

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

RODRIGO CABRAL FARIAS

**ESTIMAÇÃO DE FASE EM UM
SISTEMA DE COMUNICAÇÃO DIGITAL**

Porto Alegre
2009

RODRIGO CABRAL FARIAS

**ESTIMAÇÃO DE FASE EM UM
SISTEMA DE COMUNICAÇÃO DIGITAL**

Projeto de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Walter Fetter Lages

Porto Alegre
2009

RODRIGO CABRAL FARIAS

**ESTIMAÇÃO DE FASE EM UM
SISTEMA DE COMUNICAÇÃO DIGITAL**

Este Projeto foi julgado adequado para a obtenção dos créditos da Disciplina Projeto de Diplomação do Departamento de Engenharia Elétrica e aprovado em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____
Prof. Dr. Walter Fetter Lages, UFRGS
Doutor pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Walter Fetter Lages, UFRGS
Doutor pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Prof. Dr. Marcelo Götz, UFRGS
Doutor pela Universität Paderborn – Paderborn, Alemanha

Prof. Dr. Luís Fernando Alves Pereira, UFRGS
Doutor pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Chefe do DELET: _____
Prof. Dr. Marcelo Soares Lubaszewski

Porto Alegre, dezembro de 2009.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, em especial pela dedicação e apoio em todos os momentos difíceis.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Walter por ter me orientado neste projeto e à minha família pelo apoio.

RESUMO

Neste projeto é estudado o problema da estimação de fase em um sistema de comunicação digital com canal sujeito a ruído branco gaussiano aditivo e filtro casado na saída. O problema de estimação de fase é solucionado de duas formas, primeiramente usando um filtro sub-ótimo, o filtro de Kalman estendido, e um filtro assintoticamente ótimo, o filtro de partículas. A comparação de desempenho das soluções é realizada através de resultados de simulação.

Palavras-chave: Processamento de Sinais, Filtro de Partículas, Filtro de Kalman, Sistemas de Comunicação Digital.

ABSTRACT

In this project the problem of phase estimation in a digital communication system with additive white gaussian noise channel and matched filter is studied. The solution for phase estimation is given in two different ways. The first solution is a suboptimal filter, the Extended Kalman Filter, and the second solution is an asymptotically optimal filter, the Particle Filter. Performance comparison between these solutions has been done based on simulation results.

Keywords: Signal Processing, Particle Filter, Kalman Filter, Digital Communication System.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	9
LISTA DE TABELAS	10
LISTA DE ABREVIATURAS	11
1 INTRODUÇÃO	12
1.1 Estrutura	14
2 MODELAGEM DO SISTEMA	15
2.1 Esquema geral e em banda de base	15
2.2 Modelo matemático	17
2.2.1 Equação de observação em tempo contínuo	17
2.2.2 Equação de observação em tempo discreto	19
2.2.3 Especificação dos termos da observação discreta	19
2.2.4 Modelo completo do sistema	22
2.3 Conclusão do capítulo	23
3 ESTIMAÇÃO	24
3.1 Modelo geral de evolução do sinal e da observação	24
3.2 Os problemas de estimação	26
3.3 A densidade de probabilidade condicional e a solução de variância mínima	27
3.4 Modelos de Markov Ocultos e a solução para a filtragem	30
3.4.1 A equação de predição	31
3.4.2 A equação de atualização	32
3.5 Amostragem de importância sequencial	33
3.5.1 Forma recursiva	34
3.6 Amostragem de importância sequencial com reamostragem Filtro de partículas	36
3.7 Modelo linear gaussiano e o filtro de Kalman	42
3.8 O Filtro de Kalman estendido	45
3.9 Conclusão do capítulo	47
4 ESTIMAÇÃO DE FASE	49
4.1 Filtro de partículas para a estimação de fase (FP)	49
4.2 Filtro de partículas Rao-Blackwellizado (FPRB)	53
4.3 Filtro de Kalman estendido (FKE)	56
4.4 Cota inferior de Cramér-Rao Bayesiana	58
4.5 Conclusão do capítulo	59

5	RESULTADOS	60
5.1	Condições de simulação	60
5.2	Comparação de desempenho em convergência e assintótico	61
5.3	Comparação do desempenho assintótico - Número de partículas	61
5.4	Comparação de desempenho assintótico - Nível de ruído	63
5.5	Teste com fase não browniana	63
5.6	Conclusão	64
6	CONCLUSÕES FINAIS	66
	REFERÊNCIAS	68

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Defasagem das portadoras.	12
Figura 2:	Efeito da defasagem na constelação.	13
Figura 3:	Esquema da cadeia de comunicação.	15
Figura 4:	Esquema da cadeia de comunicação em banda de base.	16
Figura 5:	Forma de onda - BOC.	16
Figura 6:	Forma de onda - NRZ.	16
Figura 7:	Função de autocorrelação da forma de onda.	18
Figura 8:	Cálculo de A_k	20
Figura 9:	Representação das realizações de um processo estocástico.	25
Figura 10:	Representação das realizações da observação.	25
Figura 11:	Modelo geral do sinal e da observação.	26
Figura 12:	Os problemas de estimação.	27
Figura 13:	Funções de Custo: absoluta, minmax e quadrática.	29
Figura 14:	Grafo do modelo de Markov oculto.	31
Figura 15:	Realização da reamostragem multinomial.	37
Figura 16:	Recursão do filtro de partículas.	39
Figura 17:	Erro quadrático médio simulado.	62
Figura 18:	$E\hat{Q}M$ assintótico em função do número de partículas.	62
Figura 19:	$E\hat{Q}M$ assintótico em função do nível de ruído.	63
Figura 20:	Simulação com fase não browniana.	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Características gerais das simulações	61
-----------	---	----

LISTA DE ABREVIATURAS

CCRB	Cota de Cramér-Rao Bayesiana
DAP	Densidade <i>a posteriori</i>
EQM	Erro quadrático médio
FKE	Filtro de Kalman estendido
FP	Filtro de partículas
FPRB	Filtro de partículas Rao-Blackwellizado
MMO	Modelo de Markov oculto

1 INTRODUÇÃO

Em sistemas de comunicação os estágios de modulação e demodulação se encontram em circuitos diferentes, correspondentes a emissão e recepção, e estão separados pelo meio onde ocorre a transmissão. As portadoras de modulação e demodulação podem possuir uma defasagem devido a uma diferença de fase inicial produzida pelos osciladores, como é mostrado na Figura 1. Devido ao meio de transmissão, o sinal recebido também pode ter uma defasagem em relação ao sinal emitido.

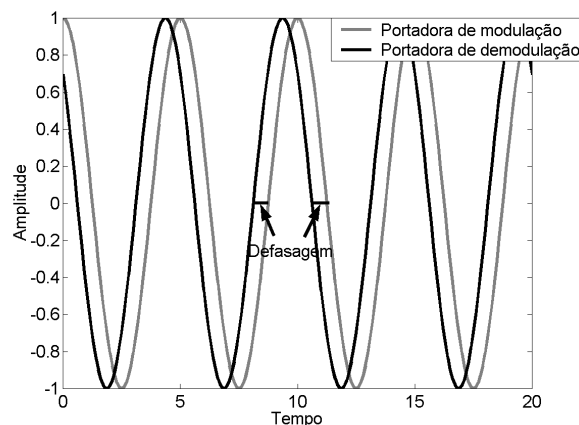


Figura 1: Defasagem das portadoras.

A defasagem entre as portadoras pode ser variante no tempo. Algumas razões para que isso aconteça são o ruído térmico nos osciladores e a mudança temporal das características do meio de transmissão.

Uma primeira motivação para que esta defasagem seja estimada é que ela prejudica a recepção correta das mensagens transmitidas em sistemas de comunicação digital. Se a informação a ser transmitida for representada numa constelação, o principal efeito da defasagem na recepção é que ela rotaciona a constelação, como é mostrado para uma modulação QPSK na Figura 2. Esta rotação pode causar erros na recuperação dos símbolos das mensagens na recepção, pois as fronteiras de decisão do sistema não levam em conta esta rotação, visto que a fase que a produziu é desconhecida. Para que o problema seja solucionado é preciso estimar a fase existente entre as portadoras e corrigi-la.

Outro problema em que a fase é importante é o problema de posicionamento de precisão por satélite. Neste, deve-se estimar a posição de um receptor móvel através de mensagens emitidas por um emissor fixo de posição conhecida. O emissor fixo envia através de um sistema de comunicação digital uma sequência de símbolos para o satélite,

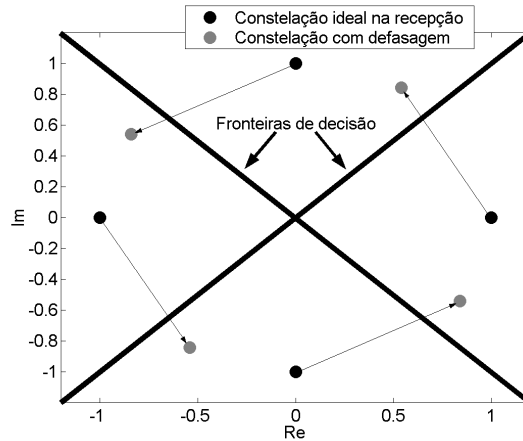


Figura 2: Efeito da defasagem na constelação.

que retransmite para o receptor móvel. Assim, parte da informação do tempo de propagação e conseqüentemente da distância está contida na fase entre o oscilador usado para demodulação no receptor móvel e o sinal recebido pelo receptor móvel.

Baseado nestas duas motivações foi proposto o estudo e a implementação de técnicas de estimação de fase em um sistema de comunicação digital.

Uma das técnicas mais antigas e mais difundidas para a estimação de fase é a malha de captura de fase, *phase-locked loop* em inglês. Esta técnica é baseada na realimentação do erro de fase, calculado de forma indireta através da multiplicação do sinal recebido por um sinal gerado através de um oscilador local. A primeira descrição da técnica pode ser encontrada em (BELLESCIZE, 1932).

No início da década de 70 foi descoberto que a malha de captura de fase era um caso especial de um método geral de estimação sub-ótima conhecido como filtro de Kalman estendido. Esta descoberta foi apresentada em (BUCY; CHENG; MALLINCKRODT, 1970) e ocorreu num contexto de popularização das técnicas de estimação dinâmica, após o surgimento do filtro de Kalman (KALMAN, 1960). Esta popularização afetou também a área das telecomunicações onde existiam aplicações diretas das técnicas de estimação dinâmica. A partir disto, parte da literatura em telecomunicações parece ter se dissociado de aplicações eletrônicas e começou a de certa forma se confundir com processamento estatístico de sinais e teoria da informação. Um exemplo disto é perceptível em (VAN TREES, 1968).

Outras técnicas de estimação foram propostas para a estimação de fase. Em (AMBLARD; BROSSIER; MOISAN, 2003) é feita uma comparação de desempenho de algumas destas técnicas. São comparadas técnicas sub-ótimas como a malha de Costas e a malha de decisão, com uma técnica que aproxima diretamente a solução ótima para a estimação, conhecida como filtro de partículas.

Seguindo a mesma linha, os objetivos deste projeto são o estudo e simulação de um modelo de sistema de comunicação digital, o estudo de técnicas de estimação e a aplicação destas técnicas para estimar a fase.

1.1 Estrutura

A estrutura deste relatório é a seguinte:

No Capítulo 2 será realizada a modelagem do sistema de comunicação sendo este mais complexo que aquele utilizado em (AMBLARD; BROSSIER; MOISAN, 2003), se assemelhando aos sistemas usados para posicionamento global. A modelagem será feita com uma abordagem estocástica.

No Capítulo 3 são apresentadas as técnicas de estimação sob a forma geral. Este capítulo terá também como objetivo a apresentação do problema geral de estimação, para que seja possível observar que a estimação de fase é um caso especial da teoria geral.

No Capítulo 4 é mostrado como é feita a aplicação das técnicas de estimação. São apresentadas as aplicações de duas técnicas de estimação, o filtro de Kalman estendido (FKE) e o filtro de partículas, sendo que este último tem duas formas diferentes de implementação, a forma comum e a forma Rao-Blackwellizada.

No Capítulo 5 são mostrados os resultados de simulações das técnicas e a análise comparativa de desempenho.

Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões finais.

2 MODELAGEM DO SISTEMA

Durante a transmissão de símbolos em um sistema de comunicação digital, o emissor e o receptor se encontram em circuitos eletrônicos diferentes e as portadoras de modulação e demodulação podem não possuir a mesma fase, ou mesmo uma defasagem entre elas pode ser introduzida durante a transmissão pelo canal. A estimação desta defasagem será o tema principal deste projeto de diplomação e neste capítulo será tratada a modelagem do sistema de comunicação digital através de equações de estado.

2.1 Esquema geral e em banda de base

O esquema geral do sistema de comunicação a ser estudado é mostrado na Figura 3, este esquema é baseado em (VILA VALLS; BROSSIER; ROS, 2009). A informação a ser transmitida está contida na sequência de símbolos a_m , esta sequência é por hipótese branca e conhecida tanto na emissão quanto na recepção, fazendo com que seja desnecessária a sua estimação. Após a modulação com uma frequência conhecida ν_0 , o sinal é transmitido pelo canal, que é constituído pelo meio de transmissão e suas fronteiras com os circuitos de emissão e recepção. Será considerado que as únicas alterações que sofre o sinal emitido durante sua passagem pelo canal é a adição de ruído branco real $n'(t)$, uma defasagem e um atraso. Depois da adição de ruído, o sistema é descrito nas suas partes real e imaginária para fins ilustrativos. Nas duas partes é feita a demodulação com uma frequência ν_0 , e também com uma defasagem na portadora de θ que depende do tempo. Depois da demodulação ocorre a filtragem passa-baixas para obter um sinal próximo àquele encontrado na entrada do emissor e finalmente é feita uma filtragem do sinal na saída do receptor com um filtro casado, que serve para o aumento de desempenho, diminuindo a interferência entre símbolos.

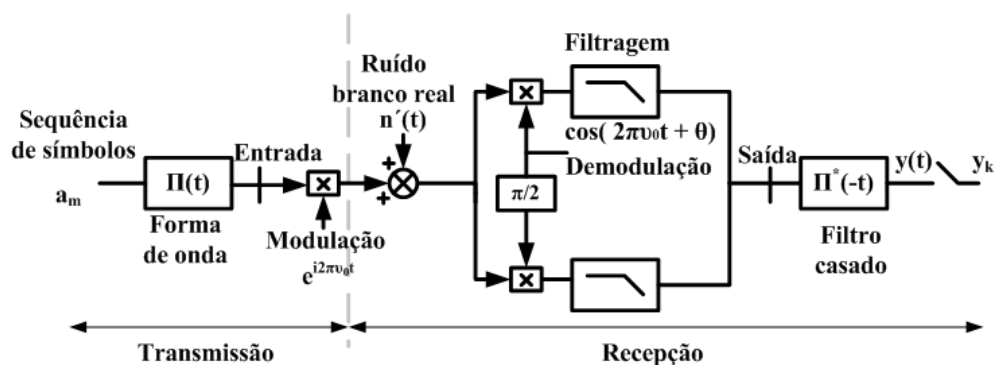


Figura 3: Esquema da cadeia de comunicação.

O sistema de modulação, canal e demodulação que se encontra entre a entrada e saída (indicadas na Figura 3) pode ser simplificado utilizando-se um modelo em banda de base. Este modelo é indicado na Figura 4.

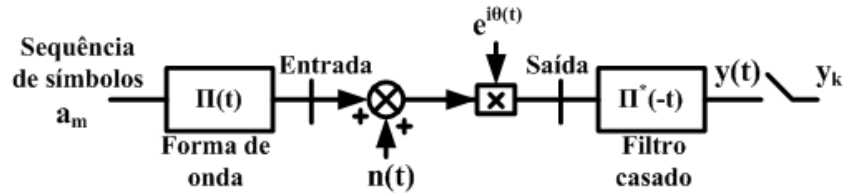


Figura 4: Esquema da cadeia de comunicação em banda de base.

No sistema descrito em banda de base, o ruído $n(t)$ é produzido por $n'(t)$ depois de passar pela demodulação. Este ruído é branco, gaussiano e circular. Sua média é nula e sua variância é dada por:

$$\sigma_n^2 = N_0 D \quad (1)$$

sendo D a banda equivalente do ruído depois da demodulação e da filtragem e N_0 a amplitude de sua densidade espectral de potência.

A forma de onda utilizada para modular os símbolos é mostrada na Figura 5 que consiste no código *Binary Offset Carrier* (BOC). Esta forma de onda é usada no sistema de posicionamento *Galileo*.

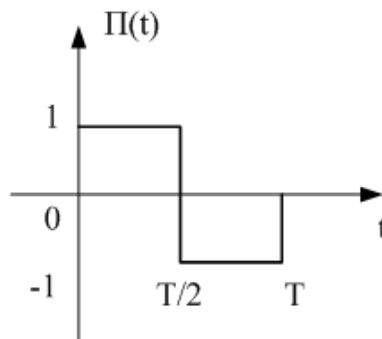


Figura 5: Forma de onda - BOC.

A forma *Non-Return-to-Zero* (NRZ) também poderia ser usada como alternativa. Esta forma de onda é mostrada na Figura 6. Esta forma de onda é utilizada no sistema de posicionamento GPS e nota-se que as duas formas de onda são ortogonais.

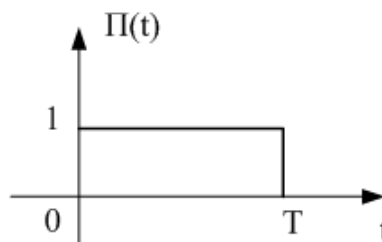


Figura 6: Forma de onda - NRZ.

A saída analógica do sistema $y(t)$ é amostrada n vezes a cada símbolo com um atraso τ e obtém-se a saída discreta sobreamostrada y_k . Segundo (VILA VALLS; BROSSIER; ROS, 2008), a sobreamostragem é utilizada para melhorar a relação entre a potência de y_k e do ruído e para respeitar o teorema da amostragem, visto que o sinal possui banda frequencial larga.

2.2 Modelo matemático

O modelo matemático do sistema de comunicação será obtido através da equação de observação (ou de saída), $y(t)$, que será depois amostrada para a obtenção de y_k e terá seus termos explicitados em função das principais características do sistema para a obtenção do modelo matemático completo.

