos, utilizaremos uma equação de estado politrópica e, de forma mais recorrente, uma equação de estado adiabática. A primeira, irá nos permitir acessar transformações termodinâmicas diferentes, e, a segunda, será útil para sistemas em que o efeito de transporte de calor pode ser negligenciado [49].

Entre as equações que obteremos neste trabalho, uma mostra-se recorrente, a saber: a equação de Pinney. Dela, a propósito, obteremos tanto a sua forma não amortecida quanto a sua forma amortecida. Essa equação descreve um oscilador harmônico com um termo não-linear inversamente cúbico. A equação de Pinney é endêmica em matemática aplicada, aparecendo em cosmologia [79, 80], dinâmica de gases magnetizados [81], plasmas quânticos [82], condensados de Bose-Einstein [83], modelos quânticos dissipativos [84] e em vários outros contextos. O caso não amortecido foi resolvido por Pinney [85], incluindo uma frequência angular dependente do tempo, em termos de soluções linearmente independentes da equação de Hill associada. Devido ao resfriamento Doppler e às colisões binárias, encontraremos uma equação de Pinney dissipativa [86], o que difere da maioria dos casos estudados. No caso em que obtemos a equação de Pinney não amortecida, a equação admite soluções aproximadas dadas pelas soluções WKB (*Wentzel-Kramers-Brillouin solutions*), e, para um determinada forma da dependência temporal da frequência, é possível mapeá-la em uma equação de Bessel. Já na sua versão amortecida, admite uma solução aproximada derivada pela teoria perturbativa de Kuzmak-Luke [87, 88]. Essa teoria perturbativa é uma ferramenta útil para problemas de osciladores de baixo amortecimento, pois permite encontrar

soluções analíticas aproximadas para sistemas periódicos não-lineares [89].

As soluções que obteremos serão encontradas tanto em situações limite, sendo elas definidas pela relevância dos efeitos térmicos em relação à interação autoconsistente, quanto em situações em que ambas interações são relevantes. No caso de MOTs, os limites são denominados como regime TL (*temperature-limited*) [22, 29, 30, 34, 32, 90] e regime MS (*multiple-scattering*) [31, 33, 52]. Já para os plasmas, esses limites distinguem um plasma quente de um plasma frio, sendo ambos de interesse [67, 91, 92]. Por fim, as condições de validade desses limites também serão discutidas.

A divisão desta tese é dada pela seguinte maneira: no segundo capítulo iniciamos nossa abordagem com as interações relevantes para a descrição de átomos alcalinos confinados por uma armadilha magneto-óptica; no terceiro, iremos abordar e explorar as semelhanças das estruturas das equações dos sistemas estudados, e, também, introduziremos o modelo hidrodinâmico e o método das variáveis Lagrangianas; no quarto, apresentamos o método variacional dependente do tempo, apresentamos as densidades Lagrangianas que geram os sistemas estudados e obtemos as respectivas Lagrangianas. No quinto, iremos aplicar o que foi discutido ao contexto de MOTs; no sexto, iremos aplicar o mesmo tratamento a um plasmas de elétrons e a um plasma de antiprótons; e, no último capítulo, faremos considerações finais sobre este trabalho. No fim, temos dois apêndices referentes às discussões que ficaram fora do texto principal.

## 2 Armadilha Magneto-Óptica

### 2.1 Átomos alcalinos e MOTs

Historicamente, o uso de átomos alcalinos para confinamento de átomos decorreu do objetivo de se criar uma amostra macroscópica de um condensado de Bose-Einstein. No início, atribuiu-se ao hélio líquido o primeiro exemplo desse novo estado da matéria. Porém, devido às intensas interações presentes no sistema, concluiu-se que não se tratava de um BEC, mas, sim, de um superfluido. Dessa maneira, buscou-se sistemas alternativos para a produção e estudo de BECs. Os candidatos mais promissores foram os gases de átomos alcalinos. Apesar da sua massa relativamente alta, uma estrutura complexa, em comparação com o hidrogênio e o hélio, e ser encontrado em equilíbrio na natureza em sua forma sólida - o que pode parecer nada atrativo o seu uso -, o advento da técnica de resfriamento por laser permitiu acessar temperaturas e densidades próximas dos valores críticos necessários para acessar a transição de fase para o condensado. Porém, foi necessário somar uma outra técnica para a sua realização. Somente com a utilização do resfriamento por evaporação é que foi possível alcançar e produzir uma ocupação macroscópica no estado de BEC com átomos alcalinos, tendo sido produzido com:  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{23}\text{Na}$ ,  ${}^{39}\text{K}$ ,  ${}^{41}\text{K}$ ,  ${}^{85}\text{Rb}$ ,  ${}^{87}\text{Rb}$  e  ${}^{133}\text{Cs}$  [93].

A utilização de armadilhas magneto-ópticas não se limita à produção de condensados, uma vez que permitem manipular a posição e a velocidade dos átomos com bastante precisão. Dessa maneira, proporcionam uma maior resolução e a possibilidade de acessar novos regimes em experimentos de física óptica. Podemos citar duas importantes áreas em que sua aplicação é importante: relógios atômicos e *optical lattices*. O bom funcionamento de relógios atômicos depende da precisão das linhas espectrais dos átomos. Então, quanto maior for a velocidade térmica, pior será a exatidão e precisão da medida. A aplicação de um MOT pode reduzir a velocidade térmica dos átomos de 500 m/s para 2,5 m/s ( $\sim \mu\text{K}$ ), o que proporciona uma melhora nas medidas de tempo. Já a criação de *optical lattices* requer a produção de poços de potenciais periódicos na escala de comprimentos de onda. A combinação de feixes de luz com diferentes vetores de onda cria um campo periódico e não homogêneo no espaço. Porém, para a utilização da luz para o confinamento, é necessário que a energia cinética seja da ordem do poço de potencial criado pelo deslocamento dos níveis de energia. Esses deslocamentos podem ser gerados pela presença do campo eletromagnético externo. Dessa forma, o uso de MOTs é essencial para esse fim, pois permitem resfriar a amostra de tal maneira que satisfaça essa condição. Além dessas aplicações, os MOTs são utilizados em diversos outros tópicos de física atômica [94, 95].

### 2.2 Interação átomo - campo elétrico

O aprisionamento de átomos ocorre devido à interação entre um campo eletromagnético não homogêneo e um momento multipolar atômico. Devido à simetria de inversão, átomos não perturbados não possuem momentos de dipolo elétrico, sendo assim, para o funcionamento das



armadilhas ópticas, é necessário criar momentos de dipolo induzidos [94]. Essa condição é satisfeita pela aplicação de um campo elétrico externo. Dessa forma, começaremos nossa discussão descrevendo a interação átomo - campo elétrico. Para isso, partiremos de um Hamiltoniano clássico que descreve a interação eletromagnética mediada pela força de Lorentz. Esse Hamiltoniano, como veremos, pode ser descrito por meio da interação entre um dipolo induzido e um campo elétrico externo. Para que isso seja verdade, é necessário que as dimensões atômicas sejam bem menores que o comprimento de onda do campo externo. Ainda, é preciso que ocorra uma ressonância entre a frequência de oscilação do campo com a frequência de transição entre dois níveis de energia. Dessa maneira, os elétrons podem ocupar níveis maiores de energia. Satisfeitas essas condições, temos uma aproximação dipolar. Feito isso, poderemos acessar o valor esperado do nível de energia por meio da teoria da perturbação se supusermos que a intensidade do campo é baixa.

Sabemos que um elétron que ocupa um estado excitado possui tempo finito de ocupação. Sendo assim, haverá retorno desse elétron para um estado de menor energia - não necessariamente a mesma camada da qual partiu - juntamente com uma radiação eletromagnética na forma de um fóton. Tal fenômeno é comumente denominado de salto quântico ou transição eletrônica. O efeito da transição será contabilizado por meio da introdução de um fator imaginário na energia e será considerado fenomenologicamente. Devido ao salto, o fóton emitido exercerá uma pressão no átomo, gerando, assim, uma força. Para sua melhor compreensão, primeiro iremos considerar o átomo em repouso.

Ao considerarmos o movimento do átomo (efeito Doppler) e a presença do campo magnético (efeito Zeeman), encontraremos uma dependência no nível de energia tanto na velocidade quanto na posição. Nos devidos limites de validade e nas configurações usuais de um MOT, esses efeitos podem ser descritos, formalmente, como uma força de atrito e outra harmônica. A soma dessas duas forças compõe a força devido ao aprisionamento. Além dessas forças, o desbalanceamento da intensidade do laser que chega a um determinado ponto da nuvem atômica e o espalhamento dos fótons absorvidos geram também interações relevantes ao sistema.

### 2.2.1 Aproximação dipolar

A dinâmica de um átomo com um elétron na camada de valência e na presença de uma fonte luminosa externa pode ser descrita por um Hamiltoniano de um átomo ionizado, sujeito a uma interação eletromagnética com carga igual a  $-e$ , em que  $e$  é o módulo da carga do elétron. Esse Hamiltoniano é dado por

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2}{2m} - e\phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

em que  $\mathbf{p}$  é o operador momentum,  $\mathbf{r}$  é o operador posição,  $m$  é a massa do átomo,  $\mathbf{A}$  é o operador potencial vetor e  $\phi$  é o operador potencial elétrico. A escolha do Hamiltoniano acima é adequada, pois, aplicadas as equações de Hamilton, é obtida a força de Lorentz.

Após expandir o primeiro termo do lado direito e negligenciar o termo de ordem quadrática do potencial vetor, é possível separar o Hamiltoniano (2.1) em uma parte fundamental,  $H_0$ , e uma

parte de interação,  $H_{int}$ , a qual será tratada como uma perturbação. Esta aproximação é válida para campos de baixas intensidades. Dessa maneira,

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (2.2)$$

em que  $H_0 = \mathbf{p}^2/(2m) - e\phi$  e  $H_{int} = e(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p})/(2m)$ . Escrito assim, o Hamiltoniano fundamental contém os termos de energia cinética e energia potencial elétrica, enquanto que o termo de interação contém os efeitos correspondentes à presença do campo elétrico externo.

A parte perturbativa pode ser reescrita em termos da base das posições por meio da prescrição  $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$ , sendo  $\nabla$  o operador diferenciação. Então, segue que

$$H_{int} = -i\left(\frac{\hbar e}{2m}\right)(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla) = e\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}}{m}. \quad (2.3)$$

A validade da Eq. (2.3) é garantida uma vez que  $\nabla \cdot [\mathbf{A}\Psi(\mathbf{r})] = \Psi(\mathbf{r})[\nabla \cdot \mathbf{A}] + [\mathbf{A} \cdot \nabla]\Psi(\mathbf{r})$  e ao escolhermos o calibre de Coulomb, o qual é definido por  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Aqui,  $\Psi(\mathbf{r})$  é uma função de onda qualquer.

O potencial vetor para um feixe monocromático pode ser descrito da forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_0(\omega)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\hat{e}. \quad (2.4)$$

A constante  $A_0(\omega)$  é uma amplitude que pode depender da frequência  $\omega$ ,  $\mathbf{k}$  é o vetor de onda e  $\hat{e}$  denota a orientação do campo. Também, uma vez que a polarização é transversal,  $\mathbf{k} \cdot \hat{e} = 0$ . Usualmente, o comprimento de onda do campo externo é muito maior que as dimensões atômicas, ou seja,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ . Portanto, é possível fazer uma expansão em torno de  $\mathbf{r} = 0$ , isto é,  $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \approx 1$ . Ao substituir a Eq. (2.4) na Eq. (2.3) e expandir em torno da origem temos que

$$H_{int} = \frac{e}{m}A_0(\omega)e^{-i\omega t}\mathbf{p} \cdot \hat{e}. \quad (2.5)$$

Para sabermos como a parte perturbativa desloca os níveis de energia, é necessário encontrar o valor esperado do Hamiltoniano de interação. Dessa maneira, pela expressão acima, vemos que seu valor esperado está relacionado com o operador momentum. Então, para o encontrarmos é necessário saber como o operador momentum atua entre dois estados quânticos  $|n\rangle$  e  $|n'\rangle$ . Aqui, o estado quântico  $|n\rangle$  está associado ao número do nível de energia  $E_n$  não perturbado ( $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$ ). Portanto, ao aplicar o operador momentum entre os estados  $\langle n'|$  e  $|n\rangle$  temos

$$\langle n|\mathbf{p}|n'\rangle = m\langle n|\dot{\mathbf{r}}|n'\rangle = \frac{m}{i\hbar}\langle n|[\mathbf{r}, H_0]|n'\rangle = -im\omega_{nn'}\langle n|\mathbf{r}|n'\rangle. \quad (2.6)$$

Na terceira igualdade, foi utilizada a representação de Heisenberg para a evolução temporal de um operador qualquer, em que  $\hbar$  é a constante de Planck reduzida,  $i$  é o fator imaginário e  $\omega_{nn'}$  representa a frequência de transição entre os níveis de energia  $E_n$  e  $E_{n'}$ .

Podemos concluir, pela Eq. (2.6), que, para dois estados quânticos iguais, o Hamiltoniano de interação não produz deslocamento no nível de energia. Além disso, para um campo externo

com frequência próxima à frequência de transição, isto é,  $\omega_{nn'} = (\omega_n - \omega_{n'}) \approx \omega$  (condição de ressonância), podemos reescrever a Eq. (2.5) como

$$H_{int} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t), \quad (2.7)$$

em que  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$  é o operador dipolo elétrico e  $\mathbf{E}$  é o operador campo elétrico, sendo aqui, também, utilizada a relação  $\mathbf{E} = -(\partial\mathbf{A}/\partial t)$ . O resultado da Eq. (2.7) é conhecido como aproximação dipolar.

Em posse desse resultado, é possível escrever o Hamiltoniano de interação em termos da base ortonormal  $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ , de tal maneira que

$$H_{int} = -\sum_{i \neq j} d_{ij} |i\rangle \langle j| E(t), \quad (2.8)$$

sendo  $d_{ij} = -e \langle i | (\mathbf{r} \cdot \hat{\epsilon}) | j \rangle$ .

Agora, é preciso saber como este Hamiltoniano atua em um vetor de onda descrito por  $|\Psi\rangle$ . Para isso, vamos expandir o vetor de onda no conjunto de estados não perturbados  $|n\rangle$  com energia associada  $E_n$ , de tal maneira que

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle. \quad (2.9)$$

Aqui,  $c_n(t)$  são funções a serem determinadas com  $|c_n|^2$  sendo a probabilidade de se encontrar o vetor de onda do estado  $|n\rangle$ . Igualmente, é válida a normalização  $\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_n |c_n|^2 = 1$ .

A equação de Schrödinger com a inclusão do termo de interação, Eq. (2.9), é dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = (H_0 + H_{int}) |\Psi\rangle. \quad (2.10)$$

Após substituirmos as Eqs. (2.2) e (2.8) e ao aplicar do lado esquerdo o estado  $\langle n|$  na (2.9), ficamos com

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_n = \sum_{n' \neq n} \langle n | H_{int} | n' \rangle c_{n'}(t) e^{i\omega_{nn'} t} = - \sum_{n' \neq n} d_{nn'} c_{n'}(t) E(t) e^{i\omega_{nn'} t}. \quad (2.11)$$

Ao considerarmos que no instante inicial,  $t = 0$ , o elétron se encontra no estado não perturbado  $|m\rangle$ , temos, então, que para uma perturbação de primeira ordem,  $c_n^{(1)}$ , indicada pelo índice superior (1), é

$$c_n^{(1)} = -\frac{1}{i\hbar} \int_0^t [d_{nm} E(\omega) e^{i(\omega_{nm} - \omega)t'} + d_{nm}^* E(-\omega) e^{i(\omega_{nm} + \omega)t'}] dt'. \quad (2.12)$$

O campo considerado foi da forma  $E(t) = E(\omega) e^{-i\omega t} + E(-\omega) e^{i\omega t}$ , em que o primeiro termo corresponde à interação de absorção do fóton, e o segundo corresponde à sua emissão, com  $E(\omega)$  sendo uma amplitude que pode depender da frequência. Uma vez que o campo é real,  $E(\omega) = E^*(-\omega)$ . O simbolo \* corresponde ao complexo conjugado. Dessa maneira, da Eq. (2.12), temos, então, que

$$c_n^{(1)} = \frac{1}{\hbar} \left[ d_{nm} \frac{E(\omega)(e^{i(\omega_{nm} - \omega)t} - 1)}{\omega_{nm} - \omega} + d_{nm}^* \frac{E(-\omega)(e^{i(\omega_{nm} + \omega)t} - 1)}{\omega_{nm} + \omega} \right]. \quad (2.13)$$

Para determinar  $c_m$ , para uma perturbação de segunda ordem, aplicamos o resultado da Eq. (2.13) na Eq. (2.11), o que nos fornece

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_m^{(2)} = \sum_{n \neq m} \frac{1}{\hbar} [d_{nm} E(\omega) e^{-i(\omega_{nm} + \omega)t} + d_{nm}^* E(-\omega) e^{i(\omega_{nm} + \omega)t}] \left[ d_{nm} \frac{E(\omega)(e^{i(\omega_{nm} - \omega)t} - 1)}{\omega_{nm} - \omega} + d_{nm}^* \frac{E(-\omega)(e^{i(\omega_{nm} + \omega)t} - 1)}{\omega_{nm} + \omega} \right]. \quad (2.14)$$

Podemos acessar agora o deslocamento da energia do nível  $m$ ,  $\Delta E_m$ . Para isso, tomamos uma média temporal, simbolizada por  $\langle \rangle$ , sobre um período do campo elétrico. Após fazer isso, temos que

$$\Delta E_m = i\hbar \left\langle \frac{\partial}{\partial t} c_m^{(2)} \right\rangle = \sum_{n \neq m} \frac{|d_{nm}|^2 |E(\omega)|^2}{2\hbar} \left( \frac{1}{\omega_{nm} - \omega} + \frac{1}{\omega_{nm} + \omega} \right). \quad (2.15)$$

A energia esperada da Eq. (2.7) pode ser calculada em termos da polarizabilidade. Para isso, utilizaremos o fato de que uma pequena variação na energia é causada por uma pequena variação no campo elétrico, isto é,  $d\Delta E_m = \langle \mathbf{d} \rangle \cdot d\mathbf{E}$ . Também, uma vez que o valor esperado do operador dipolo elétrico cresce linearmente com campo elétrico, dada a sua proporcionalidade pela polarizabilidade,  $\alpha(\omega)$ , temos que  $\langle \mathbf{d} \rangle = \alpha(\omega) \mathbf{E}$ . Então, a Eq. (2.15) pode ser reescrita como

$$\Delta E_m = -\frac{1}{2} \alpha(\omega) \langle E(t) \rangle^2, \quad (2.16)$$

com

$$\alpha(\omega) \approx \frac{|d_{nm}|^2}{\hbar} \left( \frac{1}{\omega_{nm} - \omega} \right). \quad (2.17)$$

Aqui, consideramos somente o caso de ressonância com campo elétrico, sendo mantida somente a contribuição da transição com menor valor no denominador. Isso é razoável, uma vez que para o estudo em interesse, é somente necessário a situação na qual ocorre ressonância entre dois níveis de energia. A energia dada pela Eq. (2.16) reproduz o efeito Stark para um campo dependente do tempo, enquanto que no limite  $\omega \rightarrow 0$  é obtido o efeito Stark usual [21].

## 2.2.2 Taxa de transição eletrônica

A discussão anterior está incompleta, pois não leva em consideração que, passado um certo tempo, o elétron excitado irá decair para um estado de menor energia com a emissão de um fóton. Esse processo pode ser incluído, atribuindo-se à energia da Eq. (2.16) uma parte imaginária da seguinte maneira,

$$\Delta E_m = V_m - \frac{i\hbar}{2} \Gamma_g. \quad (2.18)$$

A parte real é dada pela energia potencial  $V_m$  e corresponde ao deslocamento da energia do estado  $m$ , devido à transição, sendo dado pela Eq. (2.16). Em contrapartida, a parte imaginária corresponde ao tempo finito (tempo de vida) do estado excitado, em que  $\Gamma_g$  representa a quantidade de elétrons que decaem por unidade de tempo, ou seja, é o produto da população de partículas no estado superior e a taxa de decaimento espontâneo. Essa contribuição é responsável pela origem das forças que discutiremos na seção posterior.

O valor esperado da energia depende do quadrado da amplitude do vetor de onda. Então, sendo o tempo de vida no estado excitado dado por  $1/\Gamma_e$ , em que  $\Gamma_e$  é a taxa de decaimento espontâneo de um único elétron, conseqüentemente a contribuição desse efeito será  $2/\Gamma_e$ . Dessa forma, uma contribuição imaginária igual a  $-i\hbar\Gamma_e/2$  deve ser somada à energia do estado excitado  $E_n$ , correspondendo, assim, a um decaimento da amplitude. Por meio dos coeficientes de Einstein, a constante  $\Gamma_e$  pode ser escrita em termos de constantes fundamentais, da frequência de transição e do dipolo elétrico entre os níveis de transição [96]. Ao considerarmos a contribuição imaginária, a polarizabilidade da Eq. (2.17) é corrigida para

$$\alpha(\omega) \approx \frac{|d_{nm}|^2}{\hbar} \left( \frac{1}{\omega_{nm} - \omega - i\frac{\Gamma_e}{2}} \right) = \frac{|d_{nm}|^2}{\hbar} \left[ \frac{\omega_{nm} - \omega}{(\omega_{nm} - \omega)^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4}} + i \frac{\Gamma_e/2}{(\omega_{nm} - \omega)^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4}} \right]. \quad (2.19)$$

Pela expressão acima, temos que a polarizabilidade possui tanto uma parte real quanto uma parte imaginária, o que nos leva aos seguintes valores de energia

$$V_m = \text{Re}(\Delta E_m) = \frac{\hbar\Omega_R^2\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4}} \quad (2.20)$$

e

$$\Gamma_g = -\frac{2}{\hbar} \text{Im}(\Delta E_m) = \frac{\Gamma_e\Omega_R^2}{2(\delta^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4})}. \quad (2.21)$$

Introduzimos a frequência de Rabi  $\Omega_R = d_{n'm}E(\omega)/\hbar$  e a frequência de deslocamento  $\delta = \omega - \omega_{nm}$ . Quando  $\delta > 0$ , o deslocamento é dito azul (*blue detuning*), do contrário,  $\delta < 0$ , o deslocamento é dito vermelho (*red detuning*). O deslocamento vermelho é utilizado para desacelerar os átomos, então para o nosso interesse  $\delta < 0$ . Além disso, os resultados das Eqs. (2.20-2.21) são válidos para  $\Omega_R^2 \ll (\delta^2 + \Gamma_e^2/4)$ , o que reflete a condição de campos de baixas intensidades. A força que decorre da Eq. (2.19) dá origem a uma força de dipolo, porém esta força não é relevante para a escala de tempo na qual estamos interessados, pois muitos elétrons se excitam e decaem. Em seguida veremos a força que se origina devido ao efeito do salto quântico [21].

### 2.2.3 A força do laser para um átomo em repouso

Um fóton será absorvido se o mesmo estiver em ressonância com a frequência de transição entre dois níveis de energia. Ao ser absorvido, o átomo adquire um momentum  $\hbar\mathbf{k} = \hbar k\hat{e}$ . O fóton emitido pode possuir frequência diferente do fóton absorvido ( $k' = \omega'/c$ ), e, então, o átomo adquire um momentum  $-\hbar\mathbf{k}' = -\hbar k'\hat{e}'$ . A linha é introduzida para diferenciar o comprimento de onda e a direção de propagação, já que o elétron pode decair em um outro nível de energia, e a direção do fóton emitido é aleatória. Sendo assim, no processo de absorção e emissão, o momentum resultante será  $\Delta\mathbf{p} = \hbar(k\hat{e} - k'\hat{e}')$ . Se este processo ocorre  $s$  vezes, então o momentum resultante é

$$\Delta\mathbf{p} = \hbar \left( sk\hat{e} - k' \sum_{i=1}^s \hat{e}'_i \right). \quad (2.22)$$

Na escala de tempo na qual estamos interessados, o efeito do elétron transicionar e decair ocorre diversas vezes. Portanto, para um grande número de ciclos,  $s \gg 1$ , o somatório se anula,

visto que não há direção preferencial. Logo, o ganho de momentum será positivo e expresso por

$$\overline{\Delta \mathbf{p}} = s\hbar \mathbf{k}. \quad (2.23)$$

Aqui, a barra representa a variação de momentum dada uma soma sobre muitas transições eletrônicas.

A quantidade de ciclos por unidade de tempo é dada pela quantidade de elétrons que decaem por unidade de tempo, portanto a força devida à presença do laser sobre um átomo em repouso é

$$\mathbf{F}_{laser} = \hbar \Gamma_g \mathbf{k} = \frac{\hbar \Gamma_e \Omega_R^2}{2(\delta^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4})} \mathbf{k}. \quad (2.24)$$

Temos, assim, que a força que se origina pela presença do laser cresce com a amplitude do campo elétrico ( $\Omega_R$ ) e decai com a frequência de deslocamento ( $\delta$ ) e a taxa de decaimento espontâneo ( $\Gamma_e$ ).

Agora, iremos introduzir o efeito devido ao movimento do átomo.

## 2.2.4 Efeito Doppler

O confinamento de uma amostra ocorre pela transferência de energia cinética para energia potencial. Para que isso seja efetivo, é necessário que a energia térmica do sistema esteja na mesma ordem de grandeza do poço de potencial que confinará a amostra. Dessa maneira, faz-se necessário o resfriamento dos átomos [94]. O resfriamento do sistema é compreensível ao considerarmos o efeito do movimento do átomo.

O resultado da Eq. (2.24) é válido para um referencial no qual o átomo está em repouso. Porém, para um referencial no laboratório, o átomo estará em movimento, sendo necessário fazer uma correção na expressão anterior. Para um átomo se movendo com a velocidade  $\mathbf{v}$ , a frequência observada do fóton proveniente do laser será modificada, em consequência do efeito Doppler por uma quantidade  $\omega' = \omega - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$ . De fato, se o átomo e o fóton estiverem na mesma direção e sentido, a frequência observada pelo átomo será menor e de valor  $\omega' = \omega - (kv)$ . Já para mesma direção e sentidos opostos, a frequência será maior e de valor  $\omega' = \omega + (kv)$ . Esse efeito cria na energia uma dependência com a velocidade. Ao levarmos em consideração o movimento do átomo, temos que a força do laser,  $\mathbf{F}_D$ , é dada por

$$\mathbf{F}_D = \frac{\hbar \Gamma_e \Omega_R^2}{2[(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4}]} \mathbf{k}. \quad (2.25)$$

Em MOTs, são usados três pares de lasers contrapropagantes ortogonais entre si e perfeitamente alinhados. Dada esta configuração de MOT, temos, então, uma contribuição tanto de um fóton que está no mesmo sentido quanto no sentido contrário. Portanto, temos uma força devida ao efeito Doppler na direção  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{F}_{D+}$ , e outra na direção  $-\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{F}_{D-}$ . Dessa maneira, a força resultante devida ao par de lasers é dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{D+} + \mathbf{F}_{D-} = \frac{\hbar \Gamma_e \Omega_R^2 \mathbf{k}}{2} \left[ \frac{1}{(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4}} - \frac{1}{(\delta + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4}} \right]. \quad (2.26)$$

Para baixas velocidades,  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 \ll \delta^2 + \Gamma_e^2/4$ , é possível fazer uma expansão no denominador, de forma que  $(\delta \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 = \delta^2 \mp 2\delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ . Dessa maneira, a força se reduz para

$$\mathbf{F}_R = -\frac{2\hbar\Gamma_e\Omega_R^2|\delta|}{(\delta^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4})^2}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\mathbf{k}. \quad (2.27)$$

O vetor  $\mathbf{F}_R$  representa a força de resfriamento.

Para entender o porquê da força dada pela Eq. (2.27) ser denominada de força de resfriamento, tomemos um dos pares de lasers postos na direção  $\hat{e}_x$ . O versor  $\hat{e}_x$  caracteriza a direção  $x$ , assim como  $\hat{e}_y$  e  $\hat{e}_z$  representam as direções  $y$  e  $z$ , respectivamente. Nessa configuração, a direção de propagação é  $\mathbf{k} = k_x\hat{e}_x$  e tomemos  $\mathbf{v} = v_x\hat{e}_x$ . Então, temos que

$$\mathbf{F}_{Rx} = -\frac{2\hbar\Gamma_e\Omega_R^2|\delta|k_x^2}{(\delta^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4})^2}v_x\hat{e}_x = -\beta_x v_x\hat{e}_x. \quad (2.28)$$

Vemos assim que, para uma configuração usual em MOTs, a força devido ao efeito Doppler se comporta como uma força de fricção com coeficiente de viscosidade dado por  $\beta_x = 2\hbar\Gamma_e\Omega_R^2|\delta|k_x^2/[(\delta^2 + \Gamma_e^2/4)^2]$ . Por consequência, será esta a interação responsável por diminuir a temperatura do sistema. Feito o mesmo para as demais direções e uma vez que os três pares de lasers possuem o mesmo vetor de onda e a mesma intensidade, segue que

$$\mathbf{F}_R = -\beta\mathbf{v}. \quad (2.29)$$

Nesta seção, não consideramos a polarização dos lasers, pois ela vai além da teoria Doppler aqui mostrada. A contribuição desse efeito é contemplada pelo resfriamento Sisyphus (*Sisyphus Cooling*) [20]. Também, salientamos que os lasers são alinhados, pois há sistemas estáveis com desalinhamento dos lasers no plano  $xy$  [29].

## 2.2.5 Efeito Zeeman

Para que seja possível confinar átomos, é necessário que haja um estado de mínima energia. Essa condição é satisfeita para um campo magnético estático num espaço livre e na ausência de correntes. Sendo assim, é possível o aprisionamento por meio de um campo magnético [20, 21].

O campo magnético externo aplicado é geralmente estático e varia com a posição. Entretanto, apesar do campo não variar com o tempo, o campo experienciado pelo átomo irá variar, visto que o átomo se move. O problema é que isso pode levar para transições de estados indesejados, o que pode afetar o confinamento. Para que isso não ocorra, é necessário que se obedeça a uma certa condição. Podemos encontrá-la da seguinte maneira: se o átomo se move com velocidade  $\mathbf{v}$ , ele perceberá um campo variante com o tempo em seu referencial. Logo, pela derivada convectiva,  $d/d\tau = \partial/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ , temos que, no referencial do átomo, dado pelo tempo  $\tau$ , a variação temporal do campo magnético é  $d\mathbf{B}/d\tau = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ . Na derivada convectiva, temos que a derivada total de uma quantidade ( $d/d\tau$ ) depende tanto da variação temporal local ( $\partial/\partial t$ ) quanto a sua variação na direção do movimento do fluido ( $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ ). Dessa forma, a igualdade anterior é válida, uma vez que o campo não depende explicitamente do tempo. Se essa variação for grande na escala de

tempo  $1/\omega_L = \mu_B |\mathbf{B}|/\hbar$ , sendo  $\omega_L$  a frequência de Larmor e  $\mu_B$  o magneton de Bohr, o dipolo magnético do átomo não terá tempo suficiente para se adaptar ao campo. Dessa maneira, o átomo não permanecerá no mesmo estado magnético. Para que isso não ocorra, é, então, necessário que

$$\frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}|}{|\mathbf{B}|} \ll \omega_L. \quad (2.30)$$

A Eq. (2.30) é a primeira condição a ser satisfeita, pois, do contrário, o aprisionamento magnético pode falhar.

O efeito Zeeman consiste no deslocamento nos níveis de energia devido à presença de um campo magnético,  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . O deslocamento da energia devido a este efeito é dado por

$$\Delta E(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = g_J \mu_B m_J |\mathbf{B}(\mathbf{r})|. \quad (2.31)$$

O operador  $\boldsymbol{\mu}$  é o operador momento de dipolo magnético,  $g_J$  é o fator de Landé para o estado excitado e  $m_J$  é a projeção do momentum angular ao longo da direção do campo para um estado com momentum angular de spin total  $J$ . Dada a Eq. (2.31), temos que os níveis de energia se diferem de uma unidade de frequência dada por  $\gamma = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})/\hbar = g_J \mu_B m_J |\mathbf{B}(\mathbf{r})|/\hbar$ . A dependência com o fator  $|\mathbf{B}(\mathbf{r})|$  nos permite usar as possíveis configurações do campo magnético para criar uma dependência no nível da energia com a posição. Agora, precisamos fornecer uma forma para a configuração do campo magnético.

As possíveis configurações usadas para se aprisionar átomos são inspiradas diretamente nas configurações utilizadas no confinamento de plasmas. A exemplo, é possível confinar utilizando uma armadilha de Ioffe–Pritchard (*Ioffe–Pritchard trap*), a qual é formada por correntes distribuídas uniformemente sobre uma superfície cilíndrica, e duas bobinas de Helmholtz. Essa configuração foi primeiramente proposta por Ioffe [97] para confinar plasmas e sugerida por Pritchard no contexto de aprisionamentos de átomos [98]. Em MOTs, a configuração usualmente utilizada é um campo gerado somente por duas bobinas anti-Helmholtz. Estas se diferenciam daquelas, pois as correntes são invertidas.

Os lasers possuem polarizações opostas. Dessa maneira, os lasers com polarização à esquerda ( $\sigma^+$ ) acoplam átomos se movendo em sua direção em sub-estados com valores positivos. Já aqueles lasers com polarização à direita ( $\sigma^-$ ), acoplam em sub-estados negativos. Para ilustração, podemos utilizar o modelo de dois níveis. Então, tomemos um átomo com estado fundamental com  $J = 0$ , com estado excitado  $J = 1$  e três sub-estados  $m_1 = 0, \pm 1$ . Os átomos que se movem em direção aos lasers  $\sigma^+$  podem ser acoplados ao sub-estado  $m_1 = 1$  e para aqueles se movendo em direção aos lasers  $\sigma^-$  para o sub-estado  $m_1 = -1$ . O resultado disso é uma força em direção ao centro da amostra.

As bobinas anti-Helmholtz criam um campo quadrupolo magnético que possui uma simetria axial. As dimensões das armadilhas são da ordem de centímetros enquanto que as dimensões da amostra são da ordens de até algumas centenas de micrômetros. Dessa forma, podemos partir da Lei de Gauss para o campo magnético ( $\nabla \cdot \mathbf{B}$ ) e encontrar um potencial escalar  $\mathbf{B} = -\nabla\Phi$  por meio da equação de Laplace [99],

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad (2.32)$$



A solução geral da equação anterior pode ser escrita da seguinte forma,

$$\Phi = \sum_{l,m} \left[ C_{l,m} R^l + D_{l,m} R^{-(l+1)} \right] Y_l^m(\theta, \phi), \quad (2.33)$$

em que  $Y_l^m(\theta, \phi)$  é o harmônico esférico de grau  $l$  e de ordem  $m$ , sendo  $R$  o módulo do raio,  $\theta$  o ângulo polar e  $\phi$  o ângulo azimutal. As constantes  $C_{l,m}$  e  $D_{l,m}$  representam, respectivamente, os coeficientes dos termos próximos e afastados da distribuição de corrente. Uma vez que estamos interessados nos campos próximo da origem, podemos desprezar as contribuições  $D_{l,m}$  e, devido à simetria axial, não esperamos que a solução dependa de  $\phi$ . Procedendo assim, temos que o potencial escalar toma a forma

$$\Phi = \sum_{l,m} C_{l,m} R^l P_l(\cos \theta), \quad (2.34)$$

em que  $P_l(\cos \theta)$  são os polinômios de Legendre de grau  $l$  com  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$  e  $\cos \theta = z/R$  em coordenadas cilíndricas.

É possível demonstrar que o potencial escalar para o par de bobinas anti-Helmholtz na direção  $z$ , no limite no qual o ponto de observação é muito menor que as dimensões das bobinas, retém somente os primeiros termos pares, ou seja,  $l = 0, 2$  [99]. Procedendo dessa maneira, temos que os únicos termos relevantes da expressão anterior serão os dois primeiros termos pares. Portanto,

$$\Phi = C_0 + \frac{C_2}{2} (2z^2 - r^2), \quad (2.35)$$

segue que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y - 2z\hat{e}_z), \quad (2.36)$$

é o campo magnético criado pelas bobinas anti-Helmholtz nos arredores da origem.

A constante  $B_0 = -C_2$  é a magnitude do gradiente do campo magnético,  $C_2$  é uma constante negativa dependente da geometria e da corrente que percorre as bobinas. Como podemos ver pela Eq. (2.36), o campo é assimétrico na direção de  $z$ . Logo, as interações serão assimétricas. Além disso, para que a força aponte para o centro, é necessário que os lasers postos na direção  $z$  tenham as polarizações invertidas, já que a direção do campo é invertida nessa direção. Dada essa configuração e na presença dos lasers contrapropagantes a força,  $\mathbf{F}_Z$ , para um átomo em repouso devida à contribuição do efeito Zeeman, é

$$\mathbf{F}_Z = \frac{\hbar \Gamma_e \delta \Omega_R^2}{2[(\delta - \gamma)^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4}]} \mathbf{k}. \quad (2.37)$$

Para acoplamentos fracos,  $\gamma^2 \ll \delta^2 + \Gamma_e/4$ , é possível fazer a mesma expansão feita para se obter a Eq. (2.27). Também, temos que levar em consideração que cada polarização do laser (posicionados ortogonalmente entre si) leva a deslocamentos opostos na frequência [50, 100], ou seja, temos a contribuição tanto de  $\sigma^+$  quanto de  $\sigma^-$ . Então, a força se reduz a uma força harmônica

$$\mathbf{F}_Z = -k\mathbf{r}, \quad (2.38)$$

em que  $k = \mu_B B_0 \beta / (k_L \hbar)$  é a constante de mola associada ao confinamento. Um vez que o gradiente na direção  $z$  é o dobro daqueles na direção  $x$  e  $y$ , temos que  $k_x = k_y = k_z/2$ . Porém,

por simplicidade, será ignorada essa assimetria no primeiro estudo, assim como feito nas Refs. [46, 47, 48, 49] e, em seguida, estudaremos o caso com assimetria na direção  $z$ . Também por simplicidade, iremos supor transições de sub-estados correspondentes à  $gm_j = 1$ .

A soma das contribuições dos efeitos Doppler e Zeeman, Eq. (2.29) e Eq. (2.38), é conhecida como a força da armadilha magneto-óptica,  $\mathbf{F}_{MOT}$ , e então

$$\mathbf{F}_{MOT} = -\beta\mathbf{v} - k\mathbf{r}. \quad (2.39)$$

## 2.3 Força coletiva

Além das forças originadas pela armadilha, há interações não-locais autoconsistentes que são relevantes ao sistema. Podemos expressá-la por uma força coletiva,  $\mathbf{F}_C$ . Essa força é dada pela soma de dois efeitos. A primeira contribuição é denominada de força fantasma,  $\mathbf{F}_F$ . Sua origem é consequência de que a intensidade luminosa varia localmente. Isso ocorre, pois uma fração dos fótons será absorvida por outros átomos. Para descrevermos esse efeito, utilizaremos o limite de baixa absorção, o qual nos permitirá escrever a intensidade absorvida por meio de um decaimento linear. Esse desbalanceamento causa uma compressão da nuvem. Já a segunda contribuição é chamada de força de espalhamento,  $\mathbf{F}_E$ . Sua origem se dá na absorção de fótons emitidos por átomos vizinhos. Esses fótons são denominados de fótons espalhados ou fótons secundários. A emissão seguida de uma absorção de um fóton secundário causa uma interação de repulsão entre os pares envolvidos nessa troca. Portanto, podemos escrever  $\mathbf{F}_C = \mathbf{F}_F + \mathbf{F}_E$ . Em situações normais, a força repulsiva domina sobre a força atrativa. Logo, a força coletiva será de repulsão. Por fim, veremos que a força coletiva pode ser descrita formalmente por meio de uma interação Coulombiana dada por uma carga efetiva.

### 2.3.1 Força fantasma

A força fantasma foi primeiro considerada no contexto de MOTs por Dalibard [101]. Para melhor entender a origem dessa força, vamos primeiro partir de uma descrição unidimensional. Também, iremos considerar uma distribuição uniforme de átomos. Após isso, iremos generalizar o resultado.

A intensidade luminosa que chega em um determinado ponto  $x$  de uma reta é dada por

$$I_{\pm} = I_0 e^{-n_0 \sigma_L \left(\frac{x_0}{2} \pm x\right)}, \quad (2.40)$$

em que  $I_+$  descreve a intensidade do laser na direção positiva e  $I_-$  na direção negativa, sendo  $I_0$  a intensidade emitida por um laser. Já  $n_0$  é a distribuição de átomos em um comprimento  $x_0$ , limitado pelas coordenadas  $-x_0/2$  e  $x_0/2$ , e  $\sigma_L$  é a seção de choque de absorção do laser. Pela Eq. (2.40), vemos que os fótons na direção positiva tem que percorrer uma distância  $(x_0/2 + x)$  e, os fótons na direção negativa, uma distância  $(x_0/2 - x)$  para chegar em uma determinada posição  $x$ . Para um regime de baixa absorção, dada pela condição  $n_0 \sigma_L x_0/2 \ll 1$ , temos que a intensidade será dada por

$$I_{\pm} = I_0 \left[ 1 - n_0 \sigma_L \left( \frac{x_0}{2} \pm x \right) \right]. \quad (2.41)$$

Uma vez que a pressão de radiação é dada pela razão entre a intensidade da onda pela velocidade da luz,  $c$ , temos que a força resultante será

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = -\frac{2I_0\sigma_L^2}{c}n_0|x|\hat{e}_x. \quad (2.42)$$

A compressão da nuvem é expressa pelo sinal negativo da força. Além disso, ao tomarmos o divergente, temos que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{2I_0\sigma_L^2}{c}n_0. \quad (2.43)$$

Temos, assim, uma força que varia com a posição de forma constante e proporcional à densidade de partículas.

Discutido o que acontece numa situação simplificada, podemos generalizar o resultado obtido. A intensidade luminosa que chega na direção  $x$  para uma distribuição que dependa tanto da posição quanto do tempo, e ao considerar o limite de baixa absorção, pode ser escrita como

$$I_{x+} = I_0 \left( 1 - \sigma_L \int_{-\frac{x_0}{2}}^x n(x', y, z, t) dx' \right) \quad (2.44)$$

e

$$I_{x-} = I_0 \left( 1 - \sigma_L \int_x^{\frac{x_0}{2}} n(x', y, z, t) dx' \right). \quad (2.45)$$

A força resultante na direção  $x$  que origina-se por meio dessas duas contribuições é

$$\mathbf{F}_{Fx} = -\frac{I_0\sigma_L^2}{c} \left( \int_{-\frac{x_0}{2}}^x n(x', y, z, t) dx' - \int_x^{\frac{x_0}{2}} n(x', y, z, t) dx' \right) \hat{e}_x. \quad (2.46)$$

Ao utilizar os mesmos argumentos para as demais direções, concluímos que

$$\mathbf{F}_{Fy} = -\frac{I_0\sigma_L^2}{c} \left( \int_{-\frac{y_0}{2}}^y n(x, y', z, t) dy' - \int_y^{\frac{y_0}{2}} n(x, y', z, t) dy' \right) \hat{e}_y \quad (2.47)$$

e

$$\mathbf{F}_{Fz} = -\frac{I_0\sigma_L^2}{c} \left( \int_{-\frac{z_0}{2}}^z n(x, y, z', t) dz' - \int_z^{\frac{z_0}{2}} n(x, y, z', t) dz' \right) \hat{e}_z. \quad (2.48)$$

Após tomarmos o divergente da força originada pelas Eqs. (2.46-2.48) temos que

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_F = -\frac{6\sigma_L^2 I_0}{c} n(\mathbf{r}, t). \quad (2.49)$$

O fator 6 é devido à contribuição dos três pares de lasers. Além disso, para obter a Eq. (2.49), é suposto que os átomos estejam contidos em uma caixa retangular de comprimento  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$ , de tal maneira que não há partículas na superfície dessa caixa, ou seja,  $n(\pm x_0/2, y, z, t) = n(x, \pm y_0/2, z, t) = n(x, y, \pm z_0/2, t) = 0$ .

