

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL  
LABORATÓRIO DE DINÂMICA ESTRUTURAL E CONFIABILIDADE

**ESTUDO TEÓRICO E EXPERIMENTAL DE  
AMORTECEDORES DE VIBRAÇÃO POR ATRITO**

*LETÍCIA FLECK FADEL MIGUEL*

Dissertação de Mestrado

PORTO ALEGRE,  
MARÇO DE 2002.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL  
LABORATÓRIO DE DINÂMICA ESTRUTURAL E CONFIABILIDADE

# **ESTUDO TEÓRICO E EXPERIMENTAL DE AMORTECEDORES DE VIBRAÇÃO POR ATRITO**

*LETÍCIA FLECK FADEL MIGUEL*

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós -  
Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos  
para a obtenção do título de *Mestre em Engenharia*.

Área de Concentração: Estruturas

PORTO ALEGRE,  
MARÇO DE 2002.

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo orientador e pela Banca Examinadora do Programa de Pós - Graduação.

---

Prof. Jorge Daniel Riera

Orientador

---

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal

Coordenador do Programa de Pós - Graduação em Engenharia Civil

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Jorge Daniel Riera (orientador)

Ph.D. pela University of Princeton / USA

Prof. Alberto Tamagna

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Marcelo Maia Rocha

Dr. techn. pela Universität Innsbruck

Prof. Mário José Paluch

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Aos meus pais  
Ao meu noivo

## **AGRADECIMENTOS**

Meus agradecimentos a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a elaboração deste trabalho.

Ao meu orientador, prof. Jorge Daniel Riera, pela dedicação, paciência e contribuições essenciais.

A todos os professores e funcionários da Escola de Engenharia e do Programa de Pós - Graduação em Engenharia Civil, pelos ensinamentos.

A todo o pessoal do Leme e do Lamef, em especial aos técnicos Flávio Luis César de Lima e Paulo Francisco Bueno e ao bolsista Genaro Zanon, pelo auxílio prestado para a realização da parte experimental.

A todos os professores e bolsistas do Ldec, em especial ao doutorando Oscar Curadelli e ao mestrando Edson Aseka, pelas conversas e trocas de idéias.

A minha família e aos meus amigos e colegas pelo apoio, incentivo e amizade.

E em especial ao meu noivo, o engenheiro eletricitista Rafael Boldori, por estar sempre ao meu lado, dando amor, carinho e compreensão.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro a este trabalho.

# ÍNDICE

<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b> .....	<b>xvi</b>
<b>Lista de Símbolos</b> .....	<b>xvii</b>
<b>Resumo</b> .....	<b>xxi</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>xxii</b>
<b>1. Introdução</b> .....	<b>1</b>
1.1. Generalidades .....	1
1.2. Organização do Trabalho.....	2
<b>2. Revisão Bibliográfica</b> .....	<b>4</b>
2.1. Necessidade do Uso de Amortecedores .....	4
2.2. Tipos mais Usuais de Amortecedores .....	5
2.3. Algumas Aplicações Práticas na Engenharia.....	9
2.4. Dispositivos em Desenvolvimento.....	14
<b>3. Conceitos Básicos e História do Atrito</b> .....	<b>16</b>
3.1. Definição.....	16
3.2. Atrito Seco .....	16
3.3. O Fenômeno do Atrito.....	19
3.4. Atrito na Tecnologia.....	20
3.5. Atrito na Mecânica .....	21
3.6. Atrito na Dinâmica Não Linear .....	24
3.6.1. Existência e Exclusividade de Soluções .....	25
3.6.2. Som Causado por Vibrações Induzidas por Atrito .....	26
3.6.3. Amortecimento por Atrito.....	27
3.6.4. Atrito em um Fenômeno Natural.....	28
<b>4. A Física do Atrito</b> .....	<b>30</b>
4.1. Introdução .....	30

4.2. Propriedades das Superfícies Metálicas .....	31
4.3. Contato Normal de Corpos Metálicos .....	32
4.3.1. Contato Estático de Superfícies Rugosas .....	32
4.3.2. Contato Dinâmico de Superfícies Rugosas .....	36
4.4. Teorias Sobre o Atrito Seco.....	37
4.4.1. Leis Clássicas de Atrito .....	37
4.4.2. As Primeiras Teorias Sobre Atrito.....	39
4.4.3. A Teoria de Aderência e Deformação Plástica.....	39
4.4.4. Teorias Recentes.....	41
4.5. O Início do Deslizamento .....	41
4.5.1. Micro-Deslocamentos Preliminares.....	41
4.5.2. Taxa de Dependência do Coeficiente de Atrito Estático .....	42
4.5.3. Leis de Variação do Coeficiente de Atrito.....	44
4.6. Movimento de Aderência-Deslizamento.....	46
4.7. Atrito Entre Materiais Não Metálicos .....	50
4.7.1. Atrito de Materiais Altamente Elásticos .....	51
4.7.2. Atrito de Materiais com Estrutura Cristalina Reticulada.....	52
4.7.3. Atrito do Teflon .....	53
4.7.4. Atrito do Nitrato de Boro .....	53
4.8. A Influência da Temperatura no Atrito .....	53
<b>5. Esquemas Computacionais.....</b>	<b>58</b>
5.1. Justificativa .....	58
5.2. Amortecimento Viscoso Equivalente para Atrito de Coulomb .....	59
5.2.1. Sistemas de Um Grau de Liberdade .....	60
5.2.2. Sistemas de Vários Graus de Liberdade .....	60
5.3. Representação do Atrito de Coulomb por Funções Contínuas .....	67
5.3.1. Análise .....	67
5.3.2. Verificação .....	70
<b>6. Descrição dos Amortecedores Propostos.....</b>	<b>72</b>
6.1. Modelo A.....	72
6.1.1. Materiais Utilizados.....	73
6.1.2. Funcionamento do Modelo A.....	74
6.1.3. Determinação Experimental do Coeficiente de Atrito.....	74
6.1.4. Verificação da Rigidez das Molas .....	75
6.1.5. Finalização da Construção do Amortecedor .....	75

6.1.6. Aplicações em Estruturas.....	76
6.2. Modelo B.....	77
6.2.1. Materiais Utilizados.....	78
6.2.2. Etapas da Construção do Modelo B.....	78
6.2.3. Funcionamento do Modelo B.....	80
6.2.4. Aplicações em Estruturas.....	80
6.3. Modelo C.....	80
6.3.1. Materiais Utilizados.....	81
6.3.2. Etapas da Construção do Modelo C.....	82
6.3.3. Funcionamento do Modelo C.....	83
6.3.4. Aplicações em Estruturas.....	83
<b>7. Ensaios e Análise dos Resultados .....</b>	<b>84</b>
7.1. Modelo A.....	84
7.1.1. Metodologia dos Ensaios.....	84
7.1.2. Resultados Obtidos da Série 1.....	86
7.1.3. Resultados Obtidos da Série 2.....	89
7.1.4. Variação da Força de Atrito com a Velocidade.....	93
7.1.5. Análise do Movimento de Aderência-Deslizamento.....	97
7.2. Modelo B.....	99
7.2.1. Metodologia dos Ensaios.....	99
7.2.2. Resultados Obtidos da Série 3.....	99
7.2.3. Resultados Obtidos da Série 4.....	102
7.3. Modelo C.....	105
7.3.1. Metodologia dos Ensaios.....	105
7.3.2. Resultados Obtidos da Série 5.....	107
7.3.3. Resultados Obtidos da Série 6.....	111
<b>8. Aplicações Práticas .....</b>	<b>115</b>
8.1. A Estrutura Analisada.....	115
8.2. Resposta da Estrutura Sem Amortecedores.....	116
8.2.1. Resposta com o Sismo de Cauçete.....	117
8.2.2. Resposta com o Sismo de Loma Prieta.....	120
8.3. Resposta da Estrutura Com Amortecedores (instalados como mostra a figura 8.11). .....	122
8.3.1. Análises com o Sismo de Cauçete.....	123
8.3.2. Análises com o Sismo de Loma Prieta.....	126
8.4. Resposta da Estrutura Com Amortecedores (instalados como mostra a figura 8.22). .....	130



8.4.1. Análises com o Sismo de Cauçete .....	130
8.4.2. Análises com o Sismo de Loma Prieta .....	134
<b>9. Conclusões Finais e Sugestões .....</b>	<b>138</b>
<b>10. Referências Bibliográficas .....</b>	<b>140</b>
<b>11. Anexos .....</b>	<b>145</b>
11.1. Anexo 1 - Listas de Materiais .....	145
11.1.1. Modelo A.....	145
11.1.2. Modelo B.....	146
11.1.3. Modelo C.....	147
11.2. Anexo 2 - Fotos dos Modelos .....	148
11.3. Anexo 3 - Programas Desenvolvidos .....	148
11.3.1. Programa “MDOFSemAtrito” .....	148
11.3.2. Programa “MDOFAmortHorizontal” .....	150
11.3.3. Programa “MDOFAmortInclinado” .....	153

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Exemplo de Amortecedor Ativo.....	6
Figura 2.2 (a) - Limited Slip Bolted Joint.....	6
Figura 2.2 (b) - X-braced Friction Damper; Figura 2.2 (c) - Slotted Bolted Connection e	
Figura 2.2 (d) - Sumitomo Friction Damper .....	7
Figura 2.2 (e) - Energy Dissipating Restraint .....	8
Figura 2.3 - Exemplo de TMD.....	8
Figura 2.4 - Exemplos de Amortecedores Viscosos.....	8
Figura 2.5 - Amortecedor por Atrito Exposto na Biblioteca McConnel.....	13
Figura 2.6 - Atami Korakuen Hotel e Amortecedor por Atrito Utilizado .....	13
Figura 2.7 - Exemplos de Amortecedores por Atrito Propostos: (a) Aparato de Antivibração	
com Melhor Força de Amortecimento, (b) Amortecedor de Estruturas e (c) Amortecedor por	
Atrito para Proteção.....	15
Figura 3.1 - Esquema das Superfícies de Contato: (a) Superfície Metálica Limpa e (b)	
Superfície Metálica com Películas Óxidas e Pequenas Partículas .....	19
Figura 3.2 - Modelo com Cerdas.....	23
Figura 3.3 - Classificação dos Diferentes Tipos de Atrito Seco .....	25
Figura 4.1 - Esquema das Camadas Encontradas em Superfícies Metálicas .....	31
Figura 4.2 - Relação Entre Separação e Carga.....	33
Figura 4.3 - Relação Entre Área Real de Contato e Carga .....	34
Figura 4.4 - Testes de Dureza em Metais: (a) Vickers e (b) Brinell.....	35
Figura 4.5 - Micro-Deslocamentos Tangenciais Devido a Sucessivos Carregamentos e	
Descarregamentos. Superfície de Platina. Carga Normal $N=920g$ . .....	42
Figura 4.6 - Variações do Coeficiente de Atrito Estático .....	43
Figura 4.7 - Coeficiente de Atrito Estático em Função da Variação Independente da Força	
Tangencial e do Tempo de Contato Estacionário.....	43

Figura 4.8 - Coeficiente de Atrito Versus Tempo de Contato Estacionário .....	45
Figura 4.9 - Coeficiente de Atrito Versus Distância de Deslizamento.....	45
Figura 4.10 - Modelos de Sistemas Deslizantes que Podem Apresentar Movimento de Aderência-Deslizamento.....	47
Figura 4.11 - Traçado Típico do Movimento de Aderência-Deslizamento .....	47
Figura 4.12 - Modelos Matemáticos de Variação da Força de Atrito .....	48
Figura 4.13 - Velocidade Versus Tempo para Perturbações Permanentes .....	50
Figura 4.14 - Força de Contato Versus Tempo para Perturbações Permanentes .....	50
Figura 4.15 - Coeficiente de Atrito do Diamante em Função da Carga .....	52
Figura 4.16 - Coeficiente de Atrito Médio como Função da Temperatura de Deslizamento..	54
Figura 4.17 - Coeficiente de Atrito como Função da Temperatura para Aço Limpo sobre Níquel.....	55
Figura 4.18 - Coeficiente de Atrito como Função da Temperatura para Cobalto sobre Aço Limpo.....	55
Figura 4.19 - Coeficiente de Atrito como Função da Temperatura para Grafite sobre Alumínio .....	56
Figura 4.20 - Coeficiente de Atrito como Função da Temperatura para Aço Limpo sobre Carboneto de Boro.....	56
Figura 5.1 - Sistema de Dois Graus de Liberdade com Atrito .....	61
Figura 5.2 - Sistema Anterior com Amortecimento Viscoso Equivalente.....	65
Figura 5.3 - Representação Esquemática da Estrutura Considerada .....	68
Figura 5.4 - Comparação das Quatro Representações para a Função Sinal.....	69
Figura 5.5 - Representação da Função Sinal por $f_1$ .....	70
Figura 6.1 - Corte Transversal do Modelo A .....	72
Figura 6.2 - Cortes Longitudinal e Inferior do Modelo A .....	73
Figura 6.3 - Materiais e Montagem do Modelo A.....	73
Figura 6.4 - Verificação Experimental das Molas.....	75
Figura 6.5 - Colocação da Tampa Superior na Prensa e Controle da Força Normal.....	75
Figura 6.6 - Várias Vistas do Modelo A Pronto.....	76
Figura 6.7 - Exemplo de Aplicação do Modelo A.....	76
Figura 6.8 - Corte Transversal do Modelo B .....	77
Figura 6.9 - Cortes Longitudinal e Inferior / Superior do Modelo B .....	77
Figura 6.10 - Materiais Utilizados na Construção do Modelo B.....	78
Figura 6.11 - Colagem das Chapas de Latão.....	78
Figura 6.12 - Materiais Prontos.....	78

Figura 6.13 - Parte Interna do Amortecedor .....	79
Figura 6.14 - Várias Vistas do Modelo B Pronto .....	79
Figura 6.15 - Corte Transversal do Modelo C .....	80
Figura 6.16 - Cortes Longitudinal e Inferior do Modelo C.....	81
Figura 6.17 - Materiais Utilizados na Construção do Modelo C.....	81
Figura 6.18 - Perfis já Soldados e Fixação das Chapas de Latão.....	82
Figura 6.19 - Materiais Prontos.....	82
Figura 6.20 - Várias Vistas do Modelo C Pronto .....	82
Figura 6.21 - Exemplo de Aplicação do Modelo C.....	83
Figura 7.1 - Fotos da Série 1 - Modelo A .....	85
Figura 7.2 - Fotos da Série 2 - Modelo A .....	85
Figura 7.3 - Ciclos de Histerese da Série 1 com $f = 0,1\text{Hz}$ e $a = 1\text{mm}$ .....	86
Figura 7.4 - Ciclos de Histerese da Série 1 com $f = 0,5\text{Hz}$ e $a = 6\text{mm}$ .....	87
Figura 7.5 - Ciclos de Histerese da Série 1 com $f = 3\text{Hz}$ e $a = 2\text{mm}$ .....	87
Figura 7.6 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Frequência de Excitação.....	88
Figura 7.7 - Detalhes do Gráfico da Energia Dissipada x Frequência de Excitação.....	88
Figura 7.8 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Amplitude .....	89
Figura 7.9 - Ciclos de Histerese da Série 2 com $f = 0,3\text{Hz}$ e $a = 2\text{mm}$ .....	90
Figura 7.10 - Ciclos de Histerese da Série 2 com $f = 1\text{Hz}$ e $a = 8\text{mm}$ .....	90
Figura 7.11 - Ciclos de Histerese da Série 2 com $f = 2\text{Hz}$ e $a = 8\text{mm}$ .....	91
Figura 7.12 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Frequência de Excitação.....	91
Figura 7.13 - Detalhes do Gráfico da Energia Dissipada x Frequência de Excitação.....	92
Figura 7.14 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Amplitude .....	92
Figura 7.15 - Gráfico da Variação da Força de Atrito x Velocidade - Série 1.....	94
Figura 7.16 - Detalhes do Gráfico da Força de Atrito x Velocidade - Série 1 .....	94
Figura 7.17 - Gráfico da Variação da Força de Atrito x Velocidade - Série 2.....	95
Figura 7.18 - Detalhes do Gráfico da Força de Atrito x Velocidade - Série 2.....	95
Figura 7.19 - Curva de Variação da Força de Atrito x Velocidade - Separadas por Séries.....	96
Figura 7.20 - Curva de Variação da Força de Atrito x Velocidade - Séries Juntas.....	96
Figura 7.21 - Exemplo que Mostra como se Obtiveram os dois Gráficos Seguintes .....	97
Figura 7.22 - Gráfico de $\eta$ x Amplitude da Velocidade - Separado por Série.....	98
Figura 7.23 - Gráfico de $\eta$ x Amplitude da Velocidade - Séries Juntas .....	98
Figura 7.24 - Fotos da Série 3 - Modelo B.....	100
Figura 7.25 - Fotos da Série 4 - Modelo B.....	100
Figura 7.26 - Ciclos de Histerese da Série 3 com $f = 0,1\text{Hz}$ e $a = 0,1\text{mm}$ .....	101

Figura 7.27 - Ciclos de Histerese da Série 3 com $f = 0,1\text{Hz}$ e $a = 1\text{mm}$ .....	101
Figura 7.28 - Ciclos de Histerese da Série 4 com $f = 0,1\text{Hz}$ e $a = 0,5\text{mm}$ .....	102
Figura 7.29 - Ciclos de Histerese da Série 4 com $f = 1\text{Hz}$ e $a = 1\text{mm}$ .....	103
Figura 7.30 - Ciclos de Histerese da Série 4 com $f = 3\text{Hz}$ e $a = 4\text{mm}$ .....	103
Figura 7.31 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Frequência de Excitação.....	104
Figura 7.32 - Detalhes do Gráfico da Energia Dissipada x Frequência de Excitação.....	104
Figura 7.33 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Amplitude .....	105
Figura 7.34 - Fotos da Série 5 - Modelo C.....	106
Figura 7.35 - Fotos da Série 6 - Modelo C.....	106
Figura 7.36 - Ciclos de Histerese da Série 5 com $f = 0,1\text{Hz}$ e $a = 2,5\text{mm}$ .....	107
Figura 7.37 - Ciclos de Histerese da Série 5 com $f = 0,5\text{Hz}$ e $a = 1\text{mm}$ .....	108
Figura 7.38 - Ciclos de Histerese da Série 5 com $f = 1\text{Hz}$ e $a = 0,5\text{mm}$ .....	108
Figura 7.39 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Frequência de Excitação.....	109
Figura 7.40 - Detalhes do Gráfico da Energia Dissipada x Frequência de Excitação.....	110
Figura 7.41 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Amplitude .....	110
Figura 7.42 - Ciclos de Histerese da Série 6 com $f = 0,1\text{Hz}$ e $a = 2\text{mm}$ .....	111
Figura 7.43 - Ciclos de Histerese da Série 6 com $f = 0,5\text{Hz}$ e $a = 1,5\text{mm}$ .....	112
Figura 7.44 - Ciclos de Histerese da Série 6 com $f = 3\text{Hz}$ e $a = 1\text{mm}$ .....	112
Figura 7.45 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Frequência de Excitação.....	113
Figura 7.46 - Detalhes do Gráfico da Energia Dissipada x Frequência de Excitação.....	113
Figura 7.47 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Amplitude .....	114
Figura 8.1 - A Estrutura Analisada .....	115
Figura 8.2 - O Pórtico Discretizado.....	116
Figura 8.3 - O Sismo de Cauçete.....	118
Figura 8.4 - Resposta em Termos de Deslocamento no Topo .....	118
Figura 8.5 - Resposta em Termos de Velocidade no Topo.....	119
Figura 8.6 - Resposta em Termos de Aceleração no Topo .....	119
Figura 8.7 - O Sismo de Loma Prieta .....	120
Figura 8.8 - Resposta em Termos de Deslocamento no Topo .....	120
Figura 8.9 - Resposta em Termos de Velocidade no Topo.....	121
Figura 8.10 - Resposta em Termos de Aceleração no Topo .....	121
Figura 8.11 - O Pórtico com Dissipadores Instalados Inicialmente .....	122
Figura 8.12 - Resposta em Termos de Deslocamento no Topo .....	124
Figura 8.13 - Resposta em Termos de Velocidade no Topo.....	124
Figura 8.14 - Resposta em Termos de Aceleração no Topo .....	125

Figura 8.15 - Deslocamento Máximo no Topo do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores.....	125
Figura 8.16 - Esforço Cortante Máximo na Base do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores.....	126
Figura 8.17 - Resposta em Termos de Deslocamento no Topo .....	127
Figura 8.18 - Resposta em Termos de Velocidade no Topo.....	128
Figura 8.19 - Resposta em Termos de Aceleração no Topo .....	128
Figura 8.20 - Deslocamento Máximo no Topo do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores.....	129
Figura 8.21 - Esforço Cortante Máximo na Base do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores.....	129
Figura 8.22 - O Pórtico com Dissipadores Instalados numa Segunda Configuração.....	130
Figura 8.23 - Resposta em Termos de Deslocamento no Topo .....	131
Figura 8.24 - Resposta em Termos de Velocidade no Topo.....	132
Figura 8.25 - Resposta em Termos de Aceleração no Topo .....	132
Figura 8.26 - Deslocamento Máximo no Topo do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores.....	133
Figura 8.27 - Esforço Cortante Máximo na Base do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores.....	133
Figura 8.28 - Resposta em Termos de Deslocamento no Topo .....	135
Figura 8.29 - Resposta em Termos de Velocidade no Topo.....	135
Figura 8.30 - Resposta em Termos de Aceleração no Topo .....	136
Figura 8.31 - Deslocamento Máximo no Topo do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores.....	136
Figura 8.32 - Esforço Cortante Máximo na Base do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores.....	137
Figura 11.1 - Vistas dos Modelos A, B e C .....	148

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Exemplos do Uso de Amortecedores para Controle de Vibração.....	11
Tabela 2.2 - Alguns Exemplos de Amortecedores por Atrito Propostos.....	14
Tabela 3.1 - Valores do Coeficiente de Atrito $\mu$ .....	17
Tabela 5.1 - Comparação das Representações com a Solução de Den Hartog .....	71
Tabela 7.1 - Valores de Frequência e Amplitudes de Vibração para as Séries 1 e 2 .....	84
Tabela 7.2 - Valores da Energia Dissipada por Ciclo para a Série 1 - Modelo A.....	86
Tabela 7.3 - Valores da Energia Dissipada por Ciclo para a Série 2 - Modelo A.....	89
Tabela 7.4 - Valores de Frequência e Amplitudes de Vibração para as Séries 3 e 4 .....	99
Tabela 7.5 - Valores da Energia Dissipada por Ciclo para a Série 4 - Modelo B.....	102
Tabela 7.6 - Valores de Frequência e Amplitudes de Vibração para as Séries 5 e 6 .....	105
Tabela 7.7 - Valores da Energia Dissipada por Ciclo para a Série 5 - Modelo C.....	109
Tabela 7.8 - Valores da Energia Dissipada por Ciclo para a Série 6 - Modelo C.....	111
Tabela 8.1 - Propriedades da Estrutura.....	116

# LISTA DE SÍMBOLOS

## I. LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

$A_r$	Área real de contato
$C$	Matriz de amortecimento para um sistema de vários graus de liberdade
$C_a$	Matriz de amortecimento viscoso equivalente para vários graus de liberdade
$C_t$	Constante que determina a taxa de convergência
$D$	Matriz dinâmica
$E'$	Módulo elástico equivalente de duas superfícies
$E_1$ e $E_2$	Módulos de elasticidade de cada um dos corpos em contato
$E_{ap}$	Energia dissipada por atrito por ciclo
$E_d$	Energia dissipada por amortecimento viscoso
$E_{ep}$	Energia dissipada pelo amortecimento viscoso equivalente por ciclo
$F_a$	Força de atrito
$F_{aest}$	Força de atrito estática
$F_{ex}$	Força de excitação
$F_r$	Força requerida para cortar as juntas
$F_t$	Força tangencial
$H$	Dureza do material em contato mais fraco
$I$	Matriz identidade
$K$	Matriz de rigidez para um sistema de vários graus de liberdade
$M$	Matriz de massa para um sistema de vários graus de liberdade
$N$	Força normal
$N_i$	Força normal do amortecedor do pavimento $i$
$N_t$	Número total de passos de simulação
$\vec{P}_a$	Vetor de forças de atrito em coordenadas modais



R	Raio de curvatura médio das extremidades das asperezas
S	Ponto no qual o deslizamento macroscópico inicia
$U_{1j}$ e $U_{2j}$	Maiores energias potenciais modais
$\bar{X}$	Vetor de deslocamentos nas coordenadas locais
$\dot{\bar{X}}$	Vetor de velocidades nas coordenadas locais
$\ddot{\bar{X}}$	Vetor de acelerações nas coordenadas locais
$\bar{Y}$	Vetor de deslocamentos nas coordenadas modais
$\dot{\bar{Y}}$	Vetor de velocidades nas coordenadas modais
$\ddot{\bar{Y}}$	Vetor de acelerações nas coordenadas modais

## II. LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

a	Amplitude do deslocamento
$a_a$	Amplitude da aceleração da base
$a_r$	Amplitude de oscilação na ressonância
$a_v$	Amplitude da velocidade
$b_{1j}$ e $b_{2j}$	Amplitudes de deslocamento da resposta
c	Amortecimento de um sistema de um grau de liberdade
$c_1$ e $c_2$	Constantes da curva de ajuste da força de atrito com velocidade de deslizamento
$c_{ai}$	Amortecedores viscosos equivalentes ao atrito
$c_{eq}$	Amortecimento equivalente para sistemas de um grau de liberdade
f	Frequência de excitação em Hz
$f_i$	Funções que podem substituir a função sinal
g	Aceleração da gravidade
$h^*$	Distância entre os planos médios das distribuições dos picos das alturas das duas superfícies (separação)
k	Rigidez de um sistema de um grau de liberdade
m	Massa de um sistema de um grau de liberdade
q	Valor da distância deslizada
$q_{10}$ e $q_{11}$	Coef. proporcionalidade entre as matrizes de amortecimento e massa e rigidez
$r_1$ e $r_2$	Constantes que dependem da rugosidade da superfície
t	Tempo
$t_s$	Tempo de contato estacionário
u	Deslocamento da base

$\dot{u}$	Velocidade da base
$\ddot{u}$	Aceleração da base
$x$	Deslocamento em coordenadas locais
$\dot{x}$	Velocidade em coordenadas locais
$\ddot{x}$	Aceleração em coordenadas locais
$y$	Deslocamento em coordenadas modais
$\dot{y}$	Velocidade em coordenadas modais
$\ddot{y}$	Aceleração em coordenadas modais

### III. LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

$\Delta t$	Intervalo de tempo de integração
$\Phi$	Matriz de transformação modal

### IV. LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

$\alpha_i$	Constante que define o grau de precisão das aproximações
$\chi$	Densidade de asperezas da superfície
$\phi_t$	Coefficiente de força tangencial
$\dot{\phi}_t$	Taxa de aumento do coeficiente de força tangencial
$\gamma$	Razão de tensões de corte críticas das interfaces com películas
$\eta$	Razão entre a amplitude média de flutuação da força de atrito e o valor médio da força de atrito
$\varphi_{1j}$ e $\varphi_{2j}$	Ângulos de fase da resposta
$\mu$	Coefficiente de atrito
$\mu_a$	Coefficiente de atrito resultante da adesão
$\mu_k$	Coefficiente de atrito cinético
$\mu_p$	Coefficiente de atrito resultante da deformação plástica
$\mu_s$	Coefficiente de atrito estático
$\mu_t$	Valor de máximo ou mínimo para o coeficiente de atrito
$\nu_1$ e $\nu_2$	Coefficientes de Poisson de cada um dos corpos em contato
$\theta$	Ângulo médio das asperezas
$\theta_s$	Ângulo de atrito estático

$\rho$	Constante de ordem 10
$\sigma^*$	Desvio padrão da distribuição das alturas das asperezas
$\tau_j$	Tensão de corte média das juntas
$\tau_n$	Tensão normal
$\tau_t$	Tensão tangencial
$\omega$	Frequência de excitação em rad/s
$\omega_j$	j-ésima frequência natural não amortecida para vários graus de liberdade
$\omega_n$	Frequência natural de oscilação não amortecida para um grau de liberdade
$\psi$	Índice de plasticidade
$\zeta$	Razão de amortecimento para um sistema de um grau de liberdade
$\zeta_{aj}$	j-ésima razão de amortecimento modal equivalente por coordenadas modais
$\zeta_{aqj}$	j-ésima razão de amortecimento modal equivalente por coordenadas locais
$\zeta_j$	j-ésima razão de amortecimento para um sistema de vários graus de liberdade

## RESUMO

Edifícios altos e estruturas são propensos a experimentar efeitos dinâmicos induzidos pelo vento, ação sísmica, e outras fontes de vibração. Pontes, estádios e outras estruturas sujeitas à ação de cargas móveis ou sísmicas, também podem apresentar resposta dinâmica que comprometa a confiabilidade das mesmas ou cause desconforto aos seus usuários. Amortecedores passivos são uma alternativa econômica, eficaz e rápida para reduzir ou eliminar tais vibrações. Dentro dos vários tipos de amortecedores passivos propostos ou já em uso, destacam-se aqueles que funcionam por atrito entre dois corpos sólidos, devido à sua simplicidade, grande poder de dissipação e baixo custo.

Na presente dissertação, é apresentado um estudo teórico e experimental sobre amortecedores de vibração por atrito. São discutidos aspectos importantes da física do atrito bem como métodos que facilitam o cálculo de sistemas que envolvem atrito. Também foram projetados e ensaiados modelos diferentes de amortecedores de vibração por atrito. O conceito é aplicado em um edifício metálico com seis pavimentos submetido à excitação sísmica. Com a elaboração de programas computacionais, é verificado que a resposta máxima da estrutura é consideravelmente reduzida após a instalação dos dissipadores.

## **ABSTRACT**

Tall buildings and structures are prone to experience dynamic effects induced by wind, seismic action, and other vibration sources. Bridges, stadiums and other structures subjected to the action of movable or seismic loads, can also present dynamic response that affect their reliability or cause discomfort to their users. Passive dampers are an economical, effective and fast alternative to reduce or eliminate such vibrations. Within the several types of proposed or already in use passive dampers, those that work through friction between two solid bodies are particularly attractive, due to their simplicity, great dissipation power and low cost.

In the present thesis, a theoretical and experimental study on friction dampers is presented. Important aspects of the physics of friction as well as methods that facilitate the calculation of systems that involve friction are discussed. Different models of friction dampers were also designed and tested. The concept is applied in a metallic building with six pavements submitted to seismic excitation. With the elaboration of computational programs, it is verified that the maximum response of the structure is considerably reduced after the dampers installation.

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. GENERALIDADES

Devido à sua importância, sistemas estruturais submetidos a efeitos dinâmicos vêm sendo estudados há muitos anos. Entretanto, ainda hoje persistem dúvidas a respeito deste tipo de sistema, principalmente em relação à dissipação de energia, ou seja, ao amortecimento do sistema. Visto que as forças de inércia e restitutivas são relativamente fáceis de serem avaliadas, a dificuldade remanescente está na determinação das forças reativas, isto é, das forças responsáveis pelo amortecimento.

Por outro lado, assim como na aeronáutica e na indústria automobilística é inadmissível um projeto sem amortecedores de impacto, as tendências atuais sugerem que no futuro imediato, muitas estruturas civis também serão providas de dissipadores de energia de diversos tipos, tais como amortecedores viscosos, por atrito ou metálicos, entre outros.

Entre os vários tipos de controladores de vibração possíveis, tem particular importância àquele que utiliza o fenômeno de atrito sólido para fornecer a desejada dissipação de energia. Esses amortecedores apresentam formulações matemáticas mais complicadas que os demais tipos, contudo possuem um baixo custo de construção, instalação e manutenção, apresentam boa eficiência no controle de vibrações e pouca manutenção.

Por todas essas razões, a dissertação tratará dos amortecedores de vibração por atrito (“Friction Damper”). Pode-se considerar a dissertação dividida em três partes: a parte teórica, que vai do capítulo 2 ao 5, a parte experimental, que inclui os capítulos 6 e 7 e a parte computacional, resumida no capítulo 8.

Cabe ainda ressaltar que este é um tema pouco explorado no Brasil, de caráter inovador, apesar da clara tendência à construção de estruturas esbeltas e leves, ou seja, mais sensíveis a problemas de vibração.

## 1.2. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está dividido em nove capítulos, dos quais esta introdução é o primeiro.

No capítulo 2 apresenta-se uma revisão bibliográfica, na qual discutem-se aspectos gerais sobre amortecedores de vibração. São abordados itens como a necessidade do uso de controladores de vibração, alguns tipos mais usuais de dissipadores de energia, vários exemplos de aplicação de amortecedores na engenharia civil e ainda alguns dispositivos que estão sendo desenvolvidos.

No capítulo 3 apresenta-se uma introdução à evolução dos amortecedores de vibração por atrito e a importância do fenômeno do atrito. Descrevem-se também conceitos e princípios básicos.

O capítulo 4 contém uma visão geral sobre a “física” do atrito seco. Discute-se desde as propriedades das superfícies em contato até o complexo movimento de aderência-deslizamento. São descritos modelos matemáticos utilizados para representar a variação da força de atrito, principalmente na região onde a velocidade de deslizamento é zero ou próxima desse valor.

No capítulo 5 são discutidos dois esquemas computacionais que permitem a análise de sistemas que envolvem atrito sem perder muito a precisão. O primeiro sugere substituir o atrito por um amortecimento viscoso equivalente e o outro propõe trocar a função sinal descontínua por funções contínuas.

O capítulo 6 dá início à parte experimental da dissertação, com a descrição dos três modelos de amortecedor de vibração por atrito projetados e construídos. Explica-se como é o funcionamento de cada um, quais os materiais utilizados, onde ocorre o atrito que irá dissipar energia, como foi a construção de cada um deles, em que estruturas podem ser utilizados e mais alguns detalhes relevantes.

O capítulo 7 dá continuidade à apresentação da parte experimental, com a descrição dos ensaios realizados com cada um dos três modelos propostos e a respectiva análise dos resultados obtidos em cada ensaio.

No capítulo 8 faz-se um complemento ao desenvolvimento teórico e experimental, exemplificando-se a utilização de amortecedores de vibração por atrito num edifício metálico de seis pavimentos submetido à excitação sísmica. A estrutura é analisada com e sem dissipadores de energia externos à mesma. Para obtenção da resposta da estrutura, desenvolveram-se programas computacionais em Matlab.

No capítulo 9 apresentam-se as conclusões finais deste trabalho, bem como algumas sugestões de estudos futuros sobre o assunto.

Nos anexos apresentam-se as listas completas dos materiais utilizados para a construção dos três modelos experimentais, mais duas fotos dos amortecedores projetados e a listagem dos três programas desenvolvidos em Matlab para a obtenção da resposta do edifício submetido à excitação sísmica.



## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Neste capítulo apresentam-se aspectos gerais sobre amortecedores de vibração. Inicia-se mostrando a necessidade do uso destes e seus tipos mais usuais. Posteriormente mostram-se vários exemplos de aplicação dos mesmos na engenharia civil, dando mais ênfase aos amortecedores de vibração por atrito.

### **2.1. NECESSIDADE DO USO DE AMORTECEDORES**

Com a falta de terrenos nas grandes cidades e o custo do metro quadrado cada vez mais elevado, a tendência atual é construir edificações mais altas, os conhecidos “arranha-céus”, como as Petronas Towers da Malásia com 450 metros de altura ou o Sears Tower em Chicago com 443 metros, entre outros. Isso só foi possível graças ao desenvolvimento dos elevadores elétricos e de materiais adequados, como o concreto de alto desempenho (CAD), uma tecnologia que está começando a tomar conta do mercado. O CAD oferece resistência à compressão várias vezes superior a do concreto convencional, o que aliada a sua menor porosidade, permite que sejam construídas grandes estruturas com pilares menores e vãos maiores. Contudo, deve-se lembrar que edifícios altos, mais esbeltos, com massa reduzida, são mais suscetíveis a problemas de vibração. Vibrações acima de certos níveis causam desconforto em seus usuários ou até mesmo dano na estrutura. Portanto faz-se necessário o uso de artifícios que reduzam essas oscilações.

Segundo P. Mahmoodi (1969), as vibrações de edifícios altos e de estruturas esbeltas podem ser efetivamente amortecidas pelo emprego, no local apropriado, de amortecedores mecânicos. Amortecedores são projetados para que parte da energia mecânica do movimento da edificação seja convertida em calor, o que resulta em uma redução da amplitude do movimento vibratório.

Assim como os edifícios altos, muitas outras estruturas tais como pontes, torres de transmissão, ginásios de esportes, academias, entre outras, também necessitam de amortecedores para diminuir suas amplitudes de vibração. Essas oscilações podem ser causadas por vários fatores, tais como ação do vento, tráfego de veículos ou pedestres, ação sísmica, ou uso de algumas máquinas e equipamentos, etc. Exemplos relacionados com dita patologia abundam na literatura. Por exemplo, segundo Gerson Lupatelli, em entrevista para a revista Construção São Paulo de 20/04/98, em Recife a realização de um show em um estádio afeta prédios próximos com oscilações de cinco centímetros no topo da estrutura.

No item 2.3 apresentam-se alguns exemplos práticos de estruturas nas quais foram utilizados amortecedores.

## **2.2. TIPOS MAIS USUAIS DE AMORTECEDORES**

De acordo com Nemir et al. (1994), os amortecedores podem ser classificados em três grupos: passivos, semiativos e ativos.

Os sistemas ativos são aqueles que trabalham com uma retroalimentação, necessitando de informações sobre o comportamento da estrutura e de energia externa, e tem como exemplo mais utilizado o amortecedor de massa ativo (AMD - “Active Mass Damper”). Ver figura 2.1. Devido à introdução da energia externa, os amortecedores ativos possuem um custo mais elevado que os passivos e, além disso, pode haver amplificação das vibrações da estrutura se algum problema operacional ocorrer. Por outro lado, os controladores de movimento estrutural semiativos, são aqueles que requerem informações sobre o comportamento da estrutura, mas não energia externa.

A presente dissertação tratará apenas dos amortecedores passivos, os quais não necessitam nem de informações sobre o comportamento da estrutura nem de energia externa. Tratar-se-á, mais precisamente, daqueles que utilizam o mecanismo de atrito sólido para dar a desejada dissipação de energia, chamados de amortecedores de vibração por atrito (“Friction Damper”).

Segundo Soong et al. (1997), vários tipos de amortecedores de vibração por atrito foram desenvolvidos, tais como: a junta rebitada de deslizamento limitado (“Limited Slip Bolted Joint” - figura 2.2 (a)), proposta por Pall em 1980, inventada para o controle sísmico de grandes estruturas, a qual possui pastilhas de freio revestidas entre as placas de aço para dar uma resposta força-deslocamento consistente. O amortecedor por atrito de união em X (“X-braced Friction Damper” - figura 2.2 (b)), proposto por Pall e Marsh em 1982 é utilizado em estruturas aporticadas e, mais uma vez, incorpora pastilhas de freio revestidas para as

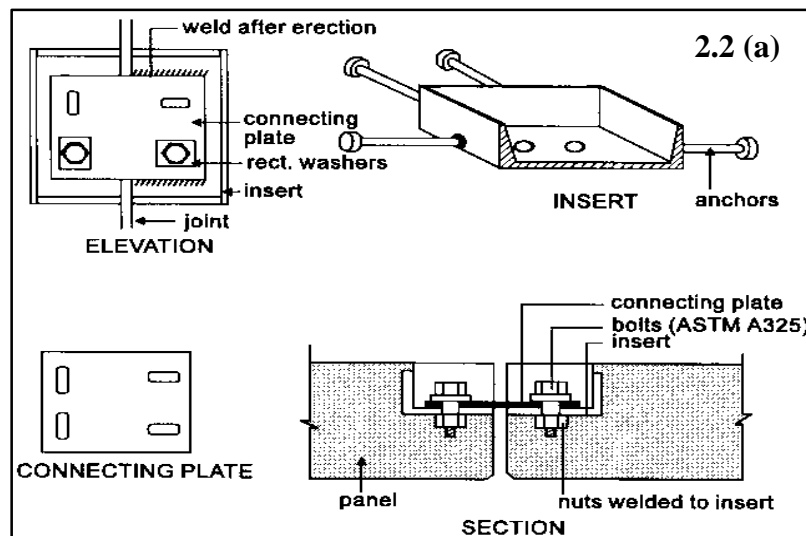
superfícies deslizantes. A conexão com rasgos para rebites (“Slotted Bolted Connection” - figura 2.2 (c)), proposta por Fitzgerald em 1989 é projetada para aplicações em pórticos de forma concêntrica. Os dois amortecedores por atrito uniaxiais mais recentes são o amortecedor por atrito Sumitomo (“Sumitomo Friction Damper” - figura 2.2 (d)), proposto por Aiken e Kelly em 1990, onde a liga de cobre atrita as pastilhas deslizando ao longo do interior da superfície do cilindro de aço e a força normal requerida é dada através da ação da mola contra as calçadeiras internas e externas; e o restringe dissipando energia (“Energy Dissipating Restraint” - figura 2.2 (e)), proposto por Nims em 1993, no qual a dissipação ocorre na interface entre o atrito das calçadeiras de bronze e a parede de aço do cilindro, e a combinação das calçadeiras pára e uma mola interna produz uma força de atrito proporcional ao deslocamento relativo da extremidade do amortecedor.

Porém, além dos amortecedores por atrito, existem hoje no mercado vários outros tipos de amortecedores passivos, dentre os quais os mais usados são:

- Os amortecedores de massas sintonizadas (TMD - “Tuned Mass Damper”), ver figura 2.3;
- Os amortecedores viscosos (“Viscous Damper”), ver figura 2.4.



**Figura 2.1 - Exemplo de Amortecedor Ativo**



**Figura 2.2 (a) - Limited Slip Bolted Joint**

[Reproduzida de Soong e Darguch, 1997]

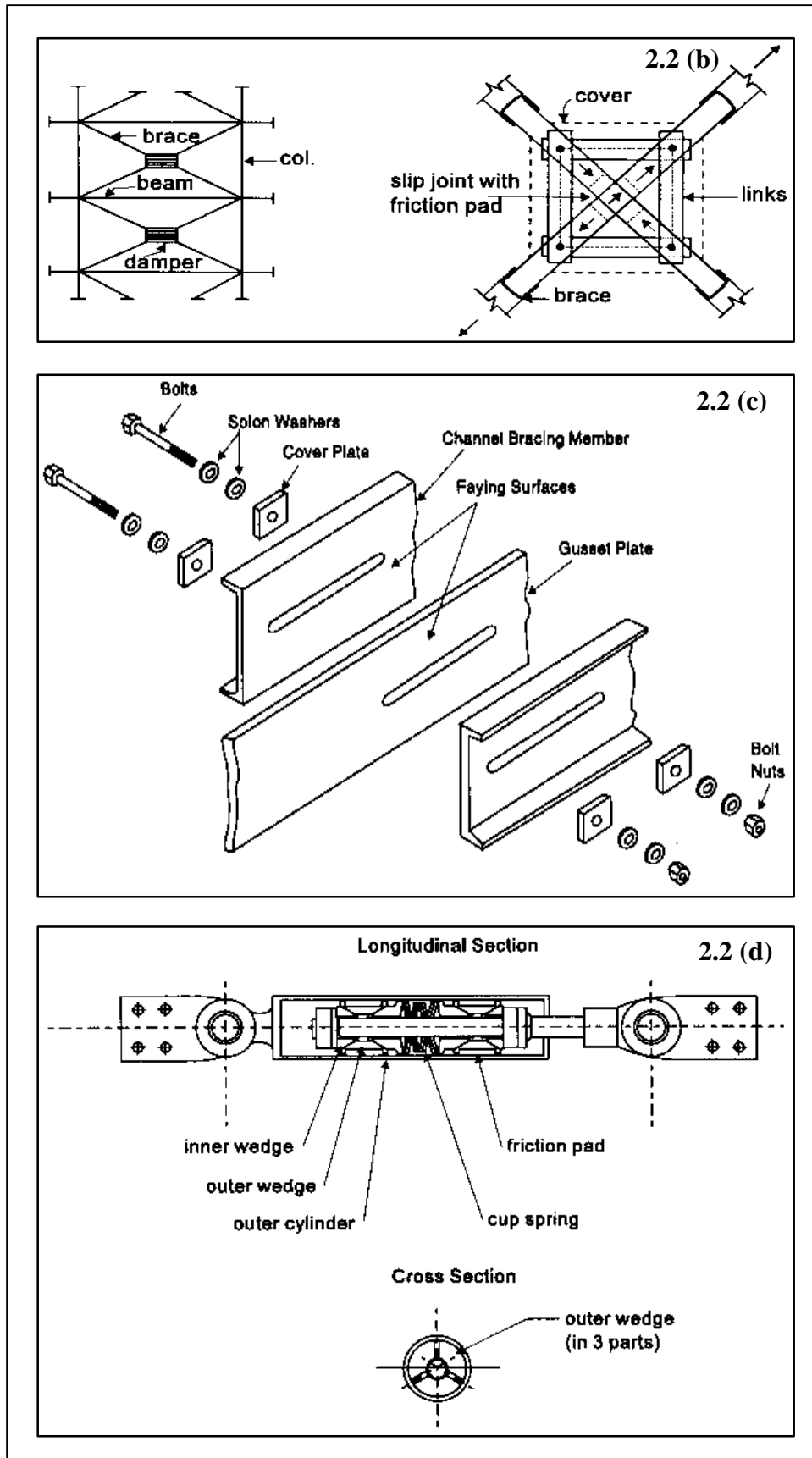
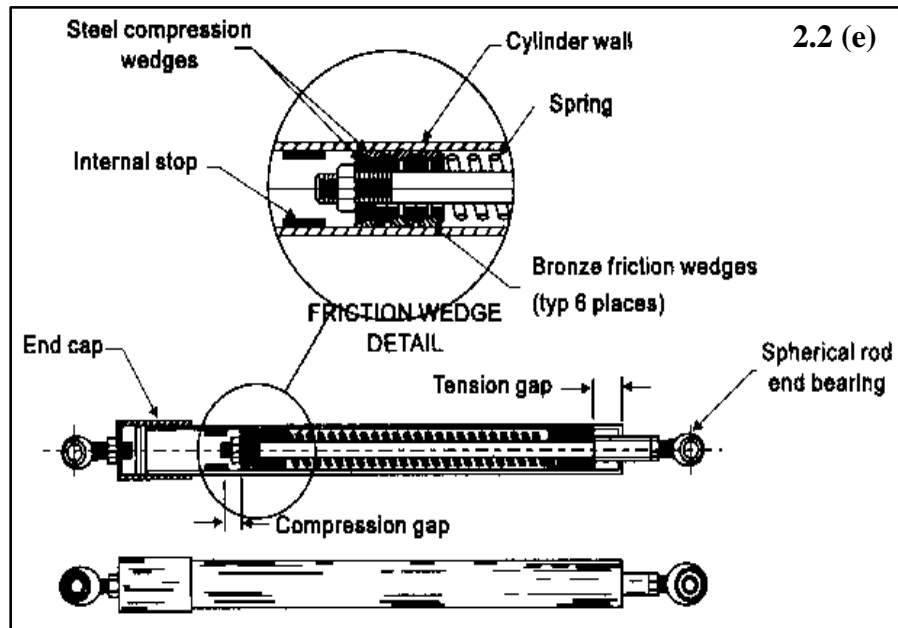
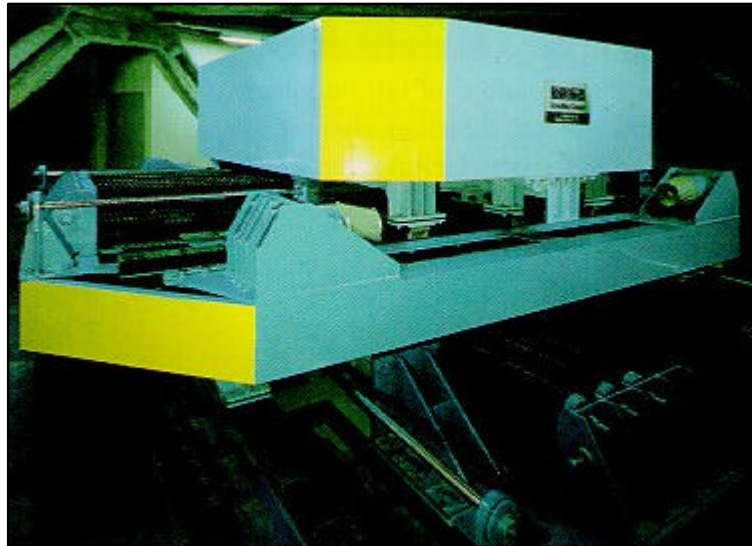


Figura 2.2 (b) - X-braced Friction Damper; Figura 2.2 (c) - Slotted Bolted Connection e  
Figura 2.2 (d) - Sumitomo Friction Damper

[Reproduzidas de Soong e Darguch, 1997]



**Figura 2.2 (e) - Energy Dissipating Restraint**  
 [Reproduzida de Soong e Darguch, 1997]



**Figura 2.3 - Exemplo de TMD**



**Figura 2.4 - Exemplos de Amortecedores Viscosos**

## 2.3. ALGUMAS APLICAÇÕES PRÁTICAS NA ENGENHARIA

Os amortecedores são utilizados para dissipar energia, diminuindo a amplitude de vibração. Estádios de futebol são um bom exemplo de estruturas sujeitas a vibrações.

Recentemente, o Estádio Cícero Pompeu de Toledo, mais conhecido como Morumbi, em SP, de propriedade do São Paulo Futebol Clube (SPFC), passou por um processo de recuperação estrutural. Tentava-se elaborar um projeto de adequação dinâmica das arquibancadas para reduzir as vibrações induzidas pelo público, procurando obter níveis de conforto adequados aos seus usuários. Para isso, três tipos de intervenção estrutural poderiam ser feitas nas arquibancadas do estádio, de acordo com a revista *Téchne* de 01/05/98:

a) Incrementar as frequências naturais da estrutura, por meio de enrijecimentos, levando-as a níveis nos quais a energia induzida pelo movimento rítmico dos espectadores fosse inferior à atual;

b) Incrementar o amortecimento estrutural, de modo a reduzir as amplificações modais, por meio da aplicação de dispositivos especiais de alta capacidade dissipativa;

c) Intervir no comportamento dinâmico da estrutura de modo a abater as amplificações modais, por meio do emprego de massas amortecedoras de frequência sincronizada adicionais.

Para escolher a melhor solução foi necessário uma análise minuciosa, de modo a evidenciar a eficiência e limitar as interferências na utilização do estádio, otimizando a relação custo / benefício.

A primeira das soluções possíveis, enrijecimento estrutural para incrementar as frequências naturais, como é usualmente o caso em estruturas já construídas, revelou-se de pouca eficiência e economicamente inviável.

As análises dos outros dois tipos possíveis conduziram, com grande vantagem, tanto econômica quanto em facilidade de execução, à solução referente ao incremento do amortecimento estrutural pela aplicação de dispositivos especiais de alta capacidade dissipativa (amortecedores do tipo “viscodamper”), ou seja, a segunda solução.

Então foi instalado um sistema passivo de dissipação de energia (molas e amortecedores), para aumentar o poder de amortecimento da estrutura. O estádio recebeu 60 amortecedores, posicionados no topo das arquibancadas e presos por tirantes. Cada um destes conjuntos custou em torno de R\$ 40 mil, segundo o diretor de obras do clube, Luiz Cholfé em entrevista à revista *Téchne* de 01/05/98. Mas o investimento é pequeno diante dos custos de uma eventual alteração do arranjo estrutural do estádio, calculada em cerca de R\$ 10 milhões.

Observou-se que, ao contrário das soluções baseadas no conceito de incrementar a rigidez da estrutura, que não se mostraram satisfatórias, a solução projetada resultou econômica e inovadora sob o ponto de vista tecnológico, não interferindo com a funcionalidade do estádio. Soluções similares podem ser aplicadas com vantagens econômicas e de eficiência em outras grandes obras, tais como edifícios, pontes, torres, arquibancadas, ginásios de esportes, academias de dança, etc.

Pontes são também um exemplo de estruturas submetidas a grandes vibrações. Recentemente, na Ponte Rio-Niterói foram instalados amortecedores do tipo TMD para reduzir as oscilações que ocorrem no vão central da ponte. O ponto mais alto da via, 72m acima do nível do mar, possui 300m de extensão e possibilita a travessia de embarcações de grande porte na Baía de Guanabara. Porém, antes da utilização dos amortecedores, quando os ventos ultrapassavam a velocidade de 60km/h o incômodo no vão central era muito grande e a única solução era interditar a ponte. Outro exemplo de ponte que necessita da instalação de amortecedores de vibração ocorre em Roterdã, na Holanda. De acordo com a revista *Arquitetura e Urbanismo* de 01/02/98, a famosa Erasmus Brug é uma ponte de 808m de comprimento, atirantada, com uma seção móvel para a passagem dos navios que chegam ao porto de Roterdã. A ponte Erasmus combina arrojados pilares de concreto com um tabuleiro de aço extremamente esbelto. O principal elemento de sustentação, porém, é a grande torre de 140m de altura que suporta o esforço dos 34 tirantes conectados ao tabuleiro central. A torre comporta também o sistema de acionamento da parte móvel, por meio de imensos cilindros hidráulicos. Tudo poderia ter sido perfeito, não fosse uma combinação imprevisível de vibrações: o vento sobre o canal e a passagem esporádica dos “trams”, bondes elétricos com dois vagões. Terminada a festa de inauguração em setembro de 1996, os moradores notaram que a ponte vibrava, vibrava muito, a ponto de a apelidarem como “ponte Parkinson”. A solução provisória foi encontrada na amarração dos tirantes com fitas plásticas, para reduzir o efeito do vento. Porém a solução definitiva foi estudada por engenheiros estruturais que concluíram que a melhor solução seria a inclusão de uma bateria de amortecedores adicionais para aumentar a estabilidade do conjunto.

Na tabela 2.1 apresentam-se mais alguns exemplos do uso dos vários tipos de amortecedores para controle de vibrações.

**Tabela 2.1 - Exemplos do Uso de Amortecedores para Controle de Vibração**

(Extraída da Internet, no site:  
[http://www.takenaka.co.jp/takenaka\\_e/quake\\_e/seishin/seishin.htm](http://www.takenaka.co.jp/takenaka_e/quake_e/seishin/seishin.htm))

Nome	Local	Ano	Projeto	Área total dos pavim. (m <sup>2</sup> )	Andares abaixo do solo	Andares acima do solo	Tipo
Chiba Port Tower	Chiba	1986	Nikken Sekkei	2.308	0	4	TMD
Crystal Tower	Osaka	1990	Takenaka Corporation	85.994	2	37	TMD
Sendagaya Intes	Tokyo	1991	Takenaka Corporation	10.602	2	11	AMD
Applause Tower	Osaka	1992	Takenaka Corporation	96.793	3	34	AMD
Nakanoshima Intes	Osaka	1992	Takenaka Corporation	35.770	1	22	TMD
P&G Japan Main Office Technical Center	Hyogo	1993	Takenaka Corporation	42.892	1	31	TMD
Japan Long-Term Credit Bank Main Office	Tokyo	1993	Nikken Sekkei	62.821	5	21	AMD
Shinsaibashi Toyo Building	Osaka	1994	Takenaka Corporation	27.025	3	12	Viscous damper
Hakata Sea Hawk Hotel	Fukuoka	1995	Takenaka Corporation	138.155	2	36	Viscous damper
Atami Korakuen Hotel	Shizuoka	1996	Takenaka Corporation	26.421	0	19	Friction damper
Herbis Osaka	Osaka	1997	Takenaka Corporation	136.823	5	40	AMD Viscous damper
Dainihoninsatsu Ichigaya Main Office	Tokyo	1998	Takenaka Corporation	16.570	2	10	Viscous damper
Improvement Project for Meiji University Surugadai District	Tokyo	1998	Nikken Sekkei	59.068	2	23	Ultralow-yield-point steel panel

Atualmente, os amortecedores de vibração por atrito (“friction damper”), os quais utilizam o mecanismo de atrito sólido para dar a desejada dissipação de energia, são cada vez mais utilizados em muitas edificações. Alguns exemplos são citados a seguir:

Na Biblioteca McConnel da Universidade Concórdia em Montreal, Canadá, que consiste de dois prédios de seis e dez pavimentos interconectados por uma galeria foram empregados um total de 143 amortecedores por atrito. Propositadamente, os arquitetos resolveram expor 60 destes amortecedores devido a sua estética atraente, conforme se observa



na figura 2.5. A força de atrito nesses amortecedores variou entre 600-700kN, dependendo da localização dentro da estrutura. Mais detalhes são encontrados em Pall e Pall (1993).

Também foram colocados amortecedores de vibração por atrito no prédio do quartel-general da Canadian Space Agency Complex perto de Montreal. É um prédio de aço com três pavimentos. Estudos realizados especificaram um total de 58 amortecedores, cada um com uma força de atrito de 500kN, localizados na posição dos contraventamentos tradicionais, indicando um desempenho satisfatório. Mais detalhes são discutidos em Vezina et al. (1992) e Pall et al. (1993).

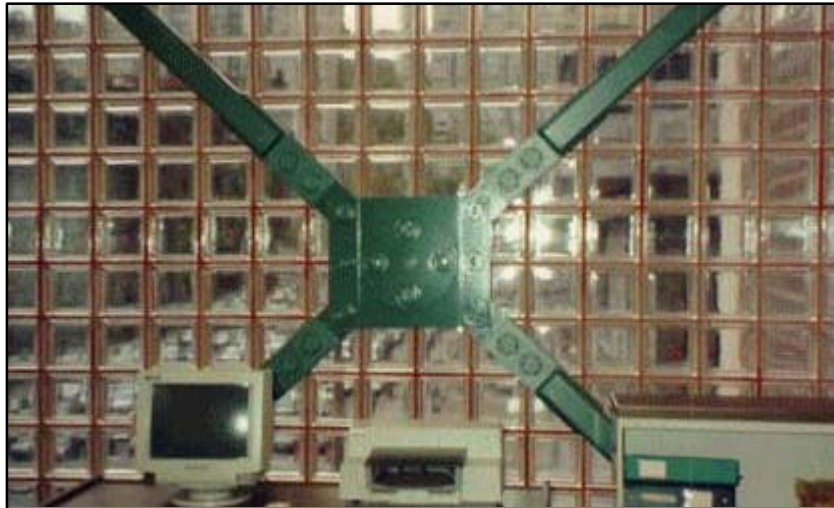
Os três prédios da escola Ecole Polyvalente próxima a Montreal, foram danificados em 1988 com o terremoto Saguenay. A estrutura original, construída em 1967, consistia de vigas e pilares de concreto pré-moldado com conexões soldadas. O piso e o teto também eram de concreto pré-moldado. O resultado foi uma estrutura com pouca resistência lateral. De fato, as análises indicaram que a estrutura existente não poderia resistir a um terremoto com uma aceleração de pico de 0,05g. Dois diferentes tipos de projeto de melhoramentos foram considerados; um método convencional usando muros de corte (“shearwalls”), e um empregando amortecedores por atrito. O último foi escolhido por resultar em uma redução de 40% do custo e uma redução de 60% do tempo de construção. Um total de 64 amortecedores por atrito foram especificados. O projeto foi concluído durante as férias de verão em 1990. Detalhes adicionais são encontrados em Pall e Pall (1993).

Uma estrutura de aço de oito pavimentos foi originalmente construída pelo governo francês para presidir a EXPO’67 em Montreal. Depois da exibição, a edificação foi doada para a cidade, e em 1992 resolveu-se transformar a estrutura no “Cassino de Montreal”. Análises preliminares indicaram que a edificação não estava segura contra sismos. Projetos de melhoramentos convencionais e com amortecedores por atrito foram estudados, mas os primeiros necessitavam de trabalho de reforço nas fundações, o que é caro e muito demorado. Então, através de uma análise dinâmica não linear, determinou-se o emprego de 32 amortecedores por atrito por toda a estrutura. Nesse caso uma análise tridimensional foi essencial devido às excentricidades da estrutura original. Informações adicionais deste projeto de melhoramento pode ser encontrada em Pasquin et al. (1994).

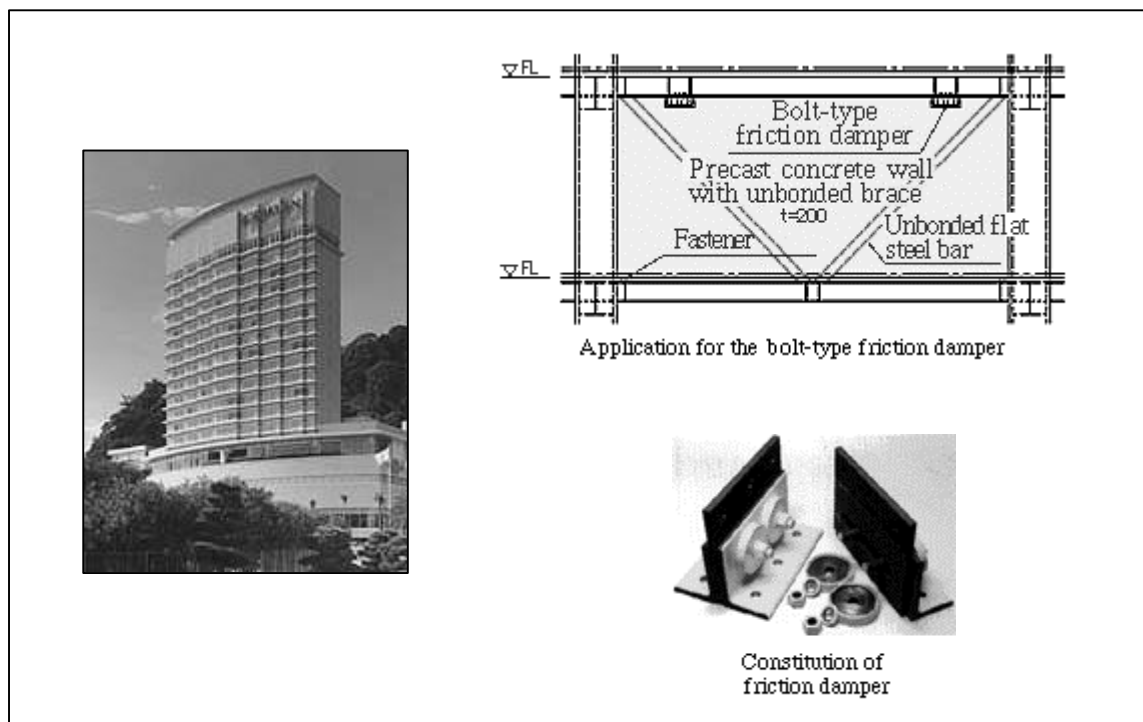
Também se pode citar como exemplo do uso de amortecedores de vibração por atrito três edificações construídas no Japão. A primeira é um prédio apertado de aço com 31 pavimentos, o Sonic Office Building, na cidade de Omiya, construído em 1988. Um total de oito amortecedores de 22kip (98kN) foram utilizados em cada andar, para reduzir os efeitos de vibração do solo e pequenos terremotos. Uma motivação similar conduziu ao uso de quatro amortecedores de 22kip (98kN) por nível no Asahi Beer Azumabashi Building em Tóquio, o

que foi concluído em 1989. A terceira edificação mencionada envolve os amortecedores por atrito como parte da base de um sistema de isolamento para uma estrutura de concreto armado em Tóquio. Detalhes adicionais são encontrados em Aiken e Kelly (1990).

Outro exemplo do uso de amortecedores de vibração por atrito foi encontrado no Atami Korakuen Hotel, concluído em 1996, projetado por Takenaka Corporation, com 19 andares e 192 amortecedores por atrito, os quais possuem a finalidade de reduzir as vibrações dos terremotos. Observe a figura 2.6.



**Figura 2.5 - Amortecedor por Atrito Exposto na Biblioteca McConnell**



**Figura 2.6 - Atami Korakuen Hotel e Amortecedor por Atrito Utilizado**

## 2.4. DISPOSITIVOS EM DESENVOLVIMENTO

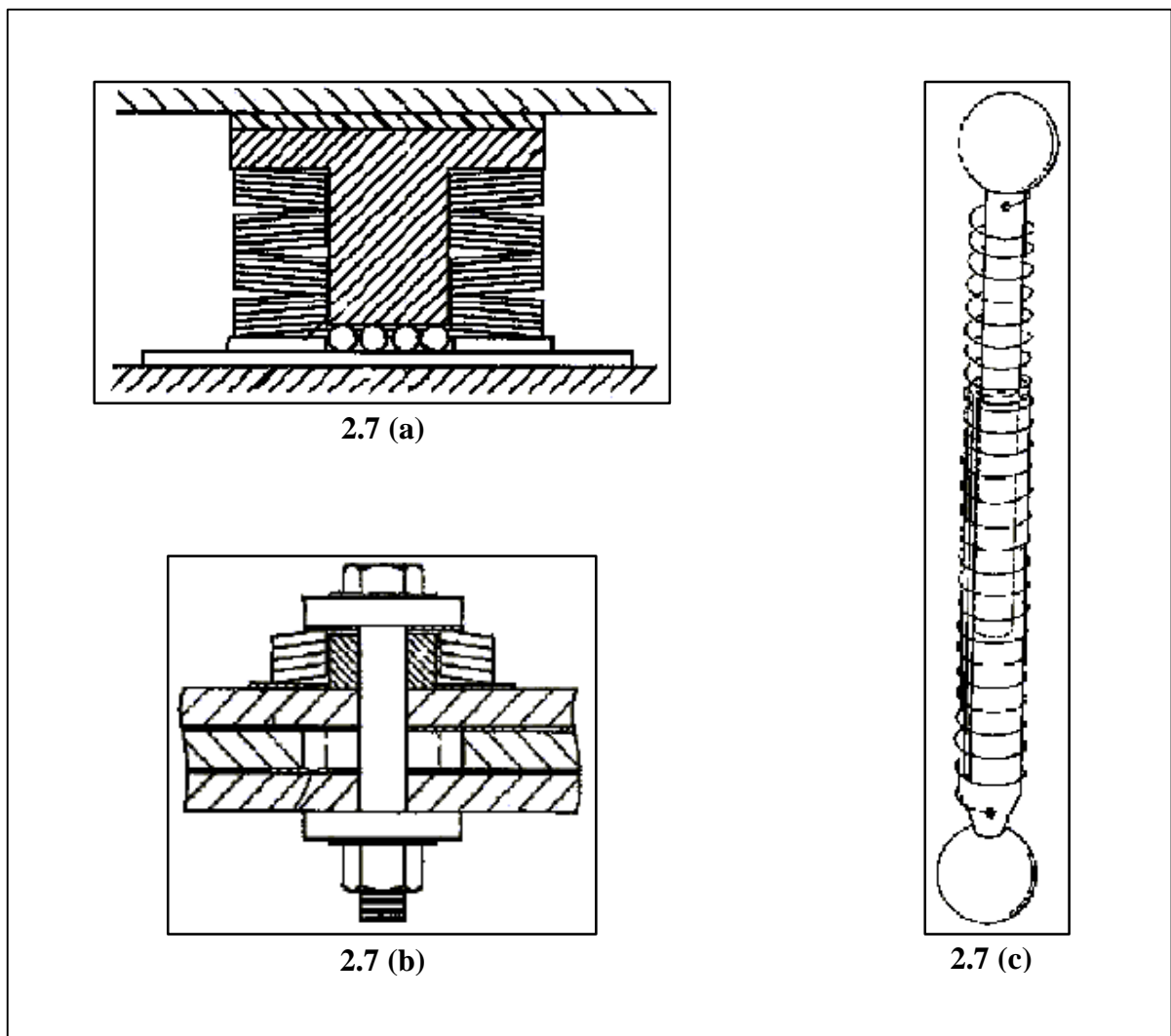
Uma mostra do interesse e importância de amortecedores de vibração por atrito é fornecida pelo considerável número de patentes solicitadas, conforme se pode observar na tabela 2.2.

**Tabela 2.2 - Alguns Exemplos de Amortecedores por Atrito Propostos**

(Extraída da Internet, no site: <http://dii.derwent.com/CIW.cgi>)

<b>Título</b>	<b>Inventores</b>	<b>Usos</b>	<b>Vantagens</b>
Resistência ao terremoto de edifícios	Ohbayashi Gumi Kk, Sanwa Tekki Corp, Tokico Ltd	Em edifícios	Utiliza um sistema com magneto para reduzir as vibrações
Aparato de resistência ao terremoto tridimensional	Ohbayashi Gumi Kk	Em superestruturas, como edifícios	Baixo custo. Reduz a liberação entre o edifício e a fundação
Aparato de antivibração com melhor força de amortecimento (fig. 2.7 a)	Daido Seimitsu Kogyo Kk, Ohbayashi Gumi Kk	Em casas residenciais	É um aparato compacto e ocupa um reduzido espaço de instalação
Amortecedor de estruturas (fig. 2.7 b)	Ohbayashi Gumi Kk	Em edifícios	Amortece energia gerada por vento ou terremoto. Tem estrutura simples e pode ser preso facilmente às juntas
Amortecedor por atrito para estruturas	Mitsubishi Steel Mgf co Ltd	Em edifícios e maquinarias	Tem placas de atrito ativadas com uma força magnética variável
Amortecedor por atrito anti-sismos	Mitsubishi Steel Mgf co Ltd	Em edifícios e maquinarias	Maior força de atrito entre os materiais, então maior amortecimento é obtido e baixo custo de instalação
Amortecedor de estruturas	Ohbayashi Gumi Kk	Em edifícios apertados	Pode ser fabricado facilmente e a baixo custo
Braçadeira para estruturas	Ohbayashi Gumi Kk	Em edifícios reforçados	Configuração simples. Impede flambagem das braçadeiras por escoamento durante terremotos
Amortecedor de estruturas	Asahi Kasei Kogyo Kk	Em edifícios	Simple projeto e construção.
Mola cônica chata	Ohbayashi Gumi Kk	Em edifícios altos	Impede a variação da força de amortecimento
Resistência ao terremoto	Takenaka Komuten Kk	Em edifícios construídos sobre solo mole	Impede que a estaca seja danificada durante terremoto

Amortecedor por atrito	Mitsubishi Jukogyo Kk	Em edifícios	Ótima força amortecedora
Aparato resistente ao terremoto	Fujita Kk, Mitsubishi Steel Mgf co Ltd	Em pisos	Não necessita de amortecedor hidráulico nem de mecanismo para ligá-lo
Amortecedor por atrito para proteção (fig. 2.7 c)	Nomura M	Em artigos pesados, como mobílias, edifícios, acessórios	Capaz de absorver vibrações e impactos de qualquer direção
Método de controle de oscilação	Shimiziu Constr Co Ltd	Em edifícios	Pode-se ajustar a força de atrito a um valor ótimo para reduzir a resposta da oscilação
Aparato antivibração	Ohbayashi Gumi Kk	Em edifícios	Mantém força de atrito e força de amortecimento fixas



**Figura 2.7 - Exemplos de Amortecedores por Atrito Propostos: (a) Aparato de Antivibração com Melhor Força de Amortecimento, (b) Amortecedor de Estruturas e (c) Amortecedor por Atrito para Proteção**

## **3. CONCEITOS BÁSICOS E HISTÓRIA DO ATRITO**

No capítulo anterior tratou-se da necessidade do uso de amortecedores, dos seus tipos principais, de algumas aplicações práticas destes na engenharia civil e de alguns dispositivos em desenvolvimento. No presente capítulo concentra-se o estudo nos amortecedores de vibração por atrito, iniciando-se com seu conceito e alguns princípios básicos sobre o atrito seco, passando-se, posteriormente, a discutir a importância e história do fenômeno do atrito.

### **3.1. DEFINIÇÃO**

Amortecedores de vibração por atrito são artifícios que utilizam o mecanismo do atrito sólido para dar a desejada dissipação de energia a fim de diminuir a amplitude de vibração do sistema. Considera-se o atrito desenvolvido entre dois corpos sólidos deslizando um em relação ao outro.

### **3.2. ATRITO SECO**

O fenômeno de atrito tem sido estudado através de experimentos físicos envolvendo, usualmente, deslizamento entre superfícies planas. A teoria básica pôde ser estabelecida a partir das seguintes hipóteses:

- a) A força total de atrito que pode ser desenvolvida é independente da área de contato;
- b) A força total de atrito que pode ser desenvolvida é proporcional à força normal total na interface;
- c) Para o caso de deslizamento com baixa velocidade relativa, a força total de atrito é independente dessa velocidade.

Das suposições anteriores pode-se escrever, no instante de impedimento do deslizamento ou durante o deslizamento:

$$F_a = \mu N \quad (3.1)$$

onde  $F_a$  e  $N$  representam a força de atrito e a força normal, respectivamente, e  $\mu$  é o denominado coeficiente de atrito. Dos experimentos físicos pôde-se observar que este coeficiente de atrito é um pouco maior antes do deslizamento do que durante o deslizamento. Com isso separa-se o coeficiente de atrito  $\mu$  em coeficiente de atrito estático ( $\mu_s$ ) e coeficiente de atrito cinético ( $\mu_k$ ). Em qualquer caso, a força de atrito atua tangencialmente à interface dos corpos, no sentido oposto ao movimento.