2.2.1 Equação de observação em tempo contínuo

Pode-se fazer o equacionamento matemático do sistema de comunicação partindo da expressão da saída analógica $y(t)$:

$$y(t) = \left\{ \left[T_c \sum_m a_m \Pi(t - mT) + n(t) \right] e^{i\theta(t)} \right\} * \Pi^*(-t) \quad (2)$$

Em (2) trabalhou-se com a saída em banda de base. Assim a saída sem ruído é descrita pela modulação dos símbolos com a forma de onda, $\sum_m a_m \Pi(t - mT)$. O ruído em banda de base, $n(t)$, é adicionado a soma e depois ambos são multiplicados pelo termo correspondente a defasagem em banda de base, $e^{i\theta(t)}$, onde $\theta(t)$ é a defasagem. Para se obter a saída $y(t)$ deve-se considerar ainda a filtragem casada a forma de onda. A resposta impulsiva deste filtro é simplesmente a forma de onda refletida e conjugada $\Pi^*(-t)$. Obtém-se a saída do filtro pela convolução com esta resposta impulsiva. Nota-se também que existe uma constante T_c na expressão, esta constante serve somente para uma conversão de unidades.

A expressão (2) pode ser reduzida usando:

$$b(t) = [n(t)e^{i\theta(t)}] * \Pi^*(-t) \quad (3)$$

Nesta expressão o ruído $b(t)$ é resultado da defasagem e da convolução com o filtro casado. Assim, $b(t)$ é um ruído complexo e colorido. A observação passa então a ser composta pela convolução da sequência de símbolos e da forma de onda defasada com o filtro casado e pelo ruído colorido que pode ser separado em um termo aditivo devido a linearidade da convolução. Também pela linearidade da convolução pode-se reescrever a convolução do somatório como o somatório das convoluções. Isto faz com que a observação possa ser expressa por:

$$y(t) = \left[\sum_m a_m T_c \int \Pi^*(-\alpha) e^{i\theta(t-\alpha)} \Pi(t - \alpha - mT) d\alpha \right] + b(t) \quad (4)$$

Para cada símbolo pode-se associar uma função $g_m(t)$ de suporte $[-T, T]$, dada por (5).

$$g_m(t) = T_c \int_{-T}^0 \Pi^*(-\alpha) e^{i\theta(t-\alpha)} \Pi(t - \alpha - mT) d\alpha \quad (5)$$

A partir desta função pode-se reescrever (4) de forma mais simples:

$$y(t) = \sum_m a_m g_m(t - mT) + b(t) \quad (6)$$

Daqui em diante será utilizada a hipótese de que a fase $\theta(t)$ possui variações lentas no tempo. Esta hipótese permite que a exponencial possa ser considerada como uma constante na convolução, sendo a fase $\theta(t)$ equivalente a fase no meio do intervalo entre a recepção de dois símbolos. Esta hipótese leva a uma nova expressão para $g_m(t)$ dada por:

$$g_m(t) = e^{i\theta[t+(m+\frac{1}{2})T]} g(t) \quad (7)$$

com $g(t)$ dada por:

$$g(t) = T_c \int_{-T}^0 \Pi^*(-\alpha) \Pi(t - \alpha - mT) d\alpha \quad (8)$$

A função $g(t)$ é a autocorrelação da forma de onda. No caso da forma de onda BOC a função $g(t)$ é ilustrada na Figura 7 e é dada por:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < -T \\ T_c(-t - T), & -T \leq t < -\frac{T}{2} \\ T_c(3t + T), & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ T_c(-3t + T), & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ T_c(t - T), & \frac{T}{2} \leq t < T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (9)$$

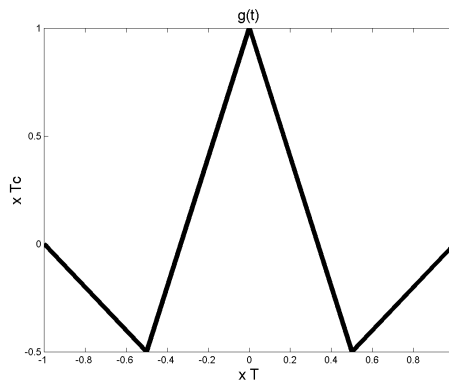


Figura 7: Função de autocorrelação da forma de onda.

Observação: Se não fosse feita a hipótese de que a fase tem variações lentas, deveria ser calculada a integral em (5). Esta integral poderia ser expressa nas suas partes real e imaginária por:

$$g_m(t) = T_c \left\{ \int_{-T}^0 \cos[\theta(t - \alpha + mT)] g'(\alpha, t) d\alpha + i \int_{-T}^0 \sin[\theta(t - \alpha + mT)] g'(\alpha, t) d\alpha \right\} \quad (10)$$

onde $g'(\alpha, t)$ é dada por:

$$g'(\alpha, t) = \Pi^*(-\alpha)\Pi(t - \alpha - mT) \quad (11)$$

O problema poderia ser resolvido diretamente na forma contínua, usando uma equação diferencial estocástica para descrever a evolução da fase e a partir disto, como é mostrado em (JAZWINSKI, 1970), tal problema pode ser resolvido usando as equações de Kushner. Neste projeto de diplomação, será dado enfoque para o problema da estimação em sistemas dinâmicos a evolução e observação discretas necessitando assim a amostragem da observação a tempo contínuo.

2.2.2 Equação de observação em tempo discreto

A amostragem é feita n vezes a cada símbolo com um atraso τ como já foi explicado anteriormente. A saída amostrada é dada por:

$$y\left(k\frac{T}{n} + \tau\right) = A_k \exp^{i\theta\left(k\frac{T}{n} + \tau + \frac{T}{2}\right)} + b\left(k\frac{T}{n} + \tau\right) \quad (12)$$

com A_k dado por:

$$A_k = \sum_m a_m g\left(k\frac{T}{n} + \tau - mT\right) \quad (13)$$

De forma mais simples esta equação pode ser escrita somente em função de k :

$$y_k = A_k e^{i\theta k} + b_k \quad (14)$$

Esta expressão da observação é não linear em função da fase, possui um termo variante no tempo, causado por A_k que pode ser complexo, e possui também um termo de ruído colorido, complexo e gaussiano, b_k .

Para uma especificação completa de (14) devem ser explicitados os valores de A_k em função dos símbolos e da amostragem da função $g(t)$. Devem também ser especificadas as características do ruído colorido amostrado, b_k , em função das características do ruído contínuo, $b(t)$. Este último, por sua vez, dependerá das características do ruído $n(t)$ e do filtro casado $\Pi^*(-\alpha)$. No final, deverá ser especificado o modelo de evolução a tempo discreto da fase θ_k .

2.2.3 Especificação dos termos da observação discreta

Primeiramente será explicitado como podem ser calculados os coeficientes A_k . Como mostra (13), estes coeficientes dependem dos símbolos que são enviados, a_m , da função de autocorrelação da forma de onda, $g(t)$, do número de amostras por símbolo, n , do atraso de amostragem, τ , e do período entre a emissão de dois símbolos consecutivos, T .

Considerando que τ situa-se no intervalo $\left[0, \frac{T}{n}\right]$, os coeficientes A_k podem ser expressos por:

$$A_k = a_m g(\tau + pT) + a_{m+1} g[\tau - (1 - p)T] \quad (15)$$

Nesta expressão $p = \frac{k}{n} \bmod(n)$ e $m = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor$.

Nota-se em (15) que cada A_k sofre influência de dois símbolos e que a ponderação das influências de cada símbolo depende da função $g(t)$ e do atraso.

Um exemplo de cálculo pode ser feito para $n = 2$. Neste caso a sequência de coeficientes ímpares é dada por $A_1 = a_1 g(\tau) + a_2 g(\tau - T)$, $A_3 = a_3 g(\tau) + a_4 g(\tau - T)$

... $A_{2l-1} = a_{2l-1}g(\tau) + a_{2l}g(\tau - T)$, onde $g(\tau)$ é dada pelo ponto p_1 da Figura 8 e $g(\tau - T)$ é dado pelo ponto p_2 . De forma semelhante, a sequência dos coeficientes pares é dada por $A_2 = a_1g(\tau + \frac{T}{2}) + a_2g(\tau - \frac{T}{2})$, $A_4 = a_3g(\tau + \frac{T}{2}) + a_4g(\tau - \frac{T}{2})$... $A_{2l} = a_{2l-1}g(\tau + \frac{T}{2}) + a_{2l}g(\tau - \frac{T}{2})$, onde $g(\tau + \frac{T}{2})$ é dado por p_4 e $g(\tau - \frac{T}{2})$ é dado por p_3 .

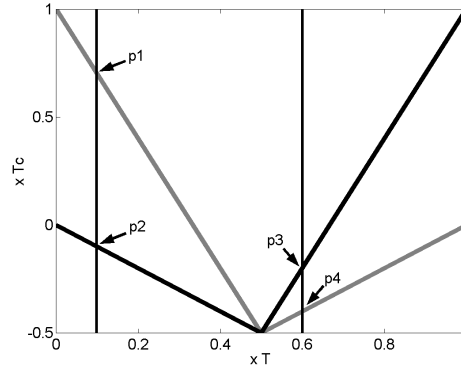


Figura 8: Cálculo de A_k .

O ruído b_k pode ser calculado através da amostragem de $b(t)$. Este, por sua vez, é obtido através da filtragem de $n(t)$. Calculando a convolução (3) e considerando que $n(t)$ é um ruído circular, pode-se obter:

$$b(t) = [n(t)e^{i\theta(t)}] * \Pi^*(-t) = \int_t^{t+T} n(\alpha) \Pi^*(\alpha - t) d\alpha = \int_0^T n(\alpha + T) \Pi^*(\alpha) d\alpha \quad (16)$$

Onde a segunda das igualdades deve-se ao fato do ruído ser circular e a expressão final foi obtida com uma mudança de variáveis.

O ruído a tempo contínuo com expressão dada por (16) é então sobreamostrado. Decompondo as integrais em somas obtém-se:

$$b\left(k\frac{T}{n} + \tau\right) = b_k = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{j\frac{T}{N}}^{(j+1)\frac{T}{N}} n\left(\alpha + k\frac{T}{n} + \tau\right) \Pi^*(\alpha) d\alpha \quad (17)$$

Como o filtro casado é linear sabe-se que a saída será composta por ruído gaussiano. Devido também ao fato do filtro ter uma resposta impulsiva a suporte finito, pode-se obter o ruído amostrado b'_k equivalente em termos estatísticos a b_k , através de um filtro a resposta impulsiva finita aplicado sobre o ruído branco $n(t)$ amostrado. A expressão do ruído equivalente b'_k é dada por:

$$b_k = \sum_{j=0}^{n-1} \Pi_j n(k - j - 1) \quad (18)$$

onde os coeficientes do filtro discreto, Π_j , são dados em função do nível da densidade espectral de potência do ruído, N_0 , e da forma de onda por:

$$\Pi_j = \left(N_0 \int_{j\frac{T}{N}}^{(j+1)\frac{T}{N}} |\Pi(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

O ruído amostrado em função de constantes do sistema de comunicação é dado por:

$$n_k = n(k) = \int_{k\frac{T}{N}}^{(k+1)\frac{T}{N}} n(\alpha + \tau) d\alpha \quad (20)$$

Neste modelo a variância do ruído discreto é unitária, visto que sua potência é transferida para os coeficientes do filtro. Como o ruído é complexo, tem-se que $Var[\text{Im}(n_k)] = Var[\text{Re}(n_k)] = \frac{1}{2}$.

Os coeficientes do filtro, Π_j , podem ser obtidos para as formas de onda BOC e NRZ através de:

$$\Pi_j = \Pi = \sqrt{\frac{T}{n} N_0} \quad (21)$$

Nota-se a influência do nível de ruído, do intervalo entre símbolos e do fator de sobreamostragem. Observa-se também que todos os n coeficientes do filtro são iguais.

A fim de obter um modelo de ruído que possa ser usado no modelo final, representa-se o ruído em representação de estados tendo como entradas um vetor de ruído branco. A janela móvel do filtro pode ser implementada através de uma representação a n estados e a saída é produzida através da multiplicação destes estados pelos coeficientes do filtro:

$$\begin{bmatrix} v_k \\ v_{k-1} \\ \vdots \\ v_{k-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{k-1} \\ v_{k-2} \\ \vdots \\ v_{k-n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$b_k = [\Pi \quad \cdots \quad \Pi] \begin{bmatrix} v_{k-1} \\ v_{k-2} \\ \vdots \\ v_{k-n} \end{bmatrix} \quad (23)$$

A última característica do modelo, a fase θ_k , deve ser descrita de forma probabilística pois seu comportamento é desconhecido. Ela será considerada como um processo estocástico com amplitude contínua e a tempo discreto. Seus incrementos serão independentes e gaussianos, tendo uma evolução no tempo como o movimento Browniano. Sua representação pode ser feita através da equação de diferenças estocástica:

$$\theta_k = \theta_{k-1} + w_k \quad (24)$$

onde $w_k \sim N(0, \sigma_w^2)$.

Assim, a transição entre as variáveis aleatórias Θ_{k-1} para Θ_k pode ser descrita através da densidade de probabilidade condicional dada por:

$$p_{\Theta_k|\Theta_{k-1}}(\theta_k|\theta_{k-1}) = p_{W_k}(\theta_k - \theta_{k-1}) = N_{\theta_k}(\theta_{k-1}, \sigma_w^2) \quad (25)$$

Como Θ_k trata-se de uma fase, deve-se notar que ela está definida sempre sobre $\mathfrak{R}[-\pi, \pi]$. A densidade de transição $N_{\theta_k}(\theta_{k-1}, \sigma_w^2)$ é aproximadamente gaussiana neste intervalo, visto que, se θ_{k-1} estiver próximo de π e sofrer um incremento positivo, será obtido um θ_k próximo de $-\pi$.

Este modelo para a fase foi escolhido por ser um modelo linear, fácil de ser simulado, e que para uma dada variância dos incrementos, σ_w^2 , é aquele que adiciona menos

informação, pois estes incrementos são gaussianos. A variância dos incrementos pode ser obtida através do conhecimento *a priori* sobre a variação da fase.

Após a especificação do modelo da fase pode-se prosseguir para o modelo completo.

2.2.4 Modelo completo do sistema

As expressões (14),(22),(23) e (24) podem ser unidas de forma vetorial para gerar a representação de estados completa do sistema de comunicação. A evolução dos estados e a nova expressão de observação são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \theta_k \\ b_k \\ v_k \\ v_{k-1} \\ \vdots \\ v_{k-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \Pi & \cdots & \Pi \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{k-1} \\ b_{k-1} \\ v_{k-1} \\ v_{k-2} \\ \vdots \\ v_{k-n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_k \\ 0 \\ n_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$y_k = A_k \exp \left\{ i \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \theta_k \\ b_k \\ v_k \\ v_{k-1} \\ \vdots \\ v_{k-n+1} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \theta_k \\ b_k \\ v_k \\ v_{k-1} \\ \vdots \\ v_{k-n+1} \end{bmatrix} \right\} \quad (27)$$

Observa-se que para um fator de sobreamostragem n obtém uma representação com $n + 2$ estados complexos. A equação de evolução de estados completa com estados reais e a sua respectiva equação de observação são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \theta_k \\ \text{Re}(b_k) \\ \text{Im}(b_k) \\ \text{Re}(v_k) \\ \text{Im}(v_k) \\ \text{Re}(v_{k-1}) \\ \text{Im}(v_{k-1}) \\ \vdots \\ \text{Re}(v_{k-n+1}) \\ \text{Im}(v_{k-n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi & 0 & \Pi & 0 & \cdots & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi & 0 & \cdots & & 0 & \Pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ & & & 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{k-1} \\ \text{Re}(b_{k-1}) \\ \text{Im}(b_{k-1}) \\ \text{Re}(v_{k-1}) \\ \text{Im}(v_{k-1}) \\ \text{Re}(v_{k-2}) \\ \text{Im}(v_{k-2}) \\ \vdots \\ \text{Re}(v_{k-n}) \\ \text{Im}(v_{k-n}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_k \\ 0 \\ 0 \\ \text{Re}(n_k) \\ \text{Im}(n_k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(y_k) \\ \text{Im}(y_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}(A_k) \cos(\theta_k) - \text{Im}(A_k) \sin(\theta_k) + \text{Re}(b_k) \\ \text{Re}(A_k) \sin(\theta_k) + \text{Im}(A_k) \cos(\theta_k) + \text{Im}(b_k) \end{bmatrix} \quad (29)$$

2.3 Conclusão do capítulo

Neste capítulo foi feita a modelagem do sistema de comunicação com uma abordagem estocástica.

Devido a hipótese de que a fase possui evolução lenta, as equações foram simplificadas, obtendo expressões lineares para a evolução da fase e do ruído e uma expressão não linear para o modelo da observação.

A expressão da observação sendo não linear torna o problema não gaussiano, fazendo com que seja necessário tratar o problema de estimação na sua forma generalizada. Isto é feito no próximo capítulo, onde são tratados os problemas de estimação e algumas de suas soluções, sem entrar no caso específico da estimação de fase.

3 ESTIMAÇÃO

Neste capítulo será explicado como pode ser feita a estimação de sinais descritos sob a forma de processos estocásticos, a abordagem aqui utilizada é baseada em (JAZWINSKI, 1970), (DOUCET; DE FREITAS; GORDON, 2001), (MAYBECK, 1979) e (LE GLAND, 2007).

O capítulo tem o intuito de descrever uma abordagem geral que possa ser aplicada não somente para a estimação de fase em um sistema de comunicação, mas também para a estimação de uma ampla classe de sinais com evolução e observação discreta. O capítulo será iniciado pela descrição do problema de estimação onde serão discutidas as suas classificações e as possíveis soluções. Depois será apresentado um modelo de sinal mais restrito, o modelo de Markov oculto (MMO), que por sua vez gerará um problema de estimação com uma solução explícita. Será apresentada uma solução para um problema de estimação em MMO - Filtragem. Esta é obtida pela utilização de um algoritmo de amostragem de importância sequencial com reamostragem, conhecido como Filtro de Resolução Particular, ou filtro de partículas. Será abordado também um caso particular de sinais descritos com MMO, onde as equações de estado e das observações são lineares e apresentam perturbações aleatórias gaussianas. Ainda, ao final deste capítulo, será obtida uma solução modificada para tratar de forma sub-ótima as equações de estado e observação não lineares.