### 2.3.2 Força de espalhamento

Quando a nuvem se torna muito densa, os fótons secundários podem ser absorvidos por átomos próximos antes de escapar da amostra. Por conta da conservação do momentum, cada

átomo que participa dessa interação irá adquirir um movimento de recuo em direções opostas. Dessa maneira, o efeito resultante é de provocar uma expansão da nuvem.

Um átomo irá absorver e reemitir um fóton com uma taxa  $\sigma_L I$ , ou seja, todos os elétrons absorvidos serão emitidos. Já a fração de absorção do segundo fóton é dada por  $\sigma_R/(4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2)$ , sendo  $\sigma_R$  a seção de choque de absorção de fótons espalhados,  $\mathbf{r}$  a posição do átomo que irá emitir o fóton e  $\mathbf{r}'$  a posição do átomo que irá absorvê-lo. A diferença entre as seções de choque se dá, uma vez que a frequência de distribuição e a polarização desses fótons secundários diferem daqueles emitidos pelos lasers. Então, para um par de átomos, o módulo da força será

$$|\mathbf{F}_E(\mathbf{r})| = \frac{\sigma_L \sigma_R}{4\pi c} \frac{I(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \quad (2.50)$$

A expressão anterior pode ser interpretada de uma outra forma. Podemos pensar que existe uma determinada probabilidade do átomo de absorver esse fóton. Essa probabilidade deve ser igual à unidade para quando o fóton estiver a uma distância fixa e independente da direção, assim definindo a seção de choque de absorção, e deve ser nula para grandes distâncias. Dessa forma, definimos a probabilidade de absorção como  $\sigma_R/(4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2)$ . Além disso, esse evento ocorre um determinado número de vezes por unidade de tempo, portanto dado pela taxa  $\sigma_L I$ .

Ao considerarmos a contribuição de todos os átomos, temos que a força de espalhamento é

$$\mathbf{F}_E(\mathbf{r}) = \frac{6\sigma_L \sigma_R I_0}{4\pi c} \int \frac{n(\mathbf{r}', t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'. \quad (2.51)$$

Para obter o resultado da Eq. (2.51), foi suposto que a intensidade seja constante e que seu valor médio corresponda aos três pares de lasers com intensidade  $I_0$ . Além disso, ela é válida numa aproximação na qual fótons reemitidos duas vezes ou mais são desprezíveis.

É possível descrever essa força de uma maneira mais cômoda e semelhante à Eq. (2.49). Após tomar o divergente da Eq. (2.51), temos que

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_E = \frac{6\sigma_L \sigma_R I_0}{c} n(\mathbf{r}, t). \quad (2.52)$$

### 2.3.3 Lei de Gauss para MOTs

Como dito anteriormente, a força coletiva é a soma dos efeitos da força fantasma e da força de espalhamento. Então, em posse das Eq. (2.49) e Eq. (2.52), podemos escrever que a força coletiva satisfaz

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_C = Qn(\mathbf{r}, t). \quad (2.53)$$

A constante  $Q = 6(\sigma_R - \sigma_L)\sigma_L I_0/c$  é o quadrado da carga efetiva,  $q_{eff}$ , do sistema. Em situações usuais,  $\sigma_R > \sigma_L$  e, então,  $Q > 0$ . Logo, a força coletiva é de repulsão.

Expressa dessa maneira, vemos que a força coletiva obedece a uma lei de Gauss com uma carga efetiva,  $Q = q_{eff}^2/\epsilon_0$ , sendo a constante  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo. Sendo assim, também é possível escrever a força acima em termos da equação de Poisson, dado que a força coletiva seja escrita a partir de um potencial. Escrever em termos da lei de Gauss ou da equação de

Poisson fica ao critério da forma com a qual se quer abordar o problema. É devido a essa analogia que reside a associação que faremos com plasmas de uma única componente. Entretanto, no caso do plasma, a presença da lei de Gauss é devido ao campo elétrico autoconsistente dos elétrons.

## 3 Modelo hidrodinâmico

O modelo hidrodinâmico juntamente com as variáveis Lagrangianas serão as ferramentas que utilizaremos para acessar a dinâmica dos sistemas propostos. Portanto, neste capítulo, iremos justificar a utilização dessas ferramentas. Começaremos a discussão apresentando como se conserva a probabilidade na interação átomo-campo elétrico. Em seguida, como há possibilidade de acessar um sistema semiclássico (MOTs) e outro clássico (plasmas de elétrons e antiprótons) pelo mesmo modelo e com semelhantes estruturas de equações, iremos entender como isso é possível. Também, obteremos uma equação de transporte para quantidades macroscópicas que nos fornecerá uma equação da continuidade e uma equação do transporte para o momentum. Para o primeiro caso, vamos partir da função de Wigner [20, 102]. Já para o segundo, partiremos da função de distribuição [103]. No limite clássico, a analogia entre as duas é direta. Por fim, apresentaremos o método das variáveis Lagrangianas.

### 3.1 Modelo Hidrodinâmico

Um sistema constituído de muitas partículas pode ser descrito pelo comportamento de cada uma delas. Para isso, seria necessário descrever quantidades microscópicas, tais como a trajetória e velocidade para cada um dos seus constituintes. Esse processo pode se tornar uma tarefa impraticável. Entretanto, o modelo hidrodinâmico permite uma outra abordagem. Com esse modelo, podemos descrever o sistema em termos de quantidades físicas macroscópicas, como, por exemplo: a densidade de partículas,  $n(\mathbf{r}, t)$ , a velocidade do fluido,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , e a pressão,  $p(\mathbf{r}, t)$ . Essas quantidades são médias macroscópicas sobre a distribuição de partículas em um elemento de volume. Para que seja possível descrevê-las assim, é preciso que, num determinado elemento de volume, contenha uma quantidade grande de partículas. Em MOTs, para uma amostra contendo  $10^{16}$  átomos/ $m^3$ , em uma escala macroscópica de volume  $10^{-12} m^3$ , a qual é possível considerar como um ponto, haveriam  $10^4$  átomos dentro de um volume elementar. Então, a aplicação do modelo é justificável para o contexto de MOTs. Entretanto, para plasma de elétrons, a densidade obtida no laboratório é muito menor do que a densidade para MOTs, porém, como a amostra é mantida confinada em uma certa região do espaço por meio de uma armadilha, o modelo ainda é justificável. Além disso, temos interações que podem ser descritas formalmente por meio de colisões. Então, é necessário que o livre caminho médio (distância percorrida entre duas colisões sucessivas) seja pequeno, comparada com a escala do comprimento de observação. Essa condição é satisfeita por ambos os sistemas. No contexto de MOTs, essa condição restringe a abordagem para átomos que percorrem pequenas distâncias até absorverem um fóton e decaírem. O modelo hidrodinâmico já foi empregado em MOTs no contexto de oscilações coletivas [46, 48] e instabilidades [47]. Já para plasmas não-neutros, a técnica tem sido usada com frequência desde os seus primórdios [59] e, ainda, com situações sendo estudadas, entre elas: vórtices [64], oscilações de grande amplitude para um plasma frio unidimensional na ausência de colisões [6, 11, 12] e expansão de um plasma

frio [104].

## 3.2 Equação da continuidade

É sabido que a equação de Schrödinger obedece uma equação da continuidade para a densidade de probabilidades. Dessa maneira, é de interesse ver como na equação de Schrödinger, Eq. (2.10), comporta-se a conservação da probabilidade. Então, seja  $|\mathbf{r}\rangle$  a base das posições, a equação de Schrödinger em termos da função de onda  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  é dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}, t) + \sum_{i \neq j} d_{ij} c_j E(t) \Psi_i(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_{ji}t}. \quad (3.1)$$

Por definição, a função de onda é  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n(t) \Psi_n(\mathbf{r}, t)$ , com  $\Psi_n(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \langle \mathbf{r} | n \rangle$ . Além disso,  $\nabla^2$  é o laplaciano,  $V(\mathbf{r})$  é o potencial,  $E(t)$  é o campo elétrico e  $d_{ij} = -e \int \Psi_i^*(\mathbf{r} \cdot \hat{e}) \Psi_j d^3r$  é o momento de dipolo  $ij$  na nova base, em que  $d^3r$  representa o volume elementar no entorno da posição  $\mathbf{r}$ . Dada a equação anterior, temos que o seu complexo conjugado satisfaz a seguinte equação,

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \Psi^*(\mathbf{r}, t) + \sum_{i \neq j} d_{ij}^* c_j^* E(t) \Psi_i^*(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_{ij}t}. \quad (3.2)$$

Ao tomar a diferença da Eq.(3.1) multiplicada pelo lado esquerdo por  $\Psi^*$  pela Eq.(3.2) multiplicada pelo lado esquerdo por  $\Psi$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_n \sum_{n'} c_n^* c_{n'} \Psi_{n'}^* \Psi_n \right) &= \frac{i\hbar}{2m} \left[ \sum_n \sum_{n'} c_n^* c_{n'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\Psi_{n'}^* \nabla \Psi_n - \Psi_n \nabla \Psi_{n'}^*) \right] \\ &+ \frac{i}{\hbar} \sum_{i \neq j} E(t) \left( d_{ij} c_j \sum_{n'} c_{n'}^* \Psi_{n'}^* \Psi_i e^{-i\omega_{ji}t} - d_{ij}^* c_j^* \sum_n c_n \Psi_i^* \Psi_n e^{-i\omega_{ij}t} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se somarmos somente os termos  $n = n' = i$ , ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_i |c_i|^2 |\Psi_i|^2 \right) &= \nabla \cdot \left[ \frac{i\hbar}{2m} \sum_i |c_i|^2 (\Psi_i \nabla \Psi_i^* - \Psi_i^* \nabla \Psi_i) \right] \\ &+ \frac{i}{\hbar} \sum_{i \neq j} E(t) \left( c_j \sum_i d_{ij} c_i^* \Psi_i^* \Psi_i e^{-i\omega_{ji}t} - c_j^* \sum_i d_{ij}^* c_i \Psi_i^* \Psi_i e^{-i\omega_{ij}t} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Com as seguintes definições

$$n(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1} |c_i|^2 |\Psi_i|^2, \quad (3.5)$$

e

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m} \sum_{i=1} |c_i|^2 (\Psi_i \nabla \Psi_i^* - \Psi_i^* \nabla \Psi_i), \quad (3.6)$$

temos que a Eq. (3.4) torna-se

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = S. \quad (3.7)$$

A Eq. (3.7) é equação da continuidade para a densidade de probabilidades na presença de "fontes" e "sorvedouros" de probabilidades dadas por

$$S = \frac{i}{\hbar} \sum_{i \neq j} \sum_i E(t) \left( c_j d_{ij} c_i^* |\Psi_i|^2 e^{-i\omega_{ji}t} - c_j^* d_{ij}^* c_i |\Psi_i|^2 e^{-i\omega_{ij}t} \right). \quad (3.8)$$

### 3.3 Função de Wigner

Na física clássica, o espaço de fase é útil para descrever a probabilidade de se encontrar um certo número de partículas com determinada velocidade e posição. Essa descrição é possível por meio da função de distribuição. Entretanto, na física quântica, conhecer tanto a posição quanto a velocidade da partícula com precisão infinita é algo proibido por consequência do princípio da incerteza. Sendo assim, no contexto de efeitos quânticos, o conceito de espaço de fase é um problema. Consequentemente, não é possível definir uma função probabilidade no espaço de fase para um sistema quântico. Contudo, é possível construir uma função que seja semelhante às funções de probabilidade. Por conta de efeitos quânticos, essas funções são denominadas de pseudo-probabilísticas. São denominadas assim, pois não é inteiramente positiva, ou seja, assume valores negativos em algumas regiões do espaço de fase. Contudo, quando tomamos o limite clássico, recaímos em uma função inteiramente positiva. A primeira função pseudo-probabilística foi introduzida por Wigner [105] ao obter correções quânticas na física estatística clássica. Como desejamos construir uma associação direta com a função de distribuição, a melhor forma é partir da pseudo-função de probabilidade de Wigner, ou simplesmente, função de Wigner. Apesar de partirmos da definição de função de Wigner, é possível construí-la formalmente por meio da matriz densidade [102, 106, 107].

Partiremos da equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.9)$$

O termo dissipativo não está contido na equação anterior, então é necessário um modelo para incluí-lo no desenvolvimento que se segue. O potencial dá conta de reproduzir as interações harmônicas e autoconsistentes.

Podemos definir um elemento de matriz de Wigner  $ij$  no referencial do centro de massa pela forma

$$W_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^3 c_i^* c_j \int d^3s \exp\left(\frac{im\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\hbar}\right) \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, t) \Psi_j(\mathbf{r}_-, t), \quad (3.10)$$

em que  $\mathbf{r}_+ = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}$  e  $\mathbf{r}_- = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}$ , com velocidade microscópica  $\mathbf{u}$  e  $d^3s$  representa um volume elementar no entorno do vetor posição  $\mathbf{s}$ . Da Eq. (3.10), podemos encontrar duas quantidades



importantes. São elas,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1} \int W_{ii} d^3u &= \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^3 \sum_{i=1} |c_i|^2 \int \int d^3s d^3u \exp\left( \frac{im\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\hbar} \right) \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, t) \Psi_i(\mathbf{r}_-, t) \\
 &= \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^3 \sum_{i=1} |c_i|^2 \int \int d^3s du_x du_y du_z \exp\left( \frac{im(u_x s_x + u_y s_y + u_z s_z)}{\hbar} \right) \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, t) \Psi_i(\mathbf{r}_-, t) \\
 &= \sum_{i=1} |c_i|^2 \int d^3s \delta(\mathbf{s}) \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, t) \Psi_i(\mathbf{r}_-, t) = \sum_{i=1} |c_i|^2 |\Psi_i(\mathbf{r}, t)|^2 = n(\mathbf{r}, t) \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1} \int \mathbf{u} W_{ii} d^3u &= \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^3 \sum_{i=1} |c_i|^2 \int \int d^3s d^3u \mathbf{u} \exp\left( \frac{im\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\hbar} \right) \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, t) \Psi_i(\mathbf{r}_-, t) \\
 &= \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^3 \sum_{i=1} |c_i|^2 \int \int d^3s d^3u \left( \frac{i\hbar}{m} \nabla_s \right) \exp\left( \frac{im\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\hbar} \right) \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, t) \Psi_i(\mathbf{r}_-, t) \\
 &= \sum_{i=1} |c_i|^2 \int d^3s \left( \frac{i\hbar}{m} \nabla_s \right) \delta(\mathbf{s}) \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, t) \Psi_i(\mathbf{r}_-, t) \\
 &= \sum_{i=1} |c_i|^2 \int d^3s \left[ \left( \frac{i\hbar}{2m} \right) (\nabla_+ - \nabla_-) \right] \delta(\mathbf{s}) \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, t) \Psi_i(\mathbf{r}_-, t) \\
 &= \sum_{i=1} |c_i|^2 \int d^3s \delta(\mathbf{s}) [\Psi_j(\mathbf{r}_-, t) \nabla_+ \Psi_j^*(\mathbf{r}_+, t) - \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, t) \nabla_- \Psi_i(\mathbf{r}_-, t)] \\
 &= \frac{i\hbar}{2m} \sum_{i=1} |c_i|^2 (\Psi_i \nabla \Psi_i^* - \Psi_i^* \nabla \Psi) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

No desenvolvimento das Eqs. (3.11-3.12), foi utilizada a definição da função delta de Dirac em termos de sua forma integral. Na segunda igualdade da Eq. (3.12), foi utilizada a relação  $\mathbf{u} \rightarrow (i\hbar/m)\nabla_s$ , que válida, uma vez que o termo que contém a velocidade só está presente no termo exponencial. Aqui,  $\nabla_s$  representa o operador diferenciação em relação ao vetor  $\mathbf{s}$ . Além disso, na quarta igualdade, da mesma equação, por meio da definição dos vetores  $\mathbf{r}_+$  e  $\mathbf{r}_-$ , foi possível escrever  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{r}_+, \mathbf{r}_-) \rightarrow \nabla_s = \nabla_s(\nabla_+, \nabla_-)$ . Dessa forma,  $\nabla_{\pm}$  representa o operador gradiente nas posições  $\mathbf{r}_{\pm}$ . Os resultados das Eqs. (3.11-3.12) nos fornecem os primeiros resultados que conectam a função de Wigner à função de distribuição.

Dada a definição, Eq. (3.10), e ao diferenciá-la em relação ao tempo, temos que

$$\frac{\partial W_{ij}}{\partial t} = \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^3 c_i^* c_j \int d^3s \exp\left( \frac{im\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\hbar} \right) \frac{\partial}{\partial t} [\Psi_i^*(\mathbf{r}_+, t) \Psi_j(\mathbf{r}_-, t)]. \tag{3.13}$$

Juntamente com o uso da Eq. (3.9) ficamos com

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W_{ij}}{\partial t} &= \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^3 c_i^* c_j \int d^3s \exp\left( \frac{im\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\hbar} \right) \left[ \left( \frac{i\hbar}{2m} \right) (\Psi_i^* \nabla_-^2 \Psi_j(\mathbf{r}_-, t) - \Psi_j(\mathbf{r}_-, t) \nabla_+^2 \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, t)) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{i}{\hbar} (V(\mathbf{r}_+) - V(\mathbf{r}_-)) \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, t) \Psi_j(\mathbf{r}_-, t) \right]. \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

A melhor maneira de lidar com a expressão anterior é analisar cada termo separadamente.

Além disso, para desenvolvê-los, é necessário utilizar as seguintes identidades

$$\begin{aligned}
 \nabla_+ &= \nabla + \nabla_s \\
 \nabla_+^2 &= \nabla^2 + \nabla_s^2 + \nabla \cdot \nabla_s \\
 \nabla_- &= \nabla - \nabla_s \\
 \nabla_-^2 &= \nabla^2 - \nabla_s^2 - \nabla \cdot \nabla_s \\
 \nabla_-^2 - \nabla_+^2 &= -2\nabla \cdot \nabla_s,
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

e

$$c_i^* c_j \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, \mathbf{t}) \Psi_j(\mathbf{r}_-, t) = \int d^3 u' \exp\left(\frac{-im\mathbf{u}' \cdot \mathbf{s}}{\hbar}\right) W_{ij}. \tag{3.16}$$

Ao aplicar as identidades anteriores no primeiro termo do lado direito da Eq. (3.14), temos que

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^3 \left(\frac{i\hbar}{2m}\right) c_i^* c_j \int d^3 s \exp\left(\frac{im\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\hbar}\right) \left(\Psi_i^*(\mathbf{r}_+, \mathbf{t}) \nabla_-^2 \Psi_j(\mathbf{r}_-, t) - \Psi_j(\mathbf{r}_-, t) \nabla_+^2 \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, t)\right) = \\
 &-2 \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^3 \left(\frac{i\hbar}{2m}\right) \int d^3 s \exp\left(\frac{im\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\hbar}\right) \int d^3 u' \nabla \cdot \nabla_s \exp\left(\frac{-im\mathbf{u}' \cdot \mathbf{s}}{\hbar}\right) W_{ij} = \\
 &-\int d^3 u' \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}') (\mathbf{u}' \cdot \nabla) W_{ij} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) W_{ij}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

De maneira análoga para o segundo termo, temos que

$$-\left(\frac{i}{\hbar}\right) \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^3 c_i^* c_j \int d^3 s \exp\left(\frac{im\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\hbar}\right) (V(\mathbf{r}_+) - V(\mathbf{r}_-)) \Psi_i^*(\mathbf{r}_+, \mathbf{t}) \Psi_j(\mathbf{r}_-, t) = \int d^3 u' K[V|\mathbf{u} - \mathbf{u}'], \tag{3.18}$$

em que o funcional  $K$  é definido por

$$K[V|\mathbf{u} - \mathbf{u}'] = -\left(\frac{i}{\hbar}\right) \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^3 \int d^3 s \exp\left(\frac{ims \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{\hbar}\right) (V(\mathbf{r}_+) - V(\mathbf{r}_-)) W_{ij}. \tag{3.19}$$

Como estamos interessados num sistema semiclássico, é de interesse tomar limite semiclássico,  $\mathbf{r} \gg \mathbf{s}/2$ , condição satisfeita quando a escala na qual se observa é muito maior que o comprimento de onda da partícula, então ficamos com

$$V(\mathbf{r}_+) - V(\mathbf{r}_-) = \mathbf{s} \cdot \nabla V. \tag{3.20}$$

Sendo assim, a expressão dada pela Eq. (3.18) se resume a

$$\int d^3 u' K[V|\mathbf{u} - \mathbf{u}'] = -\frac{1}{m} \left(\nabla V \cdot \nabla_u\right) W_{ij} = -\frac{1}{m} \nabla V \cdot \nabla_u W_{ij}, \tag{3.21}$$

também usamos  $\mathbf{s} \rightarrow (i\hbar/m)\nabla_u$ .

Ao reunirmos os resultados ficamos com

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) + \frac{\nabla V}{m} \cdot \nabla_u\right) W_{ij} = 0. \tag{3.22}$$

A Eq. (3.22) representa a conservação do elemento da matriz de Wigner. Podemos definir a função de Wigner, como  $W = W(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \sum_i W_{ii}$  como as Eqs. (3.11-3.12) sugerem. Procedido assim, temos que a conservação da função de Wigner é consequência da conservação dos elementos da matriz de Wigner e é dada por

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) + \frac{\nabla V}{m} \cdot \nabla_u \right) W = 0. \quad (3.23)$$

A expressão da Eq. (3.23) é o que precisamos para continuar a discussão da analogia entre a função de Wigner e a função de distribuição, e obtendo o modelo hidrodinâmico. A equação anterior é análoga à equação de Boltzmann não colisional. Além disso, a analogia construída só é válida, pois o tratamento é semiclássico. Do contrário, a positividade da função pseudo-probabilística não é preservada.

### 3.4 Função de distribuição

A função de distribuição,  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ , é a função que informa como uma certa quantidade física se configura num elemento de volume no espaço de fase,  $d^3r d^3u$ . Dada essa função, por definição, temos que a densidade e a velocidade são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) &= \int f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3u \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{u} f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3u. \end{aligned} \quad (3.24)$$

A lei de conservação que governa esta função, incluindo termos de colisões, é dada pela equação de Boltzmann

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla - \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_u \right) f = \left[ \frac{\delta f}{\delta t} \right]_{col}. \quad (3.25)$$

O vetor  $\mathbf{F}$  representa a força resultante. Já o termo do lado direito significa a taxa da mudança na configuração e pode ser descrita por meio de um operador de Boltzmann. Caso este termo fosse nulo, recairíamos na Eq. (3.23).

A dinâmica de um sistema microscópico pode ser obtida pela descrição da evolução da sua configuração, e isso é o que nos fornece a Eq. (3.25). Porém, para resolvê-la, é preciso ou conhecer a função de distribuição das partículas ou, conhecendo as forças, obtê-la. Entretanto, há um outro caminho. Podemos utilizar a equação de transporte, que advém da média sobre as velocidades da equação de Boltzmann, para descrever a dinâmica do sistema. Por meio da equação de transporte, podemos obter uma equação de conservação de massa e outra de transporte para o momentum. A primeira equação é denominada de equação da continuidade e a segunda nos fornecerá uma lei de Newton para fluidos. Para chegarmos lá, seja  $\zeta = \zeta(\mathbf{u})$  uma quantidade física qualquer associada a uma partícula. Para o nosso interesse, é somente necessário descrever quantidades físicas que dependam da velocidade microscópica. Entretanto, é possível generalizar a equação de transporte para uma quantidade física que também dependa tanto da posição quanto do tempo. Sendo assim,

ao multiplicarmos pelo lado direito a Eq. (3.25) por  $\zeta$  e integrarmos sobre as velocidades [103], temos que a lei de conservação para uma quantidade física qualquer é

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\bar{\zeta}) + \nabla \cdot (n\bar{\zeta}\mathbf{u}) - \frac{n}{m}\overline{\mathbf{F} \cdot \nabla_u \zeta} = \left[ \frac{\delta}{\delta t}(n\bar{\zeta}) \right]_{col}. \quad (3.26)$$

A barra representa uma média sobre as velocidades. O termo do lado direito representa a taxa de mudança da quantidade  $\zeta$  por meio de colisões.

Ao tomar  $\zeta = m$ , sendo  $m$  a massa, temos que a Eq. (3.26) nos fornece

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0. \quad (3.27)$$

Utilizamos os resultados  $m\bar{\mathbf{u}} = m\mathbf{v}$  e que  $\nabla_v m = 0$ . Além disso, na ausência de fontes ou sorvedouros de partículas, o termo colisional é nulo. A Eq. (3.27) é a equação da continuidade que utilizaremos.

Já ao tomar  $\zeta = m\mathbf{u}$ , temos que a Eq. (3.26) nos fornece

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\mathbf{v}) + \nabla \cdot (n\bar{\mathbf{u}}\mathbf{u}) - n\overline{\mathbf{F} \cdot \nabla_v \mathbf{v}} = \left[ \frac{\delta}{\delta t}(n\mathbf{v}) \right]_{col}. \quad (3.28)$$

Para desenvolver a expressão anterior, o segundo termo precisa ser analisado separadamente. A velocidade  $\mathbf{u}$  pode ser descrita como uma contribuição de duas partes, a primeira devido à velocidade macroscópica  $\mathbf{v}$  e a segunda devido a uma velocidade aleatória  $\mathbf{c}$ , de tal maneira que  $\bar{\mathbf{c}} = 0$ . Sendo assim,  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{c}$ , e, portanto, o segundo termo torna-se

$$\nabla \cdot (n\bar{\mathbf{u}}\mathbf{u}) = \nabla \cdot [n(\mathbf{v}\mathbf{v} + \mathbf{v}\bar{\mathbf{c}} + \bar{\mathbf{c}}\mathbf{v} + \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{c}})] = \nabla \cdot (n\mathbf{v}\mathbf{v} + n\bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{c}}). \quad (3.29)$$

Ao substituir o resultado anterior na Eq. (3.28), temos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\mathbf{v}) + n(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}[\nabla \cdot (n\mathbf{v})] + \frac{\nabla \cdot P}{m} - n\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{C}. \quad (3.30)$$

Utilizamos a identidade  $\nabla \cdot (n\mathbf{v}\mathbf{v}) = n(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}[\nabla \cdot (n\mathbf{v})]$  e a definição  $\nabla \cdot (n\bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{c}}) = \nabla \cdot P/m$ , sendo  $P$  é o diádico pressão cinética. Já o termo  $\mathbf{C} = [\delta(n\mathbf{v})/\delta t]_{col}$  contém o termo colisional. Após utilizar a equação da continuidade, temos, então, que a equação de transporte para o momentum de um fluido é

$$n \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] = -\frac{\nabla \cdot P}{m} + n\bar{\mathbf{F}} + \mathbf{C}. \quad (3.31)$$

Obtida a Eq. (3.31), faz necessário adaptá-la para os sistemas que serão estudados. O diádico pressão cinética é uma matriz de nove componentes, na qual os termos da diagonal principal nos fornecem as pressões normais às superfícies. Já os demais representam as tensões de cisalhamento, isto é, pressões tangenciais às superfícies. Uma vez que essas tensões não são relevantes ao problema, a aplicação do operador diferenciação no diádico resulta no termo do gradiente da pressão. A força média,  $\bar{\mathbf{F}}$ , contém todas as forças externas por unidade de massa e volume que atuam sobre o sistema. Além disso, é necessário que dada uma direção da força, a mesma não dependa da componente da velocidade nessa direção, ou seja,  $\mathbf{F}_x$  não dependa de  $v_x$ . Dessa maneira, a equação do nosso interesse é dada pela forma

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] = -\frac{\nabla p}{nm} + \mathbf{F} + \frac{\mathbf{C}}{n}. \quad (3.32)$$

Para completude de todos os efeitos considerados, é necessário uma equação de estado para descrever os efeitos térmicos do sistema. A equação de estado adotada será

$$p = n_0 k_B T \left( \frac{n(\mathbf{r}, t)}{n_0} \right)^\gamma, \quad (3.33)$$

sendo aqui  $n_0$  um valor de referência para a densidade,  $k_B$  a constante de Boltzmann,  $T$  a temperatura. O expoente  $\gamma \geq 1$ , denominado de coeficiente politrópico (*polytropic index*), é um valor arbitrário que nos permitirá acessar estados diversos. Por exemplo, para  $\gamma = 1$ , temos um processo isotérmico. Já para  $\gamma = j + 2/j$ , sendo  $j$  é o número de graus de liberdade do sistema, temos uma processo adiabático. Sistemas adiabáticos são de interesse para processos rápidos nos quais os processos de transporte de calor podem ser negligenciados.

Ainda falta discutir um modelo para explicar o termo dissipativo. Para MOTs, há uma carência na descrição de um modelo partindo da função de Wigner. Porém, para plasma de elétrons, as colisões com átomos podem ser descritas por meio da integral de colisões de Boltzmann. Isso será abordado logo adiante.

### 3.5 Modelo de colisões binárias

Quando tratarmos o plasma com elétrons, haverá um termo dissipativo proveniente das colisões com átomos. Sendo assim, o plasma não é completamente ionizado. Então, faz-se necessário descrever um modelo para sua origem. Vale ressaltar que por mais que tenhamos o mesmo termo no sistema de MOTs, a sua origem foge do modelo que abordaremos.

O termo colisional contido na equação de Boltzmann, Eq. (3.25), para colisões binárias do tipo elétron - corpos neutros pode ser dado pela seguinte integral,

$$\left( \frac{\delta f_e}{\delta t} \right)_{col} = \int_b \int_{\vartheta} \int_{u_1} (f'_e f'_{n1} - f_e f_{n1}) |\mathbf{g}| b db d\vartheta d^3 u_1. \quad (3.34)$$

As funções  $f_e$  e  $f_n$  representam a função de distribuição para elétrons e partículas neutras, respectivamente. A linha é introduzida para separar entre a contribuição das partículas que adentram (termos com linha) e das partículas que deixam (termos sem linha) o volume de fase  $d^3 r d^3 u$  por meio das colisões. Dessa maneira,  $f' = f'(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t)$  e  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ . Já  $|\mathbf{g}| = |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}' - \mathbf{u}'_1| = |\mathbf{g}'|$  é o módulo do vetor velocidade relativa, em que  $u$  é a velocidade microscópica dos elétrons e  $u_1$  é a velocidade microscópica dos corpos neutros. Juntamente,  $b$  é um parâmetro de impacto e  $\vartheta$  é o ângulo formado no plano das colisões. A quantidade  $b db d\vartheta$  define o ângulo sólido  $d\Theta$ , isto é,  $b db d\vartheta = d\Theta$ . A Eq. (3.34) é conhecida como a integral de colisões de Boltzmann.

A expressão anterior é válida sob as seguintes considerações: a função de distribuição não varia apreciavelmente sobre a escala na qual ocorrem as interações interatômicas, assim, o elemento de volume deve ser grande comparado com esta distância; a escala de tempo considerada deve ser maior que a ordem do tempo de colisões, ou seja, o pequeno intervalo de tempo considerado deve ser maior que o intervalo entre dois choques consecutivos. Além disso, efeitos devido à presença de forças externas são irrelevantes na ordem de magnitude da seção de choque, sendo assim

$|\mathbf{g}| = |\mathbf{g}'| = \text{constante}$ , e somente colisões binárias são de importância. Por fim, é também preciso que não haja correlação entre as partículas antes de colisão. Essa última condição não é satisfeita para colisões entre partículas carregadas, já que elas interagem a longas distâncias por meio da interação Coulombiana. Nessa situação, o modelo de Fokker-Planck condiz com um modelo mais realista [103].

A massa dos corpos neutros é algumas ordens de grandeza maior que a massa dos elétrons. Logo, é possível assumir, como aproximação, que as partículas neutras são estacionárias e que não são afetadas pelas colisões, ou seja,  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}'_1 = 0$ . Conseqüentemente,  $f_{n1} = f'_{n1}$ . Ao utilizar essa aproximação, a Eq. (3.34) torna-se

$$\left(\frac{\delta f_e}{\delta t}\right)_{col} = n_n \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (f'_e - f_e) |\mathbf{g}| b db d\vartheta, \quad (3.35)$$

em que  $n_n$  é a densidade de partículas neutras.

Em seguida, escrevemos a velocidade em coordenadas esféricas,  $(u, \theta, \phi)$ , e expandimos em termos de harmônicos esféricos. Ao considerarmos que a anisotropia da função de distribuição é pequena, podemos reter somente os dois primeiros termos não nulos da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} f_e(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^m(\cos \theta) [f_{nm}(\mathbf{r}, u, t) \cos(m\phi) + g_{nm}(\mathbf{r}, u, t) \sin(m\phi)] \\ &= f_{00}(\mathbf{r}, u, t) + f_{01}(\mathbf{r}, u, t) \frac{\hat{\mathbf{u}}_z \cdot \mathbf{u}}{u}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

A função  $P_n^m(\cos \theta)$  representa o polinômio de Legendre associado, enquanto que  $f_{nm}$  e  $g_{nm}$  são os coeficientes da expansão. Por definição,  $\theta$  é o ângulo entre o vetor velocidade e a sua componente na direção  $z$ , isto é,  $\cos \theta = \hat{\mathbf{u}}_z \cdot \mathbf{u}/u$ . Ao aplicar a expansão da Eq. (3.36) para  $f'_e$  e  $f_e$  temos que

$$f_e(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = f_{00}(\mathbf{r}, u, t) + f_{01}(\mathbf{r}, u, t) \frac{\hat{\mathbf{u}}_z \cdot \mathbf{u}}{u}. \quad (3.37)$$

e

$$f_e(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) = f_{00}(\mathbf{r}, u', t) + f_{01}(\mathbf{r}, u', t) \frac{\hat{\mathbf{u}}_z \cdot \mathbf{u}'}{u'} = f_{00}(\mathbf{r}, u, t) + f_{01}(\mathbf{r}, u, t) \frac{\hat{\mathbf{u}}_z \cdot \mathbf{u}'}{u}. \quad (3.38)$$

A última igualdade é obtida, uma vez que consideramos que, numa colisão, o efeito resultante será apenas na mudança da direção da velocidade, ou seja,  $u = u'$ , porém  $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}'$ . Sendo assim, sua magnitude permanecerá a mesma. Além disso, sem perda de generalidade, é possível escolher a direção de  $\hat{\mathbf{u}}_z$  como aquela resultante da velocidade relativa  $\mathbf{g}$ . Ao proceder assim, temos que

$$(\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_z = (\mathbf{g}' - \mathbf{g}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_z = u(\cos \theta' - 1), \quad (3.39)$$

em que  $\theta'$  é o ângulo entre os vetores  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{g}'$ .

Por meio das Eqs. (3.36-3.39), a Eq. (3.35) torna-se

$$\left(\frac{\delta f_e}{\delta t}\right)_{col} = -n_n u f_{01} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta') b db d\vartheta = -n_n \sigma u f_{01}, \quad (3.40)$$

em que  $\sigma$  é a seção de choque e é definida por

$$\sigma = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta') b db d\vartheta. \quad (3.41)$$

Da Eq. (3.37), podemos escrever  $f_{01} = f_e - f_{00}$ , o que nos permite obter

$$\left( \frac{\delta f_e}{\delta t} \right)_{col} = -\nu(u)(f_e - f_{00}). \quad (3.42)$$

Na Eq. (3.42), introduzimos a frequência de colisões  $\nu(u) = n_n \sigma u$ . Em posse da Eq. (3.42), considerando que elétrons não possuem velocidade de deriva no equilíbrio, isto é,  $\mathbf{v}_{e0} = 0$ , e ao considerarmos que a frequência de colisões como independente da velocidade, temos que o termo colisional da Eq. (3.30), expresso por  $\mathbf{C}$  é dado por

$$\mathbf{C} = \left[ \frac{\delta}{\delta t} (n\mathbf{v}) \right]_{col} = \int_u \mathbf{u} \left( \frac{\delta f_e}{\delta t} \right)_{col} d^3u = -n\nu\mathbf{v}. \quad (3.43)$$

Temos, assim, a origem do termo dissipativo proveniente das colisões com corpos neutros.

### 3.6 Variáveis Lagrangianas

A descrição da dinâmica de um fluido pode ser realizada por meio de duas abordagens. A mais comum é a denominada Euleriana (referencial do laboratório). Nessa abordagem, cada ponto observado é fixo e analisamos como cada elemento de fluido e suas respectivas quantidades termodinâmicas, tais como densidade, velocidade, temperatura, comportam-se ao passar por aquele ponto. As equações de fluido para conservação de massa e momentum obtidas na seção anterior estão escritas pela ótica Euleriana. A outra, a qual usaremos aqui, é chamada de abordagem Lagrangiana (referencial do fluido). Nesta abordagem, identificamos o elemento de fluido e acompanhamos a sua trajetória, analisando como variam as suas propriedades. Como veremos no decorrer deste trabalho, a utilização da abordagem Lagrangiana facilitará o tratamento dos problemas estudados [1, 2, 9, 13, 108]. Ela é uma ferramenta útil, pois nos permitirá partir de equações diferenciais parciais e transformá-las em equações diferenciais ordinárias. Dessa forma, considerando um situação unidimensional, teremos dois referenciais, um fixo, no referencial Euleriano  $\{x(t), t\}$ , e outro móvel, no referencial Lagrangiano  $\{\xi, \tau\}$ . Então, iremos correlacioná-los por meio de uma transformação entre as coordenadas, tendo em mente que a velocidade do elemento do fluido pode tanto variar com o tempo quanto com a posição. Dessa maneira, queremos mudar de referencial de tal forma que a derivada convectiva se transforme em uma derivada total. Feito isso, obtemos a trajetória e a velocidade em termos das variáveis Lagrangianas e, adotada uma hipótese para a forma da velocidade, podemos tomar a transformação inversa e obter as soluções em termos das coordenadas físicas do referencial do laboratório. Na sequência, tentaremos construir a transformação de forma heurística.

Por simplicidade, comecemos com uma discussão num referencial unidimensional na direção  $\hat{e}_x$ . Tomemos um referencial  $S_x$  com dois pontos materiais, um em repouso na posição  $x$  e o outro se afastando em relação ao primeiro com velocidade constante  $v$ . Podemos mudar para um novo referencial  $S_\xi$ , que acompanha o segundo ponto material fazendo uma transformação da forma  $\xi = x - vt$ . Essa transformação é conhecida como transformação de Galileu. No próximo passo, podemos incluir que a velocidade com a qual o segundo ponto material se desloca varia no tempo. Consequentemente, a transformação toma a forma  $\xi = x - \int_0^\tau v(\tau') d\tau'$ , em que  $\tau \equiv t$ .

Assim, garantimos que o referencial continue acompanhando o segundo ponto. Porém, em um modelo de fluidos, não temos apenas duas partículas, temos um grande número de constituintes que são descritos por uma velocidade média que varia tanto no tempo quanto no espaço, ou seja,  $v = v(x, t)$  - tanto o fluido quanto o seu centro de massa se move com essa velocidade -. Sendo assim, podemos nos perguntar o que acontece se acompanharmos o centro de massa por meio da seguinte transformação

$$\xi = x - \int_0^\tau v(\xi, \tau') d\tau', \quad \tau = t. \quad (3.44)$$

Sendo assim, temos, de modo geral, que as novas variáveis podem ser escritas como  $\xi = \xi(t, x)$  e  $\tau = \tau(t, x)$ , de tal forma que  $\xi$  e  $\tau$  sejam independentes e  $x(\xi, 0) = \xi$ , ou seja, no momento inicial, os referenciais se coincidem.

Segue da Eq. (3.44) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} = \left(1 + \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \xi} v(\xi, \tau') d\tau'\right) \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} &= \left(1 + \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \xi} v(\xi, \tau') d\tau'\right) \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.45)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Concluimos, pela Eq. (3.46), que, ao tomarmos a transformação dada pela Eq. (3.44), a derivada convectiva se tornou uma derivada total no referencial do centro de massa, assim como desejávamos.

Por generalidade, podemos definir a transformação da seguinte maneira

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \int_0^\tau \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, \tau') d\tau', \quad \tau = t, \quad (3.47)$$

em que  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x(t), y(t), z(t))$  e  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\xi, \zeta, \eta)$ . Além disso, temos que as componentes se relacionam por

$$\begin{aligned} \xi &= x - \int_0^\tau v_{\hat{e}_x}(\xi, \zeta, \eta, \tau') d\tau', \\ \zeta &= y - \int_0^\tau v_{\hat{e}_y}(\xi, \zeta, \eta, \tau') d\tau', \\ \eta &= z - \int_0^\tau v_{\hat{e}_z}(\xi, \zeta, \eta, \tau') d\tau', \end{aligned} \quad (3.48)$$

sendo  $v_{\hat{e}_x} = \partial x / \partial t$ ,  $v_{\hat{e}_y} = \partial y / \partial t$  e  $v_{\hat{e}_z} = \partial z / \partial t$ . Consequentemente, as derivadas parciais são

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \left(1 + \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \xi} v_{\hat{e}_x}(\xi, \zeta, \eta, \tau')\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \xi} v_{\hat{e}_y}(\xi, \zeta, \eta, \tau')\right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \xi} v_{\hat{e}_z}(\xi, \zeta, \eta, \tau')\right) \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \left(\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \zeta} v_{\hat{e}_x}(\xi, \zeta, \eta, \tau')\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(1 + \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \zeta} v_{\hat{e}_y}(\xi, \zeta, \eta, \tau')\right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \zeta} v_{\hat{e}_z}(\xi, \zeta, \eta, \tau')\right) \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \left(\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \eta} v_{\hat{e}_x}(\xi, \zeta, \eta, \tau')\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \eta} v_{\hat{e}_y}(\xi, \zeta, \eta, \tau')\right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(1 + \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \eta} v_{\hat{e}_z}(\xi, \zeta, \eta, \tau')\right) \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.49)$$



Como veremos no desenvolvimento, na maioria dos casos, utilizar somente as variáveis Lagrangianas não é suficiente para obter as soluções desejadas. Sendo assim, ainda será necessário tomar uma hipótese para a forma da velocidade. Por simplicidade, tomaremos velocidades lineares na posição, o que acaba restringindo nossos resultados para fluídos laminares. Dessa forma, encerramos a nossa discussão do modelo que utilizaremos e do primeiro método que aplicaremos. Em seguida, iremos apresentar o método variacional dependente do tempo que também nos permitirá estudar a dinâmica dos sistemas propostos.

## 4 Método variacional dependente do tempo

Neste capítulo, iremos discutir o método variacional dependente do tempo. Para sua melhor compreensão, na primeira seção, iremos discutir a sua importância e relevância. Feito isso, iremos partir de uma densidade Lagrangiana e provar que ela gera o sistema de equações do modelo hidrodinâmico e a equação de Poisson, as quais descrevem completamente os sistemas que estudaremos. Além disso, deduziremos a respectiva Lagrangiana do sistema para um *Ansatz* Gaussiano. Por fim, faremos o mesmo processo para um plasma de uma única componente confinado numa armadilha dependente do tempo.

### 4.1 O método

O formalismo Lagrangiano permite escrever as equações de movimento da maioria dos sistemas físicos, inclusive sistemas com amortecimento [109, 110], a partir de uma única função escalar em termos de coordenadas independentes e arbitrárias. Isso nos permite estudar sistemas dinâmicos sem a necessidade de utilizar vetores e coordenadas cartesianas. Podemos fazer uso de qualquer coordenada generalizada ou campo de interesse para descrever um sistema, como, por exemplo, velocidade, momento, ângulo, momento linear, densidade, comprimento. [111, 112].

