UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

UMA INTRODUÇÃO AOS CANAIS QUÂNTICOS: SEMIGRUPOS A TEMPO CONTÍNUO, DIVISIBILIDADE E SUAS CARACTERIZAÇÕES

LUCAS KENJI MOORI

PORTO ALEGRE, NOVEMBRO DE 2022

Dissertação submetida por Lucas Kenji Moori[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. Dr. Thomas Soler Jacq (IFRS)
Prof. Dr. Paulinho Demeneghi (UFSC)
Prof. Dr. Sergio Augusto Giardino Filho (UFRGS)
Prof. Dr. Carlos Felipe Lardizábal (Orientador, PPGMat/UFRGS)

Data de Defesa: 29/11/2022.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) em 2022.

Resumo. Neste trabalho apresentamos elementos básicos para o estudo de operadores positivos no contexto de informação e computação quântica, nos concentrando em operadores completamente positivos que preservam traço, também ditos canais quânticos. Estudamos semigrupos a um parâmetro, descrevendo a forma precisa que os geradores associados devem assumir revisando a construção básica de Gorini, Kossakowski, Sudarshan e Lindblad. A seguir, as noções de divisibilidade e divisibilidade infinitesimal são estudadas, seguindo M. Wolf e J. Cirac. Critérios básicos são estudados, bem como uma análise mais detalhada do caso de canais de 1 qubit.

Palavras-chave: informação quântica; canais quânticos; operadores positivos; gerador de Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad; divisibilidade.

Abstract. In this work we present basic elements for the study of positive operators in the context of quantum information and computation, focusing on trace-preserving completely positive operators, the so-called quantum channels. We study 1-parameter semigroups, describing the precise form that the associated generators must have by revising the basic construction due to Gorini, Kossakowski, Sudarshan and Lindblad. Then, the notions of divisibility and infinitesimal divisibility are studied, following M. Wolf and J. Cirac. Basic criteria are studied, as well as a more detailed analysis of the case of 1-qubit channels.

Keywords: quantum information; quantum channels; positive operators; Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad generator; divisibility.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, por toda a paciência.

Agradeço aos meus pais, por toda a inspiração.

E agradeço a Cauã, por todo o suporte.

Conteúdo

Introdução

Denote por $M_n(\mathbb{C})$ as matrizes complexas de ordem n. Neste trabalho iremos estudar os operadores que podem ser escritos na forma

$$T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), \quad T(X) = \sum_i V_i X V_i^*,$$

em que as matrizes $V_i \in M_n(\mathbb{C})$ satisfazem a condição de preservação de traço

$$\sum_i V_i^* V_i = I.$$

Tais operadores são ditos **canais quânticos**, e são objetos centrais no estudo de computação e informação quântica [1, 2, 8, 11, 12, 13, 15]. O estudo de canais quânticos parte das soluções de equações diferenciais associadas a evoluções quânticas dissipativas (ou seja, em que o sistema não se encontra isolado do ambiente externo). Aqui estamos no âmbito dos sistemas quânticos **abertos** [3]. Este contexto contrasta com aquele em que o sistema quântico está isolado do ambiente e a evolução do sistema ocorre de maneira unitária, com tal operador surgindo a partir da equação de Schrödinger associada. Esse seria o âmbito da dinâmica quântica **fechada** [11].

Para o leitor conhecedor de noções básicas de física quântica, a ideia de que dinâmicas quânticas são descritas por operadores unitários é familiar. Por outro lado, talvez a noção de canal quântico possa lhe parecer menos transparente. A relação entre unitariedade e operadores positivos pode ser entendida em termos de interações entre o sistema principal de interesse e o ambiente externo: suponha que temos um sistema dado por uma partícula, cujo estado é ρ, e a mesma é colocada em uma caixa (o ambiente). Vamos assumir que o sistema partícula-caixa é representado por um produto $\rho \otimes \rho_{env}$. Após uma certa evolução unitária U, a partícula não interage mais com a caixa, e isto pode ser representado pelo traço parcial sobre o sistema total, de modo a se poder extrair o estado da partícula resultante [11]:

$$\mathcal{E}(\rho) = tr_{env}(U(\rho \otimes \rho_0)U^*) = \sum_k E_k \rho E_k^*,$$

onde $E_k = \langle e_k | U e_0 \rangle$ é um operador no espaço de estados do sistema principal. Esta última expressão em soma de operadores é justamente um canal quântico. Ilustramos assim a aparição destes objetos no contexto de ruídos quânticos, e esta discussão motiva o estudo matemático que será apresentado neste trabalho.

Neste trabalho iremos nos focar em dois temas principais:

1. Operadores completamente positivos e semigrupos a 1 parâmetro.

2. Divisibilidade de canais quânticos.

O primeiro tema será abordado de tal maneira que este trabalho possa ser visto como uma introdução ao estudo de canais quânticos. Ressaltamos que mecânica quântica não consiste de um pré-requisito para o leitor. Iremos nos concentrar na parte matemática referente a operadores positivos [2, 5], transicionando gradualmente para a questão de explicar a forma geral de um semigrupo completamente positivo. Quanto a este último tema, este certamente tem sua motivação em princípios da física, e faremos os comentários apropriados quando necessário. A forma do gerador de um semigrupo completamente positivo foi estudada de maneira independente, e simultânea, por Gorini, Kossakowski, Sudarshan [7], e por Lindblad [10].

Quando ao segundo tema, revisaremos o trabalho de M. Wolf e J. Cirac [16], onde propriedades mais finas de operadores positivos serão examinadas, de modo a esclarecer a questão: dado um canal quântico, quando este pode ser escrito como o produto de outros dois canais? Isto será feito a partir de uma análise de determinantes, a partir do qual desenvolvimentos mais técnicos serão obtidos. Descreveremos parte destes resultados, bem como ilustraremos a teoria com exemplos de canais agindo em 1 qubit.

Capítulo 1

Operadores positivos: construções básicas, canais quânticos e semigrupos

1.1 Preliminares

1.1.1 Operadores positivos e completamente positivos

Iniciamos com resultados básicos, seguindo Bhatia [2].

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de dimensão finita e seja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (o conjunto dos operadores em $\mathcal{H}$). De maneira geral, identificamos esses operadores com as suas respectivas matrizes em $M_n = M_n(\mathbb{C})$ quando existe uma base natural e não há risco de ambiguidade.

Para $A \in M_n(\mathbb{C})$, denote por A^* a matriz transposta conjugada. Usaremos a notação de brackets $|\psi\rangle$ para denotar um vetor coluna em $\mathbb{C}^n$ e definimos $\langle\psi| := (|\psi\rangle)^*$, o transposto conjugado de $|\psi\rangle$ [11]. Ainda, $\{|i\rangle\}_{i=1,\ldots,n}$ denota a base canônica: $|i\rangle$ é o vetor cuja i-ésima entrada é igual a 1, e as demais são nulas.

Se A é autoadjunto, ou seja, $A^* = A$, o número $\langle x, Ax\rangle$ pertence à reta real. Dizemos que um operador autoadjunto A (ou a matriz correspondente) é **positivo semidefinido**, ou simplesmente **positivo**, denotado $A \geq 0$ se $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Dizemos também que A é **estritamente positivo** se podemos garantir que $\langle x, Ax\rangle > 0$ para todo x. Escreveremos, para matrizes A e B, que $A \geq B$ sempre que $A - B \geq 0$. Em dimensão finita, são equivalentes:

- A é positivo $\Longleftrightarrow$ A é autoadjunto e todos os seus autovalores são não-negativos.

- A é positivo $\iff$ existem vetores $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ tais que os elementos da matriz associada a A são dados por $A_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$.
- A é positivo $\iff$ $A = B^*B$ para alguma matriz B.
- A é positivo $\iff$ $A = B^2$ para alguma matriz **positiva** B. Neste caso, essa matriz B é única; escrevemos $B = A^{1/2}$ e chamamo-na de **raiz quadrada** de A. A é estritamente positivo se, e somente se, $A^{1/2}$ é estritamente positivo.

Dizemos que A é **contrativo**, ou uma **contração**, se $||A|| \leq 1$, onde

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Com respeito a resultados que provaremos posteriormente, lembramos as seguintes decomposições de matrizes:

- Toda matriz T tem uma **decomposição cartesiana**

$$T = A + iB$$

onde A, B são hermitianas.
Basta fazer $A = \dfrac{T + T^*}{2}$, $B = \dfrac{T - T^*}{2i}$. A decomposição cartesiana é única.

- Toda matriz hermitiana A possui uma decomposição em parte positiva e negativa

$$A = A^+ - A^-$$

onde $A^\pm \geq O$.

- Se A é uma contração, podemos escrever $A = \dfrac{1}{2}(U + V)$ onde U, V são unitárias, ou seja, $UU^* = VV^* = I$. De fato, se A é uma contração, os seus valores singulares s_k são menores ou iguais a 1, logo existem números θ_k tais que $s_k = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k})$. Assim, se $A = PU$ é a decomposição polar de A (P positivo, U unitário) podemos escrever $A = \dfrac{1}{2}(V + W)U = \dfrac{1}{2}(VU + WU)$.

Agora, consideremos $\Phi \in \mathcal{L}(M_d)$, um operador no espaço de matrizes. O operador Φ é dito **positivo** se $\Phi(A) \geq 0$ para todo $A \geq 0$. Φ é dito **unital** se $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, a identidade de $\mathcal{L}(M_d)$. Dizemos que Φ é **estritamente positivo** se $\Phi(A) > 0$ para todo $A > 0$. Um operador positivo Φ é também estritamente positivo se, e somente se, $\Phi(\mathbb{1}) > 0$.

A transposição $A \mapsto A^T$ é um exemplo de operador positivo e unital.

Se $X \in M_d$, $\Phi(A) = XAX^*$ define um operador positivo. Além disso, Φ é unital se, e somente se, X é unitária.

