

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Introdução às teorias KAM e KAM-fracas

Júlio Cesar Rodrigues

Trabalho de Conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Diego Marcon Farias

Porto Alegre, RS
Outubro de 2022

Rodrigues, Júlio Cesar

Introdução às teorias KAM e KAM-fraca / Júlio Cesar
Rodrigues. -- 2022.
50f.

Orientador: Dr. Diego Marcon Farias

Trabalho (Conclusão de curso) - Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Instituto de Física, Porto Alegre, BR-RS,
2022.

Mecânica Lagrangiana, Mecânica Hamiltoniana, Sistemas
Perturbativos, Teoria KAM, Teoria KAM-fraca. I. Marcon, Diego,
orient.

Resumo

Ao longo deste trabalho, introduzimos a Teoria de Kolmogorov-Arnold-Moser e um de seus desenvolvimentos subsequentes, a chamada Teoria KAM-fracas. Em um primeiro momento, apresentamos os fundamentos da mecânica Lagrangiana e Hamiltoniana, desde as definições básicas até a Teoria de Hamilton-Jacobi e as variáveis de ação-ângulo, úteis para o estudo de sistemas periódicos. Após isso, apresentamos o Teorema de Liouville de preservação de volume e o Teorema de Liouville-Arnold-Jost que serve como uma caracterização de sistemas integráveis. Em seguida, introduzimos a teoria de perturbação, examinando o problema dos pequenos divisores e sua íntima relação com o Teorema KAM, que é enunciado após o problema de Siegel de convergência de séries de Fourier. Ao final, é feita uma exposição da Teoria KAM-fracas, iniciando com os conceitos de valores críticos para o Hamiltoniano e os operadores do semigrupo de Lax-Oleinik. Uma atenção especial deve ser dada ao Teorema KAM-fraco, com o qual as seções seguintes são ligadas. Nestas, apresentamos a definição de barreira de Peierls e de conjuntos de Aubry, além de alguns resultados sobre a regularidade de soluções KAM-fracas.

Palavras-chave: Mecânica Lagrangiana, Mecânica Hamiltoniana, Sistemas Perturbativos, Teoria KAM, Teoria KAM-fracas.

Abstract

In this work, we introduce the Theory of Kolmogorov-Arnold-Moser and one of its subsequent developments, the Weak-KAM Theory. In a first moment, we present the principles of Lagrangian and Hamiltonian mechanics, from the basic definitions to the Hamilton-Jacobi Theory and the action-angle variables, which are useful to study periodic systems. Next, the Liouville Theorem of volume preservation and the Liouville-Arnold-Jost Theorem that provides characterization on integrable systems are presented. Then, we introduce a perturbation theory, examining the small-divisors problem and its relation to KAM Theorem, that is stated soon after the Siegel's problem on the convergence of Fourier series. Finally, present elements of the Weak-KAM theory, starting with with concepts like critical values of Hamiltonians and the Lax-Oleinik semigroup operators. Special attention is given to the Weak-KAM Theorem, which is related to topics such as the Peierls barrier and Aubry sets, in addition to some results on the regularity of Weak-KAM solutions.

Keywords: Lagrangian Mechanics, Hamiltonian Mechanics, Perturbation Theory, KAM Theory, Weak-KAM Theory.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Princípios da mecânica Lagrangiana e Hamiltoniana	3
2.1	Lagrangianos, Equação de Euler-Lagrange e minimizantes de ação	3
2.2	Transformação de Legendre, Hamiltonianos e Equações de Hamilton	6
2.3	Lagrangianos e Hamiltonianos de Tonelli	9
2.4	Mudança de variáveis em sistemas Hamiltonianos	10
2.5	Teoria de Hamilton-Jacobi	13
2.6	Variáveis ação-ângulo	15
3	Teoria KAM	19
3.1	Teorema de Liouville	19
3.2	Teoria de perturbação	22
3.2.1	Perturbações em sistemas integráveis	22
3.2.2	Os coeficientes de Fourier	24
3.2.3	O problema dos pequenos divisores	25
3.3	Teoria KAM	26
3.3.1	O problema de Siegel	26
3.3.2	O Teorema KAM	27
4	Teoria KAM-fraca	31
4.1	Valores críticos para o Hamiltoniano e subsoluções críticas	31
4.2	Semigrupo de Lax-Oleinik	34
4.3	O Teorema KAM-fraco	38
4.4	A barreira de Peierls	41
4.5	Conjuntos de Aubry	43
4.6	Regularidade de soluções KAM-fracas	46
5	Conclusão	49
	Bibliografia	51

Capítulo 1

Introdução

No século XVII, Isaac Newton apresentou pela primeira vez em sua forma matemática usual o problema de três corpos que interagem entre si sujeitos à atração gravitacional¹. Inicialmente, o problema buscava analisar a influência que corpos celestes exerciam um sobre o outro, sendo que o principal exemplo utilizado era o do sistema Terra-Lua-Sol. Naturalmente, a quantidade de corpos em mútua interação foi estendida para certo valor $n \geq 3$, constituindo um caso geral chamado *problema de n corpos*, que pode ser observado, por exemplo, no estudo da estabilidade do sistema solar. No século XIX, matemáticos famosos como Weierstrass, Mittag-Leffler e Kovalevskaya calcularam uma solução em série para o problema de n -corpos e imaginavam que ela seria convergente. Em 1889, Mittag-Leffler é solicitado pelo rei Oscar II da Suécia a sugerir algumas questões científicas cujas soluções seriam premiadas em homenagem ao seu sexagésimo aniversário, sendo que uma delas foi justamente a respeito da convergência das séries do problema de n -corpos. A solução premiada foi elaborada por Henri Poincaré, que demonstrou que as séries não são convergentes no sentido clássico, testando também diversas condições iniciais e especulando que as séries seriam divergentes em quase todo ponto. O trabalho de Poincaré foi mais longe nessa área, conhecida como Teoria de Perturbação Hamiltoniana, que considera sistemas Hamiltonianos integráveis associados a algum tipo de perturbação. Já no século XX, Andrei Kolmogorov enuncia um teorema que afirma a permanência de certo sentido de integrabilidade para perturbações suficientemente pequenas. Em termos mais técnicos, é afirmado que a maioria dos toros invariantes do espaço de fase não são destruídos por perturbações suficientemente pequenas no Hamiltoniano integrável. Esse teorema foi demonstrado e complementado por

¹Uma descrição breve sobre o problema dos três corpos pode ser vista em https://en.wikipedia.org/wiki/Three-body_problem.

Vladimir Arnold e Jürgen Moser, ficando conhecido como Teorema KAM. Em um período mais recente, foram propostas novas teorias para estudar como os sistemas se comportam com perturbações que não são mais tão pequenas, buscando algum tipo de estrutura que é preservada. Essa é a chamada Teoria KAM-fraca, desenvolvida principalmente por Albert Fathi e John Mather, abandonando o método perturbativo visto na Teoria KAM e adotando uma abordagem baseada em métodos de sistemas dinâmicos.

Ao longo deste trabalho, desejamos introduzir os conceitos principais para entender o Teorema KAM em sua forma clássica, além de fazer uma exposição da Teoria KAM-fraca. Para isso, oferece-se no Capítulo 2 uma recapitulação de conceitos básicos de mecânica Lagrangiana e Hamiltoniana, baseada principalmente no livro de Arnold [1].

No Capítulo 3, partimos da caracterização de sistemas integráveis promovida pelo Teorema de Liouville-Arnold-Jost para, posteriormente, oferecer uma exposição das principais ideias da Teoria de Perturbação Hamiltoniana. Em seguida, apresentamos o Teorema KAM em sua forma clássica, embora não seja oferecida uma demonstração. Seguimos o artigo de L. Evans [2] e o livro de Dumas [3], que também foi muito útil para fornecer material histórico e noções intuitivas.

Finalmente, a Teoria KAM-fraca é vista no Capítulo 4, em que são definidos o conjunto de subsoluções críticas, os operadores do semigrupo de Lax-Oleinik, a barreira de Peierls e o conjunto de Aubry. Também são apresentados o Teorema KAM-fraco (também conhecido como Teorema de Fathi) e alguns resultados de regularidade. O artigo de Rifford [4] foi seguido de perto: a ordem temática e boa parte das demonstrações foram adotadas aqui.

Capítulo 2

Princípios da mecânica Lagrangiana e Hamiltoniana

Antes de tratar das teorias mais avançadas, descrevemos as principais ideias associadas às descrições Lagrangiana e Hamiltoniana da mecânica. Os assuntos tratados ao longo deste capítulo podem ser encontrados nas referências [1, 5, 6, 7]. Para maior generalidade, definimos as funções em uma variedade diferenciável M que seja útil para nosso propósito: assumimos que M é uma variedade Riemanniana suave, conexa, compacta e sem fronteira. Ao longo do texto, denotamos por q_i cada coordenada generalizada, \dot{q}_i a respectiva velocidade generalizada, p_i o momento generalizado e \dot{p}_i a força generalizada. Chamamos de TM o fibrado tangente de M e T^*M o fibrado cotangente. Para $q \in M$, denotamos os elementos de T_qM por \dot{q} e os de T_q^*M por p . Assim, $(q, \dot{q}) \in TM$ e $(q, p) \in T^*M$. As coordenadas q_i e os momentos generalizados p_i formam um conjunto chamado de *coordenadas canônicas*, podendo descrever um sistema em qualquer instante de tempo.

2.1 Lagrangianos, Equação de Euler-Lagrange e minimizantes de ação

Com os conceitos de variedades e fibrado tangente, pode ser definida a função Lagrangiana, da qual enunciaremos algumas propriedades.

Definição 2.1.1. Chamamos de *Lagrangiano* uma função $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

¹Vale ressaltar que, para que uma função f seja de classe C^n , ela deve possuir derivadas contínuas $f', f'', \dots, f^{(n)}$.

Seja \mathcal{F} o espaço das curvas γ absolutamente contínuas definidas em um intervalo $[a, b]$ e com imagem em M , dizemos que $A_L : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ expresso por

$$A_L(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \quad (2.1)$$

é o funcional de ação de L agindo sobre caminhos $\gamma \in \mathcal{F}$.

Para cada função L , pode ser associada uma equação diferencial de segunda ordem chamada *Equação de Euler-Lagrange*, que desempenha papel fundamental na obtenção de curvas que minimizem o funcional de ação.

Definição 2.1.2. A Equação de Euler-Lagrange associada ao Lagrangiano L é dada por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (2.2)$$

Observação 2.1.1. Note que, enquanto \dot{q} representa a velocidade (derivada da posição q com relação ao tempo) quando está se referindo ao vetor pertencente ao espaço tangente à M no ponto q , não podemos dar esse significado ao mesmo símbolo quando escrevemos $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Nesse caso, tratamos de uma variável independente.

A seguir, estudamos as curvas minimizantes do funcional de ação. Em particular, mostramos que tais curvas satisfazem a Equação de Euler-Lagrange.

Teorema 2.1.1. Se $\gamma \in \mathcal{F}$ é uma curva com as extremidades fixadas e é minimizante de A_L em \mathcal{F} , então

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)).$$

Demonstração. Considere $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ uma curva em \mathcal{F} tal que $\alpha(a) = 0 = \alpha(b)$. Para certo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, temos $(\gamma + \varepsilon\alpha) \in \mathcal{F}$ e

$$\begin{cases} (\gamma + \varepsilon\alpha)(a) = \gamma(a), \\ (\gamma + \varepsilon\alpha)(b) = \gamma(b). \end{cases}$$

Por hipótese, $A_L(\gamma) \leq A_L(\gamma + \varepsilon\alpha)$, isto é, a função $g : \varepsilon \mapsto A_L(\gamma + \varepsilon\alpha)$ possui valor mínimo em $\varepsilon = 0$. Utilizando a definição do funcional de ação,

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b L(\gamma + \varepsilon\alpha, \dot{\gamma} + \varepsilon\dot{\alpha}) dt \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\implies \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q}(\gamma + \varepsilon\alpha, \dot{\gamma} + \varepsilon\dot{\alpha}) \cdot \alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma + \varepsilon\alpha, \dot{\gamma} + \varepsilon\dot{\alpha}) \cdot \dot{\alpha} \right] \Big|_{\varepsilon=0} dt = 0.$$

Podemos integrar por partes $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{\alpha}$. Note que o termo de fronteira é nulo, pois $\alpha(a) = \alpha(b) = 0$. Consequentemente, aplicando o resultado em $\varepsilon = 0$,

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q}(\gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma, \dot{\gamma}) \right] \alpha dt = 0.$$

Como a curva α é arbitrária, concluímos que

$$\frac{\partial L}{\partial q}(\gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma, \dot{\gamma}) = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma, \dot{\gamma}). \quad \square$$

O que vimos acima pode ser associado ao chamado *Princípio da Mínima Ação*, que afirma que o movimento realizado pelo sistema em um intervalo de tempo $t_2 - t_1$ é de tal forma que o funcional de ação A_L é minimizado. Esta nomenclatura é usual, apesar de o movimento ser dado ao longo de um ponto crítico da ação, isto é, $\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = 0$.

É possível relacionar as forças e o momento generalizados com o Lagrangiano através das *Equações de Lagrange*, que surgem ao comparar a Equação de Newton para a dinâmica

$$\frac{dp}{dt} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$$

com a Equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Definição 2.1.3. Chamamos um Lagrangiano de natural se ele é da forma $L = T - U$, sendo T e U respectivamente as energias cinética e potencial.