O método consiste na minimização da ação,  $S = \int L dt$ , em que  $L$  é a Lagrangiana do sistema. Nos casos não-dissipativos e para forças derivadas por um potencial escalar, a Lagrangiana consiste na diferença entre a energia cinética e potencial. Além disso, a Lagrangiana de um sistema contínuo deve ser expressa em termos de uma densidade Lagrangiana,  $L = \int \mathcal{L} d^3r$ . Diferentemente dos sistemas discretos, para descrever um sistema contínuo, uma vez que possuem infinitos graus de liberdade, é necessário expressar a densidade Lagrangiana,  $\mathcal{L}$ , em termos de campos. No que se segue, os campos de interesse serão: a densidade, o potencial de velocidades e um potencial que satisfaz a equação de Poisson. Dado um campo  $\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ , logo,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\Lambda, \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \nabla \Lambda, \mathbf{r}, t\right)$ .

Após o processo de minimização, obtemos que a equação de Euler-Lagrange para um sistema contínuo é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Lambda / \partial t)} \right) - \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \Lambda)} \right) = 0. \quad (4.1)$$

Para reduzir o problema de um conjunto de equações diferenciais parciais a um par de equações diferenciais, adotaremos, como de costume, um *Ansatz* na forma Gaussiana. Argumentamos que seu uso é adequado, uma vez que reflete o confinamento e torna o sistema analiticamente tratável [18, 113]. Em uma das densidades Lagrangianas que apresentaremos, haverá a presença de um termo referente à força dissipativa. O uso do formalismo Lagrangiano para sistemas dissipativos não é novidade para sistemas discretos, mas menos frequente em sistemas contínuos. A seguir, veremos como as densidades Lagrangianas adotadas geram as equações que são relevantes para o nosso estudo.

## 4.2 Densidade Lagrangiana para MOTs assimétricos

Reunindo as equações que são importantes para a descrição dos sistemas que iremos estudar, temos

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{mn}\nabla p - \frac{1}{m}\nabla V_h + \frac{1}{m}\nabla V_c - \nu\mathbf{v}, \quad (4.3)$$

$$\nabla^2 V_c = Qn, \quad (4.4)$$

$$\frac{V_h}{m} = \frac{\omega_x^2 x^2}{2} + \frac{\omega_y^2 y^2}{2} + \frac{\omega_z^2 z^2}{2}, \quad (4.5)$$

$$p = n_0 k_B T \left( \frac{n}{n_0} \right)^\gamma. \quad (4.6)$$

Sendo elas: a equação da continuidade, a equação do transporte do momento, que inclui as forças expansivas devido aos efeitos térmicos  $\sim \nabla p$  e à interação coletiva autoconsistente  $\sim \nabla V_c$ , junto com as forças confinadoras  $\sim \nabla V_h$ , a qual tomaremos totalmente assimétricas, com o objetivo de generalidade, e a força dissipativa  $\sim \nu \mathbf{v}$ . Por fim, temos a equação da Poisson e uma expressão para a equação adiabática de estado politrópica de índice  $\gamma$ .

A densidade Lagrangiana que gera as Eqs. (4.2-4.4) é

$$\mathcal{L} = e^{\nu t} \left\{ mn \left[ \frac{1}{2} |\nabla \theta|^2 + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nu \theta \right] + n(V_h - V_c) - \frac{(\nabla V_c)^2}{2Q} + \gamma k_B T \int dn \int \frac{n^{\gamma-2}}{n_0^{\gamma-1}} dn \right\}, \quad (4.7)$$

em que  $\mathbf{v} = \nabla \theta$  para um fluido irrotacional. Na Eq. (4.7), temos que os campos independentes são  $\theta$ ,  $n$  e  $V_c$ . Para demonstrar que essa densidade Lagrangiana gera as equações desejadas, vamos aplicar a equação de Euler-Lagrange para cada campo independente.

Ao aplicar a Eq.(4.1) para o campo  $\theta$ , temos que

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\nabla \theta) = \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0. \quad (4.8)$$

Já para o campo  $n$ , recaímos em

$$\left[ \frac{1}{2} |\nabla \theta|^2 + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nu \theta \right] + \frac{1}{m}(V_h - V_c) + \frac{\gamma k_B T}{(\gamma - 1)m} \left( \frac{n}{n_0} \right)^{\gamma-1} = 0, \quad (4.9)$$

em seguida tomamos o gradiente da expressão acima e obtemos,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\gamma k_B T}{m} \left( \frac{n}{n_0} \right)^{\gamma-2} \nabla \left( \frac{n}{n_0} \right) - \frac{1}{m}\nabla V_h + \frac{1}{m}\nabla V_c - \nu\mathbf{v}. \quad (4.10)$$

Aqui foi necessário utilizar a identidade  $\frac{\nabla}{2} |\nabla \theta|^2 = (\nabla \theta \cdot \nabla)\nabla \theta$ .

Finalmente, ao aplicarmos para o campo  $V_c$ , temos

$$\nabla^2 V_c = Qn. \quad (4.11)$$

Como já dito, o *Ansatz* adotado terá a forma Gaussiana, logo, utilizaremos

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) &= \frac{C}{\alpha_x \alpha_y \alpha_z} \exp\left(\frac{(x - d_x(t))^2}{2\alpha_x^2(t)} + \frac{(y - d_y(t))^2}{2\alpha_y^2(t)} + \frac{(z - d_z(t))^2}{2\alpha_z^2(t)}\right) \\ &= \frac{C}{\alpha_x \alpha_y \alpha_z} e^{-\frac{\rho^2}{2}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

com  $C = N/(2\pi)^{\frac{3}{2}}$ , em que  $N$  é o número de átomos e

$$\rho(x, y, z) = \sqrt{\frac{(x - d_x(t))^2}{\alpha_x^2(t)} + \frac{(y - d_y(t))^2}{\alpha_y^2(t)} + \frac{(z - d_z(t))^2}{\alpha_z^2(t)}}. \quad (4.13)$$

As coordenadas generalizadas são  $d_i(t)$  e  $\alpha_i(t)$  com  $i = x, y, z$ , respectivamente, as quais descrevem o movimento do centro de massa e a evolução do comprimento característico da nuvem atômica. Dessa maneira, tomaremos  $n_0 = N/\prod_i \alpha_{0i}$ , em que  $\alpha_{0i} = \alpha_i(0)$ .

Para o potencial coletivo, podemos admitir a seguinte solução aproximada [113], a qual é exata para uma simetria esférica ( $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z$ ),

$$V_c = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{QC}{(\prod_j \alpha_j)^{\frac{1}{3}}} \frac{Erf\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)}{\rho}, \quad (4.14)$$

em que  $Erf(s) = (2/\pi) \int_0^s e^{-s'^2} ds'$  é a função erro de um argumento genérico  $s$ . Segue que sua derivada em relação à posição é

$$\frac{\partial V_c}{\partial r_i} = -\frac{QC(r_i - d_i)}{\alpha_i^2(\prod_j \alpha_j)^{\frac{1}{3}}} \left[ \frac{e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\rho^2} - \frac{\sqrt{\pi} Erf\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}\rho^3} \right], \quad (4.15)$$

em que  $r_i = (x, y, z)$ .

Ao substituir o *Ansatz* para densidade na equação da continuidade, temos que a velocidade é dada por

$$\mathbf{v} = \left[ \frac{\dot{\alpha}_x}{\alpha_x}(x - d_x) + \dot{d}_x \right] \hat{\mathbf{e}}_x + \left[ \frac{\dot{\alpha}_y}{\alpha_y}(y - d_y) + \dot{d}_y \right] \hat{\mathbf{e}}_y + \left[ \frac{\dot{\alpha}_z}{\alpha_z}(z - d_z) + \dot{d}_z \right] \hat{\mathbf{e}}_z \quad (4.16)$$

ou, em termos de componentes,

$$v_i = \frac{\dot{\alpha}_i}{\alpha_i}(r_i - d_i) + \dot{d}_i. \quad (4.17)$$

Por consequência, o potencial de velocidades é dado por

$$\theta = \sum_i \left( \frac{\dot{\alpha}_i}{2\alpha_i}(r_i - d_i)^2 + \dot{d}_i(r_i - d_i) \right), \quad (4.18)$$

com derivada temporal,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \sum_i \left[ \left( \frac{\ddot{\alpha}_i}{2\alpha_i} - \frac{\dot{\alpha}_i^2}{2\alpha_i^2} \right) (r_i - d_i)^2 - \frac{\dot{\alpha}_i \dot{d}_i}{\alpha_i} (r_i - d_i) + \ddot{d}_i (r_i - d_i) - \dot{d}_i^2 \right] \quad (4.19)$$

e derivada em relação à posição,

$$\frac{\partial \theta}{\partial r_i} = \sum_i \frac{\dot{\alpha}_i}{\alpha_i} (r_i - d_i) + \dot{d}_i. \quad (4.20)$$

Agora, vamos calcular cada termo da densidade Lagrangiana:

$$\frac{mn}{2} |\nabla \theta|^2 = \frac{mC e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{2 \prod_j \alpha_j} \sum_i \left( \frac{\dot{\alpha}_i}{\alpha_i} (r_i - d_i) + \dot{d}_i \right)^2, \quad (4.21)$$

$$mn \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{mC e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\prod_j \alpha_j} \sum_i \left[ \left( \frac{\ddot{\alpha}_i}{2\alpha_i} - \frac{\dot{\alpha}_i^2}{2\alpha_i^2} \right) (r_i - d_i)^2 - \frac{\dot{\alpha}_i \dot{d}_i}{\alpha_i} (r_i - d_i) + \ddot{d}_i (r_i - d_i) - \dot{d}_i^2 \right], \quad (4.22)$$

$$mn\nu\theta = \frac{m\nu C e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\prod_j \alpha_j} \sum_i \left( \frac{\dot{\alpha}_i}{2\alpha_i} (r_i - d_i)^2 + \dot{d}_i (r_i - d_i) \right), \quad (4.23)$$

$$nV_h = \frac{C e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\prod_j \alpha_j} \sum_i \frac{m\omega_i^2 r_i^2}{2}, \quad (4.24)$$

$$-\frac{|\nabla V_c|^2}{2Q} - nV_c = \frac{|\nabla V_c|^2}{2Q} - \frac{\nabla \cdot (V_c \nabla V_c)}{Q}; \quad (4.25)$$

e

$$\int dn \int \frac{dp}{n} = \frac{k_B T}{(\gamma - 1)m} \left( \frac{n^\gamma}{n_0^{\gamma-1}} \right) = \frac{k_B T}{(\gamma - 1)n_0^{\gamma-1}} \frac{C^\gamma}{(\prod_j \alpha_j)^\gamma} e^{-\frac{\gamma \rho^2}{2}}. \quad (4.26)$$

Em posse dos termos da densidade Lagrangiana, agora vamos calcular cada termo da Lagrangiana,

$$\begin{aligned} \int \frac{mn}{2} |\nabla \theta|^2 d^3 r &= \int \frac{mC e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{2 \prod_j \alpha_j} \sum_i \left( \frac{\dot{\alpha}_i}{\alpha_i} (r_i - d_i) + \dot{d}_i \right)^2 d^3 r \\ &= \sum_i \frac{mN}{2} (\dot{\alpha}_i^2 + \dot{d}_i^2), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \int mn \frac{\partial \theta}{\partial t} d^3 r &= \int \frac{mC e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\prod_j \alpha_j} \sum_i \left[ \left( \frac{\ddot{\alpha}_i}{2\alpha_i} - \frac{\dot{\alpha}_i^2}{2\alpha_i^2} \right) (r_i - d_i)^2 - \frac{\dot{\alpha}_i \dot{d}_i}{\alpha_i} (r_i - d_i) + \ddot{d}_i (r_i - d_i) - \dot{d}_i^2 \right] d^3 r \\ &= \sum_i \frac{mN}{2} (\alpha_i \ddot{\alpha}_i - \dot{\alpha}_i^2 - 2\dot{d}_i^2) = \sum_i \frac{mN}{2} \left( \frac{d}{dt} (\alpha_i \dot{\alpha}_i) - 2\dot{\alpha}_i^2 - 2\dot{d}_i^2 \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \int mn\nu\theta d^3 r &= \int \frac{m\nu C e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\prod_j \alpha_j} \sum_i \left( \frac{\dot{\alpha}_i}{2\alpha_i} (r_i - d_i)^2 + \dot{d}_i (r_i - d_i) \right) d^3 r \\ &= \sum_i \frac{m\nu N}{2} \alpha_i \dot{\alpha}_i, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\int nV_h d^3 r = \int \frac{mC e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\prod_j \alpha_j} \sum_i \frac{\omega_i^2 r_i^2}{2} d^3 r = \sum_i \frac{mN}{2} \omega_i^2 (d_i^2 + \alpha_i^2), \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
\frac{|\nabla V_c|^2}{2Q} - \frac{\nabla \cdot (V_h \nabla V_h)}{Q} &= \int \sum_i \frac{QC^2(r_i - d_i)^2}{2\alpha_i^4(\prod_j \alpha_j)^{\frac{2}{3}}} \left[ \frac{e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\rho^2} - \frac{\sqrt{\pi} \text{Erf} \left( \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{2}\rho^3} \right]^2 d^3r \\
&= 2\pi QC^2 \sum_i \left( \frac{(\prod_j \alpha_j)^{\frac{1}{3}}}{\alpha_i^2} \right) \int d\rho \left( e^{-\rho^2} - \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\rho} \text{Erf} \left( \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\pi \text{Erf}^2 \left( \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)}{2\rho^2} \right) \\
&= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}} N^2 Q \sum_i \frac{(\prod_j \alpha_j)^{\frac{1}{3}}}{\alpha_i^2} = \frac{N^2 Q}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \sum_i \frac{(\prod_j \alpha_j)^{\frac{1}{3}}}{\alpha_i^2}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int \frac{k_B T n^\gamma}{(\gamma - 1) n_0^{\gamma-1}} d^3r &= \frac{k_B T}{(\gamma - 1) n_0^{\gamma-1}} \frac{C^\gamma}{(\prod_j \alpha_j)^\gamma} \int e^{-\frac{\gamma \rho^2}{2}} d^3r \\
&= \frac{k_B T N^\gamma}{(2\pi)^{\frac{3}{2}(\gamma-1)} \gamma^{\frac{3}{2}} (\gamma - 1) [n_0 \prod_j \alpha_j]^{\gamma-1}}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Com os resultados das Eqs. (4.27)-(4.32), temos que a lagrangiana é

$$\begin{aligned}
L[d_i, \dot{d}_i, \alpha_i, \dot{\alpha}_i] &= -\frac{1}{mN} \int \mathcal{L} d^3r \\
&= \sum_i \frac{e^{\nu t}}{2} \left( (\dot{d}_i^2 + \dot{\alpha}_i^2) - \nu \alpha_i \dot{\alpha}_i - \omega_i^2 (\alpha_i^2 + d_i^2) - \frac{NQ}{4m\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{(\prod_j \alpha_j)^{\frac{1}{3}}}{\alpha_i^2} - \frac{2k_B T N^\gamma}{(2\pi)^{\frac{3}{2}(\gamma-1)} \gamma^{\frac{3}{2}} (\gamma - 1) [n_0 \prod_j \alpha_j]^{\gamma-1}} \right) \\
&= e^{\nu t} \left[ \sum_i \frac{1}{2} \left( (\dot{d}_i^2 + \dot{\alpha}_i^2) - \nu \alpha_i \dot{\alpha}_i \right) - U(d_i, \alpha_i) \right],
\end{aligned} \tag{4.33}$$

em que

$$U_d = \sum_i \frac{\omega_i^2}{2} d_i^2 \tag{4.34}$$

$$U_\alpha = \sum_i \left( \frac{\omega_i^2}{2} \alpha_i^2 + \frac{NQ}{8m\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{(\prod_j \alpha_j)^{\frac{1}{3}}}{\alpha_i^2} \right) + \frac{k_B T N^\gamma}{(2\pi)^{\frac{3}{2}(\gamma-1)} \gamma^{\frac{3}{2}} (\gamma - 1) [n_0 \prod_j \alpha_j]^{\gamma-1}}. \tag{4.35}$$

### 4.3 Densidade Lagrangiana para um plasma de antiprótons confinado numa armadilha dependente do tempo

Iremos, também, explorar o método variacional aplicado a um plasma de antiprótons confinado por uma armadilha dependente do tempo e sujeito a uma equação de estado adiabática. As equações que são relevantes para o seu estudo são,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(nv) = 0, \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{mn} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial z} V_h + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{e\sigma_\perp n}{\epsilon_0} \tag{4.38}$$

em que  $\sigma_{\perp}$  é a densidade superficial de carga, com

$$\frac{V_h}{m} = \frac{\omega^2(t)z^2}{2} \quad (4.39)$$

e

$$p = n_0 k_B T \left( \frac{n}{n_0} \right)^3. \quad (4.40)$$

A origem do termo do confinamento, Eq. (4.39), é devida a uma armadilha externa e será melhor discutida no capítulo 6.

A densidade Lagrangiana que gera as Eqs. (4.36)-(4.38) é dada por

$$\mathcal{L} = mn \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] + n(V_h - e\phi) - \frac{\epsilon_0}{2\sigma_{\perp}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + 3k_B T \int dn \int \frac{n}{n_0^2}, \quad (4.41)$$

em que  $v = \partial \theta / \partial z$ . Na Eq. (4.41), temos que os campos independentes são  $\theta$ ,  $n$  e  $\phi$ .

Assim como no caso anterior, podemos provar a afirmação acima. Ao aplicar as equações de Euler-Lagrange para o campo  $\theta$ , temos que

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( n \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (nv) = 0, \quad (4.42)$$

a qual é a equação da continuidade.

Aplicando para o campo  $n$ , temos

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] + \frac{1}{m} (V_h - e\phi) + \frac{3k_B T}{2m} \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 = 0. \quad (4.43)$$

Ao tomarmos o gradiente da expressão acima, recaímos na equação de transporte do momentum

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{3k_B T}{m} \left( \frac{n}{n_0} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{n}{n_0} \right) - \frac{1}{m} \frac{\partial V_h}{\partial z} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (4.44)$$

Por fim, ao aplicar para o campo  $\phi$ , temos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{e\sigma_{\perp} n}{\epsilon_0}. \quad (4.45)$$

Adotaremos o *Ansatz* Gaussiano da forma

$$\begin{aligned} n(z, t) &= \frac{C}{\alpha_z} \exp \left( -\frac{(z - d(t))^2}{2\alpha_z^2(t)} \right) \\ &= \frac{C}{\alpha_z} \exp \left( -\frac{\rho^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.46)$$

em que

$$\rho = \frac{\sqrt{(z - d(t))^2}}{\alpha_z(t)}. \quad (4.47)$$

As variáveis  $d(t)$  e  $\alpha_z(t)$ , respectivamente, descrevem o movimento do centro de massa e a evolução do comprimento característico da nuvem eletrônica. Dessa maneira, tomaremos  $n_0 = N/(\sqrt{2\pi}\alpha_{z0}A_{\perp}\sigma_{\perp})$ , em que  $\alpha_{z0} = \alpha_z(0)$  e  $A_{\perp}$  é a área de secção transversal do plasma.

Do número de partículas, temos

$$\begin{aligned}
 N &= A_{\perp} \sigma_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} n(z, 0) dz \\
 &= A_{\perp} \sigma_{\perp} C \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2\alpha_z^2}\right) dz \\
 &= \sqrt{2\pi} A_{\perp} \sigma_{\perp} C,
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

então

$$C = \frac{N}{\sqrt{2\pi} A_{\perp} \sigma_{\perp}}. \tag{4.49}$$

Portanto,

$$n(z, t) = \frac{N}{\sqrt{2\pi} A_{\perp} \sigma_{\perp} \alpha_z} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right). \tag{4.50}$$

Por integração direta da Eq. (4.38),

$$\phi = \frac{Ne}{2A_{\perp}\epsilon_0} \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha_z e^{-\frac{\rho^2}{2}} + (z-d) \operatorname{Erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \right] + \text{const}, \tag{4.51}$$

com derivada em relação à posição

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{Ne}{2A_{\perp}\epsilon_0} \operatorname{Erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right), \quad E = -\frac{Ne}{2A_{\perp}\sigma_{\perp}\epsilon_0} \operatorname{Erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right). \tag{4.52}$$

Ao substituir o *Ansatz* para densidade na equação da continuidade, temos que a velocidade é dada por

$$v = \frac{\dot{\alpha}_z}{\alpha_z} (z-d) + \dot{d}. \tag{4.53}$$

Por consequência, o potencial de velocidades é dado por

$$\theta = \frac{\dot{\alpha}_z}{2\alpha_z} (z-d)^2 + \dot{d}(z-d), \tag{4.54}$$

com derivada temporal,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \left( \frac{\ddot{\alpha}_z}{2\alpha_z} - \frac{\dot{\alpha}_z^2}{2\alpha_z^2} \right) (z-d)^2 - \frac{\dot{\alpha}_z \dot{d}}{\alpha_z} (z-d) + \ddot{d}(z-d) - \dot{d}^2, \tag{4.55}$$

e derivada em relação à posição

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\dot{\alpha}_z}{\alpha_z} (z-d) + \dot{d}. \tag{4.56}$$

Agora, vamos calcular cada termo da densidade Lagrangiana:

$$\frac{mn}{2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 = \frac{mC e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{2\alpha_z} \left( \frac{\dot{\alpha}_z}{\alpha_z} (z-d) + \dot{d} \right)^2, \tag{4.57}$$

$$mn \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{mC e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\alpha_z} \left[ \left( \frac{\ddot{\alpha}_z}{2\alpha_z} - \frac{\dot{\alpha}_z^2}{2\alpha_z^2} \right) (z-d)^2 - \frac{\dot{\alpha}_z \dot{d}}{\alpha_z} (z-d) + \ddot{d}(z-d) - \dot{d}^2 \right], \tag{4.58}$$

$$nV_h = \frac{C e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\alpha_z} \frac{m\omega_z^2 z^2}{2}, \tag{4.59}$$



$$-en\phi - \frac{\epsilon_0}{2\sigma_\perp} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 = \frac{\epsilon_0}{\sigma_\perp} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right], \quad (4.60)$$

e

$$\int dn \int \frac{dp}{n} = \frac{k_B T n^3}{2n_0^2} = \frac{k_B T C^3}{2n_0^2 \alpha_z^3} e^{-\frac{3\rho^2}{2}}. \quad (4.61)$$

Em posse dos termos da densidade Lagrangiana, agora vamos calcular cada termo da Lagrangiana,

$$\begin{aligned} \int \frac{mn}{2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 dz &= \int \frac{mC e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{2\alpha_z} \left( \dot{\alpha}_z (z-d) + \dot{d} \right)^2 dz \\ &= \frac{mN}{2A_\perp \sigma_\perp} (\dot{\alpha}_z^2 + \dot{d}^2), \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \int mn \frac{\partial\theta}{\partial t} dz &= \int \frac{mC e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\alpha_z} \left[ \left( \frac{\ddot{\alpha}_z}{2\alpha_z} - \frac{\dot{\alpha}_z^2}{2\alpha_z^2} \right) (z-d)^2 - \frac{\dot{\alpha}_z \dot{d}}{\alpha_z} (z-d) + \ddot{d} (z-d) - \dot{d}^2 \right] dz \\ &= \frac{mN}{2A_\perp \sigma_\perp} (\alpha_z \ddot{\alpha}_z - \dot{\alpha}_z^2 - 2\dot{d}^2) = \frac{mN}{2A_\perp \sigma_\perp} \left( \frac{d}{dt} (\alpha_z \dot{\alpha}_z) - 2\dot{\alpha}_z^2 - 2\dot{d}^2 \right), \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\int nV_h dz = \int \frac{mC e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\alpha_z} \frac{\omega(t)^2 z^2}{2} dz = \frac{mN}{2A_\perp \sigma_\perp} \omega(t)^2 (d^2 + \alpha_z^2), \quad (4.64)$$

$$\int \frac{k_B T C^3}{2n_0^2 \alpha_z^3} e^{-\frac{3\rho^2}{2}} dz = \frac{k_B T N^3}{4\sqrt{3}\pi n_0^2 A_\perp^3 \sigma_\perp^3} \frac{1}{\alpha_z^2}, \quad (4.65)$$

$$\frac{\epsilon_0}{\sigma_\perp} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right] = \frac{\epsilon_0}{2\sigma_\perp} \int \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 dz = -\frac{N^2 e^2}{2\sqrt{\pi}\epsilon_0 A_\perp^2 \sigma_\perp} \alpha_z. \quad (4.66)$$

Com os resultados das Eqs. (4.62)-(4.66), temos que a Lagrangiana é

$$\begin{aligned} L[d, \dot{d}, \alpha_z, \dot{\alpha}_z] &= -\frac{A_\perp \sigma_\perp}{mN} \int \mathcal{L} d^3 r \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\dot{\alpha}_z^2 + \dot{d}^2) - \omega(t)^2 (d^2 + \alpha_z^2) - \frac{k_B T N^2}{2\sqrt{3}\pi m n_0^2 A_\perp^2 \sigma_\perp^2} \frac{1}{\alpha_z^2} + \frac{N e^2}{\sqrt{\pi}\epsilon_0 m A_\perp} \alpha_z \right] \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\alpha}_z^2 + \dot{d}^2) - U(\alpha_z) - U(d) \end{aligned} \quad (4.67)$$

em que

$$U_d = \frac{\omega^2(t)}{2} d^2 \quad (4.68)$$

e

$$U_\alpha = \frac{\omega^2(t)}{2} \alpha_z^2 + \frac{k_B T N^2}{4\sqrt{3}\pi m n_0^2 A_\perp^2 \sigma_\perp^2} \frac{1}{\alpha_z^2} - \frac{N e^2}{2\sqrt{\pi}\epsilon_0 m A_\perp} \alpha_z. \quad (4.69)$$

No próximo capítulo, começaremos a aplicar o que apresentamos até aqui.

## 5 Dinâmica em MOTs

Neste capítulo, iremos acessar a dinâmica de um gás de átomos alcalinos confinados por uma armadilha magneto-óptica. Para isto, vamos utilizar o modelo hidrodinâmico juntamente com as variáveis Lagrangianas e o método variacional dependente do tempo. Nesse processo, partiremos de um sistema de equações diferenciais parciais acopladas, sendo elas: uma equação da continuidade, uma equação de transporte para o momentum e uma lei de Gauss. Nessas duas últimas, há termos de forças que são intrínsecas ao sistema estudado, a saber: a força da armadilha magneto-óptica e a força coletiva. Os resultados apresentados e discutidos na primeira seção foram expostos no artigo [114].

### 5.1 Dinâmica em MOTs com simetria radial

Para uma geometria tridimensional com simetria radial, a dinâmica de um gás de átomos aprisionados por meio de uma armadilha magneto-óptica pode ser descrita pelo seguinte conjunto de equações hidrodinâmicas

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 n v) = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{mn} \frac{\partial p}{\partial r} - \omega_r^2 r - \nu v + \frac{F_c}{m}, \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_c) = Q n. \quad (5.3)$$

As Eqs. (5.1-5.3) são, respectivamente, as equações da continuidade, do transporte de momentum e a lei Gauss. Por definição, o sistema é composto por átomos frios de massa atômica  $m$ , com densidade dada por  $n(r, t)$ . Além disso, o fluido tem velocidade radial  $v(r, t)$  e pressão  $p(r, t)$ . Nesse contexto, o confinamento é consequência do efeito Zeeman, o qual pode ser descrito por uma força harmônica com frequência angular  $\omega_r$ . Também, há uma força dissipativa que advém do resfriamento Doppler, com coeficiente de amortecimento  $\nu$ . Nesse modelo,

$$\nu = -\frac{8\hbar\Gamma_e s_{inc} k_L^2 \delta}{m\Gamma_e(1 + 4\delta^2/\Gamma_e^2)}, \quad \omega_r = \left(\frac{\mu_B B_0 \nu}{k_L \hbar}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.4)$$

A constante  $k_L$  é a amplitude do vetor de onda,  $\hbar$  é a constante reduzida de Planck,  $\delta$  é a frequência de transição entre dois níveis de energia e  $\Gamma_e$  é a taxa de decaimento espontâneo. Juntamente,  $\mu = \mu_B |\nabla B|/\hbar$ , em que  $\mu_B$  é o magneton de Bohr e  $|\nabla B|$  é a intensidade do gradiente do campo magnético, assumida como simétrica em todas as direções. Em MOTs, é utilizado o *red detuning* ( $\delta < 0$ ), consequentemente  $\nu > 0$ . Essa descrição é válida na condição em que o parâmetro de saturação,  $s_{inc} = 2\Omega_R^2/\Gamma_e^2$ , seja  $s_{inc} \ll 1$ . Por completude,  $F_c$  é uma força radial coletiva, em que a constante  $Q = (\sigma_R - \sigma_L)\sigma_L I_0/c$  é o quadrado da carga efetiva do sistema, sendo  $c$  a velocidade da luz e  $I_0$  é a intensidade total dos seis lasers que incidem sobre a amostra. Já  $\sigma_R$  e  $\sigma_L$  são as seções de choque de emissão e absorção, respectivamente. Em experimentos típicos  $Q > 0$ . Assumiremos,

por completez, uma equação de estado politrópica dada por  $p = n_0 k_B T (n/n_0)^\gamma$ , em que  $\gamma$  é um índice politrópico, com densidade de referência  $n_0$ . O produto  $k_B T$  é a energia térmica, sendo  $k_B$  a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura.

Com o objetivo de derivar soluções com amplitude arbitrária, utilizaremos as variáveis Lagrangianas

$$\xi = r - \int_0^\tau v(\xi, \tau') d\tau', \quad \tau = t, \quad (5.5)$$

juntamente com suas respectivas derivadas,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \left( 1 + \int_0^\tau \frac{\partial v(\xi, \tau')}{\partial \xi} d\tau' \right) \frac{\partial}{\partial r}. \quad (5.6)$$

Ao aplicarmos as Eqs. (5.5-5.6) na a equação da continuidade, Eq. (5.1), temos que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \left( 1 + \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \xi} v(\xi, \tau') d\tau' \right) \left( \xi + \int_0^\tau v(\xi, \tau') d\tau' \right)^2 n \right] = 0, \quad (5.7)$$

consequentemente a solução é dada por

$$n(\xi, \tau) = \frac{n(\xi, 0) \xi^2}{\left( 1 + \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \xi} v(\xi, \tau') d\tau' \right) \left( \xi + \int_0^\tau v(\xi, \tau') d\tau' \right)^2}, \quad (5.8)$$

em que  $n(\xi, 0)$  é a densidade atômica em  $\tau = 0$ .

A lei de Gauss, Eq. (5.3), para o novo sistema de coordenadas é, então,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( \xi + \int_0^\tau v(\xi, \tau') d\tau' \right)^2 F_c \right] = Q n(\xi, 0) \xi^2. \quad (5.9)$$

Após resolver a Eq. (5.9) para  $F_c$ , a única equação que resta a ser transformada é a equação do transporte para o momentum, Eq. (5.2), a qual torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} = & - \frac{\gamma k_B T}{m} \left( 1 + \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \xi} v(\xi, \tau') d\tau' \right)^{-1} \left( \frac{n}{n_0} \right)^{\gamma-2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{n}{n_0} \right) - \omega_r^2 \left( \xi + \int_0^\tau v(\xi, \tau') d\tau' \right) - \nu v \\ & + \frac{\omega_p^2 \int_0^\xi n(\xi', 0) \xi'^2 d\xi'}{n_0 \left( \xi + \int_0^\tau v(\xi, \tau') d\tau' \right)^2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

A constante  $\omega_p = (n_0 Q/m)^{1/2}$  é definida como a frequência de plasma para átomos dada uma densidade de referência.

Há manifestação de dois termos de repulsão na Eq. (5.10). O termo  $\sim k_B T$  é devido à pressão, enquanto o segundo termo  $\sim \omega_p^2/n_0$  é consequência da força coletiva. Esses efeitos repulsivos são contrabalanceados pelo termo  $\sim \omega_r^2$  do lado direito da Eq. (5.10). Esse termo é responsável pelo confinamento.

A Eq. (5.10) pode ser simplificada se supusermos um campo de velocidades linear

$$v = \dot{\rho} \xi, \quad (5.11)$$

em que  $\rho = \rho(\tau)$ , nesse momento, é uma função adimensional arbitrária e, sem perda de generalidade, tomamos  $\rho(0) = 1$ . O ponto denota a derivada com respeito a  $\tau$ . Para evitar singularidades, é necessário também impor que  $\rho(\tau) > 0$ . Essa escolha leva a  $\xi = r/\rho(\tau)$ . Na sequência, da Eq. (5.9), temos que

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi^2 F_c) = \frac{Qn(\xi, 0)\xi^2}{\rho^2}, \quad (5.12)$$

com solução

$$F_c = \frac{Q}{\rho^2 \xi^2} \int_0^\xi n(\xi', 0) \xi'^2 d\xi' + F_0(0, \tau), \quad (5.13)$$

em que  $F_0(0, \tau)$  é uma força externa qualquer que tomaremos como nula no que se segue.

Ao inserir a Eq. (5.11) na Eq. (5.8), temos que

$$n = \frac{n(\xi, 0)}{\rho(\tau)^3}. \quad (5.14)$$

É também útil ter uma expressão para o número total  $N$  de átomos confinados. Dessa maneira, utilizaremos

$$N = 4\pi \int_0^\infty n(\xi, 0) \xi^2 d\xi. \quad (5.15)$$

Após substituir a velocidade da Eq. (5.11) e a densidade da Eq. (5.14) na Eq. (5.10), o resultado é

$$(\ddot{\rho} + \nu\dot{\rho} + \omega_r^2 \rho) \rho^{3\gamma-2} \xi = -\frac{\gamma k_B T}{m} \left( \frac{n(\xi, 0)}{n_0} \right)^{\gamma-2} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{n(\xi, 0)}{n_0} \right) + \frac{\omega_p^2 \rho^{3\gamma-4}}{n_0} \frac{\int_0^\xi n(\xi', 0) \xi'^2 d\xi'}{\xi^2}. \quad (5.16)$$

O lado esquerdo da Eq. (5.16), sendo linear em  $\xi$ , deve ser equiparado com o lado direito. Ao analisarmos somente estes termos e derivá-los duas vezes com respeito à  $\xi$  e uma vez com respeito à  $\tau$ , é obtido

$$\omega_p^2 \frac{d}{d\tau} (\rho^{3\gamma-4}) \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\int_0^\xi n(\xi', 0) \xi'^2 d\xi'}{\xi^3} \right) = 0. \quad (5.17)$$

Pela Eq. (5.17) podemos ver que quando a força coletiva não pode ser negligenciada, esta expressão leva a uma condição restritiva, a saber: ou  $\gamma = 4/3$  (para  $\rho$  não constante), ou o termo no segundo parênteses da Eq. (5.17) deve ser uma constante, o que implica em  $n(\xi, 0)$  ser constante. Dessa forma, nos restringiremos a situações mais interessantes, nas quais  $\rho(\tau)$  e  $n(\xi, 0)$  não são constantes. Portanto, há somente três possibilidades: (a) o caso TL, no qual o termo  $\sim \omega_p^2$  pode ser negligenciado em comparação com o termo da pressão. Sendo assim, o lado esquerdo da Eq. (5.16) deverá ser balanceado pelo primeiro termo do lado direito. Nessa situação, a Eq. (5.17) é irrelevante; (b) o caso MS, no qual o termo de pressão pode ser desconsiderado. Dessa maneira, o lado esquerdo da Eq. (5.16) deverá ser balanceada pelo termo  $\sim \omega_p^2$ ; (c) se  $\gamma = 4/3$ , todo o lado direito da Eq. (5.16) torna-se em uma função somente de  $\xi$ . Já nessa situação, ambas as contribuições podem ser mantidas. As três possibilidades serão analisadas separadamente.

## 5.2 Regime TL

Ao desconsiderar a força coletiva, temos que tanto o lado esquerdo quanto o lado direito da Eq. (5.16) devem ser proporcionais à  $\xi$ , ou seja,

$$(\ddot{\rho} + \nu\dot{\rho} + \omega_r^2\rho)\rho^{3\gamma-2} = -\frac{\gamma k_B T}{m\xi} \left( \frac{n(\xi, 0)}{n_0} \right)^{\gamma-2} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{n(\xi, 0)}{n_0} \right) = \omega_{TL}^2. \quad (5.18)$$

Dessa maneira, temos que

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} + \nu\frac{d\rho}{d\tau} + \omega_r^2\rho = \frac{\omega_{TL}^2}{\rho^{3\gamma-2}}, \quad (5.19)$$

em que  $\omega_{TL}^2 > 0$  é uma constante tomada como positiva para evitar  $\rho = 0$  em um tempo finito.

Por inspeção, é possível identificar a solução geral para o equilíbrio  $\rho = \rho_{eq}$  ( $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ ) dada por

$$\rho_{eq} = \left( \frac{\omega_{TL}^2}{\omega_r^2} \right)^{\frac{1}{3\gamma-1}}. \quad (5.20)$$

A parte espacial da Eq. (5.18) leva a duas situações distintas a depender do valor de  $\gamma$ .

### 5.2.1 $\gamma > 1$

Quando  $\gamma > 1$ , temos que  $\omega_{TL}^2 = 2\gamma k_B T / [m(\gamma - 1)\xi_0^2]$ . Portanto, pela Eq. (5.18) concluímos que

$$n(\xi, 0) = n_0 \left( 1 - \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \xi \leq \xi_0, \quad (5.21)$$

sendo  $\xi_0$  um comprimento de referência. Para  $\xi \geq \xi_0$ , impomos  $n(\xi, 0) = 0$ . Discutiremos apenas o que ocorre internamente na nuvem atômica. Dessa forma, nossa discussão fica limitada para o intervalo para  $\xi \leq \xi_0$ . Além disso, assumimos que  $n(0, 0) = n_0$ , assim definimos  $n_0$ . Das Eqs. (5.15) e (5.21), temos que

$$N = n_0 (\sqrt{\pi} \xi_0)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{5\gamma-3}{2(\gamma-1)}\right)}, \quad (5.22)$$

em que  $\Gamma$  é a função Gamma. A Eq. (5.22) pode ser utilizada como uma ferramenta para determinar o comprimento de corte  $\xi_0$ , pois dado o número total de partículas, a densidade em  $\xi = 0$  e o índice politrópico, é possível determiná-lo.

Para ilustrar, tomemos  $\gamma = 5/3$ , o qual corresponde ao usual coeficiente adiabático tridimensional. Nesse caso, a Eq. (5.19) leva a

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} + \nu\frac{d\rho}{d\tau} + \omega_r^2\rho = \frac{\omega_{TL}^2}{\rho^3}. \quad (5.23)$$

A equação antecedente é conhecida como uma equação de Pinney [85] com um termo de amortecimento, e  $\omega_{TL}^2 = 5k_B T / m\xi_0^2$ . Pela Eq. (26) da Ref. [86], ver também Apêndice A, a solução aproximada da equação acima é dada por

$$\rho^2 = \rho_{eq}^2 + 2A^2 e^{-\nu\tau} + 2A e^{-\nu\tau/2} \left( \rho_{eq}^2 + A^2 e^{-\nu\tau} \right)^{1/2} \cos(2\omega_r(\tau - \tau_0)). \quad (5.24)$$

As constantes  $A$  e  $\tau_0$  são constantes de integração. Como detalhado em [86], a condição de baixo amortecimento ( $\nu \ll \omega_r$ ) deve ser satisfeita para a validade da Eq. (5.24). No caso não amortecido ( $\nu = 0$ ), a Eq. (5.24) mostra soluções oscilatórias exatas no intervalo  $I = \{\rho > 0 \mid \sqrt{\rho_{eq}^2 + A^2} - |A| \leq \rho \leq \sqrt{\rho_{eq}^2 + A^2} + |A|\}$ , com o parâmetro  $|A|$  sendo a amplitude inicial. Aliás, já que  $\nu/\omega \ll 1$ , durante um período de oscilação  $\tau = \pi/\omega_r$ , a quantidade  $|A| \exp(-\nu\tau/2)$  não muda muito e atua como uma amplitude que atenua com o tempo. Além disso, pela Eq. (5.20) temos que  $\rho_{eq} = (5k_B T/m\omega_r^2 \xi_0^2)^{1/4}$ .

Ainda pela Eq. (5.24), temos que  $\rho(0) = 1$ , o que implica em

$$\tau_0 = \frac{1}{2\omega_r} \arccos\left(\frac{1 - \rho_{eq}^2 - 2A^2}{2A(\rho_{eq}^2 + A^2)^{1/2}}\right). \quad (5.25)$$

A expressão acima só faz sentido se  $A^2 \geq (1 - \rho_{eq}^2)^2/4$ , do contrário  $\cos^2(2\omega_r\tau_0) > 1$ . Esta condição é equivalente a  $\rho = 1 \in I$ . Além disso, ao observar a Eq. (5.25), o parâmetro  $A$  está relacionado com  $\dot{\rho}(0)$ , porém de tal maneira que iremos omiti-la.

Para valores típicos [31, 49], tomemos  $|\Delta| = 2.5\Gamma$  para  $\Gamma = 2\pi \times 6 \text{ MHz}$ ,  $k_L \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$ ,  $s_{inc} = 0.1$ ,  $m = 1.41 \times 10^{-25} \text{ kg}$  (rubídio),  $|\nabla B| = 25 \text{ G/cm}$ ,  $k_B T = 5.4 \times 10^{-27} \text{ J}$ ,  $\xi_0 = 0.28 \text{ mm}$ ,  $\omega_r = 697 \text{ rad/s}$ ,  $\nu = 231 \text{ s}^{-1}$ , junto com  $\omega_{TL} = 1560 \text{ s}^{-1}$  e  $\rho_{eq} = 1.5$ , temos as oscilações amortecidas mostradas na Fig. 4. A simulação numérica da Eq. (5.23) e a solução aproximada Eq. (5.24) levam a curvas praticamente idênticas.

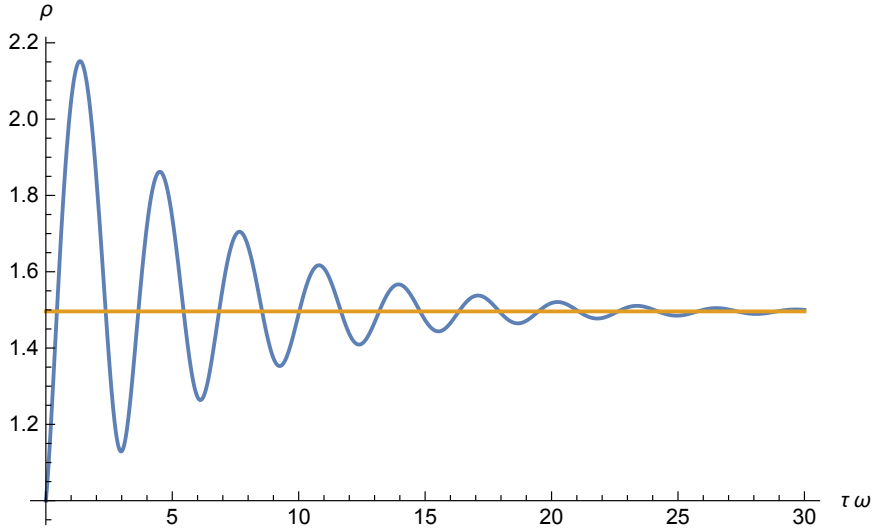


Figura 4 – Função auxiliar  $\rho$  em função do tempo. Curva azul: solução analítica da Eq. (5.24) com  $A = 0.7$  e  $\omega\tau_0 = 2.85$ . Curva laranja indica  $\rho_{eq} = 1.5$ . Parâmetros indicados no texto. Condições iniciais:  $\rho(0) = 1$  e  $\dot{\rho}(0) = 0$ .

