

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**Renan Weber Kirst**

**ELEMENTOS SUPERFICIAIS LAMINARES EM CONCRETO  
ARMADO: ESTUDO COMPARATIVO ENTRE  
MÉTODOS DE CÁLCULO**

Porto Alegre  
junho 2010

**RENAN WEBER KIRST**

**ELEMENTOS SUPERFICIAIS LAMINARES EM CONCRETO  
ARMADO: ESTUDO COMPARATIVO ENTRE  
MÉTODOS DE CÁLCULO**

Trabalho de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil

**Orientador: João Ricardo Masuero**

Porto Alegre  
junho 2010

**RENAN WEBER KIRST**

**ELEMENTOS SUPERFICIAIS LAMINARES EM CONCRETO  
ARMADO: ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS DE  
CÁLCULO**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pelo Professor Orientador e pela Coordenadora da disciplina Trabalho de Diplomação Engenharia Civil II (ENG01040) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, junho de 2010

Prof. João Ricardo Masuero  
Dr. pela UFRGS  
Orientador

Profa. Carin Maria Schmitt  
Coordenadora

**BANCA EXAMINADORA**

**Luiz Eduardo Pillar da Silva(Simon Eng.)**  
Eng. pela PUCRS

**Prof. Inácio Benvegnu Morsch (UFRGS)**  
Dr. pela UFRGS

**Prof. Roberto Domingo Rios (UFRGS)**  
Dr. pela UFRGS

**Prof. João Ricardo Masuero (UFRGS)**  
Dr. pela UFRGS

Dedico este trabalho aos meus pais, Roger e Lídia, que me ensinaram as lições mais essenciais da vida.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao Prof. João Ricardo Masuero, orientador deste trabalho, pelas diversas horas de atenção a mim prestadas durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à Profa. Carin Maria Schmitt, pela dedicação e esforço no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à minha namorada, Clarissa Alves de Sampaio, pelo apoio incondicional, carinho e compreensão, sobretudo nos momentos mais difíceis.

Agradeço ao colega e amigo, Alisson Ramos Madeira, pelo companheirismo durante todo o curso de graduação.

Agradeço aos Eng. Luiz Eduardo Pillar da Silva e Henrique Moller, pela atenção e ajuda na compreensão de diversos assuntos ligados à engenharia de estruturas.

Agradeço aos meus irmãos, Rogério Weber Kirst e Ronald Weber Kirst, pela confiança e incentivo.

Agradeço aos meus pais, Lúcia Maria Weber Kirst e Roger Leite Kirst, pelos valores a mim ensinados durante toda a minha vida.

Tudo deve ser feito o mais simples possível, mas não de  
forma simplista.

*Albert Einstein*

## RESUMO

KIRST, R. W. **Elementos Superficiais Laminares em Concreto Armado:** estudo comparativo entre métodos de cálculo. 2010. 79 f. Trabalho de Diplomação (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Dada a necessidade de garantir a segurança, e a grande influência do dimensionamento de qualquer estrutura sobre o peso da construção, a verificação das solicitações em elementos estruturais através de diferentes métodos de cálculo pode ter impacto direto sobre o custo final de um empreendimento. Este trabalho discorre sobre a variação dos resultados obtidos no cálculo de elementos estruturais laminares planos em concreto armado valendo-se das solicitações e das deformações obtidas através do método dos elementos finitos comparativamente aos obtidos através dos métodos de dimensionamento baseados na teoria das grelhas e na teoria simplificada de Marcus. Para a concepção do modelo numérico dos elementos estruturais e a sua dissociação em elementos finitos de geometria adequada foram utilizados como ferramentas de apoio os *softwares* SAP 2000 e STRAP 12.5. Foi abordada essencialmente uma análise elástico-linear estática dos elementos estudados. Vale ressaltar que a maioria dos softwares de dimensionamento de estruturas de concreto armado utiliza análises plásticas na obtenção das solicitações. Os elementos em questão são solicitados predominantemente por cargas normais ao seu plano médio e têm duas dimensões predominantes em relação à terceira. Observou-se dificuldade de adequação da rigidez de flexão e da rigidez de torção para o modelo de analogia às grelhas, de forma que os resultados obtidos por este método tornam-se diferentes conforme a calibração efetuada para cada modelo. Verifica-se que os valores de momentos obtidos com a aplicação da Teoria Simplificada de Marcus são, em sua maioria, inferiores aos obtidos com o Método dos Elementos Finitos. O Método de Analogia às Grelhas, por sua vez, apresentou momentos fletores máximos coerentes quando comparados ao Método dos Elementos Finitos para a calibração proposta.

Palavras-chave: lajes; Método dos Elementos Finitos; Analogia às Grelhas; Teoria de Marcus.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: delineamento do trabalho .....	18
Figura 2: valores de $\mu$ para lajes retangulares armadas em duas direções .....	27
Figura 3: malha 50 x 50 cm. Momentos na direção $x$ [kgf.m/m].....	38
Figura 4: malha 25 x 25 cm. Momentos na direção $x$ [kgf.m/m] .....	39
Figura 5: malha 10 x 10 cm. Momentos na direção $x$ [kgf.m/m] .....	40
Figura 6: malha 10 x 10 cm no <i>software</i> SAP2000. Momentos na direção $x$ [kgf.m/m]..	41
Figura 7: laje 1 - dimensões 5,00 x 5,00 x 0,10 m .....	46
Figura 8: grelha representativa da laje 1 .....	47
Figura 9: diagrama de momento fletor nas barras centrais da grelha em ambas as direções [kgf.m] .....	47
Figura 10: mapa de contorno dos momentos na direção $x$ da laje 1 [kgf.m/m] .....	49
Figura 11: laje 2 - dimensões 4,00 x 6,00 x 0,10 m .....	50
Figura 12: grelha representativa da laje 2 .....	51
Figura 13: diagrama de momento fletor na barra central da grelha na direção $x$ [kgf.m]	52
Figura 14: diagrama de momento fletor na barra central da grelha na direção $y$ [kgf.m]	52
Figura 15: mapa de contorno dos momentos na direção $x$ da laje 2 [kgf.m/m] .....	53
Figura 16: mapa de contorno dos momentos na direção $y$ da laje 2 [kgf.m/m] .....	54
Figura 17: laje 3 - dimensões 5,00 x 5,00 x 0,10 m .....	55
Figura 18: grelha representativa da laje 3 .....	56
Figura 19: diagrama de momento fletor na barra central da grelha em ambas as direções [kgf.m] .....	57
Figura 20: mapa de contorno dos momentos na direção $x$ da laje 3 [kgf.m/m] .....	58
Figura 21: mapa de contorno dos momentos na direção $y$ da laje 3 [kgf.m/m] .....	59
Figura 22: laje 4 - dimensões 4,00 x 6,00 x 0,10 m .....	60
Figura 23: grelha representativa da laje 4 .....	61
Figura 24: diagrama de momento fletor na barra central da grelha na direção $x$ [kgf.m]	62
Figura 25: diagrama de momento fletor na barra central da grelha na direção $y$ [kgf.m]	62
Figura 26: de contorno dos momentos na direção $x$ da laje 4 [kgf.m/m] .....	63
Figura 27: de contorno dos momentos na direção $y$ da laje 4 [kgf.m/m] .....	64
Figura 28: laje 5 - dimensões 10,00 x 10,00 x 0,20 m .....	66
Figura 29: diagrama de momento fletor na barra central da grelha em ambas as direções [kgf.m] .....	67
Figura 30: mapa de contorno dos momentos na direção $x$ da laje 5 [kgf.m/m] .....	69
Figura 31: laje 6 - dimensões 2,00 x 2,00 x 0,08 m .....	70



Figura 32: diagrama de momento fletor na barra central da grelha em ambas as direções [kgf.m] .....	71
Figura 33: mapa de contorno dos momentos na direção $x$ da laje 6 [kgf.m/m] .....	72

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: momentos fletores e carga de colapso para uma laje com $l_x=5\text{m}$ e $l_y=3,6\text{m}$ ...	34
Quadro 2: momentos equilibrantes totais de uma laje com $l_x=5\text{m}$ e $l_y=3,6\text{m}$ .....	35
Quadro 3: comparativo de malhas de elementos finitos .....	42
Quadro 4: momento fletor $M_x$ de acordo com a relação $J/I_{xx}$ e com o espaçamento da grelha .....	43
Quadro 5: deformação de acordo com a relação $J/I_{xx}$ e com o espaçamento da grelha ...	44
Quadro 6: momentos na laje 1 pela Teoria de Marcus .....	46
Quadro 7: momentos na laje 1 por Analogia às Grelhas .....	48
Quadro 8: momentos na laje 1 por Elementos Finitos .....	49
Quadro 9: momentos na laje 2 pela Teoria de Marcus .....	51
Quadro 10: momentos na laje 2 por Analogia às Grelhas .....	53
Quadro 11: momentos na laje 2 por Elementos Finitos .....	54
Quadro 12: momentos na laje 3 pela Teoria de Marcus .....	56
Quadro 13: momentos na laje 3 por Analogia às Grelhas .....	57
Quadro 14: momentos na laje 3 por Elementos Finitos .....	59
Quadro 15: momentos na laje 4 pela Teoria de Marcus .....	61
Quadro 16: momentos na laje 4 por Analogia às Grelhas .....	63
Quadro 17: momentos na laje 4 por Elementos Finitos .....	65
Quadro 18: momentos na laje 5 pela Teoria de Marcus .....	67
Quadro 19: momentos na laje 5 por Analogia às Grelhas .....	68
Quadro 20: momentos na laje 5 por Elementos Finitos .....	68
Quadro 21: momentos na laje 6 pela Teoria de Marcus .....	70
Quadro 22: momentos na laje 6 por Analogia às Grelhas .....	71
Quadro 23: momentos na laje 6 por Elementos Finitos .....	73
Quadro 24: momentos fletores pelos três métodos [kgf.m/m] .....	74
Quadro 25: erro nos momentos considerando-se os resultados do MEF como corretos .	75
Quadro 26: deformações por grelhas e MEF [cm] .....	76

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	12
<b>2 MÉTODO DE PESQUISA</b> .....	15
2.1 QUESTÃO DE PESQUISA .....	15
2.2 OBJETIVOS DO TRABALHO .....	15
<b>2.2.1 Objetivo Principal</b> .....	15
<b>2.2.2 Objetivos Secundários</b> .....	16
2.3 PRESSUPOSTO .....	16
2.4 PREMISA .....	16
2.5 DELIMITAÇÕES .....	16
2.6 LIMITAÇÕES .....	17
2.7 DELINEAMENTO .....	17
<b>2.7.1 Pesquisa Bibliográfica</b> .....	18
<b>2.7.2 Definições de Elementos Estruturais para Estudo</b> .....	18
<b>2.7.3 Calibração dos Modelos Numéricos</b> .....	19
<b>2.7.4 Cálculo pela Teoria Simplificada de Marcus</b> .....	19
<b>2.7.5 Cálculo pelo Método de Analogia às Grelhas</b> .....	19
<b>2.7.6 Cálculo pelo Método dos Elementos Finitos</b> .....	19
<b>2.7.7 Comparação dos Resultados</b> .....	20
<b>2.7.8 Conclusões</b> .....	20
<b>3 TIPOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL</b> .....	21
3.1 ANÁLISE LINEAR .....	22
3.2 ANÁLISE LINEAR COM REDISTRIBUIÇÃO .....	22
3.3 ANÁLISE PLÁSTICA .....	23
3.4 ANÁLISE NÃO-LINEAR .....	23
3.5 ANÁLISE ATRAVÉS DE MODELOS FÍSICOS .....	24
<b>4 MÉTODOS DE DIMENSIONAMENTO</b> .....	25
4.1 TEORIA SIMPLIFICADA DE MARCUS .....	25
4.2 MÉTODO DE ANALOGIA ÀS GRELHAS .....	28
<b>4.2.1 Considerações Teóricas</b> .....	28
<b>4.2.2 Aplicação Computacional</b> .....	29
4.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	30
<b>4.3.1 Considerações Teóricas</b> .....	30
<b>4.3.2 Aplicação Computacional</b> .....	33

4.4 EXEMPLO COMPARATIVO .....	34
<b>5 AJUSTE DOS MODELOS COMPUTACIONAIS .....</b>	<b>36</b>
5.1 REFINAMENTO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS .....	37
5.2 GEOMETRIA E RIGIDEZ DAS GRELHAS .....	42
<b>6 OBTENÇÃO DAS SOLICITAÇÕES .....</b>	<b>45</b>
6.1 LAJE QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA .....	45
<b>6.1.1 Laje 1: solução pela Teoria Simplificada de Marcus .....</b>	<b>46</b>
<b>6.1.2 Laje 1: solução por Analogia às Grelhas .....</b>	<b>47</b>
<b>6.1.3 Laje 1: solução pelo Método dos Elementos Finitos .....</b>	<b>48</b>
6.2 LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA .....	50
<b>6.2.1 Laje 2: solução pela Teoria Simplificada de Marcus .....</b>	<b>50</b>
<b>6.2.2 Laje 2: solução por Analogia às Grelhas .....</b>	<b>51</b>
<b>6.2.3 Laje 2: solução pelo Método dos Elementos Finitos .....</b>	<b>53</b>
6.3 LAJE QUADRADA COM DOIS BORDOS ENGASTADOS .....	55
<b>6.3.1 Laje 3: solução pela Teoria Simplificada de Marcus .....</b>	<b>55</b>
<b>6.3.2 Laje 3: solução por Analogia às Grelhas .....</b>	<b>56</b>
<b>6.3.3 Laje 3: solução pelo Método dos Elementos Finitos .....</b>	<b>57</b>
6.4 LAJE RETANGULAR COM DOIS BORDOS ENGASTADOS .....	60
<b>6.4.1 Laje 4: solução pela Teoria Simplificada de Marcus .....</b>	<b>60</b>
<b>6.4.2 Laje 4: solução por Analogia às Grelhas .....</b>	<b>61</b>
<b>6.4.3 Laje 4: solução pelo Método dos Elementos Finitos .....</b>	<b>63</b>
<b>7 LAJES ESPECIAIS .....</b>	<b>66</b>
7.1 LAJE QUADRADA DE GRANDES DIMENSÕES .....	66
<b>7.1.1 Laje 5: solução pela Teoria Simplificada de Marcus .....</b>	<b>67</b>
<b>7.1.2 Laje 5: solução por Analogia às Grelhas .....</b>	<b>67</b>
<b>7.1.3 Laje 5: solução pelo Método dos Elementos Finitos .....</b>	<b>68</b>
7.2 LAJE QUADRADA DE PEQUENAS DIMENSÕES .....	69
<b>7.2.1 Laje 6: solução pela Teoria Simplificada de Marcus .....</b>	<b>70</b>
<b>7.2.2 Laje 6: solução por Analogia às Grelhas .....</b>	<b>71</b>
<b>7.2.3 Laje 6: solução pelo Método dos Elementos Finitos .....</b>	<b>72</b>
<b>8 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>74</b>
<b>9 CONCLUSÕES .....</b>	<b>77</b>
REFERÊNCIAS .....	79



## 1 INTRODUÇÃO

Com uma gama cada vez maior de diferentes métodos de cálculo para as mais variadas situações estruturais, muitos problemas estruturais acabam por ter suas soluções obtidas através de métodos simplificados. Graças ao avanço da tecnologia e ao conseqüente crescimento da oferta de ferramentas computacionais cada vez mais poderosas, tornou-se possível efetuar o dimensionamento de estruturas através de diferentes métodos de cálculo.

No Brasil, os métodos tradicionais e amplamente difundidos de dimensionamento de lajes e de outros elementos superficiais em concreto armado, tais como paredes de reservatórios e escadas, são os métodos de associação ao modelo simplificado de grelhas e os baseados na teoria simplificada de Marcus. Na solução por associação ao modelo simplificado de grelhas é possível considerar os apoios (vigas) em conjunto com o modelo de grelha das lajes e analisar o conjunto inteiro como uma grelha, tornando a laje e seus apoios uma estrutura única que funciona como um todo. O método baseado na teoria simplificada de Marcus, entretanto, considera os apoios rígidos, de forma que a estrutura em questão é individualizada da estrutura global.

Para analisar uma laje por analogia a uma grelha, deve-se discretizá-la em uma seqüência de faixas de largura previamente determinada a serem substituídas por elementos estruturais de barra localizados nos seus eixos. Este modelo é muito conveniente para aplicação em configurações de lajes contínuas, nas quais se obtém configurações de deformação e de esforços próximos da situação real em regime elástico. O método com base na teoria simplificada de Marcus, por sua vez, constitui-se em uma adaptação da teoria das grelhas para o dimensionamento de lajes retangulares. Baseia-se no princípio de que a carga aplicada pode ser equilibrada apenas por flexão.