3.1 Modelo geral de evolução do sinal e da observação

Um sinal multivariável discreto no tempo (amostrado) pode ser descrito através de uma sequência de vetores \mathbf{x}_k , onde $k \in K = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (conjunto dos naturais \mathbb{N}). Quando este sinal não é conhecido deterministicamente, deve-se recorrer a sua definição probabilística. Assim, o sinal passa a ser descrito pela sequência de vetores aleatórios \mathbf{X}_k , onde cada uma de suas componentes é definida sobre o espaço probabilístico dado por (Ω, \mathcal{F}, P) . Esta é a definição de um *processo estocástico multivariável*, onde cada forma de onda possível do sinal é uma realização, $\omega \in \Omega$, do processo estocástico que o representa.

Cada vetor \mathbf{x} no instante k é uma realização, ω , do vetor aleatório \mathbf{X}_k . Isto pode ser ilustrado através da Figura 9, onde são representadas três realizações de uma componente de um sinal multivariável. Nota-se que cada componente do processo estocástico multivariável é uma função da realização, ω , e do tempo, k .

A observação do sinal é feita através de instrumentos de medida, que devido as suas imperfeições geram um processo estocástico multivariável, \mathbf{Y}_k com $k \in K^* = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, diferente de \mathbf{X}_k mas que carrega informações sobre \mathbf{X}_k . Assim, cada realização \mathbf{x} poderá gerar diversas realizações em \mathbf{y} , como é ilustrado na Figura 10.

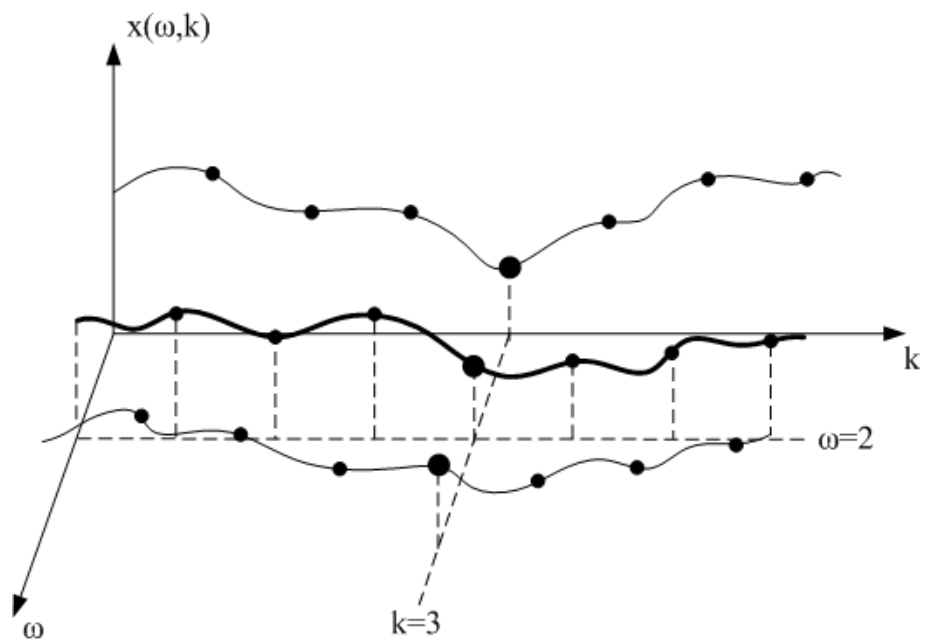


Figura 9: Representação das realizações de um processo estocástico.

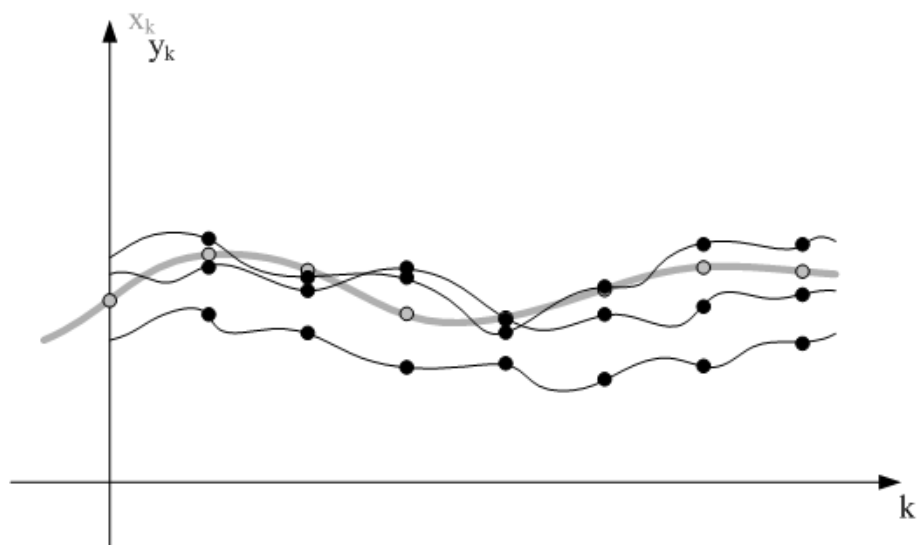


Figura 10: Representação das realizações da observação.

O sinal e a observação são dados pelos processos estocásticos multivariáveis \mathbf{X}_k e \mathbf{Y}_k , sendo que os vetores aleatórios que os constituem podem estar relacionados internamente, tipo sinal-sinal e/ou observação-observação, criando redundância temporal. Externamente tem-se a relação sinal-observação, que é responsável por produzir informação para que o sinal possa ser estimado. Uma ilustração do modelo do sinal é dada na Figura 11.

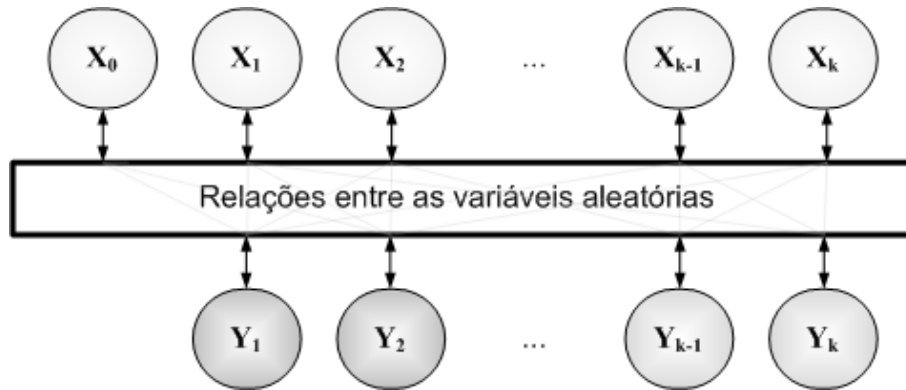


Figura 11: Modelo geral do sinal e da observação.

3.2 Os problemas de estimação

O problema de estimação em tempo amostrado ou discreto pode ser colocado da seguinte forma: dada a sequência correspondente a realização $\mathbf{y}_{1:m} = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_m\}$ dos vetores aleatórios $\mathbf{Y}_{1:m} = \{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \dots, \mathbf{Y}_m\}$, onde m é um índice de tempo, deseja-se encontrar uma estimativa do valor verdadeiro da realização do vetor aleatório \mathbf{X}_n , ou seja, \mathbf{x}_n .

Assim, a estimativa $\hat{\mathbf{x}}_n$ será uma função das observações $\mathbf{y}_{1:m}$ e, como estas observações são realizações de diversos vetores aleatórios, o estimador é um vetor aleatório $\hat{\mathbf{X}}_n$. Este é uma função genérica dos vetores aleatórios das observações e pode ser expresso de forma genérica por:

$$\hat{\mathbf{X}}_n = g(\mathbf{Y}_{1:m}, n, m) \quad (30)$$

Portanto, o problema de estimação consiste em encontrar uma função que relaciona as observações com a estimativa do sinal, de modo que estes estejam próximos de alguma maneira. Segundo (JAZWINSKI, 1970), dependendo da relação entre m e n pode-se subdividir o problema de estimação em três diferentes tipos:

- Suavização: quando $m > n$, representa o problema onde se possui maior quantidade de informação disponível.
- Filtragem: quando $m = n$, representa o problema com maior quantidade de informação disponível que pode ser solucionado *online*.
- Predição: quando $m < n$, representa o problema onde há menor quantidade de informação.

Os três problemas de estimação são ilustrados na Figura 12.

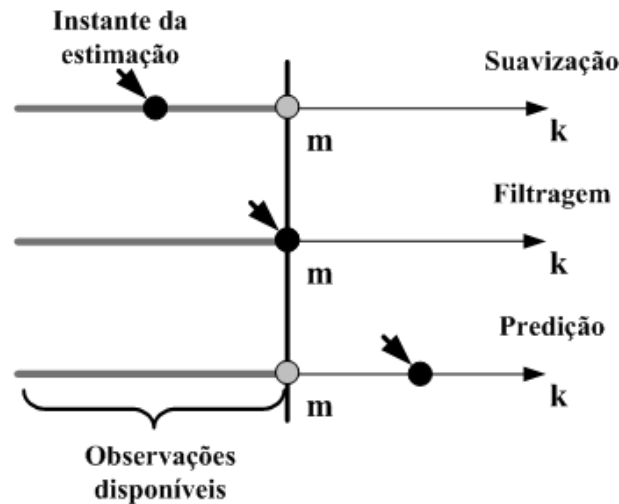


Figura 12: Os problemas de estimação.

3.3 A densidade de probabilidade condicional e a solução de variância mínima

A informação sobre o vetor aleatório \mathbf{X}_k está contida na sequência de vetores aleatórios $\mathbf{Y}_{1:m}$ e conseqüentemente em suas realizações $\mathbf{y}_{1:m}$. Devido ao caráter probabilístico do problema, toda a informação estatística sobre \mathbf{X}_k deve estar contida na densidade de probabilidade condicional dada em (31)¹, esta também é chamada de *densidade a posteriori* (DAP).

$$p_{\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{1:m}}(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{1:m}) \quad (31)$$

Com esta densidade pode-se saber a probabilidade de um certo intervalo sobre \mathbf{x}_n simplesmente integrando a densidade sobre o intervalo. Esta probabilidade inclui a informação trazida pela observação.

Como visto anteriormente, procura-se somente um valor para a estimativa, e não um intervalo. De forma intuitiva pode-se utilizar a média, a moda ou ainda a mediana do vetor condicionado para se obter $\hat{\mathbf{X}}_n$, sendo que o primeiro gera um estimador representativo de uma região em torno da qual a densidade de probabilidade se espalha, a segunda gera um estimador com o ponto de densidade máxima e a terceira produz uma estimativa com probabilidades idênticas tanto para valores maiores como para valores menores da estimativa escolhida (MAYBECK, 1979). Quando não é fixada a forma de (31), cada um dos estimadores apresenta desvantagens para certos tipos de densidades.

A média terá resultados ruins quando a densidade for multimodal, a moda será problemática quando ocorrerem picos na densidade, e a mediana por sua vez não produzirá bons resultados quando a densidade for muito assimétrica. Assim, levanta-se as questões de qual estimador escolher e se usar a densidade de probabilidade condicional é realmente a melhor abordagem. Uma forma de responder estas questões, é visualizar o problema sob a forma de um problema matemático e não usar uma abordagem completamente intuitiva.

Pode-se quantificar o quanto o estimador está próximo da quantidade a ser estimada

¹As variáveis aleatórias aqui consideradas serão por hipótese absolutamente contínuas de forma que todas aceitam uma densidade de probabilidade, ou seja, $F_Z(z) = \int_{-\infty}^z p_X(x) dx$, e que as esperanças de funções mensuráveis destas variáveis podem ser escritas por $\int g(x) dP_x(x) = \int g(x) p_X(x) dx$.

através do erro, definido por:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n \\ \mathbf{E} &= \mathbf{X}_n - \hat{\mathbf{X}}_n\end{aligned}\quad (32)$$

Assim, quanto maiores são os valores absolutos das componentes de \mathbf{E} , maior será o erro de estimação e pior será o estimador. Como o erro é aleatório, quantifica-se o seu tamanho de forma determinística através da esperança da raiz quadrada do erro quadrático ponderado. Esta, neste caso, retira o caráter aleatório do erro e permite a comparação com outros estimadores.

A expressão da quantidade a ser minimizada é dada por:

$$c_{abs} = \mathbb{E}_{\mathbf{E}} \left(\sqrt{\varepsilon^T S \varepsilon} \right) \quad (33)$$

onde S é uma matriz positiva semi-definida de ponderação das componentes do erro.

A função c_{abs} é uma função de custo, que pode ser minimizada em relação a $\hat{\mathbf{X}}_n$ para encontrar o melhor estimador. A partir do uso de funções de custo pode-se expressar o estimador de forma matemática através da expressão:

$$\hat{\mathbf{X}}_n = \arg_{\hat{\mathbf{X}}_n} \min \{c[\mathbf{E}]\} \quad (34)$$

onde $c(\mathbf{E})$ é uma função de custo qualquer.

Além de c_{abs} , outra função de custo interessante de se minimizar é dada em (35). Nesta, o custo de um erro menor que o limite \mathbf{E}_{modmax} é nulo. Para valores maiores, o custo é constante refletindo o fato de que pequenos erros devem ser aceitos devido a natureza aleatória do problema (incerteza na observação). Depois de um certo valor absoluto de erro, o custo torna-se praticamente inaceitável, assumindo um valor grande e constante c .

$$c_{minmax} = \begin{cases} 0, & \mathbb{E}_{\mathbf{E}} \left(\sqrt{\varepsilon^T S \varepsilon} \right) \leq \mathbf{E}_{modmax} \\ c, & \mathbb{E}_{\mathbf{E}} \left(\sqrt{\varepsilon^T S \varepsilon} \right) > \mathbf{E}_{modmax} \end{cases} \quad (35)$$

Na Figura 13 é apresentada a versão escalar das funções de custo. Nota-se que a função mais adequada seria aquela com um comportamento intermediário. Portanto, deveria ser utilizada aquela que garantisse um custo negligenciável próximo do valor absoluto do erro igual a zero, mas que crescesse com uma taxa entre a linear e a instantânea. A função de custo quadrática do erro se enquadra nestas características e, por ser diferenciável e estritamente convexa, podem ser obtidos estimadores ótimos globais a partir de sua minimização. A função de custo quadrática é dada em (36) e uma ilustração de sua forma escalar é dada na Figura 13(c).

$$c_q = \mathbb{E}_{\mathbf{E}} \left(\varepsilon^T S \varepsilon \right) \quad (36)$$

Neste contexto, a função quadrática será utilizada para encontrar o estimador ótimo restrito pelo modelo geral de sinal e observação. A demonstração apresentada aqui foi adaptada de (LE GLAND, 2007).

Deseja-se encontrar $g(\mathbf{X}_n, n, m)$ que minimiza (36). Explorando o fato que a *esperança da esperança condicional de vetores aleatórios* é igual a esperança dos vetores

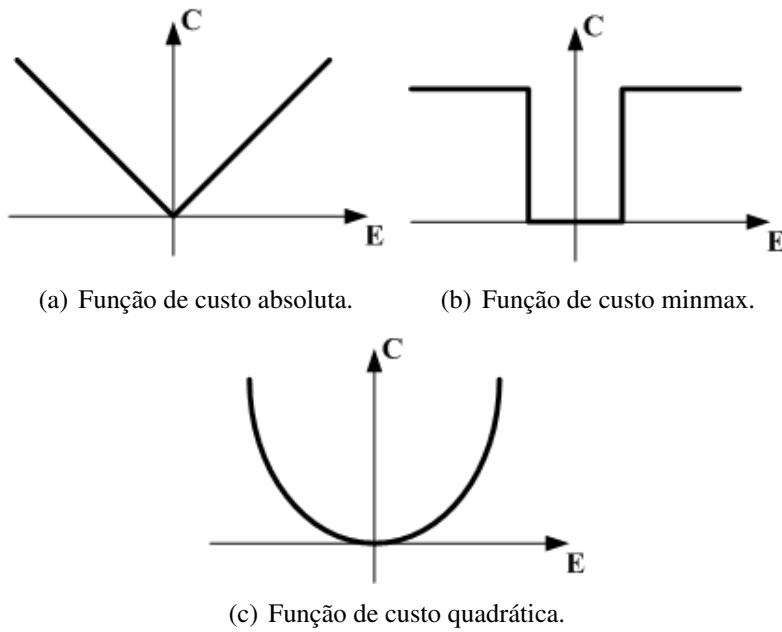


Figura 13: Funções de Custo: absoluta, minmax e quadrática.

aleatórios e também somando e subtraindo dos vetores de erro o vetor aleatório \mathbf{H} , expresso por:

$$\mathbf{H} = \mathbb{E}_{\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{1:m}} (\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{1:m}) \quad (37)$$

Pode-se expressar o erro quadrático médio de forma que algumas simplificações possam ser feitas. Sua expressão é dada por:

$$c_q = \mathbb{E}_{\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_{1:m}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{1:m}} \left[(\mathbf{x}_n - \mathbf{h} + \mathbf{h} - \hat{\mathbf{x}}_n)^T S (\mathbf{x}_n - \mathbf{h} + \mathbf{h} - \hat{\mathbf{x}}_n) | \mathbf{y}_{1:m} \right] \right\} \quad (38)$$

A esperança de $(\mathbf{X}_n - \mathbf{H})^T$ multiplicado por $S(\mathbf{H} - \hat{\mathbf{X}}_n)$, dadas as observações, é nula pois sabendo-se que \mathbf{H} e $\hat{\mathbf{X}}_n$ não dependem de \mathbf{X}_n , pode-se escrever:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{1:m}} \left[(\mathbf{x}_n - \mathbf{h})^T S (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{x}}_n) | \mathbf{y}_{1:m} \right] = \mathbb{E}_{\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{1:m}} \left[(\mathbf{x}_n - \mathbf{h})^T | \mathbf{y}_{1:m} \right] S (\mathbf{H} - \hat{\mathbf{X}}_n) \quad (39)$$

E a esperança condicional que resta pode ser separada em dois termos que se anulam devido a linearidade da esperança condicional e da definição de \mathbf{H} . Assim, rearranjando os termos restantes, a função de custo pode ser reescrita como:

$$c_q = \mathbb{E}_{\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_{1:m}} \left[(\mathbf{x}_n - \mathbf{h})^T S (\mathbf{x}_n - \mathbf{h}) \right] + \mathbb{E}_{\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_{1:m}} \left[(\mathbf{h} - \hat{\mathbf{x}}_n)^T S (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{x}}_n) \right] \quad (40)$$

Como o primeiro termo a direita não depende de $\hat{\mathbf{X}}_n$, a minimização da função de custo em relação ao estimador será feita usando o segundo termo. Visto que S é positiva semi-definida, o mínimo da função de custo quadrática será atingido quando $\hat{\mathbf{X}}_n$ for igual a \mathbf{h} . Portanto, o estimador ótimo em relação ao custo quadrático será dado por:

$$\hat{\mathbf{X}}_n = g(\mathbf{Y}_{1:m}, n, m) = \mathbf{H} = \mathbb{E}_{\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{1:m}} (\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{1:m}) \quad (41)$$

Observa-se que o estimador é a média condicional. Assim, as questões apresentadas sobre a importância da DAP e sobre qual estimador deve-se escolher são respondidas através de (41). Desta forma, obteve-se uma relação direta da DAP, no caso a média, com a solução ótima que minimiza o erro médio quadrático.

