Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Autor: Diego Romeira Cigaran Chaves

A Matemática é uma Arte

Uma Proposta de Ensino Explorando Ligações entre a Arte e a Matemática.

Porto Alegre

2008

Diego Romeira Cigaran Chaves

A Matemática é uma Arte: Uma Proposta de Ensino Explorando Ligações entre a Arte e a Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Porto Alegre
2008

Diego Romeira Cigaran Chaves

A Matemática é uma Arte: Uma Proposta de Ensino Explorando Ligações entre a Arte e a Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em ___ de _____________ de _____, pela Banca Examinadora.

Banca Examinadora

____
Drª Elisabete Zardo Búrigo

____
Drª Simone Dias Cruz

____
Drª Marilaine de Fraga Sant'Ana

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de contextualização para o Ensino de Matemática, explorando números reais e conceitos de geometria. Para a elaboração dessa proposta, procurou-se a inserção em um contexto que despertasse o interesse dos alunos, motivando-os ao estudo de Matemática. O contexto escolhido foi a Arte e foi desenvolvida uma proposta baseada na análise de obras de autores como Da Vinci, Escher e Sacilotto, relacionando certos conceitos matemáticos estudados nos Ensinos Fundamental e Médio com elementos presentes nas obras.

Palavras chaves:

Ensino de Matemática, Arte.

Abstract

This work presents a Mathematical Teaching proposal contextualized, exploring real numbers and geometry concepts. For this proposal elaboration, we look to insert in a context that could make students interested, motivating them for Mathematical study. We choose Art as the context and developed a proposal based on the analysis of pictures from artists like Da Vinci, Escher and Sacilotto, relating some mathematical concepts teach in elementary school with elements from the pictures.

Key words:

Mathematical teaching, Art.

Relação das Figuras

Sumário

1 Introdução

"O homem fez arte usando matemática, e construiu matemática observando as artes". (Barco apud Medeiro, 2006)

Uma pergunta muito ouvida pelos professores de Matemática é: para que serve isso que estamos estudando?

Seja pela forma descontextualizada que muitos conteúdos são apresentados, ou simplesmente pelo fato já passado de pai para filho de que a Matemática é uma ciência de números que não tem nada a ver com a realidade, ficando a parte quando pensadas ligações entre diferentes áreas do conhecimento.

Durante uma experiência da disciplina de Estágio em Educação Matemática II, cursada no primeiro semestre do ano de 2008, numa aula sobre ângulos entre retas, uma aluna fez uma indagação sobre a utilidade daqueles conceitos em sua vida cotidiana, como ela os usaria em atividades simples como comprar pão. Nesse momento não soube uma resposta imediata para essa pergunta.

Essa indagação me fez pesquisar procurando respostas à pergunta dessa aluna e uma das contextualizações encontradas para aqueles conceitos em que estava trabalhando foi um texto sobre o artista plástico Luiz Sacilotto.

Dessa forma surgiu a motivação para esse trabalho: como a arte pode servir de motivação para o estudo da matemática?

A Arte tida por muitos como algo sem lógica e não-científico, nem de longe vista como tendo possíveis ligações com a Matemática pela maioria das pessoas.

O que diriam as pessoas ao saber que, na verdade, na Arte podem ser visualizados muitos conceitos de Matemática e até mesmo pode-se criar arte através do uso da Matemática. Como, por exemplo, a seqüência de quadros *Derivada de uma Imagem* de 1969 do pintor Waldemar Cordeiro.

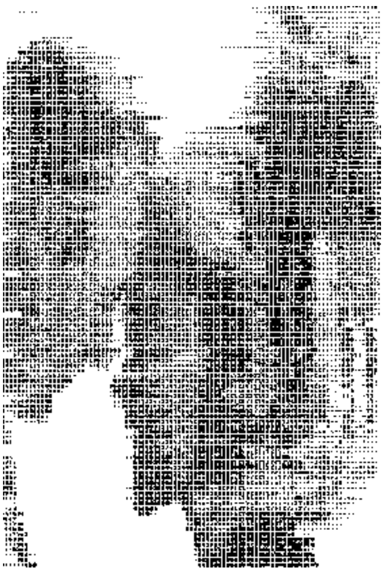


Figura 1 - Cordeiro, Waldemar e Moscati, Giorgio, *Derivadas de Uma Imagem,* 1969. Transformação em grau zero, press out put, 47 x 34,5 cm. Coleção Família Cordeiro. Disponível em <http://www.visgraf.impa.br/Gallery/wldemar/obras/deriv.htm>. Acesso em 13 nov. 2008.

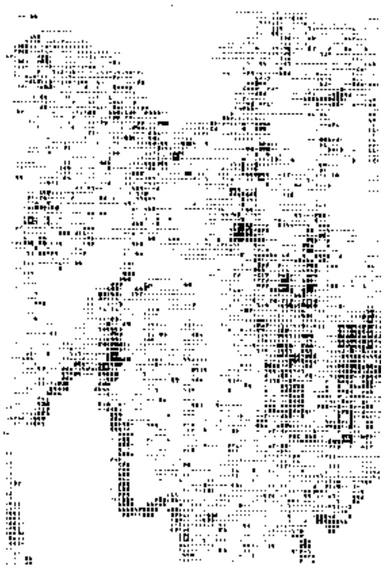


Figura 2 – Cordeiro, Waldemar e Moscati, Giorgio, *Derivadas de Uma Imagem,* 1969. Transformação em grau um, press out put, 47 x 34,5 cm. Coleção Família Cordeiro. Disponível em <http://www.visgraf.impa.br/Gallery/wldemar/obras/deriv.htm>. Acesso em 13 nov. 2008.

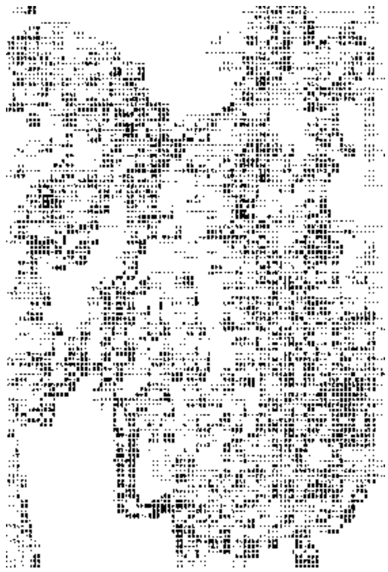


Figura 3 – Cordeiro, Waldemar e Moscati, Giorgio, *Derivadas de Uma Imagem,* 1969. Transformação em grau dois, press out put, 47 x 34,5 cm. Coleção Família Cordeiro. Disponível em <http://www.visgraf.impa.br/Gallery/wldemar/obras/deriv.htm>. Acesso em 13 nov. 2008.

Nesse quadro, figuras 1, 2 e 3, o pintor a partir de uma imagem, mais especificamente um retrato, transforma o retrato em um conjunto de pontos, similar ao processo de pixels usado pelo computador, para cada tonalidade de claro a escuro ele faz uma escala dando valores de 0 a 6, e a partir do valor de cada ponto para o seu seguinte calcula-se a variação de tom e então no quadro derivada primeira cada ponto é substituído da cor original para a cor correspondente de variação.

Esse é um exemplo de aplicação de Matemática específica de Ensino Superior para a criação de Arte, mas o mesmo pode ser feito com Matemática de nível Fundamental e Médio, e é a partir disso que esse trabalho se desenvolverá, uma proposta de ensino para aulas de Matemática de Ensino Fundamental e Médio envolvendo a ligação entre a Matemática e a Arte, em como a Matemática pode ser utilizada para a criação e apreciação de Arte.

No desenvolver desse trabalho, serão relações entre a Educação Matemática e a Arte, em modos como a Matemática pode ser encarada, a fim de dar-lhe um maior significado. Através de um panorama histórico e cultural dos pintores utilizados, Leonardo Da Vinci, Luiz Sacilotto e M. C. Escher, é desenvolvida uma proposta de ensino de Matemática envolvendo os conceitos: números reais, ângulos entre retas, ângulo interno de um polígono e transformações no plano. Por fim apresentam-se os resultados da aplicação da proposta.

2 Educação Matemática e Arte

D'Ambrósio (2005) entende a Matemática como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, entender, manejar e conviver com a realidade dentro de um contexto natural e cultural. Sendo parte desse contexto as religiões, as ciências em geral e as artes. Segundo essa visão a Matemática é um instrumento utilizado em outras áreas do conhecimento, sendo mais natural associá-la a elas.

Dentro de sala de aula há uma fragmentação desses conhecimentos, separando as disciplinas de modo que onde começa uma termina a outra, a chamada multidisciplinaridade. Uma forma que não tem se mostrado de grande eficiência para os alunos sob uma visão de inserção do aluno em sociedade, pois segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> O ensino de matemática, centrado em si mesmo, limitando-se à exploração de conteúdos meramente acadêmicos, de forma isolada, sem qualquer conexão entre seus próprios campos ou com outras áreas de conhecimento, pouco tem contribuído para formação integral do aluno, com vistas à conquista da cidadania. (BRASIL, 1997, p. 26)

Mas uma outra opção é a interdisciplinaridade, que cria possibilidades de criação e utilização de recursos, justapondo resultados e mesclando métodos para assim identificar novos objetos de estudo.