Entretanto, especialmente para elementos superficiais laminares não-retangulares, ou para aqueles com condições de apoio e de solicitações que fogem à prática comum dos projetistas, os métodos convencionais de dimensionamento prevêm aproximações e simplificações para garantir a segurança do elemento em questão. Estas simplificações podem ter como

conseqüência o superdimensionamento da estrutura, gerando maiores gastos de material, ou o seu subdimensionamento, colocando em risco a utilização do elemento estruturalmente.

Foram estudados elementos superficiais laminares em concreto armado valendo-se das solicitações obtidas através do método de analogia às grelhas com o auxílio do *software* STRAP 12.5, da teoria simplificada de Marcus e das solicitações obtidas através do método dos elementos finitos, sendo estas últimas obtidas com o auxílio dos *softwares* computacionais SAP 2000 e STRAP 12.5, respectivamente. Utilizando elementos de geometria plana, ambos os programas elaboram a malha de elementos finitos e calculam os esforços e deslocamentos para cada elemento disponibilizando seus resultados de forma gráfica e por tabelas.

A escolha das configurações de lajes a serem estudadas obedeceu ao critério de viabilidade de aplicação dos três métodos propostos por este trabalho, restringindo as possibilidades de geometria a lajes retangulares submetidas a cargas uniformemente distribuídas. Desta forma, efetuou-se a calibração dos modelos subsequentes através de uma laje quadrada simplesmente apoiada em seus quatro bordos, a qual foi submetida a uma carga distribuída de 700 kgf/m<sup>2</sup>. Para esta, utilizou-se a solução da teoria geral de placas para encontrar o momento fletor e a deformação máxima, resultados estes comparados aos obtidos pelo método dos elementos finitos, pelo modelo simplificado de grelhas e pela teoria simplificada de Marcus.

Foi considerado o comportamento elástico-linear do concreto armado, sendo realizada apenas uma análise estática dos esforços solicitantes nos elementos estudados. Vale salientar que os principais *softwares* de dimensionamento de lajes disponíveis no mercado consideram os efeitos da perda de rigidez do concreto devido à fissuração, de forma que análise da estrutura é feita para o comportamento elasto-plástico do concreto armado.

O trabalho é apresentado 9 capítulos. A este capítulo de introdução segue o capítulo 2, no qual se apresenta o método de pesquisa do estudo, incluindo a questão de pesquisa, objetivos, pressuposto, limitação, delimitação, premissa e delineamento que orientaram a sua realização.

O capítulo 3 apresenta o embasamento teórico sobre os diferentes tipos de análise estrutural previstos pela NBR 6118/2007.

O capítulo 4, por sua vez, explana sobre os três métodos utilizados no trabalho para a obtenção dos momentos e das deformações, falando sobre as suas principais considerações

teóricas e, no caso do Método de Analogia às Grelhas e do Método dos Elementos Finitos, sobre as suas respectivas aplicações computacionais neste estudo.

O capítulo 5 propõe a calibração dos modelos numéricos a serem utilizados nos *softwares*, estudando parâmetros como a rigidez a ser utilizada nas barras das grelhas e o grau de refinamento necessário para que o modelo de elementos finitos possa ser considerado satisfatório. Neste capítulo utilizou-se a solução da Teoria Geral de Placas para a deformação e para o momento máximo na laje de calibração como valores de referência para os outros métodos.

O capítulo 6 mostra a aplicação dos três diferentes métodos para os 4 primeiros casos estudados neste trabalho, valendo-se da calibração dos modelos numéricos efetuada no capítulo anterior.

O capítulo 7 estuda a aplicação dos três métodos para duas outras configurações de lajes, consideradas especiais.

O capítulo 8 compara os resultados obtidos por cada um dos três métodos, assumindo que as calibrações feitas no Capítulo 5 são válidas para os casos estudados.

Por último, o capítulo 9 apresenta as conclusões e os comentários a respeito da utilização de cada método estudado para a obtenção das solicitações e das deformações em elementos superficiais laminares em concreto armado submetidos a cargas de flexão.

Este trabalho tem em seu contexto a sequência dos estudos realizados por BRÜCH (2009) e por ROSA (2008), ambos visando a calibração dos elementos de barra utilizados na Analogia de Grelha para a obtenção de resultados satisfatórios quando comparados aos obtidos através do Método dos Elementos Finitos.



## **2 MÉTODO DE PESQUISA**

Este capítulo detalha o escopo do projeto, apresentando as principais diretrizes para o desenvolvimento do estudo.

### **2.1 QUESTÃO DE PESQUISA**

A questão de pesquisa referente a este trabalho surge como base para toda a pesquisa subsequente e pode ser definida como: métodos aproximados (Teoria Simplificada de Marcus e Método de Analogia às Grelhas) fornecem solicitações em elementos superficiais laminares em concreto armado próximas às fornecidas pelo Método dos Elementos Finitos e pela solução da Teoria Geral de Placas?

### **2.2 OBJETIVOS DO TRABALHO**

Os objetivos deste trabalho estão classificados em principal e secundário com o intuito de direcionar a pesquisa, e são apresentados a seguir.

#### **2.1.1 Objetivo Principal**

O objetivo principal deste trabalho é a comparação dos resultados obtidos através de métodos aproximados (Teoria Simplificada de Marcus e Método de Analogia às Grelhas) com os resultados obtidos através do Método dos Elementos Finitos e da solução da Teoria Geral de Placas.

### 2.2.2 Objetivos Secundários

Este trabalho tem como objetivos secundários a obtenção das solicitações nos elementos em questão através dos seguintes métodos:

- a) Teoria Simplificada de Marcus;
- b) Analogia às Grelhas;
- c) Elementos Finitos.

### 2.3 PRESSUPOSTO

Pressupõe-se que uma análise elástico-linear para obtenção das solicitações em elementos superficiais laminares em concreto armado é suficiente para se efetuar a comparação dos resultados obtidos neste trabalho, não sendo considerada a análise elasto-plástica, comumente utilizada pelos *softwares* de dimensionamento existentes no mercado.

### 2.4 PREMISSA

Como premissa para este estudo coloca-se que métodos aproximados para a solução estática em elementos superficiais laminares em concreto armado possam ser utilizados para o dimensionamento dos elementos em questão.

### 2.5 DELIMITAÇÕES

Devido ao grande número de variáveis que surgiriam com a ampliação do estudo para outros elementos estruturais, este trabalho tem por delimitação o estudo de elementos superficiais laminares em concreto armado convencional executado *in loco*, desconsiderando-se assim elementos amplamente utilizados como pré-moldados ou técnicas como protensões, por exemplo.

## 2.6 LIMITAÇÕES

Este trabalho tem como limitação a utilização de apenas 2 *softwares* para o seu desenvolvimento, sendo apenas um deles aplicado no dimensionamento dos elementos estruturais quando utilizado o método de analogia às grelhas (STRAP 12.5) e ambos quando aplicado o método dos elementos finitos (STRAP 12.5 e SAP 2000).

O trabalho também limitou-se à análise de somente 6 diferentes geometrias de lajes planas isotrópicas, com espessura constante. Foram estudadas as seguintes configurações:

- a) quadrada, com dimensões 5x5 m, apoiada nos quatro lados;
- b) retangular, com dimensões 4x6 m, apoiada nos quatro lados;
- c) quadrada, com dimensões 5x5 m, com dois lados engastados;
- d) retangular, com dimensões 4x6 m, com dois lados engastados;
- e) quadrada, com dimensões 10x10 m, apoiada nos quatro lados;
- f) quadrada, com dimensões 2x2 m, apoiada nos quatro lados.

## 2.7 DELINEAMENTO

As etapas definidas no trabalho de pesquisa estão ilustradas na figura 1 e serão detalhadas a seguir. São elas:

- a) pesquisa bibliográfica;
- b) definição de elementos estruturais para estudo;
- c) calibração dos modelos numéricos;
- d) cálculo pelos métodos,
  - Teoria Simplificada de Marcus;
  - Analogia às Grelhas;
  - Elementos Finitos;
- d) comparação dos resultados;
- e) conclusões.

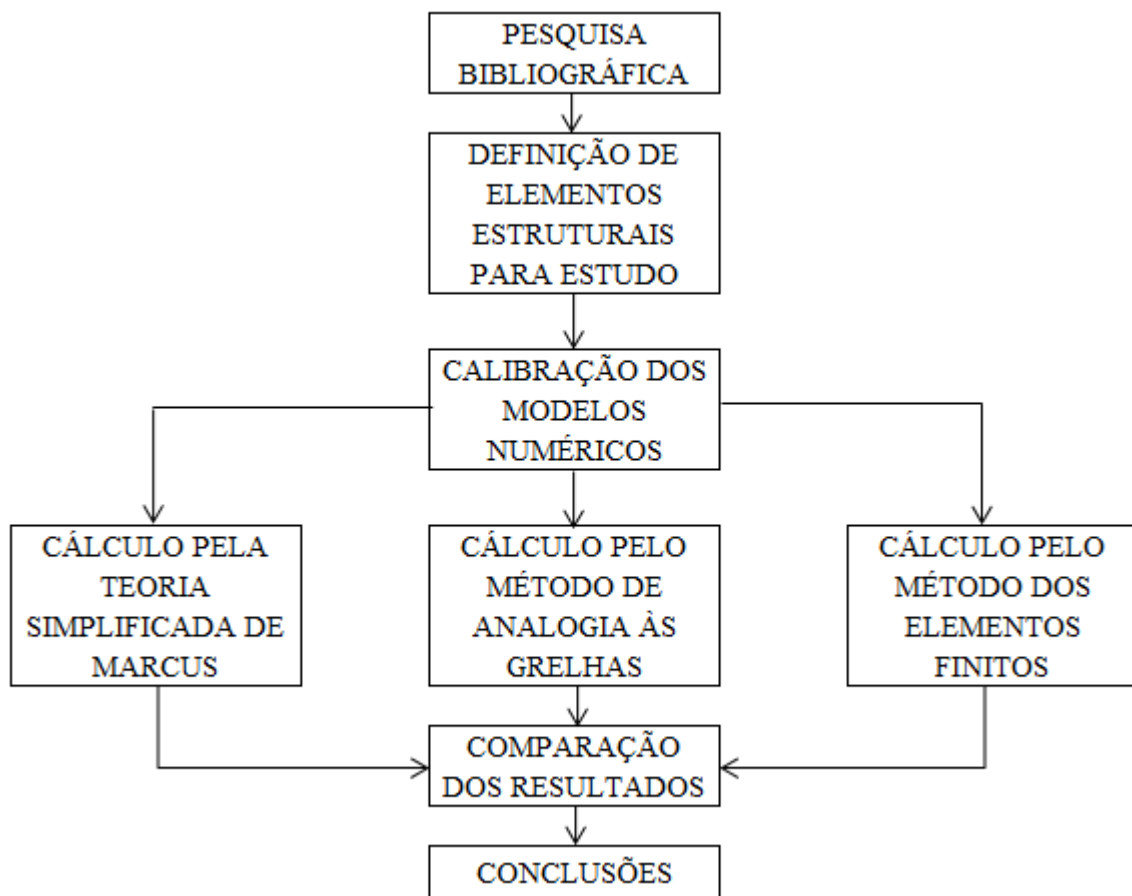


Figura 1: delineamento do trabalho

### 2.7.1 Pesquisa Bibliográfica

Apesar de ter dado início ao trabalho, a pesquisa bibliográfica teve seqüência ao longo de todo o estudo com o objetivo de fundamentar os métodos utilizados e de apoiar a verificação da coerência dos resultados obtidos por cada um deles. Utilizaram-se como materiais de consulta livros, artigos, trabalhos acadêmicos e normas técnicas.

### 2.7.2 Definição de Elementos Estruturais para Estudo

Com o intuito de direcionar o trabalho, alguns parâmetros tiveram de ser definidos, tais como:

- a) elementos estruturais a serem estudados;

- b) configurações geométricas e condições de apoio usuais;
- c) parâmetros e variáveis que serão comparados após obtidos os resultados por cada um dos diferentes métodos.

### **2.7.3 Calibração dos Modelos Numéricos**

Esta etapa consiste na calibração dos modelos utilizados para a obtenção das solicitações quando aplicado o Método de Analogia às Grelhas e o Método dos Elementos Finitos. A calibração deu-se pela comparação dos resultados obtidos por cada método com os resultados obtidos pela resolução da Teoria Geral de Placas para uma laje específica.

### **2.7.4 Cálculo pela Teoria Simplificada de Marcus**

Esta etapa do trabalho foi baseada na obtenção das solicitações de momentos fletores máximos através de tabelas encontradas na bibliografia estudada e já reconhecidas como válidas para a utilização deste método de cálculo. Tais tabelas são baseadas na resolução da equação geral de placas submetidas à flexão.

### **2.7.5 Cálculo pelo Método de Analogia às Grelhas**

Nesta etapa do trabalho foram elaborados os cálculos dos elementos estruturais pelo método de analogia às grelhas com o auxílio do *software* de apoio STRAP em sua versão 12.5. Os resultados obtidos através deste método foram os momentos fletores máximos e suas respectivas posições e as deformações das lajes em questão.

### **2.7.6 Cálculo pelo Método dos Elementos Finitos**

Nesta etapa do trabalho foram realizados os cálculos necessários para a obtenção das solicitações nos elementos estudados através do método dos elementos finitos com o auxílio

de dois *softwares*, sendo eles o STRAP 12.5 e o SAP 2000. Além dos momentos fletores, foram obtidas através deste método as deformações máximas sofridas pelos elementos.

### **2.7.7 Comparação dos Resultados**

Nesta etapa foram comparados os resultados obtidos para as solicitações através de cada um dos métodos estudados. Foram comparados principalmente os valores dos momentos fletores máximos, bem como as suas posições na laje em questão. A comparação dos resultados tornou possível a desconsideração de algum resultado específico que não apresentou o comportamento esperado para as condições estudadas, ou valores demasiadamente diferentes daqueles obtidos pelos outros métodos.

Ainda, foram elaborados quadros comparativos para a melhor visualização das implicações qualitativas oriundas da utilização dos diferentes métodos de cálculo. Estes quadros são compostos pelos momentos fletores e pelas deformações obtidas para cada método de cálculo.

### **2.7.8 Conclusões**

Esta etapa tem a função de conclusão a respeito da utilização dos diferentes métodos de obtenção de solicitações, valendo-se principalmente da comparação de resultados. A conclusão permitiu descobrir qual a ordem de grandeza da diferença entre os resultados obtidos por cada método, e a influência destas diferenças no dimensionamento das lajes estudadas.

### 3 TIPOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL

A correta análise de uma estrutura é o passo inicial e imprescindível para a realização de um bom projeto estrutural. O projeto de estruturas em concreto armado tem critérios de análise estabelecidos pela NBR 6118/2007, que também apresenta os métodos de análise pelos quais o comportamento das estruturas pode ser avaliado.

Para o cálculo dos esforços nas lajes existem dois grandes grupos de métodos. Os métodos clássicos, fundados na teoria da elasticidade, supõem que o material é homogêneo e isotrópico e se comporta linearmente. Os métodos em ruptura, fundados na teoria da plasticidade, supõem, ao contrário, que o material se comporta como um corpo rígido-plástico perfeito (MONTROYA et al., 2000, p. 539).

Montoya et al. (2000, p. 540) indicam ainda que mediante os métodos clássicos obtém-se, com grande aproximação, os esforços na situação de serviço, a partir dos quais se pode escolher a distribuição das armaduras, nas diferentes zonas da laje, que representa de forma adequada o comportamento em serviço da mesma. Os métodos de ruptura não proporcionam, entretanto, qual é a distribuição adequada das armaduras, uma vez que este é um dado de entrada.

Para situações de projeto, a análise estrutural pode ser efetuada por um dos métodos apresentados a seguir, que se diferenciam pelo comportamento admitido para os materiais constituintes da estrutura, não perdendo de vista em cada caso as limitações correspondentes (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 75), ou seja, análise:

- a) linear;
- b) linear com redistribuição;
- c) plástica;
- d) não-linear;
- e) através de modelos físicos.

Cada um dos métodos apresentados será brevemente discutido a seguir com o intuito de estabelecer os conhecimentos básicos necessários para o seu correto emprego, de forma a garantir a segurança dos modelos que serão posteriormente dimensionados pelos diferentes métodos de cálculo.

### 3.1 ANÁLISE LINEAR

Para este tipo de análise, admite-se o comportamento elástico-linear dos materiais. Na análise global, as características geométricas podem ser determinadas pela seção bruta de concreto dos elementos estruturais. Em análises locais para cálculo dos deslocamentos, na eventualidade da fissuração, esta deve ser considerada. Os resultados de uma análise linear são usualmente empregados para a verificação de estados limites de serviço, sendo possível estender os resultados para verificações de estado limite último, mesmo com tensões elevadas, desde que se garanta a ductilidade dos elementos estruturais (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 75).