O valor da temperatura que usamos é a menor temperatura obtida para os valores experimentais que utilizamos. O menor valor atingido,  $T_{lim}$ , pela teoria Doppler aqui discutida, é dado por  $k_B T_{lim} = \hbar\Gamma(\delta^2 + \Gamma^2/4)/(2|\delta|\Gamma)$ , então para os parâmetros utilizados ela corresponde à  $k_B T_{lim} = 5.4 \times 10^{-27} \text{ J}$ . Entretanto, essa não é a menor temperatura alcançada em laboratório,

pois quando isso ocorre são chamadas de *sub-Doppler temperature*. Para explicar temperaturas tão baixas, é necessário recorrer a teoria do resfriamento Sisyphus.

A densidade, nesse caso, torna-se

$$n(\xi, 0) = n_0 \left( 1 - \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \xi \leq \xi_0. \quad (5.26)$$

Pela Eq. (5.22), temos que o número de átomos confinados é dado por

$$N = 4\pi \int_0^{\xi_0} n(\xi, 0) \xi^2 d\xi = 1.23 n_0 \xi_0^3. \quad (5.27)$$

Para os parâmetros da Fig. 4 e  $n_0 = 10^{15} m^{-3}$ , obtemos  $N = 2.7 \times 10^4$  átomos, esse valor está em acordo com as ordem de grandeza em experimentos reportados na Ref. [31].

A existência de equilíbrio estável é devido ao sinal do termo que é inversamente proporcional ao cubo de  $\rho$ . Esse equilíbrio vem da concavidade da densidade dada por Eq. (5.26). Alternativamente, podemos escrever a parte conservativa da Eq. (5.23) em termos do potencial  $V = V(\rho)$ , ou seja,

$$\ddot{\rho} + \nu \dot{\rho} = -(1/m) dV/d\rho, \quad V = \frac{m\omega_r^2 \rho^2}{2} + \frac{5k_B T}{2\xi_0^2} \frac{1}{\rho^2}. \quad (5.28)$$

O termo repulsivo  $\sim 1/\rho^2$  previne o colapso na origem.

Em posse da relação entre as variáveis e ao substituir as Eqs. (5.21) e (5.24) na Eq. (5.14), temos que a densidade de átomos no referencial do laboratório é dada por

$$n(r, t) = n_0 \frac{\left\{ 1 - r^2 / \left[ \xi_0^2 \left( \rho_{eq}^2 + 2A^2 e^{-\nu t} + 2A e^{-\nu t/2} \left( \rho_{eq}^2 + A^2 e^{-\nu t} \right)^{1/2} \cos(2\omega(t - \tau_0)) \right) \right] \right\}^{\frac{3}{2}}}{\left( \rho_{eq}^2 + 2A^2 e^{-\nu t} + 2A e^{-\nu t/2} \left( \rho_{eq}^2 + A^2 e^{-\nu t} \right)^{1/2} \cos(2\omega(t - \tau_0)) \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.29)$$

como mostrada pela Fig. 5.

Nesta subseção, a força coletiva foi negligenciada em comparação com os efeitos térmicos. Entretanto, para obtermos uma estimativa, a força coletiva pode ser encontrada pela Eq. (5.13), calculada em termos de funções hipergeométricas para a densidade dada pela Eq. (5.21) e um coeficiente politrópico qualquer. Para  $\gamma = 5/3$ , temos, então, que

$$F_c = \frac{Qn_0\xi_0}{48\rho^2} \left( \frac{\xi_0}{\xi} \right) \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ -8 \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^4 + 14 \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 - 3 \right] + 3 \frac{\arcsin(\xi/\xi_0)}{\xi/\xi_0} \right\}, \quad \xi \leq \xi_0, \quad (5.30)$$

como mostrada pela Fig. 6.

Obter uma expressão para a força coletiva é de interesse, pois será utilizada para obtermos uma estimativa para as condições de validade dos resultados que obtemos.

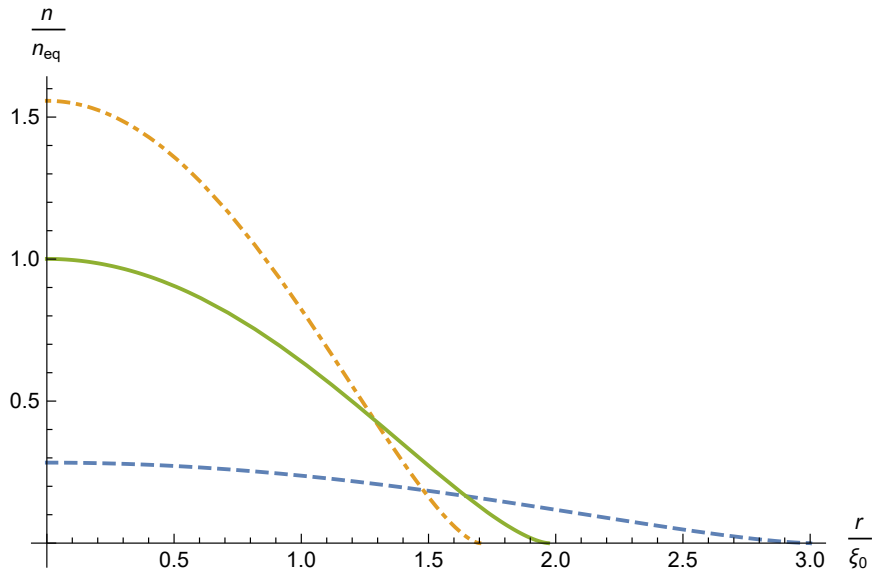


Figura 5 – Oscilações da densidade de átomos da Eq. (5.29), no referencial do laboratório, normalizada em relação ao valor assintótico  $n_{eq} = n_0/\rho_{eq}^3$ . Curva tracejada, azul:  $\omega\tau = 4.5$ ; curva com traço e ponto, laranja:  $\omega\tau = 15.5$ ; curva completa, verde:  $\omega\tau = 30.5$ .

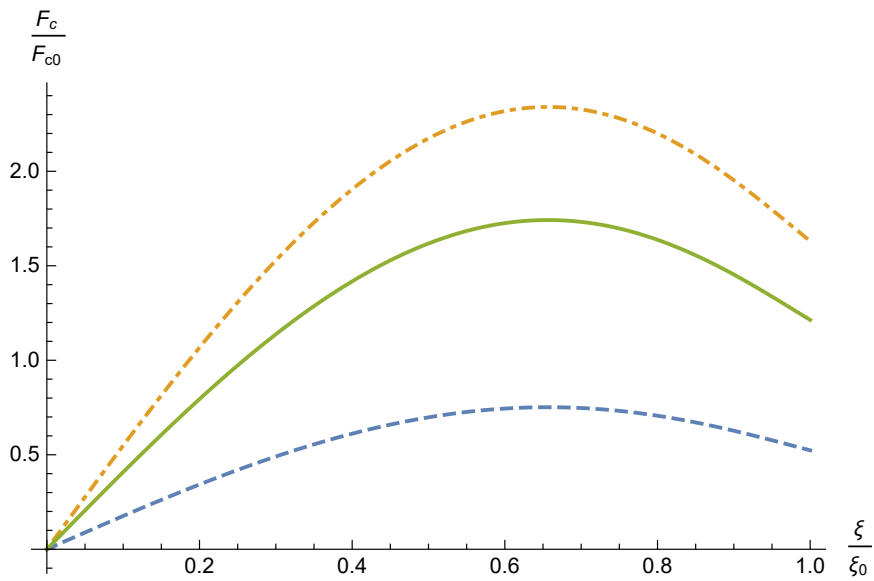


Figura 6 – Oscilações da força coletiva, dentro da nuvem atômica, dada pela Eq. (5.30). Curva normalizada em relação à  $F_{c0} = Qn_0\xi_0/48$ . Curva tracejada, azul:  $\omega\tau = 4.5$ ; Curva com traço e ponto, laranja:  $\omega\tau = 15.5$ ; curva completa, verde:  $\omega\tau = 30.5$ .

## 5.2.2 Caso isotérmico $\gamma = 1$

Para  $\gamma = 1$ , definimos  $\omega_{TL}^2 = 2k_B T/(m\xi_0^2)$ . Dessa maneira, a Eq. (5.19) torna-se

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} + \nu\frac{d\rho}{d\tau} + \omega_r^2\rho = \frac{\omega_{TL}^2}{\rho}. \quad (5.31)$$



A Eq. (5.31) descreve um oscilador anarmônico dissipativo com uma força inversamente linear. Pelo lado direito da Eq. (5.18), para  $\gamma = 1$ , temos que a densidade é

$$n(\xi, 0) = n_0 \exp\left(-\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2\right), \quad (5.32)$$

a qual não possui um comprimento de corte.

É possível escrever, também, a parte conservativa da Eq. (5.31) em termos do potencial  $V = V(\rho)$ , ou seja,

$$\ddot{\rho} + \nu\dot{\rho} = -(1/m)dV/d\rho, \quad V = \frac{m\omega_r^2\rho^2}{2} - \frac{2k_B T}{m\xi_0^2} \ln \rho. \quad (5.33)$$

Termo de repulsão mostrada na Eq. (5.33) previne  $\rho = 0$  em um tempo finito, como ilustrado na Fig. 7. O equilíbrio é dado por  $\rho_{eq} = [2k_B T / (m\omega_r^2 \xi_0^2)]^{1/2}$ .

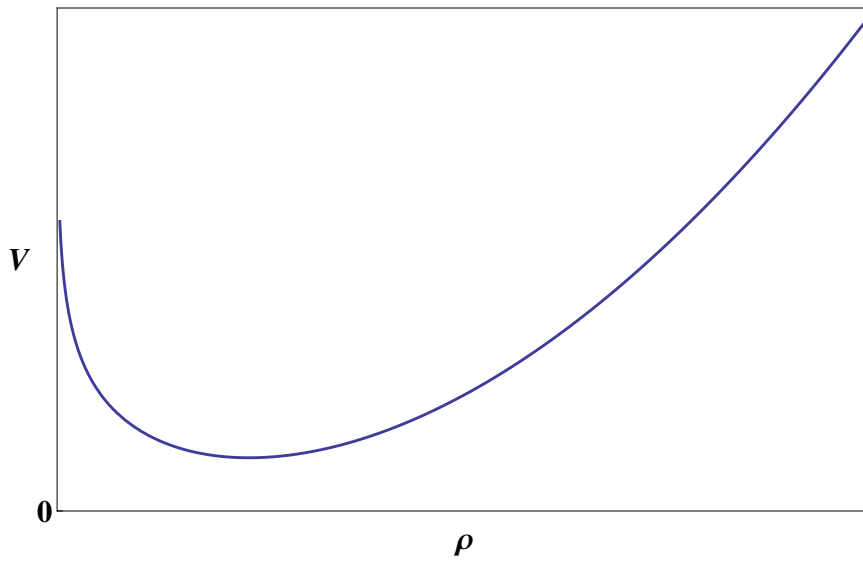


Figura 7 – Forma genérica do potencial da Eq (5.33) (unidades arbitrárias).

A força coletiva é obtida pelas Eqs. (5.12) e (5.32), e dada por

$$F_c = \frac{Qn_0\xi_0}{4\rho^2} \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^2 \left[ \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) - 2\frac{\xi}{\xi_0} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\xi_0^2}\right) \right]. \quad (5.34)$$

Na Fig. 8, plotamos o seu comportamento, em que  $\operatorname{Erf}(s) = (2/\pi^{1/2}) \int_0^s \exp(-s'^2) ds'$  denota a função erro para um argumento genérico  $s$ . Ao substituir a Eq. (5.32) na Eq. (5.15), temos que o número de átomos confinado é  $N = n_0(\sqrt{\pi}\xi_0)^3$ .

### 5.3 Regime MS

Quando os efeitos de espalhamento dominam sobre os efeitos de pressão, podemos desprezar o termo proporcional à  $k_B T$  na Eq. (5.16), e ficamos com

$$\left(\ddot{\rho} + \nu\dot{\rho} + \omega_r^2\rho\right)\rho^2 = \frac{\omega_p^2 \int_0^\xi \xi'^2 n(\xi', 0) d\xi'}{n_0 \xi^3}. \quad (5.35)$$

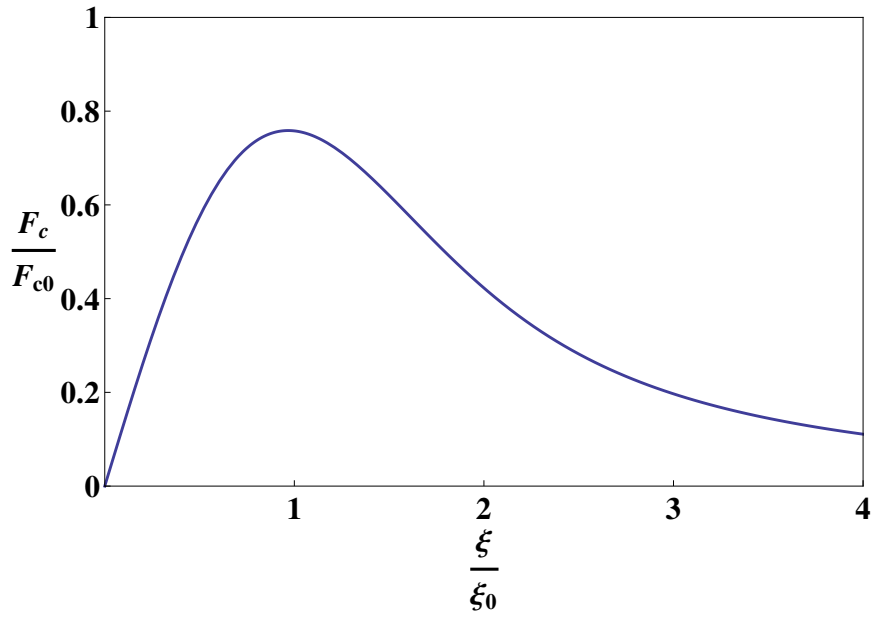


Figura 8 – Força coletiva, Eq. (5.34), para um tempo fixo. Curva normalizada em relação à  $F_{c0} = Qn_0\xi_0/(4\rho^2)$ .

Ao focarmos numa região dentro da nuvem atômica ( $\xi < \xi_0$ ), a única maneira de satisfazer a Eq. (5.35) é ter uma distribuição uniforme  $n = n_0$  para  $\xi < \xi_0$ , em que  $\xi_0 > 0$  é um comprimento de corte, do contrário  $n = 0$ . Sendo assim, a Eq. (5.35) nos fornece

$$\ddot{\rho} + \nu\dot{\rho} + \omega_r^2\rho = \frac{\omega_{MS}^2}{\rho^2}. \quad (5.36)$$

A Eq. (5.36) descreve um oscilador não linear, em que  $\omega_{MS} = \omega_p/\sqrt{3}$ . Esse valor é idêntico à frequência de oscilações de Mie. Entretanto, nesse caso, associada à contribuição não-linear que advém dos efeitos coletivos. Por inspeção, é possível identificar que a solução de equilíbrio é dada por

$$\rho_{eq} = \left( \frac{\omega_{MS}^2}{\omega_r^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.37)$$

Como já feito para as outras situações, podemos escrever a parte conservativa da Eq. (5.36) em termos do potencial  $V = V(\rho)$ , então

$$\ddot{\rho} + \nu\dot{\rho} = -(1/m)dV/d\rho, \quad V = \frac{m\omega_r^2\rho^2}{2} + \frac{m\omega_{MS}^2}{\rho}. \quad (5.38)$$

Assim como no regime TL, as oscilações amortecidas de  $\rho$  nunca produzem uma singularidade ( $\rho = 0$ ) em um tempo finito, graças ao termo da repulsão presente em  $V$ . O caso não amortecido ( $\nu = 0$ ) pode ser resolvido por quadratura em termos de funções elípticas.

Em experimentos com rubídio num regime de alta densidade [22, 33, 52],  $n_0 = 10^{16} m^{-3}$ , a frequência de plasma é tipicamente  $\omega_p \approx 200 rad/s$ . Por exemplo, se  $\omega_r = 697 rad/s$  e  $\nu = 231 s^{-1}$ , então  $\rho_{eq} = 0.01$ . Além disso, para  $\xi_0 = 1.8 mm$ , o número de átomos confinados é  $N = (4\pi/3)n_0\xi_0^3 = 2.3 \times 10^8$ , de acordo com a ordem de grandeza em experimentos realizados na Ref. [33].

Dentro da amostra ( $r < \rho\xi_0$ ), a densidade e a força coletiva são dadas respectivamente por

$$n = \frac{n_0}{\rho^3}, \quad F_c = \frac{Qn_0r}{3\rho^3}. \quad (5.39)$$

Assintoticamente, de acordo com a literatura [29, 30, 33, 52],  $\rho \rightarrow \rho_{eq}$ , logo  $n \rightarrow n_{MS} \equiv 3n_0\omega_r^2/\omega_p^2 = 3kc/[(\sigma_R - \sigma_L)I_0\sigma_L]$ . Como esperado, para um confinamento forte ( $\sim \omega_r^2$ ) e baixo espalhamento ( $\sim \omega_p^2$ ), temos uma densidade maior.

## 5.4 Regime misto TL + MS ( $\gamma = 4/3$ )

A condição restritiva dada pela Eq. (5.17) é também satisfeita para  $\gamma = 4/3$ . Sendo assim, temos um caso no qual ambos os efeitos, térmicos e coletivos, são mantidos. Esse valor para o coeficiente politrópico é um caso intermediário entre o caso isotérmico ( $\gamma = 1$ ) e adiabático ( $\gamma = 5/3$ ). A Eq. (5.16) separa-se entre

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} + \nu\frac{d\rho}{d\tau} + \omega_r^2\rho = \frac{\Omega^2}{\rho^2} \quad (5.40)$$

e

$$-\frac{4k_B T}{m\xi} \frac{d}{d\xi} \left[ \left( \frac{n(\xi, 0)}{n_0} \right)^{1/3} \right] + \frac{\omega_p^2}{n_0\xi^3} \int_0^\xi n(\xi', 0)\xi'^2 d\xi' = \Omega^2, \quad (5.41)$$

em que  $\Omega^2 > 0$  é uma constante tomada como positiva para evitar  $\rho = 0$  em um tempo finito.

A parte temporal da dinâmica pode também ser escrita como

$$\ddot{\rho} + \nu\dot{\rho} = -(1/m)dV/d\rho, \quad V = \frac{m\omega_r^2\rho^2}{2} + \frac{m\omega_r^2}{\rho}, \quad (5.42)$$

consequentemente, a solução de equilíbrio é dada por  $\rho_{eq} = (\Omega/\omega_r)^{2/3}$ .

A parte espacial descrita pela Eq. (5.41) pode ser reescrita como

$$\frac{4}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{d\bar{n}}{dR} \right) = \bar{n}^3 - 3\frac{\Omega^2}{\omega_p^2}, \quad (5.43)$$

em que  $\bar{n} = (n(\xi, 0)/n_0)^{1/3}$  e  $R = \xi/\lambda$  com  $\lambda = [k_B T/(m\omega_p^2)]^{1/2}$  sendo comprimento de Debye. A condição inicial da definição de  $\bar{n}$  e da Eq. (5.41) deve ser  $\bar{n}(0) = 1, \bar{n}'(0) = 0$ , aqui a linha denota a derivada em relação à  $R$ . De fato, ao expandir na vizinhança da origem, a Eq. (5.41) fornece

$$4 \frac{d\bar{n}}{dR} = \left( \bar{n}^3 - \frac{\Omega^2}{\omega_p^2} \right) R + \mathcal{O}(R^2), \quad (5.44)$$

então  $\bar{n}'(0) = 0$ . Se o termo não linear  $\sim \bar{n}^3$  puder ser desconsiderado, a Eq. (5.43) torna-se a equação de Lane-Emden de índice zero [115], a qual pode ser resolvida exatamente. Contudo, ao manter todos os termos da Eq. (5.43), é necessário resolvê-la numericamente.

O parâmetro  $\Omega^2$  está relacionado com as características do confinamento. É numericamente verificado que, para  $\Omega^2 > \omega_p^2/3$ , obtemos somente soluções localizadas de  $\bar{n}(R)$  para a Eq. (5.43), com comprimento de corte  $R_0 > 0$  tal que  $\bar{n}(R_0) = 0$ . Para  $\Omega^2 < \omega_p^2/3$ , a solução não é ilimitada.

Finalmente, se  $\Omega = \omega_p/\sqrt{3}$  (a frequência de oscilação de Mie), a condição inicial é ponto fixo e linearmente instável. A razão para o confinamento ocorrer na condição de  $\Omega$  ser maior que a frequência de Mie pode ser entendida, uma vez que a Eq. (5.43) corresponde à condição inicial de um máximo ( $\bar{n}''(0) < 0$  com  $\bar{n}(0) = 1, \bar{n}'(0) = 0$ ) para a densidade de átomos. A partir de agora, assumiremos  $\Omega > \omega_p/\sqrt{3}$ .

Após utilizar a Eq. (5.15), temos que o número de átomos confinados é

$$N = 4\pi n_0 \lambda^3 \int_0^{R_0} \bar{n}^3(R) R^2 dR. \quad (5.45)$$

Para um valor prescrito de  $\Omega/\omega_p$ , podemos encontrar o corte  $R_0$  da Eq. (5.43) junto com  $\bar{n}(0) = 1, \bar{n}'(0) = 0$ . Sendo assim, a Eq. (5.45) fornece o número de átomos. Reciprocamente, o caminho inverso fornece  $\Omega/\omega_p$  como função de  $N$ , o qual é o método para a determinação da quantidade  $\Omega$ , uma vez conhecido os demais parâmetros (frequência de plasmas e comprimento de Debye).

A Fig. 9 representa a simulação dos resultados da Eq. (5.43) para dois valores diferentes de  $\eta = \Omega^2/\omega_p^2$ . Como esperado, um maior  $\eta$  corresponde a um menor  $R_0$ . Para  $\eta = 1$ , temos que pela Eq. (5.45) que  $R_0 = 3.09$  e  $N = 5.16g$ , em que  $g = 4\pi n_0 \lambda^3/3$  é número de partículas contidas na esfera de Debye. Já para  $\eta = 2$  temos que  $R_0 = 0.49$  e  $N = 1.47g$ . Para valores típicos,  $k_B T = 4.2 \times 10^{-27} J$ ,  $n_0 = 10^{16} m^{-3}$ ,  $m = 1.41 \times 10^{-25} kg^{-3}$  e  $Q \sim 10^{-36} Nm^2$  [22, 33], temos, então,  $N = 1.8 \times 10^7$  (para  $\eta = 1$ ) e  $N = 5.1 \times 10^6$  (para  $\eta = 2$ ) átomos confinados. O funcional geral da dependência do corte  $R_0$  em termos de  $\eta$  é mostrado na Fig. 10. Como antecipado, o confinamento ocorre para  $\eta > 1/3$ . Na Fig. 11, após integração numérica da Eq. (5.43) e utilizar a Eq. (5.45), temos o número de átomos contidos numa esfera de Debye em função do parâmetro  $\eta$ .

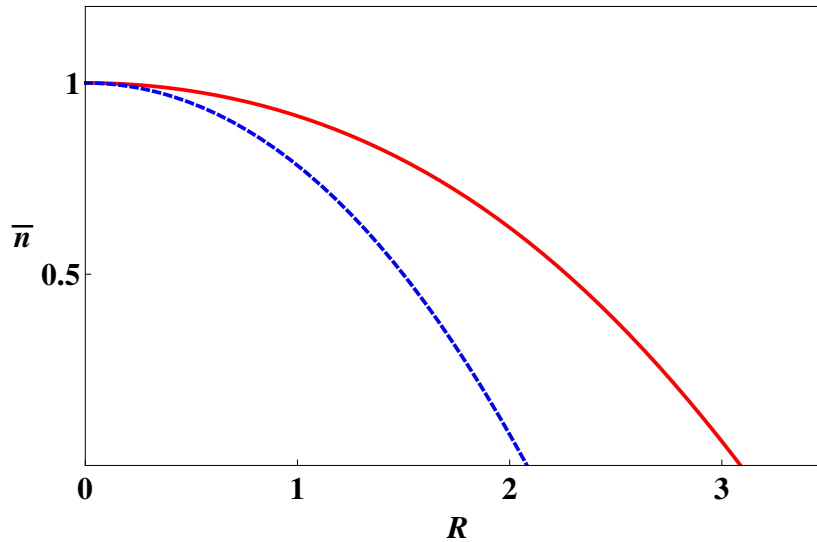


Figura 9 – Solução numérica da Eq. (5.43) com  $\bar{n}(0) = 1, \bar{n}'(0) = 0$ , para diferentes valores de  $\eta = \Omega^2/\omega_p^2$ . Curva de cima, linha vermelha:  $\eta = 1$ . Curva de baixo, pontilhado azul:  $\eta = 2$ .

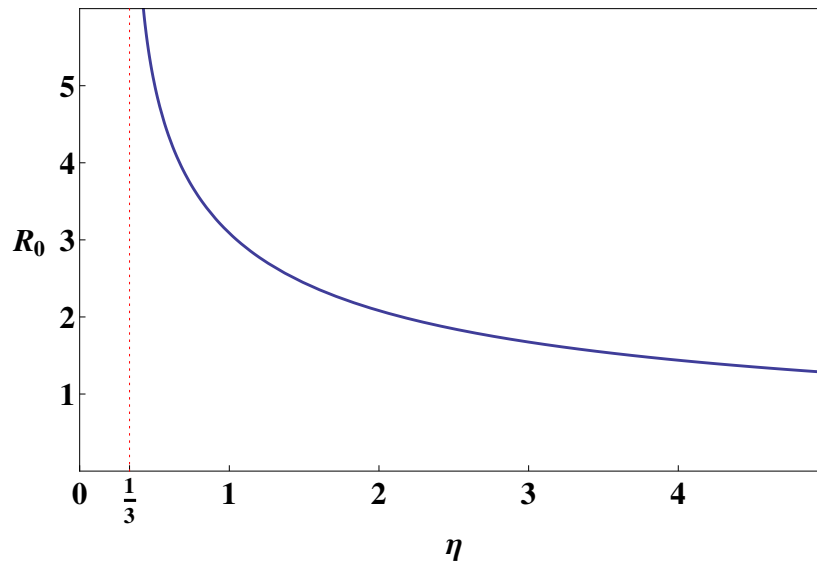


Figura 10 – Corte  $R_0$  para soluções limitadas da Eq. (5.43) como função do parâmetro  $\eta = \Omega^2/\omega_p^2$ .

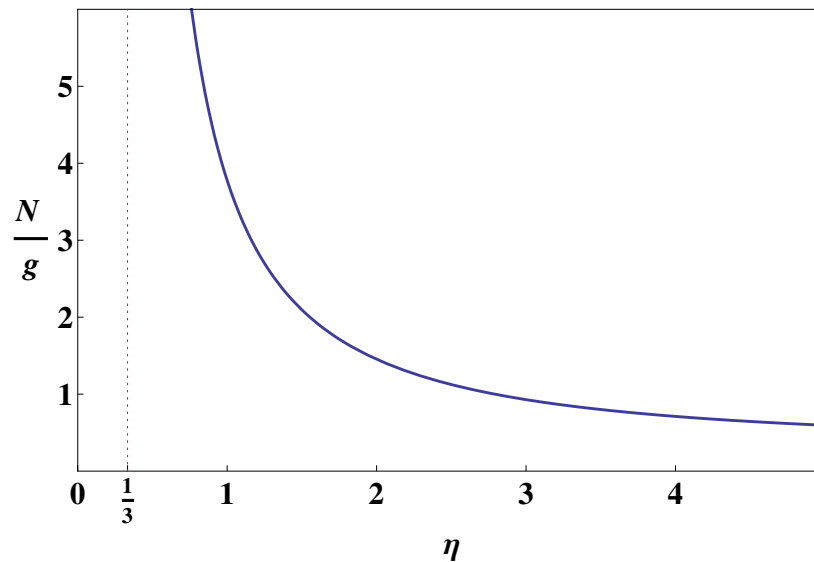


Figura 11 – O número  $N$  de átomos confinados, normalizado em relação ao número de partículas contidas na espera de Debye  $g = 4\pi n_0 \lambda^3/3$ , como função do parâmetro  $\eta = \Omega^2/\omega_p^2$ . Da Eq. (5.45) e após a integração numérica da Eq. (5.43).

## 5.5 Condições de validade

É necessário ter uma maior descrição sobre quais condições as soluções obtidas são válidas. Isso será discutido a seguir.

### 5.5.1 Condição de baixo amortecimento

Na equação de Pinney dissipativa, Eq. (5.23), a solução aproximada dada pela Eq. (5.24) é válida na condição  $\nu \ll \omega$ . Pelas Eqs. (5.4), a condição de baixo amortecimento é satisfeita se

$$\frac{\mu_B |\nabla B| [m\Gamma(1 + 4\Delta^2/\Gamma^2)^2]}{8\hbar^2 k_L^3 s_{inc} |\Delta|} \gg 1. \quad (5.46)$$

Em experimentos típicos  $|\Delta| = 2.5\Gamma$  para  $\Gamma = 2\pi \times 6 \text{ MHz}$ ,  $k_L \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$ ,  $s_{inc} = 0.1$  e  $m = 1.41 \times 10^{-25} \text{ kg}$ , a condição necessária é que  $|\nabla B| \gg 2.7 \text{ G/cm}$ . Tal condição pode ser satisfeita facilmente uma vez que em MOTs a intensidade característica do gradiente do campo magnético pode alcançar  $|\nabla B| \geq 10 \text{ G/cm}$  [31, 33, 90, 116].

## 5.5.2 Validade do regime TL

Podemos desenvolver analiticamente a condição de dominância da subseção 5.2.1 para o caso específico em que  $\gamma = 5/3$ . A comparação do termo repulsivo, Eq. (5.16), com a Eq. (5.26), é equivalente a  $5k_B T \xi / (m \xi_0^2) \gg F_c / m$ , em que a força coletiva é dada pela Eq. (5.30), temos, então, que

$$\frac{15k_B T}{m \omega_p^2 \xi_0^2} \gg \rho f(\xi/\xi_0), \quad (5.47)$$

sendo

$$f(\xi/\xi_0) = \frac{1}{16} \left( \frac{\xi_0}{\xi} \right)^2 \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ -8 \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^4 + 14 \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 - 3 \right] + 3 \frac{\arcsin(\xi/\xi_0)}{\xi/\xi_0} \right\} \leq 1. \quad (5.48)$$

A função  $f(\xi/\xi_0)$  está ilustrada na Fig. 12.

Como a função  $f(\xi/\xi_0)$  é limitada superiormente na origem pela unidade, podemos exigir que a condição acima seja válida no seu valor máximo, que, dessa forma, será válida para as outras regiões da nuvem atômica. Além disso, a restrição mais rigorosa expressa pela Eq. (5.47) é dada pelo valor máximo  $\rho = \rho_{max} \approx \sqrt{\rho_{eq}^2 + A^2} + |A|$ , um ponto de retorno obtido pela solução perturbativa da Eq. (5.24), onde o amortecimento foi negligenciado. Conseqüentemente, a hipótese de dominância dos efeitos térmicos é válida para

$$\frac{15k_B T}{m \omega_p^2 \xi_0^2} \gg \sqrt{\rho_{eq}^2 + A^2} + |A| \geq \frac{1}{2} (1 + \rho_{eq}^2 + |1 - \rho_{eq}^2|). \quad (5.49)$$

A última desigualdade é devida à restrição reportada abaixo da Eq. (5.25), uma vez que a condição inicial  $\rho(0) = 1$  deve ser satisfeita. Em termos de parâmetros físicos, a desigualdade (5.49) leva a duas subclasses, como se segue.

### 5.5.2.1 Equilíbrio térmico

O caso do equilíbrio térmico ( $\rho_{eq} = [5k_B T / (m \omega_r^2 \xi_0^2)]^{1/4} \geq 1$ ) corresponde a

$$\left( \frac{\sqrt{3} \omega_r}{\omega_p} \right) \rho_{eq}^2 \gg \rho_{eq} \geq 1. \quad (5.50)$$

Satisfeita a condição acima, é possível negligenciar a força coletiva. É interessante notar que a frequência da armadilha ( $\omega_r$ ) não é necessariamente maior que a frequência de Mie ( $\omega_p/\sqrt{3}$ ), visto que os efeitos térmicos são grandes o bastante de tal maneira que  $\rho_{eq} \gg 1$ .

## 5.5.2.2 Equilíbrio harmônico

O caso do equilíbrio harmônico ( $\rho_{eq} \leq 1$ ), Eq. (5.49), corresponde a

$$1 \geq \rho_{eq}^2 \gg \frac{\omega_p}{\sqrt{3}\omega_r}. \quad (5.51)$$

Para ser satisfeita, é necessário uma frequência harmônica muito maior do que a frequência das oscilações de Mie, ou seja, o confinamento tem que prevalecer sobre o efeito repulsivo.

Por um todo, ambas as Eqs. (5.50) e (5.51) demonstram que

$$\rho_{eq} \gg \left( \frac{\omega_p}{\sqrt{3}\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.52)$$

é a condição necessária para justificar o regime TL. Para  $\gamma = 5/3$  e com os parâmetros da Fig. 4 junto com  $n_0 = 10^{15} m^{-3}$ ,  $Q \sim 10^{-36} Nm^2$  fornece  $\omega_p/\sqrt{3} = 48.6 rad/s$ , enquanto que  $\omega = 697 rad/s$ . Esse exemplo satisfaz o cenário do regime TL com  $\rho_{eq} = 1.5$ .

Por outro lado, após realizar o tratamento feito acima para o caso isotérmico  $\gamma = 1$ , temos que

$$\frac{6k_B T}{m\omega_p^2 \xi_0^2} \gg \frac{h(\xi/\xi_0)}{\rho}, \quad (5.53)$$

com

$$h(\xi/\xi_0) = \frac{3}{4} \left( \frac{\xi_0}{\xi} \right)^3 \left[ \sqrt{\pi} \operatorname{Erf} \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right) - 2 \frac{\xi}{\xi_0} \exp \left( - \frac{\xi^2}{\xi_0^2} \right) \right] \leq 1. \quad (5.54)$$

A função  $h(\xi/\xi_0)$  é ilustrada na Fig. 12.

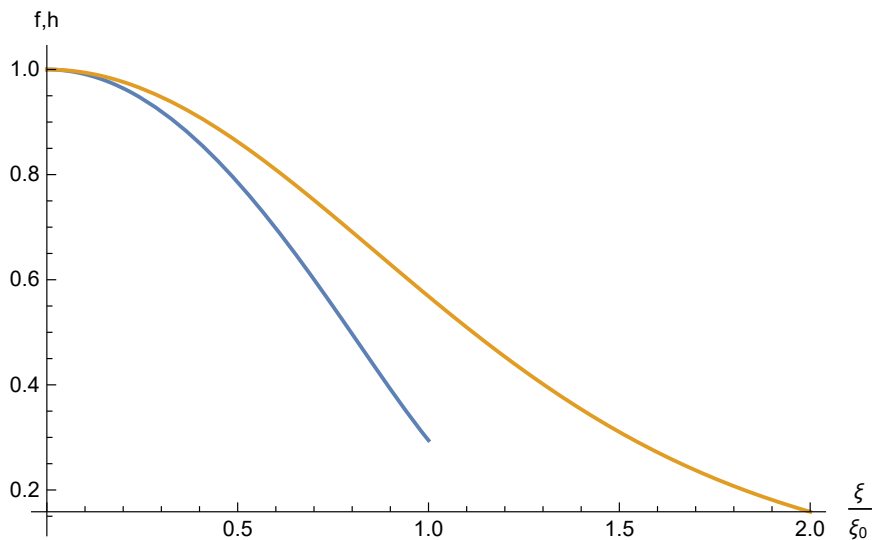


Figura 12 – Curva inferior, azul: função  $f(\xi/\xi_0)$  da Eq. (5.48); curva superior, laranja: função  $h(\xi/\xi_0)$  da Eq. (5.54).

A condição mais rigorosa da Eq. (5.53) acontece para  $h(\xi/\xi_0) = 1$  e  $\rho = \rho_{eq} = [2k_B T / (m\omega_r^2 \xi_0^2)]^{1/2}$ , a qual é o valor mínimo do potencial  $V$  da Eq. (5.33). Então, temos que

$$\rho_{eq} \gg \left( \frac{\omega_p}{\sqrt{3}\omega} \right)^{2/3}, \quad (5.55)$$

como a condição necessária para o caso isotérmico. Ela é similar à Eq. (5.52), observando, no entanto, a pequena diferença nas expressões para o valor de  $\rho_{eq}$  entre o caso adiabático ( $\gamma = 5/3$ ) e o caso isotérmico ( $\gamma = 1$ ). Além disso, podemos escrever essa condição em termos do número de partículas,

$$N \ll n_{MS} \left( \frac{2\pi k_B T}{k} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (5.56)$$

em que  $k = \omega_r^2 m$  é a constante de mola do confinamento. A Eq. (5.56) está de acordo com [31]. Reciprocamente, as condições para o regime MS são as condições inversas daquelas obtidas acima.

Nessa discussão, desenvolvemos um modelo para átomos confinados em um MOT, obtivemos uma solução analítica aproximada para o regime TL no limite de baixo amortecimento e descrevemos a dinâmica para o regime MS e TL+MS.

## 5.6 Método variacional dependente do tempo aplicado à dinâmica de MOTs anisotrópicos

Apesar do desenvolvimento realizado na seção anterior, devemos enfatizar que assumir a simetria esférica é uma aproximação simplificada em relação ao que realmente acontece. Vimos, no capítulo 2, que o campo quadrupolar criado pelo par de bobinas anti-Helmholtz, ver Eq. (2.36), produz um campo assimétrico em relação a coordenada  $z$ , gerando, assim, um campo com simetria axial. Essa simetria motivou a presente análise. Com esse objetivo, vamos adotar o método variacional dependente do tempo, uma vez que este método retém os efeitos térmicos e coletivos para uma equação de estado adiabática.

Para uma geometria tridimensional, a dinâmica de um gás de átomos aprisionados por meio de uma armadilha magneto-óptica pode ser descrita pelo seguinte conjunto de equações hidrodinâmicas,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0, \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nu \mathbf{v} - \frac{1}{mn} \nabla p - \frac{1}{m} \nabla V_h + \frac{1}{m} \nabla V_c, \quad (5.58)$$

$$\nabla^2 V_c = Qn, \quad (5.59)$$

em que  $V_h = m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)/2$  é o potencial externo confinador criado pelo gradiente do campo magnético e a força dissipativa com coeficiente de amortecimento,  $\nu$ , é originada pelo resfriamento Doppler. As equações (5.57-5.59) são respectivamente as equações da continuidade, do transporte de momento e a equação de Poisson. O sistema é composto por átomos frios de massa atômica  $m$  e densidade  $n = n(\mathbf{r}, t)$ . Além disso, o fluido tem um campo de velocidade  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  e pressão  $p(\mathbf{r}, t)$ . Novamente, assumiremos que o parâmetro de saturação é  $s_{inc} \ll 1$ . Dessa forma, a frequência angular e o coeficiente de amortecimento são dados por

$$\omega_z = \sqrt{2}\omega_{\perp} = (2\nu\mu/k_L)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu = -\frac{8\hbar k_L^2 s_{inc} \delta}{m\Gamma_e(1 + 4\delta^2/\Gamma_e^2)^2}, \quad (5.60)$$



em que  $k_L$  é amplitude do vetor de onda do laser,  $\hbar$  é a constante reduzida de Planck,  $\delta$  é a diferença entre a frequência do laser e a frequência da transição atômica entre dois níveis de energia, e  $\Gamma_e$  é a taxa de decaimento espontâneo. Em MOTs é utilizado o *red detuning* ( $\delta < 0$ ), conseqüentemente  $\nu > 0$ . Além disso,  $\mu = \mu_B B_0 / \hbar$ , com  $\mu_B$  sendo o magneton de Bohr e  $B_0$  é a intensidade do gradiente do campo magnético. O fator numérico  $\sqrt{2}$  vem da configuração do campo magnético, ver Eq. (2.36).

O potencial autoconsistente,  $V_c$ , está associado à força coletiva e satisfaz a equação de Poisson, com carga efetiva  $q$  dos átomos dada por  $q = \sqrt{\epsilon_0 Q} = \sqrt{(\sigma_R - \sigma_L)\sigma_L I_0 / c}$ , em que  $\epsilon_0$  é a permissividade no vácuo,  $c$  é a velocidade da luz e  $I_0$  é intensidade total dos seis lasers, enquanto  $\sigma_\perp$  e  $\sigma_R$  representam as seções transversais de emissão e absorção. Também, assumiremos uma equação de estado politrópica dada por  $p = n_0 k_B T (n/n_0)^\gamma$ , em que  $\gamma$  é um índice politrópico genérico, com densidade de referência  $n_0$ . O produto  $k_B T$  é a energia térmica, sendo  $k_B$  a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura.

O problema de resolver as equações (5.57)-(5.59) para uma velocidade irrotacional ( $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ), pode ser reinterpretado com um problema correspondente à minimização do funcional da ação  $S = \int dt d^3r \mathcal{L}$ , descrita pela seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = e^{\nu t} \left[ mn \left( \frac{1}{2} |\nabla \theta|^2 + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nu \theta \right) + n(V_h - V_c) - \frac{(\nabla V_c)^2}{2Q} + \int dn \int \frac{dp}{n} \right], \quad (5.61)$$

em que os campos independentes são o potencial velocidade  $\theta = \theta(\mathbf{r}, t)$ , de tal forma que  $\mathbf{v} = \nabla \theta$ , a densidade  $n = n(\mathbf{r}, t)$ , e o potencial autoconsistente  $V_c = V_c(\mathbf{r}, t)$ .

Adotaremos o *Ansatz* Gaussiano normalizado

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{\alpha_x \alpha_y \alpha_z} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right), \quad (5.62)$$

em que  $A = N/(2\pi)^{\frac{3}{2}}$ , sendo  $N$  o número de átomos confinados e

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{(x - d_x(t))^2}{\alpha_x^2(t)} + \frac{(y - d_y(t))^2}{\alpha_y^2(t)} + \frac{(z - d_z(t))^2}{\alpha_z^2(t)}}. \quad (5.63)$$

As coordenadas dependentes do tempo  $d_i(t)$  e  $\alpha_i(t)$ , com  $i = x, y, z$ , fornecem, respectivamente, a posição do centro de massa e o comprimento da nuvem atômica em diferentes direções. Além disso, aqui definimos que o valor de referência da densidade é dado por  $n_0 = N/(\alpha_{x0}\alpha_{y0}\alpha_{z0})$ , em que  $\alpha_{i0} = \alpha_i(0)$ .

A substituição direta do *Ansatz* na equação da continuidade leva na seguinte solução exata para o campo de velocidade,

$$v_i = \frac{\dot{\alpha}_i}{\alpha_i} (r_i - d_i) + \dot{d}_i, \quad (5.64)$$

em que  $v_i$  é a  $i$ -ésima componente do campo de velocidade do fluido. Uma vez que  $\mathbf{u} = \nabla \theta$ , temos que o campo escalar  $\theta$  na densidade Lagrangiana pode ser escrito por

$$\theta = \sum_i \left( \frac{\dot{\alpha}_i}{2\alpha_i} (r_i - d_i)^2 + \dot{d}_i (r_i - d_i) \right), \quad (5.65)$$

aqui desprezamos a contribuição puramente dependente do tempo.

Além disso, a equação de Poisson admite uma solução aproximada dada por

$$V_c = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{QA}{(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)^{1/3}} \frac{Erf(\rho/\sqrt{2})}{\rho}, \quad (5.66)$$

em que  $Erf(s) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^s e^{-s'^2} ds'$  denota a função erro de um argumento genérico  $s$ . A expressão (5.66) é exata para um simetria esférica ( $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z$ ). O mesmo potencial autoconsistente foi adotado em análises de gerações de altos harmônicos de um gás quântico de elétrons confinados em um poço não-parabólico anisotrópico [113].