Lema 1.1. *Todo operador positivo Φ preserva adjunção, ou seja, $\Phi(T^*) = \Phi(T)^*$.*

Prova. Mostremos que A hermitiana $\Rightarrow \Phi(A)$ hermitiana. De fato, $\Phi(A) = \Phi(A^+) - \Phi(A^-)$ é a diferença entre duas matrizes positivas, portanto é hermitiana. Agora, uma matriz T pode ser decomposta em parte real A e imaginária B, portanto:

$$\Phi(T)^* = (\Phi(A) + i\Phi(B))^* = \Phi(A) - i\Phi(B) = \Phi(A - iB) = \Phi(T^*).$$

$\square$

Teorema 1.2. *(Desigualdade de Kadison) Seja Φ positiva e unital (portanto estritamente positiva). Para toda matriz hermitiana A, temos*

$$\Phi(A)^2 \leq \Phi(A^2)$$

Prova. Pelo teorema espectral, $A = \sum \lambda_j P_j$ onde λ_j são os autovalores de A_j e P_j são projeções, com $\sum P_j = I$. Então $A^2 = \sum \lambda^2 P_j$,

$$\Phi(A) = \sum \lambda_j \Phi(P_j), \quad \Phi(A^2) = \sum \lambda^2 \Phi(P_j), \quad \sum \Phi(P_j) = I,$$

$$\begin{bmatrix} \Phi(A^2) & \Phi(A) \\ \Phi(A) & I \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} \lambda_j^2 & \lambda_j \\ \lambda_j & 1 \end{bmatrix} \otimes \Phi(P_j).$$

Essa soma é positiva porque cada um dos termos é positivo. Por [[2], Teo. 1.3.3], $\Phi(A^2) \geq \Phi(A^2)$. $\square$

Teorema 1.3. *(Choi) Seja Φ positiva e unital. Para toda matriz normal A,*

$$\Phi(A)\Phi(A^*) \leq \Phi(A^*A), \quad \Phi(A^*)\Phi(A) \leq \Phi(A^*A).$$

Prova. A prova é semelhante à do teorema anterior. Temos

$$A = \sum \lambda_j P_j,\ A^* = \sum \overline{\lambda_j} P_j,\ A^*A = \sum |\lambda_j|^2 P_j,$$

$$\begin{bmatrix} \Phi(A^*A) & \Phi(A) \\ \Phi(A^*) & I \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} |\lambda_j|^2 & \lambda_j \\ \overline{\lambda_j} & 1 \end{bmatrix} \otimes \Phi(P_j).$$

$\square$

Teorema 1.4. *(Russo-Dye) Se Φ é positivo e unital, então $\|\Phi\| = 1$.*

Prova. Mostremos primeiramente que $\|\Phi(U)\| \leq 1$ quando U é unitário. Nesse caso, os autovalores λ_j de U têm norma unitária. Da decomposição espectral $U = \sum \lambda_j P_j$ temos:

$$\begin{bmatrix} I & \Phi(U) \\ \Phi(U)^* & I \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} 1 & \lambda_j \\ \overline{\lambda_j} & 1 \end{bmatrix} \otimes \Phi(P_j) \geq O.$$

Por [[2], Prop. 1.3.1], $\|\Phi(U)\| \leq 1$. Agora, se A é uma contração qualquer, podemos escrevê-la como $A = \frac{1}{2}(U + V)$ onde U, V são unitários. Então

$$\|\Phi(A)\| = \frac{1}{2}\|\Phi(U + V)\| \leq \frac{1}{2}(\|\Phi(U)\| + \|\Phi(V)\|) \leq 1.$$

Portanto $\|\Phi\| \leq 1$. Como Φ é unital, $\|\Phi\| = 1$. □

Cada operador $\Phi \in \mathcal{L}(M_d)$ induz um operador $\Phi_m \in \mathcal{L}(M_m(M_d))$ dado por $\Phi_m(A)_{ij} = \Phi(A_{ij})$ para todo $i \leq i, j \leq m$ (note que A_{ij} são matrizes em M_d). Identificando $M_m(M_d)$ com M_{md}, podemos também escrever $\Phi_m = \Phi \otimes \mathbb{1}_m$. Dizemos que Φ é **completamente positivo** se Φ_m é positivo para todo m.

A transposição $\Phi(A) = A^T$ é um exemplo de operador positivo que não é completamente positivo, pois nesse caso Φ_2 não é positivo. De fato, considere a matriz $A \in M_2(M_2)$ com entradas $E_{ij} = |i\rangle\langle j|$. Então A é positiva, mas $(\Phi(A)_{ij}) = (E_{ij}^T)$ não é uma matriz positiva.

Se $V_1, \ldots, V_l \in M_d$, o operador dado por $\Phi(A) = \sum_{j=1}^{l} V_j^* A V_j$ é completamente positivo. O seguinte teorema, devido a Kraus, mostra que todos os operadores completamente positivos são dessa forma. A demonstração segue [2].

Teorema 1.5. *(Kraus) Seja $\Phi : M_n \to M_k$ uma aplicação linear completamente positiva. Existem $V_j \in M_{n\times k}$, $1 \leq j \leq nk$, tais que*

$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^{nk} V_j^* A V_j.$$

Prova. Seja $E_{rs} = |r\rangle\langle s| \in M_n$ a matriz cuja entrada rs é igual a um e as demais são nulas. Como E_{rs} geram M_n, é suficiente encontrar matrizes V_j tais que valha $\Phi(E_{rs}) = \sum_{j=1}^{nk} V_j^* E_{rs} V_j$.

Podemos identificar os vetores $v \in \mathbb{C}^{nk}$ com matrizes $V \in M_{n\times k}$. Assim, $V^* E_{rs} V = x_r x_s^*$, onde x_r é o r-ésimo vetor-linha de V. Se pensarmos em vv^* como um elemento de $M_n(M_k)$, teremos $vv^* = [x_r x_s^*] = [V^* E_{rs} V]$.

Agora, a matriz $[E_{rs}] = [e_r e_s^*]$ é um elemento positivo de $M_n(M_n)$, logo $[\Phi(E_{rs})]$ é um elemento positivo de $M_n(M_k) = M_{nk}$. Pelo teorema espectral, existem $v_j \in \mathbb{C}^{nk}$ tais que

$$[\Phi(E_{rs})] = \sum_{j=1}^{nk} v_j v_j^* = \sum_{j=1}^{nk} [V_j^* E_{rs} V_j]$$

o que conclui a prova. □

Essa representação do operador Φ é chamada **representação de Kraus** de Φ e os operadores V_j são chamados **operadores de Kraus**. O menor número de operadores de Kraus V_j necessários para escrever $\Phi(A) = \sum_j V_j A V_j^*$ é chamado **posto de Kraus** de Φ.

O seguinte importante teorema pode ser encontrado em [5]:

Teorema 1.6. *(Choi) $\Phi \in \mathcal{L}(M_d)$ é completamente positivo se, e somente se, $\Phi \otimes \mathbb{1}_d$ é positivo.*

Os seguintes resultados, que podem ser encontrados em [15], dizem respeito a um isomorfismo entre canais e estados, o qual será muito usado para deduzir as propriedades dos canais a partir da teoria que já foi desenvolvida sobre estados quânticos.

Teorema 1.7. *$T \in \mathcal{L}(M_d)$ é completamente positivo se, e somente se, $(T \otimes \mathbb{1}_d)(|\omega\rangle\langle\omega|) \geq 0$, onde $\omega = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^{d} |jj\rangle$.*

No contexto de mecânica quântica, o estado $\tau = (T \otimes \mathbb{1}_d)(|\omega\rangle\langle\omega|)$ é chamado **estado de Jamiolkowski** do canal T. A correspondência entre o canal T e o estado τ é biunívoca e $\mathrm{Tr}[AT(B)] = d\mathrm{Tr}[\tau A \otimes B^T]$.

O teorema nos diz que T é completamente positivo se, e somente se, $\tau \geq 0$. Além disso [15]:

- $\tau = \tau^* \iff T(B^*) = T(B)^*$ para todo $B \in M_d$.
- O posto de τ é igual ao posto de Kraus de T.
- $T(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \iff \mathrm{Tr}_B[\tau] = \mathbb{1}/d$.
- $\mathrm{Tr}_A[\tau] = T^*(\mathbb{1})^T/d$, por conseguinte $T^*(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \iff \mathrm{Tr}_A[\tau] = \mathbb{1}/d$.

1.1.2 Canais quânticos

Nesta seção consideramos o espaço M_d das matrizes munido com o produto interno de Hilbert-Schmidt $\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}(A^*B)$ e a norma induzida pelo mesmo, $||A||_2 := \sqrt{\langle A, A\rangle}$. Na mecânica quântica, o estado de um sistema físico é descrito por um operador linear não-negativo de traço um, chamado **operador densidade**. Por isso, estaremos interessados em operadores lineares $T : M_d \to M_d$ que poderão descrever a evolução de sistemas físicos com observáveis discretos. Estes operadores T devem ser completamente positivos, isto é, $T \otimes \mathbb{1}_N$ deve ser um operador positivo em $M_d \otimes M_N$, onde $\mathbb{1}_N$ é a identidade em $\mathcal{L}(M_N)$. Para que T seja completamente positivo, é suficiente que $T \otimes M_d$ seja positivo. [5] Os operadores com essas propriedades e que além disso preservam traço (ou seja, $\mathrm{Tr}(T(A)) = \mathrm{Tr}(A)$) são chamados de **canais quânticos**, e são justamente aqueles que podem ser escritos na forma descrita pelo Teorema 1.5.

Como $\mathcal{L}(M_d)$ é isomorfo a M_{d^2}, os elementos deste espaço de Hilbert M_d também podem ser representados por matrizes $\hat{T}$ com componentes

$$\hat{T}_{\alpha,\beta} = \mathrm{Tr}[F_\alpha^* T(F_\beta)],$$

onde $\{F_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,d^2}$ é uma base ortonormal de M_d. Três bases convenientes para este trabalho são a) a base canônica $\{|i\rangle\langle j|\}_{i,j=1,\dots,d}$, b) as matrizes de Gell-Mann (matrizes diagonais ou matrizes de Pauli generalizadas para o M_n) e c) a seguinte base de operadores unitários normalizados:

$$F_\alpha = \frac{1}{\sqrt{d}} U_{\alpha_1,\alpha_2}, \quad U_{\alpha_1,\alpha_2} = \sum_{r=0}^{d-1} e^{2\pi i r \alpha_2/d} |\alpha_1 + r\rangle\langle r|.$$

Podemos associar a cada matriz $A \in M_d$ um vetor $vec(A) \in M_{d^2}$ obtido da concatenação dos vetores-linha de A. Nesse caso, a matriz $\hat{T}$ de T na base canônica é também a representação de T segundo a identificação $A = vec(A)$. Ou seja, $\hat{T}(vec(A)) = vec(T(A))$.