Um exemplo disso é exatamente a aproximação da Arte com a geometria, pois as primeiras experiências de um sujeito com a geometria se dão através de desenhos e formas que compõem a Arte. Torna-se assim natural que esses dois conhecimentos sejam integrados e utilizados em prol de ambas as áreas.

Através desse tipo de atividade, é possível fugir da velha forma baseada na repetição que parece ser cheia de conhecimentos que não mudam, e que se deve decorar e saber reproduzir aquilo que o professor diz, muito freqüente na sala de aula de matemática, deixando pouco espaço para a criatividade e desenvolvimento do raciocínio lógico.

Além de a Matemática sempre ter sido relativamente ligada à Arte. Segundo Vantongerloo apud Medeiro (2006), a Arte pode ser expressa em termos da geometria e das ciências exatas, segundo Frabetti & Merino apud Medeiro (2006):

"A geometria é uma ciência que serve de ferramentas em outras ciências."

"A geometria participa da maioria das artes visuais: pintura, escultura, arquitetura..."

Esse tipo de proposta, integrando a Arte e a Matemática, devido a presença da educação em Arte desenvolve outras percepções no aluno, como a sensibilidade e aprendizagem estética, pois segundo os PCN:

> A educação em arte propicia o desenvolvimento do pensamento artístico e da percepção estética, que caracterizam um modo próprio de ordenar e dar sentido à experiência humana: o aluno desenvolve sua sensibilidade, percepção e imaginação, tanto ao realizar formas artísticas quanto na ação de apreciar e conhecer as formas produzidas por ele e pelos colegas, pela natureza e nas diferentes culturas. (BRASIL, 1997, p. 19)

> Apenas um ensino criador, que favoreça a integração entre a aprendizagem racional e estética dos alunos, poderá contribuir para o exercício conjunto complementar da razão e do sonho, no qual conhecer é também maravilhar-se, divertir-se, brincar com o desconhecido, arriscar hipóteses

> ousadas, trabalhar duro, esforçar-se e alegrar-se com descobertas. (BRASIL, 1997, p. 27)

As artes plásticas de todos os tempos são repletas de geometria, além do que a riqueza de detalhes de um trabalho artístico oferece uma grande vantagem didática e pedagógica como um pano de fundo para o estudo de Matemática. Segundo os PCN:

> É fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a matemática e as outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 51)

Na dissertação *Muito Além do Olhar: Um Enlace da Matemática com a Arte* (2007) de Maira Leandra Alves, podemos observar uma proposta que integra essas duas faces a Arte e a Matemática através de uma análise histórica de cada obra e construindo com os alunos a noção de arte através de conceitos matemáticos, bem como a aula de geometria tem como pano de fundo obras de arte desenvolvidas pelos próprios alunos. A autora confronta as possibilidades da Educação Matemática e da Arte, organizando atividades que contribuem para o desenvolvimento de um raciocínio lógico-crítico e da sensibilidade, por meio dos alunos.

3 Panorama das Obras Utilizadas e seus Autores

3.1 Leonardo da Vinci[1]

Leonardo da Vinci (1452-1519) foi um pintor, matemático, escultor, arquiteto, físico, escritor, engenheiro, poeta, cientista, botânico e músico do Renascimento italiano. É considerado um dos maiores gênios da história da Humanidade.

Leonardo representava muito bem o homem da renascença acreditavam no poder humano de julgar, de criar e construir, em contraposição ao homem medieval que via Deus como a razão de todas as coisas.

Dentre suas obras mais conhecidas estão *A Última Ceia* (1495-1497), figura 4, afresco pintado diretamente no refeitório Igreja Santa Maria delle Grazie, em Milão, e o retrato *La Gioconda*, mais conhecido como *Mona Lisa*(1503-1507), figura 5.

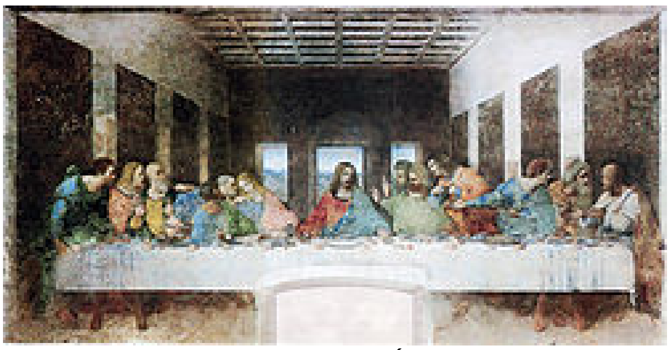


Figura 4 – Da Vinci, Leonardo, *A Última Ceia,* 1495-1497. Mista com predominância da têmpera e óleo sobre duas camadas de preparação de gesso aplicadas sobre reboco 460 × 880 cm. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/A_%C3%9Altima_Ceia_(Leonardo_da_Vinci)>. Acesso em 13 nov. 2008.

Figura 5 – Da Vinci, Leonardo, *Mona Lisa,* 1503-1507. Óleo sobre madeira de álamo 77 × 53 cm. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Mona_lisa>. Acesso em 13 nov. 2008.

[1] Fonte: Wikipédia, disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_vinci>

Somente algumas de suas pinturas, e nenhuma das esculturas realizadas por ele existem atualmente. Da Vinci planejou muitas pinturas com desenhos e técnicas bastante avançadas, deixando projetos inacabados.

Dentre seus estudos estão desenhos de anatomia feitos pelo artista através de autópsias que acompanhava em cadáveres da época, bem como o importante desenho *Homem Vitruviano* (1490), figura 6, que representa as proporções clássicas do corpo humano de acordo com Marco Vitruvio Polião (daí "Vitruviano" devido a Vitruvio).

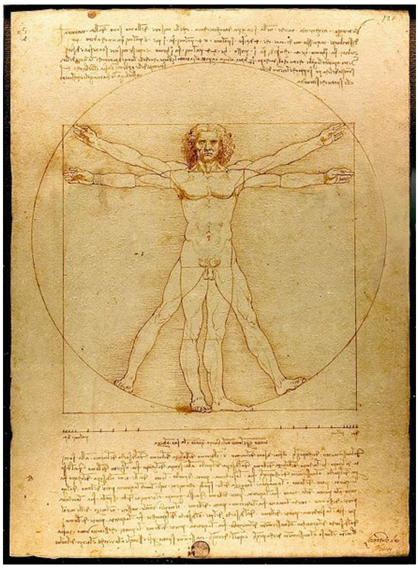


Figura 6 – Da Vinci, Leonardo, *Homem Vitruviano,* 1490. Lápis e tinta sobre papel 34 × 24 cm. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Homem_Vitruviano_(desenho_de_Leonardo_da_Vinci)>. Acesso em 13 nov. 2008.

3.2 Maurits Cornelis Escher[2]

Maurits Cornelis Escher ou M. C. Escher (1898-1972) foi um artista gráfico holandês conhecido pelas suas xilogravuras, litogravuras e meios-tons (*mezzotints*), representando com grande freqüência em suas obras

[2] Fonte: Wikipédia, disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Escher>

construções impossíveis, preenchimento regular do plano, explorações do infinito e as metamorfoses - padrões geométricos entrecruzados que se transformam gradualmente para formas completamente diferentes.

Sendo uma das suas maiores contribuições a geração de ilusões de ótica, respeitando regras geométricas de desenho e perspectiva com uma notável qualidade estética.

Uma tendência muito presente em sua obra são os mosaicos, que conheceu em uma visita a Espanha, onde o pintor se encantou com a forma em que as figuras se entrelaçavam formando os mais belos padrões. Escher desenvolvia suas obras de mosaicos a partir de uma malha de polígonos, fazendo mudanças em suas formas, sem no entanto modificar sua área, representando num plano bidimensional o entrelaçamento entre diferentes figuras. Como por exemplo, as obras *Sem Título*, figura 7, e *Plane Filling I* (1951), figura 8.

Figura 7 – Escher, M. C., [*Sem Título*], s/ d. Disponível em <http://bp1.blogger.com/_sB1UzC4DYBM/RvQ7r2FgFAI/AAAAAAAAASc/NSEoIlhiVec/s400/escher.jpg>. Acesso em 13 nov. 2008.

Figura 8 – Escher, M. C., *Plane Filling I,* 1951. Mezzopoint. Disponível em <http://www.geocities.com/Area51/9839/escher6.gif>. Acesso em 13 nov. 2008.

Outra forte tendência nos trabalhos de Escher, é a exploração do espaço, tridimensional num plano bidimensional, criando a partir disso, figuras impossíveis, representações distorcidas e paradoxos. Como por exemplo, as obras *Belvedere* (1958), figura 9, e *Relativity* (1953), figura 10.