### 3.2 ANÁLISE LINEAR COM REDISTRIBUIÇÃO

Na análise linear com redistribuição, os efeitos das ações, determinados em uma análise linear, são redistribuídos na estrutura, para as combinações de carregamento do estado limite último. Nesse caso, as condições de equilíbrio e de ductilidade devem continuar satisfeitas após a redistribuição das ações, como segue (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 76):

Todos os esforços internos devem ser recalculados de modo a garantir o equilíbrio de cada um dos elementos estruturais e da estrutura como um todo. Os efeitos de redistribuição devem ser considerados em todos os aspectos do projeto estrutural, inclusive as condições de ancoragem e corte de armaduras e os esforços a ancorar.

As verificações de combinações de carregamento de estado limite de serviço ou de fadiga podem ser baseadas na análise linear sem redistribuição. De uma maneira geral é desejável que não haja redistribuição de esforços em serviço (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 76).



### 3.3 ANÁLISE PLÁSTICA

A análise estrutural é denominada plástica quando as não linearidades puderem ser consideradas, admitindo-se materiais de comportamento rígido-plástico perfeito ou elasto-plástico. A análise plástica de estruturas reticuladas não pode ser adotada quando (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 76):

- a) se consideram os efeitos de segunda ordem global;
- b) não houver suficiente ductilidade para que as configurações adotadas sejam atingidas.

Deve-se também evitar o cálculo plástico para os casos de carregamento cíclico com possibilidade de fadiga (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 76).

A plastificação no concreto armado se dá pelo escoamento da armadura, diminuindo o valor da posição da linha neutra e aumentando o braço de alavanca obtido em regime elástico. No entanto, o momento resistente permanece praticamente constante até a ruptura, pois o aumento do braço de alavanca apenas compensa a diminuição da zona de concreto comprimido. Desta forma, a análise plástica é recomendada apenas para o estado limite último, com o concreto já fissurado e o escoamento da armadura, enquanto a verificação de estado limite de serviço deve ser efetuada com uma análise linear ou não-linear.

### 3.4 ANÁLISE NÃO-LINEAR

Para tal considera-se o comportamento não-linear dos materiais, de forma que (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 76):

Toda a geometria da estrutura, bem como todas as suas armaduras, precisam ser conhecidas para que a análise não-linear possa ser efetuada, pois a resposta da estrutura depende de como ela foi armada.

Condições de equilíbrio, de compatibilidade e de ductilidade devem ser necessariamente satisfeitas. Análises não-lineares podem ser adotadas tanto para verificações de estados limites últimos como para verificações de estados limites de serviço.

### 3.5 ANÁLISE ATRAVÉS DE MODELOS FÍSICOS

Este modelo é apropriado e aconselhado especialmente quando os modelos de cálculo são insuficientes ou estão fora do escopo da norma NBR 6118/2007. Para realizar-se a análise através de modelos físicos, “[...] o comportamento estrutural é determinado a partir de ensaios realizados com modelos físicos de concreto, considerando os critérios de semelhança mecânica” (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 76). Ainda, com o intuito de garantir a validade do estudo, obrigatoriamente devem ser obtidos resultados para todos os estados limites últimos e de serviço a serem empregados na análise da estrutura, e todas as ações, condições e possíveis influências que possam ocorrer durante a vida da estrutura deve ser convenientemente reproduzidas nos ensaios (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 77).

## 4 MÉTODOS DE DIMENSIONAMENTO

### 4.1 TEORIA SIMPLIFICADA DE MARCUS

As tabelas de dimensionamento de Marcus são amplamente utilizadas na ausência de recursos computacionais e na análise prévia da estrutura em estudos de viabilidade de implantação, bem como na obtenção da espessura da laje que servirá como base para iterações no dimensionamento realizado por outros métodos. Dada uma laje que trabalha em duas direções, o método consiste em considerar na mesma duas faixas largas, uma em cada direção. A carga que atua sobre as lajes deve repartir-se entre as duas faixas ou vigas de forma que as flechas que estas possuem em seu ponto de cruzamento sejam iguais (MONTROYA et al., 2000, p. 545).

Para as lajes maciças, o processo das grelhas apresenta resultados conservadores quando comparados com o cálculo exato, ou seja, como placa propriamente dita, por não levar em consideração a ação favorável da união entre as faixas e a existência de momentos torçores. O processo de Marcus resultou do confronto entre esses resultados e a posterior correção dos valores obtidos através do processo da grelhas, de modo a aproximá-los mais dos valores reais das placas.

Marcus observou que o processo das grelhas fornecia valores relativamente altos para os momentos fletores positivos, propondo então coeficientes de correção para os mesmos. Os momentos negativos apresentaram valores semelhantes, não sendo, portanto, alterados. Os coeficientes de correção de Marcus são apresentados abaixo (CAMACHO, 2004):

$$\mu_x = 1 - \frac{20K_x}{3M_x \lambda^2} \quad (\text{fórmula 1})$$

$$\mu_y = 1 - \frac{20K_y}{3M_y \lambda^2} \quad (\text{fórmula 2})$$

Onde:

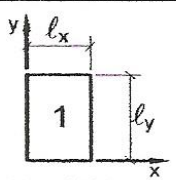
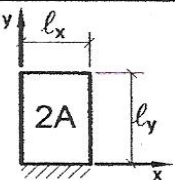
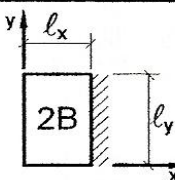
$M_x, M_y$  = coeficientes dos momentos positivos para as faixas isoladas [kgf.m/m];

$K_x, K_y$  = obtidos pela teoria das grelhas.

Segundo Silva e Horowitz (2008, p. 201) este método baseia-se no princípio de que a carga pode ser equilibrada apenas por flexão. Uma vez observado que o processo das grelhas fornecia valores relativamente altos para os momentos fletores positivos, Marcus propôs uma correção destes momentos através da adoção de coeficientes específicos de modo a aproximá-los dos valores reais advindos da teoria das placas.

Silva e Horowitz (2008, p. 199) indicam que para a verificação de estados limites de serviço, deve-se considerar os momentos fletores determinados pelo regime elástico. No caso das lajes armadas em duas direções, estes valores podem ser calculados com a correção dada pelo fator  $\mu$  na equação do momento fletor conforme dado na figura 2.

Tabelas como esta são encontradas para diversas configurações de geometria e de apoio de lajes, mas tem sua aplicação restrita ao emprego de lajes retangulares, inviabilizando sua aplicação em lajes de geometrias variadas. Baseadas na teoria elástica das placas, são sistematizações da solução geral das placas para casos particulares de apoio e de carregamento (SILVA; HOROWITZ, 2008, p. 204).

Tabela 2.3a									
MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME									
Tipo									Tipo
$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$
1,00	4,23	4,23	2,91	3,54	8,40	3,54	8,40	2,91	1,00
1,05	4,62	4,25	3,26	3,64	8,79	3,77	8,79	2,84	1,05
1,10	5,00	4,27	3,61	3,74	9,18	3,99	9,17	2,76	1,10
1,15	5,38	4,25	3,98	3,80	9,53	4,19	9,49	2,68	1,15
1,20	5,75	4,22	4,35	3,86	9,88	4,38	9,80	2,59	1,20
1,25	6,10	4,17	4,72	3,89	10,16	4,55	10,06	2,51	1,25
1,30	6,44	4,12	5,09	3,92	10,41	4,71	10,32	2,42	1,30
1,35	6,77	4,06	5,44	3,93	10,64	4,86	10,54	2,34	1,35
1,40	7,10	4,00	5,79	3,94	10,86	5,00	10,75	2,25	1,40
1,45	7,41	3,95	6,12	3,91	11,05	5,12	10,92	2,19	1,45
1,50	7,72	3,89	6,45	3,88	11,23	5,24	11,09	2,12	1,50
1,55	7,99	3,82	6,76	3,85	11,39	5,34	11,23	2,04	1,55
1,60	8,26	3,74	7,07	3,81	11,55	5,44	11,36	1,95	1,60
1,65	8,50	3,66	7,28	3,78	11,67	5,53	11,48	1,87	1,65
1,70	8,74	3,58	7,49	3,74	11,79	5,61	11,60	1,79	1,70
1,75	8,95	3,53	7,53	3,69	11,88	5,68	11,72	1,74	1,75
1,80	9,16	3,47	7,56	3,63	11,96	5,75	11,84	1,68	1,80
1,85	9,35	3,38	8,10	3,58	12,05	5,81	11,94	1,67	1,85
1,90	9,54	3,29	8,63	3,53	12,14	5,86	12,03	1,59	1,90
1,95	9,73	3,23	8,86	3,45	12,17	5,90	12,08	1,54	1,95
2,00	9,91	3,16	9,08	3,36	12,20	5,94	12,13	1,48	2,00
> 2,00	12,50	3,16	12,50	3,36	12,20	7,03	12,50	1,48	> 2,00

Valores extraídos de BARES (1972) e adaptados por L.M. Pinheiro.

$m = \mu \frac{p l_x^2}{100}$        $p =$  carga uniforme       $l_x =$  menor vão

Figura 2: valores de  $\mu$  para lajes retangulares armadas em duas direções

Para a obtenção dos momentos fletores máximos em cada uma das duas direções principais da laje, utiliza-se o coeficiente de correção conforme a fórmula 3.

$$m = \mu \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad (\text{fórmula 3})$$

Onde:

$m$  = momento na direção desejada [kgf.m/m];

$\mu$  = coeficiente de correção;

$p$  = carga superficial atuante na laje [kgf/m<sup>2</sup>];

$l_x$  = menor vão da laje [m].

## 4.2 MÉTODO DE ANALOGIA ÀS GRELHAS

O Método de Analogia às Grelhas é a abordagem utilizada pela maioria dos programas de cálculo estrutural para o cálculo e detalhamento de estruturas em concreto armado de edifícios residenciais. Além de ser de fácil aplicação, tal técnica é fundamentada em conceitos físicos de aplicação bastante simplificada e atrativa, o que sustenta o fato de ser um método amplamente difundido entre calculistas.

### 4.2.1 Considerações Teóricas

Baseado na substituição de um pavimento por uma grelha equivalente, onde os elementos da mesma (barras da grelha equivalente) passam a representar os elementos estruturais do pavimento (lajes e vigas), este processo permite reproduzir o comportamento estrutural de pavimentos com praticamente qualquer geometria, seja ele composto de lajes de concreto armado maciças, com ou sem vigas, ou então de lajes nervuradas (SILVA, 2003, p. 2).

Silva (2003, p. 2) indica que:

Para analisar um pavimento através do processo de analogia de grelha deve-se dividir as lajes que o compõem em um número adequado de faixas, as quais terão larguras dependentes da geometria e das dimensões do pavimento. Considerando que, assim como as vigas, estas faixas possam ser substituídas por elementos estruturais de barras exatamente nos seus eixos, obtém-se então uma grelha equivalente que passa a representar o pavimento.

Quanto aos carregamentos, considera-se que as cargas distribuídas atuantes no pavimento se dividem entre as barras da grelha equivalente de acordo com a área de influência de cada uma. As cargas podem ser consideradas uniformemente distribuídas ao longo das barras da grelha ou então concentradas diretamente nos seus nós (SILVA, 2003, p. 3).

O equilíbrio de um elemento de placa exige que os momentos torçores sejam idênticos nas duas direções ortogonais, do mesmo modo que as distorções angulares. Para o caso da grelha não existe nenhum princípio físico ou matemático que garanta que os momentos e as distorções sejam iguais nas direções ortogonais, em um determinado ponto. Além disso, para uma grelha o momento em uma barra depende apenas de sua curvatura, enquanto em uma placa o momento em qualquer direção depende da curvatura na mesma direção e na direção ortogonal (STRAMANDINOLI, 2003).

Este método é bastante interessante do ponto de vista prático, uma vez que possui fácil automatização. Dispondo os momentos solicitantes em faixas equivalentes a vigas, o dimensionamento à flexão simples de cada faixa passa a ser idêntico ao de uma viga com base igual à área de influência da faixa e altura igual à espessura da laje, desconsiderando-se os esforços cortantes. Atualmente, os principais *softwares* de dimensionamento de estruturas de concreto armado no Brasil utilizam este método para a obtenção dos momentos fletores e das deformações em lajes.

#### **4.2.2 Aplicação Computacional**

Para a dissociação das lajes em uma grelha equivalente foi utilizado o *software* STRAP 12.5, no qual foram testadas diferentes configurações de grelha e diferentes parâmetros de rigidez. As cargas foram aplicadas como carga global por unidade de área na estrutura, de forma que o programa efetua a distribuição das cargas equivalentes para cada barra de grelha por área de influência.

### 4.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

De acordo com Soriano (2009, p. 8), na maioria dos modelos contínuos, a resolução analítica costuma oferecer grandes dificuldades, ou até mesmo ser impossível. A alternativa à não obtenção da solução analítica através da integração das equações diferenciais com condições de contorno ou iniciais é utilizar um método aproximado que substitua os infinitos graus de liberdade do modelo contínuo por um número finito de parâmetros a serem determinados, ou graus de liberdade de um modelo aproximado. E, assim, tem-se a troca das equações diferenciais daquele modelo por um sistema de equações algébricas deste modelo.

O método dos elementos finitos é uma ferramenta para análise numérica de estruturas em geral. Em geral, na aplicação do método dos elementos finitos a elementos de placa, substitui-se a placa por uma série de elementos de forma quadrangular ou triangular, podendo variar as dimensões e características de um elemento a outro (MONTROYA et al., 2000, p. 544).

#### 4.3.1 Considerações Teóricas

De acordo com Montoya et al. (2000, p. 539), uma placa é uma estrutura limitada por dois planos paralelos de separação  $h$ , sendo a espessura  $h$  pequena comparada às outras dimensões. Supõe-se, ainda, que as cargas atuem sobre o plano médio da placa e são normais ao mesmo.

Estruturas de placas são analisadas admitindo-se as seguintes hipóteses pela NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 84):

- a) manutenção da seção plana após a deformação, em faixas suficientemente estreitas;
- b) representação dos elementos por seu plano médio.

Cada laje pode, ainda, estar submetida a diferentes tipos de carga, como carga pontual, uniforme ou triangular (paredes de reservatórios). Tudo isto cria uma grande variedade de problemas de lajes (MONTROYA et al., 2000, p. 539).

Para verificação do estado limite de deformação excessiva podem ser utilizados valores de rigidez do estágio I, considerando o módulo de elasticidade secante do concreto, desde que os



momentos fletores sejam menores que o de fissuração (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 84).

Supõe-se que os deslocamentos  $w$  dentro de cada elemento sejam dados por uma função simples (um polinômio, por exemplo), cujos coeficientes numéricos permaneçam fixos uma vez conhecidos os valores da função e de suas derivadas nos vértices dos mesmos. Desta forma, ainda que sejam diferentes as funções  $w$  e suas derivadas quando analisadas de um elemento a outro, garante-se a compatibilidade de deformações entre elementos subsequentes ao igualar-se seus valores nos vértices (MONTROYA et al., 2000, p. 545).

Montoya et al. (2000, p. 545) afirmam que as condições de equilíbrio dos distintos elementos (ou o que é equivalente, a condição de mínima energia potencial total, função das incógnitas escolhidas) proporcionam um sistema de equações lineares, que uma vez resolvido, permite o cálculo imediato de deslocamentos e de esforços na placa.

As teorias que fundamentam o problema de placas são (AWRUCH; MORSCH, 2009, p. 108):

- a) teoria de Kirchhoff, aplicável especialmente às lajes finas;
- b) teoria de Reissner-Mindlin, aplicável às lajes espessas, nas quais a relação vão/espessura da laje é menor do que 10.

No que diz respeito a este estudo, somente serão estudadas placas que atendem os requisitos de fina ou média. Além disso, as lajes podem diferenciar-se por suas diferentes características, tais como (MONTROYA et al., 2000, p. 539):

- a) forma: contorno poligonal ou circular, maciças ou com furos;
- b) disposição de apoios: somente apoiadas em seus contornos, balanço, contínuas em uma ou duas direções;
- c) coação dos apoios: simples, engastamento, sustentação elástica.

Para que seja válida a equação geral das placas, serão levados em consideração os chamados postulados de Kirchhoff-Love juntamente com outras hipóteses de caráter elástico e geométrico. São elas (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1991):

- a) o material é elástico, homogêneo e isotrópico;

- b) a placa é inicialmente plana;
- c) a espessura é pequena comparada com as outras duas dimensões;
- d) o ângulo, em radianos, em um ponto qualquer da placa, formado entre a tangente à superfície média deformada da placa e o plano médio da placa antes da aplicação da carga, é pequeno quando comparado com a unidade;
- e) o estado de deformação é tal que as linhas retas, normais à superfície média da placa, permaneçam retas, inextensíveis e normais à superfície média deformada;
- f) as tensões normais à superfície média são de uma ordem de grandeza desprezível;
- g) os deslocamentos são calculados apenas para a superfície média da placa.