Visando expandir a teoria para condições mais gerais, envolvendo distribuições não uniformes ou superfícies não planas, essas suposições básicas são freqüentemente consideradas como relações locais. Desta maneira, forças são substituídas por tensões, e a generalização da equação (3.1) torna-se:

$$\tau_t = \mu \tau_n \quad (3.2)$$

em termos das tensões tangencial ( $\tau_t$ ) e normal ( $\tau_n$ ). Esta forma é também utilizada para determinar a tensão nominal de contato, que é freqüentemente requerida para fins de projeto. Percebe-se que uma integração da equação (3.2) sobre uma área de contato plana fornece a equação (3.1).

Alguns valores médios do coeficiente de atrito em função do tipo de material em contato e da lubrificação entre eles, podem ser encontrados em Dübbel (1965), conforme se apresenta na tabela 3.1.

**Tabela 3.1 - Valores do Coeficiente de Atrito  $\mu$**   
(Extraída de Groehs, 1999)

Material dos corpos em contato	Na partida			Em movimento		
	A seco	Com óleo	Com água	A seco	Com óleo	Com água
Aço sobre aço	0,15	0,10	-----	0,10	0,05	-----
Aço sobre bronze	0,20	0,10	-----	0,16	0,05	-----
Metal sobre madeira	0,60 a 0,50	0,10	-----	0,50 a 0,20	0,08 a 0,02	0,26 a 0,22
Madeira sobre madeira	0,65	0,20	0,70	0,40 a 0,20	0,16 a 0,04	0,25

O conceito de atrito de Coulomb, descrito acima, fornece a teoria básica para a maioria dos trabalhos publicados sobre amortecedores por atrito. Entretanto, deve ser enfatizado que

os processos de atrito são raramente tão simples. A teoria de Coulomb é apenas uma aproximação. Além disso, embora o coeficiente de atrito  $\mu$ , que aparece nas equações (3.1) e (3.2), é freqüentemente suposto constante para um dado par de materiais em contato, isto nem sempre acontece. Por exemplo, o valor de  $\mu$  em qualquer instante depende não apenas dos materiais em deslizamento, mas também das condições presentes na interface de deslizamento. Como as superfícies são freqüentemente o lugar de numerosos processos físicos e químicos, o coeficiente de atrito associado com uma interface pode variar consideravelmente com o tempo. Muitas interfaces entre dois metais são suscetíveis a este comportamento.

Apesar de considerável lacuna ainda existir sobre o fenômeno do atrito, é apropriado discutirem-se alguns aspectos importantes de aproximações recentes. Em particular, a teoria moderna do atrito sólido seco concentra-se na identificação da área real de contato, no mecanismo envolvido na interface de ligação, e na deformação inelástica localizada que ocorre na região de contato.

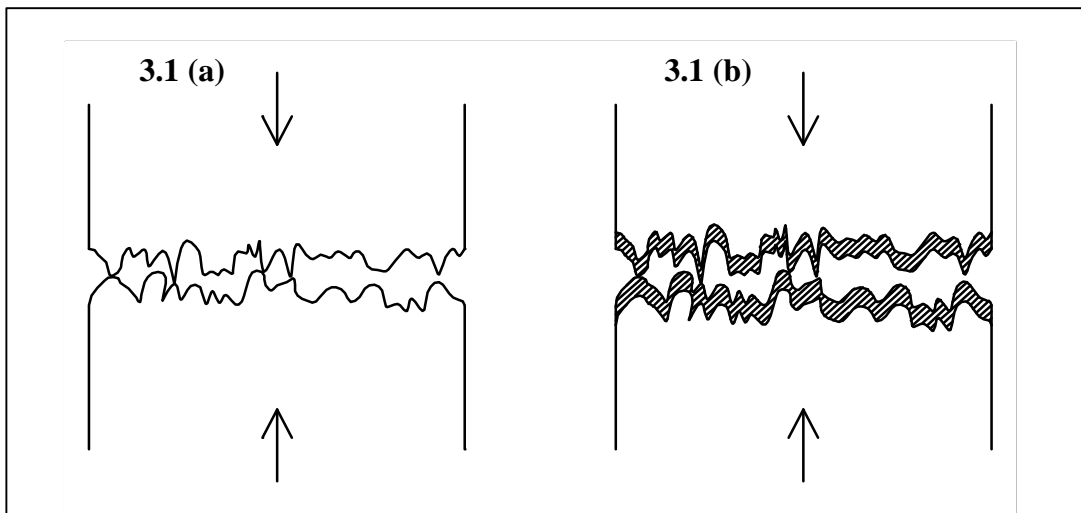
Em exames detalhados, percebe-se que as superfícies projetadas não são planos lisos a nível microscópico, mas contém irregularidades, como ondulações e asperezas. Como resultado dessas irregularidades, o contato real ocorre apenas através da interação da superfície áspera, como ilustrado na figura 3.1. A figura mostra que a área real de contato entre duas superfícies ligadas difere substancialmente da área aparente de contato. Pesquisas têm encontrado que a variedade de modelos topográficos envolvendo asperezas cônicas, piramidais e hemisféricas, experimentando deformação elástica ou plástica, produz área real de contato, em primeira aproximação, proporcional à força normal, o que está de acordo com a teoria de Coulomb. De qualquer forma, torna-se claro que uma investigação detalhada do comportamento do atrito deve considerar a superfície irregular real ao invés de uma simples idealização de objetos perfeitamente lisos.

Quando contato real ocorre diretamente entre metais, formas de ligação aderente na interface normalmente produzem coeficientes de atrito  $\mu > 1$ . Entretanto, a aderência dá uma contribuição significativa preferencialmente para o contato de metais limpos. A figura 3.1a representa esta situação. Para muitas aplicações típicas em engenharia, películas e pequenas partículas podem também estar presentes, como indicado na figura 3.1b.

O aspecto final da teoria moderna preocupa-se com o processo de deformação local que ocorre na vizinhança da interface. Esses processos envolvem resposta elástica, elastoplástica e possivelmente viscoplástica das asperezas, películas e pequenas partículas. Isso pode ser visto como um problema da mecânica do contínuo. Contudo, a geometria, como descrito na figura 3.1, é agora extremamente complexa. Processos térmicos associados com

dissipação inelástica são ativados. Adicionalmente, uma ruptura frágil ou dúctil das películas de óxido pode afetar significativamente a força de atrito na interface através do estabelecimento do contato direto metal com metal. É, obviamente, difícil de analisar todos esses fatores, então se introduzem simplificações geométricas e constitutivas de forma a obter um problema mais tratável.

Esta teoria moderna de aproximação para o atrito sólido tem conduzido a uma melhora qualitativa na compreensão do processo, mas uma avaliação quantitativa da resposta a partir de princípios básicos ainda não é possível. Portanto, como ainda não há teoria para o deslizamento com atrito comparável, por exemplo, às bem estabelecidas teorias da plasticidade de metais, é ainda necessário utilizar formulações empíricas. Além dos mencionados, existem muitos outros fatores que influenciam na resposta do sistema com atrito, os quais serão tratados em detalhes no capítulo 4.



**Figura 3.1 - Esquema das Superfícies de Contato: (a) Superfície Metálica Limpa e (b) Superfície Metálica com Películas Óxidas e Pequenas Partículas**

### 3.3. O FENÔMENO DO ATRITO

A força de atrito entre superfícies deslizantes surge devido a mecanismos complexos e conduz a modelos matemáticos que são altamente não lineares e descontínuos. A humanidade apresenta uma longa história de uso ou aproveitamento de atrito em máquinas, edifícios, transportes e outros, porém, até recentemente, com um conhecimento técnico a respeito do fenômeno do atrito bastante primitivo.

O atrito está sempre presente em nossas vidas, mas as pessoas só se dão conta disso em situações drásticas como quando alguém escorrega em degraus polidos ou quando cai na



rua devido à neve. Segundo Feeny et al. (1998) as perdas econômicas devidas ao atrito e ao desgaste foram calculadas em 5% do produto nacional bruto.

O fenômeno do atrito sempre foi e ainda é um tópico de atenção tecnológica, sendo também um assunto importante em pesquisas de engenharia e no meio científico. Como uma não linearidade, ele propõe desafios para o pesquisador de sistemas dinâmicos, além de ser muito difícil de modelar. De acordo com Feeny et al. (1998), Coulomb tinha mencionado mais de duzentos anos atrás:

“Provar para especialistas o quão desejável seria conhecer mais sobre a lei de resistência de superfícies de fricção seria inútil - dizer para alguém sobre isto que não sabe nada sobre atrito é diferente, mas também um negócio árido.” (Coulomb, 1785)

Se alguém escorrega no gelo, de um momento para outro seu movimento parece obedecer a leis diferentes. Isto se deve ao fato de que os modelos de atrito são usualmente descontínuos. No caso do atrito seco, as características do atrito produzem descontinuidades na aceleração como função do tempo. Então, a maioria das teorias de sistemas dinâmicos para sistema estável não é aplicada em sistemas com atrito. Assim, atrito como uma não linearidade é o enfoque atual de um grande número de atividades de pesquisa em todo o mundo. Muitas pesquisas também são feitas a respeito das leis do atrito, da dissipação de energia por atrito e do mecanismo do atrito.

### **3.4. ATRITO NA TECNOLOGIA**

A exploração do atrito dinâmico tem tido um tremendo efeito no desenvolvimento da humanidade. Embora as primeiras explorações do conhecimento do atrito não foram acompanhadas por uma explicação científica, o desenvolvimento tecnológico teve um grande impacto na sociedade.

Talvez o primeiro e mais significativo avanço foi o advento de fazer fogo. Antigamente, os principais métodos para fazer fogo estavam baseados no atrito, isto é, esfregando pedra em pirita e por fricção de madeira. O fogo possibilitou aos nossos ancestrais novas estratégias de caça, proteção contra animais, luz para residir em cavernas, calor e a capacidade de sobreviver em ambientes mais frios e molhados.

Outra tecnologia básica, o atrito por agarramento, foi explorado de muitas maneiras, como por exemplo, em ferramentas. O atrito era importante para a amarração da lâmina de pedra na ponta do cabo. A força que mantém unidas as fibras em cordas e pavios também envolve o atrito por agarramento.

O desejo de diminuir o atrito trouxe progressos na área de transportes. Os egípcios usavam lubrificantes para auxiliar no transporte de estátuas gigantes, as quais eram transportadas em veículos da antigüidade (antes da invenção da roda) e eram puxadas por animais ou por pessoas. Um desenho na caverna El Bersheh (1880 AC) mostra 172 homens puxando um veículo e um outro homem derramando lubrificante no caminho onde o veículo passaria. Após a descoberta da roda, os novos veículos continuaram a usar lubrificantes, agora em seus eixos, mas com a mesma finalidade de diminuir o atrito. Esta redução do atrito também levou à invenção do esqui, os quais começaram a ser usados em 2500-2000 AC em Hoting, Suécia. Os esquis são possíveis por sua extrema pressão sob as finas lâminas, que causam derretimento local e, portanto reduzem o atrito.

O desenvolvimento dos veículos com rodas veio acompanhado de problemas devido ao barulho induzido pelo atrito, tais como o ruído da frenagem, o som da estrada de ferro e automóveis, que são foco de muitas pesquisas hoje.

O atrito desempenhou um papel motivador para a domesticação de animais para o trabalho, por exemplo, a utilização de burros de carga para puxar carroças e na agricultura. Também é importante na melhora da diversão, pois vários tipos de brinquedos mecânicos utilizam o atrito para alcançar seus efeitos de entretenimento. O atrito também deu sua contribuição nos esportes, como exemplo pode-se citar o hóquei no gelo, originado do hóquei de campo. O uso de lápis e giz está baseado no desgaste por atrito, idéia que já vem desde os tempos primitivos, com os desenhos feitos com carvão nas paredes das cavernas.

### **3.5. ATRITO NA MECÂNICA**

Desde a antigüidade já se reconhecia a função do atrito na mecânica. Segundo Feeny et al. (1998), escritos do século 4 AC, por Mo Ching, já davam idéia de dissipação e um equivalente à primeira lei de Newton do movimento: “O movimento pára devido a uma força oposta. Se não há força se opondo, o movimento nunca parará. Isso é tão verdade quanto um boi não é um cavalo.” O Mo Ching ficou esquecido até recentemente.

Aproximadamente ao mesmo tempo, Aristóteles estava formulando teorias similares. Seu livro “Físicas” (“Physics”) contém uma analogia similar à primeira lei do movimento: “Ninguém poderia dizer porque uma coisa... em movimento deveria parar em qualquer lugar; por que deveria parar preferencialmente lá a aqui? Então que uma coisa será parada ou deve mover-se até o infinito, a menos que algo mais forte induza seu caminho.” A coisa que induz seu caminho possivelmente é força da resistência. Em “Nos Céus” (“On the Heavens”), Aristóteles deu a dica para a segunda lei do movimento: “a causa de cada aceleração... os

corpos são dotados com uma grande força.” E a terceira lei em declaração: “O agente é ele mesmo atuado pelo qual atua.”

Na Europa, 1500 anos depois, com o renascimento, muitos acadêmicos estavam esforçando-se para formular teorias mecânicas. O anônimo autor de “Liber Jordani de Rationale Ponderis” (escrito no século 12 e publicado em 1565) mencionou que a resistência de um corpo movendo-se através de um meio depende da forma do corpo e da densidade do meio. Albert da Saxônia (século 14) inicialmente anunciou que corpos caindo tem uma velocidade proporcional à distância de queda. Porém, depois ele rejeitou isso, dizendo que a resistência limitará a velocidade de queda do corpo. Jerome Cardan (1501-1576) aplicou essas idéias dizendo “o que continuamente diminui e não é aumentado por alguma ação externa, não pode ser perpétuo...” Benedetti (1530-1620) percebeu que uma roda não gira indefinidamente parcialmente, pois seu movimento não era retilíneo, e assim de certo modo não natural, mas também devido à resistência do ar e ao atrito no suporte. Stevin (1548-1620), em seu trabalho sobre estática, anunciou “o movimento de máquinas, formadas de madeira ou ferro, em que certas partes são lubrificadas com óleo, outras são cheias de ar ou corroídas por ferrugem, nas quais essas variadas circunstâncias e também muitas outras algumas vezes facilitam o movimento, outras impedem-no.”

Leonardo da Vinci (1452-1519) realizou experimentos sobre atrito seco. Ele formulou as leis de atrito padrão, as quais são ainda aplicadas hoje. Primeiro ele escreveu: “O atrito produz o dobro de efeito total se o peso é dobrado.” Hoje se diz que o coeficiente de atrito é independente da carga normal, e que a força de atrito é o produto do coeficiente de atrito e da carga normal. Leonardo também escreveu: “O atrito feito pelo mesmo peso terá igual resistência para começar o movimento embora o contato pode ser de diferente largura ou comprimento,” equivalente a dizer que o atrito é independente da área de contato aparente. Ele correlacionou o atrito com a rugosidade da superfície declarando: “O atrito é de diferente força para diferentes corpos tanto quanto há diferenças em seus deslocamentos. Corpos cuja superfície é mais lisa têm menor atrito. Com a suposição de um plano liso e superfícies polidas cada corpo resiste com a quarta parte de seu peso.”

As idéias de Leonardo foram esquecidas por completo até que Isaac Newton (1642-1727) publicou seu “Principia” (Newton, 1686). As contribuições de Newton incluem sua primeira e segunda lei do movimento, sendo que a última conduziu a formação da equação de movimento do corpo.

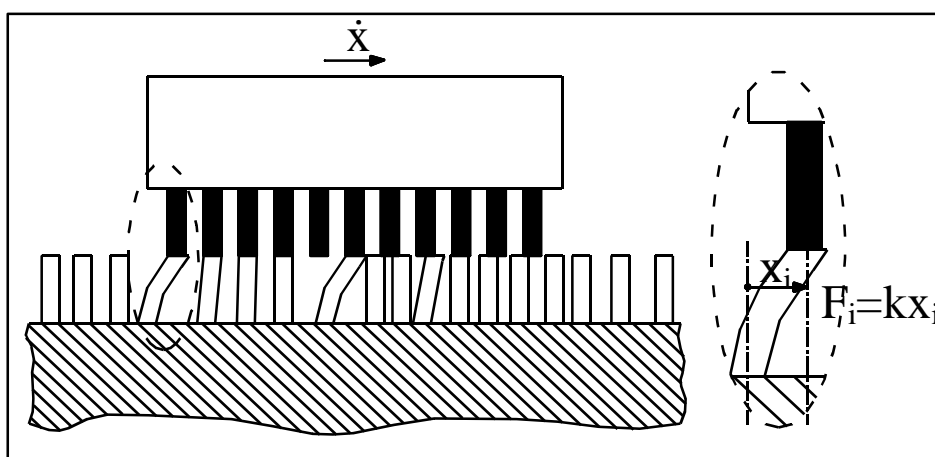
Conforme Feeny et al. (1998), De Camus e Désaguillers mencionaram em seus trabalhos que o atrito parado excede o atrito de deslizamento. Belidor (1737) calculou um coeficiente de atrito de  $1/(2\sqrt{2}) = 0,35$  de um modelo de atrito supondo asperezas esféricas.

Em 1750 Euler introduziu a letra grega  $\mu$  para o coeficiente de atrito, a qual é usada até hoje. Mais tarde Coulomb realizou experimentos cuidadosos sobre o atrito e independentemente chegou a resultados semelhantes. Seus experimentos envolveram vários tipos de madeira sobre madeira, madeira sobre metal, e metal sobre metal, algumas vezes cobertos. Suas observações incluem o fenômeno do crescente atrito estático, o qual varia entre os materiais. As idéias de Coulomb na mecânica estão fundamentadas em suas atividades de construção na ilha de Martinica, onde foi enviado pelo corpo de exército militar de engenheiros.

Cauchy introduziu os conceitos modernos de continuidade em 1820. Em sua definição, uma função de uma única variável é contínua em um intervalo se um incremento infinitamente pequeno no intervalo produz um incremento infinitamente pequeno na função. Com isso, a descontinuidade do atrito seco pode ser compreendida.

Motivados pelo aumento de demanda por qualidade e precisão, medidas detalhadas têm mostrado que o atrito não é apenas dependente dos dois estados deslizando ou aderido e da velocidade relativa de contato entre os corpos. Parâmetros adicionais que influenciam o comportamento do sistema são: a microscópica e macroscópica geometria da superfície, a área real de contato, a rugosidade da superfície e sua deformação elástica e plástica, a temperatura de contato local, desgaste do material, solda nos pontos de contato locais, a rigidez dos corpos em contato, a aderência dos corpos em contato, a influência de um lubrificante ou o então chamado terceiro corpo, os entalhos da superfície rugosa, a dinâmica das forças normal e tangencial agindo.

Baseado em modelos com cerdas que simulam as asperezas da superfície como molas elásticas, mostrado na figura 3.2, é possível investigar vibrações de contato e a influência de flutuações da força de atrito na dinâmica de sistemas com atrito. Modelos de cerda podem responder por efeitos Stribeck, deslocamentos de pré-deslizamento e histerese.



**Figura 3.2 - Modelo com Cerdas**

Embora esta formulação seja bastante recente, a idéia vem de Coulomb, por volta de 1780. Também, a idéia surgiu durante um curso de modelação do atrito dado por Andy Ruina na Universidade de Cornell em 1987. Em um certo ponto, Francis Moon sugeriu que tratassem um contato de atrito como o contato entre cerdas de uma escova ou dentes de um pente. Haessig e Friedland (1991) e Dewit et al. (1995) seguiram a sugestão independentemente.

Tolstoi (1967) tinha observado a presença de movimento no grau de liberdade normal durante o deslizamento. Oden e Martins (1985), motivados em parte por isto, obtiveram uma lei de atrito que usa um coeficiente de atrito constante junto com os graus de liberdade normal, tangencial, e torsional associados com a estrutura elástica que cerca. Com esta lei de atrito, o coeficiente de atrito aparente depende da dinâmica do deslizamento, e pode ter propriedades tais como dependência de velocidade e histerese.

Dieterich (1978) e Rice e Ruina (1983) estudaram a estabilidade do deslizamento com atrito de superfícies sólidas. Suas observações mostraram que o atrito era mais complicado que simples dependência da velocidade, e assim obtiveram leis de atrito variável, que mudam, por exemplo, como o tempo de contato efetivo. Segundo Feeny et al. (1998), Polycarpou e Soom (1996) estudaram a natureza dinâmica de atrito lubrificado durante processos de deslizamento instáveis. Para corpos rígidos em superfícies planas, Zhukovskii (1948) desenvolveu a função momento de atrito de forças sobre o centro de rotação. Ele mostrou que a força de atrito pode ser obtida por diferenciação da função momento.

De acordo com Feeny et al. (1998), a principal contribuição no campo de formulações dinâmicas analíticas de problemas de atrito é devida a Moreau que, em 1988, introduziu funções superpotenciais convexas na mecânica para formular vários efeitos unilaterais como contato normal, atrito de Coulomb, percussões e choques.

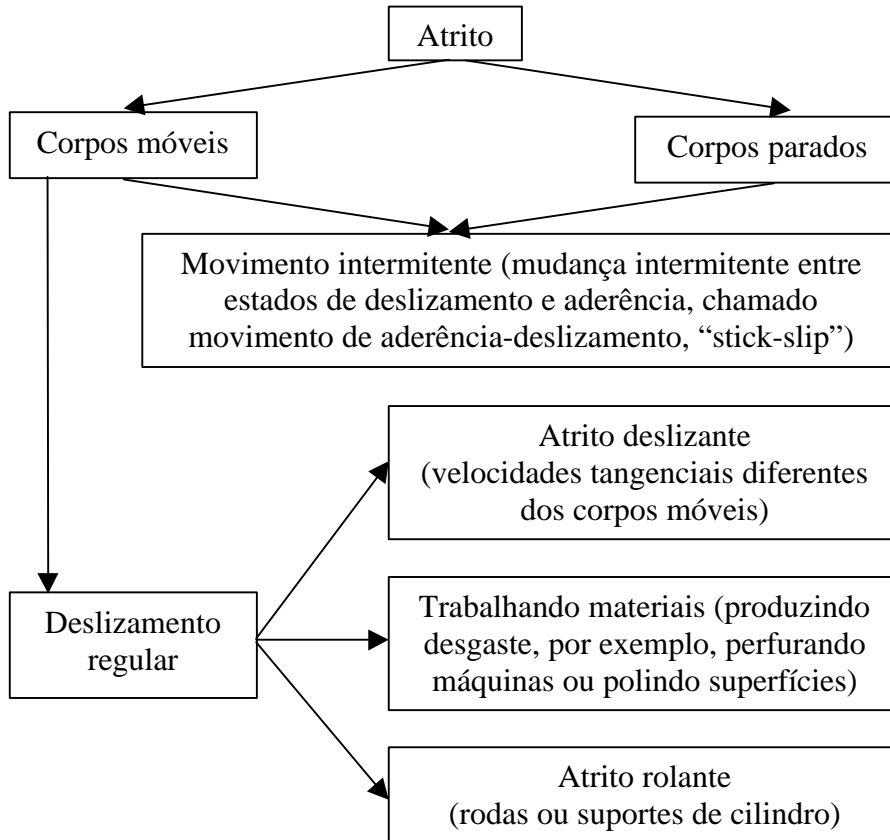
Apesar de todos os avanços na teoria do atrito não há ainda nenhum entendimento completo dos processos físicos e nenhum modelo de atrito universal em vista.

### **3.6. ATRITO NA DINÂMICA NÃO LINEAR**

Entre os efeitos não lineares que o atrito pode ter em sistemas dinâmicos estão as propriedades não lineares do amortecimento, oscilações auto-excitadas e comportamento caótico, entre outros. Um efeito não linear particular associado com atrito é o movimento de aderência-deslizamento. Esse efeito não linear aparece em muitos tipos de sistemas de engenharia e também na vida cotidiana. Como exemplo podem-se citar as oscilações de aderência-deslizamento de uma corda de violino tangida por um arco, o barulho de um giz,

ranger de portas, o som de uma linha de bonde em curvas estreitas, ranger de máquinas e ferramentas, o ranger de freios ou o simples fato de empurrar um armário pesado.

A investigação do fenômeno do atrito seco pode ser classificada como mostra a figura 3.3.



**Figura 3.3 - Classificação dos Diferentes Tipos de Atrito Seco**

[Fonte: Feeny et al., 1998]

### 3.6.1. EXISTÊNCIA E EXCLUSIVIDADE DE SOLUÇÕES

Incluindo a não linearidade associada com o atrito seco nas equações de movimento de um sistema dinâmico podem-se ter efeitos interessantes na resposta dinâmica. Quando o movimento de aderência-deslizamento está conferindo esta não linearidade conduz a inclusões diferenciais no modelo matemático. Inclusões diferenciais podem ser pensadas como equações diferenciais que consistem de um valor estabelecido ou termos de vários valores. A existência e exclusividade de soluções já estão garantidas. De acordo com Feeny et al. (1998), em 1895, Painlevé encontrou que ambas existência e exclusividade de soluções poderiam ser violadas quando se consideravam corpos rígidos deslizando e rolando de acordo com as leis de Coulomb. A habilidade para ter soluções múltiplas ou nenhuma solução viola noções fundamentais de dinâmica, e vem como resultado das inclusões diferenciais. Filippov

(1964) desenvolveu a existência e exclusividade de soluções no campo de vetores descontínuos, incluindo aqueles devidos ao atrito seco. Em 1975, Panagiotopoulos propôs um algoritmo para resolver o problema de contato unilateral com atrito. Este algoritmo iniciou uma séria pesquisa no estudo da questão da existência e exclusividade de soluções para o problema de um corpo elástico linear sujeito a contato unilateral e condições de contorno com atrito e mais geralmente para problemas de desigualdade quase variacional em mecânica do contínuo.

### 3.6.2. SOM CAUSADO POR VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR ATRITO

Quando há som ou barulho induzido por atrito, definitivamente existe uma resposta dinâmica. O violino motivou físicos e matemáticos a estudar vibrações induzidas por atrito. Galileu Galilei (1564-1642), em seu “Diálogos a Respeito de Duas Ciências Novas” (“Dialogues Concerning Two New Sciences”), comentou “que um copo de água pode ser feito para emitir um tom meramente pelo atrito da ponta do dedo sobre a borda do copo.” Ele discutiu como, se a taça fosse fixa em uma vasilha grande de água, as vibrações criariam ondas regularmente espaçadas na água. Assim, ele poderia ver que foram dispersas as vibrações do copo amplamente. Ele então notou um evento não linear, que conduziu a uma conclusão que considera escalas musicais:

"Eu tenho freqüentemente observado, soando assim um copo de preferência grande quase cheio de água, que no princípio as ondas são espaçadas com grande uniformidade, e quando, como às vezes acontece, o tom do copo salta uma oitava mais alta... cada das ondas supracitadas divide em dois; um fenômeno que mostra claramente que a [freqüência] taxa envolvida na oitava é dois."

Galileu também discutiu um incidente no qual ele estava lixando uma placa de latão com um instrumento de ferro. Em algumas ocasiões a placa produziu sons de assobio. Quando esse som era feito, ele notou que uma fila de raias paralelas, equidistantes tinha permanecido no latão. Quando o som não era feito, nenhuma marca era deixada. O volume do som parecia depender da velocidade de sua lixada. Realmente, a distância entre as raias era maior para volumes baixos, e menor para volumes mais altos. Além disso, quando o som era produzido, ele notou que o instrumento vibrava em sua mão. Galileu estava testemunhando a junção de graus de liberdade durante ruídos induzidos por atrito, um mecanismo que não seria estudado até muito recentemente.

Chladni (1756-1827) reconheceu o valor das vibrações induzidas por atrito, e aplicou-as em laboratório. Em 1787, ele publicou o tratado “Entdeckungen über die Theorie des

Klages”, o qual apresentou sua técnica de borrifar areia em placas vibrando para revelar modelos interessantes. Em cada desses novos instrumentos musicais, Chladni excitou placas de várias formas com um arco. Uma coleção maravilhosa de “Figuras de Chladni,” com modelos de pó em placas simétricas de várias formas, apareceram em “Die Akustik”, publicado em 1802.

Por volta de 1860, Helmholtz construiu um microscópio de vibração através do qual ele viu um grão de amido em um fio preto. Através de seus experimentos com o fio, Helmholtz descreveu o movimento de aderência-deslizamento: “Durante a maior parte de cada oscilação o fio aqui adere ao arco, e é levado nisto; então isso de repente se separa e rebote, por consequência disso é amarrado por outros pontos no arco e novamente é levado adiante.” Ele aproximou esses tempos de aderência-deslizamento como um zigzag de linhas retas, no qual as aderências zigs são lentas, e os deslizamentos zags são rápidos. Variando os pontos de observação no fio, Helmholtz também examinou as formas de onda do fio. O movimento consiste de uma forma triangular, como seria obtida se um ponto do fio fosse puxado, o qual corre através do fio para traçar uma forma estável de balão que nós parecemos ver.

Vibração induzida por atrito é indesejável quando conduz a problemas de fadiga ou de ruído. Isso foi uma questão de vida ou de morte durante a Segunda Guerra Mundial. Aderência-deslizamento em buracos de submarinos propulsores produziam ruídos que poderiam ser descobertos através de aparelhos de escuta sônica. Isto estimulou o Office of Naval Research a patrocinar pesquisa em aderência-deslizamento.

Fatores ambientais como temperatura e umidade tipicamente mudam a incidência de vibrações induzidas por atrito. Um exemplo comum é que os ruídos de um automóvel são capazes de serem silenciados em um dia úmido.

Den Hartog (1934) documentou um caso no qual as vibrações induzidas por atrito causaram a falha de uma ponte levadiça. A ponte estava presa a uma torre através de um pino de sustentação, e por um contra peso através de uma ligação paralela. Vibrações auto-excitadas no pino de sustentação levaram a torre à fadiga e falha dentro de um ano de operação.

### **3.6.3. AMORTECIMENTO POR ATRITO**

Naturalmente, o atrito seco pode não apenas ser uma fonte de geração de vibrações e instabilidades, mas pode desempenhar um importante papel no amortecimento dos movimentos. Com respeito ao amortecimento viscoso linear, segundo Feeny et al. (1998),



Helmholtz formulou o critério do decremento logarítmico por volta de 1863. Ele aplicou o mesmo para obter informação de frequência que considera escalas musicais dado o coeficiente de amortecimento.

Uma solução para vibrações livres de um sistema massa-mola com amortecimento por atrito de Coulomb foi dada por Lorenz (1924) em suas conferências em física. Lorenz mostrou que as vibrações livres com amortecimento de Coulomb constante decaem com um decremento constante.

Osciladores forçados com aderência-deslizamento têm sido analisados como sistemas não lineares. Segundo Feeny et al. (1998), em 1920, Eckolt aproximou a resposta do problema com aderência-deslizamento, embora com alguns erros. Den Hartog (1931) desenvolveu a resposta forçada de um oscilador de um grau de liberdade com atrito de Coulomb. Seus resultados incluíram ambos os movimentos não aderentes e aderência-deslizamento.

O uso do atrito seco como mecanismo de amortecimento tem tido muitas aplicações recentemente. Folkman et al. (1996) analisaram as propriedades do amortecimento devido a deslizamento e impactos em articulações de pinos de estruturas flexíveis grandes.

Um inesperado paradoxo do amortecimento, o qual, de acordo com Feeny et al. (1998), foi descoberto por Ziegler (1952), é seu efeito desestabilizante na elastomecânica não conservativa. Ele percebeu que em um pêndulo duplo carregado tangencialmente com rótulas viscoelásticas, a carga necessária para perda da estabilidade do equilíbrio diminui quando pequenas quantias de amortecimento são adicionadas. O paradoxo do satélite é outro fenômeno contra a intuição, o qual veio à tona nos primeiros estágios da corrida espacial, na qual a dissipação agindo em um satélite da órbita de fato causa um aumento da velocidade do satélite. A energia cinética realmente aumenta. A vantagem é que, por exemplo, durante uma órbita quase circular, a energia potencial diminui duas vezes e responde pela diminuição líquida da energia.

#### **3.6.4. ATRITO EM UM FENÔMENO NATURAL**

Um fenômeno natural que é comumente induzido por atrito são as areias musicais. Muitas praias e desertos de areia espalhados pelo mundo emitem som quando a areia é chutada com o calcanhar. Além disso, a “avalanche” das dunas de areia pode ocorrer quando a inclinação da duna torna-se instável e desliza. Conforme Feeny et al. (1998), Bolton (1890) escreveu que a avalanche das dunas de areia emite uma profunda nota baixa de caráter trêmulo e Carus-Wilson (1890) acreditou que o som era causado pelo atrito entre grãos minúsculos de areia, o que individualmente seria inaudível, mas foi somado aos milhares para

produzir som. A teoria do atrito é ainda considerada plausível, requerendo partículas com superfícies lisas e tamanho relativamente uniforme.

A neve pode ranger debaixo dos pés com temperaturas muito frias. Mais tipicamente, quando a neve é compactada, a extrema pressão das asperezas causa derretimento, o que é devido ao princípio de Le Châtelier. Entretanto, em temperaturas extremamente baixas, esse derretimento não acontece. A neve cristaliza, depois fratura e passa a deslizar com um contato seco, e assim a neve pode ranger.

Considerando um fenômeno natural mais sério, Brace e Byerlee (1966) sugeriram que os terremotos podem ser causados por instabilidades de aderência-deslizamento no deslizamento relativo de placas tectônicas.

As marés altas e baixas dos oceanos são causadas pela interação das águas dos oceanos com a rotação da terra, e a órbita e rotação da lua, através de forças gravitacionais. As marés altas e baixas dos oceanos interagem com a terra sólida através de uma camada limite turbulenta. Aqui energia mecânica é dissipada por atrito. Isto afeta a rotação da terra e lua, e a órbita da lua. Como um resultado, o dia da terra está prolongando-se gradualmente, e a órbita da lua está vagarosamente tornando-se mais distante. Estima-se que o atrito relativo à maré causa um ganho no dia da terra de aproximadamente dois milisegundos por século, e a distância entre a terra e a lua aumenta em três centímetros por ano.

## **4. A FÍSICA DO ATRITO**

Este capítulo contém uma visão geral sobre o fenômeno do atrito seco. Enfoca desde as propriedades das superfícies em contato até o complexo movimento de aderência-deslizamento, propondo alguns modelos matemáticos utilizados para representar a variação da força de atrito, principalmente na região onde a velocidade de deslizamento é zero ou próxima desse valor.

### **4.1. INTRODUÇÃO**

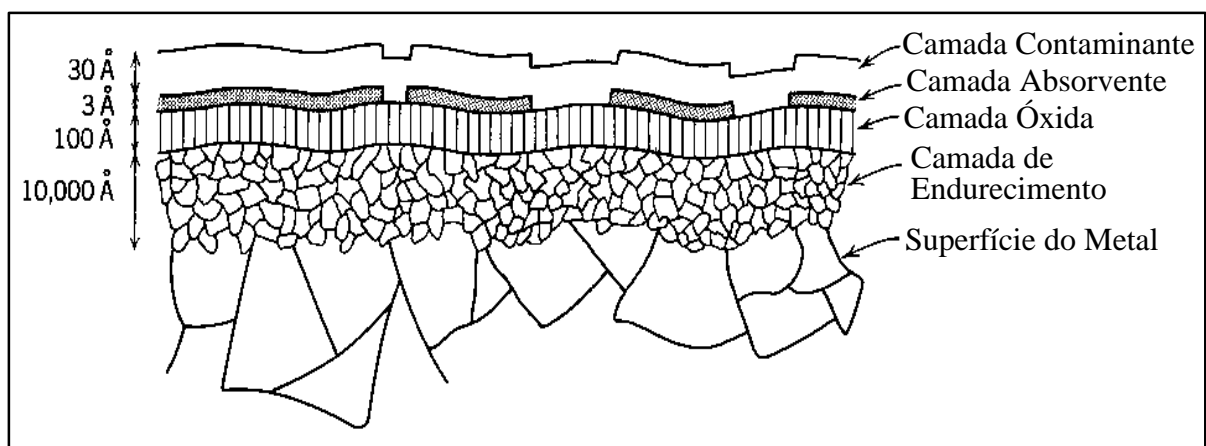
Conforme se explicou no capítulo anterior, a natureza das forças dinâmicas de atrito desenvolvidas entre corpos em contato é extremamente complexa e é afetada por uma série de fatores: a constituição da interface, o tempo e a frequência de contato, a resposta na interface a forças normais, os efeitos de inércia e térmicos, a rugosidade das superfícies em contato, a história de carga, o desgaste na interface dos materiais, a presença ou ausência de lubrificantes, etc. Portanto, o atrito dinâmico não é um fenômeno simples, mas um conjunto de fenômenos mecânicos e químicos inter-relacionados, cujas características não podem ser entendidas através de experimentos simples isolados.

Uma das maiores dificuldades na análise do atrito dinâmico é o desenvolvimento de um modelo coerente para a interface de contato entre os corpos, pois esta interface é, em geral, composta por um par de superfícies ásperas, irregulares, com impurezas, óxidos, gases e lubrificantes. Uma característica importante para os modelos de interfaces com atrito dinâmico é a caracterização da resposta na interface a forças normais, sendo esta resposta mecânica, para maioria das interfaces de metais sobre metais, altamente não linear.

## 4.2. PROPRIEDADES DAS SUPERFÍCIES METÁLICAS

Whitehouse e Archard (1970) já haviam citado a mais de 30 anos atrás: “Todas as superfícies são rugosas. Esse é o ponto inicial a partir do qual as idéias correntes sobre atrito, desgaste, e outros aspectos de superfícies em contato têm evoluído.” Sabe-se que a maioria das superfícies metálicas polidas não é perfeitamente plana. Uma observação mais detalhada mostra que essas superfícies possuem ondulações que formam vales e montes cujas dimensões são grandes em comparação com dimensões moleculares. Esses desvios da forma plana são chamados de asperezas. De acordo com Oden e Martins (1985), dependendo do método de produção da superfície, em metais a altura dos picos pode variar entre  $0,05\mu\text{m}$  e  $50\mu\text{m}$  enquanto o espaçamento entre eles varia de  $0,5\mu\text{m}$  à  $5\text{mm}$ . A inclinação média das asperezas é normalmente muito pequena, da ordem de  $5^\circ$  a  $10^\circ$ .

As propriedades do atrito de metais não lubrificados são fortemente afetadas pela presença de películas na superfície. A figura 4.1 ilustra, esquematicamente, os níveis de superfície encontrados em superfícies metálicas em ambientes industriais. De acordo com Rabinowicz (1965), a camada contaminante pode ser obtida de uma grande variedade de fontes, entre elas estão o óleo encontrado nos ambientes industriais e os lubrificantes aplicados durante a preparação da superfície. Quando em contato com o ar, os principais constituintes da camada absorvente são, geralmente, moléculas de vapor de água e oxigênio. A camada óxida é produzida pela reação do oxigênio do ar com todos os metais (exceto com os metais nobres como ouro e platina, os quais são geralmente livres de óxidos ou outras películas na superfície). A camada de endurecimento (“work-hardened layer”) resulta de uma deformação pesada do metal devido à preparação mecânica da superfície.



**Figura 4.1 - Esquema das Camadas Encontradas em Superfícies Metálicas**

[Reproduzida de Rabinowicz, 1965]

## 4.3. CONTATO NORMAL DE CORPOS METÁLICOS

### 4.3.1. CONTATO ESTÁTICO DE SUPERFÍCIES RUGOSAS

Neste item discutem-se duas questões principais: Qual é a rigidez de duas superfícies ásperas quando pressionadas uma contra a outra? Qual é a correspondente área real de contato?

#### ALGUNS MODELOS DE CONTATO DE SUPERFÍCIES RUGOSAS

Como as superfícies são rugosas, a área real de contato é muito menor que a área aparente de contato. Com isso, a superfície real de contato frequentemente suporta pressões muito grandes. Bowden e Tabor (1967) sugeriram que estas pressões sempre fossem suficientemente altas para produzir escoamento plástico. As regiões de contato deformariam plasticamente até que a área real de contato fosse grande o suficiente para suportar a carga. A área real de contato,  $A_r$ , seria então proporcional à carga aplicada  $N$ . Com essa proporcionalidade,  $A_r \propto N$ , é possível dar uma explicação simples das leis de Amontons (ver item 4.4.1).

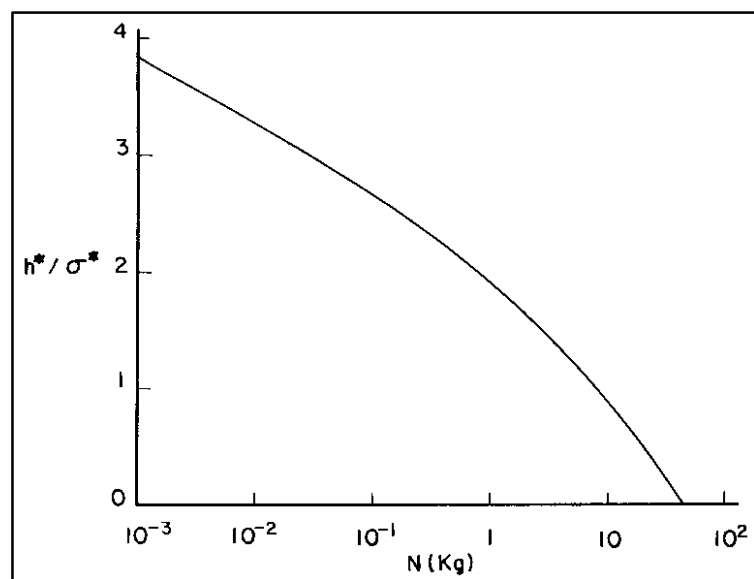
Segundo Oden e Martins (1985), Archard (1957) se opôs a esse conceito de deformação plástica de asperezas. De acordo com ele, quando materiais de dureza comparáveis são friccionados juntos, uma protuberância pode ser deformada plasticamente no primeiro encontro com a outra superfície, mas sua descarga seria elástica. Em seus muitos encontros subsequentes com a outra superfície, a protuberância suportaria a mesma carga por deformação elástica. Archard mostrou então que, embora a teoria simples de Hertzian não prediz a proporcionalidade entre  $A_r$  e  $N$ , um modelo generalizado no qual cada aspereza é coberta com microasperezas, e cada microaspereza com micro-microasperezas, dá sucessivamente aproximações mais próximas da lei  $A_r \propto N$  quanto mais estágios são considerados. Archard explicou que a parte essencial do argumento não foi a escolha do modelo de aspereza, mas sim se um aumento na carga cria novas áreas de contato ou aumenta o tamanho das existentes. Para superfícies fisicamente plausíveis, qualquer modelo elástico no qual o número de contatos permanece constante encontra-se que  $A_r \propto N^{2/3}$ , mas se o tamanho médio dos contatos permanece constante (e seu número aumenta) então  $A_r \propto N$ . Embora artificial, os modelos de Archard foram assim muito importantes, mostrando a admissibilidade

da deformação elástica das asperezas e o efeito da superposição sobre as superfícies de asperezas de escalas de tamanhos completamente diferentes.

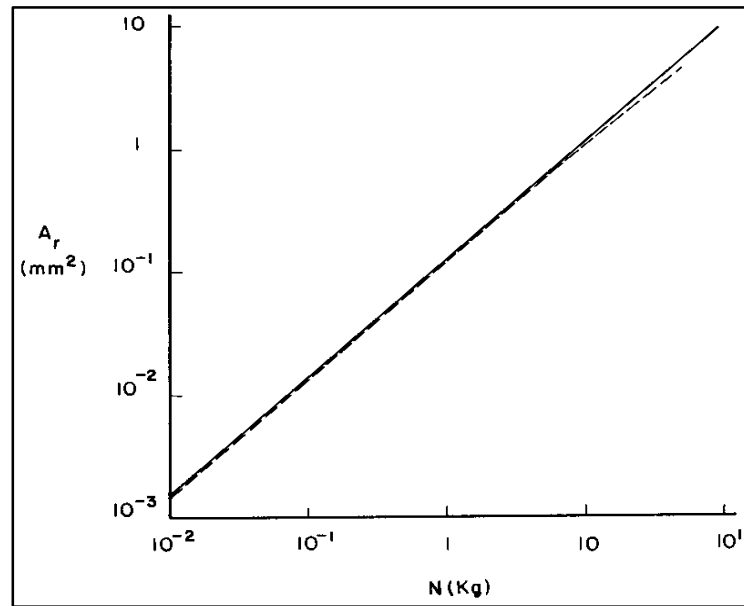
O próximo passo veio com o desenvolvimento de modelos de superfícies baseados no conhecimento do exame recente da topografia de superfícies. Greenwood e Williamson (1966), entre outros, conforme escreveram Oden e Martins (1985), mostraram que, para muitas superfícies, a distribuição dos picos das alturas (altura das asperezas) é muito próxima à Gaussiana. Eles também supuseram que as asperezas, no mínimo próximas de seus picos, eram esféricas com um raio de curvatura constante. A topografia da superfície foi descrita em termos de três parâmetros:  $\sigma^*$ , o desvio padrão da distribuição das alturas das asperezas,  $R$ , o raio de curvatura médio das extremidades das asperezas (suposto constante no modelo), e  $\chi$ , a densidade de asperezas da superfície. A deformação das asperezas foi suposta elástica, sendo as propriedades requeridas do material o módulo elástico equivalente das duas superfícies,  $E'$ , definido como

$$\frac{1}{E'} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}, \quad (4.1)$$

onde  $E_1$  e  $E_2$  são os módulos de elasticidade de cada um dos corpos em contato e  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são os correspondentes coeficientes de Poisson. Os resultados obtidos com essa teoria, para valores típicos de  $\sigma^*$ ,  $R$ ,  $\chi$  e  $E'$  são mostrados nas figuras 4.2 e 4.3, onde na figura 4.2, a separação  $h^*$  é a distância entre os planos médios das distribuições dos picos das alturas das duas superfícies. É claro que a separação diminui aproximadamente de forma proporcional ao aumento do logaritmo da carga normal e que a área real de contato é aproximadamente proporcional à carga normal.



**Figura 4.2 - Relação Entre Separação e Carga**  
[Reproduzida de Oden e Martins, 1985]



**Figura 4.3 - Relação Entre Área Real de Contato e Carga**  
[Reproduzida de Oden e Martins, 1985]

De acordo com Oden e Martins (1985), Bush, Gibson e Thomas (1975) desenvolveram um modelo no qual o topo de cada aspereza foi substituído por um parabolóide tendo a mesma altura e curvatura principal do ápice da aspereza. A deformação da aspereza foi suposta elástica. Os autores concluíram que para separações grandes a área de contato é proporcional à carga e para separações menores a proporcionalidade é apenas aproximada. A rigidez normal torna-se rapidamente pequena a grandes separações e, à separação constante, a rigidez é proporcional à carga. Também a rigidez é inversamente proporcional ao quadrado do valor rms (raiz quadrada do valor quadrático médio) da rugosidade.

### ÍNDICE DE DEFORMAÇÃO PLÁSTICA

Enquanto muitos modelos elásticos e elasto-plásticos da resposta da superfície a cargas normais foram propostos, a dúvida de em que circunstâncias usar uma representação elástica ou plástica permanece. Na tentativa de resolver essa questão, muitos autores propuseram parâmetros para indicar qual modo de deformação da superfície poderia ser dominante em várias situações.

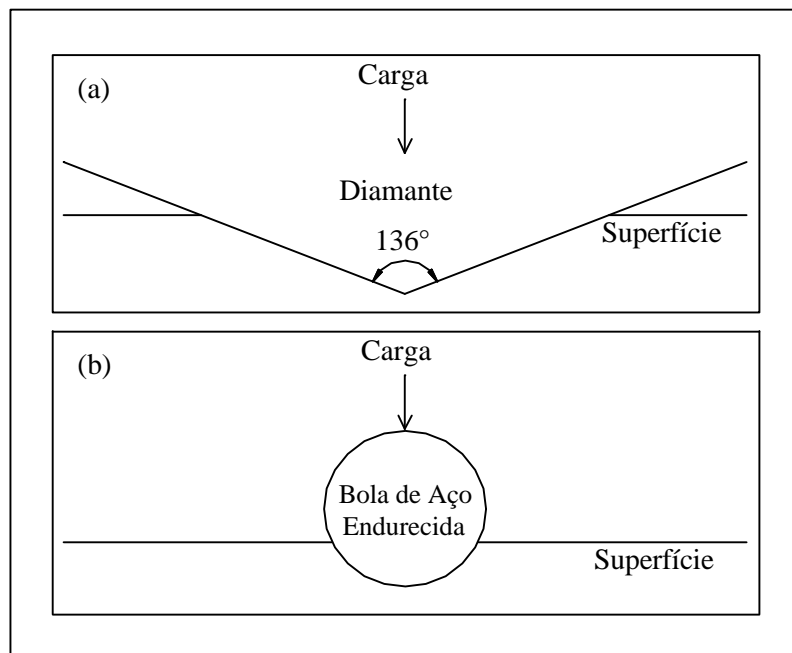
Greenwood e Williamson (1966) usaram seus modelos de superfícies topográficas para estudar os limites da deformação elástica de superfícies rugosas. Os autores definiram um parâmetro adimensional para prever o modo de deformação da superfície para grandes

variedades de cargas. Esse parâmetro é então chamado de índice de plasticidade e é expresso como

$$\psi = \frac{E'}{H} \sqrt{\frac{\sigma^*}{R}} \quad (4.2)$$

onde H é a dureza do material, definida como: carga aplicada / área do entalhe permanente quando um entalhador é pressionado em uma superfície plana. E, segundo Rabinowicz (1965), o entalhador pode ser um diamante com forma especificada, como nos testes de dureza de Vickers ou Knoop (figura 4.4 (a)), ou também pode ser uma bola de aço endurecida como no teste de dureza de Brinell (figura 4.4 (b)). A carga é escolhida convenientemente de forma a produzir um entalhe que possa ser medido com o auxílio do microscópio, e então a área é calculada com o tamanho do entalhe.

Quando  $\psi$  é menor que 0,6, o contato plástico pode ser causado apenas se as superfícies forem forçadas com uma pressão nominal muito grande, mas quando  $\psi$  é maior que 1,0 o escoamento plástico ocorrerá mesmo a pressões nominais triviais. Assim, a carga tem pequeno efeito sobre o modo de deformação da superfície. Os fatores essenciais são as propriedades dos materiais ( $E'/H$ ) e as asperezas da superfície ( $\sigma^*/R$ )<sup>1/2</sup>. Para a maioria dos materiais de engenharia e asperezas da superfície,  $\psi > 1$ , ou seja, durante o contato inicial dessas superfícies a deformação será principalmente plástica mesmo a cargas mais baixas. Os repetidos carregamentos - descarregamentos de superfícies metálicas, como em um deslizamento normal, produzirá mudanças na forma das asperezas (diminuição de  $\sigma^*/R$ ) e a deformação tornar-se-á elástica.



**Figura 4.4 - Testes de Dureza em Metais: (a) Vickers e (b) Brinell**



## CONCLUSÕES

Do exposto nos itens anteriores, pode-se concluir sobre o modo de deformação de superfícies metálicas que:

a) Os fatores essenciais que afetam o modo de deformação de uma superfície rugosa são as propriedades dos materiais ( $E'$ ,  $H$ ) e as asperezas da superfície. A carga normal tem pequeno efeito no modo de deformação da superfície.

b) Para a maioria dos materiais de engenharia e asperezas da superfície, o contato inicial das superfícies é plástico mesmo sob cargas pequenas.

c) Os repetidos carregamentos - descarregamentos de superfícies metálicas, como em um deslizamento normal, produzem mudanças na forma das asperezas, o que conduz a deformações elásticas, contanto que desgaste severo seja prevenido durante o processo de deslizamento.

Em relação à rigidez de superfícies rugosas comprimidas, conclui-se que:

d) Em aproximações penetrantes pequenas (grandes separações) a rigidez de superfícies rugosas torna-se rapidamente pequena.

e) A rigidez da superfície é inversamente proporcional a sua rugosidade.

f) A carga normal aumenta consideravelmente como uma função exponencial da penetração aproximada (a separação diminui proporcionalmente ao aumento do logaritmo da carga).

g) Para a mesma carga normal, a rigidez durante o primeiro carregamento é menor que a rigidez durante o descarregamento ou recarregamento, devido à deformação plástica que ocorre durante o primeiro carregamento.

Finalmente, sobre a área real de contato, observa-se que:

h) A maioria dos modelos desenvolvidos prediz, para ambos os contatos elásticos e plásticos, crescimento aproximadamente proporcional da área real de contato com a carga normal.

i) Resultados experimentais mostram que, freqüentemente, a área real de contato aumenta com a carga normal, mesmo para cargas pequenas.

### 4.3.2. CONTATO DINÂMICO DE SUPERFÍCIES RUGOSAS

Embora alguns resultados experimentais (influência da área aparente de contato e rugosidade sobre a rigidez) não podem ser completamente interpretados dos resultados para o contato estático, outros resultados são claramente similares aos observados no caso anterior.

A dependência linear da rigidez sobre a carga normal e a pequena diferença entre o carregamento inicial e a rigidez no descarregamento podem ser preditos do caso de contato estático. Apesar de poucos dados experimentais, percebe-se perfeitamente que o comportamento dinâmico da maioria das superfícies rugosas é consistente com as características analisadas para o caso estático.

Jiang e Ulbrich (2001) propuseram um modelo de atrito seco para altas velocidades de deslizamento, no qual foi suposta uma conservação de energia entre o trabalho do atrito e o calor gerado na interface. Baseado neste modelo, os autores obtiveram fórmulas para o coeficiente de atrito, as quais revelaram quais parâmetros dos materiais em contato e as condições de deslizamento que o coeficiente de atrito depende e como é essa dependência. Conhecendo-se as constantes do material dos corpos em contato e as condições de deslizamento, o coeficiente de atrito pode ser calculado diretamente sem a necessidade de supor o tamanho e o número dos contatos (os pontos da área real de contato) sobre a interface. A comparação entre os resultados experimentais e os resultados calculados apresentou uma boa concordância. Através da análise do atrito seco a altas velocidades de deslizamento, baseado nesse modelo, encontrou-se que para condições de deslizamento suaves a deformação das asperezas nos contatos é plástica como descrito por Bowden e Tabor. Mas em condições de deslizamento severas, a deformação pode tornar-se elástica devido ao aumento da área real de contato.

## 4.4. TEORIAS SOBRE O ATRITO SECO

Neste item apresentam-se algumas teorias que propõem explicar as origens da força de atrito.

### 4.4.1. LEIS CLÁSSICAS DE ATRITO

Quando dois corpos em contato estão submetidos a forças aplicadas as quais tendem a produzir movimento deslizante relativo, uma força de atrito desenvolve-se na interface em oposição a esse movimento. As leis clássicas de atrito são as seguintes (Moore (1975)):

a) A força de atrito, no início e durante o deslizamento, é proporcional à força normal de contato, ou seja,

$$|F_a| = \mu N. \quad (4.3)$$

b) O coeficiente de atrito é independente da área aparente de contato.

- c) O coeficiente de atrito estático,  $\mu_s$ , é maior que o coeficiente de atrito cinético,  $\mu_k$ .
- d) O coeficiente de atrito cinético é independente da velocidade de deslizamento.

E segundo Rabinowicz (1965), outra característica importante da força de atrito é a seguinte:

e) Quando o movimento tangencial ocorre, a força de atrito atua na mesma direção da velocidade relativa, mas em sentido oposto, ou seja,

$$F_a = -\mu N \dot{x} / |\dot{x}|. \quad (4.4)$$

As duas primeiras leis (a e b) são conhecidas como as Leis de Amontons sobre atrito. Porém, algumas divergências da primeira lei foram encontradas em várias circunstâncias: um aumento do coeficiente de atrito para cargas pequenas, ou um aumento do atrito para cargas maiores que um razoavelmente bem definido valor o qual corresponde a quebra de películas óxidas sobre a superfície ou ainda uma redução do coeficiente de atrito para cargas muito altas quando a área real de contato aproxima-se da magnitude da área aparente de contato e ocorre a deformação plástica dos corpos em contato.

A terceira lei é obtida de experimentos clássicos: se um corpo está em equilíbrio sobre um plano inclinado e a inclinação do plano é aumentada lentamente até o ângulo em que o deslizamento inicia (o ângulo é conhecido como o ângulo de atrito estático  $\theta_s = \tan^{-1} \mu_s$ ) freqüentemente é observado que, quando o deslizamento inicia, ele inicia abruptamente e o corpo adquire uma grande velocidade em pouco tempo. Se a força de atrito cinética fosse igual a força de atrito estática máxima, o deslizamento no plano inclinado, para o ângulo crítico  $\theta_s$ , deveria ser infinitamente lento, desde que não existissem fontes de acelerações tangenciais. A fonte das acelerações observadas está na diferença entre a força de atrito estática máxima ( $\mu_s N$ ) e a força de atrito cinética ( $\mu_k N$ ).

Agora se sabe que a quarta lei é inválida. Um grande número de dados experimentais e fórmulas empíricas para a variação do coeficiente de atrito com a velocidade de deslizamento pode ser encontrado, por exemplo, em Moore (1975). Entretanto, como observado por Rabinowicz (1965), para muitos propósitos nos quais apenas velocidades limitadas são de interesse, o coeficiente de atrito cinético pode ser considerado uma constante, independente da velocidade de deslizamento.

Também de acordo com Rabinowicz (1965), a quinta lei foi confirmada por experimentos. Porém, a equação (4.4), na quinta lei, está incluída nas leis de Amontons, já que apenas especifica a direção (e sentido) da força, que sempre foi aceita ser oposta à da velocidade. Pode-se escrever também:  $F_a = -\mu N \operatorname{sgn}(\dot{x})$ .

#### 4.4.2. AS PRIMEIRAS TEORIAS SOBRE ATRITO

Muitas das primeiras teorias sobre atrito, desenvolvidas durante os séculos XVIII e XIX, tentaram explicar o atrito em termos da rugosidade da superfície e do encaixamento das asperezas das superfícies. Se o ângulo médio das asperezas é  $\theta$ , o coeficiente de atrito deve ser igual a  $\tan\theta$  e conseqüentemente é independente da carga e do tamanho das superfícies de contato, ou seja, dá uma explicação para as Leis de Amontons. A suposição de que as asperezas de uma superfície se encaixariam nos intervalos entre as asperezas da outra superfície, dá uma explicação para o fato de que, freqüentemente, o atrito cinético é menor que o estático.

Porém, segundo Oden e Martins (1985), Tabor (1981) havia constatado que a principal falha dessas primeiras teorias sobre atrito é que os modelos propostos eram não dissipativos enquanto o atrito é, certamente, um processo dissipativo.

#### 4.4.3. A TEORIA DE ADERÊNCIA E DEFORMAÇÃO PLÁSTICA

Bowden e Tabor (1967) deram uma explicação diferente para o fenômeno do atrito. Suas teorias foram as mais aceitas em décadas recentes entre os pesquisadores do fenômeno do contato sólido. O atrito entre as faces de corpos metálicos é atribuído essencialmente a duas causas: a formação e corte de juntas metálicas entre as asperezas da superfície e a deformação plástica da superfície mais suave pelas asperezas duras. Como conseqüência, o coeficiente de atrito pode ser dado pela soma de duas componentes resultantes de cada um dos efeitos acima, ou seja,

$$\mu = \mu_a + \mu_p, \quad (4.5)$$

onde  $\mu_a$  resulta da adesão e  $\mu_p$  resulta da deformação plástica.

Em relação à componente de adesão do atrito, Bowden e Tabor (1967) supõem que quando dois corpos metálicos limpos são colocados em contato, escoamento plástico das extremidades das asperezas e soldamento local entre asperezas opostas ocorrem. A área real de contato é então proporcional a carga normal,

$$A_r = N/H, \quad (4.6)$$

onde  $H$  é a dureza do material em contato mais fraco, sendo definida como mostrado anteriormente: carga aplicada / área do entalhe permanente quando um entalhador é pressionado em uma superfície plana. Ver item 4.3.1 - figura 4.4.

Ignorando a contribuição da deformação plástica, a força de atrito é então igual a força  $F_r$  requerida para cortar as juntas formadas como descrito anteriormente. Se  $\tau_j$  é a tensão de corte média das juntas, então

$$F_r = A_r \tau_j = (\tau_j/H)N, \quad (4.7)$$

ou dividindo por  $N$ ,

$$\mu_a = \tau_j/H \quad (4.8)$$

As Leis de Amontons sobre atrito são então verificadas: a força de atrito é proporcional a carga normal e independente da área aparente de contato.

Com superfícies reais no ar, esse processo de crescimento de juntas é cessado devido à presença de níveis de contaminantes os quais são mais fracos que o material. Nesses casos, a componente de adesão do coeficiente de atrito é

$$\mu_a = \frac{1}{\rho^{1/2} (\gamma^{-2} - 1)^{1/2}}, \quad (4.9)$$

onde  $\rho$  é uma constante de ordem 10 e  $\gamma$  é a razão de tensões de corte críticas dessas interfaces com películas. Da equação (4.9) observa-se que:

a) Para  $\gamma \rightarrow 1$ ,  $\mu_a \rightarrow \infty$ ; o que corresponde a superfícies perfeitamente limpas de metais muito dúcteis, em que o crescimento de juntas ocorre indefinidamente.

b) Para enfraquecimentos da interface muito pequenos, como  $\gamma = 0,95$ , o coeficiente de atrito se reduz para valores razoáveis da ordem da unidade.

c) Para um enfraquecimento da interface muito grande, como  $\gamma < 0,2$ , o crescimento de juntas é muito pequeno, ou seja, essa situação corresponde à presença de lubrificantes ou de uma película fina de um metal mais fraco. Neste caso  $\mu_a$  pode ser escrito com precisão suficiente como

$$\mu_a = \gamma / \sqrt{\rho}. \quad (4.10)$$

Finalmente, em relação à componente de deformação plástica do atrito, Oden e Martins (1985), indicam que a componente de deformação plástica do atrito pode ser estimada usando um modelo simplificado de uma aspereza cônica dura fazendo sulcos em uma superfície mais suave. Supondo que a tensão de escoamento plástica do metal é isotrópica, a componente de deformação plástica do coeficiente de atrito,  $\mu_p$ , pode ser expressa como

$$\mu_p = \frac{2}{\pi} \tan \theta. \quad (4.11)$$

Devido às pequenas declividades das asperezas, a expressão (4.11) conduz a valores da ordem de 0,07 (para  $\theta = 5^\circ$ ) a 0,14 (para  $\theta = 10^\circ$ ). Como consequência desses valores

pequenos, a contribuição da componente de deformação plástica do atrito pode ser ignorada, a menos que a adesão seja pequena.

#### **4.4.4. TEORIAS RECENTES**

Apesar da grande aceitação da teoria de aderência e deformação plástica e sua efetividade na explicação das leis básicas do atrito, muitas críticas sérias têm sido feitas e algumas teorias alternativas têm sido propostas, principalmente a partir de 1985.

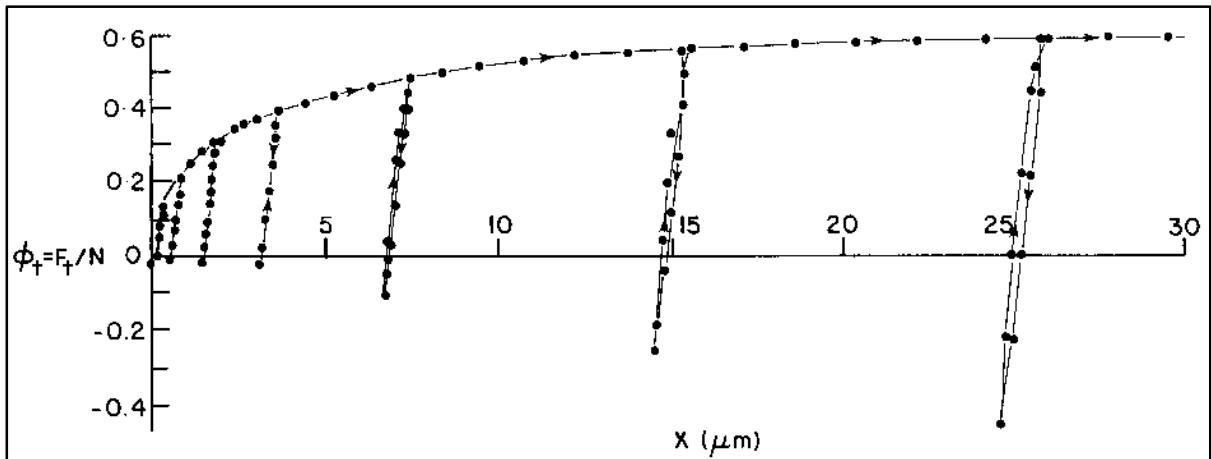
Algumas dessas críticas resultaram do fato de que, no ar, a maioria dos sólidos são cobertos com várias películas as quais impedem o contato atômico entre a maioria dos materiais de dois corpos em contato. Como consequência, a força necessária para romper o contato entre dois corpos é, normalmente, zero (se a gravidade é compensada). Além disso, segundo Oden e Martins (1985), Bikerman (1976) escreveu que a formação de níveis absorvedores no ar são tão rápidos que todos os efeitos associados com deslizamento são comparativamente lentos. Desses fatos e das observações de muitos experimentos sobre adesão e atrito, Bikerman concluiu que a importância da adesão no fenômeno do atrito pode ser ignorada.

Outras teorias alternativas foram desenvolvidas por autores preocupados, especialmente, com a evolução da força de atrito durante deslizamentos prolongados e com a interação entre atrito e o dano por desgaste das superfícies.

### **4.5. O INÍCIO DO DESLIZAMENTO**

#### **4.5.1. MICRO-DESLOCAMENTOS PRELIMINARES**

As leis clássicas de atrito, descritas anteriormente, dizem que no início do deslizamento a força de atrito é igual ao coeficiente de atrito estático vezes a força normal. Entretanto, essa lei é válida apenas a nível macroscópico, pois antes dos deslizamentos macroscópicos são observados alguns micro-deslocamentos preliminares que ocorrem a níveis de força mais baixos. Muitos experimentos têm estudado a evolução desses micro-deslocamentos quando corpos são submetidos ao aumento da força tangencial. E esses experimentos mostraram que os micro-deslocamentos são irreversíveis (plásticos). Observe a figura 4.5, a qual representa curvas experimentais típicas do coeficiente de força tangencial  $\phi_t = F_t/N$  versus o deslocamento tangencial  $x$ .



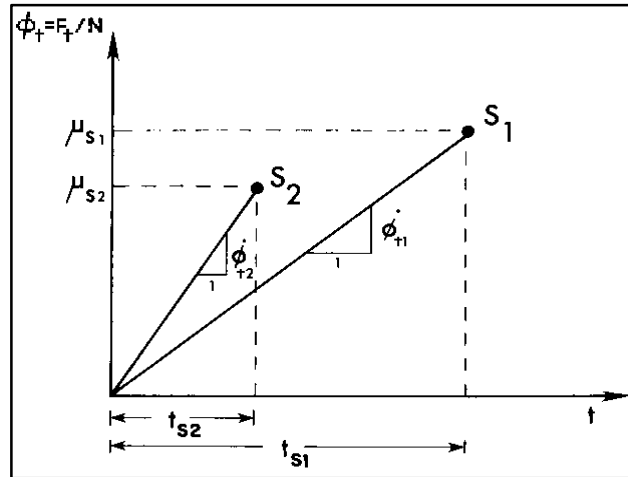
**Figura 4.5 - Micro-Deslocamentos Tangenciais Devido a Sucessivos Carregamentos e Descarregamentos. Superfície de Platina. Carga Normal  $N=920g$ .**

[Reproduzida de Oden e Martins, 1985]

#### 4.5.2. TAXA DE DEPENDÊNCIA DO COEFICIENTE DE ATRITO ESTÁTICO

Considere um corpo deslizante sobre uma superfície sem deslizamentos macroscópicos relativos a superfície e uma força tangencial  $F_t$ , aplicada no corpo, sendo aumentada a uma taxa constante até que o deslizamento ocorra. Sob essas condições, observa-se que o valor de  $\mu_s$  diminui com o aumento da taxa de aplicação da força tangencial.

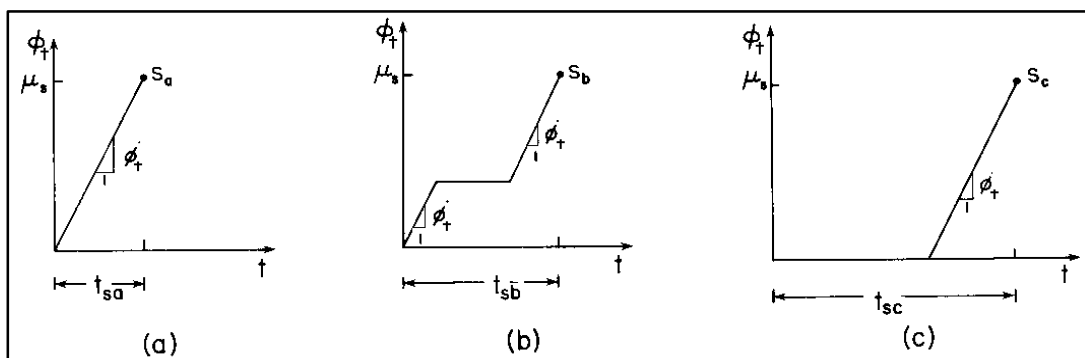
A interpretação dada pelos primeiros pesquisadores para esse fenômeno foi essencialmente a mesma utilizada para explicar a diferença entre atrito estático e cinético. A força de contato das juntas aumentaria com o tempo de contato estacionário. Conseqüentemente, quanto menor o tempo de contato estacionário,  $t_s$ , menor deve ser o coeficiente de atrito estático, conforme se observa na figura 4.6, onde:  $S_1$  e  $S_2$  são os pontos nos quais o deslizamento macroscópico inicia,  $\dot{\phi}_{t1}$  e  $\dot{\phi}_{t2}$  são as taxas de aumento do coeficiente de força tangencial  $\phi_{t1}$  e  $\phi_{t2}$ ,  $t_{s1}$  e  $t_{s2}$  são os tempos de contato estacionário,  $\mu_{s1}$  e  $\mu_{s2}$  são os coeficientes de atrito estático. Então, como  $\dot{\phi}_{t1} < \dot{\phi}_{t2}$ ,  $\mu_{s1} > \mu_{s2}$ .



**Figura 4.6 - Variações do Coeficiente de Atrito Estático**

[Reproduzida de Oden e Martins, 1985]

Segundo Oden e Martins (1985), Johannes, Green e Brockley (1973) e Richardson e Nolle (1976) realizaram experimentos nos quais podia-se variar independentemente a taxa de aplicação da força tangencial e o tempo de contato estacionário. Isso foi alcançado interrompendo-se o aumento da força tangencial ou demorando sua aplicação. Os resultados encontrados podem ser observados na figura 4.7. Os autores perceberam que se a demora não fosse introduzida, o melhor ajuste para os dados experimentais é o encontrado na figura 4.7 (a). Contudo, se o tempo de contato estacionário fosse feito independentemente da taxa de aplicação da carga tangencial, os autores encontraram que a variável governante era a taxa de aumento da força tangencial e não o tempo de contato estacionário, como mostram as figuras 4.7 (b) e 4.7 (c). Então, pode-se dizer que, para taxas de carga suficientemente pequenas, o coeficiente de atrito estático é constante e igual ao valor o qual é usualmente chamado de coeficiente de atrito estático. E para grandes taxas de carga o coeficiente de atrito estático tende a ser constante e igual ao valor o qual é usualmente interpretado como o coeficiente de atrito cinético.



**Figura 4.7 - Coeficiente de Atrito Estático em Função da Variação Independente da Força Tangencial e do Tempo de Contato Estacionário**

[Reproduzida de Oden e Martins, 1985]



### 4.5.3. LEIS DE VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE ATRITO

Em estudos mais recentes, Ferrero e Barrau (1997) mostraram, através de experimentos nos quais a velocidade de deslizamento foi mantida abaixo de  $0,2\mu\text{m/s}$  e os deslocamentos da interface em torno de  $50\mu\text{m}$ , ou seja, para velocidades de deslizamento quase zero e pequenos deslocamentos, que o coeficiente de atrito aumenta em função do tempo de contato estacionário da interface e diminui com a distância de deslizamento durante os estados de micro-deslizamentos (ver figuras 4.8 e 4.9). Essas variações são contínuas e dependem da história de deslocamento da interface. Pôde-se observar também que as variações são limitadas por dois limites assintóticos: um limite máximo que corresponde ao coeficiente de atrito estático e um limite mínimo correspondente ao coeficiente de atrito cinético.