Além disto, nota-se que o estimador é não polarizado, pois

$$\mathbb{E}_{\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_{1:m}} [\mathbb{E}_{\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{1:m}} (\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{1:m})] = \mathbb{E}_{\mathbf{X}_n} (\mathbf{x}_n) \quad (42)$$

Deve-se observar também que o estimador encontrado produz um vetor aleatório de erro com variância mínima, pois a não polarização e a minimização do erro quadrático médio acarretam a minimização da variância do erro.

3.4 Modelos de Markov Ocultos e a solução para a filtragem

Devido a generalidade do modelo de sinal e observação utilizados até então, a única forma de se expressar o estimador é aquela dada por (41). Uma forma de obter um estimador numa forma mais explícita é utilizar um modelo de sinal e observação mais restritivos que explicitem o cálculo da densidade condicional para cada instante n .

Para isto pode-se utilizar o *Modelo de Markov Oculto* (MMO). Este considera o sinal:

- *Um processo estocástico caracterizado por (43).*
- *O vetor aleatório \mathbf{X}_k quando condicionado à \mathbf{X}_{k-1} não depende de mais nada.*
- *Tempo discreto com amplitude discreta ou contínua.*

$$p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{0:k-1}, \mathbf{X}_{k+1:l}, \mathbf{Y}_{1:m}} (\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{x}_{k+1:l}, \mathbf{y}_{1:m}) = p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}} (\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \quad (43)$$

As observações a cada instante k são caracterizadas por:

- *Um processo estocástico caracterizado por (44).*
- *Quando condicionadas a \mathbf{X}_k não dependem de mais nada.*
- *Tempo discreto com amplitude discreta ou contínua.*

$$p_{\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_{1:m}} (\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{0:l}, \mathbf{y}_{1:m}) = p_{\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k} (\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \quad (44)$$

Nota-se que as densidades de transição dadas em (43), e as funções densidades de observação dadas em (44), descrevem completamente o sinal com este tipo de modelo.

Um MMO pode ser representado em um grafo como mostra a Figura 14. Nele estão ilustradas de forma clara as relações que existem entre os vetores que representam o sinal e os vetores que representam as observações.

A razão do interesse pelo MMO não é somente a simplificação da descrição do sinal. Como se pode observar, equações de diferenças estocásticas com variáveis observadas indiretamente podem ser descritas por MMO. Este tipo de equações, mostrado em (45), é usado para descrever sistemas dinâmicos amostrados e a sua modelagem estocástica é útil na estimação dos estados do sistema.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k &= f(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{U}_k) \\ \mathbf{Y}_k &= h(\mathbf{X}_k, \mathbf{V}_k) \end{aligned} \quad (45)$$

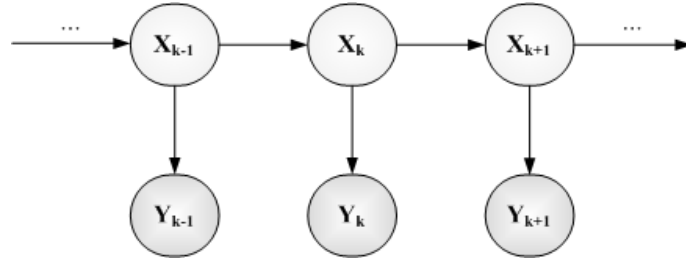


Figura 14: Grafo do modelo de Markov oculto.

Assim, o modelo de sinal utilizado daqui em diante será MMO.

Além disso, o problema de estimação a ser tratado neste projeto é o de filtragem, pois é o problema que pode ser solucionado *online* com a maior quantidade de informação possível.

A solução da filtragem para a função de custo quadrático é descrita de forma geral por (41), com $n = m$. Assim, a cada instante $k = n = N^*$ deve-se calcular a esperança condicional, e para isso deve ser obtida a DAP - $p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$.

3.4.1 A equação de predição

Para obter uma forma explícita da DAP a partir das densidades de transição e de observação será feita a decomposição da densidade conjunta:

$$p_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (46)$$

Utilizando o teorema de Bayes pode-se obter a seguinte densidade:

$$p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) p_{\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) p_{\mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (47)$$

Num MMO, \mathbf{X}_k dado \mathbf{X}_{k-1} não depende das observações anteriores, assim pode-se obter a seguinte densidade:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = \\ p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p_{\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) p_{\mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{y}_{1:k-1}) \end{aligned} \quad (48)$$

Por outro lado, usando o teorema de Bayes em (46) para obter condicionamento somente sobre as observações, chega-se a seguinte expressão:

$$p_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = p_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) p_{\mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (49)$$

A partir de (48) e (49) chega-se a:

$$p_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) = p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p_{\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (50)$$

Finalmente, pode-se obter a densidade marginal somente em função de \mathbf{X}_k integrando (50).

$$p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \int p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}}(\mathbf{x}_k | \xi_{k-1}) p_{\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\xi_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\xi_{k-1} \quad (51)$$

A densidade dada em (51) é conhecida como densidade de predição, pois ela mostra a relação de \mathbf{X}_k com as observações passadas. É importante notar que esta densidade depende somente da densidade condicional no instante anterior e da densidade de transição, dessa forma pode-se juntar as informações do modelo (a densidade de transição) com as informações do estimador anterior (a DAP passada), para predizer o que deve ocorrer no instante da estimação.

3.4.2 A equação de atualização

Se for possível relacionar a densidade de predição com a informação proveniente da observação, pode-se encontrar equações recursivas para a obtenção da DAP.

Para tanto, pode-se partir de outra densidade conjunta, esta é dada por:

$$p_{\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k, \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (52)$$

Esta densidade será decomposta através do teorema de Bayes para obter:

$$p_{\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k, \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{1:k-1}) = p_{\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{1:k-1}) p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) p_{\mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (53)$$

Por definição do MMO, a observação no instante k dado \mathbf{X}_k é independente das observações anteriores. Logo, pode-se reescrever (53) como:

$$p_{\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k, \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{1:k-1}) = p_{\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) p_{\mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (54)$$

Condicionando o vetor \mathbf{X}_k em relação as observações e usando (54) pode-se obter:

$$p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k}) = \frac{p_{\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) p_{\mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{y}_{1:k-1})}{p_{\mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{y}_{1:k})} \quad (55)$$

Pode-se aplicar o teorema de Bayes sobre o denominador de (55) para obter:

$$p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k}) = \frac{p_{\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})}{p_{\mathbf{Y}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} \quad (56)$$

Usando uma marginalização sobre o denominador pode-se encontrar:

$$p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k}) = \frac{p_{\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})}{\int p_{\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k}(\mathbf{y}_k | \xi_k) p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\xi_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\xi_k} \quad (57)$$

Constata-se que foi possível encontrar uma expressão que relaciona a densidade de predição, a observação e a DAP. Assim, (51) e a equação de atualização (57) formam o conjunto de equações recursivas que levam a obtenção da DAP, possibilitando a obtenção do estimador.

O estimador calculado desta forma é chamado de estimador bayesiano pois no início das recursões deve-se fixar uma densidade $p_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$. Assim, o vetor a ser estimado recebe um modelo *a priori* aleatório, coincidindo assim com as técnicas estatísticas bayesianas.

Nota-se também que mesmo tendo sido explicitada de forma recursiva a densidade que leva ao filtro a partir das densidades de transição e observação do MMO, não pode-se dizer que o filtro possui um número finito de parâmetros, pois, como é discutido em (JAZWINSKI, 1970), deve-se calcular todos os valores da densidade condicional, que de forma geral pode possuir suporte infinito. Além disso, as integrais das equações da recursão e da esperança podem não possuir expressão analítica, tendo que ser aproximadas numericamente. Na seção a seguir, será apresentada uma forma de aproximar numericamente as equações do filtro, esta aproximação é baseada em técnicas de integração Monte Carlo.

3.5 Amostragem de importância sequencial

O estimador de mínimo erro quadrático médio para o caso da filtragem é dado em função da DAP por:

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbb{E}_{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \int \mathbf{x}_k p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k \quad (58)$$

Para calcular esta integral pode-se usar um método Monte Carlo de integração. Este método consiste em produzir amostras \mathbf{x}_k^i segundo a DAP da variável que se deseja obter a esperança e depois integrar usando:

$$\int \mathbf{x}_k p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^i \quad (59)$$

O método descrito acima é de difícil implementação pois a DAP é normalmente desconhecida ou mesmo muito difícil de ser amostrada. Uma forma de simplificar o problema é utilizar uma outra densidade, $q_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})$, que seja simples de ser amostrada. Esta nova densidade pode ser utilizada em (58) para se obter:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \int \mathbf{x}_k \frac{p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) q_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})}{q_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})} d\mathbf{x}_k \quad (60)$$

Pode-se introduzir então uma nova variável, a ponderação $w(\mathbf{x}_k)$, que é dada por:

$$w(\mathbf{x}_k) = \frac{p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})}{q_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})} \quad (61)$$

Nota-se que a nova densidade a ser amostrada deve possuir suporte maior que a DAP para que o método e a ponderação sejam válidos e também que ela pode depender dos vetores aleatórios do sinal até o instante $k - 1$ e das observações.

A divisão de (60) pela integral da densidade condicional no seu suporte não altera (60) pois a integral da densidade é unitária por definição. Assim, pode-se obter:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{\int \mathbf{x}_k w(\mathbf{x}_k) q_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k}{\int w(\mathbf{x}_k) q_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k} \quad (62)$$

Esta última pode ser calculada com o método Monte Carlo para obter:

$$\hat{\mathbb{E}}_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k}} (\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^i w(\mathbf{x}_k^i)}{\sum_{j=1}^N w(\mathbf{x}_k^j)} \quad (63)$$

Pode-se simplificar (63) usando a ponderação normalizada, $\tilde{w}(\mathbf{x}_k^i)$, dada por:

$$\tilde{w}(\mathbf{x}_k^i) = \frac{w(\mathbf{x}_k^i)}{\sum_{j=1}^N w(\mathbf{x}_k^j)} \quad (64)$$

O cálculo da esperança é dado então por:

$$\hat{\mathbb{E}}_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k}} (\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^i \tilde{w}(\mathbf{x}_k^i) \quad (65)$$

Observa-se que as ponderações normalizadas aproximam de forma discreta a DAP. Esta aproximação é expressa em função de distribuições de Dirac:

$$p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k}} (\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k^i(\mathbf{x}_k^i) \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i) \quad (66)$$

Para N finito, este método de aproximação discreta conhecido como *amostragem de importância* produz um estimador $\hat{\mathbb{E}}_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k}} (\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ polarizado, mas a lei dos grandes números forte garante que este é assintoticamente não polarizado como é mostrado em (DOUCET; DE FREITAS; GORDON, 2001). Além disso, a convergência do método Monte Carlo não depende da dimensão do vetor que está sendo integrado, podendo ser usado para modelos de sinal com muitas componentes.

3.5.1 Forma recursiva

Usando como modelo de sinal um MMO, espera-se que o cálculo das ponderações possa ser feito usando um algoritmo recursivo, como aquele que é constituído pelas equações de predição e atualização. Para isso, pode-se explicitar os termos da DAP e da densidade a ser amostrada usando as equações de predição e atualização.

A DAP pode ser reescrita como:

$$p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k}} (\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{p_{\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k} (\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \int p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}} (\mathbf{x}_k | \xi_{k-1}) p_{\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}} (\xi_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\xi_{k-1}}{\int p_{\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k} (\mathbf{y}_k | \xi_k) p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}} (\xi_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\xi_k} \quad (67)$$

Sendo o denominador independente de \mathbf{x}_k , este é simplesmente uma constante no cálculo das ponderações. Assim, a ponderação é dada por:

$$w(\mathbf{x}_k) \propto \frac{p_{\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k} (\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \int p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}} (\mathbf{x}_k | \xi_{k-1}) p_{\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}} (\xi_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\xi_{k-1}}{q_{\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{0:k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}} (\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})} \quad (68)$$

Agora, a expressão da ponderação para cada amostra pode ser calculada usando a ponderação no instante anterior e a aproximação por distribuição de Dirac da DAP. A expressão resultante é dada por:

$$w(\mathbf{x}_k^i) \propto \frac{p_{\mathbf{Y}_k|\mathbf{X}_k}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) p_{\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_{k-1}}(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q_{\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k})} w(\mathbf{x}_{k-1}^i) \quad (69)$$

O cálculo das ponderações pode ser feito de forma recursiva através (69), de forma que o filtro possa ser implementado *online*. Este algoritmo de filtragem é conhecido como amostragem de importância sequencial e suas etapas são descritas abaixo. Nota-se que no algoritmo foi usado $\hat{w}(\mathbf{x}_{k-1}^i)$ no lugar de $w(\mathbf{x}_{k-1}^i)$, assim tirando a necessidade de guardar em memória as ponderações sem normalização.

Algoritmo de amostragem de importância sequencial

1. *Inicialização* $k = 0$

Para $i = 1, \dots, N$, amostrar o vetor aleatório:

$$\mathbf{x}_0^i \sim q_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{x}_0)$$

2. *Amostragem* k

Para $i = 1, \dots, N$, amostrar o vetor aleatório:

$$\mathbf{X}_k^i \sim q_{\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k}) \quad (70)$$

3. *Ponderação*

Para $i = 1, \dots, N$, calcular a ponderação usando \mathbf{y}_k .

$$w(\mathbf{x}_k^i) = \frac{p_{\mathbf{Y}_k=\mathbf{y}_k|\mathbf{X}_k}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) p_{\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_{k-1}}(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q_{\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k})} \tilde{w}(\mathbf{x}_{k-1}^i)$$

4. *Normalização*

Para $i = 1, \dots, N$, calcular a ponderação normalizada.

$$\tilde{w}(\mathbf{x}_k^i) = \frac{w(\mathbf{x}_k^i)}{\sum_{j=1}^N w(\mathbf{x}_k^j)}$$

5. *Estimação*

Calcular a estimativa.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^i \tilde{w}(\mathbf{x}_k^i)$$

6. Fazer $k \leftarrow k + 1$ e voltar a 2.

Na prática a amostragem de importância sequencial não é utilizada, pois quando algumas partículas se distanciam da trajetória média ocorre a diminuição drástica de sua ponderação e a eficiência das amostras se reduz fortemente. A solução para este problema é o controle das trajetórias das amostras, este controle é feito por uma etapa de reamostragem após a ponderação.

3.6 Amostragem de importância sequencial com reamostragem Filtro de partículas

Como é explicado em (DOUCET; DE FREITAS; GORDON, 2001), o algoritmo de amostragem de importância sequencial possui um problema de degeneração das amostras. Foi também demonstrado em (KONG; LIU; WONG, 1994) que a medida que k aumenta, a aproximação da DAP se torna cada vez mais estreita devido ao aumento sem limite da variância das ponderações.

Para contornar o problema acima, primeiramente é calculado um índice que mostra de forma empírica quantas amostras efetivamente estão sendo usadas. Este índice resulta em N_{ef} pequeno, quando há poucas amostras úteis e N_{ef} grande, quando há muitas. O índice é dado por:

$$N_{ef} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \tilde{w}(\mathbf{x}_k^i)^2} \quad (71)$$

O índice servirá como gatilho para a técnica de controle das amostras, a reamostragem.

A reamostragem tem como objetivo encontrar uma nova distribuição das amostras de forma que a variância seja reduzida sem perda de informação. A reamostragem consiste na replicação de amostras com ponderações altas e no desaparecimento das restantes. Ela pode ser feita de forma determinística ou aleatória. Aqui são somente consideradas as formas aleatórias.

Para uma implementação mais simples são consideradas as seguintes restrições aos métodos de reamostragem:

- Número de amostras em saída constante, N .
- Todas as ponderações em saída devem ser iguais a $\frac{1}{N}$.
- As replicações das amostras devem ser feitas de forma que a seguinte expressão seja respeitada:

$$\hat{\mathbb{E}}_{N^i | \tilde{W}(\mathbf{x}_k^i), \mathbf{x}_k^i} (n^i | \tilde{w}(\mathbf{x}_k^i), \mathbf{x}_k^i) = N \tilde{w}(\mathbf{x}_k^i) \quad (72)$$

onde N^i é o número de replicações da amostra i .

A restrição do último item garante que se obtenha em média a mesma distribuição de ponderações que antes da reamostragem, mas replicando as amostras que possuem maior ponderação.

Os métodos comuns de reamostragem são dados abaixo:

- Multinomial
- Residual
- Sistemática
- Residual Sistemática

Destes métodos, são descritos aqui somente o primeiro e o último. O primeiro por ser o método de mais simples compreensão e por ter sido usado no início da utilização da reamostragem e o último por ser o método mais rápido e ter sido usado na implementação do algoritmo de filtragem deste projeto.

3.6.0.1 Reamostragem Multinomial

Este método de reamostragem consiste na amostragem direta da DAP aproximada por distribuições de Dirac obtida através das ponderações. Assim, teoricamente ela consiste em obter novas amostras $\tilde{\mathbf{X}}_k^i$ através de:

$$\tilde{\mathbf{X}}_k \sim \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k^i(\mathbf{x}_k^i) \delta(\tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^i) \quad (73)$$

Através da reamostragem da DAP é possível multiplicar as partículas com ponderações mais altas e assim controlar a variância das ponderações.

Este tipo de reamostragem é chamado de multinomial pois ele é feito sobre um espaço probabilístico discreto e finito que possui uma distribuição de probabilidade multinomial. Uma ilustração do funcionamento do algoritmo de reamostragem multinomial é dado na Figura 15.