A teoria de Kirchhoff não permite considerar o efeito da deformabilidade por esforço transversal, ao passo que a teoria de Reissner-Milin já permite a consideração deste efeito. A sua utilização é, desta forma, aconselhável sempre que a espessura da laje ultrapassa os limites que a permitem classificar como laje fina. Esta condição sucede sempre que a influência do esforço de corte se torna não desprezível e as hipóteses sobre as quais se baseia a teoria de Kirschhoff deixam de ser válidas (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1991).

Quando se desenvolve uma formulação de elementos finitos para a análise de lajes finas, é o campo de deslocamentos transversais que importa aproximar. Uma vez obtida uma solução aproximada para a função de deslocamentos  $\mathbf{w}$ , a aproximação para todas as outras grandezas envolvidas na caracterização do comportamento da laje pode ser obtida a partir da aplicação sucessiva das condições de compatibilidade, elasticidade e equilíbrio (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1991).

Quando se baseia a formulação de elementos finitos de laje na teoria de Kirchhoff, torna-se necessário garantir a continuidade dos deslocamentos transversais,  $\mathbf{w}$ , e de suas derivadas, entre elementos adjacentes. Esta é uma diferença muito importante em relação ao problema de placas, onde apenas se tem que garantir a continuidade dos deslocamentos interpolados (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1991).

Para justificar de uma forma muito simplista esta imposição, recorda-se que existe uma grande analogia entre as equações de lajes de Kirchhoff e as equações das vigas. Ainda, quando se impõe a continuidade dos deslocamentos entre elementos de viga adjacentes, é

necessário garantir não só a continuidade dos deslocamentos transversais, mas também a continuidade de sua derivada, o que corresponde a assegurar a continuidade das rotações (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1991).

A necessidade de garantir a continuidade dos deslocamentos e das suas derivadas dificulta significativamente a tarefa de obtenção das funções para efetuar a aproximação dos campos cinemáticos. Torna-se bastante complexa e trabalhosa a obtenção de elementos que permitam verificar por completo as equações de compatibilidade. A utilização de funções polinomiais simples e a utilização dos deslocamentos nodais como incógnitas do problema (situação típica dos elementos finitos de placa) conduz, regra geral, à obtenção de elementos em que pelo menos uma das condições de compatibilidade/continuidade é violada (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1991).

Este dilema coloca-se com frequência a quem pretende desenvolver elementos de lajes finas. Se por um lado as construções mais simples não permitem verificar todas as condições de compatibilidade, os elementos que permitem satisfazer todos aqueles requisitos são mais complexos, o seu desenvolvimento muito mais trabalhoso e por vezes a sua aplicação bem mais restrita (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1991).

Apesar de possibilitar a análise de estruturas de praticamente qualquer geometria, este método ainda tem a sua utilização restrita devido à dificuldade de interpretação e de utilização dos resultados por ele obtidos. Ainda, requer ferramentas computacionais compatíveis com a utilização do método e experiência para a total confiança na entrada de dados dos modelos numéricos.

### **4.3.2 Aplicação Computacional**

Por tratar-se de um método numérico, valeu-se de dois *softwares* como ferramenta de apoio, sendo eles o STRAP 12.5 e o SAP 2000. Ambos os programas permitem a discretização da estrutura em elementos de barra, placa ou sólidos. Para a execução deste estudo foram utilizados elementos de placa nos quais podem ser aplicados cargas de pressão uniforme, pressão variável, temperatura e peso próprio. Ainda, podem ser definidas cargas de área a

serem decompostas nos nós ou nos elementos de barras ou planos adjacentes selecionados, simulando assim o comportamento combinado de uma laje e de suas vigas de apoio.

#### 4.4 EXEMPLO COMPARATIVO

Silva e Horowitz (2008, p. 206) propuseram a análise de uma laje com  $l_x=5$  m e  $l_y=3,6$  m submetida a uma carga uniformemente distribuída de  $6,0$  kN/m<sup>2</sup> para os três processos de cálculo estudados neste trabalho, a Teoria Simplificada de Marcus, o Método de Analogia às Grelhas e o Método dos Elementos Finitos, e compararam os resultados obtidos por cada um deles.

O quadro 1 apresenta os momentos fletores positivos e negativos para o dimensionamento das armações da laje analisada para cada um dos diferentes processos, bem como as respectivas cargas de colapso, enquanto o quadro 2 apresenta os momentos equilibrantes totais para as duas direções do painel citado acima (SILVA; HOROWITZ, 2008, p. 206).

	Momentos Fletores [kN.m/m]				Carga de colapso [kN/m <sup>2</sup> ]
	$m_x^+$	$m_y^+$	$m_x^-$	$m_y^-$	
Teoria Simplificada de Marcus	1,20	2,30	-3,65	-5,11	8,3
Método de Analogia às Grelhas	1,50	2,42	-4,75	-5,78	9,9
Método dos Elementos Finitos	1,43	2,65	-4,20	-5,47	9,9

Quadro 1: momentos fletores e cargas de colapso para uma laje com  $l_x=5$  m e  $l_y=3,6$  m (SILVA; HOROWITZ, 2008)

	Momentos Equilibrantes Totais no Pannel [kN.m/m]			
	Vão Menor		Vão Maior	
	$m_d$	$m_d/m_{eq}$	$m_d$	$m_d/m_{eq}$
Teoria Simplificada de Marcus	54,50	1,12	56,81	0,84
Método de Analogia às Grelhas	49,20	1,02	68,07	1,01
Método dos Elementos Finitos	48,60	1,00	67,50	1,00

Quadro 2: momentos equilibrantes totais de uma laje com  $l_x=5m$  e  $l_y=3,6m$  (SILVA; HOROWITZ, 2008)

Conforme Silva e Horowitz (2008, p. 206), observa-se do quadro 2 que a relação mais desfavorável entre o momento resistente e o momento equilibrante corresponde ao método da Teoria Simplificada de Marcus, com subdimensionamento de 16%. Os autores afirmam que, do ponto de vista da segurança, o processo de dimensionamento da laje com a utilização da Teoria Simplificada de Marcus não apresenta necessariamente colapso, uma vez que este subdimensionamento é coberto pelos valores dos coeficientes de segurança e pelo superdimensionamento das armaduras dispostas no menor vão. Entretanto, não é justificável do ponto de vista econômico o superdimensionamento de um dos vãos de lajes para garantir a sua estabilidade.

## 5 AJUSTE DOS MODELOS COMPUTACIONAIS

Devido à necessidade de utilização de softwares para a realização deste trabalho, foi necessário calibrar os modelos computacionais, ajustando parâmetros que influenciam diretamente nos resultados obtidos por cada método.

Para os modelos relativos à obtenção dos esforços pelo método de analogia às grelhas, viu-se necessário adequar a rigidez à flexão, a rigidez à torção e a área de influência das barras que formam a grelha.

Para a utilização do método dos elementos finitos, estudou-se o grau de refinamento da malha de elementos necessário para que os resultados obtidos fossem considerados convergentes e, portanto, satisfatórios.

Os resultados obtidos pelas grelhas propostas, bem como pelas malhas de elementos finitos, foram comparados com a solução analítica geral de placas para deflexão e momentos, que estão apresentadas nas equações 1 a 4 (THIMOSHENKO; WOINOWSKY, 1959).

$$w = \frac{16q_0 a^4 b^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn(n^2 a^2 + m^2 b^2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{equação 1})$$

$$M_x = \frac{16q_0 a^2 b^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b^2 m^2 + \nu a^2 n^2)}{mn(n^2 a^2 + m^2 b^2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{equação 2})$$

$$M_y = \frac{16q_0 a^2 b^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2 n^2 + \nu b^2 m^2)}{mn(n^2 a^2 + m^2 b^2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{equação 3})$$

$$M_{xy} = -(1-\nu) \frac{16q_0 a^3 b^3}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 a^2 + m^2 b^2)^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{equação 4})$$

Onde:

$w$  = deflexão na placa [m];

$a$  e  $b$  = dimensões da placa [m];

$x$  e  $y$  = coordenadas do sistema [m];

$D$  = rigidez à flexão de uma placa [ $m^4$ ];

$q_0$  = taxa de carga aplicada na placa [ $N/m^2$ ];

$M_x$  = momento fletor na direção  $x$  [ $N.m/m$ ];

$M_y$  = momento fletor na direção  $y$  [ $N.m/m$ ];

$M_{xy}$  = momento torçor [ $N.m/m$ ].

Os modelos de calibração foram comparados a uma laje de dimensões 4,00 x 4,00 x 0,10 metros, sobre a qual foi aplicada uma carga  $q_0$  de 700 kgf/m<sup>2</sup>. Dada a resolução das equações acima, esta laje apresenta para um coeficiente de Poisson igual a 0,3 e um módulo de elasticidade igual a  $28 \times 10^9$  Pa, um momento  $M_{max} = 540,22$  kgf.m/m e uma deflexão  $w_{max} = -2,84 \cdot 10^{-3}$  m (ROSA, 2008, p.44).

## 5.1 REFINAMENTO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

Foram testadas e comparadas 3 malhas com diferentes graus de refinamento, sendo elas com elementos quadrangulares dos seguintes tamanhos:

- a) 50 x 50 cm;
- b) 25 x 25 cm;
- c) 10 x 10 cm.

As propriedades dos elementos utilizados nas malhas de calibração são idênticas às utilizadas na resolução das expressões da Teoria Geral de Placas, ou seja, coeficiente de Poisson 0,3 e módulo de elasticidade correspondente a  $28 \times 10^9$  Pa.

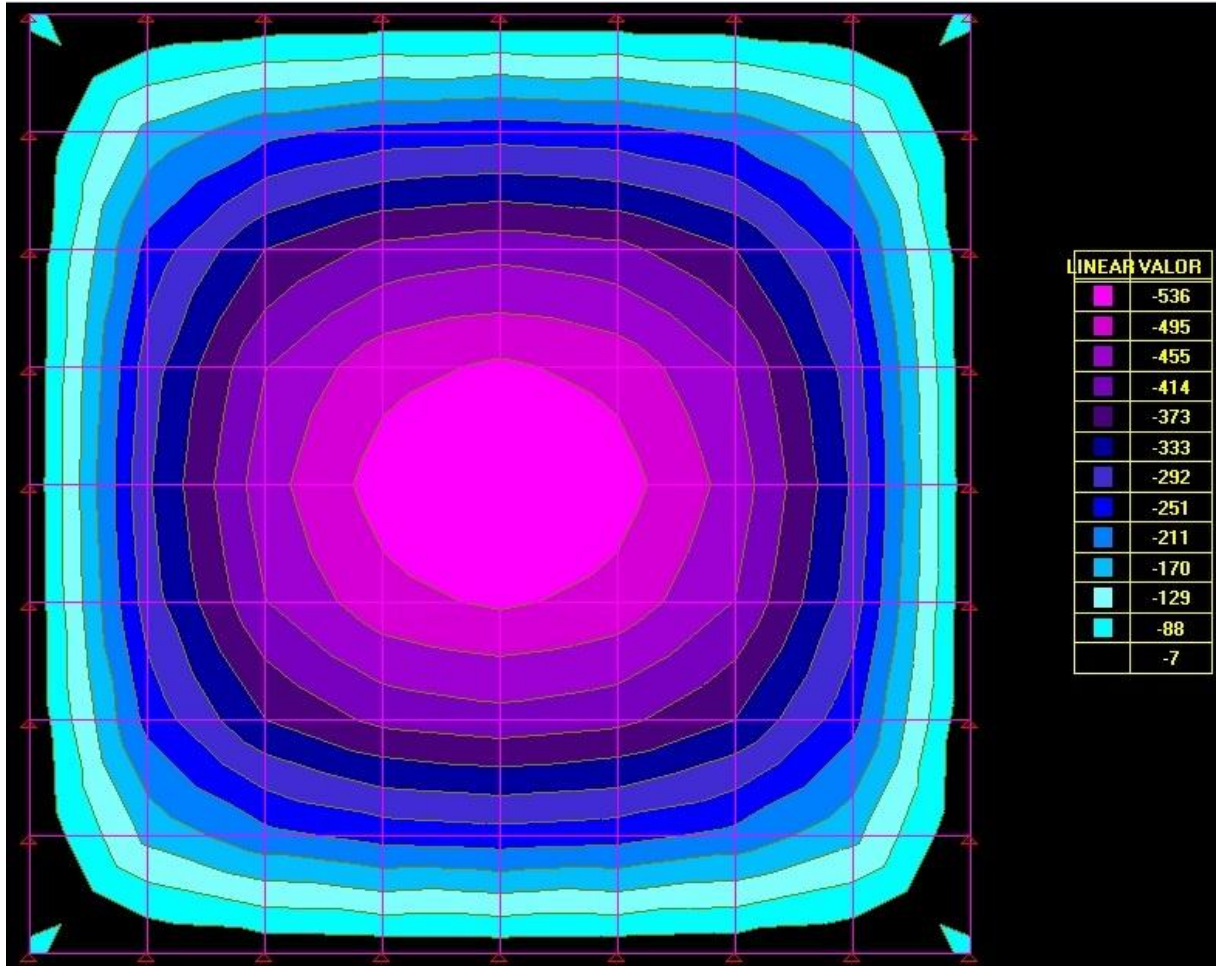


Figura 3: malha 50 x 50 cm. Momentos na direção  $x$  [kgf.m/m] (STRAP, 2009)<sup>1</sup>

Apesar de fornecer um valor de momento máximo coerente com aquele obtido pela resolução das equações gerais de uma placa submetida à flexão, a primeira malha (50 x 50 cm) apresentou uma distribuição de momentos descontínua e com incoerências na região dos seus cantos conforme ilustra a figura 3.

<sup>1</sup> O software STRAP 12.5 trabalha com a convenção de sinais relativos às tensões de compressão e de tração inversas ao usual. Portanto, tanto os mapas de contorno de momentos quanto os diagramas de momentos de barras apresentam momentos negativos para tensões de tração na fibra mais inferior do elemento, inversamente ao usual no Brasil.



A malha composta por elementos de 25 x 25 cm, por sua vez, apresentou resultados bastante satisfatórios no que diz respeito à distribuição dos momentos fletores ao longo da laje. Ainda, é possível observar a convergência dos momentos ao longo dos apoios para o valor zero, conforme esperado para uma laje simplesmente apoiada em seus quatro bordos. A figura 4 mostra a distribuição de momentos na direção  $x$  para a malha de elementos de 25 x 25 cm.

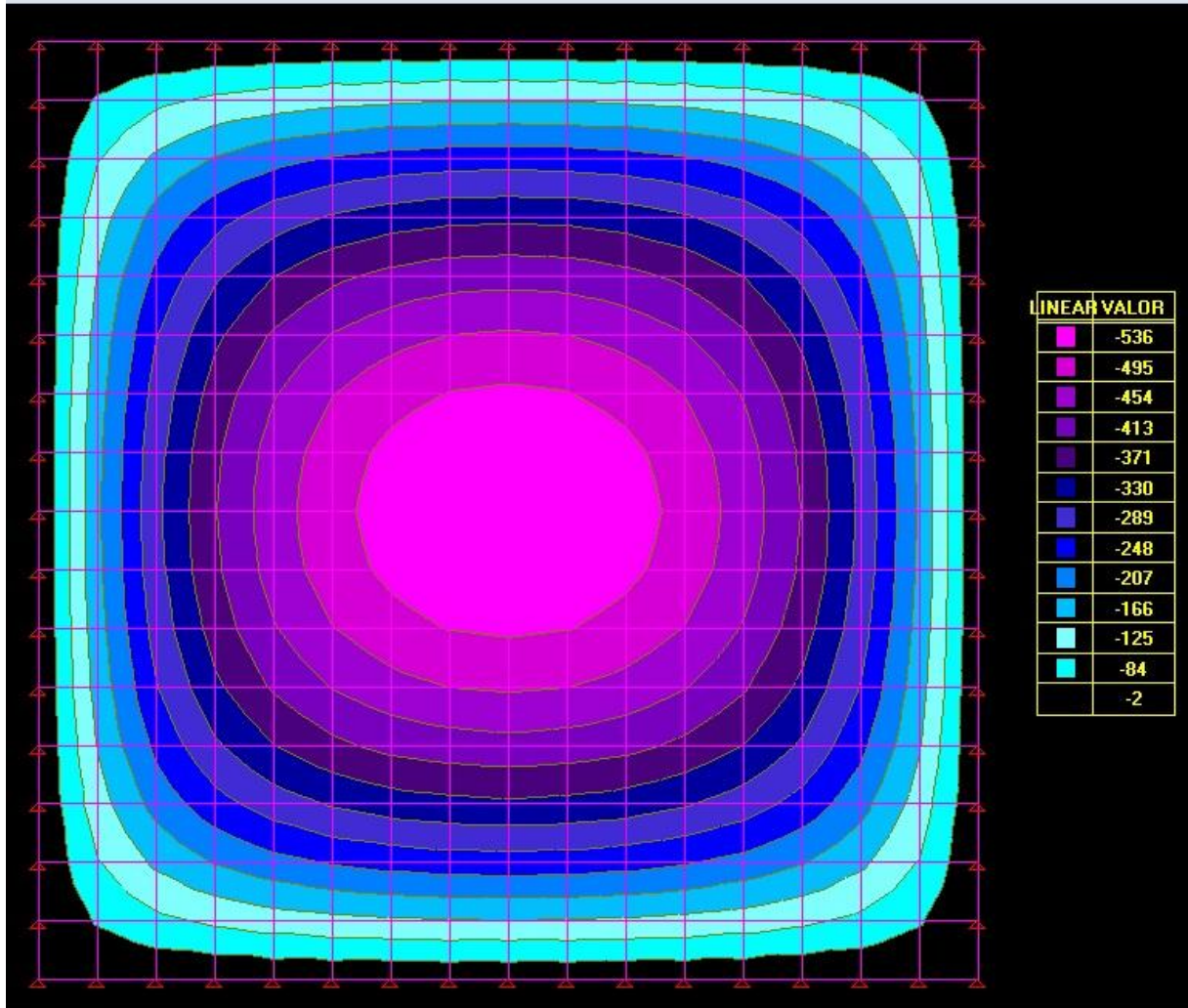


Figura 4: malha 25 x 25 cm. Momentos na direção  $x$  [kgf.m/m] (STRAP, 2009)

A utilização de uma malha de elementos com dimensões de 10 x 10 cm permite uma visualização ainda mais uniforme da distribuição dos momentos na placa, conforme mostra a figura 5. Entretanto, vale ressaltar que quanto melhor for o refinamento da malha de elementos finitos, maior será o tempo de cálculo do modelo numérico, o que pode inviabilizar a utilização do método na ausência de um processador compatível.

