UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LINHA DE PESQUISA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ARGUMENTAÇÃO, DEMONSTRAÇÃO E PRÁTICAS TEATRAIS: UMA PROPOSTA PARA A SALA DE AULA DO ENSINO FUNDAMENTAL

ÉRICA VITÓRIA MACHADO DA SILVA

PORTO ALEGRE

2023

ÉRICA VITÓRIA MACHADO DA SILVA

ARGUMENTAÇÃO, DEMONSTRAÇÃO E PRÁTICAS TEATRAIS: UMA PROPOSTA PARA A SALA DE AULA DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering

PORTO ALEGRE

2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora, Luisa Rodríguez Doering, por me apresentar a área desta dissertação, pelo incentivo à minha entrada no mestrado em Ensino de Matemática e pela excelente condução deste presente trabalho de pesquisa.

Sou grata às professoras Cydara Cavedon Ripoll, Márcia Rodrigues Notare e Letícia Rangel por participarem da banca, pela avaliação dessa dissertação e aos ótimos apontamentos que possibilitaram elevar a qualidade deste trabalho.

Muito obrigada a todos os meus professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelos aprendizados oportunizados nas respectivas disciplinas ministradas, pelas contribuições referentes à minha dissertação e pelas lições de vida. Em especial, gostaria de expressar minha sincera gratidão às professoras Débora Soares, Andreia Dalcin e Claudia Glavam pela valiosa contribuição que ofereceram ao promoverem uma abordagem de estética diferenciada na redação de trabalhos acadêmicos na disciplina de Metodologia de Pesquisa em Educação Matemática. Foi graças a esse encorajamento que a Desconfiadinha surgiu como personagem na estética do texto desta dissertação.

Gostaria de agradecer a Escola Municipal de Ensino Fundamental Maria Francisca da Silva e, especialmente, a professora Denise Brouwenstyn Gomez por possibilitar e auxiliar a aplicação da minha intervenção pedagógica e aos alunos que participaram da pesquisa com receptividade e afinco.

Agradeço a toda a minha família e amigos pela compreensão e paciência durante o período deste mestrado, no qual, muitas vezes, abdiquei da socialização em prol deste projeto. Em especial, sou grata aos meus pais, Edimara Machado da Silva e Nelson Correa da Silva, que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando ao longo de toda a minha trajetória.

RESUMO

Este estudo consiste em uma pesquisa de caráter qualitativo a nível de mestrado, no qual investigamos em que medida os processos de argumentação e demonstração emergem em atividades mediadas com práticas teatrais, principalmente personagens e esquetes, a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Para isso, desenvolvemos o nosso referencial teórico apoiado, principalmente, nas pesquisas de Balacheff (1987), Hanna (1990) e Stylianides e Stylianides (2009) sobre argumentação, prova e demonstração como também nos trabalhos de Poligicchio (2011) acerca de práticas teatrais e na Teoria de Registros de Representações Semióticas de Duval (1993). Tais estudos embasaram a elaboração, a aplicação e a análise da intervenção pedagógica proposta. Concluímos que os alunos passaram por diversas etapas da construção de uma demonstração (incluindo a construção de uma prova), bem como apresentaram distintos níveis de argumentação matemática. Nesse processo, também realizaram tratamentos e conversões de Duval entre registros de representações pictóricas, aritméticas e algébricas. A partir das percepções apresentadas pelos estudantes acerca do nível de argumentação de seu grupo, inferimos que a maioria relacionou a demonstração com sentimentos e sensações pessoais, com poucas apresentações explicitas de uma relação com a dimensão matemática do tema. Quando sujeitos das práticas teatrais, conseguiram desenvolver personagens, enredos e roteiros, porém expressaram dificuldades em apresentá-los para a turma.

Olá, tudo bem?
Eu sou a Desconfiadinha, uma personagem criada pela autora desta dissertação em conjunto com sua orientadora para ser utilizada na proposta de atividades em sala de aula com o objetivo de fomentar a argumentação dos alunos.
Estarei presente em alguns momentos nesse trabalho escrito, pois a minha criadora considera importante a familiarização do leitor com as minhas características. Para isso ser possível, a minha figura foi desenvolvida por meio do aplicativo *Bitmoji* para *Android* que possibilita a criação de um avatar expressivo e o disponibiliza em diversas situações.
Eu sou muito curiosa e desconfiada, pergunto quando tenho dúvidas e discordo quando não concordo com um argumento, por considerá-lo incompleto ou incorreto. Então, prepare-se, irei aparecer constantemente!
Boa leitura!

ABSTRACT

This study is a research of a qualitative nature at Master's level in which we investigate what extent the argumentation and demonstration processes emerge in activities mediated with theatrical practices, mainly characters and sketches, to 6th graders of Elementary School. We developed our theoretical framework supported, mainly, in the research of Balacheff (1987), Hanna (1990) and Stylianides & Stylianides (2009) on argumentation, proof and demonstration as well as in the works of Poligicchio (2011) about theatrical practices and in the theory of records of semiotic representations of Duval (1993). These studies supported the elaboration, application and analysis of the proposed pedagogical intervention. We concluded that the students went through several stages of the construction of a demonstration (including the construction of a proof), as well as presented different levels of mathematical argumentation. In this process, they also performed Duval’s treatments and conversions between records of pictorial, arithmetic and algebraic representations. From the perceptions presented by the students about the level of argumentation in their group, we infer that the majority related the demonstration to personal feelings and sensations, with few explicit presentations of a relationship with the mathematical dimension of the subject. When subjects of theatrical practices, they were able to develop characters, plots and scripts, but expressed difficulties in presenting them to the class.

LISTA DE FIGURAS

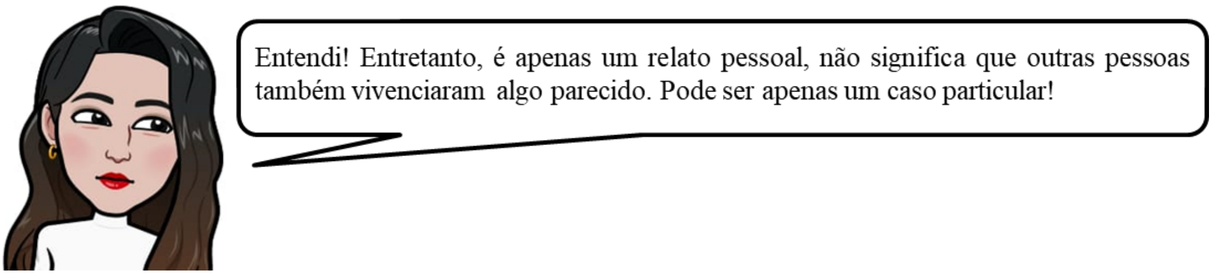
LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

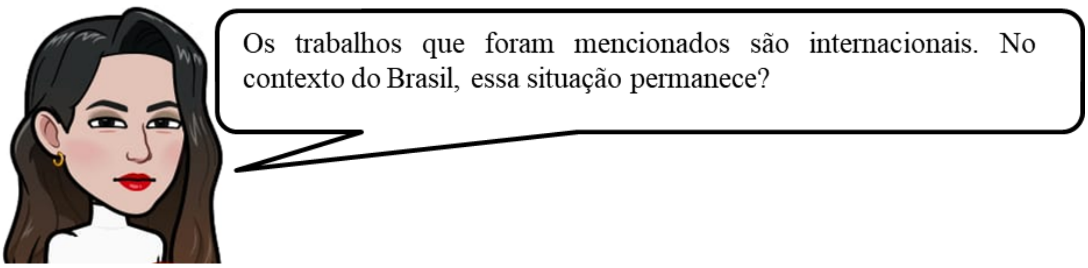
1 INTRODUÇÃO

A demonstração busca validar uma sentença, no sentido de tornar incontestável sua veracidade na área que foi desenvolvida, por isso, é uma parte fundamental da matemática. Além disso, o processo de construção de uma demonstração oportuniza raciocínios fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático. Neste sentido, entendemos que "o pensamento matemático não se refere a pensar sobre o conteúdo da Matemática; refere-se, sim a um estilo de pensar que vem em função de operações particulares, processos e dinâmicas reconhecidamente matemáticas" (BURTON, 1984, p. 35, tradução nossa).

Nessa perspectiva, entendemos que as demonstrações são importantes para a matemática e podem possuir papéis pedagógicos no ensino e aprendizagem dessa ciência. Entretanto, eu, em toda a minha trajetória na Educação Básica, nunca fui exposta a uma prova e só descobri[1] a relevância da demonstração para essa ciência no curso de Licenciatura em Matemática.



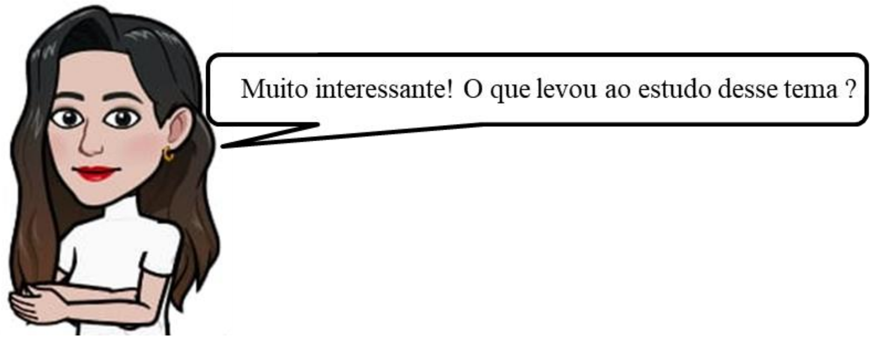
Estudos mostram que as constatações observadas em minhas experiências são recorrentes no ensino e aprendizagem de matemática[2] na Educação Básica. De acordo com Hanna (1995, 2000), Stylianides e Stylianides (2009) e Harel e Sowder (1998), embora a prova seja o centro de fazer e conhecer matemática e possua aspectos pedagógicos importantes para o aprendizado dessa ciência, ela é muitas vezes trabalhada apenas nos níveis mais superiores de escolaridade.



[1] Verbo conjugado na primeira pessoa do singular por se tratar de um fato pessoal da candidata do projeto de pesquisa. De modo geral, utilizaremos a conjugação na primeira pessoa do plural e voltaremos a utilizar a conjugação na primeira pessoa do singular no relato da aplicação da proposta de atividade.

[2] Para nomes que designam domínios do saber e disciplinas, utilizaremos uso de iniciais minúsculas, salvo citações que apresentam outra forma de escrita.

No Brasil, “o processo de demonstrações no ensino de matemática fica restrito, quase que completamente, aos cursos superiores de matemática – os cursos de Licenciatura e de Bacharelado” (SOARES, AFRO, BRITO E SOUZA, 2015, p. 3).

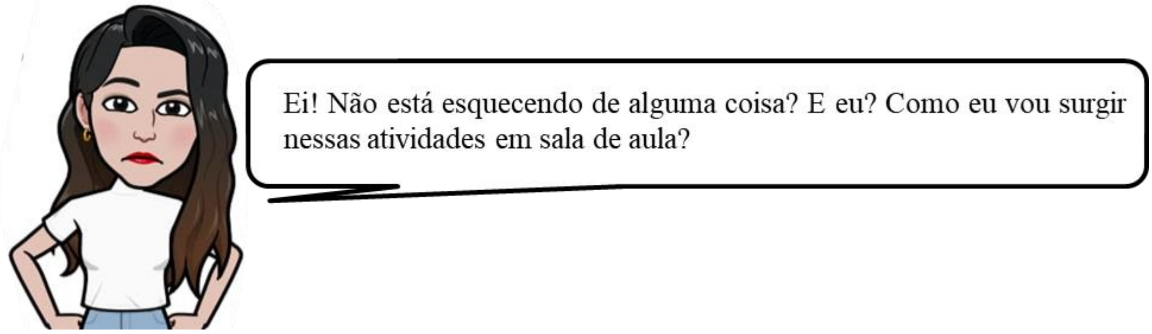


A presente pesquisa começou a ser delineada durante a minha Bolsa de Iniciação Científica com orientação da professora doutora Luisa Rodriguez Doering em 2019. Inicialmente, pretendíamos incentivar a argumentação e a construção de demonstrações explicativas (HANNA, 1990; STYLIANIDES, 2008) nas salas de aula do Ensino Fundamental com o intuito de proporcionar melhor compreensão sobre o conteúdo estudado. Notamos que não seria uma tarefa fácil. Assim, buscamos meios que possibilitassem atingir tal objetivo. Partimos para o estudo da Teoria dos Registros de Representações Semióticas (DUVAL, 1993) e inferimos que há uma diversidade de registros de representações semióticas entre demonstrações de uma mesma proposição, que poderíamos apresentar, construir e relacionar com os alunos. Entretanto, não era suficiente: Como incentivar a argumentação? Os professores de matemática constantemente têm a mesma preocupação e no seu dia-a-dia em sala de aula buscam realizar tal feito. Queríamos deixar essa tentativa explícita aos alunos. Dessa forma, surgiu a personagem Desconfiadinha, que nos motivou a estudar sobre práticas teatrais e que nos acompanha em diversos momentos dessa dissertação.

Nesse sentido, partimos para a revisão de literatura a fim de obter uma percepção mais precisa sobre o estado atual dos conhecimentos acerca das temáticas mencionadas anteriormente e identificar lacunas nas quais este trabalho pudesse contribuir. Não encontramos estudos que abordassem argumentação, prova, demonstração e práticas teatrais simultaneamente no ensino de matemática voltado para o Ensino Fundamental. Em especial, verificamos que o 9º ano do Ensino Fundamental e a geometria são a etapa escolar e a área da matemática mais trabalhada, respectivamente, nas pesquisas que consideramos na revisão de literatura. Dessa forma, optamos por estudar outros campos, a saber: aritmética e álgebra no 6º ano do Ensino Fundamental.

A proposta de intervenção pedagógica levou em consideração todas as ponderações supracitadas e buscamos, por meio dela, possibilitar argumentação, passagens pelas etapas da construção de uma demonstração, transformações de registros de representações semióticos e experiências com práticas teatrais para os estudantes.

Conforme Stylianides e Stylianides (2009), a demonstração tem atraído a atenção de pesquisas devido à sua relevância para a matemática e sua potencialidade para o ensino e aprendizagem dessa disciplina. No entanto, essas pesquisas também apontam que aprender e ensinar a provar e/ou argumentar são tarefas árduas em todos os níveis escolares. Tendo esse desafio em mente, esta pesquisa busca propor e aplicar atividades que insiram a produção de argumentação e/ou demonstração no ensino de matemática em uma sala de aula do Ensino Fundamental, utilizando práticas teatrais, bem como analisar as produções dos alunos no desenvolvimento dessas argumentações. Relativamente às práticas teatrais, utilizamos esquetes teatrais e personagens, tanto nas explicações dadas aos alunos como nas produções feitas por eles, para fomentar a argumentação.

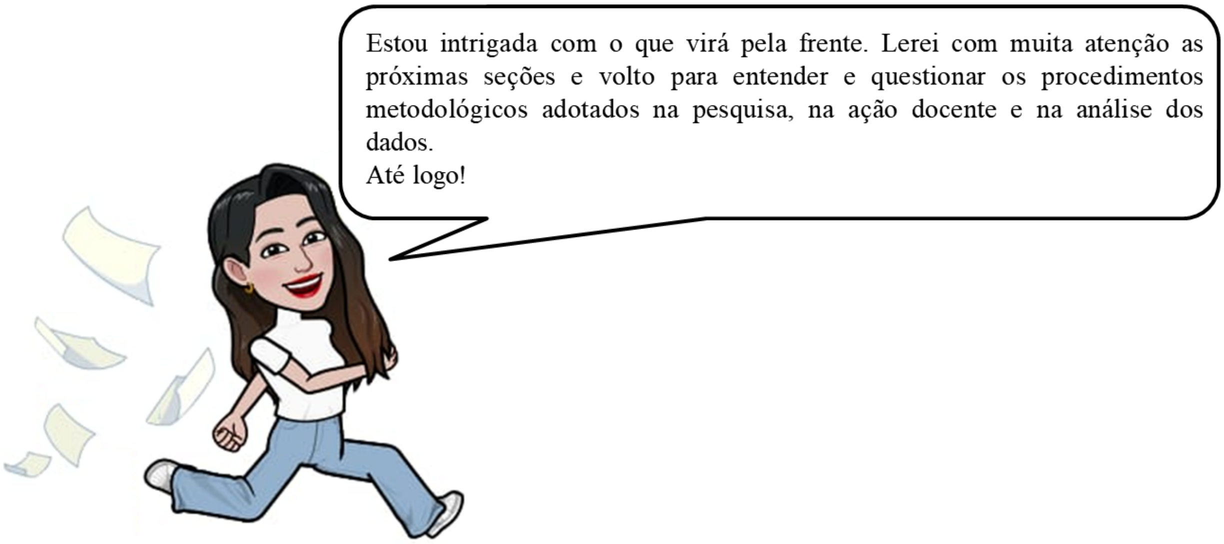


As atividades propostas foram aplicadas em uma sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública nas quais a autora do presente trabalho atuou como professora e pesquisadora. Ressaltamos que, ao longo da aplicação da proposta, a professora/pesquisadora (autora desta dissertação) desenvolveu e interpretou alguns personagens, em especial, a Desconfiadinha, como uma forma lúdica de incentivar a argumentação dos estudantes por meio de questões. Entendemos que esse papel é, muitas vezes, interpretado pelos docentes em suas aulas com o mesmo objetivo. Assim, a Desconfiadinha surge como forma de ressaltar essa postura e deixar mais evidente aos estudantes às inquietações sobre o tema proposto e possibilitar que, ao longo do desenvolvimento de suas atividades, possam utilizá-la como exemplo, já que também terão que criar e interpretar personagens. Assim, ela vai além de uma personagem, defendemos que sua essência questionadora seja adotada em sala de aula, mesmo sem sua interpretação de modo explícito.

De modo a sustentar esta dissertação, foram realizados estudos teóricos sobre a relevância da demonstração para a matemática e para o ensino e aprendizagem de tal área, bem como buscas sobre o atual cenário das demonstrações na Educação Básica e investigações sobre metodologias que desenvolvam raciocínio e argumentação. Além disso, abordamos algumas noções básicas sobre o teatro e práticas teatrais, a questão relativa à como essa esfera pode ser relacionada com o ensino e a aprendizagem de matemática. Procuramos também relacionar a Teoria de Registros de Representações Semióticas com demonstrações e práticas teatrais. O conhecimento sobre os assuntos mencionados neste parágrafo é fundamental para responder a nossa questão de investigação, a saber:

Em que medida os processos de argumentação e demonstração emergem em atividades mediadas com práticas teatrais a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental e quais registros de representações semióticas surgem nesse contexto?

Estruturamos esta dissertação iniciando com uma seção que trata da problemática e das questões de investigação, passando pelos objetivos da pesquisa, seguidos da revisão de literatura. Sequencialmente, discorremos sobre o referencial teórico que engloba argumentação, demonstração, práticas teatrais, a Teoria de Registro de Representação Semiótica e possíveis relações entre esses temas no ensino e aprendizagem de matemática. Em seguida, apresentamos os procedimentos metodológicos, o roteiro das atividades propostas para a sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental, o relato da aplicação da proposta e a análise dos dados produzidos pelos alunos. Por fim, nas considerações finais, pontuamos reflexões, conclusões e sugestões para o desenvolvimento da área na qual a presente dissertação está inserida.



2 PROBLEMÁTICA E QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO

Dentre os documentos oficiais brasileiros de orientação curricular, temos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que em diversas passagens preveem o desenvolvimento da argumentação baseada em fatos, no raciocínio dedutivo, na lógica e até mesmo em demonstrações na Educação Básica. (BRASIL, 1998, p. 26, 37, 47, 48, 53, 56 e 63). Destacamos, em particular, a expressão “em todos os níveis de ensino” na seguinte citação:

> O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência **em todos os níveis de ensino**. (BRASIL, 1998, p. 26, grifo nosso).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), neste contexto, corrobora essa posição, também em diversos trechos. (BRASIL, 2018, p. 221, 531, 540, 541). Por exemplo, na Competência 5 das competências específicas de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio, encontramos:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531)

Assim, os documentos oficiais de orientação curricular sugerem que os estudantes passem pela heurística, identificação de padrão, conjectura, argumentação e demonstração matemática. Todavia, de acordo com Soares, Afro, Brito e Souza (2015), esse processo praticamente não é trabalhado na Educação Básica e, fica quase inteiramente restrito aos cursos superiores de matemática. Hanna (1995, 2000), Sowder e Harel (1998), Stylianides e Stylianides (2009) e Mata-Pereira e Ponte (2011), reconhecem a importância do processo de demonstração para o fazer e o conhecer a matemática e apontam que há aspectos pedagógicos relevantes para o aprendizado dessa ciência.

O ensino das artes, incluindo práticas teatrais, é deixado de lado por muitas escolas. Para Fischer (2012) e Japiassu (2003) muitos membros da comunidade escolar o veem como algo dispensável ou luxuoso. Entretanto, a representação teatral proporciona “o questionamento, o pensar, o desenvolvimento da socialização e da comunicação entre os envolvidos, valoriza o desenvolvimento do ser, explorando não apenas conhecimentos, mas despertando emoções e levando o indivíduo a lidar com elas”. (PEREIRA, 2017, p.13). Dessa forma, o desenvolvimento de práticas teatrais possui um grande potencial educacional, pois incentiva capacidades relevantes para atingir os objetivos primordiais da Educação Básica elencados pelos documentos oficiais.

Tendo esses fatos em vista, o presente projeto apresenta como questão de investigação: “Em que medida os processos de argumentação e demonstração emergem em atividades mediadas com práticas teatrais a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental e quais registros de representações semióticas surgem nesse contexto?”. Para tanto, este questionamento se desdobra em outras discussões que não necessariamente serão respondidas neste trabalho, mas que também norteiam essa pesquisa, como: Que tipo de justificativa matemática os alunos produzem? Como os alunos entendem suas argumentações? Quais representações semióticas são utilizadas por eles? Eles fazem transformações (termo empregado por Duval (2002)) - entre elas?

3 OBJETIVOS

Para a realização da presente pesquisa foram elaborados objetivos que irão direcionar o desenvolvimento desta dissertação e que estão divididos em um objetivo geral com o escopo da pesquisa e três objetivos específicos que buscam detalhar as suas peculiaridades.

3.1 OBJETIVO GERAL

Investigar a produção de argumentação de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública em atividades de aritmética e de álgebra que buscam proporcionar experiências com etapas de demonstração e com práticas teatrais.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

a) Estudar de forma investigativa o nível de argumentação matemática apresentada pelos grupos e as percepções individuais sobre as justificativas elaboradas de acordo com a categorização desenvolvida por Stylianides e Stylianides (2009).
b) Identificar os registros de representações semióticas utilizados pelos alunos e as transformações realizadas por eles ao mobilizar esses registros nos conteúdos de aritmética e de álgebra estudados nas atividades propostas.
c) Verificar como os estudantes elaboraram roteiros, criaram personagens e apresentaram os resultados em uma esquete teatral com um enredo matemático pré-determinado.

4 REVISÃO DE LITERATURA

Para obter uma percepção mais precisa sobre o estado atual dos conhecimentos acerca da temática desta dissertação e para identificar lacunas para as quais este trabalho possa contribuir, realizamos uma revisão de literatura que buscou investigar trabalhos que abordassem argumentação, prova, demonstração, práticas teatrais e propostas de atividades para o Ensino Fundamental.

Em uma primeira consulta ao banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) no dia 11 de novembro de 2021, utilizamos as seguintes palavras separadas pelo conectivo *and*: argumentação, prova, demonstração, teatro, práticas teatrais, ensino fundamental e matemática. Para filtrar a pesquisa, selecionamos Ciências Humanas, Ciências Exatas e da Terra e Multidisciplinar para Grande Área do Conhecimento; Ensino de Ciências e Matemática para Área do Conhecimento e Ensino de Matemática para Área de Concentração, obtendo, assim, um total de 256 resultados. Todos esses trabalhos foram descartados por não apresentarem relações entre as palavras buscadas.

Numa segunda tentativa de pesquisa ao mesmo banco, utilizamos os mesmos filtros mencionados anteriormente e colocamos no separador de busca os seguintes termos: “argumentação” *and* “prova” *or* “prova matemática” *or* “demonstração” *and* “teatro” *or* "práticas teatrais” *or* “personagens” *or* “personagem” *or* “*sketch*” *or* “esquete” *and* “ensino fundamental” *and* “matemática”. Obtivemos 16 resultados que também não apresentavam pesquisas sobre os temas desejados. Com o intuito de ampliar a busca, acrescentamos Educação Matemática na Área de Concentração e restringimos o intervalo de publicação de 2017 a 2021. Dessa forma, atingimos 861 resultados, os títulos desses trabalhos foram averiguados e descartamos os que abordavam Ensino Médio, Educação de Adultos, formação de professores, análise de livros didáticos e políticas públicas, resultando em um total de 102 estudos. Os resumos dessas pesquisas restantes foram analisados e percebemos que nenhum trabalho desenvolve, concomitantemente, argumentação, prova e práticas teatrais.

Com o intuito de encontrar resultados nos quais todos os termos consultados fossem tratados, realizamos buscas por estudos internacionais nos portais online *Scientific Electronic Library Online* (SciELO) e *Educational Resources Information Center* (ERIC). Inicialmente buscamos por “*(argumentation) AND (proof) OR (mathematics proof) OR (demonstration) AND (theater) OR (characters) OR (character) OR (sketch) OR (theatrical practices) AND (elementary education) AND (mathematics)*” e não obtivemos resultados, então, passamos a utilizar "*subject:*" no início de cada uma das palavras desejadas para que elas fossem buscadas no título, resumo ou palavras-chave dos trabalhos. Entretanto, os portais informaram que nenhuma resposta correspondeu à consulta, e decidimos realizar uma busca mais ampla, utilizando as palavras *argumentation, proof, demonstration, theater, theatrical practices* e *mathematics*, porém, novamente, não foram encontradas pesquisas nas quais esses temas fossem desenvolvidos em conjunto.

Tendo em vista que não encontramos estudos que abordassem argumentação, prova, demonstração e práticas teatrais no ensino de matemática nos quatro portais distintos que buscamos, inferimos que relacionar todos esses temas pode ser considerado um diferencial para a linha de pesquisa de ensino e aprendizagem de matemática. Entendemos que estamos procurando conectar duas áreas: uma que trata do desenvolvimento da argumentação e do processo de construção de uma demonstração, e outra que aborda o impacto das práticas teatrais no aprendizado de conhecimentos matemáticos. Dessa forma, decidimos dividir a revisão de literatura em duas partes, cada uma focada em uma dessas áreas.

4.1 ARGUMENTAÇÃO, PROVA E DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Para dar início a esta parte da revisão de literatura, voltamos ao catálogo de teses e dissertações da CAPES, pesquisando os termos "argumentação", "prova", "demonstração", "Ensino Fundamental" e "matemática"; selecionamos Multidisciplinar em Grande Área do Conhecimento, Ensino de Ciência e Matemática em Área do Conhecimento e Ensino de Matemática em Área de Concentração e obtivemos 256 resultados. Selecionamos os que abordavam a elaboração de atividades para alunos do Ensino Fundamental que buscavam o desenvolvimento do processo de argumentação e demonstração, com sua respectiva aplicação e análise dos dados coletados. Dessa forma, chegamos a cinco dissertações de mestrado.

Os cinco trabalhos encontrados nessa parte da revisão de literatura foram desenvolvidos em São Paulo, especificamente na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), na Universidade de São Paulo (USP) e na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Tendo em vista que nenhuma dessas pesquisas foi produzida na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), universidade à qual a presente pesquisa desenvolveu-se, decidimos realizar uma busca no seu repositório digital, LUME-UFRGS. Utilizamos as mesmas palavras mencionadas nessa etapa da revisão de literatura e para refinar os resultados, selecionamos “Educação Matemática” em assuntos e chegamos em 39 trabalhos. Desses, foram descartados os estudos voltados para o Ensino Médio, Ensino Superior, formação de professores e Educação de Jovens e Adultos. Sendo assim, obtivemos três resultados: um artigo, uma dissertação e um trabalho de conclusão de curso.

Para finalizar esta parte da revisão de literatura, voltamos aos portais internacionais com o intuito de ter um panorama mais geral sobre a temática em questão. No SciELO pesquisamos por “(*argumentation) AND (proof) OR (demonstration)*”, adicionamos *Education* nas Áreas Temáticas e obtivemos apenas um resultado, um artigo latinoamericano que analisa o desenvolvimento de soluções de problemas geométricos realizadas por alunos do quarto curso de Educação Secundária Obrigatória, equivalente ao 1º ano do Ensino Médio. Dessa forma, como esse trabalho não é voltado para o Ensino Fundamental, decidimos descartá-lo da revisão de literatura desta dissertação. Utilizamos a mesma busca em consulta ao portal ERIC e para filtrar a pesquisa selecionamos *Mathematics Education* em *Descriptor*, alcançando, assim, um total de 25 resultados. Apenas três desses trabalhos abordavam propostas de atividades para alunos do Ensino Fundamental e somente um estava disponível para leitura, um artigo inglês.

No total, analisamos 321 estudos, tendo em vista as buscas realizadas nos diferentes portais e repositórios digitais e selecionamos nove para essa parte da revisão de literatura: Duarte (2007); Silva (2008); Hoffman, Breyfogle e Dressler (2009); Carvalho (2010); Rosale (2016); Tartaglia Filho (2016); Rigo (2016); Costa (2017) e Silveira e Notare (2020). A seguir buscamos trazer uma breve apresentação de cada um dos trabalhos, destacando sua questão de investigação, referencial teórico, metodologia e resultados.

Duarte (2007) busca responder quais dificuldades e avanços apresentam alunos na articulação de informações visando provar propriedades dos paralelogramos. Para isso, fundamenta o seu referencial teórico principalmente nas teorias de Parzysz (2001)[3] sobre provas formais e empíricas, de Machado (1995) sobre as quatro dimensões da construção do pensamento geométrico, de Duval (1995) sobre as formas de representação de informações, e de Duval e Egret (1989) sobre sequências lógicas. Além disso, aplica e analisa atividades realizadas com alunos da 8ª série, atual 9º ano do Ensino Fundamental, e 1º ano do Ensino Médio. Tais atividades foram desenvolvidas seguindo os princípios da Engenharia Didática, ou seja, inicialmente foi efetuado um estudo em livros didáticos e nas propostas curriculares do conteúdo a ser trabalhado em sala, posteriormente escolhas didáticas de como desenvolver

[3] As referências citadas nos trabalhos selecionados na revisão de literatura serão apresentadas no APÊNDICE F.

os assuntos matemáticos, em seguida a organização e aplicação da sequência de atividades e por fim a análise da produção dos alunos. O objetivo das atividades era levar os alunos, de forma empírica, a construir o conceito de hipótese/tese e, de forma dedutiva, a ordenar proposições de modo a elaborar provas das propriedades dos paralelogramos e, para isso, poderiam fazer experimentações com varetas, com lápis e papel e no software Cabri. O estudo mostrou que os alunos tinham dificuldades no processo de argumentação e prova e após a aplicação da atividade apresentaram certos avanços nesse processo.

Silva (2008) elaborou, aplicou e analisou uma sequência didática com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental que procurava oportunizar a vivência de diferentes etapas do processo de prova no contexto de múltiplos e divisores de números inteiros. A fundamentação teórica baseia-se na classificação dos diferentes tipos de prova, seguindo Balacheff (1988), nas ideias relacionadas aos papéis e funções das provas de De Villiers (2001) e nas sugestões apresentadas nos PCN. Inicialmente, foi realizado um levantamento das concepções dos alunos frente à proposta do trabalho com provas e argumentações, que foi considerado, juntamente com o referencial teórico, para a criação das atividades. A sequência didática proposta possuía o intuito de levar o aluno a vivenciar, com o auxílio do software Excel, um processo de prova que inclui generalização, formulação de hipóteses, conjecturas e produção de argumentos. O estudo constatou dificuldades, durante a realização do experimento, por parte de alunos na argumentação.

As dissertações de Duarte (2007) e Silva (2008) são vinculadas ao projeto intitulado Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AprovaME) financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e concebido pelo Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM) da PUC/SP. O objetivo desse projeto, segundo ambos os autores, é identificar os avanços e dificuldades apresentados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio na elaboração de argumentos e provas em tópicos de geometria e álgebra. O projeto mobilizou diversos estudos na área, contribuindo, principalmente, com levantamentos das concepções dos alunos sobre argumentação e prova em escolas do Estado de São Paulo.

O artigo de Hoffman, Breyfogle e Dressler (2009) apresenta a metodologia *Math Talk Framework* e sua aplicação em uma sala de aula do 8º ano do Ensino Fundamental com o intuito de proporcionar um espaço de comunidade, no qual os alunos constantemente explicam e justificam seus pensamentos reforçando, assim, capacidades do processo de uma prova. O estudo conclui que há diferentes maneiras de utilizar as respostas incorretas apresentadas pelos alunos para promover a argumentação e que a *Math Talk Framework* apresenta uma maneira de avaliar o discurso dos alunos em sala de aula.

A dissertação de mestrado de Carvalho (2010) tem como pergunta de pesquisa: como familiarizar gradativamente os alunos da Educação Básica com o método de argumentação matemática? Para respondê-la, o estudo apresenta uma análise dos PCN para o Ensino Fundamental, uma análise crítica de livros didáticos de sétima série/oitavo ano sobre expressões algébricas e a elaboração, aplicação e análise de atividades sobre esse conteúdo matemático a essa etapa escolar. A proposta didática buscou trabalhar, por meio de aulas expositivas com a participação dos alunos e tarefas com questões, as propriedades das operações com números como argumento suficiente para justificar precisamente as operações com expressões algébricas, destacando o pensamento genérico e o método de argumentação matemática. O resultado da pesquisa mostrou que vários alunos, inclusive os que não acompanhavam satisfatoriamente as aulas, deram retornos positivos, visto que procuravam justificar suas respostas mesmo que isso não tivesse sido solicitado e demonstravam curiosidade em dar continuidade ao assunto que estava sendo trabalhado.

Na sua dissertação de mestrado, Rosale (2016) apresenta duas perguntas de pesquisa: Como trabalhar as situações que envolvem a argumentação e prova matemática na Educação Básica? Quais os principais meios de desenvolvimento de argumentação e prova matemática para alunos da Educação Básica? Seu referencial teórico aborda, principalmente, as visões Balacheff (1988), Sowder e Harel (1998), Rezende e Nasser (1994) e De Villiers (2001) sobre argumentação, prova e formação de professor. Além disso, Rosale (2016) também desenvolve, aplica e analisa uma sequência de atividades realizada com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Para isso, inicialmente, realiza um diagnóstico com o intuito de entender qual é o nível de argumentação que os alunos conseguem trabalhar, em seguida leva em consideração os resultados para a realização das demais atividades que tinham o intuito de desenvolver argumentação e prova em conteúdos de álgebra e geometria por meio de questões e discussões. A metodologia de análise das produções dos alunos baseou-se nas características do *Design Experiments* (Experimento Planejado) e como resultado foi possível identificar quais ações docentes que possibilitam a melhora do nível de argumentação de nossos estudantes.

Tartaglia Filho (2016), em sua dissertação de mestrado, realiza uma pesquisa voltada para o Teorema de Pitágoras, trazendo um referencial histórico sobre o tema, explicitando contribuições para a aprendizagem de matemática e apresentando uma proposta didática aplicada a alunos do 9º ano por meio de oficinas e folhas de atividades com o intuito de proporcionar uma demonstração do Teorema de Pitágoras e capacidades necessárias para a interpretação da geometria. Assim como Duarte (2007), Tartaglia Filho (2016) também utiliza a Engenharia Didática como metodologia e na análise a posteriori concluiu que as oficinas propostas possibilitaram aos alunos a construção de conhecimentos significativos sobre o Teorema de Pitágoras.

O trabalho de conclusão de curso de Rigo (2016) tem como questão de investigação: que tipo de pensamento genérico e de argumentação os alunos apresentam quando desafiados a provar que a soma de quaisquer dois números pares é um número par, a soma de quaisquer dois números ímpares é um número par e a soma de um número par qualquer e um número ímpar qualquer é um número ímpar? A fundamentação teórica do estudo aborda capacidades cognitivas da criança e a produção de argumentação matemática, utilizando pensamento generalizador e pensamento genérico, que podem ser feitos por ela, principalmente à luz de D'Amore (2007), Fischbein (1982), Hanna (1990), Piaget (1970) e Ripoll, Ripoll e Silveira (2011). O autor também apresenta o planejamento e a aplicação de atividades com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental com o objetivo de levar os estudantes a perceberem que é possível provar fórmulas e outras relações na matemática, por meio de questões e discussões em conteúdos relacionados às operações básicas da matemática. O estudo constatou que os discentes que participaram da pesquisa possuem as condições necessárias para compreender algumas demonstrações e, além disso, existem demonstrações que oportunizam maior entendimento do conteúdo estudado em nível de escola básica do que outras.

A dissertação de mestrado de Costa (2017) defende atividades de argumentação em sala de aula com o intuito de não só validar resultados puramente matemáticos como também afirmações em contextos externos a essa ciência, no sentido de aprimorar o pensamento crítico do aluno. A fundamentação teórica desta dissertação apoia-se, principalmente, nas contribuições de Balacheff (1988) sobre o que ele denomina processos de prova e situações de validação; e de Skovsmose (1998) a respeito da Educação Matemática Crítica. Além disso, o estudo também apresenta uma proposta de trabalho com ângulos e triângulos com alunos do 6º ano e 7º ano do Ensino Fundamental por meio de cenários para investigação. O estudo concluiu que trabalhos que envolvem argumentações em/com matemática, juntamente com os ambientes de investigação, são eficientes no sentido de contribuir para a formação integral do educando.

Silveira e Notare (2020) apresentam um artigo que analisa o desenvolvimento do pensamento geométrico e da argumentação a partir da exploração de situações geométricas de dobraduras em ambiente dinâmico com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. As atividades desenvolvidas nessa etapa escolar buscavam possibilitar a exploração, a formulação e teste de conjecturas, assim como o incentivo à argumentação, com o auxílio do software GeoGebra em todo o processo. Os resultados da pesquisa apontam que, com a utilização de ambiente de geometria dinâmica, é possível resgatar o trabalho com o desenvolvimento do pensamento geométrico na Escola Básica.

O Quadro 1 elenca os estudos selecionados nesta revisão de literatura referente à temática de argumentação e prova, apresentando as pesquisas organizadas por ano de publicação, explicitando os autores, o título e o tipo dos trabalhos, além de especificar a etapa escolar e a área da matemática abordada em cada uma das propostas de atividades dos trabalhos.

Quadro 1: Trabalhos selecionados com destaque a área da matemática e etapa escolar das propostas de atividade

Pesquisa científica				Proposta de atividades	
Autor(es)	Título	Ano	Tipo de trabalho	Etapa do Ensino Fundamental	Área da Matemática
Valdenir Duarte	Um estudo sobre propriedades do paralelogramo envolvendo o processo de argumentação e prova	2007	Dissertação	8ª série (atual 9º ano)	Geometria
Marcílio da Silva	Argumentação e prova envolvendo conceitos de múltiplos e divisores: uma experiência com alunos do ensino fundamental	2008	Dissertação	9º ano	Álgebra
B. Hoffman, M. Breyfogle, e J. Dressler	The Power of Incorrect Answers	2009	Artigo	8º ano	Álgebra
Sandro Carvalho	Pensamento genérico e expressões algébricas no Ensino Fundamental	2010	Dissertação	7º ano	Aritmética e álgebra
André Rosale	Argumentação e prova matemática na educação básica	2016	Dissertação	9º ano	Geometria
Leonardo Tartaglia Filho	Teorema de Pitágoras, aplicações de demonstrações em sala de aula	2016	Dissertação	9º ano	Geometria
Matheus Rigo	Argumentação e pensamento genérico no Ensino Fundamental	2016	Trabalho de Conclusão de Curso	7º ano	Aritmética e álgebra
Valter Costa	Argumentações matemáticas sob uma perspectiva crítica: uma análise de práticas didáticas no Ensino Fundamental	2017	Dissertação	6º ano e 7º ano	Geometria e estatística
Priscila Silveira e Márcia Notare	Dobraduras Dinâmicas e a Argumentação em Geometria	2020	Artigo	9º ano	Geometria

Fonte: Construção da autora

Analisamos os trabalhos elencados no Quadro 1, com o intuito de verificar se existiam semelhanças com os referenciais teóricos utilizados, identificamos a recorrência de citações relativas às publicações de Balacheff e de De Villiers sobre provas e demonstrações. Dessa forma, inferimos a relevância de tais autores sob essa temática, o que nos incentivou a estudar os seus trabalhos e abordá-los em nosso referencial teórico. Entretanto, também buscamos trazer outros autores que não foram citados nos demais trabalhos, mas que podem contribuir para essa área de estudo: Gabriel Stylianides e Andreas Stylianides são exemplos, visto que trazem concepções interessantes que podem ser aplicadas na elaboração e na análise de proposta de atividades em sala de aula. Além disso, procuramos estabelecer conexões que, nos trabalhos selecionados, não foram levantadas, como a relação entre a Teoria de Registros de Representações Semióticas e as demonstrações, que serão detalhadas no nosso referencial teórico (seção 5).

Observamos que a maioria das pesquisas trazidas nessa parte da revisão de literatura desenvolvem atividades com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e a área mais trabalhada é a geometria, fato que explicita a existência de ramos nos quais argumentação, prova e demonstração são pouco exploradas tais como aritmética, trigonometria, estatística e probabilidade nas etapas iniciais da Educação Básica. A nossa proposta de pesquisa diferencia-se dos trabalhos mencionados no sentido de ser destinada a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental e pretende trabalhar com aritmética e álgebra.

4.2 TEATRO, PERSONAGEM OU ESQUETE NO ENSINO DE MATEMÁTICA A ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Iniciamos a segunda parte desta revisão de literatura no banco de teses e dissertações e dissertações da CAPES, procurando pelos termos “práticas teatrais”, “personagem” e “esquete” e utilizando Multidisciplinar, Ensino de Ciências e Matemática e Ensino de Matemática nos filtros Grande Área de Conhecimento, Área de Conhecimento e Área de Concentração, respectivamente. Obtivemos um total de 53 resultados, dos quais apenas dois relacionavam teatro com ensino de matemática, ambas as dissertações de mestrados.

No LUME-UFRGS, realizamos uma busca pelas mesmas palavras e escrevemos “matemática” em assuntos para refinar os resultados, porém não obtivemos respostas à consulta. Sendo assim, mantivemos os filtros adicionados e pesquisamos por cada palavra separadamente. Para “esquete” o portal não apresentou retorno. Por sua vez, quando pesquisamos por “personagem” atingimos 163 resultados, dos quais apenas dois relacionavam-se com ensino de matemática, um deles buscava entender como e quais elementos matemáticos emergiram de contos e o outro analisava o uso de *Role Playing Games* como recurso pedagógico nas aulas de matemática, aplicando-o em uma turma de Ensino Médio. Sendo assim, ambos os estudos foram descartados por não abordarem propostas para o Ensino Fundamental. Por fim, para “práticas teatrais”, encontramos 118 resultados e selecionamos três trabalhos, um trabalho de conclusão de curso e duas dissertações. Tais trabalhos foram selecionados, pois abordam práticas teatrais, matemática e desenvolvem atividades com alunos do Ensino Fundamental. Dentre esses estudos, um já havia sido escolhido por meio da pesquisa no repositório da CAPES.

Nos portais internacionais, SciELO e ERIC, utilizamos uma estratégia semelhante à mencionada no parágrafo anterior, inicialmente colocamos na busca as três expressões traduzidas para o inglês (*character, sketch, theatrical practices*), cada uma entre parênteses e separadas pelo conectivo “*or*” acrescidas de “*and* (*mathematics*)”. No portal ERIC, atingimos 142 resultados, dos quais quatro abordavam relações entre pelo menos uma das palavras pesquisadas com o ensino de matemática e o Ensino Fundamental, porém apenas um estava disponível para leitura, um artigo americano. No portal SciELO, não obtivemos nenhum resultado, então, pesquisamos por cada palavra separadamente mantendo o acréscimo já explicitado. Dessa forma, 20 resultados foram apresentados tanto na busca por “(*character*) *and* (*mathematics*)” como por “(*sketch*) *and* (*mathematics*)” e nenhuma resposta para a consulta “(*theatrical practices*) *and* (*mathematics*)”. Os 40 estudos encontrados não se enquadram nos critérios já explicitados para a seleção de trabalhos da presente revisão de literatura, por isso foram descartados.

No total, para essa parte da revisão de literatura, foram analisados 516 estudos, dos quais quatro se enquadraram nos critérios de seleção: Braz (2014); Inoa, Weltsek e Tabone (2014); Sachser (2019) e Führ (2019). Iremos apresentar esses trabalhos da mesma forma que abordamos as pesquisas selecionadas para a primeira parte da nossa revisão de literatura, ou seja, iremos destacar a questão de investigação, o referencial teórico, a metodologia e os resultados de cada um deles.

A dissertação de Braz (2014) busca responder que contribuições na aprendizagem dos estudantes de um 9º ano do Ensino Fundamental um professor de matemática pode oferecer quando lança mão da História da Matemática como um recurso pedagógico associado à preparação e execução de uma peça teatral. Para isso, faz estudos teóricos relativamente à biografia de Tales de Mileto bem como à História da Matemática e do Teatro à vista de autores como Mendes (2006), Miguel (1993), Gutierre (2010), Desgrandes (2011) e Cabral (2012). A investigação em sala de aula seguiu a seguinte ordem: a aplicação de um questionário para conhecer os estudantes, jogos teatrais; introdução, por meio de leitura dramática, de um dos *scripts* desenvolvido pela autora aos alunos; reformulação dos *scripts*; nova exposição dos textos aos discentes; ensaios; apresentação da peça teatral, que possuía o intuito de discutir conteúdos relacionados ao possível episódio da medição da altura da pirâmide de Quéops e ao Teorema de Tales e questionário final. A análise dos dados obtidos no estudo apontou que a participação dos estudantes na peça teatral contribui para o interesse e motivação deles nas aulas de matemática.

O artigo de Inoa, Weltsek e Tabone (2014) busca investigar se o desenvolvimento de arte e teatro no currículo escolar pode auxiliar no desempenho de conhecimentos da linguagem e da matemática de alunos do 7º e 8º ano do Ensino Fundamental matriculados em um distrito escolar urbano de alta pobreza. Para isso, o estudo considera a Teoria da Mudança, que emprega entendimentos em Literacia Crítica, Multi-Alfabetização modal e Transmediação. Os resultados mostraram que os alunos que receberam intervenção de artes e teatro muitas vezes superaram seus colegas relativamente à matemática e à linguagem.