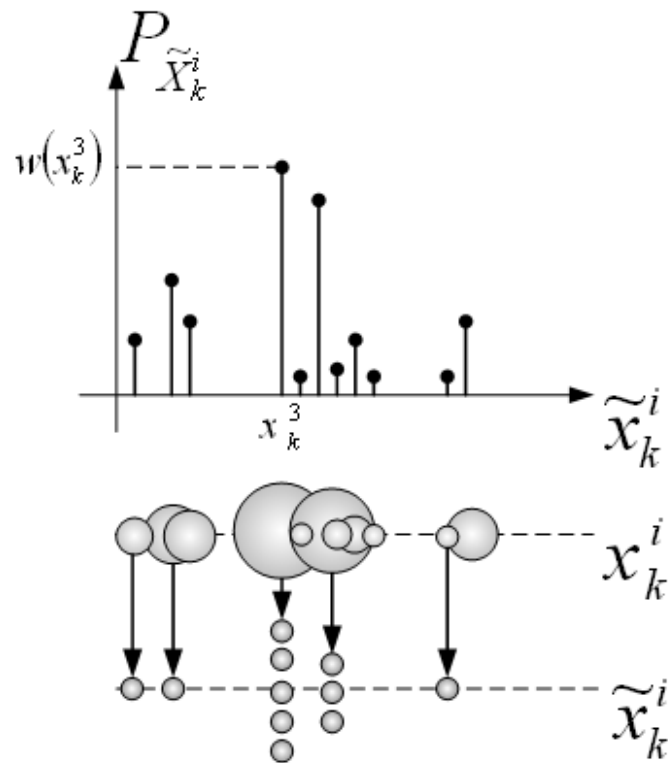


Figura 15: Realização da reamostragem multinomial.

As ponderações são ilustradas através dos círculos cinzas, quanto maior a ponderação, maior o raio do círculo. É ilustrado o caso escalar onde são reamostradas 11 amostras e que, neste caso, a amostra com maior ponderação, \mathbf{x}_k^3 , é a amostra com maior número de réplicas.

Na prática a reamostragem multinomial é realizada através de um algoritmo chamado *bootstrap*. Este consiste na amostragem de N amostras w^j de uma densidade uniforme $U[0, 1]$ e então cada amostra w^j que cair sobre o intervalo $[\sum_{l=1}^i \tilde{w}_k^l, \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{w}_k^l]$ fará que $\tilde{\mathbf{x}}_k^j = \mathbf{x}_k^i$, obtendo assim N amostras da DAP aproximada.

O algoritmo de reamostragem multinomial é descrito abaixo:

<u>Algoritmo de reamostragem multinomial</u>	
1. <i>Amostragem</i>	Para $j = 1, \dots, N$, amostrar a variável uniforme:
	$U^j \sim U[0, 1] \quad (74)$
2. <i>Seleção</i>	Para $j = 1, \dots, N$, selecionar as amostras $\tilde{\mathbf{x}}_k^j$ de \mathbf{x}_k^i para i que respeite a seguinte expressão:
	$u^j \in \left[\sum_{l=1}^i \tilde{w}_k^l, \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{w}_k^l \right] \quad (75)$
3. <i>Uniformização</i>	Para $j = 1, \dots, N$ fazer:
	$\tilde{w}_k^j = \frac{1}{N} \quad (76)$

3.6.0.2 Reamostragem residual sistemática

Este método de reamostragem consiste em produzir o número de réplicas n^i da amostra de índice i através da comparação da ponderação da amostra com uma variável de resíduos acumulados Δu^j . Seu algoritmo é dado abaixo.

<u>Algoritmo de reamostragem sistemática residual</u>	
1. <i>Amostragem</i>	Para $j = 1, \dots, M$, amostrar a variável uniforme:
	$\Delta U^0 \sim U \left[0, \frac{1}{N} \right] \quad (77)$
2. <i>Cálculo do número de réplicas e dos resíduos acumulados</i>	Para $j = 1, \dots, N$, calcular o número de réplicas e os resíduos acumulados através de:
	$n^j = \lfloor (\tilde{w}_k^j - \Delta u^{j-1}) N \rfloor + 1 \quad (78)$
	$\Delta u^j = \Delta u^{j-1} + \frac{n^j}{N} + \tilde{w}_k^j \quad (79)$
3. <i>Replicação,</i>	Para $j = 1, \dots, N$ criar n^j réplicas de \mathbf{x}_j^i .
4. <i>Uniformização</i>	Para $j = 1, \dots, N$ fazer (76).

Este último algoritmo é apresentado em (ATHALYE et al., 2005) como sendo, dentre os algoritmos de reamostragem citados acima, aquele que requer o menor número de ope-

rações. Não existe ainda prova de que o algoritmo de amostragem sequencial de importância convirja ao adicionar uma etapa de reamostragem sistemática, como é mostrado para a reamostragem multinomial em (DOUC; CAPPE, 2005) e (DOUCET; DE FREITAS; GORDON, 2001), mas mesmo assim, ele é amplamente utilizado pois produz bons resultados na prática.

A técnica de filtragem constituída pela amostragem sequencial de importância e pelo controle de variância feito pela reamostragem é chamada de *amostragem de importância sequencial com reamostragem*, mas ela é normalmente conhecida sob o nome de *filtro de partículas*.

Cada amostra é chamada de partícula e representa um possível estado do sinal a ser estimado, estas partículas se movem conforme a densidade $q_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{Y}_{1:k})$. Depois são assimiladas probabilidades às partículas através da informação trazida pela observação. Com estas probabilidades pode-se fazer a estimação e finalmente passar à última etapa da recursão do filtro, a reamostragem, onde as partículas mais prováveis são reproduzidas de forma que as partículas explorem regiões mais prováveis de amplitude do sinal a ser estimado.

Uma ilustração do funcionamento do filtro de partículas é dada na Figura 16.

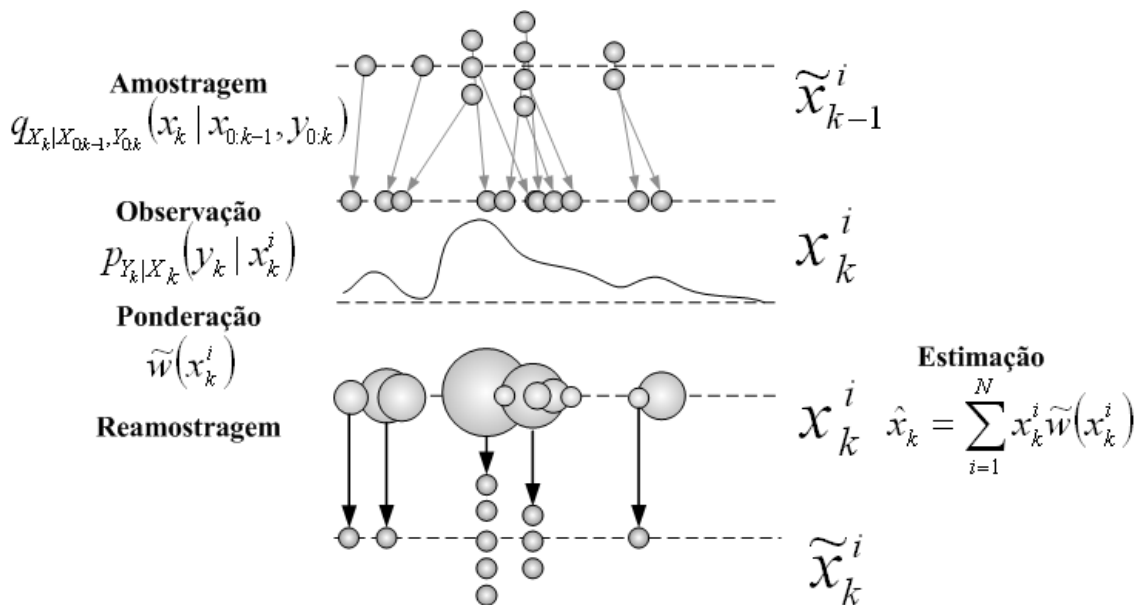


Figura 16: Recursão do filtro de partículas.

Pode-se observar que é mostrado o caso escalar e que aconteceram duas reamostragens em sequência pois há partículas em $k - 1$ com valores de amplitude iguais.

O Filtro de Partículas é dado abaixo.

Algoritmo de amostragem de sequencial de importância com reamostragem - Filtro de partículas

1. *Inicialização* $k = 0$

Para $i = 1, \dots, N$, amostrar:

$$\mathbf{x}_0^i \sim q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$$

2. *Amostragem* k

Para $i = 1, \dots, N$, amostrar:

$$\mathbf{X}_k^i \sim q_{\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{Y}_{1:k})$$

3. *Ponderação*

Para $i = 1, \dots, N$, calcular a ponderação usando \mathbf{y}_k .

$$w(\mathbf{x}_k^i) = \frac{p_{\mathbf{Y}_k=\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) p_{\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}}(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q_{\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{Y}_{1:k})} \tilde{w}(\mathbf{x}_{k-1}^i)$$

4. *Normalização*

Para $i = 1, \dots, N$, calcular a ponderação normalizada.

$$\tilde{w}(\mathbf{x}_k^i) = \frac{w(\mathbf{x}_k^i)}{\sum_{j=1}^N w(\mathbf{x}_k^j)}$$

5. *Estimação*

Calcular a estimativa.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^i \tilde{w}(\mathbf{x}_k^i)$$

6. *Cálculo do número de partículas eficazes*

Calcular N_{ef} através de:

$$N_{ef} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \tilde{w}(\mathbf{x}_k^i)^2}$$

7. *Reamostragem*

Se $N_{ef} < N_{min}$, reamostrar.

8. Fazer $k \leftarrow k + 1$ e voltar a 2.

Algumas observações podem ser feitas em relação ao filtro de partículas:

- *Convergência*
O filtro de partículas converge quando o número de partículas tende a infinito ((DOUCET; DE FREITAS; GORDON, 2001)). Ou seja, a DAP é aproximada quase com certeza pela aproximação discreta. Assim, quando o número de partículas tende a infinito o filtro de partículas converge para o estimador ótimo.
- *Modelo de sinal*
Os sinais que podem ser estimados pelo filtro de partículas abrangem os MMO, sendo assim, não são necessárias hipóteses para simplificação como gaussianidade e linearidade.
- *Sinais contínuos e discretos*
Os vetores aleatórios considerados no modelo de sinal podem ser contínuos, discretos ou mistos, desde que a restrição de que o suporte da densidade a ser amostrada seja maior que o da DAP seja respeitada.
- *Gatilho para reamostragem*
O uso de um gatilho sobre a reamostragem, ao invés de sempre realizar reamostragem, vem do fato que reamostragens sucessivas levam a um empobrecimento estatístico das partículas. Este ocorre pois as partículas podem não ter tempo suficiente para explorar regiões diferentes de amplitude, estando sempre confinadas a uma região específica e diminuindo assim o tempo de convergência para sinais com mudanças bruscas.
- *Estimativa*
Devido ao empobrecimento estatístico deve-se obter a estimativa antes da reamostragem, como é aconselhado em (CHEN, 2003).
- *Densidade amostrada - Densidade de transição*
A densidade a ser amostrada interfere diretamente no desempenho do filtro de partículas. Normalmente é usada a densidade de transição dada por (43). Esta simplifica o cálculo da ponderação que agora pode ser expressa por:

$$w(\mathbf{x}_k^i) = p_{\mathbf{Y}_k = \mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) \tilde{w}(\mathbf{x}_{k-1}^i) \quad (80)$$

- *Melhorias*
Algumas melhorias podem ser feitas usando outras técnicas associadas ao filtro de partículas. Podem ser usadas outras técnicas de amostragem para melhorar tanto a amostragem como a reamostragem. Quando parte da evolução e/ou observação são lineares pode-se usar condicionamento em relação a outros estimadores como filtros de Kalman ou filtros de Kalman estendidos para melhorar o desempenho do filtro.

3.7 Modelo linear gaussiano e o filtro de Kalman

É possível restringir ainda mais o modelo de sinal de forma a tentar obter uma solução mais simples ao problema de filtragem. É considerado agora um modelo com evolução do sinal e observação lineares. Este modelo possui evolução e observação expressas por:

$$\mathbf{X}_k = F_k \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{U}_k \quad (81)$$

$$\mathbf{Y}_k = H_k \mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k \quad (82)$$

Onde F_k e H_k são matrizes que podem depender de k , e \mathbf{U}_k e \mathbf{V}_k são vetores aleatórios que formam ruído branco gaussiano. Eles são independentes entre si e da condição inicial \mathbf{X}_0 . Suas densidades são expressas por:

$$\mathbf{U}_k \sim N_U(0, Q_k) \quad (83)$$

$$\mathbf{V}_k \sim N_V(0, R_k) \quad (84)$$

Para a obtenção do filtro ótimo pode-se calcular a DAP de forma recursiva usando as equações de predição e atualização.

A DAP no instante $k - 1$ é gaussiana, pois sendo (81) e (82) lineares e \mathbf{U}_k e \mathbf{V}_k gaussianos, se obterá \mathbf{X}_k e \mathbf{Y}_k gaussianos, e então pode-se afirmar que a DAP é gaussiana pois densidades gaussianas condicionadas a vetores gaussianos produzem densidades também gaussianas. Assim a DAP no instante anterior é dada por:

$$p_{\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) = N_{\mathbf{x}_{k-1}}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) \quad (85)$$

Onde $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ é o estimador no instante anterior e $P_{k-1|k-1}$ é a sua matriz de covariância.

Pode-se utilizar (85) na equação de predição, (51), junto com a densidade de transição, que neste caso é gaussiana e dada por:

$$p_{\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = N_{\mathbf{x}_k}(F_k \mathbf{x}_{k-1}, Q_k) \quad (86)$$

No integrando da equação de predição (51) é possível separar dois termos multiplicativos gaussianos, sendo o primeiro em função de ξ_{k-1} e o segundo em função de \mathbf{x}_k e $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$. Assim a integral do primeiro termo será uma constante que multiplicará a outra função gaussiana. Assim, a densidade de predição é gaussiana como já era esperado e ela é expressa por:

$$p_{\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = N_{\mathbf{x}_k}(F_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k) \quad (87)$$

A média da densidade de predição será denotada por $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ e a sua covariância por $P_{k|k-1}$.

Na equação de atualização, (57), é utilizada a densidade de predição dada por (87) e a verossimilhança da observação dada por:

$$p_{\mathbf{Y}_k|\mathbf{X}_k}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = N_{\mathbf{Y}_k}(H_k \mathbf{x}_k, R_k) \quad (88)$$

Usando também a decomposição em dois termos gaussianos no denominador da equação de atualização e realizando a divisão pode-se obter a DAP. Esta agora pode ser dada por:

$$p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = N_{\mathbf{x}_k} [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{y}_k - H_k \mathbf{x}_k), (I - K_k H_k) P_{k|k-1}] \quad (89)$$

Onde I é a matriz identidade e K_k é conhecido como *ganho de Kalman*, dado por:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (90)$$

A estimativa pode ser feita utilizando a realização da observação e é dada em (91), sendo a média da DAP. A covariância de estimação é dada (92), sendo a covariância da DAP, pois o filtro não é polarizado.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{y}_k - H_k \mathbf{x}_k) \quad (91)$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (92)$$

Pode-se observar que o cálculo da estimativa depende da média e covariância da densidade de predição e esta por sua vez depende da média e covariância da DAP no instante anterior. Assim, a estimativa ótima pode ser calculada de forma recursiva, somente sendo necessários os cálculos da média e covariância da predição e da DAP. Logo, *no caso de sinais lineares gaussianos não é necessário o cálculo completo da densidade de predição e da DAP.*

O filtro gerado pelas equações recursivas que levam a estimativa é conhecido como *filtro de Kalman*. O algoritmo do filtro de Kalman é descrito a seguir.

Filtro de Kalman

1. *Inicialização* $k = 0$
Inicializar $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ e $P_{0|0}$

2. *Predição* k
Calcular a estimativa da predição a um passo através de:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (93)$$

3. *Covariância do erro de predição* k
Calcular a covariância do erro da estimativa de predição a um passo através de:

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k \quad (94)$$

4. *Ganho de Kalman* k
Calcular o ganho de Kalman através de (90).

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$$

5. *Estimação* k
Calcular a estimativa através de (91).

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{y}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$$

6. *Covariância do erro de estimação* k
Calcular a covariância do erro de estimação através de (92).

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

7. Fazer $k \leftarrow k + 1$ e voltar a 2.

Algumas observações podem ser feitas em relação ao filtro de Kalman:

- *Otimidade*
O filtro de Kalman é ótimo para o modelo de sinal considerado (linear e gaussiano), pois calcula exatamente a média da DAP.
- *Linearidade*
As equações do filtro de Kalman são lineares em relação a observação, sendo assim, o filtro de Kalman é um filtro linear.
- *Não adaptatividade*
Observa-se que a estrutura do filtro não muda em relação as entradas (observações), logo, o filtro de Kalman não é um filtro adaptativo. Se ocorrer uma mudança no modelo não prevista na construção do filtro, não ocorrerá adaptação do filtro.
- *Cálculo prévio dos parâmetros*
As matrizes de covariância e ganho de Kalman podem ser calculadas previamente, pois não dependem da observação, nem da estimativa. O ganho de Kalman pode ser calculado previamente até a convergência do filtro, assim diminuindo o esforço computacional a ser realizado durante a utilização do filtro.
- *Inicialização*
A inicialização da estimativa inicial $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ deve ser feita usando algum conhecimento *a priori*. O grau de desconfiança nesta estimativa inicial é usado para inicializar $P_{0|0}$.
- *Ruído colorido*
Sinais modelados com ruído colorido não podem ser estimados diretamente através do filtro de Kalman. Pode ser feita a filtragem deste tipo de sinal incluindo na modelagem do sinal a formação do ruído colorido através de ruído branco. Assim, o problema de estimação é aumentado para poder tratar do ruído colorido.

3.8 O Filtro de Kalman estendido

Para um modelo não linear de sinal descrito por:

$$\mathbf{X}_k = f(\mathbf{X}_{k-1}, k-1) + \mathbf{U}_k \quad (95)$$

$$\mathbf{Y}_k = h(\mathbf{X}_k, k) + \mathbf{V}_k \quad (96)$$

Onde \mathbf{U}_k e \mathbf{V}_k formam ruído branco gaussiano com densidades dadas por (83) e (84), e obedecem as mesmas restrições dos ruídos do modelo linear gaussiano.

É possível obter uma solução sub-ótima descrita por equações similares as do filtro de Kalman.

A solução é baseada nas seguintes aproximações:

- O estimador no instante anterior, $k-1$, aproxima bem o estimador ótimo.