Dadas as energias potencial $U = U(q)$ e cinética $T = \sum_i \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2}$, considerando um sistema que obedeça à Equação de Newton escrita acima, vemos que $L = T - U$ é um minimizante do funcional de ação. De fato, $\partial L / \partial \dot{q} = \partial T / \partial \dot{q}$ e $\partial L / \partial q = -\partial U / \partial q$, isto é, $L = T - U$ obedece à Equação de Euler-Lagrange, como queríamos.

Note que essa comparação implica que um um Lagrangiano na forma $L(q, \dot{q}) = T - U$ está sujeito às seguinte relações:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i = p_i,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{dp}{dt}.$$

Assim, encontramos duas equações que relacionam o momento generalizado com derivadas do Lagrangiano, as quais chamamos de *Equações de Lagrange*, isto é,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (2.3)$$

2.2 Transformação de Legendre, Hamiltonianos e Equações de Hamilton

A Transformação de Legendre é uma ferramenta que possibilita transformar uma função convexa definida em um espaço vetorial em outra que seja do espaço dual. A ideia consiste em encontrar uma função que maximize a distância em dado ponto p entre a função original f e a reta que passa pela origem e possui inclinação p . Assim, buscamos por uma função $g(p) = px - f(x)$ que possua um máximo em x no ponto $x(p)$. Formalizamos esse conceito ao longo desta seção.

Definição 2.2.1. *Dado um subespaço X de um espaço vetorial real, dizemos que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa se*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall t \in [0, 1], \forall x, y \in X.$$

Dizemos que a função f é uniformemente convexa em um ponto $x \in X$ se $\exists \lambda > 0$ tal que

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) - \frac{\lambda t(1-t)}{2} |x - y|^2 \quad \forall y \in X, \forall t \in [0, 1].$$

Alguns resultados para funções convexas que podem ser úteis são enunciados ao longo desta seção.

Teorema 2.2.1. *Toda função uniformemente convexa de classe C^2 possui gradiente invertível sobre a imagem (a matriz das derivadas segundas, chamada Hessiana, é positiva definida).*

Demonstração. Se f é uniformemente convexa, podemos reagrupar $(1 - t)x + ty$ na forma $x + t(y - x)$ e notar que $(1 - t) \leq 1$ para obter

$$\frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x) - \frac{\lambda}{2}|x - y|^2.$$

Note que, ao fazer $t \rightarrow 0$, o lado esquerdo da inequação acima representa o gradiente de f na direção x aplicado em $y - x$. Logo,

$$f(x) + f'(x) \cdot (y - x) \leq f(y) - \frac{\lambda}{2}|y - x|^2.$$

É possível repetir o procedimento alterando a posição de x e y para que a mesma inequação seja válida com essas posições trocadas. Somando ambas, alcança-se

$$[f'(y) - f'(x)] \cdot (y - x) \geq \lambda|x - y|^2.$$

Dado $v \in X$, se escrevermos $y - x = tv$, então

$$\left\langle \frac{\nabla f(x + tv) - \nabla f(x)}{t}, v \right\rangle \geq \lambda v^2 \implies \langle \nabla^2 f(x) \cdot v, v \rangle \geq \lambda|v|^2.$$

Portanto, $\nabla^2 f(x) \geq \lambda I$, isto é, a Hessiana é positiva definida. \square

Definição 2.2.2. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente convexa com domínio em um espaço X . A Transformação de Legendre (também chamada de Transformação de Fenchel-Legendre) \mathcal{L} da função f é expressa por*

$$f^*(y) = \sup_{x \in X} \{\langle y, x \rangle - f(x)\}.$$

Note que f^* é uma função definida no dual de X , isto é, $f^* : X^* \rightarrow \mathbb{R}$. Portanto, y é um funcional linear que leva vetores de X em \mathbb{R} . Em particular, para $X = TM$, $f = L$, a Transformação de Legendre associada ao Lagrangiano $L(q, \dot{q})$ é

$$H(q, p) := L^*(q, p) = \sup_{\dot{q} \in T_q M} \{\langle p, \dot{q} \rangle - L(q, \dot{q})\}. \quad (2.4)$$

Chamamos $H(q, p)$ de Hamiltoniano. É possível encontrar uma expressão mais simples para a equação (2.4) obtendo \dot{q} que maximiza a função

$$\begin{aligned} g : T_q M &\longrightarrow T_q^* M \\ \dot{q} &\longmapsto \langle p, \dot{q} \rangle - L(q, \dot{q}). \end{aligned}$$

Em \dot{q} que maximiza g , o valor de $g'(\dot{q})$ é nulo, isto é,

$$g'(\dot{q}) = p'(\dot{q}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) = p'(\dot{q}).$$

Como consideramos L uniformemente convexa, sua Hessiana é positiva definida e, portanto, $\partial L/\partial \dot{q}$ é invertível em \dot{q} . Assim, podemos escrever \dot{q} como função de q e p , isto é, $\dot{q}(q, p)$. Consequentemente,

$$H(q, p) = \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}), \dot{q} \right\rangle - L(q, \dot{q}). \quad (2.5)$$

Note que a Transformação de Legendre pode ser invertida considerando p como função de q e \dot{q} , de modo que $L(q, \dot{q}) = \sup\{\langle p, \dot{q} \rangle - H(q, p)\}$. Além disso, a equação (2.4) implica que $H(q, p) + L(q, \dot{q}) \geq \langle p, \dot{q} \rangle$, um resultado conhecido como *Desigualdade de Fenchel* (ou de *Fenchel-Legendre*).

Se partirmos das Equações de Lagrange, podemos obter novas relações entre \dot{p} , \dot{q} e H , que são chamadas *Equações de Hamilton*.

Teorema 2.2.2. *As Equações de Lagrange são equivalentes às Equações de Hamilton*

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}. \end{aligned}$$

Demonstração. Podemos inverter a Transformação de Legendre para alcançarmos

$$L(q, \dot{q}) = p\dot{q} - H(q, p). \quad (2.6)$$

Pela Equação de Lagrange para a força generalizada,

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}[p\dot{q} - H(q, p)] = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

o que mostra a primeira equação. Para a segunda equação, basta derivar (2.6) com respeito a p :

$$\frac{\partial L}{\partial p}(q, \dot{q}) = \frac{\partial p\dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \implies \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad \square$$

2.3 Lagrangianos e Hamiltonianos de Tonelli

Nesta seção, definimos as propriedades de um tipo de funções Lagrangianas e Hamiltonianas que é útil para analisar casos mais gerais, não necessariamente ligados a sistemas mecânicos, mas que os engloba. Apresentamos esse caso mais geral, tarefa que foi simplificada pelo estudo dos princípios elementares dessas funções, como visto nas seções anteriores. Mais detalhes podem ser vistos em [4, 8].

Definição 2.3.1. *Uma função $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada Lagrangiano de Tonelli se possuir as seguintes propriedades:*

1. $L \in C^2(TM)$;
2. L é uniformemente convexa em \dot{q} , isto é, $\partial L^2 / \partial \dot{q}^2$ é positiva definida;
3. L é superlinear em \dot{q} : $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists B(A) \in \mathbb{R}; \quad L(q, \dot{q}) \geq A \|\dot{q}\|_q - B(A)$.

A propriedade da superlinearidade do Lagrangiano significa que a função possui um crescimento mais rápido que qualquer função linear na variável \dot{q} . O exemplo mais tradicional é o Lagrangiano mecânico (que definimos como Lagrangiano natural), associado às energias cinética e potencial na forma $L = T - U$, já estudado acima. Outro exemplo é o de Lagrangianos Riemannianos, definidos em uma variedade Riemanniana TM com métrica g e expressos pela energia cinética, isto é, $L(q, \dot{q}) = \frac{\|\dot{q}\|_g^2}{2} = T$.

Um último exemplo é o de Lagrangianos de Mañé, $L_X(q, \dot{q}) = \frac{\|\dot{q} - X(q)\|_g^2}{2}$, sendo X um campo vetorial C^k em M , $k \geq 2$. O objetivo é fazer uma imersão do fluxo φ_t^X no fluxo de Euler-Lagrange do Lagrangiano.

Já vimos a Transformação de Legendre e sua funcionalidade para levar a função Lagrangiana na função Hamiltoniana, definida no espaço cotangente. A definição de Hamiltoniano de Tonelli é bastante semelhante àquela do Lagrangiano, com exceção do espaço de domínio da função.

Definição 2.3.2. *Uma função $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada Hamiltoniano de Tonelli se:*

1. $H \in C^2(T^*M)$;

2. H é uniformemente convexa em p , isto é, $\partial H^2/\partial p^2$ é positiva definida;
3. H é superlinear em p : $\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists K(C) \in \mathbb{R}; \quad H(q, p) \geq C \|p\|_q - K(C)$.

2.4 Mudança de variáveis em sistemas Hamiltonianos

Para simplificar as contas, aqui utilizamos o espaço de fase bidimensional, isto é, o plano \mathbb{R}^2 . Se um dado sistema possui Hamiltoniano $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, podemos pensar no que ocorre quando é realizada uma mudança de variáveis, isto é, uma aplicação g na forma $g(q, p) = (Q, P)$. Nessas novas variáveis, podemos considerar um Hamiltoniano $K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P))$, e buscamos verificar os casos para os quais K obedece as Equações de Hamilton. Isso pode ser alcançado através do teorema a seguir.

Teorema 2.4.1. *Dados um Hamiltoniano $H(q, p)$ e uma função que atua como uma mudança de coordenadas*

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(q, p) \mapsto (Q, P).$$

inversível, se g preservar a área e a orientação, o Hamiltoniano $K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P))$ é equivalente a H , isto é, ambos possuem as mesmas soluções para as Equações de Hamilton, cada um nas suas respectivas coordenadas.

Demonstração. Para simplificar a notação, denotamos temporariamente a derivada parcial de uma função $f(q, p, t)$ com respeito a q, p ou t respectivamente por f_q, f_p e \dot{f} .

Supomos que $(q(t), p(t))$ é solução da Equação de Hamilton para $H(q, p)$. Afirmamos que, nas hipóteses do teorema, $g(q, p) = (Q, P)$ satisfaz as Equações de Hamilton para $K(Q, P)$. Note que

$$\dot{Q} = Q_q \dot{q} + Q_p \dot{p},$$

$$\dot{P} = P_q \dot{q} + P_p \dot{p}.$$

Pela definição de g , sabemos que

$$Dg(q, p) = \begin{pmatrix} Q_q & Q_p \\ P_q & P_p \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, $(\dot{Q}, \dot{P}) = Dg(q, p) \cdot (\dot{q}, \dot{p})$. Como (q, p) satisfaz as Equações de Hamilton, pode-se utilizar o fato que $H(q, p) = K(Q(q, p), P(q, p))$ e a regra da cadeia para obter

$$\dot{q} = H_p = K_Q Q_p + K_P P_p,$$

$$\dot{p} = -H_q = K_Q Q_q - K_P P_q.$$

Isso pode ser associado ao resultado anterior, com o que alcançamos

$$\dot{Q} = K_P [Q_q P_p - Q_p P_q] = \det Dg(q, p) K_P,$$

$$\dot{P} = -K_Q [Q_q P_p - Q_p P_q] = -\det Dg(q, p) K_Q.$$

Como g é uma aplicação que preserva área, temos $\det Dg(q, p) = 1$. Com isso, concluímos que (Q, P) satisfazem as Equações de Hamilton para o Hamiltoniano $K(Q, P)$. Para a recíproca, utiliza-se a função g^{-1} , que também preserva área e orientação. O argumento é análogo ao que foi utilizado acima. \square

Ainda com relação às mudanças de coordenadas, podemos enunciar o conceito de coordenadas cíclicas, que podem ser úteis no estudo do caso em que o Hamiltoniano só depende de uma das variáveis.

Definição 2.4.1. Dizemos que p é uma coordenada cíclica para o Hamiltoniano $H(q, p)$ se $H(q, p) = H(q)$, isto é, não há dependência em p na função H . O mesmo é dito de q quando $H(q, p) = H(p)$.

Para exemplificar, seja $H(q)$ um Hamiltoniano que depende só da variável q . Pelas Equações de Hamilton, temos que

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

e, assim, concluímos que q é constante.

É possível questionar se existe algum método para encontrar transformações com as quais as Equações de Hamilton continuam sendo obedecidas nas novas variáveis. Isso pode ser respondido com a utilização de uma função geradora de transformação canônica. Para que as novas coordenadas sejam canônicas, o sistema deve obedecer ao Princípio da

Mínima Ação, sendo que o Lagrangiano pode ser obtido através da Transformação inversa de Legendre. Assim,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} P\dot{Q} - K(P, Q)dt = 0,$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} p\dot{q} - H(q, p)dt = 0.$$

Para que isso ocorra, devemos ter

$$\lambda(p\dot{q} - H(q, p)) = P\dot{Q} - K(Q, P) + \frac{ds}{dt}, \quad (2.7)$$

sendo $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a chamada função geradora da transformação canônica g . A função S é útil para trazer informação sobre a transformação somente se metade de suas variáveis são das coordenadas antigas e a outra metade das novas. Consideramos apenas o caso em que $\lambda = 1$. Podemos também considerar que S possivelmente é dependente do tempo. A seguir, enunciamos os quatro tipos de função geradora e, para cada uma, aplicamos (2.7) para encontrar as novas variáveis.

- Função geradora do Tipo 1: $S = S_1(q, Q, t)$.

A equação (2.7) se torna

$$p\dot{q} - H(q, p) = P\dot{Q} - K(Q, P) + S_{1q}\dot{q} + S_{1Q}\dot{Q} + S_t.$$

Como as variáveis são independentes, devemos ter $p = S_{1q}$, $P = S_{1Q}$, $K = H + S_{1t}$.