A pergunta diretriz da dissertação de Sachser (2019) é: Que imagens os alunos atribuem à matemática quando atuam como autores e atores em uma peça teatral com enredo matemático? Para respondê-la, busca em seu referencial teórico compreender possíveis conexões entre matemática e teatro, amparando-se em autores como Poligicchio (2011), Machado (2009) e Tomaz e David (2008). Além disso, também é desenvolvido um projeto multidisciplinar, por meio das disciplinas de artes e de matemática, com turmas de 6º e 9º ano do Ensino Fundamental, no qual os alunos foram convidados a criar e/ou atuar em peças teatrais com enredos matemáticos. Nesse contexto, houve uma parceria com uma profissional da área de teatro que lecionou as aulas referentes a esse assunto e orientou os alunos no desenvolvimento da atividade. O estudo concluiu que as imagens da matemática apresentadas pelos alunos ao final do projeto foram de uma matemática enigmática e desafiadora.

O trabalho de conclusão de curso de Führ (2019) apresenta a seguinte questão de investigação: como a construção de peças teatrais com enredos matemáticos pode favorecer o desenvolvimento das competências: Compreensão/Expressão, Argumentação/Decisão, Contextuação/Imaginação? A pesquisa utiliza uma estética e estrutura diferenciada em seu texto, apresentando-o através de sinopse, atos, cenas e epílogo. O referencial teórico é embasado, principalmente, nos trabalhos de Zaleski Filho (2013) e Nunes (2011) sobre a história da matemática e da arte; de Lacerda (2015) e Berthold (2000) acerca das relações históricas entre matemática, teatro e ambiente escolar, e de Poligicchio (2011) relativamente ao ensino de teatro na escola e um panorama sobre as competências. Semelhante à dissertação de Sacher (2019), Führ (2019) também realizou investigações por meio da aplicação de uma proposta de atividades com o objetivo de proporcionar a construção de peças teatrais com enredos matemáticos. Nessas atividades, avaliou-se a compreensão, a expressão, a argumentação, a decisão, a contextualização e a imaginação dos alunos de 8º ano do Ensino Fundamental e concluiu-se que tais competências estavam presentes em todo o processo, influenciando na formação pessoal dos estudantes e nos papéis que desenvolveram.

O Quadro 2 faz uma síntese dos trabalhos dessa parte da revisão de literatura, organizando-os por ano, destacando os autores, títulos, ano de publicação, tipo de trabalho e a etapa escolar na qual as propostas de atividade de cada pesquisa foram desenvolvidas.

Quadro 2: Etapa escolar e área da matemática que cada pesquisa sobre matemática e teatro desenvolveu na proposta de atividade

Pesquisa científica				Etapa escolar da proposta de atividade
Autor(a)	Título	Ano	Tipo de trabalho	
Maria Braz	História da Matemática e Teatro nas aulas sobre Teorema de Tales: um script proposto	2014	Dissertação	9º ano
Rafael Inoa, Gustave Weltsek e Carmine Tabone	A Study on the Relationship between Theater Arts and Student Literacy and Mathematics Achievement	2014	Artigo	7º e 8º ano
Paula Sachser	A Procura da Fórmula: Teatro e Matemática	2019	Dissertação	6º ano e 9º ano
Lucas Führ	Matemática E Teatro: um olhar sobre o desenvolvimento de competências no processo de construção de peças teatrais com enredos matemáticos	2019	Trabalho de Conclusão de Curso	8º ano

Fonte: Construção da autora

Relativamente ao referencial teórico dos trabalhos expressos no Quadro 2, notamos a reincidência de publicações de Poligicchio no que diz respeito às possíveis conexões entre matemática e teatro. Esse tema também será tratado na nossa dissertação e buscaremos apresentar a concepção dos termos “personagem” e “esquetes” e entender como eles podem ser aplicados numa sala de aula em que se estuda matemática.

Assim como na primeira parte dessa revisão de literatura, a maioria das propostas de atividades dos estudos dessa segunda parte da revisão de literatura são para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, o que nos dá indícios de que existem poucos trabalhos que abordam teatro com estudantes que estejam em uma etapa escolar menos avançada da Educação Básica. Em todas as pesquisas apresentadas no Quadro 2 são apenas os alunos que atuam em peças teatrais, já o professor/pesquisador participa como mediador das atividades ou criador do *script*. Surge, nesse momento, outro diferencial da proposta de atividades que fazemos: aqui se pretende que tanto discente como docente interpretem personagens em esquetes para apresentar resultados matemáticos ou etapas de uma demonstração.

5 REFERENCIAL TEÓRICO

A presente dissertação busca estudar a produção de argumentação de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública em atividades de aritmética e álgebra que buscam proporcionar experiências com etapas de demonstração e com práticas teatrais. Sendo assim, decidimos dividir o nosso referencial teórico em quatro seções com o intuito de contemplar as áreas necessárias para atingirmos o nosso objetivo. Trouxemos discussões sobre percepções de argumentação, demonstração e prova bem como considerações acerca do efeito dos seus processos no ensino e aprendizagem de matemática na primeira seção. Posteriormente, apresentamos a Teoria de Registros de Representações Semióticas e como ela pode se relacionar com a matemática e seu estudo. Em seguida, tratamos dos temas teatro e práticas teatrais voltados, principalmente, à personagem e esquetes. Por fim, procuramos apresentar conexões entre as três seções mencionadas anteriormente a fim de apresentar justificativas que fundamentam a nossa proposta de atividade para a Educação Básica.

5.1 ARGUMENTAÇÃO, PROVA E DEMONSTRAÇÃO

Discutiremos, inicialmente, os significados de *argumento*, *prova* e *demonstração* para em seguida nos aprofundarmos nessa temática. Tendo em vista os trabalhos que pesquisamos nessa área, percebemos que as ideias que fundamentam o termo *argumento* são muito semelhantes. Nesta dissertação, utilizaremos o conceito oferecido por Mortari em seu livro Introdução à Lógica (2001, p. 9): “Um argumento pode ser definido como um conjunto (não vazio e finito) de sentenças, das quais uma é chamada de conclusão, as outras de premissas, e pretende-se que as premissas justifiquem, garantam ou deem evidência para a conclusão”.

Encontramos uma multiplicidade de significados associados à palavra *prova* em distintas pesquisas, fato que também foi apontado por Godino e Récio (1997) e Reid (2005). Tais pesquisadores explicam que apesar de haver divergências entre as noções, elas convergem ao explicar que a *prova* busca validar determinada afirmação por meio de argumentos. Além disso, Pietropaolo (2005) explicita que muitas vezes o termo *demonstração* é empregado como sinônimo de *prova*, sobretudo em Matemática. Por sua vez, quando se trata da Educação Matemática é comum esses termos serem diferenciados, recebendo a *demonstração* um caráter mais específico do que a *prova*. As concepções apresentadas por

Nicolas Balacheff foram citadas com mais frequência dentre as pesquisas das nossas referências.

> Nós chamamos "explicação" um discurso visando a tornar inteligível o caráter da verdade, adquirido pelo locutor, de uma proposição ou de um resultado. As razões (raciocínios) avançadas podem ser discutidas, refutadas ou aceitas.
> Nós chamamos de "prova" uma explicação aceita por uma dada comunidade num dado momento. Esta decisão pode ser o objetivo de um debate sobre o qual a significação é a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.
> No meio da comunidade matemática podem ser aceitas por provas explicações que adotam uma forma particular. Elas são uma sequência de enunciados organizados seguindo regras determinadas: um enunciado é tido como verdadeiro, ou bem, é deduzido daqueles que os precedem com a ajuda de uma regra de dedução tomada num conjunto de regras bem definidas. Nós chamamos estas provas de demonstração. (BALACHEFF, 1987, p. 147 *apud* ROSALE, 2016, p. 25)

Devido a divergências de significados para *prova*, iremos explicitar o que cada autor que será citado entende como conceito para esse termo. De acordo com Hanna (1990, p. 6, tradução nossa), uma *prova* é "uma sequência finita de sentenças, de modo que a primeira sentença é um axioma, cada uma das sentenças a seguir também o é ou foi derivada de sentenças anteriores aplicando regras de inferência, e a última sentença é a afirmação que queríamos provar". Por sua vez, Stylianides (2008, p. 11, tradução nossa) apresenta o seguinte significado para o mesmo termo:

> [...] um argumento válido com base em verdades aceitas a favor ou contra uma afirmação matemática. O termo "argumento" indica uma sequência encadeada de afirmações. O termo "válido" indica que estas afirmações são conectadas por meio de cânones aceitos como inferência correta, tais como modus ponens e modus tollens. O termo "verdades aceitas" é utilizado de forma ampla, e inclui os axiomas, os teoremas, as definições, os modos de raciocínio e os materiais representativos que uma comunidade particular pode tomar como partilhados a certa altura. Um argumento que se qualifica como prova faz uma referência explícita às verdades tomadas como "chave" que este utiliza.

Em virtude das concepções apresentadas acima e da leitura dos trabalhos de Gila Hanna e Gabriel Stylianides, entendemos que esses autores utilizam *prova* e *demonstração* como sinônimos, ainda que Hanna considere que toda demonstração inicie com um axioma, o que leva a uma imprecisão. Tendo em vista as respectivas descrições citadas, percebemos que são explicações, no sentido de Balacheff, aceitas por matemáticos. Como tais autores embasam a criação da nossa proposta de intervenção pedagógica, também utilizaremos as palavras *prova* e *demonstração* com o mesmo sentido, a saber: "A demonstração para uma afirmação matemática é todo conjunto de argumentos capazes de estabelecer a veracidade dessa afirmação em todos os possíveis casos por ela contemplados." (DOERING; RIPOLL; SILVA, 2022, p. 4).

Salientamos que o nosso foco não está diretamente na demonstração, mas no seu processo, que, segundo Hanna (1990) e Stylianides (2008), engloba identificação de padrões, formulação de conjecturas e fornecimento de argumentos válidos matematicamente.

Para muitos pesquisadores como Sowder e Harel (1998), Hanna (1995, 2000, 2016), Stylianides e Stylianides (2009), o processo de demonstração é essencial para fazer e conhecer matemática, pois possibilita justificar e/ou verificar novos ou já conhecidos resultados, mostrar a carência de melhores definições, produzir um algoritmo útil, entre outros aspectos que são importantes para o avanço dos conhecimentos matemáticos. A partir disso, tais autores defendem práticas que incentivem a responsabilidade dos alunos por sua produção matemática, ou seja, reflitam, questionem e justifiquem teoremas, fórmulas, algoritmos, regras, técnicas, propriedades e resultados matemáticos estudados. Além disso, dentre os documentos oficiais brasileiros, os PCN e a BNCC, em diversos trechos, propõem o desenvolvimento da argumentação, o raciocínio dedutivo, a lógica e a demonstração na Educação Básica. (BRASIL, 1998, p. 26, 37, 47, 48, 53, 56 e 63; Brasil, 2018, p. 221, 531, 540, 541).

Para Mata-Pereira e Ponte (2011); Hanna (2016), Matheus (2016), incentivar a postura mencionada anteriormente nas salas de aulas de matemática não é uma tarefa fácil para professores e professoras e podem surgir diferentes tipos de argumentação matemática. De acordo com Lannin (2005), as argumentações podem ser divididas em cinco níveis de complexidade de acordo com o Quadro 3.

Quadro 3: Níveis de complexibilidade de argumentações segundo Lannin (2005)

Nível de Argumentação	**Descrição**
Nível 0: Não justificar	Argumentações irrelevantes ou que mostram um envolvimento mínimo do discente com a afirmação que deseja justificar.
Nível 1: Apelar à autoridade externa	A argumentação faz referência à exatidão declarada por indivíduo ou material de referência, por exemplo, professor ou livro didático.
Nível 2: Utilizar evidência empírica	Os argumentos apresentados são baseados em casos particulares.
Nível 3: Utilizar de um exemplo genérico	A argumentação é dedutiva, entretanto não constitui uma demonstração para a afirmação em consideração.
Nível 4: Justificar dedutivamente	A argumentação elaborada é baseada nas regras de dedução matemática e é considerada uma demonstração.

Fonte: Adaptado de Lannin (2005, p. 238).

Os níveis de complexibilidade de argumentações apresentadas por Lannin (2005) aproximam-se das categorias criadas por Stylianides e Stylianides (2009), expressas no Quadro 4. Mais especificamente, percebemos correspondências entre o Nível 0 e a categoria M5; o Nível 2 e a categoria M4, ambos semelhantes ao que Balacheff (1987) denomina “empirismo ingênuo” e ao que Sowder e Harel (1998) chamam de “justificativa empírica”; o Nível 3 e a categoria M2; e o Nível 4 e a categoria M1. Além disso, notamos que a categoria M3 não apresenta correlação com algum nível de complexibilidade de argumentações de Lannin (2005) e o Nível 1 engloba a categoria M5 de Stylianides e Stylianides (2009). Exemplos de cada um das classificações do Quadro 4 podem ser encontrados em Doering, Ripoll e Silva (2022).

A categorização criada por Stylianides e Stylianides (2009) classifica as argumentações dos estudantes na tentativa de desenvolverem uma prova para uma afirmação matemática. As categorias expressas no Quadro 4 são utilizadas na análise das argumentações desenvolvidas e apresentadas em contexto grupal pelos alunos durante a intervenção pedagógica.

Quadro 4: Categorias de complexibilidade de argumentação de Stylianides e Stylianides (2009)

Categorias de argumentação	**Descrição**
M1: Prova	A argumentação elaborada pelo estudante é baseada nas regras de dedução matemática, e cada etapa de dedução é devidamente justificada. As afirmações apresentadas, além de corretas, estão devidamente justificadas e cobrem todos os casos contemplados pela afirmação a ser provada, constituindo, assim, uma demonstração para a mesma.
M2: Argumento geral válido, mas que não constitui uma demonstração para a afirmação em consideração.	Os argumentos do estudante também são baseados em dedução matemática correta e apresentam generalizações, entretanto não constituem uma demonstração para a afirmação em consideração porque faltam justificativas que apoiem as deduções matemáticas apresentadas; não estão contemplados todos os possíveis casos abarcados na hipótese da afirmação ou a afirmação em questão estabelece uma equivalência, porém só foi apresentada a demonstração de uma das implicações que a compõem.
M3: Tentativa malsucedida de um argumento geral válido	A argumentação mostra uma linha lógica, porém, na sua construção, existem argumentos gerais inválidos ou argumentos incompletos.
M4: Argumento empírico	Argumentos que se apoiam exclusivamente em um ou alguns dos casos contemplados pela afirmação, sem dar conta de todos os casos.
M5: Argumento não genuíno	Argumentações irrelevantes ou que mostram um envolvimento mínimo do discente com a afirmação a ser demonstrada ou, ainda, argumentos potencialmente relevantes, cuja relevância, porém, não foi explicitada pelo aluno.

Fonte: Adaptado de Doering, Ripoll e Silva (2022, pp. 6-8)

Stylianides (2008) denomina *Reasoning-and-Proving* (RP) as abordagens (englobando aqui práticas pedagógicas, atividades em livros didáticos, etc.) que possibilitem desenvolver raciocínio e demonstração, isto é, que geram possibilidades para o aluno realizar experimentações heurística, identificar padrões, formular conjecturas, fornecer argumentações matemáticas e construir provas. A utilização da expressão hifenada é utilizada para ressaltar que o processo de demonstrar é muito maior do que a demonstração em si, pois engloba também a exploração empírica, a generalização, o refinamento, a explicação e, por fim, a demonstração em si.

Hanna (1990, 1995, 2016) afirma que existem demonstrações que podem oportunizar raciocínios fundamentais para uma maior compreensão e significado ao conteúdo estudado e que é este tipo de demonstrações que deve ser incentivada em sala de aula. Dessa forma, a autora denomina de “provas explicativas” aquelas provas que mostram, em seu desenvolvimento, uma explicação que destaca a razão de determinadas afirmações matemáticas serem verdadeiras, com o intuito de exemplificar tal definição. E em Hanna (1990) é apresentado um exemplo desse tipo de demonstração (Figura 1). Além disso, a autora ressalta que uma mesma sentença pode ser passível de demonstrações distintas (algébrica, geométrica, combinatória e sem simbologia matemática, por exemplo) todas com o mesmo grau de aceitação na matemática. A escolha do docente sobre as demonstrações que devem ser levadas para a sala de aula envolve uma reflexão sobre quais podem facilitar a compreensão dos alunos relativamente aos temas estudados. Para isso, ele deve identificar as que sejam suficientemente explicativas para atingir os seus propósitos didáticos e quais conhecimentos são necessários ensinar aos discentes para que compreendam o tema.

Figura 1: Exemplo de demonstração explicativa

A soma dos primeiros n números naturais não nulos é igual a $\frac{n\times(n+1)}{2}$

<u>Demonstração</u>:

Seja S a soma dos primeiros n números naturais não nulos, ou seja,

$S = 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n$.

Pela propriedade comutativa da adição, a ordem das parcelas não altera a soma. Dessa forma, S também pode ser escrito como:

$S = n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1$.

Somando, parcela a parcela das duas formas de escrita de S temos:

$$\begin{array}{lcccccccccccc} S = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \ldots + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \ldots + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \end{array}$$

$2S = \boldsymbol{n+1} + (\boldsymbol{n}-1)+2 + (\boldsymbol{n}-2)+3 + \ldots + 3+(\boldsymbol{n}-2) + 2+(\boldsymbol{n}-1) + 1+\boldsymbol{n}$

$2S = (\boldsymbol{n}+1) + (\boldsymbol{n}+1) + (\boldsymbol{n}+1) + \ldots + (\boldsymbol{n}+1) + (\boldsymbol{n}+1) + (\boldsymbol{n}+1)$

Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação perante a adição, ou seja, evidenciando o termo $(\boldsymbol{n}+1)$ temos:

$$2S = (\boldsymbol{n}+1)\,(\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + 1}_{\boldsymbol{n}\text{ parcelas}})$$

Portanto, $2S = (\boldsymbol{n}+1) \times \boldsymbol{n}$. Dividindo ambos os lados da equação pelo número 2, chegamos na fórmula desejada

$$\frac{2S}{2} = \frac{(\boldsymbol{n}+1)\times \boldsymbol{n}}{2} \Leftrightarrow \boxed{S = \frac{(\boldsymbol{n}+1)\times \boldsymbol{n}}{2}}$$

Fonte: Adaptado de Hanna (1990, p.10).

De acordo com Hanna (1990), a demonstração apresentada na Figura 1, conhecida por ter sido elaborada por Gauss na Educação Básica, é explicativa, pois usa a propriedade comutativa da soma para mostrar a razão da afirmação ser verdadeira e expressa, de forma evidente, a sua necessidade no processo.

Notare e Basso (2018, p.1) destacam que não defendem o trabalho com provas matemáticas que envolvem o excesso de rigor, mas que promovam o processo de demonstração como ferramenta essencial para a compreensão da Matemática. Concordamos com esses autores e ainda destacamos que nem todos os resultados trabalhados na Escola Básica devem e/ou podem ser demonstrados na sala de aula. A existência e a irracionalidade de π são dois exemplos disso, visto que a complexidade dessas demonstrações vai além do conhecimento de matemática que os alunos dessa etapa escolar adquirem.

Dessa forma, assim como muitos dos pesquisadores citados nessa seção, defendemos o incentivo à argumentação matemática e à construção de provas explicativas na escola que possibilitem uma melhor compreensão do fenômeno estudado.

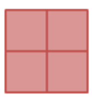
5.2 TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Nesta seção, apresentamos a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (1993, 1995, 2004, 2006, 2011, 2017) com o intuito de mostrar a complexidade de compreender matemática e possibilidades para que seja possível uma maior compreensão dessa ciência.

Duval (1993) afirma que, diferentemente de outras ciências, nas quais os fenômenos são observáveis, na matemática os objetos são construções mentais, ou seja, abstratos e só são conhecidos por meio de suas representações. Dessa forma, a relação entre o objeto e suas variadas representações deve ser levada em conta no ensino e aprendizagem de matemática para possibilitar a compreensão de tais objetos. Essa afirmação tange toda a Teoria de Registros de Representação Semiótica.

De acordo com Duval (2011), as *representações semióticas* são aquelas realizadas de modo intencional e independente de ações do objeto em um sistema físico. Sua produção exige um trabalho de elaboração que leva um determinado tempo. A fala, a escrita e o desenho são exemplos desse tipo de representação. As representações semióticas são “um meio de exteriorização de representações mentais para comunicação” e “essenciais à atividade cognitiva do pensamento.” (DUVAL, 2011, p. 269). Já os *registros* são considerados pelo autor como sistemas semióticos criadores de novos conhecimentos. Ele deve “poder produzir representações que permitam tanto ter acesso a objetos perceptivamente ou instrumentalmente inacessíveis, como explorar tudo o que é possível”. (DUVAL, 2011, p. 97). Além disso, os registros devem abrir um espaço de operações específicas que possibilitem transformar as representações produzidas em outras, por meio de *tratamentos* e/ou *conversões*. No Quadro 5, por exemplo, há três representações distintas para o mesmo objeto matemático: o número quatro. Cada representação coloca em vista uma perspectiva diferente do objeto em questão.

Quadro 5: Representações distintas para o mesmo objeto matemático

Representação	Tipo de representação
4	Sistema decimal
2×2	Aritmética
	Pictórica (em arranjos retangulares)

Fonte: Construção da autora

Duval (2002, 2006) denomina de *tratamentos* as transformações de representação que ocorrem dentro de um mesmo registro, um exemplo disso é a resolução de uma equação em um dado sistema de notação. Já as *conversões* consistem nas transformações que mudam de registro semiótico de representação; a passagem de um registro na língua materna para um registro algébrico é um exemplo desse tipo de transformação.

Os registros são relevantes para a matemática, pois, por meio deles, é possível operar com os seus objetos. Duval (2017) divide os registros em quatro tipos: as declarações em língua natural, as equações (fórmulas escritas que combinam letras de variáveis, símbolos de operações e um símbolo relacional), a visualização geométrica e a visualização analítica em sistemas de coordenadas. As duas primeiras produzem expressões como, por exemplo, palavras, letras e números, ou seja, estão associadas às representações discursivas. Já as duas últimas correspondem aos dois tipos de visualização das relações entre conjuntos de elementos, logo, estão relacionadas às representações visuais. O autor explica que os registros são utilizados para calcular, deduzir, demonstrar e modelar.

As representações semióticas dos objetos matemáticos são de extrema importância, visto que é através delas que tais assuntos tornam-se compreensíveis pela percepção humana. O autor afirma que um mesmo objeto matemático pode ter representações distintas, dependendo da sua necessidade e do seu uso. O Quadro 5 apresenta um exemplo de um objeto matemático, o número 4, representado de três formas distintas. Duval (1995) vai além e esclarece que uma única representação sobre determinado objeto matemático não garante aprendizagem desse objeto, sendo necessário, pelo menos, duas representações.

> Isso porque, do ponto de vista cognitivo, nenhuma representação é completa em relação ao objeto que representa, ou seja, cada representação revela um determinado conceito, uma determinada propriedade, enfim, uma diferente característica. (DENARDI, 2017, p. 6)

“Compreender matemática é, desde já, não somente reconhecer os objetos matemáticos quando se muda de representação semiótica na mudança de registro, como também poder por si mesmo mudar de registro para mudar a representação dos objetos” (DUVAL, 2017, p.21). Assim, para que isso seja possível e para que haja compreensão é necessário ser capaz de diferenciar o objeto de suas representações como também transitar entre elas por meio de tratamentos e de conversões.

Relativamente à álgebra e os seus registros de representações semióticas, Duval, Barros e Dias (2015, p.7) afirmam:

> Em primeiro lugar, o que denominamos com frequência "álgebra" se encontra historicamente com a *utilização de letras* para efetuar cálculos. Mas, do ponto de

> vista matemático, não é suficiente recorrer a esse novo tipo de representação semiótica dos números e das grandezas para fazer álgebra.

Segundo Duval, Barros e Dias (2015), a utilização das letras no lugar dos números possibilitou o desenvolvimento de um novo registro de representação que oferece meios de tratamentos específicos, que em outros registros não seria possível. Nesse sentido, a álgebra tem um papel relevante referente à resolução de problemas em distintos domínios da matemática. Por outro lado, apesar do registro das escritas simbólicas ser diferente da língua natural, ele também possibilita fazer operações discursivas, visto que “ele permite designar os objetos articulando as letras e os números com a ajuda de símbolos de operações” (DUVAL; BARROS; DIAS, 2015, p.53). Os objetos que os autores referem podem ser números, conjuntos de números, grandezas, listas abertas de números, ou, até mesmo, outros objetos matemáticos que podem ou não estar relacionados entre si. Do ponto de vista didático, Duval, Barros e Dias (2015) explicitam alguns objetivos relativos à utilização álgebra em sala de aula para resolver problemas:

- Tornar o recurso às letras necessário para resolver um problema que diz respeito a uma quantidade desconhecida;
- Colocar na forma de equação;
- Descobrir as letras como variáveis.

Os problemas aritméticos ou aqueles construídos na evocação de uma situação do dia a dia podem ser utilizados para atingir o primeiro objetivo. Relativamente ao segundo objetivo, os autores afirmam que outras operações cognitivas são necessárias, como, por exemplo, não confundir uma expressão literal e uma equação. No que diz respeito ao último objetivo apresentado, “Um salto é dado quando as letras não são mais introduzidas para designar um número desconhecido, mas como *uma função de generalização*” (DUVAL; BARROS; DIAS, 2015, p.45). Na observação da resolução de problemas com os objetivos mencionados em sala de aula, os autores constataram que quase sempre os alunos adotaram a estratégia por tentativas numéricas sucessivas e não consideraram necessário recorrer às letras. Em virtude desses fatos, as atividades que propomos nesta dissertação possuem o terceiro objetivo em vista e buscam trazer as representações pictóricas, por meio de arranjos retangulares, como ferramenta principal que pode ser associada às representações algébricas e possibilitar maior compreensão para o significado das letras nesse tipo de registro.

5.3 PRÁTICAS TEATRAIS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Segundo o artigo 205 da Constituição Federal de 1988 e o artigo 2º da LDB de 1996, a educação brasileira tem três finalidades essenciais: o pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. De acordo com Pereira (2017, p.13) a representação teatral proporciona "o questionamento, o pensar, o desenvolvimento da socialização e da comunicação entre os envolvidos, valoriza o desenvolvimento do ser, explorando não apenas conhecimentos, mas despertando emoções e levando o indivíduo a lidar com elas". Dessa forma, as práticas teatrais possuem um grande potencial educacional, pois as capacidades que incentiva são relevantes para atingir os objetivos primordiais da Educação Básica segundo os documentos oficiais.

Peixoto (1986) salienta que o *teatro* vive em constante transformação e considera uma tarefa difícil atribuir-lhe um significado. Entretanto, o autor apresenta a seguinte definição que iremos adotar para esta dissertação:

> Um espaço, um homem que ocupa este espaço, outro homem que o observa. Entre ambos, a consciência de uma cumplicidade, que os instantes seguintes poderão até atenuar, fazer esquecer, talvez acentuar: o primeiro, sozinho ou acompanhado, mostra um personagem e um comportamento deste personagem numa determinada situação, através de palavras ou gestos, talvez através da imobilidade e do silêncio, enquanto que o segundo, sozinho ou acompanhado, sabe que tem diante de si uma reprodução, falsa ou fiel, improvisada ou previamente ensaiada, de acontecimentos que imitam ou reconstituem imagens da fantasia ou da realidade. O primeiro, ou os primeiros, são movidos por um impulso criativo que incorpora emoção e razão num ato de desenfreada ou controlada entrega, celebrando um ritual quase místico de epidérmica necessidade, ou exercendo a rigorosa tarefa de uma profissão complexa e densa. Enquanto o segundo, ou os segundos, assistem passiva ou ativamente, entorpecidos por uma magia que os envolve numa cerimônia que faz fugir da própria realidade para o mergulho num universo de encantamento ou mentira ou ilusão, ou, ao contrário, aprofundam o conhecimento lúcido e crítico da própria realidade que os cerca, engravidando-os de um prazer capaz de torná-los mais conscientes e mais vigorosos enquanto homens racionais, dotados da possibilidade de agir e dominar as forças da natureza e da sociedade, transformando as relações entre os homens na necessária urgência de construir democracia e liberdade. (PEIXOTO, 1986, p. 5-6)

Para Poligicchio (2011, p.7) "o Teatro, originário da Grécia antiga, surge ao lado da consciência de que todos nós representamos papéis no decorrer de nossas vidas: somos filhos, pais, funcionários, empregadores, clientes, vizinhos, religiosos, partidários etc.". A autora explica que é da própria condição humana a necessidade da fuga da realidade e o teatro foi uma alternativa encontrada para esse fim.

Pina (2020) explica que cada autor possui uma forma de criação de personagem, porém há métodos que podem auxiliar nesse processo e apresenta um. Inicialmente, deve-se focar no que existe de mais profundo para definir a personagem, sua essência e qualidades, primeiro dar-lhe uma alma e depois um corpo. Só após registrar a etapa anterior, deixar outras características virem, como, por exemplo, cor dos olhos, altura, cor da pele, sexo, etc. O passo seguinte é identificar os seus defeitos, falhas e fraquezas para equilibrar a personagem ou para serem gatilhos que causem conflitos nas histórias. Por fim, é necessário dar um propósito à personagem, pensar em como o transmitir e quais obstáculos serão ultrapassados para atingi-lo.

Relativamente à construção do personagem pelo autor, Moehlecke e Fonseca (2008) explicam que há experimentação de possibilidades do corpo, pois para interpretar, muitas vezes, “São outros modos de ser, de gesticular, de agir, de falar e de compor diálogos”. (MOEHLECKE; FONSECA, 2008, p. 477). Dessa forma, o ser que compõe o ator é diluído e, no seu lugar, nasce um novo ser.

Obry (1956) afirma que o teatro está em toda a parte, dentro e fora de cada um, misturado com nossas atitudes e observações. Apesar disso, Fischer (2012) e Japiassu (2003) afirmam que, muitas vezes, práticas teatrais não são encontradas nas escolas. De modo geral, o ensino das artes é visto por muitos membros da comunidade escolar (englobando aqui: professores, funcionários, alunos e responsáveis legais dos estudantes) como algo dispensável ou luxuoso.

De acordo com Dalcin (2004) a continuação ou inicialização do uso de práticas teatrais nas disciplinas escolares é uma maneira de aproximar os estudantes do ensino da área em questão, em especial da matemática. Para Pereira (2017), mecanismos do teatro possibilitam entretenimento, conhecimento, interação e criatividade. Reverbel (1979) acrescenta dizendo que essas capacidades podem desenvolver a área cognitiva e também afetiva do ser humano. Sendo assim, a aplicação das práticas teatrais nas salas de aula apresenta um potencial para uma formação mais ampla do estudante.

Peluso, Schlosser, Artigas e Wilhelm (2019) explicam que há diversas formas de fazer teatro, entre elas, o esquete, uma peça de curta duração com reduzido grupo de pessoas que transmitem, pelas suas expressões e gestos, um assunto definido, tendo ou não um cenário apropriado. Schlosser (2014) aponta que essas características do esquete fazem com que seja mais acessível para ser desenvolvido em sala de aula como um instrumento didático-pedagógico, pois pode ser realizado em grupos de alunos; não demanda tanto tempo de preparo e realização quanto formas de fazer teatro mais complexas; muitos estudantes já estão familiarizados com a sua estrutura, visto que comumente ela aparece em programas de televisão, internet e rádio. Além disso, a elaboração e encenação do esquete possibilita aprimorar elementos como a expressão facial e corporal, interpretação e criatividade, dicção e teoria, sabedoria, e o trabalho em grupo.

Relativamente à matemática, Poligicchio (2011, p.80) argumenta:

> As abstrações de conceitos, valores e ideias contidos na trama tomam vida no espetáculo teatral, de forma que parecem reais. O ator não parece ator, parece ser o seu personagem. Essa transfiguração por meio da metáfora, ou do “ser como” torna o ser algo que ele não é, mas algo que ele representa. Se a narrativa contiver um conceito, ideia, conteúdo ou raciocínio matemático (todos naturalmente pertencentes ao campo das abstrações), eles se materializam na cena e deixam de ser “tão abstratos”, pois ganham vida por meio do contexto teatral.

A autora aprofunda a sua consideração afirmando, a título de exemplo, que muitos problemas matemáticos utilizam o rigor da linguagem matemática na descrição e resolução, o que exige um maior grau de abstração para imaginar as possibilidades de soluções, e que práticas teatrais, como atuação ou narração, podem auxiliar na visualização (concreta, através da atuação ou imaginária, através da narração) do problema, deixando-o mais acessível aos diferentes níveis de maturidade matemática dos alunos.

De modo geral, “O Teatro é um palco propício para o desenvolvimento da imaginação, extrapolação e abstração. O estudo da matemática exige tais capacidades para resolução de problemas, aplicação de algoritmos e raciocínios algébricos, geométricos, dentre outros.” (POLIGICCHIO, 2011, p. 12). Dessa forma, práticas teatrais podem ser utilizadas como uma ferramenta didática útil que auxilia no aprendizado de matemática dos alunos.

5.4 DEMONSTRAÇÃO, PRÁTICAS TEATRAIS E TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Nesta seção abordamos algumas considerações e reflexões realizadas por nós acerca da Teoria de Registro de Representação Semiótica com as demonstrações e com as práticas teatrais. Campos e Ponte (2022, p. 680) explicitam que “a demonstração possui um papel central no raciocínio “tipicamente” matemático” e Mata-Pereira e Ponte (2011) articulam raciocínio, representações e significação para desenvolver um quadro conceitual a analisar o raciocínio matemático dos estudantes. De forma semelhante a essas pesquisas, buscamos aqui associar as representações com as demonstrações, porém com um objetivo diferente. O intuito dessa seção é explicitar as potencialidades pedagógicas das demonstrações, por meio das suas representações, utilizando práticas teatrais.

Os objetos matemáticos e os teoremas possuem características semelhantes, no seguinte sentido: enquanto o primeiro pode possuir distintas formas de ser representado, o segundo pode ser passível de diferentes demonstrações (geométrica, combinatória, algébrica, ou até sem uso de simbologia matemática). Essas demonstrações podem utilizar mais de um registro de representações semióticas em seu desenvolvimento e, por isso, podem ser utilizadas com o intuito de trabalhar com mais de uma representação, incentivando, também, a transição entre uma e outra. Para exemplificar, nesta seção vamos recorrer a uma demonstração algébrica e pictórica, para a proposição: a soma de dois números ímpares é sempre um número par.

Inicialmente vamos apresentar a representação pictórica para expressar número par e ímpar, como ilustrado no Quadro 6, no qual  representa uma unidade e as "..." indicam que há um número qualquer de duplas (isto é, duas unidades) neste arranjo.

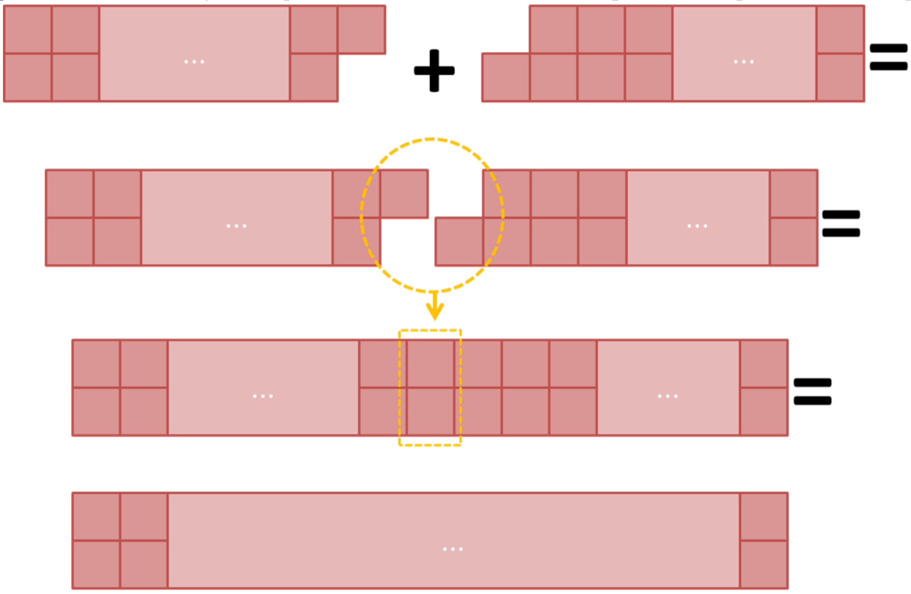
Quadro 6: Representação na língua materna e pictórica de número par e de número ímpar

Representação na língua materna	**Representação Pictórica**
Um número natural é par se a quantidade representada por ele pode ser agrupada em duplas sem sobrar uma unidade.	
Um número natural é ímpar se a quantidade representada por ele puder ser agrupada em duplas e sobrar uma unidade.	

Fonte: Construção da autora.

Considerando que a adição tem o significado de juntar, na Figura 2 apresentamos uma demonstração para a proposição da soma de dois números ímpares é sempre um número par.

Figura 2: Demonstração de que a soma de dois números ímpares é sempre um número par



Fonte: Construção da autora

Uma animação para o esse exemplo também foi criada pela autora desta dissertação e disponibilizada no *YouTube*, ela pode ser acessada no seguinte *url*: https://youtu.be/ycWRQmqXMUQ. Consideramos que essa demonstração pode ser trazida e/ou desenvolvida com alunos dos anos iniciais da Educação Básica, pois ao não utilizar linguagem simbólica matemática, ela pode possibilitar discussões acerca de como representar números pares e ímpares, do significado das reticências, de como realizar operações com arranjos retangulares, entre outros. Além disso, consideramos essa demonstração explicativa no sentido do Hanna (1990. 1995), pois ela mostra a razão desta proposição ser verdadeira.

Cabe ressaltar que todo número natural par pode ser representado na forma $2{\times}n$ e todo número natural ímpar na forma $2{\times}n{+}1$, sendo n um número natural. Assim, queremos demonstrar que $(2{\times}a{+}1) + (2{\times}b{+}1) = 2{\times}c$, sendo a, b números naturais dados e c um número natural a determinar. A seguir apresentamos uma demonstração algébrica da proposição em questão:

Partindo da adição $(2{\times}a{+}1) + (2{\times}b{+}1)$ e utilizando as propriedades associativa e comutativa da adição de números naturais, podemos escrever a expressão da seguinte maneira:

$$2{\times}a + (1{+}1) + 2{\times}b = 2{\times}a + 2 + 2{\times}b.$$

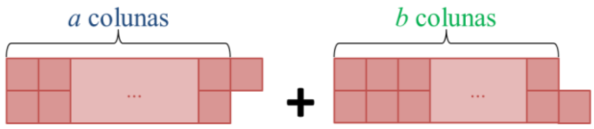
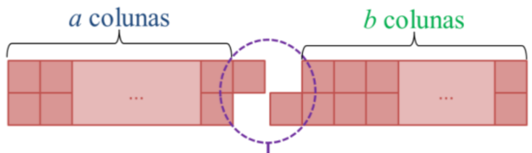
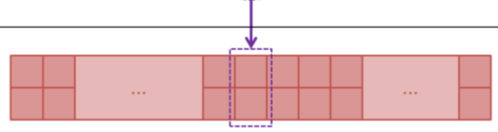
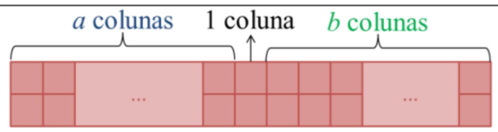
Pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, temos que:

$$2{\times}a + 2{\times}b + 2 = 2{\times}(a{+}1{+}b).$$

Como (a+1+b) é a soma de três números naturais a, b e 1, é ela também um número natural. Assim, tomando c = a+b+1 temos que (2×a+1)+(2×b+1)=2×c, ou seja, (2a+1)+(2b+1) tem a forma de um número par.

Tanto a demonstração pictórica como a demonstração algébrica são consideradas demonstrações, pois apresentam uma argumentação genérica, englobando todos os casos, que comprova a veracidade da sentença. Além disso, podemos relacioná-las de acordo com o Quadro 7.

Quadro 7: Demonstração algébrica e pictórica de "a soma de dois números ímpares é um número par"

1º		$(2\times a+1)+(2\times b+1)$
2º		$2\times a+(1+1)+2\times b$
3º		$2\times a+2+2\times b$
4º		$2\times (a+1+b)$
5º		$2\times c$

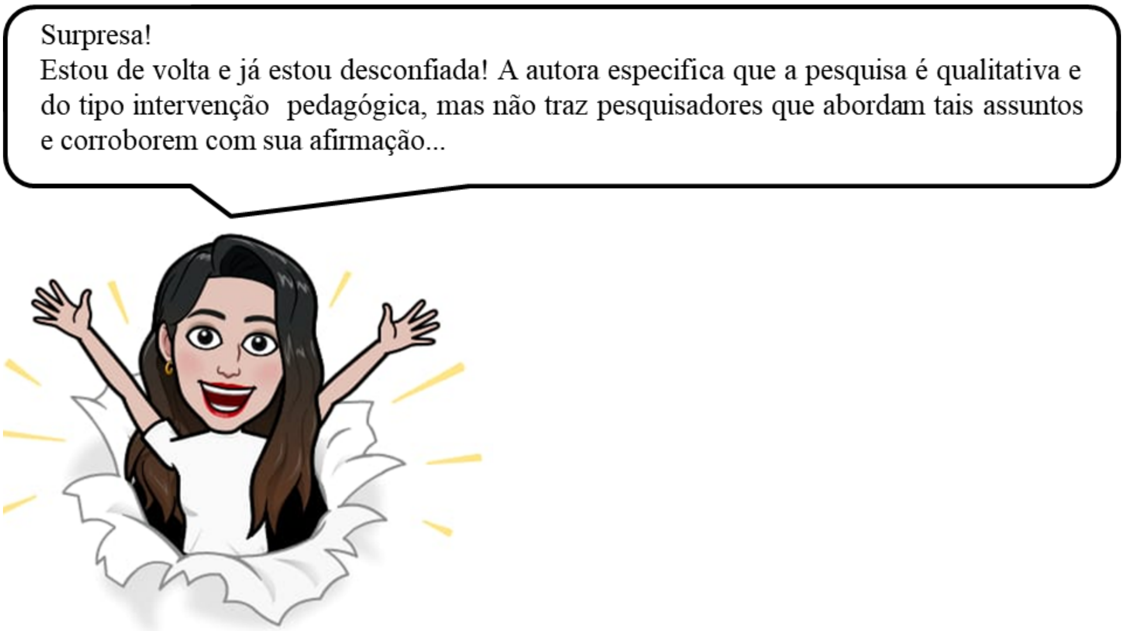
Fonte: Construção da autora

Cabe ressaltar que os passos podem ser relacionados, por exemplo. Podemos dizer que a demonstração pictórica pode auxiliar na compreensão da demonstração algébrica, uma vez que ela é uma visualização figural de algumas das etapas. Dessa forma, trabalhar com demonstrações que utilizam mais de uma representação semiótica pode auxiliar no aprendizado de matemática.

O desenvolvimento de peças e esquetes teatrais também pode ser relacionado com a Teoria de Registros de Representações Semióticas, visto que, o seu processo pode incentivar transformações, por meio de tratamento e conversões para a língua materna. Por exemplo, no desenvolvimento do roteiro e na apresentação dos esquetes, é possível, por meio da linguagem materna escrita ou oral, expressar concepções sobre o tema matemático estudado.

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa é qualitativa e do tipo intervenção pedagógica, pois procura realizar um exame intensivo, aprofundado e amplo de situações e comportamentos de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública em atividades, elaboradas por nós, que buscam desencadear processos de aprendizagem que levem à construção de argumentos e/ou demonstrações por meio de práticas teatrais com esquete e personagem.



De fato, a caracterização para a presente pesquisa se mostra coerente tendo em vista as definições de Martins (2004, p. 292) para metodologias qualitativas:

> [...] as chamadas metodologias qualitativas privilegiam, de modo geral, a análise de microprocessos, através do estudo das ações sociais individuais e grupais. Realizando um exame intensivo dos dados, tanto em amplitude quanto em profundidade, os métodos qualitativos tratam as unidades sociais investigadas como totalidades que desafiam o pesquisador. Neste caso, a preocupação básica do cientista social é a estreita aproximação dos dados, de fazê-lo falar da forma mais completa possível, abrindo-se à realidade social para melhor apreendê-la e compreendê-la.

Nesse sentido, entendemos que na nossa pesquisa, o microprocesso corresponde ao desenvolvimento da sequência de atividades aplicada em uma sala do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola e as ações sociais individuais e grupais se dão na forma como cada aluno e/ou grupo de estudantes atuam no decorrer das tarefas relativas à aritmética e álgebra.

No que diz respeito às pesquisas do tipo intervenção pedagógica, Damiani et al. (2013, p. 58) as definem como “investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências”. O nosso estudo se enquadra nessa definição e, devido a sua amplitude em virtude da demanda por métodos e descrição, Damiani et al. (2013) sugerem dois componentes metodológicos: o método da intervenção e o método de avaliação da intervenção. Tendo esse fato em vista, iremos apresentar duas subseções nos procedimentos metodológicos que contemplem tais componentes.