Para derivar o comportamento dinâmico das novas coordenadas, computamos a Lagrangiana. Após a substituição das Eqs. (5.62), (5.65) e (5.66) na Eq. (5.61), temos

$$L(d_i, \dot{d}_i, \alpha_i, \dot{\alpha}_i) \equiv -\frac{1}{mN} \int d^3r \mathcal{L} = e^{\nu t} \left[ \sum_i \frac{1}{2} \left( \dot{d}_i^2 + \dot{\alpha}_i^2 \right) - \nu \alpha_i \dot{\alpha}_i \right] - U_d - U_\alpha, \quad (5.67)$$

em que

$$U_d = \sum_i \frac{\omega_i^2}{2} d_i^2 \quad (5.68)$$

e

$$U_\alpha = \sum_i \left( \frac{\omega_i^2}{2} \alpha_i^2 + \frac{b (\prod_j \alpha_j)^{1/3}}{8 \alpha_i^2} \right) + \frac{3a}{2} \frac{1}{(\prod_i \alpha_i)^{2/3}}, \quad (5.69)$$

que são, respectivamente, o pseudo-potencial correspondente aos modos de dipolos e de oscilações do comprimento, além de introduzirmos as constantes  $a = 3\sqrt{3}k_B T \alpha_0^2 / (10\sqrt{5}\pi m)$  e  $b = NQ / (\pi^{3/2} m)$  e assumirmos  $\alpha_{i0} = \alpha_0$ . Além disso, pela Eq. (5.69), temos que os termos  $\sim \omega_i^2$  estão relacionados com o confinamento harmônico, os termos  $\sim b$  correspondem ao potencial autoconsistente e aquele  $\sim a$  é devido à pressão adiabática.

Uma vez obtida a Lagrangiana, podemos aplicar as equações de Euler-Lagrange para cada parâmetro variacional e derivar as equações de movimento. A dinâmica do centro de massa é dada por

$$\ddot{d}_i + \nu \dot{d}_i + \omega_i^2 d_i = 0, \quad (5.70)$$

a qual, como podemos ver, é desacoplada das equações do comprimento, mostrando oscilações amortecidas em torno do ponto de origem (oscilações de Khon amortecidas). Vemos, também, que o movimento é linear e independente do número de átomos.

As equações de movimento para os oscilantes comprimentos são

$$\ddot{\alpha}_x + \nu \dot{\alpha}_x + \left( \omega_x^2 - \frac{\nu^2}{2} \right) \alpha_x = \frac{a}{\alpha_x^{5/3} \alpha_y^{2/3} \alpha_z^{2/3}} + \frac{b}{24} \left( \frac{5\alpha_y^{1/3} \alpha_z^{1/3}}{\alpha_x^{8/3}} - \frac{\alpha_y^{1/3}}{\alpha_x^{2/3} \alpha_z^{5/3}} - \frac{\alpha_z^{1/3}}{\alpha_x^{2/3} \alpha_y^{5/3}} \right), \quad (5.71)$$

$$\ddot{\alpha}_y + \nu \dot{\alpha}_y + \left( \omega_y^2 - \frac{\nu^2}{2} \right) \alpha_y = \frac{a}{\alpha_x^{2/3} \alpha_y^{5/3} \alpha_z^{2/3}} + \frac{b}{24} \left( \frac{5\alpha_x^{1/3} \alpha_z^{1/3}}{\alpha_y^{8/3}} - \frac{\alpha_x^{1/3}}{\alpha_y^{2/3} \alpha_z^{5/3}} - \frac{\alpha_z^{1/3}}{\alpha_x^{5/3} \alpha_y^{2/3}} \right), \quad (5.72)$$

e

$$\ddot{\alpha}_z + \nu \dot{\alpha}_z + \left( \omega_z^2 - \frac{\nu^2}{2} \right) \alpha_z = \frac{a}{\alpha_x^{2/3} \alpha_y^{2/3} \alpha_z^{5/3}} + \frac{b}{24} \left( \frac{5\alpha_x^{1/3} \alpha_y^{1/3}}{\alpha_z^{8/3}} - \frac{\alpha_x^{1/3}}{\alpha_y^{5/3} \alpha_z^{2/3}} - \frac{\alpha_y^{1/3}}{\alpha_x^{5/3} \alpha_z^{2/3}} \right). \quad (5.73)$$

As equações anteriores são gerais para um confinamento arbitrário externo. No que se segue, vamos considerar com maiores detalhes o caso de MOTs.

### 5.6.1 O caso do MOT

Como discutido no capítulo 2 a respeito do efeito Zeeman, em MOTs, a armadilha confinadora possui uma simetria axial. Então, tomamos  $\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$ , de tal forma que é permitido também considerar  $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_\perp$ . Dessa maneira, as equações de movimento tornam-se

$$\ddot{\alpha}_\perp + \nu\dot{\alpha}_\perp + \left(\omega_\perp^2 - \frac{\nu^2}{2}\right)\alpha_\perp = \frac{a}{\alpha_\perp^{7/3}\alpha_z^{2/3}} + \frac{b}{24}\left(\frac{4\alpha_z^{1/3}}{\alpha_\perp^{7/3}} - \frac{1}{\alpha_\perp^{1/3}\alpha_z^{5/3}}\right) \quad (5.74)$$

e

$$\ddot{\alpha}_z + \nu\dot{\alpha}_z + \left(\omega_z^2 - \frac{\nu^2}{2}\right)\alpha_z = \frac{a}{\alpha_\perp^{4/3}\alpha_z^{5/3}} + \frac{b}{24}\left(\frac{5\alpha_\perp^{2/3}}{\alpha_z^{8/3}} - \frac{2}{\alpha_\perp^{4/3}\alpha_z^{2/3}}\right), \quad (5.75)$$

ou

$$\ddot{\alpha}_\perp + \nu\dot{\alpha}_\perp = -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \alpha_\perp}, \quad \ddot{\alpha}_z + \nu\dot{\alpha}_z = -\frac{\partial U}{\partial \alpha_z}, \quad (5.76)$$

em que  $U = U(\alpha_\perp, \alpha_z)$  é o pseudo-potencial definido por

$$U(\alpha_\perp, \alpha_z) = (\omega_\perp^2 - \nu^2/2)\alpha_\perp^2 + \frac{(\omega_z^2 - \nu^2/2)\alpha_z^2}{2} + \frac{3a}{2\alpha_\perp^{4/3}\alpha_z^{2/3}} + \frac{b}{8}\left(\frac{2\alpha_z^{1/3}}{\alpha_\perp^{4/3}} + \frac{\alpha_\perp^{2/3}}{\alpha_z^{5/3}}\right), \quad (5.77)$$

presente na função Lagrangiana associada  $L = \exp(\nu t)[(1/2)(2\dot{\alpha}_\perp^2 + \dot{\alpha}_z^2) - U]$ .

Das Eqs. (5.74) e (5.75), temos que as oscilações dos comprimentos são caracterizadas por um par de equações de osciladores amortecidos não-lineares acoplados. A não-linearidade advém dos termos de interações repulsivas devidas à pressão e à interação autoconsistente (força coletiva). O caso não amortecido ( $\nu = 0$ ), e de frequências iguais  $\omega_\perp = \omega_z$ , corresponde a um sistema Hamiltoniano de Ermakov [117].

Pela forma do pseudo-potencial (Fig. 13), concluímos que  $\alpha_\perp$  e  $\alpha_z$  sempre irão executar oscilações amortecidas entorno do único ponto de mínimo ( $\alpha_{\perp eq}, \alpha_{z eq}$ ), já que  $a > 0, b > 0$ . Como estamos procurando por oscilações periódicas, nos restringiremos para o caso em que  $\omega_\perp > \nu/\sqrt{2}$ , conseqüentemente  $\omega_z > \nu/\sqrt{2}$ , condições que são satisfeitas em experimentos de MOTs.

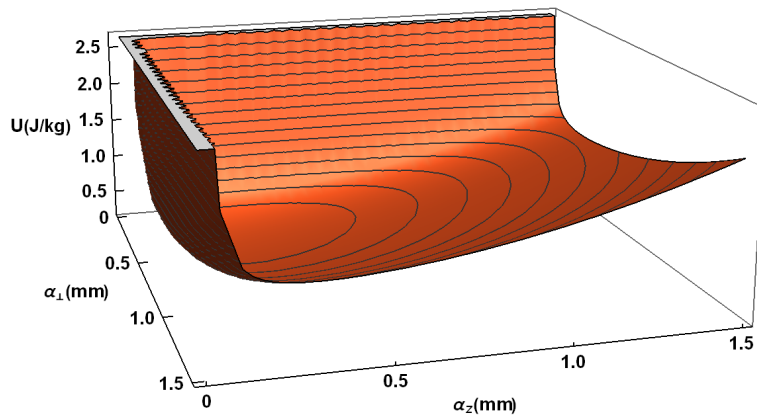


Figura 13 – Pseudo-potencia, Eq. (5.77). Parâmetros indicados no texto.

Podemos resolver numericamente as Eqs. (5.74) e (5.75) para parâmetros típicos [22, 31, 33, 49, 118], a saber:  $T = 0.3 \text{ mK}$ ,  $n_0 = 10^{16} \text{ m}^{-3}$ ,  $m = 1.41 \times 10^{-25} \text{ kg}$  (rubídio),  $Q \sim 10^{-36} \text{ Nm}^2$ ,

$\omega_{\perp} = 697 \text{ rad/s}$ ,  $\nu = 231 \text{ s}^{-1}$ , para  $|\Delta| = 2.5\Gamma$  sendo  $\Gamma = 2\pi \times 6 \text{ MHz}$ ,  $k_L \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$ ,  $s_{inc} = 0.1$ ,  $|\nabla B| = 25 \text{ G/cm}$ , e com  $\alpha_0 = 1.5 \text{ mm}$ . As oscilações amortecidas são mostradas na Fig. 14.

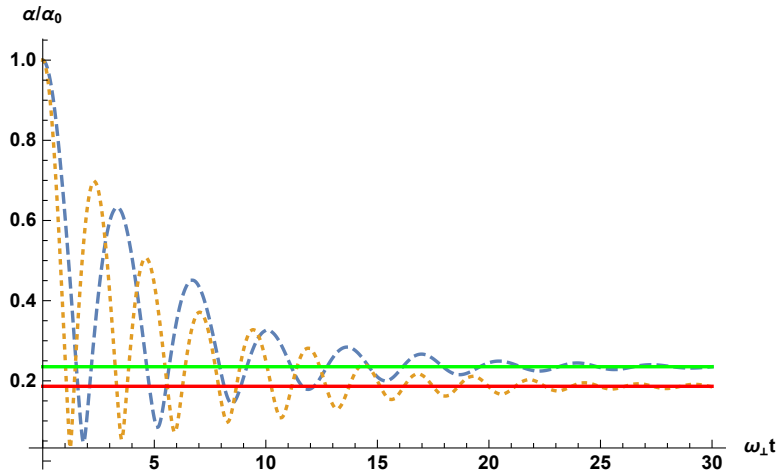


Figura 14 – Solução numérica das Eqs. (5.74) e (5.75). Curva normalizada em relação à  $\alpha_0$ . Parâmetros indicados no texto. Curva tracejada:  $\alpha_{\perp}$ ; curva com pontos:  $\alpha_z$ ; curvas cheias: soluções de equilíbrio  $\alpha_{\perp eq}/\alpha_0 = 0.24$  e  $\alpha_{zeq}/\alpha_0 = 0.19$ . Condições iniciais:  $\alpha_{\perp 0} = \alpha_{z0} = \alpha_0$  e  $\dot{\alpha}_{\perp 0} = \dot{\alpha}_{z0} = 0$ .

É também útil considerar a função adimensional para medir a anisotropia,

$$\chi = \frac{\alpha_{\perp}}{\alpha_z}, \quad (5.78)$$

plotada na Fig. 15 para os mesmos parâmetros da Fig. 14. Podemos ver que a anisotropia é bastante intensa no início das oscilações, o que contraria as considerações para uma simetria esférica. Porém, passado um certo tempo, a anisotropia estabiliza num valor próximo da unidade, a saber  $\chi_{eq} = 1.26$ .

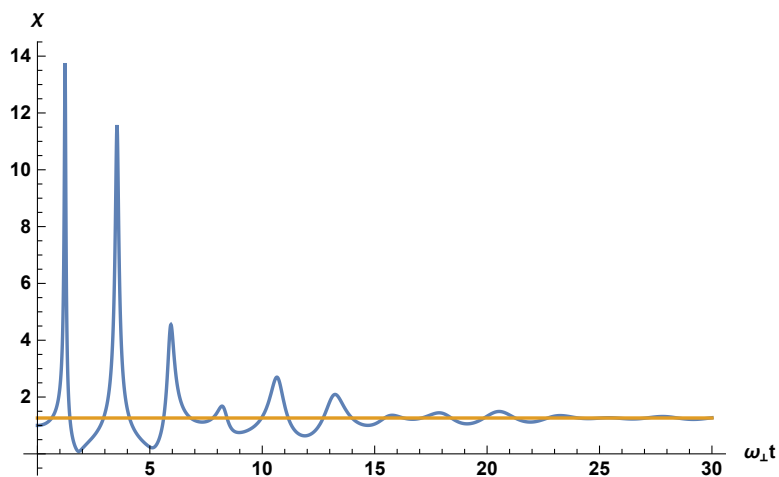


Figura 15 – Resultados da simulação numérica da anisotropia do parâmetro  $\chi$  da Eq. (5.78). Curva azul: simulação numérica de  $\chi$ . A curva horizontal mostra o estado de equilíbrio  $\chi_{eq} = \alpha_{\perp eq}/\alpha_{zeq} = 1.26$ , para os mesmo parâmetros da Fig. 14

## 5.6.2 Estabilidade linear

Para a análise da estabilidade linear, restrita ao caso dos MOTs, reescrevemos as Eqs. (5.74) e (5.75) da seguinte forma

$$\dot{\alpha}_{\perp} = \vartheta = f_1, \quad (5.79)$$

$$\dot{\alpha}_z = \varrho = f_2, \quad (5.80)$$

$$\dot{\vartheta} = -\nu\vartheta - \left(\omega_{\perp}^2 - \frac{\nu^2}{2}\right)\alpha_{\perp} + \frac{a}{\alpha_{\perp}^{7/3}\alpha_z^{2/3}} + \frac{b}{24}\left(\frac{4\alpha_{\perp}^{1/3}}{\alpha_z^{7/3}} - \frac{1}{\alpha_{\perp}^{1/3}\alpha_z^{5/3}}\right) = f_3, \quad (5.81)$$

$$\dot{\varrho} = -\nu\varrho - \left(\omega_z^2 - \frac{\nu^2}{2}\right)\alpha_z + \frac{a}{\alpha_{\perp}^{4/3}\alpha_z^{5/3}} + \frac{b}{24}\left(\frac{5\sigma_{\perp}^{2/3}}{\sigma_z^{8/3}} - \frac{2}{\sigma_{\perp}^{4/3}\sigma_z^{2/3}}\right) = f_4, \quad (5.82)$$

ou simplesmente,  $\dot{\xi}_m = f_m$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$ , em que  $\xi_m = (\alpha_{\perp}, \alpha_z, \vartheta, \varrho)$ .

As soluções estacionárias correspondentes aos pontos críticos do pseudo-potencial (5.77) são obtidas tomando  $\dot{\xi}_m = 0$ . Essas soluções satisfazem as seguintes equações,

$$\left(\omega_{\perp}^2 - \frac{\nu^2}{2}\right)\alpha_{\perp eq} - \frac{a}{\alpha_{\perp eq}^{7/3}\alpha_{z eq}^{2/3}} - \frac{b}{24}\left(\frac{4\alpha_{z eq}^{1/3}}{\alpha_{\perp eq}^{7/3}} - \frac{1}{\alpha_{\perp eq}^{1/3}\alpha_{z eq}^{5/3}}\right) = 0, \quad (5.83)$$

$$\left(\omega_z^2 - \frac{\nu^2}{2}\right)\alpha_{z eq} - \frac{a}{\alpha_{\perp eq}^{4/3}\alpha_{z eq}^{5/3}} - \frac{b}{24}\left(\frac{5\alpha_{\perp eq}^{2/3}}{\alpha_{z eq}^{8/3}} - \frac{2}{\alpha_{\perp eq}^{4/3}\alpha_{z eq}^{2/3}}\right) = 0, \quad (5.84)$$

as quais podem ser resolvidas numericamente, junto com  $\vartheta_{eq} = 0$ ,  $\varrho_{eq} = 0$ .

Os modos normais de vibração são caracterizados por soluções que oscilam com a mesma frequência, que tomaremos como  $\Omega$ . Dessa forma, buscamos soluções da seguinte forma

$$\xi_m = \xi_{m eq} + \delta\xi_m \exp(i\Omega t) \quad (5.85)$$

e linearizando em torno do ponto de equilíbrio, derivamos

$$\det(i\Omega\mathbf{I} - \mathbf{J}) = 0, \quad (5.86)$$

em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade 4X4 e  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana, cujos elementos  $(m, n)$  são  $J_{mn} = (\partial f_m / \partial \xi_n)_{eq}$  calculada no equilíbrio, para  $m, n = 1, 2, 3, 4$ . Em termos do pseudo-potencial da Eq. (5.77), a equação característica da frequência  $\Omega$  torna-se,

$$\det \begin{pmatrix} i\Omega & 0 & -1 & 0 \\ 0 & i\Omega & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_{\perp}^2} \right)_{eq} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_{\perp} \partial \alpha_z} \right)_{eq} & i\Omega + \nu & 0 \\ \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_{\perp} \partial \alpha_z} \right)_{eq} & \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_z^2} \right)_{eq} & 0 & i\Omega + \nu \end{pmatrix} = 0,$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \Omega - \frac{i\nu}{2} \right)^2 + \frac{\nu^2}{4} \right]^2 - \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_{\perp}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_z^2} \right]_{eq} \left[ \left( \Omega - \frac{i\nu}{2} \right)^2 + \frac{\nu^2}{4} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_{\perp}^2} \right)_{eq} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_z^2} \right)_{eq} - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_{\perp} \partial \alpha_z} \right)_{eq}^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.87)$$

A equação quártica (5.87) pode ser resolvida diretamente e obtemos

$$\Omega = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_{\perp}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_z^2}\right)_{eq}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_{\perp}^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_z^2}\right)_{eq}^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_{\perp} \partial \alpha_z}\right)_{eq}^2} - \frac{\nu^2}{2} + \frac{i\nu}{2} \quad (5.88)$$

e

$$\Omega = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_{\perp}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_z^2}\right)_{eq}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_{\perp}^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_z^2}\right)_{eq}^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_{\perp} \partial \alpha_z}\right)_{eq}^2} - \frac{\nu^2}{2} + \frac{i\nu}{2}, \quad (5.89)$$

Como a amplitude varia com  $e^{i\Omega t}$ , temos que parte  $Im(i\Omega)$  corresponde ao decaimento ( $Im(i\Omega) > 0$ ) ou aumento ( $Im(i\Omega) < 0$ ) da amplitude de oscilação, ou seja, se o ponto fixo é ou não estável. Já a parte  $Re(i\Omega)$  aos modos normais. Para os parâmetros do MOT, sempre corresponde a um ponto assintoticamente estável ( $Re(i\Omega) > 0, Im(i\Omega) > 0$ ). Se a não-linearidade e o amortecimento forem desprezíveis, obtemos as soluções  $\Omega^2 = \omega_{\perp}^2$  e  $\Omega^2 = \omega_z^2$ , como esperado.

O movimento assintoticamente estável é esperado pela forma do pseudo-potencial  $U$ , mostrada na Fig. 13, por exemplo. Usando os parâmetros das Figs. 13, 14 e 15 e as Eqs. (5.88) e (5.89), temos que  $Im(\Omega) = 1.2 \times 10^2 s^{-1}$  e  $Re(\Omega) = \pm 1.7 \times 10^3 rad/s$  ou  $Re(\Omega) = \pm 1.2 \times 10^3 rad/s$ , as quais são consistentes com as Figuras 14 e 15.

Nessa discussão, desenvolvemos um modelo para átomos confinados em um MOT dada uma simetria axial, descrevemos a dinâmica para o regime TL+MS dada uma equação de estado adiabática, também obtivemos os modos normais de vibração e discutimos a estabilidade do sistema.

## 6 Plasmas de uma componente

Neste capítulo, iremos acessar a dinâmica de um plasma de uma componente confinado em dois contextos diferentes, a saber: um plasma de elétrons colisional e um plasma de antiprótons não-colisional em uma armadilha dependente do tempo. Para sua melhor compreensão, iremos diferenciar um plasma neutro de um plasma não-neutro e contextualizar cada um dos sistemas estudados no seu devido momento. Como a correspondência é imediata entre cada força presente no sistema do capítulo anterior, também utilizaremos o modelo hidrodinâmico junto com o método das variáveis Lagrangianas e o método variacional dependente do tempo.

### 6.1 Plasma não-neutro

O termo plasma, no contexto de física, foi primeiramente empregado por Thonks e Langmuir para descrever uma região central brilhante de um gás ionizado, gerado por descargas elétricas, contidas em um tubo [103]. Hoje é usado para denominar qualquer substância macroscopicamente neutra (ou não) que possui muitos elétrons e íons livres, podendo, ou não, conter partículas neutras em sua constituição, que interagem por meio de uma interação Coulombiana. O desenvolvimento da física de plasmas se deu a partir da década de 50, principalmente pelo interesse em desenvolver energia de fusão e fontes de íons [119, 120]. Na natureza, esse estado da matéria corresponde a 99% da matéria visível no espaço, sendo encontrado nos ventos solares, na composição de estrelas e nebulosas. Entretanto, aqui na Terra, só o observamos, naturalmente, nos raios em dias de intensa chuva e nas auroras. Já no cotidiano, está presente em televisores de plasma e nas lâmpadas fluorescentes, além de podemos encontrá-los no interior de reatores de fusão. Também, abarcam estruturas das mais diversas, podendo ser encontrados num grande intervalo de densidade ( $10^6 - 10^{35} m^{-3}$ ), temperatura ( $\approx 0 - 10^8 K$ ), comprimento ( $10^{-6} - 10^{25} m$ ) e tempo de vida ( $10^{-12} - 10^{17} s$ ).

Um plasma neutro é caracterizado pela sua neutralidade global, ou seja, as cargas positivas e negativas se cancelam. Além disso, a interação entre esses corpos é mediada por campos eletromagnéticos internos ao sistema. Em vista disso, apresentam comportamentos coletivos, uma vez que as partículas produzem seus próprios campos e interagem com outros campos de partículas carregadas vizinhas. Dois fenômenos importantes decorrem desse comportamento. O primeiro deles é a blindagem de Debye. Quando colocamos uma perturbação de carga em um plasma, as demais cargas tendem a se agrupar no entorno dessa perturbação, de tal maneira que cancelam a perturbação do campo originado da carga extra. A distância característica na qual esse efeito ocorre define o comprimento de Debye. Para distâncias maiores que essa, os efeitos da perturbação são imperceptíveis. Dessa maneira, a interação entre duas regiões separadas por distâncias maiores que o comprimento de Debye é dada por meio de campos médios e não interações de longo alcance. Também, é possível definir o parâmetro de plasma em termos da quantidade de corpos carregados dentro da esfera de Debye (uma esfera com raio dado pelo comprimento de Debye). Esse parâmetro

está diretamente ligado à razão entre a energia cinética e a energia potencial elétrica. Sendo assim, se o parâmetro de plasmas for muito maior que a unidade, dizemos que é fracamente acoplado. Do contrário, dizemos que é fortemente acoplado. Além do efeito dos campos autoconsistentes, efeitos térmicos podem também ser relevantes. Quando isso é válido, é dito que o plasma é quente, porém se esses efeitos forem desprezáveis, é dito frio. Usaremos a mesma denominação para plasma não-neutro [59, 67, 91, 92].

O outro fenômeno proveniente do comportamento coletivo são as ondas de Langmuir. Quando um plasma no equilíbrio é perturbado em altas frequências, temos uma onda propagante de elétrons. Essa onda é uma resposta coletiva do meio à perturbação externa. A frequência na qual essas ondas se propagam é chamada de frequência de plasma. Para essas perturbações, os íons permanecem inertes em consequência da grande diferença de massa entre os elétrons e os íons.

Já um plasma não-neutro é uma coleção de muitos corpos carregados, no qual não é válida a neutralidade global do sistema. Aqui reside sua principal diferença em relação a um plasma neutro. Tais sistemas são caracterizados por intensos campos elétricos e magnéticos. Por consequência, tais campos têm grande influência na estabilidade e nos efeitos de transporte do sistema. Apesar dos intensos campos elétricos, soluções de equilíbrio térmico são possíveis na presença de um confinamento externo. O efeito coletivo da blindagem de Debye mantém-se independente da condição de neutralidade [59, 121], porém outros efeitos coletivos podem diferir de um plasma neutro em decorrência dos intensos campos. Tais efeitos já são conhecidos desde os anos 70, época na qual o desenvolvimento de plasmas não-neutros cresceu. Assim como plasmas neutros, podem ser encontrados tanto na natureza quanto artificialmente. Por exemplo, podem ser formados por expansão de plasmas neutros [104, 122, 123, 124], no entorno de feixes intensos de partículas carregadas ou por meio de pulsos de lasers propagando em plasmas e em gases [70]. Na Fig. 16 é apresentado um breve histórico do desenvolvimento do estudo de plasmas não-neutros até os anos 90. Como temos um sistema altamente repulsivo, é necessário que o mesmo seja confinado. O confinamento de corpos de mesmo sinal de carga pode ser dado por meio das armadilhas de Penning-Malmberg ou de Paul. [61, 62, 66].

1945	Brillouin equilibrium	1
1954	Beams in microwave tubes	3,4,5,6
1965	Hyperbolic ion trap	14
1968	Relativistic beam equilibria	9
1974	Book on non-neutral plasmas	12
1975	Cylindrical electron trap	22,23
1987	Collisional equilibration	25
1989	Vortex dynamics	24,26,27,33,34
1991	Modes of a spheroidal plasma	18,19,20,21
1992	Bernstein modes	46
1994	Collisionless damping and trapping	36

Figura 16 – Tabela retirada de [60]. Na tabela consta um breve histórico do desenvolvimento do estudo de física de plasmas não-neutros. Os números da direita representam o número das referências contidas em [60].



## 6.2 Plasma de elétrons

Plasmas não-neutros podem ser classificados como de uma única espécie ou componente, isto é, ser formado somente por partículas de mesmo sinal. Por exemplo, podemos ter plasmas somente de íons [125], pósitrons [126, 127], antiprótons [42, 71] e elétrons [55, 60, 61, 62, 64]. Nesta seção, nos ateremos aos plasmas formados somente por elétrons. Uma fonte usual de elétrons é obtida por meio do aquecimento, gerado pela passagem de uma corrente elétrica, de um filamento de tungstênio enriquecido com tório [55]. O tório possui a propriedade de emitir elétrons com facilidade. Uma outra fonte possível é por meio de um feixe multipulsante de elétrons emitidos por uma superfície equipotencial. Essa superfície pode ser de um catodo FEA (*Field Emmitter Array*) [128].

Antes de seguirmos, é de interesse discutirmos como é possível um sistema com corpos de mesmo sinal de carga possuir uma solução de equilíbrio estável, como o campo autoconsistente pode influenciá-la e como se mantém a blindagem de Debye.

Um plasma frio de elétrons confinado por uma armadilha de Penning-Malmberg somente admite uma solução de equilíbrio na presença do confinamento radial e axial, e na condição em que o parâmetro de auto-campo  $s_e = 2\omega_p^2/\omega_c^2 \leq 1$  seja satisfeita. A constante  $\omega_p = \sqrt{n_e e^2/(\epsilon_0 m_e)}$  é a frequência de plasma e  $\omega_c = eB_0/m_e$  é a frequência de cíclotron, já  $n_e$  é a densidade de elétrons,  $e$  é a carga fundamental do elétron,  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica no vácuo,  $m_e$  é a massa do elétron e  $B_0$  é a intensidade do campo magnético aplicado. A igualdade define o resultado conhecido como a densidade limite de Brillouin [129] e apresenta o valor máximo admitido por  $s_e$ . A desigualdade deve ser satisfeita, pois, para uma alta densidade de elétrons ( $\omega_p^2 > 2\omega_c^2$ ), o campo elétrico é tão intenso que não é possível confinar radialmente. Dessa maneira, podemos observar o quão influente o autocampo pode ser na estrutura do sistema.

Além do caso visto anteriormente, podemos observar a influência do campo em outra situação, partindo do mesmo parâmetro. Ao se analisar a trajetória de um elétron posto no plasma, vemos que o tipo de movimento que realiza perpendicularmente pode variar. No limite em que  $s_e \ll 1$ , temos na direção radial dois possíveis tipos de movimentos rotacionais. Para altas frequências, temos um elétron girando na frequência de cíclotron. Já para baixas, temos um elétron que gira com frequência  $\omega_D = \omega_p^2/(2\omega_c)$ , em que  $\omega_D$  é chamada de *diocotron frequency*. Para  $s_e = 1$ , a trajetória do elétron é livre na direção perpendicular, uma vez que os campos se compensam. Ao incluir efeitos térmicos, conclui-se que a frequência de giro, na direção radial, tem que estar contida no intervalo entre a *diocotron frequency* e a frequência de cíclotron, para que ocorra o confinamento. Além disso, devido ao confinamento radial e axial, os elétrons ficam retidos em uma certa região do espaço. Sendo assim, ao criarmos uma perturbação no meio com a presença de uma nova carga, os elétrons irão se redistribuir de tal maneira a anular o potencial criado pela perturbação. Sendo assim, a blindagem de Debye é mantida [121].

A análise de estruturas de amplitude arbitrária em plasma é um campo tradicional de pesquisa [2, 1, 9, 130] e com contínuo interesse [6, 10, 23, 104]. Entretanto, parte dos casos encontrados na literatura atêm-se às soluções não-lineares de um fluido de plasma restrito à

aproximação de plasma frio. Essa abordagem pode ser uma desvantagem para casos mais realísticos. Com o objetivo de buscar uma melhor descrição, incluiremos na nossa análise os efeitos térmicos e de dissipação, devido ao choque com partículas neutras. Com esse fim, iremos considerar estruturas não-lineares, por meio do modelo hidrodinâmico, juntamente com o método das variáveis Lagrangianas, apresentado no capítulo 3. Esse tratamento tem sido reconhecido e empregado em plasmas de elétrons em diversas situações [6, 11, 12].

No modelo que adotaremos, a expansão do sistema é originada pelo campo repulsivo coletivo dos elétrons e pelo gradiente de concentração de partículas (efeito térmico). Já a compressão, é obtida pela força harmônica, proveniente do confinamento externo. De acordo com a relevância dos termos expansivos, duas situações limites básicas serão consideradas, uma relacionada aos efeitos térmicos e outra relacionada à interação Coulombiana. Por meio do processo que adotaremos, também será obtida as condições de validade de cada situação limite em termos de parâmetros físicos, assim como fizemos no capítulo anterior. Na armadilha Penning-Malmberg, o confinamento radial proporcionado pela presença de um campo magnético axial uniforme não deveria levar a uma difusão na direção radial, uma vez que a força magnética confina radialmente as partículas carregadas. Porém, efeitos de transporte foram observados nessa direção, e sua origem pode ser compreendida por algumas causas, sendo delas: colisões com átomos, assimetrias angulares no campo magnético ou no recipiente de confinamento, resistência devido à parede finita e efeitos de radiação. Para altas pressões de fundo, o fenômeno de transporte exibe comportamento típico de colisões com átomos [55, 62]. Sendo assim, iremos considerar colisões devido à presença de átomos. Entretanto, iremos supor que essas colisões são de baixa frequência, de tal maneira que a geometria do sistema ainda se mantenha unidimensional. Os resultados apresentados e discutidos na seção 6.4 foram expostos no artigo [131].

### 6.3 Confinamento harmônico

O confinamento axial de partículas carregadas é proporcionado pela aplicação de uma diferença de potencial  $V$  nos extremos da armadilha de Penning-Malmberg. Então, sejam as dimensões da armadilha dadas por um cilindro de raio  $b$  e de comprimento  $2L$ , e as dimensões do plasma dadas por um raio  $r_b$  e de comprimento  $2z_b$ , temos que o potencial,  $\phi(r, z)$ , criado pela diferença de potencial aplicada é expressa por [60, 65, 70]

$$\phi(r, z) = \frac{V}{2L^2 + b^2}(r^2 - 2z^2). \quad (6.1)$$

Pela Eq. (6.1), vemos que na direção de propagação temos um potencial harmônico que cresce com a diferença de potencial aplicada e decresce com o quadrado das dimensões da armadilha. Dessa maneira, a frequência do confinamento harmônico externo na direção  $\hat{e}_z$  pode ser expressa por  $\omega_z = (4V/(2L^2 + b^2))^{\frac{1}{2}}$ . Além disso, a Eq. (6.1) obedece a equação de Laplace.

## 6.4 Dinâmica de um plasma de elétrons unidimensional térmico colisional em uma armadilha de Penning-Malmberg

Um plasma de elétrons térmico, confinado em uma armadilha de Penning cilíndrica e na presença de átomos, pode ser descrito unidimensionalmente pelas seguintes equações hidrodinâmicas,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n v) = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{m n} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{e E}{m} - \omega_z^2 z - \nu v, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{e n}{\varepsilon_0}. \quad (6.4)$$

Por definição, o sistema é composto por elétrons (carga  $-e$ , massa  $m$ ) com densidade  $n = n(z, t)$ , velocidade do fluido  $v = v(z, t)$  e pressão  $p = p(z, t)$ . Além disso,  $E = E(z, t)$  é o campo elétrico interno,  $\varepsilon_0$  é a permissividade elétrica no vácuo e com frequência de colisão  $\nu$ . O confinamento é providenciado por um campo harmônico externo com frequência  $\omega_z$ . Além disso, supomos processos rápidos, de tal maneira que processos de transporte de calor podem ser negligenciados. Nesse contexto, para efeitos térmicos, usaremos a mesma equação de estado adiabática apresentada no capítulo 2,  $p = n_0 k_B T (n/n_0)^\gamma$ . Para uma dinâmica unidimensional é adequado escolher  $\gamma = 3$ . Este valor corresponde a uma compressão em 1D. Além disso, colisões de baixa frequência também serão assumidas, condição necessária para que a propagação permaneça essencialmente unidimensional.

Para esse problema, as variáveis Lagrangianas serão escritas da seguinte forma,

$$\xi = z - \int_0^\tau v(\xi, \tau') d\tau', \quad \tau = t, \quad (6.5)$$

juntamente com suas respectivas derivadas,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \left(1 + \int_0^\tau \frac{\partial v(\xi, \tau')}{\partial \xi} d\tau'\right) \frac{\partial}{\partial z}. \quad (6.6)$$

A equação da continuidade (6.2) é, então, convertida para

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \left(1 + \int_0^\tau \frac{\partial v(\xi, \tau')}{\partial \xi} d\tau'\right) n \right] = 0, \quad (6.7)$$

com solução,

$$n = n(\xi, 0) \left(1 + \int_0^\tau \frac{\partial v(\xi, \tau')}{\partial \xi} d\tau'\right)^{-1}, \quad (6.8)$$

em que  $n(\xi, 0)$  é a densidade de elétrons em  $\tau = 0$ .

A lei de Gauss, Eq. (6.4), nas novas coordenadas é convertida em

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = -\frac{e}{\varepsilon_0} n(\xi, 0), \quad (6.9)$$

com solução dada por

$$E = -\frac{e}{\varepsilon_0} \int n(\xi, 0) d\xi + E_0(\tau). \quad (6.10)$$

A função  $E_0(\tau)$  é uma função arbitrária do novo parâmetro de tempo. Fisicamente,  $E_0(\tau)$  seria associada com um campo externo adicional, além do confinamento harmônico.

A equação restante para ser resolvida é a equação de transporte para o momentum (6.3), a qual se torna

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} = & -\frac{3k_B T}{2m} \left( 1 + \int_0^\tau \frac{\partial v(\xi, \tau')}{\partial \xi} d\tau' \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 \right] \\ & - \omega_z^2 \left( \xi + \int_0^\tau v(\xi, \tau') d\tau' \right) + \frac{\omega_p^2}{n_0} \int n(\xi, 0) d\xi - \nu v - \frac{eE_0}{m}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Há duas contribuições repulsivas na Eq. (6.11). Uma devido ao termo de pressão ( $\sim k_B T$ ) e outra devido ao campo autoconsistente dos elétrons ( $\sim \omega_p^2/n_0$ ). Os efeitos repulsivos devem ser contrabalançados pelo confinamento externo, o segundo termo do lado direito da Eq. (6.11). No que se segue, as soluções da Eq. (6.11) serão analisadas de acordo com a intensidade dos efeitos térmicos e do campo autoconsistente.

### 6.4.1 Efeitos térmicos dominantes

Como hipótese de trabalho, iremos tomar o campo de velocidades como linear dado pela forma

$$v = \xi \dot{\rho} + \dot{Z}_0(\tau), \quad (6.12)$$

em que  $\rho(\tau)$  é uma função adimensional arbitrária, sem perda de generalidade  $Z(0) = 0$  e  $\rho(0) = 1$ . Pela Eq. (6.8), concluímos que

$$n = n(\xi, 0)/\rho(\tau). \quad (6.13)$$

Ao inserir as expressões acima na Eq. (6.11), o resultado é

$$\begin{aligned} \ddot{Z} + \nu \dot{Z} + \omega_z^2(\tau)Z + \frac{eE_0}{m} + \left( \ddot{\rho} + \nu \dot{\rho} + \omega_z^2 \rho \right) \rho^3 \xi = \\ - \frac{3k_B T}{2m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( \frac{n(\xi, 0)}{n_0} \right)^2 \right] + \frac{\omega_p^2 \rho^3}{n_0} \int n(\xi, 0) d\xi. \end{aligned} \quad (6.14)$$

O lado esquerdo da Eq. (6.14), sendo linear em  $\xi$ , deve ser equiparado com o lado direito. Ao derivar esses termos da Eq. duas vezes com respeito a  $\xi$  e uma com respeito a  $\tau$  fornece  $(\omega_p^2/n_0) \times d(\rho^3)/d\tau \times dn(\xi, 0)/d\xi = 0$ . Essa condição está relacionada somente ao termo repulsivo do campo autoconsistente dos elétrons. Tal restrição não pode ser satisfeita em situações não-triviais no qual  $\rho(\tau)$  ou  $n(\xi, 0)$  não são constantes. Conseqüentemente, a única possibilidade significativa ocorre quando a repulsão dos elétrons pode ser negligenciada em comparação aos efeitos térmicos.

Após desprezar o campo coletivo dos elétrons na Eq. (6.14), ainda é necessário, por consistência, impor que a contribuição devido ao termo de pressão tenha que ser uma função linear de  $\xi$ , da mesma maneira em que o lado esquerdo da equação o é. Por inspeção, essa condição implica em

$$n(\xi, 0) = n_0 \sqrt{1 + c_1 \frac{\xi}{\xi_0} - \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^2}, \quad |\xi| \leq \xi_0. \quad (6.15)$$

A constante  $c_1$  é uma constante numérica adimensional, e  $\xi_0 > 0$  é uma posição de referência. Fora do plasma de elétron, em que  $|\xi| \geq \xi_0$ , impomos  $n(\xi, 0) = 0$ . Vamos nos ater a discussão do problema na região  $|\xi| \leq \xi_0$ . Também, sem perda de generalidade, na Eq. (6.15), foi tomado  $n(0, 0) = n_0$ , assim definimos  $n_0$ . Além disso, por simplicidade, vamos considerar somente densidades de equilíbrio simétricas, sendo assim,  $c_1 \equiv 0$ .

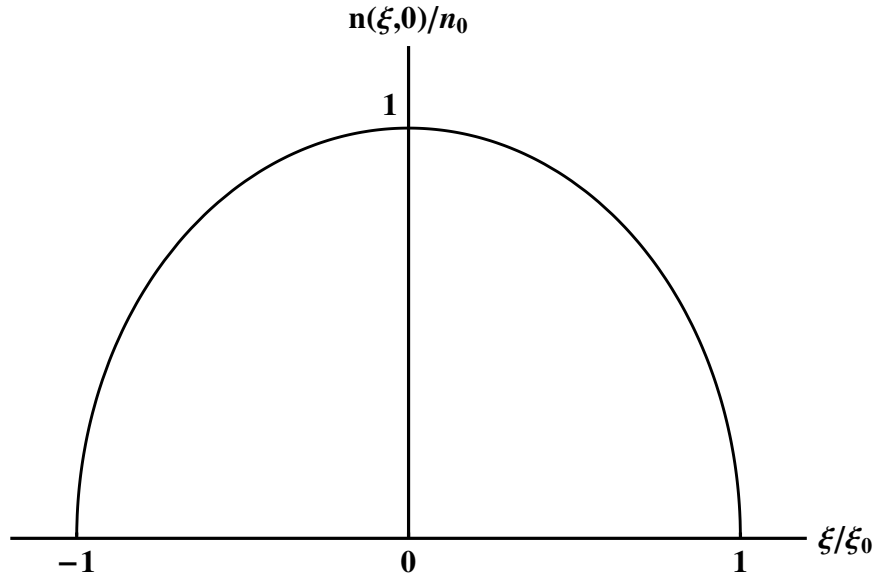


Figura 17 – Densidade de elétrons da Eq. (6.15) com  $c_1 = 0$ .

Da Eq. (6.14), obtemos:

$$\ddot{\rho} + \nu\dot{\rho} + \omega_z^2\rho = \frac{3k_B T}{m\xi_0^2} \frac{1}{\rho^3} \quad (6.16)$$

e

$$\ddot{Z} + \nu\dot{Z} + \omega_z^2(\tau)Z = \frac{eE_0}{m} \quad (6.17)$$

A Eq. (6.16), assim como Eq. (5.23), é uma equação de Pinney dissipativa. A Eq. (6.17), por sua vez, descreve o movimento do centro de massa, lavando-nos a perceber que o seu movimento não é alterado por efeitos não-lineares e descreve oscilações amortecidas forçadas por um campo externo.

Por inspeção, é possível de identificar a solução de equilíbrio dada por

$$\rho_{eq} = \left( \frac{3k_B T}{m\omega_z^2 \xi_0^2} \right)^{1/4}. \quad (6.18)$$

A existência de um equilíbrio estável é devido ao sinal da contribuição que possui um termo inverso cúbico, a qual existência, por sua vez, advém da concavidade da densidade dada pela Eq. (6.15).

A solução aproximada da equação de Pinney dissipativa é dada por

$$\rho^2 = \rho_{eq}^2 + 2A^2 e^{-\nu\tau} + 2A e^{-\nu\tau/2} \left( \rho_{eq}^2 + A^2 e^{-\nu\tau} \right)^{1/2} \cos(2\omega_z(\tau - \tau_0)). \quad (6.19)$$

As constantes  $A, \tau_0$  são constantes de integração. No caso não amortecido ( $\nu = 0$ ), a Eq. (6.19) fornece oscilações no intervalo  $I = \{\rho > 0 \mid \sqrt{\rho_{eq}^2 + A^2} - |A| \leq \rho \leq \sqrt{\rho_{eq}^2 + A^2} + |A|\}$ , com o

parâmetro  $|A|$  sendo a amplitude inicial. Além disso, uma vez que  $\nu/\omega_z \ll 1$ , durante um período de oscilação  $\tau = \pi/\omega_z$ , a quantidade  $|A| \exp(-\nu\tau/2)$  não muda muito e, assim, comporta-se como uma amplitude dependente do tempo que varia lentamente.