- A função $f(\mathbf{X}_{k-1}, k-1)$ pode ser aproximada pela série de Taylor truncada em torno de $\hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}$. Ou seja, a expressão (97) é válida.

$$f(\mathbf{X}_{k-1}, k-1) \approx f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}, k-1) + \nabla f_{\mathbf{X}_{k-1}}(\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}) \quad (97)$$

Onde $\nabla f_{\mathbf{X}_{k-1}}$ é a jacobiana de $f(\mathbf{X}_{k-1}, k-1)$ calculada em $\mathbf{X}_{k-1} = \hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}$.

- A função $h(\mathbf{X}_k, k)$ pode ser aproximada pela série de Taylor truncada em torno de $\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}$. Ou seja, a expressão (98) é válida.

$$h(\mathbf{X}_k, k) \approx h(\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}, k) + \nabla h_{\mathbf{X}_k}(\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}) \quad (98)$$

Onde $\nabla h_{\mathbf{X}_k}$ é a jacobiana de $h(\mathbf{X}_k, k)$ calculada em $\mathbf{X}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}$.

Usando as aproximações acima nas equações de predição e atualização, pode-se chegar ao filtro sub-ótimo conhecido como *filtro de Kalman estendido*, ver (RIBEIRO, 2004) para a demonstração. Este filtro é descrito abaixo.

Filtro de Kalman estendido

1. *Inicialização* $k = 0$
Inicializar $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ e $P_{0|0}$

2. *Predição* k
Calcular a estimativa da predição a um passo através de:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, k-1) \quad (99)$$

3. *Covariância do erro de predição* k
Calcular a covariância da estimativa de predição a um passo através de:

$$P_{k|k-1} = \nabla f_{\mathbf{x}_{k-1}} P_{k-1|k-1} \nabla f_{\mathbf{x}_{k-1}}^T + Q_k \quad (100)$$

4. *Ganho de Kalman* k
Calcular o ganho de Kalman através de:

$$K_k = P_{k|k-1} \nabla h_{\mathbf{x}_k}^T (\nabla h_{\mathbf{x}_k} P_{k|k-1} \nabla h_{\mathbf{x}_k}^T + R_k)^{-1} \quad (101)$$

5. *Estimação* k
Calcular a estimativa através de:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, k)) \quad (102)$$

6. *Covariância do erro de estimação* k
Calcular a covariância de estimação através de:

$$P_{k|k} = (I - K_k \nabla h_{\mathbf{x}_k}) P_{k|k-1} \quad (103)$$

7. Fazer $k \leftarrow k + 1$ e voltar a 2.

As seguintes observações podem ser feitas em relação ao filtro de Kalman estendido:

- *Sub-otimalidade*
O filtro de Kalman estendido é um filtro sub-ótimo, pois resulta em um estimador que não é necessariamente a média da DAP. Ele se aproxima da otimalidade quando o modelo de sinal for próximo de um modelo linear.
- *Não linearidade*
O filtro é não linear pois o estimador é uma função não linear das observações.
- *Adaptatividade*
A dependência da predição e da estimativa no cálculo das covariâncias e do ganho de Kalman fazem com que o filtro de Kalman estendido seja considerado como um filtro adaptativo.
- *Cálculo on-line dos parâmetros*
Como o filtro é adaptativo não é possível calcular o ganho de Kalman com antecedência, sendo necessário o cálculo *online* dos parâmetros do filtro.
- *Cálculo da jacobiana*
Como foi visto, é necessário o cálculo da jacobiana das funções do modelo. Dependendo do modelo, este cálculo pode levar a um esforço computacional grande durante a estimação.
- *Instabilidade*
Como o filtro aproxima linearmente as funções do modelo, se a inicialização da estimativa não for bem feita, a covariância real será muito maior que a covariância aproximada pelo filtro, assim podendo levar o filtro a instabilidade.

3.9 Conclusão do capítulo

Neste capítulo foi tratada a estimação de sinais modelados sob a forma de processos estocásticos. Primeiramente, foi considerado um modelo de sinal a ser estimado descrito por um processo estocástico multivariável, que por sua vez é observado através de outro processo estocástico multivariável chamado observação. A partir disto foi colocado o problema de estimação como sendo o procedimento para obter estimativas do sinal de interesse a partir das observações. Foi visto que minimizando a função de custo quadrático obtém-se como estimador a média do sinal a ser estimado dadas as observações.

Depois de obtido o estimador para o modelo geral de sinal, foi proposta a utilização de um modelo mais restrito, o modelo de Markov oculto. A utilização deste modelo vem do fato que diversos tipos de sinais modelados sob a forma de equações de diferenças estocásticas podem ser modelados através de MMO.

Além disto foi considerado como problema de estimação a ser tratado, o problema de filtragem, ou seja, deve-se obter um estimador a partir de observações passadas e presentes. Esta escolha foi motivada pelo fato de que a filtragem é o problema de estimação com maior quantidade de informação disponível que pode ser resolvido *on-line*.

Assim, após a escolha de um modelo mais simples de sinal e do problema de estimação a ser tratado, foi encontrada a solução do problema. Esta solução envolve o cálculo recursivo das equações de predição e atualização que levam a obtenção da DAP e que por sua vez leva ao estimador ótimo.

O cálculo recursivo da DAP e do estimador pode ser feito de forma aproximada através do filtro de partículas e do filtro de Kalman estendido. Sendo que o primeiro faz uma aproximação discreta da DAP através de técnicas de integração Monte-Carlo e o segundo aproxima localmente a DAP através de uma densidade gaussiana e lineariza as funções do modelo para obter uma solução similar a solução simples e elegante para o modelo linear e gaussiano.

Estes dois últimos filtros que tratam do problema de estimação de sinais modelados com MMO podem ser usados para a estimação de fase no sistema de comunicação aqui considerado, pois este foi modelado com um MMO.

4 ESTIMAÇÃO DE FASE

A partir do que foi apresentado no capítulo referente a estimação e usando o modelo descrito no capítulo referente a modelagem do sistema, pode-se partir para a aplicação dos algoritmos de estimação ao problema de estimação de fase.

Neste capítulo é descrito primeiramente a aplicação direta do filtro de partículas para a obtenção de uma estimativa da fase. Depois é proposta uma melhoria a este filtro, a Rao-Blackwellização. O último filtro a ser descrito é o filtro de Kalman estendido.

Antes de serem feitas as simulações para a obtenção do desempenho dos filtros é descrita brevemente a cota inferior de erro quadrático médio de Cramér-Rao Bayesiana para o problema de estimação de fase. Na análise dos resultados esta cota é usada para observar o nível de otimalidade dos estimadores, visto que ela indica o possível limite máximo de desempenho que um estimador poderia alcançar.

4.1 Filtro de partículas para a estimação de fase (FP)

Para a aplicação do filtro de partículas é necessário especificar a densidade a ser amostrada, $q_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k})$, e as densidades que influem no cálculo das ponderações, $p_{\mathbf{Y}_k = \mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i)$ e $p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}}(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)$.

Para a simplificação do cálculo das ponderações foi escolhida a densidade representativa da evolução do sinal, $p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}}(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)$, como sendo a densidade a ser amostrada, assim, a expressão das ponderações passa a ser dada por:

$$w(\mathbf{x}_k^i) = w_k^i = p_{\mathbf{Y}_k = \mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) \tilde{w}(\mathbf{x}_{k-1}^i) \quad (104)$$

Para a estimação de fase, esta densidade é expressa por (25) e é apresentada novamente:

$$p_{\Theta_k | \Theta_{k-1} = \theta_{k-1}^i}(\theta_k | \theta_{k-1}^i) = p_{W_k}(\theta_k - \theta_{k-1}^i) = N_{\theta_k}(\theta_{k-1}^i, \sigma_w^2) \quad (105)$$

Onde agora o valor da fase no instante anterior será dado pela partícula de fase no instante anterior.

Assim, a amostragem da densidade se reduz a soma de uma variação aleatória aos valores das partículas de fase no instante $k - 1$ para obter as partículas de fase θ_k^i . A variação aleatória corresponde a amostras de uma variável gaussiana de média nula e variância σ_w^2 .

Como a densidade de evolução não tem mais influência direta sobre a ponderação, resta somente apresentar a expressão da densidade $p_{\mathbf{Y}_k = \mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i)$. Observando o modelo, nota-se que \mathbf{Y}_k é composta por duas componentes, uma real e outra imaginária, e que, dado um valor específico de fase, θ_k^i , a densidade destas componentes é uma

gaussiana a duas variáveis. Também observa-se que, dada a fase, as componentes real e imaginária são independentes, fazendo que a expressão da densidade possa ser fatorada. Sua expressão é dada por:

$$p_{Y_k=y_k|\mathbf{X}_k}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) = p_{\text{Re}(\mathbf{Y}_k)=\text{Re}(y_k)|\theta_k^i}(\text{Re}(y_k) | \theta_k^i) p_{\text{Im}(\mathbf{Y}_k)=\text{Im}(y_k)|\theta_k^i}(\text{Im}(y_k) | \theta_k^i) \quad (106)$$

As densidades para a parte real e imaginária são dadas por:

$$p_{\text{Re}(\mathbf{Y}_k)=\text{Re}(y_k)|\theta_k^i}(\text{Re}(y_k) | \theta_k^i) = N(\text{Re}(A_k) \cos(\theta_k^i) - \text{Im}(A_k) \sin(\theta_k^i) + \mathbb{E}_{\text{Re}(B_k)}(\text{Re}(b_k)), \sigma_{\text{Re}(B_k)}^2) \quad (107)$$

$$p_{\text{Im}(\mathbf{Y}_k)=\text{Im}(y_k)|\theta_k^i}(\text{Re}(y_k) | \theta_k^i) = N(\text{Re}(A_k) \sin(\theta_k^i) + \text{Im}(A_k) \cos(\theta_k^i) + \mathbb{E}_{\text{Im}(B_k)}(\text{Im}(b_k)), \sigma_{\text{Im}(B_k)}^2) \quad (108)$$

Constata-se que para o cálculo das densidades expressas por (107) e (108), deve-se calcular a média e a variância das duas primeiras componentes do vetor aleatório que descreve o ruído colorido, $\text{Re}(B_k)$ e $\text{Im}(B_k)$. Como a média do ruído no canal é nula e supondo que a condição inicial das componentes do ruído colorido também seja nula, tem-se que a média de suas componentes é nula para todos os instantes k . Resta calcular as variâncias das duas primeiras componentes, $\text{Re}(\mathbf{Y}_k)$ e $\text{Im}(\mathbf{Y}_k)$. Suas variâncias correspondem aos dois primeiros elementos da diagonal da matriz de covariância das componentes do ruído. Como o ruído é colorido, a sua covariância deve ser calculada para todos os instantes k através da seguinte expressão:

$$\text{COV}(B'_k) = F_{B'} \text{COV}(B'_{k-1}) F_{B'}^T + Q_{B'} \quad (109)$$

onde B'_k é o vetor das componentes que representam o ruído colorido, $F_{B'}$ é a matriz que modela a evolução do ruído colorido, dada por:

$$F_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Pi & 0 & \Pi & 0 & \cdots & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi & 0 & \cdots & & 0 & \Pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ & & 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (110)$$

e $Q_{B'}$ é a matriz de covariância da entrada do modelo de ruído colorido, dada por:

$$Q_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad (111)$$

As ponderações podem ser escritas através das densidades gaussianas (107) e (108), mas pode-se desconsiderar as constantes multiplicativas, pois as ponderações são normalizadas após seu cálculo. A expressão para as ponderações é então dada por:

$$w(\mathbf{x}_k^i) = e^{-\frac{1}{2} \frac{\text{Re}(\varepsilon_k^i)^2 \sigma_{\text{Im}(B_k)}^2 + \text{Im}(\varepsilon_k^i)^2 \sigma_{\text{Re}(B_k)}^2}{\sigma_{\text{Re}(B_k)}^2 \sigma_{\text{Im}(B_k)}^2}} \tilde{w}(\mathbf{x}_{k-1}^i) \quad (112)$$

onde $\text{Re}(\varepsilon_k^i)$ e $\text{Im}(\varepsilon_k^i)$ são dados por (113) e (114).

$$\text{Re}(\varepsilon_k^i) = \text{Re}(y_k) - \text{Re}(A_k) \cos(\theta_k^i) + \text{Im}(A_k) \sin(\theta_k^i) \quad (113)$$

$$\text{Im}(\varepsilon_k^i) = \text{Im}(y_k) - \text{Re}(A_k) \sin(\theta_k^i) - \text{Im}(A_k) \cos(\theta_k^i) \quad (114)$$

O algoritmo do filtro de partículas para a estimação de fase é dado a seguir.

Algoritmo do filtro de partículas para a estimação de fase

1. *Inicialização* $k = 0$

Para $i = 1, \dots, N$, amostrar:

$$\Theta_0 \sim p_{\Theta_0}(\theta_0) = N(\hat{\theta}_0, \sigma_{\theta_0}^2) \quad (115)$$

2. *Amostragem* k

Para $i = 1, \dots, N$, amostrar:

$$\Theta_k \sim q_{\Theta_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\theta_k | \theta_{k-1}^i, \mathbf{Y}_{1:k}) = N_{\theta_k}(\theta_{k-1}^i, \sigma_w^2)$$

3. *Atualização da covariância*

Atualiza-se a covariância através de da seguinte expressão:

$$COV(B'_k) = F_{B'} COV(B'_{k-1}) F_{B'}^T + Q_{B'}$$

4. *Ponderação*

Para $i = 1, \dots, N$, calcular a ponderação usando \mathbf{y}_k , através das expressões:

$$w_k^i = e^{-\frac{1}{2} \frac{\text{Re}(\varepsilon_k^i)^2 \sigma_{\text{Im}(B_k)}^2 + \text{Im}(\varepsilon_k^i)^2 \sigma_{\text{Re}(B_k)}^2}{\sigma_{\text{Re}(B_k)}^2 \sigma_{\text{Im}(B_k)}^2}} \tilde{w}_k^i$$

$$\text{Re}(\varepsilon_k^i) = \text{Re}(y_k) - \text{Re}(A_k) \cos(\theta_k^i) + \text{Im}(A_k) \sin(\theta_k^i) \quad (116)$$

$$\text{Im}(\varepsilon_k^i) = \text{Im}(y_k) - \text{Re}(A_k) \sin(\theta_k^i) - \text{Im}(A_k) \cos(\theta_k^i) \quad (117)$$

5. *Normalização*

Para $i = 1, \dots, N$, calcular a ponderação normalizada.

$$\tilde{w}_k^i = \frac{w_k^i}{\sum_{j=1}^N w_k^j}$$

6. *Estimação*

Calcular a estimativa.

$$\hat{\theta}_k = \sum_{i=1}^N \theta_k^i \tilde{w}_k^i$$

7. *Cálculo do número de partículas eficazes*

Calcular N_{ef} através de:

$$N_{ef} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\tilde{w}_k^i)^2}$$

8. *Reamostragem*

Se $N_{ef} < N_{min}$, reamostrar.

9. Fazer $k \leftarrow k + 1$ e voltar a 2.

4.2 Filtro de partículas Rao-Blackwellizado (FPRB)

Uma melhoria pode ser feita no FP ao se estimar conjuntamente as componentes do ruído colorido.

Esta melhoria é baseada numa técnica estatística conhecida como Rao-Blackwellização.

Esta técnica consiste em melhorar um estimador não polarizado $\hat{\mathbf{X}}$ expresso por:

$$\hat{\mathbf{X}} = \delta(\mathbf{X}) \quad (118)$$

Através do condicionamento por uma estatística suficiente $T(\mathbf{X})$ pode-se obter um estimador, chamado de estimador Rao-Blackwellizado, expresso por:

$$\hat{\mathbf{X}}_{RB} = \mathbb{E}_{\mathbf{X}}(\delta(\mathbf{X}) | T(\mathbf{X})) \quad (119)$$

Pelo teorema de Rao-Blackwell sabe-se que é válida a seguinte expressão:

$$Var(\hat{\mathbf{X}}_{RB}) \leq Var(\hat{\mathbf{X}}) \quad (120)$$

Logo, usar esperança do estimador não polarizado dada a estatística suficiente é melhor que usar simplesmente o estimador não polarizado.

O uso desta técnica para amostragem ponderada foi primeiramente descrito em (CASSELLA; ROBERT, 1996), onde suas vantagens são descritas. Em (DOUCET; GODSILL; ANDRIEU, 2000), esta técnica é utilizada sobre MMO que possuem componentes lineares gaussianas. Nestes modelos existe uma parte do vetor aleatório a ser estimado, \mathbf{X}_k , que sofre operações não lineares e é não gaussiana e outra parte que sofre somente operações lineares e é gaussiana. Assim, a DAP pode ser fatorada em duas densidades condicionais, uma para a parte não linear e não gaussiana, \mathbf{X}_k^{NL} , e outra para a parte linear gaussiana, \mathbf{X}_k^L . A DAP é então expressa por:

$$p_{\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = p_{\mathbf{X}_k^L | \mathbf{X}_k^{NL}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k^L | \mathbf{x}_k^{NL}, \mathbf{y}_{1:k}) p_{\mathbf{X}_k^{NL} | \mathbf{Y}_{1:k}}(\mathbf{x}_k^{NL} | \mathbf{y}_{1:k}) \quad (121)$$

Assim, ao invés de amostrar diretamente todas as componentes do sinal a ser estimado, é amostrada somente a parte que possui relações não lineares e não gaussianas, assim aproximando a densidade da parte não linear. Conhecendo as variáveis da parte não linear, pode-se obter a densidade da parte linear de forma analítica através da média e da covariância dadas pelo filtro de Kalman.

Escolhendo a densidade $p_{\mathbf{X}_k^{NL} | \mathbf{x}_{k-1}^{NL(i)}}(\mathbf{x}_k^{NL} | \mathbf{x}_{k-1}^{NL(i)})$ como densidade a ser amostrada faz com que as ponderações sejam dadas agora por:

$$w(\mathbf{x}_k^i) = p_{\mathbf{Y}_k = \mathbf{y}_k | \mathbf{X}_{0:k}^{NL}, \mathbf{Y}_{1:k-1}}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{0:k}^{NL(i)}, \mathbf{y}_{1:k-1}) \tilde{w}(\mathbf{x}_{k-1}^i) \quad (122)$$

Para a estimação de fase, o modelo pode ser particionado nas seguintes expressões:

$$\mathbf{X}_k^{NL} = \Theta_k = \Theta_{k-1} + w_k^\Theta \quad (123)$$

$$\mathbf{X}_k^L = \mathbf{B}'_k = F_B \mathbf{B}'_{k-1} + w_k^{B'} \quad (124)$$

Onde a partição não linear corresponde a fase e a partição linear corresponde ao ruído colorido, com F_B dado por (110) e a covariância de $w_k^{B'}$ dada por (111).