Destacamos que esta pesquisa tomará os cuidados éticos inerentes à pesquisa acadêmica, tendo como ações norteadoras:

a) Apreciação e aprovação deste projeto pela Comissão de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul;

b) Carta de apresentação encaminhada à Secretaria Municipal de Educação de Parobé/RS, para que a pesquisadora possa se dirigir às escolas e participar das formações promovidas pela mantenedora como pesquisadora (Apêndice A – Carta de apresentação à mantenedora das escolas);

c) Autorização da escola participante por meio da assinatura do Termo de Consentimento Institucional (Apêndice B – Termo de Consentimento Institucional);

d) Autorização dos responsáveis dos estudantes por meio da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice C – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido);

e) Autorização dos alunos por meio da assinatura do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (Apêndice D – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido);

f) Cuidado nas descrições e interpretações para que não gerem prejuízo moral às instituições e aos participantes da pesquisa;

g) Compromisso com a utilização e divulgação dos resultados encontrados a todos os envolvidos durante o período de execução da pesquisa (Apêndice E – Termo de Compromisso de Utilização de Dados);

h) Explicitação aos participantes dos riscos e benefícios de participar da pesquisa, os quais foram avaliados como sendo:

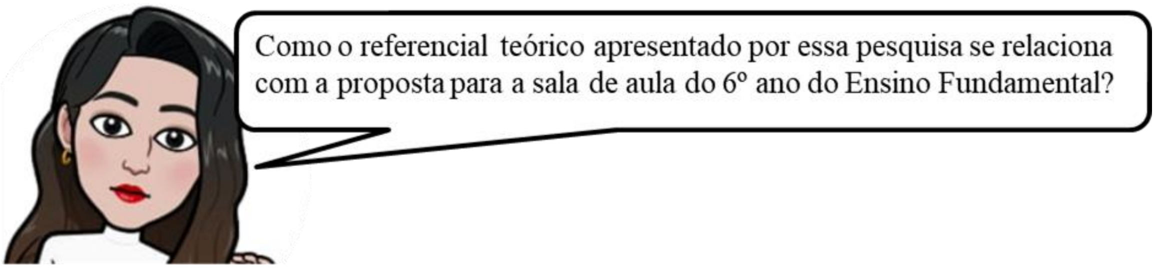
- Riscos: Pode haver desconforto com práticas abertas, incômodo com o trabalho em grupo, constrangimento na expressão teatral e dificuldades em compreender ou argumentar em tópicos de matemática. Na recorrência de qualquer circunstância desse tipo, os estudantes receberão todo o apoio da professora/pesquisadora no sentido de minimizar os riscos mencionados. Além disso, os participantes podem desistir a qualquer momento da participação com a pesquisa.
- Benefícios: O participante poderá aprimorar a sua argumentação matemática, fortalecer seu relacionamento interpessoal e intrapessoal, aperfeiçoar sua comunicação e expressão, bem como contribuir para o desenvolvimento de uma pesquisa na área de Ensino de Matemática.

A intervenção pedagógica será aplicada a toda turma, porém só serão analisados os dados dos participantes que apresentarem todos os documentos de autorização mencionados anteriormente.

Ressaltamos que utilizaremos as seguintes ferramentas para a coleta de dados: diário de bordo, questionário, fotografias dos apontamentos dos estudantes, filmagem e gravação de áudio para registrar os dados da pesquisa.

6.1 METODOLOGIA DE INTERVENÇÃO

Desenvolvemos, implementamos e analisamos uma intervenção pedagógica com o intuito de trabalhar com questões de aritmética e álgebra no conjunto dos números naturais em uma sala de aula de uma escola pública de Parobé/RS com alunos de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental.



Estruturamos a intervenção de forma que a abordagem fosse englobada no Reasoning-and-Proving de Stylianides (2008), ou seja, que criasse possibilidades para que os alunos possam experienciar todas as etapas para a construção de uma prova (experimentação heurística, identificação de padrões, formulação de conjecturas, construção de argumentos gerais válidos e desenvolvimento de uma demonstração). Para isso, apresentamos os arranjos retangulares, mostrando que podemos utilizá-los, em casos específicos, para representar números e multiplicação com dois fatores. Em seguida, partimos para a generalização, apresentando formas de representar múltiplos e não múltiplos de um número dado. Também exploramos a operação de adição entre esses casos gerais, buscando identificar propriedades e demonstrá-las. Por fim, de maneira mais autônoma, os estudantes foram convidados a demonstrar uma proposição relativa à paridade da soma de números naturais consecutivos com uma quantidade de parcelas dada.

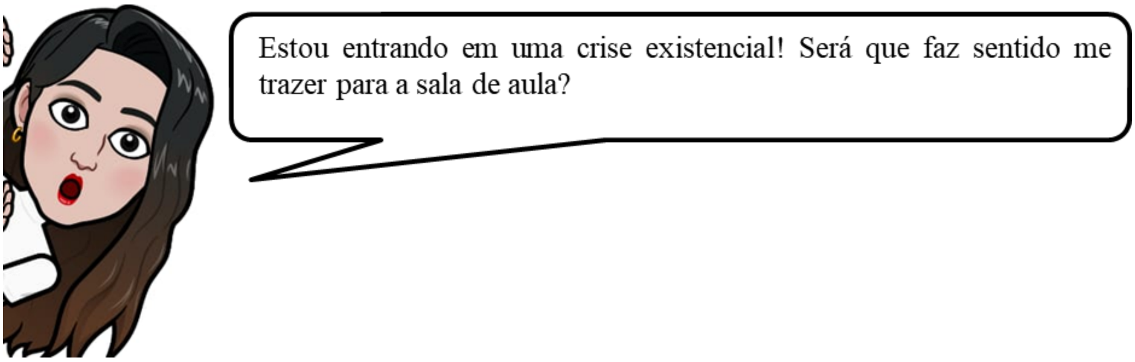
Ressaltamos que na escolha das atividades propostas aos estudantes, consideramos as recomendações de Hanna (1990) sobre provas explicativas. Assim, todas as demonstrações apresentadas e solicitadas aos alunos mostram explicitamente em seu desenvolvimento a razão que leva à conclusão sobre a veracidade da conjectura.

Durante a intervenção pedagógica dividimos os alunos em grupos com cerca de quatro alunos, tendo em vista que, de acordo com Marques (2009), a comunicação em contextos grupais, se fluida, livre e espontânea entre os membros do grupo, contribui para aumentar a coesão de pensamento e ação. Além disso, o autor aponta que discussões que surgem de maneira paralela à reflexão grupal podem permitir que alguns integrantes do próprio grupo externem um pensamento divergente que pode gerar polêmica e debate, trazendo mais contribuições que possibilitem uma maior consistência nas conclusões.

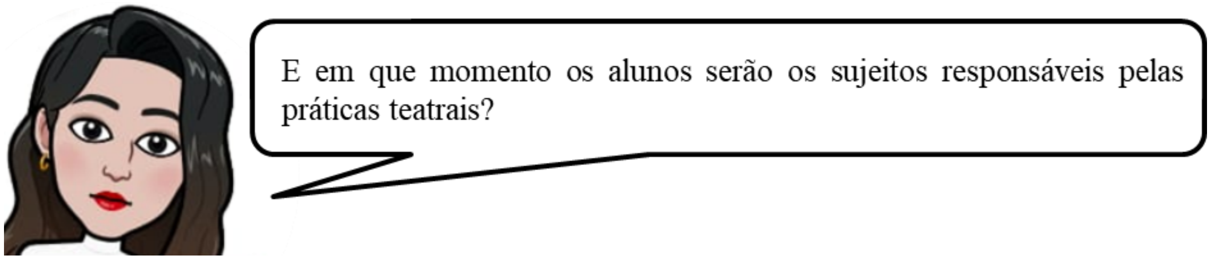
As atividades seguem as orientações apresentadas em Stylianides e Stylianides (2010), propondo assim, um equilíbrio entre argumentos empíricos e provas. Em nossa proposta, buscamos utilizar os argumentos empíricos como suporte inicial na exploração e abandoná-los aos poucos para dar espaço aos argumentos matemáticos e às provas explicativas (no sentido de Hanna (1990, 1995)), procurando instigar o aluno a desenvolver raciocínio matemático.

As demonstrações apresentadas aos estudantes recorrem a distintos registros de representações semióticas, principalmente representações pictóricas (por meio de arranjos retangulares), representações aritméticas e representações algébricas, para possibilitar de acordo com (DUVAL 2002, 2006) conversões e tratamentos dos objetos matemáticos, propiciando uma maior compreensão do fenômeno estudado.

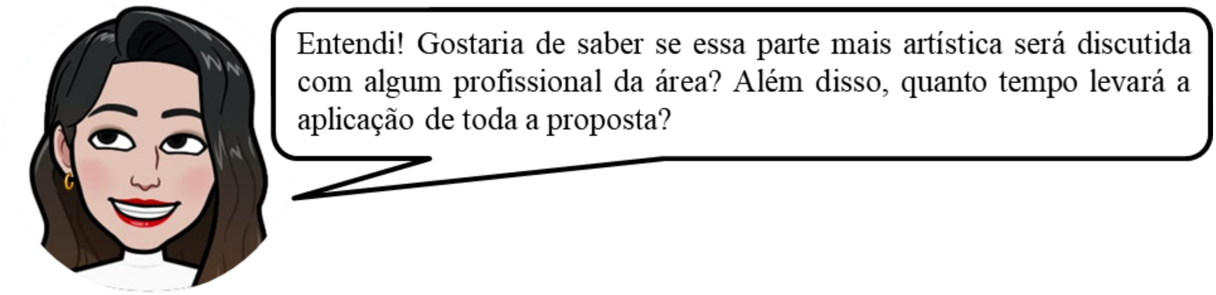
Ainda, utilizamos de práticas teatrais em todo processo explicitado nessa seção com o intuito de incentivar a argumentação, socialização e criatividade. Para isso, criamos a personagem chamada Desconfiadinha. Sua essência é ser questionadora, desconfiada e só concordar com alguma afirmação quando for justificada por meio de argumentação matematicamente completa. Essa personagem surge em dois contextos: no texto desta dissertação como uma proposta de estética de singularização da presente pesquisa e como personagem interpretada pela pesquisadora/professora que irá dialogar com os alunos em vários momentos na sala de aula.



De acordo com De Villiers (2001), geralmente, nas salas de aulas de matemática os alunos não sentem a necessidade de argumentar, visto que, pela autoridade do professor ou do livro didático, por exemplo, acreditam na veracidade de resultados matemáticos sem sequer refletir e questionar sobre os mesmos. A relevância da personagem Desconfiadinha se dá pelo fato de ela buscar, sempre que possível, fomentar a argumentação e reflexão dos estudantes sobre os resultados matemáticos, possibilitando que os alunos adotem postura de responsabilidade por suas produções matemáticas. Prática defendida por muitos pesquisadores, como Balacheff (1987), Sowder e Harel (1998), Hanna (1995, 2000, 2016), De Villiers (2001), Stylianides e Stylianides (2009).



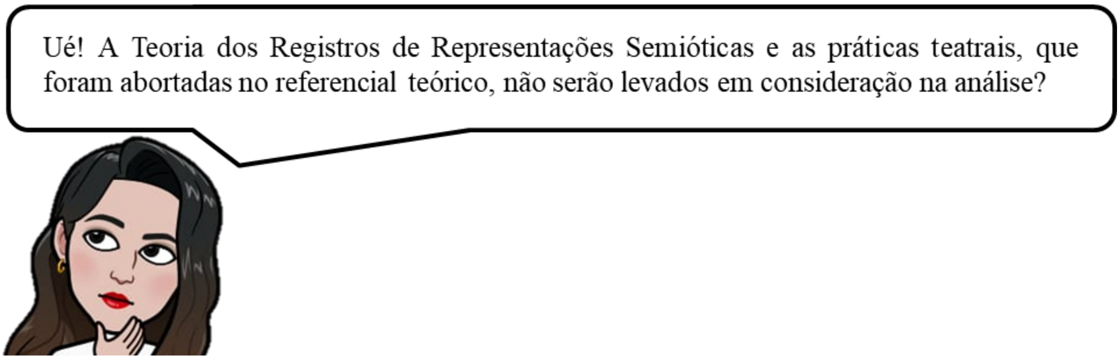
Como já mencionado, durante o desenvolvimento das atividades os alunos tiveram contato com práticas teatrais por meio da interpretação da pesquisadora/professora no papel da Desconfiadinha. Entretanto, também houve momentos em que foram sujeitos dessas práticas. Na última atividade da proposta de intervenção pedagógica, os discentes, em grupos, investigaram propriedades da soma de números naturais consecutivos em casos particulares, passando pela exploração heurística, identificação de padrão, formulação da conjectura, argumentação e apresentação de uma prova explicativa escrita e em forma de esquetes com personagens. Nesse processo, estavam livres para criarem roteiros, cenários, acessórios e quantos personagens considerassem necessários para a sua apresentação.



É importante ressaltar que a estrutura e proposta de intervenção pedagógica como um todo foi discutida com as professoras de artes e de matemática da escola com o intuito de saber suas observações e ponderações para considerá-las em adaptações que julgassem necessárias. Além disso, utilizamos oito aulas de 01h50min que foram disponibilizadas por ambas as professoras, mas principalmente pela professora de matemática da turma na qual realizamos a aplicação da proposta. Todas as atividades que foram desenvolvidas com os alunos estão detalhadas na seção 7.

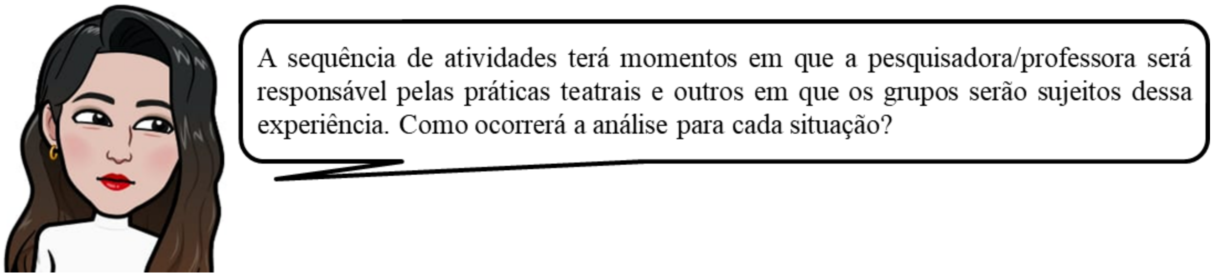
6.2 METODOLOGIA DE ANÁLISE

Na análise das produções desenvolvidas nas atividades, procurou-se identificar se os grupos de alunos passaram pelo processo que leva à demonstração: experimentação heurística, identificação de padrões, formulação de conjecturas, argumentação geral válida e construção de uma demonstração. Além disso, as justificativas apresentadas pelos estudantes foram classificadas de acordo com as categorias que avaliam o grau que os argumentos se aproximam do padrão de uma prova. Essa categorização está detalhada na seção 5.1, ver Quadro 4. Caso a construção apresentada seja categorizada como M1, essa será identificada como demonstração explicativa ou não, levando em consideração às noções abordadas por Hanna (1990). Também analisaremos a percepção dos estudantes, individualmente, quanto ao nível de argumentação apresentado pelo seu grupo, buscando identificar se consideraram a construção desenvolvida na última atividade uma demonstração. Ressaltamos que a maturidade dos estudantes pode não ser suficiente para perceber a dimensão matemática dessa discussão. Assim, destacamos que a nossa atenção está concentrada na concepção geral que os alunos possuem sobre a demonstração.



Além da análise dos argumentos apresentados nas construções, também foram analisados os registros de representações semióticas (língua materna, registro aritmético, registro algébrico, registro gráfico, registro numérico, entre outros) que surgiram no desenvolvimento das atividades (diálogo entre os grupos, apontamentos, roteiro, criação de personagens e apresentação dos esquetes) como também os tratamentos e conversões entre esses registros.

Mais especificamente, após as práticas teatrais realizadas pelos estudantes, verificamos se os alunos conseguiram criar personagens e as especificidades de cada criação. Além disso, comparamos o roteiro planejado com a apresentação do grupo, buscando identificar se os alunos colocaram em prática o que idealizaram.



Nos momentos em que a pesquisadora/professora é sujeito das práticas teatrais, interpretando a personagem Desconfiadinha, buscou-se familiarizar os estudantes com as representações aritméticas, algébricas e em arranjos retangulares da multiplicação, experimentação heurística, generalização, conjectura e argumentação. Para analisar essa parte, focamos, sempre que possível, nos resultados das atividades desenvolvidas por cada grupo, atentando para os tratamentos e as conversões entre os registros de representações semióticas (DUVAL, 2006), nas etapas do processo de construção de uma demonstração (STYLIANIDES, 2008) e nos tipos de justificativas apresentadas pelos estudantes (Quadro 4).

Já nos momentos em que os alunos foram sujeitos das práticas teatrais, buscando alternativas de como interpretar personagens e apresentar esquetes teatrais com resultados matemáticos, analisamos os trabalhos escritos bem como as apresentações dos grupos, também mantendo o foco nas transformações dos registros de representações semióticas realizadas, na passagem pelas etapas da construção de uma prova e no tipo justificação apresentada. Além disso, é nessa parte que as práticas teatrais desenvolvidas pelos grupos de estudantes foram analisadas de acordo com os critérios mencionados anteriormente.

7 ROTEIRO DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

O roteiro é dividido em quatro partes e suas atividades foram pensadas para o 6º ano do Ensino Fundamental, com o intuito de instigar o desenvolvimento de argumentação, raciocínio e prova relativamente ao conteúdo de múltiplos e divisores de um número natural, algumas de suas propriedades e casos particulares de propriedades da soma de números naturais consecutivos. Além disso, como o roteiro foi desenvolvido antes da aplicação das atividades, o tempo verbal adotado a partir desse momento é o futuro.

Pretendemos, inicialmente, desenvolver as atividades em grupos com cerca de quatro alunos que terão de três a cinco minutos para concluí-las, eles poderão gerir por meio da ampulheta (Figura 3) que estará exposta na sala. O controle do tempo se faz necessário para que seja possível aplicar toda a proposta de intervenção desenvolvida nas aulas que foram disponibilizadas pela escola para a presente pesquisa.

Figura 3: Ampulheta utilizada nas aulas para controlar o tempo das atividades

Fonte: Acervo da autora

Todas as atividades devem ser explicitadas oralmente pela pesquisadora/professora e serão escritas no quadro escolar. O desenvolvimento das atividades pelos grupos deverá ser apresentado em uma folha que será entregue ao final de cada aula. As resoluções das atividades serão discutidas e sistematizadas em plenária. Além disso, no início de cada aula será realizada uma revisão dos resultados trabalhados na aula anterior que serão registrados no quadro escolar.

Durante a intervenção pedagógica, a pesquisadora/professora irá intercalar entre a sua pessoa física e a personagem Desconfiadinha. Para trabalhar com a personagem em sala de aula, baseamo-nos num super-herói de histórias em quadrinhos publicadas pela *DC Comics* denominado *Superman* e criado pela dupla de autores de quadrinhos Joe Shuster e Jerry Siegel. Quando não está salvando o mundo, o super-herói esconde a sua identidade secreta vivendo como Clark Kent, um jornalista tímido (MENESES, 2022). Nesse disfarce, Superman, além de utilizar uns óculos de grau e alterar seu penteado, ele também muda a sua personalidade e postura (Figura 4).

Figura 4: Clark Kent e *Superman*

Fonte: Meneses (2022)

No início das atividades os alunos serão apresentados à professora Érica, que estará de óculos e de cabelos amarrados, e também à personagem Desconfiadinha, que irá revelar-se quando a professora soltar seus cabelos e retirar os óculos (Figura 5). A relação entre o super-herói e a personagem Desconfiadinha será pontuada para os estudantes. O objetivo dessa introdução é a familiarização dos estudantes com a personagem e suas características.

Figura 5: Pesquisadora/professora e personagem Desconfiadinha

Fonte: Acervo da autora

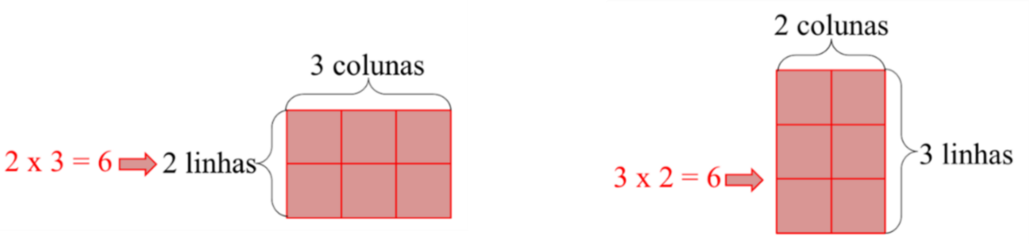
A seguir iremos detalhar as atividades que pretendemos realizar em cada parte, incluindo seus objetivos e algumas discussões com os estudantes, o desenvolvimento esperado pelos estudantes, bem como as atitudes que serão tomadas pelas pesquisadora/professora e em que momentos ela interpretará a personagem Desconfiadinha com a finalidade de incentivar a argumentação dos estudantes. Para ilustrar essa última parte, recorreremos ao avatar da personagem desenvolvido no aplicativo *Bitmoji*.

7.1 PARTE 1: INTERPRETAÇÃO DA MULTIPLICAÇÃO VIA ARRANJOS RETANGULARES

O objetivo desta parte é retomar e apresentar, em uma aula (1h50min), o significado de arranjo retangular para a multiplicação de números naturais, bem como sua representação pictórica. Essa representação semiótica será amplamente utilizada no desenvolvimento de demonstrações explicativas apresentadas posteriormente.

Um arranjo retangular, também conhecido por organização retangular, disposição retangular ou formação retangular, é uma interpretação da multiplicação entre dois números naturais, para a qual se escolhe uma unidade, por exemplo, formas geométricas ou objetos (Figura 6 e Figura 8). As unidades são distribuídas de forma que o número de unidades nas linhas seja igual a um dos fatores e o número de colunas ao do outro fator, adquirindo assim o aspecto de um retângulo. A Figura 6 apresenta uma interpretação da multiplicação do número 2 pelo número 3 e do número 3 pelo número 2 via arranjo retangular, cuja unidade é um quadrado, e na qual convenciona-se que o primeiro fator corresponde ao número de linhas do arranjo retangular e o segundo fator corresponde ao número de colunas.

Figura 6: 2×3 e 3×2 via arranjo retangular



Fonte: Construção da autora

De acordo com Souza (2020), essa disposição permite uma contagem mais rápida de objetos e a visualização de certas propriedades da multiplicação. Devido a essas potencialidades, escolhemos utilizar os arranjos retangulares em nossa proposta de intervenção pedagógica. A primeira atividade a ser proposta aos alunos foi desenvolvida com o objetivo de familiarizar e/ou relembrar a interpretação da multiplicação de números naturais em arranjos retangulares: os estudantes, em seus grupos, receberão a imagem de 30 cadeiras impressas (Figura 7) e será solicitado que apresentem uma forma de contar o número de cadeiras que receberam levando em conta o trabalho de dispor na forma de arranjo retangular.

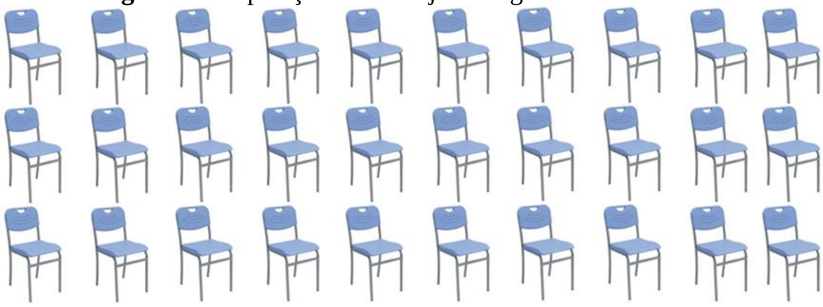
Figura 7: Imagens das cadeiras impressas

Fonte: Acervo da autora

Sequencialmente, surgirá o primeiro momento de prática teatral, no qual a professora soltará os seus cabelos, irá retirar os seus óculos e como Desconfiadinha irá questionar oralmente:

A Figura 8 é uma forma de dispor as cadeiras. Esperamos que os estudantes apresentem maneiras semelhantes a essa, separando as 30 cadeiras em grupos com a mesma quantidade de objetos. Sendo assim, bastará contar a quantidade de cadeiras nas linhas e multiplicar pelo número de cadeiras nas colunas ou contar a quantidade de cadeiras nas colunas e multiplicar pelo número de cadeiras nas linhas, pois cada linha ou cada coluna possui a mesma quantidade de cadeiras. Em seguida, iremos convencionar, para todas as atividades, que o número de linhas representa o primeiro fator da multiplicação e o número de colunas o segundo fator para que possamos, posteriormente, trabalhar com algumas propriedades nas quais é necessária a fixação das linhas e colunas, a comutatividade da multiplicação, por exemplo.

Figura 8: Disposição via arranjo retangular de 30 cadeiras



Fonte: Construção da autora

A seguir, o objetivo é apresentar distintas representações para a unidade dos arranjos retangulares e relacionar a representação aritmética com a atividade. Para isso, mencionaremos que a forma de organização em arranjos retangulares pode ser utilizada com vários objetos com o intuito de facilitar a sua contagem, por exemplo. Será ressaltado aos alunos que, neste caso, as unidades são cadeiras, mas podem ser outros objetos, como flores, moedas, quadrados, etc. A Figura 9 será apresentada aos estudantes para exemplificar a afirmação anterior e reiterar que são distintas representações para a expressão aritmética 3 × 10, reafirmando a convenção estabelecida (linhas × colunas).

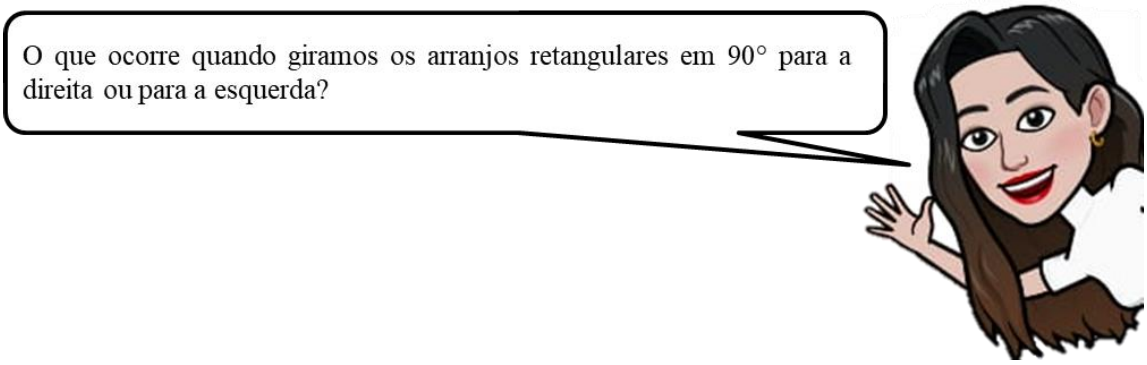
Figura 9: Arranjos retangulares com distintas unidades

Fonte: Construção da autora

Com o objetivo de propiciar distintas representações de unidades para os arranjos retangulares, será solicitado aos grupos que criem uma situação na qual os arranjos retangulares possam ser úteis. Espera-se que apareçam distintas unidades para compor os arranjos retangulares e, em seguida, vamos fixar os quadrados como unidades para os demais arranjos retangulares que iremos representar adiante.

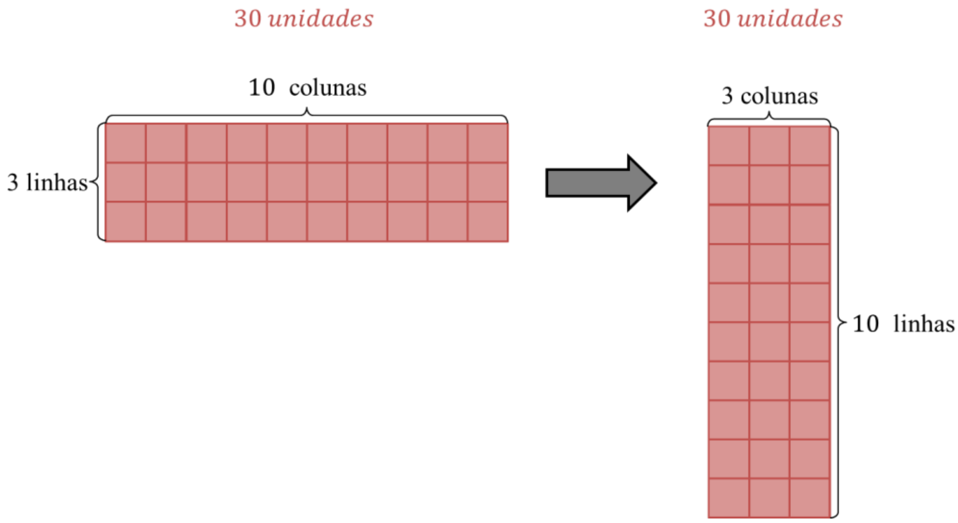
Em seguida, para instigar o desenvolvimento de tratamentos e de conversões entre os registros de representações semióticas, os grupos deverão criar numa folha e depois apresentar no quadro escolar pelo menos um arranjo retangular para as seguintes multiplicações: 3×2, 8×6, 1×6, 5×1, e 10×4. Se necessário, será reiterada a convenção (linhas × colunas).

Relativamente às representações em arranjos retangulares expostas no quadro, a Desconfiadinha entrará novamente em ação e irá perguntar:



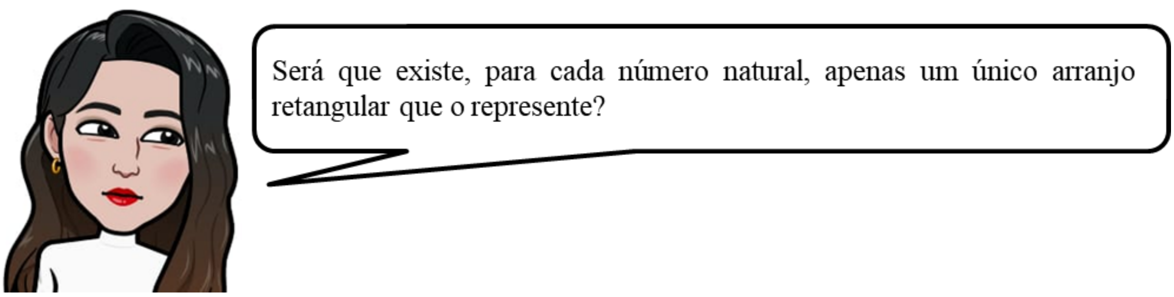
A aplicação do processo apresentado na Figura 10, por exemplo, resulta em um novo arranjo retangular que tem o mesmo número de unidades. Essas unidades representam o produto que se mantém, já a quantidade de linhas e colunas se altera, exemplificando a propriedade comutativa da multiplicação por meio dessa nova representação. Tal reflexão pretende ser levantada após o questionamento da personagem.

Figura 10: Visualização da propriedade comutativa da multiplicação em um caso específico por meio de arranjos retangulares



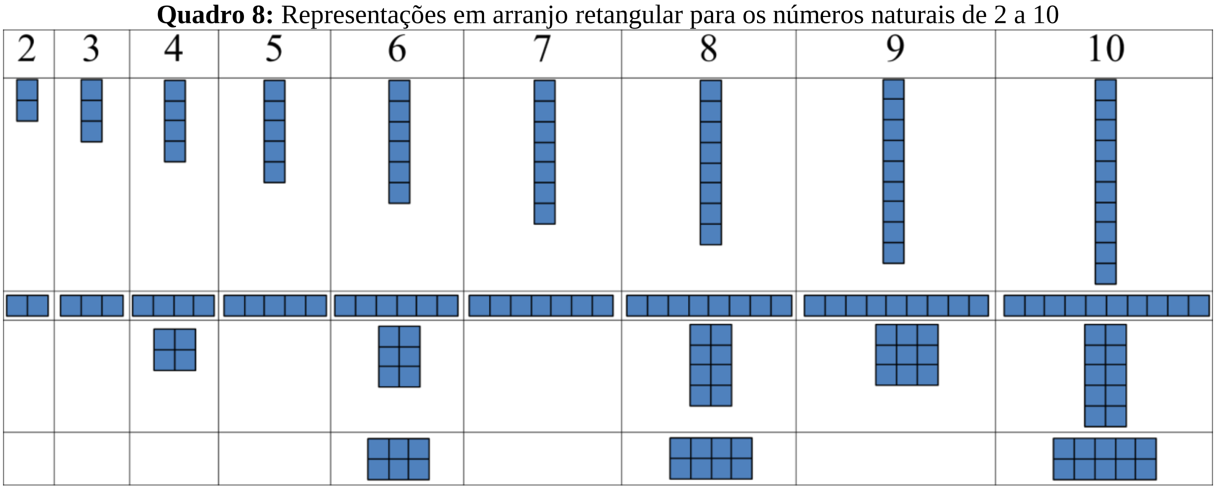
Fonte: Construção da autora

A seguir, a Desconfiadinha irá contribuir novamente, buscando destacar a não unicidade das representações em arranjos retangulares:



É esperado que após terem visto distintas representações para o número 6, por exemplo, ou pela própria propriedade comutativa, os alunos respondam que há mais de uma representação. Em seguida, com os objetivos de instigar a criação de distintas representações para um mesmo objeto matemático e discutir a quantidade de representações que possui um número primo, será solicitado aos grupos que apresentem, numa folha, mais de uma maneira de representar os números de 2 a 10 via arranjos retangulares. Posteriormente, serão convidados a apresentar as suas respostas no quadro escolar. Para cada caso, um grupo irá mostrar a sua construção e será questionado se houve alguma resolução diferente por parte dos demais grupos. Espera-se construir representações semelhantes às apresentadas no Quadro 8.

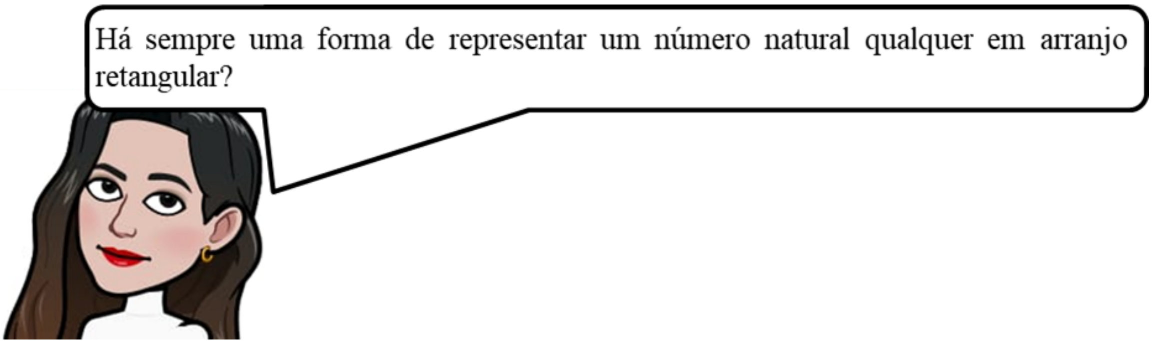
Quadro 8: Representações em arranjo retangular para os números naturais de 2 a 10



Fonte: Construção da autora

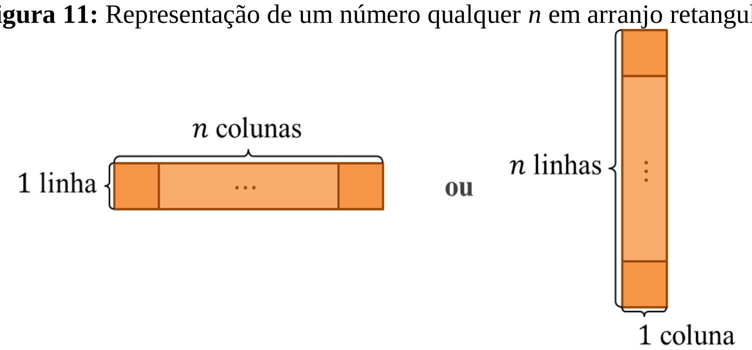
O objetivo da atividade seguinte é retomar o conceito de número primo e concluir que um número primo *p* qualquer possui apenas duas representações em arranjos retangulares (1 linha e *p* colunas ou *p* linhas e 1 coluna) e os números compostos possuem pelo menos três representações. Para isso, vamos levantar a seguinte reflexão relacionando com o Quadro 8: qualquer número natural maior que 1 possui pelo menos duas representações em arranjo retangular, há números que só possuem essas duas representações e existem números que apresentam, além dessas, outras representações. Os alunos serão convidados a analisar os casos particulares dos números 6 e 7. Serão questionados sobre o motivo que leva um ter mais representações que o outro. Esperamos que identifiquem que 7 é um número primo e 6 um número composto, por isso há mais multiplicações com dois fatores que o representam. Caso isto não ocorra, apresentaremos aos estudantes a relação entre número primo e a sua quantidade de representações em arranjos retangulares.

Com o intuito de construir representações para uma quantidade genérica em arranjos retangulares, a Desconfiadinha irá questionar novamente:



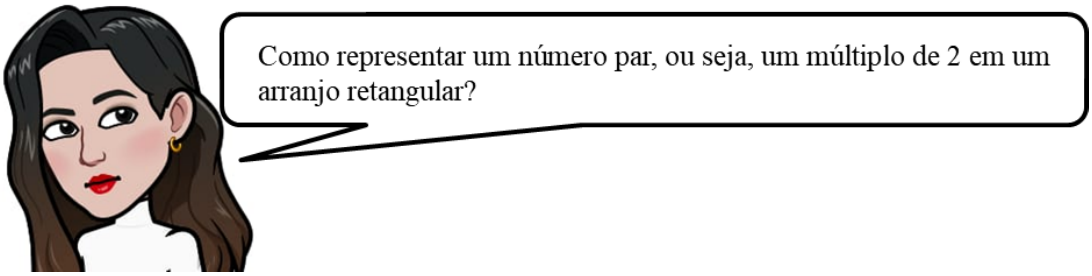
Para sanar essa dúvida, pretende-se iniciar um debate sobre como representar uma quantidade genérica. A conversa será conduzida de maneira que os alunos escolham uma letra ou símbolo como representante desse número genérico. Suponhamos que a turma escolha a letra *n*. Para representar um número natural *n* qualquer podemos distribuí-lo em um arranjo retangular com *n* linhas e uma coluna ou uma linha e *n* colunas. Neste contexto, será construído com os alunos uma forma de representar as *n* linhas ou *n* colunas como a apresentada na Figura 11, sendo esclarecido que, como não sabemos a quantidade exata de linhas ou colunas, as reticências servem para expressar o número de unidades que faltam para chegar a *n*. Nesse caso, a quantidade *n* está apontada na chave que engloba todas as unidades.

Figura 11: Representação de um número qualquer *n* em arranjo retangular



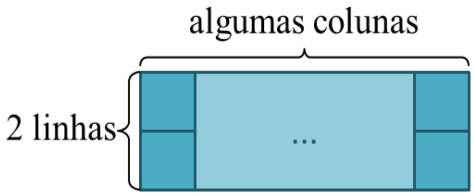
Fonte: Construção da autora

Com o objetivo de obter outras representações de quantidades genéricas, os alunos serão questionados pela Desconfiadinha:



Nesse momento, será proposta uma reflexão sobre a quantidade de linhas que o arranjo precisa ter para representar um número múltiplo ou divisível por 2. É esperado que os alunos identifiquem que, independentemente do número de colunas, se o arranjo possui duas linhas, o número representado por ele é par, ou seja, múltiplo de 2 , para isso podem fazer alguns exemplos utilizando arranjos retangulares antes de partir para a generalização. A discussão será mediada com o intuito de chegar à conclusão que um número par (múltiplo de 2) pode ser representado por um arranjo retangular com duas linhas. E, reciprocamente, qualquer arranjo retangular de duas linhas é um número par, isto é, um número múltiplo de 2. A Figura 12 é uma possível construção dos alunos que representa um número par.

Figura 12: Número par qualquer representado em arranjo retangular



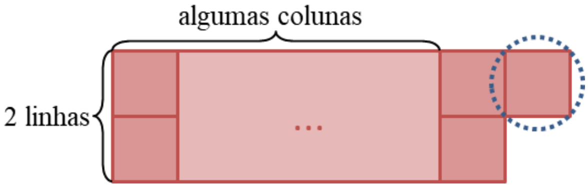
Fonte: Construção da autora

Os alunos serão relembrados que, por exemplo, um arranjo retangular com duas linhas e três colunas é uma visualização para a multiplicação de 2 por 3 que também pode ser escrita como: 2×3. Outros exemplos semelhantes serão levantados e, por fim, será questionado como representar algebricamente um arranjo retangular de duas linhas e algumas colunas. Os alunos serão convidados a escolher uma letra do alfabeto para representar essas colunas. Suponhamos que escolham a letra c, caso os grupos não apresentem a expressão $2\times c$ como resposta, ela será mostrada como sendo uma forma de representar um número par qualquer, ou seja, um múltiplo qualquer de 2.

A Desconfiadinha irá surgir novamente para incentivar a experimentação heurística, formulação de conjectura e a argumentação referente à representação de números ímpares.

Espera-se que, nesse momento, os alunos pensem em algumas possibilidades, testem para alguns casos particulares e percebam que sobrará um quadrado. Em plenária, pretende-se discutir sobre o porquê disso acontecer e associar ao resto da divisão por 2. Quando um número natural é múltiplo ou divisível por 2, o resto da divisão é zero, isso significa que todas as colunas possuem dois quadrados, ou seja, é possível representá-lo como um arranjo retangular de duas linhas. Já quando um número natural não é divisível por 2, o resto da divisão é 1 um, e então, não é possível representá-lo em um arranjo retangular de duas linhas, pois sobra um quadrado (Figura 13). Neste caso, chamamos os números que possuem essa característica de ímpar. Além disso, também se pretende associar o algoritmo da divisão com os arranjos retangulares, explicitando que o número de linhas é o divisor, o número de colunas é o quociente e o resto é a quantidade de quadrados que não completa uma coluna.

Figura 13: Número ímpar pictoricamente

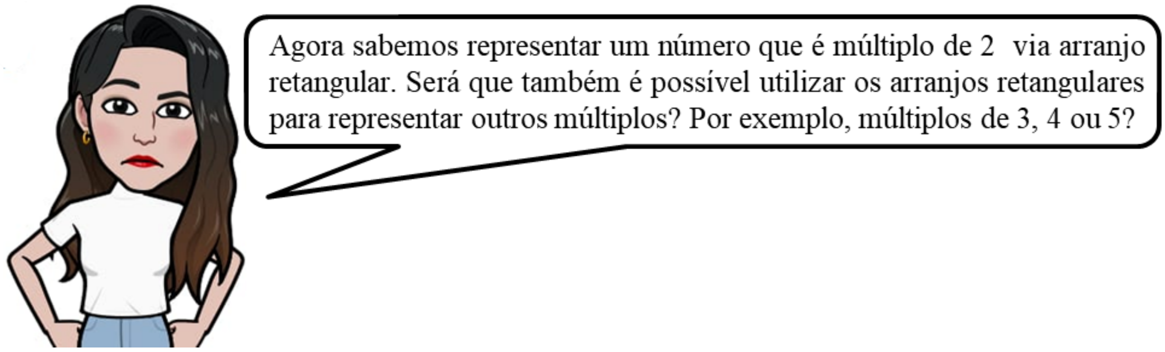


Fonte: Construção da autora

Ao final da aula, os alunos serão informados que a última atividade da proposta de intervenção pedagógica consiste em uma apresentação na qual devem criar um ou mais personagens que podem ou não englobar a Desconfiadinha. Além disso, serão avisados que poderão desenvolver a parte artística dessa atividade nas aulas de artes. Com essas definições, informações, investigações e conclusões, espera-se encerrar a primeira aula.

7.2 PARTE 2: REPRESENTAÇÃO DE MÚLTIPLOS VIA ARRANJOS RETANGULARES

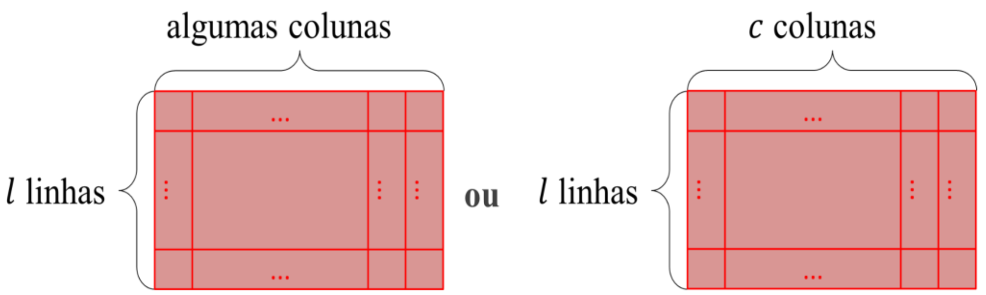
Inicialmente pretende-se realizar uma revisão, que será registrada no quadro, de todas as conclusões obtidas na Parte 1, a saber: representação de números específicos e genéricos em arranjos retangulares e representação pictórica e algébrica de um número par e de um número ímpar. O objetivo da Parte 2 é construir representações em arranjos retangulares para múltiplos de números específicos. Para isso, utilizaremos uma aula, na qual iremos repetir as reflexões realizadas para os números pares, ou seja, múltiplos de 2, para os números múltiplos de 3, 4 e 5, partindo da seguinte contribuição da Desconfiadinha:



Espera-se concluir que um número múltiplo de 3 pode ser escrito em um arranjo retangular com 3 linhas, e quando não é múltiplo de 3 sobrará uma coluna incompleta com um ou dois quadrados, que são os restos possíveis na divisão por 3 de um número natural que não é múltiplo de 3. No caso dos múltiplos de 4, esses podem ser representados em arranjos retangulares de 4 linhas e, quando o número não é múltiplo de 4, os restos possíveis na divisão desse número por 4 são um, dois ou três. Já os múltiplos de 5, podem ser representados em arranjos retangulares de 5 linhas, caso contrário, os restos possíveis na divisão desse número por 5 são um, dois, três ou quatro. Visualmente, esses restos possíveis são a quantidade de quadrados que sobram e formam uma coluna incompleta, impossibilitando a formação de um arranjo retangular.

Na sequência, objetiva-se concluir que se um número natural é múltiplo de um número natural l dado, então esse número pode ser representado em um arranjo retangular com l linhas e se tivermos um arranjo retangular com l linhas então esse número é um múltiplo de l. Nos grupos, os alunos terão que construir um arranjo retangular que representa um número qualquer múltiplo de l. Os estudantes serão lembrados que podem representar o outro fator também com uma letra e utilizar as reticências na representação das linhas e colunas. A Figura 14 apresenta um exemplo de arranjo retangular que pode ser desenvolvido pelos grupos para atingir o objetivo dessa atividade. Será explicitado que não sabemos ao certo o número de colunas, então podemos escrever "algumas colunas" ou escolher um símbolo para representar esse número.