De acordo com seus experimentos, Ferrero e Barrau (1997) determinaram duas leis para o coeficiente de atrito na interface. A primeira é uma lei na qual supõe-se que o coeficiente de atrito depende da distância de deslizamento entre dois limites, seguindo uma lei exponencial, dada por

$$\mu = \mu_k + (\mu_{t1} - \mu_k) * \exp(-C_t q) \quad (4.12)$$

onde:

$\mu_k$  é o mínimo valor do coeficiente de atrito, o qual é normalmente chamado de coeficiente de atrito cinético;

$\mu_{t1}$  é um valor máximo temporário do coeficiente de atrito dependendo da história de deslizamento da interface;

$q$  é o valor da distância deslizada;

$C_t$  é uma constante que determina a taxa de convergência.

E a segunda lei é para estados quase estáticos, nos quais se admite que o coeficiente de atrito depende do tempo de contato estacionário, e pode ser dada por

$$\mu = \mu_s - (\mu_s - \mu_{t2}) * \exp(-r_1 r_2 t_s) \quad (4.13)$$

onde:

$\mu_s$  é o máximo valor do coeficiente de atrito, o qual é normalmente chamado de coeficiente de atrito estático;

$\mu_{t2}$  é um valor mínimo temporário do coeficiente de atrito dependendo da história de deslizamento da interface;

$r_1$  e  $r_2$  são constantes que dependem da rugosidade da superfície.

Essas duas leis descrevem bem os resultados experimentais observados para os diferentes estados do sistema (estático e deslizando). Juntas elas formam o modelo de variação contínua do coeficiente de atrito, que estará entre os dois limites assintóticos ( $\mu_s$  e  $\mu_k$ ).

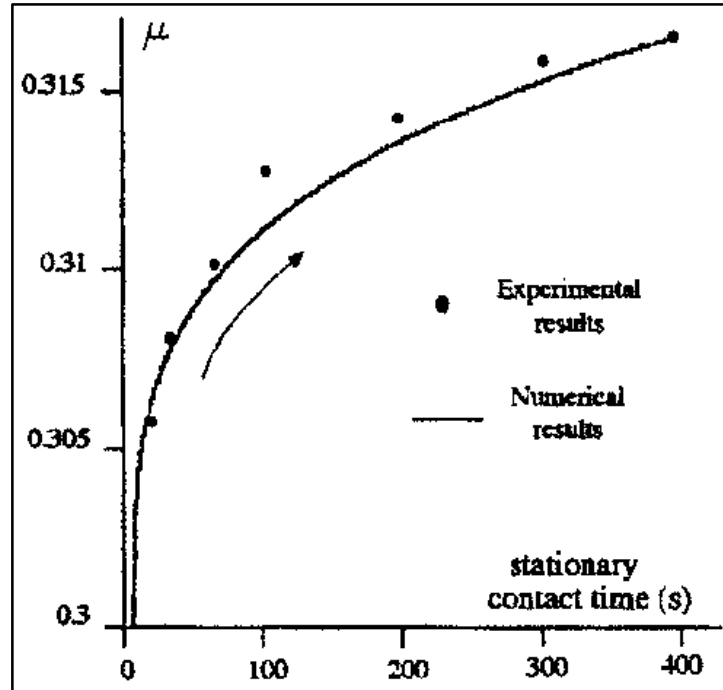


Figura 4.8 - Coeficiente de Atrito Versus Tempo de Contato Estacionário  
[Reproduzida de Ferrero e Barrau, 1997]

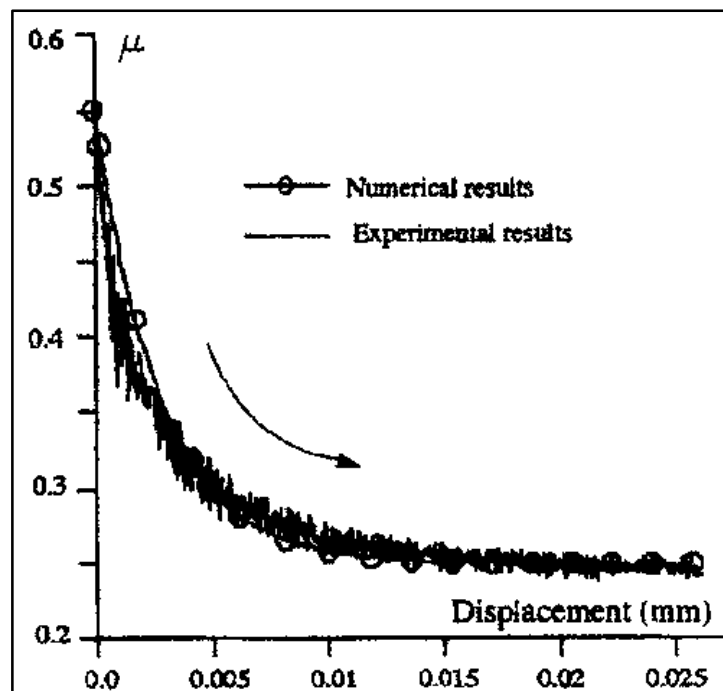


Figura 4.9 - Coeficiente de Atrito Versus Distância de Deslizamento  
[Reproduzida de Ferrero e Barrau, 1997]

## 4.6. MOVIMENTO DE ADERÊNCIA-DESLIZAMENTO

Quando duas superfícies em contato deslizam uma sobre a outra, uma vibração intermitente é freqüentemente observada, especialmente a baixas velocidades. Esse fenômeno, usualmente conhecido como movimento de aderência-deslizamento (“stick-slip motion”), é altamente indesejável, principalmente em aparelhos nos quais se necessita de precisão. Além disso, oscilações violentas podem conduzir a superfície ao dano e falha do equipamento. O fenômeno é ilustrado nas figuras 4.10 e 4.11.

De acordo com Oden e Martins (1985), Blok (1940) concluiu que a condição essencial para a ocorrência do movimento de aderência-deslizamento é a diminuição da força de atrito com aumento da velocidade de deslizamento. Comprovou-se experimentalmente que a amplitude do movimento de aderência-deslizamento decresce quando:

- a) A velocidade relativa aumenta;
- b) O coeficiente de amortecimento aumenta;
- c) A rigidez aumenta;
- d) A massa diminui.

Também se observou que a freqüência do movimento de aderência-deslizamento aumenta com o aumento da velocidade relativa e que o valor máximo dessa freqüência aproxima-se da freqüência natural do sistema não amortecido, embora em alguns casos a oscilação pára a níveis abaixo da freqüência natural.

As propriedades do atrito das superfícies em contato e as características dinâmicas dos corpos envolvidos (massa, rigidez, amortecimento) são assim requeridas para estudar o movimento de aderência-deslizamento. A equação que governa o movimento tangencial dos corpos deslizantes da figura 4.10 é a seguinte:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_a, \quad (4.14)$$

onde  $F_a$  é a força de atrito instantânea.

Dessa equação observa-se que a dificuldade está na força de atrito, pois não se sabe ao certo como esta força varia quando a velocidade de deslizamento é zero ou está na vizinhança de zero. Por isso alguns modelos matemáticos com diferentes suposições de dependência do atrito com o tempo, com o deslocamento, com a velocidade e com a aceleração têm sido propostos para caracterizar a ocorrência do movimento de aderência-deslizamento, como se mostra na figura 4.12.

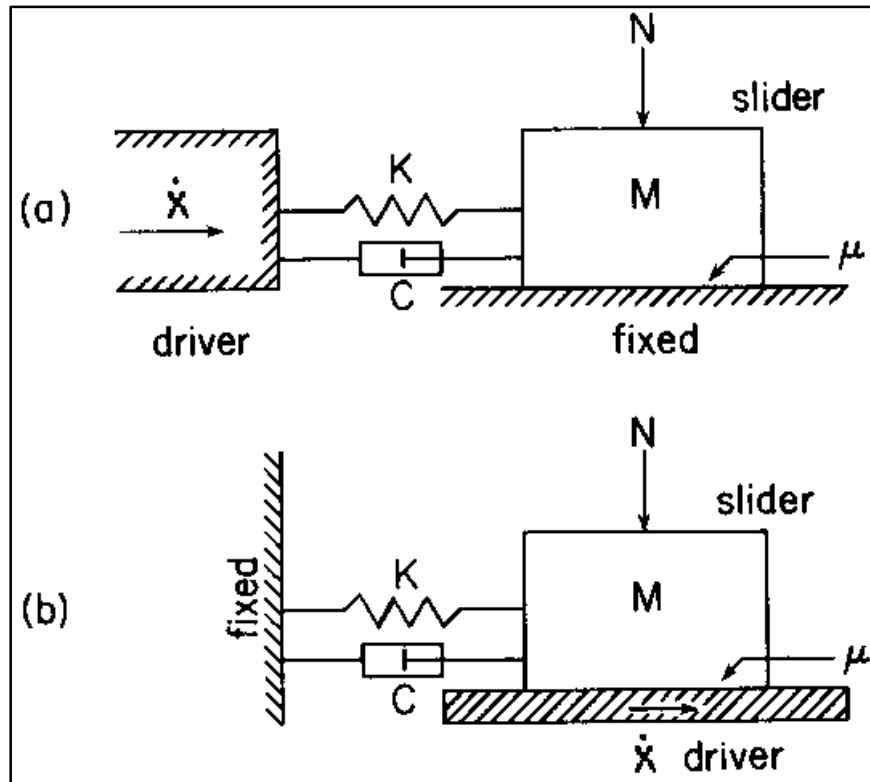


Figura 4.10 - Modelos de Sistemas Deslizantes que Podem Apresentar Movimento de Aderência-Deslizamento

[Reproduzida de Oden e Martins, 1985]

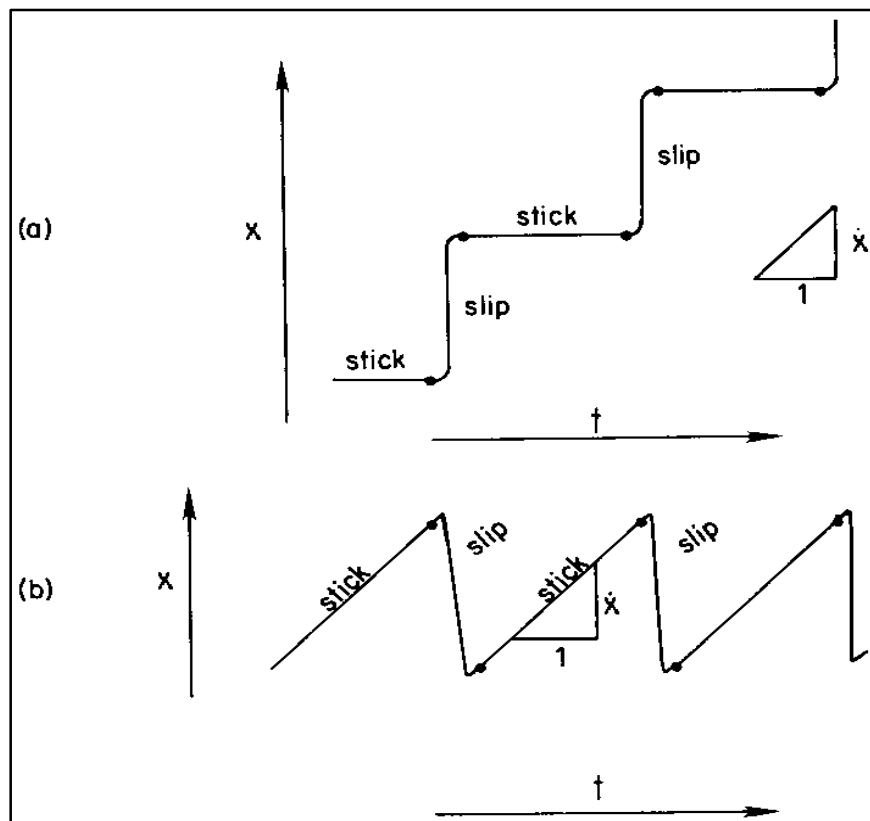
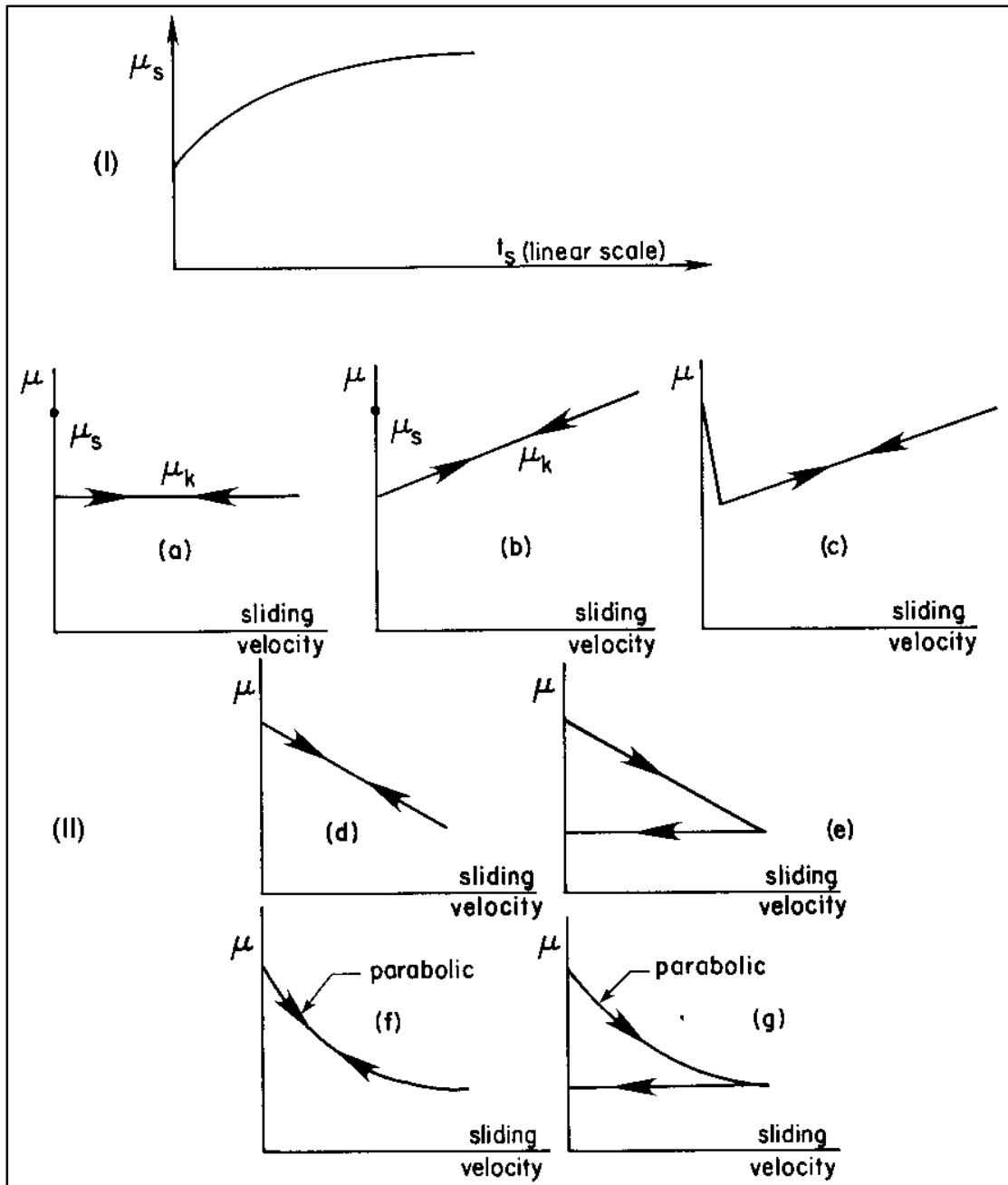


Figura 4.11 - Traçado Típico do Movimento de Aderência-Deslizamento

[Reproduzida de Oden e Martins, 1985]



**Figura 4.12 - Modelos Matemáticos de Variação da Força de Atrito**

[Reproduzida de Oden e Martins, 1985]

Com a entrada de dados apropriada, esses modelos simularão o movimento de aderência-deslizamento. A precisão de seus resultados dependerá de quão próximas as características supostas para a força de atrito estão das características reais do sistema. Porém, esses modelos apresentam algumas limitações que foram observadas, através de experimentos realizados, por muitos autores (ver Oden e Martins, 1985). Algumas dessas limitações são:

a) Para obtenção dessas curvas alguns investigadores suavizaram e diferenciaram numericamente os dados disponíveis. Conseqüentemente, algumas irregularidades inerentes ao processo de atrito podem ter sido parcialmente perdidas.

b) Outros autores mediram simultaneamente deslocamentos, velocidades e acelerações usando transdutores diferentes. Mas como cada transdutor tem sua própria resposta, a qual não coincide exatamente com a resposta de outros dois transdutores, os resultados obtidos podem conter os efeitos de calibração e erros de histerese.

c) A maioria dos investigadores estudou apenas o movimento tangencial do corpo que desliza. Com isso, supôs-se que a carga normal no contato era constante. Explícita ou implicitamente, todas as variações observadas na força de atrito são tomadas como consequência das correspondentes variações do coeficiente de atrito. No entanto, curvas mostrando um decrescimento da força de atrito não significam, necessariamente, um decrescimento do coeficiente de atrito, pois flutuações da carga também podem ocorrer.

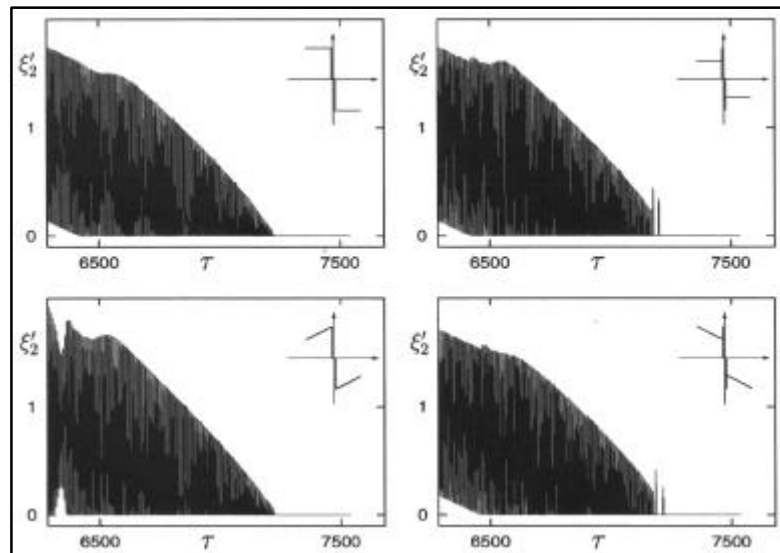
Devido a grande importância desse movimento de aderência-deslizamento, os estudos sobre o referido fenômeno concentram atualmente a atenção de muitos pesquisadores.

Estudos mais recentes em sismologia sugerem que os movimentos sísmicos, originados em falhas mais ou menos próximas da superfície, são consequência do fenômeno de aderência-deslizamento, o qual implica um aumento paulatino das tensões de corte ao longo da superfície de falha, que eventualmente conduz a uma caída repentina da tensão em uma zona de baixa resistência, associada a um deslizamento importante. Esse fenômeno foi observado em diferentes tipos de rochas e metais, assim como em modelos de blocos de espuma de borracha (Brune et al., 1990, 1993).

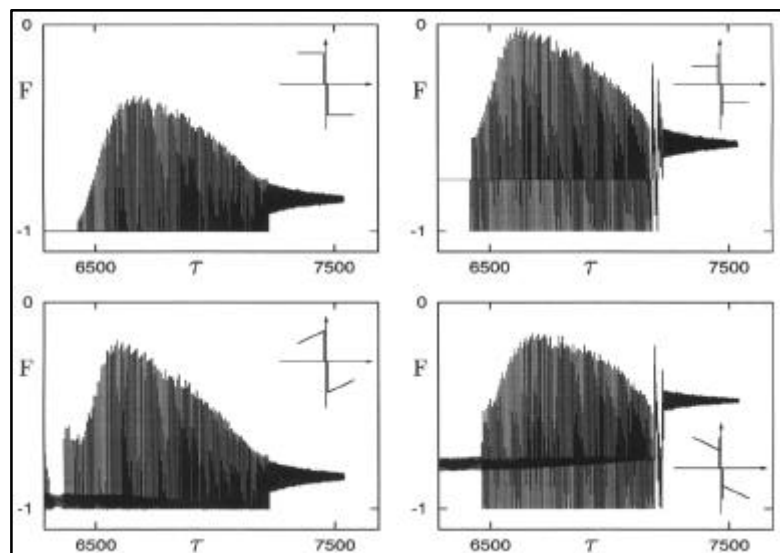
Wikiel e Hill (2000) analisaram um sistema mecânico constituído de duas massas as quais são conectadas por uma mola elástica e são livres para moverem-se verticalmente em um tubo cilíndrico. Foi suposto que entre as massas e as paredes do tubo há atrito de Coulomb e o movimento desse sistema unidimensional foi examinado com o objetivo de estudar o fenômeno de aderência-deslizamento.

De Baets et al. (2000) realizaram experimentos mostrando que o movimento de aderência-deslizamento pode também surgir de uma situação inicial de puro deslizamento e não apenas de uma fase inicial de aderência. Um exemplo típico disso é o barulho que os freios dos carros fazem durante a parte final da desaceleração, perto da parada.

Vielsack (2001) considerou quatro leis de atrito diferentes para analisar a estabilidade do movimento deslizante na desaceleração de um sistema mecânico. Foram aplicadas perturbações repentinas e permanentes. Os resultados mostraram que o fenômeno da aderência-deslizamento depende principalmente das propriedades do sistema mecânico e menos das características diferentes das leis de atrito utilizadas, como se pode observar nas figuras 4.13 e 4.14.



**Figura 4.13 - Velocidade Versus Tempo para Perturbações Permanentes**  
[Reproduzida de Vielsack, 2001]



**Figura 4.14 - Força de Contato Versus Tempo para Perturbações Permanentes**  
[Reproduzida de Vielsack, 2001]

## 4.7. ATRITO ENTRE MATERIAIS NÃO METÁLICOS

Com respeito às propriedades do atrito, materiais não metálicos apresentam algumas diferenças dos metais. Essas diferenças surgem, basicamente, do fato de que metais possuem superfícies as quais, quando descobertas, têm alta reatividade com o oxigênio e vapor d'água no ar, e também possuem energia de superfície alta, então gases e películas gordurosas, da mesma forma, tendem a ser fortemente absorvidos por essas superfícies metálicas. Conseqüentemente, como já explicado anteriormente, grande variação nas propriedades do atrito de metais são encontradas, dependendo do exato grau de limpeza das superfícies. Por

outro lado, segundo Rabinowicz (1965), a ocorrência de contaminantes em materiais não metálicos é menos importante. A questão da formação de óxidos não aparece na maioria dos casos, e películas absorvedoras de vários tipos geralmente não alteram as propriedades do atrito dos materiais não metálicos como profundamente alteram em superfícies metálicas.

Em contraste com os metais, os quais formam uma classe bem definida, os materiais não metálicos possuem grandes variações entre eles, como o diamante, a borracha, o concreto, o couro, o nylon, o grafite, a madeira, o gelo, etc. Apesar dessas grandes diferenças, verifica-se que as propriedades de atrito de materiais não metálicos são, aproximadamente, uniformes. Determina-se uma média das propriedades típicas do atrito e posteriormente considera-se como cada material individual diverge do padrão.

Segundo Rabinowicz (1965), quando materiais não metálicos sem lubrificação deslizam um sobre o outro, geralmente apresentam um coeficiente de atrito cinético (com a velocidade variando de 1 à 100cm/s) de 0,3 à 0,4 e um coeficiente de atrito estático (com tempo de contato de 1 à 100s) na faixa de 0,4 à 0,6. O dano e o desgaste na superfície são moderados e são menores que para metais limpos de dureza comparável. Naturalmente, os materiais não metálicos fracos apresentam mais dano e desgaste na superfície, sob comparáveis condições de carga, do que os materiais não metálicos mais duros. Quando bem lubrificados, a maioria dos materiais não metálicos possui coeficiente de atrito um pouco acima de 0,1, enquanto, sob condições semelhantes, os metais apresentam valores de 0,04 à 0,10. Quando materiais não metálicos estão deslizando sob outros materiais, metais ou não metais, as propriedades do atrito tendem a ser aquelas do material mais fraco, e a natureza do material mais duro faz pouca diferença. Isso é devido ao fato de que o material mais duro, na maioria dos casos, é coberto pelas partículas do material mais fraco, então o sistema torna-se material mais fraco deslizando sobre ele mesmo.

Materiais não metálicos geralmente obedecem às leis de atrito, como as descritas no item 4.4.1. Entretanto, existem algumas divergências do comportamento médio esquematizado anteriormente, mas quase todas são explicadas em termos das peculiaridades das propriedades mecânicas das substâncias em questão, sendo essas propriedades mecânicas o resultado de fatores estruturais excepcionais. A seguir apresentam-se alguns dos fatores mais importantes.

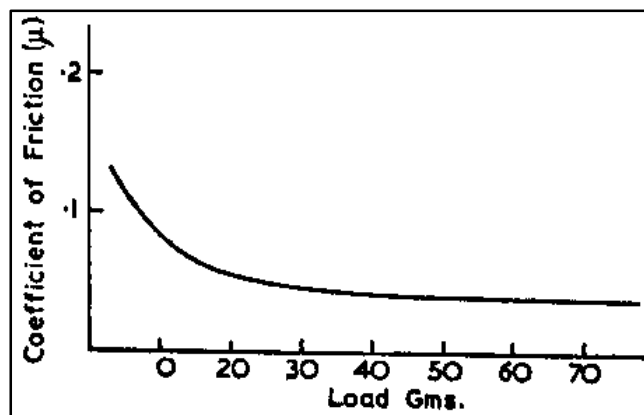
#### **4.7.1. ATRITO DE MATERIAIS ALTAMENTE ELÁSTICOS**

De acordo com Rabinowicz (1965), muitos materiais não metálicos, incluindo diamante e vários polímeros apresentam coeficientes de atrito que diminuem quando a carga é



umentada (ver figura 4.15). A explicação está baseada no fato de que esses materiais diferem dos metais e de muitos outros materiais não metálicos por terem altos valores para a deformação elástica máxima, e então suas deformações durante o deslizamento são muito mais elásticas do que plásticas.

Para junções deformadas elasticamente, pode-se fazer uma análise limite para o coeficiente de atrito. Quando a carga é aumentada há geralmente dois efeitos que são: o tamanho das junções aumentam e o número de juntas aumenta. Caso tenha-se um sistema onde o tamanho aumenta, mas o número permanece constante, a força de atrito para cada junção, como  $A_f$  no item 4.3.1, variará proporcionalmente à carga elevada na  $2/3$ . E, se o tamanho das junções permanece constante, mas seu número varia, a força de atrito variará proporcionalmente à carga. Os valores reais, dependendo da geometria, estarão entre esses dois limites. Para maiores detalhes ler Bowden e Tabor (1967).



**Figura 4.15 - Coeficiente de Atrito do Diamante em Função da Carga**  
[Reproduzida de Bowden e Tabor, 1967]

#### 4.7.2. ATRITO DE MATERIAIS COM ESTRUTURA CRISTALINA RETICULADA

Nesta categoria encontram-se materiais como grafite, bissulfeto de molibdênio e iodeto de cádmio. Essas substâncias são bastante diferentes em suas composições e tipos de união química, mas eles todos têm alguma coisa em comum que é uma estrutura reticulada. Quer dizer que a estrutura cristalina deles é tal que lâminas existem dentro dos seus reticulados cristalinos, dentro do qual os átomos são firmemente acumulados e fortemente unidos. Essas lâminas são separadas por distâncias relativamente grandes, mas mantêm-se unidas por forças residuais fracas. Por exemplo, no grafite, uma forma cristalina do carbono, a distância dos átomos dentro das lâminas é  $1,4 \times 10^{-8}$  cm, mas entre lâminas a distância é  $3,4 \times 10^{-8}$  cm. Em consequência, embora exista forças atrativas fortes dentro das lâminas do grafite, as forças segurando as várias lâminas juntas são muito mais fracas.

Grafite e outros materiais reticulados têm baixos coeficientes de atrito (em torno de 0,1) quando deslizando com uma face paralela a direção da lâmina, mas mais altos coeficientes de atrito (em torno de 0,3) quando deslizando com uma face perpendicular. Quando um bloco de grafite multicristalino ou outro material reticulado está deslizando sob uma superfície de metal, percebe-se que placas se separam do bloco de grafite e são depositadas sobre a superfície do metal. Isso traz em jogo as propriedades de atrito favoráveis de materiais reticulados.

Com grafite, encontra-se que baixos coeficientes de atrito e uma baixa taxa de desgaste são desenvolvidos apenas na presença de umidade ou de alguns materiais orgânicos voláteis. Em bissulfeto de molibdênio, parece que, sob algumas condições, nenhum material auxiliar é necessário para permitir que as condições de baixos coeficientes de atrito sejam mantidas.

#### **4.7.3. ATRITO DO TEFLON**

Este plástico é notável devido a sua grande inércia química por causa das fortes ligações de carbono-flúor em sua estrutura. Acompanhando isso, nota-se que esse material tem uma energia de superfície muito baixa. Conseqüentemente, o teflon tem uma superfície escorregadia e apresenta muito pouca tendência para formar ligações fortes com outros materiais. Então seu coeficiente de atrito é muito baixo, e valores abaixo de 0,04 são comumente observados a altas cargas e baixas velocidades de deslizamento.

#### **4.7.4. ATRITO DO NITRATO DE BORO**

Este é um exemplo de material no qual suas propriedades de atrito não podem ser explicadas através de sua estrutura. O nitrato de boro é muito inerte e apresenta muito pouca tendência a formar ligações fortes com outros materiais. E, além disso, ele apresenta uma estrutura reticulada. Mas, apesar dessas duas características, ele não possui baixos coeficientes de atrito.

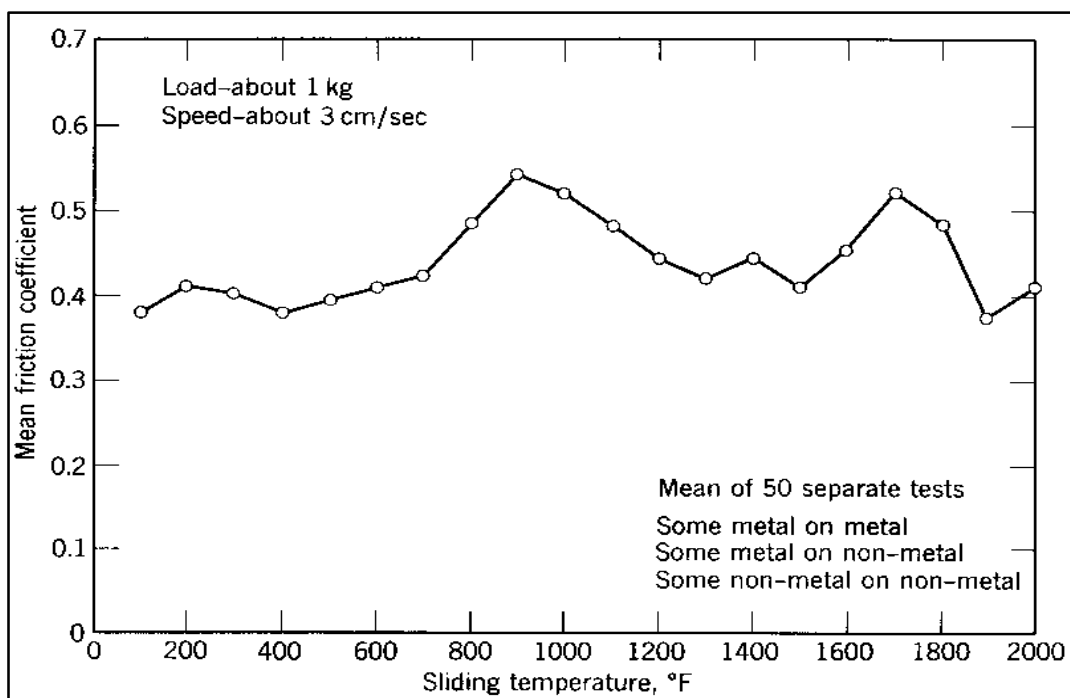
### **4.8. A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA NO ATRITO**

Neste item examinam-se as variações no atrito produzidas devido a uma mudança da temperatura.

Há dois tipos diferentes de mudanças na temperatura a serem consideradas. A primeira é o caso onde se tem dois corpos deslizando e mudam sua temperatura por aquecimento ou resfriamento externo; a segunda é o caso onde a temperatura eleva-se devido à alta velocidade de deslizamento, então se tem uma superfície quente sobreposta em um substrato frio. Porém, conforme Rabinowicz (1965), pode-se desprezar o segundo caso, pois durante alta velocidade de deslizamento o coeficiente de atrito é, geralmente, baixo. Se a velocidade de deslizamento é tão alta que algum derretimento da superfície ocorre, o coeficiente de atrito freqüentemente observado é inferior a 0,1.

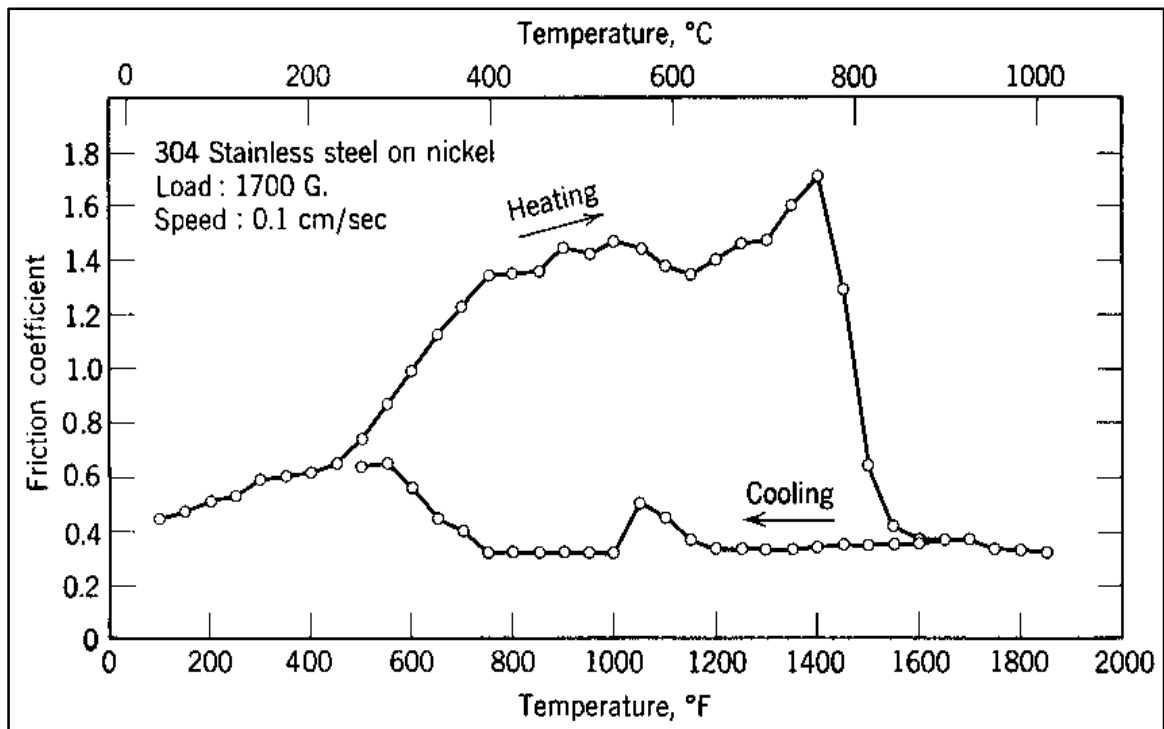
Para mudanças de temperatura externamente aplicadas, nota-se, segundo Rabinowicz (1965), que o coeficiente de atrito é basicamente insensível a variações de temperatura as quais meramente afetam a resistência mecânica dos corpos deslizando. Isso pode ser observado dos experimentos de Simon, McMahon e Bowen (1951), os quais não encontraram uma tendência no atrito entre  $-270^{\circ}\text{C}$  e  $+300^{\circ}\text{C}$ . Um resultado similar pode ser observado na figura 4.16, a qual mostra um gráfico da variação do coeficiente de atrito médio em função da temperatura de deslizamento para a média de 50 testes realizados, considerando uma grande variação de materiais.

Como se observa no gráfico da figura 4.16, em média, o coeficiente de atrito não é, essencialmente, dependente da temperatura. Nas figuras 4.17, 4.18, 4.19 e 4.20 apresentam-se gráficos da variação do coeficiente de atrito com a temperatura para materiais analisados individualmente.



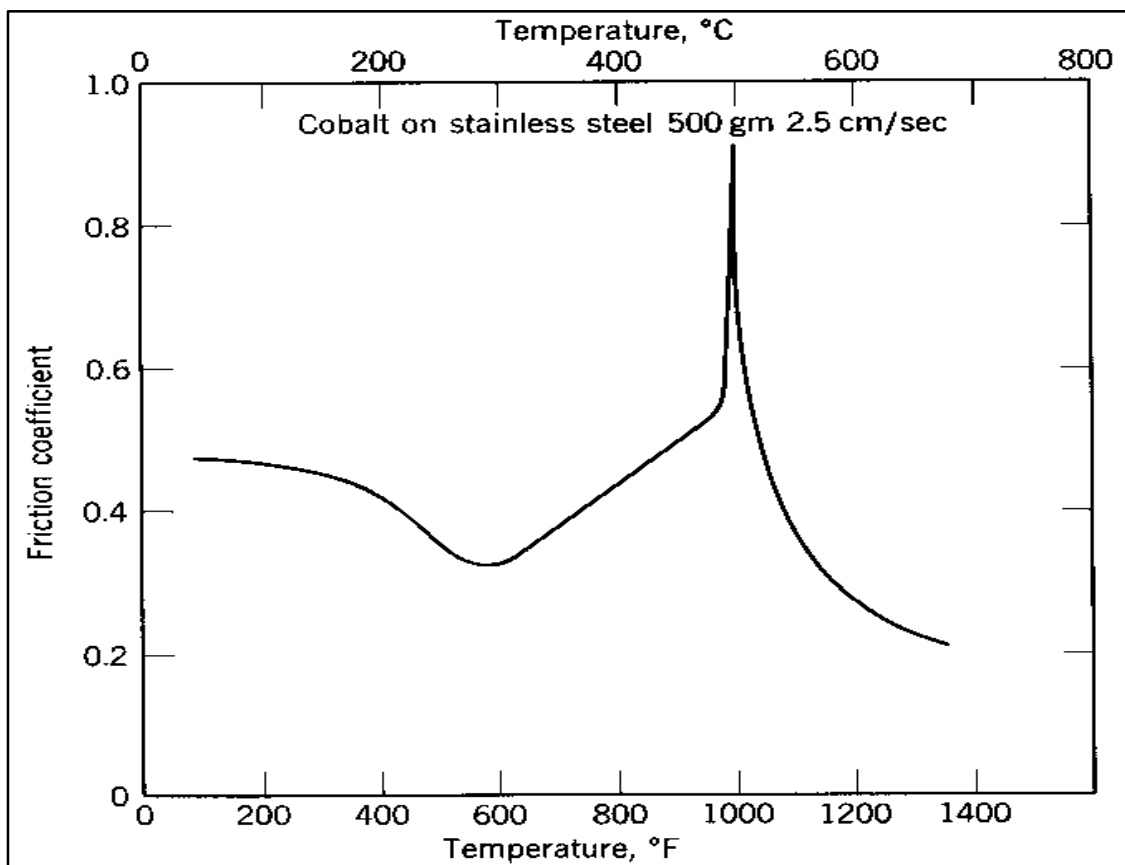
**Figura 4.16 - Coeficiente de Atrito Médio como Função da Temperatura de Deslizamento**

[Reproduzida de Rabinowicz, 1965]



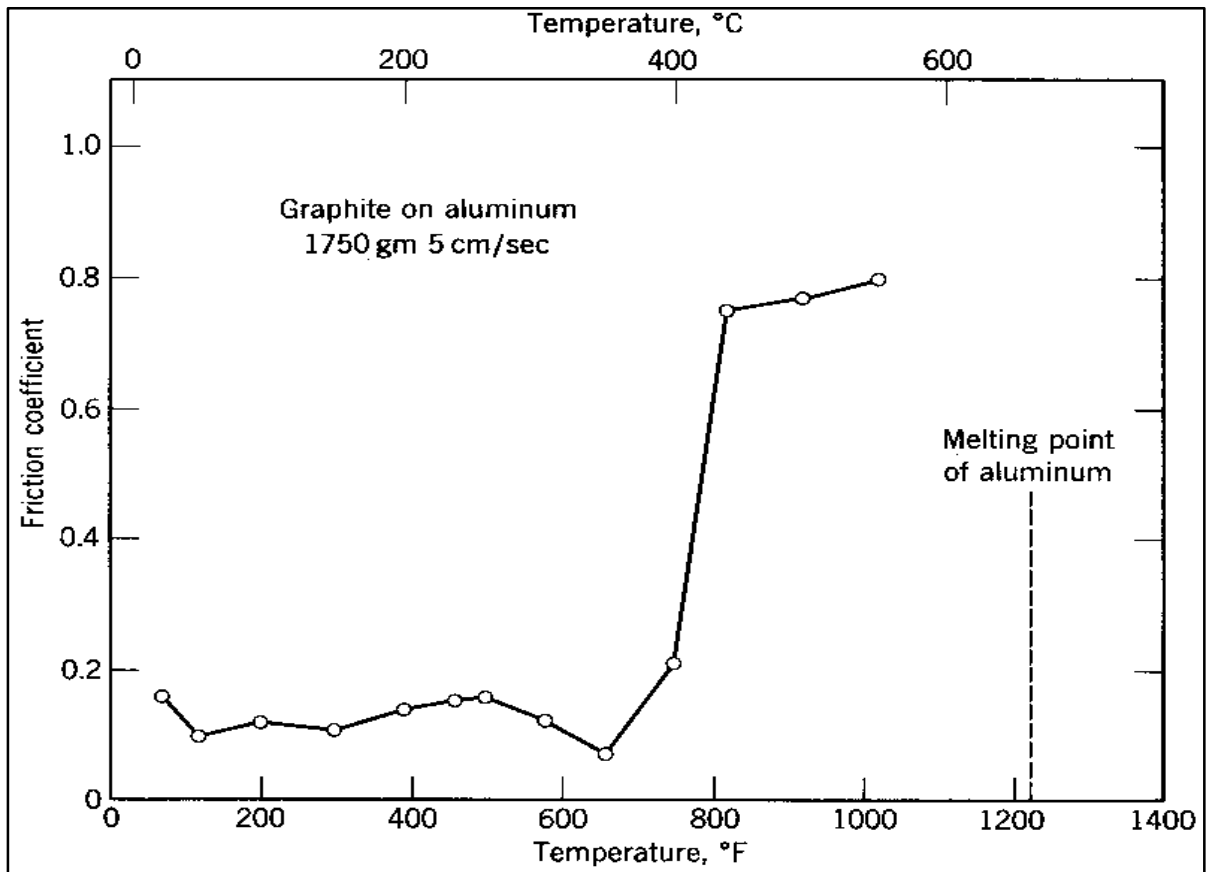
**Figura 4.17 - Coeficiente de Atrito como Função da Temperatura para Aço Limpo sobre Níquel**

[Reproduzida de Rabinowicz, 1965]



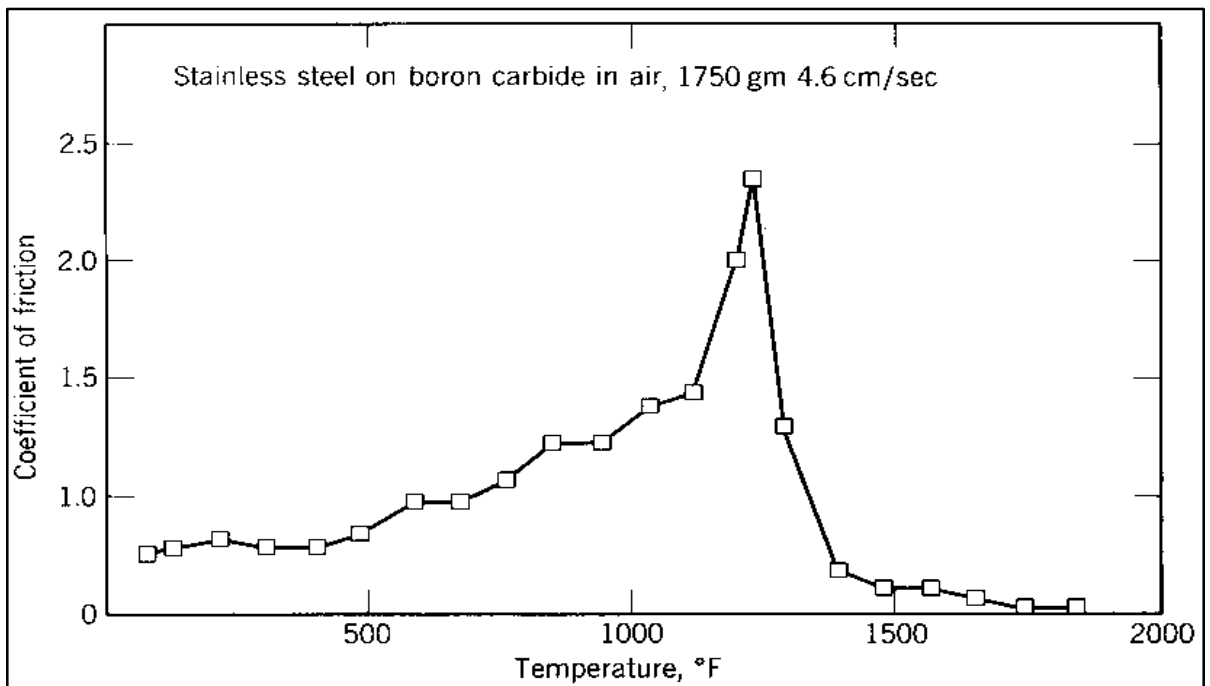
**Figura 4.18 - Coeficiente de Atrito como Função da Temperatura para Cobalto sobre Aço Limpo**

[Reproduzida de Rabinowicz, 1965]



**Figura 4.19 - Coeficiente de Atrito como Função da Temperatura para Grafite sobre Alumínio**

[Reproduzida de Rabinowicz, 1965]



**Figura 4.20 - Coeficiente de Atrito como Função da Temperatura para Aço Limpo sobre Carboneto de Boro**

[Reproduzida de Rabinowicz, 1965]

Embora os testes individuais mostrem considerável mudança no atrito quando a temperatura é elevada, a média de todos os testes não apresenta uma grande variação.

Algumas das causas das variações do atrito, nos testes individuais, quando a temperatura é aumentada, segundo Rabinowicz (1965) são as seguintes:

a) Com combinações de metais as quais apresentam forte interação do atrito, uma queda no coeficiente de atrito de 1,0 para 0,5 é observada, normalmente acima de um curto alcance de temperatura. Essa queda é causada pela formação de uma grossa camada de óxido e redução da interação metálica, como na figura 4.17, onde a camada de óxido de níquel formado à 1500°F ( $\approx 816^\circ\text{C}$ ) persiste no resfriamento. Segundo Rabinowicz (1965), Peterson, Florek e Lee (1960) perceberam que se o deslizamento continua enquanto a temperatura é reduzida, um característico ciclo de histerese se desenvolve.

b) Com muitos metais há mudanças no atrito, para mais ou para menos, quando uma espécie de óxido predominante é substituída por outra que tem maior ou menor capacidade lubrificante. Na figura 4.18 o pico no atrito à 1000°F ( $\approx 538^\circ\text{C}$ ) deve estar associado com a mudança das espécies óxidas de  $\text{Co}_3\text{O}_4$  para  $\text{CoO}$ .

c) É universalmente observado que um aumento no atrito acontece quando a temperatura de fusão de um dos corpos está se aproximando, como na figura 4.19, na qual o aumento no atrito aconteceu próximo a temperatura de fusão do alumínio.

d) Para sistemas deslizantes no qual uma cobertura na superfície é formada quando passa através de um estágio de aderência, há um pico no atrito correspondente a este estágio de aderência, como na figura 4.20. Assim o carboneto de boro, o qual forma uma película de óxido bórico quando aquecido no ar, dá um pico no atrito, pois o óxido bórico é um material com alta viscosidade.

Finalmente, de acordo com Soong e Darguch (1997), para os tipos de sistemas deslizantes tipicamente encontrados em amortecedores por atrito, não é normal que a resposta do sistema seja sensível a variações relativamente pequenas da temperatura ambiente que podem ser encontradas em qualquer lugar. Além disso, como mostram os gráficos das figuras 4.17 a 4.20, o pico do coeficiente de atrito ocorre apenas a temperaturas muito altas, acima de  $300^\circ\text{C}$ , o que mostra que é praticamente impossível que este pico aconteça na prática com os amortecedores de vibração por atrito, a menos que seja um caso de incêndio.

## 5. ESQUEMAS COMPUTACIONAIS

Devido a não-linearidade e descontinuidade da força de atrito, torna-se difícil o processo de cálculo de sistemas que envolvem atrito. Então, a seguir são discutidos dois esquemas computacionais propostos por Tan e Rogers (1995) e Mostaghel e Davis (1997), que facilitam o cálculo sem perder muito a precisão. O primeiro sugere substituir o atrito por um amortecimento viscoso equivalente e o outro propõe substituir a função sinal descontínua por funções contínuas, considerando quatro opções possíveis.

### 5.1. JUSTIFICATIVA

Em muitos problemas de engenharia envolvendo atrito, este é tratado como atrito de Coulomb, no qual a magnitude da força de atrito é constante, mas seu sentido é sempre oposto àquele da velocidade de deslizamento.

As leis clássicas de atrito de Coulomb, como visto no capítulo anterior, podem ser descritas pelas seguintes fórmulas matemáticas:

$$F_a = -\mu_k N \operatorname{sgn}(\dot{x}), \quad \text{para } \dot{x} \neq 0,$$
$$F_a \leq \mu_s N, \quad \text{para } \dot{x} = 0.$$

Em problemas dinâmicos, o sentido da velocidade de deslizamento é variável com o tempo. É óbvio que quando a velocidade tangencial,  $\dot{x}$ , muda de sinal, a força de atrito apresenta um salto brusco. Portanto, as muitas mudanças no sentido da velocidade tornam o sistema extremamente não-linear e causam descontinuidades na força de atrito, complicando o processo de cálculo da resposta do sistema. Para evitar e reduzir esses problemas de cálculo, vários métodos diferentes têm sido desenvolvidos.

Den Hartog (1931) deu uma solução analítica para um sistema de um grau de liberdade sob excitação harmônica. Levitan (1960) usou uma representação em Séries de

Fourier da força de atrito de Coulomb e tratou o movimento contínuo de um sistema sob oscilação forçada. No caso de carregamentos sísmicos, a excitação é muito irregular e o problema tem que ser tratado numericamente. Para linearizar o problema, para pequenos coeficientes de atrito, o atrito de Coulomb foi representado aproximadamente por um amortecimento viscoso equivalente por investigadores tais como Jacobson (1930), Tan e Rogers (1995), entre outros. Também têm sido realizados estudos sobre o próprio coeficiente de atrito, como por exemplo, o trabalho de Wang e Shieh (1991), o qual considerou um modelo de coeficiente variável de atrito. Seus modelos foram usados para um sistema de um grau de liberdade com um coeficiente de atrito variando como uma função da velocidade de deslizamento das superfícies de contato.

A seguir, consideram-se formulações que representam o atrito de Coulomb por meio de um amortecimento viscoso equivalente, de acordo com Tan e Rogers (1995) e as propostas por Mostaghel e Davis (1997) que mostram que a função sinal descontínua da força de atrito de Coulomb pode ser aproximada por funções contínuas.

## **5.2. AMORTECIMENTO VISCOSO EQUIVALENTE PARA ATRITO DE COULOMB**

O propósito deste item é explorar a possibilidade de um modelo equivalente para o amortecimento por atrito, principalmente para sistemas de múltiplos graus de liberdade, considerando a importância prática de modelos de amortecimento equivalente para sistemas de vários graus de liberdade com atrito de Coulomb. Escolheu-se como modelo equivalente ao amortecimento por atrito o amortecimento viscoso, por este ser o mais conhecido e o mais simples. Esta aproximação pode ser usada em simulações dinâmicas de qualquer sistema mecânico ou estrutural com atrito.

Inicia-se com uma explicação sucinta de como encontrar o amortecimento viscoso equivalente ao atrito de Coulomb para sistemas de um grau de liberdade. E em seguida parte-se para uma exposição mais detalhada sobre como determinar o amortecimento viscoso equivalente ao atrito de Coulomb para sistemas vibratórios de vários graus de liberdade.



### 5.2.1. SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE

A determinação do amortecimento viscoso equivalente para sistemas de um grau de liberdade foi discutida por Thomson (1981) e Groehs (1999), entre outros, e será descrita a seguir.

A influência principal do amortecimento em sistemas oscilatórios é a de limitar a amplitude de resposta na ressonância. As curvas de resposta mostram que o amortecimento tem influência pequena nas regiões afastadas da ressonância. Para o amortecimento viscoso, a expressão encontrada para a amplitude na ressonância é:

$$a_r = \frac{F_{ex}}{c\omega_n}, \quad (5.1)$$

onde  $a_r$  é a amplitude de oscilação na ressonância,  $F_{ex}$  é a força de excitação,  $c$  é o coeficiente de amortecimento e  $\omega_n$  é a frequência natural de oscilação não amortecida. Não existe expressão tão simples para outros tipos de amortecimento. É possível, entretanto, aproximar-se da amplitude na ressonância, substituindo  $c$  na equação (5.1) por um amortecimento equivalente  $c_{eq}$ .

Para calcular este amortecimento equivalente iguala-se a energia dissipada pelo amortecimento viscoso equivalente em um período com a energia dissipada por atrito, com movimento harmônico suposto. Com isso:

$$E_{ep} = E_{ap}, \quad (5.2)$$

sendo  $E_{ep}$  a energia dissipada pelo amortecimento viscoso equivalente por ciclo e  $E_{ap}$  é a energia dissipada por atrito por ciclo.

Mas  $E_{ep} = \pi c_{eq} \omega a_r^2$ , onde  $c_{eq}$  é o amortecimento equivalente e  $\omega$  é a frequência da excitação. Então, da equação (5.2), tem-se:

$$\pi c_{eq} \omega a_r^2 = E_{ap} \quad (5.3)$$

Isolando-se o amortecimento equivalente na equação (5.3), obtém-se:

$$c_{eq} = E_{ap} / \pi \omega a_r^2 \quad (5.4)$$

E, sabendo-se que  $E_{ap} = 4a_r F_a$ , então se substitui na equação (5.4) e resulta:

$$c_{eq} = 4F_a / \pi \omega a_r \quad (5.5)$$

### 5.2.2. SISTEMAS DE VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

Para um sistema de vários graus de liberdade as forças externas usualmente apresentam componentes com diferentes frequências e podem ser periódicas e não-periódicas.

Nesta seção, são apresentadas aproximações para encontrar o amortecimento viscoso equivalente em sistemas de múltiplos graus de liberdade com excitações periódicas e não-periódicas.

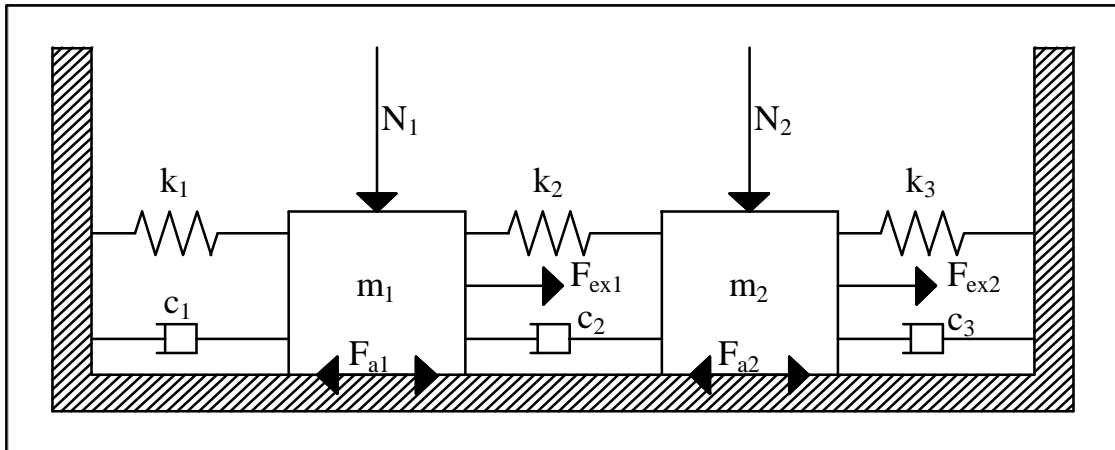
### SOLUÇÃO ANALÍTICA

A equação de movimento para um sistema de múltiplos graus de liberdade massa-mola-amortecedor pode ser escrita como

$$[\mathbf{M}]\ddot{\vec{X}} + [\mathbf{C}]\dot{\vec{X}} + [\mathbf{K}]\vec{X} = \vec{F}_{\text{ex}} + \vec{F}_a, \quad (5.6)$$

onde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente e  $\vec{F}_{\text{ex}}$  e  $\vec{F}_a$  são os vetores de forças de excitação e de atrito, respectivamente.

Se um sistema de dois graus de liberdade é considerado, como mostrado na figura 5.1, então



**Figura 5.1 - Sistema de Dois Graus de Liberdade com Atrito**

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

As forças externas no sistema consistem da força normal  $\vec{N}$ , força de excitação horizontal  $\vec{F}_{\text{ex}}$  e força de atrito  $\vec{F}_a$ . Elas são expressas nas seguintes formas:

$$\vec{N} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\vec{F}_{\text{ex}} = \begin{Bmatrix} F_{\text{ex1}} \\ F_{\text{ex2}} \end{Bmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\vec{F}_a = \begin{Bmatrix} F_{a1} \\ F_{a2} \end{Bmatrix} = -\mu \bar{N} \text{sgn}(\dot{x}). \quad (5.12)$$

Para esse desenvolvimento, supõe-se que a força normal  $N$  é sempre maior ou igual a zero. Com isso a força de atrito  $F_a$  pode ser calculada por meio da equação (5.12).

Usando a técnica de superposição modal e a transformação modal  $\vec{X} = \Phi \vec{Y}$ , tem-se:

$$\Phi^T [\mathbf{M}] \Phi = \mathbf{I} \quad (5.13)$$

$$\Phi^T [\mathbf{K}] \Phi = [\omega_j^2] \quad (5.14)$$

$$\Phi^T [\mathbf{C}] \Phi = [2\zeta_j \omega_j] \quad (5.15)$$

onde  $\Phi$  é a matriz de transformação modal,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade,  $\omega_j$  é a  $j$ -ésima frequência natural e  $\zeta_j$  é a  $j$ -ésima razão de amortecimento. Com isso, os lados direitos das equações (5.14) e (5.15) são matrizes diagonais.

Portanto, a equação de vários graus de liberdade (5.6) pode ser desacoplada, resultando  $n$  equações de um grau de liberdade nas coordenadas modais. Essas equações de uma grau de liberdade têm a forma:

$$\ddot{y}_j + 2\zeta_j \omega_j \dot{y}_j + \omega_j^2 y_j = F_{aj} + F_{\text{ex}j}, \quad j = 1, 2 \quad (5.16)$$

## ANÁLISE DE ENERGIA

Os valores das componentes de energia dissipada por amortecimento viscoso e atrito não variam de um sistema de coordenadas para outro. Então, essas energias podem ser descritas em ambas as coordenadas locais e modais como segue.

A energia dissipada por amortecimento viscoso,  $E_d$ , no intervalo de tempo  $\Delta t$  durante o qual os valores são supostos constantes é dada por

$$E_d = \{c_1 \dot{x}_1^2 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + c_3 \dot{x}_2^2\} \Delta t = \vec{X}^T [\mathbf{C}] \vec{X} \Delta t \quad (5.17)$$

$$= \vec{Y}^T [2\zeta_j \omega_j] \vec{Y} \Delta t = \{2\zeta_1 \omega_1 \dot{y}_1^2 + 2\zeta_2 \omega_2 \dot{y}_2^2\} \Delta t. \quad (5.18)$$

A energia dissipada por atrito,  $E_a$ , no intervalo de tempo  $\Delta t$  é:

$$E_a = \{F_{a1} \dot{x}_1 + F_{a2} \dot{x}_2\} \Delta t = \vec{X}^T \vec{F}_a \Delta t \quad (5.19)$$

$$= \left\{ \vec{Y}^T \Phi^T (\Phi^T)^{-1} \vec{P}_a \right\} \Delta t = \left\{ \vec{Y}^T \vec{P}_a \right\} \Delta t = \{P_{a1} \dot{y}_1 + P_{a2} \dot{y}_2\} \Delta t, \quad (5.20)$$

onde  $\vec{P}_a = \Phi^T \vec{F}_a$  representa a força de atrito em coordenadas modais.

## AMORTECIMENTO EQUIVALENTE CONSTANTE PARA EXCITAÇÃO PERIÓDICA

Se a excitação é periódica, o método da energia para obter o amortecimento equivalente constante de um sistema de um grau de liberdade pode ser estendido para um sistema de vários graus de liberdade. O sistema pode ser desacoplado usando a matriz modal  $\Phi$ , obtida a partir dos autovetores da matriz dinâmica  $\mathbf{D}$ . Então  $\zeta_{aj}$  pode ser calculada utilizando-se a razão de amortecimento modal equivalente  $\zeta_{aj}$ , ao invés das forças de atrito modais nas equações desacopladas.

Para o sistema de dois graus de liberdade mostrado na figura 5.1, com frequência de excitação  $\omega$ , por exemplo, a  $j$ -ésima equação modal usando a razão de amortecimento modal equivalente  $\zeta_{aj}$  é escrita como

$$\ddot{y}_j + 2(\zeta_j + \zeta_{aj})\omega_j \dot{y}_j + \omega_j^2 y_j = a_{1j} \sin(\omega t) + a_{2j} \sin(n\omega t), \quad (5.21)$$

onde  $a_{1j}$  e  $a_{2j}$  são constantes reais. Como a segunda frequência de excitação é o  $n$ -ésimo múltiplo da primeira, as forças de excitação são periódicas. A solução da equação (5.21) pode ser escrita como

$$y_j = b_{1j} \sin(\omega t - \phi_{1j}) + b_{2j} \sin(n\omega t - \phi_{2j}). \quad (5.22)$$

A energia total dissipada pela  $j$ -ésima equivalente de amortecimento modal por período,  $E_{epj}$ , é calculada como

$$\begin{aligned} E_{epj} &= \int^T 2\zeta_{aj}\omega_j \dot{y}_j^2 dt \\ &= 2\zeta_{aj}\omega_j \left\{ b_{1j}^2 \omega^2 \int^T \cos^2(\omega t - \phi_{1j}) dt + n^2 b_{2j}^2 \omega^2 \int^T \cos^2(n\omega t - \phi_{2j}) dt \right\} + \\ &\quad + 2\zeta_{aj}\omega_j \left\{ 2nb_{1j}b_{2j}\omega^2 \int^T \cos(\omega t - \phi_{1j}) \cos(n\omega t - \phi_{2j}) dt \right\} \\ &= 4\pi\zeta_{aj}(U_{1j} + n^2 U_{2j})(\omega/\omega_j), \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde  $U_{1j} = \frac{1}{2}\omega_j^2 b_{1j}^2$  e  $U_{2j} = \frac{1}{2}\omega_j^2 b_{2j}^2$  são as maiores energias potenciais modais para as duas excitações.  $U_{1j} + n^2 U_{2j}$  pode ser pensado como a maior energia potencial no período. Como a energia total dissipada por amortecimento modal equivalente por período  $E_{epj}$  é igual a energia total dissipada por atrito  $E_{apj}$ , isto é,  $E_{epj} = E_{apj}$ , a razão de amortecimento modal equivalente pode ser escrita como

$$\zeta_{aj} = E_{apj} / [4\pi(U_{1j} + n^2 U_{2j})(\omega/\omega_j)]. \quad (5.24)$$

Desde que  $\zeta_{aj}$  é suposto constante, a matriz de amortecimento viscoso equivalente constante pode ser obtida usando a matriz de transformação modal  $\Phi$ :

$$[C_a] = (\Phi^T)^{-1} [2\zeta_{aj}\omega_j] \Phi^{-1}. \quad (5.25)$$

### AMORTECIMENTO EQUIVALENTE INSTANTÂNEO PARA EXCITAÇÃO NÃO-PERIÓDICA

Se a excitação externa é não periódica ou se o cálculo é apenas para parte do período de uma excitação de período muito longo, então a constante  $\zeta_{aj}$  por ciclo não pode ser calculada. Para esta situação, é desenvolvido um método chamado de método do amortecimento equivalente instantâneo, no qual o valor do amortecimento é calculado baseado na igualdade da energia dissipada por amortecimento viscoso equivalente e por atrito a cada passo de tempo.

Das equações (5.17) à (5.20) a energia dissipada a cada passo de tempo pode ser escrita em ambas as coordenadas modais e locais como:

$$\{2\zeta_{a1}\omega_1\dot{y}_1^2 + 2\zeta_{a2}\omega_2\dot{y}_2^2\}\Delta t = -\{P_{a1}\dot{y}_1 + P_{a2}\dot{y}_2\}\Delta t, \quad (5.26)$$

$$\{c_{a1}\dot{x}_1^2 + c_{a2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + c_{a3}\dot{x}_2^2\}\Delta t = -\{F_{a1}\dot{x}_1 + F_{a2}\dot{x}_2\}\Delta t, \quad (5.27)$$

onde os amortecedores de atrito equivalentes  $c_{a1}$ ,  $c_{a2}$  e  $c_{a3}$  são tomados para estar em paralelo com o sistema original de amortecedores. Reescrevendo as equações (5.26) e (5.27), tem-se:

$$(2\zeta_{a1}\omega_1\dot{y}_1 + P_{a1})\dot{y}_1 + (2\zeta_{a2}\omega_2\dot{y}_2 + P_{a2})\dot{y}_2 = 0, \quad (5.28)$$

$$c_{a1}\dot{x}_1^2 + c_{a2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + c_{a3}\dot{x}_2^2 + F_{a1}\dot{x}_1 + F_{a2}\dot{x}_2 = 0. \quad (5.29)$$

#### EM COORDENADAS MODAIS

Da equação (5.28) tem-se quatro situações: (1) Se  $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$ , não há trabalho modal feito por  $P_{a1}$  e  $P_{a2}$ , então  $\zeta_{a1} = \zeta_{a2} = 0$ .

(2) Se  $\dot{y}_1 = 0$ ,  $\dot{y}_2 \neq 0$ , então não há trabalho modal feito por  $P_{a1}$ , então  $\zeta_{a1} = 0$  e

$$\zeta_{a2} = -P_{a2} / 2\omega_2\dot{y}_2. \quad (5.30)$$

(3) Se  $\dot{y}_1 \neq 0$ ,  $\dot{y}_2 = 0$ , então não há trabalho modal feito por  $P_{a2}$ , então  $\zeta_{a2} = 0$  e

$$\zeta_{a1} = -P_{a1} / 2\omega_1\dot{y}_1. \quad (5.31)$$

(4) Finalmente, se  $\dot{y}_1 \neq 0$ ,  $\dot{y}_2 \neq 0$ , então supõem-se que

$$\zeta_{a1} = -P_{a1} / 2\omega_1\dot{y}_1, \quad (5.32)$$

$$\zeta_{a2} = -P_{a2} / 2\omega_2\dot{y}_2, \quad (5.33)$$

como  $\dot{y}_j$  e  $P_{aj}$  variam em cada passo de tempo, então  $\zeta_{aj}$  é um valor instantâneo.

## EM COORDENADAS LOCAIS

Supondo que a matriz de amortecimento equivalente é da forma de amortecimento proporcional, que pode conduzir para uma matriz diagonal pela mesma transformação como para as matrizes de massa e rigidez,

$$[\mathbf{C}_a] = \begin{bmatrix} c_{a1} + c_{a2} & -c_{a2} \\ -c_{a2} & c_{a2} + c_{a3} \end{bmatrix} = q_{10}[\mathbf{M}] + q_{11}[\mathbf{K}] = q_{10} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + q_{11} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

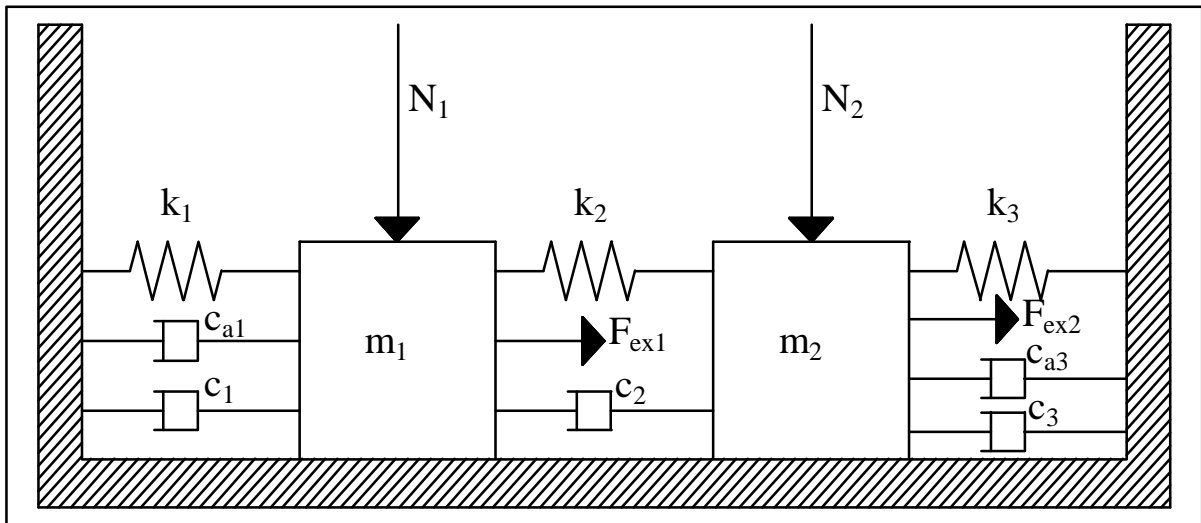
de forma que

$$c_{a1} = q_{10}m_1 + q_{11}(k_{11} + k_{12}), \quad c_{a2} = -q_{11}k_{21}, \quad c_{a3} = q_{10}m_2 + q_{11}(k_{21} + k_{22}). \quad (5.35)$$

Substituindo a equação (5.35) na (5.29), onde  $k_{12} = k_{21}$ , tem-se

$$q_{10}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) + q_{11}(k_{11} \dot{x}_1^2 + k_{22} \dot{x}_2^2 + 2k_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2) + F_{a1} \dot{x}_1 + F_{a2} \dot{x}_2 = 0, \quad (5.36)$$

onde  $q_{10}$  e  $q_{11}$  são variáveis independentes e não podem ser determinadas nas equações acima. Desde que o trabalho do atrito em cada massa é independente do movimento da outra massa, admite-se que  $c_{a2} = 0$  e  $q_{11} = 0$ . O sistema original de dois graus de liberdade com atrito é então levado a ser equivalente ao sistema mostrado na figura 5.2.



**Figura 5.2 - Sistema Anterior com Amortecimento Viscoso Equivalente**

A equação (5.36) torna-se

$$q_{10}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) + F_{a1} \dot{x}_1 + F_{a2} \dot{x}_2 = 0. \quad (5.37)$$

Como antes, há quatro casos para calcular  $q_{10}$ : (1) se ambas as massas estão paradas então o sistema não tem energia dissipada e  $q_{10} = 0$ ;

(2) se  $m_1$  está deslizando e  $m_2$  está parada, então não há energia dissipada por atrito em  $m_2$  e

$$q_{10} = -F_{a1} / m_1 \dot{x}_1; \quad (5.38)$$

(3) se  $m_2$  está deslizando e  $m_1$  está parada, então não há energia dissipada por atrito em  $m_1$  e

$$q_{10} = -F_{a2} / m_2 \dot{x}_2; \quad (5.39)$$

(4) se ambas as massas estão deslizando então

$$q_{10} = (-F_{a1} - F_{a2}) / (m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2), \quad (5.40)$$

onde  $q_{10}$  é um valor instantâneo pois  $F_{aj}$  e  $\dot{x}_j$  são funções do tempo. A matriz de amortecimento equivalente instantânea pode ser obtida por

$$[C_a] = q_{10}[M]. \quad (5.41)$$

Os valores modais equivalentes podem também ser extraídos desta aproximação

$$[2\zeta_{aqj}\omega_j] = \Phi^T [C_a] \Phi. \quad (5.42)$$

Deve-se mencionar que esses valores modais equivalentes  $\zeta_{aqj}$  não são os mesmos valores obtidos das fórmulas (5.30) à (5.33) desde que as suposições básicas dessas duas aproximações são diferentes.