A observação é então expressa por:

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(Y_k) \\ \text{Im}(Y_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}(A_k) \cos(\Theta_k) - \text{Im}(A_k) \sin(\Theta_k) \\ \text{Re}(A_k) \sin(\Theta_k) + \text{Im}(A_k) \cos(\Theta_k) \end{bmatrix} + H_{B'} \mathbf{B}'_k \quad (125)$$

A matriz $H_{B'}$ representa a influência das componentes do ruído na observação. Ela é expressa por:

$$H_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (126)$$

Para a estimação de fase a densidade calculada na ponderação é a densidade de \mathbf{Y}_k dados θ_k^i e $\mathbf{y}_{1:k-1}$. Para este condicionamento somente a parte referente ao ruído colorido continua aleatória. Pode-se calcular a densidade do ruído de forma analítica, sendo que ela é gaussiana com a média e covariância dadas pela predição de Kalman do ruído.

Portanto a estimação de fase agora incluirá uma estimação do ruído, logo para cada partícula de fase será incluída uma parte referente a predição e estimação do filtro de Kalman para o ruído.

A Rao-Blackwellização para a estimação de fase consiste em condicionar a estimação do ruído colorido as partículas de fase, e assim aproximar a parte gaussiana por uma mistura de densidades gaussianas que tem interação com as partículas de fase através das ponderações.

Para cada partícula deverá ser calculada uma iteração do filtro de Kalman. Como é mostrado em (DOUCET et al., 2000), este aumento computacional tem como resultado uma variância de estimação menor que a variância obtida para o FP comum.

O algoritmo do FPRB é dado abaixo.

Algoritmo do filtro de partículas Rao-Blackwellizado para a estimação de fase

1. *Inicialização* $k = 0$

Para $i = 1, \dots, N$, amostrar (127), para obter as partículas com uma partição correspondente a fase e outra correspondente a predição do filtro de Kalman do ruído colorido.

$$\begin{bmatrix} \Theta_0 \\ \mathbf{B}'_{1|0} \end{bmatrix} \sim p_{\Theta_0, \mathbf{B}'_{1|0}}(\theta_0, \mathbf{b}'_{1|0}) \quad (127)$$

Inicializar a matriz de covariância do filtro de Kalman para o ruído colorido, $P_{0|0}$.

2. *Cálculo de* $P_{k|k-1}$, K_k e $P_{k|k}$, k

Calcular a covariância do erro de predição, o ganho e a covariância do erro de estimação através das expressões (128), (129) e (130).

$$P_{k|k-1} = F_{B'} P_{k-1|k-1} F_{B'}^T + Q_{B'} \quad (128)$$

$$K_k = P_{k-1|k-1} H_{B'} (H_{B'} P_{k-1|k-1} H_{B'}^T)^{-1} \quad (129)$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_{B'}) P_{k|k-1} \quad (130)$$

Continua ...

Continuação do algoritmo

3. *Ponderação*

Para $i = 1, \dots, N$, calcular a ponderação usando \mathbf{y}_k , através da expressão:

$$w_k^i = e^{-\frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} \text{Re}(\varepsilon_k^i) \\ \text{Im}(\varepsilon_k^i) \end{bmatrix} - G\mathbf{b}_{k|k-1}^i \right\}^T \hat{P}_{k|k-1}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \text{Re}(\varepsilon_k^i) \\ \text{Im}(\varepsilon_k^i) \end{bmatrix} - G\mathbf{b}_{k|k-1}^i \right\}} \tilde{w}_k^i \quad (131)$$

Onde $\text{Re}(\varepsilon_k^i)$ e $\text{Im}(\varepsilon_k^i)$ foram expressos em (113) e (114), $\mathbf{b}_{k|k-1}^i$ são as componentes das partículas correspondentes a predição do ruído e $\hat{P}_{k|k-1}^{-1}$ é o bloco formado pelos elementos $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ da inversa da matriz de covariância do erro de predição do ruído.

4. *Normalização*

Para $i = 1, \dots, N$, calcular a ponderação normalizada.

$$\tilde{w}_k^i = \frac{w_k^i}{\sum_{j=1}^N w_k^j}$$

5. *Estimação*

Calcular a estimativa.

$$\hat{\theta}_k = \sum_{i=1}^N \theta_k^i \tilde{w}_k^i$$

6. *Cálculo do número de partículas eficazes*

Calcular N_{ef} através de:

$$N_{ef} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\tilde{w}_k^i)^2}$$

7. *Reamostragem*

Se $N_{ef} < N_{min}$, reamostrar.

8. *Amostragem k*

Para $i = 1, \dots, N$, amostrar:

$$\Theta_k \sim q_{\Theta_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}}(\theta_k | \theta_{k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k}) = N_{\theta_k}(\theta_{k-1}^i, \sigma_w^2)$$

9. *Cálculo da estimação e predição do ruído k*

Para $i = 1, \dots, N$, calcular a estimação e predição do ruído através de:

$$\mathbf{b}_{k|k}^i = \mathbf{b}_{k|k-1}^i + K_k \left\{ \begin{bmatrix} \text{Re}(\varepsilon_k^i) \\ \text{Im}(\varepsilon_k^i) \end{bmatrix} - G\mathbf{b}_{k|k-1}^i \right\} \quad (132)$$

$$\mathbf{b}_{k+1|k}^i = F_B \mathbf{b}_{k|k}^i \quad (133)$$

10. Fazer $k \leftarrow k + 1$ e voltar a 2.

No algoritmo acima, a ordem de realização da amostragem e ponderação foi trocada em relação ao FP, para coincidir com a ordem utilizada nas referências de filtros de partículas Rao-Blackwellizados pesquisadas.

4.3 Filtro de Kalman estendido (FKE)

A aplicação do FKE é direta pois no capítulo referente a modelagem já foi construída a representação de estados para o modelo do sinal. Assim, basta explicitar as funções $f(\mathbf{x}_{k-1}, k-1)$, $\nabla f_{\mathbf{x}_{k-1}}$, $h(\mathbf{x}_k, k)$ e $\nabla h_{\mathbf{x}_k}$, e as matrizes de covariância Q_k e R_k .

O vetor aleatório a ser estimado pelo FKE concatena a fase e as componentes do ruído, como é mostrado na expressão:

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} \Theta_k \\ \mathbf{B}'_k \end{bmatrix} \quad (134)$$

Como pode-se observar na expressão (28), o sinal a ser estimado possui evolução linear, logo a função $f(\mathbf{x}_{k-1}, k-1)$ pode ser expressa por:

$$f(\mathbf{x}_{k-1}, k-1) = F_k \mathbf{x}_{k-1} \quad (135)$$

onde F_k é expressa por:

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi & 0 & \Pi & 0 & \cdots & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi & 0 & \cdots & & 0 & \Pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ & & & 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (136)$$

Devido a linearidade, a jacobiana da função $f(\mathbf{x}_{k-1}, k-1)$ é F_k e não depende dos estados, como é expresso por:

$$\nabla f_{\mathbf{x}_{k-1}} = F_k \quad (137)$$

A função $h(\mathbf{x}_k, k)$ é não linear em função da fase e dependente da sequência de coeficientes A_k . Ela pode ser expressa por:

$$h(\mathbf{x}_k, k) = h(\theta_k, A_k) = \begin{bmatrix} \text{Re}(A_k) \cos(\theta_k) - \text{Im}(A_k) \sin(\theta_k) \\ \text{Re}(A_k) \sin(\theta_k) + \text{Im}(A_k) \cos(\theta_k) \end{bmatrix} + G \mathbf{b}_k \quad (138)$$

A jacobiana $\nabla h_{\mathbf{x}_k}$ depende de forma não linear da fase e ela é expressa por:

$$\nabla h_{\mathbf{x}_k} = H(\theta_k, A_k) = \begin{bmatrix} -\text{Re}(A_k) \sin(\theta_k) - \text{Im}(A_k) \cos(\theta_k) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \text{Re}(A_k) \cos(\theta_k) - \text{Im}(A_k) \sin(\theta_k) & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (139)$$

A matriz de covariância Q_k é constante e expressa por:

$$Q_k = Q = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & & & 0 \\ & & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (140)$$

A matriz de covariância R_k não existe para este problema pois o ruído colorido é estimado junto com a fase.

O algoritmo do FKE é dado abaixo.

Algoritmo do Filtro de Kalman estendido para a estimação de fase

1. *Inicialização* $k = 0$

Inicializar $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ e $P_{0|0}$

2. *Predição* k

Calcular a estimativa da predição a um passo através de:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (141)$$

3. *Covariância do erro de predição* k

Calcular a covariância do erro da estimativa de predição a um passo através de:

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q \quad (142)$$

4. *Ganho de Kalman* k

Calcular o ganho de Kalman através de:

$$K_k = P_{k|k-1} H \left(\hat{\theta}_{k|k-1}, A_k \right)^T \left[H \left(\hat{\theta}_{k|k-1}, A_k \right) P_{k|k-1} H \left(\hat{\theta}_{k|k-1}, A_k \right)^T \right]^{-1} \quad (143)$$

5. *Estimação* k

Calcular a estimativa através de:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k \left\{ \begin{bmatrix} \text{Re}(y_k) \\ \text{Im}(y_k) \end{bmatrix} - h \left(\hat{\theta}_{k|k-1}, A_k \right) \right\} \quad (144)$$

6. *Covariância do erro de estimação* k

Calcular a covariância do erro de estimação através de:

$$P_{k|k} = \left[I - K_k H \left(\hat{\theta}_{k|k-1}, A_k \right) \right] P_{k|k-1} \quad (145)$$

7. Fazer $k \leftarrow k + 1$ e voltar a 2.

4.4 Cota inferior de Cramér-Rao Bayesiana

Para a análise do desempenho dos algoritmos de estimação de fase deve-se ter algum valor que indique a proximidade do desempenho do algoritmo em relação ao melhor desempenho possível.

A cota inferior de erro quadrático médio de Cramér-Rao Bayesiana (CCRB) é uma cota inferior de desempenho de estimadores Bayesianos pois ela garante a seguinte desigualdade:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Y}_{1:k}, \mathbf{X}_{1:k}} \left\{ [\hat{\mathbf{x}}_{1:k} - \mathbf{x}_{1:k}] [\hat{\mathbf{x}}_{1:k} - \mathbf{x}_{1:k}]^T \right\} \geq CCRB \quad (146)$$

Sendo assim, um estimador que esteja próximo do ótimo estará próximo da cota, mas não há garantias de que se um estimador for ótimo, ele terá o mesmo valor da cota. Somente no caso em que o estimador atinge o valor da cota pode-se dizer que ele é ótimo.

O desenvolvimento que segue é baseado em (VILA VALLS; BROSSIER; ROS, 2008) onde os detalhes das demonstrações são apresentados.

A CCRB pode ser obtida através da matriz Bayesiana de informação, MBI:

$$CCRB = MBI_{k,k}^{-1} \quad (147)$$

Onde a CCRB para k observações é dada pelo elemento (k, k) da inversa da MBI.

Os elementos da MBI são dados por:

$$MBI_{i,j} = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}_{1:k}, \mathbf{X}_{1:k}} \left\{ -\frac{\partial^2 \ln p_{\mathbf{Y}_{1:k}, \mathbf{X}_{1:k}}(\mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{x}_{1:k})}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} \right\} \quad (148)$$

A densidade que é utilizada para o cálculo da MBI pode ser fatorada:

$$p_{\mathbf{Y}_{1:k}, \mathbf{X}_{1:k}}(\mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{x}_{1:k}) = p_{\mathbf{Y}_{1:k} | \mathbf{X}_{1:k}}(\mathbf{y}_{1:k} | \mathbf{x}_{1:k}) p_{\mathbf{X}_{1:k}}(\mathbf{x}_{1:k}) \quad (149)$$

De forma que a MBI torna-se a soma de duas matrizes, e é então expressa por:

$$MBI = B^D + B^P \quad (150)$$

A matriz B^D corresponde a informação trazida pela observação e a matriz B^P corresponde a informação trazida pela informação *a priori* usada na estimação. As expressões de seus elementos em função das densidades de probabilidade são dadas por:

$$B_{i,j}^D = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}_{1:k}, \mathbf{X}_{1:k}} \left\{ -\frac{\partial^2 \ln p_{\mathbf{Y}_{1:k} | \mathbf{X}_{1:k}}(\mathbf{y}_{1:k} | \mathbf{x}_{1:k})}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} \right\} \quad (151)$$

$$B_{i,j}^P = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}_{1:k}, \mathbf{X}_{1:k}} \left\{ -\frac{\partial^2 \ln p_{\mathbf{X}_{1:k}}(\mathbf{x}_{1:k})}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} \right\} \quad (152)$$

Para a estimação de fase, $\mathbf{X}_{1:k}$ é a fase $\Theta_{1:k}$ e $\mathbf{Y}_{1:k}$ são as observações complexas corrompidas pelo ruído colorido.

Pode-se calcular B^P através de (152) usando o modelo browniano da fase. Considerando que não existe informação *a priori* para a estimação da fase no primeiro instante. Assim, obtém-se:

$$B^P = \frac{1}{\sigma_w^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (153)$$

A matriz B^D é dada elemento por elemento pela expressão:

$$B_{k,l}^D = 2\text{Re} \left(A_l^* A_k \Gamma_{k,l-1} e^{\Psi_{k,l}} \right) \quad (154)$$

onde Γ é a covariância do ruído colorido complexo $B_{1:k}$ e Ψ é dada por (155).

$$\Psi_{k,l} = -\frac{1}{2} \left(\Sigma_{k,k}^{-1} + \Sigma_{l,l}^{-1} - 2\Sigma_{k,l}^{-1} \right) \quad (155)$$

onde Σ é a matriz de covariância da evolução da fase.

Assim, a partir do cálculo destas matrizes pode-se obter a MBI e o elemento (k, k) de sua inversa representa a CCRB até o instante k .

Para a análise do desempenho a CCRB utilizada será sempre aquela correspondente ao último instante de simulação N_s , sendo assim, ela será usada somente para a análise do desempenho assintótico dos algoritmos de estimação de fase.

Para a comparação do desempenho assintótico, serão realizadas várias simulações com sequências de símbolos a_k diferentes, logo, a CCRB para análise do desempenho assintótico será o valor mínimo das CCRB calculadas.

4.5 Conclusão do capítulo

Foram apresentados três filtros como solução para o problema de estimação de fase considerado neste projeto. Os dois primeiros são filtros de partículas que aproximam a DAP de forma discreta, sendo que um dos filtros resulta da aplicação direta do filtro de partículas comum (FP), e o outro aproxima a parte gaussiana através de filtros de Kalman, trazendo assim uma possível melhoria de desempenho. O último filtro considerado é o filtro de Kalman estendido que aproxima a DAP através de linearizações sucessivas do modelo em torno da estimação.

Para a posterior análise de desempenho foi estudada a cota de Cramér-Rao Bayesiana para o problema. Esta indica o possível limite máximo de desempenho dos estimadores de fase, mostrando assim a proximidade dos filtros ao ótimo desempenho.

Constata-se que o FP e o FPRB realizam um número muito maior de operações que o FKE, sendo assim, para que seja justificável o seu uso é necessário que o seu desempenho seja melhor.

No próximo capítulo são mostrados os resultados da simulação dos filtros e é feita a comparação de desempenho.

5 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados da simulação dos filtros e usando como base estes resultados é feita a análise de desempenho.

Primeiramente são descritas as condições em que foram feitas as simulações, depois são apresentadas as estimativas do erro quadrático médio em função do tempo para um caso específico de simulação e são analisadas as vantagens e desvantagens dos algoritmos. É feita também a simulação para diversos números de partículas dos filtros de partículas e para diversos níveis de ruído. Ao final, é mostrada a simulação para uma fase não browniana com o objetivo de explicitar as vantagens dos filtros de partículas.

5.1 Condições de simulação

A simulação dos algoritmos e do modelo do sistema foram feitas em **MATLAB**.

O período dos símbolos T e a constante de conversão T_c foram mantidos constantes com valor unitário, de forma que a relação de potência entre o sinal observado e o ruído fosse controlada diretamente pelo nível da densidade espectral de potência do ruído no canal, N_0 . O atraso τ foi considerado nulo.

Foram escolhidos dois símbolos possíveis para a mensagem, 1 ou -1, formando uma modulação BPSK. Os símbolos foram gerados de forma aleatória sendo que os dois possuíam a mesma probabilidade de ocorrência.

A sobreamostragem n escolhida foi de 4 amostras por símbolo, esta sobreamostragem é aconselhada em (VILA VALLS; BROSSIER; ROS, 2008) por ser a sobreamostragem mínima que garante que os erros na estimação de fase sejam pequenos.

A forma de onda escolhida foi a BOC e a variância do ruído de fase σ_w^2 foi escolhida como sendo $0,001rad^2$. Esta variância corresponde a uma fase de variação média, se encontrando entre os valores de variância para fase de variação rápida e fase de variação lenta dados em (VILA VALLS; BROSSIER; ROS, 2009).

O nível de ruído utilizado nas simulações onde ele é constante foi escolhido como sendo $N_0 = 0,1$. Este valor faz com que a variância do ruído colorido complexo tenha um valor assintótico de $\sigma_b^2 = 0,1$, podendo ter realizações máximas prováveis de $3\sigma_b = 0,94$. Para uma amplitude dos símbolos unitária isto poderia acarretar erros de fase de até $54,35^\circ$, um valor grande se comparado as variações de fase de $1,81^\circ$ que os estimadores terão que seguir.

Os resultados são dados em função de uma estimativa do erro quadrático médio. Para tanto são simuladas sequências de 100 símbolos, gerando 400 amostras no tempo das observações de saída e da fase simulada. Estas são fornecidas aos algoritmos de estimação que geram sequências de 400 estimativas de fase. São geradas 100 realizações destas sequências para que possa ser feita uma estimativa do erro quadrático médio para cada

instante. Assim para cada instante k , a estimativa do erro quadrático médio será dada por:

$$E\hat{Q}M_k = \frac{1}{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} \left(\theta_k^j - \hat{\theta}_k^j \right)^2 \quad (156)$$

Onde θ_k^j e $\hat{\theta}_k^j$ são os valores simulados e estimados da fase para a amostra k da realização j e N_r é o número de realizações da simulação.

As características gerais das simulações são apresentadas de forma compacta na Tabela 1.