A norma mais natural para o estudo de operadores em $\mathcal{L}(M_d)$ é dada por:

$$||T|| := \sup_{||A||_2=1} ||T(A)||_2 = ||\hat{T}||_\infty$$

Por conveniência, utilizaremos a seguinte notação:

- $\mathfrak{P} \subset \mathcal{L}(M_d)$ é o conjunto dos operadores positivos;
- $\mathfrak{P}^+ \subset \mathcal{L}(M_d)$ é o conjunto dos operadores completamente positivos;
- $\mathfrak{T} \subset \mathcal{L}(M_d)$ é o conjunto dos operadores positivos e que preservam traço;

- $\mathfrak{T}^+ \subset \mathcal{L}(M_d)$ é o conjunto dos operadores completamente positivos e que preservam traço (também chamados simplesmente de canais quânticos).

No caso $T \in \mathfrak{T}^+$ temos $\sum K_\alpha^* K_\alpha = I$. Estes operadores não são determinados unicamente, porém se $\{L_\beta\}$ são outros operadores de Kraus que dão origem ao mesmo canal T, existe uma matriz unitária $U = (u_{\alpha\beta})$ tal que $K_\alpha = \sum_\beta u_{\alpha\beta} L_\beta$ [13].

Pelo isomorfismo de Choi–Jamiołkowski, cada canal quântico T está associado a um estado (operador de densidade) τ em $M_d \otimes M_d$ dado por $\tau = (T \otimes \mathbb{1}_d)(\omega)$, $\omega = \frac{1}{d}\sum_{i,j=1}^d |ii\rangle\langle jj|$.

Denotaremos por T^* o **dual** de T definido por $\mathrm{Tr}[T^*(A)B] = \mathrm{Tr}[AT(B)]$. A representação matricial de T^* é dada pela adjunta $\hat{T}^*$. O operador T preserva traço se, e somente se, T^* é unital, ou seja, $T^*(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

1.1.3 Semigrupos contínuos e forma de Lindblad

Nesta seção seguiremos [7] no estudo de semigrupos contínuos completamente positivos. Esses semigrupos descrevem a evolução markoviana de sistemas quânticos a tempo contínuo. Veremos que os geradores desses semigrupos têm uma forma especial.

Um **semigrupo** Λ em M_n é uma família de operadores lineares limitados Λ_t, $t \geq 0$, agindo em M_n, tais que

$$\Lambda_t \Lambda_s = \Lambda_{t+s}, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}^+ \text{ e } \Lambda_0 = I.$$

Se $t \mapsto \Lambda_t$ é contínua com respeito a norma de operador de M_n, então Λ é dito **uniformemente contínuo** (ou simplesmente **contínuo**). Esta classe de semigrupos é caracterizada pelo seguinte resultado:

Teorema 1.8. *As seguintes afirmações são equivalentes para um semigrupo Λ em M_n:*

1. *Λ é uniformemente contínuo.*
2. *Existe um operador limitado $\mathcal{L} : M_n \to M_n$ tal que*

$$\Lambda_t = e^{t\mathcal{L}}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}^+.$$

Se tais condições são satisfeitas, então

$$\mathcal{L} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}(\Lambda_t - I).$$

O operador $\mathcal{L}$ é dito **gerador** de Λ.

Definição 1.9. *Um* **semigrupo dinâmico** *é um semigrupo contínuo* $\Lambda : t \to \Lambda_t$, $t \in \mathbb{R}^+$, *de operadores lineares* $\Lambda_t : M_n \to M_n$ *positivos e que preservam traço.*

Definição 1.10. $\Lambda^* : M_n \to M_n$ *é definido por*

$$\mathrm{Tr}[(\Lambda_t \sigma)A] = \mathrm{Tr}[\sigma(\Lambda_t^* A)], \quad \sigma, A \in M_n.$$

Dizemos que Λ *é* **completamente positivo** *se o operador* Λ_t^*, $t \in \mathbb{R}^+$ *é completamente positivo. Semigrupos dinâmicos que descrevem a evolução de sistemas físicos devem ser completamente positivos [11].*

Nosso objetivo nesta seção é mostrar:

Teorema 1.11. *[7, 10] Um operador linear* $L : M_n \to M_n$ *é o gerador de um semigrupo dinâmico completamente positivo de* M_n *se, e somente se, ele pode ser expresso na forma:*

$$L\rho = -i[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N^2-1} c_{ij} \left([F_i, \rho F_j^*] + [F_i \rho, F_j^*] \right),$$

onde $H = H^*$, $\mathrm{Tr}(H) = 0$, $\mathrm{Tr}(F_i) = 0$ *e* $\mathrm{Tr}(F_i^* F_j) = \delta_{i,j}$.

Equivalentemente:

$$L\rho = -i[H, \rho] + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} c_{ij} \left(F_i \rho F_j^* - \frac{1}{2}\{F_j^* F_i, \rho\} \right).$$

Esta forma específica para L associada a um semigrupo completamente positivo é dita **forma de Lindblad**.

Lema 1.12. $t \to \Lambda_t$ *é um semigrupo dinâmico completamente positivo de* M_n *se, e somente se,* $t \to \Lambda_t \otimes \mathbb{1}_N$ *é um semigrupo dinâmico de* $M_n \otimes M_n$.

Lema 1.13. *Seja* Γ *um operador linear* $M_N \to M_N$ *e seja* $\{F_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,N^2}$ *um conjunto ortonormal completo (c.o.s) em* M_N*. Então* Γ *pode ser unicamente escrito na forma*

$$\Gamma A = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N^2} c_{\alpha\beta} F_\alpha A F_\beta^*,$$

para certos números complexos $c_{\alpha\beta}$*. Além disso, se* $\Gamma A^* = (\Gamma A)^*$*, então* $c_{\alpha\beta} = \overline{c}_{\beta\alpha}$.

Prova. A expressão $\sum_{\alpha=1}^{N^2} F_\alpha^* A F_\alpha$ não depende de escolha de c.o.s. Escolhendo o c.o.s $\{E_{ij}\}$ obtemos:

$$\sum_{i,j=1}^{N} E_{ij}^* A E_{ij} = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ji} A E_{ij} = \sum_{i,j=1}^{N} A_{jj} E_{ii} = \sum_{i=1}^{N} A_{ii} \sum_{j=1}^{N} E_{jj} = \mathrm{Tr}(A)\mathbb{1}.$$

Agora, seja $\{G_\alpha\}$ um c.o.s qualquer em M_n. Então $\mathcal{L}(M_n)$ é um espaço de produto interno com

$$\langle \Gamma, \Phi \rangle := \sum_{\alpha=1}^{N^2} \mathrm{Tr}[(\Gamma G_\alpha)^* (\Phi G_\alpha)].$$

Seja $\Gamma_{\alpha\beta} := F_\alpha A F_\beta^*$, então $\{\Gamma_{\alpha\beta}\}$ é um c.o.s em $\mathcal{L}(M_n)$, pois:

$$\langle \Gamma_{\alpha\beta}, \Gamma_{\mu\nu} \rangle = \sum_{\lambda=1}^{N^2} \mathrm{Tr}[(\Gamma_{\alpha\beta} G_\lambda)^* (\Gamma_{\mu\nu} G_\lambda)] = \sum_{\lambda=1}^{N^2} \mathrm{Tr}[(F_\alpha G_\lambda F_\beta^*)^* (F_\mu G_\lambda F_\nu^*)]$$

$$= \mathrm{Tr}\left[F_\beta \left(\sum_{\lambda=1}^{N^2} G_\lambda^* F_\alpha^* F_\mu G_\lambda \right) F_\nu^* \right] = \mathrm{Tr}(F_\alpha^* F_\mu) \mathrm{Tr}(F_\nu^* F_\beta) = \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu}$$

A última afirmação do lema segue facilmente. □

Lema 1.14. *Seja $\{F_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,N^2}$ um c.o.s. em M_n tal que $F_{N^2} = (1/N)^{1/2}\mathbb{1}$ e seja L um operador linear $M_n \to M_n$ tal que $(LA)^* = LA^*$ e $\mathrm{Tr}(LA) = 0$ ($\forall A \in M_n$). Então L pode ser unicamente escrito na forma:*

$$LA = -i[H, A] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N^2-1} c_{i,j} \left([F_i, A F_j^*] + [F_i A, F_j^*] \right)$$

onde $H = H^*$, $\mathrm{Tr}(H) = 0$ e $c_{ij} = \overline{c}_{ji}$.

Prova. Do lema anterior, temos:

$$LA = \frac{1}{N} c_{N^2 N^2} A + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N^2-1} (c_{iN^2} F_i A + c_{N^2 i} A F_i^*) + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} c_{ij} F_i A F_j^*$$

$$= -i[H, A] + \{G, A\} + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} c_{ij} F_i A F_j^*,$$

onde $H = (1/2i)(F^* - F)$ e $G = (1/2N)c_{N^2N^2}\mathbb{1} + (1/2)(F^* + F)$ com $F = (1/N)^{1/2}\sum_{i=1}^{N^2-1} c_{iN^2}F_i$. Ainda,

$$0 = \mathrm{Tr}(LA) = \mathrm{Tr}\left[\left(2G + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} c_{ij}F_j^*F_i\right)A\right]$$

implica que $G = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N^2-1} c_{ij}F_j^*F_i$, o que conclui a demonstração. □

Lema 1.15. *Seja* $\{F_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,N^2}$ *um c.o.s em* M_n*, então*

$$\left\{\hat{P}^\alpha | \hat{P}^\alpha = \sum_{i,j=1}^{N} P_{ij}^\alpha \otimes E_{ij};\ P_{ij}^\alpha = F_\alpha E_{ij} F_\alpha^*;\ \alpha = 1, \ldots, N^2\right\}$$

é uma família completa de projeções auto-adjuntas ortogonais em $M_n \otimes M_n$*.*

Prova. Um operador $\hat{P} = \sum_{i,j=1}^{N} P_{ij}^\alpha \otimes E_{ij}$ é uma projeção auto-adjunta se $P_{ij}^* P_{ji}$ e $\sum_{l=1}^{N} P_{il}P_{lj} = P_{ij}$. Dois operadores $\hat{P}$, $\hat{Q}$ dessa forma são ortogonais se $\sum_{l=1}^{N} P_{il}Q_{lj} = 0$. De fato, temos $P_{ij}^{\alpha *} = (F_\alpha E_{ij} F_\alpha^*)^* = F_\alpha E_{ji} F_\alpha^* = P_{ji}^\alpha$,

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{N} P_{il}^\alpha P_{lj}^\beta = \sum_{l=1}^{N} F_\alpha E_{il} F_\alpha^* F_\beta E_{lj} F_\beta^* &= F_\alpha \left(\sum_{l=1}^{N} E_{il} F_\alpha^* F_\beta E_{lj}\right) F_\beta^* \\ &= F_\alpha E_{ij} F_\beta^* \mathrm{Tr}(F_\alpha^* F_\beta) = \delta_{\alpha\beta} P_{ij}^\alpha.\end{aligned}$$

□

O último elemento necessário que precisamos é o seguinte resultado, devido a A. Kossakowski.

