UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Estudo sobre Resolução de Equações de Coeficientes Intervalares

por

Heidi Korzenowski

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Ciência da Computação

Prof. Dalcidio Moraes Claudio
Orientador

Porto Alegre, março de 1994.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Korzenowski, Heidi

Estudo sobre Resolução de Equações de Coeficientes Intervalares / Heidi Korzenowski.—Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1994.
132 p.: il.

Dissertação (mestrado)—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Porto Alegre, 1994. Orientador: Claudio, Dalcidio Moraes

Dissertação: Aritmética Intervalar, Matemática Computacional
Intervalos

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dalcidio Claudio pela orientação , dedicação e paciência dispensados durante a realização deste trabalho;

às amigas e colegas inseparáveis Leda Mara Cadore e Magda Leyser pela paciência, companheirismo e ajuda, compartilhados durante este curso;

aos amigos da informática, citados em ordem alfabética: Alessandra Dahmer, Alfio Martini, Arlis Coelho, Beatriz Franciosi, Carlos Holbig, Denise Bandeira, Eduardo Maciel, Fabiana Wilke, Jussara Marins, Paulo Trein, Paulo Werlang, Rafael Bordini, Sergio Freitas, Tiaraju Diverio, Ursula Fernandes e muitos outros, pelo ótimo convívio durante a realização deste curso;

em especial aos meus pais Paulo e Erica, irmãs Ani e Christa, e ao Maurício pelo carinho e paciência dispensados até o presente momento.

SUMÁRIO

LISTA DE SINAIS

$\mathbb{R}$	conjunto dos numeros reais
$I(\mathbb{R})$	conjunto dos intervalos de extremos reais
$\overline{I(\mathbb{R})}$	conjunto dos intervalos não-regulares
H	expaço intervalar extendido
$a, b, c, \ldots$	numeros reais
$A, B, C, \ldots$	intervalos de $I(\mathbb{R})$
$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots$	intervalos de $\overline{I(\mathbb{R})}$
$\forall$	para todo
$\exists$	existe
$\exists!$	existe um unico
$\sqsubseteq$	relação de ordem
$\equiv_x$	relação de aproximação
$[a, a]$	intervalo pontual ou degenerado
$A = [a^-, a^+], a^- \not\leq a^+$	intervalo não degenerado
a^-	extremo inferior do intervalo A
a^+	extremo superior do intervalo A
$a^- < a^+$	intervalo de $I(\mathbb{R})$
$a^- > a^+$	intervalo de $\overline{I(\mathbb{R})}$
$I_f(X)$	imagem intervalar de f em X
$f(X)$	avaliação de f em X
f'	derivada da função f
X^-	eixo coordenado que representa o extremo inferior dos intervalos
X^+	eixo coordenado que representa o extremo superior dos intervalos
$\underline{g}$	função real que limita inferiormente uma função intervalar
$\overline{g}$	função real que limita superiormente uma função intervalar
$int(X)$	interior do intervalo X
$N(X)$	operador Newtoniano aplicado a X
x^*	solução real para uma função f
$\widehat{x}$	ponto fixo de uma função f
X^*	intervalo solução para uma função f
$\widehat{X}$	intervalo fixo de uma função f
M_{mn}	conjunto das matrizes de m linhas e n colunas, cujos elementos são de $\mathbb{R}$
V_n	conjunto dos vetorres de n elementos de $\mathbb{R}$
$M_{mn}(I(\mathbb{R}))$	conjunto das matrizes com m linhas e n colunas, cujos elementos são de $I(\mathbb{R})$
$V_n(I(\mathbb{R}))$	conjunto dos vetores de n coordenadas de $I(\mathbb{R})$
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	matrizes intervalares de $M_{mn}(I(\mathbb{R}))$
$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \ldots$	matrizes reais pertencentes a M_{mn}
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$	vetores intervalares de $V_n(I(\mathbb{R}))$
$\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \ldots$	vetores reais de V_n

RESUMO

O objetivo deste trabalho é determinar a solução de algumas equações de coeficientes intervalares. Este estudo utiliza uma Teoria das Aproximações Intervalares, a qual foi descrita por [ACI91].

Nesta teoria a igualdade para intervalos é substituída pela relação de aproximação . Esta substituição deve-se ao fato da igualdade utilizada na Teoria Clássica dos Intervalos para resolução de equações de coeficientes intervalares não apresentar uma solução satisfatória, visto que a solução encontrada não contém todas as soluções das equações reais que compõe a equação intervalar.

Pela substituição da igualdade intervalar por uma relação de aproximação é possível determinar a solução de equações de coeficientes intervalares, de maneira que esta solução contenha todas as possíveis soluções das equações reais pertencentes à equação intervalar.

Apresenta-se alguns conceitos básicos, bem como analisa-se algumas propriedades no espaço solução $(I(\mathbb{R}), +, \cdot, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$. São representadas graficamente diferentes tipos de funções neste espaço intervalar, com os objetivos de obtenção da imagem, caracterização da solução e identificação gráfica da região de solução (ótima e externa), para cada tipo de função .

Como a representação de intervalos de $I(\mathbb{R})$ está determinada num semiplano de eixos X^-X^+, onde X^- representa o extremo inferior de cada intervalo e X^+ representa o extremo superior dos intervalos, apresenta-se o espaço intervalar estendido $\overline{I(\mathbb{R})}$. Neste espaço intervalar estão definidos os intervalos não-regulares, representados no outro semi-plano de eixos X^-X^+ Em $\overline{I(\mathbb{R})}$ serão apresentados alguns conceitos fundamentais, assim como operações aritméticas e algumas considerações referentes aos intervalos não-regulares.

No espaço intervalar $I(\mathbb{R})$ é possível resolver equações de coeficientes intervalares de maneira análoga à resolução de equações reais no espaço real, pois

este espaço intervalar possui a estrutura semelhante a de um corpo. Com isto apresenta-se a solução de equações de coeficientes intervalares lineares, obtida diretamente, assim como determina-se a Fórmula de Báscara Intervalar para resolução da Equação Quadrática Intervalar.

Para funções que possuem grau maior que 2 apresenta-se alguns métodos iterativos intervalares, tais como o Método de Newton Intervalar, o Método da Secante Intervalar e o Método Híbrido Intervalar, que permitem a obtenção do intervalo solução para funções intervalares.

Por fim apresenta-se alguns conceitos básicos no espaço intervalar matricial $M_{mn}(I(\mathbb{R}))$, bem como apresenta-se alguns métodos diretos para resolução de sistemas de equações lineares intervalares.

PALAVRAS-CHAVE: Aritmética Intervalar, Matemática Computacional, Intervalos

TITLE: "AN STUDY ABOUT SOLVING EQUATIONS OF INTERVAL COEFFICIENTS"

ABSTRACT

The aim of this work is to determine the solution set of some Equations of Interval Coefficients. The study use a Theory of Interval Approximation. The begining of this theory was described by [ACI91].

In this theory the equality for intervals is replaced by an approximation relation. When we make use of that relation to solve interval equations, it's possible to obtain an optimal solution, i.e., to get an interval solution that contain all of real solutions of the real equations envolved in the interval equation.

By using the equality of Classical Interval Theory for solving interval equations we can not get an optimal solution, that is, the interval solution in the most of equations not consider some real solutions of real equations that belong to the interval equation.

We present some basic concepts and analyse some properties at the interval space $(I(\mathbb{R}), +, \cdot, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$. Different kind of functions are showed in this space in order to obtain the range, the solution caracterization and the graphic identification of the optimal and external solution region, for each kind of function.

The representation of intervals in $I(\mathbb{R})$ is determined in a half plane of axes X^-, X^+, where X^- represent the lower endpoint and X^+ represent the upper endpoint of the intervals. The nonregular intervals are defined in $\overline{I(\mathbb{R})}$, which are determined in an other half plane. In this interval space are presenting some specific concepts, as well as arithmetical operations and some remarks about nonregular intervals.

The interval space $(I(\mathbb{R}), +, \cdot, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$ have a similar structure to a field, so it's possible to solve interval coefficients equations analogously as to solve real equations in the real space. We present the solution of linear interval equations and we determine an interval formula to solve square interval equation.

We present some intervals iterated methods for functions that have degree greater than 2 that allow to get an interval solution of interval functions.

Finally we show some basic concepts about the interval matrix space $M_{mn}(I\mathbb{R}))$ and present direct methods for the resolution of linear interval sistems.

KEY-WORDS:Interval Arithmetic, Computacional Mathematic, Intervals

1 INTRODUÇÃO

A Matemática Intervalar é uma teoria matemática que tem por objetivo resolver problemas de exatidão e eficiência decorrentes do uso de métodos numéricos baseados na aritmética real. Com isto torna-se importante determinar métodos computacionais que tornem os erros de arredondamento e truncamento tão pequenos quanto possíveis. Assim a propagação do erro nos dados iniciais e a acumulação dos erros de arredondamento podem então ser controladas pela utilização da aritmética intervalar.

Com esta aritmética pode-se representar um número impreciso por um intervalo que o contém. Assim, se uma equação possuir algum coeficiente impreciso, tem-se que este coeficiente pode ser representado por um intervalo, retângulo, etc ... Logo uma equação que possui pelo menos um coeficiente intervalar é uma equação intervalar, onde a solução é determinada pela resolução de um conjunto de equações reais.

Se utilizarmos a aritmética intervalar clássica para resolução de equações intervalares, obteremos uma resposta que na maioria dos casos não é satisfatória. Pode-se citar como exemplo a equação $a + x = b$, onde $a \in [1,5]$, $b \in [2,9]$. Para obtenção da solução passaremos a considerar a equação $[1,5] + [x_1, x_2] = [2,9]$ e, de acordo com as operações intervalares descritas por Moore, a solução é $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$, ou seja, o intervalo solução $[1,4]$. Este intervalo não oferece uma boa solução , visto que não contém todas as possíveis soluções reais envolvidas na equação intervalar. Basta considerar que a equação $1 + x = 9$, cuja solução é $x = 8$ não pertence ao intervalo solução . Este fato não representa um problema para a Teoria dos Intervalos descrita por Moore, pois este não era o seu objetivo. Na teoria que será desenvolvida aqui teremos como objetivo principal resolver equações intervalares, vistas como uma família de equações reais.

Outro problema que surge pela utilização da aritmética intervalar clássica é que o intervalo solução pode não ser um intervalo de Moore. Pode-se citar como exemplo a equação intervalar $[3,7]+[x_1,x_2]=[2,5]$, onde $x_1=-1$ e $x_2=-2$. Observe que o intervalo solução $[-1,-2]$ possui o extremo inferior maior que o superior, enquanto que o intervalo solução para esta equação é $[-5,-2]$.

Isto nos leva a concluir que a álgebra intervalar com uma relação de igualdade descrita por Moore não é suficiente para resolver equações de coeficientes intervalares, quando se busca as suas possíveis soluções reais.

Devido a dificuldade de se calcular analiticamente a solução de uma equação de grau superior a 4, necessitamos de métodos iterativos que permitam a obtenção de uma boa solução . Porém na aritmética intervalar clássica não existem métodos iterativos que possam ser aplicados diretamente a equações intervalares, visto que estes métodos se aplicam a equações reais, sendo que cada método iterativo inicia com um intervalo que contém a solução para a função .

Para resolução de equações matriciais intervalares, ou seja, uma equação $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ onde $\mathbf{A}\in M_{mn}(I(\mathbb{R}))$ é uma matriz cujas componenetes são intervalos e $\mathbf{b}\in V_n(I(\mathbb{R}))$ é um vetor de componentes intervalares, também não existem métodos que permitam a obtenção da solução diretamente, devido ao fato da não-existência do inverso multiplicativo.

É necessário então uma aritmética intervalar que além de permitir a obtenção de uma solução satisfatória para a equação intervalar, também permita a obtenção da solução por métodos iterativos, com a garantia de que a solução obtida contenha todas as possíveis soluções das equações reais envolvidas na equação intervalar. Tal fato é verificado pela utilização de uma Teoria das Aproximações Intervalares, onde a igualdade clássica é substituída pela relação de aproximação . Nesta teoria também é possível resolver diretamente equações matriciais, visto que existe o inverso multiplicativo.

Apresenta-se primeiramente alguns conceitos básicos a respeito do corpo dinâmico $(I(\mathbb{R}),+,\cdot,\sqsubseteq,\equiv_r,\perp)$, assim como analisa-se algumas propriedades válidas neste espaço intervalar.

Em seguida faz-se um estudo sobre a representação de funções reais e intervalares, de argumentos reais ou intervalares, a fim de analisar a imagem, caracterizar a solução e identificar graficamente as soluções ótima e externa para cada tipo de função .

No capítulo 3 apresenta-se a resolução de equações lineares e não-lineares (2º grau), com o objetivo de determinar a solução ótima por fórmulas fechadas. Como o espaço intervalar $(I(\mathbb{R}), +, \cdot, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$ possui a estrutura semelhante a de um corpo, existem os elementos inversos da adição e multiplicação , sendo então possível isolar a variável da equação , obtendo assim uma solução considerada ótima. Para determinação da solução ótima para a equação quadrática intervalar utiliza-se a Fórmula de Báscara Intervalar, a qual utiliza operações standard e não-standard, dependendo de cada coeficiente intervalar da equação .

Em seguida são descritos os métodos iterativos de Newton, Secante e Híbrido Intervalar para determinação do intervalo solução de equações intervalares. Para cada método serão analisadas suas vantagens e desvantagens, assim como apresentados exemplos.

Ao final apresenta-se um estudo a respeito do espaço matricial intervalar, onde serão consideradas matrizes e vetores de coeficientes intervalares. Serão descritos alguns conceitos básicos em $M_{mn}(I(\mathbb{R}))$, assim como apresentados alguns métodos diretos para resolução de sistemas de equações lineares intervalares. Neste espaço intervalar matricial será utilizada a Teoria das Aproximações Intervalares.

No apêndice são analisados alguns conceitos básicos no espaço intervalar extendido, bem como são descritas as operações aritméticas. É analisado o intervalo resultante da divisão por um intervalo que contém o zero, sendo este definido como um intervalo não-regular.

2 TEORIA DAS APROXIMAÇÕES INTERVALARES

2.1 Noções Básicas em $(I(\mathbb{R}), +, -, \cdot)$

Este capítulo está baseado em [CLA91].

Definição 1:

Seja $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais, cujos elementos serão denotados por $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Por intervalo A entenderemos $A = [a^-, a^+] = \{x \mid a^- \leqslant x \leqslant a^+\}$.

Definição 2:

O conjunto de todos os intervalos será denotado por $I(\mathbb{R})$ e seus elementos por $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$. Um elemento $x \in \mathbb{R}$ deixa-se representar em $I(\mathbb{R})$ na forma $[x, x]$ e é dito intervalo pontual ou degenerado. Com isto $\mathbb{R} \subseteq I(\mathbb{R})$.

Definição 3:

Dois intervalos $A = [a^-, a^+]$ e $B = [b^-, b^+]$ são iguais se vale a igualdade entre eles, de acordo com teoria dos conjuntos, isto é, $A = B \iff \forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Da definição anterior temos $A = B \iff a^- = b^- \wedge a^+ = b^+$.

Definição 4:

A interseção de dois intervalos X e Y é vazia ($X \bigcap Y = \emptyset$) se $x^- > y^+$ ou $y^- > x^+$. Se a interseção não é vazia, então é um intervalo definido por $X \bigcap Y = [max\{x^-, y^-\}, min\{x^+, y^+\}]$.

Definição 5:

Se $X \bigcap Y \neq \emptyset$ então $X \bigcup Y$ é um intervalo dado por $X \bigcup Y = [min\{x^-, y^-\}, max\{x^+, y^+\}]$.

Definição 6:

Sejam A e B intervalos sobre $\mathbb{R}$, então para $* \in \{+, -, \cdot, \}$ e $0 \notin B$ no caso da divisão . Então $A{*}B = \{a{*}b \mid a \in A, b \in B\}$.

2.1.1 Operações Aritméticas em I(R)

Sejam $A, B \in I(\mathbb{R})$,

- Adição

  $A + B = [a^- + b^-, a^+ + b^+]$

- Inverso Aditivo

  $-A = [-a^+, -a^-]$

- Subtração

  $A - B = [a^- - b^+, a^+ - b^-]$

- Multiplicação

$$A \cdot B = [min \text{ M}, max \text{ M}], \text{ onde } M = \{a^-b^-, a^-b^+, a^+b^-, a^+b^+]\}$$

- Inveso Multiplicativo

$$\text{Se } 0 \notin B, \ \frac{1}{B} = \left[\frac{1}{b^+}, \frac{1}{b^-} \right]$$

- Divisão

$$\frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B}$$

2.1.2 Propriedades da igualdade = em $I(\mathbb{R})$

Sejam $A, B, C \in I(\mathbb{R})$. Então valem:

1. Comutatividade

   $A + B = B + A$

   $A \cdot B = B \cdot A$

2. Associatividade

   $(A + B) + C = A + (B + C)$

   $(A \cdot B) \cdot C = A(\cdot B \cdot C)$

3. Existência elemento neutro

   $\exists!\ 0 = [0, 0] \in I(\mathbb{R}), \forall A \in I(\mathbb{R}), A + 0 = A$

   $\exists!\ 1 = [1, 1] \in I(\mathbb{R}), \forall A \in I(\mathbb{R}), A \cdot 1 = A$

4. Inexistência elemento simétrico

   Dado um elemento arbitrário $A = [a^-, a^+] \in I(\mathbb{R})$, $a^- \neq a^+$, então esse elemento não possui elemento inverso em relação à adição e multiplicação , pois $0 \in A - A$ e $1 \in \frac{A}{A}, 0 \notin A$.

5. Subdistributividade

$A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot C + A \cdot C$

$a(B + C) = aB + aC, \forall\, a \in \mathbb{R}$

De acordo com as propriedades acima, temos que $(I(\mathbb{R}), +, -, \cdot, \backslash)$ não forma um corpo, pois não existem os elementos simétricos da adição e da multiplicação .

Definição 7:

Sejam $A = [a^-, a^+]$, $B = [b^-, b^+] \in I(\mathbb{R})$. Então a noção de valor absoluto, distância e diâmentro é dado por:

Distância: $d(A, B) = max\{| a^- - b^- |, | a^+ - b^+ |\}$

Valor Absoluto: $| A |= max\{| a^- |, | a^+ |\}$

Diâmetro: $D(A) = a^+ - a^- > 0$

2.2 Aspectos Básicos em $(I(\mathbb{R}), +, \cdot, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$

2.2.1 Relação $\sqsubseteq$

Esta relação é uma relação de qualidade, utilizada para comparar duas informações . Ela é definida como:

Para $X, Y \in I(\mathbb{R})$, $X \sqsubseteq Y \Leftrightarrow Y \subseteq X$.

Assim, $X \sqsubseteq Y$ pode ser intuitivamente interpretado como Y informa mais(ou pelo menos o mesmo) que X a respeito de um real contido em X e Y.

Exemplo:

Dada a cadeia $[0,5] \sqsubseteq [3,4] \sqsubseteq [3,3.5] \sqsubseteq [3.1,3.4] \sqsubseteq \ldots$ tem-se que a mesma pode ser interpretada como uma cadeia de informações a respeito do número Π.

Definição 8:

Uma relação $\sqsubseteq$ sobre um conjunto D diz-se uma ordem parcial se ela possuir as propriedades:

- reflexiva: $\forall x \in D,\ x \sqsubseteq x$
- antisimétrica: $\forall x, y \in D,\ x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x \rightarrow x = y$
- transitiva: $\forall x, y, z \in D,\ x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z \rightarrow x \sqsubseteq z$

Definição 9:

Um conjunto D munido de uma ordem parcial é dito parcialmente ordenado.

Definição 10:

Um conjunto M é dirigido se e somente se $M \neq \emptyset$ e $\forall x, y \in M$, $\exists z \in M$ tal que $x \sqsubseteq z$ e $y \sqsubseteq z$.

Definição 11:

Um elemento x é supremo de M se e somente se $\forall y \in M$, $y \sqsubseteq x$ e se $z \in D$ é tal que $\forall t \in M,\ t \sqsubseteq z$ então $x \sqsubseteq z$.

Definição 12:

Uma ordem parcial completa (cpo) é um conjunto parcialmente ordenado com primeiro elemento $\perp$ (isto é: $\perp \sqsubseteq x$, $\forall x \in D$) tal que todo subconjunto dirigido M tem supremo.

Assim, um cpo é uma estrutura $\mathcal{D} = (D, \sqsubseteq, \perp)$, onde todo $M \subseteq D$ dirigido tem supremo em D.

2.2.2 Relação $\equiv_x$

Definição 13

Seja o cpo $(I(\mathbb{R}), \sqsubseteq, \perp)$. Diz-se que $A, B \in I(\mathbb{R})$ estão x-relacionados, para $x \in \mathbb{R}$, e denota-se por $A \equiv_x B$ se

$A \equiv_x B \Leftrightarrow A \sqsubseteq x$ e $B \sqsubseteq x$, ou seja, A e B aproximam x.

O elemento indexador (x) pode ser visto como um número não exato, aproximado pelos intervalos A e B. Assim, quando nomeamos um elemento A para a relação $\equiv_x$, na verdade estamos tratando de uma classe de intervalos que tem a propriedade x.

Exemplo:

Considerando a cadeia do exemplo anterior, tem-se que:

$[0,5] \equiv_\Pi [3,4]$, $[0,5] \equiv_\Pi [3.1, 3.4]$, $[3, 3.5] \equiv_\Pi [3.1, 3.4]$

Dado um cpo $(\mathcal{D}, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$, a relação $X \sqsubseteq Y$, para $X, Y \in D$ é de qualidade, interpretada como "Y informa no mínimo tanto quanto X a respeito de um real contido em X e Y". Por outro lado, a relação $X \equiv_x Y$, para $X, Y \in D$ é interpretada como uma relação de aproximação , ou seja, X e Y são aproximações para um real x.

2.2.3 Propriedades de $(I(\mathbb{R}), \equiv_x)$

Teorema 1

Seja $(I(\mathbb{R}), \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$ definida acima. Então valem:

- $\equiv_x$ é reflexiva em relação a x, isto é,
  $\forall A \in I(\mathbb{R}), \forall x \in A,\ A \equiv_x A$
- $\equiv_x$ é simétrica em relação a x, ou seja,
  $\forall A, B \in I(\mathbb{R}),\ A \equiv_x B \to B \equiv_x A$
- $\equiv_x$ é transitiva em relação a x, isto é,
  $\forall A, B, C \in I(\mathbb{R}),\ A \equiv_x B \wedge B \equiv_x C \to A \equiv_x C$

Demonstração :

$\forall x \in A$, vale $A \sqsubseteq x$. Logo $A \sqsubseteq x \wedge A \sqsubseteq x \to A \equiv_x A$. Com isto prova-se que $\equiv_x$ é reflexiva.

$\forall x \in A, B,\ A \equiv_x B \to A \sqsubseteq x \wedge B \sqsubseteq x \to B \sqsubseteq x \wedge A \sqsubseteq x \to B \equiv_x A$. Portanto a relação $\equiv_x$ é antissimétrica.

$\forall x \in A, B, C,\ A \equiv_x B \wedge B \equiv_x C \to (A \sqsubseteq x \wedge B \sqsubseteq x) \wedge (B \sqsubseteq x \wedge C \sqsubseteq\ ) \to A \sqsubseteq x \wedge C \sqsubseteq x \to A \equiv_x C$. Logo conclui-se que a relação $\equiv_x$ é transitiva.

Logo por este teorema conclui-se que a relação $\equiv_x$ é uma relação semelhante à relação de equivalência.

Teorema 2

Sejam $A, B \in I(\mathbb{R})$ então $\forall\, \lambda \in A, \delta \in B$, $A \equiv_{\lambda,\delta} B$ sss $A = B$.

$A \equiv_{\lambda,\delta} B \leftrightarrow A \equiv_{\lambda} B \wedge A \equiv_{\delta} B$

Demonstração

$\forall \lambda \in A, \forall \delta \in B, A \equiv_{\lambda\delta} B \leftrightarrow A \sqsubseteq \delta \wedge B \sqsubseteq \lambda \leftrightarrow A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq A \leftrightarrow A = B$

Este teorema estabelece uma relação entre a relação de aproximação ($\equiv_x$) e a igualdade de Moore ($=$) em $I(\mathbb{R})$.

A lei da monotonicidade vale de acordo com o teorema abaixo.

Teorema 3

Sejam $A, B, C, D, \in I(\mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}$ e $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ então $A \equiv_x B \wedge C \equiv_y D \rightarrow A * C \equiv_{x*y} B * D$, onde $0 \notin C$ na divisão.

Demonstração

$A \equiv_x B \wedge C \equiv_y D \rightarrow (A \sqsubseteq x \wedge B \sqsubseteq x) \wedge (C \sqsubseteq y \wedge D \sqsubseteq y) \rightarrow A * C \sqsubseteq x * y \wedge B * D \sqsubseteq x * y \rightarrow A * C \equiv_{x*y} B * D$

Teorema 4

Seja $(I(\mathbb{R}), +, \cdot, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$ como no teorema 1. São válidas as seguintes propriedades:

- $A \equiv B \wedge A' \sqsubseteq A \rightarrow A' \equiv B$
- $A \sqsubseteq B \rightarrow A \equiv_b B, \forall\, b \in B$
- $(A + B)(A - B) \equiv A^2 - B^2$

- $A \cdot B \equiv_0 \mathcal{O} \Leftrightarrow A \equiv_0 \mathcal{O} \vee B \equiv_0 \mathcal{O}$, isto é, não existem divisores de zero.

- Se $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, $A \equiv_c B$ então $\pm\sqrt{A} \equiv_{\pm\sqrt{c}} \pm\sqrt{B}$

2.2.4 Imagem e Avaliação Intervalar de uma função real

A inclusão da imagem de uma função desempenha na Teoria dos Intervalos um papel muito importante, pois em geral o valor exato de uma função não é conhecido. Deve-se observar que a utilização de intervalos possibilita de um modo simples se obter inclusões da imagem das quais se pode obter teoremas sobre a não existência de raízes a partir do fato dessas inclusões da imagem não conterem o valor zero.

Definição 14

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $X \subseteq D$. A imagem intervalar de f em X é dada por:

$$I_f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} = [min_{x \in X} f(x), max_{x \in X} f(x)]$$

Teorema 5:

Sejam $I_f(X)$ e $f(X)$ definidas acima. Então vale:
$I_f(X) \subseteq f(X), \forall x \in X$.

Exemplo:

Seja a função polinomial $f(x) = 5x^3 + 8x^2 + 7x + 3$

- a imagem de $f(x)$ no intervalo $[2,5]$ é dada por:

$$I_f(X) = \{5x^3 + 8x^2 + 7x + 3 \mid x \in X\} = [89, 863]$$

- uma avaliação de f no intervalo $[2,5]$ é dada por:

$$f(X) = 5X^3 + 8X^2 + 7X + 3 = [89, 863]$$

Para esta função , $I_f(X) = f(X)$, o que não ocorre com o exemplo abaixo.