Figura 9 – Escher, M. C., *Belvedere,* 1958. Litograph 46,2 × 29,5 cm. Disponível em <http://oseculoprodigioso.blogspot.com/2007/02/escher-mc-ilustrao.html>. Acesso em 13 nov. 2008.

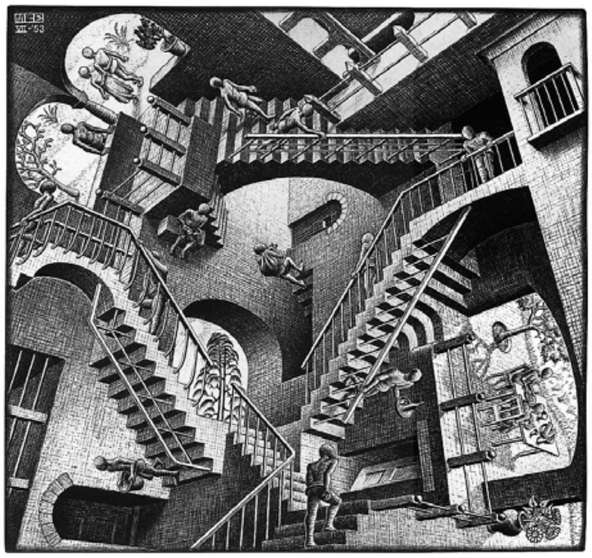


Figura 10 – Escher, M. C., *Relativity,* 1953. Woodcut 28,2 × 29,4 cm. Disponível em <http://oseculoprodigioso.blogspot.com/2007/02/escher-mc-ilustrao.html>. Acesso em 13 nov. 2008.

3.3 Luiz Sacilotto[3]

Luiz Sacilotto (1924-2003) foi um pintor, desenhista e escultor brasileiro. Uma das maiores expressões do Abstracionismo no Brasil, revelado durante a década de 1940.

"Essa talvez seja a primeira influência do concretismo que viria a aparecer muitos anos depois no meu trabalho", reflete Sacilotto sobre a

[3]Fonte: Wikipédia, disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Lu%C3%ADs_Sacilotto>

relação das tardes em que gazeteava aulas com a musicalidade matemática de sua obra, apontada anos depois pela crítica.

Um dos fundadores do movimento concretista, usa como elementos básicos em suas obras figuras geométricas, círculos, quadrados, triângulos. “Geometria é minha paixão.” disse o artista. Como comprovado em seus quadros, como por exemplo, *Concreção 9212* (1992), figura 11, e *Concreção 5623* (1956), figura 12.

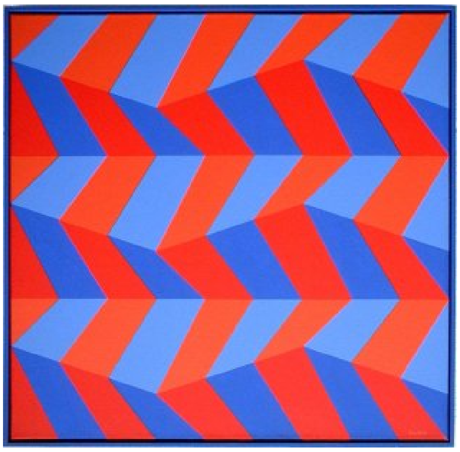


Figura 11 – Sacilotto, Luiz, *Concreção 9212,* 1992. Têmpera acrílica sobre tela 90 × 90 cm. Disponível em <http://www.sacilotto.com.br/>. Acesso em 13 nov. 2008.

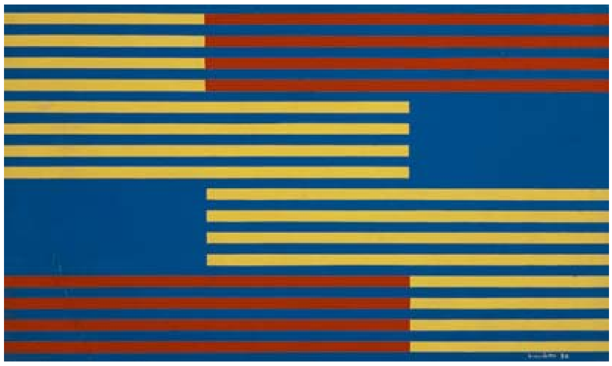


Figura 12 – Sacilotto, Luiz, *Concreção 5623,* 1956. Óleo sobre tela 70 × 43 cm. Disponível em <http://www.sacilotto.com.br/>. Acesso em 13 nov. 2008.

4. Objetivos

Objetivo desse trabalho é desenvolver uma proposta de ensino que contextualize o Ensino de determinados conceitos de Matemática, e que mostre a Matemática como um campo com ferramentas que colaborem para outras áreas do conhecimento, nesse caso a Arte.

Com esse trabalho pretende-se criar situações que motivem e questionem os alunos ao estudo de Matemática e os auxiliem no desenvolvimento de espírito crítico, seja na apreciação das obras de arte através do olhar dos conceitos matemáticos, ou também para a tomada de decisões na resolução de situações-problema.

Pretende-se com esse trabalho, através de rápida exposição oral do contexto em que cada obra se insere e da resolução de exercícios pelos alunos envolvendo o uso de materiais manipulativos e situações com perguntas sem uma única resposta correta, indagar os alunos sobre o quanto de Matemática eles vêm na Arte e vice-versa.

Procuramos abordar nesse contexto:

- O estudo de números reais, através da razão áurea presente em muitas obras de arte.
- O estudo de ângulos entre retas através da observação em quadros, principalmente de arte abstrata. Identificando a presença desse tipo de representação por meio de retas paralelas, perpendiculares e ângulos em geral.

- O estudo de ângulos internos de polígonos regulares através do desenvolvimento de mosaicos geométricos.
- O estudo dos conceitos de simetria, reflexão e translação, através do desenvolvimento e análise de mosaicos não-geométricos.

5. Proposta

A proposta de ensino do seguinte trabalho se divide em cinco atividades que podem ser utilizadas de forma independente uma da outra, e também em diferentes séries do Ensino Fundamental e Médio.

Começando com uma indagação geral aos alunos se eles vêem alguma ligação entre essas duas áreas, a Matemática e a Arte. O que essas duas áreas têm em comum, explorando com os alunos quais suas visões de Arte e de Matemática.

5.1 O Homem Vitruviano e o Número de ouro

O estudo de números irracionais nas escolas, muitas vezes se resume a apresentação de que raízes de um inteiro que não é quadrado perfeito e que π são números racionais, ficando a idéia em alguns casos de que esses são os únicos números irracionais existentes.

Mas é possível apresentar de certa forma natural um outro número irracional, o número φ aproximado por 1,618, a razão áurea associada a perfeição de medidas do ser humano e de todo o universo.

No desenvolvimento do desenho do *Homem Vitruviano*, figura 13, Leonardo da Vinci, respeitou as proporções do corpo humano relatados no livro *Da Architetura*:

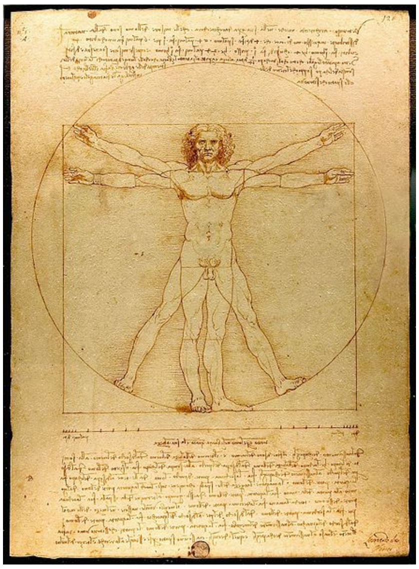


Figura 13 – Da Vinci, Leonardo, *Homem Vitruviano,* 1490. Lápis e tinta sobre papel 34 × 24 cm. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Homem_Vitruviano_(desenho_de_Leonardo_da_Vinci)>. Acesso em 13 nov. 2008.

- Um palmo é a largura de quatro dedos;
- Um pé é a largura de quatro palmos;
- Um antebraço ou cúbito é a largura de seis palmos;
- A altura de um homem é quatro antebraços (24 palmos);
- Um passo é quatro antebraços;
- A longitude dos braços estendidos de um homem é igual à altura dele;
- A distância entre o nascimento do cabelo e o queixo é um décimo da altura de um homem;
- A distância do topo da cabeça para o fundo do queixo é um oitavo da altura de um homem;
- A distância do nascimento do cabelo para o topo do peito é um sétimo da altura de um homem;
- A distância do topo da cabeça para os mamilos é um quarto da altura de um homem;

- A largura máxima dos ombros é um quarto da altura de um homem;
- A distância do cotovelo para o fim da mão é um quinto da altura de um homem;
- A distância do cotovelo para a axila é um oitavo da altura de um homem;
- A longitude da mão é um décimo da altura de um homem;
- A distância do fundo do queixo para o nariz é um terço da longitude da face;
- A distância do nascimento do cabelo para as sobrancelhas é um terço da longitude da face;
- A altura da orelha é um terço da longitude da face.