- Função geradora do Tipo 2: $S = S_2(q, P, t) - QP$.

Aplicando o argumento análogo ao do item anterior, vemos que $p = S_{2q}$, $Q = S_{2P}$, $K = H + S_{2t}$.

- Função geradora do Tipo 3: $S = S_3(p, Q, t) + qp$.

Novamente utilizamos a equação (2.7) e o fato de que as variáveis são independentes para alcançar $P = S_{3Q}$, $q = S_{3p}$, $K = H + S_{3t}$.

- Função geradora do Tipo 4: $S = S_4(p, P, t) + qp - QP$.

Pelo mesmo método dos itens anteriores, obtemos $Q = S_{4P}$, $q = S_{4p}$ e $K = H + S_{4t}$.

2.5 Teoria de Hamilton-Jacobi

Seria conveniente se pudéssemos obter um novo conjunto de coordenadas $(Q, P) \in T^*M$ no qual todas as variáveis de $K(Q, P)$ são cíclicas, isto é, as equações de movimento podem ser descritas por

$$\frac{\partial K}{\partial P_i} = \dot{Q}_i = 0, \quad (2.8)$$

$$-\frac{\partial K}{\partial Q_i} = \dot{P}_i = 0. \quad (2.9)$$

A essas equações, são também associadas condições iniciais para q e p , isto é, $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$. Utilizando uma função geradora $S : T^*M \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, podemos também escrever o novo Hamiltoniano como

$$K(Q, P) = H(q, p) + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Buscamos uma equação que S deve satisfazer para que K seja nulo. Por conveniência, escolhemos uma função geradora que depende de (q, P, t) , isto é, do Tipo 2. Pelo que vimos na seção anterior, devemos ter $p = \frac{\partial S}{\partial q}$. Então, a equação a ser satisfeita é

$$H \left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (2.10)$$

A equação (2.10) é chamada de Equação de Hamilton-Jacobi. Suponha que exista uma solução para essa equação na forma $S(q_1, \dots, q_n, c_1, \dots, c_n, c_{n+1}, t)$, sendo os valores c_i constantes independentes de integração. Tal solução é chamada solução completa da Equação de Hamilton-Jacobi. Como consideramos somente derivadas parciais de S com respeito a t , uma das constantes (digamos, c_{n+1}) é irrelevante, o que nos deixa com apenas n . Pela equação (2.9), sabemos que os valores de P são constantes. Portanto, podemos fazer a

identificação $P_i = c_i$. Denotamos por $c = (c_1, \dots, c_n)$ o vetor cujas n componentes são as constantes c_i .

Como escolhemos uma função geradora do Tipo 2, obtemos os valores de p e Q através das relações vistas anteriormente:

$$p_i = \frac{\partial S(q, c, t)}{\partial q_i},$$

$$Q_i = \frac{\partial S(q, c, t)}{\partial c_i},$$

sendo que Q_i é constante para cada i pela equação (2.8). Assim, podemos denotar $Q = (b_1, \dots, b_n) = b$ e, conseqüentemente, é possível escrever q_i em função de c , b e t pelo teorema da função implícita. Do mesmo modo, podemos escrever p_i em função das mesmas três variáveis. Com isso, obtemos uma solução (q, p) para as Equações de Hamilton.

Um caso particular é quando o Hamiltoniano H não depende do tempo. Nessa situação, podemos usar a função característica do Hamiltoniano, que pode ser expressa na forma

$$W(q, c) = S(q, c, t) + at, \quad (2.11)$$

sendo a uma constante. Essa equação é basicamente uma separação da parte temporal relacionada à função geradora S . Com isso, obtemos a relação

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = c_1. \quad (2.12)$$

Note que essa nova equação não é dependente do tempo. Com isso, é possível mostrar que a função característica $W(q, P)$ gera uma transformação canônica na qual todas as coordenadas são cíclicas. Como W é do Tipo 2, vemos que

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i},$$

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial c_i}.$$

Como a função W não é dependente do tempo, então $K(Q, P) = H(q, p) = c_1$. Esse novo Hamiltoniano obedece às Equações de Hamilton e, portanto,

$$\dot{P}_i = \frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0,$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial c_i} = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 0, & i \neq 1. \end{cases}$$

Nesse caso, podemos definir as constantes $b_i = \frac{\partial W}{\partial c_i}$ e vemos que as soluções são da forma $P_i = c_i$, $Q_1 = t + b_1$ e $Q_i = b_i$, $i \neq 1$.

Passamos agora para o caso em que a Equação de Hamilton-Jacobi pode ser simplificada através de separação de variáveis.

Definição 2.5.1. *Se a função $S(q, c, t)$ pode ser escrita na forma $S(q, c, t) = S_1(q_1, c, t) + S'(q_2, \dots, q_n, c, t)$, dizemos que a variável q_1 é separável.*

Supondo que todas as coordenadas são separáveis, então a Equação de Hamilton-Jacobi é dita completamente separável e possui uma solução S na forma

$$S(q, c, t) = \sum_i S_i(q_i, c, t),$$

o que implica também na separação do Hamiltoniano, que agora pode ser analisado através de n equações separadas. Se o Hamiltoniano não for dependente do tempo, a expressão é ainda mais simplificada, adotando o seguinte formato:

$$H_i \left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, c_1, \dots, c_n \right) = c_1. \quad (2.13)$$

Esse caso separável e não dependente do tempo é o que será considerado a partir de agora. Mais detalhes sobre a Teoria de Hamilton-Jacobi podem ser consultados em [5].

2.6 Variáveis ação-ângulo

Para esta seção, utilizamos a exposição feita por Lemos em [7]. Detalhes adicionais podem ser consultados nessa referência. Um conjunto de variáveis (I, φ) que oferece suporte ao estudo de problemas nos quais o movimento é periódico é o de ação-ângulo. A coordenada φ representa o ângulo (como em coordenadas polares) do espaço de fase, enquanto I é chamada de ação e pode ser associada à área da região com energia total constante E , limitada por uma trajetória periódica em torno de um ponto de equilíbrio. Note que essa

construção é análoga a toros invariantes no espaço de fase, o que é útil para o estudo de sistemas integráveis e outros tópicos que são abordados no Capítulo 3.

As variáveis de ação em um sistema separável e periódico de n graus de liberdade podem ser definidas pela expressão

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i. \quad (2.14)$$

É possível escrever o Hamiltoniano unicamente em função das variáveis de ação, sendo que é comum utilizar a notação $K(I)$ para representar esse Hamiltoniano transformado. Essa mudança é possível pois I_i pode ser escrito em função dos valores c_1, \dots, c_n e, além disso, podemos inverter essa relação e escrever c_1 em função das variáveis de ação, isto é, $c_1(I_1, \dots, I_n)$. Isso implica na possibilidade de expressar o Hamiltoniano na forma desejada pela equação (2.13), de forma que

$$K(I_1, \dots, I_n) = H(I_1, \dots, I_n) = c_1(I_1, \dots, I_n).$$

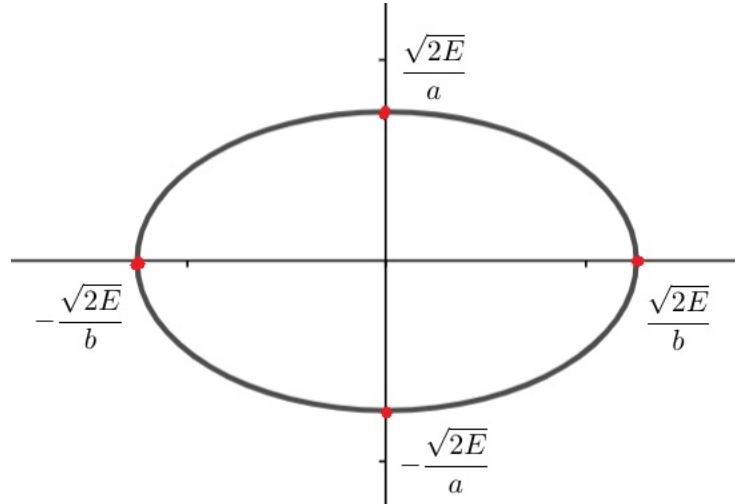
Como $I = (I_1, \dots, I_n)$ e $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ formam um par de coordenadas canônicas através da função característica $W(q, I)$, o novo Hamiltoniano $K(I)$ obedece às Equações de Hamilton. Assim, vemos que a coordenada I não varia com o tempo, enquanto φ varia entre $[0, 2\pi]$ de maneira constante, dependendo apenas do valor de I . De fato,

$$\frac{dI_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \varphi_i} = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial I_i} = \omega(I_i). \quad (2.16)$$

Assim, vemos que o ângulo φ_i pode ser expresso diretamente por $\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \omega(I_i)t$.

Um exemplo para a construção dessas variáveis pode ser dado pelo oscilador harmônico bidimensional cujo Hamiltoniano é $H(q, p) = \frac{a^2 p^2}{2} + \frac{b^2 q^2}{2}$, sendo a e b constantes. Para um nível de energia constante $H = E$, é possível escrever p em função de q como $p = \frac{\sqrt{2E - b^2 q^2}}{a}$. Note que, no caso em questão, a variável de ação I é a área da elipse centrada na origem com extremidades no eixo vertical em $\frac{\sqrt{2E}}{a}$ e $-\frac{\sqrt{2E}}{a}$ e extremidades no eixo horizontal fixadas em $\frac{\sqrt{2E}}{b}$ e $-\frac{\sqrt{2E}}{b}$. Um esboço da região que definimos pode ser visto na figura a seguir.



A variável de ação pode ser calculada pela expressão (2.14). Pela simetria do problema, podemos multiplicar a equação original por dois, visto que a área positiva e negativa devem ser consideradas, e utilizar os valores máximos do eixo horizontal da elipse como limites de integração. Com isso, obtemos

$$I = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{a} \int_{-\frac{\sqrt{2E}}{b}}^{\frac{\sqrt{2E}}{b}} \sqrt{2E - b^2 q^2} dq = \frac{2E}{ab\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du$$

$$\implies I = \frac{E}{ab}.$$

Consequentemente, aplicando a equação (2.16), concluímos que $\dot{\varphi} = ab = \omega(I)$ é a frequência da oscilação, enquanto a variável ângulo pode ser expressa por $\varphi = \varphi(0) + \omega(I)t$.

Capítulo 3

Teoria KAM

Para enunciar os principais resultados da Teoria KAM, é preciso, primeiramente, fazer uma breve recapitulação sobre sistemas integráveis, incluindo o conhecido Teorema de Liouville-Arnold-Jost e suas consequências. Em seguida, tratamos das perturbações em sistemas integráveis e o Teorema KAM propriamente dito. Boa parte do que se segue pode ser encontrado com mais detalhes em [1, 2, 3, 7, 9, 10].

3.1 Teorema de Liouville

A seguir, apresentamos dois teoremas atribuídos a Liouville: o primeiro afirma que o fluxo de fase das equações de Hamilton preserva volume, enquanto o segundo, chamado de Teorema de Liouville-Arnold-Jost, busca reduzir a ordem de um sistema de equações diferenciais ordinárias a serem integradas, sendo possível reduzir pela metade a quantidade de integrais primeiras necessárias, cujo conjunto de nível M_f pode ser identificado com um toro n -dimensional, além de demonstrar que o fluxo de fase é condicionalmente periódico em M_f .

Definição 3.1.1. *O espaço com coordenadas $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ de dimensão $2n$ é chamado espaço de fase.*

Para explorar o teorema, é necessário que seja definido o conceito de fluxo de fase, que, por sua vez, é introduzido como um grupo uniparamétrico. Tais noções são desenvolvidas a seguir.

Definição 3.1.2. *Sejam $G(*)$ e $H(\cdot)$ dois grupos. Um homomorfismo de grupos é uma função $\varphi : G \rightarrow H$ tal que, para quaisquer $x, y \in G$, vale que*

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Se o homomorfismo de grupos $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ for uma função contínua, dizemos que o conjunto $\{\varphi^t \in G; t \in \mathbb{R}\}$ representa um grupo uniparamétrico.

Definição 3.1.3. *Sejam $q(t)$ e $p(t)$ soluções das equações de Hamilton. Chamamos de fluxo de fase ao grupo uniparamétrico de transformações do espaço de fase*

$$g^t : (q(0), p(0)) \rightarrow (q(t), p(t)).$$

Teorema 3.1.1. *Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, considere o sistema de equações diferenciais ordinárias*

$$\begin{cases} \dot{\vec{q}}(t) = f(\vec{q}(t)) \\ \vec{q}(0) = q_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

com $t \in [0, \infty)$ e um fluxo $\Phi_t(q) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de modo que $\frac{d}{dt}\Phi_t(q) = f(\Phi_t(q))$. Se $\text{div } f = 0$, para qualquer região aberta conexa $A \subset \mathbb{R}^n$, o fluxo preserva o volume quando aplicado em A , isto é,

$$\text{vol}(\Phi_t(A)) = \text{vol}(A).$$

Demonstração. Denotamos por $V(t)$ o volume da região $\Phi_t(A)$ no tempo t . A definição de volume e o Teorema de Mudança de Variáveis implicam que

$$V(t) = \int_{\Phi_t(A)} dy = \int_A \det \Phi'_t(q) dq.$$

Basta mostrar que o volume não varia com o tempo, isto é, $V'(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty)$. Para isso, utilizamos a Fórmula de Jacobi para derivada de determinante ao derivar a equação anterior, o que nos deixa com

$$V'(t) = \int_A \frac{d}{dt}(\det \Phi'_t(q)) dq = \int_A \det \Phi'_t(q) \text{Tr} \left(\Phi_t'^{-1}(q) \frac{d}{dt} \Phi'_t(q) \right) dq.$$

Pela definição do fluxo $\Phi_t(q)$ e com o auxílio da regra da cadeia, obtemos

$$V'(t) = \int_A \det \Phi'_t(q) \text{Tr} \left(\Phi_t'^{-1}(q) \cdot f'(\Phi_t(q)) \cdot \Phi'_t(q) \right) = \int_A \det \Phi'_t(q) \text{div } f(\Phi_t(q)) dq = 0. \quad \square$$

Corolário 3.1.1.1. *Para o fluxo de fase associado às Equações de Hamilton, temos*

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{-\partial H}{\partial q} \right) = 0.$$

Logo, aplicando o teorema visto acima, concluímos que esse fluxo preserva volume.