Teorema 1.16. *([9]) Um operador* $L : M_n \to M_n$ *é o gerador de um semigrupo dinâmico positivo se, e somente se, valem as condições:* $\mathrm{Tr}[P_r(LP_s)] \geq 0$*,* $r \neq s = 1, \ldots, N$ *e* $\sum_{r=1}^{N} \mathrm{Tr}[P_r(LP_s)] = 0$*,* $s = 1, \ldots, N$ *para toda família completa de projeções auto-adjuntas unidimensionais ortogonais* $\{P_1, \ldots, P_N\}$ *em* M_n*.*

Agora podemos provar o resultado principal.

Prova do Teorema 1.11. Suponha que Λ_t é o semigrupo gerado pelo operador L dado na forma de Lindblad. O gerador do semigrupo $t \to \Lambda_t \otimes \mathbb{1}_N$ é $L \otimes \mathbb{1}_N$. Pelo Lema 1.12, é suficiente mostrar que $L \otimes \mathbb{1}_N$ satisfaz as condições do teorema 2.1. Como $\mathrm{Tr}(L\rho) = 0$ para qualquer $\rho \in M_n$, precisamos apenas verificar que

$$\mathrm{Tr}\{\hat{P}^1[(L \otimes 1_N)\hat{P}^2]\} \geq 0$$

para todos os pares $\hat{P}^1$, $\hat{P}^2$ de projeções auto-adjuntas ortogonais em $M_n \otimes M_n$. De fato:

$$\mathrm{Tr}\{\hat{P}^1[(L\otimes 1_N)\hat{P}^2]\} = \sum_{i,j=1}^{N} \mathrm{Tr}[P^1_{ij}(LP^2_{ji})]$$

$$= -i\sum_{i,j=1}^{N} \mathrm{Tr}(P^1_{ij}[H,P^2_{ji}]) + \sum_{p,q=1}^{N^2-1} c_{pq} \sum_{i,j=1}^{N} [\mathrm{Tr}(P^1_{ij}F_pP^2_{ji}F^*_q)$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(P^1_{ij}F^*_qF_pP^2_{ji} + P^1_{ij}P^2_{ji}F^*_qF_p)]$$

$$= \sum_{p,q=1}^{N^2-1} c_{pq} \sum_{i,j=1}^{N} \mathrm{Tr}(P^1_{ij}F_pP^2_{ji}F^*_q)$$

$$= \sum_{p,q=1}^{N^2-1} c_{pq} \sum_{i,j,k,l=1}^{N} \mathrm{Tr}(P^1_{ik}P^1_{kj}F_pP^2_{jl}P^2_{li}F^*_q)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{N}\sum_{p,q=1}^{N^2-1} c_{pq}\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{j=1}^{N} P^1_{kj}F_pP^2_{jl}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} P^1_{ki}F_qP_{il}\right)^*\right] \geq 0,$$

onde a última desigualdade é devido a termos $\{c_{pq}\} \geq 0$.

Agora, suponha que $L : M_n \to M_n$ é gerador de um semigrupo dinâmico completamente positivo em M_n. Temos $\mathrm{Tr}(LA) = 0$ e $(LA)^* = LA^*$ para todo $A \in M_n$. Pelo Lema 1.14, L pode ser escrito na forma de Lindblad com $H = H^*$, $\mathrm{Tr}(H) = 0$ e $c_{ij} = \bar{c}_{ji}$. Como a matriz $\{c_{ij}\}$ é auto-adjunta, existe um conjunto ortonormal de matrizes de traço nulo $\{G_1, \dots, G_{N^2-1}\}$ tal que

$$L\rho = -i[H,\rho] + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N^2-1} \lambda_p([G_p, \rho G^*_p] + [G_p\rho, G^*_p]).$$

Defina $\hat{P}^q = \sum_{i,j=1}^{N}(G_qE_{ij}G^*_q)\otimes E_{ij}$ $(q = 1, \dots, N^2-1)$ e $\hat{P} = \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} \otimes E_{ij}$. Pelo Teorema 1.16,

$$0 \leq N\mathrm{Tr}\{\hat{P}_q[(L\otimes \mathbb{1}_N)\hat{P}]\} = \sum_{p=1}^{N^2-1} \lambda_p \sum_{i,j=1}^{N} \mathrm{Tr}(G_qE_{ij}G^*_qG_pE_{ji}G^*_p)$$

$$= \sum_{p=1}^{N^2-1} \lambda_p \mathrm{Tr}(G^*_qG_p)\mathrm{Tr}(G_qG^*_p) = \lambda_q$$

□

Observação Sejam $\{F_\alpha\}$ ($\alpha = 1, \ldots, d^2$) um c.o.s de matrizes em M_d. Vimos que os operadores da forma $A \mapsto F_\alpha A F_\beta^*$ formam um c.o.s em $\mathcal{L}(M_d)$. Seja $T(A) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} F_\alpha A F_\beta^*$, então $\mathrm{Tr}[AT(B)] = \mathrm{Tr}\left(A \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} F_\alpha B F_\beta^*\right) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} F_\beta^* A F_\alpha B\right)$, portanto $T^*(A) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} F_\beta^* A F_\alpha$. Note que isso não é o mesmo que $T(A)^*$, que é igual a $T(A^*)$ se $(c_{\alpha\beta})$ é hermitiana. Daí a forma de Lindblad

$$L\rho = -i[H,\rho] + \sum_{i,j=1}^{d^2-1} c_{ij} \left(F_i \rho F_j^* - \frac{1}{2}\{F_j^* F_i, \rho\}\right)$$

pode ser equivalentemente escrita como

$$L\rho = -i[H,\rho] + \phi(\rho) - \frac{1}{2}\{\phi^*(\mathbb{1}), \rho\},$$

onde ϕ é completamente positiva.

O seguinte resultado, apresentado em [16], é de interesse independente e é importante para a discussão do próximo capítulo.

Lema 1.17. *(Aproximação markoviana) Para todo canal T in $\mathfrak{T}^+$ (operador completamente positivo que preserva traço) temos que $e^{t(T-I)}$, $t \geq 0$ é um semigrupo completamente positivo. Além disso, se U_0 é a conjugação unitária tal que o supremo $\sup_U \mathrm{Tr}[TU]$ é atingido em $U = U_0$, então $(TU_0 - I)$ é gerador de um semigrupo puramente dissipativo (ou seja, para o qual a parte hermitiana é nula).*

Prova. Para mostrar que T é gerador de um semigrupo completamente positivo, vamos colocá-lo na forma de Lindblad. Seja $\phi(\rho) := \sum_\alpha A_\alpha \rho A_\alpha^*$ com operadores de Kraus $A_\alpha = K_\alpha - x_\alpha \mathbb{1}$, onde $\{K_\alpha\}$ são os operadores de Kraus de T e (x_α) é um vetor unitário qualquer. Então:

$$\begin{aligned}
T(\rho) &= \sum_\alpha (A_\alpha + x_\alpha \mathbb{1})\rho(A_\alpha + x_\alpha \mathbb{1})^* \\
&= \sum_\alpha A_\alpha \rho A_\alpha^* + \overline{x}_\alpha A_\alpha \rho + x_\alpha \rho A_\alpha^* + |x_\alpha|^2 \rho \\
&= \phi(\rho) + \kappa\rho + \rho\kappa^* + \rho,
\end{aligned}$$

onde $\kappa := \sum_\alpha \overline{x}_\alpha A_\alpha$. Ou seja, $(T - I)(\rho) = \phi(\rho) + \kappa\rho + \rho\kappa^*$

A condição $T^*(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ (T preserva traço) implica $\phi^*(\mathbb{1}) + \kappa + \kappa^* = 0$. Portanto, a parte hermitiana de κ é $-\phi^*(\mathbb{1})/2$. Podemos escrever $\kappa = -\phi^*(\mathbb{1})/2 - iH$ com H

hermitiana, o que deixa $T - I$ na forma de Lindblad e prova a primeira afirmação do lema.

Note que o operador κ na expressão $(T-I)(\rho) = \phi(\rho) + \kappa\rho + \rho\kappa^*$ não é único. Para qualquer vetor (a_α), temos também:

$$(T-I)(\rho) = \sum_\alpha (A_\alpha - a_\alpha \mathbb{1})\rho(A_\alpha - a_\alpha \mathbb{1})^* + \kappa_\alpha \rho + \rho\kappa_\alpha^*,$$

onde $\kappa_\alpha := \kappa + \sum_\alpha \overline{a}_\alpha A_\alpha - |a_\alpha|^2 \mathbb{1}/2 = \sum_\alpha (\overline{x}_\alpha + \overline{a}_\alpha)(K_\alpha - x_\alpha \mathbb{1}) - |a_\alpha|^2 \mathbb{1}/2$. Os operadores de Kraus de ϕ_a têm traço zero se, e somente se, $x_\alpha + a_\alpha = \mathrm{Tr}(K_\alpha)/d$. Escolha então este vetor (a_α) especial. Neste caso, temos que, se $\sum_\alpha \mathrm{Tr}(\overline{K}_\alpha) K_\alpha \geq 0$, então $\mathrm{Im}(\kappa_\alpha) = \sum_\alpha \mathrm{Im}((\overline{x}_\alpha + \overline{a}_\alpha)K_\alpha - \overline{a}_\alpha x_\alpha \mathbb{1})$ é um certo múltiplo de $i\mathbb{1}$. Mostremos que isso acontece quando temos TU_0 no lugar de T. Isto concluirá a demonstração, lembrando que $H = \mathrm{Im}(\kappa_\alpha)$.