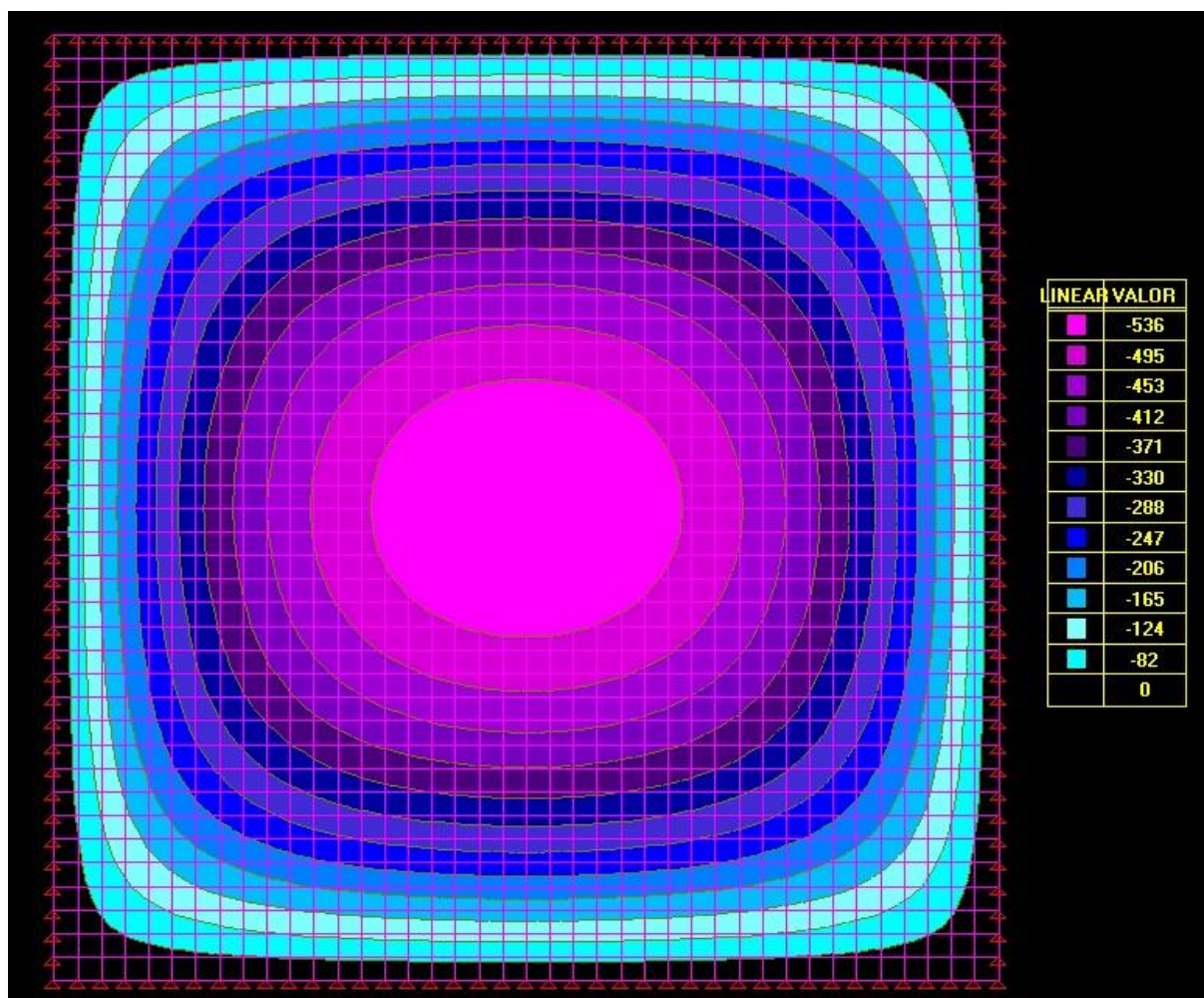


Figura 5: malha 10 x 10 cm. Momentos na direção  $x$  [kgf.m/m] (STRAP, 2009)

A malha de 10 x 10 cm foi também discretizada no *software* SAP 2000, obtendo-se resultados muito próximos aos obtidos pelo *software* STRAP, conforme ilustra a figura 6. Desta forma, os modelos gerados no STRAP foram considerados suficientes para a comparação de resultados subsequente.

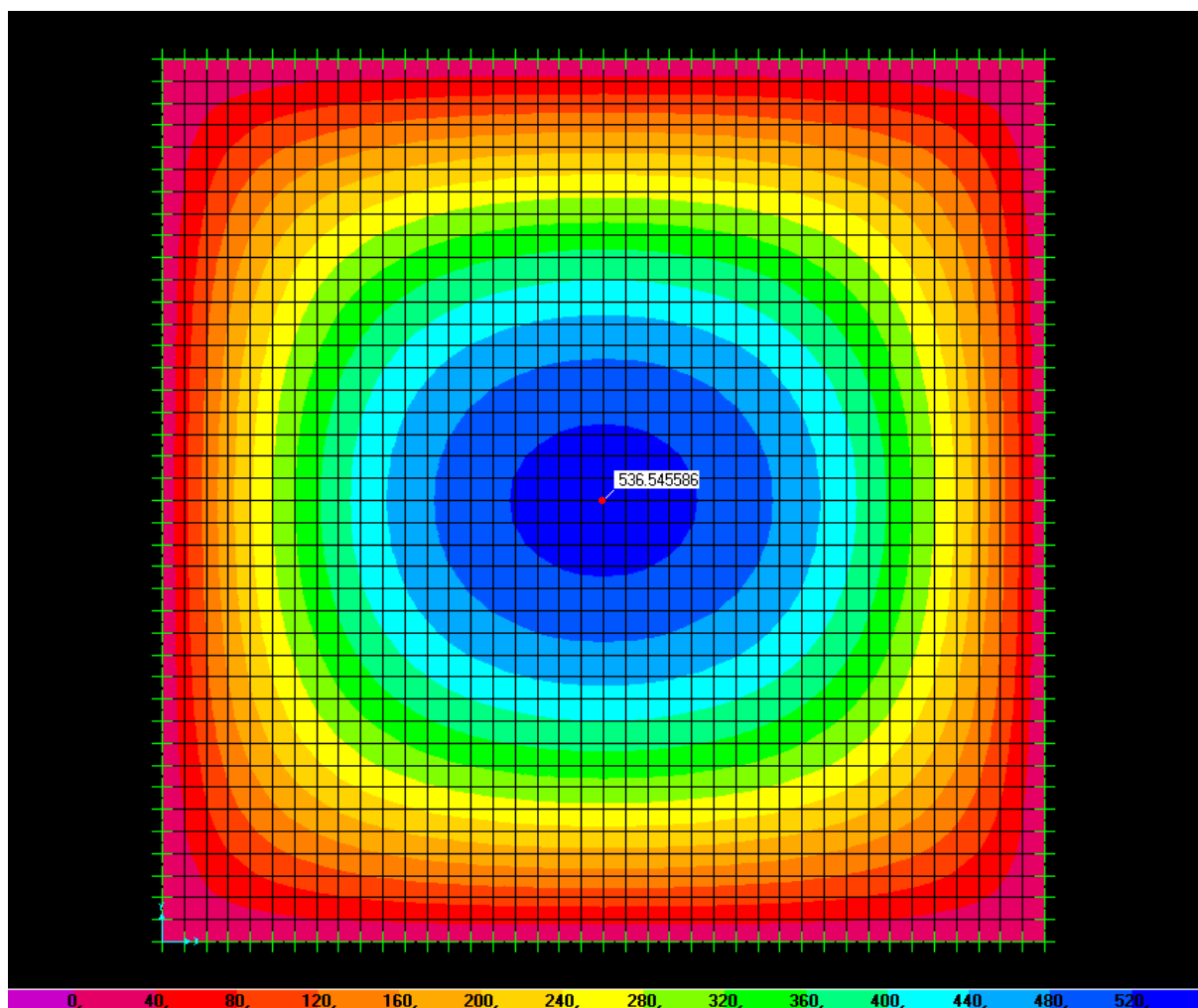


Figura 6: malha 10 x 10 cm no *software* SAP2000. Momentos na direção  $x$  [kgf.m/m]

O quadro 3 mostra a convergência dos momentos no vão e no apoio conforme o refinamento da malha de elementos finitos, bem como as deformações máximas encontradas com a utilização de cada malha. Por tratar-se da análise de uma laje simplesmente apoiada em seus quatro bordos, espera-se que os momentos no apoio sejam iguais a zero.

	Malhas de Elementos Finitos		
	50 x 50 cm	25 x 25 cm	10 x 10 cm
$M_x$ máximo [kgf.m/m]	536,0	536,0	536,0
$M_x$ no apoio [kgf.m/m]	7,0	2,0	0,0
Deformações máximas [cm]	-0,282	-0,283	-0,284

Quadro 3: comparativo de malhas de elementos finitos

Conforme citado anteriormente, o material do modelo de calibração utilizado nos cálculos anteriores possui um coeficiente de Poisson igual a 0,3 e um módulo de elasticidade igual a  $28 \times 10^9$  Pa, e foi utilizado de modo a salientar a convergência dos resultados obtidos através do método dos Elementos Finitos para a solução exata do problema, obtida através da solução da Teoria Geral de Placas.

Desta forma, deste ponto em diante, os modelos em elementos finitos utilizados no trabalho serão efetuados com malhas de elementos quadrangulares de 10 cm de lado, e os resultados obtidos serão considerados convergentes. Ainda, o módulo de elasticidade do concreto utilizado nos modelos subsequentes é de  $23,8 \times 10^9$  Pa, com coeficiente de Poisson igual a 0,2, uma vez que estes valores são mais coerentes para estruturas em concreto armado.

Para o exemplo de laje quadrangular acima com essas propriedades de material, obtêm-se um valor de momento  $M_{max} = 495$  kgf.m/m e uma deflexão  $w_{max} = -3,52 \cdot 10^{-3}$  m

## 5.2 GEOMETRIA E RIGIDEZ DAS GRELHAS

Para a determinação da geometria de grelha a ser utilizada, primeiro viu-se necessário estabelecer critérios de atribuição de rigidez à flexão  $I_{xx}$  e de rigidez à torção  $J$  para as barras da grelha. O momento de inércia à flexão é calculado com as dimensões da seção transversal da faixa de influência de cada barra da grelha, conforme a fórmula 2:

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{fórmula 2})$$

Onde:

$I_{xx}$  = momento de inércia à flexão [m<sup>4</sup>];

$b$  e  $h$  = dimensões da seção transversal da faixa de influência da barra [m].

Para definir a rigidez à torção das barras da grelha, testaram-se diferentes relações  $J/I_{xx}$  com o intuito de definir a proporção a ser adotada para os modelos subsequentes. As relações propostas no quadro 3 foram utilizadas em grelhas com espaçamento de 10 x 10 cm, de 25 x 25 cm e de 50 x 50 cm, respectivamente.

Relação $J/I_{xx}$	$M_x$ [kgf.m/m]		
	10 x 10 cm	25 x 25 cm	50 x 50 cm
1,5	541,00	688,00	650,00
1,7 (original para grelha 10x10)	518,00	-	-
2	480,00	528,00	606,00
2,3	451,00	500,00	584,00
2,5	432,00	484,00	570,00
3 (original para grelha 25x25)	-	440,00	-
3,5 (original para grelha 50x50)	-	-	510,00

Quadro 4: momento fletor  $M_x$  de acordo com a relação  $J/I_{xx}$  e com o espaçamento da grelha

Relação $J/I_{xx}$	$W_{m\acute{a}x.}$ [cm]		
	10 x 10 cm	25 x 25 cm	50 x 50 cm
1,5	-0,48	-0,61	-0,60
1,7 (original para grelha 10x10)	-0,46	-	-
2	-0,43	-0,48	-0,57
2,3	-0,41	-0,46	-0,55
2,5	-0,39	-0,45	-0,54
3 (original para grelha 25x25)	-	-0,42	-
3,5 (original para grelha 50x50)	-	-	-0,50

Quadro 5: deformação de acordo com a relação  $J/I_{xx}$  e com o espaçamento da grelha

Observa-se que não foi possível encontrar uma situação de convergência do resultado para a solução através do Método dos Elementos Finitos. Os resultados que mais se aproximaram da solução através da resolução da equação de placas foram aqueles obtidos com a relação  $J/I_{xx}$  igual a 2,3 para uma grelha de espaçamento 25 cm e com a relação  $J/I_{xx}$  igual a 3,5 para uma grelha de espaçamento 50 cm.

Para o estudo das lajes propostas serão utilizadas grelhas de 25 cm com relação  $J/I_{xx}$  igual a 2,3, uma vez que esta apresentou a menor variação de resultados quando aplicada a diferentes espaçamentos.

É importante ressaltar que esta relação adequou-se à resolução desta geometria de laje apenas, de forma que a qualidade dos resultados obtidos com a aplicação desta mesma relação  $J/I_{xx}$  para diferentes lajes será estudada a seguir.

## 6 OBTENÇÃO DAS SOLICITAÇÕES

Para o estudo comparativo foram escolhidas quatro configurações de lajes, diferenciadas entre si pelas suas dimensões ou pelas suas condições de apoio. Cada uma das lajes foi calculada de acordo com as calibrações feitas no capítulo anterior, de forma que as grelhas utilizadas têm espaçamento de 25 x 25 cm e suas barras com rigidez à torção obedecendo à proporção  $J/I_{xx}$  igual a 2,3. As malhas de elementos finitos aplicadas possuem elementos quadrangulares de 10 x 10 cm, e os resultados apresentados são aqueles obtidos com o auxílio do *software* STRAP para ambos os métodos.

Todas as lajes foram carregadas com uma carga total de 500 kgf/m<sup>2</sup>, sendo considerados 250 kgf/m<sup>2</sup> a carga correspondente ao peso próprio de uma laje de 10 cm de espessura, e 250 kgf/m<sup>2</sup> a sobrecarga de utilização. Como o foco do trabalho é a variação do momento resultante por cada método, e não o dimensionamento dos elementos em questão, foram analisados apenas os momentos máximos obtidos por cada método de cálculo.

### 6.1 LAJE QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA

O primeiro caso a ser analisado neste trabalho é o de uma laje quadrada simplesmente apoiada ao longo do seu contorno, com dimensões 5,00 x 5,00 x 0,10 m, ilustrada na figura 7.