Mas, além disso, o desenho representa a simetria básica do corpo e as medidas estéticas ligadas com a perfeição representadas pela razão áurea, como por exemplo:

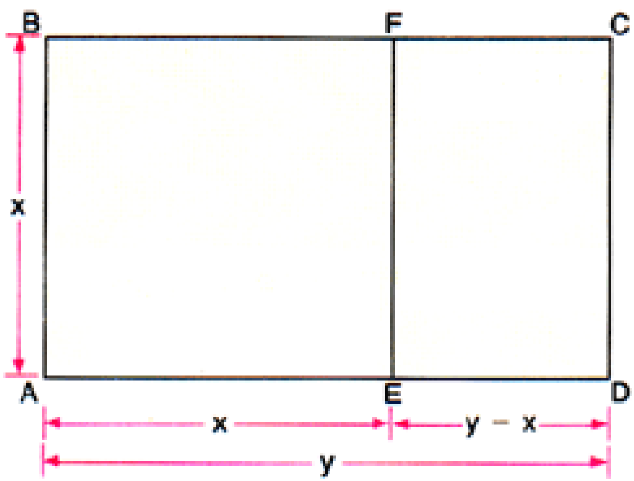
- A altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão.
- A altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça.
- A medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax.
- A medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo.
- O tamanho dos dedos e a medida da dobra central até a ponta.
- A medida da dobra central até a ponta dividido e da segunda dobra até a ponta.
- A medida do seu quadril ao chão e a medida do seu joelho até ao chão.

- A medida do cotovelo até o pulso e a medida do seu pé.

A partir disso, pode-se apresentar aos alunos a imagem do *Homem Vitruviano*, para que eles medindo e calculando a razão entre as medidas descubram esse novo número, φ, a razão áurea, presente tanto nas relações de medidas do corpo humano, quanto em animais, construções e em obras de arte.

Observamos apenas que as medidas obtidas são números racionais e sendo assim sua razão também é racional, sendo assim, na verdade o que obtemos como razão é uma aproximação do valor de φ, e não o valor real desse número irracional.

O Número de Ouro, φ, é o número obtido através de um retângulo, que respeita a seguinte propriedade, como na figura abaixo, seja o retângulo de vértices A, B, C, e D, sendo AB o menor lado, construindo um quadrado de lado AB sobre o retângulo, e marcando seus vértices E e F, o retângulo ABCD será áureo se o retângulo obtido CDEF for semelhante ao retângulo ABCD.



5.2 Luiz Sacilotto e os ângulos entre retas

Nas obras concretistas de Luiz Sacilotto, é muito freqüente a presença de figuras geométricas, em particular de retas. E o uso dessas retas e dos ângulos formados por elas nos passa sensações desde movimento, profundidade e até mesmo perturbações.

Explorar a possibilidade de se criar obras de arte através do uso de Matemática, e também para a apreciação da obra analisando os conceitos matemáticos presentes, apresentando assim a Matemática como ferramenta para a Arte.

Aqui convidamos os alunos a analisar as obras, observando os ângulos utilizados pelo artista, e também que tipo de sensação a pintura lhes passa, fazendo ligações entre esses dois elementos. Utilizando as obras de Sacilotto apresentadas nas figuras 14, 15, 16, 17, 18, 19 e 20:

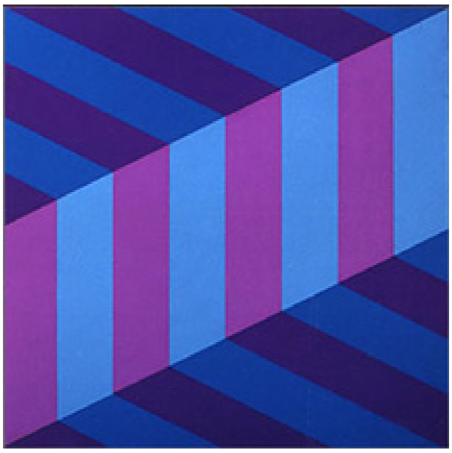


Figura 14 – Sacilotto, Luiz, *Concreção 9204,* 1992. Têmpera sobe tela 110 × 110 cm. Disponível em <http://www.sacilotto.com.br/>. Acesso em 13 nov. 2008.

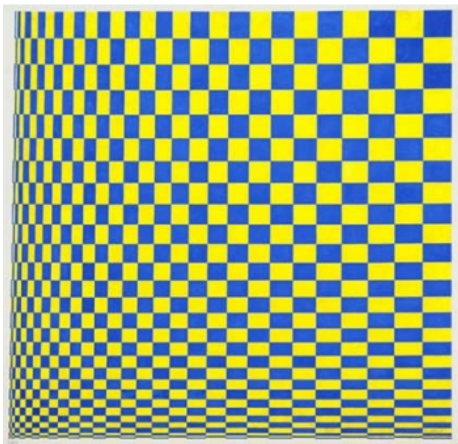


Figura 15 – Sacilotto, Luiz, [Sem Título], s/ d. Guache sobre papel 48 × 48 cm. Disponível em <http://www.art-bonobo.com/fgs/images/12-sacilotto3.jpg>. Acesso em 13 nov. 2008.

Figura 16 – Sacilotto, Luiz, *Geométrico,* s/ d. Acrílica sobre cartão 50 × 50 cm. Disponível em <http://www.pinturabrasileira.com/images/obras/200/a0734.jpg>. Acesso em 13 nov. 2008.

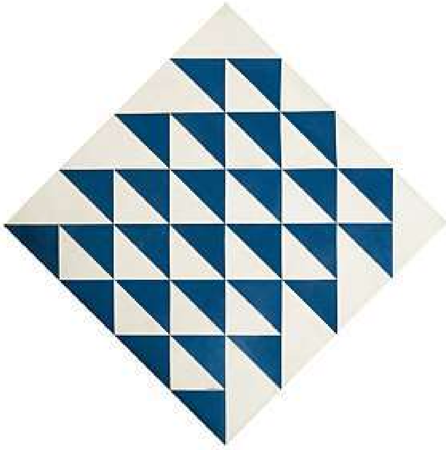


Figura 17 – Sacilotto, Luiz, *Concreção 6047,* 1960. Coleção Itaú. Disponível em <http://img.estadao.com.br/fotos/21/7C/43/G217C431FBD7B4EB68F324ED1115DA2B4.jpg>. Acesso em 13 nov. 2008.

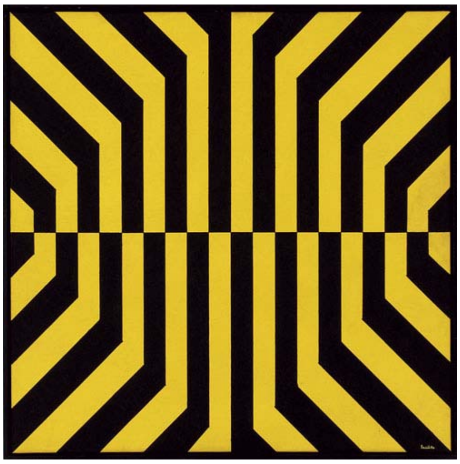


Figura 18 – Sacilotto, Luiz, *Concreção 9773,* 1997. Acrílica sobre tela 90 x 90 cm. Disponível em <http://www.sacilotto.com.br/>. Acesso em 13 nov. 2008.

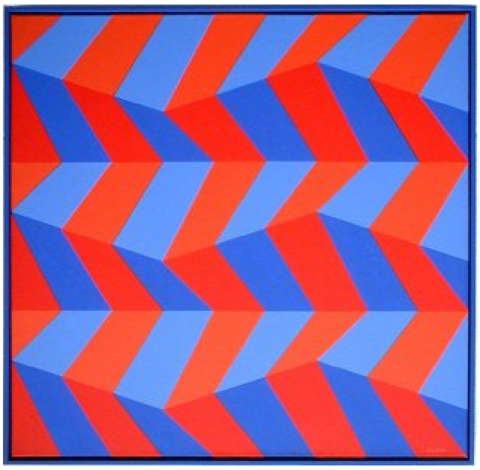


Figura 19 – Sacilotto, Luiz, *Concreção 9212,* 1992. Têmpera acrílica sobre tela 90 x 90 cm. Disponível em <http://www.sacilotto.com.br/>. Acesso em 13 nov. 2008.

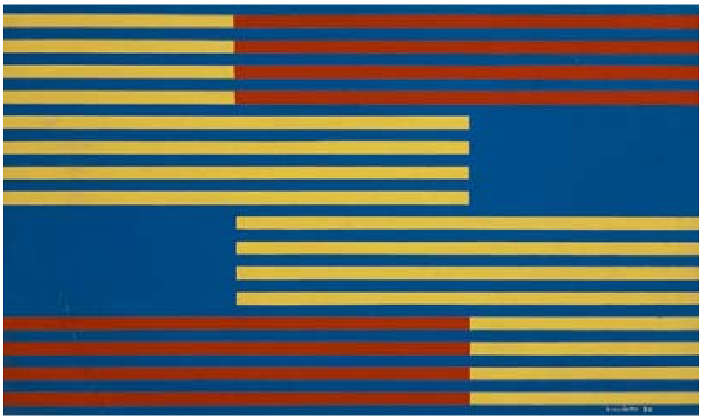


Figura 20 – Sacilotto, Luiz, *Concreção 5623,* 1956. Óleo sobre tela 70 x 43 cm. Disponível em <http://www.sacilotto.com.br/>. Acesso em 13 nov. 2008.