Vamos considerar a matriz de densidade $\tau = (T \otimes I)\left(\frac{1}{d}\sum_{i,j=1}^{d} |ii\rangle\langle jj|\right)$ em $M_d \otimes M_d$
e os estados $|\phi_V\rangle = \sqrt{d}(V \otimes \mathbb{1})\sum_{i=1}^{d}|ii\rangle$ em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Temos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(TU_0) &= \sup_V \sum_\alpha \mathrm{Tr}(\overline{K_\alpha V})\mathrm{Tr}(K_\alpha V) \leq \sup_{V,V'} \left|\sum_\alpha \mathrm{Tr}(\overline{K_\alpha V'})\mathrm{Tr}(K_\alpha V)\right| \\ &= \sup_{V,V'} |\langle \phi_{V'}|\tau|\phi_V\rangle| \leq \sup_V \left|\sqrt{\tau}|\phi_V\rangle\right|^2 = \mathrm{Tr}(TU_0).\end{aligned}$$

A igualdade $\sup_V \sum_\alpha \mathrm{Tr}(\overline{K_\alpha V})\mathrm{Tr}(K_\alpha V) = \sup_{V,V'} \left|\sum_\alpha \mathrm{Tr}(\overline{K_\alpha V'})\mathrm{Tr}(K_\alpha V)\right|$ implica que este supremo é atingido justamente quando $V' = V$. Resta apenas mostrar que

$$\sum_\alpha \mathrm{Tr}(\overline{K_\alpha V'})\mathrm{Tr}(K_\alpha V)$$

pode ser feito não-negativo. De fato,

$$\sum_\alpha \mathrm{Tr}(\overline{K_\alpha V'})\mathrm{Tr}(K_\alpha V) = \mathrm{Tr}\left(\sum_\alpha (\overline{K_\alpha V'}) \otimes K_\alpha (I \otimes V)\right).$$

$\square$

Capítulo 2

Divisibilidade

Neste capítulo discutiremos a noção de divisibilidade para canais quânticos, seguindo [16]. Os preliminares técnicos a seguir, referentes a determinantes, fornecem as construções básicas.

2.1 Determinantes de canais quânticos

A mais importante propriedade do determinante de operadores é a sua compatibilidade com a multiplicação, ou seja, $\det(TU) = \det(T)\det(U)$ para quaisquer operadores T, U. Portanto, o estudo de determinantes é fundamental para a investigação da divisibilidade de canais quânticos, como evidencia o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Seja $T : M_d \to M_d$ um operador em $\mathfrak{T}$.*

1. $\det(T)$ *é real e contido em* $[-1, 1]$.
2. $|\det(T)| = 1$ *se, e somente se, T é uma conjugação unitária ou unitariamente equivalente à transposição.*
3. *Se T é uma conjugação unitária,* $\det(T) = 1$*; e se* $\det(T) = -1$*, T é unitariamente equivalente à transposição. Vale a bi-implicação se, e somente se, $\lfloor d/2 \rfloor$ é ímpar.*

Prova. Seja T uma transformação linear positiva e que preserva traço (escreveremos **p.p.t**) em M_d. Lembremos que $T(A^*) = T(A)^*$ [2]. Logo, os autovalores de T aparecem aos pares conjugados e $\det(T)$ é real. É possível mostrar que $|T| \leq \sqrt{d}$ para todo T p.p.t em $\mathcal{L}(M_d)$ [12] portanto o raio espectral $\lim_{m\to\infty} |T^m|^{1/m} \leq 1$ e $\det(T) \in [-1, 1]$.

Se $|\det(T)| = 1$, todos os autovalores são fases. Existe uma sequência n_i tal que $T_\infty = \lim_{i\to\infty} T^{n_i}$ existe e todos os seus autovalores são iguais a 1 (teorema de aproximação de Dirichlet). Veremos que isso implica $T_\infty = \mathbb{1}$. De fato, suponha que há um bloco de ordem 2 na diagonal da decomposição de Schur da matriz de T^{n_i}, que pode ser escrito como $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & e^{i\epsilon} \end{pmatrix}$ (a menos de uma fase). Então, na decomposição de $(T^{n_i})^p$ temos o bloco $\begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=0}^{p-1} e^{ik\epsilon} c \\ 0 & e^{ip\epsilon} \end{pmatrix}$. Vimos que $\epsilon \to 0$ quando $n_i \to \infty$, portanto a norma de $(T^{n_i})^p$ poderia ser feita arbitrariamente grande a não ser que $c \to 0$, ou seja, $T_\infty = \mathbb{1}$.

A inversa $T^{-1} = T_\infty T^{-1} = \lim_{i\to\infty} T^{n_i - 1}$ é também p.p.t. Isto implica que T leva estados puros (i.e., as projeções de dimensão 1) em estados puros. De fato, suponha que Ψ é um estado puro e $T(\Psi) = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$. Aplicando T^{-1} dos dois lados, teríamos uma decomposição convexa de Ψ, o que implica $\rho_1 = \rho_2$. Logo, $T(\Psi)$ é puro.

Além disso, T é unital. Suponha por absurdo que $T(\mathbb{1}) \neq \mathbb{1}$. Então o menor autovalor de $T(\mathbb{1})$ satisfaz $\lambda_{\min} < 1$. Se chamarmos de $|\lambda\rangle$ é o autovetor correspondente, temos que $\mathbb{1} - \frac{\lambda_{\min}+1}{2} T^{-1}(|\lambda\rangle\langle\lambda|)$ é positivo, mas sua imagem por T não é positiva, o que é absurdo.

Todo mapa p.p.t. unital é contrativo (Russo-Dye, [2]). Mas como isso é verdade tanto para T como para T^{-1}, segue que $||T(A)|| = ||A||$, ou seja, T preserva o produto interno $[A, B] = \mathrm{Tr}(B^* A)$. Pelo Teorema de Wigner [15], T é compatível com um operador no espaço de Hilbert que é unitário ou antiunitário. Se T é uma conjugação unitária $T(A) = UAU^*$, $\det(T) = \det(U \otimes \overline{U}) = 1$. Se T é anti-unitária, ela é unitariamente equivalente à transposição $T(A) = A^T$. Pode-se calcular o determinante usando a base de Gell-Mann de M_d, que consiste em $d(d+1)/2$ matrizes simétricas e $d(d-1)/2$ antissimétricas. Portanto, o determinante da transposição é -1 se, e somente se, $d(d-1)/2$ é ímpar, ou equivalentemente $\lfloor d/2 \rfloor$ é ímpar.

□

Corolário 2.2. 1. *$T, T^{-1} \in \mathfrak{T}$ se, e somente se, T é uma conjugação unitária ou unitariamente equivalente à transposição.*

2. *O determinante de $T \in \mathfrak{T}$ é decrescente sob composição, ou seja, $|\det(T)| \geq |\det(TT')|$ para todo $T' \in \mathfrak{T}$, e vale a igualdade se, e somente se, T' é uma conjugação unitária, unitariamente equivalente à transposição, ou $\det(T) = 0$.*

Teorema 2.3. *Todo operador em M_d completamente positivo com posto de Kraus 2 tem determinante não-negativo (lembrando que $\det T$ é real sempre que T é positivo.)*

Prova. Sejam A e B os dois operadores da decomposição de Kraus do operador T e suponha que $\det A \neq 0$. Usando a base $\{E_{ij} = |i\rangle\langle j|\}$, T é representando pela matriz $A \otimes \overline{A} + B \otimes \overline{B}$. Seja $A = USV$ a decomposição em valores singulares da matriz A. Então podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\det(T) &= \det(A \otimes \overline{A} + B \otimes \overline{B}) \\
&= \det((U \otimes \overline{U})(S \otimes S)(V \otimes \overline{V}) + (U \otimes \overline{U})(U^* \otimes U^T)(B \otimes \overline{B})(V^* \otimes V^T)(V \otimes \overline{V})) \\
&= \det[S \otimes S + (U^* \otimes U^T)(B \otimes \overline{B})(V^* \otimes V^T)] \\
&= \det[(S^{1/2} \otimes S^{1/2})(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})(S^{1/2} \otimes S^{1/2}) \\
&+ (S^{1/2} \otimes S^{1/2})(S^{-1/2} \otimes S^{-1/2})(U^*BV^* \otimes U^T\overline{B}V^T)(S^{-1/2} \otimes S^{-1/2})(S^{1/2} \otimes S^{1/2})] \\
&= (\det S)^{2d} \det(\mathbb{1} + B' \otimes \overline{B'}),
\end{aligned}
$$

onde $B' = S^{-1/2}U^*BV^*S^{-1/2}$. Sejam b_k os autovalores de B', então:

$$
\det T = (\det S)^{2d} \prod_{k,l=1}^{d} (1 + b_k\overline{b_l}) = (\det S)^{2d} \prod_{1 \leq k < l \leq d} |1 + b_k\overline{b_l}|^2 \prod_{j=1}^{d}(1 + |b_j|^2) \geq 0.
$$

Mostramos o que queríamos no caso $\det A \neq 0$. Mas os operadores $A(\cdot)A^*$ tais que $\det A \neq 0$ formam um conjunto denso e $\det(T)$ é contínuo, logo $\det T \geq 0$ para todos os operadores com posto de Kraus 2. □

Definição. Um canal T é dito **markoviano** se este for da forma $T = e^L$, com L um gerador de Lindblad.

Teorema 2.4. *Seja $T = e^L \in \mathfrak{T}^+$ um canal markoviano com gerador L na forma*

$$
L\rho = -i[H, \rho] + \sum_{i,j=1}^{d^2-1} G_{ij} \left(F_i \rho F_j^* - \frac{1}{2}\{F_j^* F_i, \rho\} \right)
$$

Então $\det T = e^{-d\mathrm{Tr}(G)}$. Se L é puramente dissipativo então $\|L\| \leq -\frac{2}{d} \log \det T$.