Da Eq. (6.19), temos que  $\rho(0) = 1$ , o que implica em

$$\cos(2\omega\tau_0) = \frac{1 - \rho_{eq}^2 - 2A^2}{2A(\rho_{eq}^2 + A^2)^{1/2}}, \quad (6.20)$$

a qual só faz sentido se  $A^2 \geq (1 - \rho_{eq}^2)^2/4$ , ou de maneira equivalente  $\rho = 1 \in I$ , para evitar  $\cos^2(2\omega_z\tau_0) > 1$ .

Como exemplo, tomemos parâmetros realístico para um plasma de elétrons confinado [64], dados por  $n_0 = 10^{10} \text{ m}^{-3}$ ,  $k_B T = 1 \text{ eV}$ ,  $\xi_0 = 5 \text{ cm}$ ,  $\omega_z = 5\omega_p = 25\nu$ , juntamente com  $\omega_p = 5,64 \text{ MHz}$  e  $\rho_{eq} = 0.72$ . A simulação numérica da Eq. (6.16) e a solução aproximada da Eq. (6.19) fornecem praticamente os mesmos resultados, como podemos ver na Fig. 18.

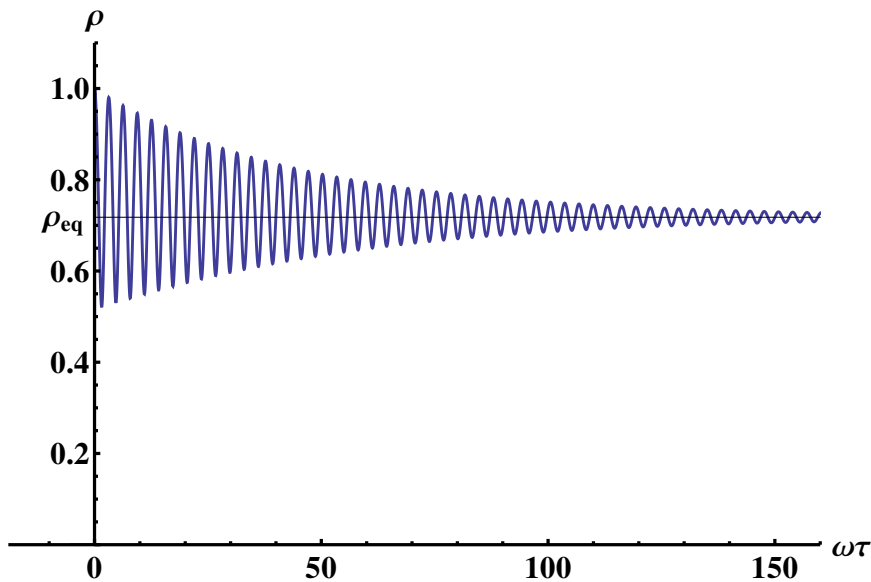


Figura 18 – Função auxiliar  $\rho$  em função do tempo, da Eq. (6.19), aproximando de  $\rho_{eq} = 0.72$ . Parâmetros:  $n_0 = 10^{10} \text{ m}^{-3}$ ,  $k_B T = 1 \text{ eV}$ ,  $\xi_0 = 5 \text{ cm}$ ,  $\omega_z = 5\omega_p = 25\nu$ . Condições iniciais:  $\rho(0) = 1$ ,  $\dot{\rho}(0) = 0$ . Com  $A = 0.24$ ,  $\omega_z\tau_0 = 0.01$ .

Por completude, o campo elétrico é encontrado pela Eq. (6.10), e mostrado na Fig. 19, é

$$E = -\frac{n_0 e \xi_0}{2\epsilon_0} \left( \frac{\xi}{\xi_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2} + \arcsin\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) \right). \quad (6.21)$$

Este campo é simétrico em respeito à origem  $\xi = 0$ . Diferente do caso com MOTs, no qual encontramos a força coletiva somente para obter estimativas das condições de validade dos resultados obtidos, o campo elétrico ainda existe apesar de não ser relevante para a descrição da dinâmica do sistema.

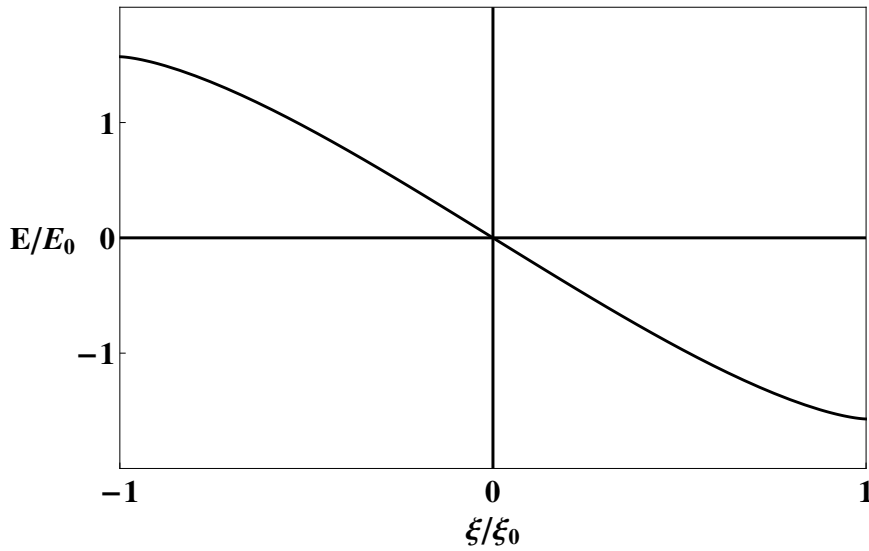


Figura 19 – Campo elétrico da Eq. (6.21). Curva normalizada em relação ao  $E_0 = m \omega_p^2 \xi_0 / (2e)$ .

#### 6.4.1.1 Condição de baixo amortecimento

No contexto da equação de Pinney dissipativa (6.16), a solução aproximada (6.19) é válida para  $\nu \ll \omega$  e não necessariamente para  $\nu \ll \omega_p$ , a qual torna-se uma condição ainda mais restritiva. Entretanto, um plasma com alta frequência de colisão mal se manteria unidimensional. Portanto, é necessário que  $\nu \ll \omega_p$ .

É útil reproduzir ao menos algumas formas explícitas para a taxa de amortecimento. Por exemplo, pode ser originado da colisão com partículas neutras. Nesse caso, podemos estimar

$$\nu = n_N \langle \sigma v \rangle \approx n_N \pi a_0^2 v_T \ll \omega_p, \quad (6.22)$$

em que  $n_N$  é a densidade de partículas neutras,  $\sigma \approx \pi a_0^2$  é a seção de choque de colisão,  $a_0$  é o raio de Bohr e  $v_T = \sqrt{k_B T / m}$  é a velocidade térmica dos elétrons.

Além do mais, é válido notar que, ao considerar o plasma de elétrons como um todo, as colisões elásticas do tipo elétron-elétron não dissipam momentum. Entretanto, uma outra possibilidade é que exista íons de fundo. Então, haveria dissipação de momentum por meio de colisões do tipo elétron-íon. Para processos rápidos no qual a velocidade de íons  $v_i$  pode ser negligenciada em uma primeira aproximação, o arrasto se reduz à  $-\nu(v - v_i) \approx -\nu u$ , com taxa de amortecimento dada pela frequência de Landau  $\nu_{ei}$  para colisão do tipo elétron-íon [132]. Nesse caso, a condição de baixo amortecimento é satisfeita para

$$\nu = \nu_{ei} = \frac{2\omega_p}{3} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \ll \omega_p, \quad \Lambda = \frac{4\pi n_0 \lambda_D^3}{3}, \quad \lambda_D = \frac{u_T}{\omega_p}. \quad (6.23)$$

Assim como no capítulo anterior, iremos obter a condição de validade para dominância dos efeitos térmicos.

## 6.4.2 Condição de validade

Agora, podemos analisar analiticamente a condição para dominância dos efeitos térmicos. Ao comparar os efeitos repulsivos da Eq. (6.14) e da Eq. (6.15), isso nos leva à  $3k_B T \xi / (m \xi_0^2) \gg -eE/m$ , em que o campo elétrico é dado pela Eq. (6.21). Após alguma álgebra, temos que

$$\frac{3k_B T}{m \omega_p^2 \xi_0^2} \gg \rho^3 f(\xi/\xi_0), \quad f(\xi/\xi_0) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2} + \frac{\arcsin(\xi/\xi_0)}{\xi/\xi_0} \right) \approx 1. \quad (6.24)$$

A última estimativa acontece, pois  $f(\xi/\xi_0)$  é limitada superiormente pela unidade para  $|\xi| \leq \xi_0$ , como mostrado na Fig. 20. Dessa forma, podemos analisar a condição acima somente no centro do gás de elétrons e será válida para todo o intervalo.

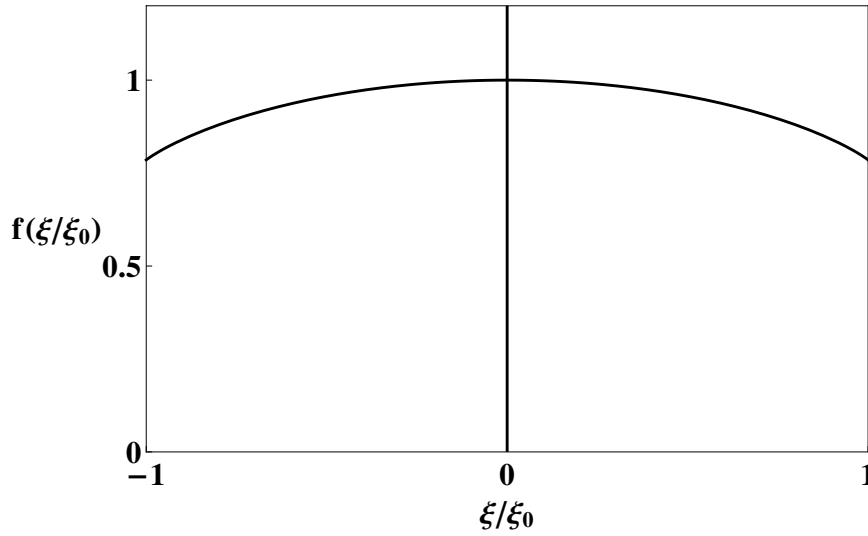


Figura 20 – Função  $f(\xi/\xi_0)$ , Eq. (6.24).

Com o objetivo de se obter uma estimativa, a maior restrição da desigualdade na Eq. (6.24) é para o máximo valor de  $\rho = \rho_{max} \approx \sqrt{\rho_{eq}^2 + A^2} + |A|$ . Sendo assim, a predominância do termo da pressão é válida para

$$\frac{3k_B T}{m \omega_p^2 \xi_0^2} \gg \left( \sqrt{\rho_{eq}^2 + A^2} + |A| \right)^3 \geq \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \rho_{eq}^2 + |1 - \rho_{eq}^2| \right) \right]^3. \quad (6.25)$$

A última desigualdade é devido a condição obtida abaixo da Eq. (6.20). Em termos de parâmetros físicos, a desigualdade (6.25) leva a duas subclasses, como se segue.

### 6.4.2.1 Equilíbrio térmico

O equilíbrio dominado por efeitos térmicos corresponde a

$$\rho_{eq}^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_z^2}{\omega_p^2} \gg \left( \frac{3k_B T}{m \omega_z^2 \xi_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \geq 1. \quad (6.26)$$



### 6.4.2.2 Equilíbrio harmônico

Apesar de, nessa subseção, a repulsão ser dominada pelo termo da pressão, pode acontecer que a força externa seja tão intensa que  $\rho_{eq}^2 \leq 1$ . Essa situação é a que iremos nos referir como equilíbrio dominado pelo confinamento externo, dado por

$$\rho_{eq}^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \geq \left( \frac{3k_B T}{m\omega_z^2 \xi_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \gg \frac{\omega_p^2}{\omega_z^2}. \quad (6.27)$$

Deve ser observado que, para todos os valores de  $\rho_{eq}$ , é necessário que  $\omega_z^2 \gg \omega_p^2$ . Isso se dá, uma vez que o termo da pressão nas equações hidrodinâmicas é compensada pelo confinamento externo, o qual é  $\sim \omega_z^2$ . Consequentemente, negligenciar o termo correspondente à interação Coulombiana ( $\sim \omega_p^2$ ), em comparação aos efeitos térmicos, é necessariamente tomar  $\omega_z^2 \gg \omega_p^2$ . O exemplo na Fig. 18 corresponde ao cenário do equilíbrio harmônico. Para os parâmetros utilizados, o plasma é quase ideal ( $\Lambda \approx 10^7$ ).

## 6.5 Efeitos térmicos desprezíveis

Quando a repulsão Coulombiana domina a dinâmica do plasma, os efeitos térmicos podem se tornar desprezíveis. Dessa maneira, é possível negligenciar o termo proporcional à  $k_B T$  na Eq. (6.11). Nessa situação, o caso sem amortecimento foi resolvido na Ref. [1], ao considerar a existência de íons de fundo, mas na ausência de um confinamento externo.

Ao ignorar efeitos térmicos e diferenciar todos os termos da Eq. (6.11) com respeito a  $\tau$ , obtemos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \nu \frac{\partial v}{\partial \tau} + \omega_z^2 v = 0, \quad (6.28)$$

com solução geral

$$v = e^{-\nu\tau/2} \left( v(\xi, 0) \cos(\Omega'\tau) + \omega X(\xi) \sin(\Omega'\tau) \right), \quad \Omega' = \sqrt{\omega_z^2 - \nu^2/4}. \quad (6.29)$$

A função  $X(\xi)$  é uma função arbitrária com dimensão de comprimento. Iremos considerar somente o caso de baixo amortecimento, de tal maneira que  $\Omega' > 0$ .

Após inserir o campo de velocidades dado pela Eq. (6.29) de volta em Eq. (6.11), temos que

$$X(\xi) = \frac{1}{\Omega' \omega_z} \left( -\omega_z^2 \xi + \frac{\omega_p^2}{n_0} \int n(\xi, 0) d\xi - \frac{\nu v(\xi, 0)}{2} \right). \quad (6.30)$$

Portanto, ao inserir  $X(\xi)$  da Eq. (6.30) na Eq. (6.8), obtemos

$$n = n(\xi, 0) \left[ 1 + \frac{e^{-\nu\tau/2}}{\Omega'} \frac{\partial v(\xi, 0)}{\partial \xi} \sin(\Omega'\tau) + 2 \left( \frac{\omega_p^2 n(\xi, 0)}{\omega_z^2 n_0} - 1 \right) \psi(\tau) \right]^{-1}, \quad (6.31)$$

em que

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\nu\tau/2} \cos(\Omega'\tau) - \frac{\nu e^{-\nu\tau/2}}{2\Omega'} \sin(\Omega'\tau) \right), \quad (6.32)$$

sendo uma função oscilatória que aparecerá frequentemente no que se segue.

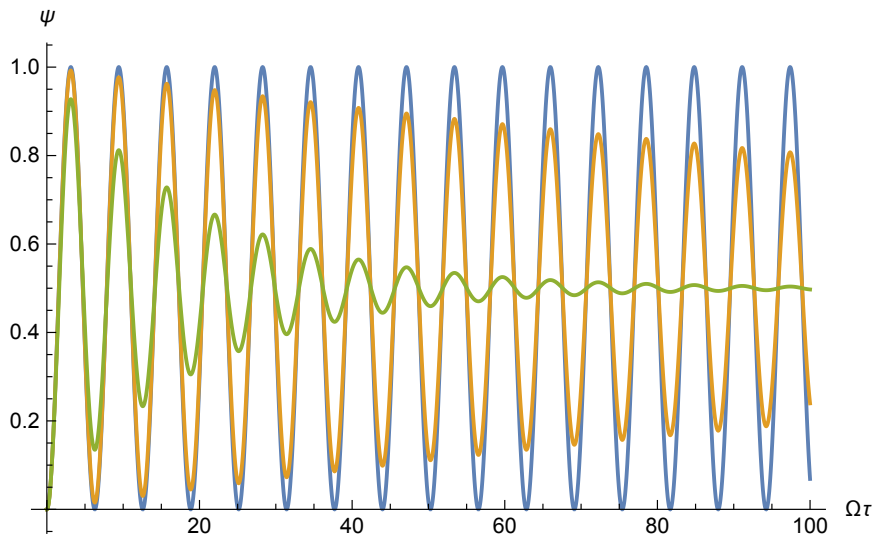


Figura 21 – Função  $\psi$  da Eq. (6.32) para diferentes intensidades de amortecimento. Curva superior, azul:  $\nu/\Omega' = 0$ ; curva do meio, laranja:  $\nu/\Omega' = 1/100$ ; curva inferior, verde:  $\nu/\Omega' = 1/10$ . Temos que  $\psi \rightarrow 1/2$  para  $\tau \rightarrow \infty$ , exceto no caso não amortecido.

O campo elétrico segue da Eq. (6.10), com a escolha  $E_0(\tau) = 0$ . Para finalizar a solução de amplitude arbitrária, a coordenada espacial original é encontrada pela Eq. (6.5) e leva a

$$z = \xi + \frac{e^{-\nu\tau/2}}{\Omega'} v(\xi, 0) \sin(\Omega'\tau) + 2 \left( -\xi + \frac{\omega_p^2}{\omega_z^2 n_0} \int n(\xi, 0) d\xi \right) \psi(\tau). \quad (6.33)$$

Esses resultados generalizam aqueles encontrados no capítulo 3 de [1] e os reproduzem para o caso livre de dissipação ( $\nu = 0$ ) e o caso balanceado ( $\omega_z = \omega_p$ ). Ao combinar as Eqs. (6.10) e (6.33), concluímos que as forças elétrica e harmônica se equilibram de forma assintótica, ou seja  $eE = -m\omega_z^2 z$  para  $\tau \rightarrow \infty$ , como esperado.

Embora as condições iniciais  $n(\xi, 0)$  e  $v(\xi, 0)$  permaneçam gerais, uma condição restritiva surge do requerimento de que a densidade de partículas seja positiva definida. Sendo assim, iremos discutir isso no que se segue.

### 6.5.1 Condições iniciais admissíveis para um plasma frio

Ao supor  $n(\xi, 0) \geq 0$  em toda parte, da Eq. (6.31), temos que  $n(\xi, \tau) \geq 0$  para todo o tempo

$$\frac{\omega_p^2 n(\xi, 0)}{\omega_z^2 n_0} + F(\xi, \tau) \geq 0, \quad (6.34)$$

em que

$$F(\xi, \tau) = e^{-\nu\tau/2} (a \sin(\Omega'\tau) + b \cos(\Omega'\tau)), \quad (6.35)$$

com

$$a = \frac{1}{\Omega'} \frac{\partial v(\xi, 0)}{\partial \xi} + \frac{\nu}{2\Omega'} \left( 1 - \frac{\omega_p^2 n(\xi, 0)}{\omega_z^2 n_0} \right), \quad b = 1 - \frac{\omega_p^2 n(\xi, 0)}{\omega_z^2 n_0}. \quad (6.36)$$

O mínimo para  $F(\xi, \tau)$  ocorre em  $\tau = \tau_*$ , de tal maneira que

$$\Omega'\tau_* = \arctan \left( \frac{\Omega' a - \nu b/2}{\Omega' b + \nu a/2} \right) + \pi = \pi. \quad (6.37)$$

A última igualdade é válida para  $\partial v(\xi, 0)/\partial \xi = 0$ , a qual iremos adotar por simplicidade. Após calcular o valor da Eq. (6.34) para  $\tau = \tau_* = \pi/\Omega'$  e isolar  $n(\xi, 0)$ , temos que

$$\frac{n(\xi, 0)}{n_0} \geq \frac{\omega_z^2}{\omega_p^2} \frac{1}{1 + \exp[\pi\nu/(2\Omega')]} , \quad (6.38)$$

a qual é uma condição restritiva para condição inicial, para o caso em que o campo de velocidades é uniforme. Se a desigualdade (6.38) é violada, eventualmente, teremos que  $n(\xi, \tau)$  se torna negativa em certas regiões. Além disso, nesse caso, a inversão das variáveis Lagrangianas dada pela Eq. (6.33) se torna multivalorada. Dessa forma, não conseguimos obter uma função inversa. Da Eq. (6.38), observamos a influência do balanço da razão  $\omega_z^2/\omega_p^2$  e do fator regularizador do amortecimento, a qual permite pequenos valores de  $n(\xi, 0)$ .

O caso não amortecido ( $\nu = 0$ ) pode ser obtido da Eq. (6.34) sem a condição restritiva para o valor inicial do campo das velocidades, com resultado

$$\frac{n(\xi, 0)}{n_0} \geq \frac{\omega_z^2}{2\omega_p^2} \left[ 1 + \frac{1}{\omega_z^2} \left( \frac{\partial v(\xi, 0)}{\partial \xi} \right)^2 \right] . \quad (6.39)$$

## 6.5.2 Aplicações para um plasma frio

Diferente caso dominado por efeitos térmicos, não há forte restrição para  $n(\xi, 0)$  e nem para a forma geral do campo de velocidades. Isso permite uma construção explícita de diversas classes de soluções, desde que satisfaçam a condição restritiva que obtivemos. Como ilustração, vamos considerar os dois seguintes casos: um plasma localizado homogêneo e um com distribuição gaussiana.

## 6.5.3 Condição inicial homogênea

Com o objetivo de ilustração, iremos supor uma gás de distribuição uniforme para  $\tau = 0$  restrito no intervalo  $|\xi| < \xi_0$ ,

$$n(\xi, 0) = \begin{cases} n_0, & |\xi| < \xi_0; \\ 0, & |\xi| > \xi_0, \end{cases} \quad (6.40)$$

junto com  $v(\xi, 0) = 0$ .

Ao usar as Eqs. (6.9), (6.29) e (6.31), a solução completa para um plasma de elétrons ( $|\xi| < \xi_0$ ) é dada por

$$n = n_0 \left[ 1 + 2 \left( \frac{\omega_p^2}{\omega_z^2} - 1 \right) \psi(\tau) \right]^{-1} , \quad (6.41)$$

$$v = \exp(-\nu\tau/2) \sin(\Omega'\tau) (\omega_p^2 - \omega_z^2) \xi/\Omega' , \quad E = -n_0 e \xi/\epsilon_0 , \quad (6.42)$$

em que  $\psi(\tau)$  foi definido na Eq. (6.32).

As variáveis Lagrangianas seguem da Eq. (6.33) e levam a

$$\xi = z \left[ 1 + 2 \left( \frac{\omega_p^2}{\omega_z^2} - 1 \right) \psi(\tau) \right]^{-1} . \quad (6.43)$$

O resultado acima é válido para uma região interna ao sistema. Portanto, o domínio do plasma fica restrito à  $|z| \leq \xi_0 \left[ 1 + 2 \left( \omega_p^2 / \omega_z^2 - 1 \right) \psi(\tau) \right]$ . Assintoticamente, tende para  $|z| \leq \omega_p^2 \xi_0 / \omega_z^2$ , uma vez que  $\psi(\tau) \rightarrow 1/2$  as  $\tau \rightarrow \infty$ . Consequentemente,  $n \rightarrow n_0 \omega_z^2 / \omega_p^2$  para um limite de longo tempo. Como esperado, um forte confinamento ( $\sim \omega_z^2$ ) produz uma solução mais localizada, enquanto que, para altas densidades de elétrons ( $\sim \omega_p^2$ ), leva ao efeito oposto. Vale a pena notar que a solução se torna estacionária para quando  $\omega = \omega_p$ , a qual nesse caso representa um estado de equilíbrio.

A densidade dada pela Eq. (6.41) é positiva definida para todo o tempo sob a condição

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_z^2} > \frac{1}{1 + \exp[\pi \nu / (2 \Omega')]} , \quad (6.44)$$

de acordo com a Eq. (6.38). A restrição assinalada pela Eq. (6.44) é necessária para evitar soluções explosivas associadas à quebra da onda. Nessas soluções, a densidade e o gradiente da velocidade explodem para um tempo muito longo. Finalmente, uma vez que o plasma de elétrons é espacialmente homogêneo, efeitos de temperatura são nulos automaticamente.

#### 6.5.4 Condição inicial Gaussiana

Um sistema infinito com uma concentração inicial Gaussiana de elétrons pode ser descrito por

$$n(\xi, 0) = \frac{n_0 \omega_z^2}{2 \omega_p^2} \left( 1 + \Delta \exp(-\xi^2 / \xi_0^2) \right) , \quad v(\xi, 0) = 0 , \quad (6.45)$$

em que  $\Delta$  e  $\xi_0$  são parâmetros positivos. Segue que a restrição (6.38) é satisfeita.

Pela Eq. (6.31), a solução exata da densidade é expressa por

$$n(\xi, \tau) = \frac{n_0 \omega_z^2}{2 \omega_p^2} \frac{\left[ 1 + \Delta \exp(-\xi^2 / \xi_0^2) \right]}{\left[ 1 + \left( -1 + \Delta \exp(-\xi^2 / \xi_0^2) \right) \psi(\tau) \right]} , \quad (6.46)$$

em termos da mesma função  $\psi(\tau)$  definida em Eq. (6.32). Assintoticamente, temos que  $n \rightarrow n_0 \omega_z^2 / \omega_p^2$ .

Ao retornamos às Eqs. (6.9) e (6.29), a velocidade e o campo elétrico são dados por

$$v = \frac{\omega_z^2 \xi_0}{2 \Omega'} \exp(-\nu \tau / 2) \sin(\Omega' \tau) \left[ -\frac{\xi}{\xi_0} + \frac{\sqrt{\pi} \Delta}{2} \operatorname{Erf} \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right) \right] , \quad (6.47)$$

$$E = -\frac{m \omega_z^2 \xi_0}{2 e} \left[ \frac{\xi}{\xi_0} + \frac{\sqrt{\pi} \Delta}{2} \operatorname{Erf} \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right) \right] . \quad (6.48)$$

Uma vez que  $\tau = t$ , o último passo necessário para integração é a inversão das coordenadas Lagrangianas para coordenadas físicas. Feito isso, temos que a Eq. (6.33) leva a

$$\frac{z}{\xi_0} = \frac{\xi}{\xi_0} + \left[ -\frac{\xi}{\xi_0} + \frac{\sqrt{\pi} \Delta}{2} \operatorname{Erf} \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right) \right] \psi(\tau) . \quad (6.49)$$

Apesar da Eq. (6.49) representar uma equação altamente transcendental, é possível resolvê-la numericamente para obter  $\xi$  como função de  $(z, t)$ , desde que os parâmetros sejam fornecidos. Uma vez que  $0 \leq \psi(\tau) < 1$ , pode ser mostrado que a solução é única. Um exemplo de tal processo é mostrado na Fig. 23.

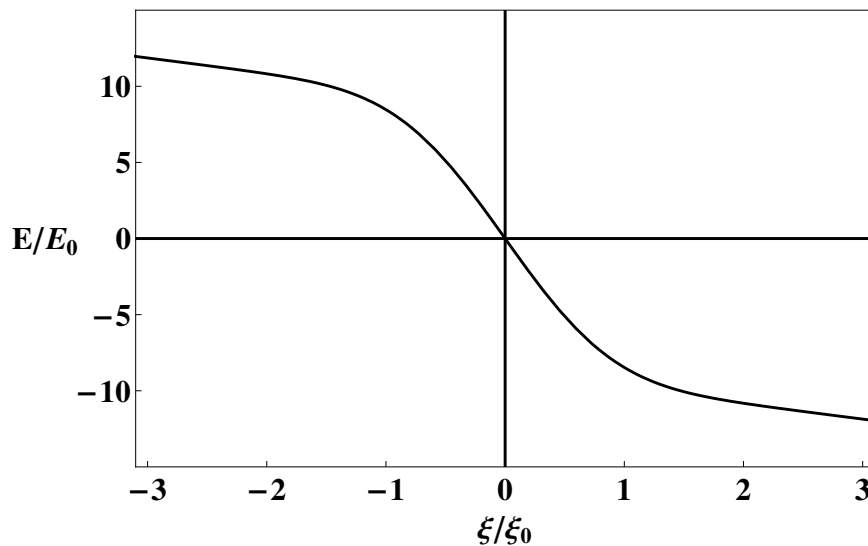


Figura 22 – Campo elétrico da Eq. (6.48), com  $\Delta = 10$ . Curva normalizada em relação ao  $E_0 = m \omega_z^2 \xi_0 / (2e)$ .

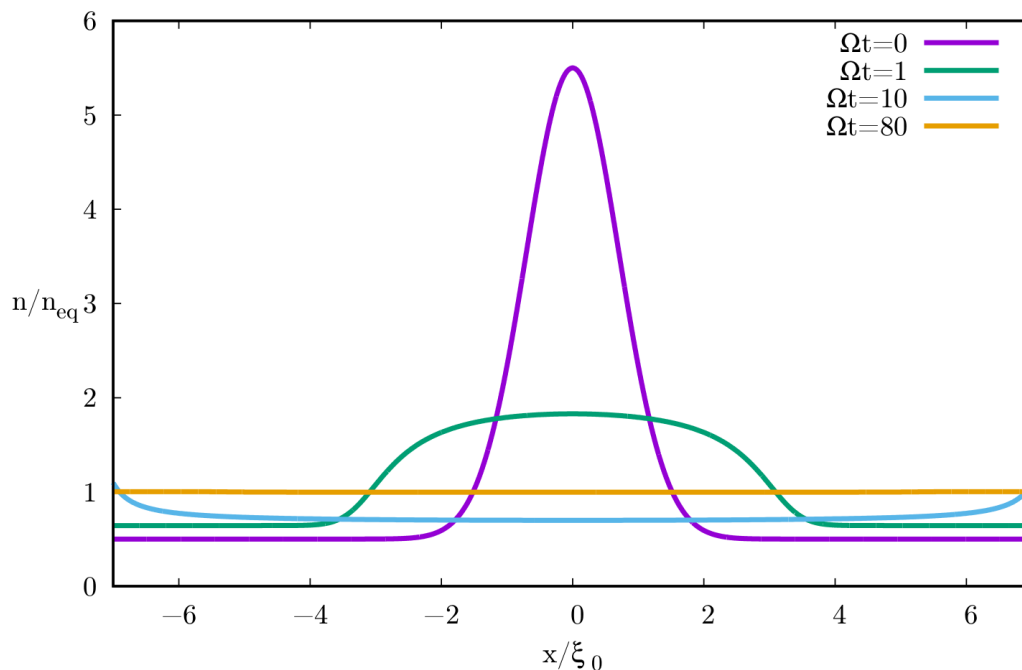


Figura 23 – Distribuição da densidade dada pela Eq. (6.46), no referencial do laboratório. Curva normalizada pelo valor assintótico  $n_{eq} = (\omega_z^2 / \omega_p^2) n_0$ , com  $\Delta = 10$ ,  $\nu / \Omega' = 1/10$  para diferentes tempos.

Além disso, ao usarmos a Eq. (6.11), pode ser mostrado que a hipótese de um plasma de elétrons frios é satisfeita se

$$\frac{k_B T}{m} \ll \frac{\omega_p^4 \xi_0^2}{\omega_z^2 \Delta (1 + \Delta)}. \quad (6.50)$$

No caso particular, se não há aglomeração inicial ( $\Delta \approx 0$ ), o plasma se torna homogêneo em toda parte - ver Eq. (6.46) - e os termos devido ao gradiente de pressão são automaticamente desprezíveis, como manifestado na Eq. (6.50).

Nessa discussão, desenvolvemos um modelo para o plasma de elétrons colisional em uma armadilha de Penning-Malmberg, encontramos uma solução analítica aproximada para o limite térmico e soluções analíticas exatas para o limite Coulombiano. Dessa forma, generalizamos os resultados contidos no livro [1].

## 6.6 Plasma de antiprótons

Antiprótons são a contraparte da antimatéria dos prótons, ou seja, compartilha as mesmas características físicas dos prótons (massa e tamanho), porém com uma carga oposta (negativa). De forma natural, são produzidos pela colisão de raios cósmicos de alta energia com átomos na atmosfera. Também, são partículas estáveis, porém como vivemos num mundo dominado pela matéria - e não pela antimatéria - qualquer colisão com prótons aniquila as duas partículas. Dessa forma, não podem ser armazenados por meio de paredes sólidas ou conter qualquer matéria ordinária dentro [133].

O início do estudo com antiprótons se dá no anos 50, quando os estudavam com energia da ordem de GeV e com velocidades próximas da velocidade da luz. Na época, a sua produção era obtida por meio de colisões de prótons com a matéria comum, as quais geravam antiprótons em uma pequena fração dessas colisões. Na sequência, no CERN (*Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*), estudavam-se partículas fundamentais por meio de colisões entre prótons e antiprótons, enquanto que, no Fermilab, essas colisões serviam para o estudo de quarks. Em ambos os casos, ainda eram necessárias altas energias. Contudo, com o avanço tecnológico, foi possível obter e armazenar antiprótons da ordem de MeV por meio do LEAR (*Low Energy Antiproton Ring*). Entretanto, essa energia ainda é muito alta em comparação com a energia necessária para o estudo de antiprótons frios e, por consequência, para a formação de anti-hidrogênio. Na Fig. 24, podemos ver a evolução no resfriamento. Para alcançar tais energias, é necessário armazenar os antiprótons em uma armadilha de íons, geralmente na forma de uma armadilha de Penning-Malmberg, e resfriá-los por meio de técnicas variadas.

Entre as técnicas mais utilizadas para resfriar os antiprótons após o confinamento numa armadilha de íons, temos os resfriamentos: por elétrons, evaporativo e adiabático [42, 72, 133, 134, 135]. O primeiro é geralmente usado como o primeiro processo de resfriamento e os outros são utilizados para obter temperaturas da ordem de alguns Kelvins. O princípio utilizado pelo primeiro método consiste no equilíbrio térmico, ou seja, os antiprótons com maior temperatura são colocados para colidir com elétrons que estão em uma temperatura menor. Logo, após sucessivas colisões, o sistema atinge uma temperatura em comum. Esse processo também pode ser realizado com pósitrons [71, 136]. Após esse processo, pode-se utilizar o resfriamento evaporativo, que consiste em deixar escapar as partículas mais energéticas - como já comentado, a mesma técnica é utilizada para produção de BECs -, contudo esse tipo de técnica faz perder muitas partículas, o que pode ser um problema para obter grandes quantidades de antiprótons em temperaturas baixas. Uma outra alternativa é o resfriamento adiabático, o qual focaremos no que se segue.

O resfriamento adiabático consiste na diminuição lenta da frequência,  $\omega_z(t)$ , do potencial

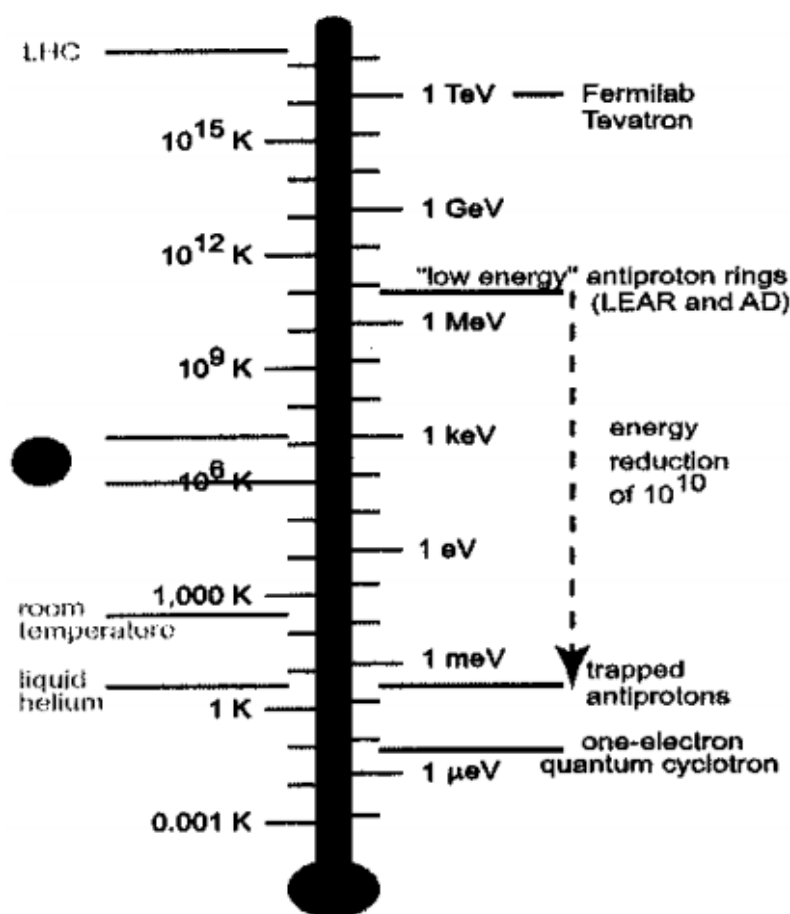


Figura 24 – Escala termométrica logarítmica retirada de Ref. [131]. Representa a evolução no resfriamento de antiprótons.

harmônico confinador, de tal forma que a quantidade  $E/\omega_z$  permaneça aproximadamente constante, sendo  $E$  a energia do sistema. Dessa maneira, o método só é aplicável quando a energia da amostra é menor que a do poço de potencial, por isso é necessário usar outra técnica de resfriamento previamente. Pela Eq. (6.1), vemos que a frequência depende do valor da diferença de potencial aplicada. Dessa forma, conforme vamos diminuindo a voltagem, a força restauradora realiza um trabalho negativo e aumenta o volume da amostra. Conseqüentemente, diminui a sua temperatura sem variar a entropia. A condição para isso acontecer é dada para  $|d\omega_z/dt|/\omega_z \ll \omega_z$ , isto é,  $\omega_z(t)$  varia muito pouco durante um período de oscilação. Com o uso dessa técnica, é possível alcançar temperaturas de 3.5 K [42]. Diferente do resfriamento evaporativo, não há perdas de partículas durante o resfriamento, porém como a amostra cresce seu volume com o passar do tempo, a técnica pode não ser a mais viável se o objetivo for obter grandes quantidades de antiprótons em uma região muito pequena.

Vale a pena notar, que diferente do estudo feito para o plasma de elétrons, aqui a armadilha possui um potencial que varia com o tempo. Logo, o potencial harmônico também dependerá do tempo. Além disso, também consideraremos efeitos térmicos. Outra característica importante é que sistemas de antiprótons tendem a ser diluídos. Conseqüentemente, a frequência de colisões é baixa em um plasma fracamente acoplado. Então, no que se segue, iremos estudar amplitudes de grande oscilações de um plasma de antiprótons no limite no qual os efeitos térmicos e autoconsistente

são relevantes em relação ao outro. Para isso, utilizaremos o método das variáveis Lagrangianas. Também, por meio do método variacional dependente do tempo, estudaremos a dinâmica para quando ambos os efeitos são relevantes. Os resultados apresentados e discutidos na primeira seção foram expostos no artigo [137].

## 6.7 Dinâmica de um plasma de antiprótons em uma armadilha de Penning-Malmberg dependente do tempo

Um plasma de antiprótons térmico confinado em uma armadilha de Penning-Malmberg dependente do tempo pode ser descrito unidimensionalmente pelas seguintes equações hidrodinâmicas,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(nv) = 0, \quad (6.51)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{mn} \frac{\partial p}{\partial z} - \omega_z^2(t)z - \frac{eE}{m}, \quad (6.52)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{e\sigma_{\perp}n}{\varepsilon_0} \quad (6.53)$$

em que  $n = n(z, t)$  é a densidade ao longo do eixo  $z$ ,  $v = v(z, t)$  é a velocidade do fluido,  $E = E(z, t)$  é o campo elétrico,  $m$ ,  $-e$  são, respectivamente, a massa do próton e a carga fundamental do elétron,  $\sigma_{\perp}$  é a densidade bidimensional perpendicular ao plano, e  $\varepsilon_0$  é a permissividade elétrica no vácuo. O confinamento é providenciado por um campo harmônico externo com frequência dependente do tempo  $\omega_z(t)$ . Como a frequência é lentamente diminuída no tempo, a energia do sistema permanece aproximadamente constante. Nesse contexto, para efeitos térmicos, usaremos a mesma equação de estado adiabática,  $p = n_0 \kappa_B T_0 (n/n_0)^3$ , em que  $n_0, T_0$  são a densidade e temperatura de referências ( $\kappa_B$  é a constante de Boltzmann). Por fim, motivados pelo resfriamento adiabático de íons [42], adotaremos a seguinte forma pra a dependência temporal da frequência de confinamento,

$$\omega_z(t) = \frac{\omega_0}{(1 + \Omega t)^{\gamma}}, \quad (6.54)$$

em que  $\omega_0, \Omega$  e  $\gamma$  são constantes positivas. Para frequências que variam lentamente no tempo, temos que  $|\dot{\omega}_z|/\omega_z \ll \omega_z$ , ou  $\gamma\Omega \ll \omega_0(1 + \Omega t)^{1-\gamma}$ , o que é válido [42] para todos os tempos  $t \geq 0$  dado  $\gamma \leq 1$  e  $\gamma\Omega \ll \omega_0$ .

Para esse problema, as variáveis Lagrangianas serão escritas da seguinte forma

$$\xi = z - \int_0^{\tau} v(\xi, \tau') d\tau', \quad \tau = t, \quad (6.55)$$

juntamente com suas respectivas derivadas,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \left(1 + \int_0^{\tau} \frac{\partial v(\xi, \tau')}{\partial \xi} d\tau'\right) \frac{\partial}{\partial z}. \quad (6.56)$$

A equação da continuidade (6.51) é, então, convertida para

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \left(1 + \int_0^{\tau} \frac{\partial v(\xi, \tau')}{\partial \xi} d\tau'\right) n \right] = 0, \quad (6.57)$$



com solução

$$n = n(\xi, 0) \left( 1 + \int_0^\tau \frac{\partial v(\xi, \tau')}{\partial \xi} d\tau' \right)^{-1}, \quad (6.58)$$

em que  $n(\xi, 0)$  é a densidade dos antiprótons em  $\tau = 0$ .

A lei de Gauss, (6.53), nas novas coordenadas é convertida em

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = -\frac{e\sigma_\perp}{\varepsilon_0} n(\xi, 0), \quad (6.59)$$

com solução

$$E = -\frac{e\sigma_\perp}{\varepsilon_0} \int_0^\xi n(\xi', 0) d\xi' + E_0(\tau), \quad (6.60)$$

sendo  $E_0(\tau)$  o campo elétrico em  $\xi = 0$ .

A equação restante para ser resolvida é a equação de transporte para o momentum (6.52), a qual se torna

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} = & -\frac{3\kappa_B T_0}{2m} \left( 1 + \int_0^\tau \frac{\partial v(\xi, \tau')}{\partial \xi} d\tau' \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 \right] \\ & - \omega_z^2(\tau) \left( \xi + \int_0^\tau v(\xi, \tau') d\tau' \right) + \frac{\omega_p^2}{n_0} \int_0^\xi n(\xi', 0) d\xi' - \frac{eE_0(\tau)}{m}, \end{aligned} \quad (6.61)$$

com  $\omega_p = \sqrt{n_0 \sigma_\perp e^2 / (m \varepsilon_0)}$ .

Como frequente hipótese de trabalho, vamos adotar

$$v = \dot{Z}(\tau) + \dot{\rho}(\tau)\xi, \quad (6.62)$$

em que, por definição e sem perda de generalidade,  $Z(0) = 0$  e  $\rho(0) = 1$ , por consequência  $n = n(\xi, 0)/\rho$ . A Eq.(6.62) pode ser interpretada como um expansão da velocidade em torno de  $\xi = 0$ . Portanto, a Eq.(6.61) torna-se

$$\ddot{Z} + \omega_z^2(\tau)Z + \frac{eE_0}{m} + (\ddot{\rho} + \omega_z(\tau)^2\rho)\xi = -\frac{3\kappa_B T_0}{2m\rho^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( \frac{n(\xi, 0)}{n_0} \right)^2 \right] + \frac{\omega_p^2}{n_0} \int_0^\xi n(\xi', 0) d\xi'. \quad (6.63)$$

O lado esquerdo da Eq.(6.63), sendo linear em  $\xi$ , deve ser equiparado pelo lado direito. Isso só acontece em determinadas situações, cujos casos que serão discutidos adiante.