Exemplo:

Para a função $f(x) = x^2 - 4x + 2$ não monotônica no intervalo $[-5, 10]$, tem-se que:

- a imagem é dada por:

$$I_f([-5,10]) = \{x^2 - 4x + 2 \mid -5 < x < 10\} = [-18, 142]$$

- uma avaliação intervalar de f em $[-5, 10]$ pode ser dada por:

$$f([-5,10]) = X \cdot X - 4X + 2 = [-38, 142]$$

Neste caso $I_f(X) \subset f(X)$.

Definição 15:

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e monótona em um intervalo $X \subseteq D$. Então $I_f = [min\{f(x^-), f(x^+)\}, max\{f(x^-), f(x^+)\}]$.

Em virtude da dificuldade de se calcular o valor da imagem de uma função num determinado intervalo, é possível se definir cotas superiores deste conjunto substituindo-se as variáveis e constantes reais pelos componenetes intervalares, obtendo-se uma avaliação intervalar que denota mos por $f(X)$.

Teorema 6

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $X \subseteq D$. Sejam $f_1(X)$ e $f_2(X)$ duas avaliações da f em X, então para todo $i \in I_f(X)$ vale $f_1(X) \equiv_i f_2(X)$.

Demonstração

Seja $I_f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ a imagem intervalar de f em X. Sejam $f_1(X)$ e $f_2(X)$ duas avaliações para $I_f(X)$. Como a avliação intervalar da função é sempre maior ou igual à imagem intervalar num determinado intervalo, tem-se que: $I_f(X) \subseteq f_1(X) \wedge I_f(X) \subseteq f_2(X) \rightarrow f_1(X) \sqsubseteq I_f(X) \wedge f_2(X) \sqsubseteq I_f(X) \rightarrow f_1(X) \equiv if_2(X)$, para todo $i \in I_f(X)$

2.2.5 Propriedades Algébricas

Teorema 7

Seja o conjunto dos intervalos $I(\mathbb{R})$ com as operações dadas em 2.1.1. Sejam $A, B, C, D \in I(\mathbb{R})$. Então vale:

- Comutatividade da Adição e Multiplicação
  - $A + B \equiv_\lambda B + A, \forall \lambda = a + b, a \in A, b \in B$

- $A \cdot B \equiv_\beta B \cdot A, \forall \beta = a \cdot b, \forall a \in A, \forall b \in B$

- Distributividade
  - $A + (B + C) \equiv_\lambda (A + B) + C, \forall \lambda = a + b + c,\ a \in A, b \in B, c \in C$
  - $A \cdot (B \cdot C) \equiv_\beta (A \cdot B) \cdot C, \forall \beta = a \cdot b \cdot c,\ a \in A, b \in B, c \in C$
- Existência de Elemento Neutro
  - $\exists \mathcal{O} := [0,0], \forall A \in I(\mathbb{R}), \forall a \in A$ tal que $A + \mathcal{O} \equiv_a A$
  - $\exists 1 := [1,1], \forall A \in I(\mathbb{R}), \forall a \in A$ tal que $A \cdot 1 \equiv_a A$
- Existência Elemento Simétrico
  - $\forall A \in I(\mathbb{R}), \exists A \in I(\mathbb{R})$ tal que $A - A \equiv_0 \mathcal{O}$
  - $\forall A \in I(\mathbb{R}), 0 \notin Ax$ tal que $A \cdot 1/A \equiv_1 1$
- Distributividade
  - $A(B + C) \equiv_\lambda AB + AC,\ \lambda = a(b + c),\ a \in A, b \in B, c \in C$

Algumas considerações devem ser feitas a respeito deste teorema.

- Muito embora os elementos neutro e inverso não sejam únicos, eles são equivalentes em relação a $\equiv_x$
- As propriedades que as operações $+$ e $\cdot$ de $(I(\mathbb{R}), +, \cdot, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$ possuem se assemelham as de um corpo, por esse motivo denotaremos tal estrutura de *corpo dinâmico*.

Para resolução de equações no corpo dinâmico, temos que inicialmente caracterizar o que consideraremos como solução ótima.

2.2.6 Caracterização da Solução

Definição 16

Dada uma equação $F(X) \equiv_y Y$ é solução ótima X_o (ou simplesmente solução) se o conjunto de todo $x \in X$ que satisfaz a equação $f(x) = y$, para $y \in Y$.

Chamaremos de solução externa a qualquer $X_e \in I(\mathbb{R})$ tal que $X_e \sqsubset X_o$ e de solução interna a qualquer $X_i \in I(\mathbb{R})$ tal que $X_i \subset X_o$.

Exemplo

Dada a equação $X - [2,7] = [1,4]$, a solução ótima será constituída pelo mínimo e máximo de cada uma das equações reais envolvidas na equação intervalar, sendo que estas equações reais estão limitadas pelos coeficientes intervalares. Deste modo,

x-2=1	x-2=4	x-7=1	x-7=4
x=3	x=6	x=8	x=11

A solução ótima então é determinada pelo intervalo $[3,11]$. Qualquer intervalo que contenha esta solução é considerado solução externa.

3 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES

Neste capítulo serão consideradas funções reais e intervalares, onde estas podem assumir valores reais ou intervalares. Para cada tipo de função será apresentado sua representação gráfica, assim como será analisado sua imagem e sua solução . Para cada tipo de função serão identificados graficamente as soluções ótima e externa.

As funções se classificam em:

- Função Real $\begin{cases} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f\colon I(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \end{cases}$

- Função Intervalar $\begin{cases} f\colon \mathbb{R} \to I(\mathbb{R}) \\ f\colon I(\mathbb{R}) \to I(\mathbb{R}) \end{cases}$

3.1 Função Real de argumentos reais

Definição 17:

A imagem de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por:
para $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = y$, $y \in \mathbb{R}$.

Definição 18:

Dada uma função real $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diz-se que $x \in \mathbb{R}$ é solução da função f se $f(x) = 0$.

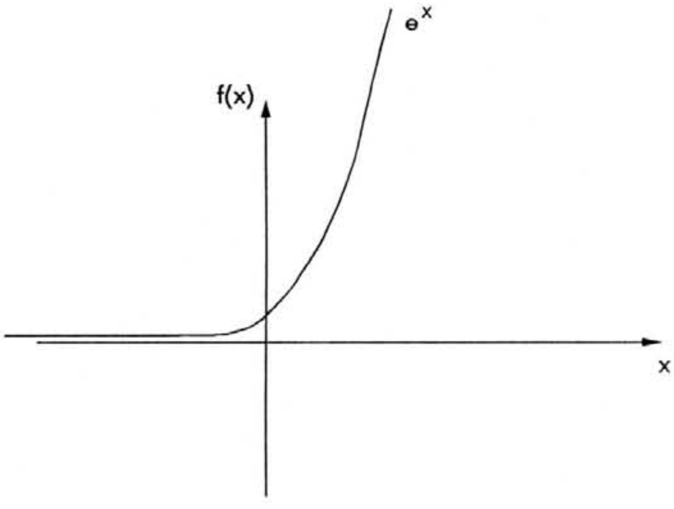

Figura 3.1: $f(x) = e^x$

Exemplo:

A representação da função $f(x) = e^x$ é como na figura 3.1.

3.2 Função Real de Argumentos Intervalares

3.2.1 Representação de Intervalos

Um intervalo $X \in I(\mathbb{R})$, $X = [x^-, x^+]$, onde $x^- \leqslant x^+$ pode ser considerado como um número representado por um par ordenado (x^-, x^+), onde para intervalos de $I(\mathbb{R})$ tem-se que $x^- \leqslant x^+$.

Com isto torna-se possível representar intervalos no plano $\mathbb{R}^2$, onde considera-se o isomorfismo $L : I(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $L : [a, b] \to (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leqslant b$.

Assim, o elemento inferior de cada intervalo fica representado no eixo das ordenadas, enquanto o elemento superior fica representado no eixo das abcissas. Tem-se então o plano X^-X^+.

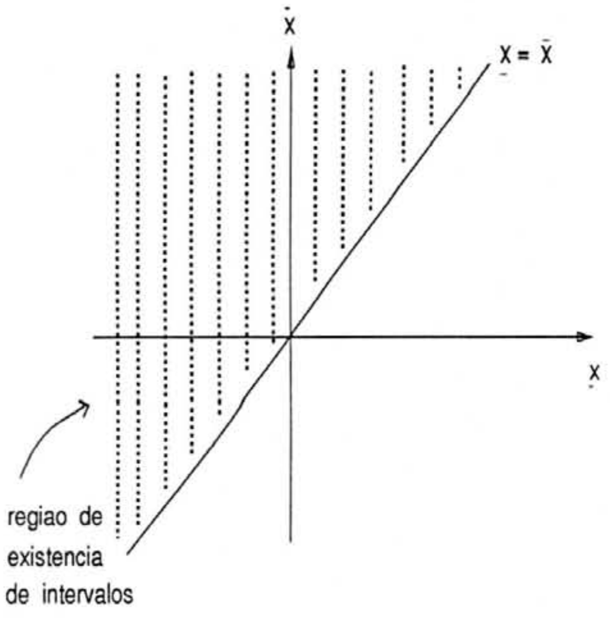

Figura 3.2: domínio intervalar

Como o domínio de representação de intervalos de $I(\mathbb{R})$ é constituído de todos os pontos $(x^-, x^+) \in \mathbb{R}^2$, cujas coordenadas satisfazem a desigualdade $x^- \leqslant x^+$ e, como o gráfico de qualquer desigualdade em $\mathbb{R}^2$ é um semiplano, tem-se que este semiplano é formado por todos os pontos que estão acima da reta $x^- = x^+$.

Logo o domínio de representação de intervalos de $I(\mathbb{R})$ é o semiplano marcado na figura 3.2.

3.2.2 Representação de f: $I(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

Se uma função real que assume argumentos intervalares possui imagem real, então esta função ao tomar um intervalo como argumento opera em geral com os extremos deste intervalo na função .

Pode-se citar como exemplo as funções :

- $D(X) = x^+ - x^-$, que calcula o diâmetro do intervalo

- $m(X) = \frac{x^+ + x^-}{2}$, que calcula o ponto médio do intervalo

- $f(X) = max\{|x^-|, |x^+|\}$ que determina o módulo do intervalo

- $f(X) = \begin{cases} x^- \; x^+ & \text{se } 0 \leq m(X) \\ x^+ \; x^- & \text{c.c} \end{cases}$

- $f(X) = 5x^- - 2x^+$

3.2.3 Determinação da Imagem

Para este tipo de função considera-se o isomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F : (a, b) \rightarrow x$, onde $a \leqslant b$ e $f(a, b) = x$. Com isto a imagem da função num intervalo é determinada pela projeção do intervalo(representado no plano $\mathbb{R}^2$) neste plano.

Definição 19:

A imagem de uma função f: $I(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:
para $X \in I(\mathbb{R})$, $f(X) = y$, $y \in \mathbb{R}$.

Definição 20:

A solução da função f: $I(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada pelo(s) intervalo(s) $X \in I(\mathbb{R})$ tal que $f(X) = 0 = [0, 0]$.

Exemplo

1. $f(X) = x^+ - x^-$. O gráfico está representado na figura 3.3.

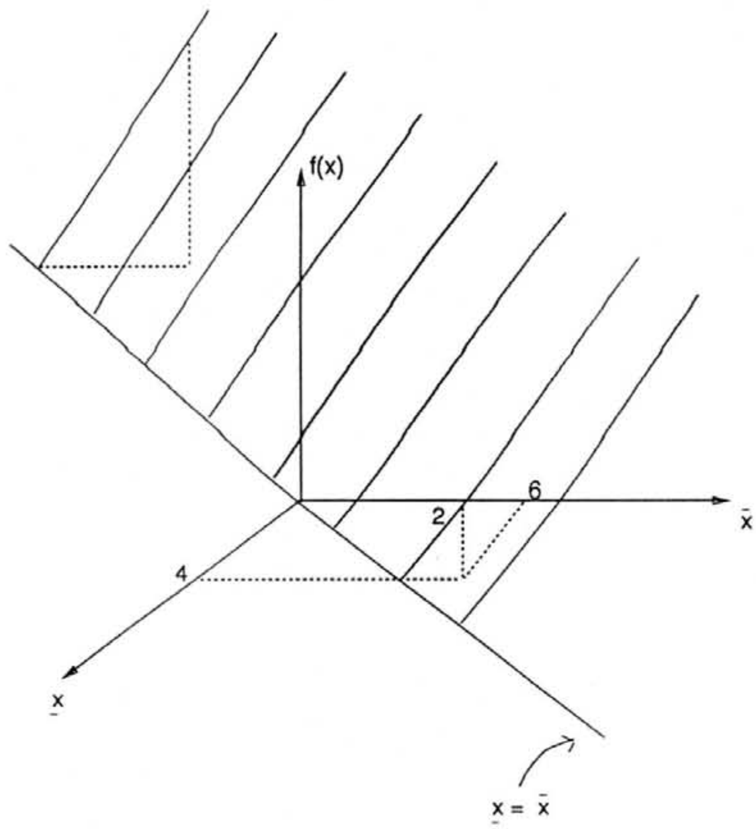

Figura 3.3: $f(X) = x^+ - x^-$

3.3 Função Intervalar de Argumentos Reais

3.3.1 Caracterização de funções de coeficientes intervalares

$f\colon \mathbb{R} \rightarrow I(\mathbb{R})$ é uma função que possui pelo menos um coeficiente intervalar, pois caso contrário seria uma função do tipo $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Com isto, tem-se que uma função de coeficientes intervalares determina uma infinidade de funções de coeficientes reais, onde para cada valor do coeficiente intervalar da função tem-se determinado uma equação real.

Exemplificando, para a função intervalar $F(x) = [1,4]x$, tem-se que a mesma é constituída por um conjunto de infinitas funções reais, onde $F(x) = \{\lambda\, x \mid \forall \lambda \in [1,4], \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Associando para cada coeficiente intervalar um índice na função , tem-se que a função acima pode ser representada como: $F_A(x) = \{f_a(x) \mid \forall\, a \in A\}$. Com esta representação tem-se que f_a é uma função real, onde o coeficiente real a varia conforme o coeficiente intervalar A da função f.

Exemplo

A função $F(x) = [2,9]x^2 + [5,12]x$ pode ser representada por: $f_{AB}(x) = \{f_{ab}(x) = ax^2 + bx \mid a \in A, b \in B, A = [2,9], B = [5,12]\}$.

3.3.2 Determinação da Imagem

Definição 21:

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to I(\mathbb{R})$, representada por $f_{A,B,C,D,\ldots}$ onde $A, B, C, D, \ldots$ são os coeficientes intervalares da função possui imagem definida por: para $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{A,B,C,D,\ldots}(x) = \left[\ min\, f_{a,b,c,d,\ldots}(x), max\, f_{a,b,c,d,\ldots}(x)\ \right]$$

onde $a \in A, b \in B, c \in C, d \in D, \ldots$

3.3.3 Representação da função em $\mathbb{R}^2$

Com a definição acima conclui-se que o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to I(\mathbb{R})$ determina uma faixa de funções de coeficientes reais, sendo limitada por duas funções reais $\underline{g}, \overline{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exemplo

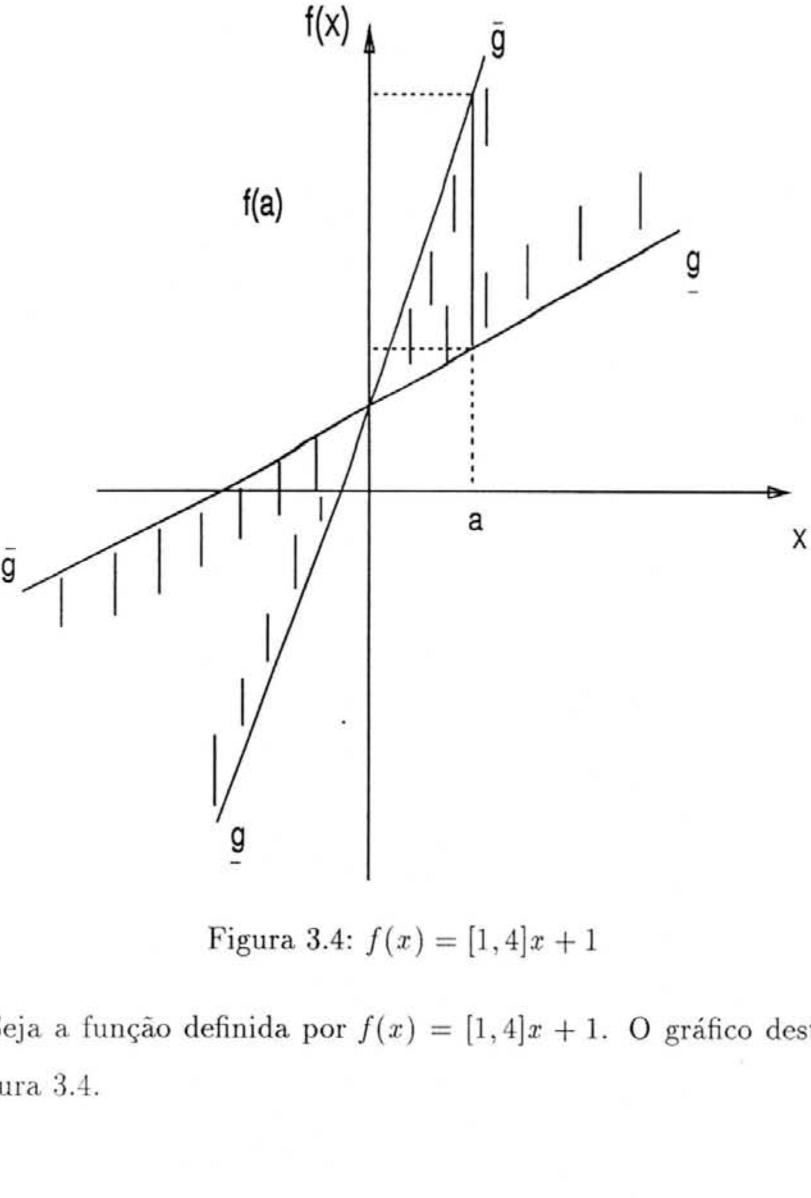

Figura 3.4: $f(x) = [1,4]x + 1$

Seja a função definida por $f(x) = [1,4]x + 1$. O gráfico desta função é como na figura 3.4.

3.3.4 Representação da função em $\mathbb{R}^3$

Um número real $x \in \mathbf{R}$ identifica-se com um intervalo degenerado $[x, x] \in I(\mathbf{R})$. Com isto, se considerarmos apenas os intervalos degenerados, tem-se que a função $f\colon \mathbf{R} \to I(\mathbf{R})$ é um caso particular da função $f\colon I(\mathbf{R}) \to I(\mathbf{R})$.

Se quiséssemos representar a função $f : \mathbf{R} \to I(\mathbf{R})$ como $f : I(\mathbf{R}) \to I(\mathbf{R})$, considerando-se apenas os intervalos pontuais, tem-se que o domínio de representação da função estsobre a reta $x^- = x^+$. A função determina então um plano

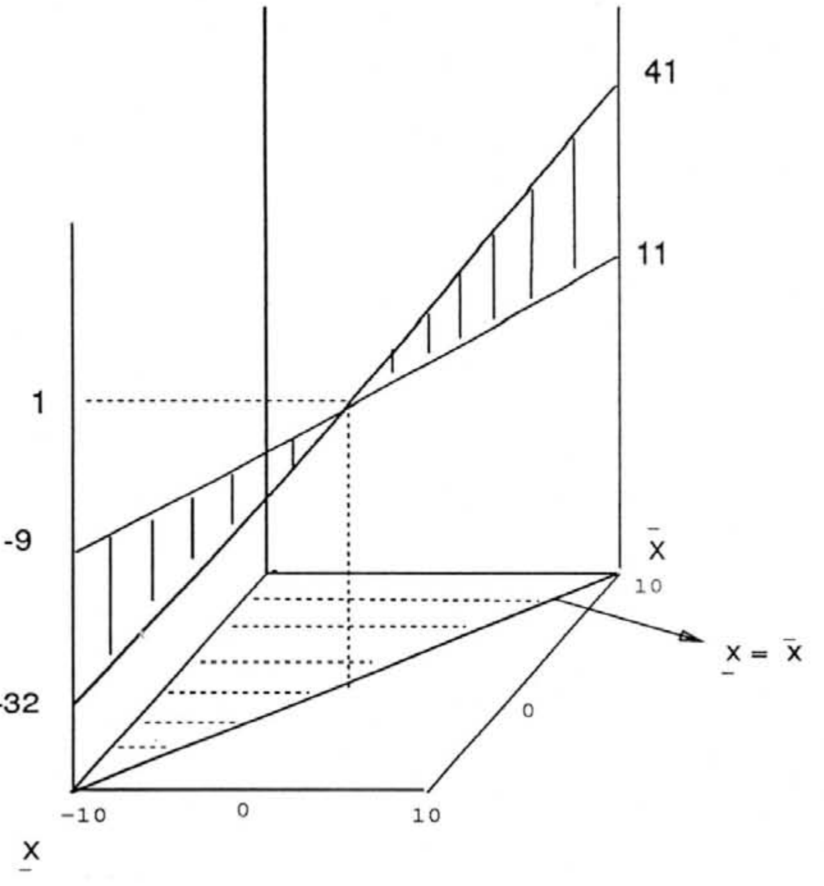

Figura 3.5: representação de F em $\mathbb{R}^3$

ortogonal à reta do domínio de representação de intervalos, como mostra o gráfico da figura 3.5

3.3.5 Conceitos Básicos

Definição 22:

Uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow I(\mathbb{R})$ é limitada pelas funções contínuas $\underline{g}, \overline{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\underline{g}, \overline{g}$ não são necessariamente diferenciáveis se $\forall\, x \in D \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) \in [\underline{g}(x), \overline{g}(x)]$.

Definição 23:

O intervalo solução de uma função intervalar de argumentos reais é determinado pelo conjunto $\mathcal{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \in [\underline{g}(x), \overline{g}(x)]\}$, onde $\underline{g}, \overline{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções reais que limitam a função intervalar.

Observações :

- O intervalo solução de uma função intervalar, limitada pelas funções reais $\underline{g}, \overline{g}$ que possuir a propriedade:
  $(\overline{g}(x^-) = 0 \wedge \underline{g}(x^-) \geqslant 0 \wedge \overline{g}(x^+) \leqslant 0 \wedge \underline{g}(X^+) = 0)$
  ou $(\overline{g}(x^-) = 0 \wedge \underline{g}(x^-) \leqslant 0 \wedge \overline{g}(x^+) \geqslant 0 \wedge \underline{g}(X^+) = 0)$
  é considerado solução ótima para a função intervalar, para um determinado $X \in I(\mathbb{R})$, $X = [x^-, x^+]$

- As condições acima estabelecidas para determinação da solução ótima de funções $f\colon \mathbb{R} \rightarrow I(\mathbb{R})$ podem também ser substituídas por: para $X \in I(\mathbb{R})$, $X = [x^-, x^+]$,

  $(\underline{g}(x^-) = [0, \alpha], \alpha > 0) \wedge (\overline{g}(x^+) = [\beta, 0], \beta < 0)$ ou

  $(\underline{g}(x^-) = [\beta, 0], \beta < 0) \wedge (\overline{g}(x^+) = [0, \alpha], \alpha > 0)$

Definição 24:

Sejam $\underline{g}, \overline{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas que limitam uma região em $\mathbb{R}^2$ determinada pela função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow I(\mathbb{R})$. Se $\forall x_1, x_2 \in D \subseteq \mathbb{R}$ tivermos:

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \underline{g}(x_1) < \underline{g}(x_2) \wedge \overline{g}(x_1) < \overline{g}(x_2)$ então f é crescente em D.

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \underline{g}(x_1) \leqslant \underline{g}(x_2) \wedge \overline{g}(x_1) \leqslant \underline{g}(x_2)$ então f é não-decrescente em D

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \underline{g}(x_1) > \underline{g}(x_2) \wedge \overline{g}(x_1) > \overline{g}(x_2)$ então f é decrescente em D

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \underline{g}(x_1) \geqslant \underline{g}(x_2) \wedge \overline{g}(x_1) \geqslant \underline{g}(x_2)$ então f é não-crescente em D

Definição 25:

Se uma função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow I(\mathbb{R})$ é de qualquer um dos tipos descritos acima então a função é monótona.

Definição 26: Condição de Lipschitz Intervalar

Seja uma função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow I(\mathbb{R})$ contínua e monótona, limitada pelas funções reais $\underline{g}, \overline{g}$. As funções $\underline{g}, \overline{g}$ satisfazem a Condição de Lipschitz Intervalar se:

$\forall x^-, x^+ \in X \subset I(\mathbb{R})$,

$$\underline{g}(x^-) - \underline{g}(x^+) \in M(x^- - x^+)$$
$$\overline{g}(x^-) - \overline{g}(x^+) \in M(x^- - x^+)$$

onde $M = [m^-, m^+]$

A Condição de Lipschitz Intervalar é suficiente para os métodos intervalares, não sendo necessário exigir que as funções $\underline{g}, \overline{g}$ sejam continuamente diferenciáveis. Para funções continuamente diferenciáveis tem-se que $0 \notin M = [m^-, m^+]$, visto que f é monótona crescente ou decrescente.

Teorema 8:

Se as funções reais e contínuas que limitam uma função intervalar satisfazem a Condição de Lipschitz Intervalar, onde em um domínio $D \subseteq \mathbb{R}$ a inversa da derivada de f está limitada

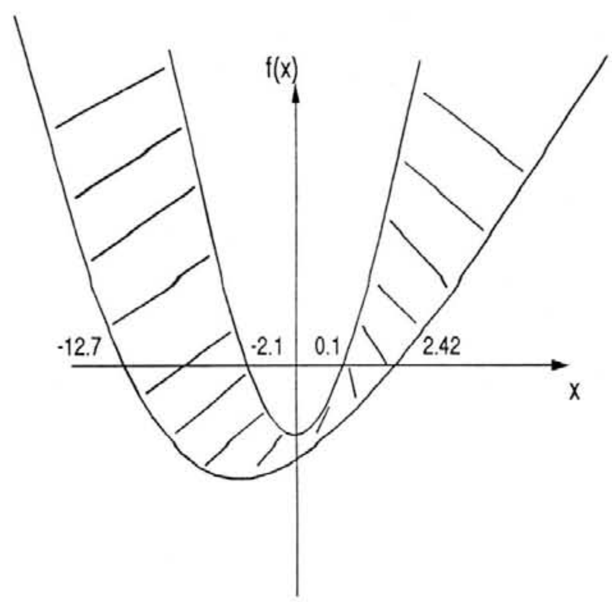

Figura 3.6: $f(x) = [1,6]x^2 + [8,12]x - [2,10]$

pelos extremos do intervalo M, então f possui no máximo uma solução em D.

Demonstração :

Sejam $X, Y \subseteq I(\mathbb{R})$, $X \bigcap Y = \varnothing$ duas soluções de f em D. Assim, para $x^- \in X, y^- \in Y$,

$\underline{g}(x^-) - \underline{g}(y^-) = 0 = M(x^- - y^-)$. Como $M \neq 0$, $x^- = y^-$. De modo análogo conclui-se que $x^+ = y^+$. Logo $X = Y$.

3.3.6 Exemplos

1. $f(x) = [1,6]x^2 + [8,12]x - [2,10]$. O gráfico desta função está representado na figura 3.6.