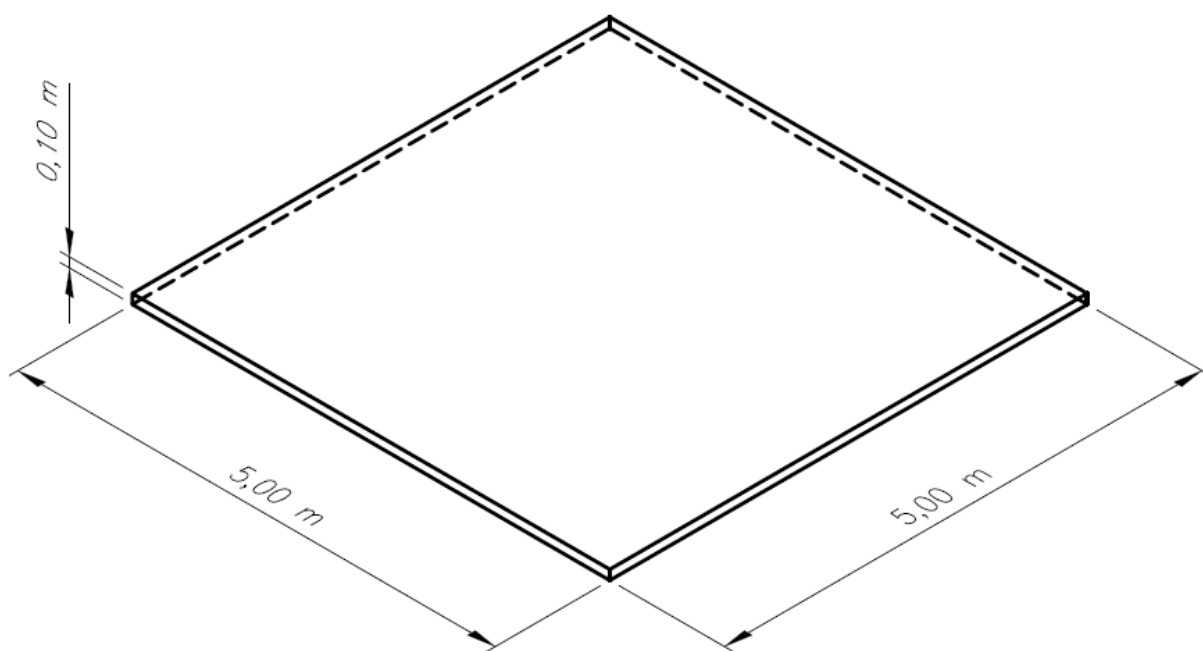


Figura 7: laje 1 - dimensões 5,00 x 5,00 x 0,10 m

### 6.1.1 Laje 1: Solução pela Teoria Simplificada de Marcus

Para se obter a solução desta laje pela Teoria Simplificada de Marcus, faz-se a relação entre os vãos  $l_y$  e  $l_x$  da laje, sendo ambos iguais a 5 m neste caso, resultando em uma relação  $l_y/l_x = 1$ . Para uma laje simplesmente apoiada com esta relação entre vãos, a figura 2 fornece o valor de  $\mu = 4,23$  para os momentos em ambas as direções.

Utilizando a fórmula 1 com  $l_x = 5$  m e  $p = 500$  kgf/m<sup>2</sup>, tem-se os momentos máximos no centro dos vãos com valores conforme o quadro 6.

	$\mu$	$Md_{\text{máx}}$ [kgf.m/m]
$M_x$	4,23	528,8
$M_y$	4,23	528,8

Quadro 6: momentos na laje 1 pela Teoria de Marcus



### 6.1.2 Laje 1: Solução por Analogia às Grelhas

A figura 8 mostra a representação da laje 1 como uma grelha de barras equivalente, espaçadas a cada 25 cm conforme proposto anteriormente.

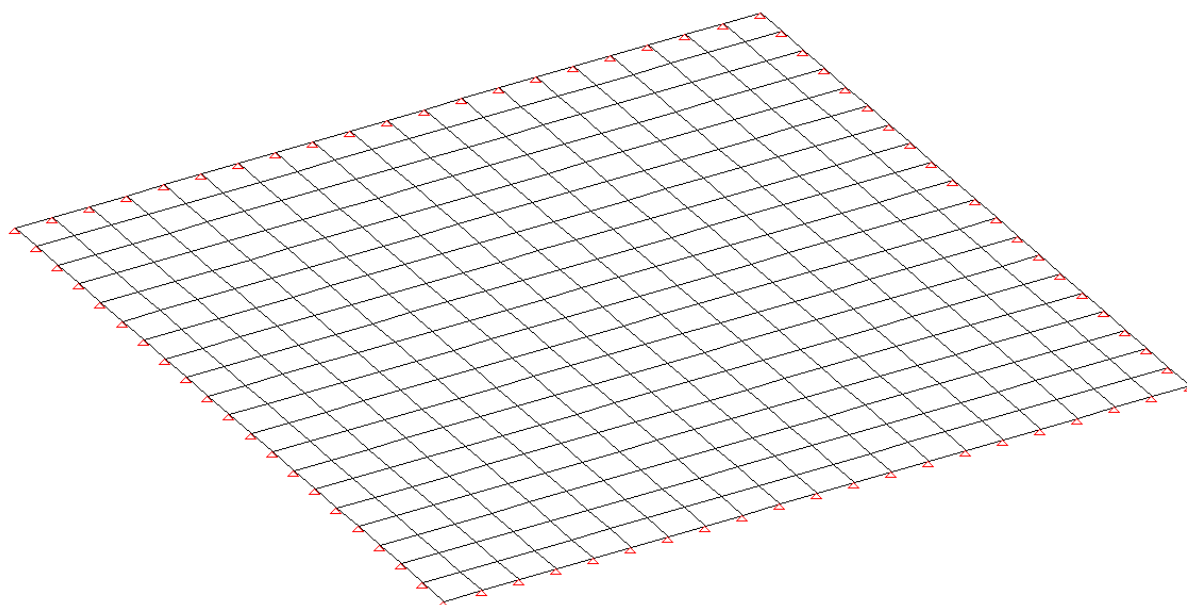


Figura 8: grelha representativa da laje 1

Como a laje é quadrada, suas condições de apoio são as mesmas nos quatro lados e a carga é uniformemente distribuída por área de influência de cada barra, os diagramas de momentos fletores nas barras centrais das direções  $x$  e  $y$  são idênticos e estão representados na figura 9.

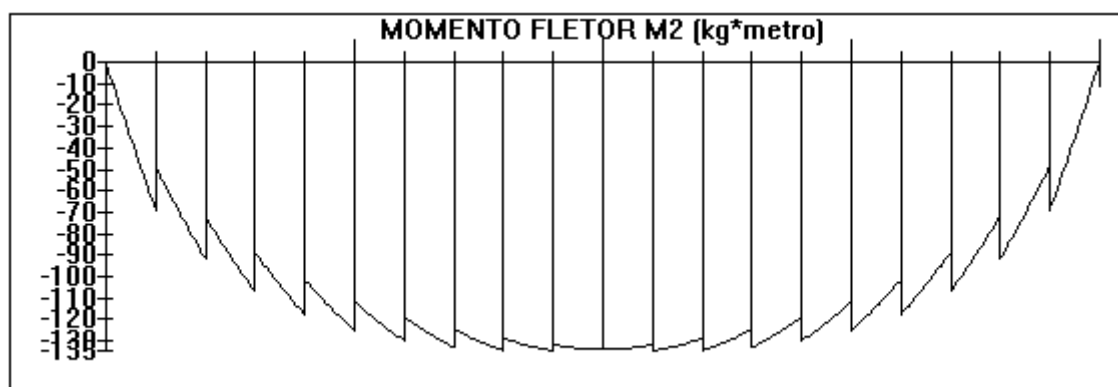


Figura 9: diagrama de momento fletor nas barras centrais da grelha em ambas as direções [kgf.m]

O momento fletor máximo observado na barra é de 134 kgf.m para uma área de influência de 25 cm. Desta forma, para se obter o momento fletor máximo por faixa, tem-se  $134/0.25$ , o que resulta em 536 kgf.m/m para ambas as direções ( $x$  e  $y$ ). Ainda, a flecha observada no centro do vão para a grelha com a relação  $J/I_{xx}$  igual a 2,3 é de -0,769 cm. Estes valores estão apresentados no quadro 7.

	$Md_{\text{máx}}$ [kgf.m]	$Md_{\text{máx}}$ [kgf.m/m]	$W_{\text{máx}}$ [cm]
$M_x$	134,00	536,0	-0,769
$M_y$	134,00	536,0	

Quadro 7: momentos na laje 1 por Analogia às Grelhas

### 6.1.3 Laje 1: Solução pelo Método dos Elementos Finitos

Conforme proposto no capítulo 5, foram utilizadas malhas de 10x10 cm para o cálculo das lajes através do Método dos Elementos Finitos. O mapa de contorno descrito na figura 10 mostra a distribuição dos momentos na direção  $x$  da laje 1. Analogamente à solução pelos métodos anteriores, a distribuição dos momentos em ambas as direções é idêntica, devido à geometria da laje e às suas condições de apoio.

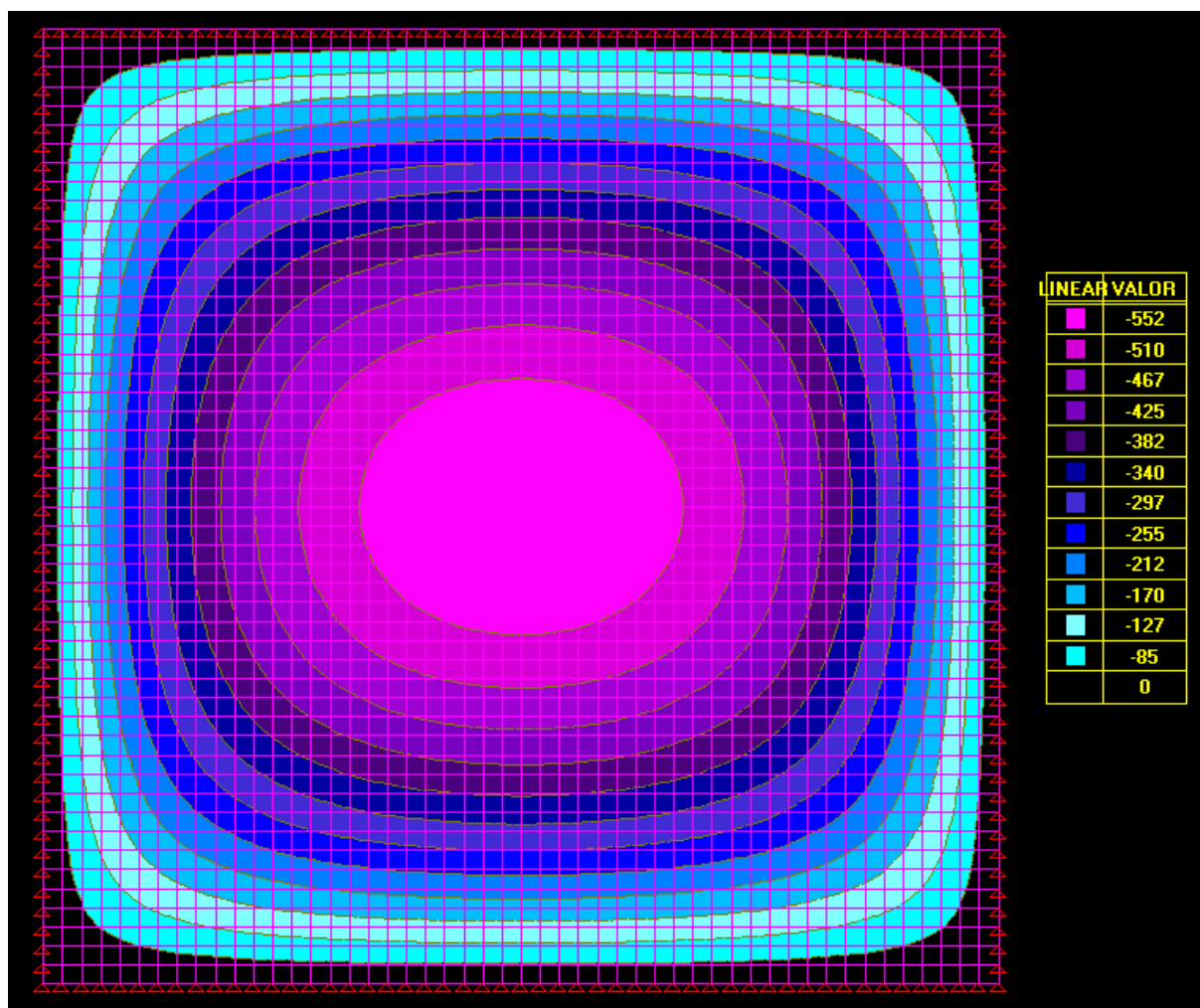


Figura 10: mapa de contorno dos momentos na direção  $x$  da laje 1 [kgf.m/m] (STRAP, 2009)

O momento máximo encontrado em ambas as direções é igual a 552 kgf.m no centro do vão da laje, ponto este em que a deformação encontrada é de -0,614 cm. Estes valores estão apresentados no quadro 8 a seguir.

	$Md_{m\acute{a}x}$ [kgf.m/m]	$W_{m\acute{a}x}$ [cm]
$M_x$	552,0	-0,614
$M_y$	552,0	

Quadro 8: momentos na laje 1 por Elementos Finitos

## 6.2 LAJE RETANGULAR SIMPLESMENTE APOIADA

A segunda laje a ser analisada, também simplesmente apoiada em seu contorno, tem dimensões 4,00 x 6,00 x 0,10 m, e está ilustrada na figura 11.

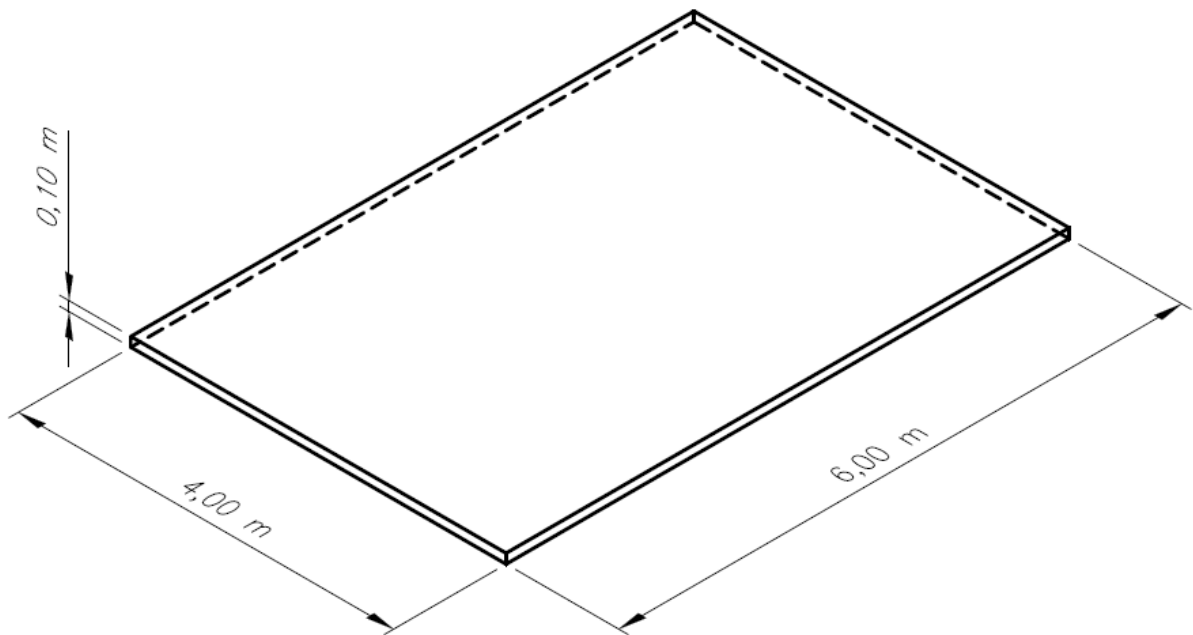


Figura 11: laje 2 - dimensões 4,00 x 6,00 x 0,10 m

### 6.2.1 Laje 2: Solução pela Teoria Simplificada de Marcus

Para uma laje retangular com esta configuração tem-se a relação  $l_y/l_x = 1,5$ . Para tal relação entre os vãos de uma laje simplesmente apoiada em seus quatro bordos, a figura 2 fornece valores de  $\mu_x$  e de  $\mu_y$ , iguais a 7,72 e 3,89 respectivamente. Com  $p = 500 \text{ kgf/m}^2$  e  $l_x = 4 \text{ m}$ , a fórmula 1 permite obter os valores dos momentos máximos na laje conforme o quadro 9.

	$\mu$	$Md_{\text{máx}}$ [kgf.m/m]
$M_x$	7,72	617,6
$M_y$	3,89	311,2

Quadro 9: momentos na laje 2 pela Teoria de Marcus

### 6.2.2 Laje 2: Solução por Analogia às Grelhas

Para o cálculo da laje 2 por Analogia às Grelhas, utilizou-se a grelha representada na figura 12, com elementos de barra espaçados a cada 25 cm. Desta forma, a laje foi dividida em 16 faixas na direção  $y$  e em 24 faixas na direção  $x$ .