### 6.7.1 Efeitos térmicos dominantes

Ao desprezarmos os efeitos  $\sim \omega_p^2$ , isso impõe que o termo da temperatura seja linear em  $\xi$ , o que leva a

$$n(\xi, 0) = n_0 \left( 1 - \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (6.64)$$

em que  $\xi_0 > 0$  é uma constante, e temos que  $n(\xi, 0) = 0$  fora do intervalo  $-\xi_0 < \xi < \xi_0$ . A Eq.(6.63) separa-se em

$$\ddot{\rho} + \omega_z^2(\tau)\rho = \frac{\kappa^2}{\rho^3}, \quad \kappa^2 = \frac{3\kappa_B T_0}{m\xi_0^2} > 0, \quad (6.65)$$

e

$$\ddot{Z} + \omega_z^2(\tau)Z = -\frac{eE_0}{m}, \quad (6.66)$$

válidas para dentro do plasma. A concavidade da forma quadrática na Eq. (6.64) é escolhida de maneira que  $\kappa^2 > 0$ , assegurando que  $\rho > 0$  para todos os tempos, evitando expressões singulares, portanto tem a mesma forma que na Fig. 17. A Eq. (6.66), por sua vez, descreve o movimento do centro de massa, levando-nos a perceber que o seu movimento não é alterado por efeitos não-lineares e descreve oscilações forçadas pelo campo externo. Além disso, temos que o campo será

$$E = -\frac{n_0 e \sigma_{\perp} \xi_0}{2\epsilon_0} \left[ \frac{\xi}{\xi_0} \left( 1 - \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 \right)^{1/2} + \arcsin^{-1} \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right) \right] + E_0. \quad (6.67)$$

Duas outras expressões também serão úteis para esse estudo, uma que nos forneça a quantidade de partículas confinadas,

$$N = \sigma_{\perp} A_{\perp} \int_{-\xi_0}^{\xi_0} n(\xi, 0) d\xi = \frac{\pi}{2} \sigma_{\perp} A_{\perp} n_0 \xi_0, \quad (6.68)$$

com  $A_{\perp}$  sendo a área de seção transversal do plasma, e outra que nos forneça a temperatura instantânea  $T \sim n^{\gamma-1}$ ,

$$T = T_0 (n/n_0)^2 = \frac{T_0}{\rho^2} \left( 1 - \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 \right). \quad (6.69)$$

### 6.7.1.1 Solução exata e aproximada da equação de Pinney

A Eq. (6.65) é a equação de Pinney para um frequência dependente do tempo [85], sua solução é dada por

$$\rho = (a\rho_1^2 + 2b\rho_1\rho_2 + c\rho_2^2)^{1/2}, \quad (6.70)$$

em que  $\rho_{1,2}$  são soluções independentes do oscilador harmônico dependente do tempo,

$$\ddot{\rho}_i + \omega_z^2(\tau)\rho_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (6.71)$$

sendo  $a, b, c$  constantes tais, que obedecem  $ac - b^2 = \kappa^2/W^2$  e sendo  $W = \rho_1\dot{\rho}_2 - \rho_2\dot{\rho}_1$  o Wronskiano.

Para a frequência adotada na (6.54), a Eq. (6.71) é redutível à equação de Bessel, portanto a equação de Pinney é exatamente resolvida. Detalhes podem ser encontrados no Apêndice B.

Entretanto, embora tenhamos uma solução exata para à Eq. (6.70), a solução geral em termos das funções de Bessel é um tanto complicada. Contudo, é possível utilizarmos soluções aproximadas que são mais fáceis de se trabalhar. Supondo um frequência arbitrária que varia lentamente no tempo, de tal forma que  $\dot{\omega}_z/\omega_z^2 \sim \varepsilon \ll 1$ , é justificável utilizar as soluções WKB,

$$\rho_1 = \frac{\cos \mathcal{T}}{\sqrt{\omega_z(\tau)}}, \quad \rho_2 = \frac{\sin \mathcal{T}}{\sqrt{\omega_z(\tau)}}, \quad \mathcal{T} = \int_0^{\tau} \omega_z(\tau') d\tau', \quad (6.72)$$

e substituir na Eq. (6.70). Nesse contexto, o Wronskiano é  $W = 1$  e

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\omega_z}} \left( a \cos^2 \mathcal{T} + 2b \sin \mathcal{T} \cos \mathcal{T} + c \sin^2 \mathcal{T} \right)^{1/2}, \quad ac - b^2 = \kappa^2. \quad (6.73)$$

Substituição na equação diferencial mostra que a Eq. (6.73) leva a

$$\frac{1}{\rho^4 \omega_z^2} (\rho^3 (\ddot{\rho} + \omega_z^2 \rho) - \kappa^2) = \frac{1}{4\omega_z^4} (3\dot{\omega}_z^2 - 2\omega_z \ddot{\omega}_z) = \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (6.74)$$

mostrando a validade da condição adiabática. Para as condições iniciais  $\rho(0) = 1$  e  $\dot{\rho}(0) = 0$ , temos que

$$a = 1, \quad b = \frac{\dot{\omega}_{z0}}{2}, \quad c = \kappa^2 + \frac{\dot{\omega}_{z0}^2}{4}, \quad (6.75)$$

portanto

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\omega_{z0} \omega_z}} \left[ \left( \omega_{z0} \cos \mathcal{T} + \frac{\dot{\omega}_{z0}}{2\omega_{z0}} \sin \mathcal{T} \right)^2 + \kappa^2 \sin^2 \mathcal{T} \right]^{1/2}, \quad (6.76)$$

em que  $\omega_{z0} = \omega_z(0)$  e  $\dot{\omega}_{z0} = \dot{\omega}_z(0)$ , válida para qualquer frequência arbitrária.

É interessante notar que, de uma certa forma, as oscilações da solução permanecem bloqueadas por um mínimo  $\rho_* = \sqrt{\kappa/\omega_z(\tau)}$  do potencial  $V = V(\rho) = \omega_z^2 \rho^2 / 2 + \kappa^2 / (2\rho^2)$  tal que  $\ddot{\rho} = -\partial V / \partial \rho$ .

A solução correspondente à Eq. (6.76) está plotada na Fig. 25, para parâmetros típicos:  $\kappa_B T_0 = 30 \text{ eV}$  e  $\xi_0 = 1 \text{ cm}$ , que para um plasma de antiprótons leva em  $\kappa/2\pi = 1.5 \times 10^6 \text{ Hz}$ . Supondo  $N = 10^4$  antiprótons confinados com seção circular de raio 2 mm, da Eq. (6.68), derivamos uma densidade de  $n_0 \sigma_{\perp} = 5.1 \times 10^{10} \text{ m}^{-3}$ , logo,  $\omega_p/2\pi = 4.7 \times 10^4 \text{ Hz}$ . Além disso, consideramos a frequência da forma (6.54), com  $\gamma = 1$ ,  $\Omega = 0.02\omega_{z0}$  e  $\omega_{z0}/2\pi = 100 \text{ kHz}$ .

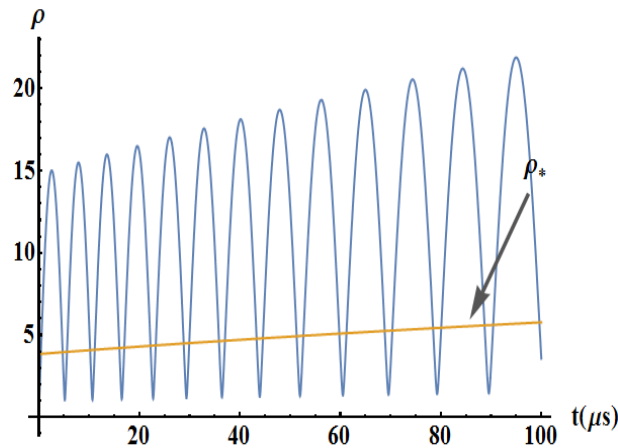


Figura 25 – Solução WKB (6.76) da equação de Pinney. Função  $\omega_z(\tau)$  definido na Eq. (6.54). Condições iniciais:  $\rho(0) = 1$ ,  $\dot{\rho}(0) = 0$ . Parâmetros indicados no texto. Curva monótona  $\rho_*$  está definida no texto.

Similarmente, podemos também evoluir temporalmente a temperatura, entre outras possibilidades. Usando a Eq. (6.69), a temperatura no centro da estrutura ( $\xi = 0$ ) está plotada na Fig. 26, foram adotadas as soluções WKB para o mesmo parâmetros utilizados na Fig. 25.

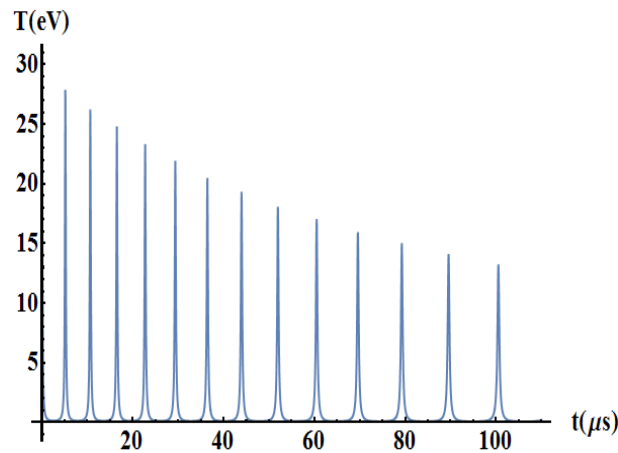


Figura 26 – Temperatura  $T(\xi = 0) = T_0/\rho^2$  no centro, em unidades de energia, para  $\kappa_B T_0 = 30 \text{ eV}$ , utilizando a solução WKB (6.76) e os mesmos parâmetros da Fig. 25.

### 6.7.2 Condições de validade

Assim como já fizemos, iremos discutir as condições de validade para os resultados obtidos. Ao assumir  $E_0 = 0$  e substituir a Eq. (6.64) na Eq. (6.63), temos que a condição de validade para quando os efeitos térmicos são dominantes é dada por

$$\frac{2\kappa^2}{\omega_p^2 \rho^3} \gg f\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) = \left(1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2\right)^{1/2} + \frac{\arcsin(\xi/\xi_0)}{\xi/\xi_0} \geq \pi/2, \quad -\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0. \quad (6.77)$$

A condição (6.77) é satisfeita em experimentos realizáveis [77, 136]. Notamos que, uma vez que  $\rho$  tende a crescer, ambos os termos se tornam menores, porém com diferentes taxas. Dessa forma, os efeitos térmicos vão se tornando desprezíveis devido ao resfriamento. Portanto, desconsiderar os efeitos elétricos se tornam menos justificáveis ao passar do tempo. Como esperado, os efeitos espaciais da carga são intensificados no centro da estrutura, como mostrado na Fig. 27.

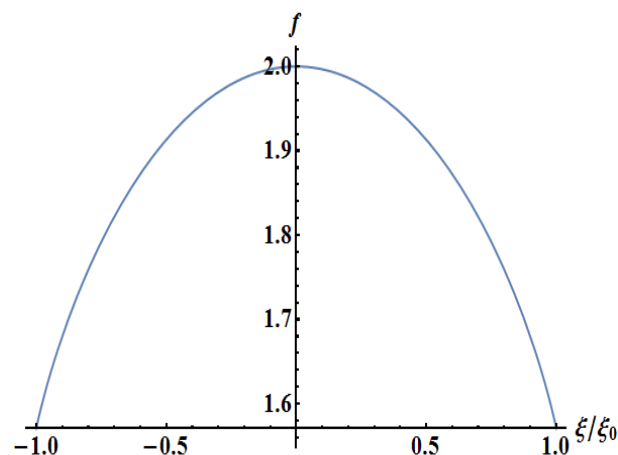


Figura 27 – Função característica espacial dos efeitos da carga  $f = f(\xi/\xi_0)$ . Função definida na Eq. (6.77).

### 6.7.3 Efeitos térmicos desprezíveis

Quando os efeitos devido à repulsão Coulombiana dominam sobre a agitação térmica, o termo  $\sim k_b T$  pode ser negligenciado na Eq. (6.63). Dessa forma,

$$n(\xi, 0) = \begin{cases} n_0, & |\xi| < \xi_0; \\ 0, & |\xi| > \xi_0, \end{cases}, \quad (6.78)$$

que é constante e simétrica. O centro de massa ainda satisfaz à Eq. (6.66), junto com

$$\ddot{\rho} + \omega_z^2(\tau)\rho = \omega_p^2, \quad (6.79)$$

válidas dentro do plasma.

Para um região dentro do plasma ( $(\xi/\xi_0)^2 < 1$ ), temos os seguintes resultados

$$\begin{aligned} n &= \frac{n_0}{\rho}, \\ E &= -n_0 e \sigma_{\perp} \xi / \varepsilon_0 + E_0, \\ N &= 2\sigma_{\perp} A_{\perp} n_0 \xi_0, \quad T = T_0 / \rho^2, \end{aligned} \quad (6.80)$$

com densidade e temperaturas espacialmente homogêneas.

Por simplicidade, vamos tomar  $E_0 = 0$  e  $Z = 0$ . Aqui, também, poderíamos obter uma solução em termos da função de Bessel (Apêndice B) se adotássemos a Eq. (6.54), mas como já vimos, as soluções WKB são de mais fácil manuseio e permitem obter uma solução para uma frequência arbitrária. A Eq. (6.79) descreve um oscilador harmônico forçado dependente do tempo. Então, aplicando o método da variação de parâmetros, junto com as soluções WKB e com as condições iniciais  $\rho(0) = 1$  e  $\dot{\rho}(0) = 0$ , a solução aproximada é dada por

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\frac{\omega_{z0}}{\omega_z(\tau)}} \left( \cos \mathcal{T}(\tau) + \frac{\dot{\omega}_{z0}}{2\omega_{z0}^2} \sin \mathcal{T}(\tau) + \right. \\ &+ \left. \frac{\omega_p^2}{\sqrt{\omega_{z0}}} \sin \mathcal{T}(\tau) \int_0^{\tau} \frac{\cos \mathcal{T}(\tau') d\tau'}{\sqrt{\omega_z(\tau')}} - \frac{\omega_p^2}{\sqrt{\omega_{z0}}} \cos \mathcal{T}(\tau) \int_0^{\tau} \frac{\sin \mathcal{T}(\tau') d\tau'}{\sqrt{\omega_z(\tau')}} \right), \quad \mathcal{T}(\tau) = \int_0^{\tau} \omega_z(\tau') d\tau', \end{aligned} \quad (6.81)$$

que é válida para uma frequência qualquer, com  $\dot{\omega}_{z0} = \dot{\omega}_z(0)$ . Substituindo a Eq.(6.81) diretamente na Eq. (6.79), temos que

$$\frac{\ddot{\rho} + \omega_z^2 \rho - \omega_p^2}{\omega_z^2 \rho} = \frac{1}{4\omega_z^4} (3\dot{\omega}_z^2 - 2\omega_z \ddot{\omega}_z) = \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (6.82)$$

mostrando que a validade adiabática garante que  $\dot{\omega}_z/\omega_z^2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

A solução correspondente (6.81) está plotada na Fig. 28, para parâmetros típicos:  $N = 5 \times 10^5$  antiprótons estão confinados em uma armadilha cilíndrica de área transversal  $A_{\perp} = 12.5 \text{ mm}^2$  e comprimento  $2\xi_0 = 10 \text{ mm}$ , com temperatura inicial  $T_0 = 31 \text{ K}$ . Nesse caso, temos  $\kappa/2\pi = 2.8 \times 10^4 \text{ Hz}$  e  $\omega_p/2\pi = 4.7 \times 10^5 \text{ Hz}$ . Além disso, consideramos uma armadilha da forma (6.54), com  $\gamma = 1$ ,  $\Omega = 0.02\omega_{z0}$  e  $\omega_{z0}/2\pi = 100 \text{ kHz}$ . Similarmente, o resfriamento está representado na Fig. 29. Igualmente, é interessante notar que as oscilações permanecem bloqueadas por um mínimo  $\rho_* = \omega_p^2/\omega_z^2(\tau)$  do pseudo-potencial  $V = V(\rho) = \omega_z^2 \rho^2/2 - \omega_p^2 \rho$ , de tal forma que  $\ddot{\rho} = -\partial V/\partial \rho$ .

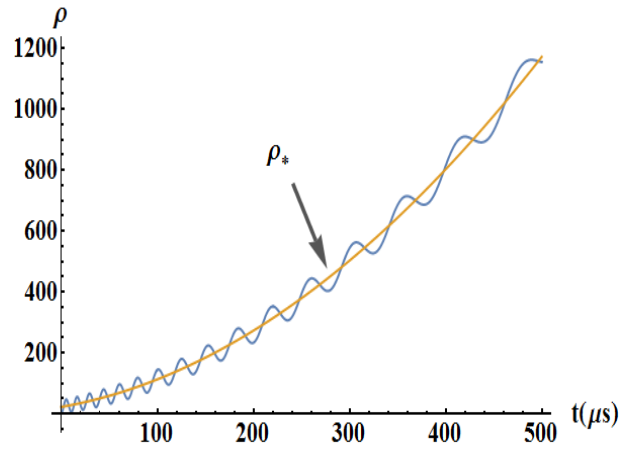


Figura 28 – Evolução temporal da função escalar  $\rho$  dada pela solução aproximada (6.81). Função  $\omega_z(t)$  definida na Eq. (6.54). Condições iniciais:  $\rho(0) = 1$  e  $\dot{\rho}(0) = 0$ . Parâmetros indicados no texto. A curva monótona  $\rho_*$  está definida no texto.

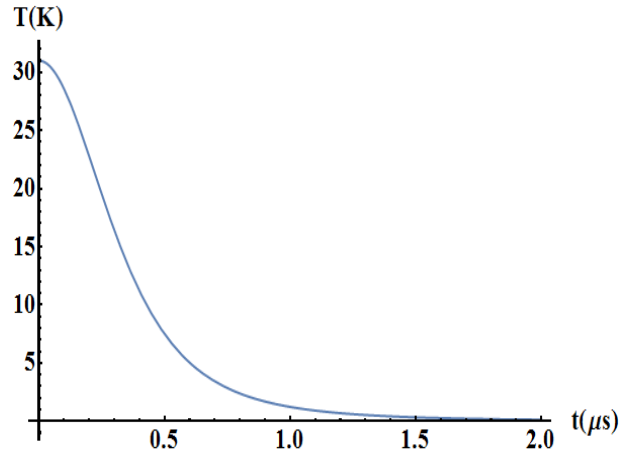


Figura 29 – Temperatura  $T = T_0/\rho^2$ , para  $T_0 = 31$  K, usando a solução aproximada (6.81) e os mesmos parâmetros da Fig. 28.

De acordo com a Eq. (6.63), negligenciar os efeitos térmicos é justificável quando

$$\frac{3\kappa_B T_0}{m\rho^3} \frac{\partial n(\xi, 0)}{\partial \xi} \ll n_0 \omega_p^2 \xi \quad (6.83)$$

é válida dentro do plasma. Longe das fronteiras, a inequação é automaticamente satisfeita devido ao caráter plano de  $n(\xi, 0)$ . Por outro lado, perto da fronteira ( $\xi \simeq \xi_0$ ), podemos estimar que  $\partial n(\xi, 0)/\partial \xi \simeq n_0/\xi_0$ , a qual é similar ao caso no qual os efeitos térmicos são dominantes. Segue da Eq. (6.83) que

$$\frac{\kappa^2}{\rho^3} \ll \omega_p^2, \quad (6.84)$$

A condição (6.84) é satisfeita em experimentos reportados na Ref. [72], em que  $\kappa$  está definida na Eq. (6.65). Notemos que  $\rho$  tende a crescer, então é suficiente nos atentar somente à Eq. (6.84) para  $t = 0$ . Isso se deve às diferentes escalas com as quais a temperatura e a densidade

dependem de  $\rho$ ,  $T \sim \rho^{-2}$ ,  $n \sim \rho^{-1}$ . Dessa forma, os efeitos térmicos se tornam menores rapidamente quando comparados com a repulsão coulombiana.

Nessa discussão, desenvolvemos um modelo para o plasma de antiprótons em uma armadilha de Penning-Malmberg dependente do tempo, encontramos uma solução analítica aproximada para o limite térmico e para o limite Coulombiano. Além disso, descrevemos o comportamento da temperatura.

Finalmente, podemos nos perguntar em qual situação os dois efeitos serão ambos relevantes. Esse caso não é acessível com o método que utilizamos. Podemos observar isso multiplicando todos os termos da Eq. (6.63) por  $\rho^3$ , ao derivar duas vezes com respeito a  $\xi$  e uma em relação a  $\tau$ , obtemos  $\omega_p^2 \times d(\rho^3)/d\tau \times \partial n(\xi, 0)/\partial \xi = 0$ , processo que já fizemos nos casos anteriores. Já que  $\rho$  não é uma constante, essa condição só pode levar em duas condições: (a) tomar  $\omega_p \simeq 0$ , que corresponde a negligenciar os efeitos da repulsão coulombiana, primeiro caso apresentado; (b) tomar  $\partial n(\xi, 0)/\partial \xi \simeq 0$  dentro do plasma, o segundo apresentado. Para estudar a dinâmica na qual ambos os efeitos são relevantes, utilizaremos o método variacional como segue na próxima seção

## 6.8 Método variacional dependente do tempo aplicado à dinâmica de um plasma de antiprótons em uma armadilha dependente do tempo

O desenvolvimento realizado na seção anterior é restrito aos casos limite. Como visto no caso de átomos frios, o método variacional dependente do tempo nos permite desenvolver um modelo para a dinâmica de um sistema hidrodinâmico, no qual é possível manter ambos os efeitos: térmico e repulsão coletiva. Além disso, o *Ansatz* Gaussiano reflete a forma do confinamento, torna possível um tratamento analítico e tem sido aplicado no contexto de um gás de elétrons [18, 19, 113, 138]. Dessa maneira, vamos aplicar o mesmo *Ansatz* nessa seção.

O problema de resolver as equações (6.51)-(6.53), pode ser reinterpretado com um problema correspondente à minimização do funcional da ação  $S = \int dt d^3r \mathcal{L}$ , descrita pela seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = mn \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] + n(V_h - e\phi) - \frac{\epsilon_0}{2\sigma_\perp} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \int dn \int \frac{dp}{n}, \quad (6.85)$$

em que os campos independentes são o potencial velocidade  $\theta = \theta(z, t)$ , de tal forma que  $v = \partial \theta / \partial z$ , a densidade  $n = n(z, t)$ , e o potencial autoconsistente  $\phi = \phi(z, t)$ . Já  $V_h = V_h(z, t)$  é o potencial confinador, em que  $V_h(z, t) = m\omega_z^2(t)z^2/2$ , sendo  $\omega_z(t)$  dada pela Eq. (6.54).

Adotaremos o *Ansatz* Gaussiano normalizado

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{\alpha} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right), \quad (6.86)$$

em que  $A = N/(\sqrt{2\pi}A_\perp\sigma_\perp)$  é uma constante que está relacionada com o número de partículas,  $N = A_\perp\sigma_\perp \int_{-\infty}^{\infty} n(z, 0)dz$ , e

$$\rho(z, t) = \frac{\sqrt{(z - d(t))^2}}{\alpha(t)}. \quad (6.87)$$

As coordenadas dependentes do tempo  $d(t)$  e  $\alpha(t)$ , fornecem, respectivamente, a posição do centro de massa e o comprimento do plasma de antiprótons. Além disso, aqui definimos que o valor de referência da densidade é dado por  $n_0 = N/\alpha_0$ , em que  $\alpha_0 = \alpha(0)$ .

A substituição direta do *Ansatz* na equação da continuidade leva na seguinte solução exata para o campo de velocidade,

$$v = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(z - d) + \dot{d}. \quad (6.88)$$

Uma vez que  $u = \partial\theta/\partial z$ , temos que o campo escalar  $\theta$  na densidade Lagrangiana pode ser escrito por

$$\theta = \left( \frac{\dot{\alpha}}{2\alpha}(z - d)^2 + \dot{d}(z - d) \right), \quad (6.89)$$

aqui desprezamos a contribuição puramente dependente do tempo.

Além disso, a equação de Poisson, por integração direta, tem como solução o potencial

$$\phi = \frac{Ne}{2A_{\perp}\epsilon_0} \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha e^{-\frac{\rho^2}{2}} + (z - d) \text{Erf} \left( \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (6.90)$$

Conseqüentemente, o campo elétrico é dado por

$$E = -\frac{Ne}{2A_{\perp}\sigma_{\perp}\epsilon_0} \text{Erf} \left( \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right). \quad (6.91)$$

Para derivar o comportamento dinâmico das novas coordenadas, computamos a Lagrangiana. Após a substituição das Eqs. (6.86), (6.89) e (6.90) na Eq. (6.85), temos

$$L[d, \dot{d}, \alpha, \dot{\alpha}] = -\frac{A_{\perp}\sigma_{\perp}}{mN} \int \mathcal{L} dV = \frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 + \dot{d}^2) - U(\alpha) - U(d) \quad (6.92)$$

em que

$$U_d = \frac{\omega_z^2(t)}{2} d^2 \quad (6.93)$$

e

$$U_{\alpha} = \frac{\omega_z^2(t)}{2} \alpha^2 + \frac{a}{2} \frac{1}{\alpha^2} - b\alpha. \quad (6.94)$$

que são, respectivamente, o pseudo-potencial correspondente ao modo de dipolo e de oscilação do comprimento, além de introduzirmos as constantes  $a = k_B T N^2 / (2\sqrt{3}\pi m n_0^2 A_{\perp}^2 \sigma_{\perp}^2)$  e  $b = Ne^2 / (2\sqrt{\pi}\epsilon_0 m A_{\perp})$ . Além disso, pela Eq. (6.92), temos que os termos  $\sim \omega_z$  estão relacionados com o confinamento harmônico, o termo  $\sim b$  corresponde ao potencial autoconsistente e aquele  $\sim a$  é devido à pressão adiabática.

Uma vez obtida a Lagrangiana, podemos aplicar as equações de Euler-Lagrange para cada parâmetro variacional e derivar as equações de movimento. A dinâmica do centro de massa é dada por

$$\ddot{d} + \omega_z^2(t)d = 0, \quad (6.95)$$

a qual, como podemos ver, é desacoplada da equação do comprimento, mostrando oscilações dependentes do tempo em torno do ponto de origem. Vemos, também, que o movimento é linear e independente do número de átomos.



A equação de movimento para o comprimento do plasma, em coordenadas adimensionais  $\bar{\alpha} = \alpha/\alpha_0$  e  $\tau = \omega_0 t$ , é

$$\ddot{\bar{\alpha}} + \bar{\omega}_z^2(\tau)\bar{\alpha} = \frac{1}{\omega_0^2} \left( \frac{\omega_T^2}{\bar{\alpha}^3} + \frac{\omega_p^2}{\sqrt{2}} \right), \quad (6.96)$$

ou

$$\ddot{\bar{\alpha}} = -\frac{dU}{d\bar{\alpha}}, \quad (6.97)$$

em que  $\bar{\omega}(\tau) = (1 + \Omega/\omega_0 \tau)^{-\beta}$  e  $U(\alpha)$  é o pseudo-potencial definido por

$$U(\bar{\alpha}, \tau) = \frac{\bar{\omega}^2(\tau)}{2} \bar{\alpha}^2 + \frac{1}{\omega_0^2} \left( \frac{\omega_T^2}{2} \frac{1}{\bar{\alpha}^2} - \frac{\omega_p^2}{\sqrt{2}} \bar{\alpha} \right), \quad (6.98)$$

sendo  $\omega_T = \sqrt{k_B T / (\sqrt{3} m \alpha_0^2)}$  e  $\omega_p = \sqrt{n_0 \sigma_{\perp} e^2 / (\epsilon_0 m)}$  é a frequência de plasma. O comprimento oscilante é descrito por uma equação de Pinney forçada. Expressão similar foi obtida na Ref. [138]. A não-linearidade advém das interações repulsivas (pressão e interação Coulombiana). Da forma do pseudo-potencial, Fig. 6.8, temos que  $\alpha$  sempre irá executar oscilações dependentes do tempo ao redor do mínimo, o qual cresce, à medida que a frequência decresce com o tempo. Caso  $\omega_z(t)$  deixe de atuar em algum momento do tempo, é fácil ver que a solução não é limitada.

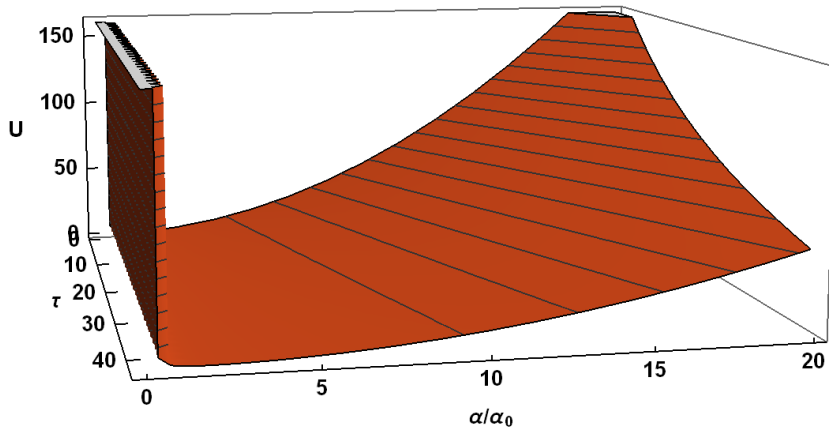


Figura 30 – Pseudo-potencial da Eq. (5.19). Parâmetros indicados no texto.

A Eq. (6.97) pode ser solucionada numericamente para parâmetros acessíveis aos plasmas de antiprótons [77, 74], a saber:  $k_b T = 30$  eV e  $\alpha_0 = 5$  cm. Ao supor  $N = 10^5$  antiprótons com seção reta de 2 mm, derivamos a densidade  $n_0 \sigma_{\perp} = 6.3 \times 10^{10} \text{ m}^{-3}$ , logo,  $\omega_T/2\pi = 1.5 \times 10^5$  Hz e  $\omega_p/2\pi = 1.2 \times 10^5$  Hz. Além disso, consideramos a frequência da armadilha, Eq. (5.59), com  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0.02\omega_0$  e  $\omega_0/2\pi = 100$  KHz. As oscilações não-lineares estão plotadas na Fig. 6.8.

Nessa discussão, desenvolvemos um modelo para o plasma de antiprótons em uma armadilha de Penning-Malmberg dependente do tempo. Aqui, foi possível discutir a dinâmica do sistema para o caso em que os efeitos térmico e Coulombiano são ambos relevantes.

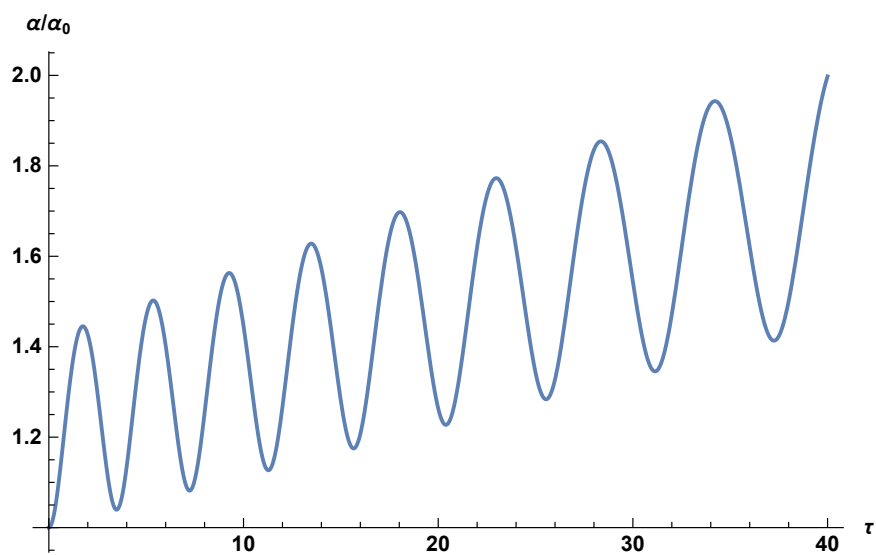


Figura 31 – Solução numérica da Eq. (6.96). Parâmetros indicados no texto. Condições iniciais:  $\alpha = 1$  e  $\dot{\alpha}_0 = 0$ .

## 7 Considerações finais

Nesta tese, estudamos três diferentes tipos de sistemas: átomos frios confinados por uma armadilha magneto-óptica, um plasma de elétrons colisional preso por uma armadilha de Penning-Malmberg e um plasma de antiprótons não colisional sujeito a uma armadilha de Penning-Malmberg dependente do tempo. Nosso objetivo principal foi desenvolver modelos matemáticos (analíticos/semi-analíticos sempre que possível) para descrever a dinâmica da densidade e outras grandezas físicas relevantes em função do tempo. Dessa forma, estruturas não-lineares de grande amplitude dependentes do tempo foram derivadas para os três sistemas. Para isso, utilizamos o modelo de fluidos acrescido das variáveis Lagrangianas. Os três sistemas são análogos, pois o primeiro, nos devidos limites de validade, pode ser descrito formalmente como um sistema de partículas com uma carga elétrica efetiva. Para todos, foram obtidas soluções no regime dominado por efeitos térmicos e outro dominado por interações autoconsistentes (repulsão coletiva). Entretanto, no primeiro sistema, também foi possível acessar numericamente a dinâmica na situação em que os dois efeitos são relevantes para uma determinada dependência para a equação de estado ( $p \sim n^{4/3}$ ), uma vez que foi adotada uma equação de estado politrópica. No limite térmico, para uma equação de estado do tipo adiabática, os sistemas reduzem-se à equação de Pinney dissipativa (uma equação diferencial ordinária bastante frequente em dinâmica não-linear). O termo dissipativo é proveniente do resfriamento Doppler, para o primeiro caso, enquanto que, no segundo caso, o termo de amortecimento é originado pelas colisões binárias com átomos. Já para o sistema não colisional, recaímos numa equação de Pinney para uma frequência dependente do tempo. Essa equação admite soluções aproximadas pelo método WKB e que pode ser mapeada em uma equação de Bessel para determinada forma de dependência temporal. Além disso, para confrontar os resultados que obtivemos, foram utilizados parâmetros reais e vimos que estão de acordo com as situações observadas em experimentos.

O método das variáveis Lagrangianas tem suas limitações. Por meio dele, não é possível manter os efeitos térmicos e autoconsistentes para uma equação de estado adiabática e uma velocidade, como hipótese, linear. Então, para os átomos frios, o método só torna viável o seu tratamento ao considerar uma simetria esférica - o que já foi adotado por outros trabalhos - uma vez que torna o sistema mais fácil de ser tratado. Porém, é fisicamente questionável, já que o campo confinador possui anisotropia na direção axial. Para contornar esses problemas, utilizamos o método variacional dependente do tempo, juntamente com um *Ansatz* Gaussiano, o que nos permitiu manter ambos os efeitos (térmico e repulsão coletiva) e estudar a estabilidade linear do sistema numa geometria cilíndrica. Nesse processo, construímos uma densidade Lagrangiana com um fator dissipativo, o que não é comum no estudo de sistemas contínuos. Também, aplicamos o mesmo método ao plasma de antiprótons para estudar a estabilidade do sistema.

Para finalizar, é necessário falar das limitações dos resultados e dos métodos utilizados, bem como propor futuras aplicações. Primeiramente, consideremos o limite de baixas velocidades para escrever a força devido à armadilha em termos de uma força harmônica e outra dissipativa

proporcional à velocidade. Esse limite, quando tomamos valores experimentais, nos diz que é somente válido em temperaturas já próximos do limite Doppler (menor temperatura obtida pelo aprisionamento), ou seja, seu limite de validade é limitado à temperaturas muito baixas. Também, utilizamos o modelo de dois níveis para descrever os possíveis estados acessíveis com a presença do Efeito Zeeman, o que pode ser contestado, uma vez que a depender dos átomos confinados, outros estados também são possíveis. Já em relação aos métodos, é preciso salientar que os perfis de densidade que obtivemos para os casos tridimensionais são restritos aos fluxos laminares, isto é, as soluções aqui obtidas não admitem estruturas do tipo vórtice. Este tipo de estrutura é tanto observada observadas em MOTs quanto em plasmas de uma componente. Outra limitação importante de ser dita é sobre a validade dos resultados semi-analítico obtidos. Caso as condições de baixo amortecimento não forem satisfeitas, as soluções obtidas perderão sua validade. Como perspectiva de continuação dos estudos aqui realizados, investigar estruturas do tipo vórtice seria o próximo passo. Também, é possível somar a técnica do resfriamento adiabático ao aprisionamento de um MOT ao diminuir lentamente a corrente das bobinas anti-Helmholtz, criando assim uma dependência temporal na força harmônica, dadas as mesmas considerações feitas nesta tese.

# A O Método de Kuzmak-Luke

As demonstrações e discussões aqui feitas são baseadas nas Refs.[86, 89].

O método aqui apresentado é válido estritamente para equações diferenciais de segunda ordem não-lineares. Além disso, é necessário que possuam soluções periódicas e que estas sejam moduladas lentamente com o tempo. Essas equações podem ser dadas pela seguinte equação diferencial,

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + g(\phi, \tilde{\tau}) + \epsilon h\left(\phi, \frac{d\phi}{d\tau}, \tilde{\tau}\right) = 0. \quad (\text{A.1})$$

As funções  $g$ ,  $h$  são dadas e  $0 < \epsilon \ll 1$ . Também, como dito, é necessário que, para  $\epsilon \rightarrow 0$ , a Eq. (A.1) tenha soluções periódicas, e isso é satisfeito sempre que o potencial  $V(\phi, 0) = \int_0^\phi g(s, 0)ds$  for côncavo em um intervalo  $\phi_1 < \phi < \phi_2$ .

O processo consiste em encontrar soluções para a equação anterior em termos de uma série de perturbações. Para isso, o tempo  $\tau$  é descrito por meio de duas escalas de tempo,  $\tau_+$  e  $\tilde{\tau}$ , isto é,  $\tau = \tau(\tau_+, \tilde{\tau})$ . O tempo  $\tilde{\tau}$  varia lentamente  $\tilde{\tau} = \epsilon\tau$ . Já a escala  $\tau_+$  descreve o sistema como inalterado passado um certo número de oscilações completas. As quantidades inalteradas no tempo  $\tau_+$  podem variar lentamente com a escala de tempo  $\tilde{\tau}$ . O tempo  $\tau_+$  pode ser descrito da seguinte maneira:

$$\frac{d\tau_+}{d\tau} = c_0(\tilde{\tau}) + \epsilon c_1(\tilde{\tau}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (\text{A.2})$$

As funções  $c_0$ ,  $c_1$  são funções a serem determinadas e  $\mathcal{O}(\epsilon^n)$  representa expressões proporcionais à potência  $n$  de  $\epsilon$ . As ordens segundas e superiores serão desconsideradas. Conseqüentemente, temos que a derivada total em relação ao tempo é dada por

$$\frac{d}{d\tau} = c_0(\tilde{\tau}) \frac{\partial}{\partial \tau_+} + \epsilon \left( c_1(\tilde{\tau}) \frac{\partial}{\partial \tau_+} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} \right), \quad (\text{A.3})$$

Agora iremos buscar uma solução geral para a Eq. (A.1). Para isto, é assumido que a solução pode ser expressa pela seguinte série de perturbações

$$\phi(\tau; \epsilon) = \hat{\phi}(\tau_+, \tilde{\tau}; \epsilon) = \hat{\phi}_0(\tau_+, \tilde{\tau}) + \epsilon \hat{\phi}_1(\tau_+, \tilde{\tau}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (\text{A.4})$$

Após aplicar o operador dado pela Eq. (A.3) na solução anterior, temos que

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\tau} = c_0 \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+} + \epsilon \left( c_0 \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \tau_+} + c_1 \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+} + \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \tilde{\tau}} \right) \quad (\text{A.5})$$

e

$$\frac{d^2\hat{\phi}}{d\tau^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+^2} + \epsilon \left( c_0^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \tau_+^2} + 2c_0 c_1 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+^2} + 2c_0 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+ \partial \tilde{\tau}} + \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{\tau}} \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+} \right). \quad (\text{A.6})$$

Além das expressões anteriores, é necessário desenvolver as funções  $g$  e  $h$  como se segue,

$$g(\phi, \tilde{\tau}) = g(\hat{\phi}_0, \tilde{\tau}) + \epsilon \hat{\phi}_1 \frac{dg}{d\phi} \Big|_{\hat{\phi}_0} \quad (\text{A.7})$$

e

$$h\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial\tau}, \tilde{\tau}\right) = h\left(\hat{\phi}_0, c_0 \frac{\partial\hat{\phi}_0}{\partial\tilde{\tau}}, \tilde{\tau}\right) + O(\epsilon). \quad (\text{A.8})$$

Ao substituir as Eqs. (A.5-A.8) na Eq. (A.1) temos as seguintes equações diferenciais: para ordem  $\epsilon^0$ ,

$$c_0^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+^2} + g(\hat{\phi}_0, \tilde{\tau}) = 0; \quad (\text{A.9})$$

e para ordem  $\epsilon^1$ ,

$$c_0^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \tau_+^2} + \frac{dg}{d\phi} \Big|_{\hat{\phi}_0} \hat{\phi}_1 = -2c_0 c_1 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+^2} - 2c_0 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+ \partial \tilde{\tau}} - \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{\tau}} \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+} - h \equiv r_1. \quad (\text{A.10})$$

Vamos primeiro tratar a Eq. (A.9). Essa equação pode ser resolvida por quadratura. Para isso, multiplicamos a Eq.(A.9) por  $\partial\hat{\phi}_0/\partial\tau_+$  e integramos em relação ao tempo  $\tau_+$ . Feito isto, temos que

$$E_0(\tilde{\tau}) = \frac{c_0^2}{2} \left( \frac{\partial\hat{\phi}_0}{\partial\tau_+} \right)^2 + V(\hat{\phi}_0, \tilde{\tau}), \quad (\text{A.11})$$

aqui a energia  $E_0(\tilde{\tau})$  é tomada constante em relação ao tempo  $\tau_+$ , porém pode variar lentamente com a escala  $\tilde{\tau}$ . O potencial é dado por

$$V(\hat{\phi}_0, \tilde{\tau}) = \int_0^{\hat{\phi}_0} g(s, \tilde{\tau}) ds. \quad (\text{A.12})$$

Ao integrar por quadratura a solução de ordem  $\epsilon^0$  e invertendo o resultado, é possível escrever a solução como

$$\hat{\phi}_0(\tau_+, \tilde{\tau}) = F(\tau_+ + \theta_0(\tilde{\tau}), E_0(\tilde{\tau}), c_0(\tilde{\tau}), \tilde{\tau}), \quad (\text{A.13})$$

aqui  $\theta_0(\tilde{\tau})$  é uma constante de integração que representa a fase inicial.

Visto que a solução de  $\hat{\phi}_0$ , por hipótese, é periódica em relação à escala de tempo  $\tau_+$ . Dessa forma, a curva no espaço de fase para  $\tilde{\tau}$  fixo (consequentemente  $E_0(\tilde{\tau})$  e  $c_0(\tilde{\tau})$  também fixos) é simetricamente oval em relação a  $\hat{\phi}_0$ . Além disso, tomar as quantidades  $E_0$  e  $c_0$  como constantes é razoável, uma vez que esperamos que as mesmas só variem com a primeira ordem de perturbação depois de completo um período de oscilação. Ainda, dado um valor inicial para  $\hat{\phi}_0$  e  $\partial\hat{\phi}_0/\partial\tau$  em  $\tau = 0$ , é possível escrevermos  $c_0 = c_0(E_0(\tilde{\tau}), \tilde{\tau})$ .