5.3 Mosaicos geométricos e o ângulo interno de um polígono

Uma forma de Arte mais comumente associada a Matemática é o mosaico feito através de polígonos. Apresentar aos alunos as figuras 21 e 22 de mosaicos retirados de imagens reais, mostrando as características principais entre mosaicos, encaixe perfeito entre as peças preenchendo o plano e formando certos padrões.

Figura 21 – Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Imagem:Mekhnes_Place_El-Hedine_Mosaique3.jpg#file>

Figura 22 – Disponível em <http://farm3.static.flickr.com/2248/2259123176_a00ec423f7.jpg?v=0>

A partir da idéia do que é um mosaico, distribuir aos alunos peças em EVA no formato de polígonos regulares, para que os alunos criem seus próprios mosaicos. Em um primeiro momento criar os mosaicos sem restrição às peças que são utilizadas, fazendo com que os alunos tomem familiaridade com as peças e percebam que nem todo tipo de peça se encaixa em qualquer outra.

Em um segundo momento pedir aos alunos que construam mosaicos agora utilizando somente um tipo polígono regular. Observando assim que utilizando alguns polígonos isso é possível, como por exemplo, triângulos, quadrados e hexágonos, e utilizando outros não é possível, como por exemplo, o pentágono, heptágono e octógono.

Indagar aos alunos porque é possível fazer um mosaico utilizando alguns polígonos e com outros não. E levar a discussão ao conceito de ângulo interno de um polígono, a circunferência com 360° e chegar que o ângulo interno deve ser um divisor de 360°.

5.4 Mosaicos de Escher e as Transformações no Plano

Um conceito bastante importante para a composição de um mosaico, são as transformações no plano, translação, simetria e reflexão, pois através da utilização deles pode-se formar padrões.

Através da análise de alguns mosaicos criados por Escher, figuras 23, 24, 25, 26 e 27, mostrar aos alunos como essas transformações são utilizadas e também discutir com eles que efeito elas passam ao observador, em relação a figura transformada e em relação a imagem como um todo.

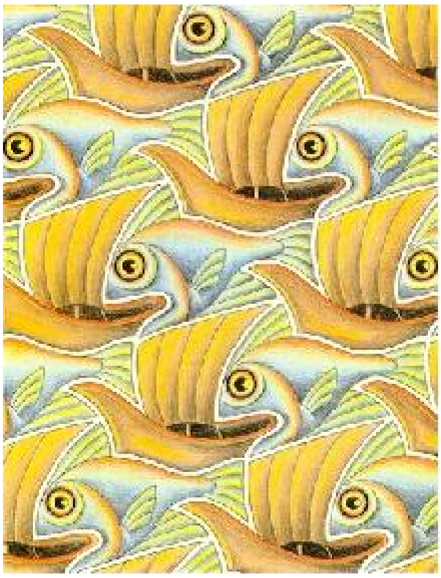


Figura 23 – Escher, M.C., [*Sem Título*], s/ d. Disponível em <http://skeptically.org/sitebuildercontent/sitebuilderpictures/.pond/e-pat-fish-boat.jpg.w300h394.jpg> Acesso em 13 nov. 2008.

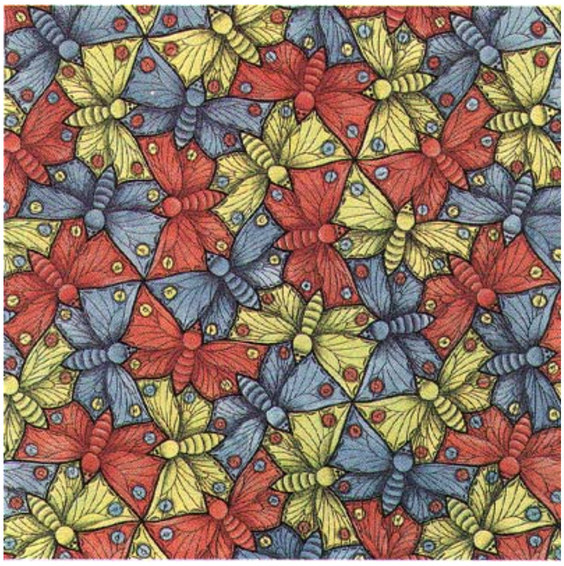


Figura 24 – Escher, M.C., [*Sem Título*], s/ d. Disponível em <http://bp1.blogger.com/_sB1UzC4DYBM/RvQ7r2FgFAI/AAAAAAAAASc/NSEoIlhiVec/s400/escher.jpg> Acesso em 13 nov. 2008.

Figura 25 – Escher, M.C., [*Sem Título*], s/ d. Disponível em <http://br.geocities.com/casfercas/mosaico_Escher_Lizards.jpg> Acesso em 13 nov. 2008.

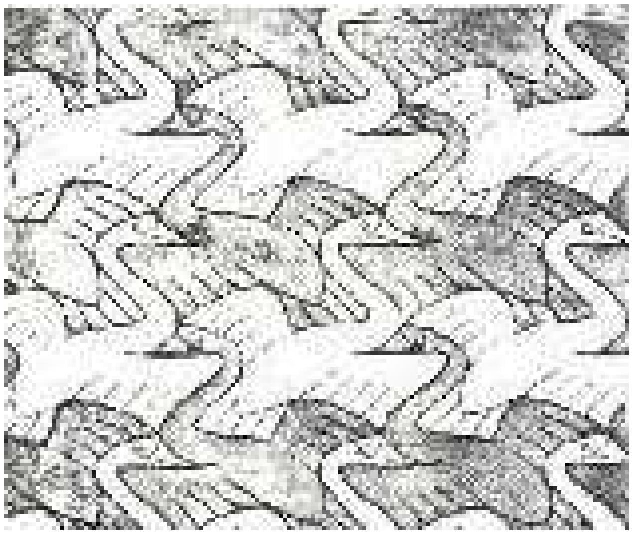
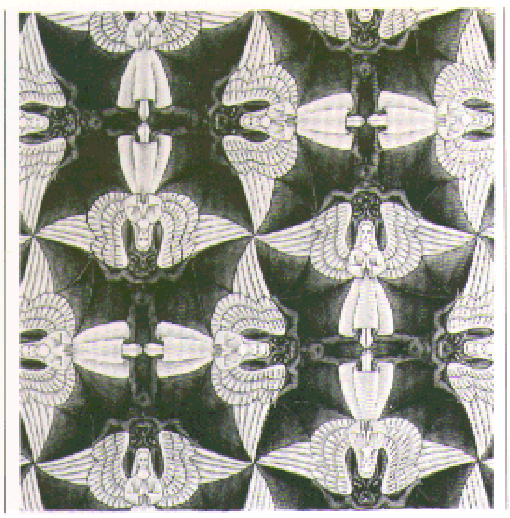


Figura 26 – Escher, M.C., [*Sem Título*], s/ d. Disponível em <http://www.mat.uel.br/geometrica/php/img/jpg/dg_t/dg_12t/macisne.jpg> Acesso em 13 nov. 2008.



Symmetry Work 45

Figura 27 – Escher, M.C., [*Sem Título*], s/ d. Disponível em <http://www.mcescher.com/Biography/e45.jpg> Acesso em 13 nov. 2008.

E mostrar como a partir desses mosaicos pode-se transformar a imagem através de distorções formando outras imagens como, por exemplo, a figura 28, obtida baseada no mosaico apresentado na figura 27. Bem como mosaicos onde não há a presença de figuras padrões que formam a imagem como um todo, mas que mesmo assim se preserva o encaixe perfeito das peças e o preenchimento do plano, como na figura 29. E também imagens em que o mosaico parece se desfazer aos poucos, como por exemplo, a figura 30, onde as peças centrais formam um mosaico e vão se transformando pouco a pouco através de ligeiras deformações nas formas.

Figura 28 – Escher, M. C., *Circle Limit IV,* 1960. Woodcut in black and ocre, printed from 2 blocks. Disponível em <http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates56/opciones/investigaciones%20matematicas%200506/Escher/escher_archivos/image021.jpg> Acesso em 13 nov. 2008.

Figura 29 – Escher, M. C., *Plane Filling I,* 1951. Mezzotint. Disponível em <http://www.geocities.com/Area51/9839/escher6.gif> Acesso em 13 nov. 2008.