Substituindo as equações (5.13) e (5.41) na equação (5.42), os valores modais equivalentes  $\zeta_{aqj}$  podem ser obtidos simplesmente de  $q_{10}$ , usando

$$\zeta_{aqj} = q_{10} / 2\omega_j. \quad (5.43)$$

Com isso, a matriz de amortecimento equivalente instantânea é obtida por:

$$[C_a] = (\Phi^T)^{-1} [2\zeta_{aqj}\omega_j] \Phi^{-1}. \quad (5.44)$$

A matriz de amortecimento equivalente instantânea pode ser usada tanto para excitação periódica quanto para excitação não-periódica de um sistema de vários graus de liberdade.

Durante o movimento, as velocidades das massas poderiam passar por zero ou ter valores muito pequenos enquanto param. O cálculo do amortecimento equivalente instantâneo requer divisão pela velocidade e pode então levar a valores muito altos, que podem causar algumas dificuldades nas simulações. Assim, é necessário limitar seus valores.

Para simplificar os cálculos, pode-se usar uma média do valor do amortecimento equivalente instantâneo para aproximar soluções. Para reduzir a influência dos valores instantâneos grandes na média, a fórmula para a média do amortecimento equivalente instantâneo é dada em coordenadas modais, como

$$\bar{\zeta}_{aj} = 1 / \left( \frac{1}{N_T} \sum_{N_T} \frac{1}{\zeta_{aj}} \right), \quad (5.45)$$

e em coordenadas locais como

$$\bar{q}_{10} = 1 / \left( \frac{1}{N_T} \sum_{N_T} \frac{1}{q_{10}} \right). \quad (5.46)$$

sendo  $N_T$  o número total de passos de tempo da simulação. Se há alguns valores zero de  $\zeta_{aj}$  ou  $q_{10}$ , então esses casos não são levados em conta. Usando as equações (5.43) à (5.46), a razão de amortecimento modal equivalente média,  $\bar{\zeta}_{aqj}$ , pode ser obtida da fórmula

$$\bar{\zeta}_{aqj} = \bar{q}_{10} / 2\omega_j, \quad j = 1, 2. \quad (5.47)$$

### 5.3. REPRESENTAÇÃO DO ATRITO DE COULOMB POR FUNÇÕES CONTÍNUAS

Neste item, seguindo-se as propostas de Mostaghel e Davis (1997), é sugerido substituir a função sinal descontínua da velocidade de deslizamento na força de atrito por uma função contínua. Mostra-se que a descontinuidade da força de atrito de Coulomb pode ser representada por pelo menos quatro funções contínuas diferentes. Cada uma dessas funções envolve uma constante que controla o nível de precisão daquela representação da força de atrito. Indubitavelmente outras funções contínuas com características similares podem ser formuladas.

A precisão das várias representações é verificada por comparação da resposta de um sistema de um grau de liberdade, obtido por solução numérica utilizando aquelas representações, com uma solução analítica exata dada por Den Hartog (1931).

#### 5.3.1. ANÁLISE

Conforme descrito anteriormente, a força de atrito de Coulomb é definida por

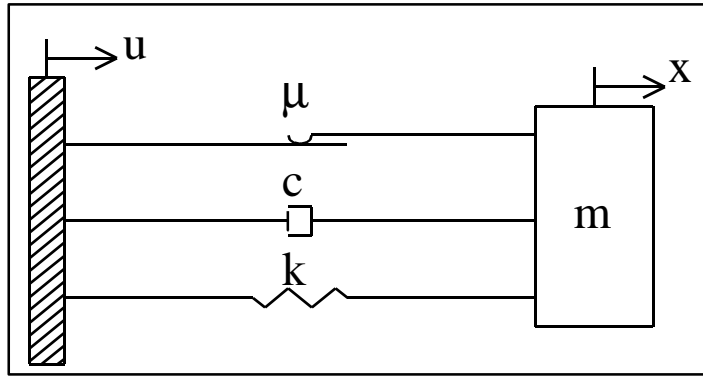
$$F_a = -\mu mg \operatorname{sgn}[\dot{x}(t)] \quad (5.48)$$

onde  $F_a$  representa a força de atrito,  $m$  é a massa da estrutura,  $g$  é a aceleração da gravidade, e  $\dot{x}(t)$  é a velocidade de deslizamento como um função do tempo. Aqui,  $\mu$ , o coeficiente de atrito, é suposto ser constante. O sinal da velocidade de deslizamento é representado pela função sinal,

$$\operatorname{Sgn}[\dot{x}(t)] = \begin{cases} +1 & \text{para } \dot{x}(t) > 0 \\ 0 & \text{para } \dot{x}(t) = 0 \\ -1 & \text{para } \dot{x}(t) < 0 \end{cases} \quad (5.49)$$

Considera-se um modelo mecânico de acordo com o apresentado na figura 5.3.





**Figura 5.3 - Representação Esquemática da Estrutura Considerada**

O sistema envolve força restitutiva, força de amortecimento viscoso e força de atrito. A equação de equilíbrio que governa o movimento desse tipo de sistema em fases de deslizamento é dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + m\mu g \operatorname{sgn}[\dot{x}] = -m\ddot{u} \quad (5.50)$$

onde  $\ddot{u}$  é a aceleração da base, e  $x$  é a resposta em termos de deslocamento. Em fases não-deslizantes  $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ ,  $x = \text{constante}$ , e  $|\omega_n^2 x + \ddot{u}| < \mu g$ . A transição da fase não-deslizante para a fase deslizante,  $|\omega_n^2 x + \ddot{u}| = \mu g$ . Deve ser notado que, embora a equação (5.48) é válida apenas durante as fases deslizantes, desde que o deslocamento relativo  $x$  permaneça constante durante cada fase não-deslizante, a equação (5.50) define  $x$  para ambas as fases deslizante e não-deslizante. A forma convencional da equação (5.50) é

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x + \mu g \operatorname{sgn}[\dot{x}] = -\ddot{u} \quad (5.51)$$

onde  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  é a frequência natural e  $\zeta = c/2\omega_n m$  é a razão de amortecimento. Se a aceleração da base é definida por

$$\ddot{u} = a_a \sin \Omega t \quad (5.52)$$

então as seguintes substituições:

$$\tau = \omega_n t, \quad \beta = \Omega / \omega_n, \quad \delta = m a_a / k, \quad x = \nu \delta \quad \text{e} \quad \alpha = \mu g / a_a$$

na equação (5.51) produzem

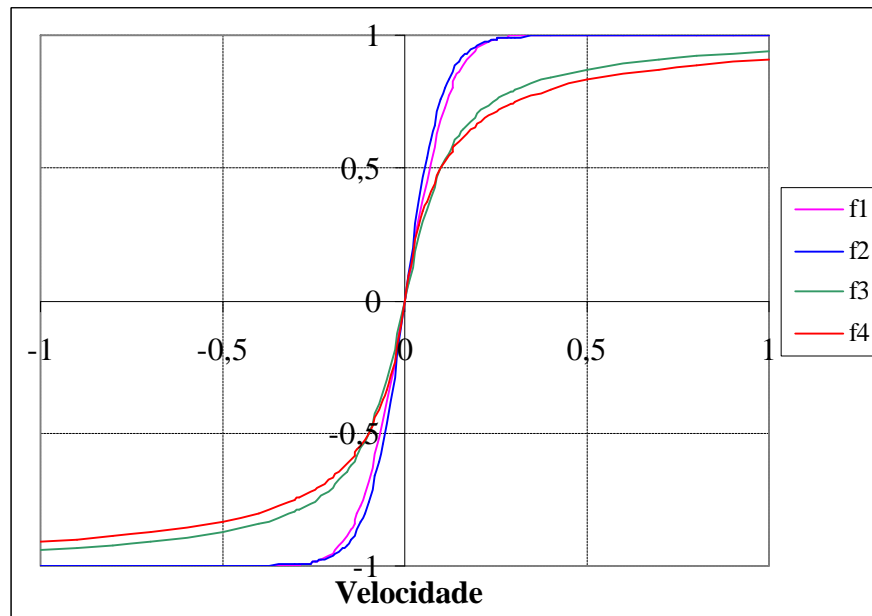
$$\ddot{\nu} + 2\zeta\dot{\nu} + \nu + \alpha \operatorname{sgn}[\dot{\nu}] = \sin \beta \tau \quad (5.53)$$

A solução analítica da equação (5.53) foi dada por Den Hartog (1931). Esta solução analítica será usada para validar as várias representações da força de atrito de Coulomb as quais serão propostas aqui.

A função sinal definida na equação (5.49) pode ser representada por qualquer uma das seguintes quatro funções contínuas para qualquer nível desejado de precisão:

$$\begin{aligned}
 f_1(\alpha_1, \dot{x}) &= \text{Erf}(\alpha_1 \dot{x}) \\
 f_2(\alpha_2, \dot{x}) &= \text{Tanh}(\alpha_2 \dot{x}) \\
 f_3(\alpha_3, \dot{x}) &= (2/\pi) \text{ArcTan}(\alpha_3 \dot{x}) \\
 f_4(\alpha_4, \dot{x}) &= \alpha_4 \dot{x} / (1 + \alpha_4 |\dot{x}|)
 \end{aligned}
 \tag{5.54}$$

A comparação da variação dessas funções com a velocidade de deslizamento,  $\dot{x}$ , para o fator  $\alpha_i = 10$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), é dada na figura 5.4.



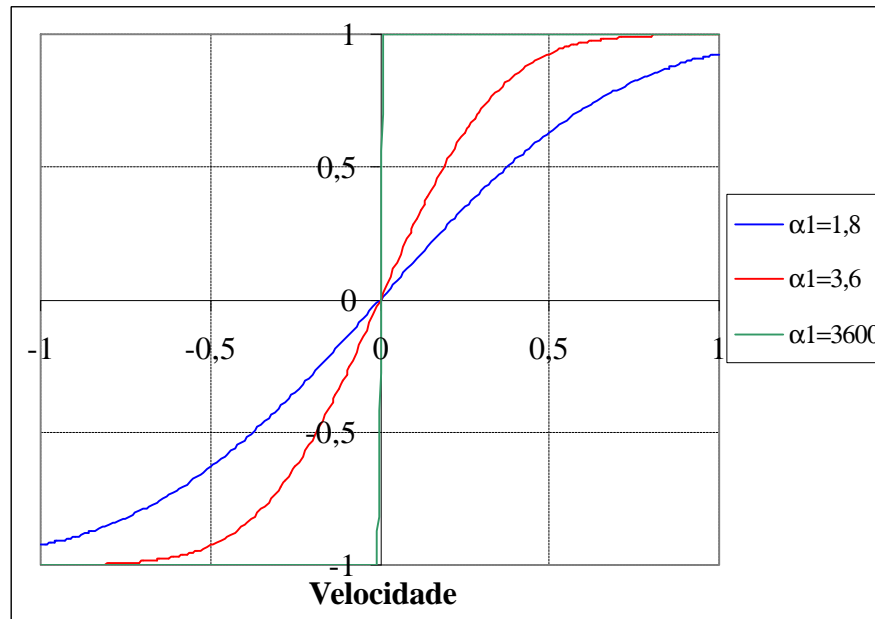
**Figura 5.4 - Comparação das Quatro Representações para a Função Sinal**

Os fatores  $\alpha_i$ 's são todos positivos. Seus valores ditam o desejado nível de precisão nas suas respectivas representações da função sinal. Por exemplo, se a unidade de velocidade é em mm/s, então um  $\alpha_1 = 3,6$  implica que para magnitudes de velocidades maiores que 1 mm/s

$$f_1(\alpha_1, \dot{x}) = \text{Erf}(3,6\dot{x}) = \pm 1 \tag{5.55}$$

com precisão de seis casas decimais. Logo, se um  $\alpha_1 = 3600$  é usado, então para magnitudes de velocidades de deslizamento maiores que  $10^{-3}$  mm/s, o valor da função de erro será  $\pm 1$  com precisão de seis casas decimais. Isso implica que a função  $f_1(\dot{x})$  muda continuamente de  $-1$  para  $+1$  quando a velocidade vai de  $-10^{-3}$  para  $+10^{-3}$  mm/s.

De um ponto de vista prático, essas velocidades estão na vizinhança de zero e a função sinal como definida nas relações (5.49) pode ser aproximadamente representada pela função contínua  $f_1(\dot{x})$ . A figura 5.5 mostra a variação de  $f_1(\dot{x})$  com a velocidade de deslizamento para o fator  $\alpha_1 = 1,8$ ,  $\alpha_1 = 3,6$  e  $\alpha_1 = 3600$ .



**Figura 5.5 - Representação da Função Sinal por  $f_1$**

Argumentos semelhantes aplicam-se às outras três funções na equação (5.54) exceto que valores diferentes de  $\alpha_i$ 's tenham que ser usados para ganhar os equivalentes níveis de precisão. Considerando esses resultados, pode ser concluído que para  $\alpha_i$  suficientemente grande para aplicações práticas,

$$\text{sgn}[\dot{x}] = f_i[\alpha_i, \dot{x}] \quad (5.56)$$

Assim para  $\alpha_i$  suficientemente grande, a força de atrito na equação (5.48) pode ser representada por

$$F_a(t) = -\mu m g f_i[\alpha_i, \dot{x}(t)], \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.57)$$

e a função sinal nas equações (5.50), (5.51) e (5.53) pode ser substituída por  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Deve ser notado que a representação da força de atrito como definido pela equação (5.57) é válida apenas quando a massa está em uma fase de deslizamento. Em fases não-deslizantes, a força de atrito é indefinida e sua magnitude é menor que a dada pela equação (5.57).

### 5.3.2. VERIFICAÇÃO

Antes de usar as representações propostas para a força de atrito para resolver o problema geral de excitação da base da equação (5.51), as mesmas serão usadas para resolver problemas de excitação harmônica da base representadas pela equação (5.53). A solução analítica de Den Hartog (1931) permite validar a qualidade das representações propostas. A

tabela 5.1 apresenta as respostas em termos de deslocamentos máximos não-dimensionalizados (para o caso  $\beta = 1$ ) obtidas pela solução analítica e por várias representações da força de atrito de Coulomb para  $\alpha = \mu g/a_a = 0,40$  e  $\alpha = \mu g/a_a = 0,50$ , um amortecimento  $\zeta = 2$  e 5%, e para o fator  $\alpha_i = 10, 100, \text{ e } 1000$ . Como pode ser observado desta tabela, em todos os casos, quando o fator  $\alpha_i$  é da ordem de 100 ou mais, a diferença máxima com a solução analítica é menor que 1%.

**Tabela 5.1 - Comparação das Representações com a Solução de Den Hartog**

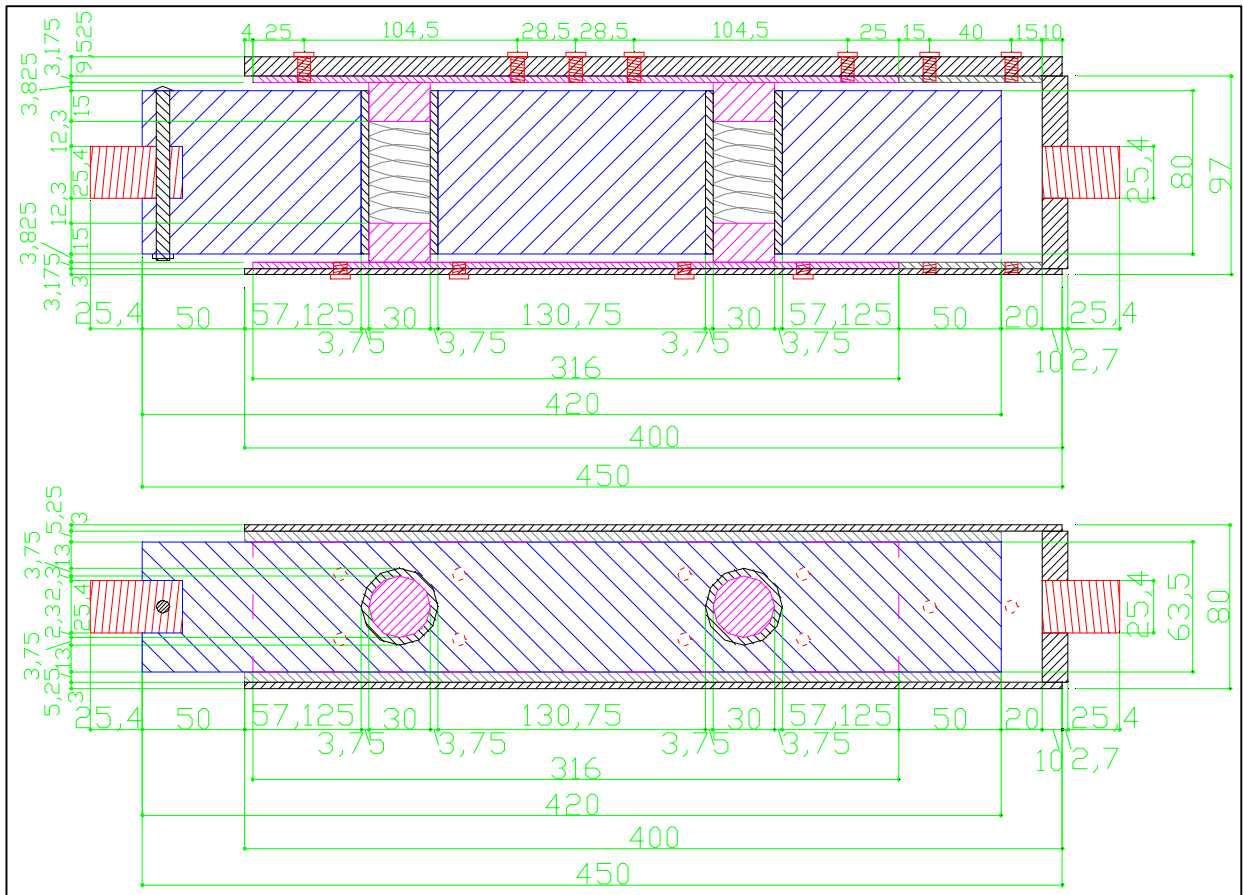
(Extraída de Mostaghel e Davis, 1997)

$\zeta$	0,02		0,05		Fator $\alpha_i$
	0,4	0,5	0,4	0,5	
<b>Den Hartog</b>	<b>12,2824</b>	<b>9,1029</b>	<b>4,9274</b>	<b>3,6589</b>	
$f_1$	12,2359	9,0611	4,9058	3,6327	10
	12,2354	9,0598	4,9052	3,6313	100
	12,2352	9,0597	4,9052	3,6313	1000
$f_2$	12,2358	9,0612	4,9062	3,6335	10
	12,2353	9,0601	4,9052	3,6313	100
	12,2352	9,0599	4,9052	3,6313	1000
$f_3$	12,3402	9,2348	5,0064	3,7978	10
	12,2459	9,0781	4,9157	3,6489	100
	12,2363	9,0621	4,9063	3,6331	1000
$f_4$	12,3950	9,3229	5,0548	3,8722	10
	12,2518	9,0879	4,9214	3,6585	100
	12,2369	9,0629	4,9068	3,6341	1000

Observando-se que a solução numérica para várias representações da força de atrito de Coulomb foi validada por comparação com a solução analítica de Den Hartog (1931), conclui-se que se podem usar essas representações na análise dinâmica de qualquer sistema envolvendo atrito.

Considerando os resultados apresentados na tabela 5.1 e outros exemplos encontrados em Mostaghel e Davis (1997), em que os níveis de  $\mu g$  alcançam de 40 a 90% da aceleração de pico da excitação, pode ser concluído que as aproximações propostas para a força de atrito são aplicáveis tanto para pequenos quanto para grandes valores de coeficiente de atrito. Naturalmente o nível de aproximação pode ser melhorado usando valores maiores para  $\alpha_i$ . Nota-se que a equação (5.57) é válida mesmo se o coeficiente de atrito é uma função da velocidade de deslizamento ou uma função do tempo.



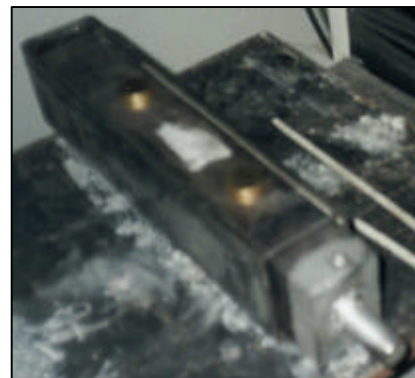


**Figura 6.2 - Cortes Longitudinal e Inferior do Modelo A**

### 6.1.1. MATERIAIS UTILIZADOS

Uma lista completa de todos os materiais utilizados para a construção deste projeto encontra-se no anexo 11.1.1.

A seguir apresenta-se uma foto dos materiais utilizados e uma foto da parte interna desse modelo.



**Figura 6.3 - Materiais e Montagem do Modelo A**

### 6.1.2. FUNCIONAMENTO DO MODELO A

Conforme explicado na definição de amortecedores de vibração por atrito, item 3.1, esses artifícios utilizam o mecanismo do atrito sólido para dar a desejada dissipação de energia a fim de diminuir a amplitude de vibração do sistema.

Após alguns estudos dos possíveis materiais que estariam em atrito, observou-se que os materiais em contato deveriam ser os mais semelhantes possíveis, de preferência os dois materiais deveriam ser os mesmos, pois materiais muito diferentes em contato possuem coeficiente de atrito muito baixo, fazendo com que a energia dissipada seja insignificante.

Por ser o latão um material com boa durabilidade, boa resistência ao desgaste, coeficiente de atrito adequado e ser amplamente comercializado e a baixo custo, este foi o material escolhido para estar em atrito e conseqüentemente dissipar energia.

O controle da força normal no contato entre os latões é dado através das duas molas de compressão dispostas conforme apresentado nas figuras 6.1 e 6.2. As molas foram dimensionadas para que a força de atrito resultante fosse até 20% da capacidade do amortecedor. Com isso, determinou-se que a força normal é de 8,2kN, ou seja, 4,1kN para cada mola, a qual é alcançada comprimindo-se a mola em 11mm, isto é, uma mola com rigidez de 373N/mm.

### 6.1.3. DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DO COEFICIENTE DE ATRITO

De acordo com Oden e Martins (1985), o coeficiente de atrito estático pode ser determinado a partir do ângulo de inclinação com a horizontal no qual o deslizamento inicia, conforme a equação:

$$\theta_s = \tan^{-1} \mu_s \quad (6.1)$$

onde:

$\theta_s$  = ângulo de atrito estático

$\mu_s$  = coeficiente de atrito estático

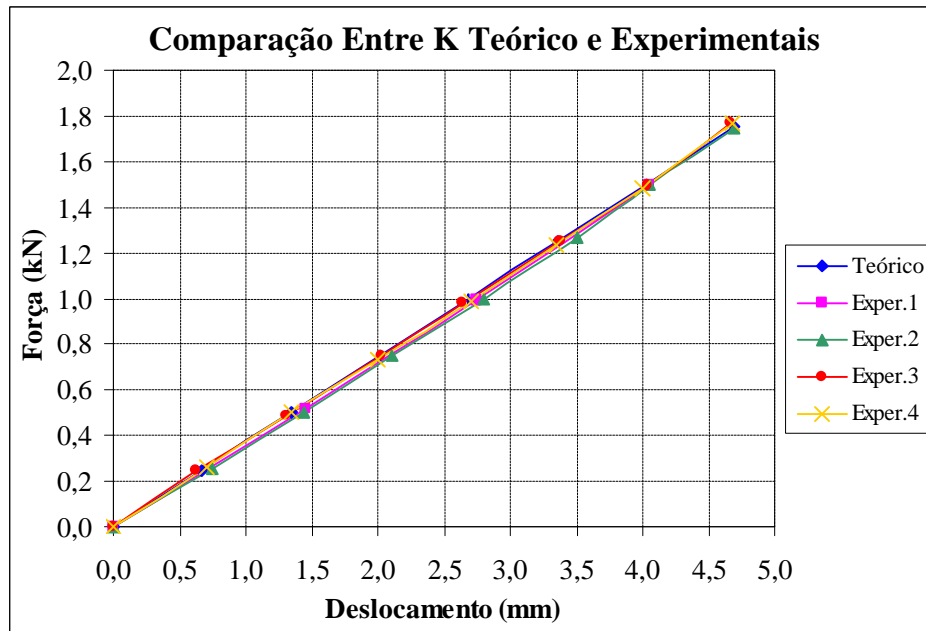
Uma das chapas de latão foi colocada em contato com um dos cilindros de latão, então se foi aumentando lentamente a inclinação até o ângulo em que o deslizamento inicia (o ângulo é conhecido como o ângulo de atrito estático) e com esse ângulo determinou-se o coeficiente de atrito estático para o latão, de acordo com a equação (6.1).

Realizaram-se 5 testes, obtendo-se um ângulo de atrito estático médio de 18° e conseqüentemente um coeficiente de atrito estático médio para o latão de 0,3, com um desvio padrão de 0,02.

### 6.1.4. VERIFICAÇÃO DA RIGIDEZ DAS MOLAS

A fim de verificar se as molas foram projetadas conforme a especificação, realizaram-se 4 testes em uma prensa, cujos resultados são apresentados no gráfico da figura 6.4.

Então, conforme se observa na figura 6.4, as molas estão de acordo com as especificações de projeto. Isso garante que para um deslocamento de 11mm, cada mola dará uma força normal de 4,1kN.



**Figura 6.4 - Verificação Experimental das Molas**

### 6.1.5. FINALIZAÇÃO DA CONSTRUÇÃO DO AMORTECEDOR

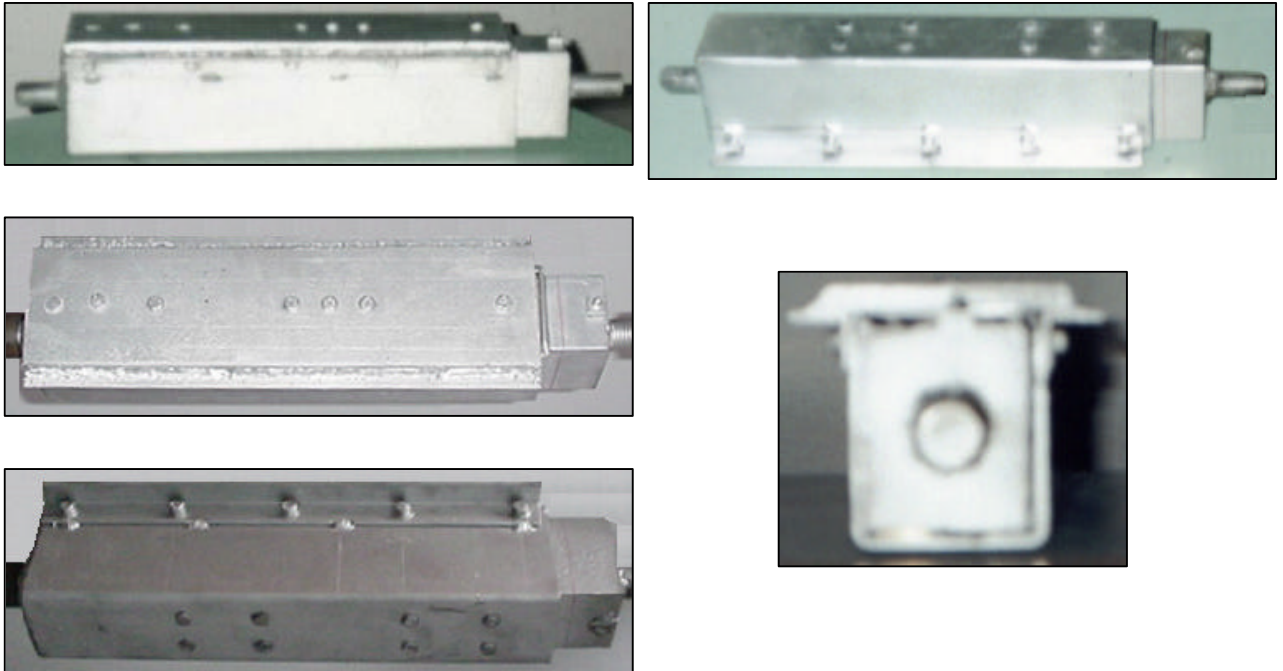
A última etapa na construção deste projeto foi o fechamento da tampa superior do amortecedor, feito numa prensa, para que a força normal pudesse ser verificada através da aplicação de uma força de 8,2kN e um respectivo deslocamento de 11mm. Isso pode ser observado na figura 6.5.



**Figura 6.5 - Colocação da Tampa Superior na Prensa e Controle da Força Normal**



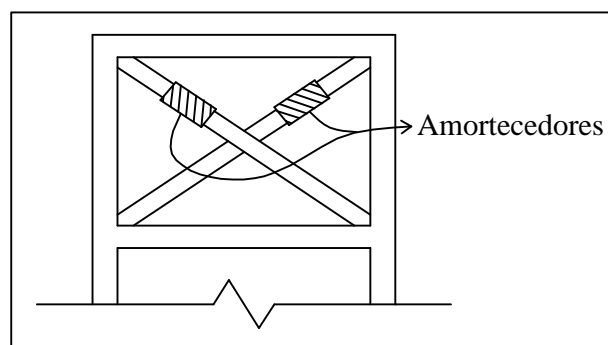
A seguir observam-se algumas fotos do modelo A pronto, o qual pesa em torno de 25kg.



**Figura 6.6 - Várias Vistas do Modelo A Pronto**

### 6.1.6. APLICAÇÕES EM ESTRUTURAS

Esse modelo pode ser aplicado em estruturas submetidas a qualquer tipo de carga dinâmica, tais como vento ou sismos, tanto em estruturas metálicas quanto em estruturas de concreto. Pode, por exemplo, ser colocado como se fossem barras de contraventamento diagonais, conforme se observa no esquema da figura 6.7.

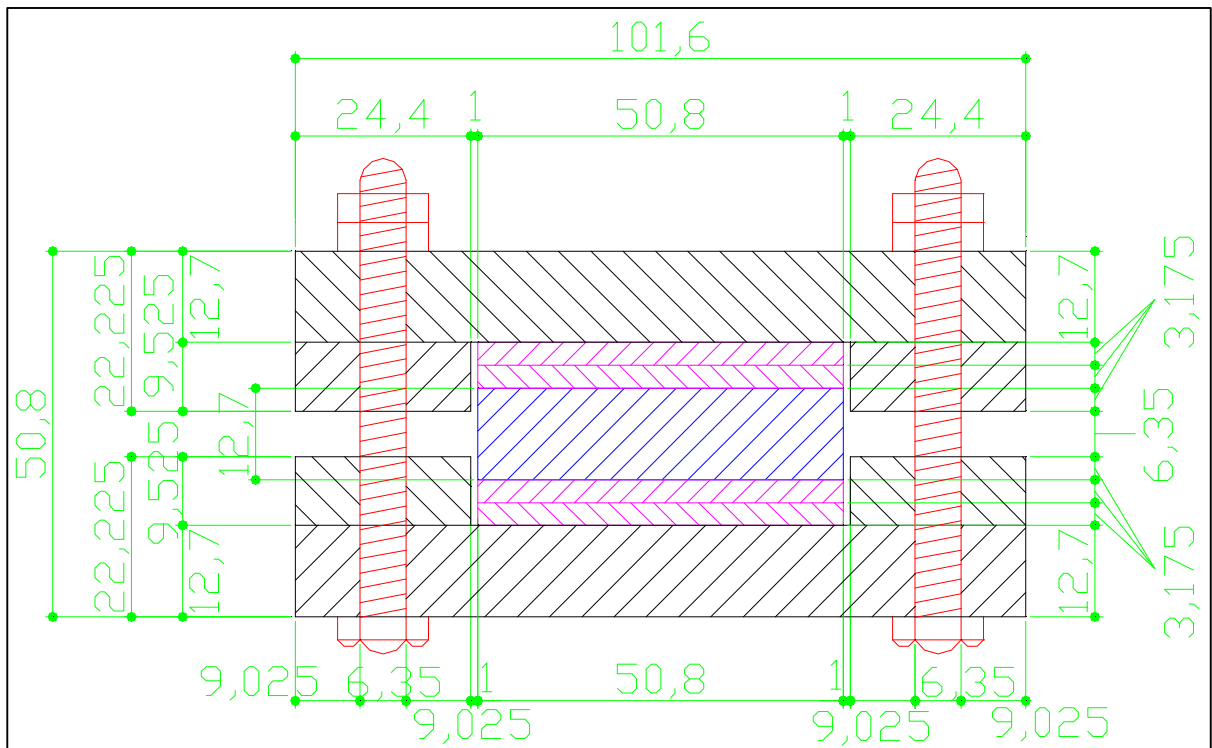


**Figura 6.7 - Exemplo de Aplicação do Modelo A**

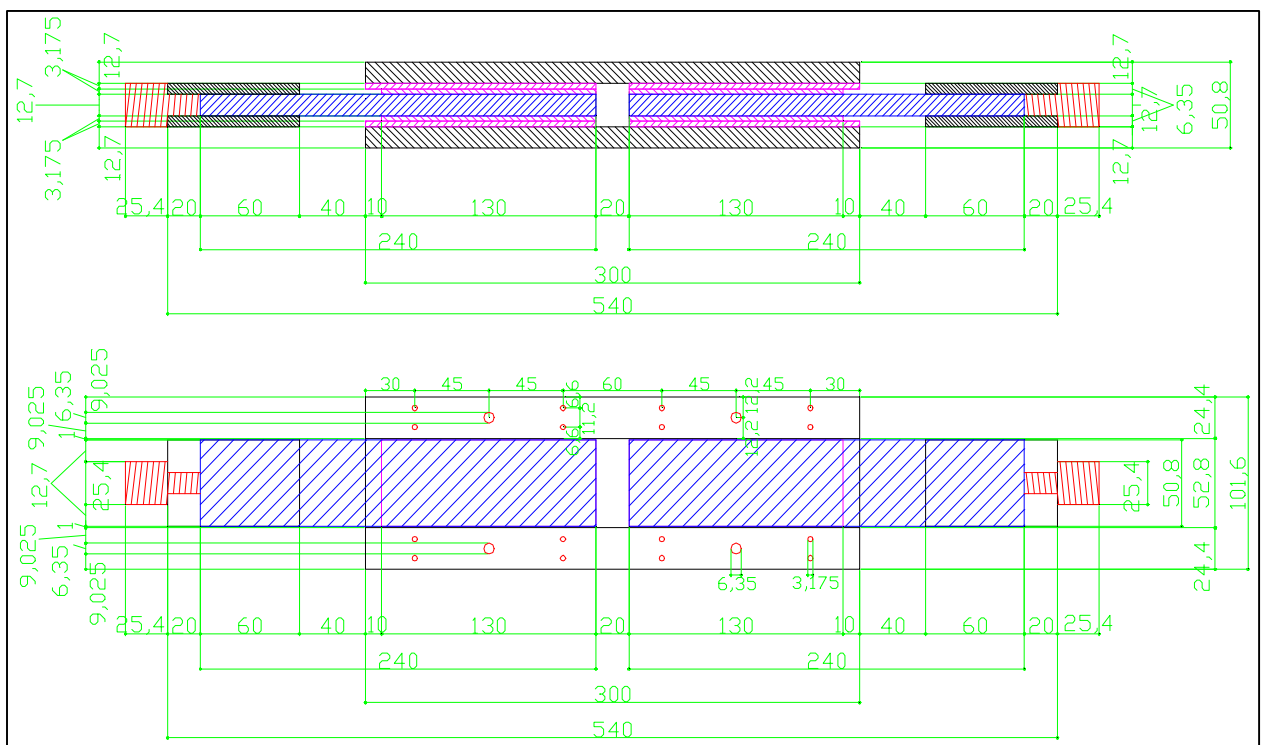
No capítulo 8 será apresentado um exemplo prático de aplicação desse amortecedor em uma estrutura.

## 6.2. MODELO B

O segundo modelo proposto pode ser observado nas vistas das figuras 6.8 e 6.9.



**Figura 6.8 - Corte Transversal do Modelo B**

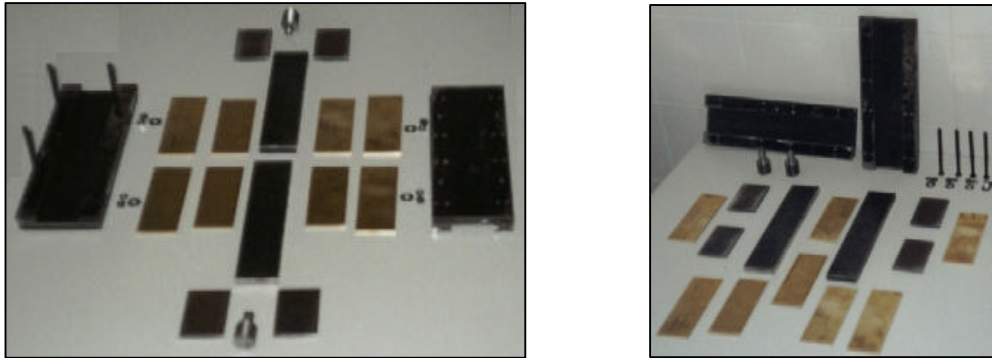


**Figura 6.9 - Cortes Longitudinal e Inferior / Superior do Modelo B**

### 6.2.1. MATERIAIS UTILIZADOS

Uma lista completa de todos os materiais utilizados para a construção deste projeto encontra-se no anexo 11.1.2.

A seguir observam-se as fotos dos materiais utilizados.

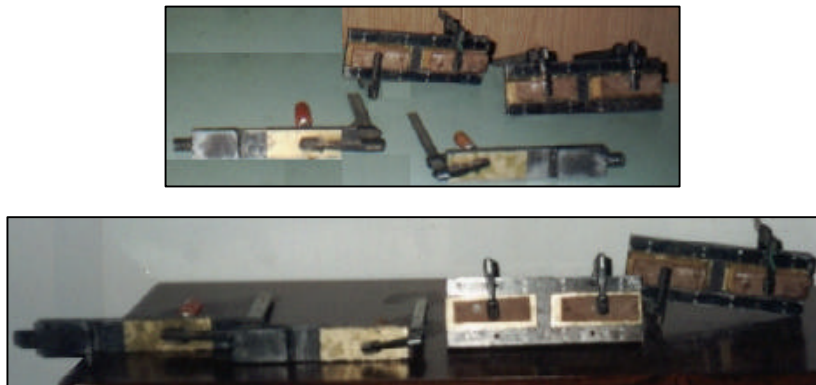


**Figura 6.10 - Materiais Utilizados na Construção do Modelo B**

### 6.2.2. ETAPAS DA CONSTRUÇÃO DO MODELO B

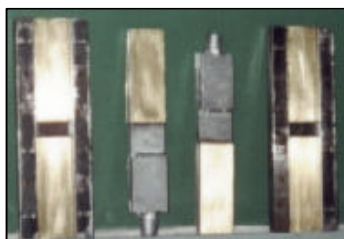
A seguir apresentam-se fotos de algumas etapas da construção do modelo B.

- Depois de feita toda a furação e a soldagem das roscas, realizou-se a colagem das chapas de latão nas chapas de aço, com a utilização do adesivo especificado na lista de materiais.



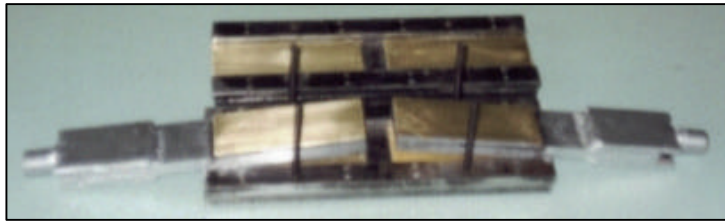
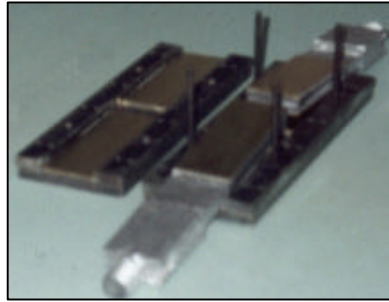
**Figura 6.11 - Colagem das Chapas de Latão**

- Materiais após a colagem das chapas de latão.



**Figura 6.12 - Materiais Prontos**

- Montagem final do amortecedor, faltando apenas fechar e aparafusar.



**Figura 6.13 - Parte Interna do Amortecedor**

- Amortecedor pronto para ser ensaiado, pesando em torno de 16kg.



**Figura 6.14 - Várias Vistas do Modelo B Pronto**

### 6.2.3. FUNCIONAMENTO DO MODELO B

Do mesmo modo que o sistema anterior, a dissipação de energia é obtida através do atrito entre corpos sólidos. O atrito ocorre entre as chapas de latão que estão coladas nas chapas de aço. Considerou-se o mesmo coeficiente de atrito estático obtido anteriormente para o latão que foi de 0,3.

O controle da força normal no contato entre os latões é dado através dos quatro parafusos dispostos conforme apresentado nas figuras 6.8 e 6.9. Com um torquímetro, regulou-se o torque desses parafusos para  $2\text{kgf.m} \approx 20000\text{Nmm}$ , obtendo-se uma força normal de aproximadamente  $5000\text{N}$  e força de atrito de  $3000\text{N}$ . Caso seja necessário aumentar a energia dissipada, basta aumentar o torque nos parafusos, mas cuidando-se para que os parafusos não atinjam a tensão de escoamento. Como pode ser observado nas figuras 6.8 e 6.9, os parafusos não estão submetidos a tensões de corte.

### 6.2.4. APLICAÇÕES EM ESTRUTURAS

Assim como o modelo A, esse amortecedor também pode ser aplicado em estruturas submetidas a qualquer tipo de carga dinâmica, tanto em estruturas metálicas quanto em estruturas de concreto. Também pode, por exemplo, ser colocado como se fossem barras de contraventamento diagonais, conforme se observou no esquema da figura 6.7.

## 6.3. MODELO C

O terceiro modelo proposto pode ser observado nas vistas das figuras 6.15 e 6.16.

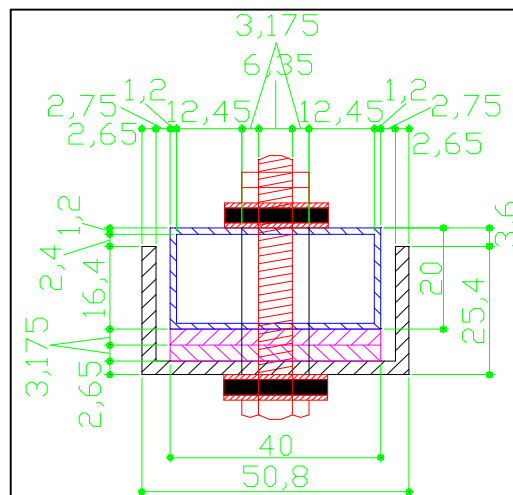
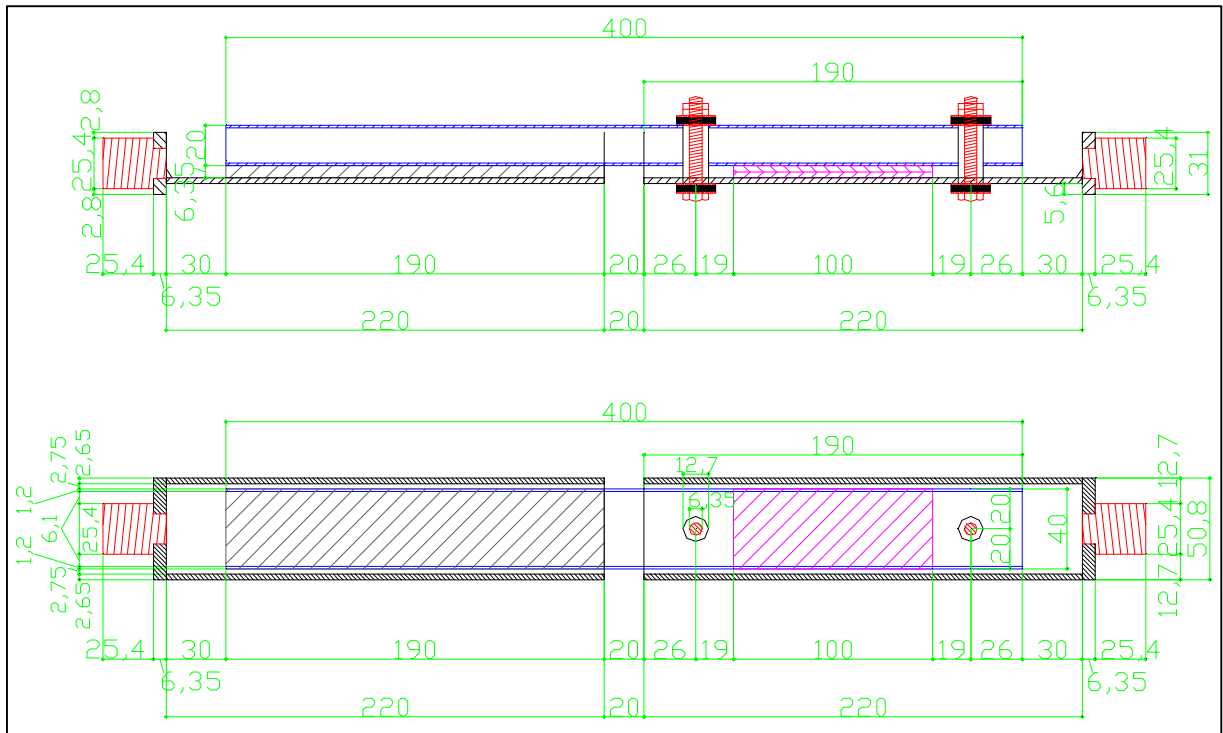


Figura 6.15 - Corte Transversal do Modelo C

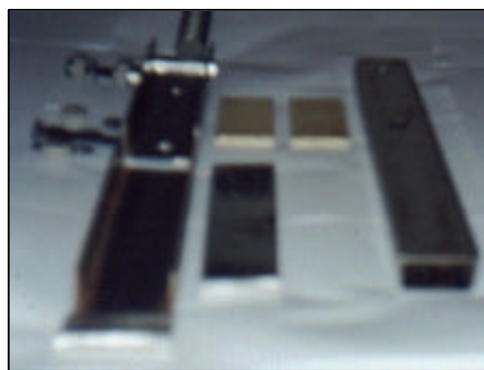
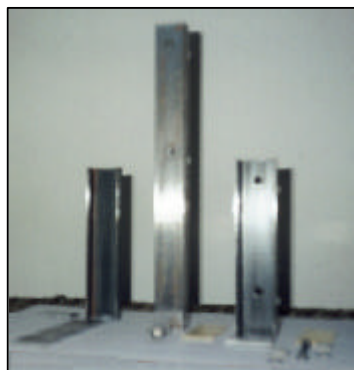
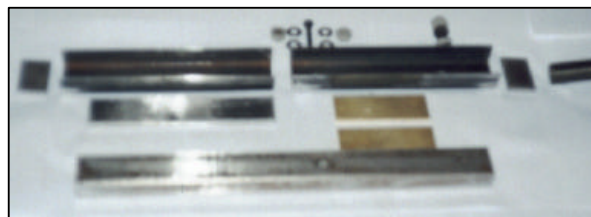


**Figura 6.16 - Cortes Longitudinal e Inferior do Modelo C**

### 6.3.1. MATERIAIS UTILIZADOS

Uma lista completa de todos os materiais utilizados para a construção deste projeto encontra-se no anexo 11.1.3.

A seguir observam-se as fotos dos materiais utilizados.

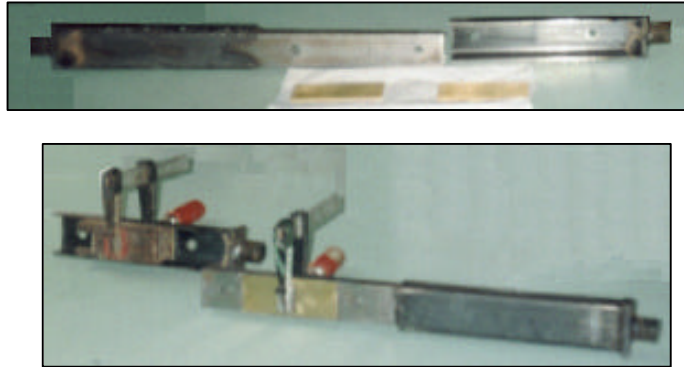


**Figura 6.17 - Materiais Utilizados na Construção do Modelo C**

### 6.3.2. ETAPAS DA CONSTRUÇÃO DO MODELO C

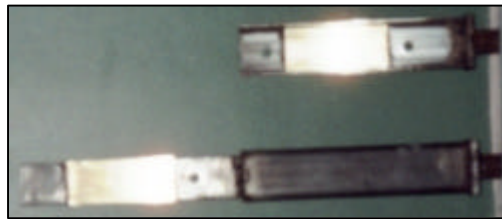
A seguir apresentam-se fotos de algumas etapas da construção do modelo C.

- Depois de feita a furação realizou-se as soldagens necessárias e a colagem das chapas de latão nos perfis de aço, com a utilização do adesivo especificado na lista de materiais.



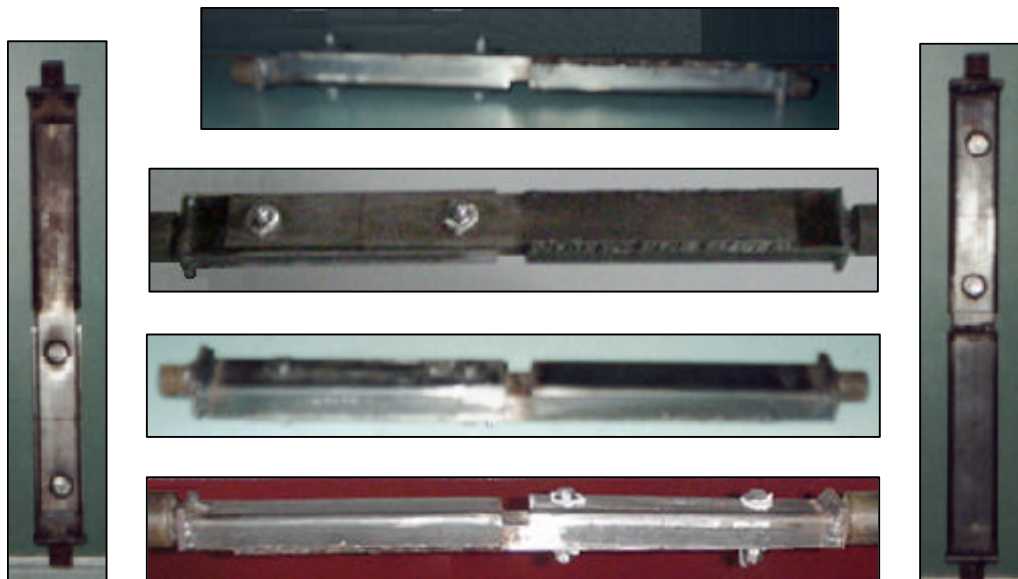
**Figura 6.18 - Perfis já Soldados e Fixação das Chapas de Latão**

- Materiais após a colagem das chapas de latão, faltando apenas fechar e aparafusar.



**Figura 6.19 - Materiais Prontos**

- Amortecedor pronto para ser ensaiado, pesando em torno de 3kg.



**Figura 6.20 - Várias Vistas do Modelo C Pronto**

### 6.3.3. FUNCIONAMENTO DO MODELO C

Da mesma forma que os dois sistemas anteriores, a dissipação de energia é obtida através do atrito entre corpos sólidos. O atrito ocorre entre as chapas de latão que estão coladas nos perfis de aço. Considerou-se o mesmo coeficiente de atrito estático utilizado para os demais projetos que foi de 0,3.

O controle da força normal no contato entre os latões é dado através dos dois parafusos dispostos conforme apresentado nas figuras 6.15 e 6.16. Com um torquímetro, regulou-se o torque desses parafusos para  $1\text{kgf.m} \approx 10000\text{Nmm}$ , obtendo-se uma força normal de aproximadamente 2700N e força de atrito de 800N. Caso seja necessário aumentar a energia dissipada, basta aumentar o torque nos parafusos, mas cuidando-se para que os parafusos não atinjam a tensão de escoamento. As borrachas são colocadas para que os parafusos não sejam submetidos a tensões de corte.

### 6.3.4. APLICAÇÕES EM ESTRUTURAS

Assim como os outros dois modelos propostos, esse amortecedor pode ser aplicado em estruturas submetidas a qualquer tipo de carga dinâmica, tais como vento ou sismos, tanto em estruturas metálicas quanto em estruturas de concreto. Também pode, por exemplo, ser colocado como se fossem barras de contraventamento diagonais, conforme se observou no esquema da figura 6.7. Além disso, esse projeto tem a vantagem de que pode ser aplicado nos nós de estruturas metálicas, como pode ser observado nos esquemas da figura 6.21.

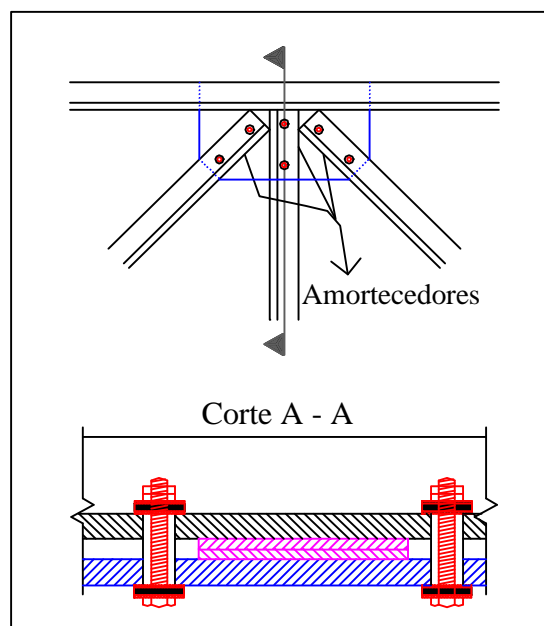


Figura 6.21 - Exemplo de Aplicação do Modelo C



## 7. ENSAIOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Dando continuidade à apresentação da parte experimental da dissertação, iniciada no capítulo anterior com a descrição dos modelos propostos, neste capítulo descrevem-se os ensaios realizados e a análise dos resultados obtidos em cada ensaio.

### 7.1. MODELO A

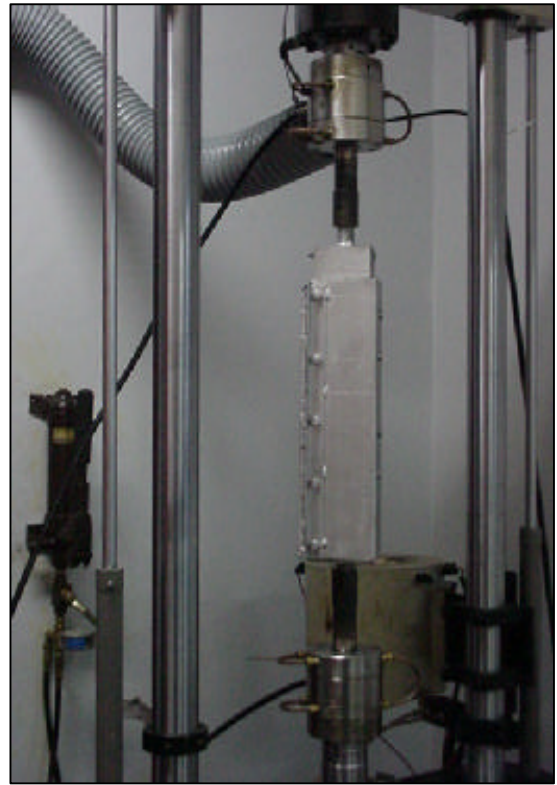
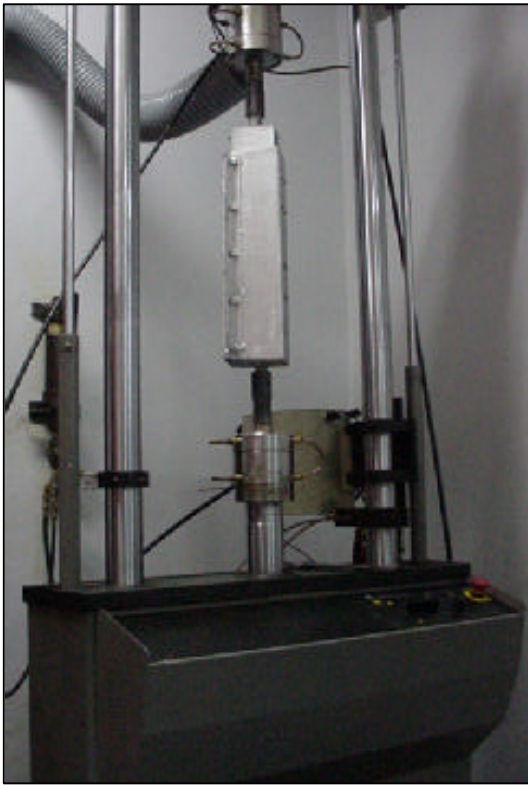
#### 7.1.1. METODOLOGIA DOS ENSAIOS

Foram realizadas duas séries de ensaios com este modelo, designadas séries 1 e 2, numa máquina servo hidráulica de ensaios universais MTS (“Material Test System”) 810, com capacidade de até 100kN. A série 2 foi realizada apenas para confirmar os resultados obtidos na série 1. As figuras 7.1 e 7.2 mostram as fotos dessas séries de ensaios. Em ambas as séries foi aplicada uma excitação senoidal, com os valores de frequência e de amplitudes de vibração estipulados conforme se apresenta na tabela 7.1. Com cada um desses valores foram realizados os ensaios, com 10 ciclos, obtendo-se, a intervalos de tempo pré-determinados, o valor do deslocamento e a correspondente força de atrito para aquele instante de tempo.

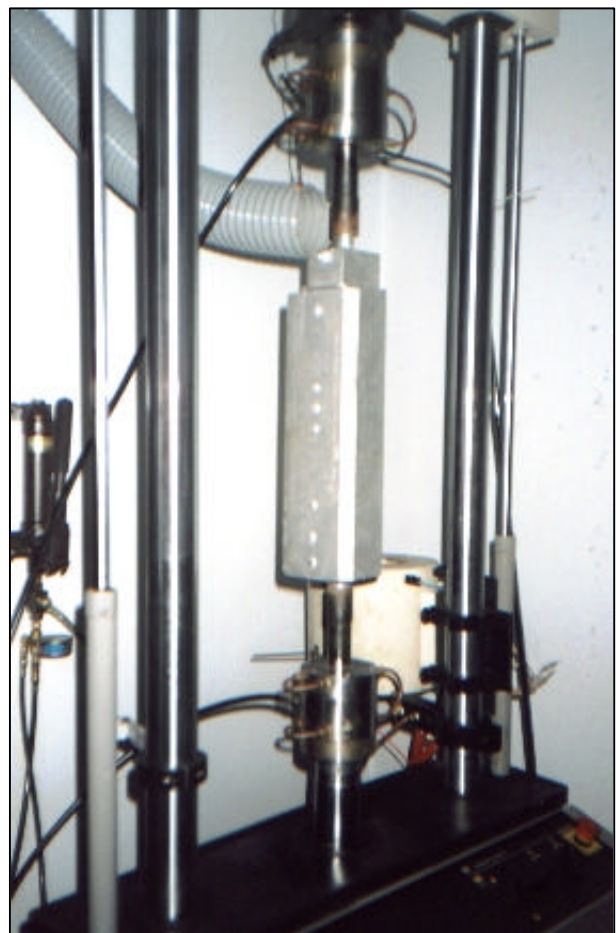
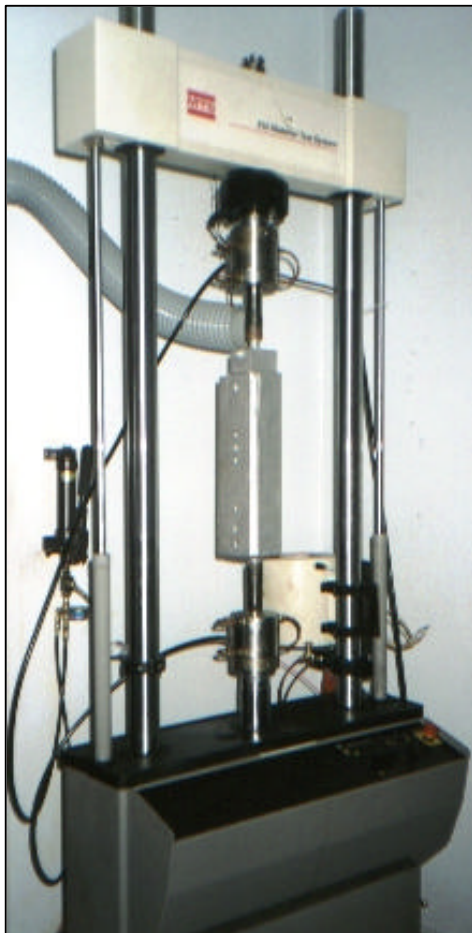
**Tabela 7.1 - Valores de Frequência e Amplitudes de Vibração para as Séries 1 e 2**

Frequência (Hz)	Amplitude (mm)								
0,1	0,1	0,3*	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	
0,3	0,1*	0,3	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	
0,5	0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	
1,0	0,1*	0,3	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	
2,0	0,1*	0,3	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0*	8,0*	
3,0	0,1*	0,3	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0*	8,0*	

\* Apenas para a série 2



**Figura 7.1 - Fotos da Série 1 - Modelo A**



**Figura 7.2 - Fotos da Série 2 - Modelo A**

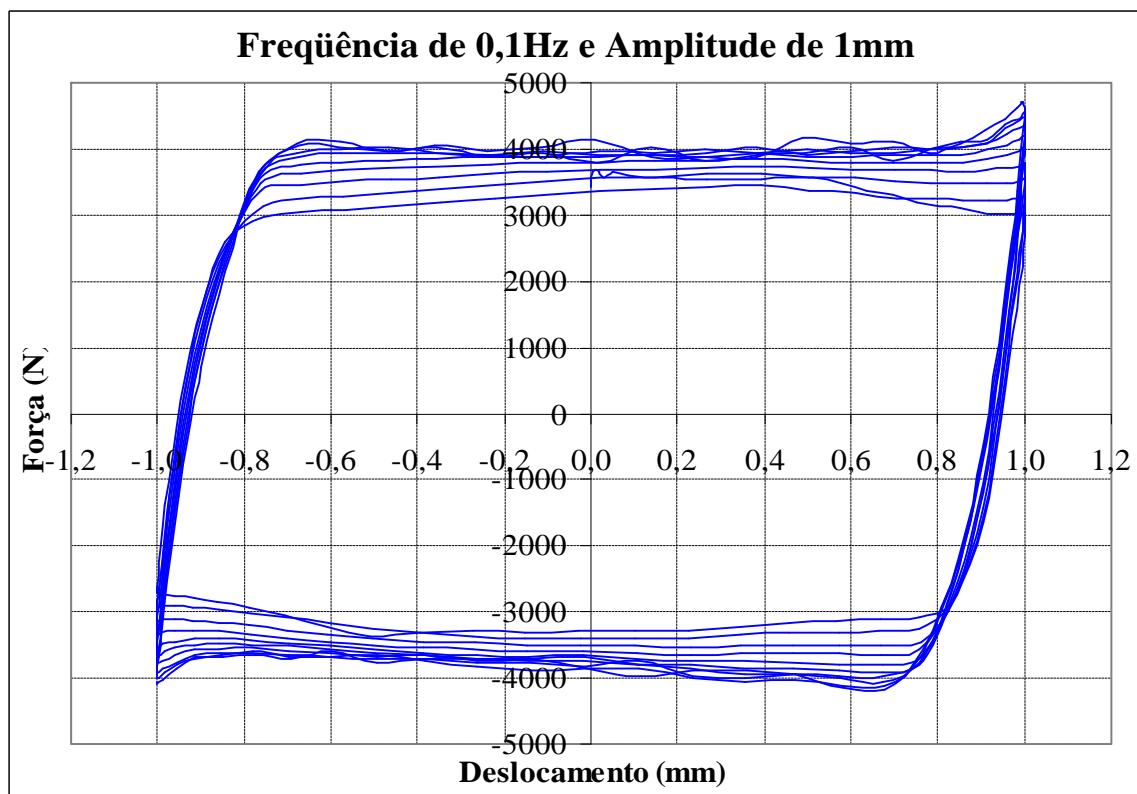
### 7.1.2. RESULTADOS OBTIDOS DA SÉRIE 1

Com os dados de deslocamentos e forças de atrito obtidos dos ensaios para cada frequência e amplitude escolhidas, podem-se graficar os conjuntos de ciclos de histerese, conforme se observam alguns exemplos nas figuras 7.3, 7.4 e 7.5.

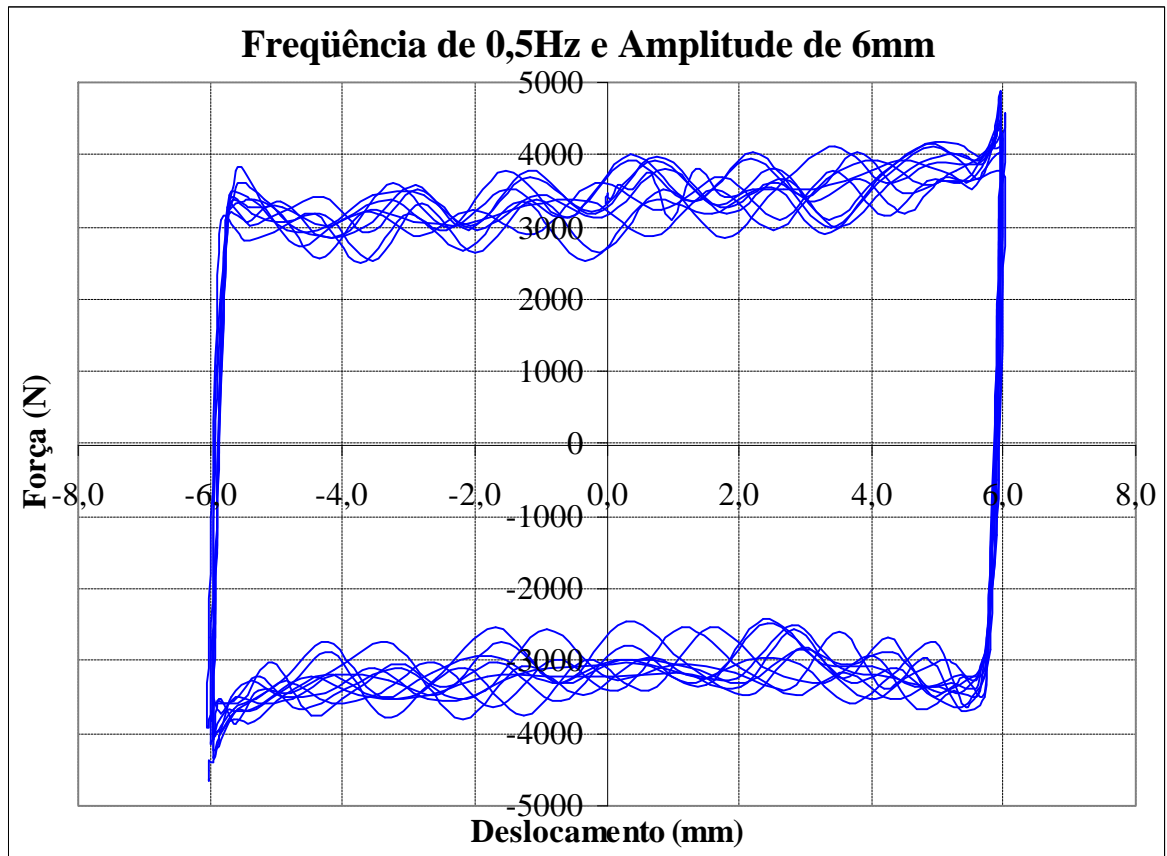
Para cada um dos conjuntos de ciclos de histerese, com o auxílio do Matlab, calculou-se a área média com os oito ciclos intermediários, o que dá a energia dissipada média por ciclo. E com esses valores de energia dissipada, obtiveram-se os gráficos das figuras 7.6, 7.7 e 7.8.