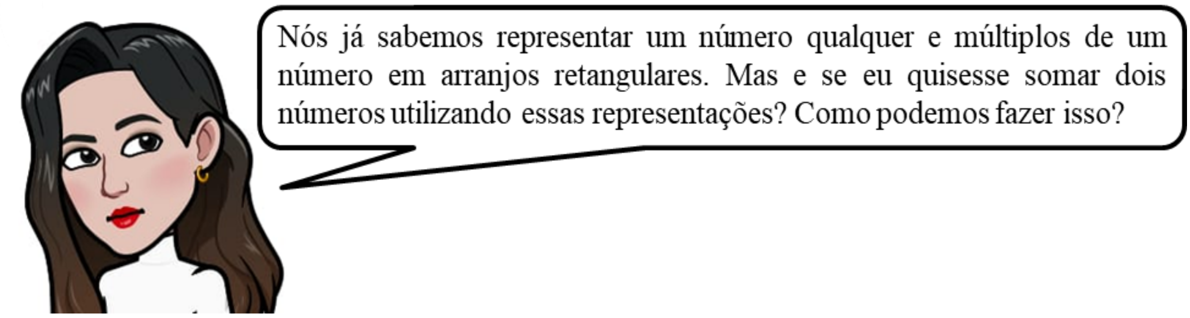
Figura 14: Arranjo retangular de $\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{c}$



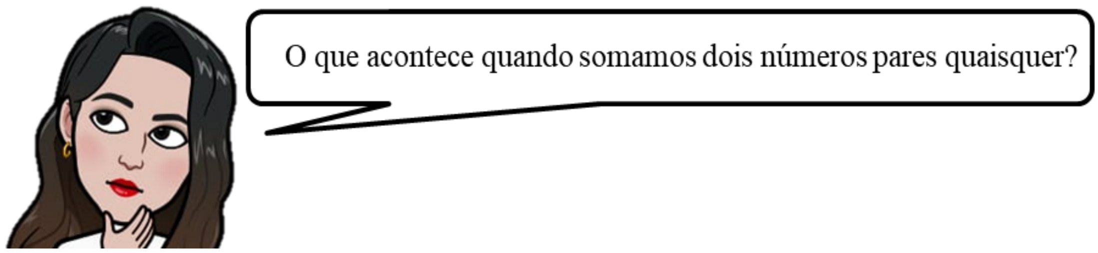
Fonte: Construção da autora

Será retomada com os estudantes a concepção de múltiplo de um número dado l e a sua representação algébrica, conectando-a com a representação em arranjo retangular expressa na Figura 13. Em seguida, os alunos serão questionados sobre o que acontece quando giramos em 90° a Figura 14. O objetivo desse questionamento é apresentar uma visualização genérica para a propriedade comutativa da multiplicação.

A partir do que foi construído com os alunos, almeja-se investigar também propriedades da adição de múltiplos de um mesmo número. Para isso, os alunos devem saber como somar utilizando representações em arranjos retangulares. Dessa forma, partiremos de exemplos concretos, iniciando com experimentações aritméticas e a Desconfiadinha irá questionar:



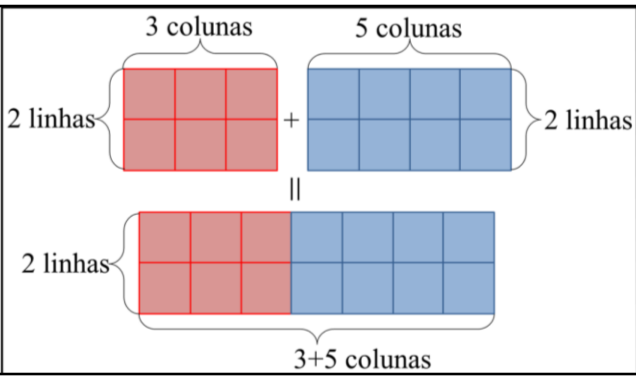
Será solicitado aos alunos que, em seus grupos, façam numa folha representações em arranjo retangular para as seguintes adições: 2+3, 2+6 e 3+6. Acreditamos que os alunos irão associar “somar” com “unir” e “juntar”, portanto, irão unir os dois arranjos retangulares que representam as parcelas. É esperado que surjam distintas representações para as somas que devem ser encontradas, visto que os estudantes podem realizar a união dos arranjos retangulares um ao lado do outro ou um acima do outro. A Desconfiadinha, curiosa sobre as propriedades dessa operação, irá perguntar:



Os grupos serão incentivados a testar alguns casos particulares, como, por exemplo, 6+10, e elaborar conjecturas. Posteriormente, caso não tenham feito a passagem direta da soma por meio de representação em arranjos retangulares, serão convidados a criar uma representação em arranjo retangular para a soma em questão e que explicite a paridade.

Os alunos serão convidados a organizar as representações de cada um dos casos particulares escolhidos em um quadro (Quadro 9). A organização em formato de quadro pode incentivar a formulação de conjecturas que os auxiliem na resposta da pergunta além de salientar a relação entre as distintas representações e a identificação das unidades significantes em cada registro na conversão.

Quadro 9: Registros de representações distintas para a adição 6+10

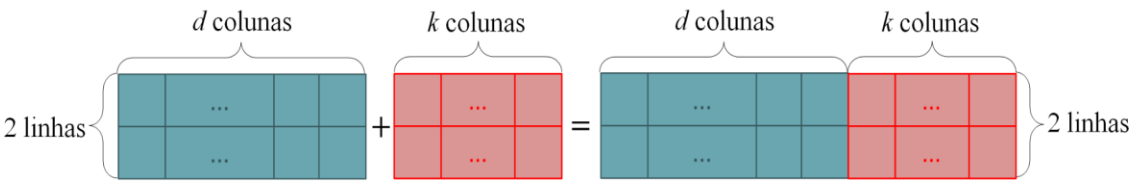
6 + 10=16		2 x 3 + 2 x 5 = 2 x (3 +5) = 2 x 8

Fonte: Construção da autora

Os alunos serão incentivados a justificar suas respostas e irem deixando aos poucos a argumentação empírica. Presumimos que, inicialmente, os alunos por meio de exemplos irão conjecturar que a soma de dois números pares é um número par. Também acreditamos que para justificar tal sentença irão recorrer a vários exemplos, porém a Desconfiadinha irá apontar um exemplo que ainda não foi testado. Sendo assim, será salientado que a estratégia de mostrar exemplos não é boa, pois existem infinitos casos possíveis. Assim, devem alterar a tática e buscar uma maneira de representar a soma de dois números pares quaisquer.

Em seus grupos, irão revisitar o arranjo retangular genérico criado para representar um número múltiplo par qualquer. Em seguida, deverão representar de forma genérica as parcelas da adição de dois números pares quaisquer (Figura 15). Caso apareça uma construção de dois arranjos retangulares com duas linhas e de mesmo número de colunas, o que representa a soma de dois números pares iguais, os alunos serão convidados a refletir sobre a construção que apresenta dois números iguais, com o intuito de alertá-los para o fato de que, assim, não são quaisquer. Para atender o que é solicitado, é necessário criar dois arranjos retangulares de duas linhas e de alguma forma diferente, por exemplo, com símbolo para a quantidade de colunas diferentes. Nesse sentido, os alunos deverão voltar a construir um arranjo retangular que expresse a soma de dois números pares quaisquer. Suponhamos que um dos grupos escolha *d* e *k* para representar as colunas, a Figura 15 é uma resposta possível.

Figura 15: Representação via arranjo retangular da soma de dois números pares quaisquer

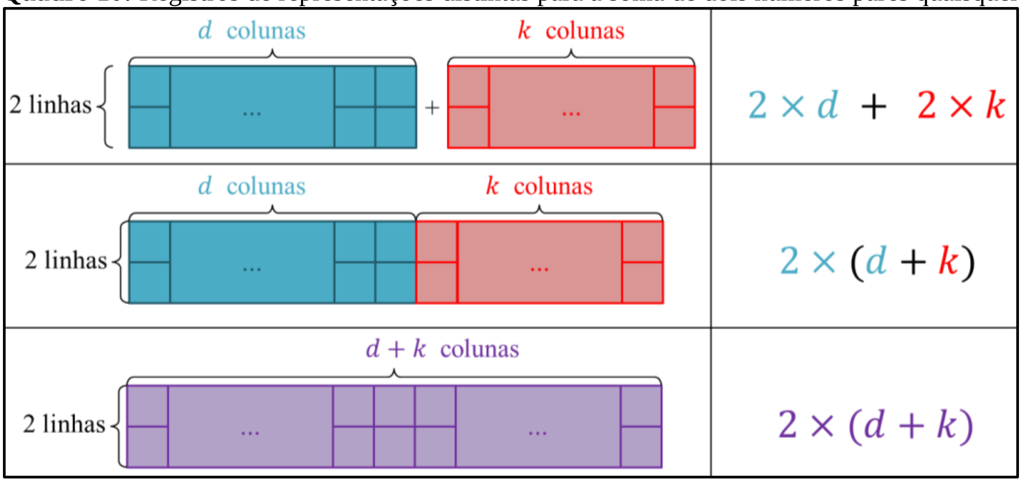


Fonte: Construção da autora

Será mencionado aos estudantes que para representar, via arranjo retangular, a soma de 2 números pares quaisquer, basta unir os arranjos retangulares que representam as parcelas. Como, neste caso, estamos interessados em saber se o resultado é múltiplo de 2, preferencialmente, unimos na horizontal (como na Figura 15), o que nos permite identificar visualmente essa propriedade.

Os alunos serão questionados se há alguma semelhança entre o arranjo retangular que representa o resultado da adição e os que representam as parcelas. Esperamos que os alunos apontem para a quantidade de linhas, perguntaremos se isso sempre ocorrerá e esperamos que a resposta seja sim, visto que estamos unindo, na horizontal, arranjos retangulares que possuem duas linhas, ainda obtendo assim um arranjo retangular de duas linhas. Posteriormente, nos seus grupos, os alunos deverão apresentar uma representação algébrica da soma de dois números pares quaisquer no quadro de representação, podendo utilizar como suporte os arranjos retangulares criados anteriormente. Esperamos que a expressão $2\times d + 2\times k$ como resposta. Em seguida, os alunos deverão analisar o arranjo retangular mais à direita da Figura 15 e dizer quantas colunas existe. Acreditamos que os alunos irão dizer que há $d+k$. Em seguida, pediremos que representem algebricamente esse arranjo retangular, com o intuito que cheguem em $2\times(d+k)$ como resposta, apresentando algo semelhante ao Quadro 10.

Quadro 10: Registros de representações distintas para a soma de dois números pares quaisquer

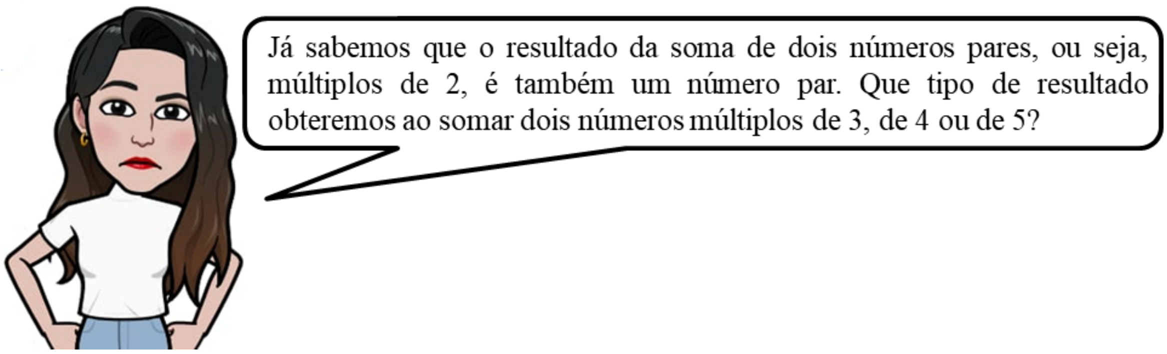


Fonte: Construção da autora

A Desconfiadinha irá questionar a segunda coluna do Quadro 10, buscando evocar a propriedade distributiva da multiplicação que pode ser levantada pelos estudantes ou pela professora. Em seguida a personagem informará que está convencida e que acredita no argumento. Posteriormente, será explicado aos estudantes que o quadro apresenta duas demonstrações, uma pictórica e outra algébrica, visto que as duas formas apresentam argumentos que abrangem todos os casos. Além disso, será explicitado que do lado esquerdo do Quadro 10, para somar, bastou juntar-se os arranjos retangulares lado a lado. Já no lado direito, foi utilizado a propriedade distributiva do produto perante a soma. Com essa discussão, pretende-se encerrar a segunda aula.

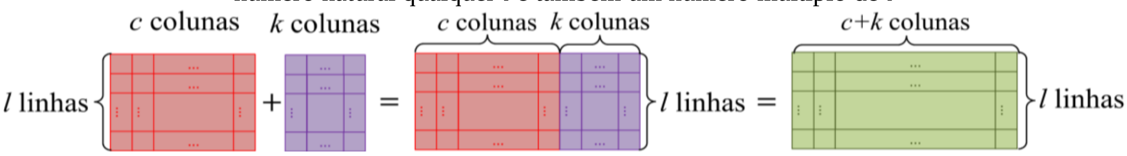
7.3 PARTE 3: PROPRIEDADES DA SOMA DE MÚLTIPLOS DE UM NÚMERO NATURAL DADO

O objetivo desta parte é investigar as propriedades da soma de dois números múltiplos de 3, de 4, de 5 e, posteriormente, de um número qualquer. Almejamos atingir esse objetivo em uma aula que será iniciada com uma revisão das conclusões alcançadas na Parte 2, a saber: representação genérica de um número múltiplo de 2, 3, 4, 5 e l como também a demonstração de que a soma de dois números pares é um número par. Depois da revisão, os estudantes serão convidados, pela Desconfiadinha, a ampliar os questionamentos referentes à adição de dois números múltiplos de 2:



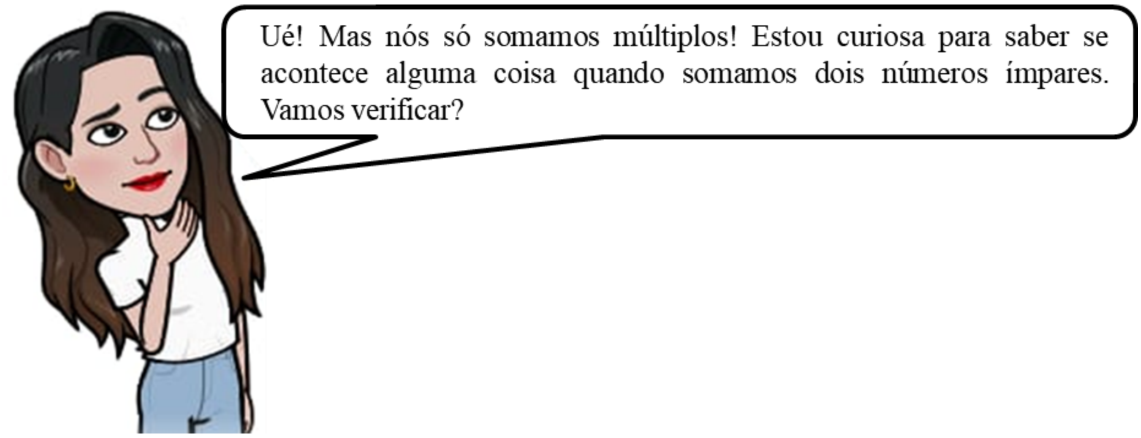
Esperamos que, devido às reflexões anteriores, os alunos conjecturem: que a soma de dois múltiplos de 3 é também um múltiplo de 3, que a soma de dois múltiplos de 4 é um múltiplo de 4 e que a soma de dois múltiplos de 5 é um múltiplo de 5. Os alunos serão questionados se sabem a razão dessas propriedades serem verdadeiras e como poderíamos generalizá-las. A discussão será direcionada com intuito de construir a demonstração explicativa apresentada na Figura 16 para a proposição: a soma de dois números múltiplos de um número natural qualquer l é também um número múltiplo de l.

Figura 16: Demonstração via arranjo retangular para a afirmação: a soma de dois números múltiplos de um número natural qualquer l é também um número múltiplo de l



Fonte: Construção da autora

Com o intuito de incentivar a investigação referente à proposição "a soma de dois números ímpares quaisquer é um número par", a Desconfiadinha irá questionar:



Espera-se que os alunos comecem testando alguns casos particulares. Sequencialmente, verifiquem se há algum padrão no resultado, formulem uma conjectura e tentem argumentar de forma genérica para validar a conjectura elaborada. Nesse processo, caso necessário, serão convidados a verificar em seus cadernos como representar um número ímpar genericamente de forma pictórica e, em seguida, voltar a pensar como podem somar esses números.

Será desenvolvida com os alunos a demonstração pictórica (Figura 2). Em seguida, eles serão desafiados a, ao lado de cada etapa, apresentar a representação algébrica. Novamente, será ressaltado que cada coluna é considerada uma demonstração por ser um argumento genérico, que engloba todos os casos. Com isso, espera-se finalizar a terceira aula.

7.4 PARTE 4: SOBRE A SOMA DE NÚMEROS NATURAIS CONSECUTIVOS EM ALGUNS CASOS PARTICULARES

O objetivo desta parte é estudar as propriedades da soma de números naturais consecutivos em alguns casos particulares. Consideramos a proposição para a soma dos n primeiros números naturais apresentada na Figura 1 um resultado não adequado ao nível de abstração matemática dos estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. Assim, procuramos trabalhar com casos específicos e, ao mesmo tempo, genéricos desse resultado e que consideramos condizentes à etapa escolar mencionada. Pretendemos utilizar cinco aulas, três de matemática e duas de artes. Nessas aulas, será proposta, desenvolvida e concluída uma atividade final na qual se pretende provar os seguintes resultados, passando por todas as etapas da construção de uma demonstração:

- A soma de três números naturais consecutivos é um número múltiplo de três;
- A soma de quatro números naturais consecutivos é um número par, ressaltando por que pode não ser um múltiplo de 4;
- A soma de cinco números naturais consecutivos é um número múltiplo de cinco;
- A soma de seis números naturais consecutivos é um número múltiplo de três;
- A soma de sete números naturais consecutivos é um número múltiplo de sete;
- A soma de oito números naturais consecutivos é um número múltiplo de quatro, ressaltando por que pode não ser um múltiplo de 8;
- A soma de nove números naturais consecutivos é um número múltiplo de nove;
- A soma de dez números naturais consecutivos é um número múltiplo de cinco, ressaltando por que pode não ser um múltiplo de 10.

Iniciaremos essa parte com a revisão de alguns conteúdos vistos ao longo das atividades anteriores (representação em arranjo retangular de um número natural qualquer, representação em arranjo de múltiplo de um número específico e como realizar a adição por meio de registros de representação em arranjo retangular) para explicitar algumas ferramentas necessárias para que os grupos consigam desenvolver a demonstração por meio de representação pictórica. Em seguida, cada grupo irá sortear um papel com uma das seguintes questões:

- Que tipo de número resulta da adição de três números naturais consecutivos?
- Que tipo de número resulta da adição de quatro números naturais consecutivos?
- Que tipo de número resulta da adição de cinco números naturais consecutivos?
- Que tipo de número resulta da adição de seis números naturais consecutivos?
- Que tipo de número resulta da adição de sete números naturais consecutivos?
- Que tipo de número resulta da adição de oito números naturais consecutivos?
- Que tipo de número resulta da adição de nove números naturais consecutivos?
- Que tipo de número resulta da adição de dez números naturais consecutivos?

As questões são abertas para que seja possível aos próprios grupos, discutir o que é “tipo de número”, números naturais e números consecutivos e formular sua conjectura. Tais debates serão incentivados pela pesquisadora, que vai pontuar, caso necessário, a existência de um caminho ligado à noção de múltiplo de um número natural que deve ser abordado na resolução.

Os alunos serão orientados a: testar para alguns casos específicos (aritmeticamente e em arranjos retangulares); analisar e verificar se há algum padrão; para somar, juntar/unir os arranjos retangulares de uma maneira conveniente; construir uma conjectura e buscar apresentar uma demonstração.

Para essa atividade, os alunos serão convidados a apresentar a conjectura formulada e a respectiva argumentação sobre sua validade por meio de um trabalho escrito e um esquete teatral. Os alunos poderão apresentar uma demonstração via arranjos retangulares, uma demonstração algébrica e/ou uma demonstração na língua materna falada e/ou escrita para o resultado encontrado. Acerca do esquete teatral, os estudantes também poderão criar personagens, atuar como Desconfiadinha, desenvolver figurinos e pensar em cenários para apresentar seus resultados. Tais práticas serão realizadas nas aulas de artes sob supervisão da professora de artes. Além de procurar desenvolver a criatividade e a socialização (capacidades necessárias para as finalidades essenciais da educação brasileira - ver na seção 5.3), essa atividade também procura proporcionar tratamentos e conversões (DUVAL 2002, 2006) de registros de representações semióticas.

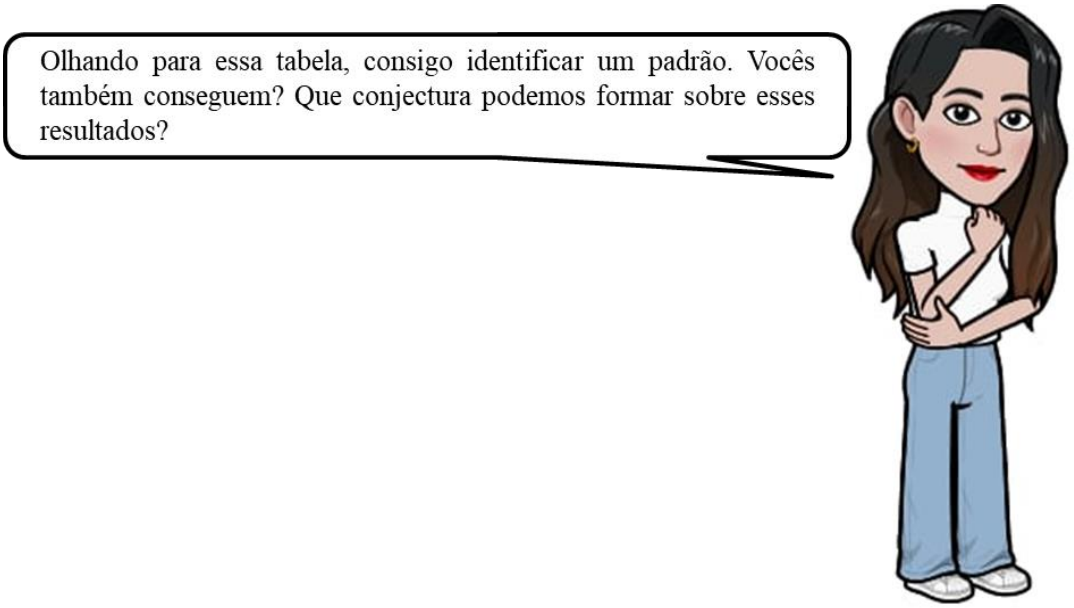
Cada apresentação da atividade final para a turma deverá respeitar o limite de 10 minutos. Conforme os grupos forem apresentando, pretende-se construir o Quadro 11 no quadro escolar.

Quadro 11: Propriedades da soma de números naturais consecutivos em casos particulares

Soma de ___ números naturais consecutivos	**Resulta num número**
Três	Múltiplo de 3
Quatro	Múltiplo de 2
Cinco	Múltiplo de 5
Seis	Múltiplo de 3
Sete	Múltiplo de 7
Oito	Múltiplo de 4
Nove	Múltiplo de 9
Dez	Múltiplo de 5

Fonte: construção da autora

Com a finalização das apresentações, os alunos serão parabenizados. Em seguida, a Desconfiadinha irá surgir pela última vez.



Espera-se que os estudantes consigam verificar que quando o número de parcelas da soma de números naturais consecutivos é ímpar o resultado é múltiplo da quantidade de parcelas. Por outro lado, quando o número de parcelas da soma de números naturais consecutivos é par a soma é um número múltiplo da metade do número de parcelas. Não se pretende demonstrar essa conjectura devido à limitação de tempo, a pergunta é sugerida como forma de incentivar os alunos a continuarem questionando, procurando padrões, formulando conjecturas e argumentando. Por fim, serão lançadas duas questões aos alunos para que escrevam, individualmente, suas percepções sobre a apresentação desenvolvida pelo seu grupo e sobre a sequência de atividades como um todo.

8 RELATO E ANÁLISE DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Essa seção apresenta o relato das práticas desenvolvidas na Escola Estadual de Ensino Fundamental Maria Francisca da Silva, seguido de suas análises. Iniciamos abordando o contato inicial com a escola e as combinações realizadas com as professoras de artes e de matemática. Em seguida, para as três primeiras aulas apresentamos o relato seguido da análise, uma vez que as atividades da primeira parte tinham o intuito de familiarizar os estudantes com a personagem Desconfiadinha e com argumentações matemáticas por meio de registros de representações aritméticas, algébricas e pictóricas (em arranjos retangulares da multiplicação). As três aulas restantes foram utilizadas para que os alunos, divididos em grupos, desenvolvessem a atividade final (criação de personagens e construção de uma demonstração relativa à soma de números naturais consecutivos) e apresentassem o seu trabalho por meio de esquetes. Os dados dessas aulas finais serviram de base para a análise dos grupos apoiada em Stylianides e Stylianides (2009) e Duval (2002) que considera, não só as descrições das aulas, mas também os rascunhos, as falas e as ações dos estudantes capturadas em fotografias, vídeos ou áudios. Essa análise é apresentada após o relato das três últimas aulas.

8.1 CONTATO INICIAL E COMBINAÇÕES

A Escola Estadual de Ensino Fundamental Maria Francisca da Silva, instituição na qual ocorreu a aplicação das atividades desta dissertação, situa-se em um bairro não central da cidade de Parobé. A escola já me é familiar, pois realizei uma prática docente na disciplina de Estágio em Educação Matemática II da Licenciatura em Matemática da UFRGS. Assim, primeiramente, no mês de agosto, entrei em contato com a professora de matemática da escola com quem trabalhei no estágio. Ela informou que, coincidentemente, era professora das turmas de 6º ano do Ensino Fundamental da escola. Então, apresentei as ideias da dissertação para ela que achou a proposta interessante e logo se disponibilizou a trabalhar comigo novamente. Dessa forma, fui até a Secretaria de Educação de Parobé e solicitei o encaminhamento da minha pessoa para a instituição.

Em setembro recebi o aval da Secretaria da Educação, apresentei o documento de encaminhamento na escola e a vice-diretora assinou o Termo de Consentimento Institucional autorizando a realização da coleta de dados. Em seguida, a professora de matemática consentiu a aplicação das atividades em uma das turmas de 6º ano do Ensino Fundamental, a partir de outubro. Entrei então em contato com a professora de artes e propus uma parceria, na qual os alunos pudessem desenvolver a parte artística das atividades propostas em suas aulas. A professora de matemática concordou em disponibilizar sete aulas e a de artes duas aulas, todas de 1h50min, que foram alteradas para seis e uma, respectivamente, devido a um evento da escola que ocorreu durante a aplicação da proposta de intervenção pedagógica dessa dissertação. Não houve reposição de aulas visto que a aplicação ocorreu no final do ano letivo e as professoras informaram que precisavam preparar os estudantes para as tarefas avaliativas.

Na última semana de setembro, visitei duas vezes a turma em que seria aplicada a pesquisa. A primeira para me apresentar e entregar os termos de assentimento e consentimento livre e esclarecido, e a segunda para recolher os documentos assinados e sanar eventuais dúvidas. Todos os 23 alunos que compõem a turma entregaram os termos de assentimento e consentimento. As entregas ocorreram gradativamente até a terceira aula da aplicação da proposta.

8.2 RELATO DA AULA 1

Essa aula ocorreu no dia 03 de outubro de 2022, das 13h00min às 14h50min. Iniciei a aula fazendo a chamada, as conversas paralelas gradativamente foram se encerrando, e, em seguida, perguntei aos estudantes se eles conheciam o *Superman*. Houve uma resposta afirmativa à questão em coral, inclusive um dos alunos estava com uma camiseta desse personagem. Em seguida, questionei se sabiam como o super-herói fazia para se disfarçar, e outro estudante informou: “*Na vida real ele é o Clark Kent que usa aqueles óculos de grau*” acrescentei dizendo que o penteado também era alterado em conjunto com a postura e que ele trabalhava como jornalista.

Informei aos estudantes que também tinha uma identidade secreta que ia revelar a eles. Retirei os meus óculos, soltei os meus cabelos e me apresentei como Desconfiadinha, escutei algumas risadas e um aluno disse: “*Desconfiadinha? Não tinha um nome melhor?*”. Em resposta, disse que meu nome combinava muito com minha personalidade, pois desconfio e questiono praticamente tudo. Encerrei afirmando que iria aparecer constantemente, mas que naquele momento a professora Érica iria voltar para apresentar a atividade inicial.

Já com os cabelos amarrados e novamente utilizando óculos, informei que poderiam formar grupos de até quatro integrantes, desde que todos tivessem entregue os termos de assentimento e consentimento. Foram formados sete grupos, três quartetos, três trios e uma dupla. Para cada grupo, entreguei uma folha e solicitei que colocassem os nomes dos integrantes nelas. Em seguida, numerei os grupos de um a sete, pedi para anotarem o número que receberam na folha e distribuí um pacote com 30 cadeiras impressas (Figura 7) para cada grupo. Informei que deveriam pensar em uma estratégia para contar essas cadeiras. Após apresentar a atividade, mostrei a ampulheta (Figura 3) e comuniquei que teriam três minutos para finalizar a atividade.

No quadro escolar, coloquei o número de cada grupo e, após ter passado o tempo destinado para a atividade, perguntei a estratégia utilizada e a registrei ao lado do respectivo grupo. Três dos grupos contaram separando as impressões que receberam em seis montes de cinco cadeiras. Dois grupos repartiram as impressões entre os integrantes do grupo, como um desses grupos era um quarteto, os integrantes separaram as impressões em quatro montes de sete cadeiras e sobraram duas. E depois, somaram com a quantidade restante de cadeiras impressas. Já o outro grupo era um trio, então os estudantes separaram as impressões em três montes de oito cadeiras e sobraram seis. Um dos sete grupos repartiu as impressões em dois montes com sete cadeiras e mais dois montes com oito cadeiras. Por fim, um único grupo informou que contou as cadeiras uma em uma. O Quadro 12 mostra a quantidade de grupos por estratégia. De modo geral, pode-se dizer que os grupos optaram por dividir as cadeiras impressas em partes com o mesmo número de cadeiras.

Quadro 12: Quantidade de grupos por estratégia utilizada

Estratégia	Quantidade de grupos que utilizou a estratégia
5×6	3
$4 \times 7 + 2$	2 *
$3 \times 8 + 6$	
$2 \times 7 + 2 \times 8$	1
1×30	1

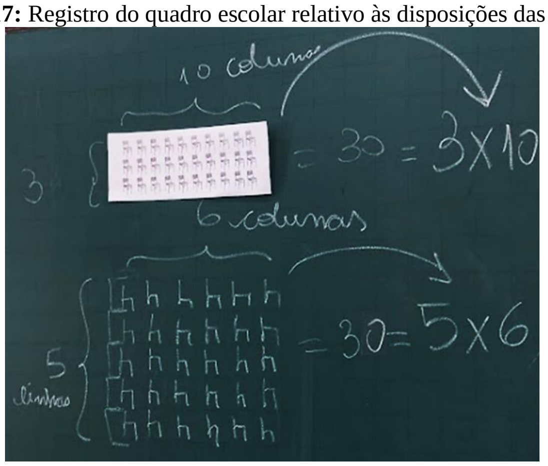
* Apesar de a expressão algébrica ser diferente, os dois grupos utilizaram a mesma estratégia, repartiram as impressões entre os integrantes do grupo e depois somaram com a quantidade restante de cadeiras impressas.

Fonte: Construção da autora

Nesse momento, a Desconfiadinha surgiu novamente na sala e perguntou aos alunos se existia uma estratégia que pudesse ser considerada mais eficiente. Um dos alunos afirmou que separar em montes de cinco era uma boa estratégia, pois “*Não sobra cadeiras, os grupinhos* *de cadeiras fecham certinho*”. Questionei se os demais estudantes concordavam e eles disseram que sim.

Os alunos responderam que não conheciam os arranjos retangulares quando questionados. No entanto, de acordo com a BNCC, a representação em arranjos retangulares é uma estratégia importante para o desenvolvimento da compreensão da multiplicação e das habilidades matemáticas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Portanto, é possível que os alunos já tenham sido expostos a essa representação, mas não estivessem familiarizados com a nomenclatura. Para dar sequência as atividades, mostrei uma forma de disposição das 30 cadeiras em um arranjo retangular com 3 linhas e 10 colunas, disse que não precisávamos contar uma a uma, bastava multiplicar a quantidade de linha pela quantidade de coluna, pois cada linha tinha a mesma quantidade de cadeira e não sobrava nenhuma cadeira. Em seguida, informei que alguns grupos haviam feito de uma forma parecida, pois também poderíamos montar um arranjo retangular de 5 linhas e 6 colunas, e era só multiplicar o número 5 pelo número 6 (Figura 17). Acordamos que os arranjos retangulares poderiam nos ajudar a contar coisas, mas que, além disso, representavam uma multiplicação.

Figura 17: Registro do quadro escolar relativo às disposições das cadeiras



Fonte: Acervo da autora

Um dos estudantes notou que eu não estava de óculos e de cabelos amarrados. Então, perguntou: “*Ué, mas é a Desconfiadinha que está explicando? Achei que ela só desconfiava!*”. Nesse momento, informei que me esqueci de me caracterizar como professora. Em seguida, me caracterizei novamente como docente, deixamos de lado a atividade das cadeiras e começamos a analisar os arranjos retangulares focando na multiplicação. A discussão oral oportunizou a necessidade de uma convenção relativa aos fatores da multiplicação e à quantidade de linhas e colunas de um arranjo retangular. Então, fixamos a primeira como forma de representar aritmeticamente um arranjo retangular. Dessa forma, indiquei aos estudantes que criamos duas representações para uma multiplicação, uma em registro aritmético e outra via arranjo retangular.

Informei aos alunos que poderíamos utilizar outros objetos além da cadeira para representar a unidade do arranjo retangular, tais como flores, moedas e quadrados. Revelei para a turma que não sou habilidosa ao desenhar e que meus arranjos retangulares teriam como unidade os quadrados, por eu consegui-los desenhar com mais facilidade, mas que eles poderiam fazer da maneira como preferissem.

Como próxima atividade, solicitei que cada grupo criasse uma situação na qual os arranjos retangulares poderiam ser utilizados e representassem as seguintes multiplicações: 3×2, 8×6, 1×6, 5×1, e 10×4. Conforme iam desenvolvendo a atividade, eu transitava pelos grupos. Notei que, na maioria dos grupos, apenas um dos integrantes estava criando as representações da multiplicação na folha que entreguei. Então, distribuí mais folhas para que os demais estudantes pudessem realizar a tarefa. Após cinco minutos, perguntei se haviam finalizado a atividade, alguns grupos disseram que sim e outros não. Então, dei mais 3 minutos para finalizar a atividade e em seguida partimos para a plenária.

Na plenária, notamos que todos os grupos desenvolveram uma situação de contagem na qual o arranjo retangular poderia ser útil. Os alunos pensaram em contar lápis em um estojo, gizes em uma caixa, cadeiras em uma sala de aula, facas em um faqueiro, balas em um pote, caixas de sapato em uma loja, pessoas em uma fila e quadrados em uma folha quadriculada. Em seguida, pedi para que um integrante de quatro grupos distintos viesse ao quadro escolar e desenhasse a representação em arranjo retangular de uma das multiplicações que haviam sido solicitadas, sem as repetirem. Todas as representações estavam corretas e utilizavam o quadrado como unidade (Figura 18). Perguntei se algum grupo fez diferente e um grupo informou que ao invés do quadrado utilizou facas, pois a situação desenvolvida pelo grupo envolvia a contagem desse objeto, mas que como no quadro escolar só tinham feito com quadrados, também os utilizou. Então, informei que a unidade poderia ser um objeto qualquer, o importante é que a quantidade de linhas e colunas fossem as mesmas.

Figura 18: Representações em arranjo retangular criadas pelos alunos

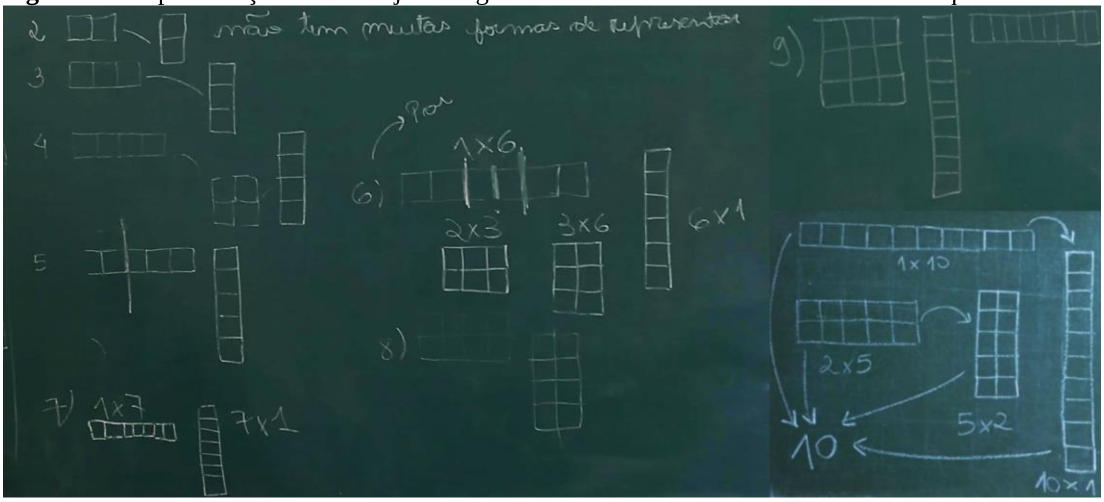
Fonte: Acervo da autora

A Desconfiadinha surgiu novamente na sala e perguntou o que ocorre quando giramos os arranjos retangulares para a direita ou para a esquerda. É importante ressaltar que, para simular o giro aos alunos, virei verticalmente uma folha que havia colocado horizontalmente no quadro escolar com um arranjo retangular de 3 linhas, 10 colunas e quadrados como unidade (Figura 9). Uma aluna levantou a mão e disse: "*Não muda nada*". Outro estudante, logo em seguida, afirmou: "*Muda sim!*". Caracterizada de professora, eu pedi para justificarem suas respostas, a aluna disse que não mudava a quantidade de quadrados e o aluno disse: "*mas muda a ordem dos números*". Eu informei que os dois estavam corretos, pois na multiplicação a ordem dos fatores não altera o produto e a rotação mostrava isso, ou seja, quando giramos, mudamos a ordem dos fatores, mas não a quantidade de quadrados. Explicitei aos alunos que chamamos essa característica da multiplicação de "propriedade comutativa".

A Desconfiadinha manifestou-se, elogiando os estudantes que argumentaram muito bem e foram convincentes. Entretanto, ela ainda tinha mais dúvidas e perguntou se cada número natural possui apenas um arranjo retangular que o representa. Os alunos ficaram em silêncio e, caracterizada de professora, busquei tranquilizá-los, dizendo que poderíamos investigar, então pedi para criarem arranjos retangulares para os números de 2 a 10 nos seus grupos. Conforme iam fazendo, pedia para colocarem uma representação em arranjo retangular no quadro escolar e questionava se algum grupo havia encontrado outra diferente. Inicialmente, apresentaram apenas uma representação em arranjo retangular para os números 2, 3 e 4. Então, eu coloquei mais arranjos retangulares que representavam esses números no quadro. Em seguida, quando comecei a questionar sobre as representações em arranjo retangular para os demais números, um estudante afirmou: "*Sora, é só virar um desses que já tem aí*". Nos últimos números, os alunos já apresentavam todas as possíveis representações em arranjos retangulares com a mesma unidade para os números solicitados.

Com todas as representações para os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 no quadro escolar (Figura 19), a Desconfiadinha perguntou aos alunos o porquê de algumas terem só duas e de outras terem mais. Algumas suposições foram levantadas: "*os números que são pares têm mais representações*", "*os números ímpares só tem duas representações*", "*é porque algumas não têm muitas formas de representar*". Para contrapor a primeira suposição mostrei que o número 2 só possuía duas representações em arranjos retangulares com a mesma unidade, já para a segunda apontei para o número 9 que possuía três dessas representações, por fim, retornei aos estudantes a terceira afirmação como uma questão para todos os estudantes. Percebi que alguns alunos começaram a olhar para o quadro escolar, outros para o caderno e iniciaram conversas em seus grupos.

Figura 19: Representações em arranjo retangular dos números de 2 a 10 construídas no quadro escolar

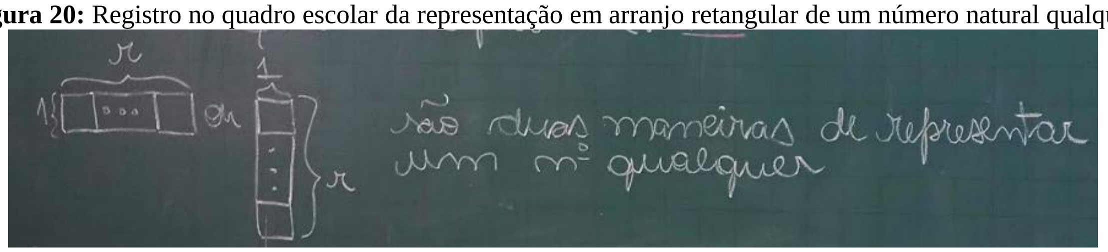


Fonte: Acervo da autora

Inicialmente, constatei um esforço dos alunos em buscar uma resposta à questão lançada, porém, conforme os minutos foram se passando, alguns alunos começaram a se distrair. Sendo assim, pedi pela atenção da turma e perguntei se já tinham ouvido falar nos números primos. Alguns alunos responderam que não, outros que sim, mas que não se lembravam do que se tratava. Então, indiquei o que são os números primos e que eles possuem apenas dois arranjos retangulares em sua representação por possuírem exatamente dois divisores (eles mesmos e o número 1). Já no caso dos demais números, conseguimos repartir o arranjo retangular de uma linha ou de uma coluna que o representa em mais partes, por terem mais divisores, para formar um novo arranjo retangular. De acordo com a BNCC, os números primos devem ser trabalhados de modo explícito no 6º ano do Ensino Fundamental. Sendo assim, optei por fazer uma breve explicação sobre o conteúdo, visto que não era o foco dessa proposta de intervenção pedagógica e não possuía orientações da professora oficial de matemática da turma sobre esse assunto.

Os alunos foram questionados pela Desconfiadinha se havia uma estratégia de representação em arranjo retangular que poderíamos aplicar para qualquer número natural. Iniciamos a discussão pensando em como representar um número genérico, poderíamos dar um nome para esse número, então surgiram duas ideias: “Robertão” e “Ricardo”. Informei aos estudantes que gostaria de algo mais sucinto para escrever e que ao mesmo tempo queria alegrá-los, então, escolheria a letra *r* para representar esse número já que essa é a primeira letra dos dois nomes que sugeriram. Em seguida, pedi para olharem o quadro escolar com as representações em arranjo retangular dos números de 2 a 10 e notarem que em todos os casos existia o arranjo retangular de uma linha e de uma coluna, pois "*é possível completar a linha ou a coluna com a quantidade de quadradinhos que o valor do número representa*". Então, coloquei no quadro um quadrado, seguido de reticências e com um quadrado ao fim (Figura 20), com a justificativa de que "*colocamos um quadradinho, aí vamos completando com outros quadradinhos, por isso dos três pontinhos aqui, até chegar ao número que a gente quer, daí colocamos esse quadradinho no final para dizer que chegamos, no nosso caso no r*".

Figura 20: Registro no quadro escolar da representação em arranjo retangular de um número natural qualquer



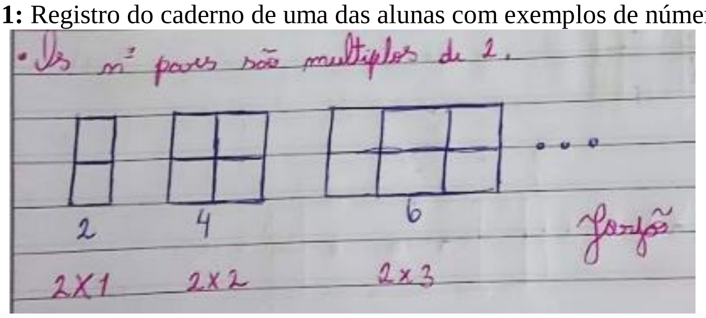
Fonte: Acervo da autora

A percepção que tive nesse momento foi de essa afirmação que fiz aos estudantes apresentada no parágrafo anterior não havia ficado clara. Então, apaguei a letra *r* que estava no quadro escolar (Figura 20) e substituí pelo número sete e informei que "*Aqui a gente sabe que são sete quadradinhos. Então, as reticências que estão no meio representam cinco quadradinhos, pois é a quantidade de quadradinhos que falta para dar o número que queremos, agora o sete. Podemos fazer isso para qualquer número, por isso colocamos o r antes, pois assim generalizamos essa ideia para qualquer número*". Depois desse exemplo, senti que houve uma maior aceitação dos estudantes referente a esse tema.

Notei que os alunos estavam bastante agitados e que a disposição da sala poderia estar prejudicando, visto que alguns estudantes estavam de costas para o quadro escolar. Então, alertei aos estudantes sobre o volume de suas falas e informei que na próxima aula gostaria que todos os integrantes estivessem virados para o quadro escolar para um melhor aproveitamento da aula.

Por fim, a Desconfiadinha perguntou sobre como representar um número par e um número ímpar qualquer utilizando arranjo retangular. Decidi, caracterizada de professora, fazer essa atividade em conjunto com os alunos, pedindo a ajuda deles e construindo a resolução no quadro escolar. Inicialmente, começamos a olhar as representações dos arranjos retangulares dos números pares que estavam no quadro (Figura 19). Alguns alunos identificaram que as representações desses números pares possuíam uma característica semelhante, todos eles poderiam ser representados em um arranjo retangular de duas linhas ou duas colunas. Colocamos algumas representações no quadro escolar (Figura 21) e pedi para que os estudantes me informassem a representação aritmética, na forma de produto, de cada número e colocamos abaixo de cada arranjo. Em seguida, perguntei o que havia de semelhante em todas as representações aritméticas e os alunos informaram que era o primeiro fator.

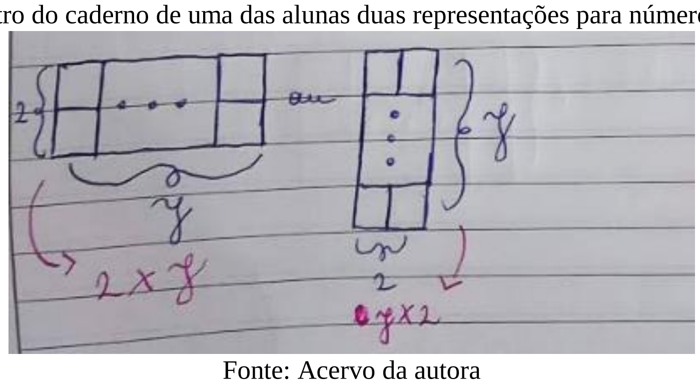
Figura 21: Registro do caderno de uma das alunas com exemplos de números pares



Fonte: Acervo da autora

Perguntei aos estudantes se todos os pares iam ter as características levantadas anteriormente e uma aluna disse: "*Eu acho que sim, sora. É porque o par é múltiplo de 2, né?*". Com essa constatação, afirmei que um número par poderia ser escrito em um arranjo retangular de duas linhas e algumas colunas. Para a quantidade de colunas, os alunos escolheram o nome Jorjão e, assim, a representei pela letra *j*. Além disso, verificamos que poderíamos girar esse arranjo, invertendo a ordem dos fatores, porém mantendo a quantidade, portanto a paridade. A Figura 22 apresenta um registro do caderno de uma das alunas com a síntese da discussão que foi exposta no quadro escolar.