2. $f(x) = x^3 - [2,4]x^2 - [5,7]x - [1,2]$. Na figura 3.7 tem-se representado o gráfico desta função .

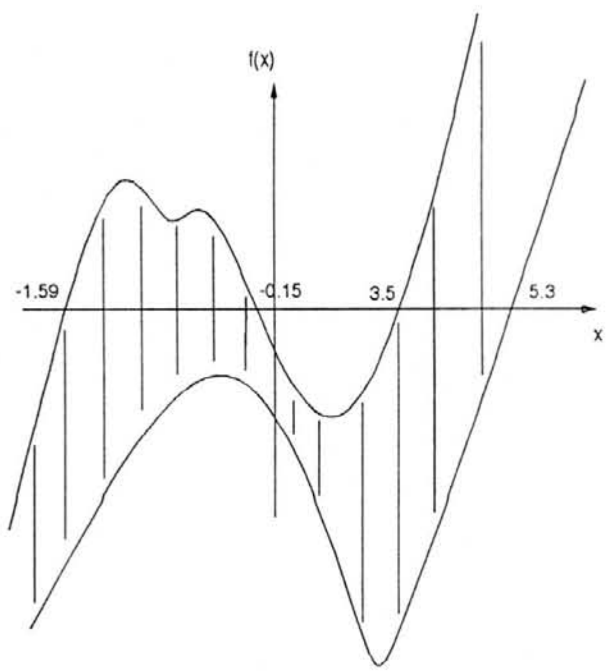

Figura 3.7: $f(x) = x^3 - [2,4]x^2 - [5,7]x - [1,2]$

3.4 Função Intervalar de Argumentos Intervalares

Uma função intervalar que assume argumentos intervalares é uma função do tipo f: $I(\mathbb{R}) \rightarrow I(\mathbb{R})$. As funções deste tipo classificam-se em dois grupos:

– funções que possuem todos os coeficientes reais

– funções que possuem pelo menos um coeficiente intervalar

3.4.1 Função Intervalar de Coeficientes Reais

Para as funções que possuem todos os coeficientes reais tem-se que a imagem da função num intervalo de $I(\mathbb{R})$ é dada pelos mínimo e máximo da avaliação de cada valor real pertencente ao argumento intervalar, conforme definição abaixo: para $X \in I(\mathbb{R})$,

$$F(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \left[\ min_{x \in X} f(x), max_{x \in X} f(x) \ \right]$$

3.4.2 Representação gráfica

Como os argumentos são intervalos, e como estes estão representados no plano $\mathbb{R}^2$, a função f: $I(\mathbb{R}) \rightarrow I(\mathbb{R})$ pode ser representada no espaço $\mathbb{R}^3$. O gráfico para este tipo de função é formado então por uma região limitada inferiormente e superiormente. Desta maneira, a projeção de cada par ordenado de $\mathbb{R}^2$ na região determinada pela função é um intervalo.

Definição 27:

Seja $f: I(\mathbb{R}) \rightarrow I(\mathbb{R})$ uma função intervalar limitada pelas funções contínuas $\underline{g}, \overline{g} : I(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\underline{g}, \overline{g}$ não são necessariamente diferenciáveis. Tem-se que $\forall X \in D \subseteq I(\mathbb{R})$, $f(X) \in [\underline{g}(X), \overline{g}(X)]$.

Considere o gráfico representado na figura 3.8. A região determinada pela função é limitada por dois planos, onde os pontos de interseção destes dois planos estão sobre a reta $Y = X + 3$ quando esta assume intervalos degenerados. Logo conclui-se que a imagem de intervalos degenerados é formada por um intervalo degenerado.

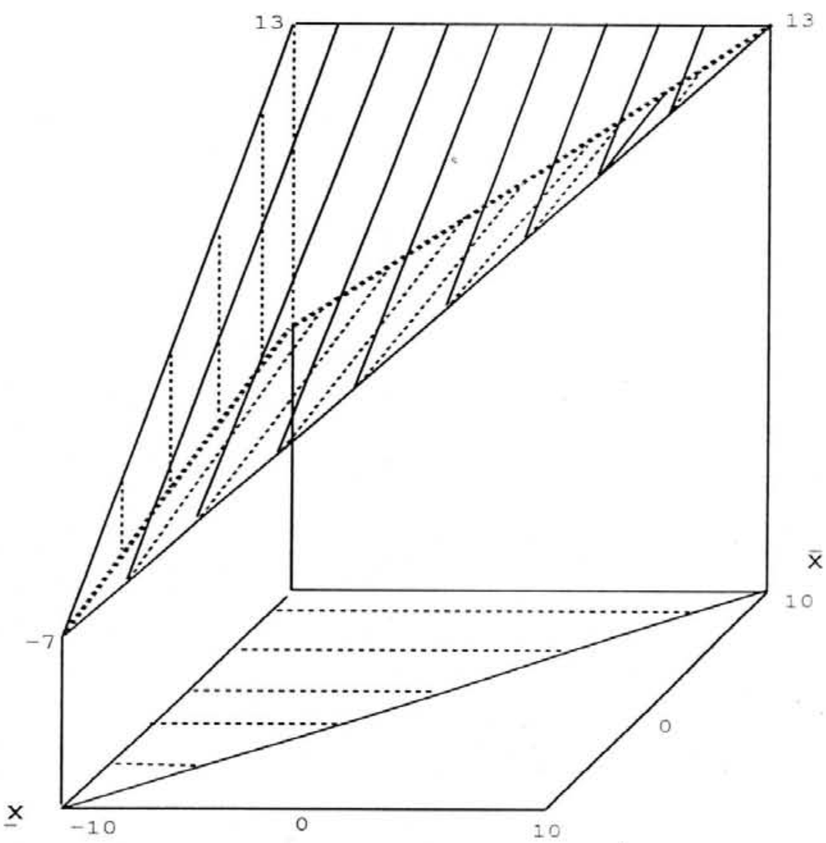

Figura 3.8: $f(X) = X + 3$

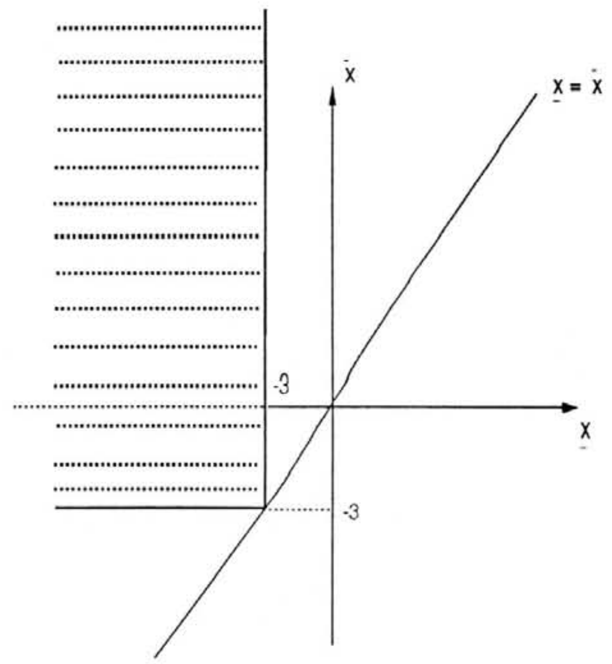

Figura 3.9: solução ótima de $f(X) = X + 3$

3.4.3 Determinação da Solução Ótima

A solução ótima para este tipo de função é formada por um intervalo $X \in I(\mathbb{R})$ que satisfaz $f(X) = 0 = [0, 0]$, visto que esta condição é possível de ser obtida, pois a função possui todos os coeficientes reais. Mas, para que a imagem de um intervalo seja constituída por um intervalo degenerado, é necessário que o argumento intervalar também seja degenerado.

Conclui-se portanto que, para uma função do tipo $f : I(\mathbb{R}) \to I(\mathbb{R})$ que possui todos os coeficientes reais, a solução ótima é determinada por um intervalo degenerado. Assim a solução ótima está na reta $x^- = x^+$.

Se considerarmos na função $f(X) = X + 3$ apenas o semiplano formado por elementos de $I(\mathbb{R})$ e, se tomarmos apenas os intervalos cuja imagem contém o valor zero, ao projetarmos a região formada por todos estes intervalos no plano X^-X^+, temos que o conjunto de todos os intervalos que solucionam esta equação está limitado pelas retas $x^- = -3$ e $x^+ = -3$. A representação da solução para a função $f(X) = X + 3$ é como no gráfico da figura 3.9.

Como o conjunto de todos os intervalos que solucionam a função é limitado por duas retas, o ponto de interseção destas retas está em $x^- = x^+$. Este ponto de interseção das retas determina a solução ótima.

Observe que qualquer valor que está no interior da região limitada pelas retas $x^- = -3$ e $x^+ = -3$ é solução externa.

Observação :

Para as funções intervalares de coeficientes reais que possuírem mais de uma solução , tem-se representados tantos planos quantos forem o número de soluções da função . A interseção destes planos é interpretada como o conjunto de soluções que contém mais de uma solução para a função . Em 3.10 a solução ótima para a função $f(X) = X^2+2X-3$ está determinaa pelos intervalos degenerados $[-2,-2]$ e $[2,2]$. Observe que o plano limitado pelas retas $x^+ = 2$ e $x^- = -2$ é o conjunto interseção dos dois planos.

Exemplos

O gráfico da função $f(x) = x^2$ está representado na figura 3.11. Na figura 3.12 está representado o conjunto de todos os intervalos que solucionam esta função .

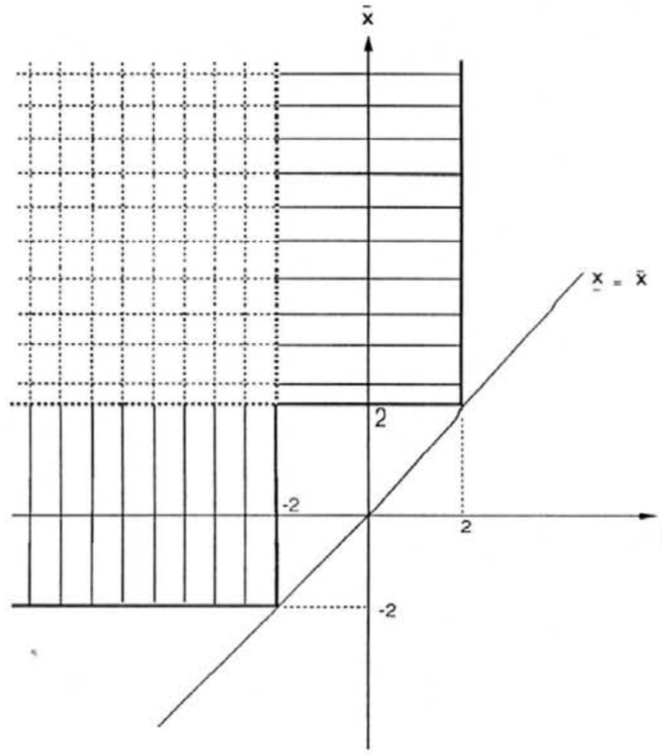

Figura 3.10: Solução de $f(X) = X^2 + 2X - 3$

3.4.4 Função de Coeficientes Intervalares

3.4.5 Determinação da Imagem

Para as funções que possuem pelo menos um coeficiente intervalar tem-se que a imagem é determinada pelo mínimo e máximo de cada avaliação real realizada, considerando que esta avaliação real é obtida conforme cada valor real pertencente ao coeficiente intervalar da função e obtida também conforme cada valor real do argumento intervalar.

Como a função $f\colon I(\mathbb{R}) \to I(\mathbb{R})$ considerada neste caso possui pelo menos um coeficiente intervalar, esta função pode ser representada por $f_{A,B,C,\dots}$, onde $A, B, C, \dots \in I(\mathbb{R})$. A imagem da função num intervalo de $I(\mathbb{R})$ é obtida ao tomarmos o mínimo e o máximo de cada avaliação real, onde esta avaliação assume valores reais que variam conforme o coeficiente intervalar da função e varia conforme o argumento intervalar.

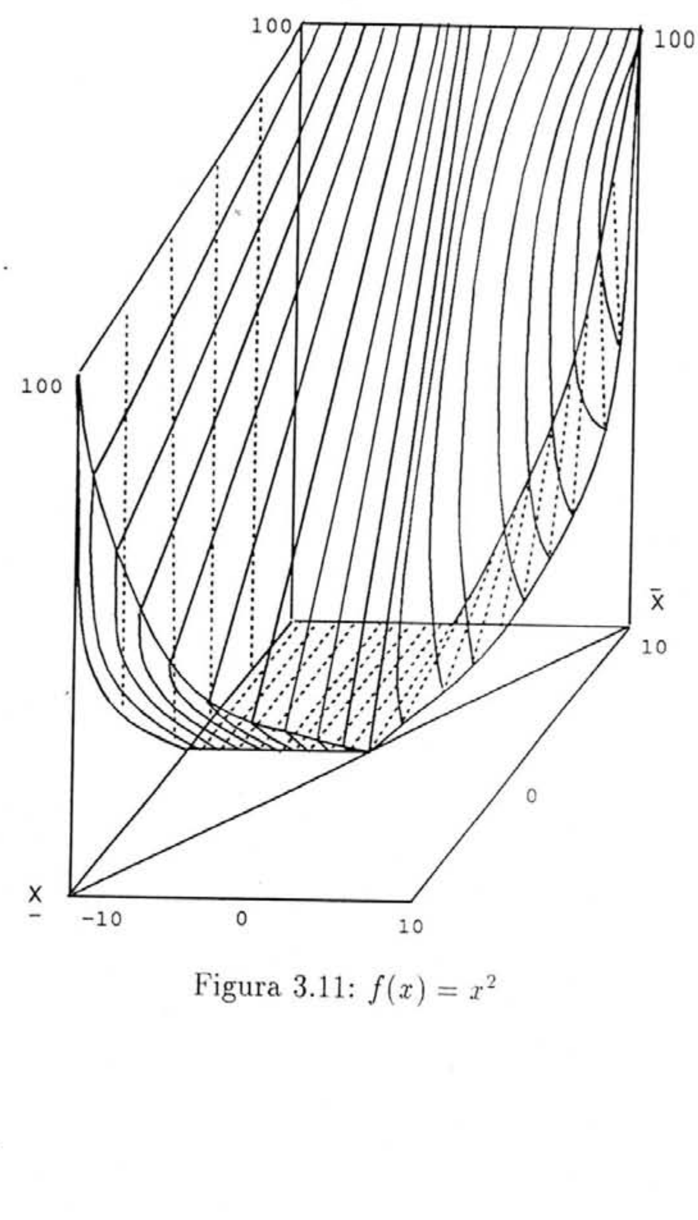

Figura 3.11: $f(x) = x^2$

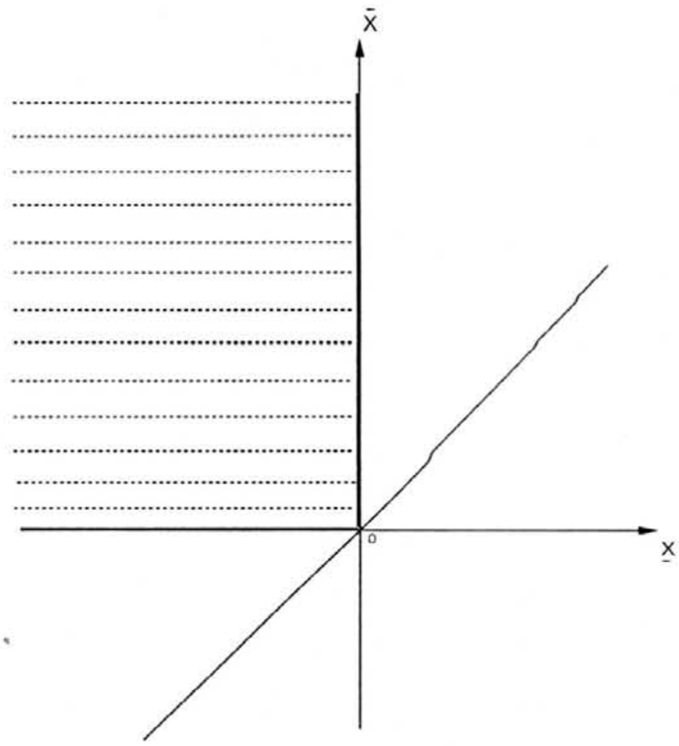

Figura 3.12: Representação da solução de $f(x) = x^2$

Assim, tem-se que a imagem está determinada por: para $X \in I(\mathbb{R})$,

$$f_{A,B,C,\ldots}(X) = \left[\; min_{x\in X}\, f_{a,b,c,\ldots}(x), max_{x\in X}\, f_{a,b,c,\ldots}(x) \;\right]$$

onde $a \in A, b \in B, c \in C, \ldots$

3.4.6 Representação gráfica

A representação gráfica deste tipo de função também é uma região em $\mathbb{R}^3$, limitada neste caso por três planos: um plano superior, um plano inferior e pelo plano formado pela substituição de intervalos degenerados na função . Com isto a definição 22 também é válida para este caso.

O gráfico da função $f(X) = X + [1, 5]$ está representado na figura 3.13.

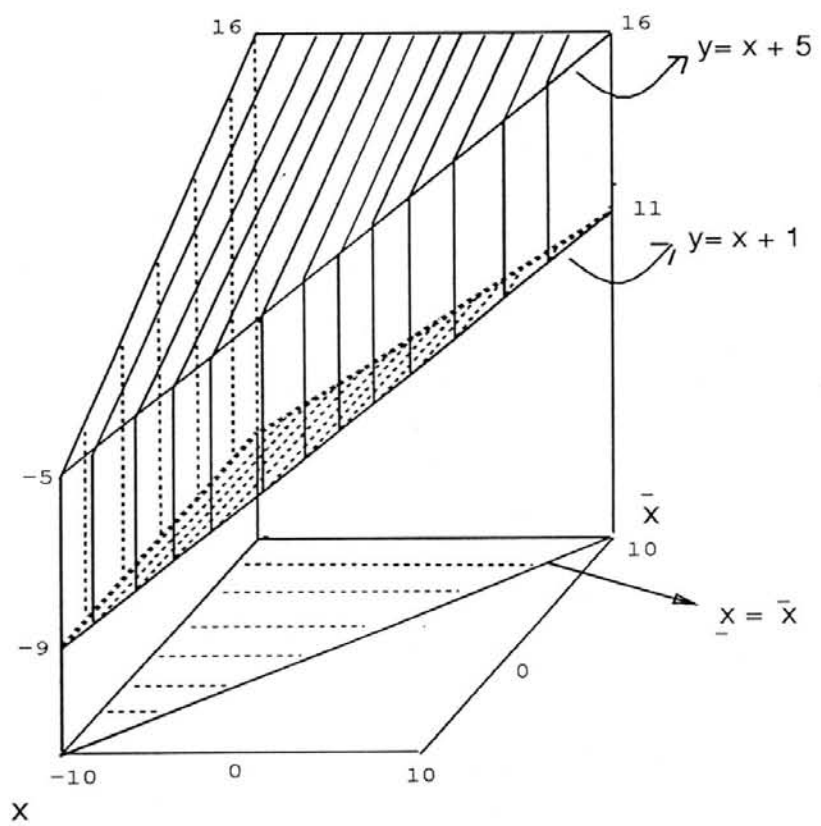

Figura 3.13: $f(X) = X + [1, 5]$

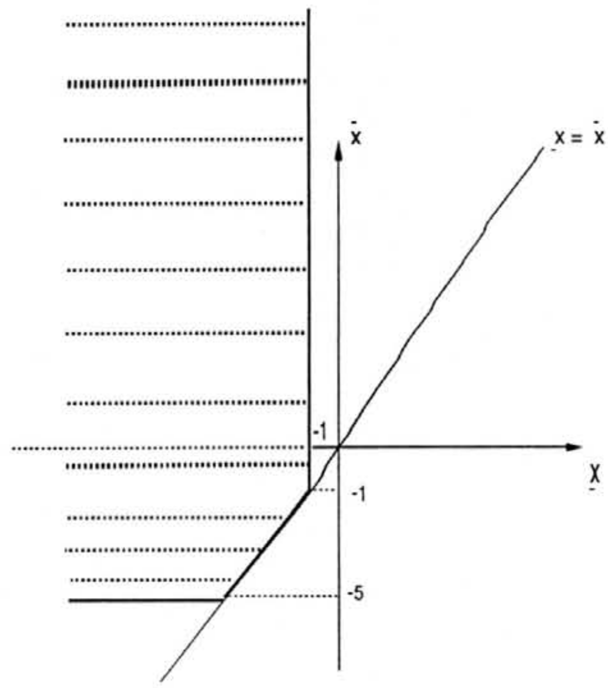

Figura 3.14: solução ótima de $f(X) = X + [1,5]$

3.4.7 Determinação da solução ótima

A solução ótima para este tipo de função é formada por um intervalo $X \in I(\mathbb{R})$ que satisfaz a condição $f(X) \equiv 0$. Como a função possui pelo menos um coeficiente intervalar, a condição $f(X) = [0,0]$ não será satisfeita, visto que na igualdade intervalar, $0 \in A - A$ e pela relação de aproximação , $0 \equiv A - A$.

Como no caso anterior, tomaremos no gráfico da função $f(X) = X+[1,5]$, representado na figura 3.13, apenas os intervalos cuja imagem contém o valor zero.

Pela projeção da região formada por todos estes intervalos, temos que o conjunto dos intervalos que solucionam a função é formado por um plano limitado pelas retas $x^- = -5$ e pela reta $x^+ = -1$, considerando-se apenas os intervalos X de $I(\mathbb{R})$. Veja o gráfico da figura 3.14.

Em 3.14, a região marcada possui todos os intervalos que solucionam a equação . Com isto a solução ótima deve conter os valores -5 e -1, pois caso contrário não contém todas as possíveis soluções reais. Mas, dentre todos os intervalos que possuem os valores -5 e -1, devemos tomar o menor deles, pois assim

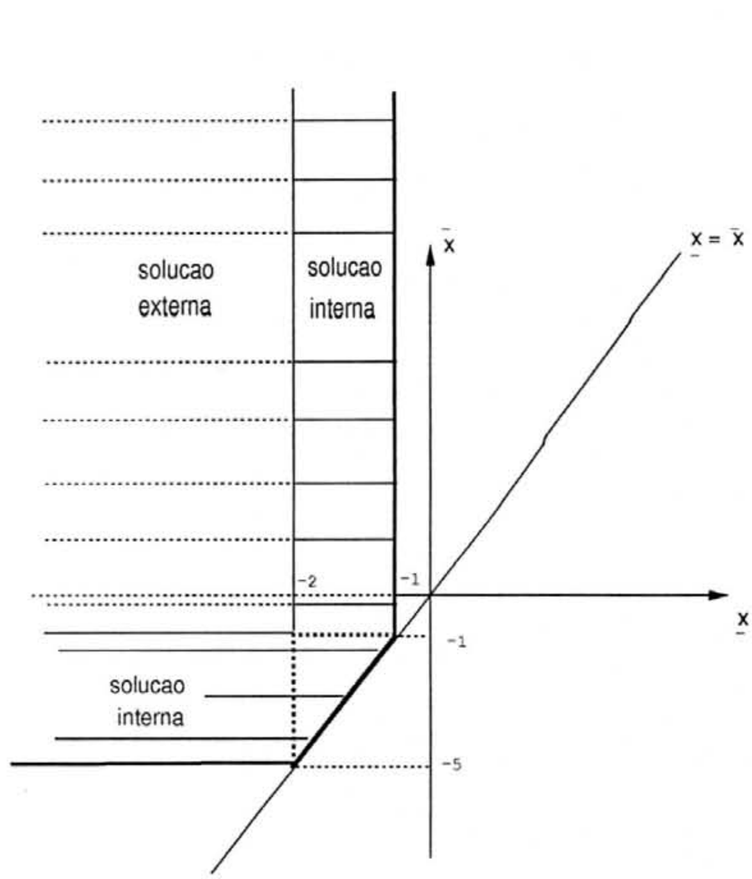

Figura 3.15: caracterização das soluções de $f(x) = X + [1,5]$

fica garantido que a solução ótima contém somente as soluções das equações reais envolvidas na equação intervalar. Logo o intervalo da solução ótima procurado é o intervalo $[-5,-1]$.

Assim, todo intervalo que contém a solução $[-5,-1]$ é solução externa e, todo intervalo que contiver apenas um dos valores -5 ou -1, ou que não possuir estes valores mas cuja imagem contém o valor zero é considerado solução interna. Os tipos de solução da função $f(x) = X + [1,5]$ estão representados na figura 3.15.

3.4.8 Exemplos

O gráfico da função $f(X) = [1,2]X + [4,7]$ está representado na figura 3.16.

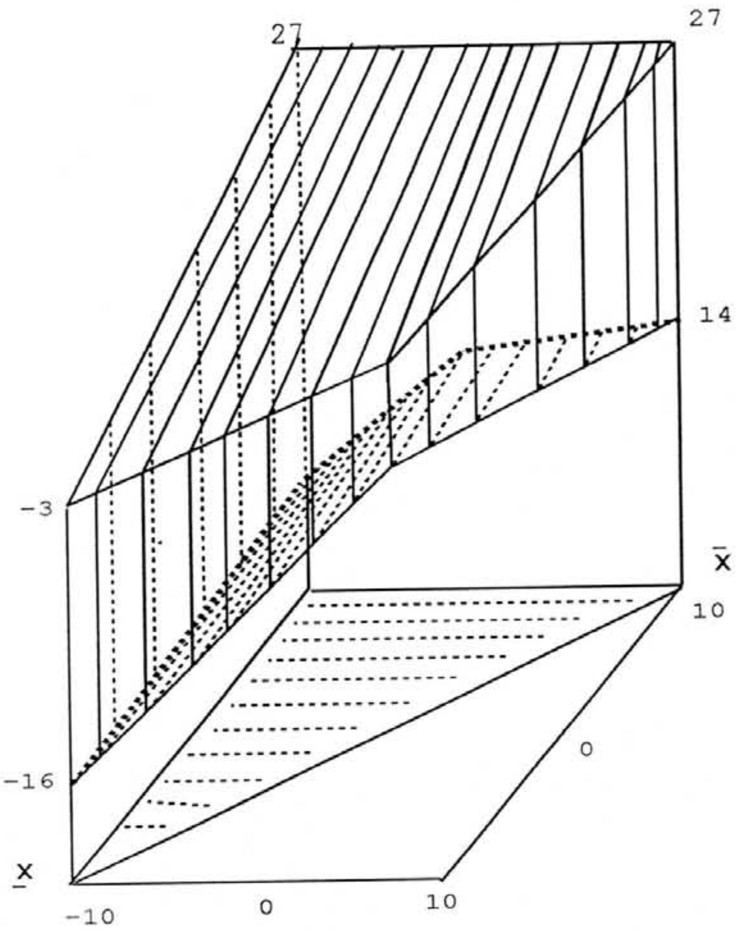

Figura 3.16: solução de $f(X) = [1,2]X + [4,7]$

4 RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE COEFICIENTES INTERVALARES

4.1 Resolução de Equações Lineares de Coeficientes Intervalares

Como o espaçco intervalar $(I(\mathbb{R}), +, \cdot, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$ possui uma estrutura semelhante a de um corpo, é possível isolar a variável da equação intervalar, visto que existem os elementos neutro e inverso.