**Tabela 7.2 - Valores da Energia Dissipada por Ciclo para a Série 1 - Modelo A**

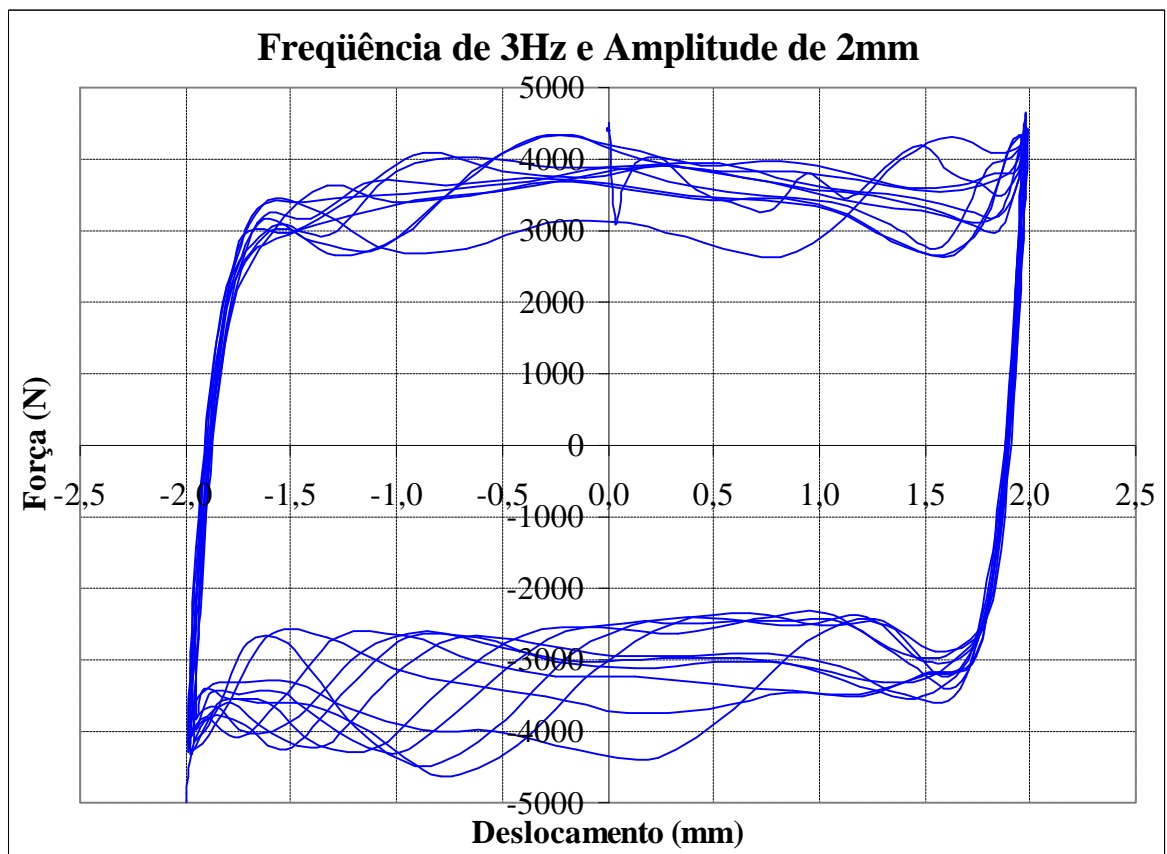
	a = 0,1	a = 0,3	a = 0,5	a = 1,0	a = 2,0	a = 4,0	a = 6,0	a = 8,0
Freq. (Hz)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)
0,1	318,3	---	5525,1	13557,6	28537,8	56129,7	84075,5	114575,1
0,3	---	2858,7	5900,9	13395,8	28646,8	57023,2	78918,3	107158,1
0,5	236,9	2768,1	5985,0	13440,4	27357,9	52223,1	77163,1	104534,0
1,0	---	2670,4	5368,3	12452,4	25921,1	49858,6	77328,0	101405,5
2,0	---	2671,7	5234,1	11320,6	25492,4	51457,9	---	---
3,0	---	2722,8	5524,0	12266,6	25108,8	47685,4	---	---



**Figura 7.3 - Ciclos de Histerese da Série 1 com  $f = 0,1\text{Hz}$  e  $a = 1\text{mm}$**



**Figura 7.4 - Ciclos de Histerese da Série 1 com  $f = 0,5\text{Hz}$  e  $a = 6\text{mm}$**



**Figura 7.5 - Ciclos de Histerese da Série 1 com  $f = 3\text{Hz}$  e  $a = 2\text{mm}$**

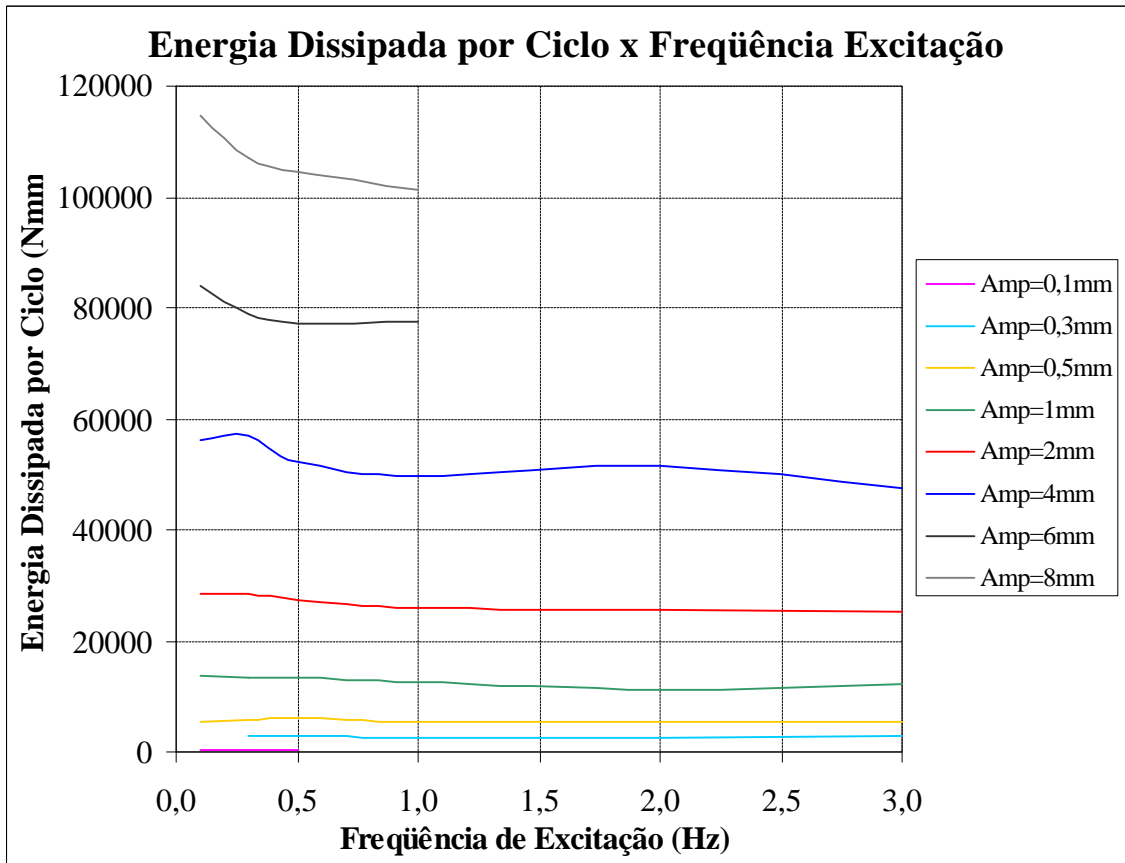


Figura 7.6 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Frequência de Excitação

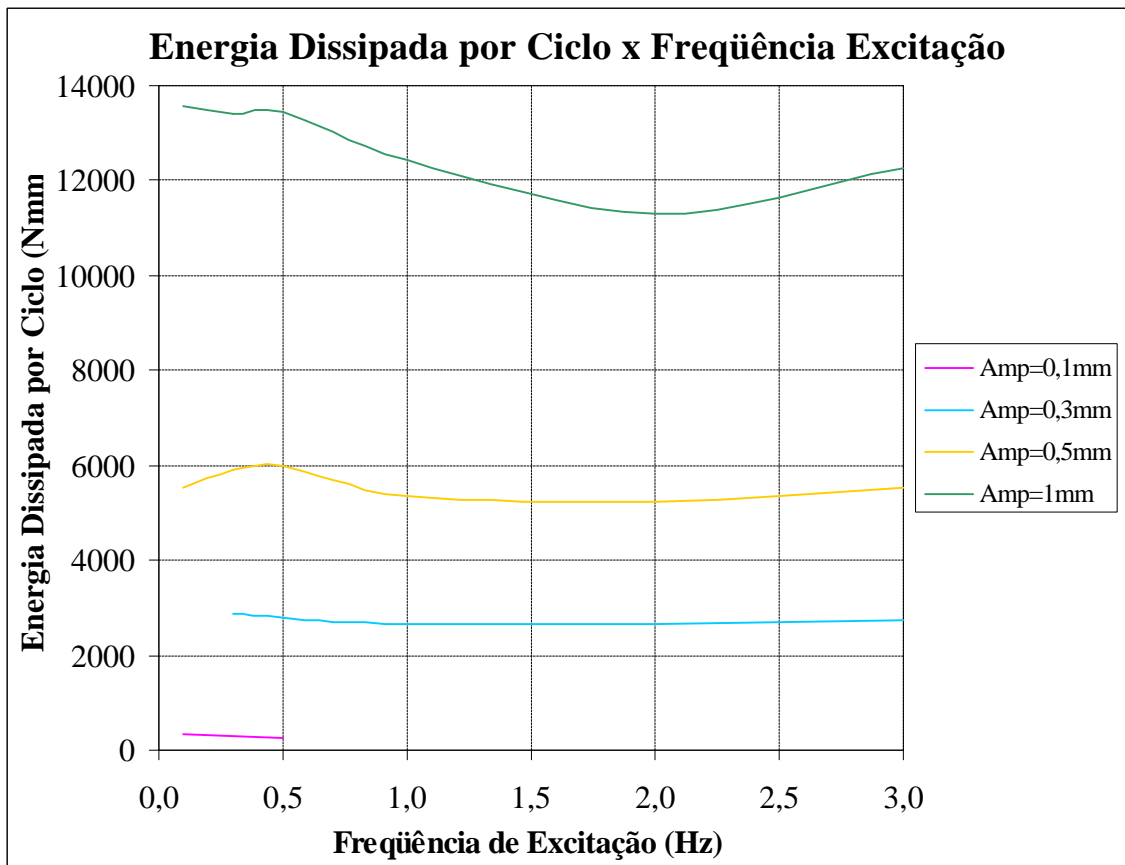
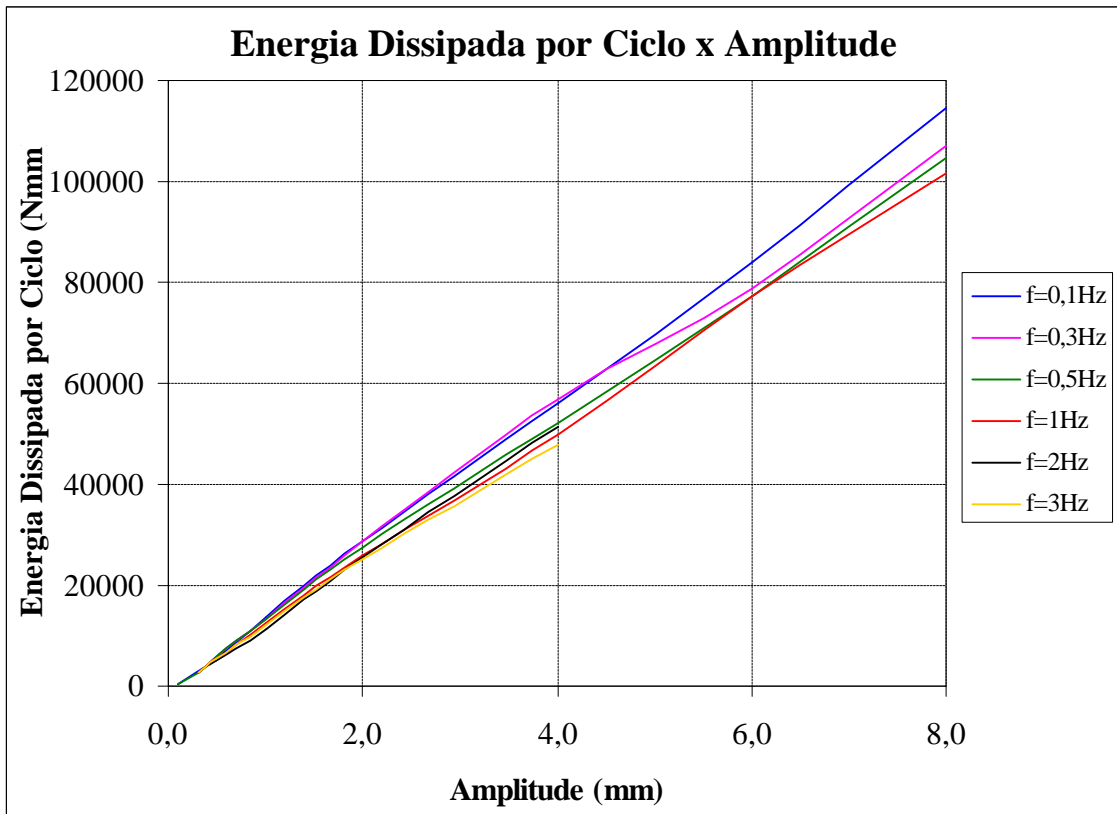


Figura 7.7 - Detalhes do Gráfico da Energia Dissipada x Frequência de Excitação



**Figura 7.8 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Amplitude**

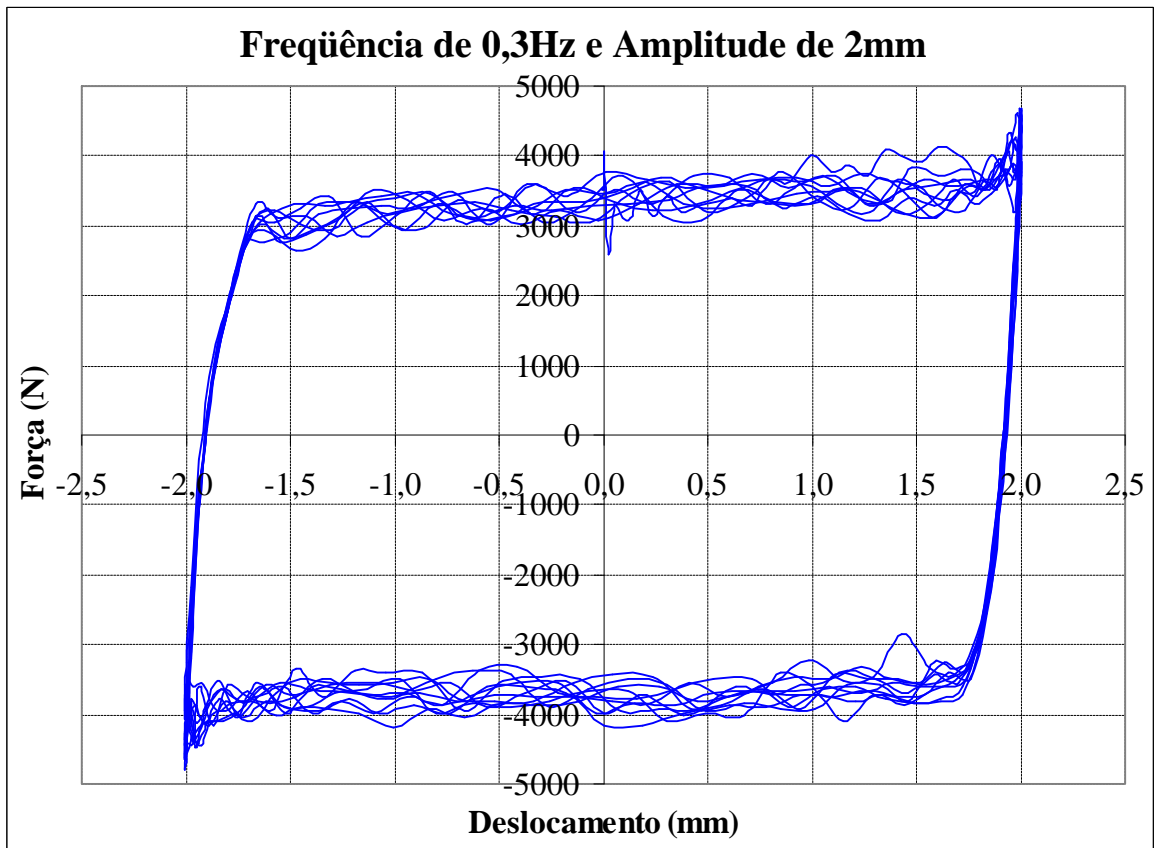
### 7.1.3. RESULTADOS OBTIDOS DA SÉRIE 2

Com os dados de deslocamentos e forças de atrito obtidos dos ensaios para cada frequência e amplitude escolhidas, podem-se graficar os conjuntos de ciclos de histerese, conforme se observam alguns exemplos nas figuras 7.9, 7.10 e 7.11.

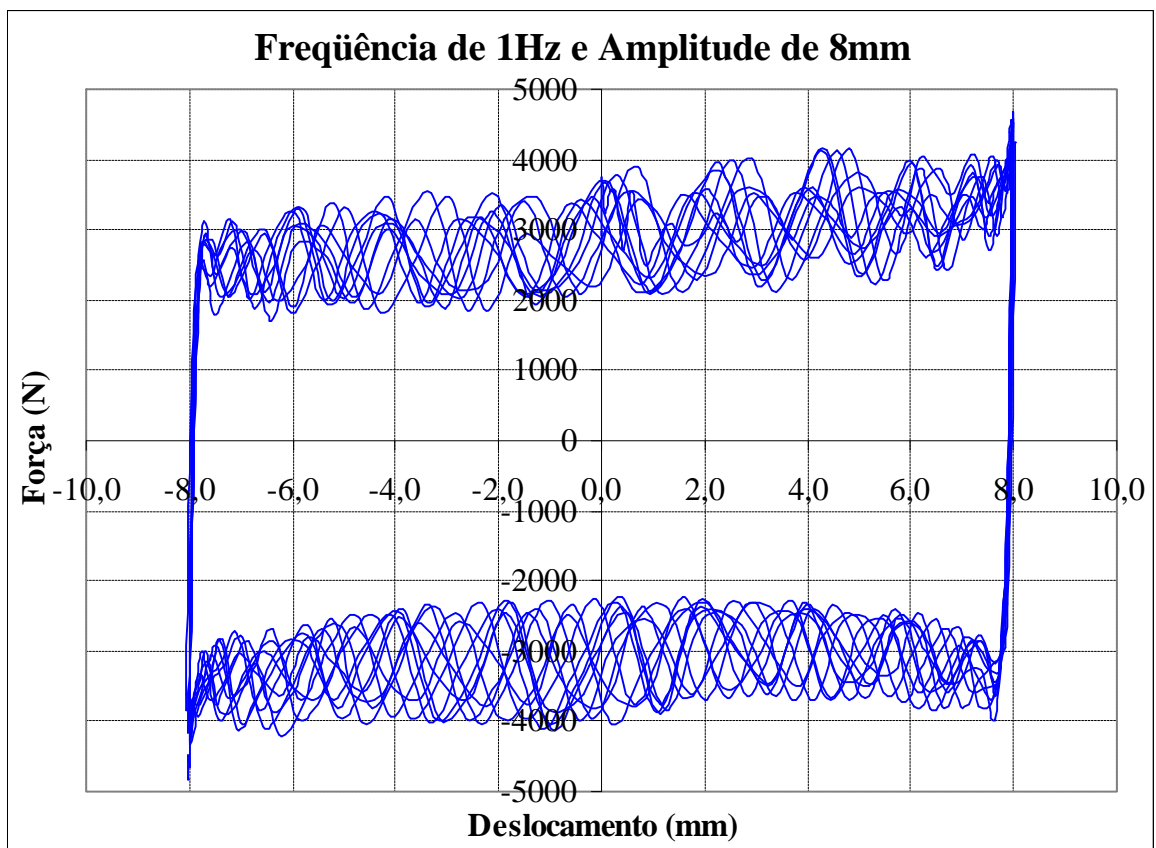
Para cada um dos conjuntos de ciclos de histerese, com o auxílio do Matlab, calculou-se a área média com os oito ciclos intermediários, o que dá a energia dissipada média por ciclo. E com esses valores de energia dissipada, obtiveram-se os gráficos das figuras 7.12, 7.13 e 7.14.

**Tabela 7.3 - Valores da Energia Dissipada por Ciclo para a Série 2 - Modelo A**

	a = 0,1	a = 0,3	a = 0,5	a = 1,0	a = 2,0	a = 4,0	a = 6,0	a = 8,0
Freq. (Hz)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)
0,1	238,4	2953,9	5681,2	13039,7	27579,7	54934,6	81298,6	108642,8
0,3	256,4	2783,5	5488,3	12457,2	26801,3	52762,3	77089,0	100711,0
0,5	265,8	2669,8	5329,6	12115,8	25350,1	50725,3	74810,6	99184,1
1,0	234,5	2737,4	5252,1	11644,2	23762,3	46963,0	69641,7	95526,5
2,0	190,2	2427,7	5045,9	11217,3	22595,6	45403,7	66922,5	90765,2
3,0	171,2	2294,6	4691,1	10371,4	21452,7	42349,9	65481,1	91362,6



**Figura 7.9 - Ciclos de Histerese da Série 2 com  $f = 0,3\text{Hz}$  e  $a = 2\text{mm}$**



**Figura 7.10 - Ciclos de Histerese da Série 2 com  $f = 1\text{Hz}$  e  $a = 8\text{mm}$**

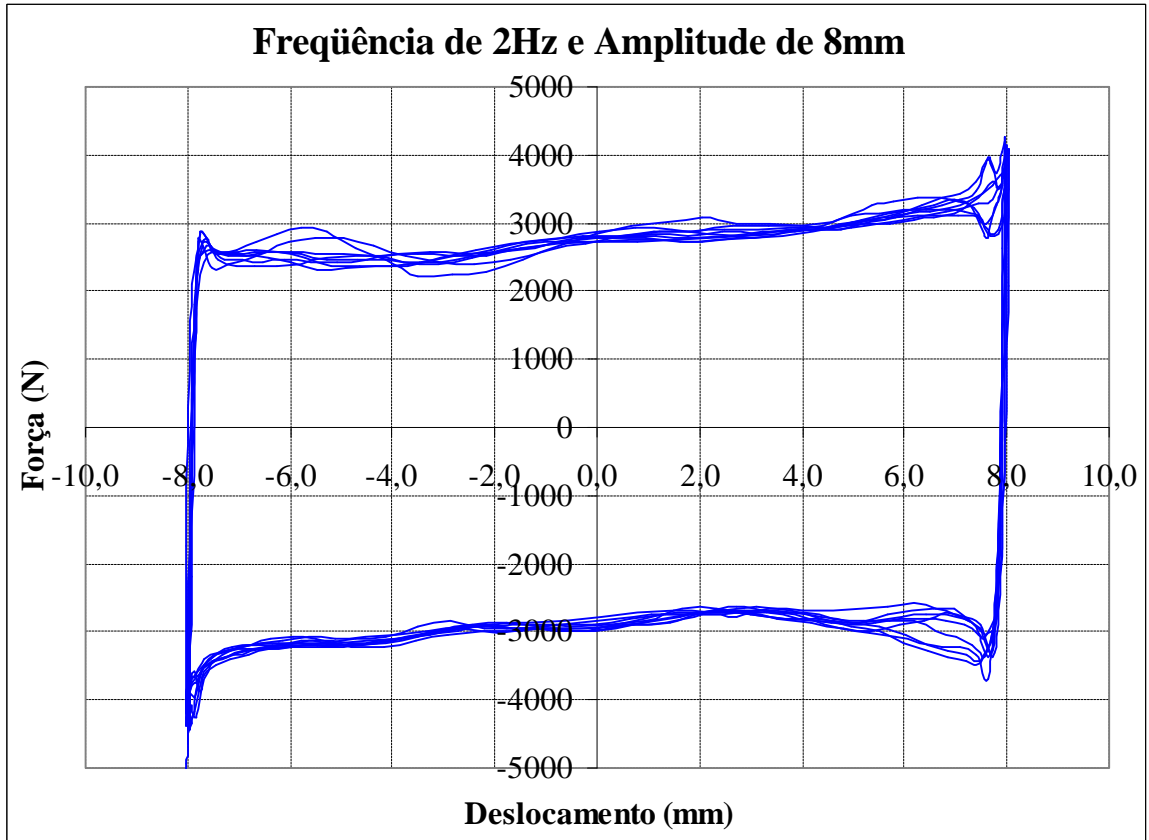


Figura 7.11 - Ciclos de Histerese da Série 2 com  $f = 2\text{Hz}$  e  $a = 8\text{mm}$

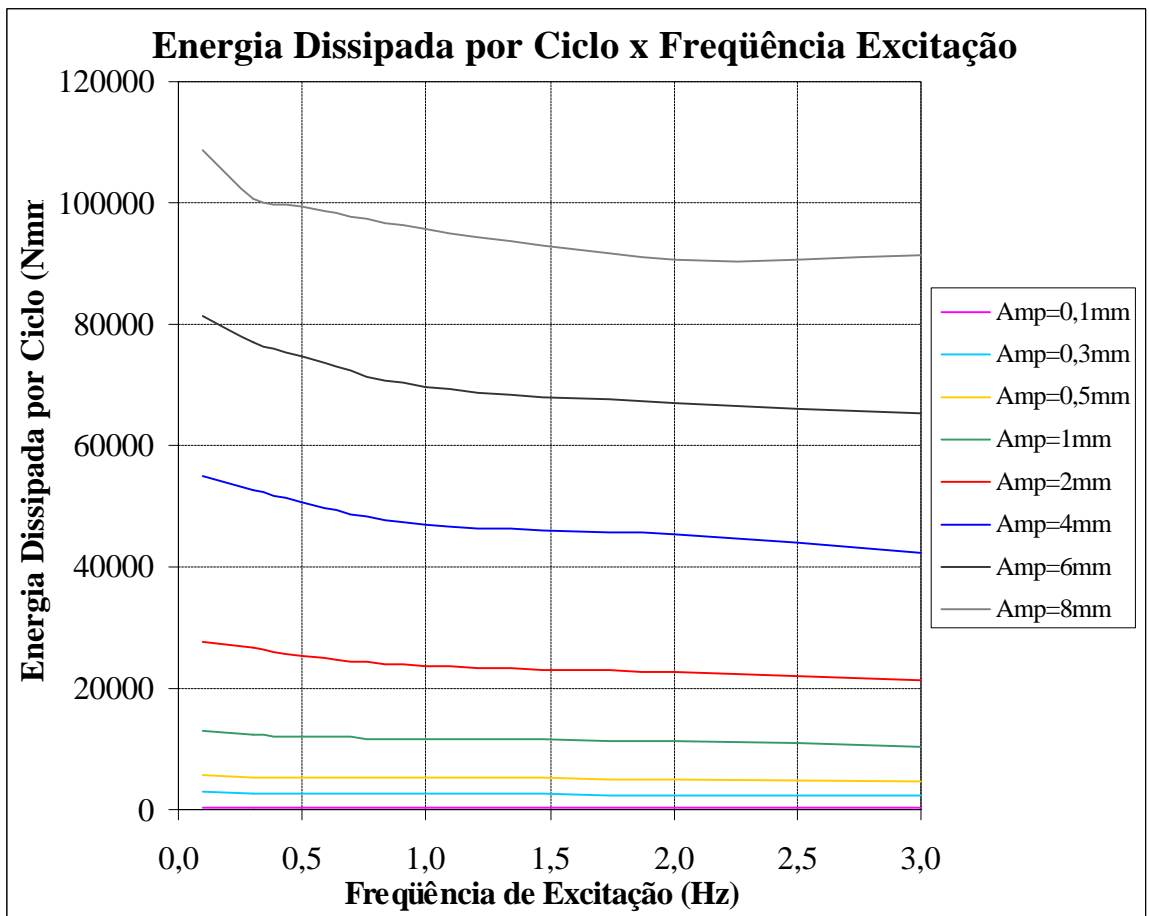
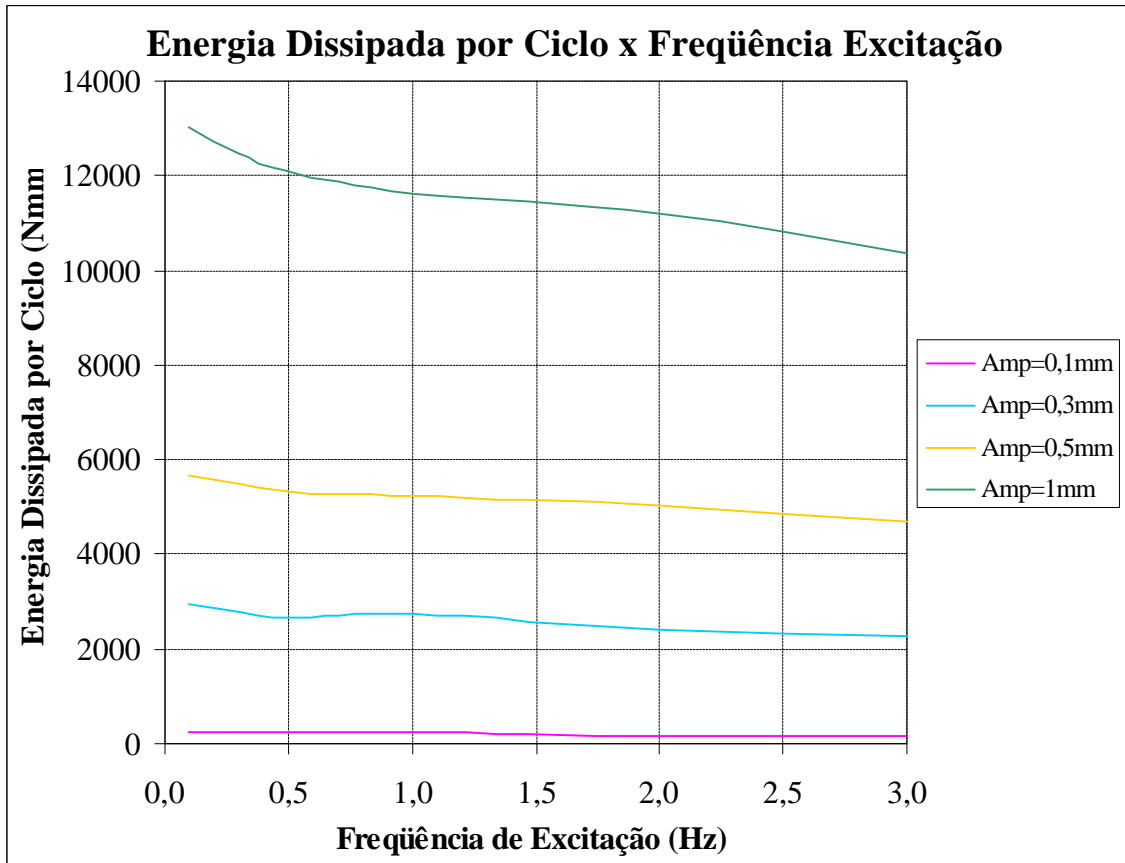
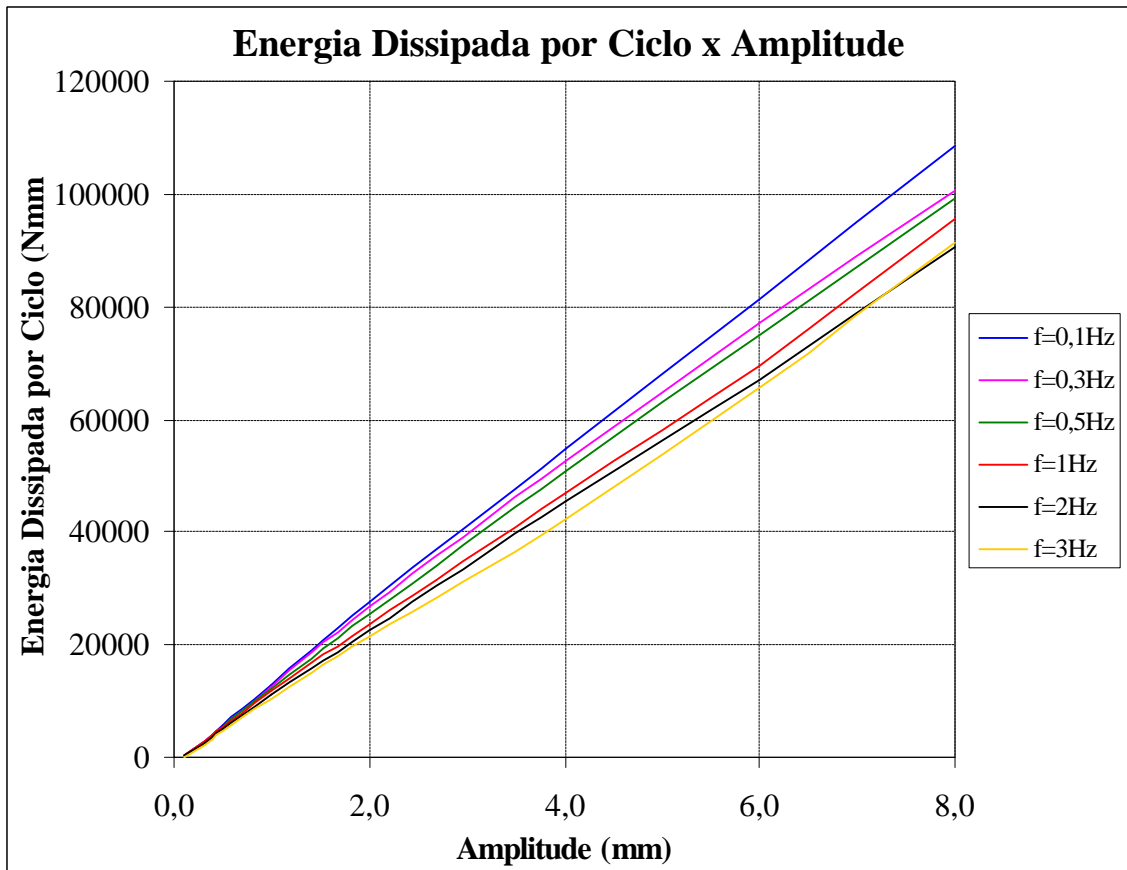


Figura 7.12 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Frequência de Excitação





**Figura 7.13 - Detalhes do Gráfico da Energia Dissipada x Frequência de Excitação**



**Figura 7.14 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Amplitude**

#### 7.1.4. VARIAÇÃO DA FORÇA DE ATRITO COM A VELOCIDADE

Conforme foi explicado no capítulo 4 (ver figura 4.12), existem vários modelos matemáticos que se propõem a explicar a variação da força de atrito com a velocidade de deslizamento.

Nas figuras 7.15 e 7.16 apresentam-se os gráficos de variação da força de atrito com a velocidade de deslizamento para a série 1 e as figuras 7.17 e 7.18 mostram essa mesma variação para a série 2. A partir dos gráficos das figuras 7.16 e 7.18 determinou-se a melhor curva de ajuste para a variação da força de atrito com a velocidade para cada uma das duas séries de ensaios separadas, conforme se apresenta na figura 7.19. A figura 7.20 mostra esse ajuste considerando os dados das duas séries de ensaios juntas.

A lei encontrada para a variação da força de atrito com a velocidade de deslizamento é dada pela equação 7.1.

$$F_a = F_{aest} \left( \frac{1 + c_1 * \exp(-c_2 \dot{x})}{1 + c_1} \right) \quad (7.1)$$

onde:  $F_a$  é a força de atrito;

$F_{aest}$  é a força de atrito estática, dada por  $\mu_s N$ ;

$\dot{x}$  é a velocidade de deslizamento e

$c_1$  e  $c_2$  são constantes que variam de acordo com o material em atrito.

Sabendo-se que foi aplicada uma excitação senoidal, tem-se:

$$x = a \sin(\omega t) \quad (7.2)$$

onde:  $x$  é o deslocamento;

$a$  é a amplitude do deslocamento;

$\omega$  é a frequência de excitação em rad/s e

$t$  é o tempo.

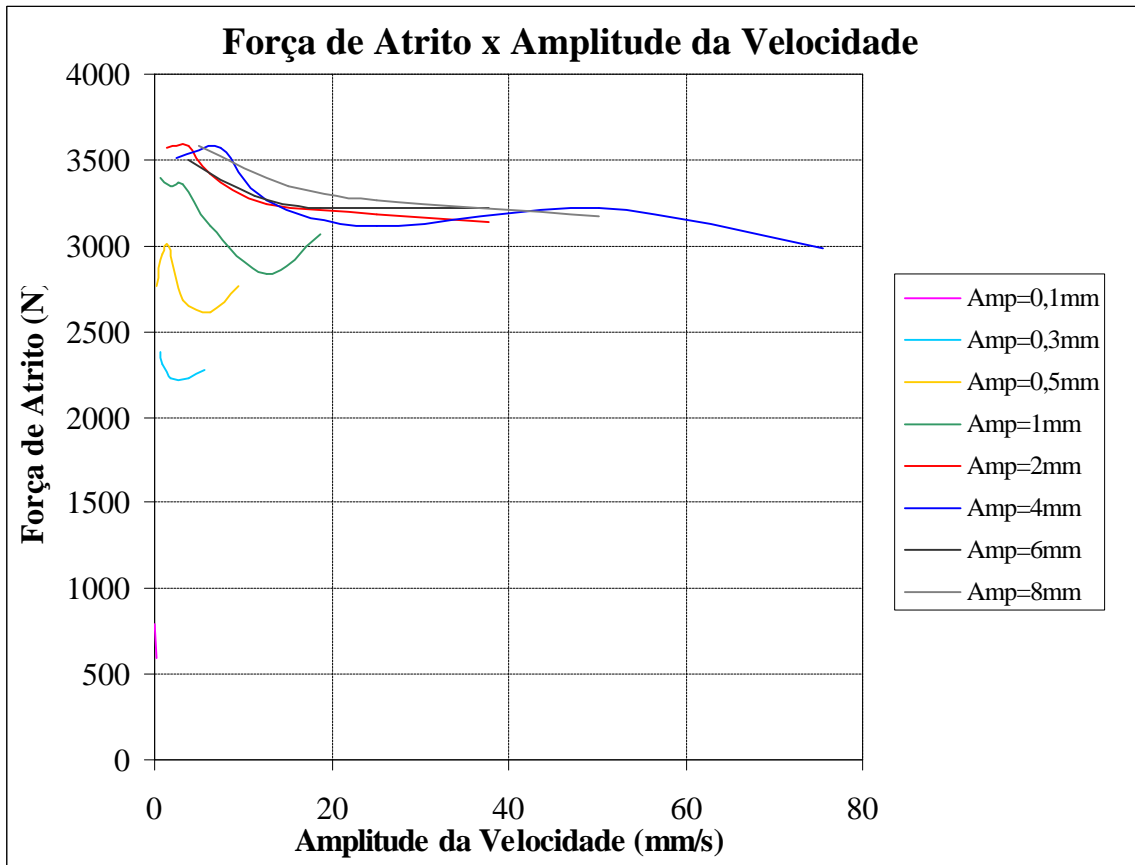
Derivando-se a equação (7.2) em relação ao tempo, obtém-se a velocidade:

$$\dot{x} = a_v \cos(\omega t) \quad (7.3)$$

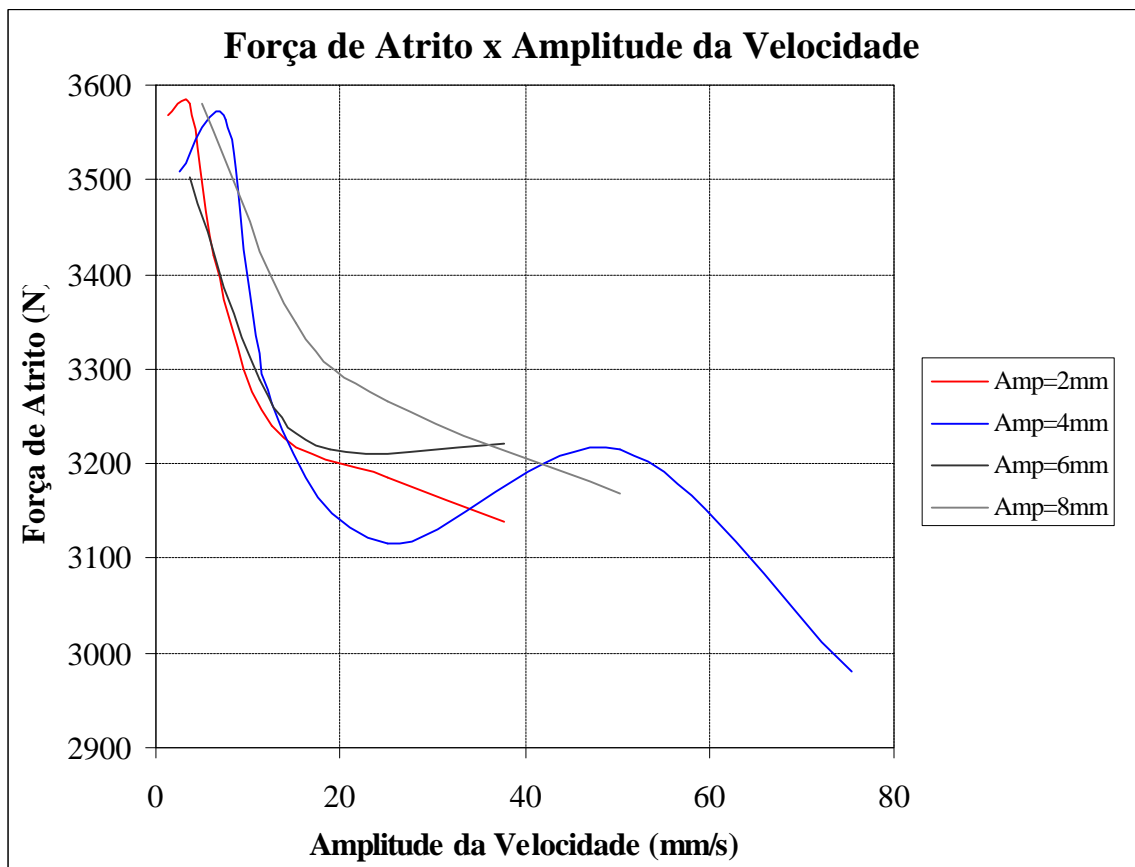
onde:  $a_v$  é a amplitude da velocidade, dada por:  $a\omega$ .

Da equação (7.2) tira-se que:  $\sin^2(\omega t) = (x/a)^2$  e sabendo-se que  $\cos(\omega t) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega t)}$ , pode-se escrever a equação (7.1) como:

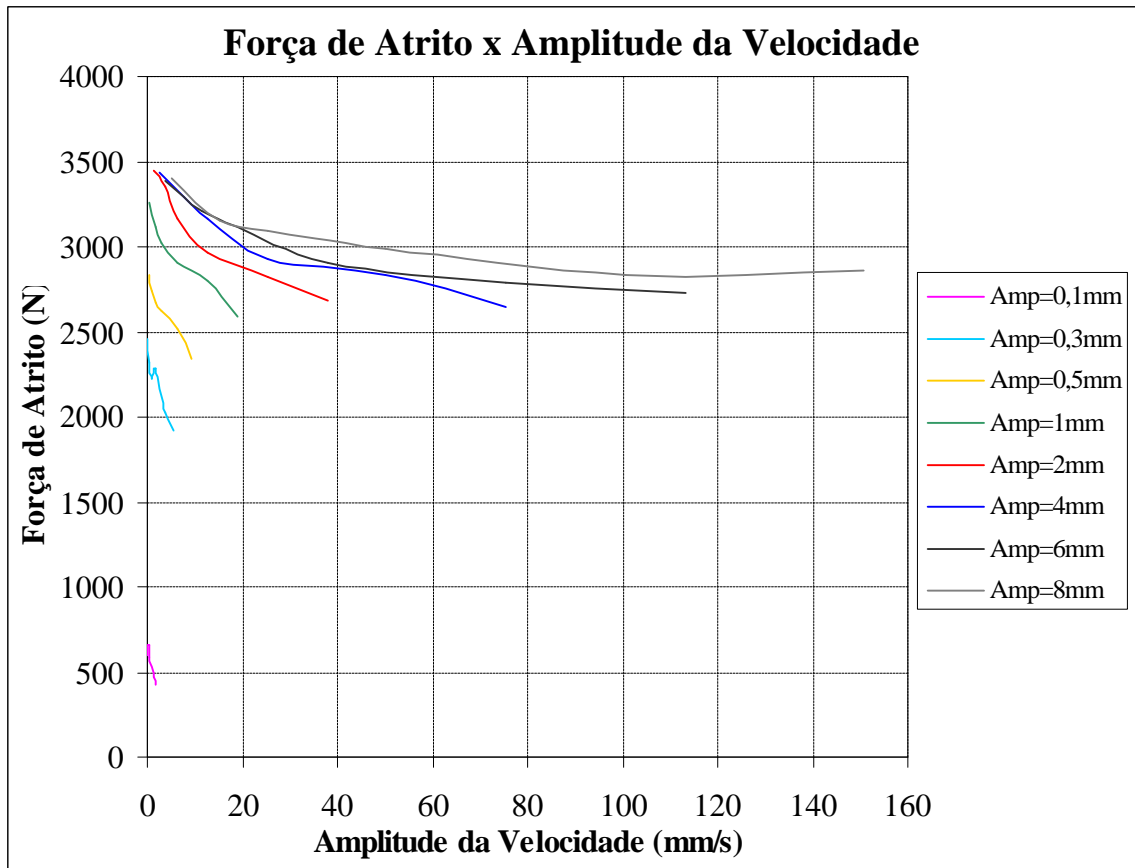
$$F_a = F_{aest} \left( \frac{1 + c_1 * \exp\left(-c_2 a_v \sqrt{1 - (x/a)^2}\right)}{1 + c_1} \right) \quad (7.4)$$



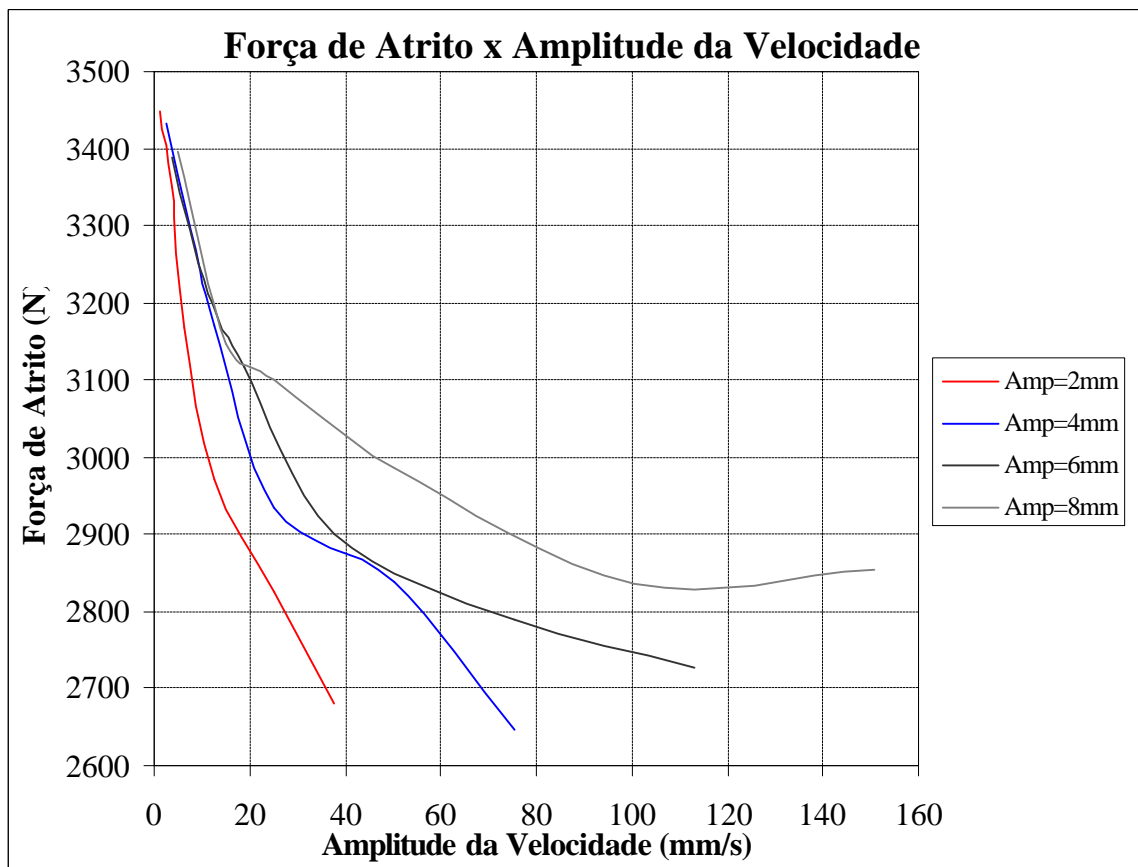
**Figura 7.15 - Gráfico da Variação da Força de Atrito x Velocidade - Série 1**



**Figura 7.16 - Detalhes do Gráfico da Força de Atrito x Velocidade - Série 1**



**Figura 7.17 - Gráfico da Variação da Força de Atrito x Velocidade - Série 2**



**Figura 7.18 - Detalhes do Gráfico da Força de Atrito x Velocidade - Série 2**

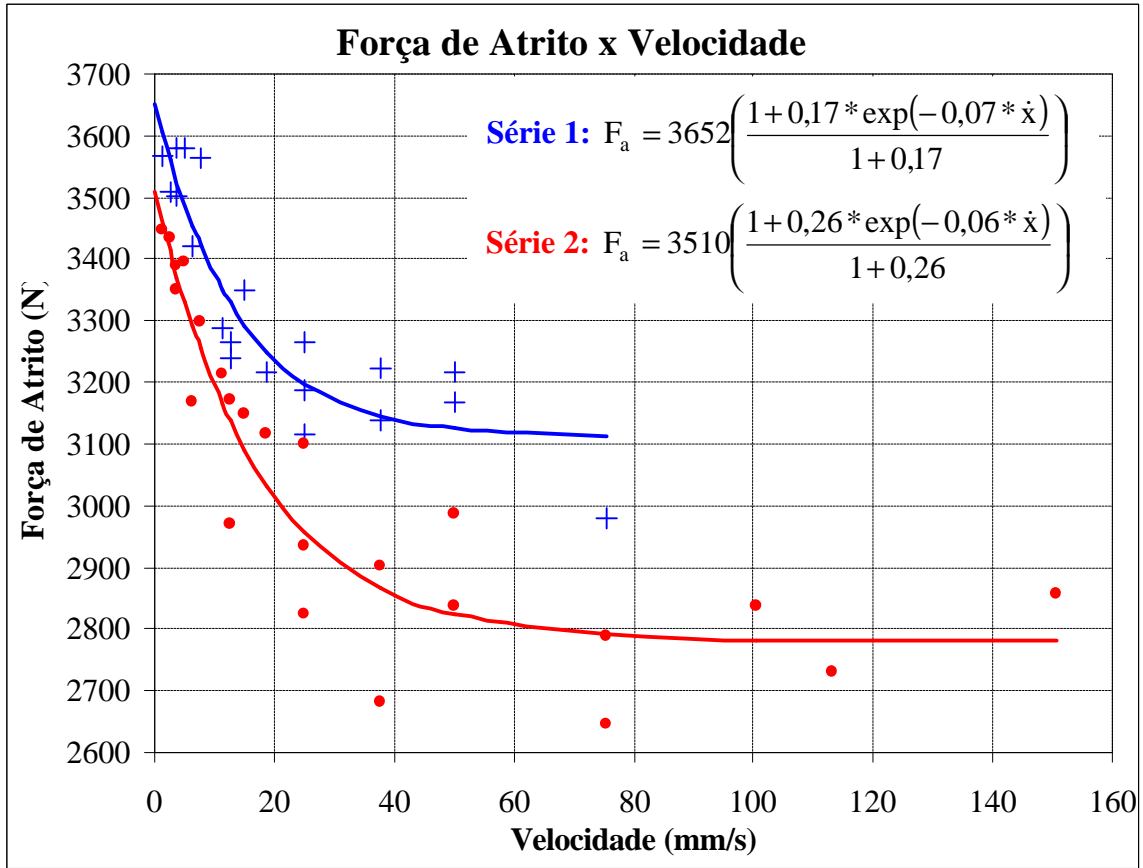


Figura 7.19 - Curva de Variação da Força de Atrito x Velocidade - Separadas por Séries

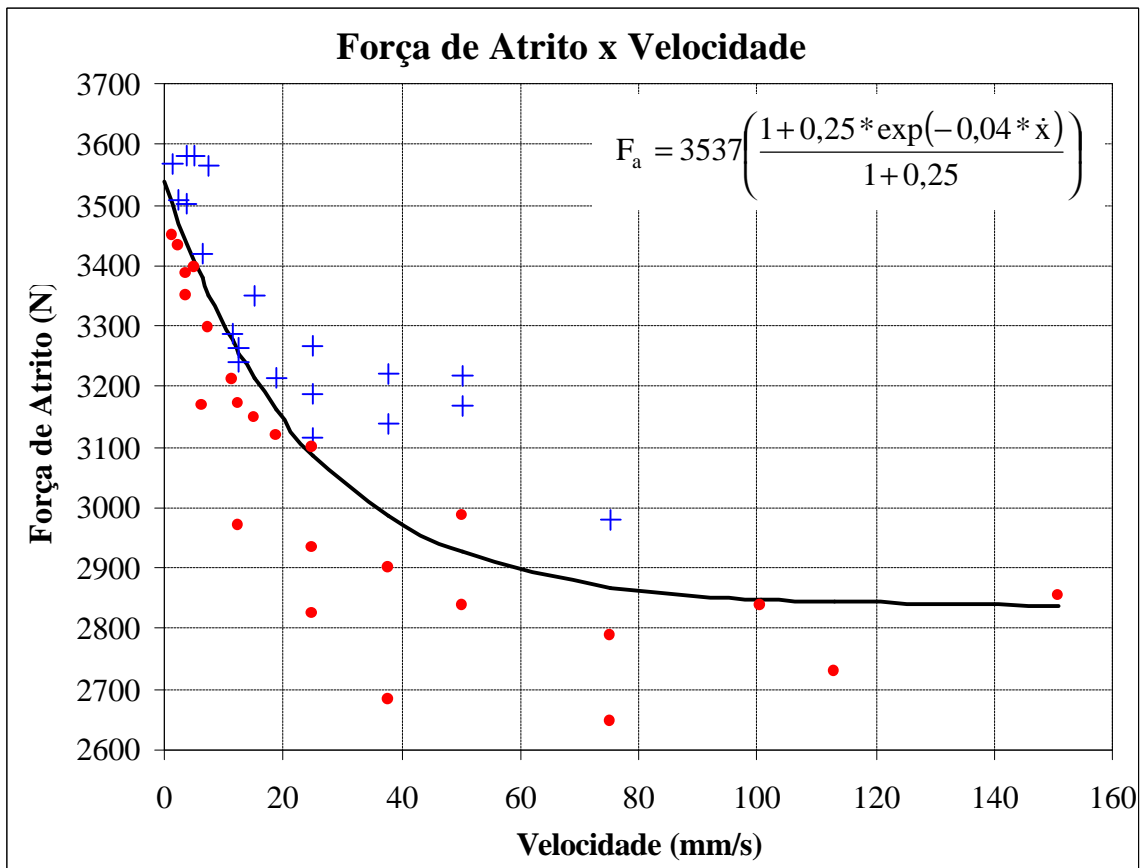


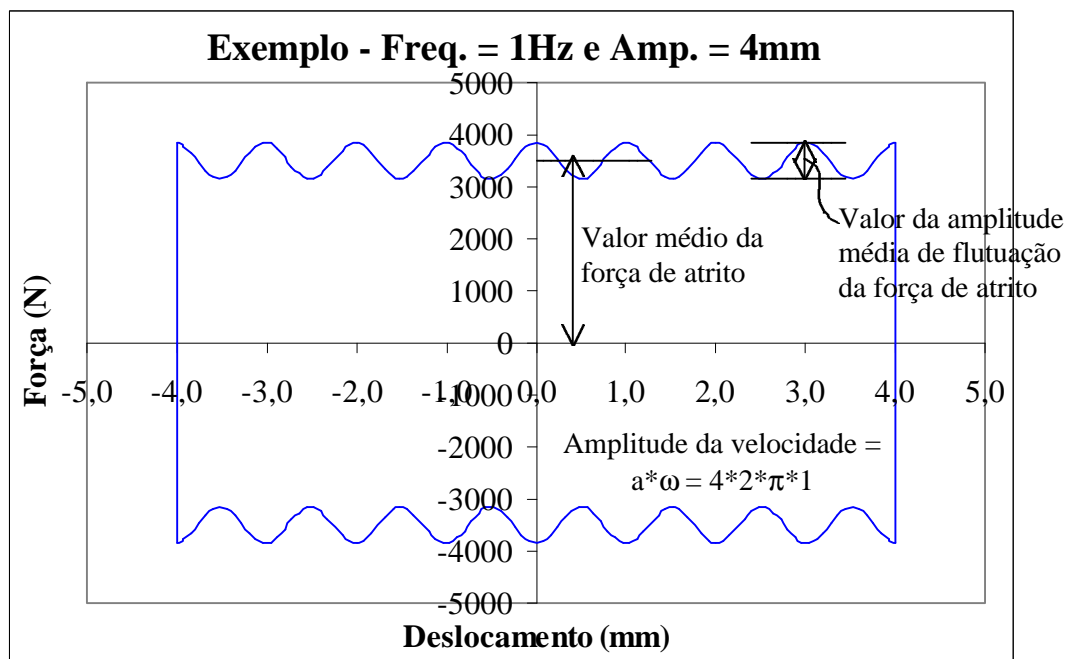
Figura 7.20 - Curva de Variação da Força de Atrito x Velocidade - Séries Juntas

Conforme se pode observar dos gráficos das figuras 7.15 à 7.20, a força de atrito diminui com o aumento da velocidade de deslizamento, até que chega num determinado valor a partir do qual a força de atrito se estabiliza e não diminui mais. Pode-se tirar dos gráficos que a variação entre os coeficientes de atrito estático (quando a velocidade de deslizamento é zero) e cinético (a partir do ponto onde a força de atrito tornou-se aproximadamente estável) está em torno de 15% à 20%.

### 7.1.5. ANÁLISE DO MOVIMENTO DE ADERÊNCIA-DESLIZAMENTO

De acordo com o observado nos ciclos de histerese das séries 1 e 2, para determinadas amplitudes da velocidade, ocorre o movimento de aderência-deslizamento, como pode ser notado nos ciclos das figuras 7.4, 7.5, 7.9 e 7.10. Porém, para outros valores de amplitudes da velocidade, este movimento não é observado, como apresentado nos ciclos das figuras 7.3 e 7.11.

Traçando-se um gráfico da razão ( $\eta$ ) entre a amplitude média de flutuação da força de atrito e o valor médio da força de atrito com a amplitude da velocidade percebe-se que o movimento de aderência-deslizamento ocorre, preferencialmente, quando os valores da amplitude da velocidade estão dentro de um determinado intervalo. Ou seja, para valores da amplitude da velocidade menores que o limite inferior e maiores que o limite superior deste intervalo, o movimento de aderência deslizamento, praticamente, não ocorre. No gráfico seguinte, ilustra-se o explicado agora.



**Figura 7.21 - Exemplo que Mostra como se Obtiveram os dois Gráficos Seguintes**

Nas figuras 7.22 e 7.23 apresentam-se os gráficos da razão ( $\eta$ ) entre a amplitude média de flutuação da força de atrito e o valor médio da força de atrito com a amplitude da velocidade para as séries 1 e 2 separadas e juntas, respectivamente.

Como demonstrado nos gráficos seguintes, os pontos podem ser aproximados por uma parábola de segundo grau, a fim de se obter o intervalo dentro do qual o movimento de aderência-deslizamento ocorre mais intensamente.

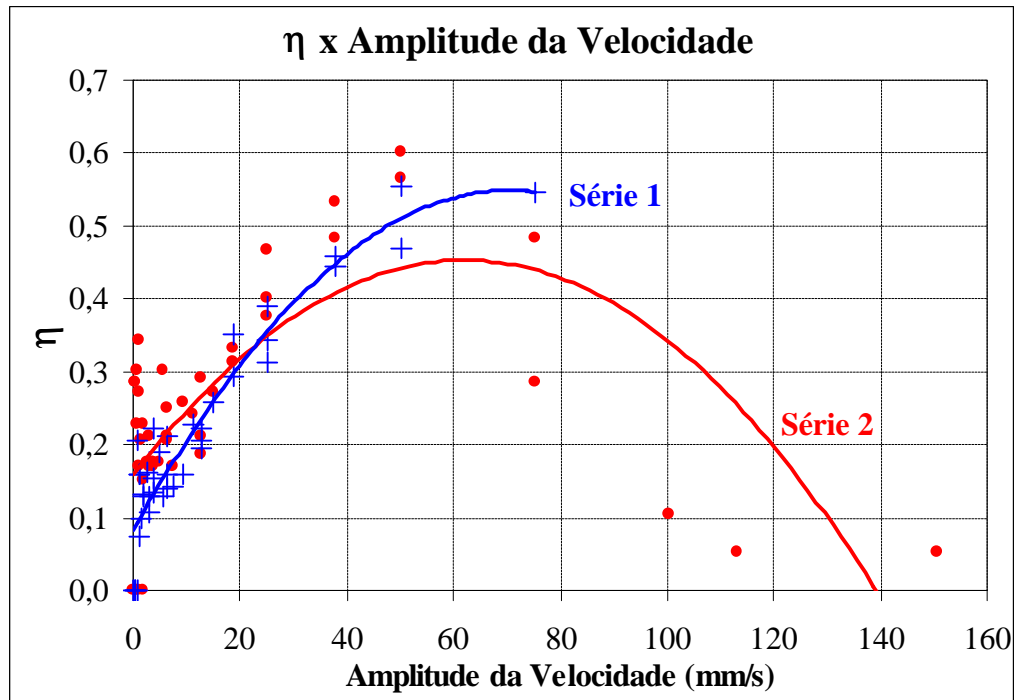


Figura 7.22 - Gráfico de  $\eta$  x Amplitude da Velocidade - Separado por Série

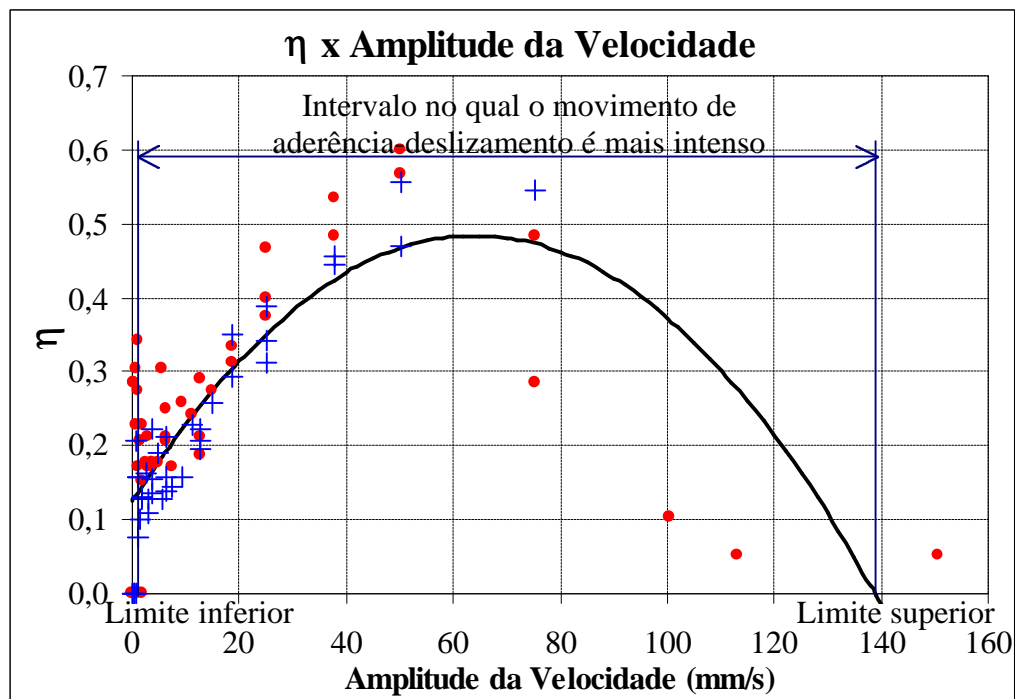


Figura 7.23 - Gráfico de  $\eta$  x Amplitude da Velocidade - Séries Juntas

## 7.2. MODELO B

### 7.2.1. METODOLOGIA DOS ENSAIOS

Foram realizadas duas séries de ensaios com este modelo, designadas séries 3 e 4, na mesma máquina utilizada para os ensaios do modelo A. As figuras 7.24 e 7.25 mostram as fotos dessas séries de ensaios. Em ambas as séries foi aplicada uma excitação senoidal, com os valores de frequência e de amplitudes de vibração estipulados conforme se apresenta na tabela 7.4. Com cada um desses valores foram realizados os ensaios, com 10 ciclos, obtendo-se, a intervalos de tempo pré-determinados, o valor do deslocamento e a correspondente força de atrito para aquele instante de tempo.

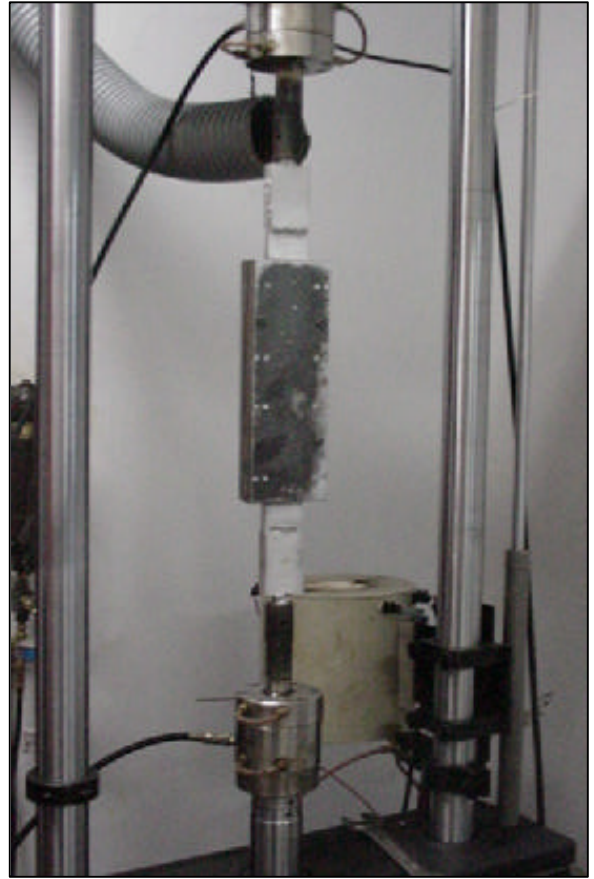
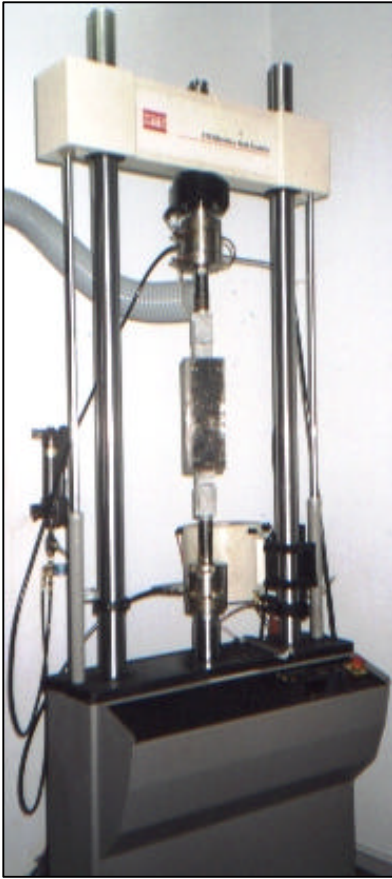
**Tabela 7.4 - Valores de Frequência e Amplitudes de Vibração para as Séries 3 e 4**

Frequência (Hz)	Amplitude (mm)								
0,1	0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	
0,3	0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	
0,5	0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	
1,0	0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	
2,0	0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	
3,0	0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	

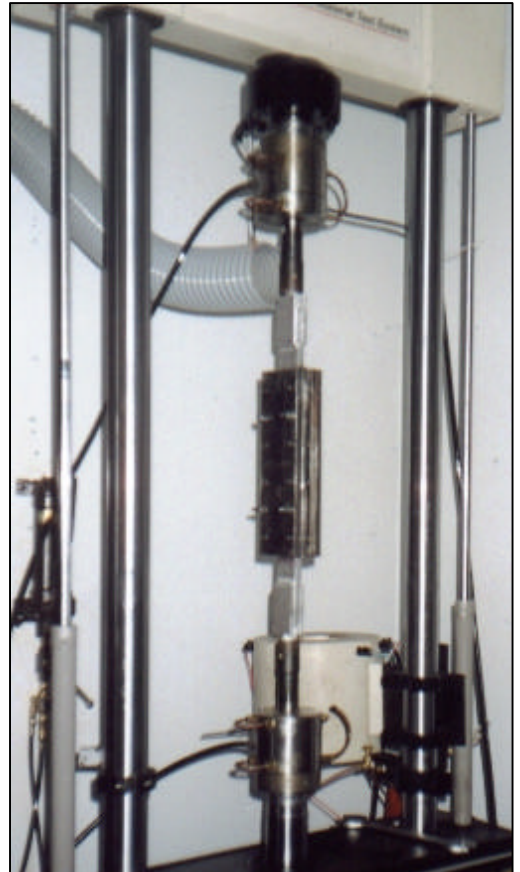
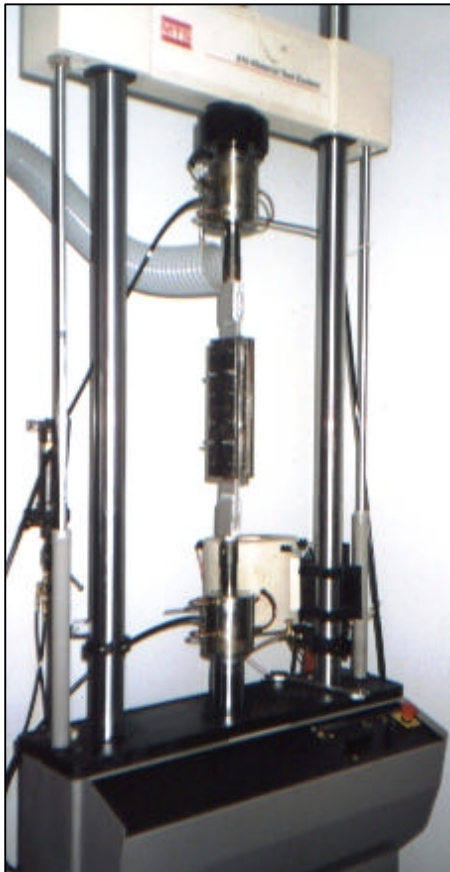
### 7.2.2. RESULTADOS OBTIDOS DA SÉRIE 3

Graficando-se os conjuntos de ciclos de histerese com os dados de deslocamentos e forças de atrito obtidos dessa série, observou-se um comportamento caótico para esse amortecedor, conforme pode ser visto nas figuras 7.26 e 7.27. Devido a isso, parou-se essa série ainda na primeira frequência de 0,1Hz. Acredita-se que esse comportamento ocorreu devido à falta de precisão do torquímetro utilizado, o que fez com que o torque dos quatro parafusos não fosse exatamente o mesmo, e conseqüentemente, o modelo não deslizasse de forma simétrica (igual dos dois lados). A solução encontrada para a série 4 foi aumentar para 3kgf.m o torque dos parafusos da parte superior do amortecedor, fazendo com que apenas a parte inferior trabalhasse.





**Figura 7.24 - Fotos da Série 3 - Modelo B**



**Figura 7.25 - Fotos da Série 4 - Modelo B**

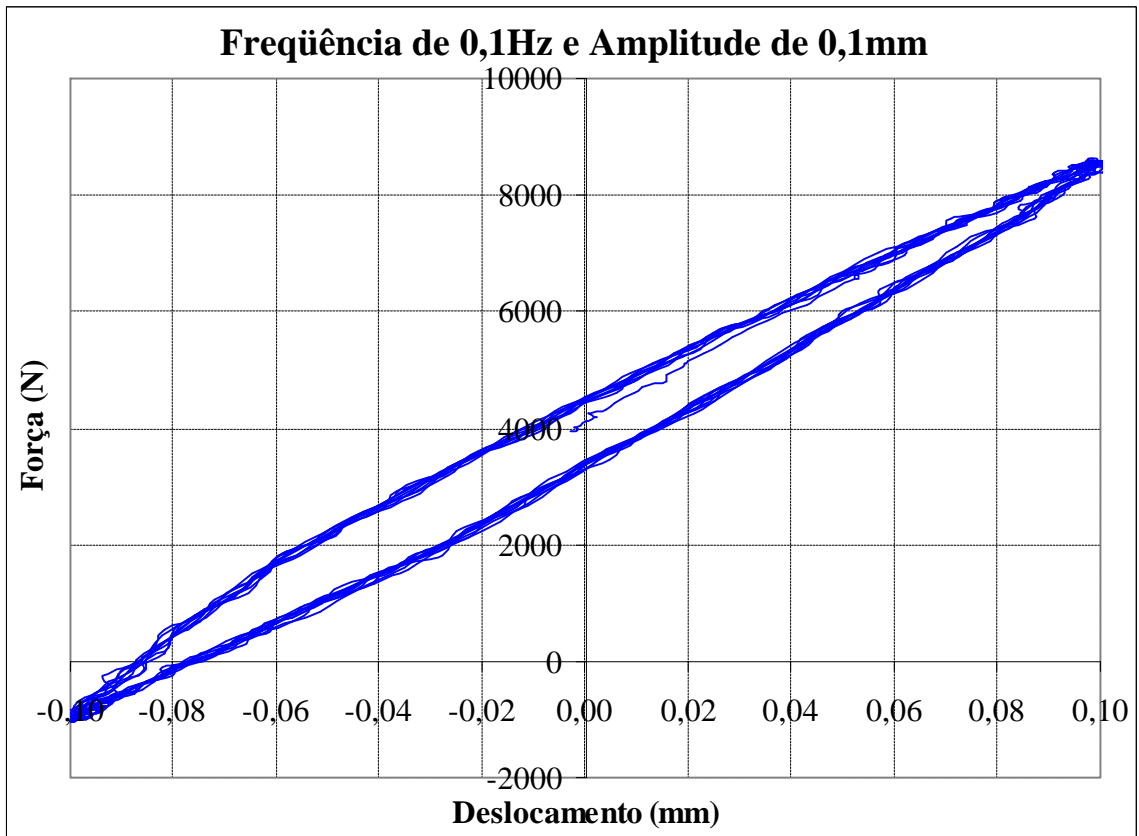


Figura 7.26 - Ciclos de Histerese da Série 3 com  $f = 0,1\text{Hz}$  e  $a = 0,1\text{mm}$

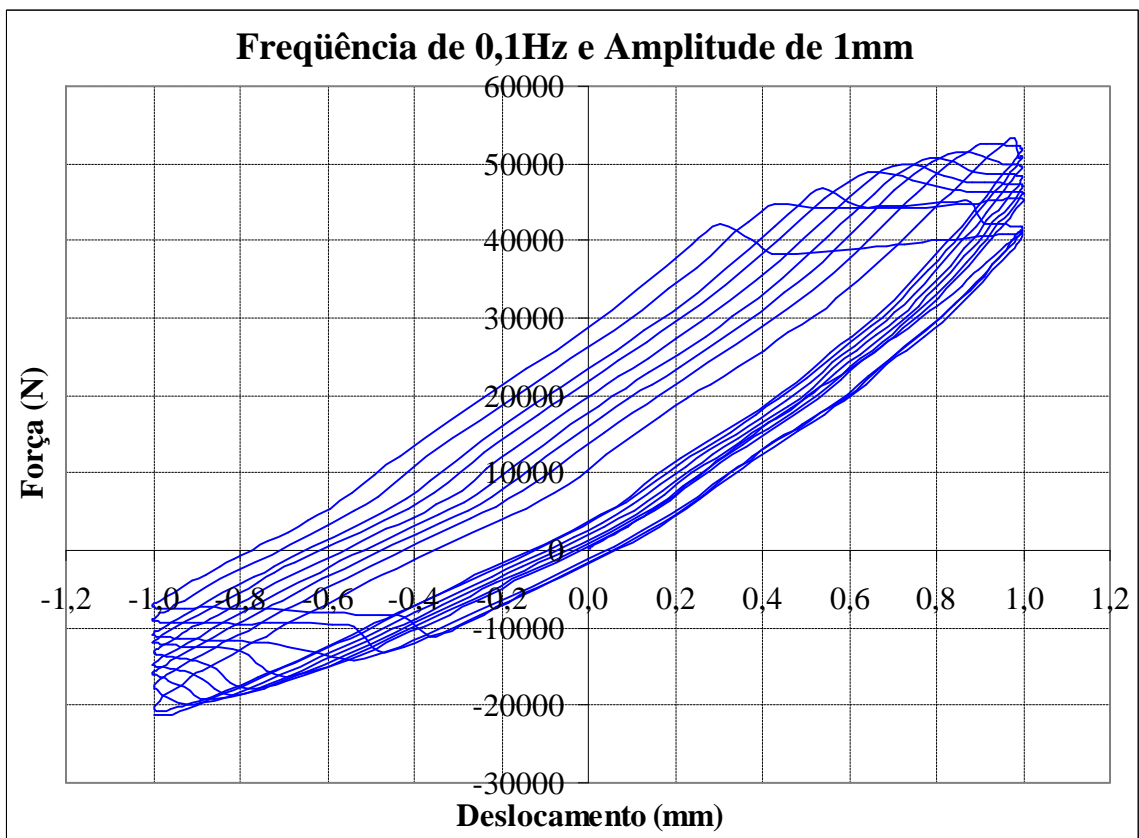


Figura 7.27 - Ciclos de Histerese da Série 3 com  $f = 0,1\text{Hz}$  e  $a = 1\text{mm}$

### 7.2.3. RESULTADOS OBTIDOS DA SÉRIE 4

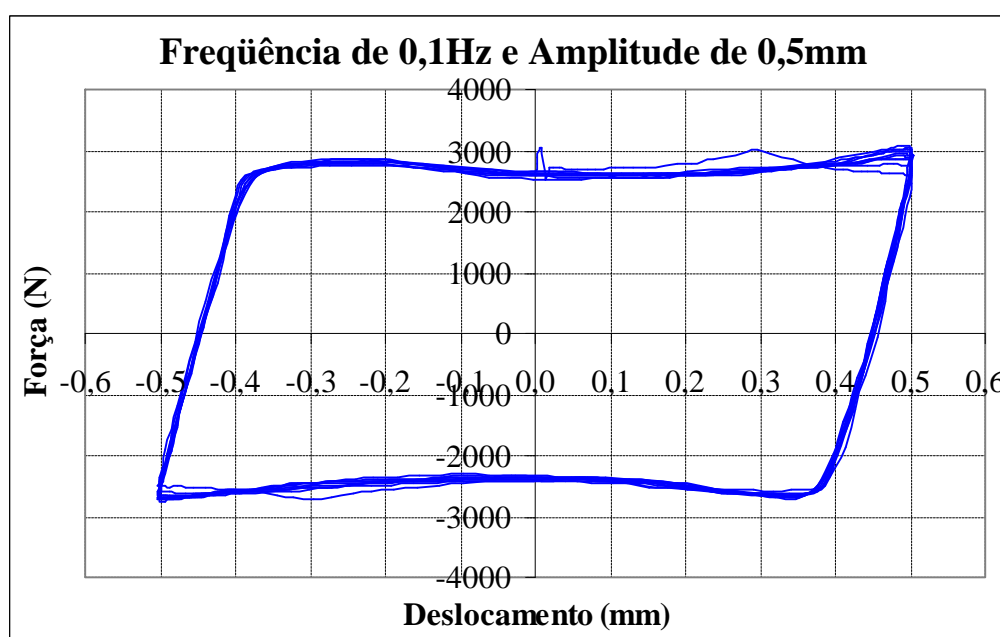
Como se aumentou para 3kgf.m o torque dos parafusos da parte superior do amortecedor e manteve-se em 2kgf.m o torque dos parafusos da parte inferior, o modelo passou a dissipar energia apenas na parte de baixo (pois somente essa metade se movia), deixando de ser um sistema caótico.