Figura 22: Registro do caderno de uma das alunas duas representações para números pares quaisquer



Fonte: Acervo da autora

Para o número ímpar fizemos algumas investigações com exemplos e vimos o que ocorria quando dividimos por 2. Uma aluna informou: "*para saber se o número é ímpar é só saber o número par, porque o ímpar é o próximo*". Decidi aproveitar essa afirmação, para apresentar uma representação para um número ímpar qualquer. Sendo assim, utilizamos a representação em arranjo retangular dos pares que já tínhamos, acrescentamos um quadrado ao lado e ressaltei a eles que ele também representava o resto da divisão de um número ímpar por 2. O nome que os alunos escolheram para um número qualquer ímpar foi Nóia e o chamei de *n*.

Perguntei aos alunos se eles gostaram da aula e se havia algo que queriam modificar para as demais aulas. Alguns dos alunos informaram que apreciaram a aula e um dos estudantes disse que, de fato, deixar todos os integrantes do grupo virados para o quadro escolar seria melhor. Encerrei a aula indicando que na atividade final deveriam apresentar um esquete teatral com pelo menos um personagem, e que poderiam, ou não, utilizar a Desconfiadinha. Portanto, já poderiam ir pensando nas características e adereços desse personagem, pois poderiam utilizar a aula de artes do dia 21 de outubro para isso.

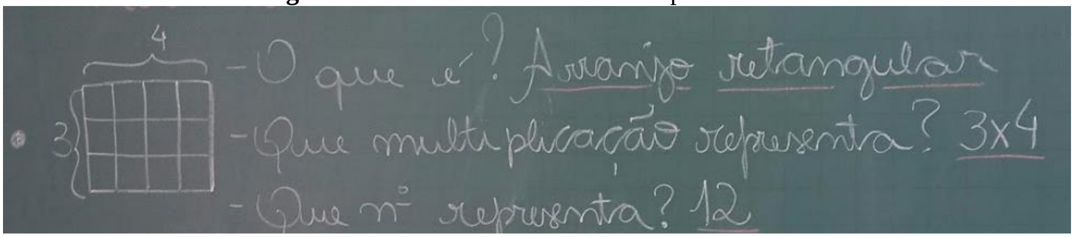
8.3 RELATO DA AULA 2

Essa aula ocorreu no dia 07 de outubro de 2022, com início às 15h10min e término às 16h50min. Neste dia, a professora oficial de matemática da turma informou que a aula deveria terminar com dez minutos de antecedência, pois haveria uma dedetização em todas as salas da escola.

Já caracterizada como professora (Figura 5), fui até a sala, abri a porta e os alunos entraram. Eles se organizaram nos grupos e mantiveram todas as cadeiras viradas para frente. Essa nova disposição se mostrou efetiva para o rendimento da aula. Realizei a chamada e dos 23 alunos que compõem a turma, dois estudantes faltaram. Alguns grupos alteraram sua configuração devido a divergências entre seus integrantes. Assim, passamos a ter oito grupos: três quartetos, um trio e quatro duplas. Esses grupos se mantiveram no restante da intervenção pedagógica.

Inicialmente, apresentei a revisão dos conceitos e resultados da aula anterior, incluindo números primos e pares. Coloquei um arranjo retangular no quadro escolar, perguntei aos estudantes do que se tratava aquela figura, que multiplicação e que número ela representava, prontamente alguns dos estudantes responderam as questões em voz alta. A Figura 23 apresenta a sistematização da discussão que foi passada no quadro escolar.

Figura 23: Parte inicial da revisão da primeira aula



Fonte: Acervo da autora

Um dos estudantes questionou a resposta 3×4, visto que esse arranjo também representava a multiplicação 4×3. Informei que ele estava correto, que se considerássemos o número de colunas como primeiro fator da multiplicação e o número de linhas para o segundo fator, o arranjo também representaria a multiplicação que ele pontuou. Entretanto, reiterei que na aula passada combinamos que, na representação aritmética, iríamos colocar o número de linhas multiplicado pelo número de colunas. Então, o aluno disse: "*É, verdade! Eu tinha esquecido*".

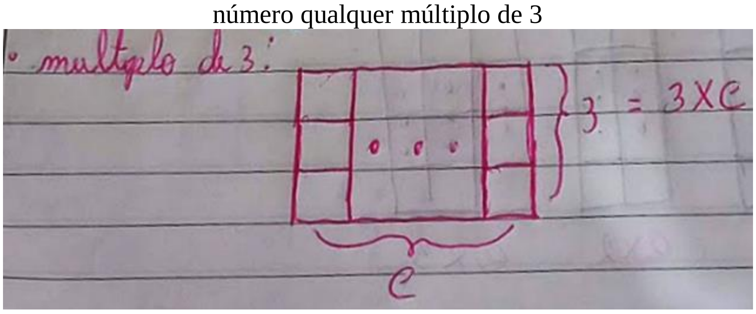
Demos continuidade à revisão, retomando a representação em arranjo retangular que é possível para um número natural qualquer (uma linha e r colunas ou r linhas e uma coluna). Além disso, relembramos que os números primos possuíam apenas essas duas representações possíveis em arranjos retangulares e que os demais números possuíam mais devido ao fato de o número de divisores ser maior, o que possibilita "cortar" o arranjo retangular de uma linha que o representava em partes iguais, que poderíamos juntar e formar um novo arranjo retangular. Para finalizar essa parte da aula, resgatamos a representação em arranjo retangular de um número par e ímpar qualquer. Relativamente ao caso de um número natural qualquer e de um número par qualquer, por termos utilizado nomes para a quantidade de linhas ou colunas, os alunos rapidamente pontuaram que poderíamos utilizar uma letra para representar "algumas linhas" ou "algumas colunas". Além disso, conseguiram apresentar uma representação algébrica para dois casos: $1\times r$ ou $r\times 1$ para um número qualquer e $2\times j$ ou $j\times 2$ para um número par qualquer. Acredito que esse processo foi rápido, visto que já havíamos discutido sobre esses temas na aula anterior e, portanto, os alunos tinham as representações anotadas em seus cadernos.

Finalizada a revisão, a Desconfiadinha apareceu e questionou se poderíamos representar um múltiplo de 3 qualquer. Uma aluna disse: "*se é qualquer, a gente vai poder escolher o nome para alguma coisa, pode ser Emo?*". Caracterizada de professora, pontuei que em algum momento poderíamos usar esse nome, mas que iríamos pegar apenas a letra *e*, pois ela era a inicial do nome que ela escolheu. Deixei essa discussão de lado para voltar nela mais adiante.

Três grupos começaram a realizar representações de alguns exemplos, como dos números 3, 6 e 9. Outro grupo colocou uma coluna a mais no arranjo retangular de 2 linhas e *j* colunas, mostrei que não conseguimos representar o número 3 naquele formato, informei que a construção representava um múltiplo de 2 e questionei se era a quantidade de colunas que deveríamos aumentar. Um dos grupos apresentou um arranjo retangular de três linhas e uma coluna, e escreveu a letra *e* acima da coluna, então informei que esse era um caso particular (3×1), que gostaria de saber para qualquer múltiplo de 3, então não poderia ter só uma coluna, e questionei como poderíamos melhorar a representação que tínhamos começado.

Notei que dois grupos haviam concluído a atividade de forma correta. No quadro escolar, decidi colocar a representação de alguns números múltiplos de 3 em arranjos retangulares de 3 linhas e questionar se existia alguma semelhança entre eles. Um dos alunos disse que poderíamos sempre distribuir a quantidade em 3 linhas, pois o número dado é divisível por três. Então, reforcei que todo múltiplo de 3 pode ser representado em um arranjo retangular de três linhas, e algumas colunas, para representar essas colunas poderíamos começar com um quadrado, utilizar as reticências para representar os quadrados que faltam, como já havíamos discutido anteriormente, e finalizar com outro quadrado para dizer que em algum momento para de haver quadrados. Outra estudante, que ainda não havia contribuído, disse: "*O Emo está no número de colunas, né sora?*". Concordei com a estudante e coloquei a letra *e* para representar a quantidade de colunas. Perguntei se alguém saberia me dizer a representação algébrica, e um dos alunos afirmou: "*É 3 vezes e*". Sendo assim, coloquei essa representação ao lado do arranjo retangular. A Figura 24 apresenta as representações em arranjo retangular e algébrica de um múltiplo de 3 qualquer que uma aluna copiou do quadro escolar em seu caderno.

Figura 24: Registro do caderno de uma das alunas com a síntese da discussão sobre a representação de um número qualquer múltiplo de 3



Fonte: Acervo da autora

A Desconfiadinha surgiu novamente e perguntou sobre como representar um número múltiplo de 4 qualquer. Como professora, disse que esse era o novo desafio deles e mostrei no quadro escolar que já havíamos feito uma atividade parecida para múltiplo de 2 e para múltiplo de 3.

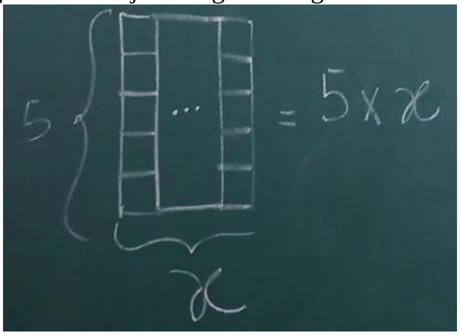
Circulei pelos grupos e todos haviam realizado a atividade de maneira correta por meio dos arranjos retangulares. Em plenária, coloquei no quadro escolar a representação que criaram nos grupos (Figura 25), questionei sobre a quantidade de linhas, informaram que era 4 e sobre a quantidade de colunas, não houve um consenso. Eu acredito que nesse momento os estudantes se deram conta que poderiam utilizar letras para representar a quantidade de colunas. E a diversidade de letras foi importante para explicitar que poderia ser qualquer uma, desde que houvesse um consenso sobre o seu significado. Cada grupo escolheu um nome diferente para representar a quantidade de colunas, então fizemos uma votação e a maioria votou no nome Cachorro Caramelo. Sendo assim, chamamos a quantidade de colunas de *c*. Como Desconfiadinha, perguntei qual seria a representação algébrica para o múltiplo de 4 qualquer e os alunos prontamente responderam que era $4 \times c$.

Figura 25: Representação em arranjo retangular e algébrica de um múltiplo de 4 qualquer

Fonte: Acervo da autora

Para a atividade seguinte, a Desconfiadinha perguntou como poderíamos representar um múltiplo de 5. Vários alunos já responderam, sem discutir com seu respectivo grupo, que poderia ser um arranjo retangular com cinco linhas e *x* colunas. Escolheram a letra *x*, nessa situação, pois queria que remetesse ao nome Xuxa, segundo nome mais votado na atividade anterior. Então, no quadro escolar, colocamos a representação em arranjo retangular e algébrica de um múltiplo qualquer de 5 (Figura 26).

Figura 26: Representação em arranjo retangular e algébrica de um múltiplo de 5 qualquer

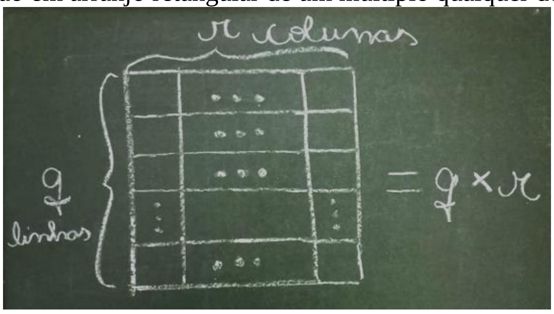


Fonte: Acervo da autora

A Desconfiadinha pontuou que estava orgulhosa dos estudantes e que mereciam uma salva de palmas. Todos festejaram a argumentação, mas assim que os alunos silenciaram a Desconfiadinha surgiu com a última questão do dia: como representar um múltiplo de um número qualquer?

A maioria dos grupos apresentou como resposta um dos arranjos retangulares que criamos para representar um número natural qualquer, a saber, o arranjo de q linha e r colunas. Sendo assim, em plenária, iniciei uma discussão, coloquei o arranjo que apresentaram no quadro escolar e pedi para que me falassem a representação algébrica dele, alguns alunos responderam $1 \times r$. Então, associando com as demais representações que vimos e com a convenção adotada, apontei que aquela figura representava um múltiplo qualquer de 1; quando a copiamos e colamos abaixo delas, temos um múltiplo qualquer de 2, se colocarmos a cópia mais uma vez abaixo, um múltiplo de 3, e assim sucessivamente. Como queríamos um múltiplo de um número qualquer, a quantidade de linha precisava representar um número qualquer, escolhemos a letra q para quantidade de linhas e a Figura 27 apresenta a construção que criamos em conjunto.

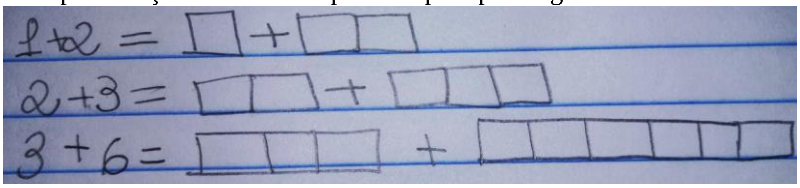
Figura 27: Representação em arranjo retangular de um múltiplo qualquer de um número qualquer q



Fonte: Acervo da autora

Lancei a atividade sobre como representar o resultado de uma adição por meio de arranjos retangulares, pois acreditei que rapidamente os alunos iriam associar adição a junção, união ou justaposição. Entreguei uma folha para cada grupo e pedi que a devolvessem com a representação das seguintes somas: 1+2, 2+3, 2+6 e 3+6. Às 16h50 recolhi o material e encerrei a aula. Em uma breve análise das resoluções que estavam em minhas mãos, notei que grande parte dos grupos representaram apenas as parcelas por meio dos arranjos retangulares com um sinal de adição entre elas (Figura 28).

Figura 28: Representações construídas pelo Grupo 1 para algumas somas com duas parcelas



Fonte: Acervo da autora

Reconheço que, na apresentação da atividade para os alunos, eu poderia ter dado mais ênfase ao resultado, para que as representações desenvolvidas fossem de acordo com o idealizado. Entretanto, ressalto que o raciocínio apresentado pelos grupos mostrou dedicação na resolução da atividade.

Reuni-me para conversar com a professora oficial de matemática na sala dos professores, pois fui convidada pelos alunos para o evento de comemoração ao dia das crianças que coincidiria com uma aula de matemática e uma aula de artes da nossa intervenção pedagógica. Assim, os alunos passaram a ter três aulas para a resolução das atividades (duas de matemática e uma de artes). Dessa forma, no dia 17 de outubro, as questões da atividade final deveriam ser sorteadas e os grupos poderiam iniciar o desenvolvimento dela, podendo tirar dúvidas comigo na aula de matemática. Já no dia 21 de outubro, os alunos deveriam iniciar os trabalhos na aula de artes e dariam sequência na aula de matemática com o intuito de finalizar a atividade para apresentar para a turma o resultado no dia 24 de outubro.

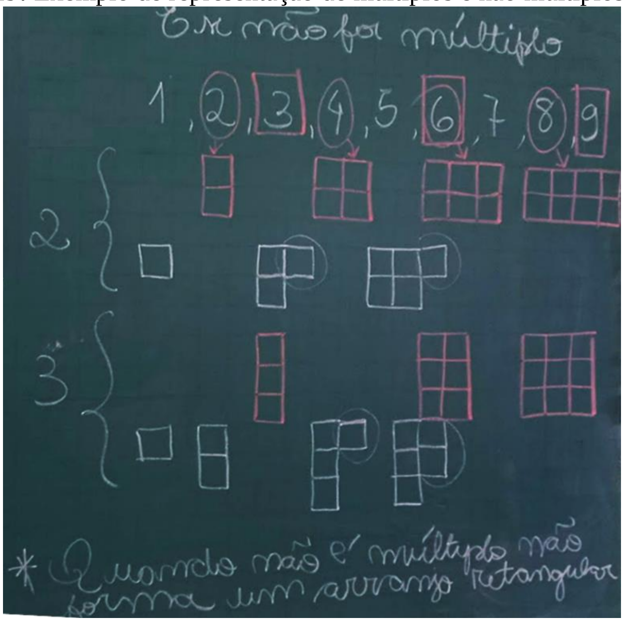
8.4 RELATO DA AULA 3

Esta aula ocorreu no dia 10 de outubro de 2022, das 13h00min às 14h50min. Neste dia, esqueci-me de me caracterizar de professora antes de entrar na sala e durante a chamada, duas alunas afirmaram que eu estava muito desconfiada, referindo-se à personagem Desconfiadinha, então, amarrei meus cabelos e coloquei os óculos e agradeci a elas por terem me lembrado. Dos 23 alunos, apenas dois (integrantes do Grupo 1) não estavam presentes.

Iniciamos com uma revisão das representações algébricas e pictóricas, por meio de arranjos retangulares, dos múltiplos de 2, 3, 4, 5 e de múltiplos de um número qualquer que havíamos realizado na aula anterior. Em seguida, decidi partir para a representação dos números que não são múltiplos dos números supramencionados, para, em seguida, voltar à atividade da adição já lançada.

Iniciei a discussão sobre a representação de não múltiplos de um número dado com exemplos (Figura 29). Notamos, para os casos que estávamos vendo, que não é possível expressar um número que não é múltiplo de 2 em um arranjo retangular com duas linhas, pois sempre sobra um quadrado. Para um não múltiplo de 3, ocorre a mesma coisa quando tentamos apresentá-lo em um arranjo retangular de três linhas, podendo sobrar um ou dois quadrados. Durante essa discussão, eu ia apresentando a divisão de alguns casos particulares (1 dividido por 2, 3 dividido por 2, 5 dividido por 2, 1 dividido por 3, 2 dividido por 3, 4 dividido por 3 e 5 dividido por 3) associando o resto com os quadrados que sobraram. Nesse momento, um dos alunos afirmou: "*quando não é múltiplo, não forma um arranjo retangular, fica como se fosse uma barra de chocolate que alguém comeu alguns quadradinhos*". Outro estudante, em seguida, informou: "*a representação fica parecendo uma pecinha daquele jogo de Tetris*". Sendo assim, concluímos que quando não é múltiplo de um número qualquer, a divisão não tem resto zero. Dessa forma, não é possível criar um arranjo retangular com o número de linhas desejado, sobrarão quadrados. Além disso, a quantidade de quadrados restantes equivale ao resto e será menor que o número de linhas em questão.

Figura 29: Exemplo de representação de múltiplos e não múltiplos de 2 e 3

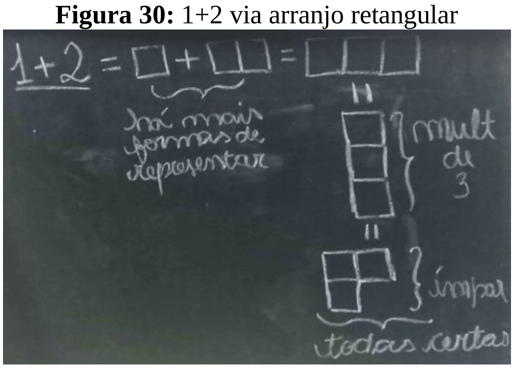


Fonte: Acervo da autora

Uma aluna perguntou como chamávamos a representação de quando não era múltiplo, uma vez que não poderia ser arranjo retangular, pois esse é só quando forma um retângulo. Informei aos estudantes que não conhecia um nome, mas que poderíamos escolher em conjunto, eu pedi sugestões à turma e as nomenclaturas sugeridas: Tetris, Chocolate Comido e Incompletinho. Fizemos uma votação e decidimos chamar as representações de números em arranjos que não formam um retângulo de Tetris. Observamos que algumas peças do jogo Tetris são arranjos retangulares. Entretanto, na convenção adotada na turma a expressão Tetris se refere apenas aos casos que as representações pictóricas não são arranjos retangulares completos.

Informei aos estudantes que eu analisei as respostas que eles formularam sobre a representação das somas e que deveríamos retomar essa atividade com o intuito de sistematizar o conteúdo. Além disso, afirmei que achei inteligente eles partirem da representação aritmética para a em arranjos retangulares da expressão. Entretanto, estava interessada no processo de juntar as representações das parcelas, isto é, do resultado dessas adições e que poderíamos fazer isso de diversas maneiras. Para exemplificar, utilizei a expressão algébrica 1+2 (Figura 30).

Figura 30: 1+2 via arranjo retangular



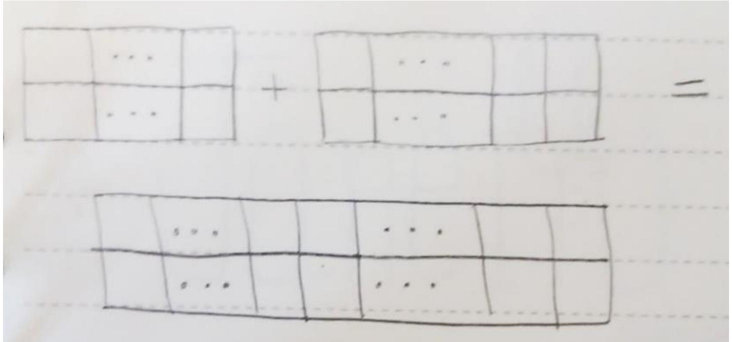
Fonte: Acervo da autora

A Figura 30 foi construída no quadro escolar enquanto eu falava que poderíamos expressar as parcelas de mais de uma maneira, que, para somar, poderíamos juntar as parcelas lado a lado ou uma abaixo da outra e, após isso, teríamos diferentes representações de um mesmo número, a soma, que poderiam nos dar informações distintas. No exemplo em específico, uma das representações formava um arranjo retangular de três linhas, a qual nos possibilita concluir que a soma é um múltiplo de 3. Outra representação nos permite afirmar que o resultado encontrado é um número ímpar, ou, por outro lado, que não múltiplo de 2, uma vez que forma um Tetris de duas linhas. Apresentei no quadro escolar as demais expressões solicitadas na atividade e sorteei, pela chamada, alguns alunos para apresentarem uma resolução. Todas as respostas apresentadas estavam corretas.

A Desconfiadinha surgiu e lançou um questionamento referente ao tipo de número que resulta da adição de dois números pares. Um dos alunos disse: "*2+4 é 6, 2+2 é 4, 10+6 é 16, a soma de dois números pares é par*". Já caracterizada de professora, informei que era um ótimo palpite, mas eu gostaria de saber a razão disso ocorrer e essa justificativa deveria ser entregue para mim por todos os grupos. Os demais grupos aceitaram a conjectura apresentada pelo estudante e partiram para a investigação. Inicialmente, todos os grupos apresentaram diversos exemplos, via arranjo retangular para comprovar a hipótese. Então, como Desconfiadinha, apontei para um novo, a adição de dois números aleatórios que estavam na casa dos milhões. Após apresentar esse novo exemplo, algumas respostas foram dadas: "*nossa, mas vou ficar a minha vida toda desenhando quadrados*", "*cruzes, nós não vamos representar esse número*", "*não tem como testar para esses números tão grandes*", entre outras semelhantes. Então, como professora e falando para toda a turma, informei que testar exemplos não era uma boa estratégia, naquele contexto (há situações em que é possível provar por exaustão), uma vez que sempre faltaria uma infinidade de casos para testarmos, uma sugestão era refletir sobre a representação de um número par qualquer, ou seja, um múltiplo de 2, que já havíamos feito.

Com a sugestão em perspectiva, os grupos começaram a trabalhar com arranjos retangulares genéricos que representavam um número par. Os grupos de número 3 e 1 concluíram que a adição resultava em um número par, mas utilizaram arranjos iguais para representar as parcelas e pontuei que, dessa forma, estaríamos representando a soma de dois números pares quaisquer, porém iguais. Os integrantes do Grupo 7, para somar, juntaram os arranjos retangulares das parcelas uma abaixo da outra, chegando a um arranjo retangular de quatro linhas e com algumas colunas incompletas, concluindo que a soma era um Tetris, então indiquei que essa representação não nos dava muitas informações e precisei sugerir que unissem de outra forma. O Grupo 8 realizou a representação via arranjo retangular esperada (Figura 31), mas seus integrantes não souberam argumentar referente ao resultado encontrado e, assim, precisei interferir e observar que como era um arranjo retangular de duas linhas, era um múltiplo de 2, ou seja, um número par. Por fim, apenas o Grupo 2 conseguiu apresentar uma demonstração para a conjectura (Figura 39) que, por sua vez, foi elaborada por um de seus integrantes. Os demais grupos não pareceram estar engajados, não responderam aos incentivos proporcionados para que fizessem a atividade e, portanto, não desenvolveram ideias nem argumentos.

Figura 31: Representação da soma de dois números pares quaisquer pelo Grupo 8



Fonte: Acervo da autora

Notei uma grande discrepância entre as produções dos grupos, enquanto alguns já haviam finalizado a atividade, outros ainda não tinham representado de forma genérica cada parcela. Sendo assim, no quadro escolar, em conjunto com os alunos, construímos duas demonstrações: uma em arranjo retangular e uma algébrica, relacionando-as como exposto no roteiro da intervenção pedagógica (seção 7). Nessa situação, apresentei o termo "demonstração" aos estudantes como "*argumentos tão fortes e genéricos que cobrem todos os casos possíveis, por isso são convincentes*". Compreendo que a definição oferecida carece de precisão, porém, meu objetivo era transmitir aos estudantes uma concepção geral e compreensível ao nível deles do que consiste a demonstração matemática. Em seguida informei: "*Aqui no quadro temos duas demonstrações: uma em arranjo retangular e uma que chamamos de algébrica, porque ela usa letras e nomes para representar números*". Como ao longo das aulas estávamos trabalhando com representações pictóricas e algébricas, explicitando o processo de conversão entre elas e suas relações, eu notei que os estudantes não apresentaram estranheza referente aos registros no quadro escolar, acompanharam e aceitaram a argumentação. Para finalizar essa parte, registrei a conclusão em língua materna no quadro escolar.

A Desconfiadinha surgiu novamente e questionou o tipo de número que resulta da adição de dois números ímpares. O aluno que respondeu na atividade anterior disse que resultava num número ímpar e tivemos o seguinte diálogo em frente à turma:

"*Será? Quanto é 1+3?*", disse eu.

"*É quatro!*", o aluno respondeu.

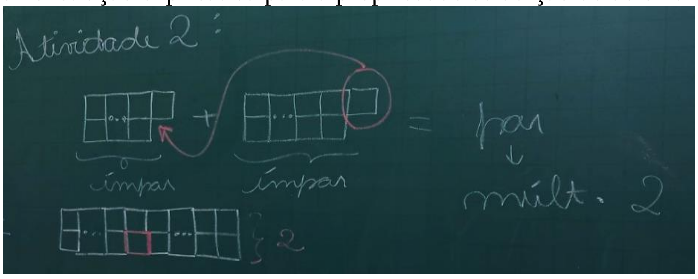
"*E 4 é ímpar?*", questionei.

"*Não, né!*" o aluno afirmou.

“*Então, acabamos de provar que a adição de dois números ímpares não resulta necessariamente em um número ímpar. Sempre que a gente encontra um exemplo que desmente o que supomos, a gente o chama de contraexemplo.*”, conclui.

Logo após ouvir o diálogo acima, outro estudante afirmou que a adição de dois números ímpares resulta em um número par. Então, com a ampulheta em mão, disse que teriam cinco minutos para preparar uma justificativa em seus grupos. Entretanto, depois de passado o período combinado, os grupos ainda não haviam finalizado a atividade. Sendo assim, como estávamos nos minutos finais da aula, decidi realizar a demonstração explicativa em conjunto com a turma no quadro escolar. Inicialmente apresentei uma representação em arranjo retangular de uma das parcelas genericamente. Em seguida, relembrei que não poderíamos utilizar a mesma representação para a segunda parcela, pois queríamos dois números ímpares quaisquer e não dois iguais, então, eu construí uma diferente (Figura 32). Após isso, informei que para somar teríamos que juntar os arranjos que representavam as parcelas, se juntasse, uma abaixo da outra, teríamos 4 linhas e algumas colunas incompletas, o que não nos era útil. Assim, percebemos que se juntássemos os quadrados que estavam sobrando e juntássemos lado a lado as representações, chegaríamos a um arranjo retangular de 2 linhas que representa um número par. A Figura 32 apresenta a sistematização realizada no quadro escolar.

Figura 32: Demonstração explicativa para a propriedade da adição de dois números ímpares



Fonte: Acervo da autora

A demonstração acima seguida do registo de sua conclusão “a soma de dois números ímpares quaisquer é um número par” foi o último conteúdo visto nesta aula. Particularmente, senti que os alunos acompanharam o desenvolvimento da demonstração e a conclusão obtida por meio dela. Devido ao tempo limitado da aula, não consegui propor uma demonstração com registros de representações algébricas para a proposição.

Durante as atividades o Grupo 5 manteve-se circulando entre os grupos 4 e 6 que, por sua vez, demoravam a copiar os apontamentos do quadro escolar e enquanto eu estava elucidando algo para a turma, ficavam conversando entre si. Chamei a atenção dos integrantes desses grupos várias vezes durante a aula. Entretanto, quando recolhi os materiais que deveriam me entregar, notei que não produziram dados, apenas copiaram as anotações do quadro escolar. Após a aula com os alunos, informei essa situação à professora oficial de matemática da turma e ela pontuou que constantemente os integrantes dos grupos mencionados anteriormente adotam essa postura nas diversas disciplinas.

8.5 ANÁLISE DAS AULAS 1, 2 E 3

8.5.1 Registros de Representações Semióticas

Na primeira atividade da aula 1, os alunos, por meio de suas estratégias (Quadro 12) puderam visualizar representações em um mesmo registro de representação semiótica para a quantidade de 30 cadeiras. Tais representações, durante a plenária, foram associadas à multiplicação, ao processo inverso da divisão com resto (divisão euclidiana) e utilizadas para introduzir os arranjos retangulares. A Figura 17 (p. 75), por exemplo, mostra três registros de representações semióticas diferentes para um mesmo objeto matemático. Nela, o número 30 é representado pictoricamente (por meio de arranjos retangulares), aritmeticamente (como multiplicação de dois fatores) e no sistema decimal (através do sistema hindu-arábico). Além disso, os alunos também converteram a concepção que desenvolveram de arranjo retangular na atividade inicial para uma situação cotidiana que tal tema poderia ser aplicado (contagem de distintos objetos como: lápis, gizes, mesas, facas, pessoas, caixas de sapato, balas e quadrados), por meio da língua materna.

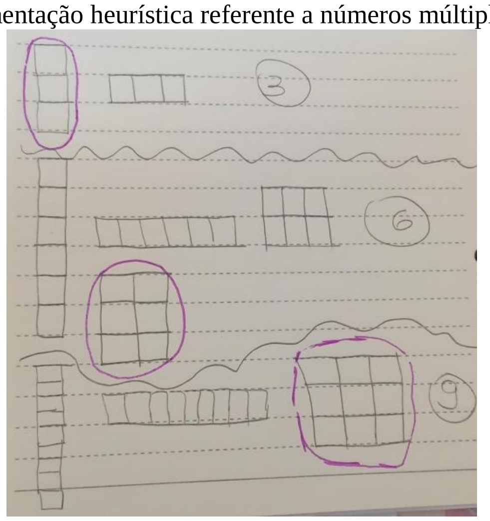
Nesta mesma aula, os grupos prontamente conseguiram realizar as conversões solicitadas na atividade que envolvia a transformação do registro de representação aritmética para o registro de representação em arranjo retangular de algumas multiplicações (3×2, 8×6, 1×6, 5×1, e 10×4). Durante o desenvolvimento da atividade, cada integrante dos grupos desenvolveu pelo menos uma representação e os apontamentos entregues estavam com as representações corretas, o que comprova que todos os grupos conseguiram converter os registros de representação aritmética para pictórica. A Figura 18 (p. 76) mostra a resolução que quatro integrantes de grupos distintos registraram no quadro escolar durante a plenária.

Na atividade de representação dos números de 2 a 10 em arranjos retangulares, ainda na aula 1, os grupos criaram pelo menos uma representação para cada elemento da lista de números solicitada. Sendo assim, criaram conversões entre as representações no sistema decimal e em arranjos retangulares. Além disso, implicitamente recorreram ao significado da multiplicação como arranjo retangular, representando o número como um produto da quantidade de linhas pela quantidade de colunas. Os integrantes dos Grupos 2 e 5, na construção dos arranjos retangulares, pontuaram que poderiam, "*simplesmente girar algumas figuras em 90º graus para a direita ou para a esquerda*" e gerar uma nova representação para o número. Por meio deste fato, concluímos que esses grupos realizaram tratamentos ao apresentarem uma nova representação num mesmo registro de representação semiótica.

Na segunda aula, no momento de revisão foi possível notar que os alunos conseguiram converter a representação pictórica apresentada para uma representação aritmética e uma representação no sistema decimal como mostra a Figura 23 (p. 82). Relativamente às representações de um número natural qualquer, de um número par qualquer e de um número ímpar qualquer, os alunos possuíam apontamentos da aula anterior em seus cadernos. Assim, não é possível afirmar se realizaram tratamentos e conversões de forma autônoma ou se recorreram às anotações para participarem das discussões.

No que diz respeito à atividade de representação pictórica e algébrica de um número natural qualquer múltiplo de 3, durante o seu desenvolvimento, os grupos realizaram tratamentos e conversões de representações. Na investigação, por meio de exemplos, que alguns grupos realizaram (Figura 33) foi possível notar que os alunos apresentaram distintas representações pictóricas para um mesmo número, ou seja, realizaram tratamentos entre essas representações e também conversões ao explicitar o número no sistema decimal em questão.

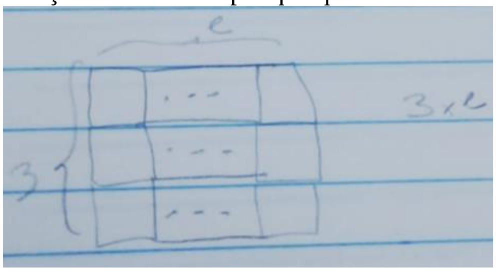
Figura 33: Experimentação heurística referente a números múltiplos de 3 do Grupo 1



Fonte: Acervo da autora

Na própria solução da atividade, desenvolvida autonomamente pelos Grupos 2 e Grupo 8 (Figura 34[4]) como também em plenária com a turma (Figura 24, p. 83), há duas representações distintas e em registros de representações semióticas diferentes, o que mostra que os estudantes realizaram conversões entre elas.

Figura 34: Representações de um múltiplo qualquer de 3 construídas pelo Grupo 2



Fonte: Acervo da autora

Relativamente à atividade de representação de um número natural qualquer múltiplo de 4 e 5, os grupos notaram semelhanças com a atividade anterior e já partiram para a representação genérica pictórica e algébrica desses números (Figura 25 e Figura 26, pp. 84-85). Em plenária, notamos que cada grupo escolheu uma letra diferente para representar o número de colunas. Consideramos essa situação benéfica, pois a diversidade de letras explicitou que, independente da letra escolhida, a relevância estava no significado adotado para o símbolo: generalizar a quantidade de colunas.

A atividade que solicitava a representação de um número natural qualquer múltiplo de q exigiu um maior nível de abstração dos estudantes em comparação com as atividades anteriores. Foi possível notar que os grupos apresentaram dificuldades na resolução dessa atividade, visto que a maioria representou essa situação utilizando, erroneamente, o arranjo retangular que representa um número qualquer (Figura 20). Assim, inferimos que a dificuldade se deu por conta da generalização das linhas e colunas. Por outro lado, após o processo de construção de um número natural qualquer múltiplo de q (Figura 27) ser apresentado no quadro escolar por mim, senti que os alunos compreenderam a representação.

No fim da segunda aula, foi solicitado que os estudantes representassem o resultado da adição de números naturais por meio de arranjos retangulares em alguns exemplos. O objetivo dessa atividade era associar a adição com a junção, a união ou a justaposição, fazendo com que os estudantes juntassem as representações das parcelas. Entretanto, a maioria dos grupos representaram, por meio dos arranjos retangulares, as parcelas com um sinal de mais entre elas, como mostra a Figura 28 (p. 86). Os grupos não apresentaram a resolução esperada,

[4] Inserimos apenas a resolução do Grupo 2, pois a realizada pelo Grupo 8 é semelhante. A única diferença é a letra utilizada para representar a quantidade de colunas no arranjo retangular.

porém desenvolveram uma forma de representar o que lhes foi proposto, que pode ter sido motivada por um não esclarecimento dos termos adição (operação) e soma (resultado de adição). Mesmo assim, passaram do registro de representação algébrica para o registro de representação em arranjos retangulares. Reconheço que durante a apresentação da atividade, como professora, deveria ter focado na soma e explicitado a diferença entre a operação e o resultado para evitar essa imprecisão.

Na terceira aula, os grupos buscaram demonstrar a proposição "a soma de dois números pares quaisquer é um número par". Nesse processo, todos os grupos escolheram a representação pictórica para resolver a atividade e foi apenas na plenária que apresentei aos estudantes a demonstração algébrica para a situação (Quadro 10).

A demonstração para a proposição "a soma de dois números ímpares quaisquer é um número par" (Figura 32, p. 91) foi realizada principalmente em plenária de forma dialogada com os alunos, por isso não apresentaremos análise dessa atividade. Inferi, por meio das minhas percepções, que os alunos acompanharam o desenvolvimento da construção da demonstração e que a eles foram apresentados tratamentos dentro de um mesmo registro de representação pictórica por meio de arranjos retangulares.

8.5.2 Etapas da construção de uma prova

As estratégias utilizadas pelos estudantes na realização da atividade inicial (Quadro 12, p. 74) da aula 1 mostram que os grupos realizaram uma experimentação heurística para resolver a atividade. Em dois dos grupos, por exemplo, alguns integrantes relataram que não poderiam contar as figuras uma a uma, pois "*A professora disse que tinha que ser uma estratégia. Então, tem que contar de um jeito diferente*". Desse modo, deduzimos que a palavra "estratégia" utilizada na apresentação da atividade, impulsionou os estudantes a pensarem em maneiras diferentes de contagem.

As demais atividades da aula 1 também proporcionaram a experimentação heurística (Figura 17, Figura 18, Figura 19, pp. 75-78, por exemplo), pois foram atividades voltadas à familiarização dos estudantes com as representações em arranjos retangulares, seus significados e algumas convenções necessárias para a sua representação.

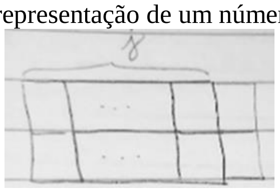
A identificação de padrão na resolução das atividades ocorreu de forma explícita nas atividades relativas à representação pictórica de um número natural qualquer, de um número qualquer par e de um número qualquer ímpar, por meio de arranjos retangulares. No desenvolvimento dessas atividades, alguns alunos, de distintos grupos, ao analisarem as representações de números naturais específicos, notaram que era sempre possível representar um número em um arranjo retangular de uma linha ou de uma coluna, que os números pares poderiam ser representados em arranjos retangulares de duas linhas ou duas colunas (Figura 21, p. 80) e que os números ímpares poderiam ser representados por um número par (representado em arranjo retangular) acrescido de um quadrado.

Tendo em vista os padrões identificados, as conjecturas foram formuladas relativamente à representação desses números (Figura 20, Figura 22, pp. 79-80, por exemplo). A argumentação dos estudantes foi surgindo conforme iam formulando as conjecturas: "*sempre dá para fazer em uma linha, é só colocar a quantidade de quadradinhos do número*", afirmação feita por um integrante do Grupo 1; "*É múltiplo de 2, então dá para ir separando de dois em dois e colocando um do lado do outro ou um embaixo do outro, por isso que dá em duas linhas ou duas colunas, entendeu?*", fala realizada por uma integrante do Grupo 2 para um colega de seu grupo que não havia compreendido a assunto; "*para saber se o número é ímpar é só saber o número par, porque o ímpar é o próximo*", apesar de confusa a fala da estudante em plenária para a turma, inferimos que ela quis dizer que um número ímpar é um número par acrescido de um, o que possibilitou a construção da representação de um número ímpar qualquer (Figura 13, p. 62).

No que diz respeito à atividade de representação pictórica e algébrica de um número qualquer múltiplo de 3 da segunda aula, os grupos passaram pela experimentação heurística testando para casos específicos, manipulando a representação pictórica de um número múltiplo de 2 e realizando um esforço de generalização. A investigação por meio de exemplos (Figura 33, p. 93) possibilitou a identificação de padrão, "*tá dando sempre para escrever em três linhas*", comentário feito por um integrante do Grupo 1, que também apresentou essa afirmação em plenária para a turma.

Já a manipulação, realizada pelo Grupo 8, da representação pictórica de um número múltiplo de 2 (representação à esquerda da Figura 22, p. 80) explicitou uma tentativa mal sucedida de argumento válido, pois o grupo que a fez aumentou a quantidade de colunas na representação (Figura 35). Assim, geraram um representação pictórica de 2 linhas e $j+1$ colunas que continua representando um número par, ou seja, um número múltiplo de 2.

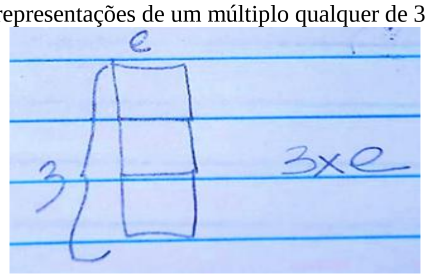
Figura 35: Tentativa mal sucedida de representação de um número qualquer múltiplo de 3 pelo Grupo 8



Fonte: Acervo da autora

No esforço de generalização, o Grupo 2 construiu um arranjo retangular de 3 linhas e uma coluna, nomeando a quantidade de colunas de *e*, e apresentando, ao lado, uma representação algébrica para a situação em questão. Tal construção (Figura 36) mostra uma tentativa de representação que não foi efetiva em arranjo retangular e correta algebricamente. Nesse sentido, inferimos que o grupo compreendeu a característica genérica da letra *e*, porém não conseguiu expressá-la por meio de arranjos retangulares.

Figura 36: Tentativa de representações de um múltiplo qualquer de 3 construídas pelo Grupo 2



Fonte: Acervo da autora

As conjecturas criadas pelos Grupos 2 e 8 (Figura 35 e Figura 36) foram refutadas por mim e, em seguida, esses grupos realizaram a representação corretamente (Figura 34, p. 94). Para os demais grupos, essa representação foi construída em plenária, na qual os alunos participaram com comentários (mencionados no relato) em todo o processo.

Para representar um número natural qualquer múltiplo de 4 e 5, todos os grupos identificaram um padrão referente à atividade anterior que era semelhante. Algumas falas presentes entre os grupos confirmam essa afirmação: "*Que fácil! Vai ser a mesma coisa, mas agora é com 4 linhas*", "*Eu acho que é bem parecido com o outro. A gente tem que preencher só mais uma linha*", "*Vocês viram que no múltiplo de 2 deu duas linhas, no múltiplo de 3 deu três linhas, no múltiplo de 4 deu quatro linhas? Agora, no múltiplo de 5, vai dar cinco linhas!*". Assim, utilizando dos mesmos argumentos adaptados para as situações atuais conseguiram finalizar essas atividades.

O último trecho de fala destacado anteriormente evidencia, além da identificação do padrão, o início de uma formulação de conjectura que "múltiplo de um número natural qualquer *l* pode ser representado em um arranjo retangular de *l* linhas". Entretanto, na atividade voltada para a representação desse múltiplo de um número natural qualquer *l*, os estudantes não conseguiram desenvolver uma conjectura correta sem intervenções docentes.

Na terceira aula, mais especificamente, na atividade voltada para a representação dos não múltiplos de um número dado, os grupos sentiram a necessidade de criar uma nomenclatura para tal circunstância. Consideramos que essa ação também faz parte do fazer matemática. Essa atividade foi desenvolvida em conjunto com os alunos em plenária de forma dialogada. Sendo assim, não é possível analisar separadamente os dados construídos pelos grupos nesse momento. Todavia, pontuo a minha percepção: os estudantes participaram das atividades e passaram por algumas etapas da construção de uma prova. A identificação padrões ocorreu quando, ao analisarem a Figura 29 (p. 87), pontuaram "*quando não é múltiplo, não forma um arranjo retangular, fica como se fosse uma barra de chocolate que alguém comeu alguns quadradinhos*" e "*a representação fica parecendo uma pecinha daquele jogo de Tetris*". Tais afirmações também evidenciam a conjectura criada pelos alunos.

Ao ser lançada a atividade voltada para o tipo de número que resulta da adição de dois números pares, um dos integrantes do Grupo 2, em voz alta, testou alguns exemplos, identificou um padrão e formulou uma conjectura, que foi aceita por todos os grupos. A partir desse momento, os grupos começaram a trabalhar separadamente buscando desenvolver argumentos para validar a conjectura. Nesse processo distintas argumentações surgiram e sua classificação será detalhada na subseção a seguir.

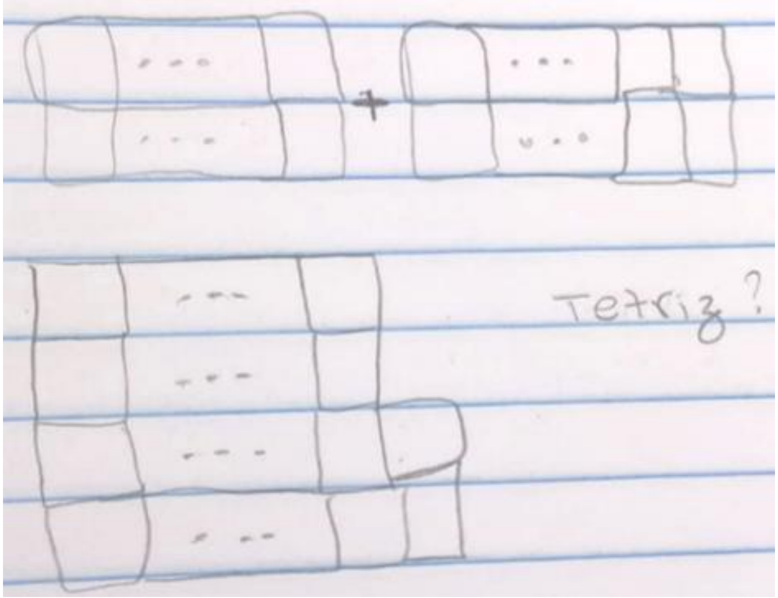
8.5.3 Classificação de argumentação

Somente a partir da terceira aula foram lançadas atividades que solicitam demonstrações aos grupos. Sendo assim, nas aulas 1 e 2 não foi possível classificar a argumentação dos estudantes de acordo com o Quadro 4 e a metodologia de Stylianides e Stylianides (2009).