A solução de uma equação intervalar linear obtida diretamente é considerada ótima, ou seja, a solução contém somente toda a família de equações reais envolvidas na equação intervalar.

Como o intervalo solução X é determinado pelo mínimo e máximo da solução de cada equação real envolvida na equação intervalar, tem-se que a solução ótima será determinada conforme a condição abaixo:

> Um intervalo X é solução ótima para uma função de coeficientes intervalares se:
> $f(x^-) \geqslant 0 \wedge f(x^+) \leqslant 0$ ou $f(x^-) \leqslant 0 \wedge f(x^+) \geqslant 0$.

Serão apresentadas para cada equação a sua solução , assim como exemplos e sua representação gráfica.

4.1.1 Equação : $A + X \equiv B$

- **Fórmula:** $X \equiv B - A$
- **Demonstração :**

Como o intervalo solução X é determinado pelo mínimo e máximo da solução de cada equação real envolvida na equação intervalar, tem-se que a solução ótima será encontrada conforme **Observações** no capítulo 3, folha 38.

Se $X \equiv B - A$ então $X \equiv [b^- - a^+, b^+ - a^-]$. Substituindo-se um dos extremos desta solução na equação , temos:

$$\begin{aligned}
Y &\equiv A + x^- - B \\
&\equiv [a^-, a^+] + (b^- - a^+) - [b^-, b^+] \\
&\equiv [a^- + b^- - a^+ - b^+, a^+ + b^- - a^+ - b^-] \\
&\equiv [a^- - a^+ + b^- - b^+, 0] \\
&\equiv [\delta, 0], \delta \in \mathbb{R}, \delta < 0
\end{aligned}$$

e, pela substituição do outro extremo do intervalo:

$$\begin{aligned}
Y &\equiv A + x^+ - B \\
&\equiv [a^-, a^+] + (b^+ - a^-) - [b^-, b^+] \\
&\equiv [a^- + b^+ - a^- - b^+, a^+ + b^+ - a^- - b^-] \\
&\equiv [0, a^+ - a^- + b^+ - b^-] \\
&\equiv [0, \delta], \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0
\end{aligned}$$

Logo a solução X é ótima.

- **Exemplo:**

$$\begin{aligned}
[2,7] + X &\equiv [-2,4] \\
X &\equiv [-2,4] - [2,7]
\end{aligned}$$

$$X \equiv [-9,2]$$

4.1.2 Equação : $AX + B \equiv C$

- **Fórmula**: $X \equiv \dfrac{(C-B)}{A}$, $0 \notin A$

- **Demonstração**

Tem-se que $X \equiv [min\{\alpha\}, max\{\alpha\}]$,

onde $\alpha = \left\{ \dfrac{(c^- - b^+)}{a^+}, \dfrac{(c^- - b^+)}{a^-}, \dfrac{(c^+ - b^-)}{a^+}, \dfrac{(c^+ - b^-)}{a^-} \right\}$.

Considerando-se os casos em que $A > 0$ e $A < 0$, tem-se:

4.1.2.1 Caso: $A > 0$ $(a^- > 0)$

a) Se $0 \in C-B$, a solução é formada pelo intervalo $\left[\dfrac{(c^- - b^+)}{a^-}, \dfrac{(c^+ - b^-)}{a^-} \right]$, onde $\dfrac{(c^- - b^+)}{a^-} < 0$ e $\dfrac{(c^+ - b^-)}{a^-} > 0$.

Assim, substituindo-se um dos extremos da solução na equação , otemos:

$$\begin{aligned} Y &\equiv Ax + B - C \\ &\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{(c^- - b^+)}{a^-} \right) + [b^-, b^+] - [c^-, c^+] \\ &\equiv \left[a^+ \frac{(c^- - b^+)}{a^-} + b^- - c^+, a^- \frac{(c^- - b^+)}{a^-} + b^+ - c^- \right] \\ &\equiv [\delta, 0], \delta \in \mathbb{R}, \delta < 0 \end{aligned}$$

De maneira análoga, se substituirmos o outro extremo do intervalo na equação obtemos que $Y \equiv [0, \delta], \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$

b) Se $C-B<0$, a solução fica determinada por $\left[\dfrac{(c^- - b^+)}{a^-}, \dfrac{(c^+ - b^-)}{a^+}\right]$, onde $\dfrac{(c^- - b^+)}{a^-} < 0$ e $\dfrac{(c^+ - b^-)}{a^+} < 0$

A demonstração deste caso é análoga ao caso anterior.

c) Se $C-B>0$, tem-se que $\left[\dfrac{(c^- - b^+)}{a^+}, \dfrac{(c^+ - b^-)}{a^-}\right]$, onde $\dfrac{(c^- - b^+)}{a^+} > 0$ e $\dfrac{(c^+ - b^-)}{a^-} > 0$.

Na substituição de um extremo do intervalo solução na equação , obteremos:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv Ax^- + B - C \\
&\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{(c^- - b^+)}{a^+} \right) + [b^-, b^+] - [c^-, c^+] \\
&\equiv \left[a^+ \frac{(c^- - b^+)}{a^+} + b^- - c^+, a^- \frac{(c^- - b^+)}{a^+} + b^+ - c^- \right] \\
&\equiv [\delta, 0], \delta \in \mathbb{R}, \delta < 0
\end{aligned}
$$

De maneira análoga, se substituirmos o outro extremo do intervalo na equação obteremos que $Y \equiv [\beta, 0]$, $\beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$.

4.1.2.2 Caso: $A < 0$ $(a^+ < 0)$

a) Se $0 \in C-B$, a solução fica determinada pelo intervalo $\left[\dfrac{(c^+ - b^-)}{a^+}, \dfrac{(c^- - b^+)}{a^+}\right]$, onde $\dfrac{(c^+ - b^-)}{a^+} < 0$ e $\dfrac{(c^- - b^+)}{a^+} > 0$.

A demonstração segue analogamente ao caso anterior.

b) Se $C - B < 0$ então tem-se $\left[\frac{(c^+ - b^-)}{a^-}, \frac{(c^- - b^+)}{a^+} \right]$, onde $\frac{(c^+ - b^-)}{a^-} > 0$ e $\frac{(c^- - b^+)}{a^+} > 0$.

A demonstração é análoga ao caso a)

c) Se $C - B > 0$ a solução é dada por $\left[\frac{(c^+ - b^-)}{a^+}, \frac{(c^- - b^+)}{a^-} \right]$, onde $\frac{(c^+ - b^-)}{a^+} < 0$ e $\frac{(c^- - b^+)}{a^-} \not< 0$.

Logo a solução $X \equiv \frac{(C - B)}{A}$ apresentada é ótima.

- **Exemplo:**

$$\begin{aligned} [-4,-1] \cdot X + [2,7] &\equiv [-6,9] \\ [-4,-1] \cdot X &\equiv [-13,7] \\ X &\equiv [-7,13] \end{aligned}$$

Observação :

No artigo "The Solution of an Interval Equation", Bert (ver [BER69]) resolve esta equação utilizando a Teoria Clássica dos Intervalos, a qual está representada abaixo. Embora a solução encontrada por Bert seja uma solução com mais significado do que a simples resolução da equação utilizando operações aritméticas da Teoria Clássica dos Intervalos, esta solução também não contém todas as possíveis soluções . Tal fato é verificado no exemplo abaixo:

Para a equação $[-4,-3]X + [1,2] = [7,8]$, tem-se:

- pela Teoria Clássica dos Intervalos a solução é determinada pelas equações reais $\begin{matrix} -4x + 1 = 7 & -3x + 2 = 8 \\ x = -1.5 & x = -2 \end{matrix}$

cujo intervalo solução é $X = [-1.5, 2]$, que não é um intervalo de Moore

- pela solução apresentada por Bert:

  como $a^- < a^+ < 0$, a solução é: $X = \left[\frac{c^+ - b^+}{a^+}, \frac{c^- - b^-}{a^-} \right] = \left[\frac{8-2}{-3}, \frac{7-1}{-4} \right]$
  $= [-2, -1.5]$

- pela Teoria das Aproximações Intervalares:

$$\begin{aligned} [-4,-3]X &\equiv [5,7] \\ X &\equiv [-7/3, -5/4] \\ X &\equiv [-2.333.., -1.25] \end{aligned}$$

Observe que a solução encontrada por Bert nao considera por exemplo a equação real $-4x + 2 = 7$, cuja solução é $x = -1.25$

4.1.3 Equação : $AX + BX \equiv C$

- **Fórmula**: $X \equiv \frac{C}{(A+B)}$
- **Demonstração**

  Tem-se que $X \equiv [min\{\alpha\}, max\{\alpha\}]$,
  onde $\alpha = \left\{ \frac{c^-}{(a^- + b^-)}, \frac{c^+}{(a^+ + b^+)}, \frac{c^-}{(a^+ + b^+)}, \frac{c^+}{(a^- + b^-)} \right\}$.
  Para esta equação tems os seguintes possíveis casos:

4.1.3.1 Caso: $A + B > 0$ e $C > 0$

Para este caso, temos que a solução é dada por $\left[\frac{c^-}{(a^- + b^+)}, \frac{c^+}{(a^- + b^-)} \right]$.

Assim, substituindo-se um dos extremos da solução na equação , otemos:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv (A+B)x - C \\
&\equiv [a^- + b^-, a^+ + b^+]\left(\frac{c^-}{(a^+ + b^+)} \right) - [c^-, c^+] \\
&\equiv \left[\frac{(a^- + b^-)c^-}{(a^+ + b^+)} - c^+, \frac{(a^+ + b^+)c^-}{(a^+ + b^+)} - c^- \right] \\
&\equiv [\delta, 0], \delta \in \mathbb{R}, \delta < 0
\end{aligned}
$$

e, pela substituição do outro extremo do intervalo:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv (A+B)x - C \\
&\equiv [a^- + b^-, a^+ + b^+]\left(\frac{c^+}{a^- + b^-} \right) - [c^-, c^+] \\
&\equiv \left[\frac{(a^- + b^-)c^+}{(a^- + b^-)} - c^+, \frac{(a^+ + b^+)c^+}{(a^- + b^-)} - c^- \right] \\
&\equiv [0, \delta], \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0
\end{aligned}
$$

4.1.3.2 Caso: $A + B > 0$ e $C < 0$

Neste caso, $[min\{\alpha\}, max\{\alpha\}] = \left[\frac{c^-}{(a^- + b^-)}, \frac{c^+}{(a^+ + b^+)} \right]$.

Com a substituição de um extremo da solução na equacao obtemos

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv (A+B)x - C \\
&\equiv [a^- + b^-, a^+ + b^+]\left(\frac{c^-}{a^- + b^-} \right) - [c^-, c^+] \\
&\equiv \left[\frac{(a^+ + b^+)c^-}{(a^- + b^-)} - c^+, \frac{(a^- + b^-)c^-}{(a^- + b^-)} - c^- \right]
\end{aligned}
$$

$$\equiv \quad [\delta, 0], \delta \in \mathbb{R}, \delta < 0$$

Pela substituição do outro extremo do intervalo solução na equação obteremos o intervalo $Y \equiv [0, \beta]$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$.

4.1.3.3 Caso: $A + B > 0$ e $0 \in int(C)$

Para este caso tem-se que $[min\{\alpha\}, max\{\alpha\}] = \left[\frac{c^-}{a^- + b^-} \frac{c^+}{a^- + b^-} \right]$.

Este caso é análogo ao caso anterior.

4.1.3.4 Caso: $A + B < 0$ e $C < 0$

Temos para este caso que $[min\{\alpha\}, max\{\alpha\}] = \left[\frac{c^+}{a^- + b^-} \frac{c^-}{a^+ + b^+} \right]$.

A demonstração segue analogamente ao caso 1.

4.1.3.5 Caso: $A + B < 0$ e $C > 0$

Tem-se que neste caso $[min\{\alpha\}, max\{\alpha\}] = \left[\frac{c^+}{a^+ + b^+} \frac{c^-}{a^- + b^-} \right]$.

A demonstração é de maneira análoga ao caso 2.

4.1.3.6 Caso: $A + B < 0$ e $0 \in int(C)$

Para este caso, $[min\{\alpha\}, max\{\alpha\}] = \left[\frac{c^+}{a^+ + b^+} \frac{c^-}{a^+ + b^+} \right]$,

A demonstração segue analogamente aos casos anteriores.

Logo a solução apresentada $X \equiv \dfrac{C}{A+B}$ é ótima.

- **Exemplo**:

$$\begin{aligned} [4,9]X + [-2,1]X &\equiv [-2,5] \\ [2,10]X &\equiv [-2,5] \\ X &\equiv [-1,2.5] \end{aligned}$$

4.1.4 Equação : $AX + B \equiv CX + D$

- **Fórmula**: $X \equiv \dfrac{(D-B)}{(A-C)}$
- **Demonstração**

  Tem-se que $X \equiv [min\{\alpha\}, max\{\alpha\}]$,

  onde $\alpha = \left\{ \dfrac{(d^- - b^+)}{(a^+ - c^-)}, \dfrac{(d^- - b^+)}{(a^- - c^+)}, \dfrac{(d^+ - b^-)}{(a^+ - c^-)}, \dfrac{(d^+ - b^-)}{(a^- - c^+)} \right\}$.

4.1.4.1 Caso: $A - C > 0$

Se $0 \in D - B$ a solução é dada por $\left[\dfrac{d^- - b^+}{a^- - c^+}, \dfrac{d^+ - b^-}{a^- - c^+} \right]$.

Assim, substituindo-se um dos extremos da solução na equação , otemos:

$$\begin{aligned} Y &\equiv (A-C)X - (D-B) \\ &\equiv [a^- - c^+, a^+ - c^-]\left(\frac{d^- - b^+}{a^- - c^+} \right) - [d^- - b^+, d^+ - b^-] \\ &\equiv \left[(a^+ - c^-)\frac{(d^- - b^+)}{(a^- - c^+)} - (d^+ - b^-), (a^- - c^+)\frac{(d^- - b^+)}{(a^- - c^+)} - (d^- - b^+) \right] \end{aligned}$$

$$\equiv \; [\delta, 0], \delta \in \mathbb{R}, \delta < 0$$

e, pela substituição do outro extremo do intervalo:

$$\begin{aligned} Y &\equiv [a^- - c^+, a^+ - c^-]\left(\frac{d^+ - b^-}{a^- - c^+} \right) - [d^- - b^+, d^+ - b^-] \\ &\equiv \left[(a^- - c^+)\frac{(d^+ - b^-)}{(a^- - c^+)} - (d^+ - b^-), \frac{(d^+ - b^-)}{(a^- - c^+)} - (d^- - b^+) \right] \\ &\equiv [0, \delta], \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \end{aligned}$$

Se $D - B < 0$ tem-se que o intervalo solução é dado por $\left[\frac{d^- - b^+}{a^- - c^+}, \frac{d^+ - b^-}{a^+ - c^-} \right]$.

A demonstração deste caso é análoga ao caso anterior.

Se $D - B > 0$ a solução é dada por $\left[\frac{(d^- - b^+)}{(a^+ - c^-)} \frac{(d^+ - b^-)}{(a^- - c^+)} \right]$.

A demonstração é analoga ao caso anterior.

4.1.4.2 Caso: $A - C < 0$

Se $0 \in D - B$, $[min\{\alpha\}, max\{\alpha\}] = \left[\frac{d^+ - b^-}{a^+ - c^-} \frac{d^- - b^+}{a^+ - c^-} \right]$.

Para este caso, , a substituição de um dos extremos da solução na equação é como:

$$\begin{aligned} Y &\equiv (A - C)X - (D - B) \\ &\equiv [a^- - c^+, a^+ - c^-]\left(\frac{d^+ - b^-}{a^+ - c^-} \right) - [d^- - b^+, d^+ - b^-] \\ &\equiv \left[(a^+ - c^-)\frac{(d^+ - b^-)}{(a^+ - c^-)} - (d^+ - b^-), (a^- - c^+)\frac{(d^+ - b^-)}{(a^+ - c^-)} - (d^- - b^+) \right] \end{aligned}$$

$$\equiv \; [0, \delta], \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$$

Pela substituição do outro extremo do intervalo solução na equação , obtemos que $Y \equiv [\beta, 0]$, $\beta \in \mathbb{R}, \beta < 0$

Se $D - B < 0$, $[min\{\alpha\}, max\{\alpha\}] = \left[\frac{d^+ - b^-}{a^- - c^+} \frac{d^- - b^+}{a^+ - c^-} \right]$.

Pela substituição de um dos extremos da solução na equação , temos que:

$$\begin{aligned}
Y &\equiv (A - C)X - (D - B) \\
&\equiv [a^- - c^+, a^+ - c^-] \left(\frac{(d^+ - b^-)}{(a^+ - c^-)} \right) - [d^- - b^+, d^+ - b^-] \\
&\equiv \left[(a^- - c^+)\frac{(d^+ - b^-)}{(a^- - c^+)} - (d^+ - b^-), (a^+ - c^-)\frac{(d^+ - b^-)}{(a^- - c^+)} - (d^- - b^+) \right] \\
&\equiv [0, \delta], \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0
\end{aligned}$$

Com a substituição do outro extremo da solução , obtemos que $Y \equiv [\beta, 0]$, $\beta \in \mathbb{R}, \beta < 0$

Se $D - B > 0$, $[min\{\alpha\}, max\{\alpha\}] = \left[\frac{d^+ - b^-}{a^+ - c^-} \frac{d^- - b^+}{a^- - c^+} \right]$,

A demonstração segue analogamente ao caso anterior.

Logo a solução apresentada é ótima.

- **Exemplo**:

$$\begin{aligned}
[3, 5]X + [-2, -1] &\equiv [-6, -4]X + [2, 8] \\
[7, 11]X &\equiv [3, 10] \\
X &\equiv [0.272, 1.428]
\end{aligned}$$

4.2 Resolução da Equação Quadrática Intervalar utilizando a Teoria das Aproximações Intervalares

Dada uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $A, B, C \in I(\mathbb{R})$, procura-se resolver um conjunto de equações , cuja solução é um intervalo. Este intervalo-solução deve conter todas as soluções das equações reais envolvidas na equação intervalar. Será abordado somente o caso de raízes reais.

Fato 1:

Dados $A, B, C \in I(\mathbb{R})$, $0 \notin A$, $B^2 - 4AC = [d^-, d^+]$, $d^- \geqslant 0$, $X \equiv \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ é solução externa de $AX^2 + BX + C = 0$.

Exemplo:

Dada a equação $[1,2]X^2 + [3,5]X + [0,1] = 0$, pela aplicação da Fórmula de Báscara obtemos as seguintes soluções : $X_1 \equiv [-2, 1]$ e $X_2 \equiv [-5, -1]$.

Neste caso somente a solução X_2 é ótima.

Para contornar o problema, a solução X_1 poderia ser calculada pela fórmula:

$$X_2 \equiv \begin{cases} \dfrac{-2C}{B + \sqrt{B^2 - 4AC}} & \text{se } b^- \geqslant 0 \\ \\ \dfrac{2C}{B + \sqrt{B^2 - 4AC}} & \text{c.c} \end{cases}$$

Mas desta maneira existem casos em que a solução encontrada é externa. Considere o exemplo abaixo:

Para a função $f(X) = [3,7]X^2 + [8,12]X + [-7,-2]$, obtemos as soluções

:

$$X_1 \equiv \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \equiv [-5.0822, -1.2415]$$

$$X_2 \equiv \frac{-2C}{B + \sqrt{B^2 - 4AC}} \equiv [0.1314, 0.8055]$$

Neste caso as soluções são externas, já que a solução ótima compreende os intervalos $X_1 = [-4.5166, -1.353]$ e $X_2 = [0.153, 0.6942]$.

Conclui-se portanto que o intervalo-solução obtido na utilização da Fórmula de Báscara é sempre solução da equação intervalar quadrática, para qualquer caso de A, B, C. Mas, nem sempre a solução obtida é ótima, em muitos casos ela é solução externa.

Assim, fez-se necessário a divisão por casos, bem como a utilização de operações não-standard.

Define-se primeiramente as operações standard e não-standard. Após apresenta-se as fórmulas que solucionam a equação intervalar quadrática, juntamente com a demonstração , exemplos e sua representação gráfica.

4.3 Resolução da Equação

Dados os conjuntos

$$Z = \{A \in I(\mathbb{R}) \mid (a^+ \leqslant 0) \vee (a^- \geqslant 0)\}$$

$$Z^* = \{A \in I(\mathbb{R}) \mid a^- < 0 < a^+\}$$

define-se as seguintes operadores:

$$\sigma(A) = \begin{cases} + & \text{se } a^- \geqslant 0 \\ - & \text{se } a^+ \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{onde } A \neq [0,0]$$

$$\psi(A,B) = \begin{cases} + & \text{se } (A > 0 \wedge C > 0) \vee (A < 0 \wedge C < 0) \\ - & \text{c.c.} \end{cases}$$

Define-se primeiramente as operações standard como abaixo, sabendo que estão definidas para elementos de $I(\mathbb{R}) \setminus Z$

$$A + B = [a^- + b^-, a^+ + b^+]$$

$$A - B = [a^+ - b^-, a^- - b^+]$$

$$A \times B = [a^{-\sigma(B)} b^{-\sigma(A)}, a^{\sigma(B)} b^{\sigma(A)}]$$

$$A \setminus B = [a^{-\sigma(B)} \setminus b^{\sigma(A)}, a^{\sigma(B)} \setminus b^{-\sigma(A)}]$$

As operações não-standard estão também definidas para os mesmos elementos. Tais operações são definidas como abaixo.

$$A -^- B = [a^- - b^-, a^+ - b^+]$$

$$A \times^- B = [a^{\sigma(B)} b^{-\sigma(A)}, a^{-\sigma(B)} b^{\sigma(A)}]$$

4.3.1 Fórmula

As fórmulas para obtenção da solução ótima para a equação intervalar quadrática $AX^2 + BX + C = 0$, onde $A, B, C \in I(\mathbb{R})$ podem ser separadas em dois casos: $B > 0$ e $B < 0$.

Para o caso em que $B < 0$ temos:

$$X_1 \equiv \left\{ \frac{-B + \sqrt{B^2 -^{-\psi(A,C)} 4A \times^{\psi(A,C)} C}}{2A} \right.$$

$$X_2 \equiv \left\{ \frac{2C}{-B + \sqrt{B^2 -^{\psi(A,C)} 4A \times^{\psi(A,C)} C}} \right.$$

e para o caso em que $B > 0$, tem-se

$$X_1 \equiv \left\{ \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4A \times^{\psi(A,C)} C}}{2A} \right.$$

$$X_2 \equiv \left\{ \frac{-2C}{B + \sqrt{B^2 - 4A \times^{\psi(A,C)} C}} \right.$$

4.3.2 Demonstração

- $B < 0$

Para este caso, temos que as fórmulas são

$$X_1 \equiv \left\{ \frac{-B + \sqrt{B^2 -^{-\psi(A,C)} 4A \times^{\psi(A,C)} C}}{2A} \right.$$

$$X_2 \equiv \left\{ \frac{2C}{-B + \sqrt{B^2 -^{\psi(A,C)} 4A \times^{\psi(A,C)} C}} \right.$$

Se $\psi(A, C) = +$ temos que os casos possíveis são: $(A > 0, B < 0, C > 0)$ ou $(A < 0, B < 0, C < 0)$, cujas fórmulas se reduzem a:

$$X_1 \equiv \left\{ \frac{-B + \sqrt{B^2 -^{-} 4AC}}{2A} \right.$$

$$X_2 \equiv \left\{ \frac{2C}{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}} \right.$$

Para a solução X_1 no caso $(\mathbf{A} > \mathbf{0}, \mathbf{B} < \mathbf{0}, \mathbf{C} > \mathbf{0})$ tem-se:

$$X_1 \equiv \frac{[-b^+, -b^-] + \sqrt{[b^{+^2}, b^{-^2}] -^{-} [4a^- c^-, 4a^+ c^+]}}{[2a^-, 2a^+]}$$

$$\equiv \frac{[-b^{+} + \sqrt{b^{+^2} - 4a^{+}c^{+}}, -b^{-} + \sqrt{b^{-^2} - 4a^{-}c^{-}}]}{[2a^{-}, 2a^{+}]}$$

Substituindo-se um extremo da solução na equação intervalar quadrática, obtemos:

$$\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^{-}, a^{+}] \cdot \left(\frac{-b^{+} + \sqrt{\Delta}}{2a^{+}} \right)^2, [b^{-}, b^{+}] \cdot \left(\frac{-b^{+} + \sqrt{\Delta}}{2a^{+}} \right) + [c^{-}, c^{+}] \\
&\equiv \left[\frac{2a^{-}b^{+^2} - 2a^{-}b^{+}\sqrt{\Delta} - 4a^{-}a^{+}c^{+} - 2a^{+}b^{-}b^{+} + 2a^{+}b^{-}\sqrt{\Delta} + 4a^{+^2}c^{-}}{4a^{+^2}} \right., \\
&\qquad \left. \frac{2a^{+}b^{+^2} - 2a^{+}b^{+}\sqrt{\Delta} - 4a^{+^2}c^{+} - 2a^{+}b^{+^2} + 2a^{+}b^{+}\sqrt{\Delta} + 4a^{+^2}c^{+}}{4a^{+^2}} \right] \\
&\equiv [\delta, 0], \delta < 0, \delta \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

onde $\Delta = \{\mathrm{b}^{+^2} - 4\mathrm{a}^{+}\mathrm{c}^{+}\}$

Substituindo-se pelo outro extremo do intervalo, obtem-se:

$$\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^{-}, a^{+}] \cdot \left(\frac{-b^{-} + \sqrt{\Delta}}{2a^{-}} \right)^2 + [b^{-}, b^{+}] \cdot \left(\frac{-b^{-} + \sqrt{\Delta}}{2a^{-}} \right) + [c^{-}, c^{+}] \\
&\equiv \left[\frac{2a^{-}b^{-^2} - 2a^{-}b^{-}\sqrt{\Delta} - 4a^{-^2}c^{-} - 2a^{-}b^{-^2} + 2a^{-}b^{-}\sqrt{\Delta} + 4a^{-^2}c^{-}}{4a^{+^2}} \right., \\
&\qquad \left. \frac{2a^{+}b^{-^2} - 2a^{+}b^{-}\sqrt{\Delta} - 4a^{-}a^{+}c^{-} - 2a^{-}b^{-}b^{+} + 2a^{-}b^{+}\sqrt{\Delta} + 4a^{-^2}c^{+}}{4a^{+^2}} \right] \\
&\equiv [0, \beta], \beta > 0, \beta \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

onde $\Delta = \{\mathrm{b}^{-^2} - 4\mathrm{a}^{-}\mathrm{c}^{-}\}$

Para a solução X_2 tem-se

$$X_2 \equiv \left[\frac{2c^-}{-b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^-c^-}}, \frac{2c^+}{-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}} \right]$$

Assim,

$$\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{2c^-}{-b^- + \sqrt{\Delta}} \right)^2 + [b^-, b^+] \cdot \left(\frac{2c^-}{-b^- + \sqrt{\Delta}} \right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \left[\frac{4a^-c^{-^2} - 2b^{-^2}c^- + 2b^-c^-\sqrt{\Delta} + 2c^-b^{-^2} - 2b^-c^-\sqrt{\Delta} - 4a^-c^{-^2}}{(-b^- + \sqrt{\Delta})^2}, \right. \\
&\qquad \left. \frac{4a^+c^{-^2} - 2b^-b^+c^- + 2b^+c^-\sqrt{\Delta} + 2b^{-^2}c^+ - 2b^-c^+\sqrt{\Delta} - 4a^-c^-c^+}{(-b^- + \sqrt{\Delta})^2} \right] \\
&\equiv [0, \alpha], \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

onde $\Delta = \{b^{-^2} - 4a^-c^-\}$

e, pela substituição do outro extremo na equação :

$$\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{2c^+}{-b^+ + \sqrt{\Delta}} \right)^2 + [b^-, b^+] \cdot \left(\frac{2c^+}{-b^+ + \sqrt{\Delta}} \right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \left[\frac{4a^-c^{+^2} - 2b^-b^+c^+ + 2b^-c^+\sqrt{\Delta} + 2c^-b^{+^2} - 2b^+c^-\sqrt{\Delta} - 4a^+c^-c^+}{(-b^+ - \sqrt{\Delta})^2}, \right. \\
&\qquad \left. \frac{4a^+c^{+^2} - 2b^{+^2}c^+ + 2b^+c^+\sqrt{\Delta} + 2b^{+^2}c^+ - 2b^+c^+\sqrt{\Delta} - 4a^+c^{+^2}}{(-b^+ + \sqrt{\Delta})^2} \right] \\
&\equiv [\beta, 0], \beta < 0, \beta \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

onde $\Delta = \{b^{+^2} - 4a^+c^+\}$ Logo a solução apresentada é ótima.