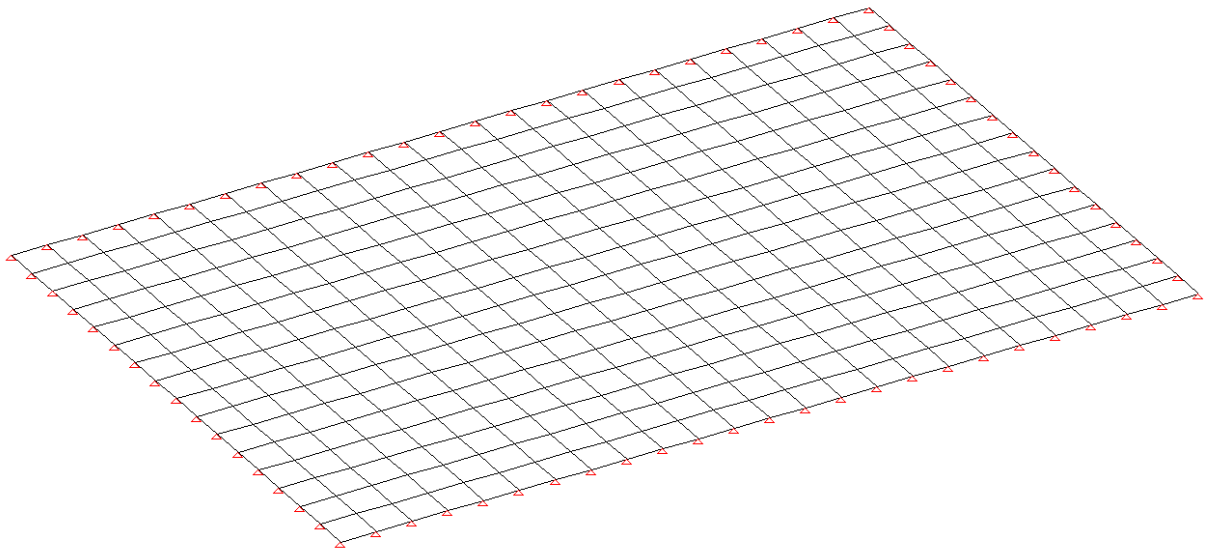


Figura 12: grelha representativa da laje 2

As figuras 13 e 14 mostram os diagramas de momentos fletores nas barras mais solicitadas nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Observa-se que as calibrações de rigidez à flexão e à torção propostas provocam descontinuidades no gráfico dos momentos na direção  $y$ . Ainda, observa-se que o momento máximo na direção  $y$  não acontece no meio do vão conforme esperado, concluindo-se que a calibração de rigidez adequada para uma laje quadrada não é, necessariamente, adequada para lajes retangulares.

Entretanto, do ponto de vista estático, o método apresenta resultados coerentes para dimensionamento, visto que os momentos máximos obtidos para cada direção são:

a)  $M_x = 167 \text{ kgf.m}$  ou, por área de influência da barra,  $M_x = 668 \text{ kgf.m/m}$ ;

b)  $M_y = 77,3 \text{ kgf.m}$  ou, por área de influência da barra,  $M_y = 309,2 \text{ kgf.m/m}$ ;

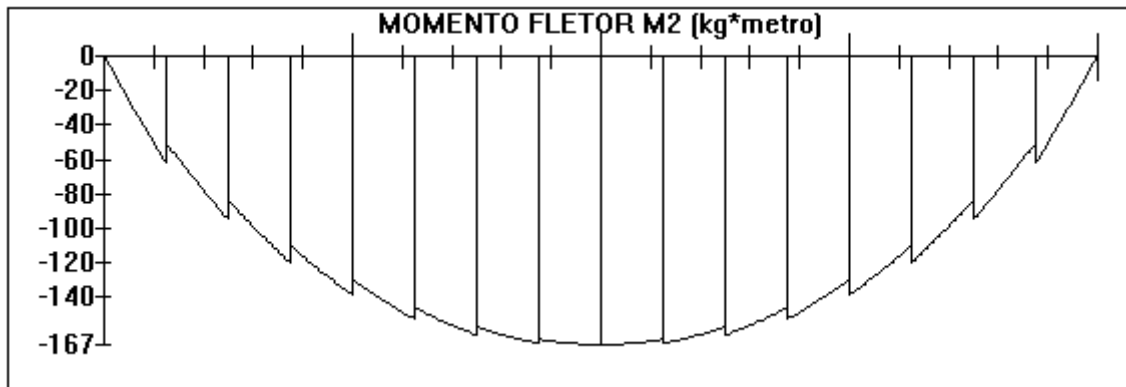


Figura 13: diagrama de momento fletor na barra central da grelha na direção x [kgf.m]

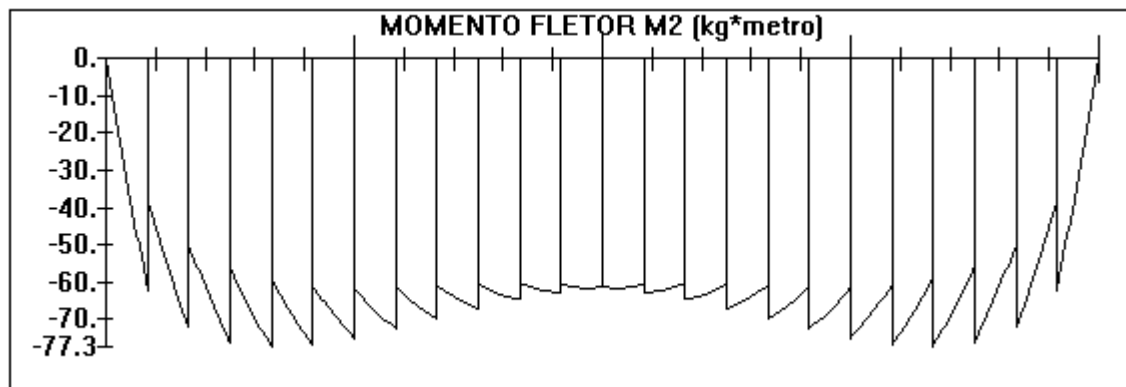


Figura 14: diagrama de momento fletor na barra central da grelha na direção y [kgf.m]

O quadro 10 sintetiza os momentos máximos encontrados em cada direção, bem como a deformação máxima encontrada pelo método.

	$M_{d_{m\acute{a}x}}$ [kgf.m]	$M_{d_{m\acute{a}x}}$ [kgf.m/m]	$W_{m\acute{a}x}$ [cm]
$M_x$	167,00	668,0	-0,584
$M_y$	77,30	309,2	

Quadro 10: momentos na laje 2 por Analogia às Grelhas

### 6.2.3 Laje 2: Solução pelo Método dos Elementos Finitos

Assim como no exemplo anterior, adotou-se uma malha de elementos de 10 x 10 cm, nos quais se aplicou uma carga distribuída de 500 kgf.m/m. O mapa de contorno ilustrado na figura 15 mostra a distribuição dos momentos na direção  $x$  da laje 2. O valor máximo encontra-se no centro do vão da laje, igual a 626 kgf.m/m.

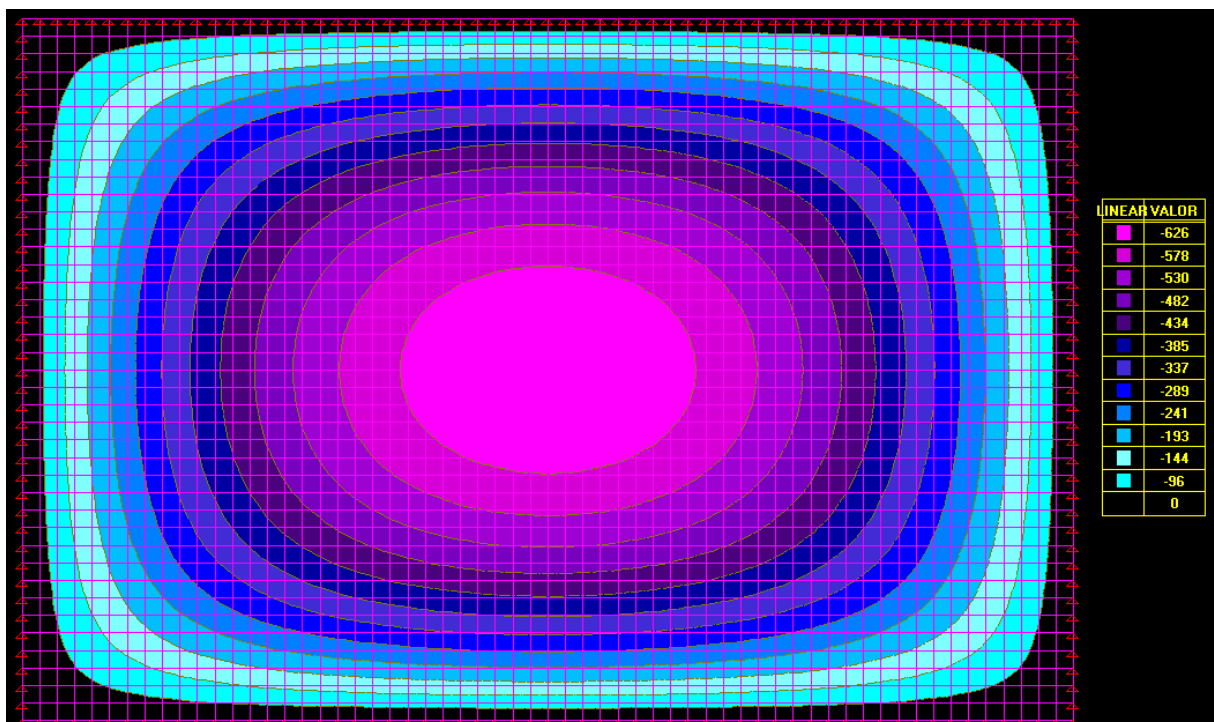


Figura 15: mapa de contorno dos momentos na direção  $x$  da laje 2 [kgf.m/m]  
(STRAP, 2009)

A figura 16, por sua vez, mostra a distribuição dos momentos na direção  $y$  da laje 2. O valor máximo encontra-se no centro do vão da laje, igual a 340 kgf.m/m.

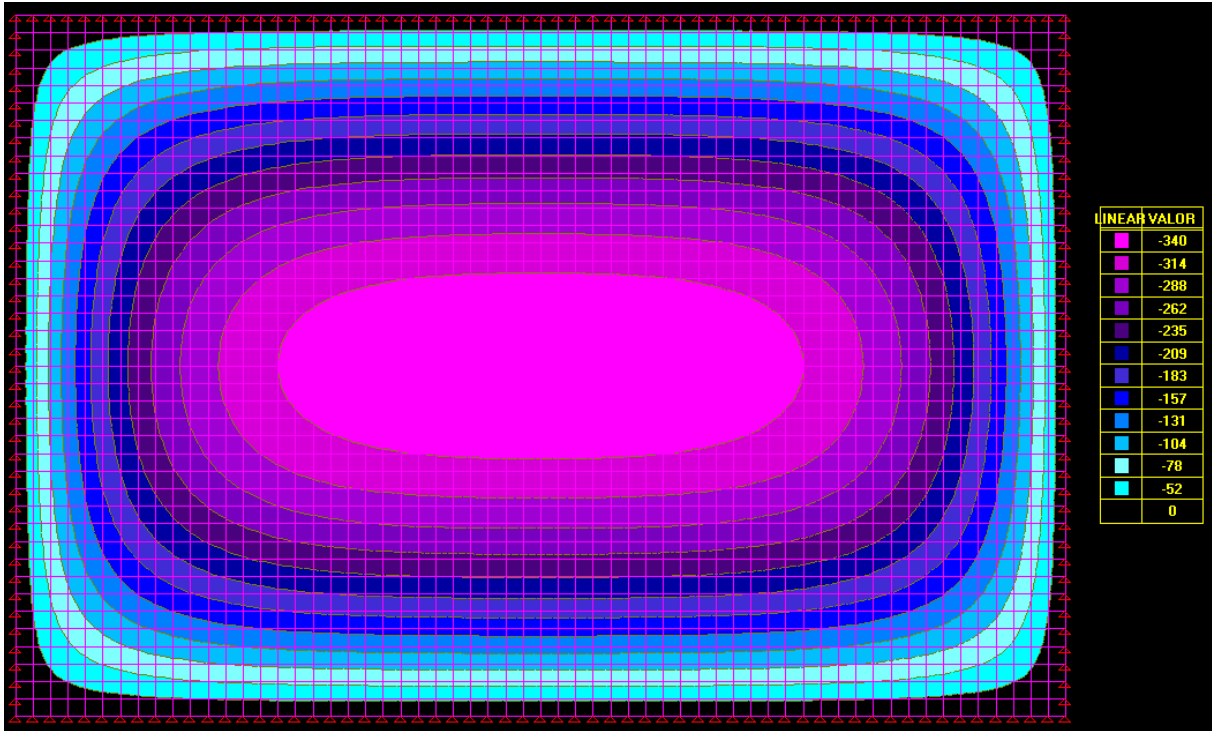


Figura 16: mapa de contorno dos momentos na direção y da laje 2 [kgf.m/m]  
(STRAP, 2009)

O quadro 11 a seguir mostra os valores de momentos máximos obtidos para cada direção, bem como a deformação encontrada com a utilização do método.

	$M_{d_{máx}}$ [kgf.m/m]	$W_{máx}$ [cm]
$M_x$	626,0	-0,478
$M_y$	340,0	

Quadro 11: momentos na laje 2 por Elementos Finitos

Apesar do vão  $x$  ter comprimento menor do que o vão  $y$ , é coerente que os momentos sejam maiores na direção do menor vão para lajes retangulares, uma vez que a laje tende a distribuir suas solicitações para os apoios mais próximos. Em lajes em que a relação  $l_y/l_x$  for maior ou igual a 2, a bibliografia aconselha que a laje seja armada em apenas uma direção, uma vez que as cargas serão distribuídas para os apoios paralelos ao vão maior.



### 6.3 LAJE QUADRADA COM DOIS BORDOS ENGASTADOS

O terceiro caso a ser analisado trata de uma laje quadrada com dimensões de 5,00 x 5,00 x 0,10 m, na qual dois bordos perpendiculares entre si são considerados engastados, conforme figura 17.

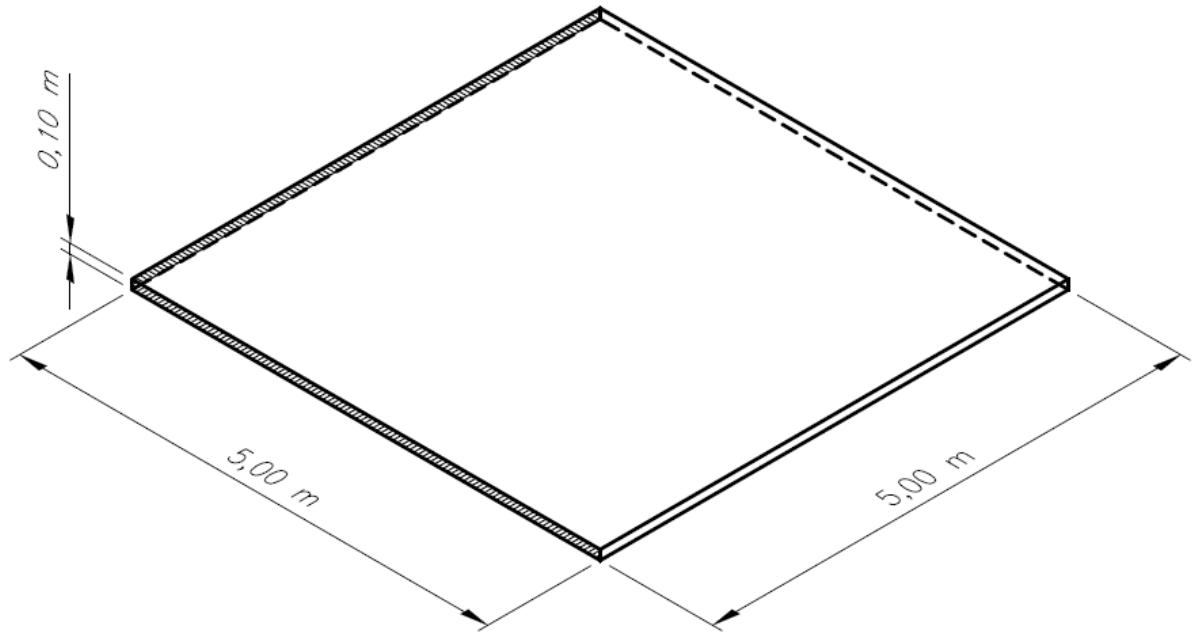


Figura 17: laje 3 - dimensões 5,00 x 5,00 x 0,10 m

#### 6.3.1 Laje 3: Solução pela Teoria Simplificada de Marcus

Para uma laje quadrada com esta configuração de apoios e com relação  $l_y/l_x$  igual a 1, obtêm-se os valores do coeficiente  $\mu$  conforme a figura 2. Os momentos positivos e negativos máximos são representados no quadro 12.

	$\mu$	$Md_{\text{máx}}$ [kgf.m/m]
$M_x$	2,69	336,3
$M_y$	2,69	336,3
$M'_x$	6,99	-873,8
$M'_y$	6,99	-873,8

Quadro 12: momentos na laje 3 pela Teoria de Marcus

### 6.3.2 Laje 3: Solução por Analogia às Grelhas

A figura 18 mostra a grelha utilizada no cálculo da laje pelo método de Analogia às Grelhas. Assim como na laje 1, os diagramas de momentos em ambas as direções são idênticos. Analisando a figura 19 é possível observar que a calibração proposta no capítulo 5 parece adequada para esta configuração, devido à uniformidade do gráfico de momentos e a seus valores coerentes. Os momentos negativos nos engastes valem, nas duas direções, -227 kgf.m ou, por área de influência, -908 kgf.m/m. Os momentos positivos, por sua vez, valem 90 kgf.m, ou 360 kgf.m/m.