A argumentação utilizada inicialmente por todos os grupos, com o intuito de demonstrar que a soma de dois números pares quaisquer é um número par, foi empírica (M4 - ver Quadro 4), visto que buscava comprovar a veracidade da conjectura por meio de muitos exemplos. Em seguida, foi reiterado aos estudantes que essa argumentação não era suficientemente abrangente já que não englobava todos os casos possíveis.

Depois da argumentação empírica realizada por todos os grupos, surgiram distintos níveis de complexidade de argumentação. O Grupo 7 apresentou uma tentativa malsucedida de um argumento geral válido (M3 - ver Quadro 4), pois ao somar os arranjos retangulares genéricos das parcelas realizou uma junção, chegando a um Tetris de quatro linhas com algumas colunas incompletas (Figura 37).

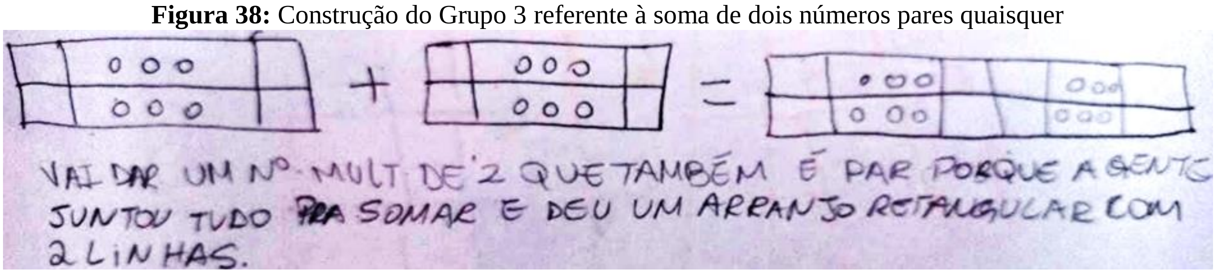
Figura 37: Construção do Grupo 7 referente à soma de dois números pares quaisquer



Fonte: Acervo da autora

Os grupos 3 e 1 apresentaram um argumento geral válido, mas que não constitui uma demonstração para a afirmação em consideração (M2 - ver Quadro 4) ao concluírem que a soma em questão é um número par, por meio da junção lado a lado de dois arranjos retangulares genéricos iguais, com duas linhas e mesma quantidade de colunas (Figura 38). Nesse sentido, estavam demonstrando que a soma de dois números pares iguais é um número par.

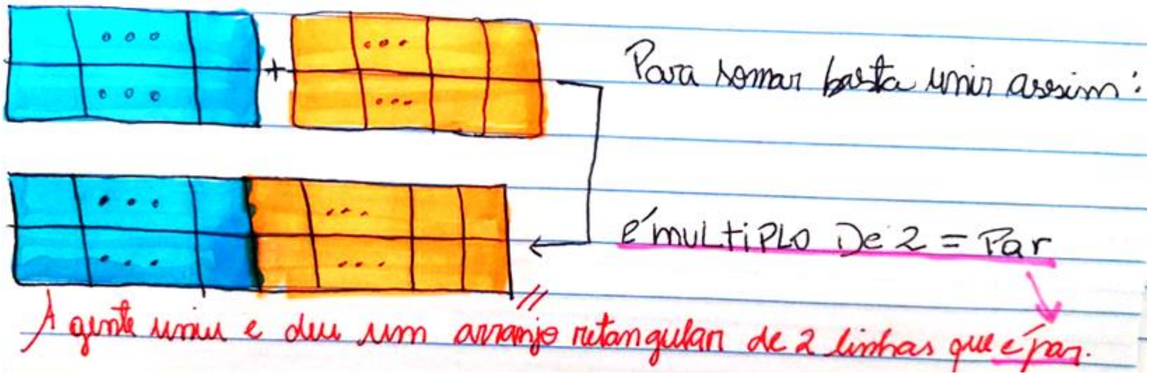
Figura 38: Construção do Grupo 3 referente à soma de dois números pares quaisquer



Fonte: Acervo da autora

Por fim, o Grupo 2 apresentou uma demonstração (M1 - ver Quadro 4, p. 33) explicativa para a questão (Figura 39). O Grupo 8 apresentou os mesmos arranjos retangulares que o Grupo 2 (Figura 31, p. 90) criou mas não conseguiu identificar que o arranjo retangular da soma representava um número múltiplo de 2, ou seja, um número par. Assim, esses dois grupos conseguiram converter a representação em língua materna escrita utilizada no problema para registros que representações em arranjos retangulares, porém apenas um dos grupos conseguiu interpretar a resolução por meio das construções.

Figura 39: Construção do Grupo 2 referente à soma de dois números pares quaisquer



Fonte: Acervo da autora

A demonstração algébrica referente à proposição “a adição de dois números ímpares quaisquer resulta em um número par” foi apresentada por mim em plenária e relacionada com a demonstração por meio de registros de representações em arranjos retangulares (Quadro 10, p. 66) com o intuito de mostrar conversões entre as representações.

8.6 RELATO DA AULA 4

Esta aula ocorreu no dia 17 de outubro de 2022, das 13h00min às 14h50min. Decidi não me caracterizar de Desconfiadinha, pois gostaria que os estudantes estivessem amparados pela professora, sem desconfianças, para que se sentissem à vontade para desenvolver a atividade e tirar dúvidas. Inicialmente informei aos estudantes que iríamos iniciar a atividade final. Comuniquei que possuía oito questões a serem sorteadas para cada grupo e então perguntei se preferiam que eu fizesse o sorteio ou apresentasse a atividade primeiro. A maioria dos alunos escolheu a primeira opção. Entretanto, antes de iniciar o sorteio, o Grupo 8 veio até mim e informou que não gostariam de apresentar a resolução para a turma, procurei entender o motivo e incentivá-los a participar. Mostrei a eles que trouxe óculos escuros para cada grupo, caso quisessem utilizá-los como acessório de algum personagem. Neste grupo, formado por dois integrantes (uma aluna e um aluno), o estudante informou que não gostaria de interpretar personagens, então sugeri que a aluna ficasse com essa parte. Dessa forma, o grupo decidiu realizar a atividade e sorteou a sua questão.

Em seguida, passei em cada um dos grupos e pedi para que escolhessem um dos papéis enrolados que estavam em minhas mãos. Quando todos já estavam com sua respectiva questão, apresentei um cronograma no quadro escolar, indicando como as próximas aulas iriam ocorrer. Informei que iríamos trabalhar na resolução matemática da atividade, que no próximo período de artes da semana deveriam trazer materiais para trabalhar nos personagens e nos esquetes, que iríamos finalizar a atividade no período de matemática seguinte ao de arte e que no dia 24 de outubro iriam ocorrer as apresentações dos resultados. O Quadro 13 apresenta a distribuição das questões por grupo.

Quadro 13: Distribuição de questões por grupo

	Questão
Grupo 1	Que tipo de número resulta da soma de oito números naturais consecutivos?
Grupo 2	Que tipo de número resulta da soma de sete números naturais consecutivos?
Grupo 3	Que tipo de número resulta da soma de nove números naturais consecutivos?
Grupo 4	Que tipo de número resulta da soma de cinco números naturais consecutivos?
Grupo 5	Que tipo de número resulta da soma de dez números naturais consecutivos?
Grupo 6	Que tipo de número resulta da soma de quatro números naturais consecutivos?
Grupo 7	Que tipo de número resulta da soma de seis números naturais consecutivos?
Grupo 8	Que tipo de número resulta da soma de três números naturais consecutivos?

Fonte: Construção da autora

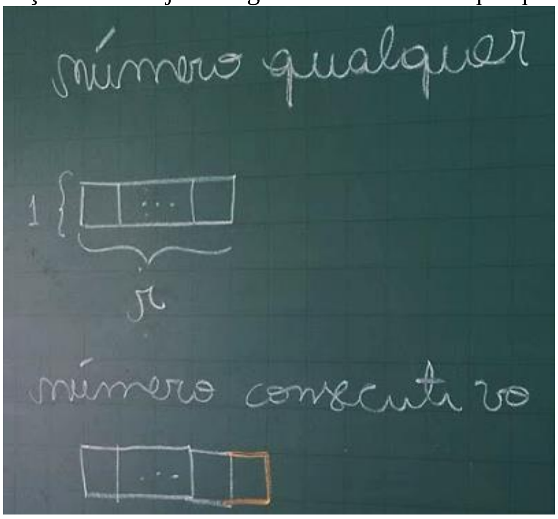
A partir do momento em que todos os grupos já haviam recebido a sua respectiva questão, perguntei se os estudantes sabiam o que significava “números naturais” e “consecutivo”. Um dos alunos informou: “*Os números naturais são aqueles: 1, 2, 3, 4, e vai assim até o infinito*”, outro estudante complementou: “*Tem o zero também!*”. Em seguida, questionei sobre os consecutivos e uma estudante disse: “*Olha, eu não sei explicar, mas eu sei o que é. Tipo, o consecutivo de 1 é 2, de 5 é 6.*”. No quadro escolar fiz uma reta numérica com os números de 0 a 5 e chegamos a duas conclusões a partir dessa experimentação heurística: o consecutivo de um número é aquele que está imediatamente à sua direita na reta numérica e que para descobrir o consecutivo de um número basta somar um a ele mesmo.

Ainda referente às questões distribuídas aos grupos, começamos a discutir sobre a concepção que iríamos adotar para a expressão “tipo de número”. Pontuei que poderíamos associá-la a uma característica que se repete em todos os casos, por exemplo, as respostas encontradas são números pares ou múltiplos de 3 ou múltiplos de 4, entre outros. Caso conseguíssemos provar que, de fato, essa característica persiste em todos os casos, então ela reflete o tipo de número que resulta da adição em questão.

A partir desta aula, os óculos escuros foram disponibilizados aos estudantes. Posteriormente, passei as dicas apresentadas no roteiro (testar para alguns casos específicos; analisar e verificar se há algum padrão; para somar, juntar os arranjos retangulares de uma maneira conveniente; construir uma conjectura e buscar apresentar uma demonstração para ela) para os alunos. Discutimos o que era uma conjectura e a definimos como: "*uma suposição, baseada num padrão identificado, do que achamos que é verdade*".

Em plenária, construímos a representação de consecutivos partindo de um número qualquer. Para isso, retomamos como representar um número qualquer, coloquei um arranjo retangular de uma linha e *j* colunas no quadro escolar, porém, uma das alunas informou que eu deveria colocar a letra *r*, pois para o número qualquer, havíamos escolhido o nome Robertão. Fiz a alteração e, em seguida, perguntei como representar o seu consecutivo. Nenhum aluno respondeu, então, decidi recorrer a alguns exemplos com o intuito de incentivar a argumentação, perguntei qual era o consecutivo de 2, 7 e 8. Os alunos responderam em coral, 3, 8 e 9 respectivamente. Questionei como eles chegaram nesse resultado e um dos alunos informou: "*Somei um*". Dessa forma, relacionei o cálculo com o que havíamos discutido sobre consecutivo anteriormente e indiquei que para o arranjo retangular era semelhante, precisávamos somar um, então coloquei um quadrado a mais na representação (Figura 40).

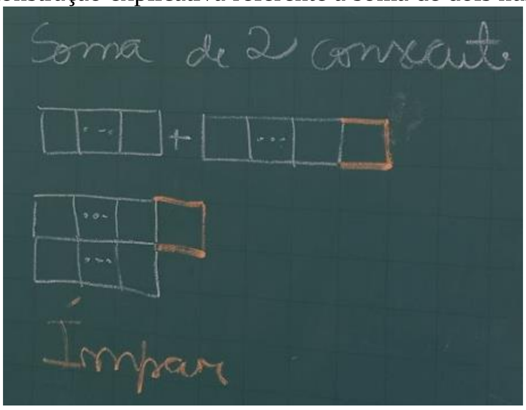
Figura 40: Representação via arranjo retangular de um número qualquer *r* e seu consecutivo



Fonte: Acervo da autora

Notei que os alunos estavam dispersos e propus realizarmos uma atividade parecida em conjunto. Assim, propus que analisássemos a adição de dois números consecutivos. Inicialmente, testamos para alguns exemplos, 1+2, 2+3, 10+11 e 5+6. Em seguida, pontuei que não estávamos interessados no resultado específico de cada operação, mas no que todos os resultados encontrados tinham em comum. Apontei para a paridade, aparentemente, todos os resultados eram números ímpares, portanto, essa era nossa conjectura. Posteriormente, deveríamos apresentar uma argumentação que valesse para todos os números, por isso, tomaríamos a representação via arranjo retangular do Robertão e de seu consecutivo que já estavam no quadro escolar. Eu desenhei a representação de um número ímpar que já conhecíamos e afirmei que para provarmos nossa conjectura, deveríamos somar as parcelas, ou seja, juntar suas respectivas representações via arranjo retangular de modo a chegar a uma representação de um número ímpar. Sendo assim, para isso acontecer, poderíamos juntar uma acima da outra essas parcelas e o resultado, de fato, representava um número ímpar devido a suas características. A Figura 41 apresenta essa construção.

Figura 41: Registro da demonstração explicativa referente à soma de dois números naturais consecutivos



Fonte: Acervo da autora

Pontuei aos estudantes que não há uma única forma para realizarmos a junção das representações em arranjos retangulares, podendo colocá-las uma acima da outra ou lado a lado. Na atividade da adição de dois números pares quaisquer, havíamos juntado lado a lado as representações das parcelas em arranjos retangulares, pois a representação da soma feita daquela maneira nos possibilitou uma melhor conclusão. Já na atividade presente, juntamos um abaixo do outro os arranjos retangulares, visto que a representação da soma feita dessa forma possibilita uma visualização de que o resultado é um número ímpar.

Para os alunos terem um exemplo, eu interpretei para a turma um personagem chamado Juka. Ele apresentou toda a discussão realizada até o momento caminhando a frente do quadro escolar com um andar gingado e solto, falando com um vocabulário cheio de gírias e dialogando com os estudantes, solicitando ajuda para obter algumas conclusões. Informei a turma que esperava algo parecido, que poderiam utilizar a imaginação e desenvolver vários personagens, cenários e enredos. Além disso, explicitei aos estudantes que as resoluções das questões de cada grupo, não necessariamente, seriam um número ímpar ou um número par, mas que o tipo de número poderia ser múltiplo de 3, 4, 5, por exemplo. Portanto, deveríamos relembrar de como eram as representações desses múltiplos, coloquei algumas no quadro escolar e relembrei que um múltiplo de 2 pode ser representado em um arranjo retangular de 2 linhas, um múltiplo de 3 em um arranjo retangular de 3 linhas, um múltiplo de 4 em um arranjo retangular de 4 linhas e assim sucessivamente.

Nos grupos, os alunos começaram a desenvolver estratégias para responder suas respectivas questões. Circulei constantemente por todos os grupos a fim de incentivá-los a resolverem os problemas e, sempre que considerei necessário, fiz sugestões.

O Grupo 8 testou alguns exemplos com a soma por meio da representação aritmética, identificou que os resultados das adições eram múltiplos do número 3, partiram para a representação em arranjo retangular genérica das parcelas e chegaram a um arranjo retangular de três linhas, concluindo que de fato a soma é um múltiplo de 3. Este grupo apenas me mostrou a resolução, eu não interferi em suas construções e foram os primeiros a concluírem essa parte da atividade. Questionei o processo de resolução com o intuito de compreender o raciocínio utilizado pelos estudantes e um dos integrantes do grupo informou:

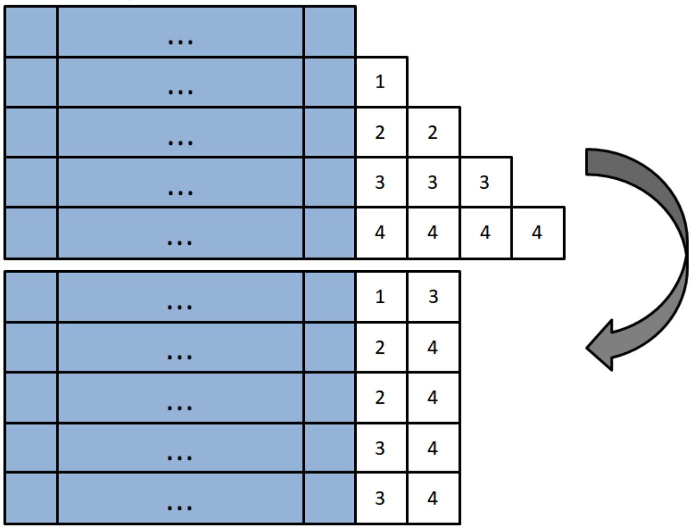
"*Primeiro a gente fez algumas contas, daí viu que tava dando a tabuada do 3. Aí a gente achou que ia dar múltiplo de 3, só que não dá para ficar fazendo só as contas, porque não tem como pegar todos os números, que é infinito. Daí a gente lembrou dos arranjos retangulares. Pelo que eu entendi, eles são tipo todos quando têm os três pontinhos no meio. Aí a gente começou com o Ricardão que é o geralzão, colocamos um quadradinho a mais para ir para o próximo e depois mais um quadradinho a mais para ir para o outro. Ai a gente ficou com os três, como é o nome? Consecutivos, né! Colocamos tudo um embaixo do outro, pegamos os quadradinhos e encaixamos e deu um arranjo retangular de três linhas e acabou! É múltiplo de três mesmo!*".

Parabenizei a argumentação dos estudantes e informei que deveriam pensar na construção de seus personagens e na apresentação que deveriam fazer para a turma.

Os grupos 1, 2 e 3, por terem uma quantidade maior de parcelas, acabaram se atrapalhando nos cálculos aritméticos para determinados exemplos, chegando a respostas erradas para a soma. Tendo em vista que o tempo era limitado para conseguir aplicar toda a proposta de intervenção pedagógica, eu sugeri que partissem para a representação genérica via arranjo retangular das parcelas. Os grupos 4, 5 e 6 estavam dispersos e conversando sobre assuntos paralelos entre si, então solicitei que iniciassem testando para alguns exemplos (independentemente do registro escolhido, representando aritmeticamente ou via arranjo retangular), e disse que gostaria que quando voltasse já tivessem formulado uma conjectura. Por sua vez, o Grupo 7 decidiu que cada integrante iria testar de uma forma diferente, ou seja, utilizar um registro de representação semiótica diferente e depois iriam discutir os resultados.

Num segundo momento, os grupos 1, 2 e 3 me apresentaram as construções das parcelas via arranjo retangular e solicitaram uma orientação de como prosseguir. Sendo assim, informei que poderiam somar, ou seja, juntar os arranjos retangulares das parcelas de modo a tentar construir um arranjo retangular, pois se conseguissem a quantidade de linhas desse arranjo nos diria de que número aquele resultado é múltiplo. Esses grupos, sem contribuições minhas, decidiram tentar formar representações das parcelas em arranjos retangulares que possuíssem como quantidade de linhas a mesma quantidade de parcelas, estratégia essa, que foi sugerida, por um dos integrantes do Grupo 2, para os grupos 4, 5 e 6. Quando questionei os grupos sobre essas informações tanto o Grupo 4, como o Grupo 5 e o Grupo 6 informaram que com arranjos retangulares era mais fácil e, por isso, partiram para esse registro. A Figura 42 apresenta o processo utilizado pelo Grupo 4, mas que perpetuou nos demais.

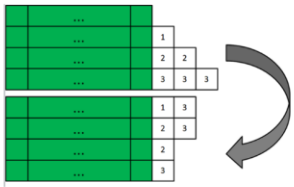
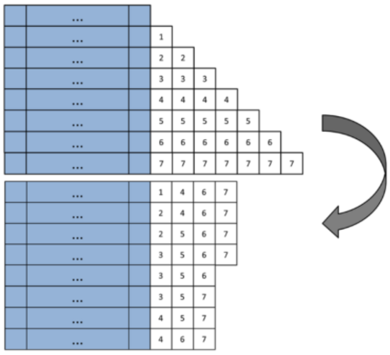
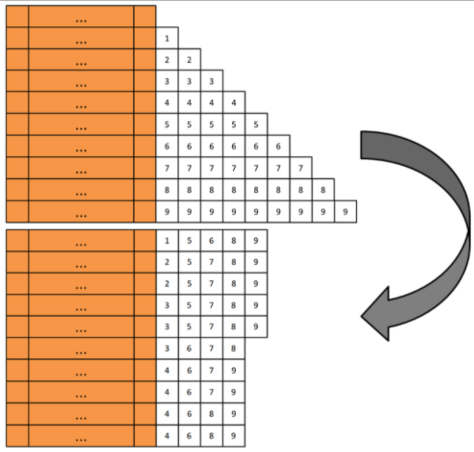
Figura 42: Estratégia de resolução do Grupo 4



Fonte: Construção da autora

A estratégia consistia em juntar os arranjos retangulares das parcelas um em cima do outro e identificar as partes semelhantes em todos eles (em azul na Figura 42). Em seguida, distribuir os quadrados restantes (em branco e numerados na Figura 42) nas colunas a fim de formar um arranjo retangular de baixo da Figura 42. O Grupo 4 conseguiu formar um arranjo retangular de cinco linhas e apresentou a conclusão de que a soma é um múltiplo de 5 ao lado da construção. Os grupos 2 e 3 chegaram numa solução semelhante, construindo um arranjo retangular de sete e nove linhas respectivamente. Por sua vez, os grupos 1, 5 e 6, ao utilizarem a estratégia, formaram um Tetris (Quadro 14). Sendo assim, sugeri que tentassem, a partir da representação que obtiveram anteriormente, construir um arranjo retangular com uma quantidade de linha diferente.

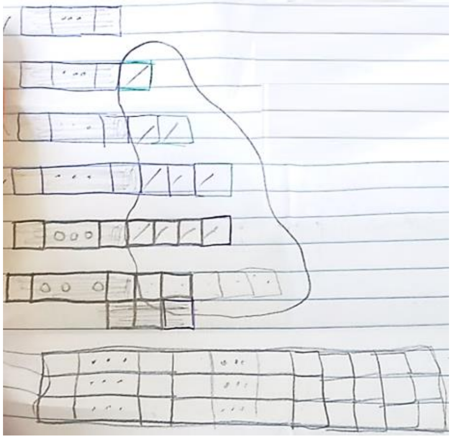
Quadro 14: Parte da estratégia de resolução dos grupos 1, 5 e 6

Grupo 6	Grupo 1	Grupo 5
		

Fonte: Construção da autora

O Grupo 7, por sua vez, conjecturou, a partir dos exemplos aritméticos que conseguiam chegar a um múltiplo de 3. Sendo assim, representaram as parcelas e as juntaram formando um arranjo retangular de três linhas como mostra a Figura 43. Note que na representação da última parcela há três quadrados na segunda linha, os alunos informaram que era para desconsiderá-los, pois tinham pensado em fazer um Tetris e depois decidiram manter todas as parcelas em arranjos retangulares. Perguntei aos alunos que conclusão eles poderiam tirar do arranjo retangular que haviam construído e informaram: "*se a gente somar seis números consecutivos dá um múltiplo de 3*" referindo-se ao resultado dessa adição.

Figura 43: Resolução do Grupo 7 sobre a adição de seis números naturais consecutivos

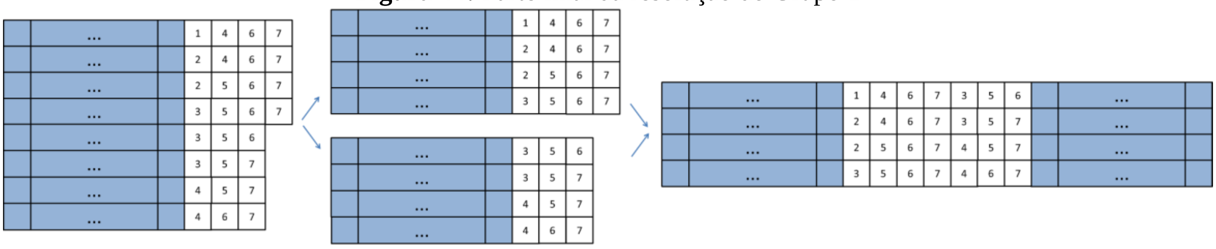


Fonte: Acervo da autora

O Grupo 6 acabou se confundindo e demonstrou que a soma de cinco números consecutivos é um número múltiplo de 5; apontei que a argumentação estava correta mas que o grupo era responsável por estudar a adição de quatro números consecutivos. Assim, eu sugeri que os integrantes voltassem a analisar as representações em arranjo retangular das quatro parcelas que já haviam feito e questionei se havia alguma forma de transformar o Tetris construído em um arranjo retangular com uma quantidade de linhas diferente de quatro.

No Grupo 1, cada integrante presente tentou construir um arranjo retangular com uma quantidade de linhas diferente, a saber, duas, três e quatro linhas. O integrante que construiu o arranjo retangular de quatro linhas notou que bastava dividir em duas partes o Tetris, resultante da estratégia aplicada anteriormente para somar as parcelas, e juntando-as lado a lado (Figura 44). De maneira semelhante, o arranjo retangular de duas linhas foi construído pelo grupo. Dessa forma, o grupo concluiu que a soma de quatro números naturais consecutivos é um múltiplo de 4 e também de 2.

Figura 44: Parte final da resolução do Grupo 1



Fonte: Acervo da autora

O Grupo 6, de maneira semelhante ao Grupo 1, verificou que poderia dividir o Tetris encontrado (Quadro 14) em duas partes e as juntando lado a lado, chegando a um arranjo retangular de duas linhas, concluindo que a soma de quatro números naturais consecutivos é um múltiplo de 2.

Todos os grupos conseguiram finalizar a parte de argumentação matemática da atividade, concluindo, por meio das suas construções pictóricas, que a quantidade de linhas do arranjo retangular resultante da adição das parcelas consecutivas representa o número do qual a soma é múltipla. Parabenizei a turma por todos terem finalizado as construções, e aplaudimos a conquista em forma de comemoração. Posteriormente, recolhi os óculos, coloquei no quadro escolar a sequência de apresentações e informei que, se possível, iríamos iniciar as apresentações na aula seguinte. Portanto, os primeiros grupos a apresentar já deveriam estar preparados. Além disso, reiterei que no próximo período de artes deveriam trazer materiais para a construção da parte artística da apresentação e pedi para um dos alunos ir avisando a turma ao longo da semana.

O sinal de aviso de troca de período tocou, fui até a sala dos professores e conversei com a professora de artes sobre a atividade à qual os alunos dariam continuidade em seu período. Sendo assim, informei que deveriam criar pelo menos um personagem, preparar a apresentação e que precisavam trazer os materiais necessários para o seu desenvolvimento.

8.6 RELATO DA AULA 5

Esta aula ocorreu no dia 21 de outubro de 2022. Diferente das demais aulas, nesse dia eu cheguei à escola às 14h00min e fui até a sala da turma para acompanhar o restante do período de artes, que havia começado às 13h00min. Quando entrei na sala, notei que os alunos estavam organizados nos grupos das atividades da disciplina de matemática, porém não estavam realizando as tarefas previamente combinadas com eles. A professora de artes relatou que inicialmente pediu para formarem os grupos de matemática, porém, os estudantes disseram que era apenas um dos grupos que iriam apresentar no período seguinte de matemática e que, portanto, os demais poderiam fazer a atividade de artes. Dessa forma, ela passou uma atividade de releitura de uma obra de arte.

Pedi a autorização da docente para passar nos grupos, concluí que nenhum grupo trouxe o material solicitado e que ainda não haviam definido os seus respectivos personagens. Além disso, os integrantes do Grupo 7 informaram que haviam desistido da apresentação e que apenas iriam entregar o material escrito. Como a turma estava dedicada aos desenhos das obras de arte, decidi sair da sala e retomar a atividade de matemática no próximo período.

No intervalo que ocorreu entre os períodos de matemática e artes conversei com as professoras das respectivas disciplinas, pontuando que houve uma falha na comunicação, visto que muitos (considerando educadores e estudantes) não compreenderam o processo da atividade que eu havia proposto. Com isso, a professora de matemática sugeriu que eu adotasse uma postura mais rigorosa com os estudantes, utilizasse alguns materiais da escola e solicitasse que até o final do período de matemática tivessem os personagens, o trabalho escrito e a estrutura da apresentação. Ela me entregou a chave e a chamada da turma e foi comigo até a secretaria da escola para me disponibilizar oito cartolinas, uma para cada grupo.

Às 15h10min eu abri a sala, os alunos entraram, escrevi no quadro escolar que deveriam finalizar o trabalho escrito, criar o personagem e estruturar o roteiro da apresentação. Distribuí uma folha de ofício e uma cartolina para cada grupo. Informei que cada grupo deveria desenvolver o trabalho escrito na folha e me entregar assim que concluísse e, na cartolina, preparar o material para a apresentação. No quadro escolar, coloquei um exemplo de trabalho escrito para os alunos e, em seguida, apresentei-o em forma de esquete teatral.

Nessa apresentação, interpretei um personagem chamado Pedroka que na vida quotidiana tinha muitas dúvidas e quando colocava o seus óculos escuros conseguia responder a qualquer questão. Ressalto que improvisei tanto o personagem como o roteiro que escrevo a seguir, mas que na aula o desenvolvi mentalmente: *Em um dia qualquer, Pedroka ficou curioso sobre que tipo de número resultava da adição de dois números naturais consecutivos, mas não sabia responder essa questão. Dessa forma, decidiu colocar os seus óculos e para poder resolver essa questão, chegando à conclusão que a soma de quaisquer dois números consecutivos é sempre em um número ímpar.* Durante a interpretação, utilizei algumas gírias que ouvi os alunos falarem, como também, procurei interagir com eles perguntando se sabiam responder a questão inicial e se estavam compreendendo as discussões sobre a sua respectiva solução. Após apresentar, avisei que iria circular de grupo em grupo e acompanhar a elaboração do trabalho escrito, a construção dos personagens e a estrutura das apresentações.

Os alunos começaram a trabalhar. Notei que os grupos 4 e 2 não possuíam a construção que justificava a multiplicidade da adição de números consecutivos e que não se lembravam dela. Sendo assim, relembrei as representações das parcelas com eles, perguntei se sabiam de que número a soma era múltipla e, a partir daí, já souberam construir novamente a resolução. Os grupos estavam empenhados em finalizar as tarefas do dia. Após os 10 minutos de trabalho, apenas o Grupo 5 não havia entregue o trabalho escrito. Os que já haviam finalizado essa parte inicial começaram a criar os personagens e a estruturar o roteiro das apresentações. Eu não solicitei a entrega do roteiro, por isso passei em cada grupo e perguntei o planejamento para os personagens e para a apresentação. Tais respostas foram gravadas. Relato, a seguir, o que cada grupo contou para mim durante o desenvolvimento dessa parte da atividade.

O Grupo 1 decidiu apresentar 3 personagens: o Professor Rabugento, que tem muito conhecimento sobre matemática, porém não consegue informar as suas conclusões de maneira acessível ao público; o Funkeirinho, que não entende nada de matemática, mas que consegue interagir com as pessoas; e o último personagem surge da fusão dos dois anteriores, resultando no Fusão que consegue mostrar para o público, de maneira clara e objetiva, que a adição de oito números consecutivos resulta num número múltiplo de 4 e também par. Relativamente aos acessórios, os estudantes pensaram em um óculos de grau e em um lápis para o Professor Rabugento, por sua vez, para o Funkeirinho, um dos óculos que disponibilizei aos grupos e, por fim, o personagem Fusão usaria o lápis atrás da orelha e os óculos escuros acima da cabeça já que era uma mescla dos outros personagens.

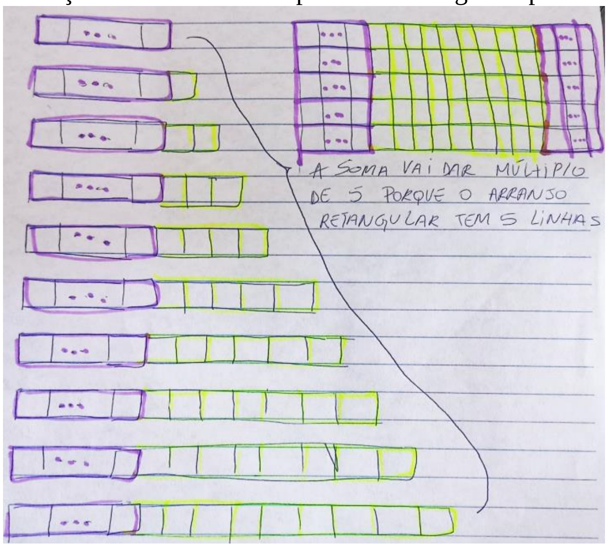
O Grupo 2 criou apenas uma personagem, a Curiosinha, que tem como essência querer saber sobre todas as coisas. Na apresentação, os alunos informaram que ela usaria um boné e faria várias perguntas, a saber: o que é um número natural, um número consecutivo, como somar arranjos retangulares e que tipo de número resulta da adição de sete números consecutivos. A função dos demais integrantes seria responder essas questões para ela.

O Grupo 3 se baseou num seriado mexicano de TV denominado "Chapulín Colorado" que foi adaptado para passar num canal da televisão brasileira e que elas assistiram. A ideia consistia em duas amigas discutindo sobre que tipo de número resulta da adição de nove consecutivos e acabaram "*empacando*" (palavra utilizada pelas estudantes) na hora de somarem/juntarem as parcelas. Em seguida, uma das amigas falaria: "*Óh, e agora, quem poderá nos ajudar?*" (expressão muito utilizada no seriado de TV). Em seguida, iria aparecer a terceira integrante falando: "*Eu, Chapolin Colorado*". Por fim, esse super-herói terminaria a resolução e concluiria que tal soma é um múltiplo de 9.

O Grupo 4 informou que uma de suas integrantes faltava constantemente. Assim, decidiram desenvolver a personagem sem sua ajuda. Criaram assim, a personagem Nerdzinha, que, por gostar tanto de estudar, acabou descobrindo que a adição de cinco números consecutivos resulta em um número múltiplo de 5.

Apenas um dos integrantes do Grupo 5 estava presente nesta aula e esse mesmo estudante não havia comparecido na aula anterior. Esse estudante só produzia quando eu sentava ao seu lado, o incentivava e o ajudava a fazer a atividade. Um de seus colegas afirmou "*Sora, todos os professores já desistiram dele. Não adianta insistir. Ele e a dupla dele nunca fazem nada.*". Falei para o aluno em questão que ele poderia contar comigo, que insistiria nele até ele finalizar a atividade e que qualquer dúvida estava à sua disposição para ajudá-lo. A Figura 45 mostra a resolução deste estudante que segue a mesma estratégia utilizada pelo único integrante presente do Grupo 5. Esse aluno informou que havia entendido a atividade, soube apresentar a resolução de maneira correta, porém informou que não iria apresentar para a turma e nem criar o personagem. Sendo assim, respondi que ele deveria me entregar um resumo das apresentações dos colegas na próxima aula e solicitei que o Grupo 7 também realizasse essa tarefa. A solicitação dessa atividade foi uma ação que tive de forma improvisada, como reação à informação de que os alunos dos grupos mencionados anteriormente não iriam apresentar.

Figura 45: Resolução da atividade feita pelo único integrante presente do Grupo 5



Fonte: Acervo da autora

Assim como o Grupo 4, o Grupo 6 também não estava completo. Então, a única integrante que estava presente criou a personagem Dona Sabe Tudo, que, como o nome já sugere, possui conhecimento sobre tudo. Segundo a aluna, essa personagem seria esnobe e após apresentar a questão sorteada pelo grupo falaria: "*Nem vou perguntar nada para vocês, pois tenho certeza que vocês não saberão me responder, mas pode deixar que eu explico, pois não existe nada no mundo que eu não sei.*". A partir desse momento, apresentaria sua construção e afirmaria que a adição de quatro números consecutivos resulta num número múltiplo de 2, ou seja, um número par.

No Grupo 8 havia apenas uma aluna presente. Então ela trabalhou sozinha na construção da apresentação, desenvolvendo um enredo entre professora e aluno. Ela iria interpretar uma professora que incentiva seu aluno, interpretado por sua dupla, a chegar à conclusão de que a soma de três números consecutivos é um número múltiplo de 3.

Ao final da aula, recolhi as cartolinas que estavam finalizadas e os trabalhos escritos de todos os grupos. Os grupos 2, 3 e 4 não finalizaram os seus materiais de apresentação e se comprometeram a entregar e apresentar na próxima aula. Lembrei aos estudantes que a apresentação deveria ter, no máximo, 10 minutos de duração, que cada grupo deveria apresentar a resolução da atividade com, pelo menos, uma personagem com nome, características e acessórios. Em seguida, realizei a chamada, dos 23 alunos, 5 não estavam presentes, e finalizei a aula.

8.7 RELATO DA AULA 6

Essa aula ocorreu no dia 24 de outubro de 2022, com início às 13h00min e término às 14h50min e contei com a presença da professora oficial de matemática. Realizei a chamada e dos 23 alunos, 20 estavam presentes. O Quadro 15 mostra o número de integrantes por grupo e quantos compareceram neste dia.

Quadro 15: Número de integrantes por grupo presentes na apresentação

Grupo	Números de integrantes por grupos	Números de integrantes presentes na apresentação
Grupo 1	4	3
Grupo 2	4	4
Grupo 3	3	3
Grupo 4	4	4
Grupo 5	2	1
Grupo 6	2	1
Grupo 7	2	2
Grupo 8	2	2

Fonte: construção da autora

Um dos integrantes do Grupo 5, na aula anterior, havia informado que não iria apresentar e não estava presente nesta aula, ao contrário de sua dupla. Sendo assim, perguntei ao estudante presente se ele havia preparado alguma apresentação e ele informou que também realizaria o resumo das apresentações dos colegas como havia proposto para a sua dupla e ao Grupo 7.

O trabalho escrito solicitado aos estudantes foi entregue. Entretanto, o cartaz que construíram para a apresentação possuía os mesmos apontamentos do trabalho escrito. Sendo assim, para uma melhor visualização e evitar ambiguidades, optamos por apresentar apenas as fotografias do cartaz. Além disso, todos os grupos explicitaram os passos que seguiram para chegar ao arranjo retangular que possibilitou a conclusão da atividade. Como esses passos já foram explicitados no relato da quarta aula, não irei detalhá-los, restringindo-me aqui a fazer uma breve descrição das apresentações dos grupos.

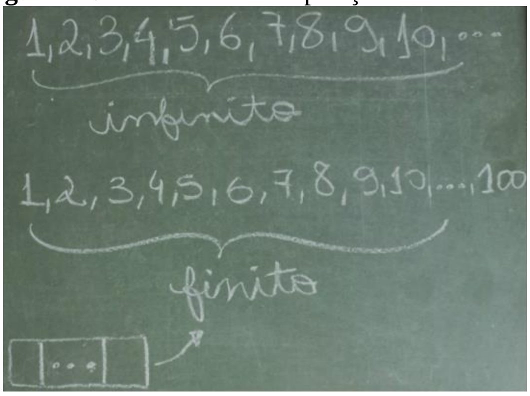
O Grupo 8, responsável pela soma de três números naturais consecutivos, foi o primeiro grupo a apresentar e seguiu a estratégia desenvolvida na aula anterior para a apresentação: a personagem da professora perguntava de maneira incisiva e ríspida enquanto o personagem do aluno respondia de maneira clara e objetiva. Na apresentação, o grupo definiu o que são números naturais e número consecutivo de outro. Para os números naturais, colocaram apenas a sequência de 1 a 10 no quadro escolar. Já para os números consecutivos, disseram: "*É o número que fica à direita do outro na reta. Também dá para descobrir ele somando 1. Por exemplo, o consecutivo de 5 é 6, pois está do lado direito do 5 e também, porque 5+1 é 6*". Relativamente ao tipo de número que resulta da adição de três consecutivos, a personagem da professora foi orientando o aluno, perguntando: "*Como podemos representar as parcelas?*", "*Como podemos somar essas parcelas?*" e "*A representação da soma está correta?*". O personagem do aluno, para responder às questões, ia construindo as representações no quadro escolar. Para somar, ele juntou uma abaixo da outra as representações de uma linha em arranjo retangular das parcelas. Em seguida, organizou, com sucesso, a representação da soma de modo a formar um arranjo retangular, concluindo que, como o arranjo retangular possui três linhas, a soma de três números consecutivos é um múltiplo de três. A Figura 46 mostra o cartaz que o grupo desenvolveu para a apresentação.

Figura 46: Cartaz produzido pelo Grupo 8

Fonte: Acervo da autora

O Grupo 8 foi parabenizado e, em seguida, informei que eu e a professora oficial de matemática iríamos fazer alguns comentários ao final de cada uma das apresentações. Sendo assim, iniciamos essa etapa questionando a sequência finita de 1 a 10 apresentada no quadro escolar como caracterização dos números naturais. A professora oficial de matemática perguntou à turma se só aqueles números faziam parte dos números naturais. Os alunos responderam que não, então, eu perguntei como poderíamos corrigir a escrita de modo que englobasse todos os números do conjunto desejado. Um dos estudantes informou que poderíamos colocar três pontos no final da sequência. Afirmei que era uma ótima alternativa e assim fizemos. Além disso, informei que quando colocamos um número após as reticências, isso significa que a sequência é finita terminando neste número (Figura 47). Por outro lado, quando não colocamos nada após as reticências, estamos representando uma sequência infinita, que é o caso dos números naturais. Sequencialmente, a professora oficial perguntou sobre o número zero e o grupo que havia apresentado informou que se esqueceu de colocar no quadro escolar.

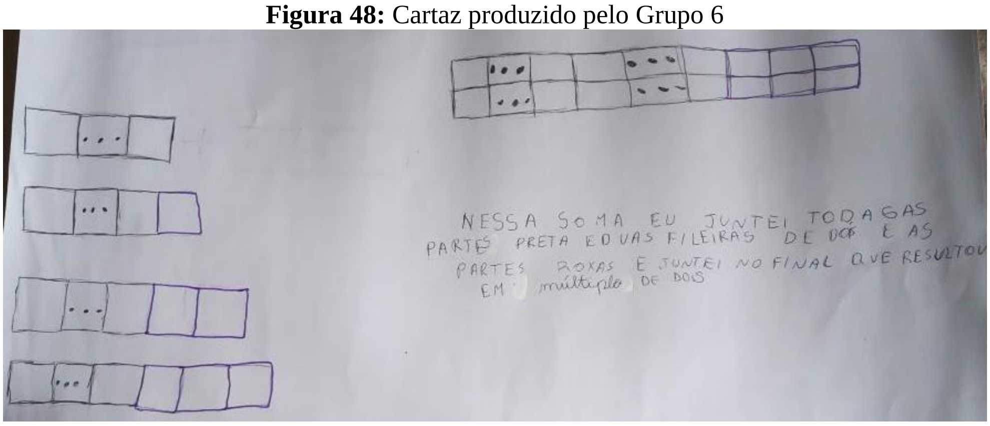
Figura 47: Discussão sobre a posição das reticências



Fonte: Acervo da autora

Retomei a conclusão do grupo que havia apresentado e iniciei a construção do Quadro 11 no quadro escolar, registrando a proposição de que a soma de três números naturais consecutivos é um número múltiplo de 3. Em seguida, chamei o Grupo 6, responsável pela soma de quatro números naturais consecutivos, para apresentar seu trabalho. Novamente havia apenas uma integrante do grupo. Na apresentação, ela não seguiu o que havia planejado na aula anterior. No lugar da Dona Sabe Tudo, a aluna interpretou uma personagem muito semelhante à que eu apresentei de exemplo na aula anterior, o Juka. Ela optou por mostrar apenas o cartaz que desenvolveu para sua apresentação (Figura 48) e, por meio dele, mostrou a sua construção, utilizando um dos óculos escuros que disponibilizei aos grupos, muitas gírias e um caminhar gingado e solto.

Figura 48: Cartaz produzido pelo Grupo 6



Fonte: Acervo da autora

Durante a apresentação, a aluna informou: "*Tá vendo que aqui tem quatro Robertões e seis quadradinhos sobrando, galera?* [apontou para os arranjos retangulares das parcelas no cartaz] *Não deu para fazer um arranjo retangular de quatro linhas, pois ficava sobrando dois quadradinhos, entendeu? Daí peguei o que eu tinha e coloquei em duas linhas, tá ligado? Ficou assim* [apontou para o arranjo retangular resultante da adição das parcelas], *um arranjo retangular de duas linhas e se tem duas linhas, é múltiplo de dois e fechou!*".

Após a apresentação da aluna, reforcei que a soma de quatro números consecutivos é um número múltiplo de 2, ou seja, um par e acrescentei essa proposição na tabela que ficou exposta no quadro durante todas as apresentações.

Solicitei que o Grupo 4, responsável pela soma de cinco números naturais consecutivos, se apresentasse. Entretanto, as integrantes do grupo informaram que não estavam preparadas. Uma aluna em específico informou que, como havia faltado na aula anterior, não se lembrava da construção. Sendo assim, pedi para que uma das integrantes mostrasse para ela e acompanhei a discussão. As alunas não estavam com sua apresentação preparada, o que fez uma das integrantes chorar. Vendo a situação, a professora oficial de matemática se aproximou, em conjunto, decidimos que as alunas poderiam se apresentar mais tarde e que a aluna em questão poderia sair da sala para se acalmar.

Informei aos estudantes que as alunas iriam apresentar mais tarde e que eu iria preencher mais uma linha da tabela para darmos continuidade às apresentações. Sendo assim, afirmei que a adição de cinco números consecutivos resulta em um múltiplo de cinco, porém o esclarecimento da razão ficaria a cargo do Grupo 4. Como o próximo grupo a apresentar seria o Grupo 7 (responsável pela soma de seis números naturais consecutivos) e os seus integrantes desistiram de participar dessa parte da pesquisa, preparei uma apresentação para os estudantes.