Prova. Para mostrar o teorema, usaremos a base de operadores unitários normalizados:

$$
F_\alpha = \frac{1}{\sqrt{d}} U_{\alpha_1,\alpha_2}, \quad U_{\alpha_1,\alpha_2} = \sum_{r=0}^{d-1} e^{2\pi i r \alpha_2/d} |\alpha_1 + r\rangle\langle r|.
$$

O termo $\displaystyle\sum_\gamma \mathrm{Tr}\left(\sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha,\beta} \rho_\gamma^* F_\alpha \rho_\gamma F_\beta^*\right) = \sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha,\beta} \mathrm{Tr}\left(\left(\sum_\gamma \rho_\gamma^* F_\alpha \rho_\gamma\right) F_\beta^*\right) = 0,$

lembrando que $\displaystyle\sum_\gamma \rho_\gamma^* F_\alpha \rho_\gamma = \mathrm{Tr}(F_\alpha)\mathbb{1}.$

Ainda, temos

$$-\frac{1}{2}\sum_{\gamma}\mathrm{Tr}\left(\sum_{\alpha,\beta}G_{\alpha,\beta}\rho_\gamma^* F_\beta^* F_\alpha \rho_\gamma\right) = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}G_{\alpha,\beta}\mathrm{Tr}\left(\sum_{\gamma}\rho_\gamma^* F_\beta^* F_\alpha \rho_\gamma\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}G_{\alpha,\beta}\, d\mathrm{Tr}(F_\beta^* F_\alpha) = -\frac{d}{2}\mathrm{Tr}(G),$$

e portanto $\det T = e^{\mathrm{Tr}L} = e^{-d\mathrm{Tr}(G)}$.

A segunda afirmação pode ser verificada usando a base $\{F_\gamma\}$ em que G é diagonal:

$$L(\rho) = \sum_\gamma G_\gamma \left(F_\gamma \rho F_\gamma^* - \frac{1}{2}\{F_\gamma^* F_\gamma, \rho\}\right).$$

Pode-se verificar que os operadores $F_\gamma(\cdot)F_\gamma^*$, $F_\gamma^* F_\gamma(\cdot)$ têm norma menor ou igual a 1. Pela desigualdade triangular, $||L|| \leq 2\sum_\gamma G_\gamma = 2\mathrm{Tr}(G)$. $\square$

Exemplo (Canal com determinante negativo [16]) Seja ρ^{T_c} a matriz obtida de $\rho \in M_d$ transpondo os cantos superior direito e inferior esquerdo. (No caso $d = 2$, isso é a transposta usual.) O operador T em M_d definido por

$$T(\rho) = \frac{\rho^{T_c} + \mathbb{1}\mathrm{Tr}\rho}{d+1}$$

é completamente positivo, preserva traço e tem $\det T = -(d+1)^{1-d^2}$.

A matriz $\hat{T}$ na base de Gell-Mann é diagonal, pois existe uma matriz com autovalor $-1/(d+1)$; a identidade tem autovalor 1; e todas as outras matrizes da base têm autovalor $1/(d+1)$. Isto fornece $\det T = -(d+1)^{1-d^2}$ e também mostra que T preserva traço.

Para verificar que T é completamente positivo, basta verificar a positividade do estado de Jamiolkowski: $\tau = (T\otimes \mathbb{1})(\omega) = \sum T(E_{ij})\otimes E_{ij} = \sum E_{ij}(\,\cdot\,)T(E_{ij})^T$ Pode-se verificar que o operador $\sum E_{ij}(\,\cdot\,)(E_{ij}^{T_c})^T$ tem um único autovalor negativo -1, que é compensado exatamente por $\mathrm{Tr}(\,\cdot\,)$.

2.2 Divisibilidade de canais quânticos

Definição 2.5. *Dizemos que $T \in \mathfrak{T}$ é* **indivisível** *se, para toda decomposição da forma $T = T_1 T_2$ com $T_i \in \mathfrak{T}$, um dos operadores T_i é uma conjugação unitária. Se T não é indivisível, dizemos que T é divisível.*

Corolário 2.6. *Suponha que $\lfloor d/2 \rfloor$ é ímpar. Então a transposição $\theta(\rho) := \rho^T$, $\rho \in M_d$ é indivisível.*

Prova. Suponha que $\theta = T_1 T_2$ é uma decomposição de θ. Pelo Teorema 2.1, $\det(T_1) = -\det(T_2) = \pm 1$ e um desses mapas é uma conjugação unitária. $\square$

Corolário 2.7. *O canal $T_0 \in \mathfrak{T}^+$ com determinante mínimo, ou seja $\det T_0 = \inf_{T \in \mathfrak{T}^+} \det T$, é indivisível. No caso $d = 2$, $T_0(\rho) = (\rho^T + \mathbb{1})/3$.*

Prova. Em qualquer dimensão, existem canais com $\det T < 0$ (ver o exemplo ao final da seção anterior). Como o conjunto $\mathfrak{T}^+$ de canais em M_d é compacto existe um canal T_0 que atinge $\inf_{T \in \mathfrak{T}^+} \det T$. Considere agora uma decomposição $T_0 = T_1 T_2$. Pelo que vimos, T_1 ou T_2 é unitário. Consequentemente, T_0 é único a menos de conjugação unitária.

Consideremos o caso $d = 2$. Usaremos a base $\{\mathbb{1}/\sqrt{2}, \sigma_i/\sqrt{2}\}$ onde σ_i são as matrizes de Pauli. Um canal T assume a forma

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \Delta \end{pmatrix}$$

nessa base, onde $v \in \mathbb{R}^3$, $\Delta \in M_3$ e $\det \Delta = \det T$. De fato, $\langle \mathbb{1}/\sqrt{2} | T | \mathbb{1}/\sqrt{2} \rangle = \mathrm{Tr}[T(\mathbb{1})]/2 = \mathrm{Tr}(\mathbb{1})/2 = 1$. Ainda, $\langle \mathbb{1}/\sqrt{2} | T | \sigma_i/\sqrt{2} \rangle = \mathrm{Tr}[T(\sigma_i)]/2 = 0$. Assim, existe uma decomposição

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \end{pmatrix}.$$

Para que $O_1 \Delta O_2 = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ seja completamente positiva, é necessário que $\vec{\lambda}$ esteja contido no tetraedro com vértices $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, $\lambda_i = \pm 1$ ([6, 8]). Daí, $\det T$ é minimizado fazendo $\vec{\lambda} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ que é precisamente o caso de $T(\rho) = (\rho^T + \mathbb{1})/3$.

$\square$

Teorema 2.8. *Se um canal $T \in \mathfrak{T}^+$ em M_d tem posto de Kraus d^2, T é divisível.*

Prova. Se o canal T tem posto de Kraus máximo, o respectivo estado de Jamiolkowski $\tau = (T \otimes \mathbb{1})(\omega)$ tem posto máximo e $\det \tau \neq 0$. Portanto, se T_1 é um canal invertível suficientemente próximo da identidade, $(T_1^{-1} T \otimes \mathbb{1})(\omega)$ ainda é positivo. Ou seja, $T_2 := T_1^{-1} T \in \mathfrak{T}^+$, de modo que $T = T_1 T_2$ é uma decomposição. Se tomarmos T_1 tal que $\det T_1 \neq \det T$ e $\det T_1 \neq 1$, teremos que nem T_1 nem T_2 são unitários. $\square$

Teorema 2.9. *Para toda concatenação* $\tilde{T}_1\tilde{T}_2 = T$, $\tilde{T}_i \in \mathfrak{P}$ *(ou* $\mathfrak{P}^+$*),* $T \in \mathfrak{T}$ *com* $\det \tilde{T}_1^*(\mathbb{1}) \neq 0$ *existem* T_1*,* $T_2 \in \mathfrak{T}$ *(resp.* $\mathfrak{T}^+$*) com mesmo posto de Kraus que* $\tilde{T}_1$*,* $\tilde{T}_2$*, tais que* $T = T_1T_2$*.*

Prova. Como $\tilde{T}_1^*(\mathbb{1}) > 0$, existe $P > 0$ tal que $\tilde{T}_1^*(\mathbb{1}) = P^2$. Então $T_1^*(X) := P^{-1}\tilde{T}_1^*(X)P^{-1}$ satisfaz $\tilde{T}_1^*(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, de modo que $T_1 \in \mathfrak{T}$. Definindo $T_2^*(X) := \tilde{T}_2^*(PXP)$ obtemos $T_2^*T_1^* = T^*$ (ou seja, $T = T_1T_2$). E $T_2^*(\mathbb{1}) = T_2^*T_1^*(\mathbb{1}) = T^*(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, ou seja, $T_2 \in \mathfrak{T}$. Finalmente, T_1, T_2 têm o mesmo posto de Kraus que $\tilde{T}_1$, $\tilde{T}_2$ porque diferem apenas pela concatenação com o operador invertível $X \mapsto PXP$, que tem posto de Kraus 1. □

Corolário 2.10. *Sejam* $T, \tilde{T} \in \mathfrak{T}$ *relacionados por* $T = T_A\tilde{T}T_B$ *onde* T_A*,* $T_B \in \mathfrak{P}^+$ *são invertíveis e têm posto de Kraus 1. Então* T *é divisível se, e somente se,* $\tilde{T}$ *é divisível.*

Prova. De fato, uma decomposição $\tilde{T} = \tilde{T}_1\tilde{T}_2$ implica $T = (T_A\tilde{T}_1)(\tilde{T}_2T_B)$ que fornece uma decomposição (em operadores que preservam traço). Como a concatenação com T_A, T_B preserva o posto de Kraus, essa decomposição não envolve conjugações unitárias. □

2.2.1 Caracterização das evoluções contínuas

Definição 2.11. *Vamos chamar de* **evolução (contínua) completamente positiva** *uma aplicação contínua* $T : [0,t] \times [0,t] \to \mathfrak{T}^+$ *tal que:*

1. $T(t_3, t_2)T(t_2, t_1) = T(t_3, t_1)$ *para todo* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t$*,*
2. $\lim_{\epsilon\to 0} |T(\tau + \epsilon, \tau) - I| = 0$ *para todo* $\tau \in [0, t)$*.*

E vamos denotar por $\mathcal{J} \subset \mathfrak{T}^+$ *o conjunto de todos os canais que são elementos de alguma evolução contínua completamente positiva.*

Definição 2.12. *Seja* $\mathcal{I} \subset \mathfrak{T}^+$ *o conjunto de todos os canais* T *tais que, para todo* $\epsilon > 0$*, existe uma quantidade finita de canais* $T_i \in \mathfrak{T}^+$ *tais que* $|T_i - I| \leq \epsilon$ *e* $\prod_i T_i = T$*. Diremos que um canal é* **infinitesimalmente divisível** *se ele pertence ao fecho* $\overline{\mathcal{I}}$*. Vamos denotar por* $\mathcal{I}'$ *um conjunto análogo ao* $\mathcal{I}$ *definido acima, mas com a condição adicional que cada* T_i *da fatoração seja markoviano.*

Claramente, $\overline{\mathcal{I}}' \subseteq \overline{\mathcal{J}} \subseteq \overline{\mathcal{I}}$. O objetivo do teorema a seguir é mostrar que $\overline{\mathcal{I}} \subseteq \overline{\mathcal{I}}'$, consequentemente qualquer uma das noções definidas até agora pode ser chamada **infinitesimalmente divisível**. Ou seja, queremos mostrar que é possível aproximar cada canal T_i na decomposição $T = \prod_{i=1}^n T_i$ ($|T - I| \leq \epsilon$) com um canal markoviano, de forma que o produto destes fique próximo de T com $\epsilon \to 0$.