Antes de passar para o próximo resultado, é necessário definir alguns conceitos, tais como sistemas integráveis, colchetes de Poisson e funções em involução. Com essas definições, o Teorema de Liouville-Arnold-Jost pode ser enunciado.

Definição 3.1.4. *Dadas duas funções f, g que dependem de q, p , definimos o colchete de Poisson delas como*

$$[f, g] = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Dizemos que duas funções estão em involução quando seu colchete de Poisson for igual a zero.

Definição 3.1.5. *Dado um sistema com Hamiltoniano H , dizemos que uma função F é uma integral primeira do sistema se $[F, H] = 0$. Se um sistema pode ser reduzido a integrais primeiras, então ele é integrável.*

Observação 3.1.1. Outra forma equivalente para definir uma integral primeira é como uma função F tal que, dada uma solução $(q(t), p(t))$ da Equação de Hamilton, $F(q(t), p(t))$ é constante para qualquer $t \in \mathbb{R}$ no qual a solução está definida. Mostramos que essa definição implica na anterior. De fato, se $F(q(t), p(t))$ é constante, então

$$0 = \frac{d}{dt} F(q(t), p(t)) = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right) = [F, H].$$

Observação 3.1.2. Quando um sistema de equações pode ter sua solução expressa por meio de integrais, dizemos que ele é integrável por *quadraturas*.

Teorema 3.1.2 (Liouville-Arnold-Jost). *Considere uma variedade M de dimensão $2n$. Sejam F_1, F_2, \dots, F_n funções em involução entre si, de modo que o sistema Hamiltoniano é integrável, isto é, $[F_i, H] = 0$ para qualquer $1 \leq i \leq n$. Definimos*

$$M_{\mathbf{f}} = \{q \in M; F_i(q) = f_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Adicionalmente, supomos que essas funções são independentes em $M_{\mathbf{f}}$, isto é, o conjunto de vetores gradientes $\{DF_1, DF_2, \dots, DF_n\}$ é linearmente independente em quase todo ponto de $M_{\mathbf{f}}$. Então,

1. O conjunto M_f é uma variedade suave e invariante pelo fluxo de fase com Hamiltoniano $H = F_1$.
2. Se M_f for compacto e conexo, então é difeomorfo a um toro n -dimensional.
3. O fluxo de fase com Hamiltoniano H determina um movimento condicionalmente periódico em M_f . Em outras palavras, nas coordenadas ângulo $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\mathbf{f}). \quad (3.2)$$

4. As equações canônicas com Hamiltoniano H podem ser integradas por quadraturas.

Não é o intuito deste trabalho oferecer uma demonstração desse teorema, que pode ser vista detalhadamente em [1], juntamente com lemas utilizados ao longo da prova.

3.2 Teoria de perturbação

3.2.1 Perturbações em sistemas integráveis

Vimos anteriormente os sistemas considerados integráveis. Nesse tipo de sistema, existe uma mudança de coordenadas (isto é, uma transformação canônica) que leva as variáveis (q, p) em (I, φ) , as variáveis de ação-ângulo. Nesse caso, cada ação I é uma integral primeira do sistema, enquanto os ângulos φ mudam uniformemente com frequência constante

$$\omega_k = \frac{\partial H_0}{\partial I_k}.$$

No sistema integrável, existem n integrais primeiras em involução, que são as variáveis ação. Pelo Teorema 3.1.2, vemos que os conjuntos de nível dessas integrais são toros n -dimensionais. O espaço de fase, portanto, é $2n$ -dimensional. Em tal situação, um dos objetivos principais é estudar as curvas geradas pelas equações de Hamilton no espaço de fase gerado pelo espaço n -dimensional com coordenadas I em produto com o toro n -dimensional com coordenadas angulares φ . Tais curvas são expressas por

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I}.$$

O principal objetivo da Teoria de Kolmogorov-Arnold-Moser é estudar sistemas que não são integráveis mas que podem ser aproximados por um que seja. Assim, podemos considerar a não-integrabilidade como uma perturbação no Hamiltoniano, isto é, se H_0 é o Hamiltoniano do sistema integrável não perturbado, definimos um novo Hamiltoniano H de forma que

$$H(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi), \quad \varepsilon \ll 1, \quad (3.3)$$

sendo I, φ as variáveis de ação-ângulo e εH_1 a perturbação, que supomos ser 2π -periódica nas variáveis ângulo. Um sistema desse tipo que possui a perturbação suficientemente pequena é usualmente chamado de *sistema Hamiltoniano quase integrável*.

Definição 3.2.1. Dizemos que um sistema Hamiltoniano é não-degenerado em I_0 se

$$\det \left[\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_0^2} \right] \neq 0.$$

Algo que surge no estudo de sistemas perturbativos desse tipo é a tarefa de analisar em quais casos é possível realizar a passagem das variáveis (q, p) para (I, φ) , isto é, encontrar uma transformação canônica que faça essa mudança. O que o Teorema KAM afirma é que, se a perturbação for suficientemente pequena, é possível realizar a mudança de variáveis desejada.

Antes de tratarmos da Teoria KAM propriamente dita, vemos os seus antecedentes, em particular, o estudo de um sistema da forma (3.3). Propomos estudar o problema encontrando uma transformação canônica que leve o sistema para um novo conjunto de variáveis ação-ângulo, isto é, $g : (I, \varphi) \mapsto (J, \theta)$. Inicialmente, consideramos uma função geradora $S(J, \varphi) = J\varphi + v(J, \varphi)$, sendo v uma função periódica e suficientemente pequena. Seguindo o que vimos no capítulo anterior, as variáveis I e θ são expressas por

$$\begin{cases} I = D_\varphi S = J + D_\varphi v \\ \theta = D_J S = \varphi + D_J v. \end{cases}$$

Queremos construir a função v para ter $H(I, \varphi) = K(J)$, sendo K uma nova função a determinar. Aplicando isso na definição de H , obtemos

$$H_0(J + D_\varphi v) + \varepsilon H_1(J + D_\varphi v, \varphi) = K(J).$$

Para facilitar o problema, supomos que as derivadas de v são da ordem de ε . Expandindo o lado esquerdo em uma série de Taylor e desprezando os termos $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, resta

$$H_0(J) + DH_0(J) \cdot D_\varphi v + \varepsilon H_1(J, \varphi) = K(J).$$

Utilizando a frequência $\omega(J) = DH_0(J)$, obtemos uma EDP linear:

$$\omega(J) \cdot D_\varphi v + \varepsilon H_1(J, \varphi) = K(J) - H_0(J). \quad (3.4)$$

3.2.2 Os coeficientes de Fourier

A ideia a partir daqui é utilizar séries de Fourier na construção da função v , expressando a perturbação εH_1 nesse formato. Para simplificar um pouco a escrita, consideramos o toro n -dimensional como $\mathbb{T}^n = [0, 2\pi]^n$ em lugar de $[0, 1]^n$. Assim,

$$\varepsilon H_1(J, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(J, k) e^{ik \cdot \varphi}.$$

Os coeficientes podem ser expressos através de

$$\hat{f}(J, k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \varepsilon H_1(J, \varphi) e^{-ik \cdot \varphi} d\varphi.$$

Buscamos uma função v na forma de uma série de Fourier, isto é,

$$v(J, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{v}(J, k) e^{ik \cdot \varphi}. \quad (3.5)$$

Aplicando esses resultados na equação (3.4), alcançamos

$$i \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\omega(J) \cdot k) \hat{v}(J, k) e^{ik \cdot \varphi} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(J, k) e^{ik \cdot \varphi} = K(J) - H_0(J).$$

Buscando por uma função v que seja real, devemos considerar que os coeficientes \hat{v} são imaginários. Abrindo as exponenciais em termos de senos e cossenos e separando os termos reais e imaginários, obtemos uma expressão para \hat{v} em termos de \hat{k} :

$$\begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \cos(k \cdot \varphi) [\hat{f}(J, k) + i(\omega(J) \cdot k) \hat{v}(J, k)] = K(J) - H_0(J) \\ i \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sin(k \cdot \varphi) [\hat{f}(J, k) + i(\omega(J) \cdot k) \hat{v}(J, k)] = 0 \end{cases}$$

o que implica em

$$\hat{v}(J, k) = \frac{i \hat{f}(J, k)}{\omega(J) \cdot k}, \quad k \neq 0, \quad (3.6)$$

$$K(J) = \hat{f}(J, 0) + H_0(J). \quad (3.7)$$

3.2.3 O problema dos pequenos divisores

Na equação (3.6), o resultado só é válido para o caso em que $k \neq 0$, visto que a divisão por zero é inválida. Porém, há a possibilidade de existirem outros zeros para a expressão $\omega(J) \cdot k$, o que impossibilitaria a construção de uma solução desse tipo para o problema proposto. Esse tipo de problema foi encontrado no século XIX quando buscava-se uma simplificação para o problema de n corpos através do método das séries de Fourier.

A questão dos zeros de $\omega(J) \cdot k$ se relaciona com o conceito de toros ressonantes e não-ressonantes, que podem ser definidos da seguinte forma:

Definição 3.2.2. *Sejam $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ a direção de um fluxo linear no toro n -dimensional e $z = (z_1, \dots, z_n)$ um vetor em que cada componente é um número inteiro. Considere a equação*

$$z \cdot \chi = 0. \quad (3.8)$$

É claro que somente uma das seguintes alternativas é válida:

1. *Existe $z \in \mathbb{Z}^n$ com alguma componente não-nula que satisfaz (3.8).*
2. *A única solução para (3.8) é a solução trivial $z = 0$.*

No primeiro caso, a frequência χ é chamada ressonante. No segundo, é dita não-ressonante.

É válido notar que, no caso de um fluxo na direção da frequência ressonante, existe uma conexão com o ponto inicial, isto é, há periodicidade. No caso da frequência não-ressonante, não há periodicidade, porém o fluxo preenche o toro conforme o tempo avança. Para um toro invariante com ação I (com o Hamiltoniano da forma $h(I)$), é possível associar uma certa frequência $\omega = \frac{\partial h(I)}{\partial I}$ única, de modo que o toro pode ser chamado ressonante ou não-ressonante, dependendo da frequência associada. Costuma-se comparar a distribuição de toros ressonantes entre os não-ressonantes como a dos números racionais entre os irracionais. Em particular, os toros ressonantes são densos no espaço de fase mas possuem medida nula.

Voltando ao nosso caso, podemos aplicar o que vimos sobre toros ressonantes para verificar que para qualquer Hamiltoniano da forma (3.3) com H_0 integrável e não-degenerado,

existem divisores nulos para os coeficientes de Fourier vistos em (3.6) em todo aberto do espaço de fase. Algo que poderia ser levado em conta seria a remoção dos pontos em que $\omega(J) \cdot k$ se anula. Porém, mesmo nesse caso, não há como garantir a convergência das séries, visto que os divisores são arbitrariamente pequenos.

3.3 Teoria KAM

Nesta seção, seguimos a abordagem vista em [3], partindo de uma análise do problema dos pequenos divisores. No enunciado do Teorema KAM, seguimos a exposição de [1, 2, 10].

3.3.1 O problema de Siegel

Vimos acima que, no problema dos pequenos divisores, ao buscar uma transformação de coordenadas, encontram-se coeficientes de Fourier cujos denominadores se anulam em qualquer vizinhança de um toro não-ressonante no espaço de fase. A ideia proposta por Kolmogorov é de encontrar qualquer conjunto não-vazio no qual a mudança de coordenadas está bem definida. Tal problema foi analisado por Carl Siegel.