Sem perda de generalidade, escolhemos que para  $\tau_+ = 0$ , ou seja, na posição de fase  $\theta_0(\tilde{\tau})$ , corresponda a  $\hat{\phi}_0 = \hat{\phi}_{0max}$  e, consequentemente,  $\partial\hat{\phi}_0/\partial\tau = 0$ , em que  $\hat{\phi}_{0max}$  é o valor máximo da solução. Dessa maneira, a função  $\hat{\phi}_0$  é par. Além disso, a função  $F(\tau_+ + \theta_0(\tilde{\tau}), E_0(\tilde{\tau}), c_0(\tilde{\tau}), \tilde{\tau})$  pode ser obtida pela inversão da expressão

$$\tau_+ + \theta_0(\tilde{\tau}) = \pm c_0(\tilde{\tau}) \int_{\hat{\phi}_{0max}(E_0(\tilde{\tau}), \tilde{\tau})}^{\hat{\phi}_0(\tau_+, \tilde{\tau})} \frac{ds}{\sqrt{2(E_0(\tilde{\tau}) - V(s, \tilde{\tau}))}}. \quad (\text{A.14})$$

O sinal  $\pm$  advém do termo quadrático da derivada temporal, e iremos nos ater somente a solução positiva.

Podemos obter o período por meio da expressão anterior. Dessa maneira, o período de oscilação,  $\hat{t}$ , é o dobro do tempo de ir de  $\hat{\phi}_{0min}$  para  $\hat{\phi}_{0max}$ , em que  $\hat{\phi}_{0min}$  é o valor de mínimo. Então,

$$\hat{t} \equiv 2c_0(\tilde{\tau}) \int_{\hat{\phi}_{0min}(E_0(\tilde{\tau}), \tilde{\tau})}^{\hat{\phi}_{0max}(E_0(\tilde{\tau}), \tilde{\tau})} \frac{d\hat{\phi}_0}{\sqrt{2(E_0(\tilde{\tau}) - V(\hat{\phi}_0, \tilde{\tau}))}}, \quad (\text{A.15})$$

define o período.

Com o resultado anterior, vemos que a Eq. (A.15) deve ser constante para garantir uniformidade para um tempo longo, esse período denotaremos por  $t_0$ . O valor de  $t_0$  pode ser tomado conforme a conveniência. Então, para um dado  $t_0$ , temos que

$$c_0 = \frac{t_0}{2} \left[ \int_{\hat{\phi}_{0min}(E_0(\tilde{\tau}), \tilde{\tau})}^{\hat{\phi}_{0max}(E_0(\tilde{\tau}), \tilde{\tau})} \frac{d\hat{\phi}_0}{\sqrt{2(E_0(\tilde{\tau}) - V(\hat{\phi}_0, \tilde{\tau}))}} \right]^{-1}. \quad (\text{A.16})$$

Agora, iremos tratar a solução para a equação de ordem  $\epsilon^1$ . Esse passo é necessário, pois precisamos encontrar uma expressão para  $E_0(\tilde{\tau})$  e isso é possível partindo de uma condição de periodicidade que obteremos por meio da solução particular de  $\hat{\phi}_1$ . A solução geral de  $\hat{\phi}_1$  pode ser construída por meio da solução de  $\hat{\phi}_0$ . Pelo resultado da Eq. (A.16), podemos escrever que  $\hat{\phi}_0 = F(T(\tau_+, \tilde{\tau}), E_0(\tilde{\tau}), \tilde{\tau})$ , em que  $T(\tau_+, \tilde{\tau}) = \tau_+ + \theta_0(\tilde{\tau})$ . Ao tomarmos a derivada parcial de  $F$  em relação a  $T$ , com  $E_0$  e  $\tilde{\tau}$  fixos e de maneira semelhante para  $E_0$  com  $T$  e  $\tilde{\tau}$  fixos na Eq. (A.9), temos que

$$c_0^2 \frac{\partial^2 F_T}{\partial \tau_+^2} + F_T \frac{\partial g}{\partial F} = 0$$

e

$$c_0^2 \frac{\partial^2 F_{E_0}}{\partial \tau_+^2} + F_{E_0} \frac{\partial g}{\partial F} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Usamos a seguinte notação  $\partial F / \partial T = F_T$  e  $\partial F / \partial E_0 = F_{E_0}$ . Podemos ver que ambos  $F_T$  e  $F_{E_0}$  são soluções da equação homogênea dada pela Eq. (A.10). Para provar que as soluções são independentes, é necessário provar que o Wronskiano de  $F_{E_0}$  e  $F_T$  é diferente de zero. O Wronskiano de  $F_T$  e  $F_{E_0}$  é dado por

$$W(F_T, F_{E_0}) \equiv F_T F_{E_0 T} - F_{E_0} F_{T T}. \quad (\text{A.18})$$

e ao derivar em relação a  $T$

$$\frac{\partial W}{\partial T} = F_T F_{E_0 T T} - F_{E_0} F_{T T T}. \quad (\text{A.19})$$

Já que  $T = \tau_+ + \theta_0(\tilde{\tau})$ , temos que  $\partial / \partial \tau_+ = \partial / \partial T$ . Então, podemos reescrever  $F_T$  e  $F_{E_0}$  da seguinte maneira,

$$F_T = -\frac{c_0^2 F_{T T T}}{\frac{\partial g}{\partial F}}$$

e

$$F_{E_0} = -\frac{c_0^2 F_{E_0 T T}}{\frac{\partial g}{\partial F}}. \quad (\text{A.20})$$

Escrito dessa forma, podemos concluir que  $\partial W / \partial T = 0$ . Sendo assim, podemos buscar soluções do tipo

$$\hat{\phi}_1 = \alpha F_T + \beta F_{E_0}, \quad (\text{A.21})$$

em que  $\alpha = \alpha(T)$  e  $\beta = \beta(T)$ . Além disso, iremos impor que

$$\frac{d\alpha}{dT}F_T + \frac{d\beta}{dT}F_{E_0} = 0. \quad (\text{A.22})$$

Ao substituir (A.21)-(A.22) em (A.10), obtemos

$$c_0^2 \left( \frac{d\alpha}{dT}F_{TT} + \frac{d\beta}{dT}F_{E_0T} \right) = r_1. \quad (\text{A.23})$$

Após resolver o sistema (A.22-A.23) e ao integrar em relação a  $T$ , temos que a solução geral para  $\hat{\phi}_1$  é

$$\hat{\phi}_1 = \theta_1(\tilde{\tau})F_T + E_1(\tilde{\tau})F_{E_0} - \frac{F_T}{c_0^2W} \int_0^T r_1 F_{E_0} dT' + \frac{F_{E_0}}{c_0^2W} \int_0^T r_1 F_T dT'. \quad (\text{A.24})$$

Os primeiros dois termos representam a solução homogênea, com  $\theta_1(\tilde{\tau})$  e  $E_1(\tilde{\tau})$  sendo funções desconhecidas. Já os termos com integral definem a solução particular.

A solução anterior deve ser também periódica e, para isso ser verdade, as suas partes devem ser periódicas. Uma vez que  $F$  e, conseqüentemente,  $F_T$  são funções com periodicidade  $t_0$ , segue pela definição de  $r_1$ , Eq. (A.10), que  $r_1$  é também periódica com período  $t_0$ . Sendo assim, o produto  $r_1 F_T$  tem que ter periodicidade  $t_0$ , uma vez que  $F_{E_0}$  não é periódica em  $T$ . Portanto,

$$\int_0^{t_0} r_1 F_T dT' = 0. \quad (\text{A.25})$$

Para o outro termo com integral, a periodicidade é garantida por  $F_T$ .

Ao utilizar (A.10) na condição (A.25), temos que

$$\int_0^{t_0} \left( 2c_0c_1F_TF_{TT} + 2c_0F_T\tilde{\tau}F_T + \frac{dc_0}{d\tilde{\tau}}F_T^2 + hF_T \right) dT' = 0. \quad (\text{A.26})$$

A expressão anterior nos permite escrever

$$c_0c_1 \int_0^{t_0} \frac{d}{dT'} F_T^2 dT' + \frac{d}{d\tilde{\tau}} \left( c_0 \int_0^{t_0} F_T^2 dT' \right) + \int_0^{t_0} hF_T dT' = 0. \quad (\text{A.27})$$

A primeira integral se anula já que os extremos se cancelam. Então, a expressão anterior se reduz à

$$\frac{d}{d\tilde{\tau}} \left( c_0 \int_0^{t_0} F_T^2 dT' \right) + \int_0^{t_0} hF_T dT' = 0. \quad (\text{A.28})$$

A Eq. (A.28) é uma equação não-linear de primeira ordem para  $E_0$ , e a sua solução define  $E_0(\tilde{\tau})$  dado seu valor inicial.

Para o caso em que  $h = h(\tilde{\tau})\partial\hat{\phi}/\partial\tau = h(\tilde{\tau})c_0F_T$ , a Eq. (A.28) tem a forma

$$\frac{d\lambda}{d\tilde{\tau}} + h(\tilde{\tau})\lambda = 0, \quad (\text{A.29})$$

em que  $\lambda(E_0, \tilde{\tau}) = c_0 \int_0^{t_0} F_T^2 dT' = c_0 \int_0^{t_0} (\partial\hat{\phi}_0/\partial\tau_+)^2 dT' = \frac{2}{c_0} \int_0^{t_0} [E_0(\tilde{\tau}) - V(\hat{\phi}_0, \tilde{\tau})] dT'$ . Nesse caso, a solução é dada por

$$\lambda = \lambda(E_0, 0) e^{-\int_0^{\tilde{\tau}} h(s) ds}. \quad (\text{A.30})$$

A Eq. (A.30) é a expressão que queríamos para poder determinar a forma de  $E_0(\tilde{\tau})$ , então, juntamente com ela, é possível determinar totalmente a solução  $\hat{\phi}_0$ .



## A.1 Equação de Pinney Dissipativa

A equação de Pinney dissipativa, Eqs. (5.23) e (6.16), admite solução analítica por meio do método de Kuzmak-Luke. Para o aplicarmos, é necessário obedecer a condição de baixo amortecimento, tomaremos  $\nu = 2\epsilon$ , a qual terá a o papel de modular lentamente a solução oscilatória. Para o presente problema, podemos escrever a equação de Pinney amortecida como se segue,

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\hat{\phi} + 2\epsilon\frac{d}{d\tau}\hat{\phi} + g(\hat{\phi}) = 0, \quad (\text{A.31})$$

em que  $g(\phi, \tilde{\tau}) = \omega^2\phi - \frac{C}{\phi^3}$  e  $h(\phi, \frac{d\phi}{d\tau}, \tilde{\tau}) = 2\frac{d}{d\tau}\phi$ .

Após expandir a função  $\hat{\phi}$  como nas Eqs. (A.4) e (A.7), e aplicar o operador da Eq. (A.3) na Eq. (A.31), temos que a equação de ordem  $\epsilon^0$  é dada por

$$c_0^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+^2} + \omega^2 \hat{\phi}_0 - \frac{C}{\hat{\phi}_0^3} = 0. \quad (\text{A.32})$$

Já a equação de ordem  $\epsilon^1$  é dada por

$$c_0^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \tau_+^2} + \hat{\phi}_1 \left( \omega^2 + \frac{3C}{\hat{\phi}_0^4} \right) = -2c_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+} - \left( \frac{dc_0}{d\tilde{\tau}} + 2c_0 \right) \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+} \equiv r_1. \quad (\text{A.33})$$

Tomamos  $\partial \tau_+ / \partial \tau = c_0(\tilde{\tau})$ , não há necessidade do termo que advém da uma contribuição  $\epsilon c_1(\tilde{\tau})$ , pois, como vimos, em nada contribui para a determinação da solução de  $\hat{\phi}_0$ .

A Eq. (A.32) fornece uma energia

$$E_0(\tilde{\tau}) = \frac{c_0^2}{2} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \tau_+} \right)^2 + \frac{\omega^2 \hat{\phi}_0^2}{2} + \frac{C}{2\hat{\phi}_0^2}. \quad (\text{A.34})$$

Para  $E_0 = \omega(\omega^2 A^4 + C)^{\frac{1}{2}}$ , em que  $A = A(\tilde{\tau})$  é uma amplitude que varia lentamente no tempo (para  $C = 0$  reproduzimos  $E_0 \sim A^2$ ), e, após integrar por quadratura, temos que a solução para a Eq. (A.32) é dada por

$$\hat{\phi}_0 = \left[ \left( \frac{C}{\omega^2} + A^4 \right)^{\frac{1}{2}} + A^2 \cos \left( \frac{2\omega}{c_0} \tau_+ + \theta_0(\tilde{\tau}) \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.35})$$

Dada a solução anterior, podemos ver que, para que a solução tenha período  $t_0 = 2\pi$ , é preciso que  $c_0 = 2\omega$ . Também, sem perda de generalidade, iremos tomar a fase como nula. Agora, é necessário achar uma expressão para  $A(\tilde{\tau})$ , o que significa obter uma expressão para  $E_0(\tilde{\tau})$ . Para isso, vamos utilizar a Eq. (A.30), para  $h(s) = 2$ . Temos, então, que

$$\lambda = \lambda(E_0, 0) e^{-2\tilde{\tau}}. \quad (\text{A.36})$$

Da definição de  $\lambda$  e pelo resultado da Eq. (A.36), podemos determinar  $A^2$  como se segue,

$$\frac{\exp(2\tilde{\tau})}{\omega} \int_0^{2\pi} \left( \omega(\omega^2 A^4 + C)^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega^2 \hat{\phi}_0^2}{2} - \frac{C}{2\hat{\phi}_0^2} \right) d\tau'_+ = \lambda(E_0, 0), \quad (\text{A.37})$$

com  $\hat{\phi}_0$  dado pela Eq. (A.35), e obtermos

$$A^2 = \frac{A_0 \exp(-\tilde{\tau})}{\omega^{\frac{1}{2}}} \left( C^{\frac{1}{2}} + \frac{\omega A_0^2 \exp(-2\tilde{\tau})}{4} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.38})$$

em que  $A_0$  é um valor de referência.

Ao substituir (A.38) em (A.35), finalmente temos que a solução de  $\hat{\phi}_0$  é

$$\hat{\phi}_0 = \frac{1}{\omega^{\frac{1}{2}}} \left[ C^{\frac{1}{2}} + \frac{\omega A_0^2 \exp(-2\epsilon\tau)}{2} + \omega^{\frac{1}{2}} A_0 \exp(-\epsilon\tau) \left( C^{\frac{1}{2}} + \frac{\omega A_0^2 \exp(-2\epsilon\tau)}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \cos[2\omega(\tau - \tau_0)] \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.39})$$

aqui utilizamos  $\tau_+ = \int_{\tau_0}^{\tau} c_0(\tilde{\tau}') d\tilde{\tau}' = 2\omega \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau}'$ . Ao identificar que  $\hat{\phi}_{0eq} = (C/\omega)^{\frac{1}{4}}$  e fazer as transformações,  $A_0/2 \rightarrow 2A_0$  e  $2\epsilon \rightarrow \epsilon$ , podemos escrever da forma que utilizamos

$$\hat{\phi}_0^2 = \hat{\phi}_{0eq}^2 + 2A_0^2 \exp(-\epsilon\tau) + 2A_0 \exp\left(-\frac{\epsilon}{2}\tau\right) \left( \hat{\phi}_{0eq}^2 + A_0^2 \exp(-\epsilon\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \cos[2\omega(\tau - \tau_0)]. \quad (\text{A.40})$$

## B Solução exata da equação de Pinney

A solução geral da equação de Pinney, Eq. (6.70), depende da solução do oscilador harmônico dependente do tempo (6.71). Para uma frequência na forma (6.54) e  $\gamma \neq 1$ , a equação do oscilador harmônico dependente do tempo pode ser mapeada em uma equação de Bessel. Para isso, utilizamos as transformações,

$$\rho_i = \sqrt{(1 + \Omega t)}y(s), \quad s = (1 + \Omega t)^{1-\gamma}. \quad (\text{B.1})$$

Segue as seguintes relações de derivação,

$$\frac{d}{d\tau} = \Omega(1 - \gamma)s^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{d}{ds} \quad (\text{B.2})$$

e

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = -\Omega^2 \gamma(1 - \gamma)s^{-\frac{\gamma-1}{1-\gamma}} \frac{d}{ds} + \Omega^2(1 - \gamma)^2 s^{-\frac{2\gamma}{1-\gamma}} \frac{d^2}{ds^2}. \quad (\text{B.3})$$

Ao substituir as expressões anteriores na equação original, obtemos

$$s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} y + s \frac{\partial}{\partial s} y + \frac{(4s^2 \Omega_0^2 - 1)}{4(1 - \gamma)^2} y = 0, \quad (\text{B.4})$$

em que  $\Omega_0 = \omega_0/\Omega$ . A equação anterior corresponde à equação de Bessel,

$$s'^2 \frac{d^2 y}{ds'^2} + s' \frac{dy}{ds'} + (s'^2 - \mu^2)y = 0, \quad s' = \frac{s\Omega_0}{|1 - \gamma|}, \quad \mu = \frac{1}{2|1 - \gamma|}. \quad (\text{B.5})$$

Dessa forma, podemos aplicar

$$\rho_1 = (1 + \Omega t)^{1/2} J_\mu(s), \quad \rho_2 = (1 + \Omega t)^{1/2} Y_\mu(s) \quad (\text{B.6})$$

na Eq. (6.70), com Wronskiano  $W = 2(1 - \gamma)\Omega/\pi$ , em que  $J_\mu, Y_\mu$  são as funções de Bessel do primeiro e do segundo tipo. Os valores das constantes  $a, b, c$  são encontradas dadas as condições iniciais.

# Referências

- [1] DAVIDSON, R. *Methods in nonlinear plasma theory*. [S.l.]: Elsevier, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 9, 39, 73, 81, 82 e 86.
- [2] SHIVAMOGGI, B. K. *Introduction to nonlinear fluid-plasma waves*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 9, 10, 39 e 73.
- [3] BRODIN, G.; STENFLO, L. A simple electron plasma wave. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 381, n. 11, p. 1033–1035, 2017. Citado na página 9.
- [4] BISWAJIT, A. S. S.; ROYCHOUDHURY, R. Nonlinear dynamics of cold magnetized non-relativistic plasma in the presence of electron-ion collisions. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing, v. 22, n. 9, p. 092306, 2015. Citado na página 9.
- [5] GHOSH, N. C. S.; HAAS, F. New nonlinear structures in a degenerate one-dimensional electron gas. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 105, n. 3, p. 30006, 2014. Citado na página 9.
- [6] STENFLO, L.; BRODIN, G. Temperature effects on large amplitude electron plasma oscillations. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing, v. 23, n. 7, p. 074501, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 9, 12, 30, 73 e 74.
- [7] AMIRANASHVILI, S. et al. Nonlinear standing waves in bounded plasmas. *Physical Review E*, APS, v. 66, n. 4, p. 046403, 2002. Citado na página 9.
- [8] ENNS, R. H.; MCGUIRE, G. C. *Nonlinear physics with Mathematica for scientists and engineers*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 9.
- [9] INFELD, E.; ROWLANDS, G. *Nonlinear waves, solitons and chaos*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 9, 39 e 73.
- [10] YU, M.; STENFLO, L. Nonlinear waves in a plasma cylinder. *IEEE Transactions on Plasma Science*, IEEE, v. 19, n. 4, p. 641–644, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 9, 12 e 73.
- [11] STENFLO, L. et al. Large-amplitude electron oscillations in a plasma slab. *Journal of Plasma Physics*, Cambridge University Press, v. 72, n. 4, p. 429–433, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 9, 12, 30 e 74.
- [12] ALIEV, Y. M.; STENFLO, L. Large-amplitude electron oscillations in a plasma slab. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 50, n. 6, p. 701, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 9, 12, 30 e 74.
- [13] MAITY, C. *Lagrangian Fluid Technique to Study Nonlinear Plasma Dynamics*. Tese (Doutorado) — Saha Institute of Nuclear Physics, 07 2014. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 39.
- [14] ADHIKARI, S. K. Finite-well potential in the 3d nonlinear schrödinger equation: application to bose-einstein condensation. *The European Physical Journal D*, Springer, v. 42, n. 2, p. 279–286, 2007. Citado na página 10.
- [15] GHOSH, T. K. Vortex formation in a slowly rotating bose-einstein condensate confined in a harmonic-plus-gaussian laser trap. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, Springer, v. 31, n. 1, p. 101–105, 2004. Citado na página 10.

- [16] HAAS, F.; ELIASSON, B. Time-dependent variational approach for bose-einstein condensates with nonlocal interaction. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, IOP Publishing, v. 51, n. 17, p. 175302, 2018. Citado na página 10.
- [17] SALASNICH, L. Generalized nonpolynomial schrödinger equations for matter waves under anisotropic transverse confinement. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 42, n. 33, p. 335205, 2009. Citado na página 10.
- [18] HAAS, F. Variational method for the three-dimensional many-electron dynamics of semiconductor quantum wells. In: AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS. *AIP Conference Proceedings*. [S.l.], 2012. v. 1421, n. 1, p. 100–108. Citado 3 vezes nas páginas 10, 42 e 95.
- [19] MANFREDI, G.; HERVIEUX, P.-A.; HAAS, F. Nonlinear dynamics of electron–positron clusters. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 14, n. 7, p. 075012, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 95.
- [20] MENDONÇA, J. T.; TERÇAS, H. *Physics of ultra-cold matter: atomic clouds, Bose-Einstein condensates and Rydberg plasmas*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 10, 23 e 30.
- [21] PETHICK, C. J.; SMITH, H. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 10, 20, 21 e 23.
- [22] LABEYRIE, G.; MICHAUD, F.; KAISER, R. Self-sustained oscillations in a large magneto-optical trap. *Physical Review Letters*, APS, v. 96, n. 2, p. 023003, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 10, 15, 58, 60 e 67.
- [23] STEFANO, A. D. et al. Giant oscillations in a magneto-optical trap. *Physical Review A*, APS, v. 67, n. 3, p. 033404, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 73.
- [24] MCCLELLAND, J. J. et al. Bright focused ion beam sources based on laser-cooled atoms. *Applied Physics Reviews*, AIP Publishing, v. 3, n. 1, p. 011302, 2016. Citado na página 10.
- [25] BRADLEY, C. C.; SACKETT, C.; HULET, R. Bose-Einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number. *Physical Review Letters*, APS, v. 78, n. 6, p. 985, 1997. Citado na página 10.
- [26] BAGNATO, V. S. et al. Spatial distribution of atoms in a magneto-optical trap. *Physical Review A*, APS, v. 48, n. 5, p. 3771, 1993. Citado na página 10.
- [27] ROATI, G. et al. <sup>39</sup>K Bose-Einstein condensate with tunable interactions. *Physical Review Letters*, APS, v. 99, n. 1, p. 010403, 2007. Citado na página 10.
- [28] MODUGNO, G. et al. Bose-Einstein condensation of potassium atoms by sympathetic cooling. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 294, n. 5545, p. 1320–1322, 2001. Citado na página 10.
- [29] SESKO, D. W.; WALKER, T.; WIEMAN, C. E. Behavior of neutral atoms in a spontaneous force trap. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 8, n. 5, p. 946–958, 1991. Citado 4 vezes nas páginas 10, 15, 23 e 59.
- [30] STEANE, A.; CHOWDHURY, M.; FOOT, C. Radiation force in the magneto-optical trap. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 9, n. 12, p. 2142–2158, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 10, 15 e 59.
- [31] TOWNSEND, C. et al. Phase-space density in the magneto-optical trap. *Physical Review A*, APS, v. 52, n. 2, p. 1423, 1995. Citado 8 vezes nas páginas 10, 11, 15, 54, 55, 62, 64 e 67.

- [32] KOHNS, P. et al. On-line measurement of sub-doppler temperatures in a Rb magneto-optical trap-by-trap centre oscillations. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 22, n. 7, p. 517, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 15.
- [33] GATTOBIGIO, G. et al. Scaling laws for large magneto-optical traps. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 81, n. 2, p. 025301, 2010. Citado 7 vezes nas páginas 10, 15, 58, 59, 60, 62 e 67.
- [34] FIORETTI, A. et al. Observation of radiation trapping in a dense Cs magneto-optical trap. *Optics Communications*, Elsevier, v. 149, n. 4-6, p. 415–422, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 15.
- [35] UHLENBERG, G.; DIRSCHERL, J.; WALTHER, H. Magneto-optical trapping of silver atoms. *Physical Review A*, APS, v. 62, n. 6, p. 063404, 2000. Citado na página 10.
- [36] GUEST, J. et al. Laser trapping of  $^{225}\text{Ra}$  and  $^{226}\text{Ra}$  with repumping by room-temperature blackbody radiation. *Physical Review Letters*, APS, v. 98, n. 9, p. 093001, 2007. Citado na página 10.
- [37] GUIDONI, L.; VERKERK, P. Optical lattices: cold atoms ordered by light. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, IOP Publishing, v. 1, n. 5, p. R23, 1999. Citado na página 10.
- [38] BLOCH, I. Ultracold quantum gases in optical lattices. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 1, n. 1, p. 23, 2005. Citado na página 10.
- [39] STELLMER, S. et al. Laser cooling to quantum degeneracy. *Physical Review Letters*, APS, v. 110, n. 26, p. 263003, 2013. Citado na página 10.
- [40] GIBBLE, K.; CHU, S. Laser-cooled Cs frequency standard and a measurement of the frequency shift due to ultracold collisions. *Physical Review Letters*, APS, v. 70, n. 12, p. 1771, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- [41] SANTARELLI, G. et al. Quantum projection noise in an atomic fountain: A high stability cesium frequency standard. *Physical Review Letters*, APS, v. 82, n. 23, p. 4619, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- [42] MANFREDI, G.; HERVIEUX, P.-A. Adiabatic cooling of trapped non-neutral plasmas. *Physical Review Letters*, APS, v. 109, n. 25, p. 255005, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 10, 13, 73, 86, 87 e 88.
- [43] COX, J. P. *Theory of Stellar Pulsation.(PSA-2)*. [S.l.]: Princeton University Press, 2017. v. 2. Citado na página 10.
- [44] ANDERSON, M. H. et al. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 269, n. 5221, p. 198–201, 1995. Citado na página 10.
- [45] POHL, T.; LABEYRIE, G.; KAISER, R. Self-driven nonlinear dynamics in magneto-optical traps. *Physical Review A*, APS, v. 74, n. 2, p. 023409, 2006. Citado na página 11.
- [46] MENDONÇA, J. et al. Collective oscillations in ultracold atomic gas. *Physical Review A*, APS, v. 78, n. 1, p. 013408, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 11, 26 e 30.
- [47] TERÇAS, H.; MENDONÇA, J. T.; KAISER, R. Driven collective instabilities in magneto-optical traps: A fluid-dynamical approach. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 89, n. 5, p. 53001, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 11, 26 e 30.

- [48] TERÇAS, H.; MENDONÇA, J. Polytropic equilibrium and normal modes in cold atomic traps. *Physical Review A*, APS, v. 88, n. 2, p. 023412, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 11, 26 e 30.
- [49] ARNOLD, A.; MANSON, P. Atomic density and temperature distributions in magneto-optical traps. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 17, n. 4, p. 497–506, 2000. Citado 5 vezes nas páginas 11, 14, 26, 54 e 67.
- [50] PERRIN, H. Les houches lectures on laser cooling and trapping. In: . [S.l.: s.n.], 2012. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 25.
- [51] WALKER, T.; SESKO, D.; WIEMAN, C. Collective behavior of optically trapped neutral atoms. *Physical Review Letters*, APS, v. 64, n. 4, p. 408, 1990. Citado na página 11.
- [52] GATTOBIGIO, G. et al. Long range interactions between neutral atoms. In: AIP. *AIP Conference Proceedings*. [S.l.], 2006. v. 862, n. 1, p. 211–220. Citado 4 vezes nas páginas 11, 15, 58 e 59.
- [53] PRASAD, S.; O'NEIL, T. Finite length thermal equilibria of a pure electron plasma column. *The Physics of Fluids*, AIP, v. 22, n. 2, p. 278–281, 1979. Citado na página 12.
- [54] MALMBERG, J.; O'NEIL, T. Pure electron plasma, liquid, and crystal. *Physical Review Letters*, APS, v. 39, n. 21, p. 1333, 1977. Citado na página 12.
- [55] DEGRASSIE, J.; MALMBERG, J. Waves and transport in the pure electron plasma. *The Physics of Fluids*, AIP, v. 23, n. 1, p. 63–81, 1980. Citado 3 vezes nas páginas 12, 73 e 74.
- [56] CORRÊA DA SILVA, T. M. et al. Halo formation and emittance growth in the transport of spherically symmetric mismatched bunched beams. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing, v. 22, n. 2, p. 023102, 2015. Citado na página 12.
- [57] CORRÊA DA SILVA, T. M. et al. Nonlinear stability in the transport of intense bunched beams. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing, v. 23, n. 11, p. 113102, 2016. Citado na página 12.
- [58] MICHEL, F. C. Non neutral plasmas in the laboratory and astrophysics. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, Cambridge University Press, v. 6, n. 2, p. 127–129, 1985. Citado na página 12.
- [59] DAVIDSON, R. C. *Physics of nonneutral plasmas*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 12, 30 e 72.
- [60] GOULD, R. W. Dynamics of non-neutral plasmas. *Physics of Plasmas*, AIP, v. 2, n. 6, p. 2151–2163, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 12, 73 e 74.
- [61] MALMBERG, J. et al. Properties of nonneutral plasma. *Physical Review Letters*, APS, v. 35, n. 9, p. 577, 1975. Citado 3 vezes nas páginas 12, 72 e 73.
- [62] MALMBERG, J.; DRISCOLL, C. Long-time containment of a pure electron plasma. *Physical Review Letters*, APS, v. 44, n. 10, p. 654, 1980. Citado 4 vezes nas páginas 12, 72, 73 e 74.
- [63] DRISCOLL, C.; MALMBERG, J. Length-dependent containment of a pure electron-plasma column. *Physical Review Letters*, APS, v. 50, n. 3, p. 167, 1983. Citado na página 12.
- [64] LEPRETI, F. et al. Scaling properties and intermittency of two-dimensional turbulence in pure electron plasmas. *Physical Review E*, APS, v. 87, n. 6, p. 063110, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 12, 30, 73 e 78.

- [65] WINELAND, D.; ITANO, W. M.; JR, R. V. D. High-resolution spectroscopy of stored ions. In: *Advances in atomic and molecular physics*. [S.l.]: Elsevier, 1983. v. 19, p. 135–186. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 74.
- [66] PAUL, W.; STEINWEDEL, H. *Zeitschr. für naturforsch. A*, v. 8, p. 448–450, 1953. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 72.
- [67] DUBIN, D. H. Theory of electrostatic fluid modes in a cold spheroidal non-neutral plasma. *Physical Review Letters*, APS, v. 66, n. 16, p. 2076, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 12, 15 e 72.
- [68] BROWN, L. S.; GABRIELSE, G. Geonium theory: Physics of a single electron or ion in a penning trap. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 58, n. 1, p. 233, 1986. Citado na página 12.
- [69] WEIMER, C. S. et al. Electrostatic modes as a diagnostic in penning-trap experiments. *Physical Review A*, APS, v. 49, n. 5, p. 3842, 1994. Citado na página 12.
- [70] DAVIDSON, R. C.; QIN, H. *Physics of intense charged particle beams in high energy accelerators*. [S.l.: s.n.], 2001. Citado 3 vezes nas páginas 12, 72 e 74.
- [71] GABRIELSE, G. Atoms made entirely of antimatter: two methods produce slow antihydrogen. In: *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*. [S.l.]: Elsevier, 2005. v. 50, p. 155–217. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 73 e 86.
- [72] GABRIELSE, G. et al. Adiabatic cooling of antiprotons. *Physical review letters*, APS, v. 106, n. 7, p. 073002, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 86 e 94.
- [73] GABRIELSE, G. et al. Antiproton confinement in a penning-ioffe trap for antihydrogen. *Physical review letters*, APS, v. 98, n. 11, p. 113002, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.
- [74] GABRIELSE, G. et al. Background-free observation of cold antihydrogen with field-ionization analysis of its states. *Physical Review Letters*, APS, v. 89, n. 21, p. 213401, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 97.
- [75] TESTERA, G. et al. Toward the production of antihydrogen at rest in athena. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Elsevier, v. 461, n. 1-3, p. 253–255, 2001. Citado na página 12.
- [76] AMORETTI, M. et al. Production and detection of cold antihydrogen atoms. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 419, n. 6906, p. 456–459, 2002. Citado na página 12.
- [77] ENOMOTO, Y. et al. Synthesis of cold antihydrogen in a cusp trap. *Physical review letters*, APS, v. 105, n. 24, p. 243401, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 12, 92 e 97.
- [78] FAJANS, J.; SCHMIDT, A. Malmberg–penning and minimum-b trap compatibility: the advantages of higher-order multipole traps. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Elsevier, v. 521, n. 2-3, p. 318–325, 2004. Citado na página 13.
- [79] HAWKINS, R. M.; LIDSEY, J. E. Ermakov-pinney equation in scalar field cosmologies. *Physical Review D*, APS, v. 66, n. 2, p. 023523, 2002. Citado na página 14.
- [80] ROSU, H. C.; MANCAS, S. C.; CHEN, P. Barotropic FRW cosmologies with chiellini damping. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 379, n. 10-11, p. 882–887, 2015. Citado na página 14.
- [81] ROGERS, C.; SCHIEF, W. The pulsodion in 2 + 1-dimensional magneto-gasdynamics: Hamiltonian structure and integrability. *Journal of mathematical physics*, AIP, v. 52, n. 8, p. 083701, 2011. Citado na página 14.



- [82] HAAS, F.; BRET, A. Nonlinear low-frequency collisional quantum Buneman instability. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 97, n. 2, p. 26001, 2011. Citado na página 14.
- [83] HAAS, F. Anisotropic Bose-Einstein condensates and completely integrable dynamical systems. *Physical Review A*, APS, v. 65, n. 3, p. 033603, 2002. Citado na página 14.
- [84] HAAS, F. et al. Time-dependent Gaussian solution for the Kostin equation around classical trajectories. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 52, n. 1, p. 88–95, 2013. Citado na página 14.
- [85] PINNEY, E. The nonlinear differential equation  $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$ . *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 1, n. 5, p. 681, 1950. Citado 3 vezes nas páginas 14, 53 e 90.
- [86] HAAS, F. The damped pinney equation and its applications to dissipative quantum mechanics. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 81, n. 2, p. 025004, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 14, 53, 54 e 101.
- [87] KUZMAK, G. E. Asymptotic solutions of nonlinear second order differential equations with variable coefficients. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Elsevier, v. 23, n. 3, p. 730–744, 1959. Citado na página 14.
- [88] LUKE, J. C. A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 292, n. 1430, p. 403–412, 1966. Citado na página 14.
- [89] KEVORKIAN, J.; COLE, J. D. *Perturbation methods in applied mathematics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 101.
- [90] WALLACE, C. D. et al. Measurements of temperature and spring constant in a magneto-optical trap. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 11, n. 5, p. 703–711, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 62.
- [91] TINKLE, M. et al. Low-order modes as diagnostics of spheroidal non-neutral plasmas. *Physical Review Letters*, APS, v. 72, n. 3, p. 352, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 72.
- [92] DUBIN, D. H. Effect of correlations on the thermal equilibrium and normal modes of a non-neutral plasma. *Physical Review E*, APS, v. 53, n. 5, p. 5268, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 72.
- [93] MATTHEW, D. et al. *Quantum Gases: Finite temperature and non-equilibrium dynamics*. [S.l.]: World Scientific, 2013. Citado na página 16.
- [94] METCALF, H. J.; STRATEN, P. Van der. Laser cooling and trapping of neutral atoms. *The Optics Encyclopedia: Basic Foundations and Practical Applications*, Wiley Online Library, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 22.
- [95] METCALF, H.; STRATEN, P. van der. Cooling and trapping of neutral atoms. *Physics Reports*, Elsevier, v. 244, n. 4-5, p. 203–286, 1994. Citado na página 16.
- [96] GRIFFITHS, D. J. *Mecânica quântica*. [S.l.: s.n.], 2007. Citado na página 21.
- [97] KRALL, N. A.; TRIVELPIECE, A. *Principles of plasma physics*. [S.l.]: New York: McGraw-Hill, Inc, 1973. Citado na página 24.
- [98] PRITCHARD, D. E. Cooling neutral atoms in a magnetic trap for precision spectroscopy. *Physical Review Letters*, APS, v. 51, n. 15, p. 1336, 1983. Citado na página 24.

- [99] PÉREZ-RÍOS, J.; SANZ, A. How does a magnetic trap work? *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 81, n. 11, p. 836–843, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- [100] KOWALSKI, K. et al. Magneto-optical trap: fundamentals and realization. *Computational Methods in Science and Technology*, n. Vol. spec. iss.(2), p. 115–129, 2010. Citado na página 25.
- [101] DALIBARD, J. Laser cooling of an optically thick gas: the simplest radiation pressure trap? *Optics Communications*, Elsevier, v. 68, n. 3, p. 203–208, 1988. Citado na página 26.
- [102] HAAS, F. *Quantum plasmas: An hydrodynamic approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.
- [103] BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of plasma physics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 30, 36, 38 e 71.
- [104] KARIMOV, A.; YU, M.; STENFLO, L. Expansion of a cold non-neutral plasma slab. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing, v. 21, n. 12, p. 122304, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 31, 72 e 73.
- [105] WIGNER, E. P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. In: *Part I: Physical Chemistry. Part II: Solid State Physics*. [S.l.]: Springer, 1997. p. 110–120. Citado na página 32.
- [106] HILLERY, M. et al. Distribution functions in physics: fundamentals. *Physics Reports*, Elsevier, v. 106, n. 3, p. 121–167, 1984. Citado na página 32.
- [107] CARRUTHERS, P.; ZACHARIASEN, F. Quantum collision theory with phase-space distributions. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 55, n. 1, p. 245, 1983. Citado na página 32.
- [108] KUNDU., P. K.; COHEN., I. M. *Fluid Mechanics*. [S.l.]: Academic Press, 2001. Citado na página 39.
- [109] CALDIROLA, P. Forze non conservative nella meccanica quantistica. *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, Springer, v. 18, n. 9, p. 393–400, 1941. Citado na página 42.
- [110] KANAI, E. On the quantization of the dissipative systems. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 3, n. 4, p. 440–442, 1948. Citado na página 42.
- [111] LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. Citado na página 42.
- [112] ARYA, A. *Introduction to Classical Mechanics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2000. Citado na página 42.
- [113] HURST, J. et al. High-harmonic generation in a quantum electron gas trapped in a nonparabolic and anisotropic well. *Physical Review B*, APS, v. 93, n. 20, p. 205402, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 42, 44, 66 e 95.
- [114] SOARES, L. G. F.; HAAS, F. Nonlinear oscillations of ultra-cold atomic clouds in a magneto-optical trap. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 94, n. 12, p. 125214, 2019. Citado na página 50.
- [115] CHANDRASEKHAR, S.; CHANDRASEKHAR, S. *An introduction to the study of stellar structure*. [S.l.]: Courier Corporation, 1957. Citado na página 59.

- [116] SHIBATA, K.; YONEKAWA, S.; TOJO, S. Loading of atoms into an optical trap with high initial phase-space density. *Physical Review A*, APS, v. 96, n. 1, p. 013402, 2017. Citado na página 62.
- [117] HAAS, F.; GOEDERT, J. On the hamiltonian structure of ermakov systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 29, n. 14, p. 4083, 1996. Citado na página 67.
- [118] CHANELIERE, T. et al. Three dimensional cooling and trapping with a narrow line. *The European Physical Journal D*, Springer, v. 46, n. 3, p. 507–515, 2008. Citado na página 67.
- [119] MIYAMOTO, K. *Fundamentals of plasma physics and controlled fusion*. [S.l.]: Iwanami Book Service Center Tokyo, 1997. Citado na página 71.
- [120] BELLAN, P. M. *Fundamentals of plasma physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008. Citado na página 71.
- [121] DAVIDSON, R. Electrostatic shielding of a test charge in a non-neutral plasma. *Journal of Plasma Physics*, Cambridge University Press, v. 6, n. 1, p. 229–235, 1971. Citado 2 vezes nas páginas 72 e 73.
- [122] SACK, C.; SCHAMEL, H. Plasma expansion into vacuum—a hydrodynamic approach. *Physics Reports*, Elsevier, v. 156, n. 6, p. 311–395, 1987. Citado na página 72.
- [123] LUO, H.; YU, M. Kinetic theory of self-similar expansion of a dusty plasma. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, AIP, v. 4, n. 5, p. 1122–1125, 1992. Citado na página 72.
- [124] MORA, P. Plasma expansion into a vacuum. *Physical Review Letters*, APS, v. 90, n. 18, p. 185002, 2003. Citado na página 72.
- [125] LARSON, D. J. et al. Sympathetic cooling of trapped ions: A laser-cooled two-species nonneutral ion plasma. *Physical Review Letters*, APS, v. 57, n. 1, p. 70, 1986. Citado na página 73.
- [126] JELENKOVIĆ, B. et al. Sympathetically cooled and compressed positron plasma. *Physical Review A*, APS, v. 67, n. 6, p. 063406, 2003. Citado na página 73.
- [127] GREAVES, R.; TINKLE, M.; SURKO, C. Creation and uses of positron plasmas. *Physics of Plasmas*, AIP, v. 1, n. 5, p. 1439–1446, 1994. Citado na página 73.
- [128] TANAKA, H. e. a. Confinement of non-neutral electron plasmas in multi-ring electrode traps using with a field emitter array cathode. *Conf. on Contr. Fusion and Plasma Physics*, v. 22C, p. 11, 1998. Citado na página 73.
- [129] BRILLOUIN, L. A theorem of larmor and its importance for electrons in magnetic fields. *Physical Review*, APS, v. 67, n. 7-8, p. 260, 1945. Citado na página 73.
- [130] BERNSTEIN, I. B.; GREENE, J. M.; KRUSKAL, M. D. Exact nonlinear plasma oscillations. *Physical Review*, APS, v. 108, n. 3, p. 546, 1957. Citado na página 73.
- [131] HAAS, F.; SOARES, L. G. F. Large amplitude oscillations in a trapped dissipative electron gas. *Physics of Plasmas*, American Institute of Physics, v. 25, p. 012310, 2018. Citado na página 74.
- [132] SPITZER, L. *Physics of fully ionized gases*. [S.l.]: Courier Corporation, 2006. Citado na página 79.

- [133] GABRIELSE, G. Comparing the antiproton and proton, and opening the way to cold antihydrogen. *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Elsevier, v. 45, p. 1–39, 2001. Citado na página 86.
- [134] GABRIELSE, G. et al. Cooling and slowing of trapped antiprotons below 100 mev. *Physical review letters*, APS, v. 63, n. 13, p. 1360, 1989. Citado na página 86.
- [135] ROLSTON, S.; GABRIELSE, G. Cooling antiprotons in an ion trap. *Hyperfine Interactions*, Springer, v. 44, n. 1-4, p. 233–245, 1989. Citado na página 86.
- [136] GABRIELSE, G. et al. First positron cooling of antiprotons. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 507, n. 1-4, p. 1–6, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 86 e 92.
- [137] HAAS, F.; SOARES, L. G. F. Nonlinear oscillations of non-neutral plasmas in a time-dependent harmonic trap. *Physics of Plasmas*, American Institute of Physics, v. 27, p. 062307, 2020. Citado na página 88.
- [138] HAAS, F. et al. Breather mode in the many-electron dynamics of semiconductor quantum wells. *Physical Review B*, APS, v. 80, n. 7, p. 073301, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 97.