Exemplos:

$[1,2]X^2 - [6,9]X + [1,3] = 0$

$$X_1 \equiv \frac{[6,9] + \sqrt{[36,81] - [4,24]}}{[2,4]} \equiv \frac{[6,9] + [3.464, 8.774]}{[2,4]} \equiv [2.366, 8.887]$$

$$X_2 \equiv \frac{[2,6]}{[6,9] + \sqrt{[12,77]}} \equiv \frac{[2,6]}{[9.464, 17.774]} \equiv [0.112, 0.633]$$

$[3,6]^2 - [16,20]X + [5,9] = 0$

$$X_1 \equiv \frac{[16,20] + \sqrt{[256,400] - [60,216]}}{[6,12]} \equiv \frac{[16,20] + \sqrt{[40,340]}}{[6,12]} \equiv [1.86037, 6.4065]$$

$$X_2 \equiv \frac{[10,18]}{[16,20] + \sqrt{[40,340]}} \equiv \frac{[10,18]}{[22.3245, 38.439]} \equiv [0.26015, 0.80628]$$

Para o caso $(\mathbf{A} < \mathbf{0}, \mathbf{B} < \mathbf{0}, \mathbf{C} < \mathbf{0})$ tem-se

$$X_1 \equiv \left[\frac{-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^-c^-}}{2a^-}, \frac{-b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^+c^+}}{2a^+} \right]$$

$$X_2 \equiv \left[\frac{2c^-}{-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^-c^-}}, \frac{2c^+}{-b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^+c^+}} \right]$$

A demonstração é análoga ao caso anterior, observando-se que esta solução possui sinal oposto ao do caso anterior.

Exemplo:

$[-3,-1]X^2 - [9,12]X - [5,6] = 0$

$$X_1 \equiv \frac{[9,12] + \sqrt{[81,144] - [20,72]}}{[-6,-2]} \equiv \frac{[9,12] + \sqrt{[9,124]}}{[-6,-2]} \equiv [-11.56, -2]$$

$$X_2 \equiv \frac{[-12,-10]}{[9,12]+\sqrt{[81,144]-[20,72]}} \equiv \frac{[-12,-10]}{[12,23.135528]} \equiv [-1,-0.4322356]$$

Se $\psi(A,C) = -$ tem-se que os casos possíveis são: $(A < 0, B < 0, C > 0)$ e $(A > 0, B < 0, C < 0)$.

As fórmulas para o caso $(\mathbf{A} > \mathbf{0}, \mathbf{B} < \mathbf{0}, \mathbf{C} < \mathbf{0})$ são:

$$X_1 \equiv \left\{ \frac{-B+\sqrt{B^2-4A\times^- C}}{2A} \right.$$

$$X_2 \equiv \left\{ \frac{2C}{-B+\sqrt{B^2-4A\times^- C}} \right.$$

Para a solução X_1 tem-se que

$$X_1 \equiv \frac{[-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}, -b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^-c^-}]}{[2a^-, 2a^+]}$$

A substituição de um extremo da solução na equação intervalar quadrática é como abaixo.

$$\begin{aligned} Y &\equiv AX^2 + BX + C \\ &\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{-b^+ + \sqrt{\Delta}}{2a^+} \right)^2, [b^-, b^+] \cdot \left(\frac{-b^+ + \sqrt{\Delta}}{2a^+} \right) + [c^-, c^+] \\ &\equiv \left[\frac{2a^-b^{+^2} - 2a^-b^+\sqrt{\Delta} - 4a^-a^+c^+ - 2a^+b^-b^+ + 2a^+b^-\sqrt{\Delta} + 4a^{+^2}c^-}{4a^{+^2}} \right. , \end{aligned}$$

$$\frac{2a^+b^{+^2} - 2a^+b^+\sqrt{\Delta} - 4a^{+^2}c^+ - 2a^+b^{+^2} + 2a^+b^+\sqrt{\Delta} + 4a^{+^2}c^+}{4a^{+^2}} \Big]$$

$$\equiv [0,\beta], \beta > 0, \beta \in \mathbb{R}$$

onde $\Delta = \{b^{+^2} - 4a^-c^-\}$

Substituindo-se pelo outro extremo do intervalo, obtem-se:

$$\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{-b^- + \sqrt{\Delta}}{2a^-} \right)^2, [b^-, b^+] \cdot \left(\frac{-b^- + \sqrt{\Delta}}{2a^-} \right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \Big[\frac{2a^-b^{-^2} - 2a^-b^-\sqrt{\Delta} - 4a^{-^2}c^- - 2a^-b^{-^2} + 2a^-b^-\sqrt{\Delta} + 4a^{-^2}c^-}{4a^{-^2}}, \\
&\quad \frac{2a^+b^{-^2} - 2a^+b^-\sqrt{\Delta} - 4a^-a^+c^- - 2a^-b^-b^+ + 2a^-b^+\sqrt{\Delta} + 4a^{-^2}c^+}{4a^{-^2}} \Big] \\
&\equiv [\alpha, 0], \alpha < 0, \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

onde $\Delta = \{b^{-^2} - 4a^+c^+\}$

Para a solução X_2 tem-se que

$$X_2 \equiv \left[\frac{2c^-}{-b^+ - \sqrt{b^{+^2} - 4a^-c^-}}, \frac{2c^+}{-b^- - \sqrt{b^{-^2} - 4a^+c^+}} \right]$$

Substituindo-se um dos extremos do intervalo solucao na equação , obteremos:

$$\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{2c^-}{-b^+ + \sqrt{\Delta}} \right)^2 + [b^-, b^+] \cdot \left(\frac{2c^-}{-b^+ + \sqrt{\Delta}} \right) + [c^-, c^+]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \left[\frac{4a^{-}c^{-^2} - 2b^{+^2}c^{-} + 2b^{+}c^{-}\sqrt{\Delta} + 2c^{-}b^{+^2} - 2b^{+}c^{-}\sqrt{\Delta} - 4a^{-}c^{-^2}}{(-b^{+} - \sqrt{\Delta})^2}\right., \\
&\qquad \left.\frac{4a^{+}c^{-^2} - 2b^{-}b^{+}c^{-} + 2b^{-}c^{-}\sqrt{\Delta} + 2b^{+^2}c^{+} - 2b^{+}c^{+}\sqrt{\Delta} - 4a^{-}c^{-}c^{+}}{(-b^{+} + \sqrt{\Delta})^2}\right] \\
&\equiv [0, \alpha], \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

onde $\Delta = \{b^{+^2} - 4a^{-}c^{-}\}$

e, pela substituição do outro extremo na equação :

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^{-}, a^{+}] \cdot \left(\frac{2c^{+}}{-b^{-} + \sqrt{\Delta}}\right)^2 + [b^{-}, b^{+}] \cdot \left(\frac{2c^{+}}{-b^{-} + \sqrt{\Delta}}\right) + [c^{-}, c^{+}] \\
&\equiv \left[\frac{4a^{-}c^{+^2} - 2b^{-}b^{+}c^{+} + 2b^{+}c^{+}\sqrt{\Delta} + 2b^{-^2}c^{-} - 2b^{-}c^{-}\sqrt{\Delta} - 4a^{+}c^{-}c^{+}}{(-b^{-} + \sqrt{\Delta})^2}\right., \\
&\qquad \left.\frac{4a^{+}c^{+^2} - 2b^{-^2}c^{+} + 2b^{-}c^{+}\sqrt{\Delta} + 2b^{-^2}c^{+} - 2b^{-}c^{+}\sqrt{\Delta} - 4a^{+}c^{+^2}}{(-b^{-} + \sqrt{\Delta})^2}\right] \\
&\equiv [\beta, 0], \beta < 0, \beta \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

onde $\Delta = \{b^{-^2} - 4a^{+}c^{+}\}$

Para o caso $(\mathbf{A} < \mathbf{0}, \mathbf{B} < \mathbf{0}, \mathbf{C} > \mathbf{0})$ tem-se

$$
X_1 \equiv \left[\frac{-b^{+} + \sqrt{b^{+^2} - 4a^{-}c^{-}}}{2a^{+}}, \frac{-b^{-} + \sqrt{b^{-^2} - 4a^{+}c^{+}}}{2a^{-}}\right]
$$

$$
X_2 \equiv \left[\frac{2c^{-}}{-b^{+} + \sqrt{b^{+^2} - 4a^{-}c^{-}}}, \frac{2c^{+}}{-b^{-} + \sqrt{b^{-^2} - 4a^{+}c^{+}}}\right]
$$

A demonstração é análoga, considerando que as soluções deste caso possuem sinal oposto ao do caso $A > 0, B < 0, C < 0$.

Exemplo:

$$X^2 + [-9,-8]X + [-4,-2] = 0$$

$$X_1 \equiv \frac{[8,9] - \sqrt{[64,81] - [-16,-8]}}{2} \equiv \frac{[8,9] + \sqrt{[72,97]}}{2} \equiv [8.24264, 9.42442]$$

$$X_2 \equiv \frac{[-8,-4]}{[8,9] + \sqrt{[72,97]}} \equiv [-0.48528, -0.212214]$$

- $B > 0$

Para este caso, temos que as fórmulas são

$$X_1 \equiv \left\{ \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4A \times^{\psi(A,C)} C}}{2A} \right.$$

$$X_2 \equiv \left\{ \frac{-2C}{B + \sqrt{B^2 - 4A \times^{\psi(A,C)} C}} \right.$$

Se $\psi(A,C) = +$ temos que os casos possíveis são: $(A > 0, B > 0, C > 0)$ ou $(A < 0, B > 0, C < 0)$, cujas fórmulas se reduzem a:

$$X_1 \equiv \left\{ \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right.$$

$$X_2 \equiv \left\{ \frac{-2C}{B + \sqrt{B^2 - 4AC}} \right.$$

Para a solução X_1 no caso $(\mathbf{A} > \mathbf{0}, \mathbf{B} > \mathbf{0}, \mathbf{C} > \mathbf{0})$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
X_1 &\equiv \left[\frac{[-b^+, -b^-] - \sqrt{[b^{-^2}, b^{+^2}] - [4a^-c^-, 4a^+c^+]}}{[2a^-, 2a^+]} \right] \\
&\equiv \left[\frac{-b^+ - \sqrt{b^{+^2} - 4a^-c^-}, -b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^+c^+}}{[2a^-, 2a^+]} \right]
\end{aligned}
$$

Substituindo-se um extremo da solução na equação intervalar quadrática, obtemos:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{-b^+ - \sqrt{\Delta}}{2a^-} \right)^2, [b^-, b^+] \cdot \left(\frac{-b^+ - \sqrt{\Delta}}{2a^-} \right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \left[\frac{2a^-b^{+^2} + 2a^-b^+\sqrt{\Delta} - 4a^{-^2}c^- - 2a^-b^{+^2} - 2a^-b^+\sqrt{\Delta} + 4a^{-^2}c^-}{4a^{-^2}} \right. , \\
&\qquad \left. \frac{2a^+b^{+^2} + 2a^+b^+\sqrt{\Delta} - 4a^-a^+c^- - 2a^-b^-b^+ - 2a^-b^-\sqrt{\Delta} + 4a^-c^{+^2}}{4a^{-^2}} \right] \\
&\equiv [0, \delta], \delta > 0, \delta \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

onde $\Delta = \{\mathrm{b}^{+^2} - 4\mathrm{a}^-\mathrm{c}^-\}$

Substituindo-se pelo outro extremo do intervalo, obtem-se:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{-b^- - \sqrt{b^{-^2} - 4a^+c^+}}{2a^+} \right)^2, [b^-, b^+] \cdot \left(\frac{-b^- - \sqrt{\Delta}}{2a^+} \right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \left[\frac{2a^-b^{-^2} + 2a^-b^-\sqrt{\Delta} - 4a^-a^+c^+ - 2a^+b^-b^+ - 2a^+b^+\sqrt{\Delta} + 4a^{+^2}c^-}{4a^{+^2}} \right. ,
\end{aligned}
$$

$$\frac{2a^+b^{-^2} + 2a^+b^-\sqrt{\Delta} - 4a^{+^2}c^+ - 2a^+b^{-^2} - 2a^+b^-\sqrt{\Delta} + 4a^{+^2}c^+}{4a^{+^2}} \Bigg]$$

$$\equiv \; [\beta, 0], \beta < 0, \beta \in \mathbb{R}$$

onde $\Delta = \{b^{-^2} - 4a^+c^+\}$

Para a solução X_2 tem-se:

$$X_2 \equiv \frac{[-2c^+, -2c^-]}{[b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^+c^+}, b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^-c^-}]}$$

Substituindo-se um dos extremos do intervalo solucao na equação , obteremos:

$$\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{-2c^+}{b^- + \sqrt{\Delta}} \right)^2 + [b^-, b^+] \cdot \left(\frac{-2c^+}{b^- + \sqrt{\Delta}} \right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \Bigg[\frac{4a^-c^{+^2} - 2b^-b^+c^+ - 2b^+c^+\sqrt{\Delta} + 2c^-b^{-^2} + 2b^-c^-\sqrt{\Delta} - 4a^+c^-c^+}{(b^- + \sqrt{\Delta})^2}, \\
&\quad \frac{4a^+c^{+^2} - 2b^{-^2}c^+ - 2b^-c^+\sqrt{\Delta} + 2b^{-^2}c^+ + 2b^-c^+\sqrt{\Delta} - 4a^+c^{+^2}}{(b^- + \sqrt{\Delta})^2} \Bigg] \\
&\equiv [\alpha, 0], \alpha < 0, \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

onde $\Delta = \{b^{-^2} - 4a^+c^+\}$

e, pela substituição do outro extremo na equação :

$$\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{-2c^-}{b^+ + \sqrt{\Delta}} \right)^2 + [b^-, b^+] \cdot \left(\frac{-2c^-}{b^+ + \sqrt{\Delta}} \right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \Bigg[\frac{4a^-c^{-^2} - 2b^{+^2}c^- - 2b^+c^-\sqrt{\Delta} + 2c^-b^{+^2} + 2b^+c^-\sqrt{\Delta} - 4a^-c^{-^2}}{(b^+ + \sqrt{\Delta})^2},
\end{aligned}$$

$$\left.\frac{4a^+c^{-^2} - 2b^-b^+c^- - 2b^-c^-\sqrt{\Delta} + 2b^{+^2}c^+ + 2b^+c^+\sqrt{\Delta} - 4a^-c^-c^+}{(b^+ + \sqrt{\Delta})^2}\right]$$

$$\equiv \; [0,\beta], \beta > 0, \beta \in \mathbb{R}$$

onde $\Delta = b^{+^2} - 4a^-c^-$

Exemplo:

$[-3,-1]X^2 + [4,6]X + [4,9] \equiv 0$

$$X_1 \equiv \frac{[-6,-4] - \sqrt{[16,36] +^* [4,12] \times^* [4,9]}}{[-6,-2]} \equiv \frac{[-6,-4] - \sqrt{[16,36] +^* [36,48]}}{[-6,-2]} \equiv$$
$$\frac{[-14.48,-12]}{[-6,-2]} \equiv [2, 7.24]$$

$$X_2 \equiv \frac{[-18,-8]}{[4,6] + \sqrt{[16,36] + [36,48]}} \equiv \frac{[-18,-8]}{[4,6] + \sqrt{[52,84]}} \equiv [-1.60, -0.52]$$

Para o caso $(\mathbf{A} < \mathbf{0}, \mathbf{B} > \mathbf{0}, \mathbf{C} < \mathbf{0})$ tem-se

$$X_1 \equiv \left[\frac{-b^+ - \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}}{2a^+}, \frac{-b^- - \sqrt{b^{-^2} - 4a^-c^-}}{2a^-} \right]$$

$$X_2 \equiv \left[\frac{-2c^+}{b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}}, \frac{-2c^-}{b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^-c^-}} \right]$$

Se $\psi(A,C) = -$ temos os casos: $(A < 0, C > 0)$ ou $(A > 0, C < 0)$ e portanto tem-se que os casos possíveis são: $(A < 0, B > 0, C > 0)$ e $(A > 0, B > 0, C < 0)$, cujas fórmulas são:

$$X_1 \equiv \left\{ \frac{-B-\sqrt{B^2-4A\times^- C}}{2A} \right.$$

$$X_2 \equiv \left\{ \frac{-2C}{B+\sqrt{B^2-^-4A\times^- C}} \right.$$

Para a solução X_1 no caso em que $(\mathbf{A < 0, B > 0, C > 0})$ tem-se que

$$X_1 \equiv \frac{[-b^+ - \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}, -b^- - \sqrt{b^{-^2} - 4a^-c^-}]}{[2a^-, 2a^+]}$$

Substituindo um extremo da solução na equação intervalar quadrática é como abaixo.

$$\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{-b^+ - \sqrt{\Delta}}{2a^+} \right)^2, [b^-, b^+] \cdot \left(\frac{-b^+ - \sqrt{\Delta}}{2a^+} \right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \left[\frac{2a^-b^{+^2} - 2a^-b^+\sqrt{\Delta} - 4a^-a^+c^+ - 2a^+b^-b^+ - 2a^+b^-\sqrt{\Delta} + 4a^{+^2}c^-}{4a^{+^2}} \right. , \\
&\qquad \left. \frac{2a^+b^{+^2} + 2a^+b^+\sqrt{\Delta} - 4a^{+^2}c^+ - 2a^+b^{+^2} - 2a^+b^+\sqrt{\Delta} + 4a^{+^2}c^+}{4a^{+^2}} \right] \\
&\equiv [\beta, 0], \beta < 0, \beta \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

onde $\Delta = \{b^{+^2} - 4a^+c^+\}$

Substituindo-se pelo outro extremo do intervalo, obtem-se:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{-b^- + \sqrt{\Delta}}{2a^-} \right)^2, [b^-, b^+] \cdot \left(\frac{-b^- + \sqrt{\Delta}}{2a^-} \right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \left[\frac{2a^- b^{-^2} + 2a^- b^- \sqrt{\Delta} - 4a^{-^2} c^- - 2a^- b^{-^2} - 2a^- b^- \sqrt{\Delta} + 4a^{-^2} c^-}{4a^{-^2}} \right. , \\
&\qquad \left. \frac{2a^+ b^{-^2} + 2a^+ b^- \sqrt{\Delta} - 4a^- a^+ c^- - 2a^- b^- b^+ - 2a^- b^+ \sqrt{\Delta} + 4a^{-^2} c^+}{4a^{-^2}} \right] \\
&\equiv [0, \alpha], \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

onde $\Delta = \{ b^{-^2} - 4a^- c^- \}$

Para a solução X_2 tem-se: $X_2 \equiv \dfrac{[-2c^+, -2c^-]}{[b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^+ c^+}, b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^- c^-}]}$

Substituindo-se um dos extremos do intervalo solucao na equação , obteremos:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+] \cdot \left(\frac{-2c^+}{b^- + \sqrt{\Delta}} \right)^2 + [b^-, b^+] \cdot \left(\frac{-2c^+}{b^- + \sqrt{\Delta}} \right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \left[\frac{4a^- c^{+^2} - 2b^- b^+ c^+ - 2b^+ c^+ \sqrt{\Delta} + 2c^- b^{-^2} + 2b^- c^- \sqrt{\Delta} - 4a^+ c^- c^+}{(b^- + \sqrt{\Delta})^2} \right. , \\
&\qquad \left. \frac{4a^+ c^{+^2} - 2b^{-^2} c^+ - 2b^- c^+ \sqrt{\Delta} + 2b^{-^2} c^+ + 2b^- c^+ \sqrt{\Delta} - 4a^+ c^{+^2}}{(b^- + \sqrt{\Delta})^2} \right] \\
&\equiv [\alpha, 0], \alpha < 0, \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

onde $\Delta = \{ b^{-^2} - 4a^+ c^+ \}$

e, pela substituição do outro extremo na equação :

$$
Y \equiv AX^2 + BX + C
$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv [a^-, a^+]\cdot\left(\frac{-2c^-}{b^+ + \sqrt{\Delta}}\right)^2 + [b^-, b^+]\cdot\left(\frac{-2c^-}{b^+ + \sqrt{\Delta}}\right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \left[\frac{4a^-c^{-^2} - 2b^{+^2}c^- - 2b^+c^-\sqrt{\Delta} + 2c^-b^{+^2} + 2b^+c^-\sqrt{\Delta} - 4a^-c^{-^2}}{(b^+ + \sqrt{\Delta})^2},\right. \\
&\qquad \left.\frac{4a^+c^{-^2} - 2b^-b^+c^- - 2b^-c^-\sqrt{\Delta} + 2b^{+^2}c^+ + 2b^+c^+\sqrt{\Delta} - 4a^-c^-c^+}{(b^+ + \sqrt{\Delta})^2}\right] \\
&\equiv [0, \beta], \beta > 0, \beta \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

onde $\Delta = \{b^{+^2} - 4a^-c^-\}$

Para o caso $(\mathbf{A} > \mathbf{0}, \mathbf{B} > \mathbf{0}, \mathbf{C} < \mathbf{0})$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
X_1 &\equiv \left[\frac{-b^+ - \sqrt{b^{+^2} - 4a^-c^-}}{2a^-}, \frac{-b^- - \sqrt{b^{-^2} - 4a^+c^+}}{2a^+}\right] \\
X_2 &\equiv \left[\frac{-2c^+}{b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}}, \frac{-2c^-}{b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^-c^-}}\right]
\end{aligned}
$$

A demonstração é análoga ao caso $(A < 0, B > 0, C > 0)$.

Observação :

As fórmulas apresentadas para determinação da solução da equação quadrática linear determinam apenas soluções reais. Caso uma das equações reais pertencentes à equação intervalar não possuir raízes reais, a Fórmula de Báscara possuirá o determinante menor que zero. É o que mostra a equação abaixo:

Para a equação $[1,7]x^2 + [0.5,1]x + [-3,9] = 0$, tem-se que o gráfico desta função é cono na figura 4.1

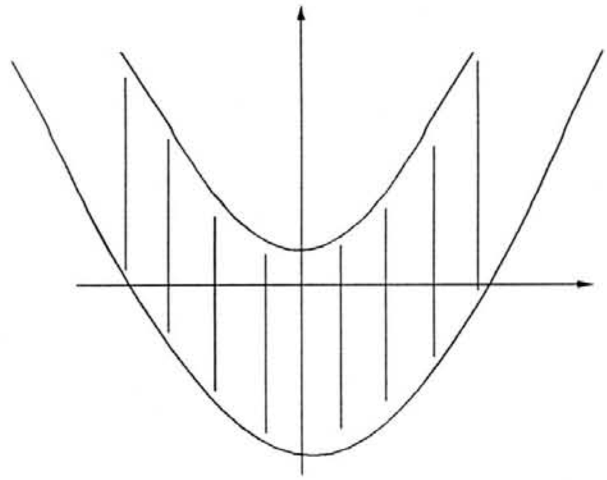

Figura 4.1: $f(x) = [1,7]x^2 + [0.5,1]x + [-3,9]$

A solução desta função não é abordado neste trabalho. Se utilizássemos a Fórmula de Báscara para derminação da solução , teríamos:

$$X_1 \equiv \left[\frac{-1-\sqrt{1+12}}{2}, \frac{-0.5-\sqrt{0.25-63}}{14} \right]$$

$$X_1 \equiv \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-0.5-\sqrt{-62.75}}{14} \right]$$

onde o extremo superior não é um elemento real.

4.3.2.1 Caso: $A > 0, B > 0, 0 \in int(C)$

Para o caso em que $0 \in int(C)$ basta Dividir o intervalo $C = [c^-, c^+]$, onde $c^- < 0$, $c^+ > 0$, obtendo assim os intervalos $[c^-, 0]$ e $[0, c^+]$.