O primeiro fato a se notar diz respeito ao decaimento dos coeficientes de Fourier de uma função suave f , isto é, para certo $C > 0$ e $b > 0$ que pode ser arbitrariamente grande dependendo da suavidade da função, vale que

$$\|\hat{f}_k\|_B \leq \frac{C}{|k|^b}, \quad (3.9)$$

sendo que aqui consideramos a norma do máximo $\|\hat{f}_k\|_B = \max_{J \in B} \{\|\hat{f}(J)\|\}$ em um conjunto compacto B (que pode ser, por exemplo, uma bola fechada). Consideramos também os chamados conjuntos de vetores de frequência e os correspondentes conjuntos de valores J , expressos respectivamente por

$$\mathcal{D}^\Omega(\gamma, \tau) = \{\omega \in \mathbb{R}^n; |k \cdot \omega| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \quad \forall k \neq 0, k \in \mathbb{Z}^n\}, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{D}^{\mathcal{J}}(\gamma, \tau) = \{J \in \mathbb{R}^n; |k \cdot \omega(J)| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \quad \forall k \neq 0, k \in \mathbb{Z}^n\}. \quad (3.11)$$

A desigualdade expressa nesses conjuntos é uma condição de não-ressonância, pois garante que $k \cdot \omega \neq 0$. Um conjunto da forma (3.10) é dito *diofantino* no caso $\tau > n - 1$, garantindo que ele é não-vazio¹ para um valor de γ suficientemente pequeno, o que supomos a partir de agora. A desigualdade que define a propriedade dos conjuntos diofantinos é chamada *condição diofantina*. Para garantir que o conjunto $\mathcal{D}^{\mathcal{J}}$ visto em (3.11) também seja não-vazio, supomos adicionalmente que H_0 é não-degenerado. O conjunto diofantino é relacionado com um conjunto de Cantor, sendo que o interior vazio é uma das principais propriedades a ser consideradas. A ideia aqui é construir a mudança de variáveis em pontos desse conjunto, sem necessariamente estendê-la para porções maiores. Para isso, estimamos o valor do coeficiente de Fourier $\hat{v}(J, k)$ utilizando a desigualdade (3.9) e a propriedade diofantina, considerando os valores de J em um conjunto $B' = \mathcal{D}^{\mathcal{J}}(\gamma, \tau) \cap B$. Assim,

$$\|\hat{v}(J, k)\|_{B'} = \left\| \frac{i\hat{f}(J, k)}{\omega(J) \cdot k} \right\|_{B'} \leq \frac{\|\hat{f}(J, k)\|_{B'}}{\gamma|k|^{-\tau}} \leq \frac{C}{\gamma|k|^{b-\tau}}.$$

Podemos escolher a função f suave de modo que $b - \tau > n$, o que fará com que a série de Fourier associada aos coeficientes $\hat{v}(J, k)$ seja absolutamente convergente, isto é,

$$\|v(J, k)\|_{B'} = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \hat{v}(J, k) e^{ik \cdot \varphi} \right\|_{B'} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \|\hat{v}(J, k)\|_{B'} \leq \frac{C}{\gamma} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |k|^{\tau-b},$$

sendo que a última das séries converge no caso $b - \tau > n$. Conseqüentemente, a função geradora foi construída, sendo restrita ao conjunto B' em que a série de Fourier é convergente. Contudo, o caso analisado por Siegel compreende um conjunto que não possui interior, visto que está contido em $\mathcal{D}^{\mathcal{J}}(\gamma, \tau)$ que é diofantino, o que não corresponde à forma clássica para a construção da função geradora.

3.3.2 O Teorema KAM

O problema de Siegel visto acima mostra que é possível encontrar uma transformação canônica através da qual o Hamiltoniano perturbado passa a depender unicamente da variável ação, mas somente em um conjunto específico que não possui interior. Andrei Kolmogorov utilizou as ideias de Siegel para tentar ampliar o conjunto de convergência das séries

¹Essa afirmação não é trivial. Algumas ideias a respeito disso podem ser vistas no glossário do livro de Dumas [3]. Basicamente, tais conjuntos são não-vazios para um valor de γ suficientemente pequeno, sendo que sua medida se aproxima da medida total em \mathbb{R}^n conforme $\gamma \rightarrow 0^+$.

de Fourier, afirmando a existência de grande quantidade de toros invariantes que não são destruídos pela perturbação. A demonstração dessa afirmação foi iniciada pelo próprio Kolmogorov, mas terminada por Vladimir Arnold e, posteriormente, complementada por Jürgen Moser. Na literatura há uma ampla variedade de apresentações diferentes do Teorema KAM. Aqui, enunciamos primeiramente uma paráfrase escrita por Arnold em [1] que introduz bem as ideias principais do teorema:

Teorema 3.3.1 (KAM). *Se um sistema não perturbado é não-degenerado, a maioria dos toros invariantes não-ressonantes não desaparece para perturbações Hamiltonianas conservativas suficientemente pequenas. Esses toros invariantes são apenas deformados levemente, preenchendo densamente o espaço de fase do sistema perturbado.*

Arnold comenta a demonstração do teorema em [1], o que apresentamos aqui brevemente. Primeiramente, deve-se fixar o conjunto de frequências $\mathcal{D}^\Omega(\gamma, \tau)$ e considerar toros não-ressonantes do sistema não perturbado com um valor fixo para frequência. A ideia é procurar por toros invariantes do sistema perturbado nos quais há movimento condicionalmente periódico cuja frequência é a mesma dos toros fixados. Isso faz com que seja considerado somente o caso em que não há variação de frequência na perturbação de um toro não-ressonante, o que pode ser garantido com condições iniciais dependentes da frequência e valores ε suficientemente pequenos na perturbação.

Para encontrar um toro invariante, em vez de utilizar uma expansão em série em termos da perturbação, usa-se um método como o de Newton para aproximação de raízes de uma equação algébrica, sendo que o erro inicial da aproximação é da ordem de ε , enquanto o erro após n iterações do procedimento é de ordem ε^{2^n} , o que reduz a influência dos pequenos divisores, fazendo com que seja possível encontrar uma solução convergente. Para realizar tal procedimento, as hipóteses sobre H_0 são de analiticidade e não-degenerescência, enquanto para εH_1 necessitamos de analiticidade, periodicidade na variável ângulo (com período 2π) e de um valor de ε suficientemente pequeno. Com isso, garante-se a convergência da aproximação e a existência de toros invariantes no sistema perturbado.

Uma forma equivalente de enunciar este teorema é supor as propriedades diofantinas de certas frequências como hipótese, além de outras condições, que facilitam a demonstração. Vale notar que considerar essas frequências é também o caminho seguido na demonstração

da afirmação acima. Não apresentamos uma demonstração completa do resultado, que pode ser vista em [10].

Teorema 3.3.2 (KAM - Versão 2). *Considere um sistema Hamiltoniano da forma (3.3), isto é,*

$$H(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi). \quad (3.12)$$

Supomos que as seguintes hipóteses sejam satisfeitas:

1. *Existe certo $J' \in \mathbb{R}^n$ tal que a frequência $\omega' = DH_0(J')$ pertence a $\mathcal{D}^\Omega(\gamma, \tau)$ para algum valor de $\gamma, \tau > 0$.*
2. *A Hessiana $D^2H_0(J')$ é inversível.*
3. *As funções $H_0(I)$ e $H_1(I, \varphi)$ são reais e analíticas.*

Sob essas condições, considerando uma vizinhança \mathcal{V} de J' , existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, se $\|\varepsilon H_1\|_{\mathcal{V}} < \varepsilon_0$ (considerando a norma do máximo na vizinhança \mathcal{V}), então o sistema (3.12) possui soluções quase-periódicas com frequência ω' .

Um tradicional exemplo de aplicação da Teoria KAM é o de difeomorfismos no círculo, que pode ser visto em [10]. A ideia geral é considerar as funções $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ equivalentes a um difeomorfismo no círculo. Para isso, devemos ter $\phi(x) = x + \tilde{\eta}(x)$, sendo $\tilde{\eta}(x+1) = \tilde{\eta}(x)$ e $\tilde{\eta}'(x) > -1$. O caso mais simples é o de rotações, que podem ser expressas por uma função na forma $R_\alpha(x) = x + \alpha$. Assim, busca-se entender a dinâmica quando a função ϕ é uma rotação perturbada pela função periódica $\tilde{\eta}(x)$, isto é, $\phi(x) = x + \alpha + \tilde{\eta}(x)$. O desenvolvimento de tal problema pode ser encontrado na referência supracitada. Outros exemplos podem ser vistos em [11].

Capítulo 4

Teoria KAM-fraca

Vimos que a Teoria KAM apresentada em sua forma clássica estuda sistemas não integráveis considerando uma perturbação suficientemente pequena no Hamiltoniano integrável. A Teoria KAM-fraca, por sua vez, busca responder problemas nos quais tal perturbação não é tão pequena. Consequentemente, a abordagem perturbativa se torna ineficaz, e migramos para uma teoria global, mas muito mais fraca que a anterior. Nesta exposição, seguimos as abordagens de [2, 4, 8, 12, 13]. Primeiramente, tratamos do conceito de valor crítico para a função Hamiltoniana e das subsoluções críticas. Então, introduzimos o semigrupo de Lax-Oleinik e o Teorema de Fathi, também chamado Teorema KAM-fraco. Em seguida, apresentamos a barreira de Peierls e os conjuntos de Aubry. Ao final, enunciamos alguns resultados sobre regularidade de soluções.

4.1 Valores críticos para o Hamiltoniano e subsoluções críticas

Continuamos a considerar a variedade M definida como no Capítulo 2. Assumimos que os Hamiltonianos e Lagrangianos vistos a partir daqui são de Tonelli.

Definição 4.1.1. *Seja $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ um Hamiltoniano de Tonelli de classe C^k , $k \geq 2$. O ínfimo dos valores $c \in \mathbb{R}$ para os quais existe uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que*

$$H(q, du(q)) \leq c \quad \forall q \in M$$

é chamado de valor crítico de H e expresso por $c[H]$.

Definição 4.1.2. Uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *subsolução crítica* para H se for de Lipschitz e se

$$H(q, du(q)) \leq c[H] \quad \text{para quase todo } q \in M.$$

Denotamos por $\mathcal{SS}[H]$ o conjunto dessas subsoluções críticas.

Essa definição é útil para nosso propósito, que consiste em estudar as soluções da Equação de Hamilton-Jacobi

$$H(q, du(q)) = c[H]. \quad (4.1)$$

Observação 4.1.1. O conjunto $\mathcal{SS}[H]$ das subsoluções críticas é um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de $C^0(M; \mathbb{R})$. O fato de ser não-vazio é demonstrado considerando uma sequência $\{u_k\}$ de funções C^1 associada a uma sequência de números reais $\{c_k\}$, de modo que $H(q, du_k(q)) \leq c_k$ para todo $q \in M$. Com isso, aplica-se a hipótese da superlinearidade de H e um lema que garante que, nesse caso, existe uma sequência $\{q_k\}$ que converge para q tal que $du_k(q_k) \rightarrow du(q)$. A compacidade é obtida da superlinearidade de H em adição ao Teorema de Arzelà-Ascoli. A convexidade é consequência da convexidade de H em p .

Com uma função Hamiltoniana definida, é possível encontrar um Lagrangiano de Tonelli L associado a H através da Transformação de Legendre, com o qual podemos enunciar o seguinte teorema, que representa uma caracterização para subsoluções críticas:

Teorema 4.1.1. Uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *subsolução crítica* para H se, e somente se,

$$u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) \leq \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + c[H](b - a) \quad (4.2)$$

para toda curva de Lipschitz $\gamma : [a, b] \rightarrow M$.

Demonstração. Primeiramente, supomos que $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma subsolução crítica para H . Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma curva de Lipschitz qualquer. O resultado para o caso geral pode ser estendido a partir do caso especial em que u é de classe C^1 , no qual podemos utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo e uma parametrização:

$$u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} du(t) dt = \int_a^b \langle du(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle ds.$$

Pela desigualdade de Fenchel, sabemos que $\langle du(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle \leq L(\gamma, \dot{\gamma}) + H(\gamma, du(\gamma(s)))$. Portanto,

$$u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) \leq \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma}) ds + \int_a^b H(\gamma, du(\gamma(s))) ds \leq \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma}) ds + c[H](b - a).$$

A última desigualdade foi obtida utilizando a definição de $c[H]$.

Para o caso geral, podemos aproximar u por uma função suave $u^\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$ através da convolução¹, de modo que

$$H(q, du(q)) \leq c[H] + \varepsilon.$$

O resultado desejado pode ser obtido através de um método análogo ao anterior e a aplicação de um limite com $\varepsilon \rightarrow 0$

Reciprocamente, se uma função u satisfaz a equação (4.2) para qualquer curva de Lipschitz $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, podemos fixar $x, y \in M$, considerar a distância geodésica d dada pela métrica Riemanniana em M e escolher $\gamma : [0, d(x, y)] \rightarrow M$ como uma geodésica de velocidade constante que liga x e y , de modo que

$$u(y) - u(x) \leq \int_0^{d(x,y)} L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + c[H]d(x, y).$$

Como $\dot{\gamma}(s)$ é constante, isto é, $\dot{\gamma}(s) = \xi$, para algum escalar ξ , então, definindo $\Xi := \max\{L(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \in TM, \|\beta\|_\alpha \leq \xi\}$, alcançamos

$$\int_0^{d(x,y)} L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + c[H]d(x, y) \leq (\Xi + c[H])d(x, y),$$

o que mostra que u é Lipschitz em M . Supondo que q é um ponto em que u é diferenciável, escolhemos a curva γ tal que $(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = (q, \dot{q})$. Assim,

$$\frac{u(\gamma(t)) - u(\gamma(0))}{t} \leq \frac{1}{t} \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + c[H].$$

¹Detalhes desse tipo de processo podem ser vistos em [14], em particular, no apêndice C.5. Aqui, o processo é descrito brevemente: definimos uma função $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ como $\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)}, & |x| < 1. \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$ Para todo $\varepsilon > 0$, seja $\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. A função η recebe o nome de *molificador padrão*. Definindo $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$, isto é, uma convolução entre η_ε e f , vemos que f^ε é de classe C^∞ e $f^\varepsilon \rightarrow f$ em quase todo ponto quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Ainda outras propriedades podem ser garantidas, conforme exposto na bibliografia indicada.