Apresentei aos alunos a minha personagem: "*Olá pessoal, eu me chamo X-Woman! Sem meus óculos escuros sou uma pessoa normal, porém quando os coloco, eu ganho o superpoder da inteligência e consigo a resposta para qualquer questão. Estava olhando essa tabela aqui do lado e reparei que ainda não foi descoberto que tipo de número resulta da adição de seis números consecutivos, porém sem meus óculos não consigo ajudar vocês.* [coloquei os óculos escuros] *Agora já sei! Vou explicar!*". Em seguida, coloquei no quadro escolar a representação das seis parcelas, informei que não era possível construir um arranjo retangular de seis linhas semelhante ao grupo que havia apresentado anteriormente, que poderiam tentar fazê-lo e também chegariam à mesma conclusão. Sequencialmente, mostrei como poderíamos reorganizar as parcelas em um arranjo retangular de três linhas e concluir que a soma é um múltiplo de três.

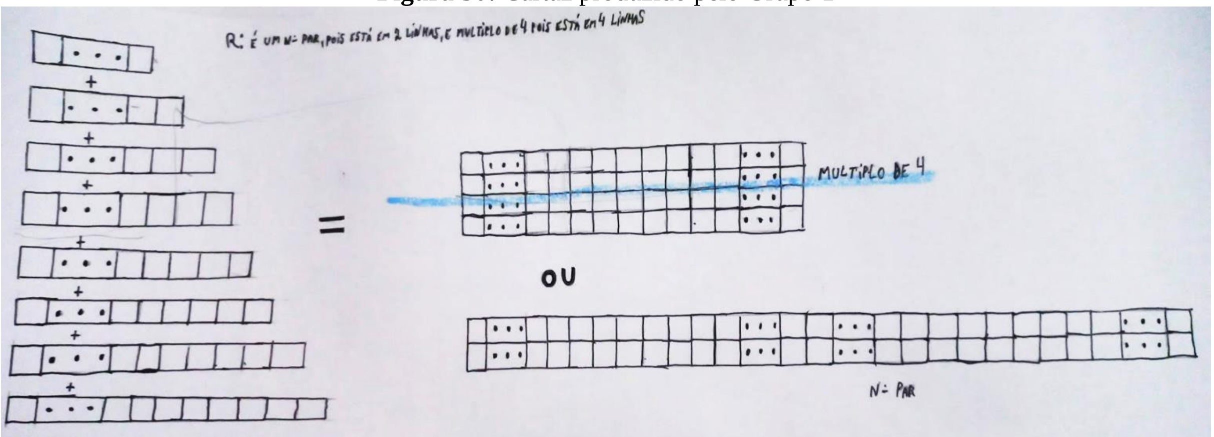
A professora oficial de matemática parabenizou a minha apresentação e pediu para que eu colocasse a conclusão na tabela. Posteriormente, solicitei que o Grupo 2, responsável pela soma de sete números naturais consecutivos, apresentasse e anexei no quadro escolar o cartaz que desenvolveram (Figura 49). Esse grupo seguiu o planejamento desenvolvido na aula anterior e, diferente dos demais grupos, seus integrantes escreveram suas falas em um papel e as leram durante a apresentação. A Curiosinha fez as seguintes questões: "*O que é um número consecutivo?*", "*Como podemos somar arranjos retangulares?*" e "*Que tipo de número resulta da adição de sete consecutivos?*". Para cada questão, um integrante diferente apresentou uma resposta. A resposta da primeira questão foi semelhante à apresentada pelo Grupo 8. A segunda explicitou que a adição poderia ser feita por meio da junção e que poderíamos realizá-la unindo os arranjos retangulares um ao lado do outro ou um em cima do outro.

Figura 49: Cartaz produzido pelo Grupo 3

Fonte: Acervo da autora

Por fim, para a terceira pergunta, a estudante que ficou responsável por responder apresentou a construção do cartaz e, em seguida, mostrou um exemplo no quadro escolar, somando os termos da sequência de 1 a 7, para, de acordo com ela, validar o resultado encontrado. Pontuei aos estudantes que o exemplo da adição da sequência de 1 a 7 mostra apenas um caso particular de adição e que, por isso, não pode ser utilizada como argumento para validar a conjectura, mas que toda a apresentação feita antes dele mostrava que, de fato, a conjectura é válida. Além disso, pontuei que a estratégia de numerar os quadrados na representação da soma para identificar de qual parcela era foi uma estratégia que considerei uma boa ideia e bem adequada, pois possibilitou visualizar o processo da construção do arranjo retangular final. Posteriormente, coloquei a conclusão do Grupo 2 na tabela que estava sendo preenchida após cada apresentação e, em seguida, chamei o Grupo 1 (responsável pela soma de oito números naturais consecutivos) para apresentar enquanto colocava o seu respectivo cartaz (Figura 50) no quadro escolar.

Figura 50: Cartaz produzido pelo Grupo 1



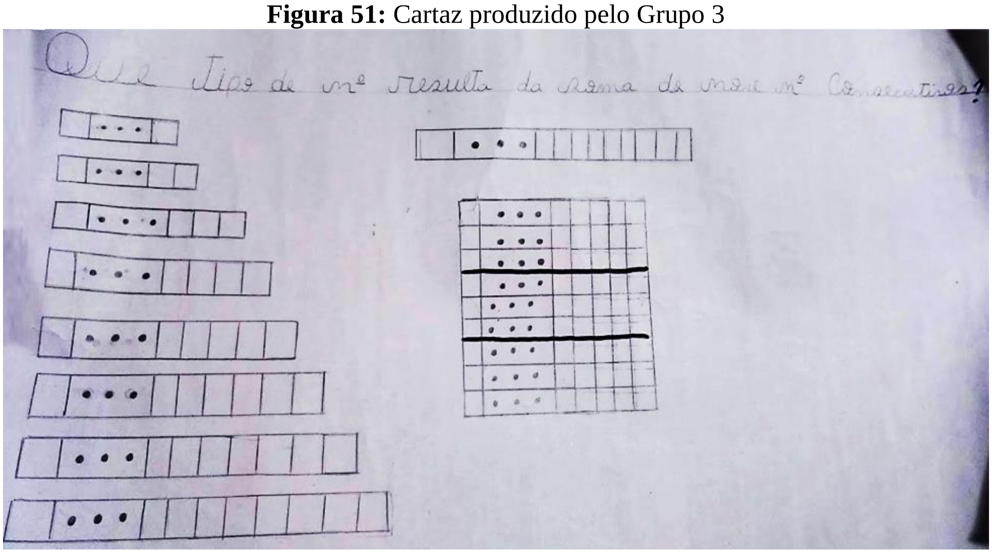
Fonte: Acervo da autora

Os integrantes do Grupo 1, responsável pela soma de oito números consecutivos, fizeram algumas modificações na proposta de personagens que informaram na aula anterior. Eles descartaram o personagem Fusão, visto que o estudante responsável por esse papel não estava presente, e mantiveram os personagens Funkeirinho e Professor Rabugento. Para apresentarem os estudantes estavam dispostos da seguinte maneira: um em frente ao quadro escolar, representando o Professor Rabugento; outro sentado em uma das classes, interpretando um aluno desse professor; e o terceiro do lado de fora da sala, utilizando um dos óculos escuros que disponibilizei e fazendo o papel de Funkeirinho.

Os alunos apresentaram da seguinte forma: Funkeirinho interrompe a aula do Professor Rabugento, pois possui uma dúvida que o atormenta, ele precisa saber que tipo número resulta da adição de oito números consecutivos. Então, o professor mostra, por meio do cartaz, como podem organizar as representações das parcelas de modo a construir um arranjo retangular de quatro linhas: "*Pega esses quatro primeiros Robertões e coloca aqui* [apontou para o arranjo retangular de quatro linhas no cartaz] *e deixa os outros quatro Robertões esperando. Depois, pega os quadradinhos que sobraram, coloca aqui do lado* [novamente apontou para o arranjo retangular de quatro linhas] *e vai dar bem certinho, mas faltam os Robertões. Pega eles e coloca um no final de cada linha*.". Após mostrar o processo de construção do arranjo retangular de quatro linhas, o personagem professor conclui que a soma de oito números naturais consecutivos é um número múltiplo de quatro. Os integrantes do grupo não pontuaram a tentativa de construção do arranjo retangular de oito linhas. No entanto, o personagem do aluno faz uma linha no cartaz (Figura 50) e informa que há um “bônus”, pois podem dividir no meio o arranjo retangular de quatro linhas e formar um de duas, assim, sendo possível afirmar que a soma também é um número par.

Parabenizei os estudantes pela apresentação e incluí na tabela as duas conclusões apresentadas. Posteriormente, chamei as alunas do Grupo 3, responsável pela soma de nove números naturais consecutivos. Elas me trouxeram o seu cartaz (Figura 51) e o anexei no quadro escolar. As alunas optaram por apresentar, cada uma, um trecho da resolução do problema e não explicitaram personagens. Sendo assim, esse grupo também não seguiu o que havia planejado na aula anterior. Uma das alunas relatou como construíram a representação de cada parcela, partindo do arranjo retangular do número genérico, o Robertão, e colocando um quadrado a mais a cada vez que faziam uma nova parcela para representar os nove consecutivos. Em seguida, outra integrante afirmou que, para somar, destacaram e juntaram um abaixo do outro os Robertões, ou seja, o número inicial da sequência, e distribuíram os quadrados restantes pelas linhas, formando um arranjo retangular de nove linhas. Tal construção possibilitou concluir que a soma de nove números consecutivos é um número múltiplo de nove. Durante toda a apresentação, as alunas apontavam para o cartaz (Figura 51) com o intuito de exemplificar suas construções.

Figura 51: Cartaz produzido pelo Grupo 3



Fonte: Acervo da autora

Após o Grupo 3 finalizar sua apresentação, a professora oficial de matemática perguntou às alunas se havia algum “bônus” semelhante ao que foi mostrado pelo Grupo 1.

As alunas informaram que não buscaram encontrar e então, tanto eu como a docente referida anteriormente, incentivamos as alunas a encontrá-lo. Em seguida, iniciou-se o diálogo:

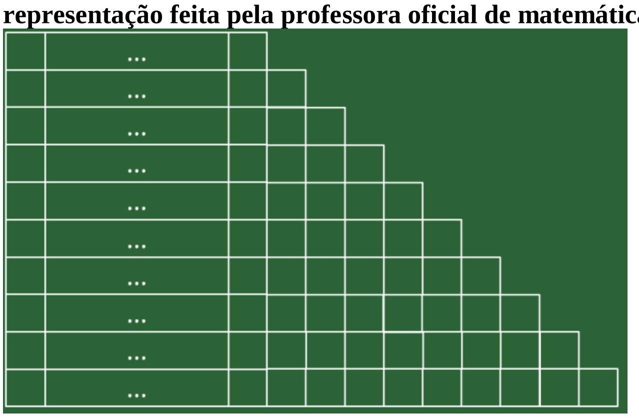
> "*É possível dividir esse arranjo retangular de nove linhas em partes iguais?*", questionei ao grupo.
>
> "*Em duas partes, como os meninos fizeram, não dá!*", afirmou uma integrante do grupo.
>
> "*Verdade! E será que dá em mais partes?",* questionei.
>
> "*Sim, em três dá!*", respondeu outra integrante do grupo.
>
> "*Tá! E de que forma podemos organizar essas três partes para criarmos um novo arranjo retangular?*", perguntei ao grupo.
>
> "*A gente pode botar tudo um do lado do outro, daí vai dar um arranjo retangular de três linhas e aí é múltiplo de 3 também!*", respondeu a mesma integrante do grupo que falou anteriormente.
>
> "*Isso aí! Então, a soma de nove números naturais consecutivos é um múltiplo de 9 e também de 3. Vou escrever isso na nossa tabela ali do lado*", encerrei a discussão.

O próximo grupo a se apresentar seria o Grupo 5, responsável pela soma de dez números naturais consecutivos. Entretanto, como já mencionado anteriormente, os seus integrantes desistiram dessa parte da pesquisa. Sendo assim, a professora oficial de matemática da turma perguntou se poderíamos realizar a apresentação em conjunto. Aceitei a proposta e informamos os alunos dessa decisão. Saímos da sala, combinamos que eu manteria a personagem Desconfiadinha e ela seria a personagem Dona Sabe Tudo (desenvolvida pelo Grupo 6 na aula anterior, mas que não foi colocada na apresentação) e que eu faria uma gravação audiovisual da nossa apresentação. Infelizmente, a qualidade visual ficou comprometida, tendo em vista que as imagens ficaram distorcidas. Sendo assim, para ilustrar alguns apontamentos que foram feitos no quadro escolar, irei recriá-los e apresentá-los na Figura 52, na Figura 53 e na Figura 54.

Iniciamos a apresentação comigo entrando na sala e falando: "*Há duas pessoas aqui, uma que vocês já conhecem e outra que eu vou apresentar agora. Pode entrar, Dona Sabe Tudo* [entra a professora oficial de matemática com um andar imponente e com as mãos na cintura]. *Pode entrar também Desconfiadinha* [soltei os meus cabelos e retirei os meus óculos]". A professora oficial de matemática, representando a Dona Sabe Tudo, informou as características da sua personagem e, em seguida, informou que, como sabia de todas as coisas, iria ajudar a turma a completar a tabela que estava sendo construída com as conclusões de cada grupo.

Para representar as parcelas, a Dona Sabe Tudo utilizou o Robertão (nome dado à representação em arranjo retangular de um número natural qualquer) como parcela inicial da adição. Posteriormente, foi desenhando no quadro as representações das parcelas restantes. A Desconfiadinha questionou o porquê de em cada arranjo retangular ela colocar um quadrado a mais em relação à representação da parcela anterior. Prontamente, Dona Sabe Tudo informou que essa era uma propriedade do número consecutivo. Dando sequência à discussão, ela partiu para a adição, juntando as parcelas uma abaixo da outra (Figura 52).

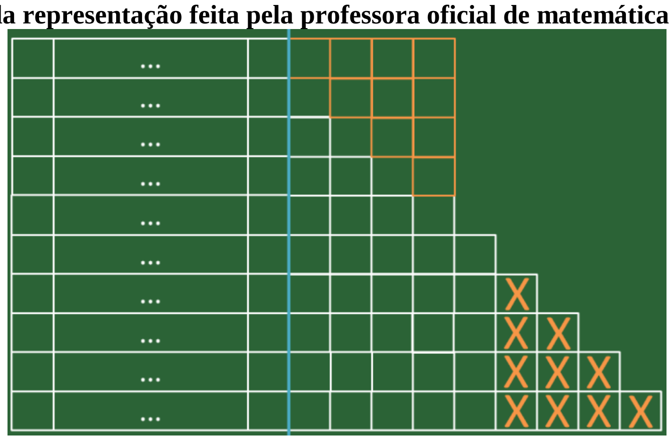
Figura 52: Primeira representação feita pela professora oficial de matemática no quadro escolar



Fonte: Construção da autora

A Dona Sabe Tudo explicitou que essa representação (Figura 52) não oportuniza uma conclusão sobre o tipo de número que resulta da adição dos dez números naturais consecutivos. Sendo assim, ela organizou a representação como mostra a Figura 53.

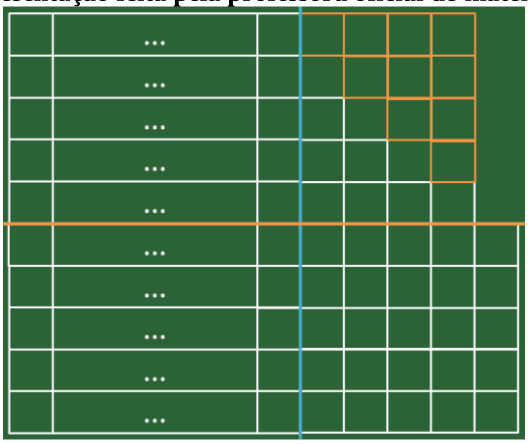
Figura 53: Segunda representação feita pela professora oficial de matemática no quadro escolar



Fonte: Construção da autora

A Desconfiadinha apagou os quadrados que possuíam um "x" em cima alegando que sem eles poder-se-ia visualizar melhor a construção. Em seguida, afirmou que ainda não tínhamos um arranjo retangular. Portanto, a soma não é um número múltiplo de dez. Além disso, ela mostrou, na tabela que estava sendo desenvolvida com as conclusões das apresentações, que, até o momento, quando o número das parcelas era par, a soma é um múltiplo da metade da quantidade de parcelas. Sendo assim, questionou a turma: Será que conseguimos concluir algo para a metade da quantidade de linhas que temos? Então, marcou uma linha em laranja na representação que estava no quadro escolar (Figura 54).

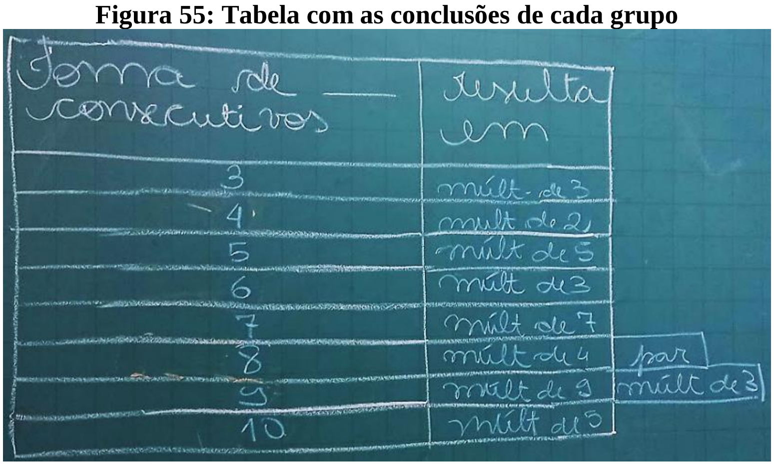
Figura 54: Terceira representação feita pela professora oficial de matemática no quadro escolar



Fonte: Construção da autora

A partir da representação expressa na Figura 54, a Desconfiadinha e a Dona Sabe Tudo informaram que poderiam pegar a parte de baixo e juntar com a parte de cima ou vice e versa. Um dos alunos afirmou que com isso, chegaríamos a um arranjo retangular de cinco linhas e, portanto, poderíamos concluir que a soma de dez números consecutivos é um número múltiplo de 5. Parabenizei o estudante e completei a tabela que estávamos construindo ao longo da aula (Figura 55).

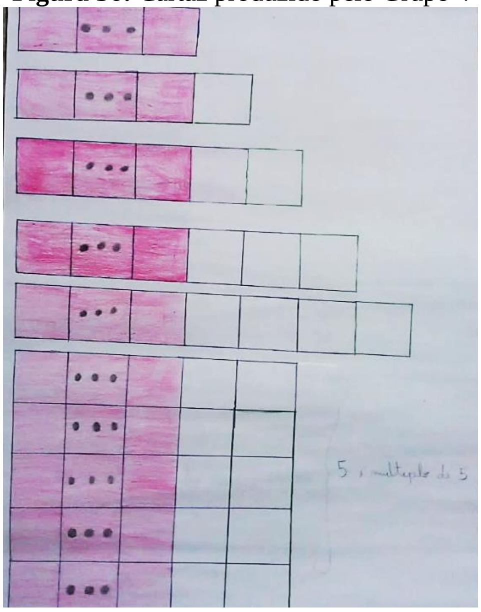
Figura 55: Tabela com as conclusões de cada grupo



Fonte: Acervo da autora

Perguntei se o Grupo 4 estava preparado para apresentar e informaram que sim. Dessa forma, anexei novamente o cartaz (Figura 56) deles no quadro escolar. Uma das estudantes perguntou: “Que tipo de número resulta da adição de cinco números consecutivos?”. Outra respondeu: “*Essas são as representações das parcelas* [apontou para o cartaz], *se a gente* *juntar elas dá esse arranjo aqui* [apontou para o cartaz] *que tem cinco linhas, e isso significa que é múltiplo de cinco.*”. A aluna que havia chorado anteriormente e a estudante que faltou na aula anterior estavam apenas presentes e em silêncio com o grupo em frente ao quadro escolar.

Figura 56: Cartaz produzido pelo Grupo 4



Fonte: Acervo da autora

Afirmei para a turma que, com a apresentação do Grupo 4, foi possível compreender a razão da soma de cinco consecutivos ser um número múltiplo de 5. Em seguida, recolhi a atividade que propus para os três estudantes que desistiram de apresentar e notei que eles desenharam os arranjos retangulares apresentados por cada grupo e escreveram as conclusões que elas possibilitaram.

Eu felicitei a turma pelos trabalhos apresentados. Em seguida, como Desconfiadinha, pedi que analisassem a tabela que estava no quadro escolar (Figura 55) e me informassem se notavam algum padrão. Uma das estudantes disse: “*Sora, quando é ímpar dá o mesmo número e quando é par dá a metade*”. Como professora, eu concordei e afirmei dizendo que, aparentemente, na adição de números consecutivos, quando a quantidade de parcelas é um número ímpar a soma é um múltiplo da mesma quantidade de parcelas. Por outro lado, quando a quantidade de parcelas é um número par, a soma é um múltiplo da metade da quantidade de parcelas. Entretanto, ainda não poderíamos generalizar, pois havíamos visto poucos casos. Então, tínhamos uma conjectura e o próximo passo seria argumentar de forma semelhante à última atividade que fizemos a fim de chegar a uma prova para a afirmação. Informei que esse processo faz parte do fazer matemática. Agradeci a participação dos estudantes nesta pesquisa e para cada um entreguei um cartão com um chocolate (Figura 57) em forma de agradecimento.

Figura 57: Lembrança oferecida aos estudantes

Fonte: Acervo da autora

Como ainda faltavam alguns minutos para o fim da aula, reiterei a concepção que havíamos formulado para "demonstração" na terceira aula e solicitei aos alunos que informassem suas concepções sobre a resolução da atividade final realizada pelo grupo, buscando responder se a argumentação apresentada poderia ser classificada como uma demonstração. Informei que não era necessária identificação dos nomes, apenas dos grupos, e que deveriam ser respondidas de forma individual. Sendo assim, solicitei que separassem os grupos e que sentassem individualmente para responder as perguntas. Reiteramos que a maturidade dos alunos pode não ser suficiente para perceber a dimensão matemática dessa discussão. Nesse sentido, o nosso foco está na concepção geral que os estudantes possuem sobre "demonstrações".

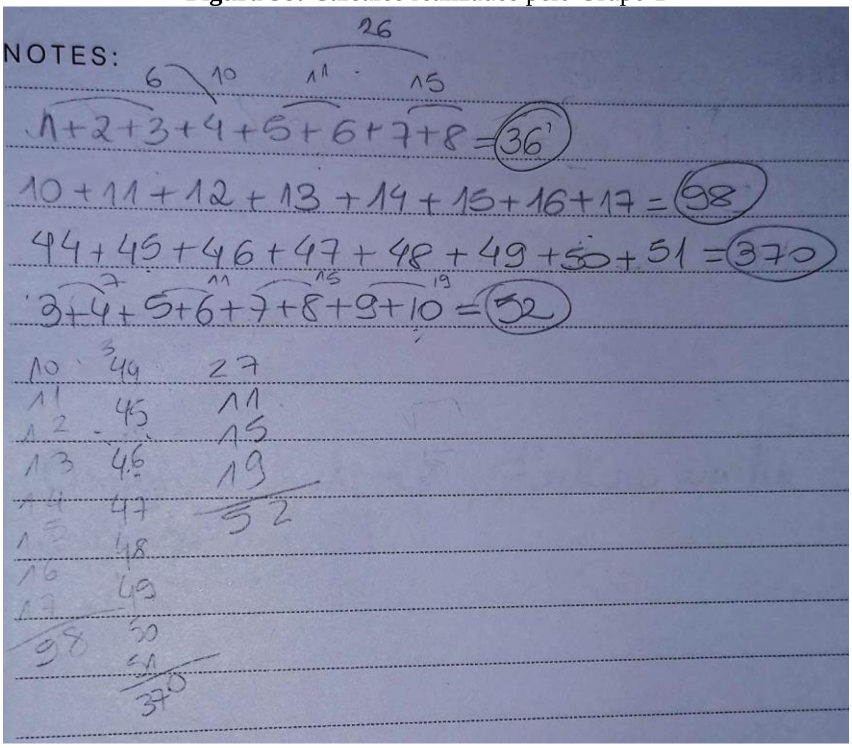
Logo após os estudantes entregarem as atividades, o sinal da escola tocou e os liberei para o intervalo. A professora oficial de matemática informou que gostou da proposta de atividades e que gostaria que eu enviasse o roteiro para que ela pudesse aplicar com a outra turma de 6º ano do Ensino Fundamental.

8.8 ANÁLISE DA ATIVIDADE FINAL POR GRUPOS

8.8.1 Análise do Grupo 1

O Grupo 1 recebeu a seguinte questão: "Que tipo de número resulta da soma de oito números naturais consecutivos?". Os integrantes do grupo iniciaram o processo de resolução da atividade pela experimentação heurística, por meio de registros de representações aritméticas. Os alunos optaram por somar algumas sequências de oito números consecutivos, porém cometeram alguns erros nos cálculos (Figura 58). Tal fato impossibilitou a identificação de padrão entre os resultados. Ainda assim, inferimos que neste ponto o grupo passou do registro em língua materna para o registro aritmético quando expressou as séries.

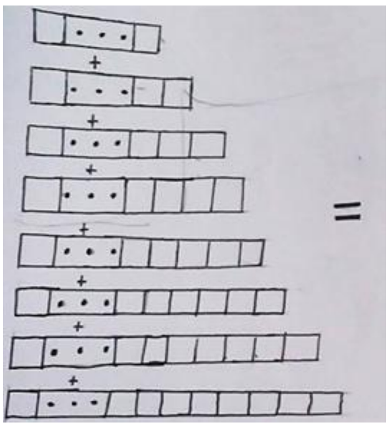
Figura 58: Cálculos realizados pelo Grupo 1



Fonte: Acervo da autora

Tendo em vista que os alunos não conseguiam visualizar um padrão devido, principalmente, aos erros cometidos nos cálculos, os integrantes do grupo acataram a sugestão mencionada anteriormente e, prontamente, apresentaram as parcelas genéricas, fato que demonstra que saíram do registro de representação escrita na língua materna da questão e converteram para o registro de representação em arranjo retangular (Figura 59).

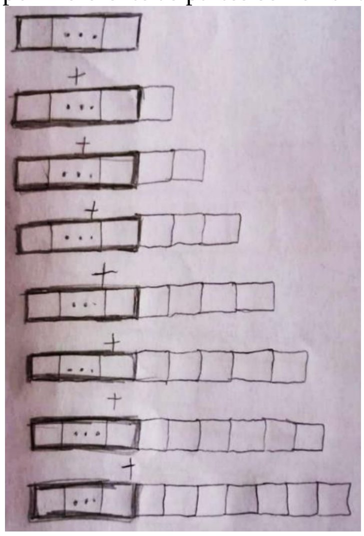
Figura 59: Representação do Grupo 1 em arranjo retangular das parcelas da soma de oito números naturais consecutivos



Fonte: Acervo da autora

Apesar de terem conseguido apresentar a representação genérica das parcelas da adição, o grupo não conseguiu desenvolver uma estratégia para adicioná-las. Sendo assim, eu sugeri que unissem os arranjos retangulares das parcelas, de modo a tentar construir um arranjo retangular. Para isso, o grupo identificou as partes semelhantes em todos os arranjos retangulares das parcelas (contornadas na Figura 60), em seguida juntou esses pedaços um abaixo do outro e, posteriormente, distribuiu os quadrados restantes. Esse desenvolvimento mostra que os alunos conseguiram realizar tratamentos com os registros dessa representação semiótica.

Figura 60: Registro do Grupo 1 referente às partes semelhantes nos arranjos retangulares



Fonte: Acervo da autora

Com a estratégia mencionada acima e mais detalhada no relato da quarta aula, os estudantes não conseguiram formar um arranjo retangular e como notaram que tal procedimento funcionou para outros grupos, solicitaram a minha ajuda novamente. Então, sugeri que tentassem formar um arranjo retangular com uma quantidade de linhas diferente da que haviam testado. Cada integrante do grupo tentou para um número distinto (2, 3 e 4), uma espécie de tentativa heurística, e concluíram que era possível construir um arranjo retangular de duas e quatro linhas.

Um dos integrantes do grupo afirmou "*lembra que quando o arranjo tinha duas linhas, era múltiplo de 2; três, múltiplo de 3; quatro, múltiplo de 4* [...]". Após essa colocação, o grupo, conseguiu identificar que a soma de oito números naturais consecutivos é um número que é múltiplo de 2 e de 4 (Figura 50). Neste contexto, não houve a criação de conjecturas, pois os tratamentos realizados nos registros possibilitaram as conclusões.

O Grupo 1 foi o único grupo que apresentou duas conclusões relativas ao tipo do número que resulta da adição de consecutivos. Com elas, os alunos mostraram que além dos tratamentos, conseguiram realizar conversões ao identificar que o que a quantidade de linhas nos arranjos retangulares significa e passar essa concepção para a escrita em língua materna: “*é um número par, pois está em duas linhas, e múltiplo de 4 pois está em 4 linhas*”.

Consideramos a apresentação dos estudantes em conjunto com os registros escritos uma demonstração (M1 - ver Quadro 4) explicativa, pois utilizaram arranjos genéricos para representar as parcelas, conseguindo apresentar as diferenças de cada parcela tendo em vista que eram consecutivas, realizaram a adição por meio da união das representações corretamente, apelando para o significado de juntar da adição, argumentaram e chegaram a uma conclusão que é verdadeira para qualquer sequência de oito termos consecutivos.

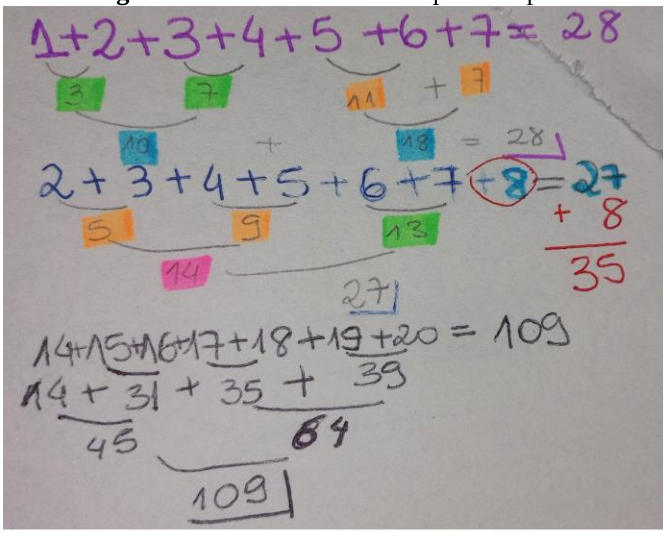
Relativamente às práticas teatrais, esse grupo criou três personagens: Professor Rabugento, Funkeirinho e Fusão. Cada um desses personagens com características, propósitos e enredo bem determinados. A maior qualidade do Professor Rabugento é a inteligência, do Funkeirinho é a comunicação, enquanto o Fusão possui ambas as capacidades. Em relação às fraquezas, elas surgem principalmente em dois dos personagens: Professor Rabugento e Funkeirinho. O primeiro possui dificuldades em comunicar suas concepções e o segundo em compreender a matemática.

Os integrantes do grupo realizaram algumas modificações na proposta de personagens na apresentação do esquete teatral para a turma. Decidiram manter o personagem Professor Rabugento e Funkeirinho, descartando o personagem Fusão e colocando em seu lugar um personagem de estudante que não recebeu nome. Na apresentação foi possível notar que os alunos mudaram suas posturas, maneira de andar e modo de falar.

8.8.2 Análise do Grupo 2

O Grupo 2 recebeu a seguinte questão: “Que tipo de número resulta da adição de sete números naturais consecutivos?”. Semelhantemente ao grupo anterior, este grupo conseguiu expressar exemplos aritméticos da questão passada em língua materna, porém apresentaram erros nos cálculos (Figura 61). Dessa forma, inferimos que o grupo conseguiu realizar conversões entre a representação escrita em língua materna utilizada na questão e a representação aritmética. Além disso, consideramos os erros cometidos nos cálculos um fator determinante para a impossibilidade da identificação do padrão e da construção de uma conjectura pelo grupo.

Figura 61: Cálculos realizados pelo Grupo 2



Fonte: Acervo da autora

Os integrantes também optaram, depois da minha sugestão para tal, por partir para a representação genérica das parcelas que lhes foi destinada. O grupo juntou as parcelas uma abaixo da outra e redistribuiu as unidades das representações em arranjos retangulares das parcelas, a fim de formar um novo arranjo retangular, para realizar a adição. Tal estratégia, apresentada na Figura 42, explicita que os integrantes conseguiram facilmente realizar tratamentos e conversões entre os registros de representações semióticas: em língua materna e pictórica, por meio de arranjo retangular.

Com a aplicação da estratégia mencionada anteriormente, o grupo conseguiu construir um arranjo retangular de sete linhas e concluiu que a soma de sete números naturais consecutivos é um número múltiplo de 7. Este grupo apresentou uma variável para representar a quantidade de colunas do arranjo retangular resultante, a saber: *k* que deriva da palavra Kika (nome escolhido para a quantidade de colunas), apresentando, novamente, conversões entre as representações utilizadas no desenvolvimento das atividades.

Por meio dos tratamentos e conversões entre os registros de representações semióticas, consideramos que o grupo chegou à construção desejada sem passar pela etapa da formulação de uma conjectura. Classificamos a apresentação dos estudantes em conjunto com os registros escritos uma demonstração (M1 - ver Quadro 4) que é explicativa, por mostrar, visualmente a razão de a sentença ser verdadeira e expressar todos os passos da construção.

No que se refere às práticas teatrais, este grupo desenvolveu apenas um personagem: a Curiosinha. Os integrantes do grupo determinaram as características físicas e da personalidade da personagem ao escolherem um dos integrantes do grupo para interpretá-la, ao definirem um acessório marcante (boné) e ao estabelecer que a personagem tivesse um espírito curioso, com vontade de saber, ver e entender o mundo, mas principalmente a matemática.

Na apresentação, os integrantes levaram consigo o roteiro desenvolvido com as falas de cada um e com a ordem que deveriam ser discursadas. O grupo apresentou seus dados por meio de registros de representações na língua materna, algébricas e pictóricas, sentindo-se mais seguros para apresentar com o roteiro em mãos. Além disso, formulou distintas considerações sobre números naturais, números consecutivos, adição realizada por meio de registros de arranjos retangulares e demonstração para o que lhes foi proposto.

8.8.3 Análise do Grupo 3

O Grupo 3 recebeu a seguinte questão: “Que tipo de número resulta da adição de nove números naturais consecutivos?”. Este grupo, assim como os Grupos 1 e 2, acabou cometendo erros nos cálculos ao somar a sequência de nove números por meio da representação aritmética. Sendo assim, consideramos que o grupo conseguiu realizar conversões entre a representação em linguagem materna utilizada na questão e a representação aritmética e que os erros impossibilitaram a identificação do padrão e da construção de uma conjectura pelo grupo. Em seguida o grupo seguiu para as representações genéricas das parcelas em arranjos retangulares e apresentou a mesma estratégia dos grupos 1 e 2 ao somar as parcelas com o intuito de formar um arranjo retangular. Portanto, consideramos que as mesmas transformações de registros de representações semióticas e etapas de construção de uma demonstração foram desenvolvidas por este grupo.

O grupo construiu um arranjo retangular de nove linhas, por meio de tratamentos realizados com as representações das parcelas, e concluíram que a soma é um número múltiplo de 9 (Figura 51). Como essa quantidade de linhas foi a primeira tentativa e resultou em uma conclusão para a atividade, o grupo não procurou realizar arranjos retangulares com uma quantidade de linhas diferentes, situação que ocorreu no Grupo 1. Sendo assim, durante a apresentação de seus resultados o grupo foi incentivado a analisar o arranjo retangular formado por nove linhas e transformá-lo em um novo arranjo retangular com uma quantidade de linhas diferente. Dessa forma, as integrantes do grupo, concluíram que a soma em questão também é um número múltiplo de 3, pois conseguiram formar um arranjo retangular de três linhas. Dessa forma, as alunas desenvolveram tratamentos no registro de representação semiótica demonstrando (M1 - ver Quadro 4), de maneira explicativa, a soma de nove números naturais consecutivos é um múltiplo de 9 e de 3.

O Grupo 3 planejou três personagens: duas amigas que discutem sobre matemática e um super-herói, chamado Chapolin, que as ajuda a solucionar um problema da área. No esquete desenvolvido pelas alunas não foram evidenciadas as características da personagem, focando apenas no enredo da história. Entretanto, na apresentação, apenas uma aluna interpretou uma personagem, distinta dos que haviam criado, e muito parecida com a Desconfiadinha. Nesse sentido, consideramos que as alunas utilizaram da criatividade para criarem personagem, porém não se sentiram suficientemente confortáveis para apresentar as três primeiras personagens, optando por apresentar uma personagem semelhante a uma que apareceu constantemente na intervenção pedagógica.

8.8.4 Análise do Grupo 4

O Grupo 4 recebeu a seguinte questão: “Que tipo de número resulta da adição de cinco números naturais consecutivos?”. O grupo iniciou a investigação por meio de testes aritméticos (Figura 62), o que mostra que conseguiram realizar a conversão da representação escrita em língua materna para representação aritmética com exemplos. Diferente dos demais grupos analisados até o momento, esse grupo não apresentou erros nos cálculos, porém foram influenciados por um integrante do Grupo 2 a partirem para a representação genérica das parcelas em arranjos retangulares. Dessa forma, o Grupo 4 não explicitou se conseguiu identificar um padrão entre os exemplos investigados e não apresentou uma conjectura.

Figura 62: Testes aritméticos realizados pelo Grupo 4

$1+2+3+4+5 = 15$

$2+3+4+5+6 = 20$

$13+14+15+16+17 = 75$

$21+22+23+24+25 = 115$

$35+36+37+38+39 = 185$

$6+7+8+9+10 = 40$

$4+5+6+7+6 = 30$

Fonte: Acervo da autora

O grupo realizou a conversão da representação escrita em língua materna na questão para as representações genéricas em arranjos retangulares das parcelas da soma. Entretanto, essa não foi uma escolha feita diretamente pelo grupo, visto que seguiram a sugestão de um colega de outro grupo. De acordo com a Figura 42, o grupo representou a soma e, por meio de tratamentos no registro de representação pictórica, conseguiu criar um arranjo retangular de cinco linhas, concluindo que a soma de cinco números naturais consecutivos é um número múltiplo de 5.

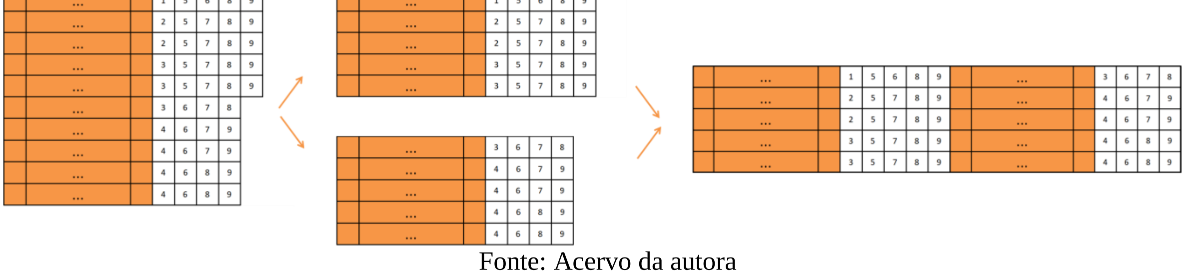
Relativamente às práticas teatrais, o grupo conseguiu desenvolver uma personagem, a Nerdzinha, e características para ela, como, por exemplo, ser inteligente. Além disso, o grupo desenvolveu um enredo, no qual a personagem descobriria e apresentaria a conclusão obtida pelo grupo na componente matemática. Entretanto, na apresentação o grupo não seguiu o roteiro e não apresentou os resultados em forma de esquete com personagem. As integrantes do grupo decidiram realizar uma apresentação expositiva dos resultados, na qual apenas duas das quatro integrantes do grupo participaram.

8.8.5 Análise do Grupo 5

O Grupo 5 recebeu a seguinte questão: “Que tipo de número resulta da adição de dez números naturais consecutivos?”. Os integrantes desse grupo testaram aritmeticamente para alguns casos sem cometerem erros nos cálculo, o que demonstra que realizaram tratamentos na aritmética e conversões entre a representação na língua materna e a aritmética. Além disso, não explicitaram se conseguiram identificar um padrão e formular uma conjectura. Semelhante ao Grupo 4, o Grupo 5 foi influenciado pelo mesmo colega do Grupo 2 que sugeriu a representação pictórica e genérica por meio de arranjos retangulares.

O Grupo 5 seguiu a mesma estratégia que os demais para representar a soma, saindo da representação escrita em língua materna, convertendo para a representação genérica das parcelas em arranjos retangulares e realizando tratamentos nesse registro de representação. O Quadro 14 explicita um dos tratamentos realizados, porém foi necessário mais um passo para que fosse possível retirar uma conclusão da representação. A Figura 63 mostra o tratamento realizado que possibilitou a construção de um arranjo retangular de cinco linhas e a conclusão de que a soma de dez números naturais consecutivos é um número múltiplo de 5.

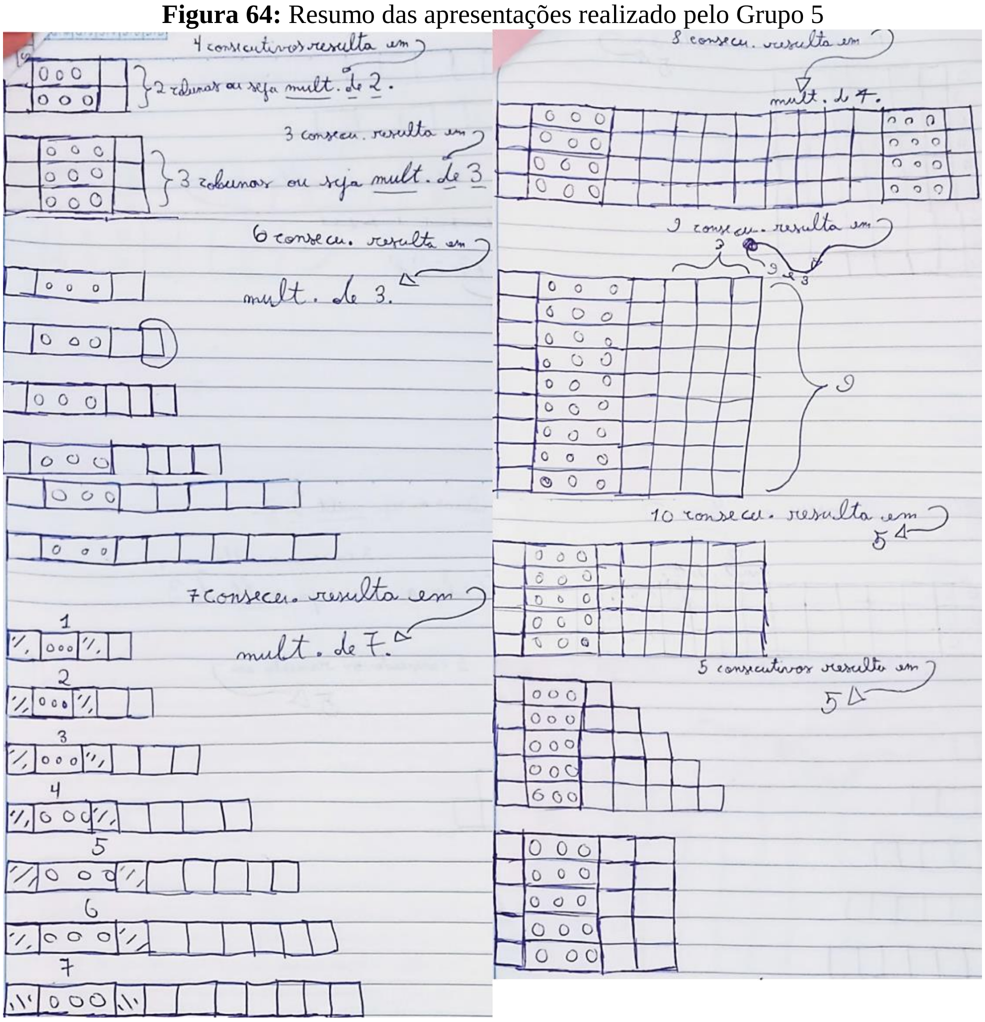
Figura 63: Tratamento final realizado pelo Grupo 5



Fonte: Acervo da autora

O grupo optou por não apresentar as suas construções em forma de esquete com personagens para a turma. Então, foi solicitado que cada integrante, individualmente, construísse um resumo de cada apresentação dos colegas. Os apontamentos entregues pelos estudantes são iguais. Sendo assim, apresentamos na Figura 64 os registros de apenas um dos integrantes do grupo.

Figura 64: Resumo das apresentações realizado pelo Grupo 5



Fonte: Acervo da autora

Para a adição de dois, três, oito, nove e dez números naturais consecutivos os integrantes do Grupo 5 registraram as representações em arranjos retangulares que possibilitaram a conclusão final apresentada por cada grupo. Já para a adição de seis e sete números naturais consecutivos, registraram apenas as representações em arranjos retangulares das parcelas das somas. Apenas para o caso da adição de cinco números naturais consecutivos, os alunos explicitaram a representação da soma das parcelas e o tratamento realizado que possibilitou a conclusão de que a soma é um número múltiplo de 5. Em todos os casos os alunos registraram em língua materna escrita o tipo de número que cada caso resulta.

8.8.6 Análise do Grupo 6

O Grupo 6 recebeu a seguinte questão: “Que tipo de número resulta da adição de quatro números naturais consecutivos?” e o seu processo de resolução relativamente à componente matemática foi semelhante ao do Grupo 5. O grupo testou para alguns casos, utilizando registros de representações aritméticas, ou seja, converteu a representação escrita em língua materna para alguns casos específicos por meio de representações aritméticas. O grupo não explicitou se conseguiu identificar um padrão e formular conjectura, pois partiu diretamente para a representação genérica em arranjos retangulares da soma devido a uma sugestão de um colega do Grupo 2. Portanto, também conseguiu passar da representação escrita em língua materna para representação pictórica.