Então, com os dados de deslocamentos e forças de atrito obtidos dessa série para cada frequência e amplitude escolhidas, podem-se graficar os conjuntos de ciclos de histerese, conforme se observam alguns exemplos nas figuras 7.28, 7.29 e 7.30.

Para cada um dos conjuntos de ciclos de histerese, com o auxílio do Matlab, calculou-se a área média com os oito ciclos intermediários, o que dá a energia dissipada média por ciclo. E com esses valores de energia dissipada, obtiveram-se os gráficos das figuras 7.31, 7.32 e 7.33.

**Tabela 7.5 - Valores da Energia Dissipada por Ciclo para a Série 4 - Modelo B**

	a = 0,1	a = 0,3	a = 0,5	a = 1,0	a = 2,0	a = 4,0	a = 6,0	a = 8,0
Freq. (Hz)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)	Energia (Nmm)
0,1	494,9	2733,0	4635,2	9463,2	19098,3	43805,0	70982,3	102691,9
0,3	449,2	2556,3	4427,3	9321,1	20273,1	43161,4	72324,1	110762,8
0,5	444,6	2779,2	4914,5	10418,4	22481,8	48335,9	76485,3	116507,7
1,0	386,2	3054,8	5425,3	11634,1	24872,6	51968,6	82636,1	119905,3
2,0	396,7	2955,5	5218,6	10970,4	22599,6	49507,9	71794,4	105486,0
3,0	387,6	2832,4	5090,7	10913,7	22750,9	49182,8	73837,2	107951,4



**Figura 7.28 - Ciclos de Histerese da Série 4 com  $f = 0,1\text{Hz}$  e  $a = 0,5\text{mm}$**

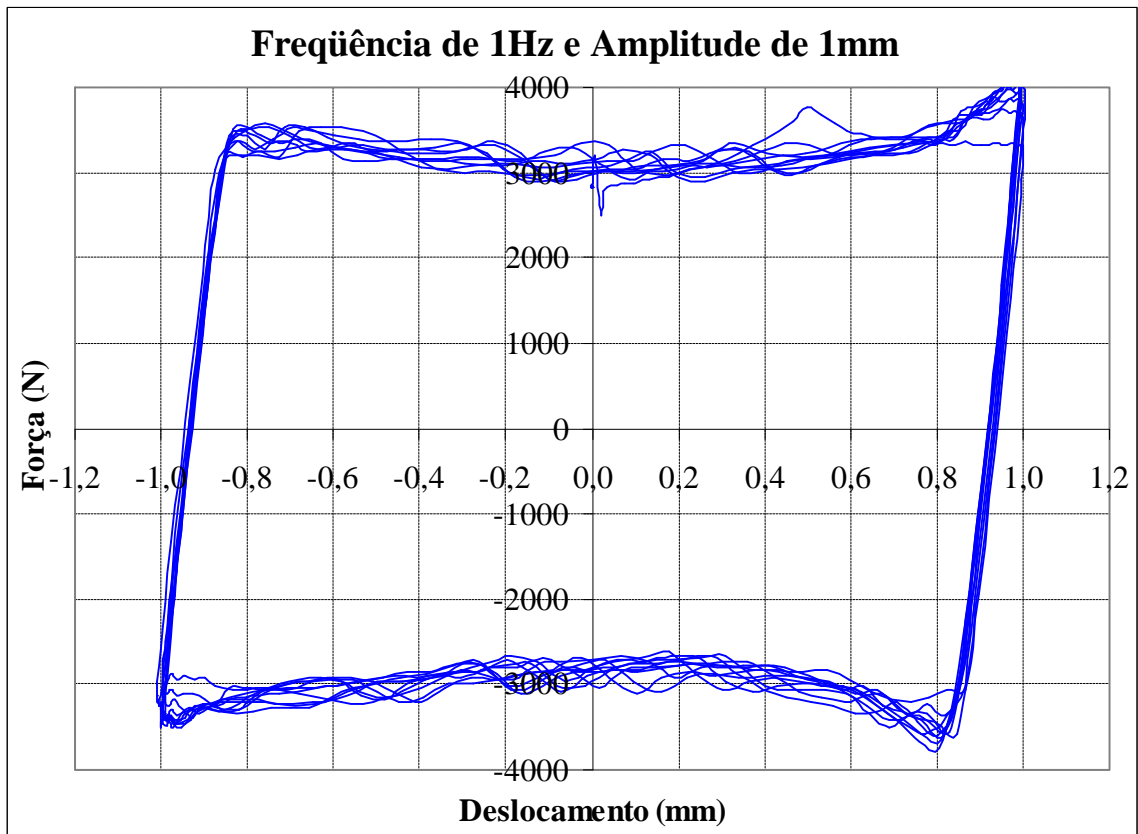


Figura 7.29 - Ciclos de Histerese da Série 4 com  $f = 1\text{Hz}$  e  $a = 1\text{mm}$

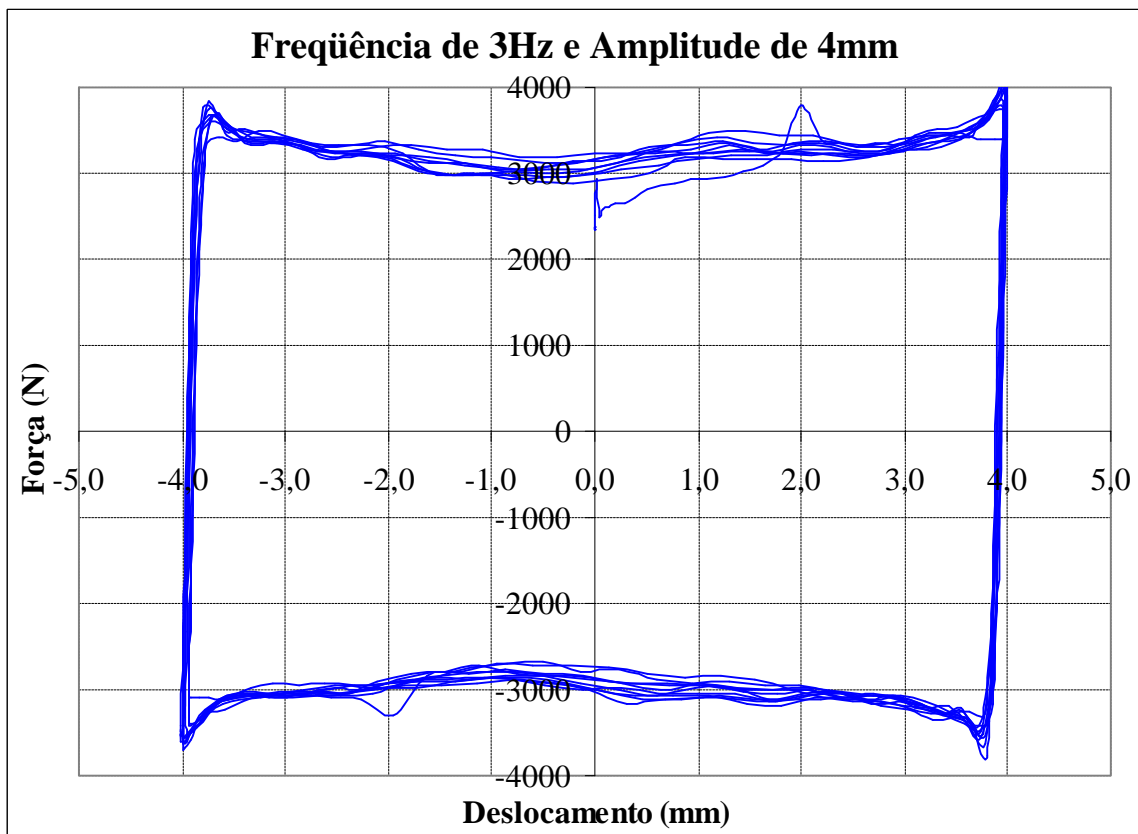
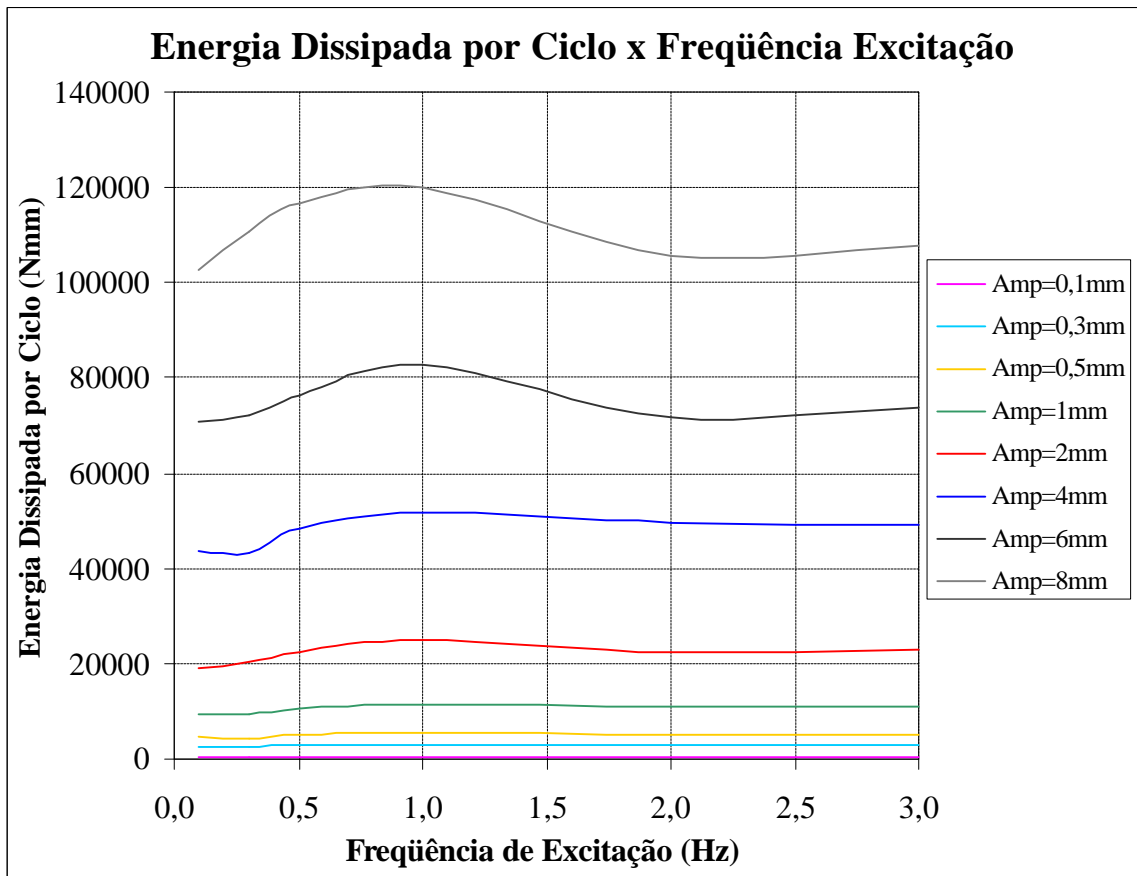
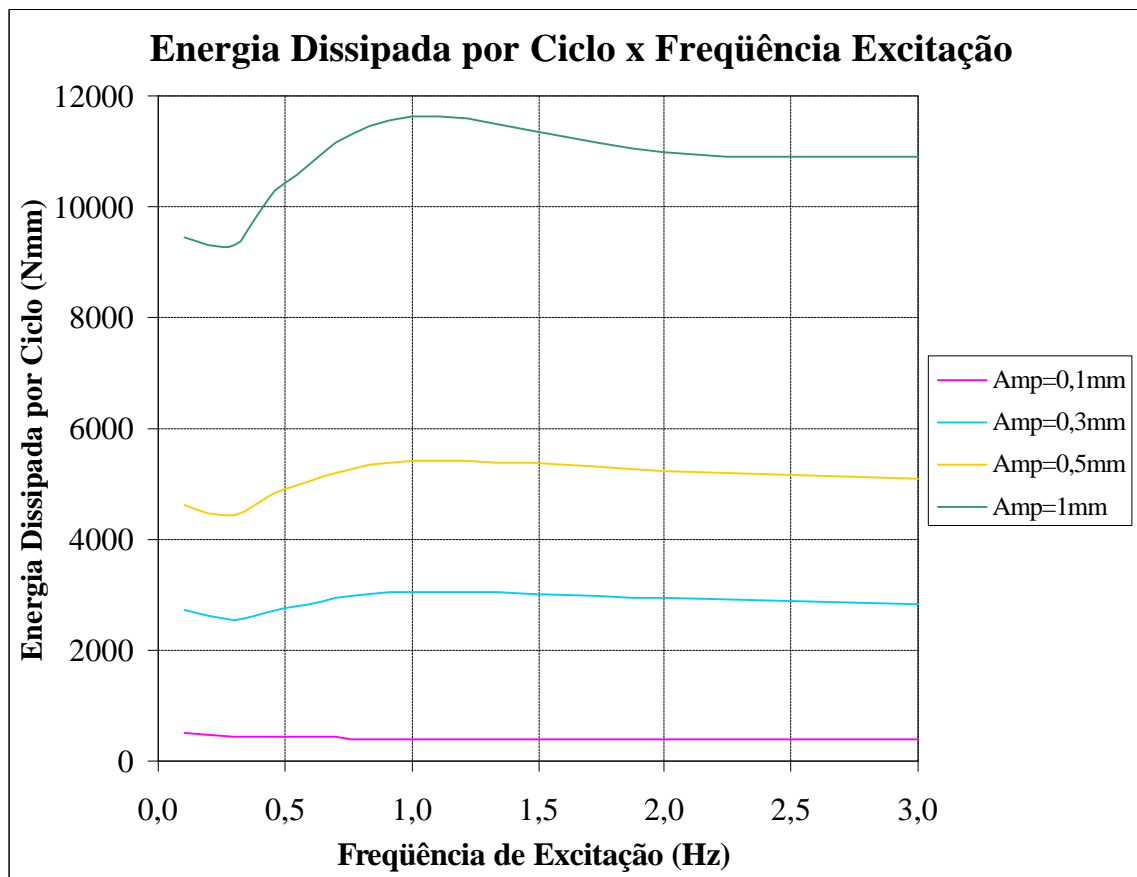


Figura 7.30 - Ciclos de Histerese da Série 4 com  $f = 3\text{Hz}$  e  $a = 4\text{mm}$



**Figura 7.31 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Frequência de Excitação**



**Figura 7.32 - Detalhes do Gráfico da Energia Dissipada x Frequência de Excitação**

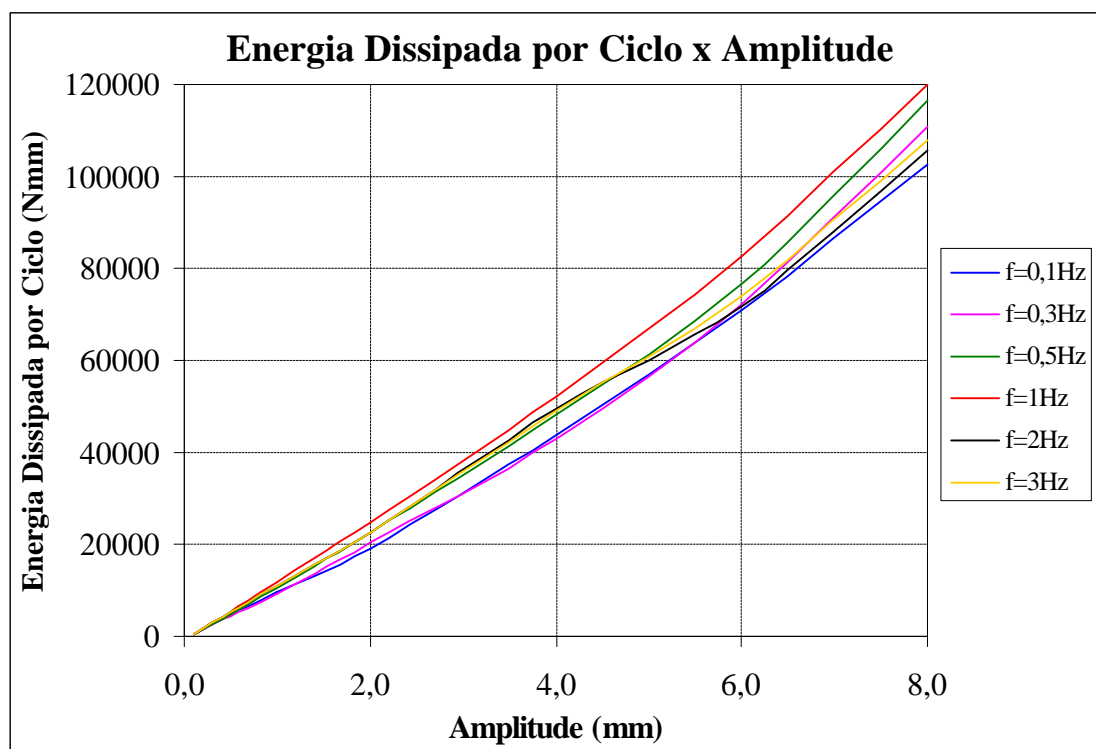


Figura 7.33 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Amplitude

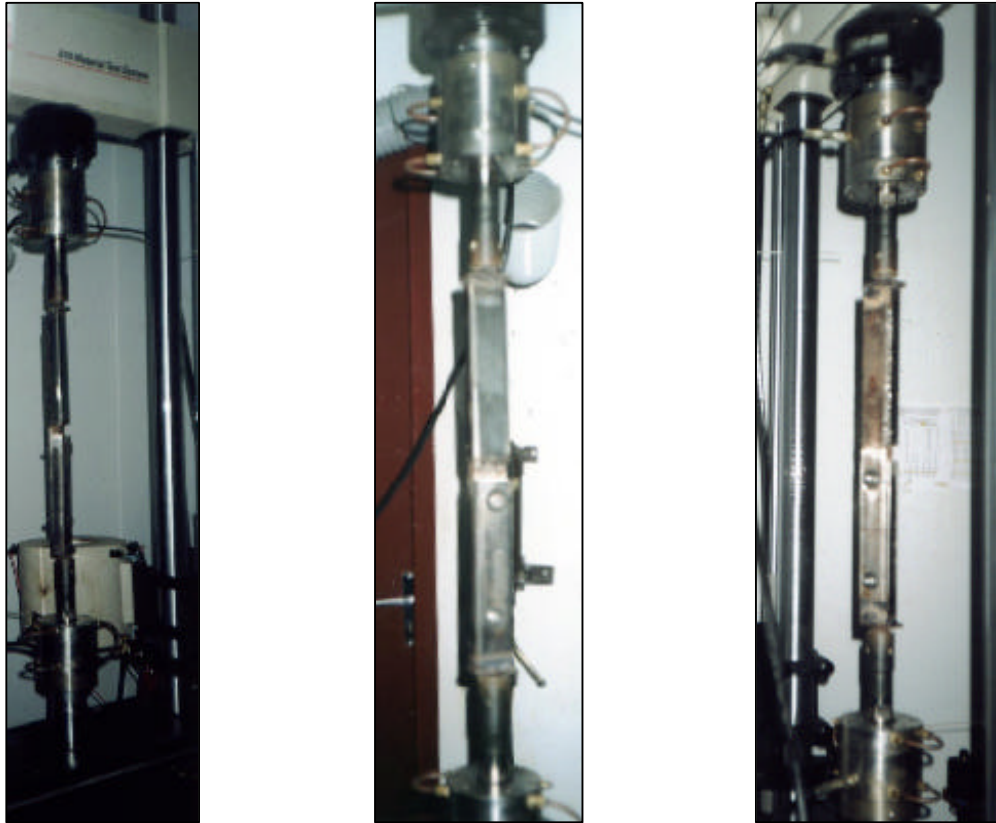
## 7.3. MODELO C

### 7.3.1. METODOLOGIA DOS ENSAIOS

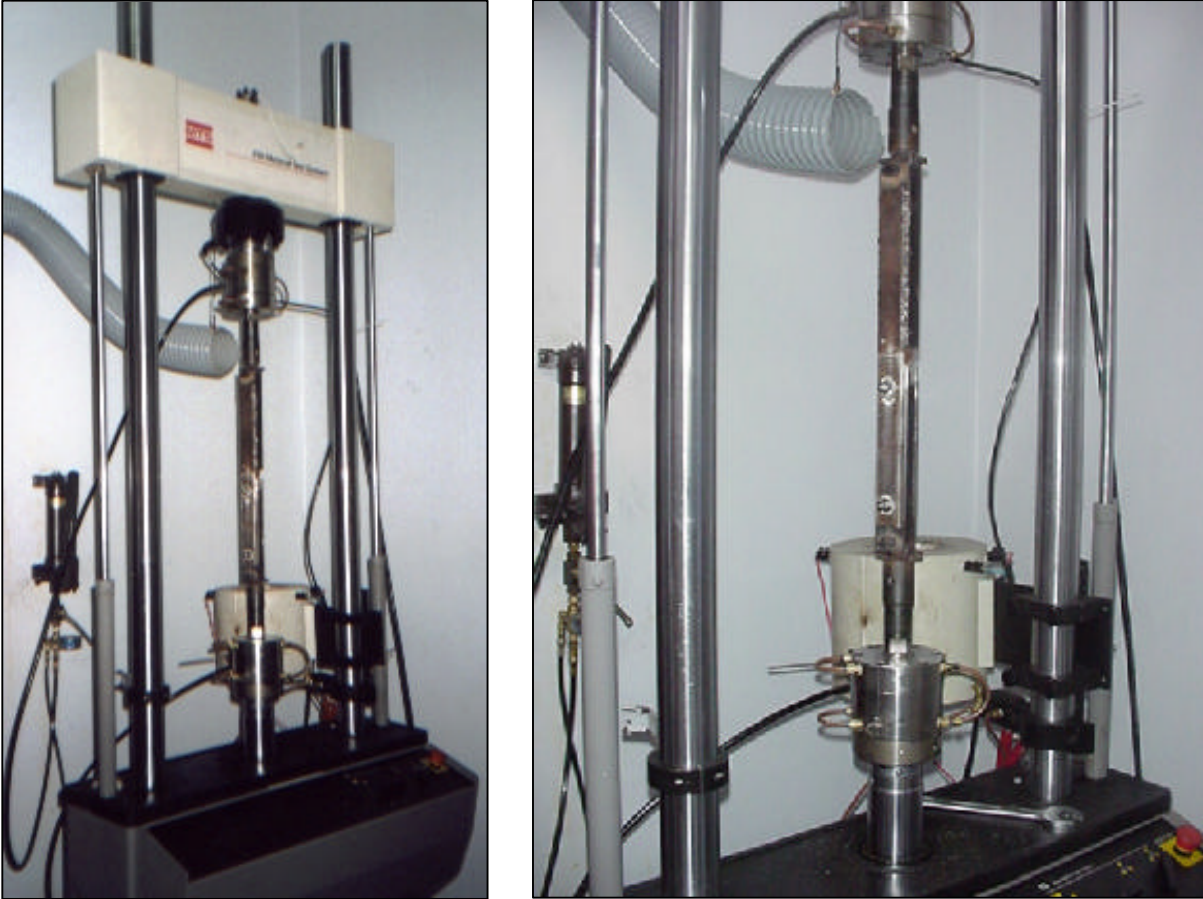
Foram realizadas duas séries de ensaios com este modelo, designadas séries 5 e 6, na mesma máquina utilizada para os ensaios dos outros dois projetos. As figuras 7.34 e 7.35 mostram as fotos dessas séries de ensaios. Em ambas as séries foi aplicada uma excitação senoidal, com os valores de frequência e de amplitudes de vibração estipulados conforme se apresenta na tabela 7.6. Com cada um desses valores foram realizados os ensaios, com 10 ciclos, obtendo-se, a intervalos de tempo pré-determinados, o valor do deslocamento e a correspondente força de atrito para aquele instante de tempo.

Tabela 7.6 - Valores de Frequência e Amplitudes de Vibração para as Séries 5 e 6

Frequência (Hz)	Amplitude (mm)							
0,1	0,1	0,3	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	
0,3	0,1	0,3	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	
0,5	0,1	0,3	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	
1,0	0,1	0,3	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	
2,0	0,1	0,3	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	
3,0	0,1	0,3	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	



**Figura 7.34 - Fotos da Série 5 - Modelo C**



**Figura 7.35 - Fotos da Série 6 - Modelo C**

### 7.3.2. RESULTADOS OBTIDOS DA SÉRIE 5

Graficando-se os conjuntos de ciclos de histerese dessa série, observou-se uma pequena inclinação das retas horizontais, provavelmente devido à rigidez das borrachas, e também se constatou que para amplitudes de vibração superiores a 1mm os parafusos batiam nas bordas dos furos, causando uma pequena alteração em alguns trechos dos ciclos de histerese, como se observa na figura 7.36. Já para amplitudes de vibração de até 1mm, os parafusos não se encostavam às bordas dos furos e essa alteração nos ciclos de histerese não ocorria, conforme pode ser visto nas figuras 7.37 e 7.38.

Para tentar solucionar esses problemas, a série 6 foi realizada com borrachas de menor rigidez e também se reduziu o torque dos dois parafusos para aproximadamente  $0,7\text{kgf.m} \approx 7000\text{Nmm}$ , ou seja, diminuiu-se a força normal.

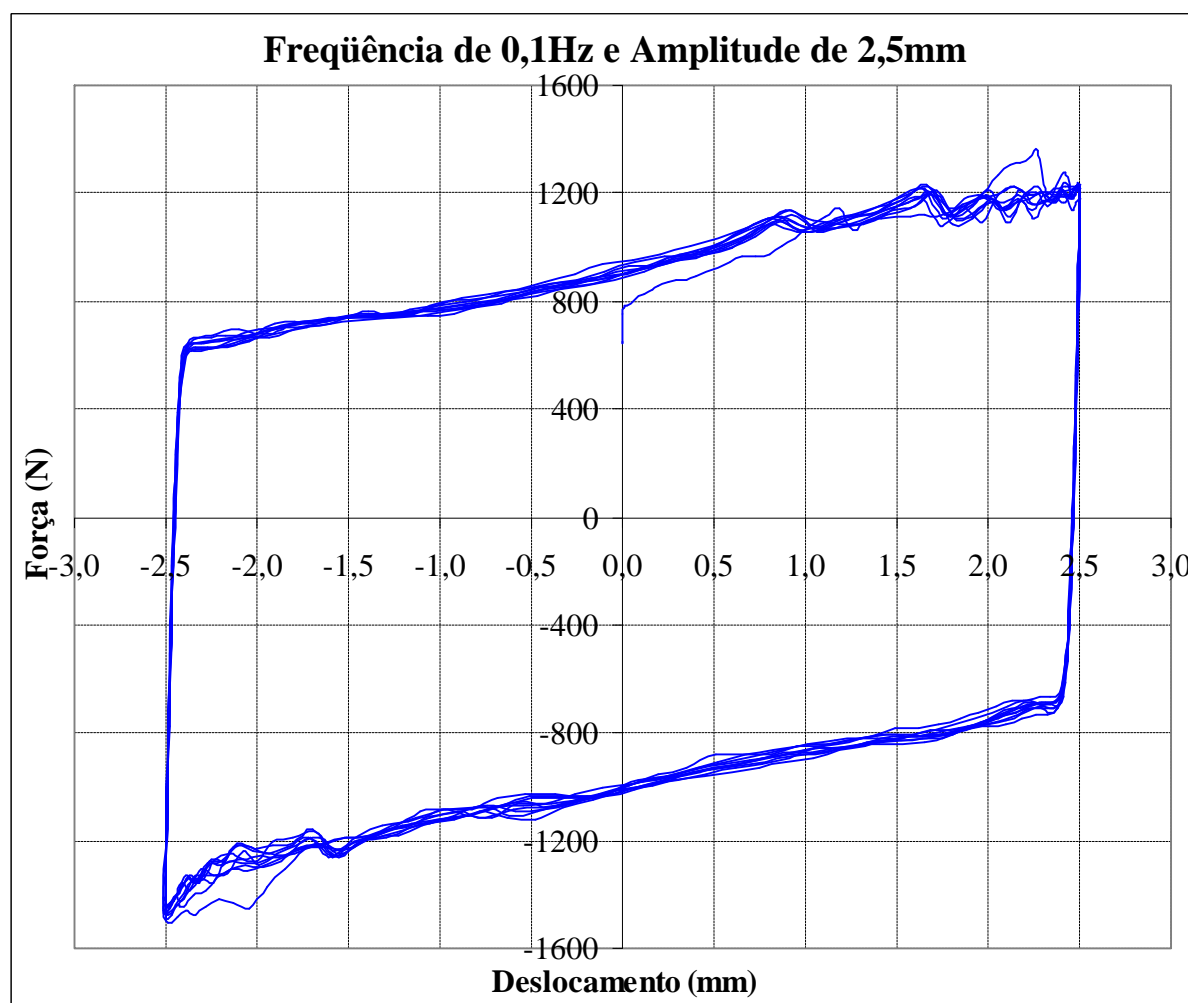
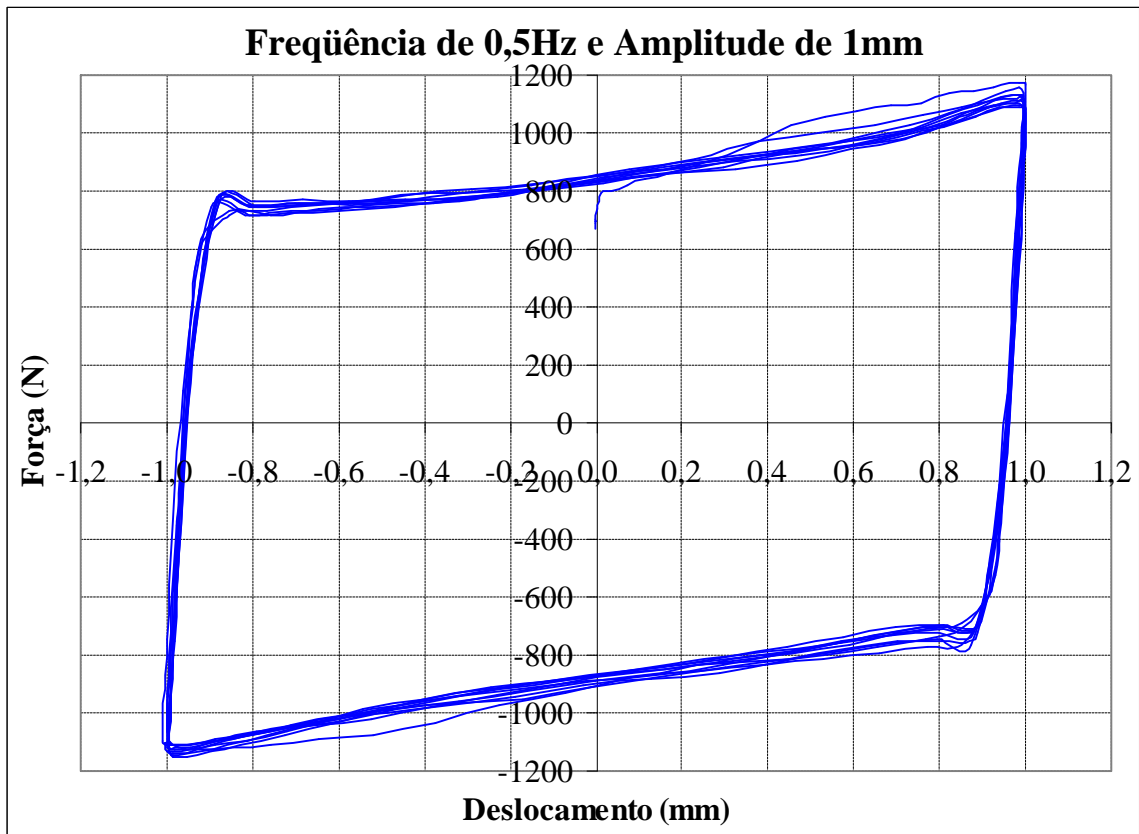
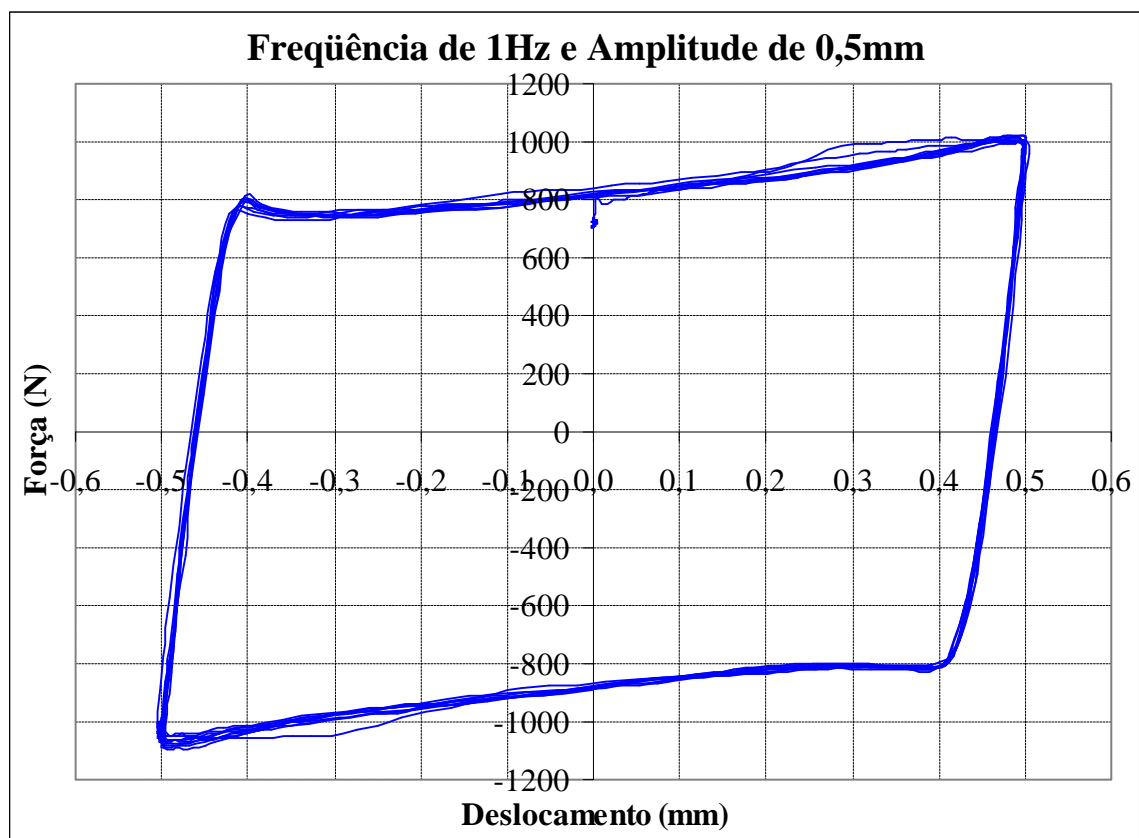


Figura 7.36 - Ciclos de Histerese da Série 5 com  $f = 0,1\text{Hz}$  e  $a = 2,5\text{mm}$





**Figura 7.37 - Ciclos de Histerese da Série 5 com  $f = 0,5\text{Hz}$  e  $a = 1\text{mm}$**

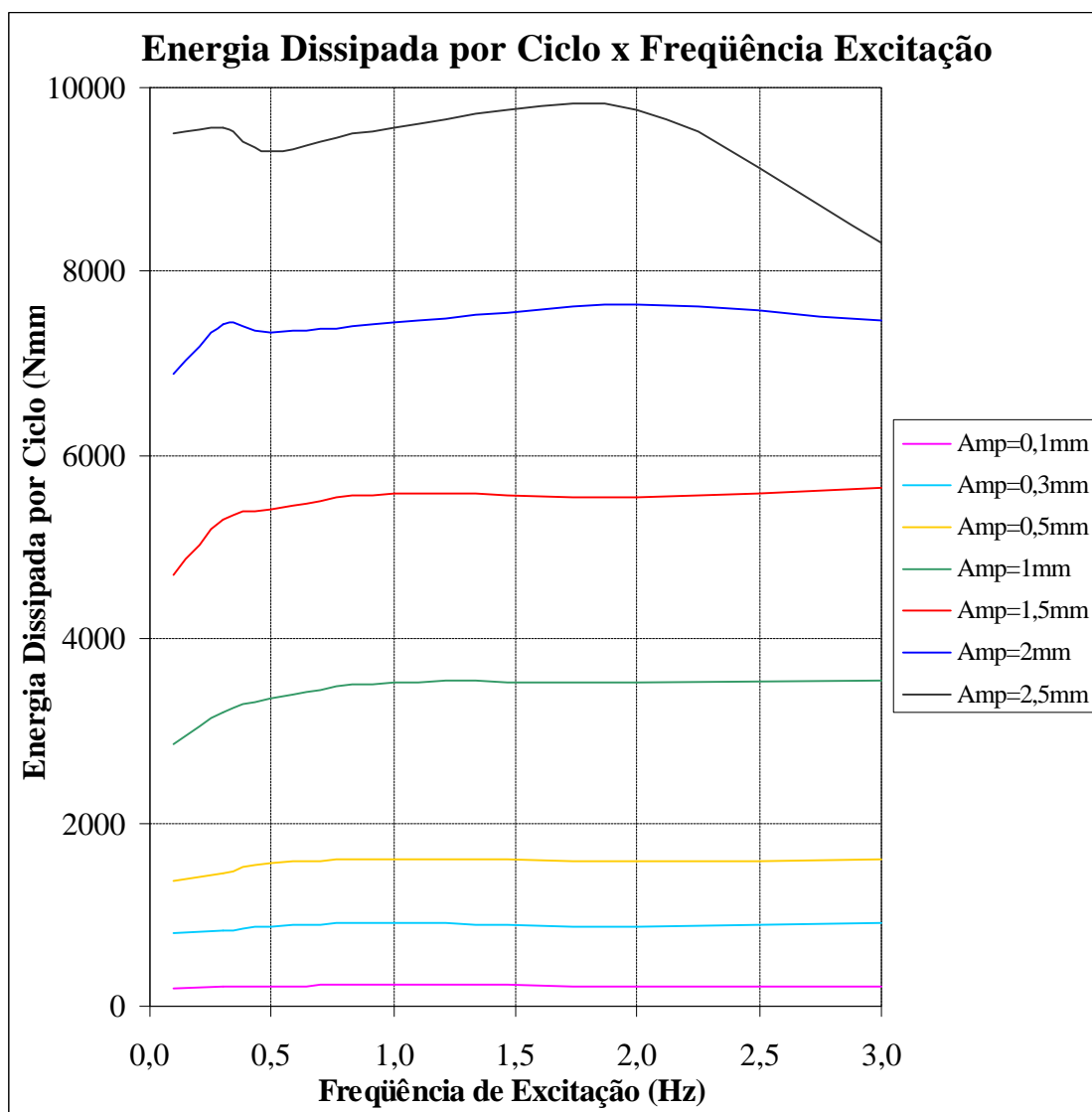


**Figura 7.38 - Ciclos de Histerese da Série 5 com  $f = 1\text{Hz}$  e  $a = 0,5\text{mm}$**

Para cada um dos conjuntos de ciclos de histerese, com o auxílio do Matlab, calculou-se a área média com os oito ciclos intermediários, o que dá a energia dissipada média por ciclo. E com esses valores de energia dissipada, obtiveram-se os gráficos das figuras 7.39, 7.40 e 7.41.

**Tabela 7.7 - Valores da Energia Dissipada por Ciclo para a Série 5 - Modelo C**

	<b>a = 0,1</b>	<b>a = 0,3</b>	<b>a = 0,5</b>	<b>a = 1,0</b>	<b>a = 1,5</b>	<b>a = 2,0</b>	<b>a = 2,5</b>
<b>Freq. (Hz)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>
0,1	189,3	805,2	1363,0	2847,1	4697,4	6884,5	9510,0
0,3	215,4	824,3	1458,8	3205,2	5307,8	7419,6	9563,0
0,5	224,6	876,5	1550,6	3351,3	5410,0	7334,0	9308,2
1,0	228,2	900,7	1605,8	3529,5	5593,9	7438,7	9560,9
2,0	220,3	876,5	1590,0	3528,9	5548,8	7644,8	9767,6
3,0	226,0	906,7	1602,7	3556,2	5655,3	7468,2	8318,3



**Figura 7.39 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Frequência de Excitação**

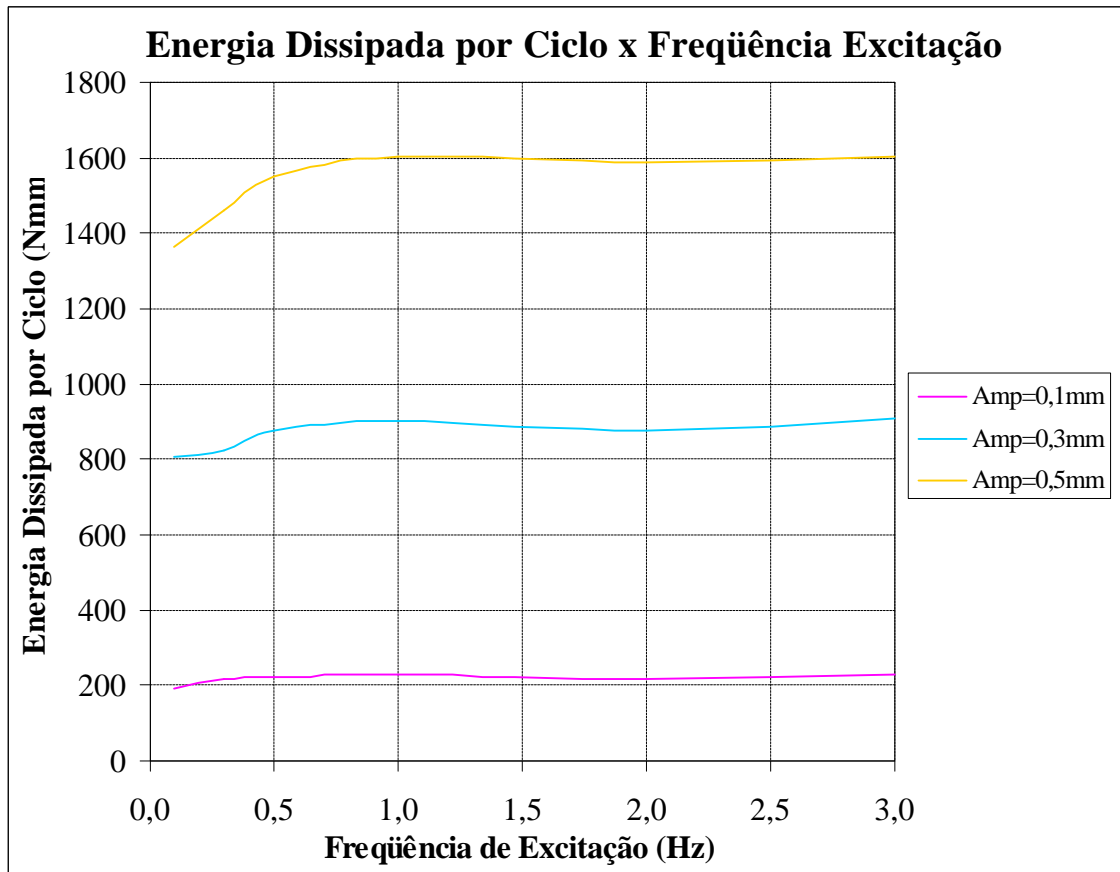


Figura 7.40 - Detalhes do Gráfico da Energia Dissipada x Frequência de Excitação

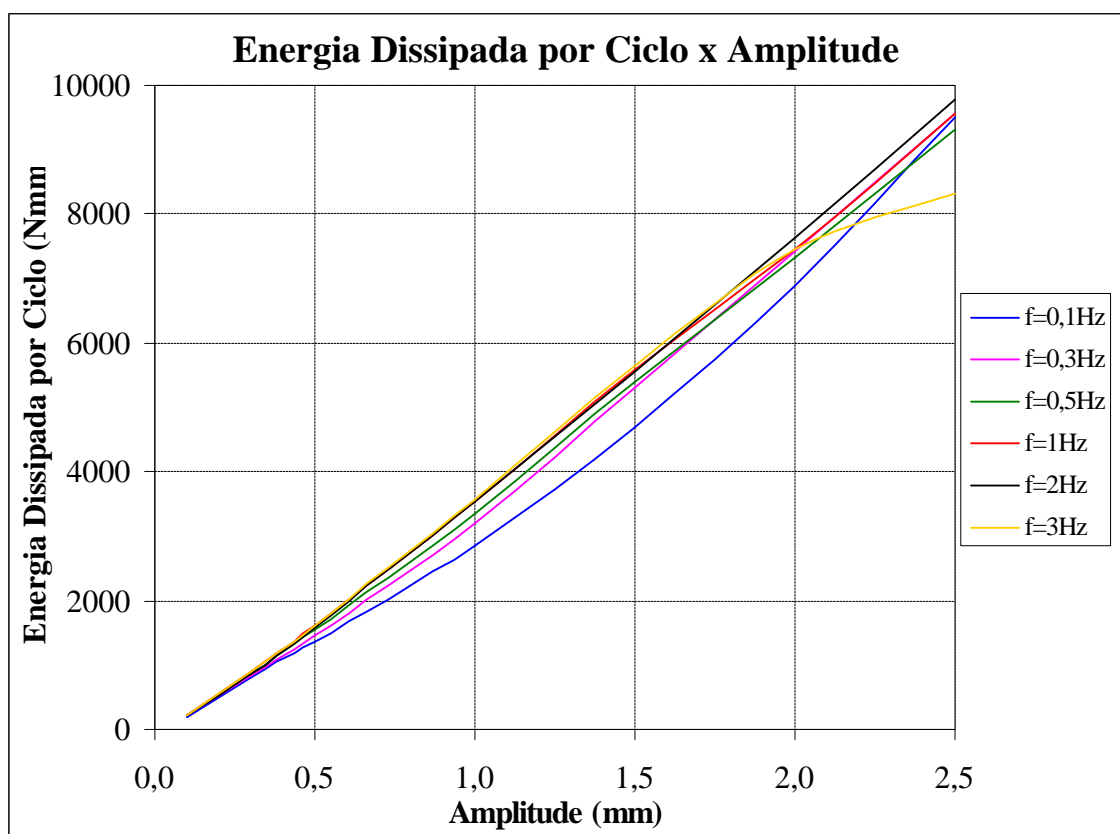


Figura 7.41 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Amplitude

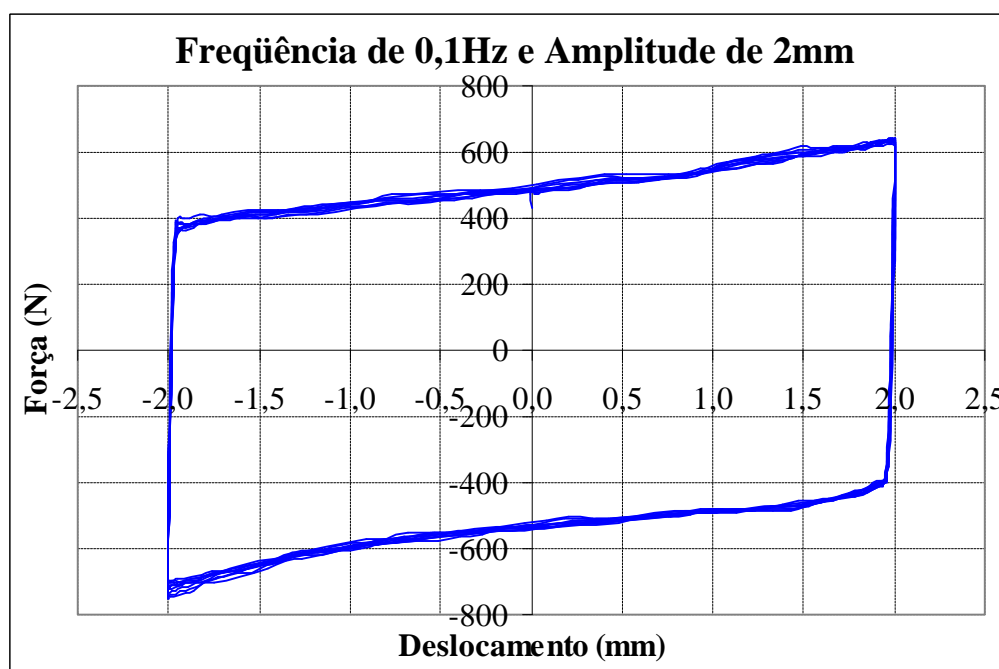
### 7.3.3. RESULTADOS OBTIDOS DA SÉRIE 6

Com a colocação de borrachas de menor rigidez e a redução do torque nos parafusos, observou-se que diminuiu a inclinação das retas horizontais e os parafusos deixaram de se encostar às bordas dos furos, resolvendo-se os problemas ocorridos no ensaio anterior, como pode ser visto nos conjuntos de ciclos de histerese das figuras 7.42, 7.43 e 7.44. Porém, como o torque dos parafusos foi reduzido e conseqüentemente as forças normais e de atrito também foram diminuídas, a energia dissipada nessa série de ensaio foi menor.

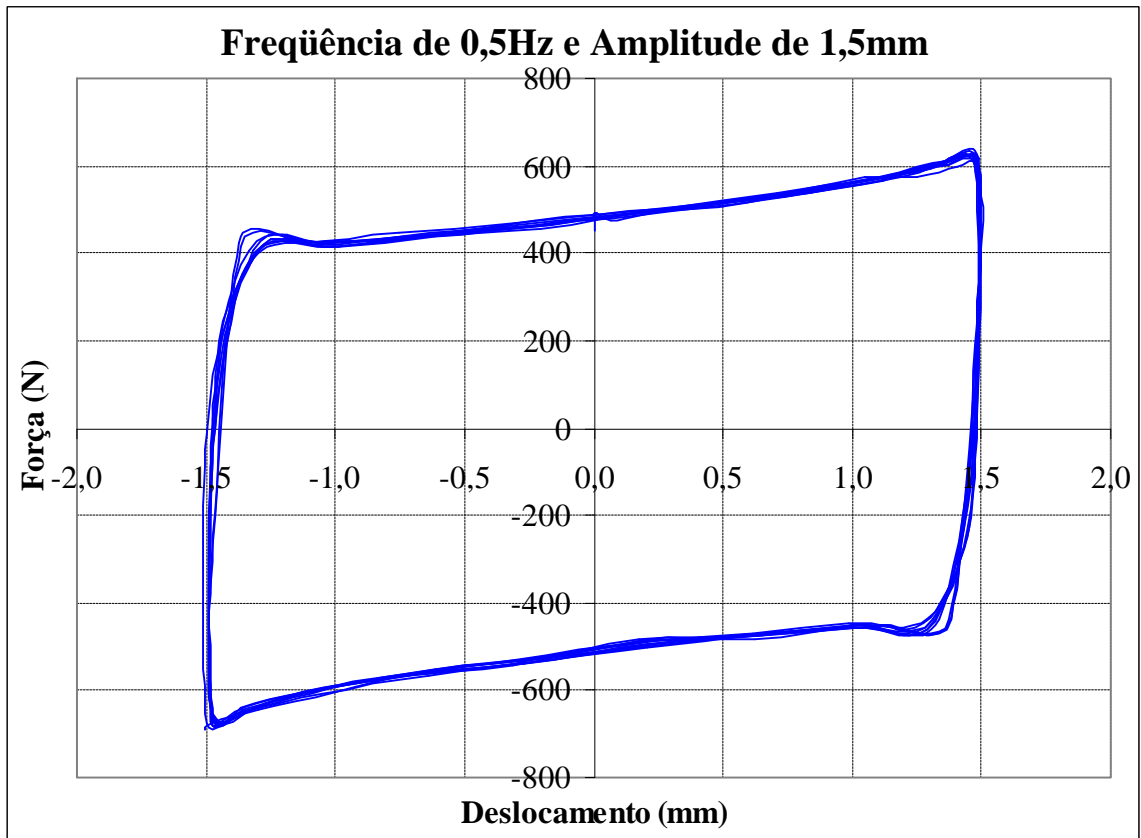
Para cada um dos conjuntos de ciclos de histerese, com o auxílio do Matlab, calculou-se a área média com os oito ciclos intermediários, o que dá a energia dissipada média por ciclo. E com esses valores de energia dissipada, obtiveram-se os gráficos das figuras 7.45, 7.46 e 7.47.

**Tabela 7.8 - Valores da Energia Dissipada por Ciclo para a Série 6 - Modelo C**

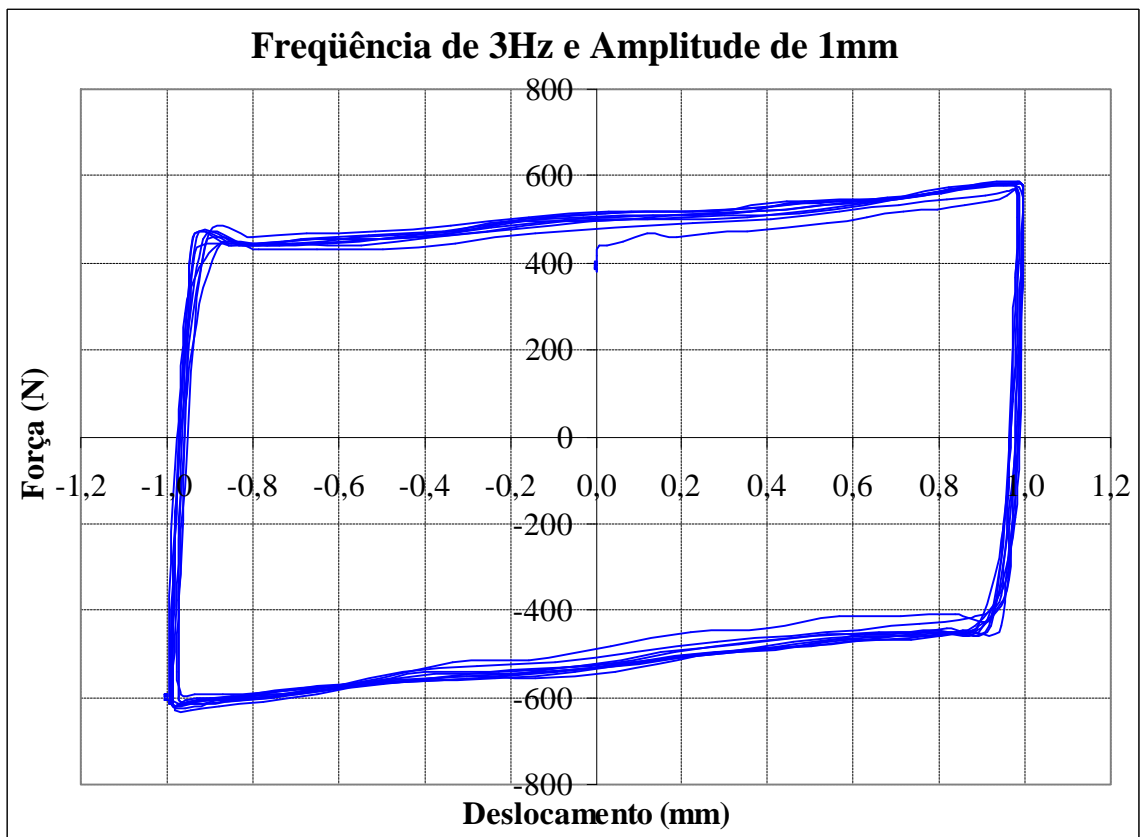
	<b>a = 0,1</b>	<b>a = 0,3</b>	<b>a = 0,5</b>	<b>a = 1,0</b>	<b>a = 1,5</b>	<b>a = 2,0</b>	<b>a = 2,5</b>
<b>Freq. (Hz)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>	<b>Energia (Nmm)</b>
0,1	206,2	744,2	1251,8	1948,2	3051,0	4121,7	5556,2
0,3	163,3	555,1	946,9	1950,2	3034,1	4244,7	5454,7
0,5	157,6	539,9	908,0	1879,7	2918,5	4223,2	5828,9
1,0	154,3	520,2	878,0	1953,9	3082,6	4502,0	5776,7
2,0	141,5	483,7	852,4	1795,8	3035,2	4819,8	5682,5
3,0	147,8	508,6	894,9	1969,0	3438,3	4603,4	5954,1



**Figura 7.42 - Ciclos de Histerese da Série 6 com  $f = 0,1\text{Hz}$  e  $a = 2\text{mm}$**



**Figura 7.43 - Ciclos de Histerese da Série 6 com  $f = 0,5\text{Hz}$  e  $a = 1,5\text{mm}$**



**Figura 7.44 - Ciclos de Histerese da Série 6 com  $f = 3\text{Hz}$  e  $a = 1\text{mm}$**

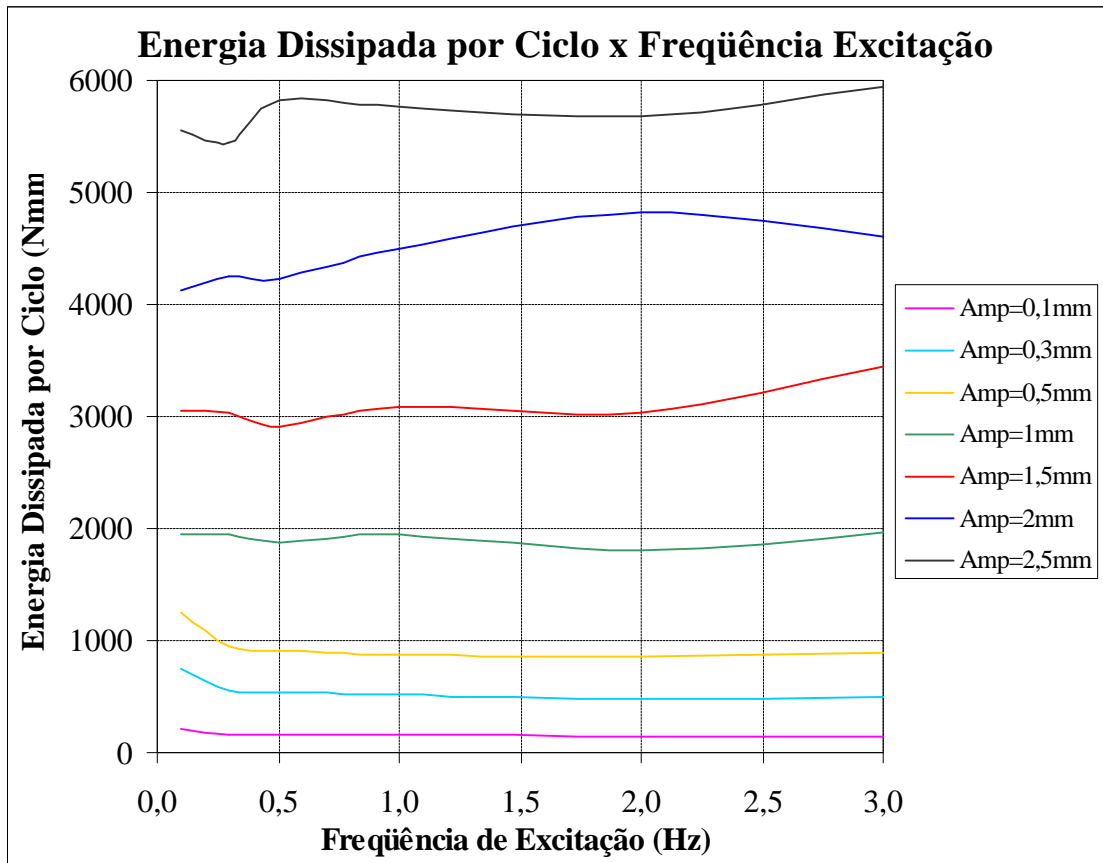


Figura 7.45 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Frequência de Excitação

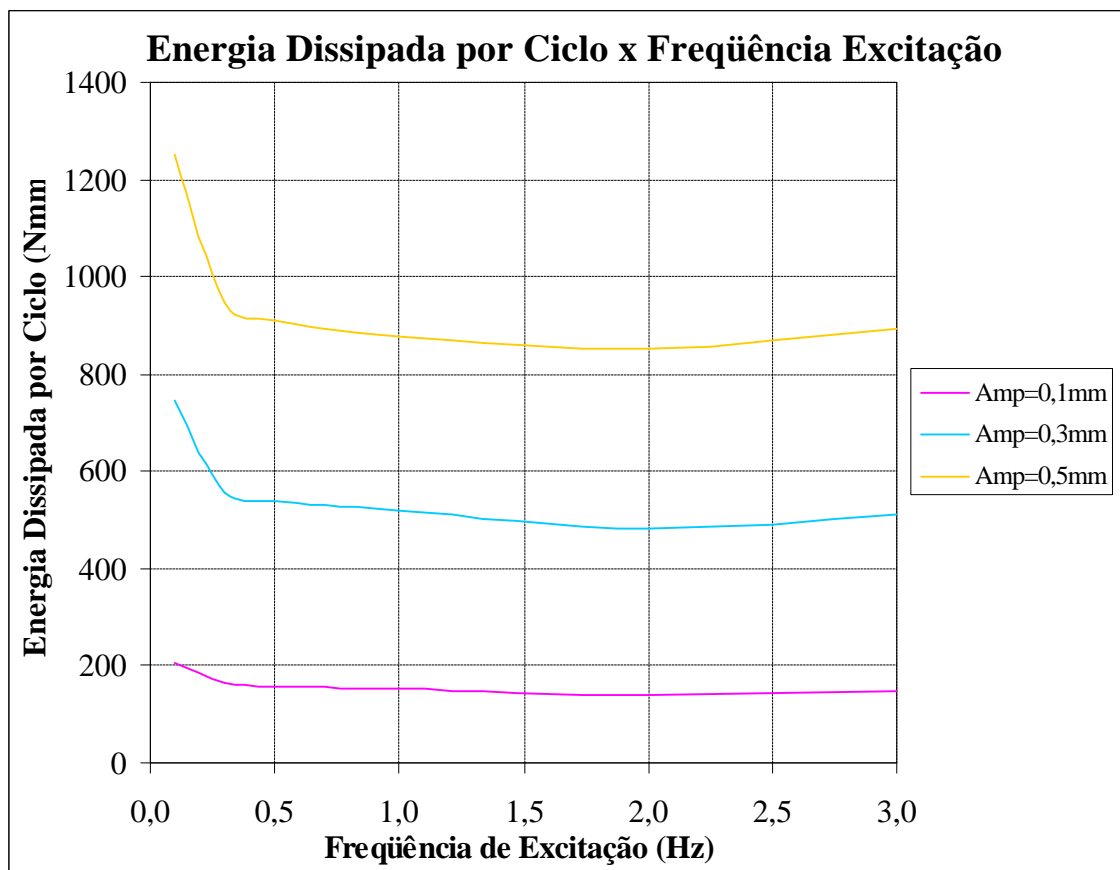
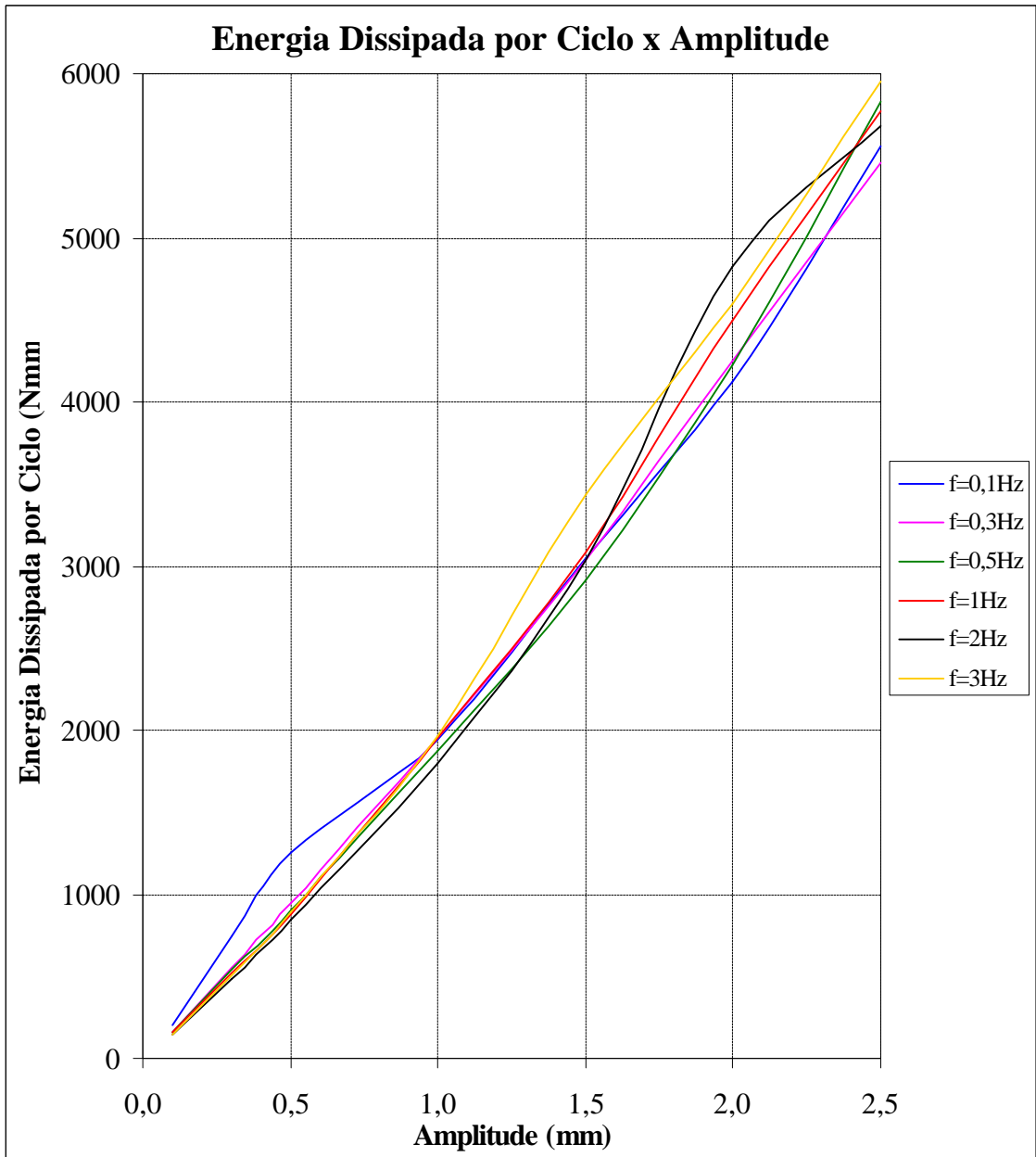


Figura 7.46 - Detalhes do Gráfico da Energia Dissipada x Frequência de Excitação



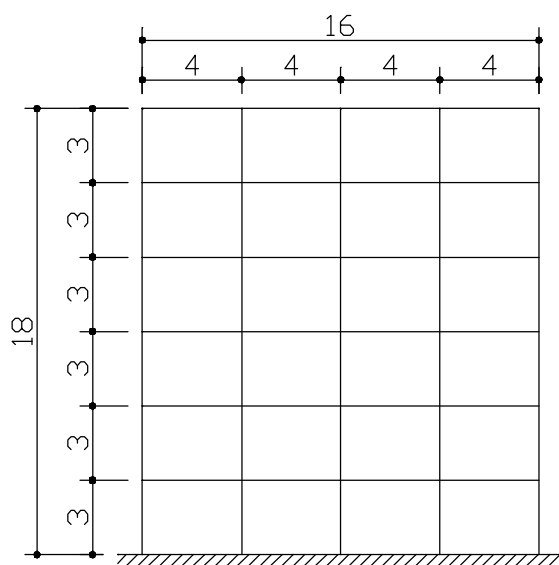
**Figura 7.47 - Gráfico da Energia Dissipada por Ciclo x Amplitude**

## 8. APLICAÇÕES PRÁTICAS

Complementando o desenvolvimento teórico e experimental já discutidos anteriormente, no presente capítulo ilustra-se a utilização de amortecedores de vibração por atrito num edifício metálico de seis pavimentos submetido à excitação sísmica. Primeiramente, considera-se a estrutura sem dissipadores de energia externos à mesma, apenas com seu amortecimento próprio, como elemento de referência e, em uma segunda análise, obtém-se a resposta do edifício após a instalação de amortecedores por atrito. Para esta finalidade foram desenvolvidos programas computacionais em Matlab.

### 8.1. A ESTRUTURA ANALISADA

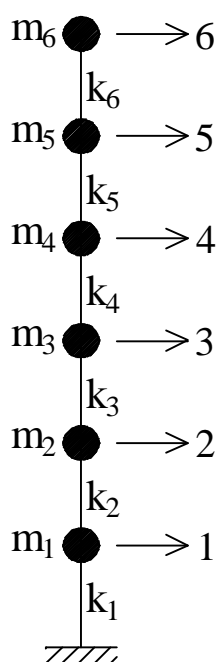
A estrutura escolhida para analisar é um edifício metálico de seis pavimentos, a qual pode ser representada pelo pórtico da figura 8.1.



**Figura 8.1 - A Estrutura Analisada**



A fim de facilitar a análise, o pórtico foi discretizado como uma estrutura plana de seis graus de liberdade, conforme se mostra na figura 8.2.



**Figura 8.2 - O Pórtico Discretizado**

Na tabela 8.1 apresentam-se as propriedades da estrutura analisada.

**Tabela 8.1 - Propriedades da Estrutura**

Pavimento	Rigidez ( $k_i$ ) em MN/m	Massa ( $m_i$ ) em toneladas
1	195,0	254,65
2	162,0	254,65
3	140,5	254,65
4	130,0	254,65
5	90,0	254,65
6	85,0	254,65

## 8.2. RESPOSTA DA ESTRUTURA SEM AMORTECEDORES

A fim de demonstrar a grande eficiência dos amortecedores de vibração por atrito, primeiramente, a estrutura foi analisada considerando-se apenas o seu amortecimento próprio, para, posteriormente, comparar-se essa resposta sem dissipadores de energia com a resposta obtida após a colocação dos amortecedores.