Aplicando o limite com $t \rightarrow 0$ em ambos os lados da desigualdade, alcançamos

$$\langle du(q), \dot{q} \rangle - L(q, \dot{q}) \leq c[H],$$

sendo que o lado esquerdo da desigualdade acima equivale a $H(q, du(q))$ pela Transformação de Fechel-Legendre, o que implica que u é subsolução crítica para H . \square

4.2 Semigrupo de Lax-Oleinik

Definição 4.2.1. *Um semigrupo é um conjunto G munido de uma operação binária $*$ para a qual valem as propriedades de fechamento e associatividade.*

Dado um Lagrangiano $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$, podemos associar um semigrupo chamado *semigrupo de Lax-Oleinik* $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0} : C^0(M; \mathbb{R}) \rightarrow C^0(M; \mathbb{R})$, definido como

$$\mathcal{T}_t u(q) := \inf_{\gamma} \left\{ u(\gamma(-t)) + \int_{-t}^0 L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right\} \quad \forall q \in M, t \geq 0, \quad (4.3)$$

sendo que as curvas $\gamma : [-t, 0] \rightarrow M$ são de Lipschitz e satisfazem $\gamma(0) = q$. Para facilitar a notação, podemos definir $h_t : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ utilizando curvas $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ tais que $\gamma(0) = z$ e $\gamma(t) = q$:

$$h_t(z, q) := \inf_{\gamma} \left\{ \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right\}. \quad (4.4)$$

No Apêndice A de [4], é demonstrado que o ínfimo na definição acima sempre é atingido. Na nova notação, podemos escrever os operadores do semigrupo na forma

$$\mathcal{T}_t u(q) := \inf_{z \in M} \{ u(z) + h_t(z, q) \} \quad \forall q \in M. \quad (4.5)$$

Como o ínfimo de h_t é atingido, então o valor acima também é, de modo que \mathcal{T}_t está bem definido para qualquer valor de $t \geq 0$. Conseqüentemente, se $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ for uma subsolução crítica, decorre de (4.2) que

$$u(q) - u(z) \leq h_t(z, q) + c[H]t \quad (4.6)$$

A seguir, demonstramos algumas propriedades do semigrupo $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$.

Teorema 4.2.1. *O semigrupo de Lax-Oleinik obedece às seguintes propriedades:*

1. $\mathcal{T}_0 = Id$.
2. (Propriedade de semigrupo) $\mathcal{T}_{t+t'} = \mathcal{T}_t \circ \mathcal{T}_{t'} \quad \forall t, t' \geq 0$.
3. (Não-expansividade) $\|\mathcal{T}_t u - \mathcal{T}_t v\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty \quad \forall u, v \in C^0(M; \mathbb{R}), t \geq 0$.
4. A função $g : [0, \infty) \rightarrow C^0(M; \mathbb{R})$ dada por $g(t) = \mathcal{T}_t u$ é contínua para qualquer $u \in C^0(M; \mathbb{R})$.
5. O conjunto $\mathcal{SS}[H]$ é invariante com respeito a $\{\mathcal{T}_t\}$

Demonstração. O item 1 é evidente pela definição de \mathcal{T} . Para demonstrar 2, começamos afirmando que $h_{t+t'}(q, y) = \inf_{z \in M} \{h_{t'}(q, z) + h_t(z, y)\}$. De fato, por definição, temos que

$$h_{t+t'}(q, y) = \inf_{\gamma} \left\{ \int_0^{t+t'} L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds; \quad \gamma(0) = q, \quad \gamma(t+t') = y \right\}.$$

Fixando uma curva qualquer γ que obedeça as relações acima, é possível separar a integral em duas e realizar uma mudança de variáveis $s = t' + h$ de modo que

$$h_{t+t'}(q, y) \leq \int_0^{t'} L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + \int_0^t L(\gamma(t'+h), \dot{\gamma}(t'+h)) dh.$$

Para qualquer t' , definimos $z \in M$ tal que $z = \gamma(t')$. Assim, vale que

$$h_{t+t'}(q, y) \leq h_{t'}(q, z) + h_t(z, y) \quad \forall z \in M \implies h_{t+t'}(q, y) \leq \inf_{z \in M} \{h_{t'}(q, z) + h_t(z, y)\}.$$

Por outro lado, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma curva $\gamma : [0, t+t'] \rightarrow M$ de Lipschitz tal que $\gamma(0) = q$, $\gamma(t+t') = y$ e

$$h_{t+t'}(q, y) + \varepsilon \geq \int_0^{t+t'} L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \geq h_{t'}(q, \gamma(t)) + h_t(\gamma(t), y) \geq \inf_{z \in M} \{h_{t'}(q, z) + h_t(z, y)\}.$$

Isso mostra que a afirmação é válida. Com esse resultado, é possível demonstrar o item desejado. Sejam t e t' fixados. Aplicando a definição (4.5),

$$\mathcal{T}_{t+t'} u(q) = \inf_{y \in M} \{u(y) + h_{t+t'}(y, q)\} = \inf_{y \in M} \{u(y) + \inf_{z \in M} \{h_{t'}(y, z) + h_t(z, q)\}\}.$$

Podemos juntar ambos os ínfimos e posteriormente reagrupar, para que fique na ordem desejada. Assim,

$$\mathcal{T}_{t+t'} u(q) = \inf_{y, z \in M} \{u(y) + h_{t'}(y, z) + h_t(z, q)\} = \inf_{z \in M} \{ \inf_{y \in M} \{u(y) + h_{t'}(y, z)\} + h_t(z, q) \}$$

$$\implies \mathcal{T}_{t+t'}u(q) = \inf_{z \in M} \{ \mathcal{T}_{t'}u(z) + h_t(z, x) \} = \mathcal{T}_t[\mathcal{T}_{t'}u](q).$$

Para o item 3, fixamos $t > 0$, $q \in M$, $u, v \in C^0(M; \mathbb{R})$. Como h_t possui um valor mínimo (isto é, seu ínfimo é atingido), existe $z \in M$ tal que $\mathcal{T}_t u(q) = u(z) + h_t(z, q)$. Pela definição de h_t , $\mathcal{T}_t v(q) \leq v(z) + h_t(z, q)$. Se subtrairmos a primeira relação da segunda, vemos que

$$\mathcal{T}_t v(q) - \mathcal{T}_t u(q) \leq v(z) - u(z) \leq \|v - u\|_\infty. \quad (4.7)$$

Por outro lado, sabemos que existe $z' \in M$ tal que $\mathcal{T}_t v(q) = v(z') + h_t(z', q)$, sendo que $\mathcal{T}_t u(q) \leq u(z') + h_t(z', q)$. Assim,

$$\mathcal{T}_t u(q) - \mathcal{T}_t v(q) \leq u(z') - v(z') = -(v(z') - u(z')) \leq \|v - u\|_\infty \quad (4.8)$$

Juntando os resultados de (4.7) e (4.8), temos que $\|\mathcal{T}_t u - \mathcal{T}_t v\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty$, como desejado.

A demonstração de 4 pode ser feita supondo que uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é K -Lipschitz e posteriormente estendendo para o caso geral. De fato, se u é contínua, como M é compacto, então o espaço das funções de Lipschitz em M é denso em $C^0(M; \mathbb{R})$. Portanto, podemos aproximar a função u por funções K -Lipschitz, o que nos garante que a extensão para o caso geral é válida. Considere, então, uma função u que é K -Lipschitz, como mencionamos anteriormente. A ideia é utilizar a propriedade da superlinearidade para Lagrangianos de Tonelli, aplicar integração em ambos os lados da desigualdade e utilizar o teorema fundamental do cálculo. Assim, se L é um Lagrangiano de Tonelli, então

$$L(q, \dot{q}) \geq K \|\dot{q}\| - B(K).$$

Para qualquer curva de Lipschitz $\gamma : [-t, 0] \rightarrow M$, $t > 0$, obtemos

$$\int_{-t}^0 L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \geq K \int_{-t}^0 \|\dot{\gamma}(s)\|_{\gamma(s)} ds - B(K)t \geq Kd(\gamma(-t), \gamma(0)) - B(K)t,$$

sendo que $d(x, y)$ é a distância dada pela métrica Riemanniana em M . Como assumimos que u é K -Lipschitz, $Kd(\gamma(-t), \gamma(0)) \geq u(\gamma(0)) - u(\gamma(-t))$ e, portanto,

$$u(\gamma(-t)) + \int_{-t}^0 L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \geq u(\gamma(0)) - B(K)t.$$

Como essa desigualdade é válida para qualquer curva de Lipschitz, também é válida para o ínfimo das curvas γ , que é atingido. Assim, como consideramos $\gamma(0) = q$ (a extremidade está fixada), obtemos

$$\mathcal{T}_t u(q) \geq u(q) + B(K)t. \quad (4.9)$$

Por outro lado, podemos considerar a definição (4.5) comparada ao caso $z = q$, isto é, quando a função γ é constante. Assim,

$$\mathcal{T}_t u(q) \leq u(q) + h_t(q, q) \leq u(q) + \int_0^t L(q, 0) ds = u(q) + tL(q, 0).$$

Com isso, concluímos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{T}_t u = u$. Suponha dois valores de tempo t e t' tais que $t' > t$. Então,

$$\|\mathcal{T}_{t'} u - \mathcal{T}_t u\| = \|\mathcal{T}_t \circ \mathcal{T}_{t'-t} u - \mathcal{T}_t u\| \leq \|\mathcal{T}_{t'-t} u - u\|,$$

sendo que na igualdade utilizamos a propriedade de semigrupo e na desigualdade, a não-expansividade. Essa última desigualdade junto com a convergência de $\mathcal{T}_t u$ no infinito implicam na continuidade da função dada.

O item 5 busca mostrar que se u for uma subsolução crítica para H , então $\mathcal{T}_t u$ também será, o que pode ser verificado utilizando a caracterização para subsoluções críticas vista em (4.2). Seja $t > 0$ fixado e $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva de Lipschitz. Sem perda de generalidade, supomos $b - a < t/2$. Utilizando a definição de \mathcal{T}_t e o fato de que o ínfimo é atingido, existe $z \in M$ tal que

$$\mathcal{T}_t u(\gamma(a)) = u(z) + h_t(z, \gamma(a))$$

e, para qualquer $y \in M$, temos que

$$\mathcal{T}_t u(\gamma(b)) \leq u(y) + h_t(y, \gamma(b)).$$

Conseqüentemente, ao subtrair a primeira equação da segunda,

$$\mathcal{T}_t u(\gamma(b)) - \mathcal{T}_t u(\gamma(a)) \leq u(y) + h_t(y, \gamma(b)) - u(z) - h_t(z, \gamma(a)).$$

Como estamos supondo que $b - a < t/2$, podemos dividir $h_t(y, \gamma(b))$ em duas partes aplicando, para isso, a afirmação utilizada na demonstração do item (2), isto é, $h_{t+t'}(q_1, q_2) = \inf_{q \in M} \{h_{t'}(q_1, q) + h_t(q, q_2)\}$. Escolhendo $q = \gamma(a)$ no nosso caso, obtemos

$$h_t(y, \gamma(b)) \leq h_{t-(b-a)}(y, \gamma(a)) + h_{b-a}(\gamma(a), \gamma(b)).$$

Podemos também separar $h_t(z, \gamma(a))$ em duas partes. Porém, buscamos neste caso uma igualdade ao invés de desigualdade, o que pode ser feito através de escolha apropriada de $y \in M$. Para isso, definimos uma curva de Lipschitz $\alpha : [0, t] \rightarrow M$ que seja minimizante de $h_t(z, \gamma(a))$, isto é, $h_t(z, \gamma(a)) = \int_0^t L(\alpha(s), \dot{\alpha}(s)) ds$, $\alpha(0) = z$, $\alpha(t) = \gamma(a)$. Como estamos

separando $h_t(z, \gamma(a))$ no ponto $b - a$, é natural que a escolha de y para minimizar esse funcional seja $y = \alpha(b - a)$. Com esse valor fixado, vemos que

$$h_t(z, \gamma(a)) = h_{b-a}(z, y) + h_{t-(b-a)}(y, \gamma(a)).$$

Note também que, como u é uma subsolução crítica, ela obedece a caracterização da equação (4.2). Portanto,

$$u(y) - u(z) \leq h_{b-a}(z, y) + c[H](b - a).$$

Juntando as desigualdades e igualdades acima em um só resultado, vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t u(\gamma(b)) - \mathcal{T}_t u(\gamma(a)) &\leq h_{b-a}(z, y) + c[H](b - a) + h_{t-(b-a)}(y, \gamma(a)) \\ &\quad + h_{b-a}(\gamma(a), \gamma(b)) - h_{b-a}(z, y) - h_{t-(b-a)}(y, \gamma(a)). \end{aligned}$$

$$\implies \mathcal{T}_t u(\gamma(b)) - \mathcal{T}_t u(\gamma(a)) \leq h_{b-a}(\gamma(a), \gamma(b)) + c[H](b - a). \quad \square$$

4.3 O Teorema KAM-fraco

Nesta seção, exploramos o chamado Teorema KAM-fraco, também conhecido como Teorema de Fathi. Basicamente, ele garante a existência de uma subsolução crítica que obedeça certa relação com o valor crítico do Hamiltoniano H através da aplicação de um operador do semigrupo de Lax-Oleinik.

Teorema 4.3.1. *Existe uma subsolução crítica para H (chamada solução KAM-fraca para H) $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathcal{T}_t u = u - c[H]t \quad \forall t \geq 0. \quad (4.10)$$

A ideia da demonstração é considerar um conjunto de classe de equivalências de funções contínuas por funções constantes, aplicar em um operador do semigrupo de Lax-Oleinik, utilizar um lema que garante a existência de uma função u e uma família $\{c_t\}_{t \geq 0}$ de números reais que satisfazem $\mathcal{T}_t u = u + c_t$ e concluir que a constante c definida de forma que $c_t = tc$ para todo $t \geq 0$ é igual ao valor crítico de H . Primeiramente, apresentamos o lema mencionado, cuja demonstração pode ser vista no Apêndice B de [4].