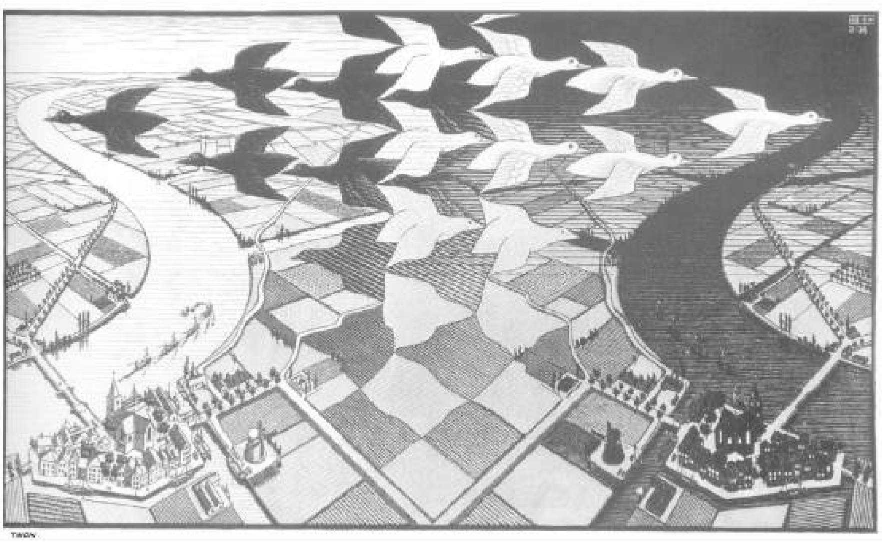


Figura 30 – Escher, M. C., *Day and Night,* 1938. Woodcut in black and gray, printed from two blocks 39,1 x 67,7 cm. Disponível em <http://oseculoprodigioso.blogspot.com/2007/02/escher-mc-ilustrao.html> Acesso em 13 nov. 2008.

Observando os mosaicos de Escher formados por uma peça padrão, propor aos alunos a criação de seus próprios mosaicos semelhantes aos de Escher através de moldes de papel com polígonos base que se encaixam entre si. A partir desses polígonos base, fazer recortes e translações das partes recortadas como mostrado nas figuras 31, 32 e 34, montando assim seus próprios mosaicos.

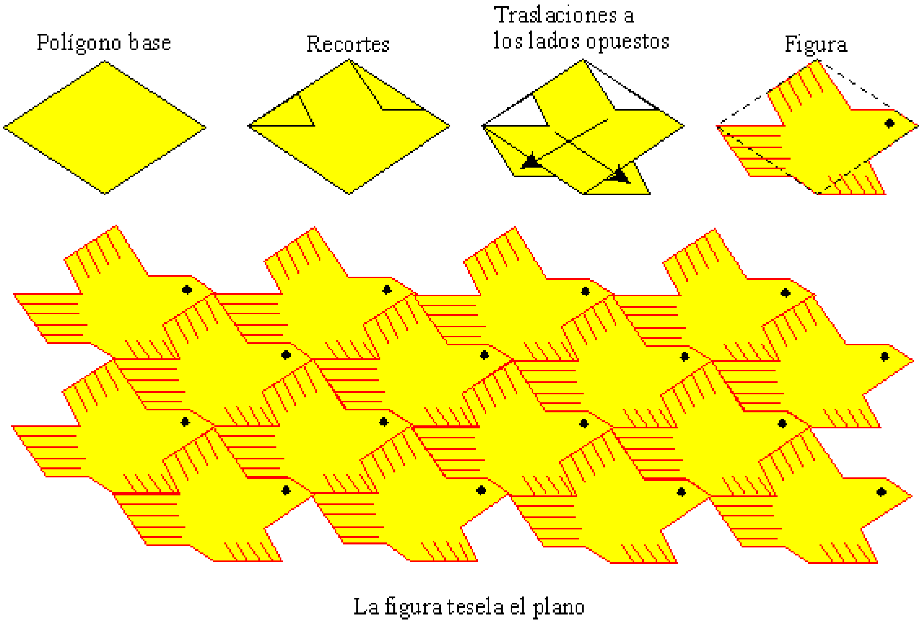


Figura 31 – Molde dos mosaicos. Disponível em <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/geometria/movimientos/mosaicos/mosaicos.htm> Acesso em 13 nov. 2008.

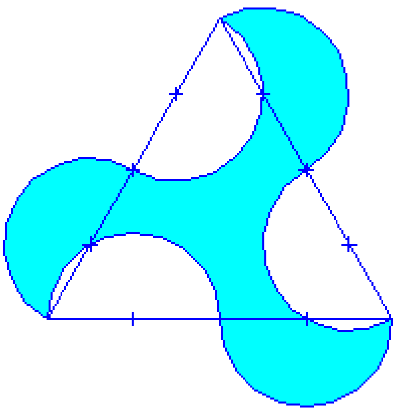


Figura 32 – Molde dos mosaicos. Disponível em <http://www.mat.uel.br/geometrica/php/dg/dg_12t.php> Acesso em 13 nov. 2008.

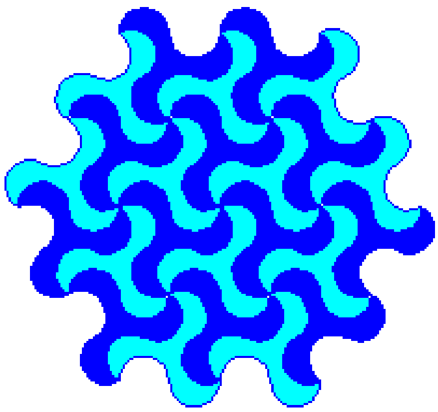


Figura 33 – Molde dos mosaicos. Disponível em <http://www.mat.uel.br/geometrica/php/dg/dg_12t.php> Acesso em 13 nov. 2008.

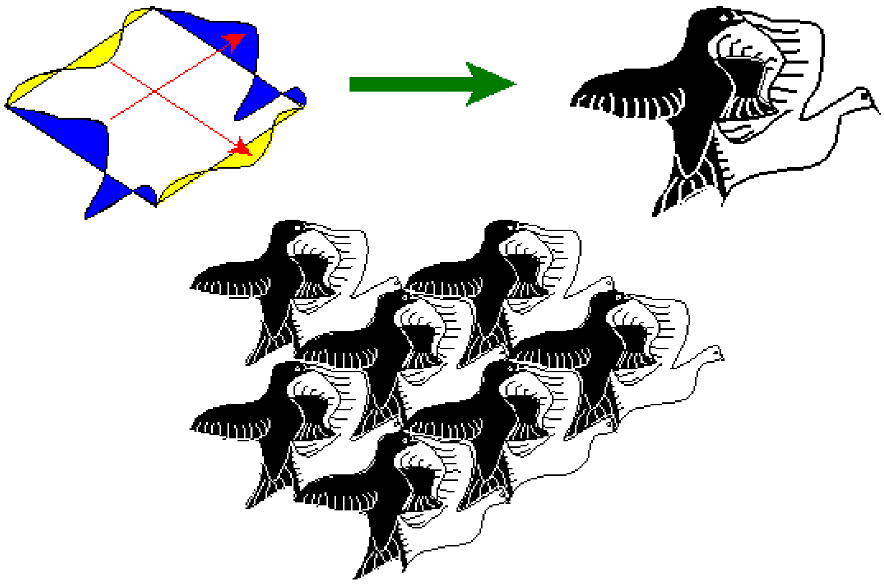


Figura 34 – Molde dos mosaicos. Disponível em <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/geometria/movimientos/mosaicos/mosaicos.htm> Acesso em 13 nov. 2008.

Através dessa atividade é possível observar que a área das figuras não é alterada pelas modificações, uma vez que toda parte retirada é anexada em outro ponto na figura.

5.5 Escher e as obras Impossíveis

Através das obras de Escher podemos observar que é muito presente a representação de imagens tridimensionais em um espaço bidimensional, o plano. E através dessas representações Escher faz modificações transformando as imagens mexendo com a percepção do observador, ao ponto de criar paradoxos e imagens impossíveis.

Através dessas imagens impossíveis podemos observar o uso de conceitos matemáticos para criá-las, como o uso de ângulos retos, retas paralelas e proporção entre tamanho de imagens. Como podemos observar nas figuras 35, 36, 37, 38 e 39.

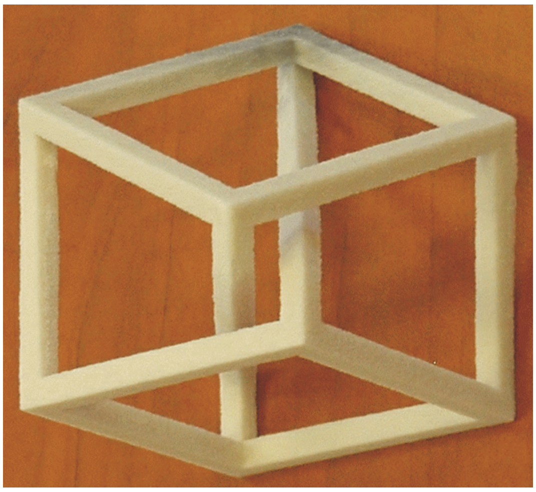


Figura 35 – Disponível em <http://www.cs.technion.ac.il/~gershon/EscherForReal/EscherCubeRealFront.gif> Acesso em 13 nov. 2008.