Teorema 2.13. *(Estrutura de canais infinitesimalmente divisíveis) Com a notação introduzida acima, $\mathcal{I}' = \mathcal{I} = \mathcal{J}$.*

Prova. Primeiramente, escrevemos $T = \prod_i T_i = \prod_i \tilde{T}_i U_i$ onde $\tilde{T}_i = T_i U_i^{-1}$ é tal que $(\tilde{T}_i - I)$ é um gerador puramente dissipativo. A ideia agora é aproximar $\tilde{T}_i$ com $\exp(\tilde{T}_i - I)$. O erro nessa aproximação é

$$\left| \prod_i T_i - \prod_i e^{\tilde{T}_i - I} U_i \right| = \left| \prod_i T_i - \prod_i (T_i + \Delta_i) \right|,$$

onde $\Delta_i = (\exp[\tilde{T}_i - I] - \tilde{T}_i) U_i$ vai a zero com $O(|\tilde{T}_i - I|^2)$. Defina $C(l) := \prod_{i=1}^{l} T_i \prod_{j=l+1}^{n} (T_j + \Delta_j)$. Então

$$\left| \prod_i T_i - \prod_i e^{\tilde{T}_i - I} U_i \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} C(k+1) - C(k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \prod_{i=1}^{k} T_i \Delta_{k+1} \prod_{j=k+2}^{n} (T_j + \Delta_j) \right| \leq n d \delta^2,$$

onde $\delta := \max_i |\tilde{T}_i - I|$. Agora, é suficiente mostrar que $\delta^2 n \to 0$ com $\epsilon \to 0$. Considere $\tilde{T}_\delta$ o canal $\tilde{T}_i$ correspondente à distância máxima δ. Pelo Teorema 2.4, $\delta \leq -\dfrac{2}{d} \log \det \exp(\tilde{T}_\delta - I) \leq -\dfrac{2}{d} \log[\det \tilde{T}_\delta - O(\delta^2)]$ (usando a continuidade do determinante).

Agora, suponha que $\delta = O(n^{-q})$ para certo $0 < q < 1$. Nesse caso, a desigualdade obtida acima fornece $\delta = O(n^{-2q} - \log \det T / n)$ e recursivamente obtemos $\delta = O(1/n)$, como queríamos. Portanto, basta encontrar uma cota da forma $\delta = O(n^{-q})$. Essa cota é fornecida por [[16], Teo. 7]:

$$\delta := \max |\tilde{T}_i - I| = |T_i - U_i| = O\left(\sqrt{1 - (\det T)^{1/n}} \right).$$

$\square$

O teorema acima pode ser estendido para evoluções contínuas:

Teorema 2.14. *Sejam T, $\tilde{T} \in \mathfrak{T}^+$ relacionados por $T = T_A \tilde{T} T_B$, onde T_A, $T_B \in \mathfrak{P}^+$ são invertíveis com posto de Kraus 1. T é infinitesimalmente divisível se, e somente se, $\tilde{T}$ o é.*

Prova. Suponha que $\tilde{T} = \prod_i \tilde{T}_i$ é infinitesimalmente divisível. Podemos escrever $T = \prod_i R_i \tilde{T}_i R_{i+1}^{-1}$, onde $R_i \in \mathfrak{P}^+$ são invertíveis com posto de Kraus 1, com $R_1 = T_A$ e $R_{n+1}^{-1} = T_B$. Precisamos mostrar que os R_i's intermediários podem ser escolhidos de tal forma que $T_i := R_i \tilde{T}_i R_{i+1}^{-1}$ fiquem próximos da identidade com $|\tilde{T}_i - I| \neq \epsilon \to 0$. O procedimento é o mesmo da demonstração anterior. Seja $K_i = U_i P_i$ a decomposição polar do operador de Kraus de R_i, ou seja, $R_i(X) = U_i P_i X P_i U_i^*$. Agora $T_i \in \mathfrak{T}$ impõe $R_{i+1}^{-1*} \tilde{T}_i^* R_i^*(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, o que pode ser obtido em escolhendo $P_{i+1} = \sqrt{\tilde{T}_i^*(P_i^2)}$. Como todo operador em M_d é decrescente em largura do espectro [4], temos $|R_i| \leq \lambda_{max}(P_i)$. Daí,

$$||T_i - I|| \leq ||R_i R_{i+1}^{-1} - I|| + \epsilon ||R_i|| ||R_{i+1}^{-1}||,$$

cujo segundo termo já conseguimos controlar. Para estimar o primeiro termo, observemos que $|\tilde{T}_i^*(P_i^2) - P_i^2| \leq \epsilon |P_i^2| \leq \epsilon \lambda_{max}^2(P_i)\sqrt{d}$. Pela continuidade da raiz quadrada, $|P_{i+1} - P_i| \leq \sqrt{\epsilon} d^{1/4} \lambda_{max}(P_i)$. Portanto $|P_i P_{i+1}^{-1} - \mathbb{1}| \leq \sqrt{\epsilon} d^{1/4} \lambda_{max}(P_i) \lambda_{min}^{-1}(P_{i+1})$ fornecendo uma cota para o primeiro termo contanto que escolhamos $U_{i+1} = U_i$.

□

2.3 Canais quânticos de um qubit

A seguinte forma normal para canais de um qubit (ou seja, agindo nas matrizes densidade de ordem 2) foi obtida em [14].

Teorema 2.15. *(Forma normal de Lorentz) Para todo canal $T \in \mathfrak{T}^+$ de um qubit existem $T_A, T_B \in \mathfrak{P}^+$ invertíveis com posto de Kraus 1, tais que $T_A T T_B = \tilde{T} \in \mathfrak{T}^+$ é de uma das seguintes formas:*

1. *Diagonal: no caso em que $v = 0$ e $\tilde{T}$ é unital.*

2. *Singular: no caso em que $\Delta = 0$ e $v = (0, 0, 1)$. Esse canal tem posto de Kraus 2 e produz apenas uma saída possível.*

3. *Não-diagonal: nos casos em que $\Delta = \mathrm{diag}(x/\sqrt{3}, x/\sqrt{3}, 1/3)$, $0 \leq x \leq 1$ e $v = (0, 0, 2/3)$. Esses canais têm posto de Kraus 3 se $x < 1$ e posto de Kraus 2 se $x = 1$.*

Denote por C os canais com posto de Kraus 2 e operadores de Kraus da forma

$$A_1 = |0\rangle\langle a|, \quad A_2 = |0\rangle\langle b| + x|1\rangle\langle 1|,$$

para certos vetores $|a\rangle$ e $|b\rangle$. Para estes operadores, a condição de preservação de traço fica

$$|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| = \mathbb{1} - x^2|1\rangle\langle 1|.$$

O lema a seguir afirma que todo canal com posto de Kraus 2 pode ser colocado nessa forma.

Queremos mostrar:

Teorema 2.16. *Seja T um canal de um qubit com posto de Kraus 2. Existem conjugações unitárias U_1, U_2 e um gerador de Lindblad L (que possivelmente depende do tempo) contínuo e $t > 0$ tal que*

$$U_1 T U_2 = \mathbb{T} e^{\int_0^t L(\tau) d\tau},$$

onde $\mathbb{T}$ é o operator de tempo ("time ordering operator" [16]).

Para isso, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.17. *Para todo canal T de um qubit e posto de Kraus 2, existem conjugações unitárias U_1, U_2 tais que $T = U_1 C U_2$ e C é da forma descrita acima.*

Prova. Dados os operadores de Kraus K_1, K_2 de T, podemos sempre encontrar α_1, α_2 tais que $\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2$ tem posto um (basta calcular o determinante dessa expressão e fazê-lo igual a zero). Assim, podemos escolher outros operadores de Kraus para o mesmo operador T tais que $\hat{K}_1 = |e_0\rangle\langle f_1|$ e $\hat{K}_2 = |e_0\rangle\langle f_2| + |e_1\rangle\langle f_3|$, onde e_0, e_1 são ortonormais. Ou seja, T é da forma C, a menos de conjugações unitárias que relacionem a base canônica com a base $\{e_0, e_1\}$. $\square$

Definição 2.18. *Dado um canal do conjunto C acima, vamos chamá-lo de:* **classe-1** *se $\langle a|0\rangle = \langle b|1\rangle = 0$;* **classe-2** *se não é classe-1 e tem $x = 1$;* **classe-3** *em todos os outros casos.*

Agora, podemos verificar, para cada uma dessas classes, que o operador C é infinitesimalmente divisível, demonstrando o Teorema. De fato:

- **Canais de classe-1:** Podemos escrever $|a\rangle = (1 - x^2)^{1/2}|1\rangle$ e $|b\rangle = |0\rangle$, portanto esses canais podem ser parametrizados por x, com $C_{x_1 x_2} = C_{x_1} C_{x_2}$, $C_1 = 1$. Ou seja, essa classe forma um semigrupo contínuo a um parâmetro. Usando transformações infinitesimais, encontramos: $C_x = e^{-\log(x) L}$, $L(\rho) = 2|0\rangle\langle 1|\rho|1\rangle\langle 0| - \rho|1\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|\rho$.