Lema 4.3.1. *Seja K um conjunto convexo, compacto e não-vazio em um espaço normado $(E, \|\cdot\|_E)$. Considere uma família $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ de funções $\varphi_t : K \rightarrow K$ que satisfazem*

1. (*Propriedade de semigrupo*) $\varphi_{t+t'} = \varphi_t \circ \varphi_{t'} \quad \forall t, t' \geq 0$;
2. (*Não-expansividade*) $\|\varphi_t(e) - \varphi_t(e')\|_E \leq \|e - e'\|_E \quad \forall t \geq 0$;
3. (*Continuidade*) A função $g : t \mapsto \varphi_t(e)$, $t \geq 0$, é contínua para qualquer $e \in E$.

Então, existe $e \in K$ tal que $\varphi_t(e) = e \quad \forall t \geq 0$.

Com esse lema em mãos, podemos demonstrar o teorema KAM-fraco seguindo a ideia apresentada acima.

Demonstração. Considere o espaço quociente entre $C^0(M; \mathbb{R})$ e funções constantes, que denotamos por E . A esse espaço, associamos a norma

$$\|[u]\| = \inf_{a \in \mathbb{R}} \{u + a\} \quad \forall [u] \in E.$$

Pela definição de \mathcal{T}_t , vemos que $\mathcal{T}_t[u] = \mathcal{T}_t(u+a) = \mathcal{T}_t u + a = [\mathcal{T}_t u]$. Consequentemente, $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$ ainda preserva as propriedades do Teorema 4.2.1 para classes de equivalência em E que são subsoluções do Hamiltoniano. Definimos esse subconjunto como $K := \{[u]; u \in \mathcal{SS}(H)\}$, que é um conjunto compacto, o que decorre da compacidade de $\mathcal{SS}[H]$ e da preservação da compacidade em espaços quocientes. Podemos aplicar o Lema 4.3.1, que implica na existência de um elemento $[u] \in K$ tal que $\mathcal{T}_t[u] = [u]$ e, portanto, para cada $t \geq 0$,

$$\mathcal{T}_t u = u + c_t, \tag{4.11}$$

sendo que as constantes c_t podem ser consideradas como parte de uma família $\{c_t\}_{t \geq 0}$.

A equação (4.11) está sujeita às propriedades vistas no Teorema 4.2.1. Assim, a função $\eta : t \mapsto c_t$ satisfaz as propriedades de semigrupo e de continuidade. Isso implica que existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $c_t = tc$ para todo valor de $t \geq 0$. De fato, se $n \in \mathbb{N}$, segue-se que $c_n = nc_1$ por indução. O resultado também pode ser estendido para $t = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ através de

$$qc \frac{p}{q} = c_p = pc_1 \implies c \frac{p}{q} = \frac{p}{q} c_1, \quad q \neq 0.$$

Pela continuidade de η , dado $t \in \mathbb{R}$, para qualquer sequência $\{r_n\}$ de números racionais que obedeça $r_n \rightarrow t$, temos que

$$c_t = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n c_1 = t c_1 =: tc$$

Falta mostrar que $c = -c[H]$. Pela equação (4.6), vemos que $u(x) - c[H]t \leq u(z) + h_t(z, x) = \mathcal{T}_t u(x)$, sendo que a última igualdade vale para algum valor de $z \in M$. Logo, $c \geq -c[H]t$. Por outro lado, o fato de que $\mathcal{T}_t u = u + c_t$ para qualquer $t \geq 0$ mostra que, dada uma curva de Lipschitz qualquer $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, vale que

$$\begin{aligned} u(\gamma(b)) + c_t &= \mathcal{T}_t u(\gamma(b)) \leq u(\gamma(a)) + h_{b-a}(\gamma(a), \gamma(b)) \\ \implies u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) &\leq h_{b-a}(\gamma(a), \gamma(b)) - ct \leq \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds - ct. \end{aligned}$$

É possível aplicar o mesmo argumento utilizado na demonstração do Teorema 4.1.1, cuja ideia era utilizar a convolução para regularizar u e encontrar, para qualquer $\varepsilon > 0$, uma função $u^\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H(q, du^\varepsilon(q)) \leq -c + \varepsilon$. Aplicando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que $c \leq -c[H]$. Portanto, temos que

$$-c[H] \geq c \geq -c[H] \implies c = -c[H]. \quad \square$$

A seguir, enunciamos um teorema que fornece caracterizações para soluções KAM-fracas.

Teorema 4.3.2. *Seja $u \in C^0(M; \mathbb{R})$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A função u é uma solução KAM-fraca.*
2. *$\mathcal{T}_t u = u - c[H]t$ para todo $t \geq 0$.*
3. *Vale que $u \in \mathcal{SS}[H]$ e, para todo $q \in M$, existe uma curva de Lipschitz $\gamma_q : (-\infty, 0] \rightarrow M$ com $\gamma_q(0) = q$ tal que*

$$u(\gamma_q(b)) - u(\gamma_q(a)) = \int_a^b L(\gamma_q(s), \dot{\gamma}_q(s)) ds + c[H](b - a) \quad \forall a < b \leq 0. \quad (4.12)$$

4. *Vale que $u \in \mathcal{SS}[H]$ e, para todo $q \in M$ e toda função suave $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi \leq u$,*

$$\varphi(q) = u(q) \implies H(q, d\varphi(q)) \geq c[H]. \quad (4.13)$$

Garante-se também que a curva γ_q vista no item (3) é de classe C^2 e é solução para a Equação de Euler-Lagrange.

A demonstração pode ser vista de forma completa em [4]. A seguir, citamos um exemplo de problema envolvendo o valor crítico para o Hamiltoniano.

Exemplo: Seja $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ o Hamiltoniano mecânico

$$H(q, p) = \frac{\|p\|_q^2}{2} + V(q) \quad \forall (q, p) \in T^*M,$$

sendo que $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^k , $k \geq 2$. Se escolhermos $du := p = 0$, vemos que $H(q, 0) = V(q) \leq \max_{q \in M} \{V(q)\}$. Se $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função de classe C^1 , então existe algum ponto $q \in M$ tal que $V(q) = \max V$. Nesses pontos, $H(q, du) \geq \max_{q \in M} \{V(q)\}$. Portanto, concluímos que

$$c[H] = \max_{q \in M} \{V(q)\}.$$

4.4 A barreira de Peierls

A barreira de Peierls é uma função auxiliar útil para dar continuidade no estudo das soluções KAM-fracas. A seguir, enunciamos algumas definições e teoremas relacionados a esse tópico.

Definição 4.4.1. Chama-se barreira de Peierls a função $h : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(q, y) := \liminf_{t \rightarrow \infty} \{h_t(q, y) + c[H]t\} \quad \forall q, y \in M.$$

Definição 4.4.2. Um ponto $z \in M$ é dito ponto α -limite de uma curva $\gamma : (-\infty, 0] \rightarrow M$ quando

$$z \in \bigcap_{t < 0} \overline{\gamma((-\infty, t])}.$$

Observação 4.4.1. Note que, para quaisquer $q_1, q_2, q_3 \in M$ e qualquer $t > 0$, vale que

$$h(q_1, q_3) \leq h(q_1, q_2) + h_t(q_2, q_3) + c[H]t; \quad (4.14)$$

$$h(q_1, q_3) \leq h_t(q_1, q_2) + h(q_2, q_3) + c[H]t. \quad (4.15)$$

Teorema 4.4.1. Seja $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução KAM-fraca. Para todo $q \in M$ e toda curva $\gamma_q : (-\infty, 0] \rightarrow M$ tal que $\gamma_q(0) = q$ e que satisfaz (4.12), qualquer ponto z que é α -limite de γ_q satisfaz $h(z, z) = 0$.

Demonstração. Seja $z \in M$ um ponto α -limite de γ_q . Por definição, existe uma sequência $\{t_k\}$ de tempos com $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ tal que $z = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_q(-t_k)$. Por simplicidade, denotamos $z_k := \gamma_q(-t_k)$. A desigualdade (4.6) implica que $0 \leq h_t(z, z) + c[H]t$ para qualquer $z \in M$. Logo, pela definição da barreira, vemos que $h(z, z) \geq 0$. Queremos mostrar que existe uma sequência de tempos T_k tal que $h_{T_k}(z, z) + c[H]T_k \rightarrow 0$, isto é, buscamos um conjunto de curvas $\gamma_k : [0, T_k] \rightarrow \mathbb{R}$ com

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{T_k} L(\gamma_k(s), \dot{\gamma}_k(s)) ds + c[H]T_k = 0. \quad (4.16)$$

Para isso, definimos $\gamma_k(t)$ como $\gamma_q(-t)$ se tivermos $0 \leq t \leq t_k$ ou como a geodésica $\alpha(s)$ de velocidade 1 que liga o ponto z_k a z para $t_k \leq t \leq T_k$. Desse modo, vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{T_k} L(\gamma_k(s), \dot{\gamma}_k(s)) ds + c[H]T_k &= \int_0^{t_k} L(\gamma_q(s), \dot{\gamma}_q(s)) ds + c[H]t_k \\ &\quad + \int_{t_k}^{T_k} L(\alpha(s), \dot{\alpha}(s)) ds + c[H](T_k - t_k). \end{aligned}$$

Note que $(T_k - t_k) = d(z_k, z)$, visto que a velocidade da geodésica é unitária. Como a curva γ_q satisfaz (4.12), temos que

$$\int_0^{t_k} L(\gamma_q(s), \dot{\gamma}_q(s)) ds + c[H]t_k = u(\gamma_q(t_k)) - u(\gamma_q(0)) = u(z_k) - u(z).$$

Portanto, analisando o limite visto em (4.16) mas considerando o valor absoluto, valendo-se do fato de que u é contínua, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_0^{T_k} L(\gamma_k(s), \dot{\gamma}_k(s)) ds + c[H]T_k \right| &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left| \int_0^{t_k} L(\gamma_q(s), \dot{\gamma}_q(s)) ds + c[H]t_k \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_{t_k}^{T_k} L(\alpha(s), \dot{\alpha}(s)) ds + c[H](T_k - t_k) \right| \right\} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ |u(z_k) - u(z)| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_{t_k}^{T_k} L(\alpha(s), \dot{\alpha}(s)) ds + c[H]d(z_k, z) \right| \right\} \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 4.4.2. *A barreira de Peierls orientada, definida por $h_q(y) := h(q, y)$ para todo $y \in M$, é uma solução KAM-fraca para qualquer $q \in M$.*

Demonstração. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva de Lipschitz, supondo $b > a$. Pela equação (4.14) juntamente com a definição de h_t , alcança-se

$$\begin{aligned} h(q, \gamma(b)) &\leq h(q, \gamma(a)) + h_{b-a}(\gamma(a), \gamma(b)) + c[H](b-a) \\ &\leq h(q, \gamma(a)) + \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + c[H](b-a) \\ \implies h(q, \gamma(b)) - h(q, \gamma(a)) &\leq \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + c[H](b-a). \end{aligned}$$

Invertendo os papeis de $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ na equação (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} h(q, \gamma(b)) - h(q, \gamma(a)) &\geq \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + c[H](b-a) \\ \implies h(q, \gamma(b)) - h(q, \gamma(a)) &= \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + c[H](b-a), \end{aligned}$$

o que mostra que $h_q(y)$ é uma solução KAM-fraca para qualquer $y \in M$, como visto no Teorema 4.3.2. \square

4.5 Conjuntos de Aubry

Definição 4.5.1. *Chama-se conjunto projetado de Aubry o subconjunto não-vazio e compacto de M definido por*

$$\mathcal{A}(H) := \{q \in M : h(q, q) = 0\}.$$

Observação 4.5.1. Pelo Teorema 4.4.1, vemos que existem pontos $q \in M$ que satisfazem $h(q, q) = 0$, o que implica que $\mathcal{A}(H)$ não é vazio. A ideia da demonstração da compacidade é utilizar a regularidade de Lipschitz das funções h_t , o que se estende para h . Para isso, utiliza-se um resultado auxiliar:

Lema 4.5.1. *Para qualquer $t_0 > 0$, existe $K_t > 0$ tal que h_t é K_t -Lipschitz em $M \times M$ para todo $t \geq t_0$.*

Esse resultado é visto no Apêndice A de [4], juntamente com outros resultados que são utilizados para prová-lo. Em particular, podemos considerar h contínua. Considere uma sequência $\{q_k\}$ em $\mathcal{A}(H)$ tal que $q_k \rightarrow q \in M$. Temos $h(q_k, q_k) = 0$ e, como h é contínua, $h(q, q) = 0$, o que implica que $q \in \mathcal{A}(H)$. Como o conjunto M é compacto e $\mathcal{A}(H) \subset M$ é um conjunto fechado, segue-se que $\mathcal{A}(H)$ é compacto.

A seguir, enunciaremos algumas propriedades de $\mathcal{A}(H)$. As demonstrações completas podem ser vistas na Seção 5 de [4]. Aqui, apenas oferecemos uma ideia da prova.