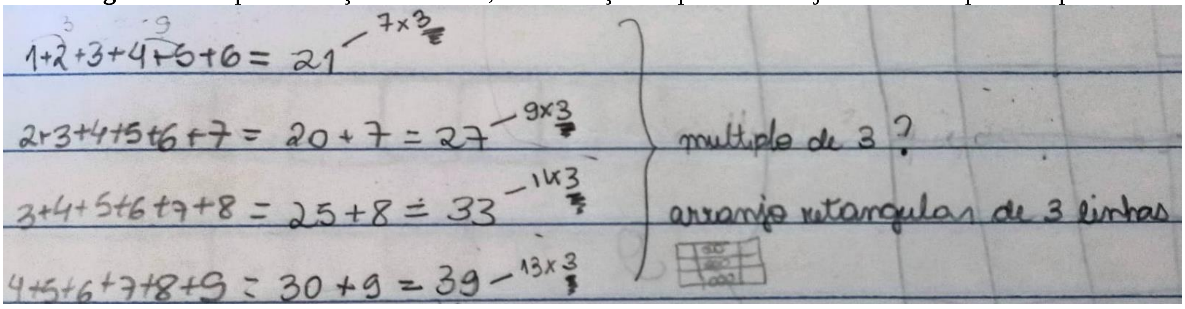
O grupo realizou três tratamentos: um quando juntou as representações das parcelas uma abaixo da outra para representar a soma, outra ao reorganizar a representação da soma como é mostrado no Quadro 14 e, por fim, no momento em que conseguiu construir um arranjo retangular de duas linhas (Figura 48) que possibilitou a conclusão de que a soma de quatro números naturais consecutivos é um número múltiplo de dois, ou seja, um número par.

A personagem desenvolvida pelo grupo foi criada apenas por uma das integrantes. Dona Sabe Tudo foi o nome escolhido, uma personagem com características positivas (inteligência, comunicação e desenvoltura) e negativas (arrogância, sentimento de superioridade perante aos outros). A aluna também planejou o roteiro, pensando nas expressões e falas da personagem, que apresentaria o resultado matemático encontrado de maneira esnobe. Entretanto, não seguiu o roteiro desenvolvido, no dia da apresentação interpretou uma personagem semelhante ao Juka (personagem que apresentei como exemplo aos alunos).

8.8.7 Análise do Grupo 7

O Grupo 7 recebeu a seguinte questão: “Que tipo de número resulta da adição de seis números naturais consecutivos?”. Os alunos iniciaram pela experimentação heurística por meio de exemplos em registros de representações aritméticas (Figura 65). Essa investigação possibilitou a identificação de um padrão e a formulação de uma conjectura: “a soma de seis números consecutivos é um número múltiplo de 3”. A partir desse momentos, os alunos identificaram que para validar a conjectura, deveriam chegar, por meio de argumentação, em um arranjo retangular de três linhas.

Figura 65: Experimentação heurística, identificação de padrão e conjectura criada pelo Grupo 7

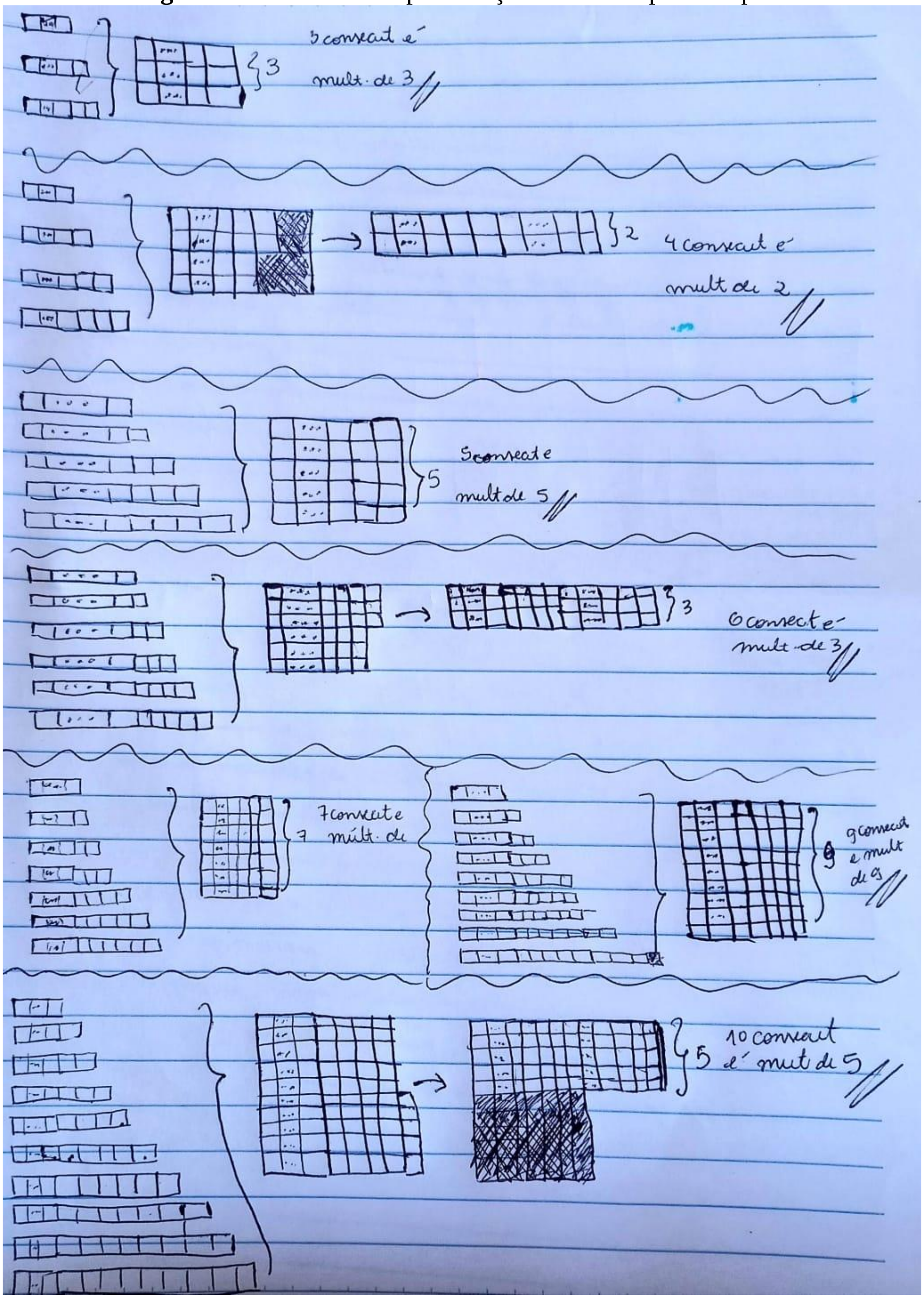


Fonte: Acervo da autora

O Grupo 7, como mostra a Figura 44, conseguiu representar as parcelas de maneira genérica e já buscaram, por meio de tratamentos, construir um arranjo retangular com três linhas, pois essa era a conjectura formulada. Assim, o grupo conseguiu converter a escrita em linguagem materna para representações em arranjos retangulares. Levando todo o processo em consideração, o grupo passou por todas as etapas da construção de uma prova: experimentação heurística, identificação de padrão, formulação de conjectura, argumentação e construção de uma demonstração.

Relativamente às práticas teatrais, assim como o Grupo 5, o Grupo 7 não quis apresentar seus resultados para a turma e os dois integrantes do grupo entregaram os mesmos registros, porém em folhas separadas (Figura 66).

Figura 66: Resumo das apresentações realizado pelo Grupo 7



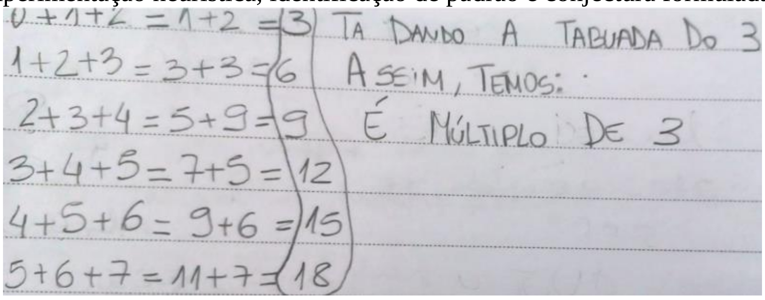
Fonte: Acervo da autora

Na Figura 66 conseguimos notar que os integrantes do Grupo 7 explicitaram as representações das parcelas, a soma por meio de arranjos retangulares, os tratamentos realizados na soma que possibilitaram as conclusões apresentadas pelos grupos e uma sistematização escrita em língua materna.

8.8.8 Análise do Grupo 8

O Grupo 8 recebeu a seguinte questão: “Que tipo de número resulta da adição de três números naturais consecutivos?”. O grupo de forma autônoma passou por todas as etapas da construção de uma prova. Na Figura 67, podemos observar que os integrantes desse grupo construíram exemplos, convertendo a escrita na língua materna para representações em arranjos retangulares; identificaram um padrão, ao notar que as respostas são números múltiplos de 3; e construíram uma conjectura, supondo que a soma de três números consecutivos é um múltiplo de 3.

Figura 67: Experimentação heurística, identificação de padrão e conjectura formulada pelo Grupo 8



Fonte: Acervo da autora

Os integrantes desse grupo, rapidamente construíram os arranjos retangulares genéricos das parcelas (Figura 46), realizando uma conversão da representação escrita em língua materna no problema para a representação pictórica. Em seguida, por meio de tratamentos, conseguiram representar a soma em um arranjo retangular de três linhas e concluir que, de fato, a conjectura formulada pelo grupo é verdadeira. Assim como o Grupo 7, o Grupo 8 também passou por todas as etapas da construção de uma prova.

No que diz respeito às práticas teatrais, o grupo desenvolveu dois personagens: uma professora rabugenta e um aluno “respondão”. Por mais que os personagens criados tenham as características negativas marcantes, a professora iria conseguir conduzir a atividade e o aluno a desenvolveria com êxito. O planejamento dos estudantes foi aplicado, ou seja, os estudantes apresentaram os personagens desenvolvidos e o resultado matemático em formato de esquete com personagens para a turma.

8.9 ANÁLISE DAS PERCEPÇÕES DOS ESTUDANTES SOBRE AS ARGUMENTAÇÕES DESENVOLVIDAS EM GRUPO

A BNCC aborda demonstrações no 9º ano do Ensino Fundamental para o Teorema de Pitágoras e na Competência Específica 5 de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531)

Como a BNCC prevê demonstrações a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, acreditamos que, possivelmente, foi na aplicação da intervenção pedagógica que os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental participantes desse estudo tiveram seu primeiro contato com essa parte da matemática. A compreensão do conceito de demonstração matemática não é uma exigência para alunos de 6º ano do Ensino Fundamental. Assim, acreditamos que os alunos dessa etapa escolar ainda não estão prontos para classificar as suas argumentações quanto a sua aproximação com uma demonstração. Mesmo assim, gostaríamos de ter uma visão geral das concepções individuais dos estudantes em relação à resolução da atividade final realizada em seus respectivos grupos. A finalidade é compreender o que os alunos pensam sobre as argumentações apresentadas pelos seus grupos, uma vez que suscitou nossa curiosidade em relação às suas perspectivas. Para isso, foi solicitado que cada aluno respondesse a seguinte questão: "A argumentação do seu grupo foi forte suficiente para ser percebida como uma demonstração? Justifique.". 18 dos 20 alunos presentes no dia da coleta desses dados entregaram o registro com suas concepções. Não será feito uma análise por grupos, visto que alguns alunos não apresentaram identificação na folha entregue.

A maioria dos alunos percebeu a argumentação do seu grupo uma demonstração, 10 dos 18 estudantes explicitaram essa opinião. Em contra partida, 8 dos 18 estudantes não perceberam a argumentação de seu grupo uma prova. As justificativas para as percepções apresentadas foram diversas. Quando os estudantes classificaram a argumentação como uma demonstração, alegaram: "*sim, porque foi engraçado*", "*Quando iniciamos a atividade todo mundo ficou meio assim né, meio inseguro e com medo, mas a gente conseguiu fazer, então acho que sim, pois todo o nosso grupo se superou*", "*sim, porque todo mundo apresentou*", entre outros relatos semelhantes. Tais afirmações explicitam que, de fato, os alunos não estão familiarizados com a demonstração e seu significado.

Os alunos que não classificaram a argumentação como uma demonstração justificaram: "*não é, pois a minha dupla faltou*", "*não, porque a gente empacou e não conseguiu apresentar direito*", "*não, pois meu grupo só entregou o papel e não fez o personagem*", entre outras afirmações similares. Novamente os alunos não consideraram a complexidade matemática das argumentações, mas levaram em consideração situações pessoais.

Apenas dois alunos associaram diretamente suas respostas ao conceito matemático de demonstração, como evidenciado pelos seguintes trechos: "*sim* [é uma demonstração], *pois usamos arranjos retangulares, número qualquer...*" e "*não* [é uma demonstração], *porque a matemática é séria e não usa nomes tipo Robertão*". Na primeira afirmação, o estudante estabeleceu uma correspondência entre a argumentação do seu grupo, as generalizações, as representações usadas nas resoluções das atividades e as demonstrações, o que é verdadeiro e mostra certa compreensão sobre o conceito de demonstração. Na segunda declaração, a aluna expressou sua preocupação com a seriedade da matemática, o que também está relacionado à definição de demonstração, devido às regras dedutivas e de lógica devem ser seguidas.

Com base nos resultados obtidos nesta parte da análise, acreditamos que a intervenção pedagógica apresentada nesta dissertação representa o início de um trabalho que deve ser contínuo e progressivo ao longo de toda a etapa escolar dos alunos. Os indícios de compreensão de uma prova apresentados por alguns estudantes demonstram a importância de um trabalho de familiarização com as argumentações e demonstrações desde os anos iniciais. Com isso, os alunos poderão desenvolver as habilidades necessárias para identificar e construir essas estruturas matemáticas de forma cada vez mais autônoma e eficaz, o que contribui para um aprendizado mais significativo disciplina.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a graduação, eu adquiri uma base sólida de conhecimentos teóricos e práticos em Ensino de Matemática. No entanto, foi no mestrado que pude desenvolver capacidades avançadas de pesquisa e aprofundar em questões específicas do meu campo de estudo. O desenvolvimento dessa dissertação foi desafiante, durante esse processo surgiram situações inesperadas, emergiram assuntos que não eram o foco inicial, hipóteses foram comprovadas e muito mais. Profissionalmente, essa sequência de eventos possibilitou o meu crescimento e o meu aprimoramento quanto ao ensino e à pesquisa. No âmbito pessoal, me propiciaram a superação de desafios, o que contribuiu para a minha autoconfiança e autoestima. Nesse capítulo, além desses temas serem debatidos, buscaremos evidenciar se os objetivos dessa pesquisa foram alcançados e se conseguimos responder a nossa questão de pesquisa: “Em que medida os processos de argumentação e demonstração emergem em atividades mediadas com práticas teatrais a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental?”.

De modo geral, na aplicação da proposta de intervenção pedagógica, os alunos apresentaram registros de representações aritméticas, algébrica e pictóricas em arranjos retangulares. Também realizaram tratamentos e conversões entre os registros na investigação das propriedades da soma de múltiplos de um número específico, de um número qualquer, de números naturais consecutivos com uma quantidade finita de parcelas. Além disso, nesse mesmo contexto passaram por diversas etapas da construção de uma demonstração: experimentação heurística, identificação de padrão, formulação de conjectura, refutações, definições, argumentação e desenvolvimento de uma prova explicativa. Em virtude desses fatos, consideramos que atingimos os objetivos voltados à investigação da produção de argumentação dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental com foco no nível de argumentação adotado, nos registros de representações semióticas desenvolvidos nesse processo e nas etapas da construção de demonstração que foram contempladas.

A intervenção pedagógica teve um tempo reduzido, devido a celebrações na escola e a impossibilidade do uso dos períodos de artes, acreditamos que mais tempo poderia ter possibilitado uma maior experimentação e descoberta de propriedades sem intervenção docente. As três primeiras aulas foram destinadas à introdução da teoria e vocabulário, o que não gerou muitos dados para análise. No entanto, diferentes registros de representações semióticas foram mobilizados, os alunos passaram por todas as etapas da construção de uma prova e apresentaram distintos níveis de argumentação (Quadro 4) - M1, M2, M3 e M4.

Relativamente aos grupos analisados, responsáveis por investigar a soma de três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e dez números naturais consecutivos, conseguiram apresentar uma demonstração explicativa na resolução da atividade final. Entretanto, no processo, devido à quantidade de parcelas da soma, alguns grupos cometeram erros nos cálculos e outros optaram ou foram influenciados por integrantes de outros grupos a irem diretamente para as representações genéricas em arranjos retangulares das parcelas, o que os impossibilitou a passagem por duas das etapas da construção de uma prova: identificação de padrão e formulação de conjetura. Esses grupos partiram para a representação pictórica genérica das parcelas por meio de arranjos retangulares e realizaram tratamentos que embasaram seus argumentos para chegar à resolução da atividade. Dos grupos analisados, apenas dois passaram por todas as etapas da construção de uma prova no desenvolvimento da atividade final e também realizaram conversões e tratamentos nesse processo.

A construção de uma demonstração nem sempre é um processo linear que passa por todas as etapas mencionadas por Stylianides e Stylianides (2009). Assim, consideramos que a compreensão dos estudantes sobre os temas estudados não foi prejudicada por não passarem por algumas etapas. Entretanto, destacamos que, na maioria dos grupos, o processo escolhido para a resolução da atividade final não foi espontâneo, visto que foram influenciados (seja por colegas e até mesmo pela docente) a partirem para a investigação por meio de representações genéricas em arranjos retangulares das parcelas. A partir do momento que partiram para esse registro, os grupos realizaram as transformações necessárias para concluir a atividade.

Consideramos que os alunos se apropriaram do registro de representações pictóricas por meio de arranjos retangulares, visto que na resolução da atividade final, os grupos, mesmo tendo iniciado o trabalho com outro tipo de registro, deixaram esse de lado e apelaram diretamente para um raciocínio genérico, por meio de arranjos retangulares. Percebemos que os estudantes estavam confortáveis com essa representação pictórica, ainda que genérica. Além disso, durante a intervenção pedagógica, representações pictóricas em arranjos retangulares foram associadas a representações aritméticas em casos particulares e a representações algébricas em casos genéricos. Nesse último sentido, as representações pictóricas que surgiram no decorrer das aulas possibilitaram, principalmente, uma visualização para letras como variáveis.

No que diz respeito às práticas teatrais, os alunos mostraram compreender a essência da personagem Desconfiadinha e dialogaram constantemente com ela no decorrer das aulas. Já quando eram sujeitos de tais práticas, focamos nos recursos que os alunos desenvolveram pensando na apresentação e não no seu desempenho em realizá-los, pois acreditamos que essa análise deve ser feita por um profissional da área. Identificamos que conseguiram desenvolver personagens, enredos e roteiros, porém apresentaram dificuldades em colocá-los em prática na apresentação em formato de esquete para a turma. Acreditamos que tal dificuldade pudesse ser ultrapassada com um melhor entrosamento entre a disciplina de artes e de matemática. Todavia, essa realidade, quando associada a uma inibição do estudante em se apresentar, deve ser respeitada e o professor deve estar ciente e preparado, caso ela ocorra.

A partir das percepções apresentadas pelos estudantes acerca do nível de argumentação de seu grupo, inferimos que a maioria relacionou a demonstração com sentimentos e sensações pessoais, com poucas apresentações explicitas de uma relação com a dimensão matemática do tema. Quando consideraram a atividade divertida e tiveram um bom relacionamento com o grupo, os alunos consideraram a argumentação uma demonstração. Por outro lado, quando os pontos negativos prevaleceram (integrantes do grupo faltaram nas aulas, o grupo não criou um personagem, desorganização na apresentação, etc.), os estudantes consideraram que o seu grupo não apresentou um bom nível de argumentação.

Consideramos natural o surgimento dessas percepções, pois são os primeiros contatos que alunos dessa etapa escolar estão tendo com demonstrações. Assim, ainda não há uma familiaridade para compreender esse termo. Por outro lado, todos os grupos de alunos conseguiram desenvolver uma demonstração, por mais que não tenham consciência desse fato. Respondemos a nossa questão de investigação, visto que explicitamos em que medida os processos de argumentação e demonstração emergiram nas atividades que desenvolvemos e que foram mediadas com práticas teatrais a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Além disso, acreditamos ser necessário dar continuidade a trabalhos na área dessa dissertação para que, além de incentivar a argumentação e o desenvolvimento de provas, melhore a percepção dos estudantes sobre suas construções. Ressaltamos que, nesse sentido, a Desconfiadinha vai além de uma personagem, sua essência e postura podem ajudar nesse processo e o professor pode incorporar tais características em suas aulas.

REFERÊNCIAS

BALACHEFF, Nicolas. Processus de Preuve et Situations de Validation. **Educational Studies in Mathematics**, 1987, v. 18, n. 2, p. 147-176. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/320518071_Processus_de_preuve_et_situations_de_validation . Acesso em: 05 nov. 2021.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, 1988.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, LDB. 9394/1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRAZ, Maria Edilaine**. História da Matemática e Teatro nas aulas sobre Teorema de Tales**: um script proposto. 2014. 162 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Ciências da Natureza e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

BURTON, Lorraine**. The nature of mathematical thinking**. London: George Allen & Unwin, 1984.

CAMPOS, Adilson de; PONTE, João Pedro da. Raciocínio Matemático em Contextos Algébricos e Geométricos: uma análise com alunos medalhistas de 9º ano. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 36, n. 73, p. 676-696, ago. 2022. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04.

CARVALHO, Sandro Azevedo. **Pensamento genérico e expressões algébricas no Ensino Fundamental**. 257 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

COSTA, Valter Magalhaes. **Desenvolvimento de senso crítico por meio de argumentações matemáticas: a análise de experimentos didáticos no ensino fundamental**. 24/05/2017 Mestrado Profissional em Ensino de Matemática Instituição de Ensino: Universidade De São Paulo, São Paulo Biblioteca Depositária: www.teses.usp.br IME-USP

DALCIN, A. Matemática, literatura infanto-juvenil e teatro: alguns elos e perspectivas para o ensino. **Revista FAMOSP**, São Paulo, v.1, n.1, p. 05-27, 2004.

DAMIANI, Magda Floriana; ROCHEFORT, Renato Siqueira; CASTRO, Rafael Fonseca de; DARIZ, Marion Rodrigues; PINHEIRO, Silvia Siqueira. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação | Fae/Ppge/Ufpel**, Pelotas, v. 45, n. 1, p. 57-67, 2013.

DE VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Revista Educação e Matemática**, Lisboa, n. 63, p. 31-36, 2001. Disponível em: http://docplayer.com.br/35710051-Papel-e-funcoes-da-demonstracao-no-trabalho-com-o-sketchpad.html. Acesso em: 03 nov. 2021.

DOERING, Luisa R.; RIPOLL, Cydara C.; SILVA, Érica V. M. Construções e Percepções de alguns alunos de Licenciatura em Matemática sobre demonstrações. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, v.17, p. 1-22, 2022.

DUARTE, Valdenir Francisco. **Um estudo sobre propriedades do paralelogramo envolvendo o processo de argumentação e prova**' 01/12/2007 236 f. Profissionalizante em Educação Matemática Instituição De Ensino: Pontifícia Universidade Católica De São Paulo, São Paulo Biblioteca Depositária: PUC-SP.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. p. 37- 64. **Strasbourg**: IREM - ULP, 1993.

DUVAL, R. **Sémiosis et penseé humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**. Colombia: Merlín, 2004.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, n. 61, p. 103-131, 2006. DOI: 10.1007/s10649-006-0400-z

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. São Paulo: Proem, 2011.

DUVAL, R.; CAMPOS, T. M. M.; BARROS, L. G. X.; DIAS, M. A. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: Introduzir a álgebra no ensino: qual o objetivo e como fazer isso? Org. Tânia M. M. Campos. 1ed. São Paulo: PROEM, 2015.

DUVAL, Raymond; Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 11, n. 2, p. 01, 2 mar. 2017. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p1.

FILHO, Leonardo Tartaglia. **Teorema de Pitágoras, aplicações de demonstrações em sala de aula**' 26/10/2016 141 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal De São Carlos, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca Comunitária da UFSCar

FISCHER, G. B. A chegada de um projeto novo à escola pública. In: SANTOS, Vera Lúcia Bertoni dos. Iniciação à docência em Teatro: ações, relações e reflexões. São Leoplodo: **Oikos**, 2012.

FÜHR, Lucas. **Matemática E Teatro**: um olhar sobre o desenvolvimento de competências no processo de construção de peças teatrais com enredos matemáticos. 2019. 91 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

GODINO, Juan D.; RÉCIO, Angel Martínez. Meaning of proofs in mathematics education. **Educational Studies In Mathematics**, Netherlands, p. 83-99, 1997.

HANNA, Gila. Some pedagogical aspects of proof. **Interchange**, v. 21, n. 1, p. 6-13, 1990.

HANNA, Gila. Challenges to the Importance of Proof. **For the Learning of Mathematics**, v. 15, n. 3, p. 42-49, 1995.

HANNA, Gila. A Critical Examination of Three Factors in the Decline of Proof. **Interchange**, v. 31, n. 1, p. 21-33, 2000.

HANNA, Gila. Reflections on proof as explanation, **Ontario Institute for Studies in Education**, University of Toronto, 2016.

HOFFMAN, Brittany; BREYFOGLE, M. Lynn; DRESSLER, Jason. The Power of Incorrect Answers. **Mathematics Teaching In The Middle School**, v. 15, n. 4, p. 232-238, nov. 2009.

INOA, Rafael; WELTSEK, Gustave; TABONE, Carmine. A Study on the Relationship between Theater Arts and Student Literacy and Mathematics Achievement. **Journal For Learning Through The Arts**, Califórnia, v. 10, n. 1, p. 1-21, 2014.

JAPIASSU, R. O. V. **Metodologia do ensino de teatro**. 2. ed. Campinas, SP: Papirus, 2003.

LANNIN, John K. Generalization and Justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. **Mathematical Thinking And Learning**, Si, v. 7, n. 3, p. 231-258, jul. 2005.

MARTINS, Heloisa Helena T. de Souza. Metodologia qualitativa de pesquisa. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 2, p. 289-300, ago. 2004. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ep/a/4jbGxKMDjKq79VqwQ6t6Ppp/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 19 jan. 2022.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro da. Raciocínio matemático em contexto algébrico: Uma análise com alunos do 9º ano. In: Atas do encontro de investigação em educação matemática, Póvoa do Varzim. p. 347-364. 2011.

MATHEUS, Aline dos Reis. **Argumentação e prova na matemática escolar.** 2016. 146 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-04112016-170425/publico/matheus2016_dissertacao.pdf. Acesso em: 01 nov. 2021.

MORTARI, Cezar A. **Introdução à Lógica**. São Paulo: Editora Unesp, 2001. 393 p. Disponível em: https://moodlep.uem.br/pluginfile.php/172149/course/overviewfiles/MORTARI%2C%20C.%20A.%20Introdu%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A0%20L%C3%B3gica.pdf?forcedownload=1. Acesso em: 04 jun. 2022.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Argumentação e Prova Matemática com Geometria Dinâmica. **Novas Tecnologias na Educação**, v. 16, n. 1, p. 1-10, jul. 2018. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/viewFile/86021/49384. Acesso em: 02 dez. 2022.

OBRY, O. **O teatro na escola**. São Paulo: Melhoramentos, 1956.

PEIXOTO, Fernando. **O que é Teatro?** São Paulo. Editora Nova Cultural: Brasiliense, 1986.

PELUSO, Daiane; SCHLOSSER, Marli Terezinha Szumilo; ARTIGAS, Eliane Liecheski; WILHELM, Marilene Francieli. O esquete, uma prática no ensino de geografia. **14º Encontro Nacional de Prática de Ensino de Geografia**, Campinas, p. 1-13, 2019.

PEREIRA, Renata Vanessa Souza Gonçalves. **O espetáculo dos números: o teatro como uma proposta para o ensino da matemática**. 2017. 59 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2017.

PIETROPAOLO, Ruy Cesar. **(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**. 2005. 388 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PINA, Luiz Bragança de. **Como criar um personagem do zero**. 2020. Disponível em: https://www.tempoparacriar.com/como-criar-um-personagem-do-zero/. Acesso em: 18 jan. 2022.

POLIGICCHIO, Andreia Gonçalves. **Teatro: materialização da narrativa matemática**. 2011. 148 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Ciências e Matemática, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

REID, David. The meaning of proof in mathematics education. **Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education**.p. 458-468, 2005.

REVERBEL, Olga. **O Teatro na Sala de Aula**. 2 ed. Rio de Janeiro: J. Olympio, 1979.

RIGO, Matheus Fronza. **Argumentação e pensamento genérico no Ensino Fundamental.** 47 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

ROSALE, Andre Rodrigues. **Argumentação e prova matemática na educação básica**' 15/12/2017 Mestrado Profissional em Ensino de Matemática Instituição de Ensino: Universidade De São Paulo, São Paulo Biblioteca Depositária: www.teses.usp.br IME-USP

SACHSER, Paula Tatiane Froehlich. **A Procura da Fórmula**: Teatro e Matemática. 2019. 98 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

SCHLOSSER, Marli Terezinha Szumilo. Desafios e possibilidades da representação como recurso didático-pedagógico: relato de uma experiência-Colônia Upá/PR. **Revista Formação**. São Paulo. n.2, volume 2, 2014, páginas: 119-135.

SILVA, Marcílio Farias da. **Argumentação e prova envolvendo conceitos de múltiplos e divisores: uma experiência com alunos do ensino fundamental**' 01/04/2008 145 f. Profissionalizante em Educação Matemática Instituição De Ensino: Pontifícia Universidade Católica De São Paulo, São Paulo Biblioteca Depositária: PUC//SP

SILVEIRA, Priscila Ferreira; NOTARE, Márcia Rodrigues. Dobraduras Dinâmicas e a Argumentação em Geometria. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 18, n. 1, p. 1-10, jun. 2020. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/223844. Acesso em: 02 set. 201.

SOARES, M. T. B.; AFRO, M. S.; BRITO, G. H.; SOUZA, R. L. Desmistificando o ensino de demonstrações na formação inicial de professores de matemática. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Rio de Janeiro: SBEM, 2015.

SOWDER, Larry.; HAREL, Guershon. Types of Students’ Justifications. **Mathematics Teacher**, v. 91, n. 8, p. 670-675, 1998. Disponível em: https://booksc.org/book/23534244/def2ba. Acesso em: 04 nov. 2021

STYLIANIDES, Andreas J.; STYLIANIDES, Gabriel J. Proof constructions and evaluations. **Educational Studies In Mathematics**, v. 72, n. 2, p. 237-253, 2009.

STYLIANIDES, Gabriel J. An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. **For the Learning of Mathematics**, v. 28, n. 1, p. 9-16, 2008.

STYLIANIDES, Gabriel J.; STYLIANIDES, Andreas J. Mathematics for teaching: a form of applied mathematics. **Teaching And Teacher Education**, v. 26, n. 2, 161-172. 2010

APÊNDICES

APÊNDICE A – CARTA DE APRESENTAÇÃO À MANTENEDORA DAS ESCOLAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO

Carta de Apresentação

Parobé/RS, ___ de ________ de ____.

Prezada Sra Joana Darc Wittmann, secretária de Educação do município de Parobé,

O Programa de Pós-Graduação e Ensino de Matemática, mantido pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, através da pessoa da Coordenadora do Programa Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana, apresenta a mestranda Érica Vitória Machado da Silva, vinculada sob a matrícula [redacted], que está pleiteando autorização para realizar a coleta de dados para fins de aproveitamento no desenvolvimento de sua dissertação.

A coordenação do programa de pós-graduação tem conhecimento de que a pesquisa orientada pela Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering, provisoriamente intitulada "Argumentação, Demonstração e Teatro: uma proposta para a sala de aula do Ensino Fundamental", pretende estudar, propor, e analisar atividades que insiram a produção de argumentação e/ou demonstração no Ensino de Matemática por meio de práticas teatrais.

O Programa de Pós-Graduação está vinculado à Área de Ensino (Área 46 da CAPES) e tem como finalidades principais a formação continuada de professores de Matemática e a pesquisa aplicada em Ensino de Matemática. No caso da proposta do Mestrado Acadêmico, esta reconhece o Ensino de Matemática como campo de pesquisa acadêmica e de produção de conhecimento relacionado à Educação Matemática e fundamenta o projeto de formação de professores de Matemática para Educação Básica e de formação de formadores de professores. Especificamente a linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística, a qual esta pesquisa se vincula, investiga questões relativas aos processos de ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística em diferentes contextos da Educação Básica.

Desde já, o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática agradece a sua atenção e coloca-se à disposição para quaisquer esclarecimentos que sejam necessários.

____

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística - Campus do Vale
Av. Bento Gonçalves, 9500.
Porto Alegre/RS - CEP: 91905-900
E-mail: mat-ppgensimat@ufrgs.br

Atenciosamente,

____

Orientadora Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística - Campus do Vale
Av. Bento Gonçalves, 9500.
Porto Alegre/RS - CEP: 91905-900
E-mail: ldoering@mat.ufrgs.br

Relativamente a dúvidas sobre procedimentos éticos, você também poderá contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone +55 51 3308-3738 e e-mail etica@propesq.ufrgs.br

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO INSTITUCIONAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Agronomia - 91509-900 - Porto Alegre - RS
Fone/Fax: (051) 3308.6212
mat-ppgensimat@ufrgs.br http://www.ufrgs.br/ppgemat

Termo de Consentimento da Institucional

Escola:____

Direção:____

Endereço:____

Contato:____

A direção da escola através deste Termo de Consentimento Institucional autoriza a mestranda Érica Vitória Machado da Silva, vinculada sob a matrícula [redacted] Programa de Pós-Graduação e Ensino de Matemática mantido pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul , a realizar coleta de dados nesta escola para a pesquisa provisoriamente intitulada "Argumentação, Demonstração e Teatro: uma proposta para a sala de aula do Ensino Fundamental"

Deste modo, a direção da escola tem conhecimento de que a pesquisa está sendo orientada pela Prof. Dra. Luisa Rodriguez Doering e pretende estudar, propor, e analisar atividades que insiram a produção de argumentação e/ou demonstração no Ensino de Matemática por meio de práticas teatrais. Além disso, a direção da escola tem clareza que para efetivar a coleta de dados poderá ser solicitada pela pesquisadora acesso a documentos, realização de atividades em sala de aula e reunião com professores. Vale destacar que tais procedimentos de pesquisa somente ocorrerão com prévio planejamento e acordo entre as partes, sem prejuízo às atividades da comunidade escolar, e preservando a identidade dos participantes e colaboradores da pesquisa, assim como da escola.

Parobé/RS, ___ de ______________ de _________.

____
Direção da escola

____
Pesquisadora

____
Orientadora

Relativamente a dúvidas sobre procedimentos éticos, você também poderá contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone +55 51 3308-3738 e e-mail etica@propesq.ufrgs.br

APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Agronomia - 91509-900 - Porto Alegre - RS Fone/Fax: (051) 3308.6212
mat-ppgensimat@ufrgs.br http://www.ufrgs.br/ppgemat

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Convite para participação em pesquisa

Prezado(a) Responsável pelo(a) Aluno(a)__________________________________, o(a) aluno(a)___________________________________ está sendo convidado(a) a participar voluntariamente da pesquisa provisoriamente intitulada "Argumentação, Demonstração e Teatro: uma proposta para a sala de aula do Ensino Fundamental". A pesquisa está sendo desenvolvida por Érica Vitória Machado da Silva, estudante do curso de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Essa pesquisa é orientada pela Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering, a quem você poderá contatar, caso julgar necessário, por meio do e-mail ldoering@mat.ufrgs.br.

O objetivo desta pesquisa é estudar e propor atividades que insiram a produção de argumentação e/ou demonstração no ensino de Matemática em uma sala de aula do Ensino Fundamental, utilizando práticas teatrais, bem como analisar as produções dos alunos em seu desenvolvimento. Para isto, solicitamos a sua especial colaboração na pesquisa, a qual ocorrerá mediante a participação dos(as) alunos em cerca de 10 períodos de aula. O trabalho, as discussões e suas produções desenvolvidas nessas aulas serão analisados, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas realizadas.

O uso das informações decorridas da participação (produção escrita, fotos, gravação de áudio, filmagem e caderno de campo) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), identificadas apenas por códigos alfanuméricos. Todas as informações fornecidas pelo(a) aluno(a) serão armazenadas sob responsabilidade da pesquisadora por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Os riscos decorrentes da participação na pesquisa são mínimos, podendo haver desconforto com práticas abertas, incômodo com o trabalho em grupo, constrangimento na expressão teatral e dificuldades em compreender ou argumentar em tópicos de matemática. Na recorrência de qualquer circunstância desse tipo, os(as) estudantes receberão todo o apoio da professora/pesquisadora no sentido de minimizar os riscos mencionados. Já com relação aos benefícios da pesquisa, o(a) aluno(a) terá a oportunidade de: aprimorar a sua argumentação matemática, fortalecer seu relacionamento interpessoal e intrapessoal, aperfeiçoar sua comunicação e expressão, bem como contribuir para o desenvolvimento de uma pesquisa na área de Ensino de Matemática.

A participação do(a) aluno(a) não envolve nenhum tipo de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta colaboração a contribuição para o sucesso da pesquisa. A participação é muito importante e é voluntária. O(A) aluno(a) poderá se recusar a participar da pesquisa a qualquer momento, não havendo prejuízo de nenhuma forma para ele(a) se essa for sua decisão. O consentimento à participação não retira o direito à indenização devido a eventuais danos causados pela pesquisa. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento assinado por você e do Termo de Assentimento assinado pelo(a) aluno(a). Caso necessite de qualquer esclarecimento, peço que entre em contato comigo, a qualquer momento, pelo telefone [redacted] ou pelo e-mail erica-vitoria-855@hotmail.com. Relativamente a dúvidas sobre procedimentos éticos, você também poderá contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone +55 51 3308-3738 e e-mail etica@propesq.ufrgs.br

Obrigada pela sua colaboração.

Eu, ____________________________________, declaro, por meio deste termo, que concordei com a participação do(a) aluno(a) ___________________________, o(a) qual sou responsável, na pesquisa provisoriamente intitulada "Argumentação, Demonstração e Teatro: uma proposta para a sala de aula do Ensino Fundamental", desenvolvida pela pesquisadora Érica Vitória Machado da Silva.

Parobé, ____ de ______________ de ______.

Assinatura do(a) Responsável: ____

Assinatura da Pesquisadora: ____

Assinatura da Orientadora: ____

APÊNDICE D – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Agronomia - 91509-900 - Porto Alegre - RS Fone/Fax: (051) 3308.6212
mat-ppgensimat@ufrgs.br http://www.ufrgs.br/ppgemat

Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

Convite para participação em pesquisa

Prezado(a) Aluno(a)________________________________, você está sendo convidado(a) a participar voluntariamente da pesquisa provisoriamente intitulada "Argumentação, Demonstração e Teatro: uma proposta para a sala de aula do Ensino Fundamental". A pesquisa está sendo desenvolvida por Érica Vitória Machado da Silva, estudante do curso de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Essa pesquisa é orientada pela Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering, a quem você poderá contatar, caso julgar necessário, por meio do e-mail ldoering@mat.ufrgs.br.

O objetivo desta pesquisa é estudar e propor atividades que insiram a produção de argumentação e/ou demonstração no ensino de Matemática em uma sala de aula do Ensino Fundamental, utilizando práticas teatrais, bem como analisar as produções dos alunos em seu desenvolvimento. Para isto, solicitamos a sua especial colaboração na pesquisa, a qual ocorrerá mediante a participação dos(as) alunos em cerca de 10 períodos de aula. O trabalho, as discussões e suas produções desenvolvidas nessas aulas serão analisados, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas realizadas.

O uso das informações decorridas da participação (produção escrita, fotos, gravação de áudio, filmagem e caderno de campo) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), identificadas apenas por códigos alfanuméricos. Todas as informações fornecidas serão armazenadas sob responsabilidade da pesquisadora por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Os riscos decorrentes da participação na pesquisa são mínimos, podendo haver desconforto com práticas abertas, incômodo com o trabalho em grupo, constrangimento na expressão teatral e dificuldades em compreender ou argumentar em tópicos de matemática. Na recorrência de qualquer circunstância desse tipo, os(as) estudantes receberão todo o apoio da professora/pesquisadora no sentido de minimizar os riscos mencionados. Já com relação aos benefícios da pesquisa, você terá a oportunidade de: aprimorar a sua argumentação matemática, fortalecer seu relacionamento interpessoal e intrapessoal, aperfeiçoar sua comunicação e expressão, bem como contribuir para o desenvolvimento de uma pesquisa na área de Ensino de Matemática.

A sua participação não envolve nenhum tipo de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta colaboração a contribuição para o sucesso da pesquisa. Sua participação é muito importante e é voluntária. Você poderá se recusar a participar da pesquisa a qualquer momento, não havendo prejuízo de nenhuma forma se essa for sua decisão. O consentimento à participação não retira o direito à indenização devido a eventuais danos causados pela pesquisa. A colaboração à pesquisa se iniciará apenas a partir da entrega desse documento assinado por você e do Termo de Consentimento assinado pelo(a) responsável.

Caso necessite de qualquer esclarecimento, peço que entre em contato comigo, a qualquer momento, pelo telefone [redacted] ou pelo e-mail erica-vitoria-855@hotmail.com Relativamente a dúvidas sobre procedimentos éticos, você também poderá contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone +55 51 3308-3738 e e-mail etica@propesq.ufrgs.br

Obrigada pela sua colaboração.

Eu, ____________________________________, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa provisoriamente intitulada "Argumentação, Demonstração e Teatro: uma proposta para a sala de aula do Ensino Fundamental", desenvolvida pela pesquisadora Érica Vitória Machado da Silva.

Parobé, ____ de _____________ de ______.

Assinatura do(a) aluno(a): ____

Assinatura da Pesquisadora: ____

Assinatura da Orientadora: ____

APÊNDICE E – TERMO DE COMPROMISSO DE UTILIZAÇÃO DE DADOS

TERMO DE COMPROMISSO DE UTILIZAÇÃO DE DADOS (TCUD)

Eu, Érica Vitória Machado da Silva, mestranda do Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), bem como a Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering, também do Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS, no âmbito do projeto de pesquisa intitulado "**Argumentação, Demonstração e Teatro: uma proposta para a sala de aula do Ensino Fundamental**", comprometemo-nos com a utilização sem infração de normas legais e éticas dos seguintes dados:

1. Filmagem dos períodos de aulas utilizados para a realização da proposta de intervenção pedagógica;
2. Gravação de áudio para registrar os debates entre os grupos de estudantes;
3. Diário de bordo para relatar os acontecimentos mais pertinentes para a pesquisa;
4. Fotografias dos apontamentos dos estudantes durante a realização das atividades.

Esclarecemos que o uso dos dados tem como única finalidade contribuir com a pesquisa acima mencionada, de modo a possibilitar às pesquisadoras envolvidas um melhor entendimento sobre a produção de argumentação e/ou demonstração no ensino de Matemática por meio de práticas teatrais.

Por fim afirmamos que é de nossa a responsabilidade não repassar as informações recebidas em sua íntegra, ou parte dele, a pessoas não envolvidas na equipe da pesquisa e utilizá-las somente para os interesses deste trabalho, o que inclui a utilização e apresentação de dados em situações acadêmicas (trabalho de dissertação, artigos científicos, palestras, seminários etc.).

Porto Alegre, _____ de _______________ de _______.

Assinatura da pesquisadora Érica Vitória Machado da Silva:

____

Assinatura da orientadora da pesquisa, Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering:

____

APÊNDICE F – REFERÊNCIAS DOS TRABALHOS SELECIONADOS NA REVISÃO DE LITERATURA

BALACHEFF, Nicolas. Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. Pimm (Ed.) **Mathematics Teachers and Children**. London: Hodder and Stoughton, p. 216-235, 1988.

BERTHOLD, M. **História Mundial do Teatro**. São Paulo, Perspectiva, 2000.

CABRAL, Beatriz Ângela Vieira. **Drama como método de ensino**. São Paulo: Hucitec, 2012.

D'AMORE, Bruno. Intuição e demonstração. **Elementos de didática da matemática**. 1ª Ed. [tradução Maria Cristina Bonomi] São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. p. 329-364.

DE VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Revista Educação e Matemática**, Lisboa, n. 63, p. 31-36, 2001.

DESGRANDES, Flávio. **Pedagogia do Teatro:** Provocações e dialogismo. São Paulo: Hucitec, 2011.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine**. Berne : Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond; EGRET, M.A. **L'organization deductive du discours**, Annales de Didactique et de Sciences cognitives 2 IREM de Strasbourg, p. 25-40, 1989.

FISCHBEIN, Efraim. Intuition and proof. **For the learning of mathematics**, FLM Publishing association, Montreal, v. 3, n. 02, p. 9-18, nov 1982.

GUTIERRE. Liliane dos Santos. História da Matemática e suas potencialidades pedagógicas. In: FOSSA, John Andrew. (Org.). **Presenças Matemáticas**. Natal: EDUFRN, 2004.

HANNA, Gila. Some pedagogical aspects of proof. **Interchange**, Liberal Studies Center, Clarkson University, v. 21, n. 01, p. 6-13, fev 1990.

LACERDA, H. D. de G. **Educação Matemática Encena**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista. São Paulo, p. 179. 2015.

MACHADO, Nilson José. **Educação: competência e qualidade**. São Paulo: Escrituras Editora, 2009.

MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e Didática – As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente**. São Paulo: Cortez, 1995.

MENDES, Iran Abreu a investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: Mendes, Iran Abreu; Fossa, John A.; Valdés. Juan E. Nápoles. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

MIGUEL, Antônio. **Três estudos sobre História e Educação Matemática**. 1993. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, 1993.

NUNES, B. **Introdução à Filosofia da Arte**. São Paulo: Ática, 2011.

PARZYSZ, Bernard. **Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1**. Colloque COPIRELEM de Tours, IUFM Orléans-Tours & Equipe DIDIREM - université Paris - 7 2001 a.

PARZYSZ, Bernard. **Pre-service elementary teachers and the fundamental ambiguity of diagrams in geometry problem-solving**. IUFM Orléans-Tours & Equipe DIDIREM - université Paris - 7 – 2001 b.

PIAGET, Jean. Intellectual evolution form adolescence to adulthood. **Fondation Piaget**. 1970.

POLIGICCHIO, Andrea Gonçalves. **Teatro: materialização da narrativa matemática**. São Paulo: USP, 2011. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2011.

REZENDE, J.; NASSER, L. **Kinds of argumentation used in geometry**. Atas do PME–18, v. 1, p. 66, Lisboa, 1994.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto da. **Números racionais, reais e complexos**. 2ª ed. rev. e ampl. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.

SOWDER, L.; HAREL, G. **Types of Student's Justifications**. The Mathematics Teacher. vol. 91, n. 8, p. 670-675. Estados Unidos: NCTM, 1998.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID Maria Manuela M. S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula**. 3 ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2008.

ZALESKI FILHO, D. **Matemática e Arte**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.