- **Canais de classe-2:** Podemos escrever $|a\rangle = (1 - y^2)^{1/2}|0\rangle$ e $|b\rangle = y|0\rangle$. Como antes, temos um semigrupo parametrizado por y e obtemos $C_y = e^{-\log(y) L}$, $L(\rho) = 2\sigma_z \rho \sigma_z - 2\rho$.

- **Canais de classe-3:** Os canais desta classe são determinados pelo único vetor $|c\rangle \neq |0\rangle$ cuja imagem $|c'\rangle$ é um estado puro:

$$|c\rangle = c_0 e^{i\phi}|0\rangle + c_1|1\rangle,$$

$$|c'\rangle = y c_0 e^{i\phi}|0\rangle + x c_1|1\rangle.$$

Então, esses canais são parametrizados por $0 < x, c_1 < 1$ e $0 \leq \phi < 2\pi$, o que podemos escrever como $C_{c_1,x,\phi}$. Nesse caso, eles satisfazem $C_{xc_1,y,\phi}C_{c_1,x,\phi} = C_{c_1,xy,\phi}$. Além disso, $C_{c_1,x,\phi} \to I$ com $x \to 1$. Portanto, consideramos:

$$L_{c_1,\phi} := \lim_{\epsilon \to 0}(I - C_{c_1,e^{-\epsilon},\phi})/\epsilon$$

Assim,

$$L_{c_1,\phi}(\rho) = i[\rho, H_{c_1,\rho}] + D_{c_1,\rho}(\rho),$$
$$H_{c_1,\phi} = \frac{c_1}{ic_0}(e^{i\phi}|0\rangle\langle 1| - e^{-i\phi}|1\rangle\langle 0|),$$

e $D_{c_1,\rho}$ é um gerador de Lindblad dissipativo caracterizado por um único operador de Kraus da forma $A_{c_1,\phi} = \sqrt{2}|0\rangle(c_1\langle 0| - c_0\langle 1|)/c_0$, com $c_0 = (1 - c_1^2)^{1/2}$.

2.3.1 Exemplos

1. Suponha que T seja um canal de 1 qubit dado por operadores de Kraus com matrizes da forma $K_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$, com $x_i^2 + y_i^2 = 1$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, o que é exigido para preservação de traço. Nesse caso, temos que $\det(y_2K_1 - x_2K_2) = 0$. Logo, podemos escolher uma nova representação de Kraus:

$$\hat{K}_1 = y_2K_1 - x_2K_2 = (x_1y_2 - x_2y_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle a|,$$
$$\hat{K}_2 = x_2K_1 + y_2K_2 = \begin{pmatrix} x_1x_2 + y_1y_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle b| + |1\rangle\langle 1|,$$

onde $|a\rangle = \overline{x_1y_2 - x_2y_1}|0\rangle$, $|b\rangle = \overline{x_1x_2 + y_1y_2}|0\rangle$. Ou seja, T pertence à classe-2 na classificação acima. Como $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1x_2 + y_1y_2)^2 = 1$, essa família de canais é percorrida por um único parâmetro $t = x_1x_2 + y_1y_2$. Como vimos acima, $T_t = e^{-\log(t)L}$, $L(\rho) = 2\sigma_z\rho\sigma_z - 2\rho$.

2. (Bit-flip[11]) Suponha que T tenha operadores de Kraus com matrizes da forma $K_1 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix}$, com $x^2 + y^2 = 1$. Nesse caso, $\det(yK_1 + xK_2) = 0$ e escolhemos uma nova representação:

$$\hat{K}_1 = yK_1 + xK_2 = xy\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\hat{K}_2 = xK_1 - yK_2 = \begin{pmatrix} x^2 & -y^2 \\ -y^2 & x^2 \end{pmatrix}.$$

Agora, $\hat{K}_1$ é autoadjunto e tem autovetores $(1,1)$, $(1,-1)$, por isso aplicamos a mudança de bases $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} / \sqrt{2}$, obtendo:

$$U\hat{K}_1 U = 2xy \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle a|,$$
$$U\hat{K}_2 U = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle b| + |1\rangle\langle 1|,$$

onde $|a\rangle = 2\overline{xy}|0\rangle$, $|b\rangle = \overline{x^2 - y^2}|0\rangle$. Como no caso anterior, $U_0 T_t U_0 = e^{-\log(t)L}$, $L(\rho) = 2\sigma_z \rho \sigma_z - 2\rho$, onde $t = x^2 - y^2$ e $U_0(X) = UXU$.

3. Suponha que T tenha operadores de Kraus com matrizes da forma $K_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}$, com $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Nesse caso, $\det(1/\sqrt{2}K_1 + 1/\sqrt{2}K_2) = 0$. Portanto, podemos escolher uma nova representação:

$$\hat{K}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}K_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \end{pmatrix},$$
$$\hat{K}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}K_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 & -x_1 \\ -x_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Agora, K_1 tem autovetores $(1,-1)$, (x_1, x_2) com autovalores 0, $(x_1 + x_2)/\sqrt{2}$ respectivamente. Por isso, aplicamos a mudança de bases $U = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$, ficando com:

$$U^*\hat{K}_1 U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 - x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle f_1|,$$
$$U^*\hat{K}_2 U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (x_1 - x_2)(x_1^2 - x_2^2) & (-x_1 - x_2)(x_1^2 - x_2^2) \\ 2x_1x_2(x_2 - x_1) & 2x_1x_2(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$
$$= |0\rangle\langle f_2| + |1\rangle\langle f_3|,$$

onde $|f_2\rangle$ e $|f_3\rangle$ são os vetores-linha destas matrizes. Para deixar o canal na forma C, basta multiplicá-lo à direita por um operador unitário V tal que $\langle f_3|V = \langle 1| \Leftrightarrow V^*|f_3\rangle = |1\rangle \Leftrightarrow |f_3\rangle = V|1\rangle$. Ou seja, $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$. Obtemos:

$$U^*\hat{K}_1 UV = |0\rangle\langle f_1|V = |0\rangle\langle 0|,$$
$$U^*\hat{K}_2 UV = |0\rangle\langle f_2|V + |1\rangle\langle f_3|V = (x_2^2 - x_1^2)|0\rangle\langle 1| + 2x_1x_2|1\rangle\langle 1|.$$

Temos que U_1TU_2 é um operador de classe-3, onde $U_1(X) = U^*XU$ e $U_2(X) = UVXV^*U^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. O único estado que é levado em um estado puro é $|1\rangle\langle 1| \mapsto (U^*\hat{K}_2UV)|1\rangle\langle 1|(V^*U^*\hat{K}_2^*U)$.

4. Suponha que T tenha operadores de Kraus com matrizes $K_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $K_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Nesse caso, $\det\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}K_1 + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}K_2\right) = 0$. Assim, consideramos a nova representação:

$$\begin{aligned}\hat{K}_1 &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}K_1 + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}K_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{5}+1}{6}\\ \frac{\sqrt{5}-1}{6} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},\\ \hat{K}_2 &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}K_1 - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}K_2 = \begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{5}}{3} & \frac{1-\sqrt{5}}{6}\\ \frac{1+\sqrt{5}}{6} & \frac{-\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

O autovetor de K_1 com autovalor não-nulo é $(1+\sqrt{5}, 2)$. Por isso, consideramos a mudança de bases $U = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix}1+\sqrt{5} & 2\\ 2 & -1-\sqrt{5}\end{pmatrix}$ onde $\alpha = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$, ficando com:

$$\begin{aligned}U^*\hat{K}_1U &= \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0\end{pmatrix} = |0\rangle\langle f_1|,\\ U^*\hat{K}_2U &= \frac{1}{5+\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}(1+\sqrt{5}) & \frac{2}{3}(1+\sqrt{5})\\ -1 & -2\end{pmatrix} = |0\rangle\langle f_2| + |1\rangle\langle f_3|.\end{aligned}$$

Como antes, consideramos o operador unitário $V = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ de forma que $\langle f_3|V = \langle 1|$, obtendo:

$$\begin{aligned}U^*\hat{K}_1UV &= -\frac{5}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\\ U^*\hat{K}_2UV &= \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde vê-se que T é um canal de classe-2 com $y = 2/3$.

Bibliografia

[1] S. Attal. Lectures in quantum noise theory. `http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/attal/chapters.html`. Acessado: 2022-10-10.

[2] R. Bhatia. *Positive definite matrices*. Princeton University Press, 2007.

[3] H.-P. Breuer and F. Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press, 2002.

[4] F. Buscemi, G. D'Ariano, M. Keyl, P. Perinotti, and R. F. Werner. Clean positive operator valued measures. *J. Math. Phys.*, 46, 2005.

[5] M.-D. Choi. Positive linear maps on C^*-algebras. *Can. Journ. Math*, 24, 1972.

[6] A. Fujiwara and P. Algoet. One-to-one parametrization of quantum channels. *Phys. Rev. A*, 59, 1999.

[7] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan. Completely positive dynamical semigroups of n-level systems. *J. Math. Phys.*, 17, 1976.

[8] C. King and M. B. Ruskai. Minimal entropy of states emerging from noisy quantum channels. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 42, 2001.

[9] A. Kossakowski. On necessary and sufficient conditions for a generator of a quantum dynamical semi-group. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. Astr. Phys.*, 20, 1972.

[10] G. Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Comm. Math. Phys*, 48, 1976.

[11] M. Nielsen and I. Chuang. *Quantum information and computation*. Cambridge University Press, 2010.

[12] D. Perez-Garcia, D. Petz, M. M. Ruskai, and M. M. Wolf. Contractivity of positive and trace preserving maps under l_p norms. *J. Math. Phys.*, 47, 2006.

[13] D. Petz. *Quantum Information Theory and Quantum Statistics.* Springer, 2008.

[14] F. Verstraete, J. Dehaene, and B. DeMoor. Local filtering operations on two qubits. *Phys. Rev. A*, 64, 2001.

[15] M. M. Wolf. Quantum channels and operations, guided tour. `https://www-m5.ma.tum.de/foswiki/pub/M5/Allgemeines/MichaelWolf/QChannelLecture.pdf`. Acessado: 2022-10-10.

[16] M. M. Wolf and J. I. Cirac. Dividing quantum channels. *Comm. Math. Phys.*, 279, 2006.