Teorema 4.5.1. *Para todo $q \in \mathcal{A}(H)$, valem as seguintes propriedades:*

1. *Existe uma curva $\gamma_q : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}(H)$ de classe C^2 para a qual $\gamma_q(0) = q$, sendo que essa curva é solução para a Equação de Euler-Lagrange e a barreira de Peierls é antissimétrica no ponto $(q, \gamma_q(t))$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, isto é,*

$$h(q, \gamma_q(t)) = \int_0^t L(\gamma_q(s), \dot{\gamma}_q(s)) ds + c[H]t = h(\gamma_q(t), q). \quad (4.17)$$

2. *Existe um valor de momento $\mathcal{P}(q) \in T^*_q M$ no qual $H(q, \mathcal{P}(q)) = c[H]$, sendo que toda subsolução crítica u é diferenciável em q e $du(q) = \mathcal{P}(q) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{\gamma}_q(0))$.*
3. *Para toda subsolução crítica $u \in \mathcal{SS}(H)$, a caracterização vista na equação (4.2) se torna uma igualdade quando aplicada na curva γ_q , isto é, para quaisquer $a < b \in \mathbb{R}$, vale que*

$$u(\gamma_q(b)) - u(\gamma_q(a)) = \int_a^b L(\gamma_q(s), \dot{\gamma}_q(s)) ds + c[H](b - a). \quad (4.18)$$

Essa curva γ_q é única em $[a, b]$: se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, $0 \in [a, b]$, com $\gamma(0) = q$, obedece a equação (4.18), então $\gamma(t) = \gamma_q(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

Se, caso contrário, tivermos $q \notin \mathcal{A}(H)$, então existe $u \in \mathcal{SS}(H)$ que é suave em uma vizinhança de q , digamos \mathcal{V}_q . Além disso, $H(q', du(q')) < c[H]$ para qualquer $q' \in \mathcal{V}_q$.

Demonstração. Para a demonstração do item 1, utilizamos um lema visto na Seção 4 de [4] que afirma o seguinte:

Lema 4.5.2. *Para qualquer $y \in M$, existe uma curva de Lipschitz $\gamma_y : (-\infty, 0] \rightarrow M$ com $\gamma_y(0) = y$ de modo que $h_q(\gamma_y(b)) - h_q(\gamma_y(a)) = \int_a^b L(\gamma_y(s), \dot{\gamma}_y(s)) ds + c[H](b - a)$. Tal curva é de classe C^2 e é solução da Equação de Euler-Lagrange.*

Aplicando esse lema em curva que satisfaz as hipóteses do item (1), vemos que

$$h(q, \gamma_q(t)) = h_q(\gamma_q(t)) = \int_0^t L(\gamma_q(s), \dot{\gamma}_q(s)) ds + c[H]t.$$

Por outro lado, como a imagem da curva γ_q é o conjunto projetado de Aubry, sabe-se que $h(\gamma_q(t), \dot{\gamma}_q(t)) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Assim, aplicando o lema, obtemos

$$-h(\gamma_q(t), q) = \int_0^t L(\gamma_q(s), \dot{\gamma}_q(s)) ds + c[H]t.$$

Para o item 2, devemos fixar uma subsolução crítica u , utilizar a caracterização vista em (4.2) e mostrar que é possível definir funções de classe C^2 que tenham u como limite superior e inferior no ponto q . Com isso, conclui-se a diferenciabilidade.

O item 3 é uma consequência da caracterização já mencionada, que pode ser aplicada nos pontos q e $\gamma_q(t)$.

Para provar o último comentário, que diz respeito aos $q \notin \mathcal{A}(H)$, definimos o potencial de Mañé orientado $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$v(y) := \inf_{t>0} \{h_t(q, y) + c[H]t\} \quad \forall y \in M.$$

A ideia é mostrar que $v \in \mathcal{SS}(H)$ e, em seguida, garantir a existência de uma função suave $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi \leq v$ e, no ponto q ,

$$\phi(q) = v(q), \quad H(q, d\phi(q)) < c[H].$$

Assume-se (podendo ser mudada a função ϕ se for necessário) que existe uma vizinhança aberta de q , digamos \mathcal{V}_q , e certo $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{cases} \phi(y) \geq v(y) - \varepsilon & \forall y \in \mathcal{V}_q; \\ \phi(y) = v(y) - \varepsilon & \forall y \in \partial\mathcal{V}_q; \\ \phi(y) < v(y) - \varepsilon & \forall y \in M \setminus \mathcal{V}_q; \\ H(y, d\phi(y)) < c[H] & \forall y \in \mathcal{V}_q. \end{cases}$$

Definimos $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $u(y) = \max\{v(y), \phi(y) + \varepsilon\}$, que obedece as relações desejadas. \square

Definição 4.5.2. *Chama-se conjunto de Aubry o subconjunto de T^*M definido por*

$$\tilde{\mathcal{A}}(H) := \{(q, \mathcal{P}(q)) \in T^*M; q \in \mathcal{A}(H)\}.$$

A seguir, enunciamos um teorema sobre a estrutura do conjunto de Aubry e sua invariância pelo Hamiltoniano. Posteriormente, apresentamos mais um resultado, que atua como uma ponte entre o conjunto de Aubry e o conjunto das subsoluções críticas. Aqui, não desenvolvemos as demonstrações, que podem ser vistas em [4].

Teorema 4.5.2. *O conjunto $\tilde{\mathcal{A}}(H)$ é um subconjunto não-vazio e compacto de T^*M , invariante pelo fluxo Hamiltoniano.*

Teorema 4.5.3. *Para todo $u \in \mathcal{SS}[H]$ existe uma solução KAM-fraca ω tal que $\omega = u$ quando restrita ao conjunto $\mathcal{A}(H)$.*

4.6 Regularidade de soluções KAM-fracas

Nesta seção, finalizamos o trabalho apresentando alguns resultados de regularidade para as soluções KAM-fracas. Para isso, partimos da definição de função semicôncava, que pode ser encontrada em [15].

Definição 4.6.1. *Dizemos que uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é semicôncava se existe uma função $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ não-decrescente e semicontínua superiormente tal que $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \omega(\rho) = 0$ e, para quaisquer $q, y \in M$ tais que o segmento que liga q a y está contido em M e qualquer $\lambda \in [0, 1]$, vale que*

$$\lambda u(q) + (1 - \lambda)u(y) - u(\lambda q + (1 - \lambda)y) \leq \lambda(1 - \lambda)|q - y|\omega(|q - y|).$$

A seguir, apresentamos um teorema que implica a semiconcavidade de uma solução KAM-fraca na variedade M , além de propriedades de continuidade local. A demonstração do teorema é longa e utiliza diversos lemas. Ela é apresentada de maneira completa em [16], com exceção de alguns dos lemas, utilizando-se o conceito de solução de viscosidade nessa referência, o que não apresentamos até agora. Vale a pena definir esse conceito, que será útil também para o próximo teorema, mas não tratamos dele de forma exaustiva neste trabalho.

Definição 4.6.2. *Uma função contínua $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de viscosidade da Equação de Hamilton-Jacobi $H(q, du(q)) = 0$ quando, para qualquer $q \in M$, se forem obedecidas as seguintes propriedades:*

1. *Para todo $q \in M$, se $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $\phi \geq u$ e $\phi(q) = u(q)$, então $H(q, d\phi(q)) \leq 0$.*
2. *Para todo $q \in M$, se $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $\psi \leq u$ e $\psi(q) = u(q)$, então $H(q, d\psi(q)) \geq 0$.*

Teorema 4.6.1. *Seja $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução KAM-fraca. Então, u é semicôncava em M e é $C_{\text{loc}}^{1,1}$ em $\mathcal{O} \subset M$, sendo \mathcal{O} um subconjunto aberto e denso em M .*

Enunciamos também um teorema que assume a hipótese de que o conjunto de Aubry é uma união de órbitas hiperbólicas periódicas ou pontos fixos, garantindo certa regularidade para a solução KAM-fraca. A demonstração completa pode ser vista em [17], mas apresentamos boa parte das ideias principais aqui, seguindo a referência citada.

Teorema 4.6.2. *Seja H um Hamiltoniano de Tonelli de classe C^k , $2 \leq k \leq \infty$. Assuma que o conjunto de Aubry $\tilde{\mathcal{A}}(H)$ é uma união finita de órbitas hiperbólicas periódicas ou pontos fixos. Então, existe uma solução da Equação de Hamilton-Jacobi que é de classe C^k em uma vizinhança de $\tilde{\mathcal{A}}$. Note que esta também é uma solução KAM-fraca.*

Demonstração. Apresentamos apenas as ideias principais, sem entrar em muitos detalhes ao longo da demonstração.

Definição 4.6.3. *Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que uma curva absolutamente contínua $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ é calibrada por uma função $u \in \mathcal{SS}[H]$ se, para qualquer intervalo $[a, b] \subset I$, for válida a igualdade*

$$u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) = \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + c[H](b - a).$$

Dada uma subsolução u da Equação de Hamilton-Jacobi, seja $\tilde{\mathcal{I}}(H, u)$ o conjunto definido pela união das imagens de todas as trajetórias do Hamiltoniano H cuja projeção em M é calibrada por u ao longo de todo \mathbb{R} . Utilizando essa definição, podemos escrever o conjunto de Aubry como

$$\tilde{\mathcal{A}}(H) = \bigcap_u \tilde{\mathcal{I}}(H, u).$$

Com esses resultados, enunciamos o primeiro lema a ser utilizado:

Lema 4.6.1. *Existe uma solução de viscosidade da Equação de Hamilton-Jacobi u tal que $\tilde{\mathcal{I}}(H, u) = \tilde{\mathcal{A}}(H)$.*

A ideia é fixar a solução u dada pelo Lema 4.6.1 e mostrar que o resultado do Teorema 4.6.2 é satisfeito. Para isso, separamos $\tilde{\mathcal{A}}(H)$ em suas componentes conexas, definindo uma

delas como \tilde{A} e sua respectiva projeção em M como A . Utilizamos o fato de que, em tais condições, A e \tilde{A} são ambos pontos ou curvas fechadas. Com isso, enunciamos o segundo lema utilizado na demonstração de Bernard [17]:

Lema 4.6.2. *A função u é de classe C^k em uma vizinhança de A .*

A demonstração do lema utiliza resultados que fogem do escopo do trabalho, mas o resultado do teorema segue dessas afirmações. □

Capítulo 5

Conclusão

Estudamos os sistemas Hamiltonianos partindo das definições básicas, como a função Lagrangiana, com a qual associamos a Equação de Euler-Lagrange, que estabelece uma equação diferencial para o Lagrangiano aplicado em uma curva que minimize o funcional de ação. Vimos também a construção do Hamiltoniano através da Transformação de Legendre. Com isso, introduzimos as ideias principais da Teoria de Hamilton-Jacobi, com a qual alcançamos a descrição de sistemas periódicos através das variáveis de ação-ângulo, o que foi amplamente utilizado na exposição da Teoria KAM, feita no Capítulo 3.

Apresentamos o problema que a Teoria KAM busca resolver: a permanência de toros invariantes em sistemas perturbativos. O caso estudado foi o de sistemas integráveis que passam por uma perturbação em seu Hamiltoniano, sendo que o Teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser conclui que, para perturbações suficientemente pequenas, a maioria dos toros invariantes continua a existir, de modo que o conjunto de tais toros é denso no espaço de fase.

A Teoria KAM-fraca também foi introduzida, considerando não mais uma perturbação no Hamiltoniano, mas o estudo de subsoluções críticas. Com os conceitos básicos e com a introdução do semigrupo de Lax-Oleinik, foi possível enunciar o Teorema KAM-fraco (ou Teorema de Fathi), que garante a existência de uma solução KAM-fraca para o Hamiltoniano. Após isso, vimos alguns resultados auxiliares, com os quais foi possível caracterizar melhor o conjunto de tais soluções e enunciar algumas considerações sobre sua regularidade.

Bibliografia

- [1] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein.
- [2] L. C. Evans, “Weak KAM theory and partial differential equations,” in *Calculus of variations and nonlinear partial differential equations*, vol. 1927 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 123–154, Springer, Berlin, 2008.
- [3] H. S. Dumas, *The KAM story: A friendly introduction to the content, history, and significance of classical Kolmogorov-Arnold-Moser theory*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2014.
- [4] L. Rifford, “Regularity of weak KAM solutions and Mañé’s conjecture,” in *Séminaire Laurent Schwartz—Équations aux dérivées partielles et applications. Année 2011–2012*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, pp. Exp. No. XXVII, 22, École Polytech., Palaiseau, 2013.
- [5] H. Goldstein, *Classical mechanics*. Addison-Wesley Series in Physics, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., second ed., 1980.
- [6] A. Lopes, *Introdução à mecânica clássica*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.
- [7] N. A. Lemos, *Analytical mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, portuguese ed., 2018.
- [8] A. Sorrentino, “Lecture notes on Mather’s theory for Lagrangian systems,” *Publ. Mat. Urug.*, vol. 16, pp. 169–192, 2016.

-
- [9] R. d. L. Ribeiro, *Introdução à Teoria KAM*. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- [10] C. E. Wayne, “An introduction to KAM theory,” in *Dynamical systems and probabilistic methods in partial differential equations (Berkeley, CA, 1994)*, vol. 31 of *Lectures in Appl. Math.*, pp. 3–29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [11] R. de la Llave, “A tutorial on KAM theory,” in *Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999)*, vol. 69 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pp. 175–292, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [12] A. Fathi, *The Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2008.
- [13] A. Figalli and L. Rifford, “Aubry sets, Hamilton-Jacobi equations, and the Mañé Conjecture,” *Contemp. Math.*, 2012.
- [14] L. C. Evans, *Partial differential equations*, vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2010.
- [15] P. Cannarsa and C. Sinestrari, *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control*, vol. 58 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.
- [16] L. Rifford, “On viscosity solutions of certain Hamilton-Jacobi equations: regularity results and generalized Sard’s theorems,” *Comm. Partial Differential Equations*, vol. 33, no. 1-3, pp. 517–559, 2008.
- [17] P. Bernard, “Smooth critical sub-solutions of the Hamilton-Jacobi equation,” *Math. Res. Lett.*, vol. 14, no. 3, pp. 503–511, 2007.