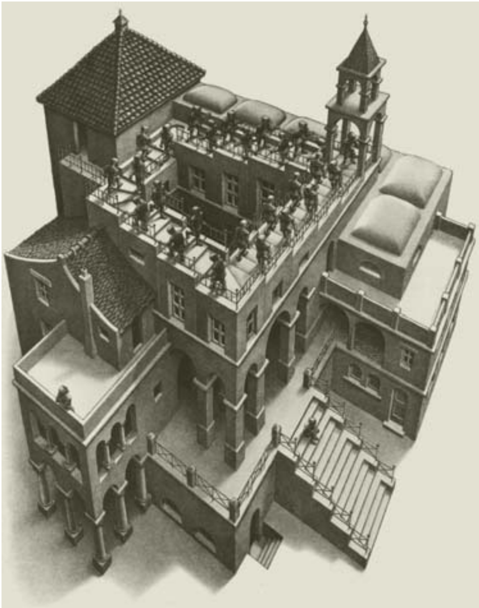


Figura 36 – Escher, M. C., *Ascending and Descending,* 1960. Lithograph 35,5 x 28,5 cm. Disponível em <http://oseculoprodigioso.blogspot.com/2007/02/escher-mc-ilustrao.html> Acesso em 13 nov. 2008.

Figura 37 – Escher, M. C., *Belvedere,* 1958. Lithograph 46,2 x 29,5 cm. Disponível em <http://oseculoprodigioso.blogspot.com/2007/02/escher-mc-ilustrao.html> Acesso em 13 nov. 2008.

Figura 38 – Escher, M. C., *Waterfall,* 1961. Lithograph 38 x 30 cm. Disponível em <http://oseculoprodigioso.blogspot.com/2007/02/escher-mc-ilustrao.html> Acesso em 13 nov. 2008.

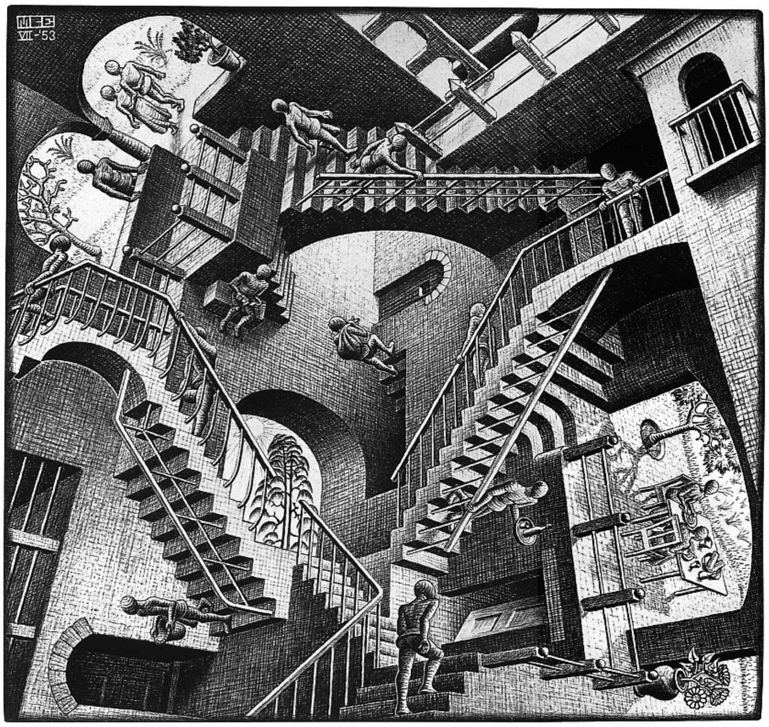


Figura 39 – Escher, M. C., *Relativity,* 1953. Woodcut 28,2 x 29,4 cm. Disponível em <http://oseculoprodigioso.blogspot.com/2007/02/escher-mc-ilustrao.html> Acesso em 13 nov. 2008.

6 Aplicação

A proposta foi aplicada dentro do projeto A Matemática do Cotidiano, desenvolvido por três licenciandos do último semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como atividade obrigatória da disciplina de Estágio em Educação Matemática III, no segundo semestre do ano de 2008. O Projeto foi desenvolvido numa escola estadual de Ensino Fundamental e Médio de Porto Alegre, em horário extra-classe com a participação de alunos voluntários estudantes do ensino médio da escola, durante os dias 24 de setembro, 1° e 8 de outubro e 5 e 12 de novembro.

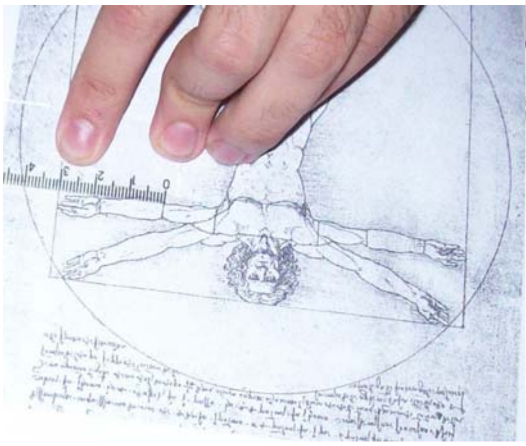
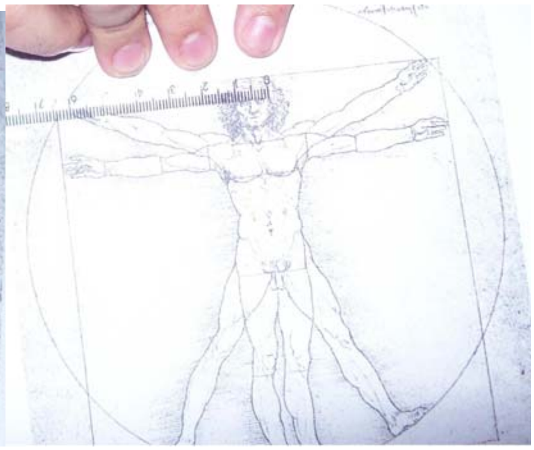
O projeto consistiu em cinco encontros semanais com os alunos onde foram desenvolvidos os temas: Orçamento Familiar, Matemática na Mídia, História da Matemática, Raciocínio Lógico e Matemática e Arte.

No encontro, ocorrido no dia 12 de novembro de 2008, onde foi desenvolvido o tema Matemática e Arte, estiveram presentes três alunos, sendo dois deles do primeiro ano do ensino médio e um do segundo ano.

Ao começar perguntando aos alunos se para eles havia alguma ligação entre a matemática e a arte, eles responderam que a música possuía relação com a Matemática, e que algumas obras que eram formadas por formas geométricas como quadrados e retângulos, mas não muito mais do que isso, nas próprias palavras deles.

Falando um pouco sobre Leonardo da Vinci e sua obra os alunos apresentaram uma certa familiaridade com o nome Da Vinci e o desenho do *Homem Vitruviano*, devido ao filme *O Código da Vinci*.

Foi pedido que eles fizessem as medições de certas partes do corpo e dividissem seu valor. Os alunos tiveram alguma dificuldade em fazer essas medições devido a divergências sobre onde começam e terminam certas partes do corpo, depois de algumas medições eles perceberam que ficava sempre entre 1,5 e 1,8. Então foi dito que na verdade essas razões na verdade possuíam o mesmo valor e auxiliando-os a medirem novamente eles chegaram a uma aproximação de φ com erro de menos de duas casas decimais.

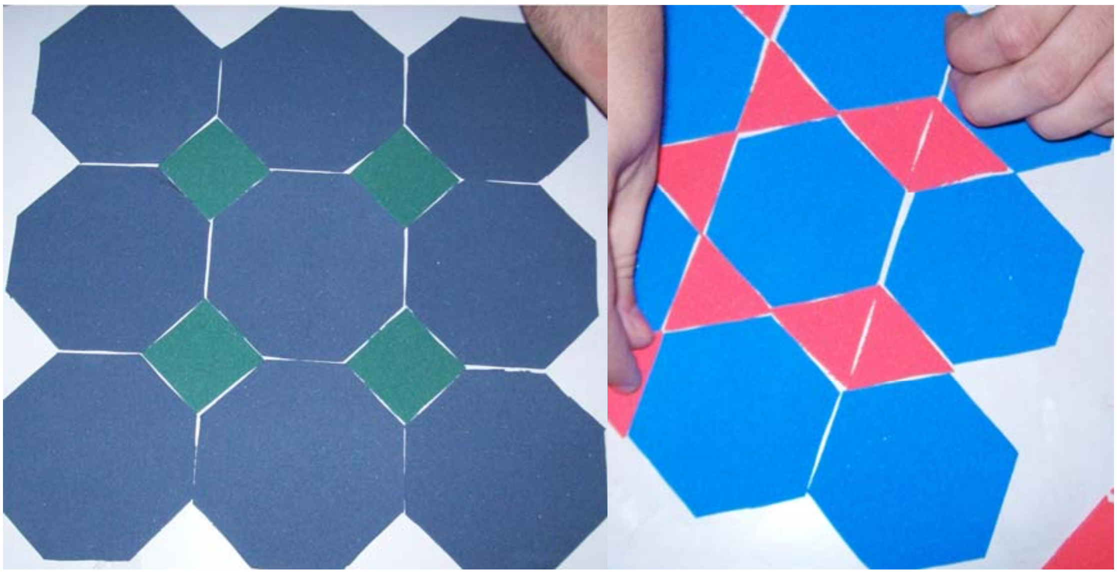
Depois disso se desenrolou uma conversa com os alunos sobre a natureza desse número, um número irracional, os alunos do primeiro ano haviam estudado esse conjunto nesse ano, e também falou-se sobre a presença dessa razão em plantas, animais, construções e outros objetos, como cartões de crédito. Nesse momento os alunos não acreditaram e pediram um cartão emprestado para fazer a medição e ficaram bastante impressionados com a proximidade da razão encontrada com o valor de φ.