Se utilizarmos o intervalo $[c^-, 0]$ teremos o caso $A > 0, B > 0, C \leqslant 0$, cujas fórmulas são:

$$X_{1'} \equiv \left[\frac{-b^+ - \sqrt{b^{+^2} - 4a^-c^-}}{2a^-}, \frac{-2b^-}{2a^+} \right]$$

$$X_{2'} \equiv \left[\, 0, \frac{-2c^-}{b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^- c^-}} \,\right]$$

e, ao tomarmos o intervalo $[0, c^+]$ teremos o caso $A > 0, B > 0, C \geqslant 0$, de fórmulas:

$$\begin{aligned} X_{1''} &\equiv \left[\, \frac{-2b^+}{2a^-}, \frac{-b^- - \sqrt{b^{-^2} - 4a^+ c^+}}{2a^+} \,\right] \\ X_{2''} &\equiv \left[\, \frac{-2c^+}{b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^+ c^+}}, 0 \,\right] \end{aligned}$$

Assim, o intervalo solução é dado por $X_1 = X_{1'} \bigcup X_{1''}$ e $X_2 = X_{2'} \bigcup X_{2''}$

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv \left[\, \frac{-b^+ - \sqrt{b^{+^2} - 4a^- c^-}}{2a^-}, \frac{-b^- - \sqrt{b^{-^2} - 4a^+ c^+}}{2a^+} \,\right] \\ X_2 &\equiv \left[\, \frac{-2c^+}{b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^+ c^+}}, \frac{-2c^-}{b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^- c^-}} \,\right] \end{aligned}$$

Substituindo-se um dos extremos da solução X_1 na equação quadrática, obteremos:

$$\begin{aligned} Y &\equiv AX^2 + BX + C \\ &\equiv [a^-, a^+]\left(\frac{-b^+ - \sqrt{\Delta}}{2a^-} \right)^2 + [b^-, b^+]\left(\frac{-b^+ - \sqrt{\Delta}}{2a^-} \right) + [c^-, c^+] \\ &\equiv \left[\, \frac{2a^- b^{+^2} + 2a^- b^+ \sqrt{\Delta} - 4a^{-^2} c^- - 2a^- b^{+^2} - 2a^- b^+ \sqrt{\Delta} + 4a^{-^2} c^-}{4a^{-^2}}, \right. \\ &\equiv \left. \frac{2a^+ b^{+^2} + 2a^+ b^+ \sqrt{\Delta} - 4a^- a^+ c^- - 2a^- b^- b^+ - 2a^- b^- \sqrt{\Delta} + 4a^{-^2} c^-}{4a^{-^2}} \,\right] \\ &\equiv [0, \delta], \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \end{aligned}$$

onde $\Delta = \{b^{+^2} - 4a^- c^-\}$

Na substituição do outro extremo da solução na equação quadrática, obtemos:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+]\Big(\frac{-b^- - \sqrt{\Delta}}{2a^+} \Big)^2 + [b^-, b^+]\Big(\frac{-b^- - \sqrt{\Delta}}{2a^+} \Big) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \Big[\frac{2a^- b^{-^2} + 2a^- b^- \sqrt{\Delta} - 4a^- a^+ c^+ - 2a^+ b^- b^+ - 2a^+ b^+ \sqrt{\Delta} + 4a^{+^2} c^-}{4a^{+^2}} \\
&\equiv \frac{2a^+ b^{-^2} + 2a^+ b^- \sqrt{\Delta} - 4a^{+^2} c^+ - 2a^+ b^{-^2} - 2a^+ b^- \sqrt{\Delta} + 4a^{+^2} c^+}{4a^{+^2}} \Big] \\
&\equiv [\beta, 0], \beta \in \mathbf{R}, \beta < 0
\end{aligned}
$$

onde $\Delta = \{b^{-^2} - 4a^+ c^+\}$

Na substituição de um dos extremos da solução X_2 na equação quadrática, obteremos:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+]\Big(\frac{-2c^+}{b^- - \sqrt{\Delta}} \Big)^2 + [b^-, b^+]\Big(\frac{-2c^+}{b^- - \sqrt{\Delta}} \Big) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \Big[\frac{4a^- c^{+^2} - 2a^- b^- b^+ + 2b^+ c^+ \sqrt{\Delta} + 2b^{-^2} c^- - 2b^- c^- \sqrt{\Delta} - 4a^+ c^- c^+}{(b^- - \sqrt{\Delta})^2} \\
&\equiv \frac{4a^+ c^{+^2} - 2b^{-^2} c^+ + 2b^- c^+ \sqrt{\Delta} + 2b^{-^2} c^+ - 2b^- c^+ \sqrt{\Delta} - 4a^+ c^{+^2}}{(b^- - \sqrt{\Delta})^2} \Big] \\
&\equiv [\delta, 0], \delta < 0, \delta \in \mathbf{R}
\end{aligned}
$$

onde $\Delta = \{b^{-^2} - 4a^+ c^+\}$

e, com a substituição do outro extremos da equação , obteremos:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+]\Big(\frac{-2c^-}{b^- - \sqrt{\Delta}} \Big)^2 + [b^-, b^+]\Big(\frac{-2c^-}{b^- - \sqrt{\Delta}} \Big) + [c^-, c^+]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \left[\frac{4a^-c^{-^2} - 2a^-b^{-^2} + 2b^-c^-\sqrt{\Delta} + 2b^{-^2}c^- - 2b^-c^-\sqrt{\Delta} - 4a^+c^{-^2}}{(b^- - \sqrt{\Delta})^2} \right. \\
&\equiv \left. \frac{4a^+c^{-^2} - 2b^-b^+c^- + 2b^+c^-\sqrt{\Delta} + 2b^{-^2}c^+ - 2b^-c^+\sqrt{\Delta} - 4a^-c^-c^+}{(b^- - \sqrt{\Delta})^2} \right] \\
&\equiv [\delta, 0], \delta < 0, \delta \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

onde $\Delta = \{b^{-^2} - 4a^-c^-\}$

Exemplos:

$[1,2]X^2 + [5,7]X + [-1;\ 3] = 0$

$$X_1 \equiv \left[\frac{-7 - \sqrt{49+4}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{25-24}}{4} \right] \equiv [-7.140005, -1.5]$$

$$X_2 \equiv \left[\frac{-6}{5 + \sqrt{25-24}}, \frac{2}{5 + \sqrt{25+4}} \right] \equiv [-1, 0.19258]$$

$[2,8]X^2 + [14,26]X + [-9,1] = 0$

$$X_1 \equiv \left[\frac{-26 - \sqrt{676+72}}{4}, \frac{-14 - \sqrt{196-32}}{16} \right] \equiv [-13.3373, -1.67539]$$

$$X_2 \equiv \left[\frac{-2}{14 + \sqrt{196-32}}, \frac{18}{14 + \sqrt{196+72}} \right] \equiv [-0.074609, 0.592676]$$

4.3.2.2 Caso: $A < 0, B > 0, 0 \in int(C)$

Ao subdividirmos o intervalo $C = [c^-, c^+]$ obtemos os intervalos $[c^-, 0]$ e $[0, c^+]$. Tomando-se o intervalo $[c^-, 0]$ obtemos o caso em que $A < 0, B > 0, C \leqslant 0$ de fórmulas

$$
\begin{aligned}
X_{1'} &\equiv \left[\frac{-2b^+}{2a^+}, \frac{-b^- - \sqrt{b^{-^2} - 4a^-c^-}}{2a^-} \right] \\
X_{2'} &\equiv \left[0, \frac{-2c^-}{b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^-c^-}} \right]
\end{aligned}
$$

e, ao tomarmos o intervalo $[0, c^+]$ teremos o caso $A < 0, B > 0, C \geqslant 0$ de fórmulas:

$$
\begin{aligned}
X_{1''} &\equiv \left[\frac{-b^+ - \sqrt{{b^+}^2 - 4a^+c^+}}{2a^+}, \frac{-2b^-}{2a^-} \right] \\
X_{2''} &\equiv \left[\frac{-2c^+}{b^- + \sqrt{{b^-}^2 - 4a^+c^+}}, 0 \right]
\end{aligned}
$$

Assim, a fórmula para este caso é determinada por $X_1 \equiv X_{1'} \bigcap X_{1''}$ e $X_2 \equiv X_{2'} \bigcap X_{2''}$.

$$
\begin{aligned}
X_1 &\equiv \left[\frac{-b^+ - \sqrt{{b^+}^2 - 4a^+c^+}}{2a^+}, \frac{-b^- - \sqrt{{b^-}^2 - 4a^-c^-}}{2a^-} \right] \\
X_2 &\equiv \left[\frac{-2c^+}{b^- + \sqrt{{b^-}^2 - 4a^+c^+}}, \frac{-2c^-}{{b^+}^2\sqrt{{b^+}^2 - 4a^-c^-}} \right]
\end{aligned}
$$

A demonstração é análoga aos casos anteriores, observando que a solução X_1 do caso anterior é negativa e, neste caso, a solução é positiva.

Exemplos:

$[-1, -0.5]X^2 + [4, 7]X + [-2, 1] = 0$

$$X_1 \equiv \left[\frac{-7 - \sqrt{49 + 2}}{-1}, \frac{-4 - \sqrt{16 - 8}}{-2} \right] \equiv [3.41421, 14.141428]$$

$$X_2 \equiv \left[\frac{-2}{4 + \sqrt{16 + 2}}, \frac{4}{4 + \sqrt{16 - 8}} \right] \equiv [-0.24264, 0.58578]$$

$[-1, -0.5]X^2 + [4, 7]X + [-2, 5] = 0$

$$X_1 \equiv \left[\frac{-4 - \sqrt{16 - 8}}{-2}, \frac{-7 - \sqrt{49 + 10}}{-1} \right] \equiv [3.41421, 14.68114]$$

$$X_2 \equiv \left[\frac{-10}{4+\sqrt{16+10}}, \frac{4}{4+\sqrt{16-8}} \right] \equiv [-1.0990, 0.58578]$$

4.3.2.3 Caso: $A > 0, B < 0, 0 \in int(C)$

Novamente será necessário fazer a subdivisão do intervalo C, e, tomando-se o intervalo $[c^-, 0]$ temos o caso $A > 0, B < 0, C \leqslant 0$ de fórmulas:

$$\begin{aligned} X_{1'} &\equiv \left[\frac{-2b^+}{2a^-}, \frac{-b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^-c^-}}{2a^-} \right] \\ X_{2'} &\equiv \left[\frac{2c^-}{-b^+ - \sqrt{b^{+^2} - 4a^-c^-}}, 0 \right] \end{aligned}$$

e, ao tomarmos o intervalo $[0, c^+]$ obtemos o caso $A > 0, B < 0, C \geqslant 0$ de fórmulas:

$$\begin{aligned} X_{1''} &\equiv \left[\frac{-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}}{2a^+}, \frac{-2b^-}{2a^-} \right] \\ X_{2''} &\equiv \left[0, \frac{2c^+}{-b^+ - \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}} \right] \end{aligned}$$

Tem-se portanto que a solução final é dada por: $X_1 \equiv X_{1'} \bigcap X_{1''}$ e $X_2 \equiv X_{2'} \bigcap X_{2''}$.

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv \left[\frac{-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}}{2a^-}, \frac{-b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^-c^-}}{2a^+} \right] \\ X_2 &\equiv \left[\frac{2c^-}{-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^-c^-}}, \frac{2c^+}{-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}} \right] \end{aligned}$$

Substituindo-se a solução X_1 na equação intervalar quadrática, temos:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+]\left(\frac{-b^+ + \sqrt{\Delta}}{2a^+} \right)^2 + [b^-, b^+]\left(\frac{-b^+ + \sqrt{\Delta}}{2a^+} \right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \Big[\frac{2a^- b^{+^2} - 2a^- b^+ \sqrt{\Delta} - 4a^- a^+ c^+ c^- - 2a^+ b^- b^+ + 2a^+ b^- \sqrt{\Delta} + 4a^{+^2} c^-}{4a^{+^2}} \\
&\equiv \frac{2a^+ b^{+^2} - 2a^+ b^+ \sqrt{\Delta} - 4a^{+^2} c^+ - 2a^+ b^{+^2} + 2a^+ b^+ \sqrt{\Delta} + 4a^{+^2} c^+}{4a^{+^2}} \Big] \\
&\equiv [0, \delta], \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0
\end{aligned}
$$

onde $\Delta = \{ b^{+^2} - 4a^+ c^+ \}$

Com a substituição do outro extremo da solução , obtemos:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+]\left(\frac{-b^- + \sqrt{\Delta}}{2a^-} \right)^2 + [b^-, b^+]\left(\frac{-b^- - \sqrt{\Delta}}{2a^-} \right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \Big[\frac{2a^- b^{-^2} - 2a^- b^- \sqrt{\Delta} - 4a^{-^2} c^- - 2a^- b^{-^2} + 2a^- b^- \sqrt{\Delta} + 4a^{-^2} c^-}{4a^{-^2}} \\
&\equiv \frac{2a^+ b^{-^2} - 2a^+ b^- \sqrt{\Delta} - 4a^- a^+ c^- - 2a^- b^- b^+ + 2a^- b^+ \sqrt{\Delta} + 4a^{-^2} c^+}{4a^{-^2}} \Big] \\
&\equiv [\beta, 0], \beta \in \mathbb{R}, \beta < 0
\end{aligned}
$$

onde $\Delta = \{ b^{-^2} - 4a^- c^- \}$

Substituindo-se o outro extremo da solução X_2 obteremos:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv AX^2 + BX + C \\
&\equiv [a^-, a^+]\left(\frac{-2c^+}{-b^+ - \sqrt{\Delta}} \right)^2 + [b^-, b^+]\left(\frac{-2c^+}{-b^+ - \sqrt{\Delta}} \right) + [c^-, c^+] \\
&\equiv \Big[\frac{4a^- c^{+^2} - 2b^- b^+ c^+ - 2b^- c^+ \sqrt{\Delta} + 2b^{+^2} c^- + 2b^+ c^- \sqrt{\Delta} - 4a^+ c^- c^+}{-b^+ - \sqrt{\Delta}} \\
&\equiv \frac{4a^+ c^{+^2} - 2b^{+^2} c^+ - 2b^+ c^+ \sqrt{\Delta} + 2b^{+^2} c^+ + 2b^+ c^+ \sqrt{\Delta} - 4a^+ c^{+^2}}{-b^+ - \sqrt{\Delta}} \Big] \\
&\equiv [0, \delta], \delta > 0, \delta \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

onde $\Delta = \{ b^{+^2} - 4a^+ c^+ \}$

Exemplo:

$[1,2]X^2 + [-9,-6]X + [-9,1] = 0$

$$X_1 \equiv \left[\frac{6+\sqrt{36-8}}{4}, \frac{9+\sqrt{81+36}}{2} \right] \equiv [2.8228, 9.90832]$$

$$X_2 \equiv \left[\frac{-18}{6+\sqrt{36+36}}, \frac{2}{6+\sqrt{36-8}} \right] \equiv [-1.24264, 0.1771]$$

4.3.2.4 Caso: $A < 0, B < 0, 0 \in int(C)$

Utilizando-se o intervalo $[c^-, 0]$ obtemos que a fórmula para $A < 0, B < 0, C \leqslant 0$:

$$\begin{aligned} X_{1'} &\equiv \left[\frac{-2b^+}{2a^-}, \frac{-b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^+c^+}}{2a^{+^2}} \right] \\ X_{2'} &\equiv \left[\frac{2c^-}{-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^-c^-}}, 0 \right] \end{aligned}$$

e, utilizando o intervalo $[0, c^+]$ temos:

$$\begin{aligned} X_{1''} &\equiv \left[\frac{-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}}{2a^+}, \frac{-2b^-}{2a^-} \right] \\ X_{2''} &\equiv \left[0, \frac{2c^+}{-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}} \right] \end{aligned}$$

Tem-se que a solução final é dada pelas fórmulas $X_1 \equiv X_{1'} \bigcap X_{1''}$ e $X_2 \equiv X_{2'} \bigcap X_{2''}$.

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv \left[\frac{-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}}{2a^+}, \frac{-b^- + \sqrt{b^{-^2} - 4a^+c^+}}{2a^+} \right] \\ X_2 &\equiv \left[\frac{2c^-}{-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^-c^-}}, \frac{2c^+}{-b^+ + \sqrt{b^{+^2} - 4a^+c^+}} \right] \end{aligned}$$

Exemplo:

$[-5,-3]X^2 + [-20,-10]X + [-2,8] = 0$

$$X_1 \equiv \left[\frac{10+\sqrt{100-40}}{-10}, \frac{20+\sqrt{400+96}}{-6} \right] \equiv [-7.045176242, -1.774596669]$$

$$X_2 \equiv \left[\frac{-4}{10+\sqrt{100-40}}, \frac{16}{10+\sqrt{100+96}} \right] \equiv [-0.22540333, 0.6666667]$$

Em anexo encontra-se uma tabela com as fórmulas específicas para cada caso dos intervalos A, B, C.

5 MÉTODOS ITERATIVOS INTERVALARES

Apresenta-se neste capítulo alguns métodos iterativos para determinação do intervalo solução de zeros de funções intervalares.

Definição 27:

Uma seqüencia intervalar(ou seqüencia de intervalos) $\{X_k\}$ é dita monotônica se $X_k \subseteq X_{k-1}$, para todo k onde X_k está definido. Cada seqüencia intervalar monotônica converge para o intervalo limite $X_\infty = lim_{k\to\infty} X_k$.

Definição 28:

Um intervalo $\widehat{X} \in D \subseteq I(\mathbb{R})$ é intervalo fixo de uma função intervalar F se $\widehat{X} = F(\widehat{X})$.

Definição 29:

Um intervalo $X \in D \subseteq I(\mathbb{R})$ é pseudo-intervalo fixo de F se $X \subseteq F(X)$, ou seja, $F(X) \sqsubseteq X$.

5.1 Método da Iteração Linear

Seja f: $I(\mathbb{R}) \to I(\mathbb{R})$ uma função contínua não-linear em um domínio $D \subseteq I(\mathbb{R})$. O objetivo é encontrar um intervalo $X \in I(\mathbb{R})$ tal que $f(X) \equiv 0$. Assim, dada uma função $f(X) \equiv 0$, determinamos uma função auxiliar $g(X)$, g: $I(\mathbb{R}) \to I(\mathbb{R})$ tal que $X \equiv g(X)$.

Se tomarmos um intervalo X_0 e avaliarmos este intervalo na função g obteremos X_1 e, se avaliarmos X_1 em g obteremos X_2, e assim por diante. Deste modo tem-se determinado o método iterativo $X_{k+1} = g(X_k)$.

Surgem então duas questões: se a seqëncia intervalar é monotônica e em que condições converge para o intervalo solução .

Teorema de Brouwer:

Dado $x \in I(\mathbb{R})$, f função contínua e monótona, se $f(X) \subset X$ então $\exists!$ ponto fixo $\widehat{x} \in X$.

Deste teorema surge a seguinte conjetura:

Dado $X \in I(\mathbb{R}), f\colon I(\mathbb{R}) \to I(\mathbb{R}), f$ função contínua e monótona em um domínio $D \subseteq I(\mathbb{R})$ e seja $g\colon I(\mathbb{R}) \to I(\mathbb{R})$ uma função auxiliar determinada a partir de f. Se $g(X) \subset X$ então $\exists$ um único intervalo fixo $\widehat{X} \subseteq X$, $\widehat{X} \in D \subseteq I(\mathbb{R})$

Exemplo:

Dada $f(X) = X^2 - 3X - [4,8]$, cujos intervalos-solução são $[-1.701, -1]$. Determinamos uma função g da seguinte maneira:

$$g(X) \equiv \sqrt{3X + [4,8]}$$

e com isto

$$X \equiv \sqrt{3X + [4,8]}$$

Para verificar se no intervalo solução $[-1.1, 10]$ existe um intervalo fixo, basta verificar se:

$$[-1.1, 10] \supseteq g([-1.1, 10])$$

ou seja,

$$[-1.1, 10] \supseteq \sqrt{3 \cdot [-1.1, 10] + [4, 8]} = [0.83, 6.16]$$

Como a condição é verdadeira, tem-se que o intervalo $[-1.1, 10]$ serve para iniciar a iteração . Assim, pela aplicação deste intervalo no método iterativo, obtemos a seqüencia intervalar abaixo:

$$X_0 = [-1.1, 10]$$

$$X_1 = [0.83, 6.16]$$

$$X_2 = [2.547, 5.145]$$

$$X_3 = [3.411, 4.840]$$

$$X_4 = [3.772, 4.745]$$

$$\vdots$$

$$X_{10} = [3.999, 4.701]$$

5.1.1 Desvantagem do Método

O problema deste método intervalar é encontrar a função g tal que, dado um intervalo qualquer $X \in I(\mathbb{R})$ a condição $g(X) \subset X$ seja satisfeita.

5.2 Método de Newton Intervalar

5.2.1 Operador Newtoniano

Seja f uma função intervalar e seja f' a derivada da função f, onde considera-se que $0 \notin f'$ em um determinado domínio $D \subseteq I(\mathbf{R})$. O Operados Newtoniano é do tipo N: $I(\mathbf{R}) \to I(\mathbf{R})$, definido como:

$$N(X) = x - \frac{f(x)}{f'(X)}$$

para $X \in I(\mathbf{R})$, $x \in X$.

Teorema 9:

$\forall X \subseteq D \subseteq I(\mathbf{R})$, $N(X) \supseteq X \bigcap X^*$, onde X^* é o intervalo solução da função intervalar f em D.

Demonstração :

Seja $x \in X \bigcap X^* = [x^-, x^+]$. Como f é limitada pelas funções reais $\underline{g}, \overline{g}$, tem-se:

$\underline{g}(x^+) - \underline{g}(x) \in M(x^+ - x)$ pois $x \leqslant x^+$

$\overline{g}(x) - \overline{g}(x^-) \in M(x - x^-)$ pois $x^- \leqslant x$

Estas expressões podem ser reescritas como:

$$m_1(x^+ - x) \leqslant \underline{g}(x^+) - \underline{g}(x) \leqslant m_2(x^+ - x)$$

$$m_1(x - x^-) \leqslant \overline{(}x) - \overline{g}(x^-) \leqslant m_2(x - x^-)$$

Como $\overline{g}(x) = \underline{g}(x) = 0$, as expressões acima podem ser reescritas como:

$$m_1(x^+ - x) \leqslant \underline{(}x^+) \leqslant m_2(x^+ - x)$$

$$m_1(x - x^-) \leqslant -\overline{g}(x^-) \leqslant m_2(x - x^-)$$

.

Com isto, $x^+ - \dfrac{\underline{g}(x^+)}{m_2} \geqslant x$ e $x^- - \dfrac{\overline{g}(x^-)}{m_2} \leqslant x$ Logo $x \in N(X)$.

Corolário 1:

$X \supseteq X^* \rightarrow N(X) \supseteq X^*$.

Teorema 10:

Se $\widehat{X}$ é um intervalo fixo de N, ou seja, $\widehat{X} = N(\widehat{X})$, então
$X \supseteq \widehat{X} \rightarrow N(X) \supseteq \widehat{X}$.

Demonstração :

Se $\widehat{X} = N(\widehat{X})$ então $\underline{g}(\widehat{x^+}) = \overline{g}(\widehat{x^-}) = 0$. Como $X \supseteq \widehat{X}$ tem-se $x^+ \geqslant \widehat{x^+}$ e $x^- \leqslant \widehat{x^-}$. Assim,

$$\underline{g}(x^+) - \underline{g}(\widehat{x^+}) \leqslant m_2(x^+ - \widehat{x^+})$$

$$\overline{g}(\widehat{x^-}) - \overline{g}(x^-) \leqslant m_2(\widehat{x^-} - x^-).$$

Como $\underline{g}(\widehat{x^+}) = \overline{g}(\widehat{x^-}) = 0$, as expressões podem ser reescritas como

$$\underline{g}(x^+) \leqslant m_2(x^+ - \widehat{x^+})$$

$$-\overline{g}(x^-) \leqslant m_2(\widehat{x^-} - x^-)$$

ou seja,

$$\widehat{x^+} \leqslant x^+ - \frac{\underline{g}(x^+)}{m_2}$$

$$\widehat{x^-} \geqslant x^- - \frac{\overline{g}(x^-)}{m_2}$$

Logo conclui-se que $\widehat{X} \subseteq N(X)$

5.2.2 Descrição do Método Intervalar

Seja o Operador Newtoniano $N(X) = x - \dfrac{f(x)}{f'(X)}$ como descrito em 5.2.1, onde f é uma função intervalar, f' derivada de f e $x \in X \subseteq I(\mathbb{R})$. O Método de Newton Intervalar utilizado para determinação de intervalo solução de funções intervalares é dado por:

$$X_{k+1} = \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(X_k)} \right) \bigcap X_k$$

para $k \geqslant 0$, $x_k \in X_k$.

Teorema 11:

Seja $X^* \notin \emptyset$, $X^* \subseteq X_0 \subseteq D$, se $X_{k+1} = N(X_k) \bigcap X_k$, para $k \geqslant 0$ então existe $lim_{k \to \infty} X_k = X_\infty$ e X_∞ é pseudo intervalo fixo.

Demonstração

Do corolário do teorema 1 tem-se que $X_k \notin \emptyset$, para todo k em que X_k está definido, visto que para $k = 1$ tem-se que $X_1 = N(X_0) \bigcap X_0$. Como $X_0 \supseteq X^*$ então $N(X_0) \supseteq X^*$. Logo $X_1 \supseteq X^*$, e assim analogamente para $k > 1$.

A seqüencia $\{X_k\}$ é monotônica pois $X_{k+1} \subseteq X_k$ e, pela definição 27 tem-se que esta seqëncia converge para $X_\infty = lim_{k\to\infty} X_k$.

Como N é uma função contínua, $X_\infty = N(X_\infty) \bigcap X_\infty \subseteq N(X_\infty)$.

Logo conclui-se que X_∞ é pseudo intervalo fixo.

5.2.3 Considerações

Para uma função intervalar monótona em um determinado intervalo do domínio de existência da função , tem-se que a derivada da função é limitada neste intervalo.

Para este caso $0 \neq f'$, visto que a função é monótona no intervalo X.

Mas, no caso em que $0 \in f'(Y)$, para um determinado $Y \in I(\mathbf{R})$, a derivada da função é ilimitada. Para este caso tem-se que a derivada da função f no intervalo X é determinada pelo intervalo $[-\infty, +\infty] \in \overline{I(\mathbf{R})}$. Com isto, o caso em que $0 \in f'$ está definido apenas no espaço intervalar formado pelos intervalos não-regulares., definido no apêndice deste trabalho.

5.2.4 Vantagens do Método

- Calculando-se as raízes da derivada da função obtêm-se uma região denominada região crítica. Para descobrir então se um intervalo inicial serve para iniciar a iteração , basta verificar:

  a) $(f(x_0^-) > 0$ e $f(x_0^+) < 0)$ ou $(f(x_0^-) < 0$ e $f(x_0^+) > 0)$

  b) se o intervalo inicial X_0 não está incluído na região crítica, pois senão teríamos $0 \in f'$.

- Se o intervalo inicial contém o intervalo solução da função , então o método sempre converge para a solução , não havendo com isto a possibilidade do método perder a raiz.

5.2.5 Problemas encontrados

- Quando o intervalo solução de uma função compreender algum valor da região crítica, não será possível o cálculo desta solução pelo Método de Newton. Pode-se citar como exemplo a função intervalar $f(X) = [1,2]X^2 + [4,8]X - 4$, cuja solução é o intervalo $[-8.4721, -2.7320]$. Esta solução não poderia ser obtida pelo Método de Newton Intervalar, visto que a região crítica compreende o intervalo $[-4, -1]$.

- Para polinômios que possuem grau maior que 2 e funções onde a variável x aparece várias vezes, nem sempre a avaliação da derivada é boa, pois geralmente o valor da avaliação é maior que o valor da imagem da derivada em um determinado intervalo. Com isto, muitas vezes é inviável calcular a solução utilizando o Método de Newton, pois $0 \in f'$.

Exemplo:

Para a função $f(X) = X^3 - [2,4]X^2 - [5,7]X - [1,2]$ tem-se que sua solução é o intervalo $[3.507, 5.3722]$. A região crítica está nos intervalos $[-1, -0.5225]$ e $[2.1196, 3.3609]$. A derivada da função f é dada por:

$$f'(X) = 3X^2 - [4,8]X - [5,7]$$

Uma avaliação pode ser obtida por:

$$f'([3.5, 6]) = [36.75, 108] + [-48, -14] + [-7, -5] = [-18.25, 89]$$

Para este caso, se a avaliação fosse feita como:

$f'(X) = X \cdot (3X - [4,8]) - [5,7]$, teríamos:

$f'([3.5,6]) = [3.5,6]([2.5,14]) + [-7,-5] = [1.75,79]$

Observe que o intervalo $[3.5,6]$ contém a solução e está fora da região crítica. Mas, não é possível o cálculo pelo Método de Newton pois $0 \in f'([3.5,6])$ por esta avaliação intervalar.

O ideal é sempre poder ter a imagem da função num intervalo. Para isto, de acordo com a Definição 15, é suficiente avaliar a função em cada extremo do intervalo, visto que a função é sempre monótona no intervalo inicial.