O problema foi resolvido pelo método das diferenças finitas.

A equação de movimento do sistema é dada por:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\vec{X}} + [\mathbf{C}]\dot{\vec{X}} + [\mathbf{K}]\vec{X} = \vec{F}_{\text{ex}}, \quad (8.1)$$

onde  $\vec{F}_{\text{ex}}$  é a força de excitação horizontal.

Fazendo-se:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{\text{ex}} - [\mathbf{C}]\dot{\vec{X}} - [\mathbf{K}]\vec{X}, \quad (8.2)$$

Pode-se escrever a equação (8.1) como:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\vec{X}} = \vec{F}_e, \quad (8.3)$$

Pelo método de diferenças finitas sabe-se que:

$$\ddot{\vec{X}}_j = \frac{\vec{X}_{j+1} - 2\vec{X}_j + \vec{X}_{j-1}}{\Delta t^2} \quad (8.4)$$

$$\dot{\vec{X}}_j = \frac{\vec{X}_j - \vec{X}_{j-1}}{\Delta t} \quad (8.5)$$

onde  $\Delta t$  é o intervalo de tempo de integração e  $\vec{X}_j$  é o vetor de deslocamentos num determinado passo de tempo  $j$ .

Substituindo-se as equações (8.4) e (8.5) em (8.3), no passo de tempo  $j$ , obtêm-se os deslocamentos no passo de tempo seguinte (em  $j+1$ ):

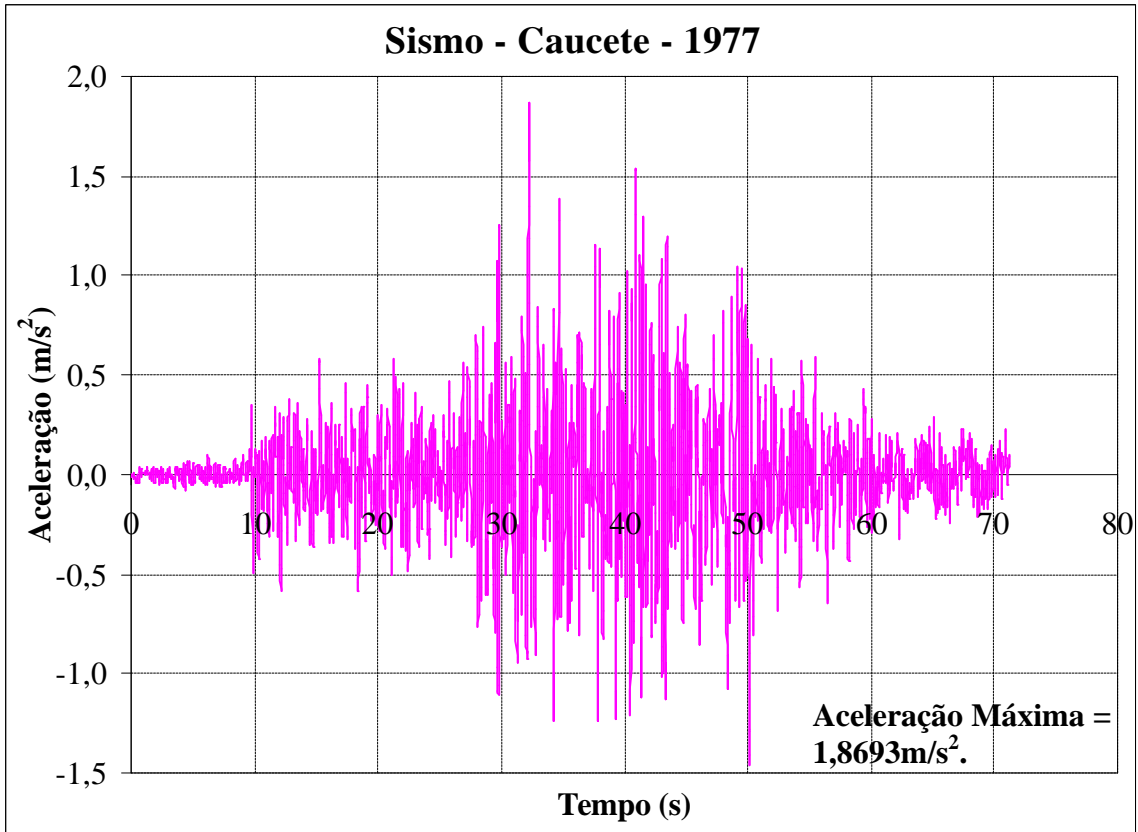
$$\begin{aligned} \vec{X}_{j+1} &= 2\vec{X}_j - \vec{X}_{j-1} + [\mathbf{M}]^{-1} \Delta t^2 \left( \vec{F}_{\text{ex}_j} - \frac{[\mathbf{C}]}{\Delta t} (\vec{X}_j - \vec{X}_{j-1}) - [\mathbf{K}]\vec{X}_j \right) \\ \vec{X}_{j+1} &= 2\vec{X}_j - \vec{X}_{j-1} + [\mathbf{M}]^{-1} \Delta t^2 \vec{F}_{e_j} \end{aligned} \quad (8.6)$$

No anexo 11.3.1 apresenta-se a listagem completa do programa computacional desenvolvido em Matlab para obtenção da resposta do sistema sem dissipadores de energia.

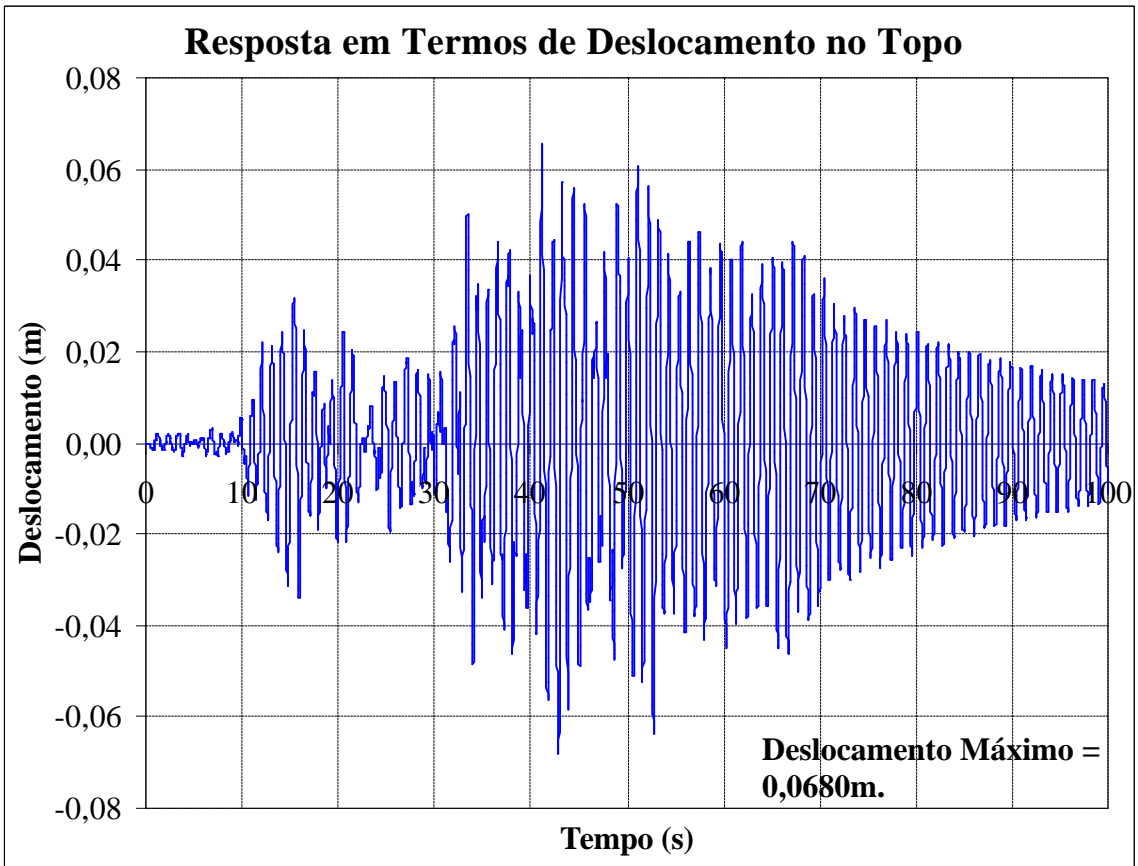
Para ilustrar com problemas práticos, escolheram-se como força de excitação para o pórtico da figura 8.1 dois registros sísmicos reais. O sismo ocorrido em Caucete, província de San Juan, Argentina, em 1977 e o sismo de Loma Prieta, ocorrido na Califórnia em 1989.

### 8.2.1. RESPOSTA COM O SISMO DE CAUCETE

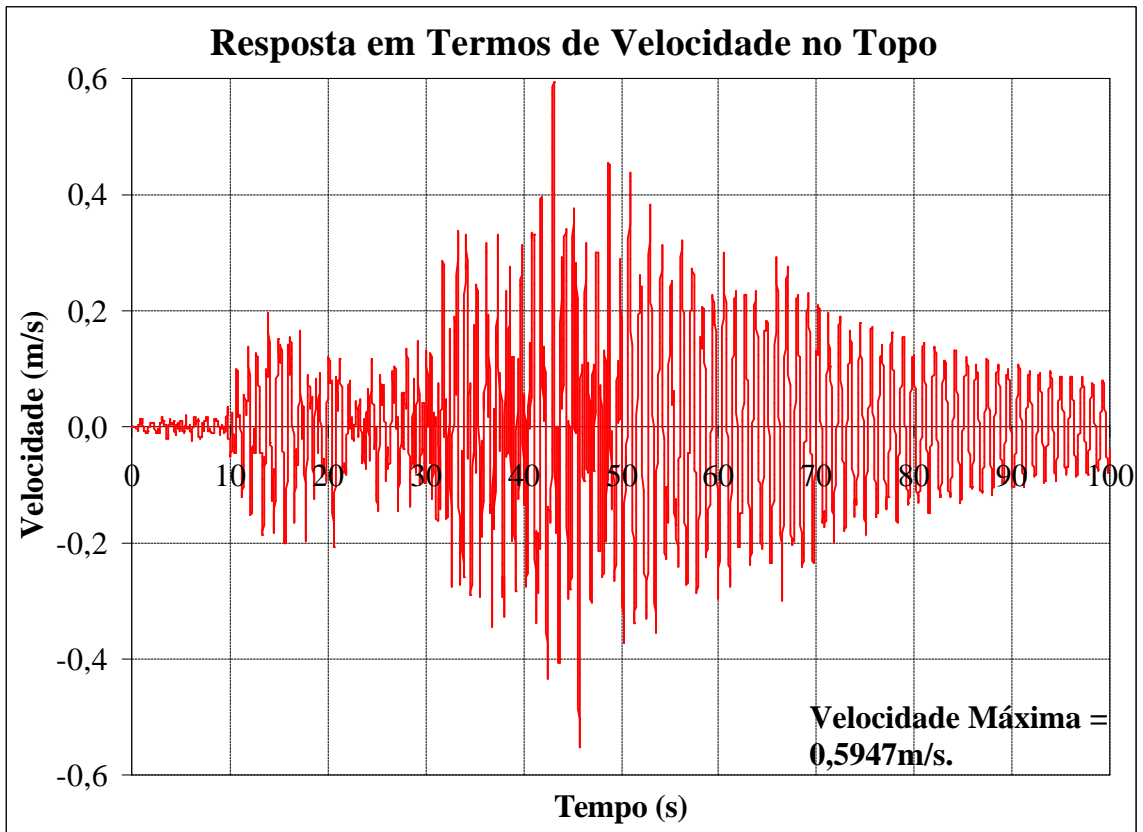
Nas figuras 8.3, 8.4, 8.5 e 8.6 apresentam-se, respectivamente, a excitação considerada (movimento horizontal da base) e as respostas em termos de deslocamento, velocidade e aceleração.



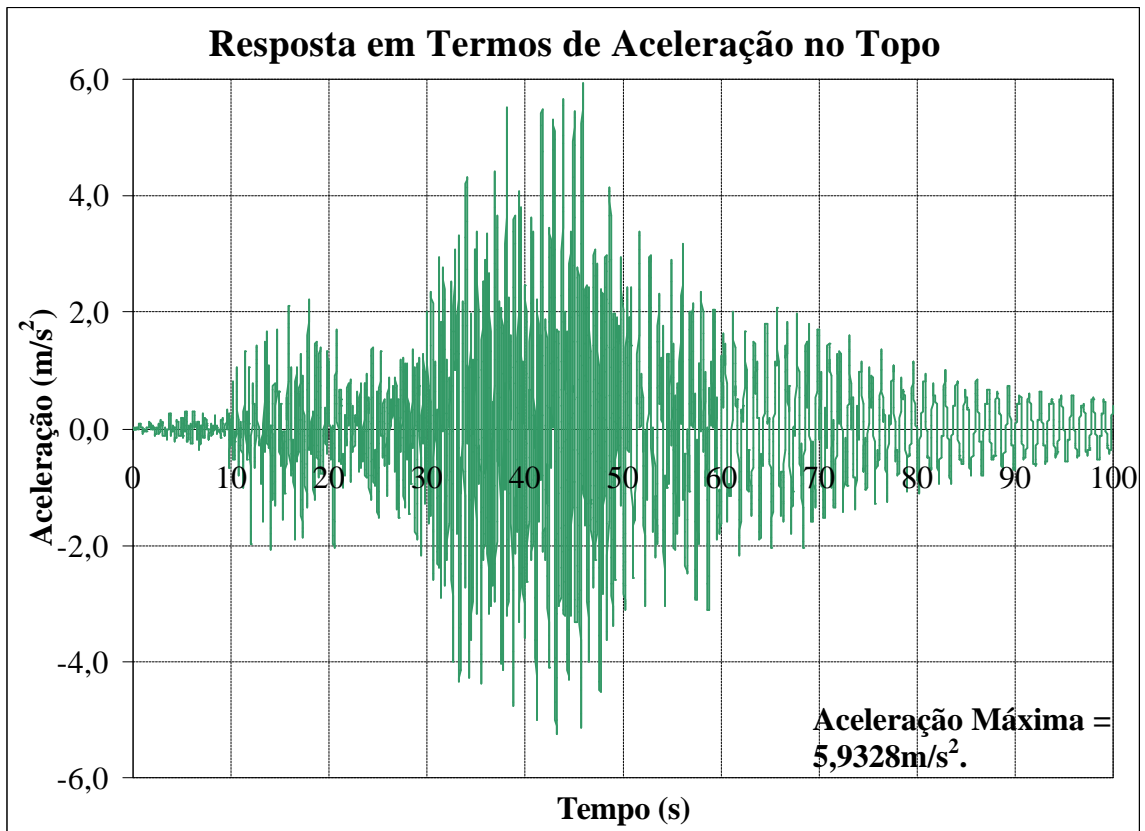
**Figura 8.3 - O Sismo de Caucete**



**Figura 8.4 - Resposta em Termos de Deslocamento no Topo**



**Figura 8.5 - Resposta em Termos de Velocidade no Topo**



**Figura 8.6 - Resposta em Termos de Aceleração no Topo**

## 8.2.2. RESPOSTA COM O SISMO DE LOMA PRIETA

Nas figuras 8.7, 8.8, 8.9 e 8.10 apresentam-se, respectivamente, a excitação considerada e as respostas em termos de deslocamento, velocidade e aceleração.

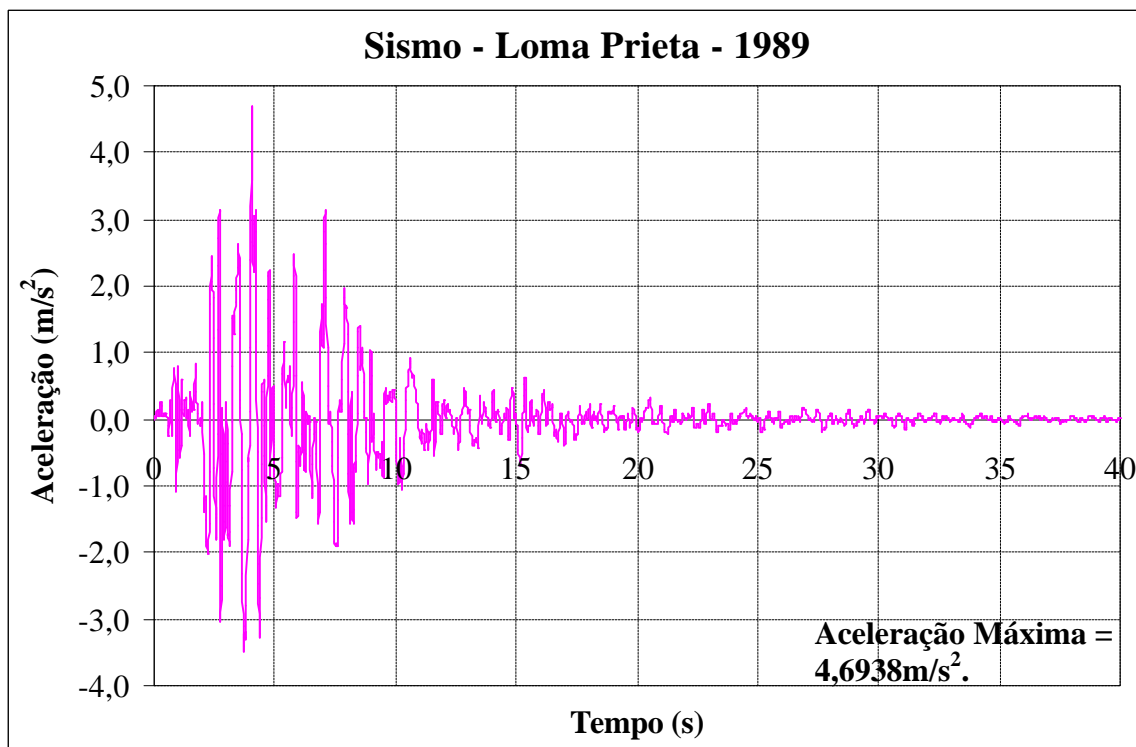


Figura 8.7 - O Sismo de Loma Prieta

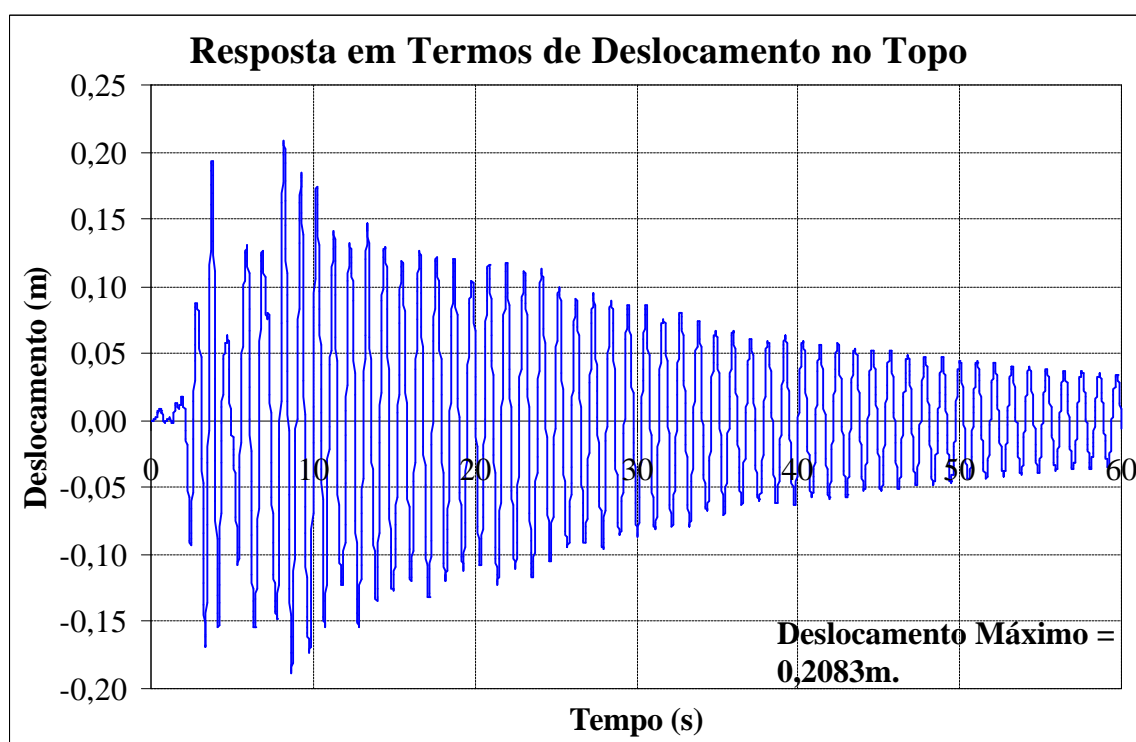
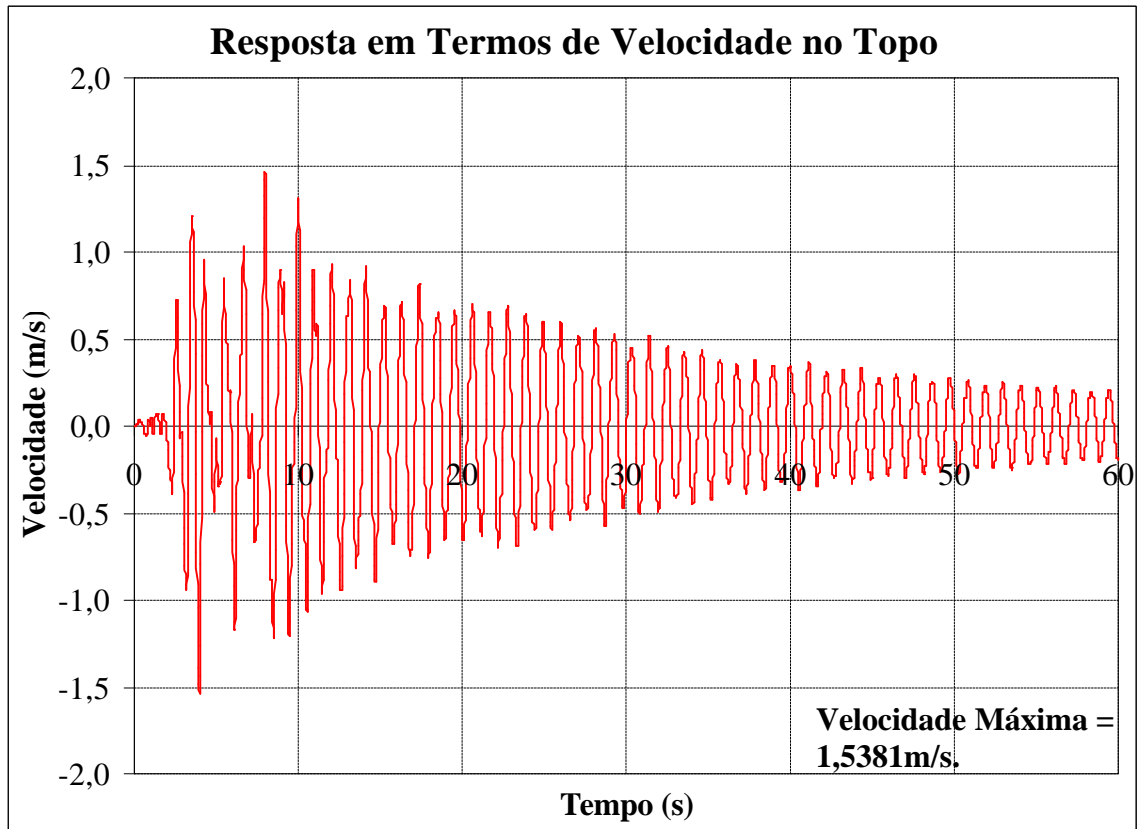
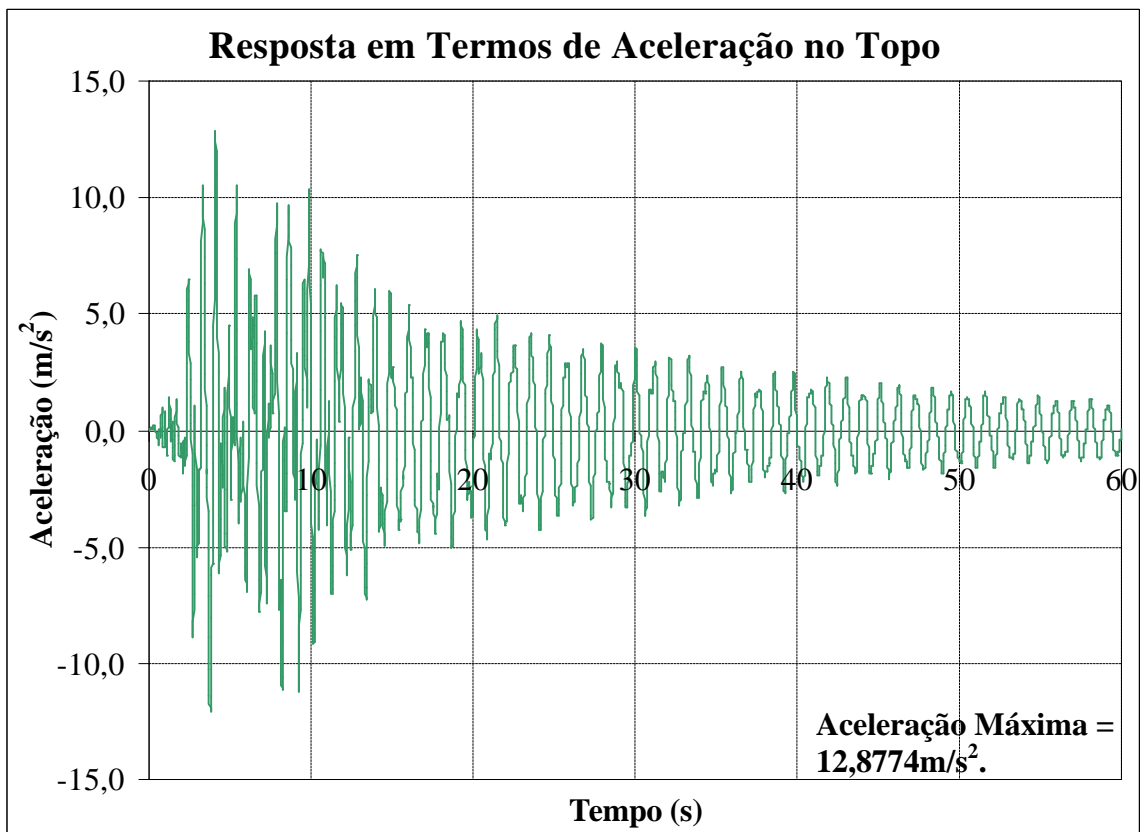


Figura 8.8 - Resposta em Termos de Deslocamento no Topo



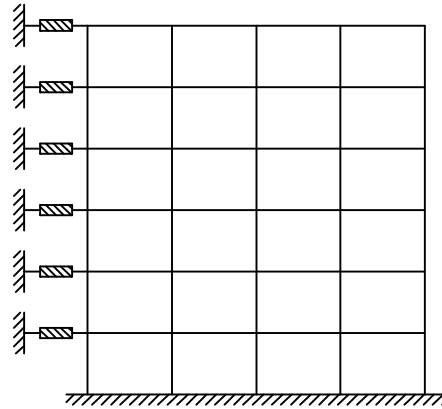
**Figura 8.9 - Resposta em Termos de Velocidade no Topo**



**Figura 8.10 - Resposta em Termos de Aceleração no Topo**

### 8.3. RESPOSTA DA ESTRUTURA COM AMORTECEDORES (INSTALADOS COMO MOSTRA A FIGURA 8.11)

Agora o pórtico é novamente analisado, considerando-se a instalação de dissipadores de energia por atrito. Para fins teóricos de comparação, inicialmente supõem-se os amortecedores colocados conforme se apresenta na figura 8.11.



**Figura 8.11 - O Pórtico com Dissipadores Instalados Inicialmente**

Agora a equação de movimento do sistema é dada por:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\vec{X}} + [\mathbf{C}]\dot{\vec{X}} + \mu\{N_i \operatorname{sgn}(\dot{x}_i)\} + [\mathbf{K}]\vec{X} = \vec{F}_{\text{ex}} \quad (8.7)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito,  $N_i$  é a força normal do amortecedor do pavimento  $i$  e  $\dot{x}_i$  é a velocidade do pavimento  $i$ . Os termos entre chaves representam vetores. Fazendo-se:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{\text{ex}} - [\mathbf{C}]\dot{\vec{X}} - [\mathbf{K}]\vec{X}, \quad (8.8)$$

$$\vec{F}_a = \mu\{N_i \operatorname{sgn}(\dot{x}_i)\}, \quad (8.9)$$

Pode-se escrever a equação (8.7) como:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\vec{X}} = \vec{F}_e - \vec{F}_a, \quad (8.10)$$

Considerando-se o explicado no capítulo 5, item 5.3, a função sinal na força de atrito pode ser substituída, com excelente precisão, pela função tangente hiperbólica. Então, faz-se  $\vec{F}_a = \mu\{N_i \tanh(1000\dot{x}_i)\}$ .

E, substituindo-se as equações (8.4) e (8.5) em (8.10), no passo de tempo  $j$ , obtêm-se os deslocamentos no passo de tempo seguinte (em  $j+1$ ):

$$\begin{aligned} \vec{X}_{j+1} &= 2\vec{X}_j - \vec{X}_{j-1} + [\mathbf{M}]^{-1} \Delta t^2 \left( \vec{F}_{\text{ex}_j} - \frac{[\mathbf{C}]}{\Delta t} (\vec{X}_j - \vec{X}_{j-1}) - [\mathbf{K}]\vec{X}_j - \mu\{N_i \tanh(1000\dot{x}_i)\} \right) \\ \vec{X}_{j+1} &= 2\vec{X}_j - \vec{X}_{j-1} + [\mathbf{M}]^{-1} \Delta t^2 (\vec{F}_{e_j} - \vec{F}_{a_j}) \end{aligned} \quad (8.11)$$

No anexo 11.3.2 apresenta-se a listagem completa do programa computacional desenvolvido em Matlab para obtenção da resposta do sistema com amortecedores por atrito colocados inicialmente como mostrado na figura 8.11.

### **8.3.1. ANÁLISES COM O SISMO DE CAUCETE**

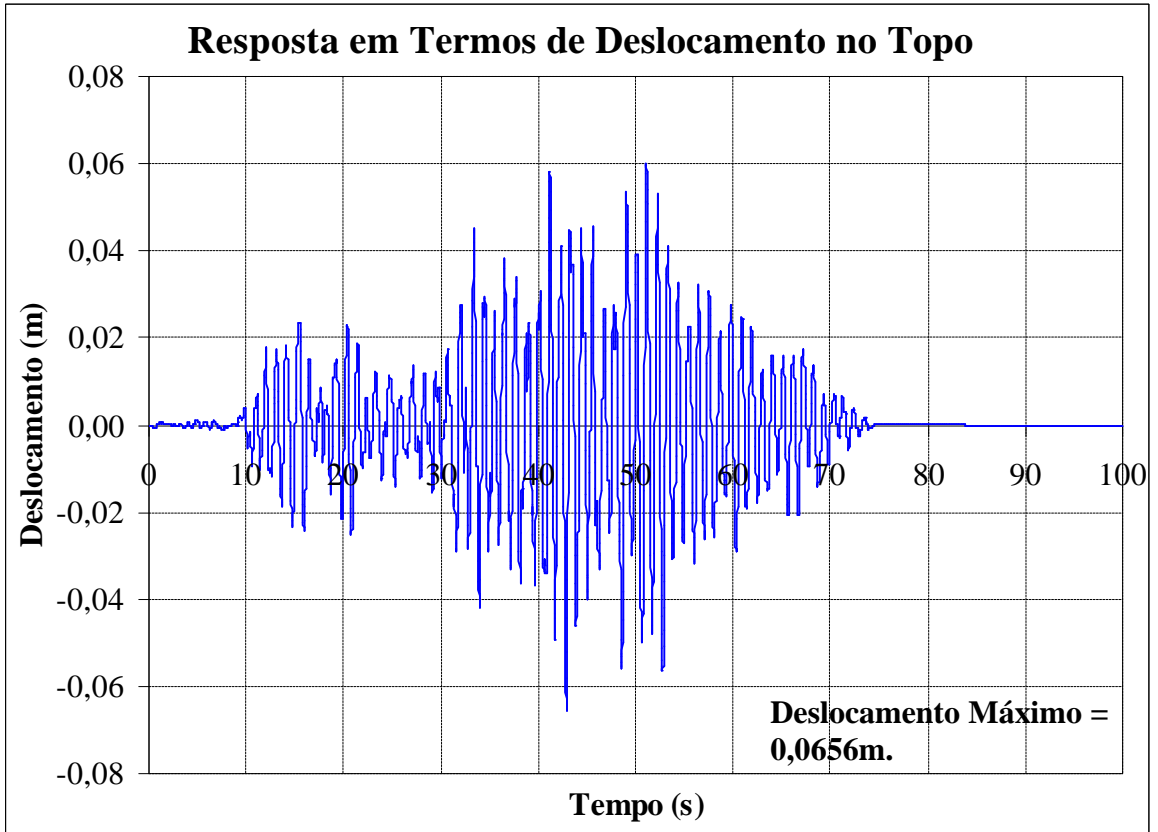
Admite-se que os amortecedores instalados no pórtico são o modelo A, ou seja, que possuem uma força de atrito constante de 3,5kN. Essa força de atrito pode ser considerada pequena para as dimensões do pórtico, entretanto já se percebe uma redução na resposta da estrutura.

As figuras 8.12, 8.13 e 8.14 representam, respectivamente, a resposta do pórtico equipado com amortecedores por atrito de capacidade de 3,5kN em termos de deslocamento, velocidade e aceleração no topo.

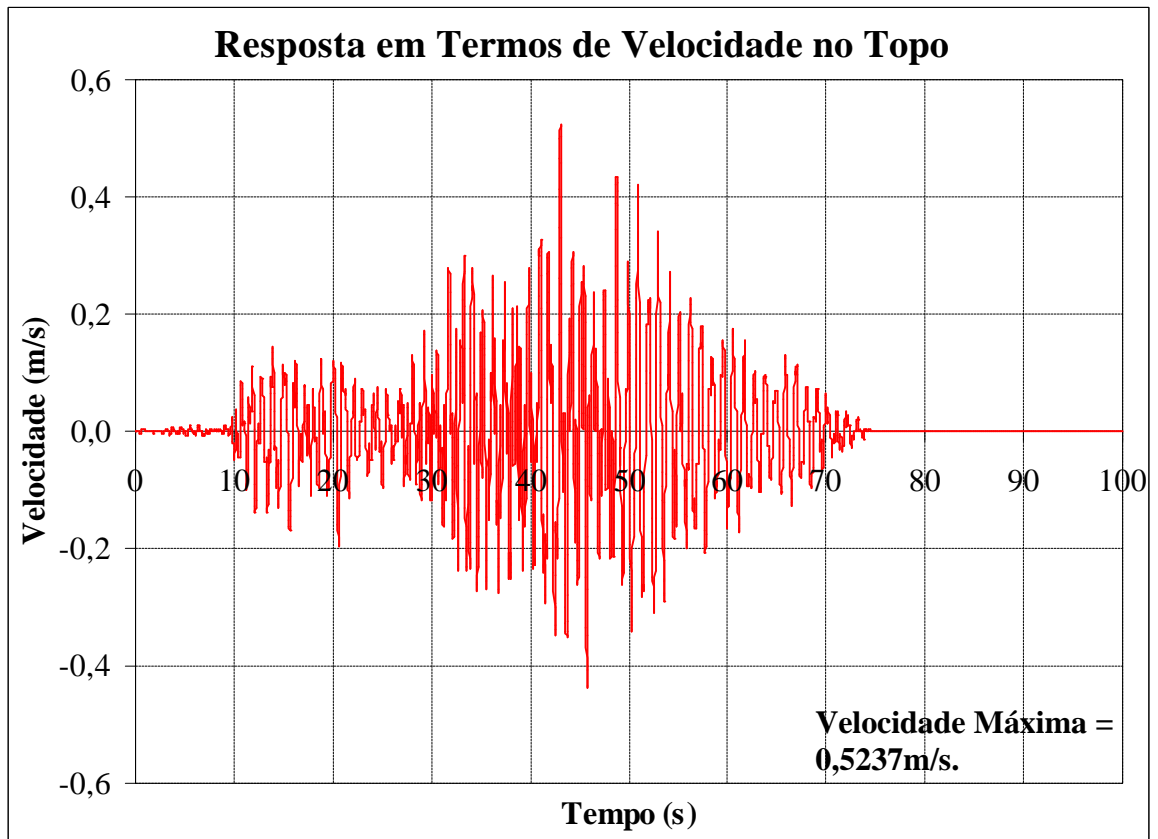
Aumentando-se gradativamente a força de atrito nos amortecedores verifica-se que a resposta da estrutura vai diminuindo até chegar a um valor limite a partir do qual não diminui mais. Isso pode ser observado no gráfico da figura 8.15, o qual mostra o deslocamento máximo no topo do pórtico em função da força de atrito nos amortecedores. Observa-se desse gráfico que o valor ótimo para a força de atrito nos amortecedores está em torno de 200kN. A partir desse valor, a resposta em termos de deslocamento máximo no topo torna-se aproximadamente constante e da ordem de 0,008m, ou seja, uma redução de 88% em relação ao deslocamento máximo no topo sem amortecedores, igual a 0,068m.

Outro resultado relevante é apresentado no gráfico da figura 8.16, o qual representa a variação do esforço cortante na base do pórtico em função da força de atrito nos amortecedores. Observa-se desse gráfico que o valor ótimo para a força de atrito nos amortecedores, levando-se em conta o esforço cortante máximo na base, está em torno de 100kN. A partir desse valor, a resposta em termos de esforço cortante torna-se aproximadamente constante e da ordem de 700kN, ou seja, uma redução de 80% em relação ao cortante máximo na base sem amortecedores que vale 3334,5kN.

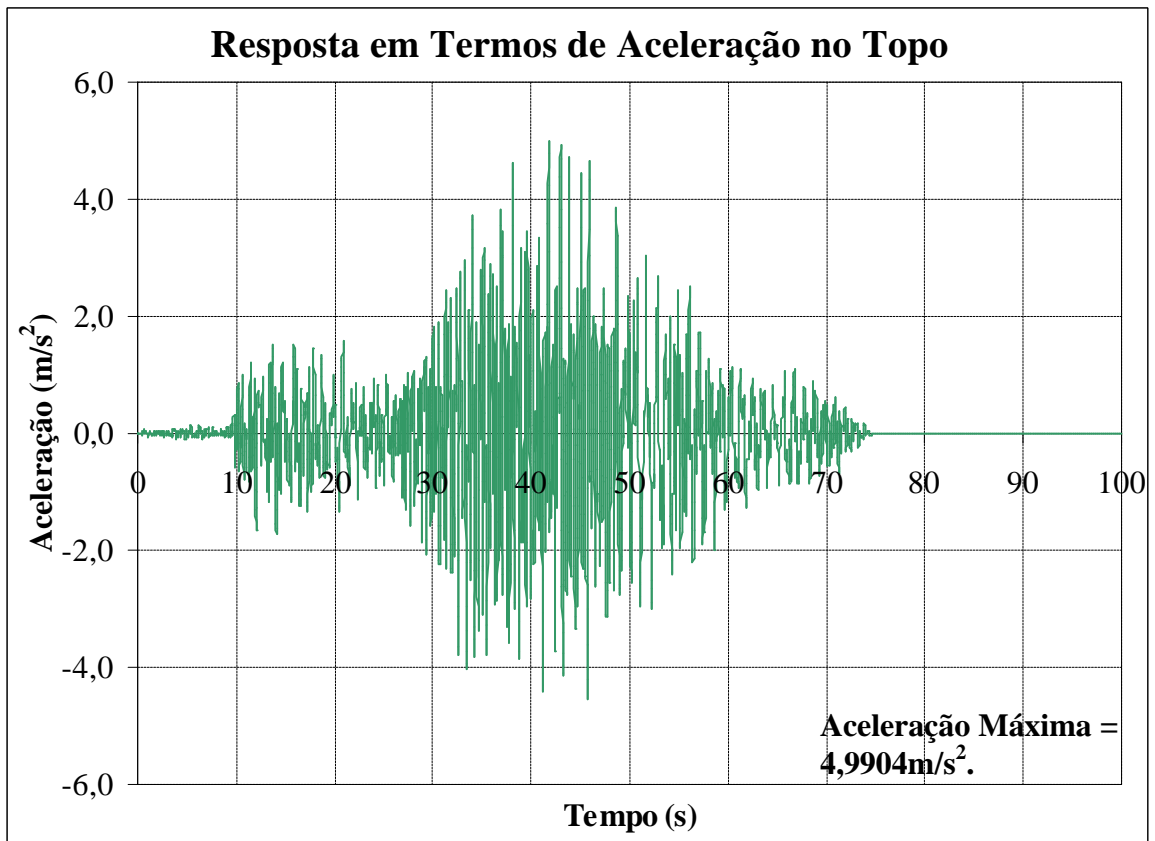




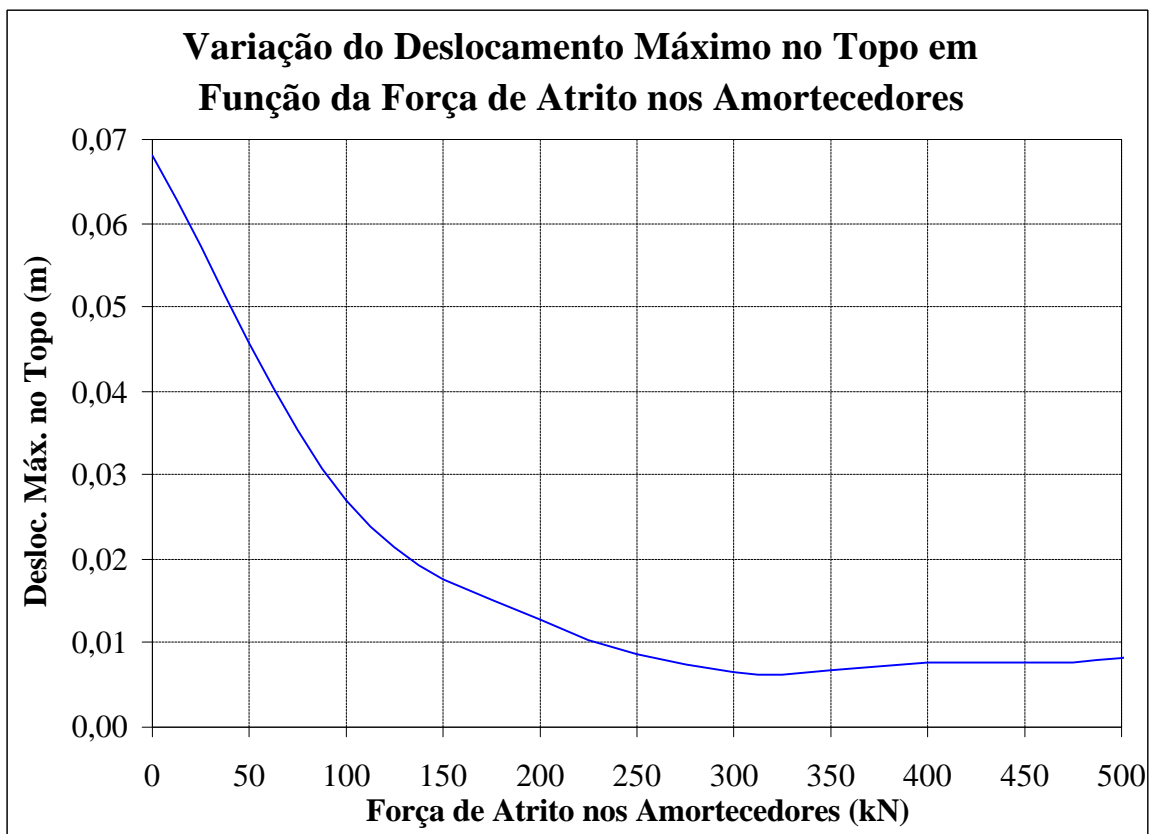
**Figura 8.12 - Resposta em Termos de Deslocamento no Topo**



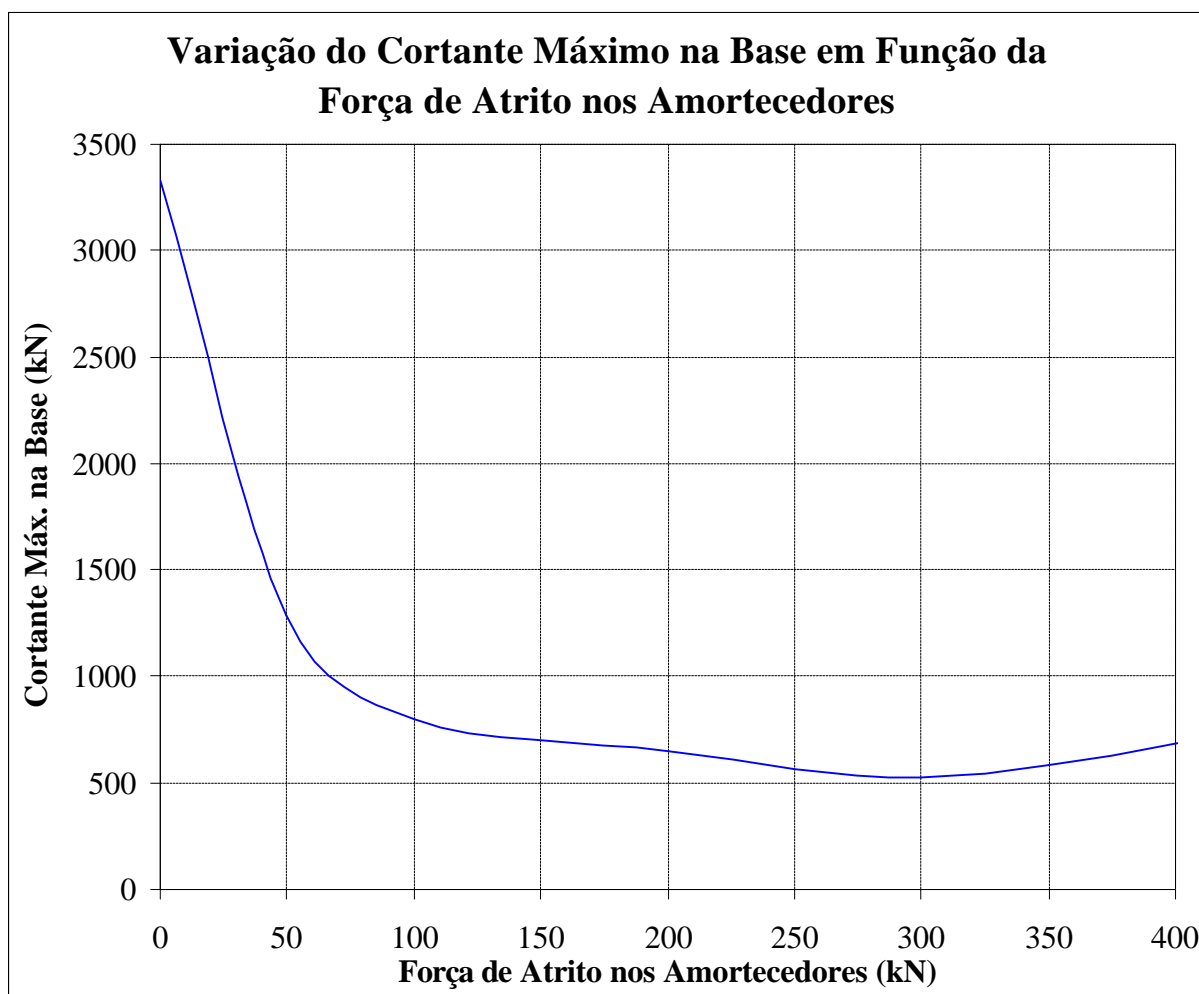
**Figura 8.13 - Resposta em Termos de Velocidade no Topo**



**Figura 8.14 - Resposta em Termos de Aceleração no Topo**



**Figura 8.15 - Deslocamento Máximo no Topo do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores**



**Figura 8.16 - Esforço Cortante Máximo na Base do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores**

### 8.3.2. ANÁLISES COM O SISMO DE LOMA PRIETA

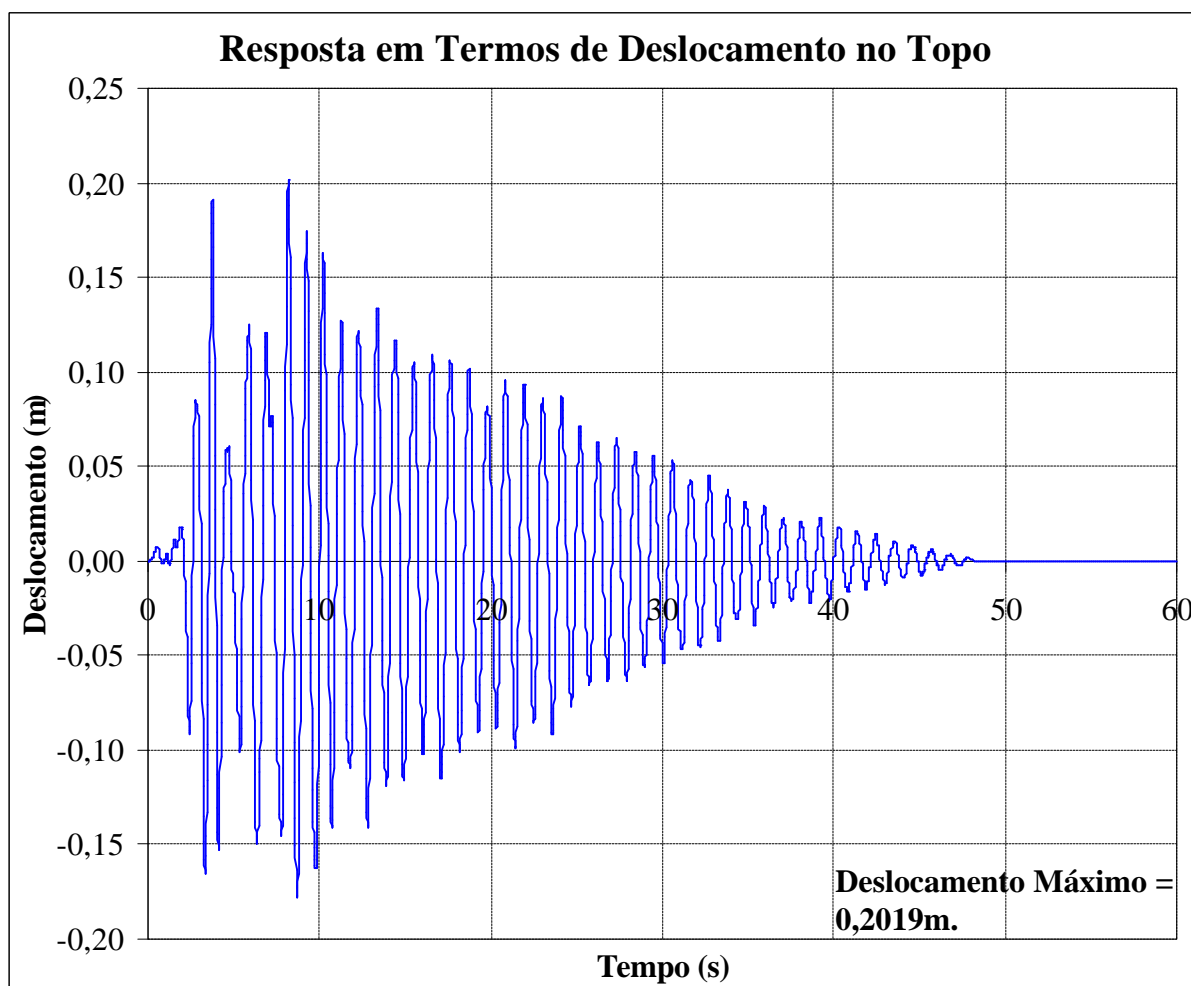
Novamente considerou-se que os amortecedores instalados no pórtico são o modelo A, ou seja, que possuem uma força de atrito constante de 3,5kN. Como dito anteriormente, essa força de atrito é muito baixa para as dimensões da edificação, mas apesar disso já se nota uma redução na resposta da estrutura.

As figuras 8.17, 8.18 e 8.19 representam, respectivamente, a resposta do pórtico equipado com amortecedores por atrito de capacidade de 3,5kN em termos de deslocamento, velocidade e aceleração no topo.

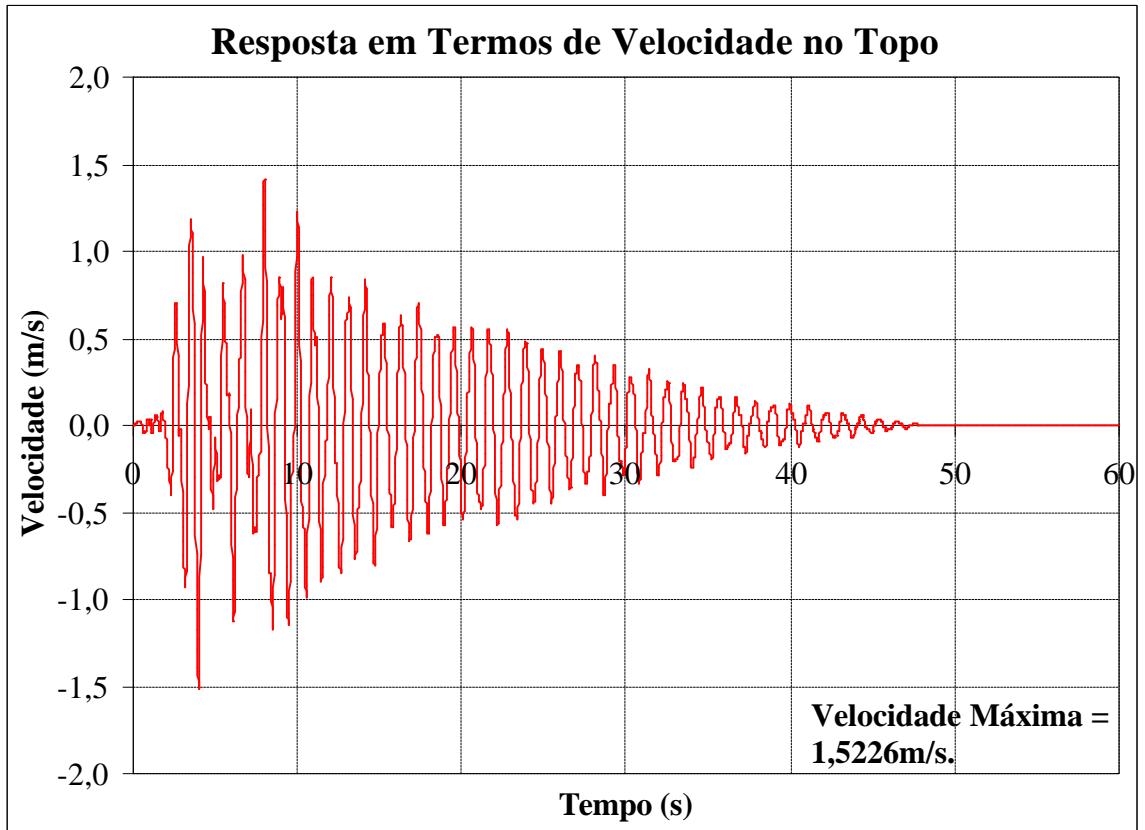
Com este sismo ocorre o mesmo que com o sismo de Caucete, isto é, aumentando-se gradativamente a força de atrito nos amortecedores percebe-se que a resposta da estrutura vai diminuindo até chegar a um valor limite a partir do qual não diminui mais. Isso pode ser observado no gráfico da figura 8.20, o qual mostra o deslocamento máximo no topo do

pórtico em função da força de atrito nos amortecedores. Observa-se dessa figura que o valor ótimo para a força de atrito nos amortecedores está em torno de 800kN. A partir desse valor, a resposta em termos de deslocamento máximo no topo torna-se aproximadamente constante e da ordem de 0,02m, ou seja, uma redução de um pouco mais de 90% em relação ao deslocamento máximo no topo sem amortecedores que vale 0,2083m.

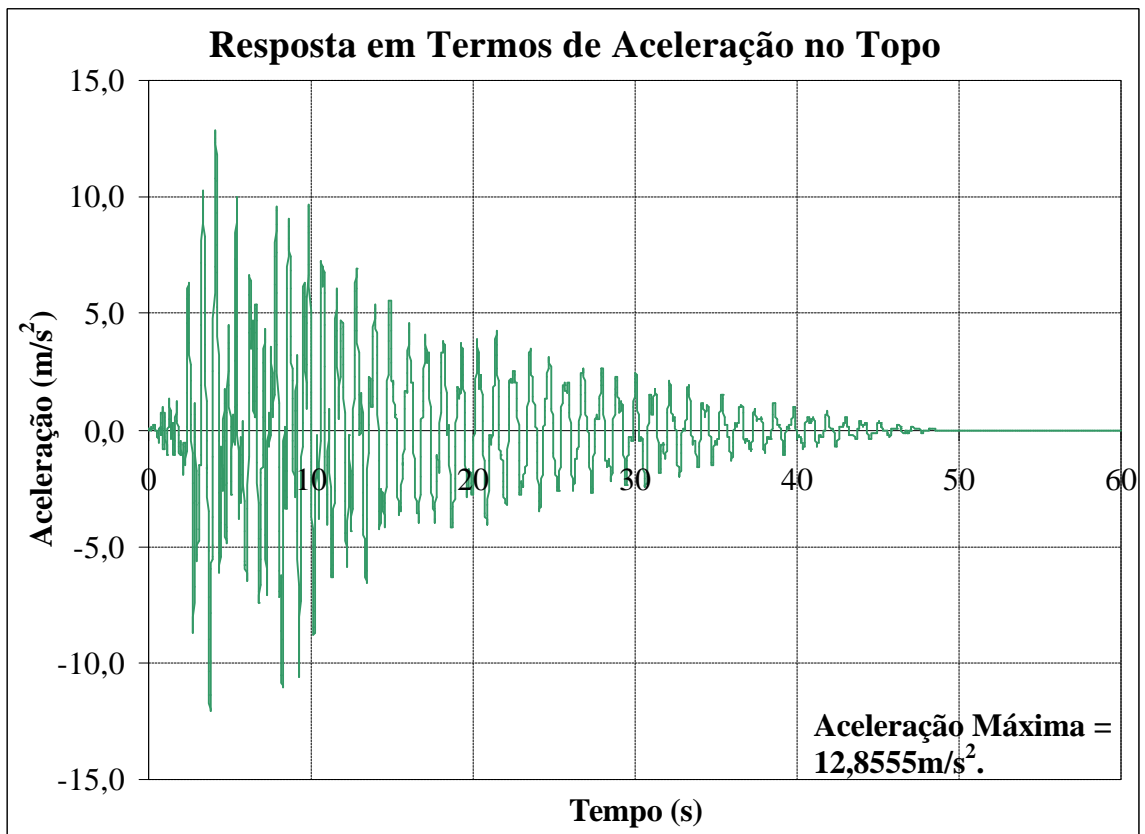
Também para o terremoto de Loma Prieta pode-se traçar o gráfico da variação do esforço cortante na base do pórtico em função da força de atrito nos amortecedores, como se apresenta na figura 8.21. Observa-se dessa figura que o valor ótimo para a força de atrito nos amortecedores, levando-se em conta o esforço cortante máximo na base, está em torno de 500kN. A partir desse valor, a resposta em termos de esforço cortante torna-se aproximadamente constante e da ordem de 1650kN, ou seja, uma redução de 77% em relação ao cortante máximo na base sem amortecedores, igual a 7078,5kN.



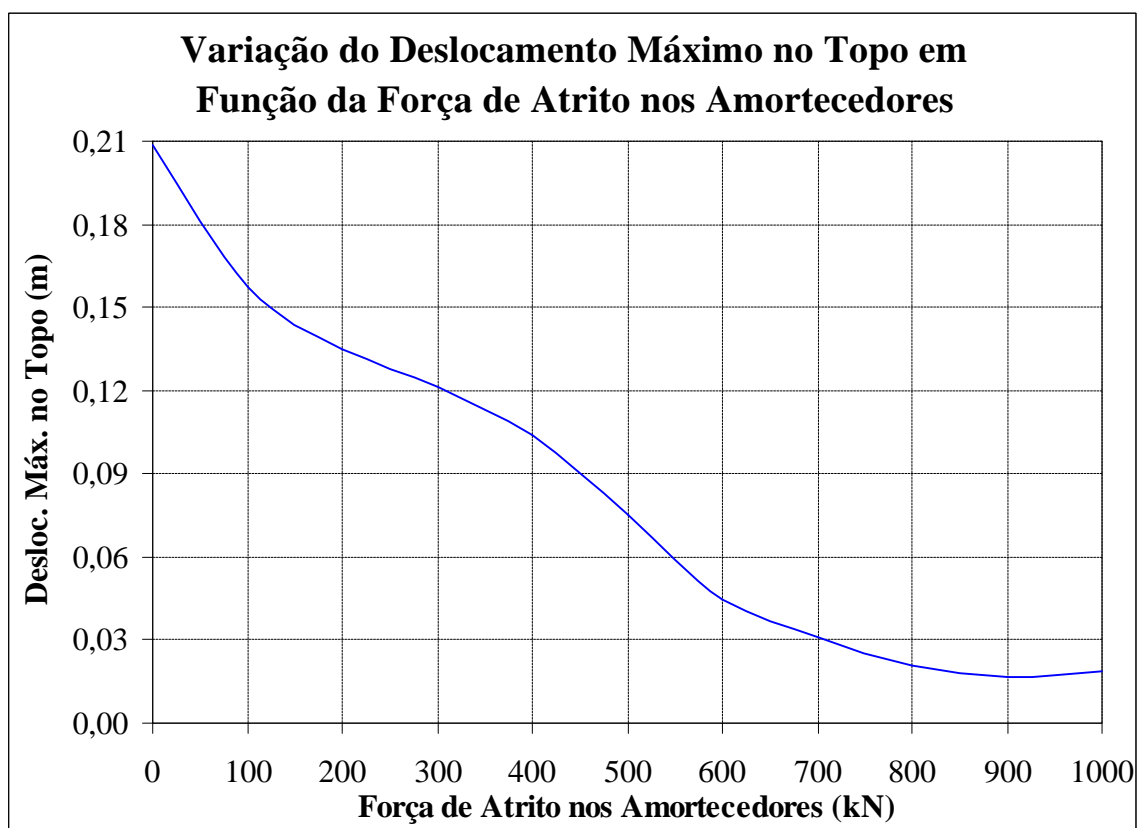
**Figura 8.17 - Resposta em Termos de Deslocamento no Topo**



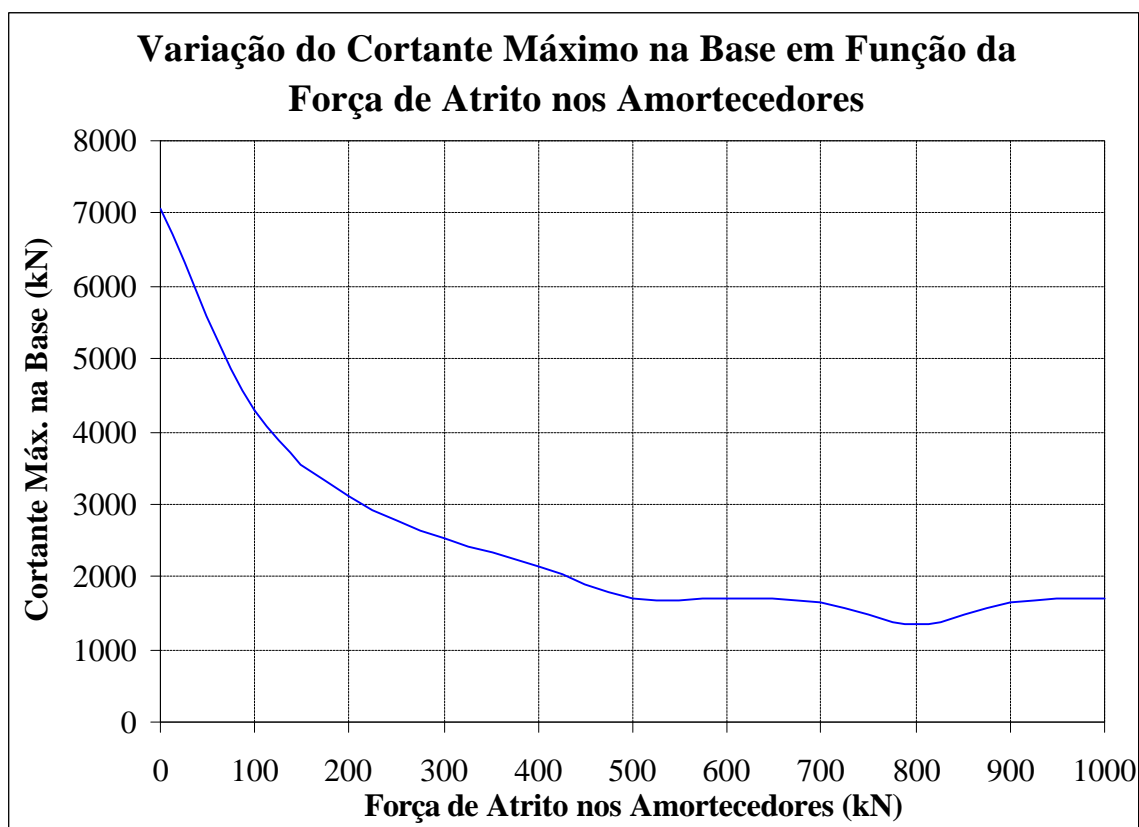
**Figura 8.18 - Resposta em Termos de Velocidade no Topo**



**Figura 8.19 - Resposta em Termos de Aceleração no Topo**



**Figura 8.20 - Deslocamento Máximo no Topo do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores**



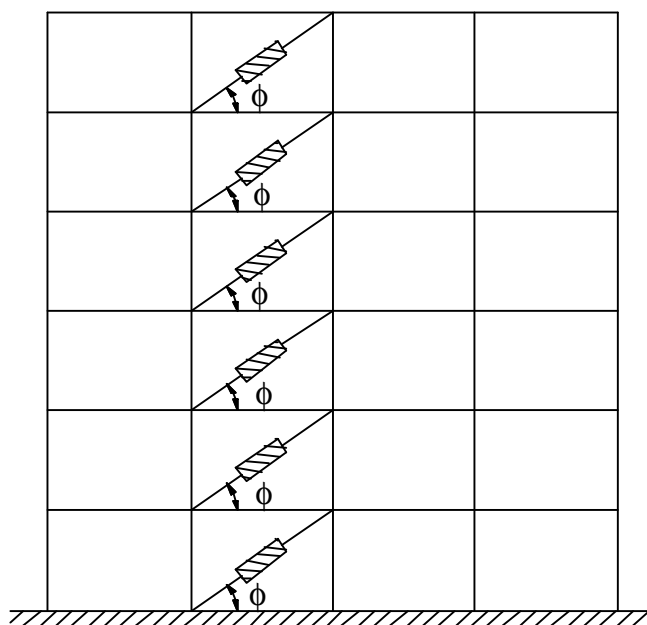
**Figura 8.21 - Esforço Cortante Máximo na Base do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores**

## 8.4. RESPOSTA DA ESTRUTURA COM AMORTECEDORES (INSTALADOS COMO MOSTRA A FIGURA 8.22)

Os amortecedores de vibração por atrito são usualmente instalados conforme se mostra na figura 8.22. Então, agora o pórtico é novamente analisado considerando-se essa segunda disposição dos amortecedores. A equação de movimento para este caso é dada por:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\vec{X}} + [\mathbf{C}]\dot{\vec{X}} + \mu \cos(\phi) \{N_i \operatorname{sgn}(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) - N_{i+1} \operatorname{sgn}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i)\} + [\mathbf{K}]\vec{X} = \vec{F}_{\text{ex}} \quad (8.12)$$

Sabendo-se que nesse caso  $\vec{F}_a = \mu \cos(\phi) \{N_i \operatorname{sgn}(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) - N_{i+1} \operatorname{sgn}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i)\}$ , a resposta do sistema pode ser obtida de forma semelhante ao caso anterior.



**Figura 8.22 - O Pórtico com Dissipadores Instalados numa Segunda Configuração**

No anexo 11.3.3 apresenta-se a listagem completa do programa computacional desenvolvido em Matlab para obtenção da resposta do sistema com amortecedores por atrito colocados conforme se mostra na figura 8.22.

### 8.4.1. ANÁLISES COM O SISMO DE CAUCETE

A fim de comparar com a instalação anterior, nesse caso também se utilizaram amortecedores tipo o modelo A, os quais possuem uma força de atrito constante de 3,5kN. Como será apresentada, a redução na resposta da estrutura foi menor que no caso anterior.

As figuras 8.23, 8.24 e 8.25 mostram, respectivamente, a resposta do pórtico ao sismo de Cauçete, equipado com amortecedores por atrito de capacidade de 3,5kN, em termos de deslocamento, velocidade e aceleração no topo.

Da mesma forma que no caso anterior, percebe-se que aumentando gradativamente a força de atrito nos amortecedores a resposta da estrutura vai diminuindo até chegar a um valor limite a partir do qual não diminui mais. Isso pode ser observado no gráfico da figura 8.26, o qual mostra o deslocamento máximo no topo do pórtico em função da força de atrito nos amortecedores. Observa-se dessa figura que o valor ótimo para a força de atrito nos amortecedores está em torno de 300kN. A partir desse valor, a resposta em termos de deslocamento máximo no topo torna-se aproximadamente constante e da ordem de 0,033m, ou seja, uma redução de 51% em relação ao deslocamento máximo no topo sem amortecedores que vale 0,068m.

Outro resultado importante é apresentado no gráfico da figura 8.27, o qual representa a variação do esforço cortante na base do pórtico em função da força de atrito nos amortecedores. Observa-se desse gráfico que o valor ótimo para a força de atrito nos amortecedores, levando-se em consideração o esforço cortante máximo na base, está em torno de 150kN. A partir desse valor, a resposta em termos de esforço cortante torna-se aproximadamente constante e da ordem de 1300kN, ou seja, apresenta uma redução de 61% em relação ao cortante máximo na base sem amortecedores, igual a 3334,5kN.