Ao apresentar os quadros de Sacilotto, foi feita uma discussão sobre qual a impressão que lhes passava ao observar as obras, um aluno disse então que ao observar o quadro *Concreção 9204*, figura 14, ela parecia que estava mais longe no meio. Discutindo-se assim que o ângulo formado por aquelas retas dava essa impressão, de profundidade. Outro aluno comentou que o quadro [*Sem Título*], figura 15, parecia se mover, conforme os quadradinhos ficavam menores, sendo aí discutida a idéia de que na verdade não são quadrados, pois os ângulos não são retos, mas a forma lembra a forma de um quadrado, sendo assim, devido ao fato de diminuírem dá a idéia de movimento.

Um dos alunos disse então que o quadro *Concreção* 9773,figura 18, lembrava a ele imagens de ilusão de ótica que havia visto na internet. Devido ao encontro de uma parte mais clara com uma parte mais escura.

Foram distribuídas as peças de EVA aos alunos, que decidiram trabalhar em conjunto fazendo um mosaico único.


Nesse momento os alunos perceberam que certas peças não eram tão fáceis de serem usadas quanto outras, então decidiram usar apenas algumas para a produção dos mosaicos, octógonos e quadrados, e hexágonos e triângulos.



Então foi solicitado que fizessem mosaicos usando somente um dos formatos, em primeiro instante eles optaram pelo quadrado e pelo triângulo, mas depois devido a curiosidade resolveram testar todas as formas presentes ali.

Ao se depararem com o heptágono, e ver que não podia ser feito usando somente esse polígono eles tentaram encaixar outras formas para completar o espaço.

Após isso foi perguntado por que eles achavam que só foi possível com algumas formas geométricas e com outras não, ao que eles responderam não saber ao certo, disseram que parecia ser só um número pequeno de lados que funcionava, pois a partir do 7 já não funcionava mais.

Foi então entregue um transferidor para cada aluno e mostrado a circunferência com 360°. Um dos alunos então foi medir o ângulo do hexágono, uma vez que esse mosaico era possível e então viu que era um número que dividia 360°, tentou então com os outros polígonos e viu que sempre que era possível construir o mosaico o ângulo interno dividia 360° e nos outros casos isso não acontecia.

Foram apresentados os mosaicos de Escher aos alunos, que observaram diretamente o encaixe perfeito entre as peças, e então a partir de uma determinada peça foi indagado aos alunos o que se podia observar entre ela e outra que formava o mosaico, os alunos não compreenderam muito bem a pergunta, mas ao sugerir que se tivéssemos um molde em EVA, como no caso dos polígonos, de uma dessas peças e quiséssemos montar o mosaico, o que precisaríamos fazer com essa peça. Então os alunos responderam que precisaria simplesmente levá-la na mesma posição pra outro ponto, ou virá-la deixando a mesma face voltada para cima, ou então virar e peça de modo que a peça voltada para cima fique voltada para baixo, translação, rotação e simetria em relação a uma reta respectivamente.

Foram então distribuídas aos alunos as folhas com o esquema para se fazer um mosaico semelhante aos de Escher juntamente com pedaços de papel cartão, para que fizessem seus próprios mosaicos, a primeira vista os alunos não compreenderam muito bem como executar a tarefa, mas com intervenção dos licenciandos e fazendo um exemplo eles compreenderam os passos a serem seguidos e realizaram a tarefa. Os alunos se mostraram motivados com a tarefa e aprovaram seus resultados finais.

Foi então perguntado a eles o que acontecia com a área das figuras ao montar os moldes, eles responderam diretamente que não era a mesma, já que as figuras haviam sido modificadas e não conheciam uma fórmula para calcular a área dos moldes, diferentemente das formas iniciais, triângulo, quadrado. Então foi observado que cada pedaço era conservado, uma vez que ao ser retirado ele era adicionado à figura em outro ponto.

Ao fim foram apresentadas as figuras impossíveis de Escher, os alunos ficaram muito interessados pelas figuras, mas infelizmente não houve tempo para discussões maiores com os alunos, pois havia terminado o período destinado a realização do projeto.

7 Conclusão

A proposta se mostrou de grande potencial para ser trabalhada em sala de aula, motivando e interessando os alunos por meio das atividades desenvolvidas. Os alunos disseram não imaginarem que se usava Matemática com esse intuito, e que não percebiam que a usavam quando viam um quadro e pensavam no tipo de sensação que ele lhes provocava, como por exemplo, no caso de profundidade.

Ficou bastante evidente durante a aplicação da proposta que os alunos não possuíam anteriormente a visão de Matemática como instrumento para essa área de conhecimento, e que a enxergavam como uma disciplina fechada em si mesma.

Dessa maneira, acredita-se que esse trabalho contribui para a apresentação da Matemática não com um fim em si mesma, mas contextualizando os conceitos estudados de uma maneira interessante e integrada à realidade.

Os alunos mostraram bastante curiosidade ao se deparar com o número φ, presente na relação das medidas no desenho *Homem Vitruviano*, e em outras situações ilustradas, presentes em seu cotidiano, mostrando os números irracionais de uma forma mais contextualizada.

A observação de ângulo entre retas presentes em obras mostrou grande potencial para a introdução do conceito de ângulo, motivando os alunos, como pode ser observado através do exemplo da imagem de ilusão de ótica.

Através dos mosaicos, a questão de quanto vale a medida do ângulo interno de um polígono surgiu de forma natural pelos alunos, se mostrando um bom motivador para seu estudo, bem como para a classificação de polígonos.

Os mosaicos possibilitaram uma visão de conservação de área de figuras muito interessante, facilitando a visualização de como são feitas as transformações de figuras no plano, tornando assim a Arte uma fonte muito rica para desenvolvimento de atividades em Ensino de Matemática.

Referências

ALVES, Maira. **Muito Além do Olhar: Um enlace da Matemática com a Arte.** Porto Alegre: PUCRS, 2007. 110p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Faculdade de Física, Pontifica Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental (1ª a 4ª série) Artes. Brasília: 1997. 130 p. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro06.pdf> Acessado em: 13 nov. 2008.

_______. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental (1ª a 4ª série) Matemática. Brasília: 1997. 142 p. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> Acessado em: 13 nov. 2008.

_______. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental (5ª a 8ª série) Matemática. Brasília: 1998. 148 p. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> Acessado em: 13 nov. 2008.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan, **Que Matemática deve ser Aprendida nas Escolas Hoje?** São paulo: 2002. Disponível em <http://vello.sites.uol.com.br/aprendida.htm> Acessado em 30 out. 1997.

_______, Sociedade, Cultura, Matemática e seu Ensino. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan/abr. 2005.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. Quadrados, círculos e triângulos – A arte de Luiz Sacilotto. In:____. **Matemática Para Todos 7ª Série.** Editora Scipione. 2ª Ed. SP: Moderna, 2005.

MEDEIRO, Adriana Paula de, **Arte e Matemática no Ensino Fundamental:** Um estudo sobre a relação da geometria e da arte. São

Paulo: UNIMESP – Centro Universitário Metropolitano de São Paulo, 2006. Disponível em: <http://www.unimesp.edu.br/arquivos/mat/tcc06/Artigo_Adriana_Paula_de_Medeiro.pdf> Acesso em 2 nov. 2008.

MOSCATI, Giorgio. **Waldemar cordeiro e o uso do computador nas artes**: sobre uma experiência pioneira. São Paulo: If/USP, 1993.

MUSCHLA, Gary Robert; Muschla, Judith. I Wanna be Like Escher. In:____. **Hands-on Math Projects with Real-Life Applications.** New York: The Center for Applied Research in Education, 1996. Cap. 35, p. 225-228.

WRAY, William, **Leonardo da Vinci in his Own Words.** London: Arcturus Publishing Limited, 2005.

<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/geometria/movimientos/mosaicos/mosaicos.htm> Acessado em: 30 out. 2008.

<http://pt.wikipedia.org> Acessado em: 30 out. 2008