Assim, a avaliação em cada extremo do intervalo é dada por:

$$f'(3.5) = [1.75, 17.75]$$

$$f'(6) = [53, 79]$$

Tomando o mínimo e o máximo das avaliações realizadas, obteremos o intervalo $[1.75, 79]$, com o qual é possível prosseguir com o Método de Newton.

5.2.6 Exemplos

- Seja $f(X) = X^2 + 10X + [3,7]$, cujos intervalos solução compreendem os intervalos $[-0.757, -0.309]$ e $[-9.690, -9.242]$.

  Utilizando-se o intervalo inicial $X_0 = [-1, 0]$, obtemos a seqüencia:

  $X_1 = -0.5 - \frac{[-1.75, 2.25]}{[8, 10]} = [-0.78125, -0.28125]$

  $X_2 = -0.5312 - \frac{[-2.030, 1.96]}{[8.43, 9.43]} = [-0.764699, -0.290625]$

  $X_3 = [-0.763986, -0.291765]$

  $X_4 = [-0.763934, -0.291792]$

$X_5 = [-0.763932, -0.291796]$

- $f(X) = X^2 + [3,4]X + [0.5, 1]$

  O intervalo solução para esta função é $[-0.381966, -0.1771243]$ e a região crítica está no intervalo $[-2, -1.5]$.

  Dado intervalo inicial $[-1, 0]$, obtemos a seguinte seqëncia iterativa:

  $$X_1 = -0.5 - \frac{[-1.25, -0.25]}{[1,4]} = -0.5 - [-1.25, -0.0625] = [-0.4375, 0]$$

  $$X_2 = -0.233915 - \frac{[-0.380945, 0.352970]}{[2.125, 4]} = [-0.3948, -0.064798]$$

  $X_3 = [-0.394208, -0.064798]$

  $X_4 = [-0.394164, -0.064798]$

  $X_5 = [-0.394161, -0.064798]$

5.2.7 Metodo Híbrido Intervalar

A idéia deste método é combinar o Método da Secante Intervalar com o Método de Newton Intervalar.

Apresenta-se neste capítulo o Método da Secante Intervalar, bem como exemplos, vantagens e desvantagens do método. Após é descrito o Método Híbrido Intervalar.

5.2.7.1 Método da Secante Intervalar

Este método é obtido pela aplicação do seguinte método iterativo:

$$X_{k+1} = \left(x_k^- - \frac{(x_k^+ - x_k^-) f(x_k^+)}{f(x_k^-) - f(x_k^+)} \right)$$

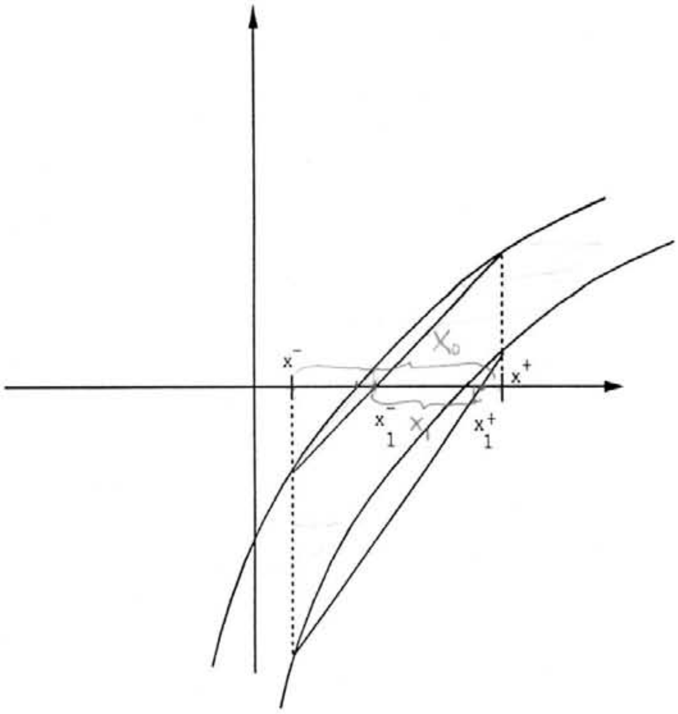

Figura 5.1: Método da Secante Intervalar

onde $X = [x^-, x^+]$

Utilizando-se este método para cálculo do intervalo solução de funções intervalares, observou-se que ele converge para a raiz, embora seja necessário testar o intervalo calculado a cada iteração . É necessário portanto a cada iteração **desconsiderar o extremo do intervalo cuja avaliação na função contiver o valor zero, e considerar o extremo do intervalo anterior.**

Considere o gráfico representado na figura 5.1

Neste gráfico o intervalo X_1 não contém todo o intervalo solução , visto que $0 \in x_1^-$

Logo quando 0 pertencer à avaliação da função em algum extremo do intervalo calculado, significa que este intervalo perdeu valores do intervalo solução . Com isto é necessário testar cada extremo do intervalo calculado e só então fazer a interseção com o intervalo anterior.

Exemplo:

$f(X) = [1,3]X^2 + [8,10]X + 5$

$X_0 = [-10, -1.3]$

$$X_1 = -10 - \frac{(8.7)[-6.31, -0.33]}{[5,25] - [-6.31, -0.33]} = -10 + [0.0124, 10.2996] = [-9.987, 0.2996]$$

Como $f(-9.98759) = [4.87, 224.35]$, tem-se que $X_1 = [-9.987, -1.3]$

$X_2 = [-9.975159, -1.3]$

$X_3 = [-9.962713, -1.3]$

$X_4 = [-9.950250, -1.3]$

$\vdots$

$X_{20} = [-9.476435, -1.3]$

5.2.8 Vantagem do Método

Com este método é possível o cálculo do intervalo solução de funções que o Método de Newton não pode calcular, devido ao fato do intervalo solução conter algum valor da região crítica.

5.2.9 Desvantagens do Método

- É necessário em cada iteração calculada testar os extremos do intervalo, verificando se o intervalo calculado ainda contém todo intervalo solução

- Na maioria das funções testadas, um dos extremos do intervalo permanece fixa. A fim de contornar este fator, foi testado a seguinte modificação :

  a) aplicar o método da secante sobre um determinado intervalo

  b)testar os extremos do intervalo calculado. Se um dos extremos do intervalo permanecer fixo, na próxima iteração substituir a avaliação do extremo fixo pela metade de sua avaliação .

Esta modificação porém não resolveu este problema, visto que que o extremo fixo ainda permanece fixo.

Exemplo:

Seja a função $f(X) = [1,2]X^2 + [4,8]X - 4$, cuja solução é formada pelo intervalo $[-8.472, -2.732]$. dado intervalo inicial $[1-, 0]$, obtemos a sequinte seqüencia iteativa:

$X_1 = [-9.75, 0]$

$X_2 = [-9.491935, 0]$

$X_3 = [-9.224981, 0]$

$X_4 = [-8.948164, 0]$

$X_5 = [-8.660318, 0]$

5.2.10 Descrição do Método Hibrido Intervalar

A idéia do método é aplicar o Método da Secante Intervalar sobre um intervalo inicial que contenha a raiz e, sobre o intervalo resultante aplicar o Método de Newton.

Com isto é mais necessário apenas testar os extremos do intervalo produzido pelo Método da Secante Intervalar, visto que o Método de Newton sempre irá convergir para o intervalo solução , desde que o intervalo inicial contenha a solução .

5.2.10.1 Vantagem do Método

Pela utilização do Método Híbrido Intervalar algumas funções apresentaram resultados melhores que o Método da Secante Intervalar, visto que o extremo fixo do intervalo calculado para determinação do intervalo solução de algumas funções pela aplicação do Método da Secante Intervalar pode apresentar um melhor resultado pelo Método Híbrido Intervalar.

5.2.10.2 Desvantagem

Como o Método Híbrido Intervalar utiliza o Método de Newton Intervalar, não é possível o cálculo do intervalo solução de funções onde algum valor da região crítica pertença à solução .

Exemplo:

Dada função $f(X) = [-2,-1]X^2 + 4X + [0.5, 1]$ cujo intervalo solução é dado por $[-0.236067, -0.118033]$. Dado intervalo inicial $X_0 = [-2, 0]$, obtem-se a seguinte seqüencia iterativa:

$X_1 = [-1.939394, 0]$

$X_2 = [-0.464877, 0]$

$X_3 = [-0.562438, 0]$

$X_4 = [-0.248584, -0.085458]$

6 SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES INTERVALARES

Este capítulo aborda a resolução de sistemas de equações lineares intervalares, onde será utilizado a Teoria das Aproximações Intervalares. Será apresentado a aritmética fundamental para as operações matemáticas efetuadas com matrizes e vetores intervalares, ou seja, matrizes e vetores cujos componentes são intervalos reais. Serão apresentados métodos diretos para determinação da solução da equação matricial $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz intervalar e $\mathbf{b}$ é um vetor intervalar.

6.1 Conceitos Básicos

Definição 30:

Uma matriz intervalar $\mathbf{A_{ik}}$ é um array retangular

$$\mathbf{A_{ik}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

de intervalos $A_{ij} \in I(\mathbb{R})$), $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Uma matriz intervalar $\mathbf{A} = (\mathcal{A}_{ik})$ é interpretada como um conjunto de $m \times n$ matrizes reais, ou seja,

$$\mathbf{A} = \{\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \tilde{A}_{ik} \in A_{ik},\ i = 1..m,\ ,j = 1..n\}$$

Uma matriz intervalar $m \times 1$ é definida como um vetor intervalar, ou seja, $V_{n\times 1} = V_n I(\mathbb{R})$

O conjunto mas matrizes $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{R})$ é isomorfo ao conjunto das matrizes intervalares $\mathbf{A} = (A_{ij}) \in M_{mn}(I(\mathbb{R}))$. Com isto $M_{mn}(\mathbb{R}) \subset M_{mn}(I(\mathbb{R}))$.

Definição 31:

Sejam $\mathbf{A} = (A_{ij})$, $\mathbf{B} = (B_{ij})$ matrizes intervalares, para $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Então $\mathbf{A} = \mathbf{B} \leftrightarrow A_{ij} = B_{ij}$.

Definição 32:

Sejam $\mathbf{A} = (A_{ij})$, $\mathbf{B} = (B_{ij})$ matrizes intervalares, para $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Então $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \leftrightarrow A_{ij} \subseteq B_{ij}$

Definição 33:

Sejam $\mathbf{A} = (A_{ij})$, $\mathbf{B} = (B_{ij})$ matrizes intervalares, para $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Então $\mathbf{A} \sqsubseteq \mathbf{B} \leftrightarrow A_{ij} \sqsubseteq B_{ij} \leftrightarrow B_{ij} \subseteq A_{ij}$

A relação $\sqsubseteq$ utilizada para matrizes intervalares tem a mesma interpretação quando utilizada para intervalos de $I(\mathbb{R})$, ou seja, é uma relação de qualidade. Neste caso, dados dois elementos de $M_{mn}(I(\mathbb{R}))$, $\mathbf{A} \sqsubseteq \mathbf{B}$ pode ser interpretada como $\mathbf{B}$ informa mais(ou pelo menos o mesmo) do que $\mathbf{A}$ a respeito de uma matriz real contida em $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Assim, pode-se dizer que cada intervalo B_{ij} da matriz intervalar $\mathbf{B}$ informa mais(ou no mínimo o mesmo que $A_{ij} \in \mathbf{A}$, com relação a uma matriz real contida em $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Exemplo:

A matriz intervalar $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} [3,4] & [2,3] \\ [0, 0.5] & [4.5, 5.1] \end{pmatrix}$ informa mais do que a matriz intervalar $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2,6] & [0,4] \\ [0,1] & [3,7] \end{pmatrix}$ a respeito de uma matriz real $\begin{pmatrix} e & \Pi \\ 1/3 & 5 \end{pmatrix}$

ou seja, $\mathbf{A} \sqsubseteq \mathbf{B} \leftrightarrow \begin{pmatrix} [2,6] & [0,4] \\ [0,1] & [3,7] \end{pmatrix} \sqsubseteq \begin{pmatrix} [3,4] & [2,3] \\ [0,0.5] & [4.5, 5.1] \end{pmatrix} \leftrightarrow A_{ij} \sqsubseteq B_{ij}$

para $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$

$\mathcal{A}_{11} \sqsubseteq \mathcal{B}_{11} \rightarrow [2,6] \sqsubseteq [3,4]$

$\mathcal{A}_{12} \sqsubseteq \mathcal{B}_{12} \rightarrow [0,4] \sqsubseteq [2,3]$

$\mathcal{A}_{21} \sqsubseteq \mathcal{B}_{21} \rightarrow [0,1] \sqsubseteq [0,0.5]$

$\mathcal{A}_{22} \sqsubseteq \mathcal{B}_{22} \rightarrow [3,7] \sqsubseteq [4.5,5.1]$

Definição 34:

Dadas duas matrizes intervalares $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{mn}(I(\mathbb{R}))$, diz-se que $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ estão $\mathcal{X}$-relacionados se

$$\mathbf{A} \equiv_{\mathcal{X}} \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{A} \sqsubseteq \mathcal{X} \wedge B \sqsubseteq \mathcal{X}$$

ou seja, as matrizes intervalares **A** e **B** aproximam a matriz real $\mathcal{X}$. X pode então ser interpretada como uma matriz real, que possui pelo menos um número não exato, sendo assim aproximada pelas matrizes intervalares **A** e **B**.

Observação :

A definição se manteve como na definição 13.

No exemplo anterior a matriz real $\begin{pmatrix} e & \Pi \\ 1/3 & 5 \end{pmatrix}$ possui três elementos não exatos, podendo então ser aproximado pelas matrizes intervalares $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

6.2 Aritmética Matricial Intervalar

6.2.0.3 Adição e Multiplicação

Sejam $\mathbf{A} = (A_{ij})$, $\mathbf{B} = (B_{ij})$ matrizes intervalares, para $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Então

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_{ij} + B_{ij})$

$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_{ij} - B_{ij})$.

6.2.0.4 Multiplicação

Sejam $\mathbf{A} = (A_{ik})$, $\mathbf{B} = (B_{kj})$ matrizes intervalares, $\mathbf{u} = (u_r)$ vetor intervalar, para $1 \leqslant i \leqslant m$, $i \leqslant k \leqslant j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, e X intervalo. Então:

- a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left(\sum_{v=1}^{k} A_{iv} \cdot B_{vj} \right)$
  b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \left(\sum_{v=1}^{k} A_{iv} \cdot u_v \right)$
  c) $X \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot X = (X \cdot \mathbf{A}_{ij})$

Teorema 12

Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ matrizes intervalares e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}$ matrizes reais. Então são válidas as seguintes propriedades:

- Comutatividade da Adição

  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

- Associatividade da Adição

  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

- Elemento Neutro da Adição

  $\exists! \mathcal{O}\ \mathbf{A} + \mathcal{O} = \mathcal{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$, onde $\mathcal{O}$ é a matriz nula

- Elemento Neutro da Multiplicação

  $\exists! \mathcal{I}\ \mathbf{A} \cdot \mathcal{I} = \mathcal{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, onde $\mathcal{I}$ é a matriz identidade

- Subdistributividade

  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \subseteq \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$

  $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subseteq \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$

- Distributividade

  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathcal{C} \subseteq \mathbf{A} \cdot \mathcal{C} + \mathbf{B} \cdot \mathcal{C}$

  $\mathcal{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subseteq \mathcal{C} \cdot \mathbf{A} + \mathcal{C} \cdot \mathbf{B}$

- Associatividade da Multiplicação

  $\mathbf{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) \subseteq (\mathbf{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$

  $(\mathcal{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \subseteq \mathcal{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ caso $\mathbf{C} = -\mathbf{C}$

  $\mathcal{A}(\mathbf{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathcal{C}$

  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, caso $\mathbf{B} = -\mathbf{B}$ e $\mathbf{C} = -\mathbf{C}$

Teorema 13

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ matrizes intervalares de $M_{mn}(I(\mathbb{R}))$. Pela relação de aproximação $\equiv_{\mathcal{X}}$ são válidas as seguintes propriedades:

- Comutatividade da Adição

  $\mathbf{A} + \mathbf{B} \equiv \mathbf{B} + \mathbf{A}$

- Associatividade da Adição

  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

- Elemento Neutro da Adição

$$\exists \mathbf{O},\ \mathbf{A}+\mathbf{O} \equiv \mathbf{O}+\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

- Elemento Neutro da Multiplicação

$$\exists \mathbf{I},\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{I} \equiv \mathbf{I}\cdot\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$$

- Distributividade

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} \equiv \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \equiv \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$

- Associatividade da Multiplicação

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

- Existência Elemento Simétrico

$\forall\mathbf{A} \in M_{mn}(I(\mathbb{R})), \exists \mathbf{A} \in M_{mn}(I(\mathbb{R}))$ tal que

$\mathbf{A}-\mathbf{A} \equiv \mathbf{O}$

- Existência Elemento Inverso

$\forall\mathbf{A} \in M_{mn}(I(\mathbb{R})), \exists \mathbf{A} \in M_{mn}(I(\mathbb{R}))$ tal que

$\mathbf{A}\cdot 1/\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} \equiv \mathbf{1}$

Observe que os elementos neutro da adição e multiplicação não são únicos, embora se equivalem pela relação de equivaência. Pela relação de equivalência da Teoria das Aproximações Intervalares existem os elementos simétrico e inverso, o que possibilita a determinação de métodos diretos para resolução do sistema de equações lineares intervalares.

6.2.1 Equações Lineares Intervalares

Seja $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema linear intervalar, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz intervalar $n \times n$. O conjunto

$$X \doteq \{\tilde{x} \mid \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \tilde{A} \in \mathbf{A}, \tilde{b} \in \mathbf{b}\}$$

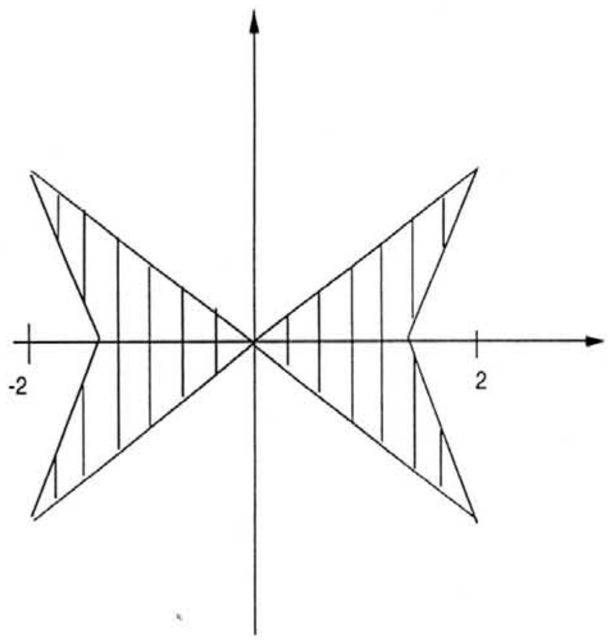

Figura 6.1: conjunto solução de um sistema de equações lineares

é dito conjunto solução para o sistema linear intervalar acima mencionado, onde assume-se que a matriz **A** é não-singular[1]. O conjunto solução **x** a ser calculado contém a solução exata **X** do sistema, não necessariamente é igual. Assim, $\mathbf{A}\mathbf{x} \supset \mathbf{b}$, $A \in M_{mn}I(\mathbb{R}))$, $\mathbf{b} \in V_n I(\mathbb{R})$.

Em geral a solução **x** de um sistema $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma estrutura muito complicada, pois o vetor **X** define uma região que geralmente não é limitada por planos paralelos aos eixos coordenados. Por este motivo o menor vetor intervalar possível **x** não é igual à **X**.

Considere o sistema $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $A = \begin{pmatrix} [2,4] & [-1,1] \\ [-1,1] & 2,4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [-3,3] \\ 0 \end{pmatrix}$

A região determinada pelas soluções dos sistemas reais envolvidos no sistema intervalar está determinado na figura 6.1 .

Para o sistema acima o vetor intervalar $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-1,1] \end{pmatrix} \supset \mathbf{X}$

[1]Uma matriz intervalar **A** é não-singular se o seu determinante (intervalo) não contiver o valor zero.

Com isto o interesse é então determinar o menor vetor intervalar $\mathbf{x}$. Para isto apresenta-se alguns métodos diretos para resolução de sistemas de equações lineares intervalares, utilizando a Teoria das Aproximações Intervalares.

6.2.2 Método de Gauss Intervalar

O Método de Gauss Intervalar é um método direto para resolução de um sistema linear intervalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{A} \in M_{mn}(I(\mathbb{R}))$, $\mathbf{b} \in V_n I(\mathbb{R})$, sendo $\mathbf{A}$ uma matriz não-singular. O objetivo é encontrar um intervalo solução mais próximo da solução do sistema acima.

Neste método a matriz intervalar $\mathbf{A}$ e o vetor intervalar $\mathbf{b}$ são transformados através de operações aritméticas de maneira que a matriz intervalar $\mathbf{A}$ se transforme numa matriz intervalar superior. É condição necessária que a matriz intervalar $\mathbf{A}$ seja não-singular, pois caso contrário o zero pertenceria à sua diagonal após a transformação acima descrita. Este método também não pode ser aplicado se a matriz intervalar $\mathbf{A}$ possuir algum coeficiente com o valor zero na diagonal principal, pois assim pela aplicação do método obteríamos um intervalo de $\overline{I(\mathbb{R})}$. Neste caso, uma alternativa seria a troca de linhas no sistema intervalar.

6.2.2.1 Descrição do Método

Dado um sistema linear intervalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, inicia-se com a seguinte tabela de coeficientes:

$$\begin{array}{cccc} A_{11} & \ldots & A_{1n} & B_1 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} & B_n \end{array}$$

Utilizando-se as fórmulas

$$A_{1j}^{(1)} \equiv A_{1j},\ j = 1..k,\ B_1^{(1)} \equiv B_1$$

$$A_{ij}^{(1)} \equiv A_{ij} - A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1j},\ i,j = 2..k$$

$$B_i^{(1)} \equiv B_i - A_{i1}A_{11}^{-1}B_1,\ i = 2..k$$

obtemos uma nova tabela de coeficientes $A_{ij}^{(1)}$.

Assumindo que $0 \neq A_{11}$, obtém-se uma nova tabela:

$$\begin{array}{ccc} A_{11} \ \ldots & A_{1n} & B_1 \\ 0 \ \ldots & A'_{2n} & B'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \ \ldots & A'_{nn} & B'_n \end{array}$$

Utilizando-se novamente as fórmulas acima n vezes, obtem-se uma tabela de coeficientes na forma triangular superior:

$$\begin{array}{ccccc} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} & B_1 \\ & A'_{22} & \ldots & A'_{2n} & B'_2 \\ & & \ddots & A'_{nn} & B'_n \end{array}$$

onde a solução é dada por:

$$X_n \equiv \frac{B'_n}{A'_{nn}}$$

$$X_i \equiv \left(B'_i - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{A'_{ij}X_j}{A_{ii}} \right),\ \text{para } 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

6.2.2.2 Exemplo

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} [2,3]x_1 + [0,1]x_2 \equiv [0,120] \\ [1,2]x_1 + [2,3]x_2 \equiv [60,240] \end{cases}$$

Como $\frac{[1,2]}{[2,3]} \equiv [0.3334, 1]$, tem-se que multiplicando este intervalo pelos coeficientes da primeira linha do sistema e subtraindo o resultado da segunda linha obtem-se:

$$\begin{cases} [2,3]x_1+[0,1]x_2 \equiv [0,120] \\ [-1.333,\ 2]x_1+[-3,-1]x_2 \equiv [-240,60] \end{cases}$$

Como $[-1.333, 2] \equiv 0$, tem-se

$$\begin{aligned} [-3,-1]x_2 &\equiv [-240,60] \\ x_2 &\equiv [-60,240] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2,3]x_1 + [-60,240] &\equiv [0,120] \\ [2,3]x_1 &\equiv [-240,180] \\ x_1 &\equiv [-120,90] \end{aligned}$$

Logo o intervalo solução é $X \equiv \begin{pmatrix} [-120,\ 90] \\ [-60,\ 240] \end{pmatrix}$

Este exemplo foi testado por Rohn (ver [ROH81]) e o resultado obtido com a utilização da Teoria das Aproximações Intervalares coincide com o método descrito por Rohn.

Mas, na maioria dos casos a resposta encontrada com esta teoria é maior do que a apresentada na literatura, pois o Método de Gauss usado foi o método "naive", que deve ser reformulado em estudos posteriores.

6.2.2.3 Considerações

No Método de Gauss Intervalar a troca de linhas do sistema de equações lineares intervalares desempenha um importante papel, visto que há uma modificação n o intervalo solução , embora esta solução sempre contenha todas as soluções reais dos sistemas reais envolvidos no sistema intervalar.

Melhor dizendo, o ideal seria ter um pivô na diagonal principal da matriz intervalar **A**. Este pivô poderia ser determinado como o maior dos pontos médios de cada coeficiente intervalar, calculados em cada coluna da matriz **A**

Exemplificando, dada uma matriz $\begin{pmatrix} [1,7] & [2,9] \\ [-1,3] & [3,4] \end{pmatrix}$ tem-se

$m([1,7]) = 4$

$m([2,9]) = 5.5$

$m([-1,3]) = 1$

$m([3,4]) = 3.5$

Como $max\{4,1\} = 4$ e $max\{5.5, 3.5\} = 5.5$ tem-se que a matriz intervalar **A** já possui os pivôs na diagonal principal, não sendo necessário a troca de linhas no sistema.

No sistema abaixo observe que, com o objetivo de ter os pivôs na diagonal principal, a troca de linhas produziu um melhor resultado.

$$\begin{cases} [10,15]x_1 + [1,3]x_2 = [19,27] \\ [2,7]x_1 + [12,14]x_2 = [15,16] \end{cases}$$

$$\begin{cases} [10,15]x_1 + [1,3]x_2 = [19,27] \\ [-104, -14.136]x_2 = [-101, 5.58] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [-104, -14.36]x_2 &= [-101, 5.58] \\ x_2 &= [-0.394, 7.144] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [10,15]x_1 + [-1.182, 21.432] &= [-89.438, 192.88] \\ [10,15]x_1 &= [-110.87, 194.062] \\ x_1 &= [-11.087, 19.4062] \end{aligned}$$

Logo o vetor intervalar é dado por $X \equiv \begin{pmatrix} [-11.087,\ 19.4062] \\ [-0.394,\ 7.144] \end{pmatrix}$

Com a troca de linhas do sistema, tem-se que o pivô está na diagonal, conforme mostra o sistema abaixo.

$$\begin{cases} [2,7]x_1+[12,14]x_2 = [15,16] \\ [10,15]x_1+[1,3]x_2 = [19,27] \end{cases}$$

$$\begin{cases} [2,7]x_1+[12,14]x_2 = [15,16] \\ [9.9,\ 13.867]x_2 = [-3.9,-2.527] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [9.9, 13.867]x_2 &= [-3.9, -2.527] \\ x_2 &= [-0.3939, 1.36090] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2,7]x_1 + [5.5146, 19.052] &= [15,16] \\ [2,7]x_1 &= [-4.052, 10.4854] \\ x_1 &= [-2.026, 5.2427] \end{aligned}$$

Logo a solução deste sistema é $X \equiv \begin{pmatrix} [-2.026,\ 5.2427] \\ [-0.3939,\ 1.36090] \end{pmatrix}$

6.2.2.4 Observação

Como no caso real, este método não pode ser aplicado a um sistema de equações intervalares $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathrm{b}$ se em algum passo do método a matriz intervalar $\mathbf{A}$ possuir algum coeficiente com valor zero na diagonal principal e não for possível realizar alguma transformação que o elimine.