Tabela 1: Características gerais das simulações

Parâmetro	Símbolo	Especificidade
Período de amostragem	T	1
Constante de conversão	T_c	1
Atraso	τ	0
Símbolos da mensagem	a_m	$\{1, -1\}$
Sobreamostragem	n	4
Forma de onda	$\Pi(t)$	BOC
Variância do ruído fase	σ_w^2	0.001 rad^2
Nível de ruído	N_0	0.1
Número de símbolos por realização	N_{sim}	100
Número de amostras por realização	N_s	400
Número de realizações	N_r	100
Estimativa do erro quadrático médio	$E\hat{Q}M$	Dado por (156)

5.2 Comparação de desempenho em convergência e assintótico

Foram realizadas simulações para a obtenção de estimativas de erro quadrático médio para os filtros descritos anteriormente. O número de partículas usadas nos filtros de partículas foi 50 e o gatilho de reamostragem foi escolhido como sendo 6 partículas efetivas.

Os resultados da simulação são dados na Figura 17. Onde FPRB, FKE e FP indicam respectivamente, as estimativas de erro quadrático médio obtidos para os filtros.

Para esta simulação, observa-se que o FKE tem o pior resultado em tempo de convergência mas o melhor desempenho após convergência, ou seja, ele possui a menor estimativa do erro quadrático médio assintótico.

Comparando os desempenhos simulados dos dois filtros de partículas, constata-se que o FP é o mais rápido em convergência, pois seu $E\hat{Q}M_k$ se estabiliza logo nos primeiros instantes. Depois da convergência, o FP possui erro assintótico maior que o do FPRB.

5.3 Comparação do desempenho assintótico - Número de partículas

Foi feita também a comparação de desempenho assintótico dos filtros variando o número de partículas. A estimativa $E\hat{Q}M_k$ foi calculada para 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 100, 200 e 300 partículas. Depois da estabilização de $E\hat{Q}M_k$ foi calculada a sua média temporal para a obtenção de uma estimativa do erro quadrático médio assintótico com menor variância.

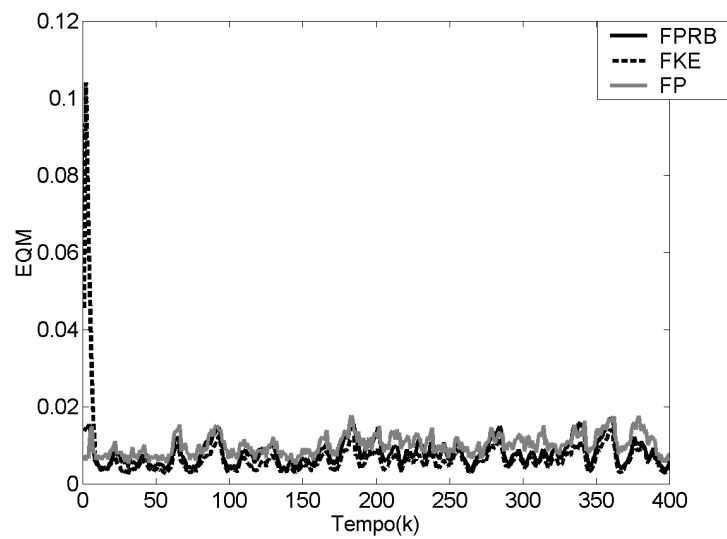


Figura 17: Erro quadrático médio simulado.

Os resultados da simulação são dados na Figura 18.

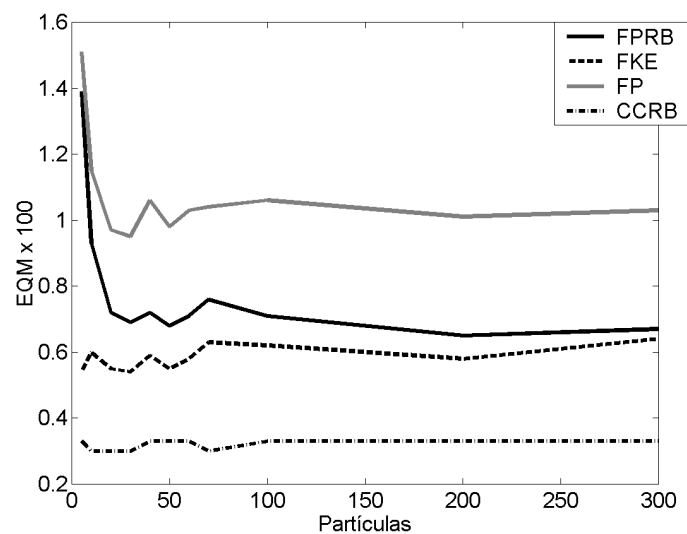


Figura 18: $E\hat{Q}M$ assintótico em função do número de partículas.

Para fins de comparação são também mostradas na Figura 18 a estimativa do erro assintótico do FKE e da CCRB.

Pode-se observar que o desempenho de todos os filtros se encontra acima da cota, como já era esperado, e que o FP teve os piores resultados.

A partir de 15 partículas foi obtido para os filtros de partículas um desempenho assintótico próximo ao desempenho do FKE. O desempenho assintótico simulado do FPRB se aproxima do desempenho do FKE a medida que o número de partículas aumenta, tal resultado parece não ocorrer para o FP.

5.4 Comparação de desempenho assintótico - Nível de ruído

Uma sequência de simulações foi feita para obter o desempenho assintótico dos filtros mudando o nível de ruído N_0 . Como foi dito anteriormente, este parâmetro serve para controlar diretamente a variância do ruído colorido.

Foi variado o nível de ruído de forma que a quantidade $RSR' = 10 \log \left(\frac{1}{N_0} \right)$, equivalente a uma relação sinal ruído, aumente linearmente partindo de 0 até 20 em intervalos de 5.

A mudança de nível de ruído foi incorporada aos filtros, de modo que não foi analisada aqui a robustez a erros de modelagem.

Na Figura 19 são mostrados os resultados de simulação.

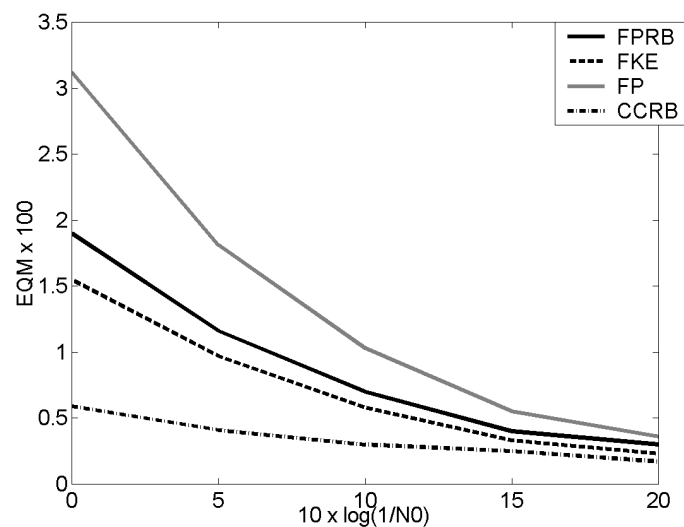


Figura 19: $E\hat{Q}M$ assintótico em função do nível de ruído.

Constata-se que a CCRB assintótica diminui lentamente de valor a medida que RSR' aumenta, mostrando que o problema de estimação pode ser resolvido com menor erro assintótico a medida que a relação sinal ruído aumenta.

Observa-se também que todos os estimadores se aproximam da CCRB a medida que RSR' aumenta, e que a diferença de desempenho assintótico entre os estimadores também diminuiu.

Mesmo com pouca diferença em alguns casos, nota-se que o FKE é melhor em desempenho assintótico para todas as simulações feitas.

5.5 Teste com fase não browniana

Com o intuito de mostrar em qual situação os filtros de partículas podem ser melhores que o filtro de Kalman estendido, foi acrescentada na variação de fase uma pequena variação poissoniana W_k^p , de distribuição de probabilidade expressa por:

$$W_k^p \sim \frac{0.2 w_k^p e^{-0.2}}{w_k^p!} \quad (157)$$

onde $w_k^p \in \mathbb{N}$.

Este ruído poissoniano produz pequenas variações bruscas de fase.

Foi incorporado aos filtros de partículas a mudança no modelo da fase, mas o filtro de Kalman estendido se manteve o mesmo, devido a impossibilidade de incorporar a ele a informação de que o modelo é não gaussiano.

A variância da parte gaussiana do ruído de fase, σ_w^2 , foi reduzida para $0,0001 \text{ rad}^2$ para que a variação causada pela fase poissoniana fosse mais visível. O número de partículas dos filtros de partículas foi aumentado para 200, para que a multimodalidade da fase possa ser representada pela aproximação discreta.

O resultado de uma realização da estimação é mostrada na Figura 20.

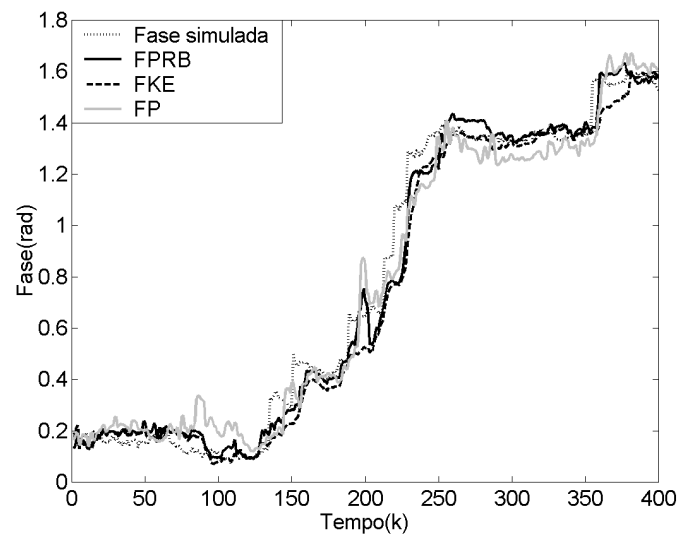


Figura 20: Simulação com fase não browniana.

Para a realização dada na Figura 20, nota-se que a fase estimada pelos filtros de partículas acompanha melhor as variações bruscas da fase simulada. Observa-se entre os instantes 350 e 400 que o FKE tende lentamente a acompanhar a variação da fase, enquanto os filtros de partículas conseguem acompanhar a fase alguns instantes após a ocorrência da variação brusca.

Neste caso, a possibilidade de incorporação de um modelo não gaussiano fez com que os filtros de partículas pudessem simular as mudanças bruscas, enquanto o FKE converge lentamente devido as suas aproximações gaussianas.

5.6 Conclusão

Neste capítulo foram mostrados os resultados das simulações dos filtros para estimação de fase.

Nas simulações realizadas o FKE obteve os melhores resultados em relação a desempenho assintótico, mas o pior em relação ao tempo de convergência. Isto se deve ao fato de que a linearização do modelo feita pela filtro de Kalman é incorreta nos instantes iniciais da estimação, após convergir para um valor próximo ao verdadeiro a otimalidade é quase atendida, pois para variações suaves da fase as funções seno e cosseno da observação são quase lineares.

Os filtros de partículas mostraram melhor desempenho em convergência pois eles aproximam a DAP em todos os instantes de forma quase ótima. Assim, para os filtros

de partículas não existe a restrição de estar próximo ao ótimo em relação ao tempo de convergência ou em relação a desempenho assintótico.

O desempenho assintótico melhor para um filtro sub-ótimo como o FKE ocorreu nestas simulações pois os filtros de partículas só tendem ao desempenho ótimo quando o número de partículas é muito grande. Isto indica também que possivelmente o filtro de Kalman estendido está próximo do desempenho assintótico ótimo, pois mesmo aumentando o número de partículas o desempenho assintótico dos filtros de partículas foi pior.

Dentre os filtro de partículas, aquele que mostrou melhor desempenho foi o FPRB. O fato de estimar o ruído através do filtro de Kalman parece ter acarretado uma melhor assimilação das flutuações do ruído a partir da informação trazida pela observação.

O teste com fase não browniana mostrou o problema encontrado pelo FKE em representar densidades não gaussianas. Neste caso, o modelo também não pode ser linearizado em torno da estimativa, pois mesmo que as funções do modelo sejam facilmente linearizadas a não gaussianidade na densidade de evolução da fase acarretará a não gaussianidade da DAP. Assim, se fosse necessário acrescentar a variação poissoniana ao modelo para que a filtragem fosse robusta a pequenas variações bruscas não existentes nos modelos de origem, seria possível e simples de fazer com os filtros de partículas e provavelmente impossível de fazer com o FKE.

A comparação com a CCRB mostra que o erro quadrático médio dos filtros deve ter a mesma ordem de grandeza que o erro quadrático médio do filtro ótimo. Fazendo uma comparação para nível de ruído $N_0 = 0, 1$, tem-se que a CCRB indica um desvio padrão de erro na estimação de fase não menor que $\sigma_{min} = \sqrt{0,0033} = 0,057rad$ ou $3,29^\circ$ enquanto para o FKE a simulação resultou em uma estimativa de desvio padrão de $4,36^\circ$ e para os filtros de partículas com 50 partículas de $4,72^\circ$ para o FPRB e de $5,67^\circ$ para o FP. Isto mostra que nestas simulações os filtros conseguiram ter desvios padrões relativamente próximos aos da CCRB, considerando que o ruído colorido causa uma perturbação de desvio padrão de $17,55^\circ$ na fase das observações.

6 CONCLUSÕES FINAIS

Neste projeto foram apresentadas soluções ao problema de estimação de fase sobreamostrada e com filtro casado na recepção. Estas soluções foram baseadas em técnicas conhecidas de estimação: o filtro de Kalman estendido e o filtro de partículas.

A técnica que mostrou-se mais eficaz em desempenho assintótico foi o filtro de Kalman estendido enquanto os filtros de partículas mostraram melhores resultados em tempo de convergência. Mesmo com um tempo de convergência maior, o filtro de Kalman estendido parece mais apto a aplicações em tempo real pois ele pode ser implementado com um número menor de operações que os filtros de partículas.

A principal contribuição deste projeto foi a comparação de desempenho em estimação de fase sobreamostrada de uma técnica sub-ótima, o filtro de Kalman estendido, que aproxima bem a solução ótima após convergência, com uma técnica que aproxima a solução ótima para todos os instantes, o filtro de partículas. Para a estimação de fase, esta comparação já havia sido feita, mas sem considerar, no modelo do sistema, a sobreamostragem das observações e o filtro casado na recepção.

Em trabalhos futuros poderiam ser estudadas as soluções para os outros problemas de estimação, a suavização e a predição, assim mostrando quais são as vantagens e desvantagens de possuir quantidades diferentes de informação que aquelas usadas na filtragem.

Outra possibilidade seria tornar o modelo mais complexo, de forma a se aproximar mais do modelo usado em sistemas de posicionamento.

REFERÊNCIAS

- AMBLARD, P.-O.; BROSSIER, J.-M.; MOISAN, E. Phase tracking: what do we gain from optimality? particle filtering versus phase-locked loops. **Signal Processing**, Amsterdam, v.83, n.1, p.151–167, 2003.
- ATHALYE, A.; BOLIC, M.; HONG, S.; DJURIC, P. M. Generic Hardware Architectures for Sampling and Resampling in Particle Filters. **EURASIP Journal on Applied Signal Processing**, New York, v.2005, n.17, p.2888–2902, 2005.
- BELLESCIZE, H. de. La réception synchrone. **L'Onde Electrique**, Paris, v.11, p.230–240, Junho 1932.
- BUCY, R. S.; CHENG, S. Y.; MALLINCKRODT, A. J. **A design study for an optimal non-linear receiver/demodulator**. Greenbelt, MD, USA: NASA Goddard Space Flight Center, 1970.
- CASELLA, G.; ROBERT, C. P. Rao-Blackwellization of sampling schemes. **Biometrika**, London, v.83, n.1, p.81–94, 1996.
- CHEN, Z. **Bayesian Filtering: from kalman filters to particle filters, and beyond**. Ontario: McMaster University, 2003.
- DOUC, R.; CAPPE, O. Comparison of resampling schemes for particle filtering. In: **IMAGE AND SIGNAL PROCESSING AND ANALYSIS, 2005. ISPA 2005. PROCEEDINGS OF THE 4TH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON, 2005, Zagreb. Anais...** IEEE Signal Processing Society, 2005. p.64–69.
- DOUCET, A.; DE FREITAS, N.; GORDON, N. **Sequential Monte Carlo Methods in Practice**. New York: Springer-Verlag, 2001.
- DOUCET, A.; FREITAS, N. de; MURPHY, K. P.; RUSSEL, S. J. Rao-Blackwellised Particle Filtering for Dynamic Bayesian Networks. In: **UAI '00: PROCEEDINGS OF THE 16TH CONFERENCE ON UNCERTAINTY IN ARTIFICIAL INTELLIGENCE, 2000, San Francisco, CA, USA. Anais...** Morgan Kauffman Publishers Inc., 2000. p.176–183.
- DOUCET, A.; GODSILL, S.; ANDRIEU, C. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. **Statistics and Computing**, Hingham, MA, USA, v.10, n.3, p.197–208, 2000.
- JAZWINSKI, A. H. **Stochastic Process and Filtering Theory**. New York: Academic Press, 1970.

KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. **Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering**, New York, v.82, n.Series D, p.35–45, 1960.

KONG, A.; LIU, J. S.; WONG, W. H. Sequential Imputations and Bayesian Missing Data Problems. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, VA, USA, v.89, n.425, p.278–288, Março 1994.

LE GLAND, F. **Introduction au Filtrage en Temps Discret - Filtrage de Kalman et Modèles de Markov Cachés**. 2007.

MAYBECK, P. S. **Stochastic models, estimation, and control**. New York: Academic Press, 1979. (Mathematics in Science and Engineering, v.1).

RIBEIRO, M. I. **Kalman and Extended Kalman Filters: concept, derivation and properties**. 2004.

VAN TREES, H. L. **Detection, estimation and modulation theory**. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1968.

VILA VALLS, J.; BROSSIER, J.-M.; ROS, L. On-line Bayesian Cramer-Rao Bound for Oversampled Dynamical Phase Offset Estimation. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMMUNICATION CONTROL AND SIGNAL PROCESSING, ISCCSP'08, 2008, St-Julians. **Anais...** HAL - CCSD, 2008.

VILA VALLS, J.; BROSSIER, J.-M.; ROS, L. Extended Kalman Filter for Oversampled Dynamical Phase Offset Estimation. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMMUNICATION (ICC'09), 2009, Dresden. **Anais...** HAL - CCSD, 2009.