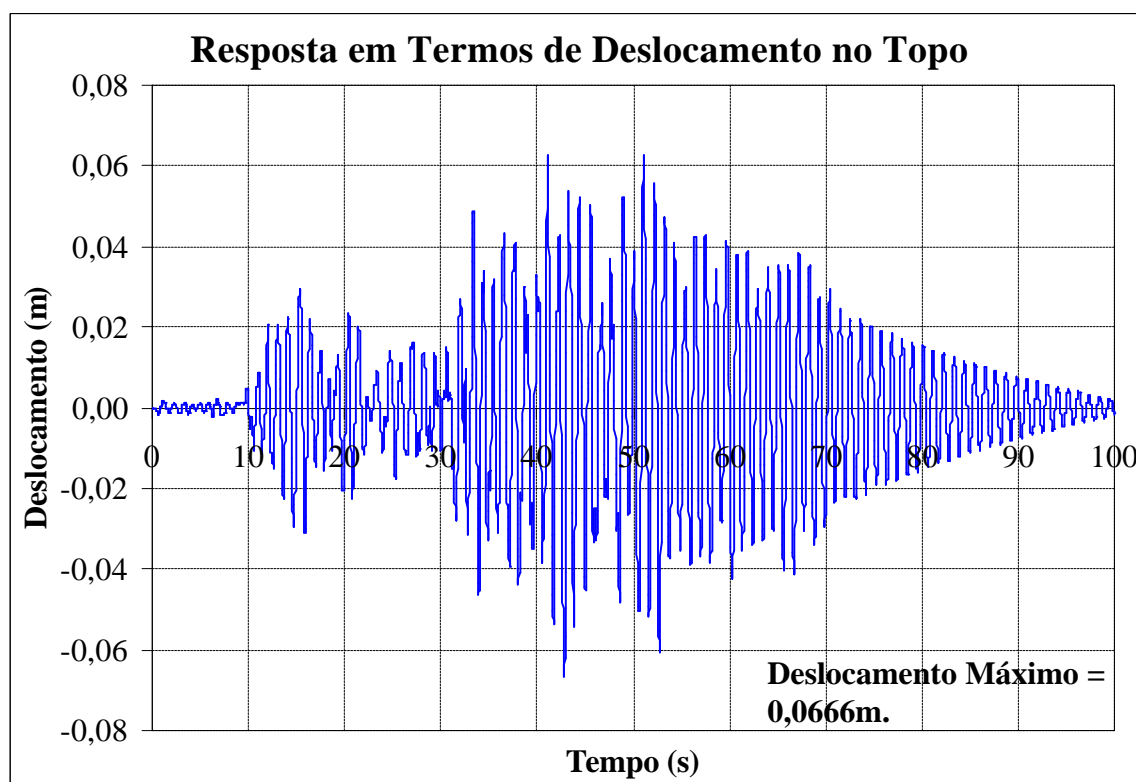
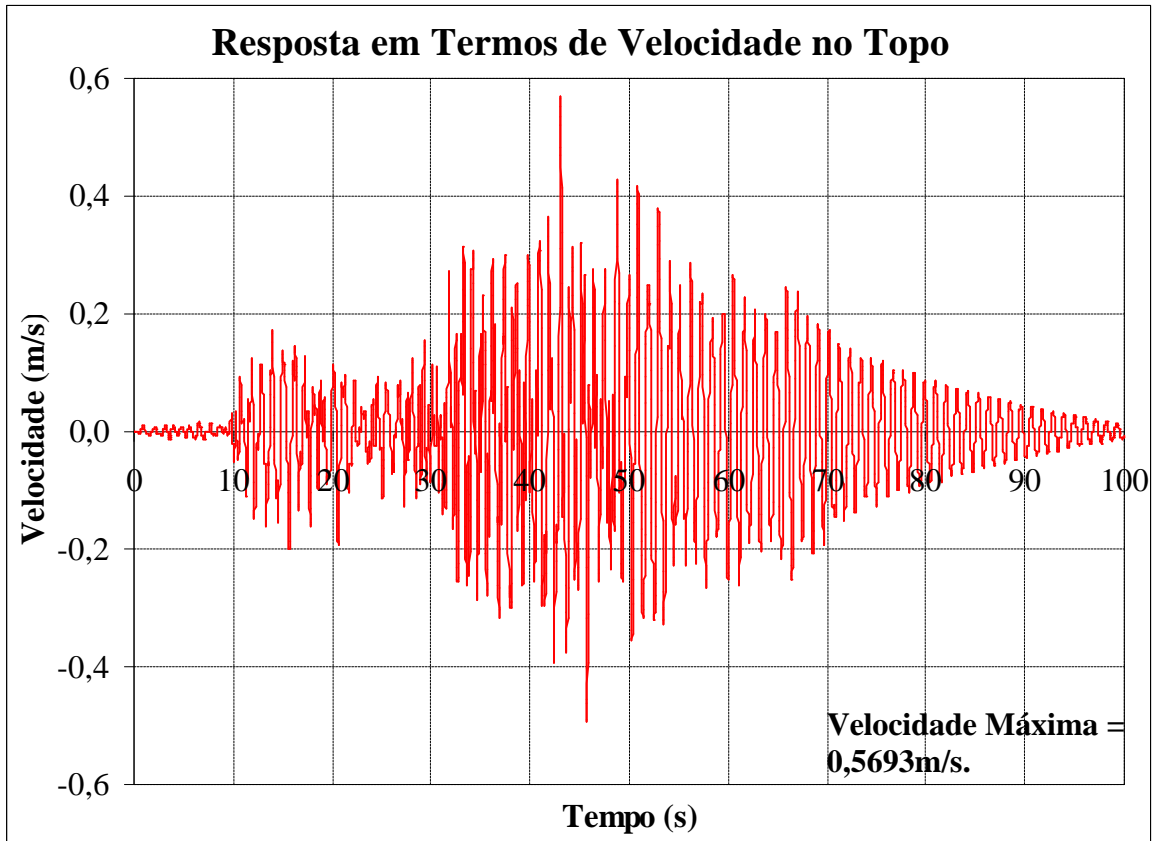
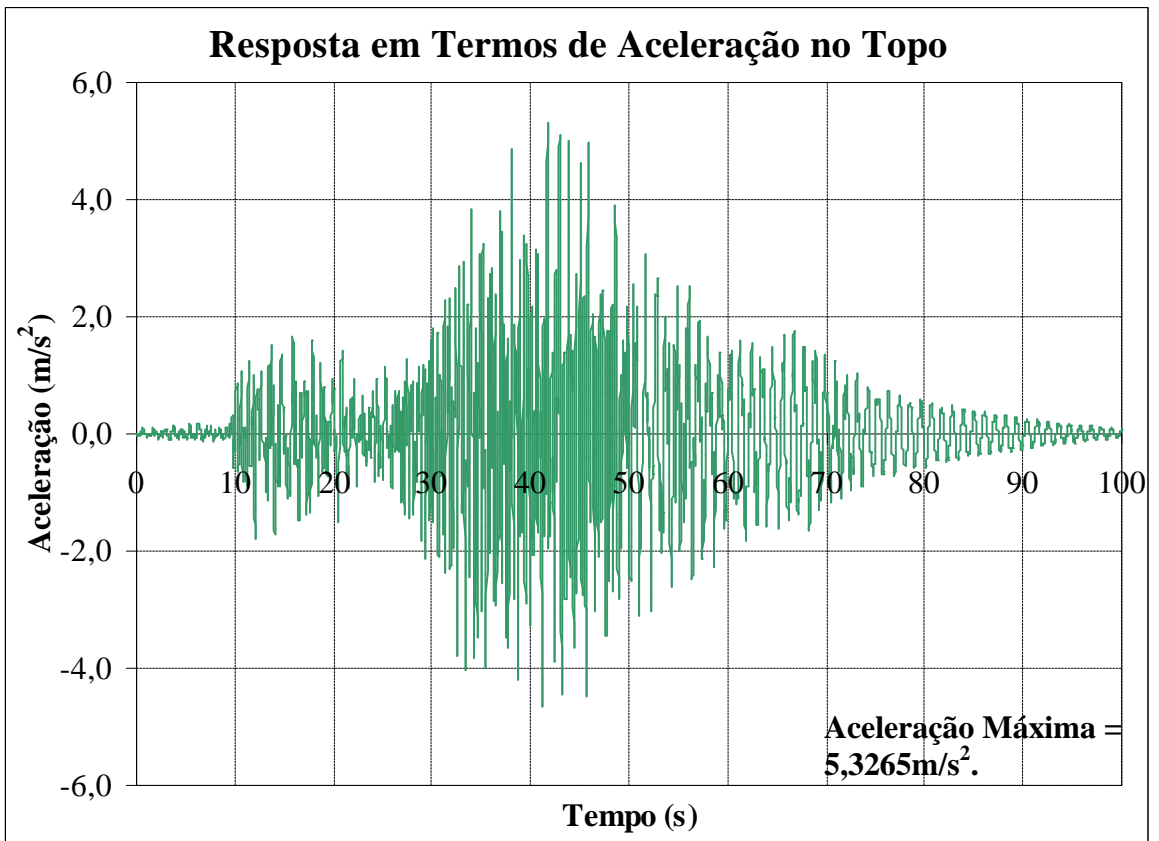


Figura 8.23 - Resposta em Termos de Deslocamento no Topo

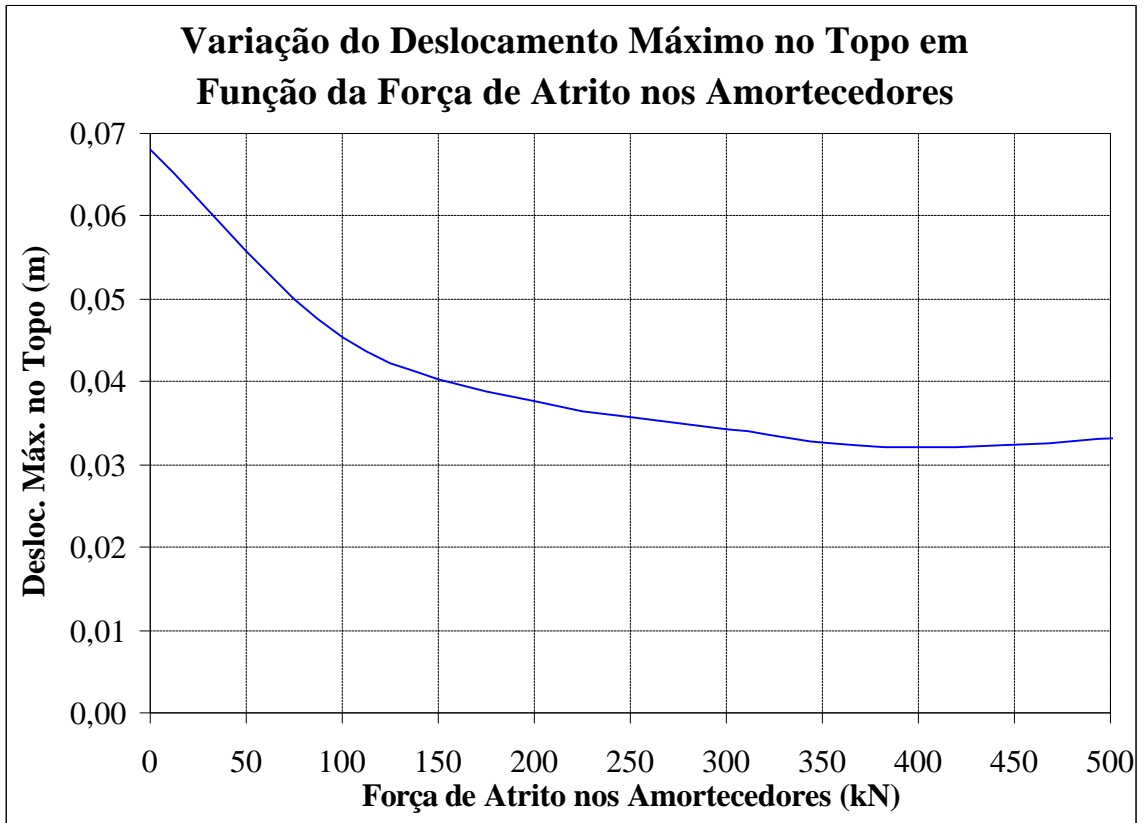




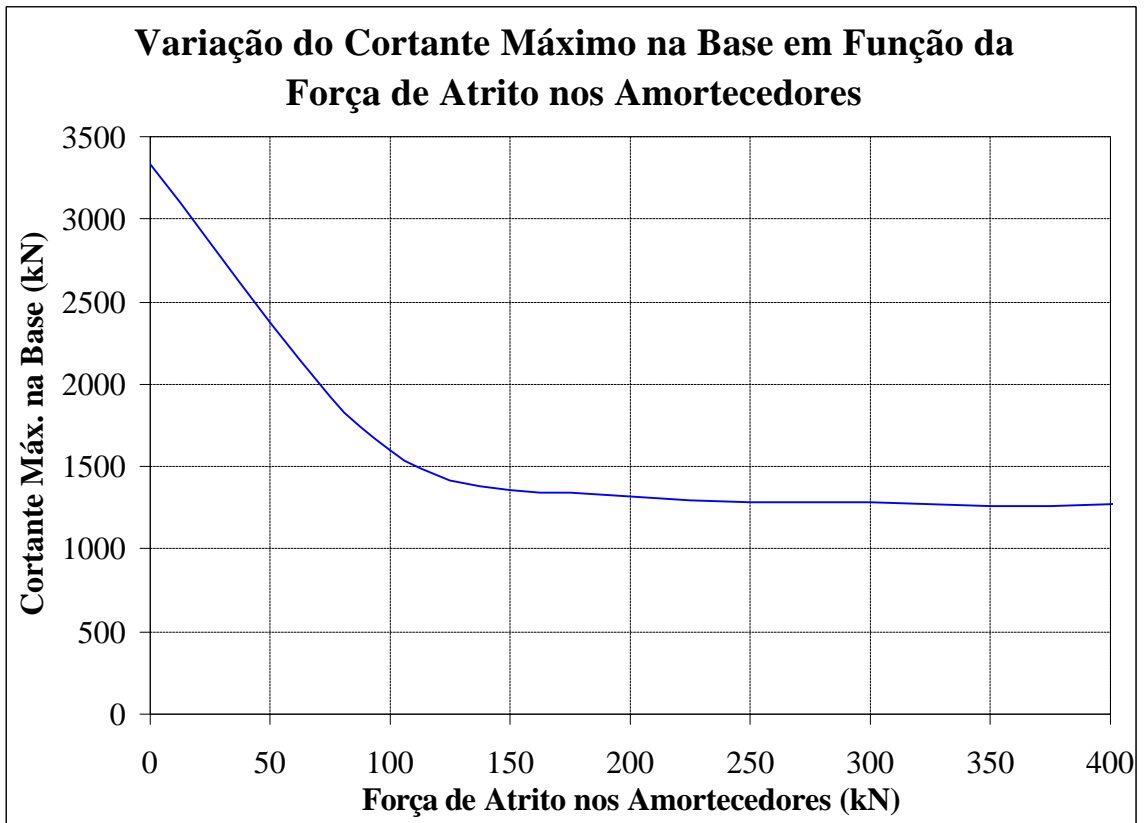
**Figura 8.24 - Resposta em Termos de Velocidade no Topo**



**Figura 8.25 - Resposta em Termos de Aceleração no Topo**



**Figura 8.26 - Deslocamento Máximo no Topo do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores**



**Figura 8.27 - Esforço Cortante Máximo na Base do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores**

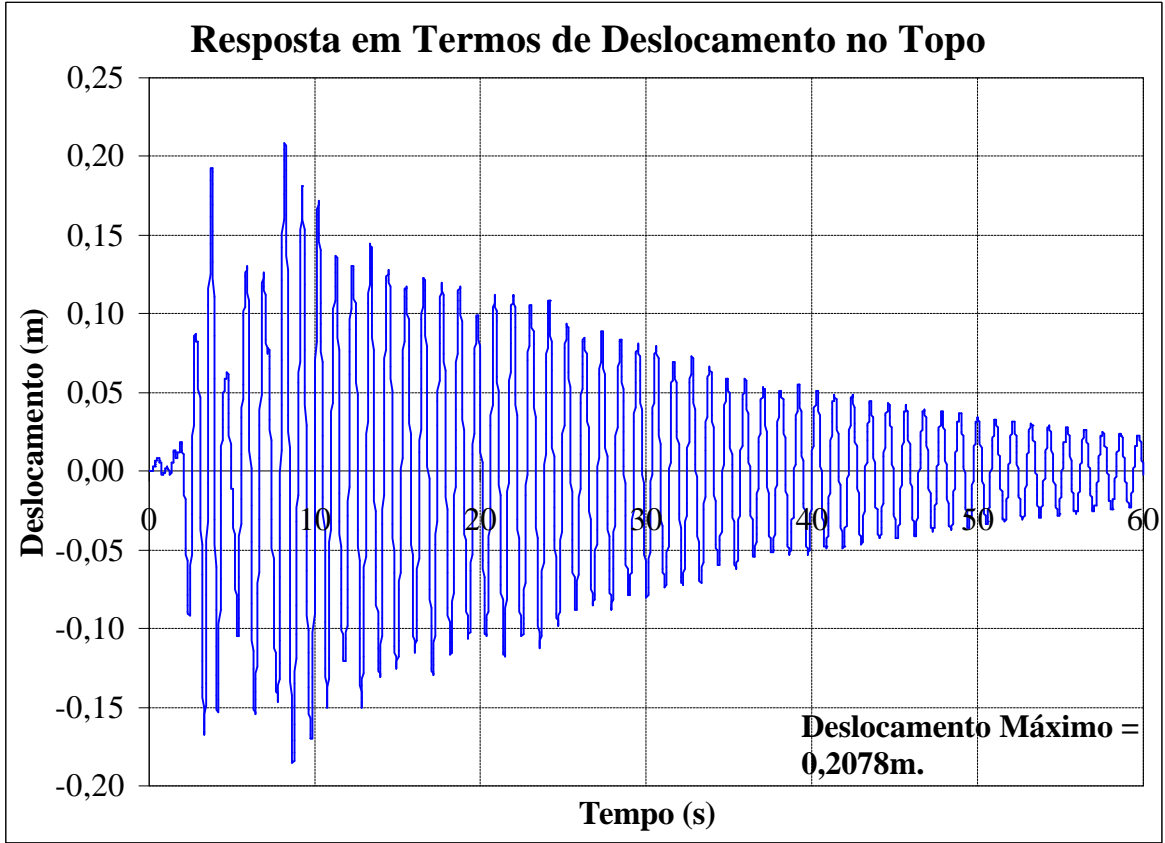
### 8.4.2. ANÁLISES COM O SISMO DE LOMA PRIETA

Mais uma vez, a fim de realizarem-se comparações, considerou-se que os amortecedores instalados no pórtico são o modelo A, os quais possuem uma força de atrito constante de 3,5kN. Novamente, como será mostrada, a redução da resposta da estrutura foi menor que no caso em que os dissipadores foram instalados horizontalmente (figura 8.11).

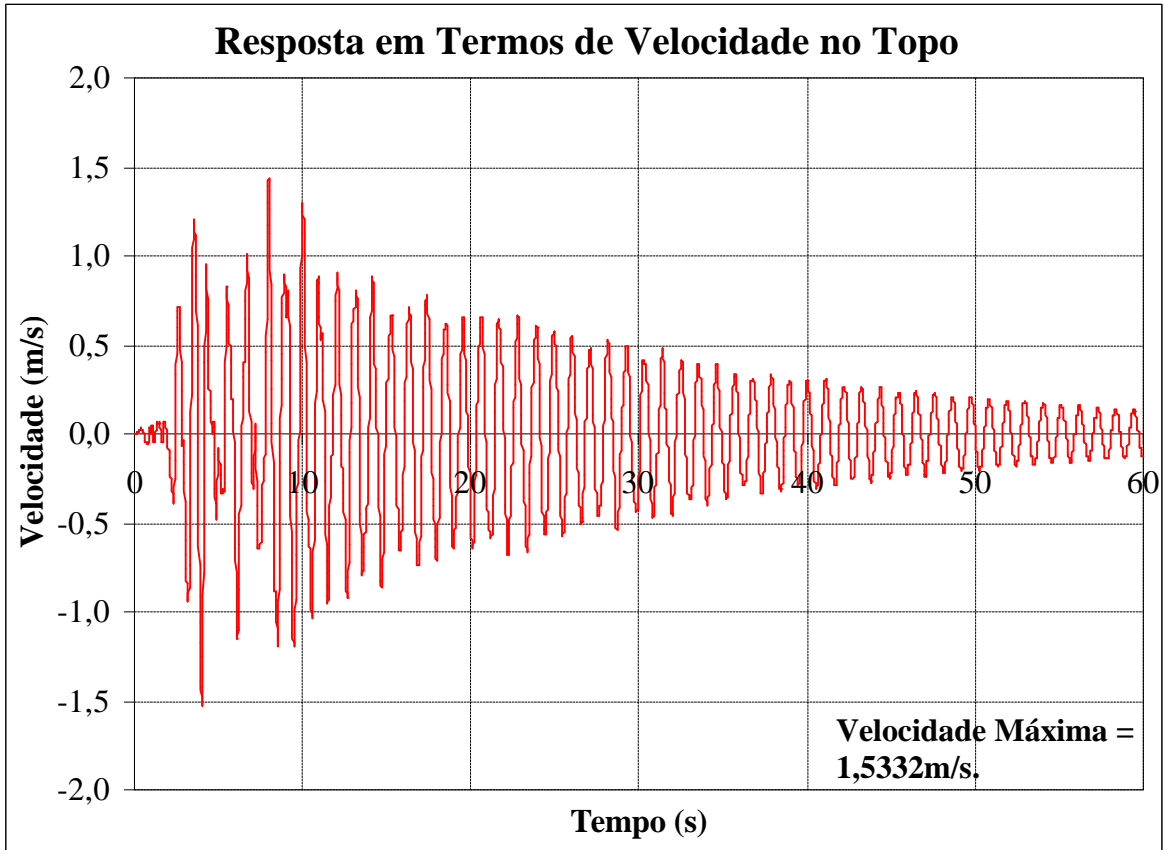
As figuras 8.28, 8.29 e 8.30 representam, respectivamente, a resposta do pórtico ao sismo de Loma Prieta, equipado com amortecedores por atrito de capacidade de 3,5kN, instalados da maneira mais usual (figura 8.22), em termos de deslocamento, velocidade e aceleração no topo.

Com este sismo ocorre o mesmo que com o sismo de Cauçete, isto é, aumentando-se gradativamente a força de atrito nos amortecedores verifica-se que a resposta da estrutura vai diminuindo até chegar a um valor limite a partir do qual não diminui mais. Isso pode ser observado no gráfico da figura 8.31, o qual mostra o deslocamento máximo no topo do pórtico em função da força de atrito nos amortecedores. Observa-se dessa figura que o valor ótimo para a força de atrito nos amortecedores está em torno de 1100kN. A partir desse valor, a resposta em termos de deslocamento máximo no topo torna-se aproximadamente constante e da ordem de 0,123m, ou seja, apresenta uma redução de 41% em relação ao deslocamento máximo no topo sem amortecedores, igual a 0,2083m.

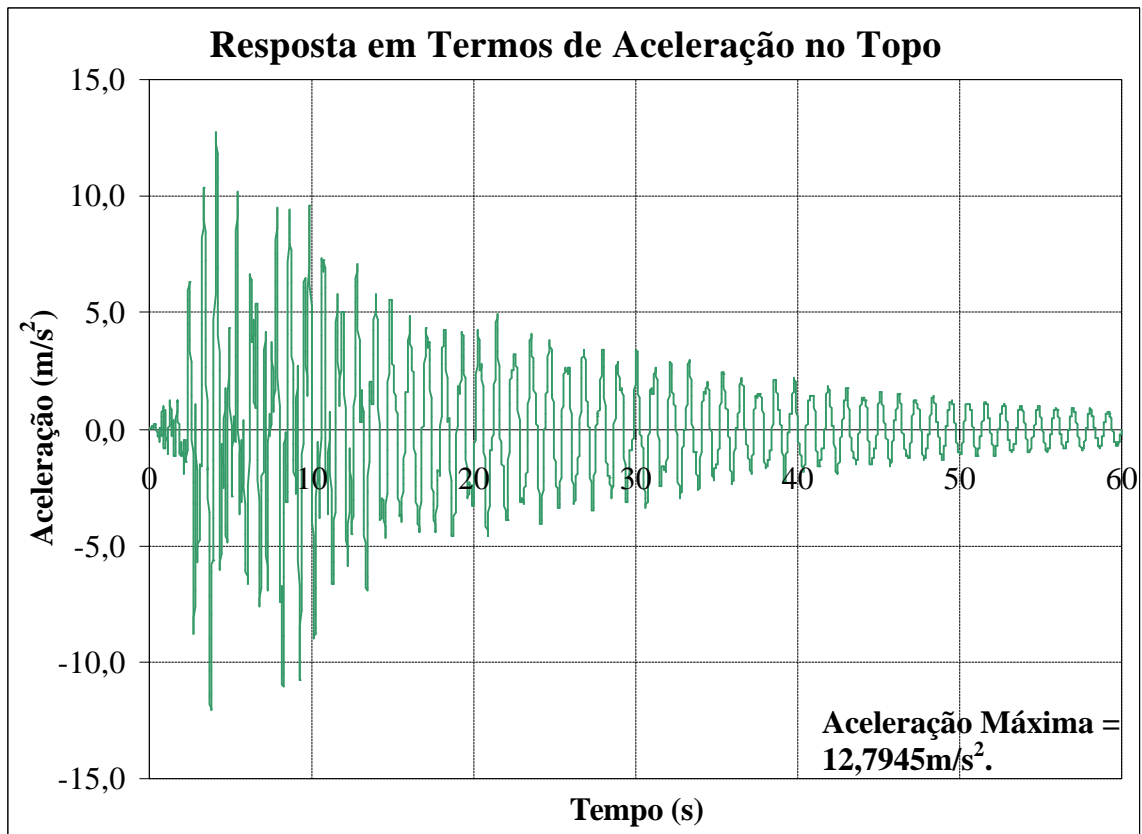
Também para o terremoto de Loma Prieta pode-se traçar o gráfico da variação do esforço cortante na base do pórtico em função da força de atrito nos amortecedores, como se apresenta na figura 8.32, a qual mostra que o valor ótimo para a força de atrito nos amortecedores está em torno de 300kN. A partir desse valor, a resposta em termos de esforço cortante torna-se aproximadamente constante e da ordem de 4100kN, ou seja, uma redução de 42% em relação ao cortante máximo na base sem amortecedores que vale 7078,5kN.



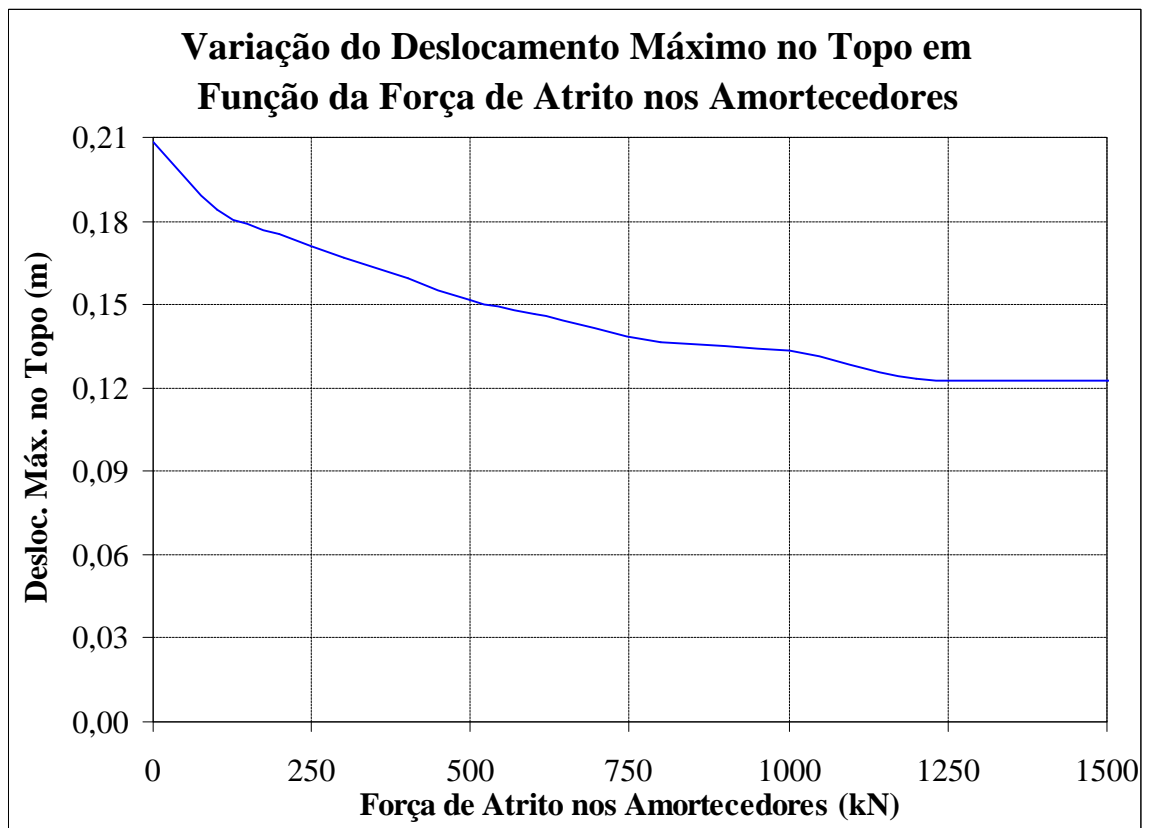
**Figura 8.28 - Resposta em Termos de Deslocamento no Topo**



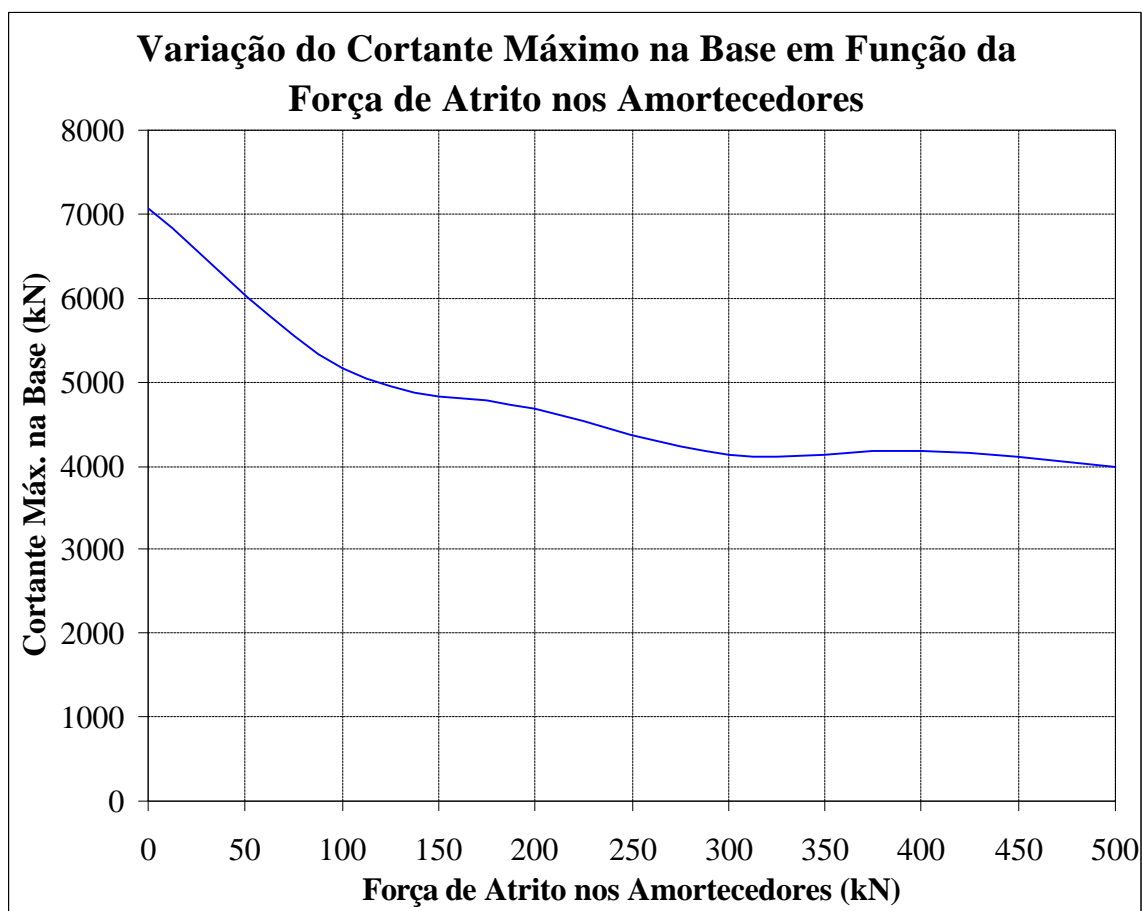
**Figura 8.29 - Resposta em Termos de Velocidade no Topo**



**Figura 8.30 - Resposta em Termos de Aceleração no Topo**



**Figura 8.31 - Deslocamento Máximo no Topo do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores**



**Figura 8.32 - Esforço Cortante Máximo na Base do Pórtico em Função da Força de Atrito nos Amortecedores**

## 9. CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES

De acordo com o apresentado nos capítulos 1 e 2, confirmou-se a importância de amortecedores de vibração, comprovando-se a necessidade de estudos mais aprofundados a respeito do assunto, como o realizado na presente dissertação.

Tendo sido decidido concentrar-se o estudo nos amortecedores de vibração por atrito, nos capítulos 3 e 4 apresentaram-se aspectos detalhados sobre a física do atrito. Foram discutidos tópicos relevantes e ainda obscuros a respeito do fenômeno do atrito, tais como o movimento de aderência-deslizamento e a proposição de alguns modelos matemáticos que podem ser usados para representar a variação da força de atrito, principalmente na região onde a velocidade de deslizamento é zero ou próxima desse valor.

Estando ciente das dificuldades de cálculo que sistemas com atrito impõem, no capítulo 5 foram discutidos dois métodos que facilitam este cálculo sem perder muito a precisão. O primeiro sugeriu substituir o atrito por um amortecimento viscoso equivalente e o outro propôs substituir a função sinal descontínua por funções contínuas. Conforme foi apresentado ambos os métodos mostraram-se adequados e simples, porém o segundo esquema foi o escolhido para a elaboração dos programas, pois é o que apresenta resultados mais semelhantes aos reais e também é fácil de ser integrado numericamente.

Depois de dada toda a base teórica, os capítulos 6 e 7 compuseram a parte experimental da dissertação. Foram projetados, construídos e ensaiados três modelos diferentes de amortecedores de vibração por atrito. Nesta etapa pôde-se perceber na prática a eficiência deste tipo de dissipador de energia. Em todos os três modelos os projetos foram, relativamente simples, com baixo custo de fabricação e apresentaram grande poder de dissipação. Para qualquer um dos três modelos, em aplicações a estruturas reais que exijam capacidades muito maiores que as ensaiadas, recomenda-se a consideração de possíveis efeitos de escala.

A fim de comprovar a eficiência de amortecedores de vibração por atrito instalados em uma estrutura, no capítulo 8 foram desenvolvidos programas computacionais para obtenção da resposta de um edifício metálico de seis pavimentos submetido a cargas sísmicas reais. Comparando-se a resposta obtida antes da instalação dos dissipadores com a resposta obtida após a colocação dos mesmos em sua disposição usual, observou-se uma redução de até 51% no deslocamento máximo no topo e redução de até 61% no esforço cortante máximo na base considerando-se o sismo de Cauçete e reduções em torno de 41% tanto para o deslocamento máximo no topo quanto para o cortante máximo na base, considerando-se o sismo de Loma Prieta, o que comprovou a eficiência desse tipo de controlador de vibração. Além disso, cabe ainda ressaltar que esses limites são indicativos da redução esperada nas solicitações máximas na estrutura, que se supõe apresenta um comportamento elástico, variando ligeiramente com as características dinâmicas (frequências e modos de vibração) da estrutura e da excitação (conteúdo de frequência e duração do sismo). É importante salientar que a redução, isto é, a eficiência dos amortecedores é maior na vizinhança do pico do espectro de resposta para o sismo sob consideração, situação na qual os limites indicados podem ser amplamente superados.

De modo a dar continuidade a esse estudo, algumas sugestões podem ser feitas, tais como:

a) Verificar a durabilidade das chapas de latão, submetendo-se os amortecedores a ciclos de cargas contínuos até que todo o latão tenha sido desgastado ou se tenha perdido a capacidade de dissipação necessária. Com isso pode-se determinar a vida útil do amortecedor.

b) Aumentar proporcionalmente todas as dimensões e forças dos modelos e ensaiá-los novamente para verificar se a capacidade de dissipação também aumenta de forma proporcional. Com isso, sabendo-se a energia que deve ser dissipada, determinam-se as dimensões ideais do amortecedor.

c) Instalar os modelos em estruturas reais e acompanhar a resposta da estrutura antes e após a colocação dos amortecedores, a fim de verificar a eficiência dos mesmos.

d) Da mesma forma que se ajustou uma curva para a variação da força de atrito com a velocidade para os latões, como mostram as figuras 7.19 e 7.20, sugere-se um estudo mais aprofundado para determinar uma curva de variação universal, ou seja, uma curva de variação da força de atrito com a velocidade na qual todos os fatores relevantes, tais como a rugosidade das superfícies em contato, entrem como parâmetros adimensionais.



## 10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AIKEN, I. D.; KELLY, J. M. **Earthquake Simulator Testing and Analytical Studies of Two Energy - Absorbing Systems for Multistory Structures.** Report N°. UCB/EERC - 90/03, University of California, Berkeley, CA, 1990.
2. AMONTONS, G. **De la Résistance Causée Dans les Machines.** Mémoires de l'Académie Royale A, p. 275 - 282, 1699.
3. ARCHARD, J. F. **Elastic Deformation and the Laws of Friction.** Proceedings of the Royal Society of London Series A, 243, p. 190 - 205, 1957.
4. BIKERMAN, J. J. **Adhesion in Friction.** Wear, v.39, N.º 1, p. 1 - 13, 1976.
5. BLOK, H. **Fundamental Mechanical Aspects of Boundary Lubrication.** S. A. E. J., v.46, N.º 2, p. 54 - 68, 1940.
6. BOLTON, H. C. Nature, v.42, p. 389 - 390, 1890.
7. BOWDEN, F. P.; TABOR, D. **Friction and Lubrication.** Surface Physics, Cavendish Laboratory, University of Cambridge, 1967.
8. BRACE, W. F.; BYERLEE, J. D. **Stick-Slip as a Mechanism for Earthquakes.** Science, v.153, p. 990 - 992, 1966.
9. BRUNE, J. N.; BROWN, S.; JOHNSON, P. A. **Rupture Mechanism and Interface Separation in Foam Rubber Models of Earthquakes: a Possible Solution to the Heat Flow Paradox of Large Overthrusts.** Elsevier Science Publishers B. V., v.218, p. 59 - 67, 1993.
10. BRUNE, J. N.; JOHNSON, P. A.; SLATER, C. **Nucleation, Predictability and Rupture Mechanism in Foam Rubber Models of Earthquakes.** Journal of Himalayan Geology, v.1, N.º 2, p. 155 - 166, 1990.
11. BUSH, A. W.; GIBSON, R. D.; THOMAS, T. R. **The Elastic Contact of a Rough Surface.** Wear, v.35, N.º 1, p. 87 - 111, 1975.
12. CARUS-WILSON, C. Nature, v.42, p. 568, 1890.

13. DEWIT, C. C.; OLSSON, H.; ASTRÖM, K. J.; LISCHINSKY, P. **A New Model for Control of Systems with Friction.** IEEE Transactions on Automatic Control, v.40, N.º 3, p. 419 - 425, 1995.
14. DE BAETS, P.; DEGRIECK, J.; DE VELDE, F. V.; PETEGHEM, A. P. V. **Experimental Verification of the Mechanisms Causing Stick-Slip Motion Originating from Relative Deceleration.** Wear, v.243, N.º 1-2, p. 48 - 59, 2000.
15. DEN HARTOG, J. P. **Forced Vibrations with Combined Coulomb and Viscous Friction.** Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (ASME), v.53, p. 107 - 115, 1931.
16. DEN HARTOG, J. P. **Mechanical Vibrations.** McGraw Hill, 1934.
17. DIETERICH, J. H. **Time-Dependent Friction in the Mechanics of Stick Slip.** Pure and Applied Geophysics, v.116, N.º 4-5, p. 790 - 806, 1978.
18. DÜBBEL, H. **Manual del Constructor de Maquinas.** Editorial Labor S.A, 1965.
19. ECKOLT, W. **Über Erzwungene Reibungsschwingungen.** Zeitschrift für Technische Physik, v.7, p. 226 - 232, 1920.
20. FEENY, B.; GURAN, A.; HINRICHS, N.; POPP, K. **A Historical Review on Dry Friction and Stick-Slip Phenomena.** Applied Mechanics Reviews, v.51, N.º 5, p. 321 - 341, 1998.
21. FERRERO, J. F.; BARRAU, J. J. **Study of Dry Friction Under Small Displacements and Near-Zero Sliding Velocity.** Wear, v.209, N.º 1-2, p. 322 - 327, 1997.
22. FILIPPOV, A. **Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides.** American Math Society Translations, v.42, Series 2, p. 199 - 231, 1964.
23. FOLKMAN, S. L.; FERNEY, B. D.; BINGHAM, J. G.; DUTSON, J. D. **Friction and Impact Damping in a Truss Using Pinned Joints.** Dynamics with Friction, World Scientific, 1996.
24. GREENWOOD, J. A.; WILLIAMSON, J. B. P. **Contact of Nominally Flat Surfaces.** Proceedings of the Royal Society of London Series A, 295, p. 300 - 319, 1966.
25. GROEHS, A. D. **Mecânica Vibratória.** Ed. Unisinos, São Leopoldo, RS, 1999.
26. HAESSIG, D. A.; FRIEDLAND, B. **On the Modelling and Simulation of Friction.** Journal of Dynamic Systems, Measures and Control, v.113, p. 354 - 362, 1991.
27. HELMHOLTZ, H. L. F. **On the Sensations of the Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music.** Dover New York, traduzido por A. J. Ellis de Die Lehre von den Tonempfindungen, 1954.

28. JACOBSON, L. S. **Steady Forced Simulations as Influenced by Damping.** Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (ASME), v.53, p. 169 - 178, 1930.
29. JIANG, J.; ULBRICH, H. **Derivation of Coefficient of Friction at High Sliding Speeds from Energy Conservation over the Frictional Interface.** Wear, v.247, N.º 1, p. 66 - 75, 2001.
30. JOHANNES, V. I.; GREEN, M. A.; BROCKLEY, C. A. **The Role of the Rate of Application of the Tangential Force in Determining the Static Friction Coefficient.** Wear, v.24, N.º 3, p. 381 - 385, 1973.
31. JORNAL GAZETA MERCANTIL. **Concreto de Alto Desempenho Revolucionaria Engenharia.** Ago. 1999.
32. LEVITAN, E. S. **Forced Oscillation of a Spring-Mass Having Combined Coulomb and Viscous Damping.** Journal of the Acoustical Society of America, v.32, N.º 10, p. 1265 - 1269, 1960.
33. LORENZ, H. **Lehrbuch der Technischen Physik Erster Band: Technische Mechanik Starrer Gebilde.** Verlag von Julius Springer, Berlin, 1924.
34. MAHMOODI, P. **Structural Dampers.** Journal of the Structural Division, ASCE, v.95, n.ST8, p. 1661 - 1672, Aug. 1969.
35. MOORE, D. F. **Principles and Applications of Tribology.** Pergamon Press, Oxford, 1975.
36. MOSTAGHEL, N.; DAVIS, T. **Representations of Coulomb Friction for Dynamic Analysis.** Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.26, N.º 5, p. 541 - 548, 1997.
37. NEMIR, D. C.; LIN, Y.; OSEGUEDA, R. A. **Semiactive Motion Control Using Variable Stiffness.** Journal of Structural Engineering, v.120, N.º 4, p. 1291 - 1306, 1994.
38. ODEN, J. T.; MARTINS, J. A. C. **Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.52, N.º 1-3, p. 527 - 634, 1985.
39. PAINLEVÉ, M. **Sur les Lois du Frottement de Glissement.** Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, v.121, p. 112 - 115, 1895.
40. PALL, A. S.; PALL, R. **Friction - Dampers Used for Seismic Control of New and Existing Buildings in Canada.** Proc. ATC 17-1 on Seismic Isolation, Energy Dissipation, and Active Control, 2, p. 675 - 686, 1993.

41. PALL, A.; VEZINA, S.; PROULX, P.; PALL, R. **Friction - Dampers for Seismic Control of Canadian Space Agency Headquarters.** Earthquake Spectra, v.9, N.º 3, p. 547 - 557, 1993.
42. PASQUIN, C.; PALL, A.; PALL, R. **High - Tech Seismic Rehabilitation of Casino de Montreal.** Structures Congress, ASCE, 1994.
43. PETERSON, M. G.; FLOREK, J. J.; LEE, R. E. **Sliding Characteristics of Metals at High Temperatures.** Transactions of the American Society of Lubrication Eng, v.3, p. 101 - 115, 1960.
44. POLYCARPOU, A. A.; SOOM A. **Modeling Unsteady Lubricated Friction.** Dynamics with Friction, World Scientific, 1996.
45. RABINOWICZ, E. **Friction and Wear of Materials.** John Wiley and Sons, Inc., New York, 1965.
46. REVISTA ARQUITETURA E URBANISMO. **Passagem de Luz.** N.º 76, 01/02/1998.
47. REVISTA CONSTRUÇÃO SÃO PAULO. **A Hora da Virada.** N.º 2562, 17/03/1997.
48. REVISTA CONSTRUÇÃO SÃO PAULO. **Amortecedores para Estruturas.** N.º 2619, 20/04/1998.
49. REVISTA TÉCNICA. **Estádio do Morumbi: fim de jogo.** N.º 34, 01/05/1998.
50. REVISTA VEJA. **As Torres do Poder.** p. 56 - 57, Fev. 1996.
51. RICE, J. R.; RUINA, A. L. **Stability of Steady Frictional Slipping.** Journal of Applied Mechanics, v.50, N.º 2, p. 343 - 349, 1983.
52. RICHARDSON, R. S. H.; NOLLE, H. **Surface Friction Under Time-Dependent Loads.** Wear, v.37, N.º 1, p. 87 - 101, 1976.
53. SIMON, I.; McMAHON, H. O.; BOWEN, R. J. **Dry Metallic Friction as a Function of Temperature Between 4,2K e 600K.** Journal of Applied Physics, v.22, N.º 2, p. 177 - 184, 1951.
54. SOONG, T. T.; DARGUCH, G. F. **Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering.** John Wiley & Sons, Chichester, NY, 1997.
55. TABOR D. **Friction - The Present State of our Understanding.** Journal of Lubrication Technology, v.103, p. 169 - 179, 1981.
56. TAN, X.; ROGERS, R. J. **Equivalent Viscous Damping Models of Coulomb Friction in Multi-Degree-of-Freedom Vibration Systems.** Journal of Sound and Vibration, v.185, N.º 1, p. 33 - 50, Aug 1995.
57. THOMSON, W. T. **Theory of Vibration with Applications.** Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1981.

58. TOLSTOI, D. M. **Significance of the Normal Degree of Freedom and Natural Normal Vibrations in Contact Friction.** *Wear*, v.10, N.º 3, p. 199 - 213, 1967.
59. VEZINA, S.; PROULX, P.; PALL, R.; PALL, A. **Friction - Dampers for Aseismic Design of Canadian Space Agency.** Tenth World Conference on Earthquake Engineering, Madrid, p. 4123 - 4128, 1992.
60. VIELSACK, P. **Stick-Slip Instability of Decelerative Sliding.** *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v.36, N.º 2, p. 237 - 247, 2001.
61. WANG, J. H.; SHIEH, W. J. **The Influence of a Variable Friction Coefficient on the Dynamic Behavior of a Blade with a Friction Damper.** *Journal of Sound and Vibration*, v.149, N.º 1, p. 137 - 145, 1991.
62. WHITEHOUSE, D. J.; ARCHARD, J. F. **The Properties of Random Surfaces of Significance in Their Contact.** *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 316, p. 97 - 121, 1970.
63. WIKIEL, B.; HILL, J. M. **Stick-Slip Motion for Two Coupled Masses with Side Friction.** *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v.35, N.º 6, p. 953 - 962, 2000.
64. ZHUKOVSKII, NE. **Equilibrium Condition for a Rigid Body Resting on a Fixed Plane with Some Area of Contact, and Capable of Moving Along the Plane with Friction.** *Collected Works*, v.1: General Mechanics, Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, p. 339 - 354, 1948.
65. ZIEGLER, H. **Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik.** *Ing Arch*, v.20, p. 49 - 56, 1952.

# **11. ANEXOS**

## **11.1. ANEXO 1 - LISTAS DE MATERIAIS**

Neste anexo apresentam-se as listas completas de todos os materiais utilizados para a construção de cada um dos três modelos propostos no capítulo 6.

### **11.1.1. MODELO A**

- 1 tubo retangular de aço de dimensões 80mm x 100mm (dimensões externas), 3mm de espessura e 400mm de comprimento, o qual foi posteriormente aberto, tornando-se um perfil U;
- 1 chapa de aço de dimensões 9,525mm de espessura, 101,6mm de largura e 400mm de comprimento;
- 2 cantoneiras de aço de abas iguais de dimensões 25,4mm de largura das abas, 3mm de espessura e 400mm de comprimento;
- 1 chapa de aço de dimensões 12,7mm de espessura, 74mm de largura e 94mm de altura;
- 2 chapas de aço de dimensões: 3,175mm x 70mm x 74mm;
- 1 chapa de aço de dimensões 63,5mm de largura, 80mm de altura e 420mm de comprimento;
- 2 chapas de fibra de vidro de dimensões 5,25mm de espessura, 80mm de largura e 420mm de comprimento;
- 4 tiras (espaçadores) de fibra de vidro de dimensões: 3,825mm x 3,825mm x 300mm de comprimento;

- 2 molas de compressão com diâmetro externo 30mm, diâmetro do fio 7mm, comprimento livre 61mm, com 7 espiras, acabamento oleado, extremidades em esquadro e esmerilhadas. Material: DIN17223/B;
- 2 cilindros (“camisas”) de aço de diâmetro externo 37,5mm, diâmetro interno 30mm e altura 80mm;
- 4 cilindros maciços de latão de diâmetro 30mm e altura 18,825mm;
- 1 chapa de latão de 3,175mm de espessura, 40mm de largura e 316mm de comprimento;
- 1 chapa de latão de 3,175mm de espessura, 63,5mm de largura e 316mm de comprimento;
- 8 parafusos de cabeça sextavada, rosca fina, de diâmetro 6,35mm e comprimento 6,175mm;
- 5 parafusos de cabeça sextavada, rosca fina, de diâmetro 6,35mm e comprimento 12,7mm;
- 10 parafusos de cabeça sextavada, rosca fina, de diâmetro 6,35mm e comprimento 9mm com arruelas comuns e de pressão;
- 1 parafuso com porca (para funcionar como pino) de cabeça sextavada, de diâmetro 6,35mm e comprimento 88,9mm;
- 2 parafusos de cabeça escareada de diâmetro 6,35mm e comprimento 6,175mm;
- 2 parafusos de cabeça escareada de diâmetro 6,35mm e comprimento 12,7mm;
- 2 roscas de diâmetro 25,4mm e comprimento de 25,4mm.

### **11.1.2. MODELO B**

- 2 chapas de aço de dimensões 12,7mm de espessura, 101,6mm de largura e 300mm de comprimento;
- 4 chapas de aço de dimensões 9,525mm de espessura, 24,4mm de largura e 300mm de comprimento;
- 2 chapas de aço de dimensões 12,7mm de espessura, 50,8mm de largura e 240mm de comprimento;
- 4 chapas de aço de dimensões 6,35mm de espessura, 50,8mm de largura e 80mm de comprimento;
- 4 chapas de latão de 3,175mm de espessura, 50,8mm de largura e 140mm de comprimento;
- 4 chapas de latão de 3,175mm de espessura, 50,8mm de largura e 130mm de comprimento;

- Adesivo à base de resina epóxi, pastoso, bicomponente, comercializado com a designação Araldite AV-138 / HV-998;
- 4 parafusos de cabeça sextavada de diâmetro 6,35mm e comprimento 76,2mm, com 8 porcas e 4 arruelas;
- 32 parafusos de cabeça escareada de diâmetro 3,175mm e comprimento 22,225mm, com 32 porcas;
- 2 roscas de diâmetro 25,4mm e comprimento de 25,4mm;
- Torquímetro.

### **11.1.3. MODELO C**

- 1 tubo retangular de aço de dimensões 20mm x 40mm (dimensões externas), 1,2mm de espessura e 400mm de comprimento;
- 2 perfis U de aço, de dimensões 50,8mm de alma, 25,4mm de mesas, 2,65mm de espessura e 220mm de comprimento;
- 1 chapa de aço de dimensões 6,35mm de espessura, 40mm de largura e 190mm de comprimento;
- 2 chapas de aço de dimensões 6,35mm de espessura, 50,8mm de largura e 31mm de altura;
- 2 chapas de latão de 3,175mm de espessura, 40mm de largura e 100mm de comprimento;
- Adesivo à base de resina epóxi, pastoso, bicomponente, comercializado com a designação Araldite AV-138 / HV-998;
- 2 parafusos de cabeça sextavada de diâmetro 6,35mm e comprimento 50,8mm, com 4 porcas, 8 arruelas de aço e 4 arruelas de borracha;
- 2 roscas de diâmetro 25,4mm e comprimento de 25,4mm;
- Torquímetro.

OBS.: As chapas de aço são todas em aço 1020.





```

clear
close all
clc
path(path, 'C:\Users\Letícia\Mestrado\Dissertação\Cap8')
load Dados6GDLcaucete

% 1.Determinação das Freqüências Naturais e Modos de Vibração

[AutoVetores,AutoValores]=eig(K,M);
FreqNat=sqrt(AutoValores);

w1=FreqNat(6,6);      f1=w1/(2*pi)      mod01=AutoVetores(:,6)
w2=FreqNat(5,5);      f2=w2/(2*pi)      mod02=AutoVetores(:,5)
w3=FreqNat(4,4);      f3=w3/(2*pi)      mod03=AutoVetores(:,4)
w4=FreqNat(3,3);      f4=w4/(2*pi)      mod04=AutoVetores(:,3)
w5=FreqNat(2,2);      f5=w5/(2*pi)      mod05=AutoVetores(:,2)
w6=FreqNat(1,1);      f6=w6/(2*pi)      mod06=AutoVetores(:,1)

% 2.Determinação da Matriz de Amortecimento C

Mr=AutoVetores'*M*AutoVetores;
Kr=AutoVetores'*K*AutoVetores;
A=[1 w1^2; 1 w2^2];
B=2*RazaoAmort*[w1; w2];
alfas=A\B;
alfa10=alfas(1,1);
alfa11=alfas(2,1);
Cr=alfa10*Mr+alfa11*Kr;
C=(AutoVetores')^-1*Cr*(AutoVetores)^-1;

% 3.Determinação da Força de Excitação

Fexcit=diag(M)*AcelExcit';
Fexcit=[Fexcit zeros(GDL,1438)];

% 4.Inicialização do Método de Diferenças Finitas

if Deltat >= (2/w6);
    disp('Diminuir o intervalo de tempo - Deltat')
elseif Deltat < (2/w6);
    disp('Deltat está ok!')
end
Desloc_0=zeros(GDL,1);
Veloc_0=zeros(GDL,1);
Acel_0=M^-1*(Fexcit(:,1)-C*Veloc_0-K*Desloc_0);
Desloc_menos1=(Deltat^2/2)*Acel_0-Deltat*Veloc_0+Desloc_0;
A1=(Deltat^2)*M^-1;
A2=C/Deltat;

% 5.Primeiro Passo de Tempo

Fe_0=Fexcit(:,1)-C*Veloc_0-K*Desloc_0;
Desloc_1=2*Desloc_0-Desloc_menos1+A1*Fe_0;

% 6.Demais Passos de Tempo

Desloc_nmenos1=Desloc_1;
Desloc_nmenos2=Desloc_0;
for n=2:1:(length(Fexcit));
    Fe_nmenos1(:,n-1)=Fexcit(:,n)-A2*(Desloc_nmenos1-Desloc_nmenos2)-
    K*Desloc_nmenos1;
    Desloc_n(:,n-1)=2*Desloc_nmenos1-Desloc_nmenos2+A1*Fe_nmenos1(:,n-1);
    Desloc_nmenos2=Desloc_nmenos1;
    Desloc_nmenos1=Desloc_n(:,n-1);
end

```



```

% Dados de Entrada

% 1) Matriz de Massa           M
% 2) Matriz de Rigidez        K
% 3) Número de Graus de Liberdade GDL
% 4) Razão de Amortecimento   RazaoAmort
% 5) Aceleração da Excitação  AcelExcit
% 6) Intervalo de Tempo       Deltat

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear
close all
clc
path(path, 'C:\Users\Letícia\Mestrado\Dissertação\Cap8')
load Dados6GDLCaucete

% 1.Determinação das Freqüências Naturais e Modos de Vibração

[AutoVetores,AutoValores]=eig(K,M);
FreqNat=sqrt(AutoValores);

w1=FreqNat(6,6);      f1=w1/(2*pi)      modo1=AutoVetores(:,6)
w2=FreqNat(5,5);      f2=w2/(2*pi)      modo2=AutoVetores(:,5)
w3=FreqNat(4,4);      f3=w3/(2*pi)      modo3=AutoVetores(:,4)
w4=FreqNat(3,3);      f4=w4/(2*pi)      modo4=AutoVetores(:,3)
w5=FreqNat(2,2);      f5=w5/(2*pi)      modo5=AutoVetores(:,2)
w6=FreqNat(1,1);      f6=w6/(2*pi)      modo6=AutoVetores(:,1)

% 2.Determinação da Matriz de Amortecimento C

Mr=AutoVetores'*M*AutoVetores;
Kr=AutoVetores'*K*AutoVetores;
A=[1 w1^2; 1 w2^2];
B=2*RazaoAmort*[w1; w2];
alfas=A\B;
alfal0=alfas(1,1);
alfal1=alfas(2,1);
Cr=alfal0*Mr+alfal1*Kr;
C=(AutoVetores')^-1*Cr*(AutoVetores)^-1;

% 3.Determinação da Força de Excitação

Fexcit=diag(M)*AcelExcit';
Fexcit=[Fexcit zeros(GDL,1438)];

% 4.Determinação da Força de Atrito

Fatrito=3500;

% 5.Inicialização do Método de Diferenças Finitas

if Deltat >= (2/w6);
    disp('Diminuir o intervalo de tempo - Deltat')
elseif Deltat < (2/w6);
    disp('Deltat está ok!')
end
Desloc_0=zeros(GDL,1);
Veloc_0=zeros(GDL,1);
Acel_0=M^-1*(Fexcit(:,1)-C*Veloc_0-K*Desloc_0);
Desloc_menos1=(Deltat^2/2)*Acel_0-Deltat*Veloc_0+Desloc_0;
A1=(Deltat^2)*M^-1;
A2=C/Deltat;
cte=1000;

```

```

% 6.Primeiro Passo de Tempo

Fe_0=Fexcit(:,1)-C*Veloc_0-K*Desloc_0;
Desloc_1=2*Desloc_0-Desloc_menos1+A1*Fe_0;
Fe_1=Fexcit(:,2)-A2*(Desloc_1-Desloc_0)-K*Desloc_1;
Desloc_2satr=2*Desloc_1-Desloc_0+A1*Fe_1;
Veloc_1satr=(Desloc_2satr-Desloc_0)/(2*Deltat);
Fa_1satramortecedor=Fatrito*tanh(cte*Veloc_1satr);
Fa_1satrandar=Fa_1satramortecedor;
Desloc_2catr=2*Desloc_1-Desloc_0+A1*(Fe_1-Fa_1satrandar);
Veloc_1catr=(Desloc_2catr-Desloc_0)/(2*Deltat);
Fa_1catramortecedor=Fatrito*tanh(cte*Veloc_1catr);
Fa_1catrandar=Fa_1catramortecedor;
Desloc_2verd=2*Desloc_1-Desloc_0+A1*(Fe_1-Fa_1catrandar);
Fe_2=Fexcit(:,3)-A2*(Desloc_2verd-Desloc_1)-K*Desloc_2verd;

% 7.Demais Passos de Tempo

Desloc_nmenos1verd=Desloc_2verd;
Desloc_nmenos2verd=Desloc_1;
Fe_nmenos1=Fe_2;
for n=3:1:(length(Fexcit)-1);
    Desloc_nsatr=2*Desloc_nmenos1verd-Desloc_nmenos2verd+A1*Fe_nmenos1;
    Veloc_nmenos1satr=(Desloc_nsatr-Desloc_nmenos2verd)/(2*Deltat);
    Fa_nmenos1satramortecedor=Fatrito*tanh(cte*Veloc_nmenos1satr);
    Fa_nmenos1satrandar=Fa_nmenos1satramortecedor;
    Desloc_ncatr=2*Desloc_nmenos1verd-Desloc_nmenos2verd+A1*(Fe_nmenos1-
Fa_nmenos1satrandar);
    Veloc_nmenos1catr=(Desloc_ncatr-Desloc_nmenos2verd)/(2*Deltat);
    Fa_nmenos1catramortecedor=Fatrito*tanh(cte*Veloc_nmenos1catr);
    Fa_nmenos1catrandar=Fa_nmenos1catramortecedor;
    Desloc_nverd(:,n-2)=2*Desloc_nmenos1verd-
Desloc_nmenos2verd+A1*(Fe_nmenos1-Fa_nmenos1catrandar);
    Fe_n=Fexcit(:,n+1)-A2*(Desloc_nverd(:,n-2)-Desloc_nmenos1verd)-
K*Desloc_nverd(:,n-2);
    Desloc_nmenos2verd=Desloc_nmenos1verd;
    Desloc_nmenos1verd=Desloc_nverd(:,n-2);
    Fe_nmenos1=Fe_n;
end
DeslocamentosComAtr=[Desloc_0 Desloc_1 Desloc_2verd Desloc_nverd];
for n=1:1:(length(Fexcit)-2);
    Veloc_n(:,n)=(DeslocamentosComAtr(:,n+2)-
DeslocamentosComAtr(:,n))/(2*Deltat);
end
VelocidadesComAtr=[Veloc_0 Veloc_n];
for n=1:1:(length(Fexcit)-2);
    Acel_n(:,n)=(DeslocamentosComAtr(:,n+2)-
2*DeslocamentosComAtr(:,n+1)+DeslocamentosComAtr(:,n))/(Deltat^2);
end
AceleracoesComAtr=[Acel_0 Acel_n];

% 8.Gráficos de Resposta do Sistema

Tempo=0:Deltat:Deltat*(length(Fexcit)-1);
figure
plot(Tempo,Fexcit,'m-')
title('\fontsize{12}\bf Força de Excitação')
xlabel('\fontsize{11}\bf Tempo (s)')
ylabel('\fontsize{11}\bf Força (N)')
figure
plot(Tempo,DeslocamentosComAtr(6,:), 'b-')
title('\fontsize{12}\bf Resposta em Termos de Deslocamento')
xlabel('\fontsize{11}\bf Tempo (s)')

```

```

ylabel('\fontsize{11}\bf Deslocamento (m)')
figure
plot(Tempo(:,1:end-1),VelocidadesComAtr(6,:),'r-')
title('\fontsize{12}\bf Resposta em Termos de Velocidade')
xlabel('\fontsize{11}\bf Tempo (s)')
ylabel('\fontsize{11}\bf Velocidade (m/s)')
figure
plot(Tempo(:,1:end-1),AceleracoesComAtr(6,:),'g-')
title('\fontsize{12}\bf Resposta em Termos de Aceleração')
xlabel('\fontsize{11}\bf Tempo (s)')
ylabel('\fontsize{11}\bf Aceleração (m/s2)')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%FIM%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

### 11.3.3. PROGRAMA “MDOFAMORTINCLINADO”

A seguir demonstra-se a rotina do programa desenvolvido em Matlab para a obtenção da resposta da estrutura devido à instalação de dissipadores de energia por atrito, dispostos de maneira usual, como contraventamentos diagonais.

```

% Programa: MDOFAMortInclinado

% Programa que calcula a resposta de um sistema de vários graus de
% liberdade, com amortecimento viscoso, com amortecedores por
% atrito colocados inclinadamente como contraventamento diagonal,
% substituindo a função sinal descontínua pela função contínua da
% tangente hiperbólica, submetido a uma excitação qualquer,
% utilizando o método de diferenças finitas.

% Programado por: Letícia Fleck Fadel Miguel
% Última atualização: 15/10/2001.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Dados de Entrada

% 1) Matriz de Massa M
% 2) Matriz de Rigidez K
% 3) Número de Graus de Liberdade GDL
% 4) Razão de Amortecimento RazaoAmort
% 5) Aceleração da Excitação AcelExcit
% 6) Intervalo de Tempo Deltat

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear
close all
clc
path(path,'C:\Users\Letícia\Mestrado\Dissertação\Cap8')
load Dados6GDLCaucete

% 1.Determinação das Freqüências Naturais e Modos de Vibração

[AutoVetores,AutoValores]=eig(K,M);
FreqNat=sqrt(AutoValores);

w1=FreqNat(6,6); f1=w1/(2*pi) mod01=AutoVetores(:,6)
w2=FreqNat(5,5); f2=w2/(2*pi) mod02=AutoVetores(:,5)
w3=FreqNat(4,4); f3=w3/(2*pi) mod03=AutoVetores(:,4)

```

```

w4=FreqNat(3,3);          f4=w4/(2*pi)          modo4=AutoVetores(:,3)
w5=FreqNat(2,2);          f5=w5/(2*pi)          modo5=AutoVetores(:,2)
w6=FreqNat(1,1);          f6=w6/(2*pi)          modo6=AutoVetores(:,1)

% 2.Determinação da Matriz de Amortecimento C

Mr=AutoVetores'*M*AutoVetores;
Kr=AutoVetores'*K*AutoVetores;
A=[1 w1^2; 1 w2^2];
B=2*RazaoAmort*[w1; w2];
alfas=A\B;
alfa10=alfas(1,1);
alfa11=alfas(2,1);
Cr=alfa10*Mr+alfa11*Kr;
C=(AutoVetores')^-1*Cr*(AutoVetores)^-1;

% 3.Determinação da Força de Excitação

Fexcit=diag(M)*AcelExcit';
Fexcit=[Fexcit zeros(GDL,1438)];

% 4.Determinação da Força de Atrito

Fatrito=3500;

% 5.Inicialização do Método de Diferenças Finitas

if Deltat >= (2/w6);
    disp('Diminuir o intervalo de tempo - Deltat')
elseif Deltat < (2/w6);
    disp('Deltat está ok!')
end
Desloc_0=zeros(GDL,1);
Veloc_0=zeros(GDL,1);
Acel_0=M^-1*(Fexcit(:,1)-C*Veloc_0-K*Desloc_0);
Desloc_menos1=(Deltat^2/2)*Acel_0-Deltat*Veloc_0+Desloc_0;
A1=(Deltat^2)*M^-1;
A2=C/Deltat;
cte=1000;
xi=4;
yi=3;
Propr=xi/((xi^2+yi^2)^0.5);

% 6.Primeiro Passo de Tempo

Fe_0=Fexcit(:,1)-C*Veloc_0-K*Desloc_0;
Desloc_1=2*Desloc_0-Desloc_menos1+A1*Fe_0;
Fe_1=Fexcit(:,2)-A2*(Desloc_1-Desloc_0)-K*Desloc_1;
Desloc_2satr=2*Desloc_1-Desloc_0+A1*Fe_1;
Veloc_1satr=(Desloc_2satr-Desloc_0)/(2*Deltat);
DeltaXponto_1satr=[Veloc_1satr(1,:); Veloc_1satr(2,:)-Veloc_1satr(1,:);
Veloc_1satr(3,:)-Veloc_1satr(2,:); Veloc_1satr(4,:)-Veloc_1satr(3,:);
Veloc_1satr(5,:)-Veloc_1satr(4,:); Veloc_1satr(6,:)-Veloc_1satr(5,:)];
Fa_1sattramortecedor=Fatrito*tanh(cte*DeltaXponto_1satr);
Fa_1sattrhoriz=Fa_1sattramortecedor*Propr;
Fa_1sattrandar=[(Fa_1sattrhoriz(1,:)-Fa_1sattrhoriz(2,:));
(Fa_1sattrhoriz(2,:)-Fa_1sattrhoriz(3,:)); (Fa_1sattrhoriz(3,:)-
Fa_1sattrhoriz(4,:)); (Fa_1sattrhoriz(4,:)-Fa_1sattrhoriz(5,:));
(Fa_1sattrhoriz(5,:)-Fa_1sattrhoriz(6,:)); (Fa_1sattrhoriz(6,:))];
Desloc_2catr=2*Desloc_1-Desloc_0+A1*(Fe_1-Fa_1sattrandar);
Veloc_1catr=(Desloc_2catr-Desloc_0)/(2*Deltat);
DeltaXponto_1catr=[Veloc_1catr(1,:); Veloc_1catr(2,:)-Veloc_1catr(1,:);
Veloc_1catr(3,:)-Veloc_1catr(2,:); Veloc_1catr(4,:)-Veloc_1catr(3,:);
Veloc_1catr(5,:)-Veloc_1catr(4,:); Veloc_1catr(6,:)-Veloc_1catr(5,:)];

```

```

Fa_1catramortecedor=Fatrito*tanh(cte*DeltaXponto_1catr);
Fa_1catrhoriz=Fa_1catramortecedor*Propr;
Fa_1catrandar=[(Fa_1catrhoriz(1,:)-Fa_1catrhoriz(2,:));
(Fa_1catrhoriz(2,:)-Fa_1catrhoriz(3,:)); (Fa_1catrhoriz(3,:)-
Fa_1catrhoriz(4,:)); (Fa_1catrhoriz(4,:)-Fa_1catrhoriz(5,:));
(Fa_1catrhoriz(5,:)-Fa_1catrhoriz(6,:)); (Fa_1catrhoriz(6,:))];
Desloc_2verd=2*Desloc_1-Desloc_0+A1*(Fe_1-Fa_1catrandar);
Fe_2=Fexcit(:,3)-A2*(Desloc_2verd-Desloc_1)-K*Desloc_2verd;

% 7.Demais Passos de Tempo

Desloc_nmenos1verd=Desloc_2verd;
Desloc_nmenos2verd=Desloc_1;
Fe_nmenos1=Fe_2;
for n=3:1:(length(Fexcit)-1);
    Desloc_nsatr=2*Desloc_nmenos1verd-Desloc_nmenos2verd+A1*Fe_nmenos1;
    Veloc_nmenos1satr=(Desloc_nsatr-Desloc_nmenos2verd)/(2*Deltat);
    DeltaXponto_nmenos1satr=[Veloc_nmenos1satr(1,:); Veloc_nmenos1satr(2,:)-
Veloc_nmenos1satr(1,:); Veloc_nmenos1satr(3,:)-Veloc_nmenos1satr(2,:);
Veloc_nmenos1satr(4,:)-Veloc_nmenos1satr(3,:); Veloc_nmenos1satr(5,:)-
Veloc_nmenos1satr(4,:); Veloc_nmenos1satr(6,:)-Veloc_nmenos1satr(5,:)]];
    Fa_nmenos1sattramortecedor=Fatrito*tanh(cte*DeltaXponto_nmenos1satr);
    Fa_nmenos1sattrhoriz=Fa_nmenos1sattramortecedor*Propr;
    Fa_nmenos1sattrandar=[(Fa_nmenos1sattrhoriz(1,:)-
Fa_nmenos1sattrhoriz(2,:)); (Fa_nmenos1sattrhoriz(2,:)-
Fa_nmenos1sattrhoriz(3,:)); (Fa_nmenos1sattrhoriz(3,:)-
Fa_nmenos1sattrhoriz(4,:)); (Fa_nmenos1sattrhoriz(4,:)-
Fa_nmenos1sattrhoriz(5,:)); (Fa_nmenos1sattrhoriz(5,:)-
Fa_nmenos1sattrhoriz(6,:)); (Fa_nmenos1sattrhoriz(6,:))];
    Desloc_ncatr=2*Desloc_nmenos1verd-Desloc_nmenos2verd+A1*(Fe_nmenos1-
Fa_nmenos1sattrandar);
    Veloc_nmenos1catr=(Desloc_ncatr-Desloc_nmenos2verd)/(2*Deltat);
    DeltaXponto_nmenos1catr=[Veloc_nmenos1catr(1,:); Veloc_nmenos1catr(2,:)-
Veloc_nmenos1catr(1,:); Veloc_nmenos1catr(3,:)-Veloc_nmenos1catr(2,:);
Veloc_nmenos1catr(4,:)-Veloc_nmenos1catr(3,:); Veloc_nmenos1catr(5,:)-
Veloc_nmenos1catr(4,:); Veloc_nmenos1catr(6,:)-Veloc_nmenos1catr(5,:)]];
    Fa_nmenos1catramortecedor=Fatrito*tanh(cte*DeltaXponto_nmenos1catr);
    Fa_nmenos1catrhoriz=Fa_nmenos1catramortecedor*Propr;
    Fa_nmenos1catrandar(:,n-2)=[(Fa_nmenos1catrhoriz(1,:)-
Fa_nmenos1catrhoriz(2,:)); (Fa_nmenos1catrhoriz(2,:)-
Fa_nmenos1catrhoriz(3,:)); (Fa_nmenos1catrhoriz(3,:)-
Fa_nmenos1catrhoriz(4,:)); (Fa_nmenos1catrhoriz(4,:)-
Fa_nmenos1catrhoriz(5,:)); (Fa_nmenos1catrhoriz(5,:)-
Fa_nmenos1catrhoriz(6,:)); (Fa_nmenos1catrhoriz(6,:))];
    Desloc_nverd(:,n-2)=2*Desloc_nmenos1verd-
Desloc_nmenos2verd+A1*(Fe_nmenos1-Fa_nmenos1catrandar(:,n-2));
    Fe_n=Fexcit(:,n+1)-A2*(Desloc_nverd(:,n-2)-Desloc_nmenos1verd)-
K*Desloc_nverd(:,n-2);
    Desloc_nmenos2verd=Desloc_nmenos1verd;
    Desloc_nmenos1verd=Desloc_nverd(:,n-2);
    Fe_nmenos1=Fe_n;
end
DeslocamentosComAtr=[Desloc_0 Desloc_1 Desloc_2verd Desloc_nverd];
for n=1:1:(length(Fexcit)-2);
    Veloc_n(:,n)=(DeslocamentosComAtr(:,n+2)-
DeslocamentosComAtr(:,n))/(2*Deltat);
end
VelocidadesComAtr=[Veloc_0 Veloc_n];
for n=1:1:(length(Fexcit)-2);
    Acel_n(:,n)=(DeslocamentosComAtr(:,n+2)-
2*DeslocamentosComAtr(:,n+1)+DeslocamentosComAtr(:,n))/(Deltat^2);
end
AceleracoesComAtr=[Acel_0 Acel_n];

```