6.2.3 $X \equiv A^{-1} \cdot b$

6.2.3.1 Matriz Inversa

A inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de uma matriz intervalar $\mathbf{A} \in M_{mn}(I\mathbb{R}))$ é definida por

$\mathbf{A}^{-1} = [inf\tilde{A}^{-1}, sup\tilde{A}^{-1}], \ \forall \tilde{A} \in \mathbf{A}$

Esta definição é consistente com a definição de inversa para matrizes reais, onde para $n = 1$ tem-se $A^{-1} = 1/A = [a^{-^{-1}}, a^{+^{-1}}]$, se $A \in I(\mathbb{R})$

6.2.3.2 Método

Dada uma equação matricial intervalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{A} \in M_{mn}I(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in V_nI(\mathbb{R})$, este método determina que a solução é determinada pela multiplicação da matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ pelo vetor intervalar $\mathbf{b}$.

Como tem-se que na Teoria das Aproximações Intervalares $\frac{A}{A} \equiv 1$, ou seja, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} \equiv 1$, pode-se dizer que a matriz inversa pode ser obtida diretamente por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} \equiv \mathcal{I}$, onde $\mathcal{I}$ é a matriz identidade.

Exemplos:

1. Seja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix}$ O cálculo da matriz intervalar inversa é dado por

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pela resolução dos sistemas

$$\begin{cases} [2,3]A+[0,1]B = 1 \\ [1,2]A+[2,3]B = 0 \end{cases} \text{ e}$$

$$\begin{cases} [2,3]C+[0,1]D = 1 \\ [1,2]C+[2,3]D = 0 \end{cases}$$

obteremos a matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$, determinada por:

$$\mathbf{A}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} [0.333,\ 1] & [-2,\ 0.334] \\ [-1,\ -0.111] & [0.333,\ 1] \end{pmatrix}$$

2. Dado sistema

$$\begin{cases} [2,4]x_1+[-2,-1]x_2 = [8,10] \\ [2,5]x_1+[4,5]x_2 = [5,40] \end{cases}, \text{ cuja solução é dada por } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} [1.6153846,\ 10] \\ [-3.076923,\ 8] \end{pmatrix}$$

A inversa da matriz intervalar **A** é dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} [0.057695,\ 0.458335] & [0.008335,\ 0.76923] \\ [-0.38461,\ -0.08333] & [0.03334,\ 0.76923] \end{pmatrix}$$

Calculando $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ obteremos o seguinte vetor solução para o sistema acima: $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} [0.503235,\ 35.3525] \\ [-3.6794,\ 30.10256] \end{pmatrix}$

Observe que o intervalo solução calculado contém a solução do sistema acima citado.

7 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um estudo sobre resolução de equações lineares intervalares. Primeiramente foram descritos conceitos básicos para resolução de equações intervalares, definidos no espaço intervalar $(I(\mathbf{R}), +, \cdot, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$, onde, de acordo com as propriedades analisadas neste espaço concluiu-se que ele possui uma estrutura semelhante a de um corpo. Com isto a resolução de equações neste espaço intervalar pode ser encontrada analogamente à resolução de equações reais no espaço real. Foi determinado também a Fórmula de Báscara Intervalar para resolução da Equação Quadrática Intervalar. Para obtenção da fórmula foi necessário a divisão por casos, onde para cada caso foram apresentados sua fórmula correspondente, demonstração e exemplos.

A fim de determinar graficamente a solução ótima, assim como analisar a imagem de equações intervalares, foi feito a representação gráfica de funções reais ou intervalares, de argumentos reais ou intervalares.

Foram abordados alguns conceitos específicos do espaço intervalar formado por intervalos não-regulares, bem como descritas algumas considerações importantes, tais como utilização de intervalos não-regulares na aplicação de métodos iterativos intervalares.

O capítulo 5 apresenta alguns métodos iterativos intervalares, úteis para obtenção do intervalo solução de equações intervalares. Para cada método iterativo (Newton, Secante e Híbrido Intervalar) foram analisados suas vantagens e desvantagens, bem como apresentados exemplos.

Por fim é realizado um estudo sobre resolução de sistemas de equações lineares intervalares, onde apresentou-se conceitos básicos a respeito do espaço intervalar matricial, assim como alguns conceitos específicos deste espaço, com a utilização da Teoria das Aproximações Intervalares. São descritos métodos diretos para determinação da solução do sistema intervalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \equiv \mathbf{b}$, visto que isto é possível devido à existência dos elementos simétrico e inverso.

7.0.4 Sugestões

Como idéias para novos estudos, sugere-se:

- determinação de métodos iterativos para determinação de soluções complexas para equações intervalares
- representação de intervalos de números complexos para funções intervalares ou reais, de argumentos reais ou intervalares
- estudo da viabilidade da determinação de métodos iterativos para cálculo de soluções em $\overline{I(\mathbb{R})}$, assim como resolução de sistemas de equações lineares e não-lineares neste espaço
- resolução de sistemas de equações não-lineares utilizando-se a Teoria das Aproximações Intervalares

ANEXO A-1 ESPAÇO INTERVALAR EXTENDIDO

Os intervalos considerados no espaço $I(\mathbb{R})$ possuem o extremo inferior menor(ou igual) que o extremo superior. Mas um método iterativo, como por exemplo o Método de Newton, pode produzir como resultado um intervalo que não pertence ao espaço $I(\mathbb{R})$.

Com isto a extensão do espaço intervalar $I(\mathbb{R})$ torna-se útil, visto que um intervalo que não é de Moore pode assumir um significado em outro espaço intervalar. Nesta extensão de $I(\mathbb{R})$ são considerados intervalos em que o extremo inferior é maior que o superior.

A-1.1 Conceitos Básicos

Definição 35:

Seja $A = [a^-, a^+] \in I(\mathbb{R})$, $a^-, a^+ \in \mathbb{R}$, com $a^- \leqslant a^+$. O conjugado de A, representado por $\overline{A}$ e definido por $\overline{A} = \overline{[a^-, a^+]} = [a^+, a^-]$, é denotado intervalo não-regular.

Definição 36:

O conjunto $\overline{I(\mathbb{R})} = \{\overline{A} \mid A \in I(\mathbb{R})\}$ é o conjunto dos intervalos não regulares.

O conjunto $H = \overline{I(\mathbb{R})} \bigcup I(\mathbb{R})$ forma o espaço intervalar extendido.

Definição 37:

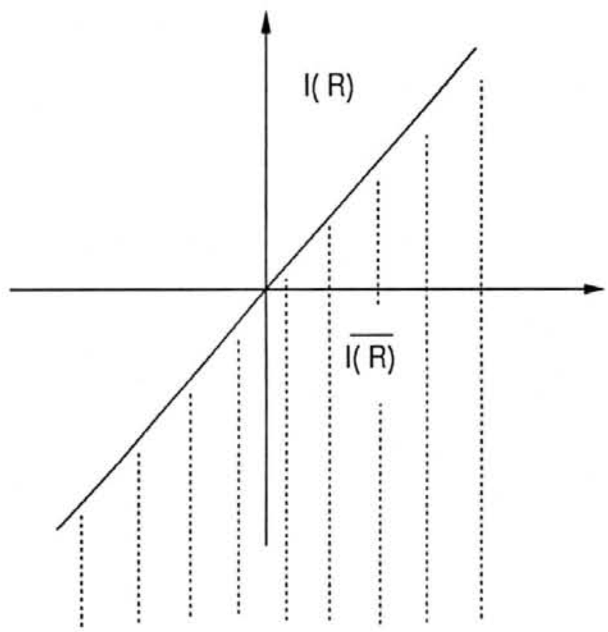

Figura A-1.1: Espaço Intervalar Extendido

$\forall [a^-, a^+] \in H, \overline{[a^-, a^+]} = [a^+, a^-]$.

Definição 38:

$\forall A, B \in H,\ A = B \leftrightarrow a^- = b^- \wedge a^+ = b^+$.

Considerando a representação do espaço intervalar apresentado no capítulo 3, tem-se que o espaço intervalar extendido pode ser representado como na figura A-1.1

Definição 39:

$\forall A, B \in H,\ A \subseteq B \leftrightarrow b^+ \leqslant a^+ \wedge a^- \leqslant b^-$.

A-1.1.1 Propriedades de $\subseteq$

- reflexiva: $A \subseteq A, \forall A \in H$

- antissimétrica: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A = B, \forall A, B \in H$
- transitiva: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$

Teorema 14:

$\forall A, B \in H,\ A \subseteq B \leftrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}.$

Demonstração :

$A \subseteq B \leftrightarrow b^+ \leqslant a^+ \wedge a^- \leqslant b^- \leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

Teorema 15:

$A \subseteq B \rightarrow \forall x \in \mathbf{R},\ x \subseteq A \subseteq B \vee A \subseteq x \subseteq B \vee A \subseteq B \subseteq x$

Demonstração :

1. Se $A \in \mathbf{R}$, então $x \subseteq A \subseteq B$
2. Se $A \in \overline{I(\mathbf{R})} \vee B \in I(\mathbf{R})$, $A \subseteq B$ então $b^- \leqslant a^- \vee a^+ \leqslant b^+ \vee a^+ \leqslant a^-$. Logo $\exists\, x \in B$ tal que $b^- \leqslant x \leqslant b^+$, $a^+ \leqslant x \leqslant a^-$ o que resulta $A \subseteq x \subseteq B$
3. Se $A \in \overline{I(\mathbf{R})} \vee B \in \overline{I(\mathbf{R})} \vee A \subseteq B \rightarrow \overline{A} \supseteq \overline{B}$ e, pelo caso 1, $\exists\, y \in \overline{B}$ tal que $y \subseteq \overline{B} \subseteq \overline{A}$ e assim $A \subseteq B \subseteq y$

A-1.2 Operações Aritméticas

- Adição

$\forall A, B \in H,\ A + B = [a^- + b^-, a^+ + b^+]$

- Subtração

$$\forall A, B \in H,\ A - B = A + (-B), \text{ onde}$$

$$\forall B \in H,\ -B = [-b^+, -b^-]$$

- Multiplicação

	$I(\mathbf{R})^+ \cup \overline{I(\mathbf{R})}^+$
$I(\mathbf{R})^+ \cup \overline{I(\mathbf{R})}^+ \cup \overline{I(\mathbf{R})}^+$	$[a^-b^-, a^+b^+]$
F	$[a^-b^+, a^+b^+]$
$I(\mathbf{R})^- \cup \overline{I(\mathbf{R})}^-$	$[a^-b^+, a^-b^-]$
$\overline{F}$	$[a^-b^-, a^+b^-]$

	F
$I(\mathbf{R})^+ \cup \overline{I(\mathbf{R})}^+ \cup \overline{I(\mathbf{R})}^+$	$[a^+b^-, a^+b^+]$
F	$[min\{a^-b^+, a^+b^-\}, max\{a^-b^-, a^+b^+\}]$
$I(\mathbf{R})^- \cup \overline{I(\mathbf{R})}^-$	$[a^-b^+, a^-b^-]$
$\overline{F}$	0

	$I(\mathbf{R})^- \cup \overline{I(\mathbf{R})}^-$
$I(\mathbf{R})^+ \cup \overline{I(\mathbf{R})}^+ \cup \overline{I(\mathbf{R})}^+$	$[a^+b^-, a^-b^+]$
F	$[a^+b^-, a^-b^-]$
$I(\mathbf{R})^- \cup \overline{I(\mathbf{R})}^-$	$[a^+b^+, a^-b^-]$
$\overline{F}$	$[a^+b^+, a^-b^+]$

	$\overline{F}$
$I(\mathbf{R})^+ \cup \overline{I(\mathbf{R})}^+ \cup \overline{I(\mathbf{R})}^+$	$[a^-b^-, a^-b^+]$
F	0
$I(\mathbf{R})^- \cup \overline{I(\mathbf{R})}^-$	$[a^+b^+, a^+b^-]$
$\overline{F}$	$[max\{a^-b^-, a^+b^+\}, min\{a^-b^+, a^+b^-\}]$

onde $F = \{A \mid 0 \in A\}$

$\overline{F} = \{\overline{A} \mid 0 \in \overline{A}\}$

Exemplos

$$[1,2] * [-3,-2] = [2(-3), 1(-2)] = [-6,-2]$$

$$[-6,4] * [5,-8] = 0$$

$$[7,-2] * [3,-9] = [max\{21, 18\}, min\{-63, -6\}] = [21, -63]$$

- Divisão

	$I(\mathbf{R})_{-}\{0\}$	T	$\overline{F}$
$I(\mathbf{R})_{-}\{0\}$	$A * \frac{1}{B}$	$A * \frac{1}{B}$	$A * \frac{1}{B}$
T	$A * \frac{1}{B}$	$[-\infty, +\infty]$	$A * \frac{1}{B}$
$\overline{T}$	$A * \frac{1}{B}$	$A * \frac{1}{B}$	$[-\infty, +\infty]$

sendo a inversão definida como $1/[a^-, a^+] = [1/a^+, 1/a^-]$

onde $T = \{A \mid 0 \in A \vee a^- < a^+\}$

$\overline{T} = \{\overline{A} \mid 0 \in \overline{A} \vee a^+ < a^-\}$

A-1.3 Interpretação dos Intervalos não-regulares

A-1.3.1 A função Inversa

No espaço intervalar $(I(\mathbf{R}), +, -, \cdot)$ tem-se que as operações algébricas $+, -, \cdot$ são fechadas. O mesmo não acontece com a divisão e a inversão.

Assim, não seria possível inverter o intervalo $[-2, 3]$ em $I(\mathbf{R})$, visto que a divisão por zero não está definida.

Mas, no espaço intervalar $\overline{I(\mathbf{R})}$ esta inversão é possível. De acordo com as operações apresentadas em A-1.2 tem-se que $\frac{1}{[-2,3]} = [\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}]$, que é um intervalo não-regular.

A inversão é primeiramente definida em $I(\mathbf{R})\backslash_{\{0\}}$. Para $A \in I(\mathbf{R})$, $0 \notin A$, tem-se que $\frac{1}{A} = \{\frac{1}{a} \mid a \in A\}$.

De maneira análoga quer-se definir a inversão de um intervalo A onde $0 \in A$. Assim a inversão de um intervalo que contém o zero pode ser obtido como mostra o gráfico da função $f(X) = \frac{1}{a}$, representado em A-1.2.

Observe que o intervalo resultante da divisão por zero não é constituído por um único intervalo, a solução se apresenta como dois intervalos disjuntos. Para este caso a solução é:$(-\infty, 1/a^-]$ e $[1/a^+, +\infty)$.

Com isto tem-se que para um intervalo A, onde $0 \neq A$, a inversão está definida como $\frac{1}{A} = [1/a^+, 1/a^-] \in \overline{I(\mathbf{R})}$, onde $1/a^+ > 1/a^-$. O conjugado de $1/A$ é então $\overline{1/A} = [1/a^-, 1/a^+] \in I(\mathbf{R})$

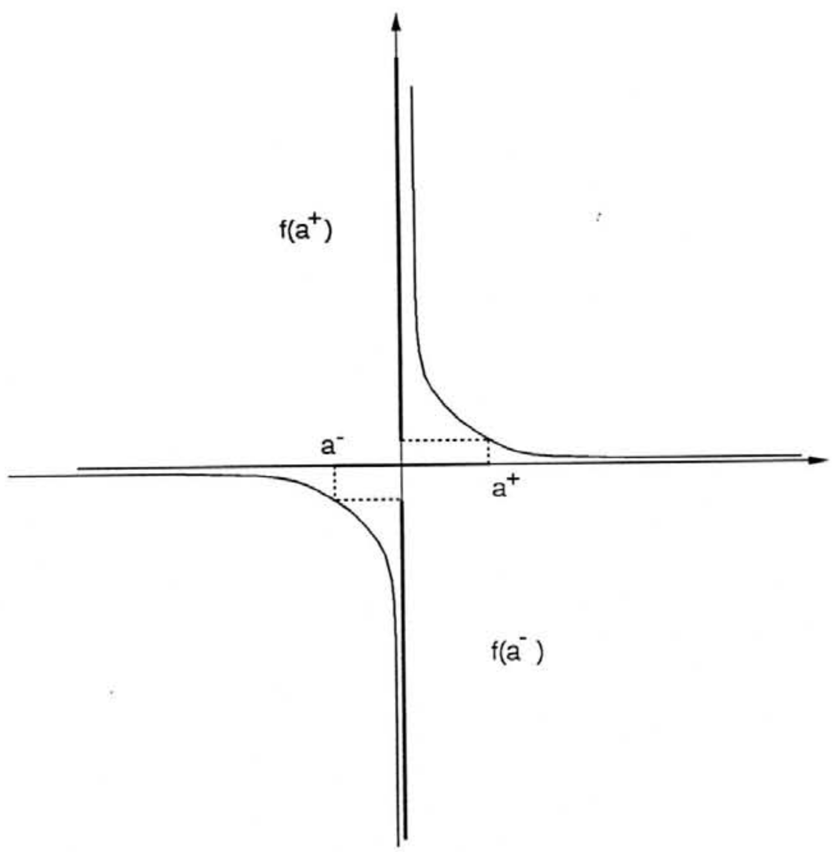

Figura A-1.2: $f(x) = 1/x$

A-1.3.2 Considerações sobre intervalos de $\overline{I(\mathbb{R})}$

Um intervalo $A = [a^-, a^+]$ onde $a^- > a^+$ pode então ser definido como uma união de intervalos infinitos, ou seja, $[a^-, a^+] = (-\infty, a^+] \bigcup [a^-, +\infty)$, onde $a^- > a^+$.

A aritmética de Kahan é uma das aritméticas intervalares desenvolvida para intervalos infinitos. Esta aritmética possui operações aritméticas que permitem a operação com este tipo de intervalo. Como na Aritmética de Kahan muitos casos não estão definidos, resultando assim no intervalo $(-\infty, +\infty)$, surgiram outras aritméticas para intervalos infinitos, com o objetivo de definir casos que a Aritmética de Kahan não soluciona. Dentre estas aritméticas para intervalos infinitos estão a Aritmética de Kahan Extendida e a aritmética desenvolvidsa por Kaucher.

Em alguns casos as operações desenvolvidas por Kahan não produzem um resultado tão significativo quanto a aritmética descrita por Kaucher. Muitas vezes o resultado obtido utilizando-se as operações da aritmética de Kahan pode ser um intervalo não apropriado para método iterativos. Considere o exemplo abaixo:

Seja $A = [2, 1] = (-\infty, 1] \bigcup [2, +\infty)$ e $B = [0, 0.5]$. Para o cálculo de $A * B$ utilizando-se a operação $*$ da aritmética de Kahan produz como resultado o intervalo $(-\infty, +\infty)$. Este resultado não é apropriado para utilização em métodos iterativos, pois considerando a equação intervalar $A = A * [0, 0.5] + 1$, tem-se que a utilização do intervalo $(-\infty, +\infty)$ não irá convergir para o ponto fixo $\hat{A} = [1, 2]$, se considerarmos o intervalo inicial $A_0 = [2, 1]$. Utilizando então as operações descritas em ??3.1??, tem-se que o intervalo resultante tem significado no desenvolvimento de métodos iterativos, ou seja, $A_1 = [2, 1] * [0, 0.5] + 1 = [0, 0.5] + 1 = [1, 1.5]$.

Mas, desta maneira obtemos $\hat{A} \supseteq A_1 \supseteq A_0$

É necessário então estabelecer operações aritméticas para intervalos infinitos que, além de produzirem um resultado significativo para desenvolvimentos de métodos iterativos, permita que a utilização nestes métodos convirja para o ponto fixo da equação . Veja [KAU73] para maiores detalhes.

ANEXO A-2 FÓRMULAS DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA INTERVALAR

$$AX^2 + BX + C = 0$$

$A > 0, B > 0, C \geqslant 0$	$X_1 \equiv \dfrac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$
$A < 0, B > 0, C \leqslant 0$	$X_2 \equiv \dfrac{-2C}{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}$
$A > 0, B < 0, C \geqslant 0$	$X_1 \equiv \dfrac{-B + \sqrt{B^2 -^- 4AC}}{2A}$
	$X_2 \equiv \dfrac{2C}{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}$
$A > 0, B \leqslant 0, C \leqslant 0$	$X_1 \equiv \dfrac{-B + \sqrt{B^2 - 4A \times^- (C)}}{2A}$
$A < 0, B \leqslant 0, C \geqslant 0$	$X_2 \equiv \dfrac{2C}{-B + \sqrt{B^2 - 4A \times^- (C)}}$
$A > 0, B \geqslant 0, C \leqslant 0$	$X_1 \equiv \dfrac{-B - \sqrt{B^2 - 4A \times^- (C)}}{2A}$
$A < 0, B > 0, C \geqslant 0$	$X_2 \equiv \dfrac{-2C}{B + \sqrt{B^2 -^- 4A \times^- (C)}}$
$A < 0, B < 0, C \leqslant 0$	$X_1 \equiv \dfrac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$
	$X_2 \equiv \dfrac{2C}{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}$

BIBLIOGRAFIA

[ACI91] ACIOLY, B.M. **Fundamentação Computacional da Matemática Intervalar.** Porto Alegre:CPGCC da UFRGS, 1991. 253p. (Tese de Doutorado)

[ALE83] ALEFELD, G.; HERZBERGER, J. Interval Matrix Operations. In: ALEFELD, G.; HERZBERGER, J. **Introduction to Interval Computations.** New York:Academic Press, 1983. 328p. p.120-130.

[APO67] APOSTOLATOS,N; KULISH, U. **Grundlagen und Anwendungen einer Intervallrechnung für Matrizen.** Karlsruhe:Technische Hochschule Karlsruhe, 1967. 32p.

[APO68] APOSTOLATOS,N; KULISH, U. Grundzüge eine Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen. Elektronik Rechenanlage, Karlsruhe, v.10, n.2, p.73-83, 1967.

[BER69] BERT, S.N. The Solution of an Interval Equation. **Mathematica.** v.11, n.34, p.189-194, 1969.

[COE92] COELHO, A.O. **Um estudo de métodos para resolução de sistemas de equações lineares intervalares.** Porto Alegre:CPGCC da UFRGS,1992. 32p. (Trabalho Individual, 254).

[CLA93] CLAUDIO, D.M. **Teoria das Aproximações Intervalares.** Porto Alegre:II da UFRGS, 1993. 21p. Apostila

[CLA94] CLAUDIO, D.M. **Interval Approximation Theory.** Porto Alegre:II da UFRGS,1994. 17p. (Relatório de Pesquisa, 226)

[GAR84] GARLOFF,J.; KRAWCZYK,R. Optimal Inclusion of a Solution Set. In:GARLOFF,J.; KRAWCZYK,R. **Freiburger Interval Beri-**

chte. Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik, 1984. 76p. p.13-33.

[GAR86] GARLOFF,J.; KRAWCZYK,R. Optimal Inclusion of a Solution Set. **Siam Journal Numerical Analisys**, v.23, n.1, Fev. 1986.

[GAR86a] GARLOFF,J.; KRAWCZYK,R. Block Methods for the Solution of Linear Interval Equations. In: GARLOFF,J.; KRAWCZYK,R. **Freiburger Interval Berichte**. Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik, 1986. 76p. p.1-40.

[HAN65] HANSEN,E. Interval Arithmetic in Matrix Computations - Part I. **Journal Siam Numerical Analisys**, v.2, n.2, ser.B, 1965.

[HAN67] HANSEN,E; SMITH,R. Interval Arithmetic in Matrix Computations - Part II. **Journal Siam Numerical Analisys**, v.4, n.1, 1967.

[JAH74] JAHN,K.U. Eine Theorie der Gleichungsysteme mit Intervall-Koeffizienten. **ZAMM** 54, p.405-412, 1974

[KAU73] KAUCHER,R. Ergänzung und Erweiterung der Intervallrechnung. In: KAUCHER,R. **Über Metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume**. Karlsruhe:Universidade de Karlsruhe, 1973. 271p. chap.3. p.126-254. (Tese de Doutorado).

[KRA83] KRAWCZYK,R. **Intervalliterationsverfahren**. Freiburger Interval Berichte. Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik, 1983. 60p.

[KRA84] KRAWCZYK,R. A Class of Intervall-Newton-Operators. In:KRAWCZYK,R. **Freiburger Interval Berichte**. Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik, 1984. 54p. p.1-7.

[KRA84a] KRAWCZYK,R; NEUMAIER,A. An Improved Interval Newton Operator. In: KRAWCZYK,R; NEUMAIER,A. **Freiburger Interval**

Berichte. Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik, 1984. 58p. p.1-26.

[KRA85] KRAWCZYK,R; NEUMAIER,A. Interval Newton Operators for Function Strips. In: KRAWCZYK,R; NEUMAIER,A. **Freiburger Interval Berichte**. Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik, 1985. 64p. p.1-34.

[KRA86] KRAWCZYK,R. Optimal Enclosure of a Generalized Zero of a Function Strip. In: KRAWCZYK,R. **Freiburger Interval Berichte**. Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik, 1986. 65p. p.1-18.

[NEU83] NEUMAIER,A. **New Tecniques for the Analysis of Linear Interval Equations**. Freiburger Interval Berichte. Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik, 1983. 73p.

[NEU83a] NEUMAIER,A; NICKEL,K. An Interval Version of the Secant Method. In:NEUMAIER,A; NICKEL,K. **Freiburger Interval Berichte**. Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik, 1983. 44p.

[NEU84] NEUMAIER,A. Interval Iteration for Zeros of Systems of Equations. In:NEUMAIER,A. **Freiburger Interval Berichte**. Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik, 1984. 58p. p.1-26.

[NEU89] NEUMAIER,A. Matrices and sublinear mappings. In: NEUMAIER,A . **Interval Methods for Systems of Equations**. Cambrige:Cambridge University Press, 1989. chap.3. p.109-160.

[NIC76] NICKEL,K. Intervall-Arithmetik und Algebra. In:NICKEL,K. **Intervallmathematik I**. Freiburg:Universidade de Freiburg, 1976. 250p. p.100-186.

[ROH81] ROHN,J. On the Interval Hull of the solution set of an Interval Linear System. In:ROHN,J. **Freiburger Interval Berichte**. Freiburg:Institut für Angewandte Mathematik,1981. 70p. p.45-57.

Informática
UFRGS

Estudo sobre resolução de equações de coeficientes intervalares.

Dissertação apresentada aos Senhores:

Antônio Carlos da Rocha Costa

Prof. Dr. Antônio Carlos da Rocha Costa

Laira Vieira Toscani

Profa. Dra. Laira Vieira Toscani

Prof. Dr. Marco Túllio Menna Barreto de Vilhena (DENUC-UFRGS)

Vista e permitida a impressão.
Porto Alegre, 22/06/94.

Prof. Dr. Dalcidio Moraes Claudio,
Orientador.

Prof. Dr. José Palazzo Moreira de Oliveira,
Coordenador do Curso de Pós-Graduação
em Ciência da Computação.