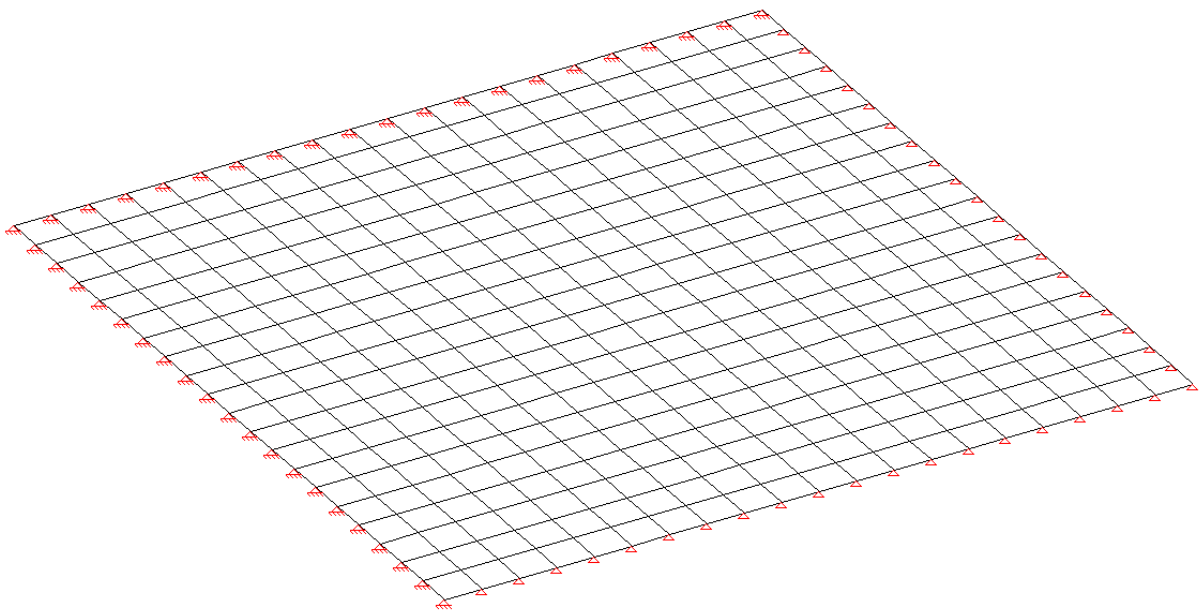


Figura 18: grelha representativa da laje 3

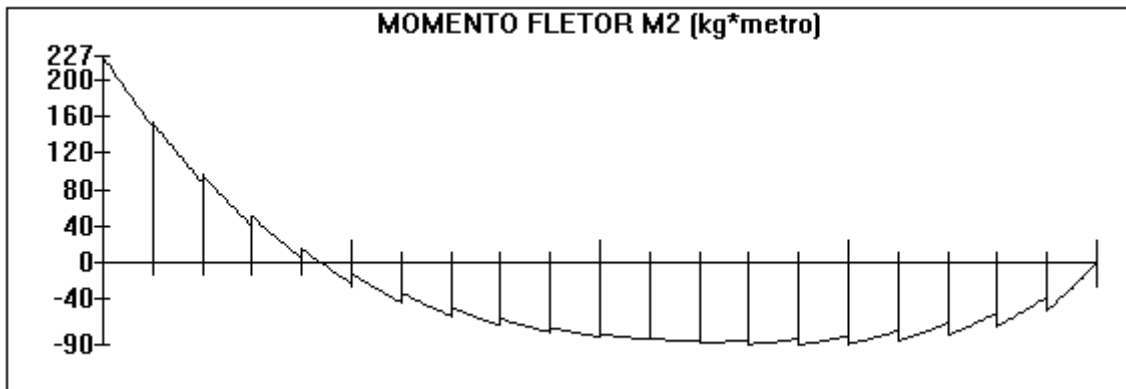


Figura 19: diagrama de momento fletor na barra central da grelha em ambas as direções [kgf.m]

Era esperado que a calibração proposta fosse adequada para esta configuração de laje visto que se trata de uma laje quadrada de dimensões pouco maiores do que aquelas utilizadas no modelo de calibração, o que não acontece com as lajes retangulares estudadas. O quadro 13 sintetiza os resultados obtidos pelo método.

	$Md_{m\acute{a}x}$ [kgf.m]	$Md_{m\acute{a}x}$ [kgf.m/m]	$W_{m\acute{a}x}$ [cm]
$M_x$	90,00	360,0	-0,379
$M_y$	90,00	360,0	
$M'_x$	-227,00	-908,0	
$M'_y$	-227,00	-908,0	

Quadro 13: momentos na laje 3 por Analogia às Grelhas

### 6.3.3 Laje 3: Solução pelo Método dos Elementos Finitos

O mapa de contorno descrito na figura 20 mostra a distribuição dos momentos na direção  $x$  da laje 3. O momento negativo mínimo encontrado na borda com engaste é de  $-867$  kgf.m/m, ao passo que o momento positivo máximo é de  $380$  kgf.m/m.

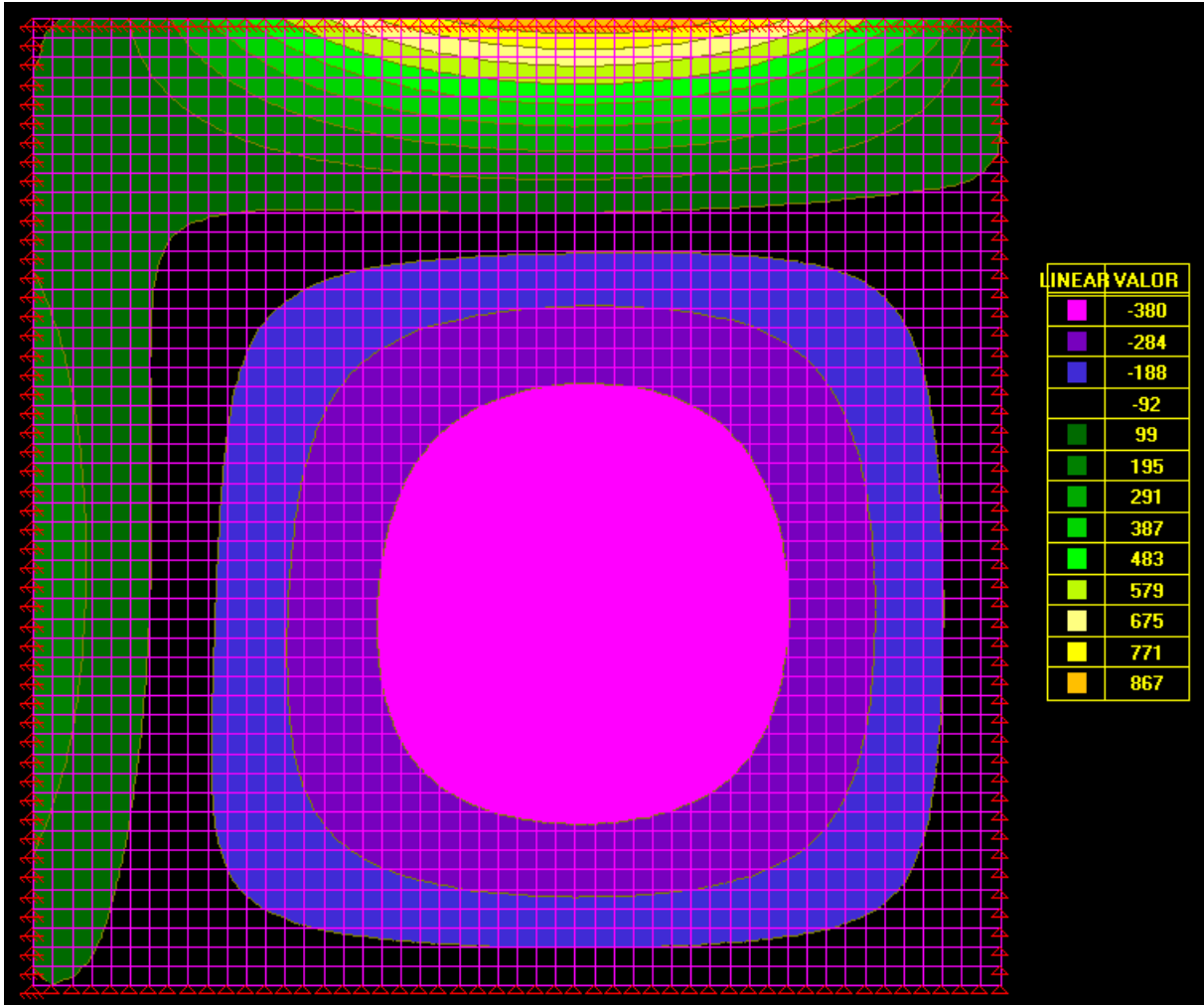


Figura 20: mapa de contorno dos momentos na direção  $x$  da laje 3 [kgf.m/m] (STRAP, 2009)

Conforme esperado para uma laje quadrada com configuração de apoios simétrica em relação a sua diagonal, o mapa de contorno da figura 21 apresenta a mesma distribuição de momentos na direção  $y$  que o mapa apresentado para a direção  $x$ .

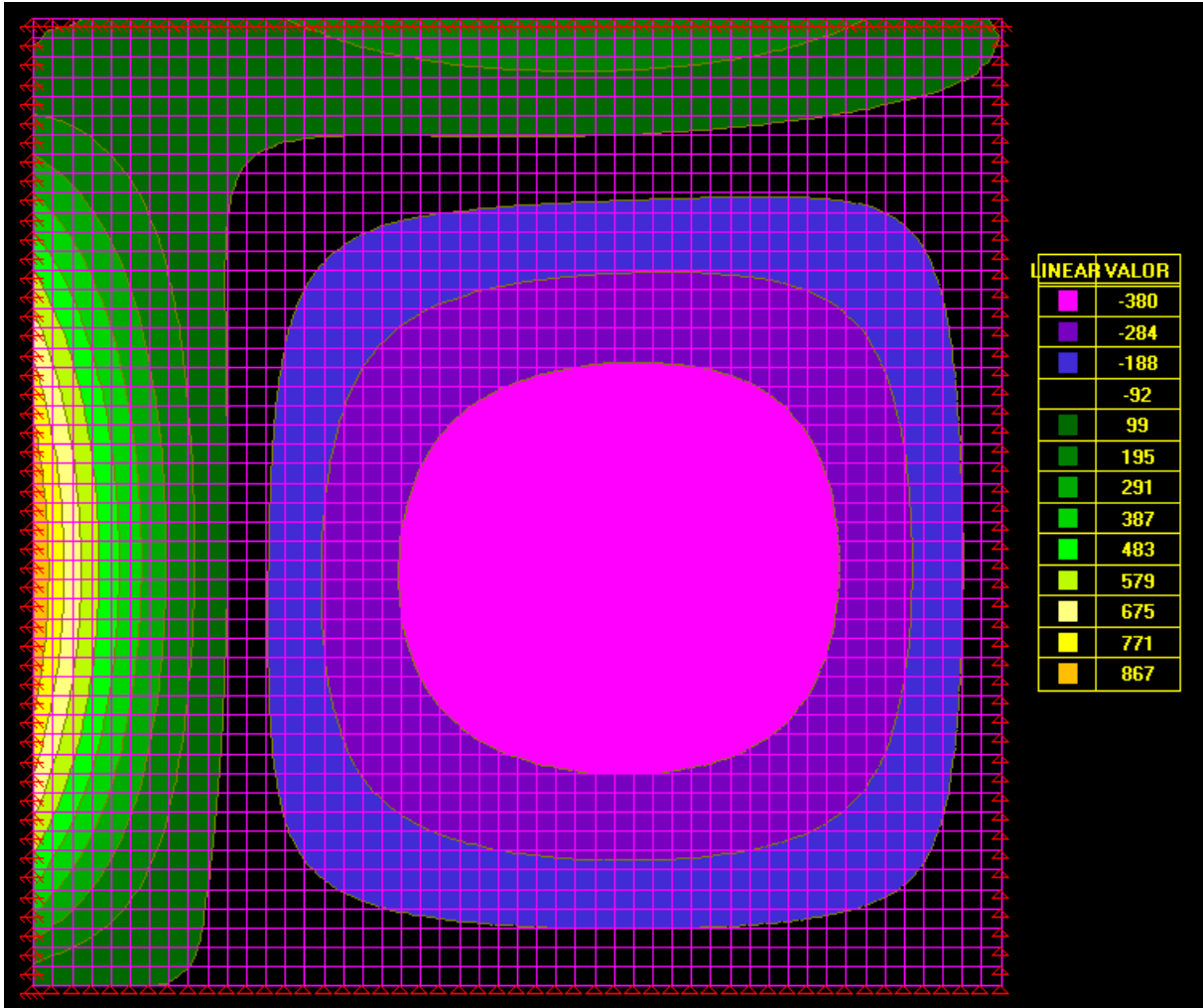


Figura 21: mapa de contorno dos momentos na direção y da laje 3 [kgf.m/m] (STRAP, 2009)

O quadro 14 apresenta os resultados obtidos através da utilização do Método dos Elementos Finitos para esta configuração de laje, solicitada por uma carga de 500 kgf.m/m.

	$M_{d_{m\acute{a}x}}$ [kgf.m/m]	$W_{m\acute{a}x}$ [cm]
$M_x$	380,0	-0,333
$M_y$	380,0	
$M'_x$	-867,0	
$M'_y$	-867,0	

Quadro 14: momentos na laje 3 por Elementos Finitos

## 6.4 LAJE RETANGULAR COM DOIS BORDOS ENGASTADOS

A próxima laje estudada tem dimensões 4,00 x 6,00 x 0,10 m e condição de engastamento igual à da terceira laje, com dois bordos perpendiculares entre si engastados. A laje está ilustrada na figura 22.

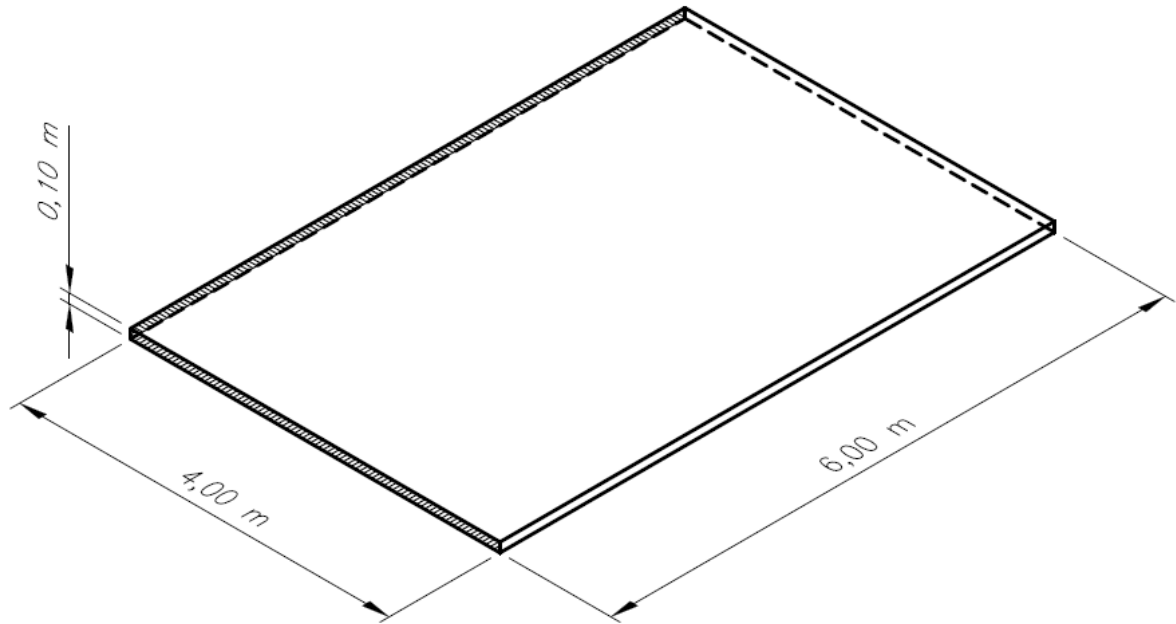


Figura 22: laje 4 - dimensões 4,00 x 6,00 x 0,10 m

### 6.4.1 Laje 4: Solução pela Teoria Simplificada de Marcus

Para uma laje retangular com esta configuração tem-se a relação  $l_y/l_x = 1,5$ . Para esta relação entre os vãos de uma laje engastada em dois bordos perpendiculares, a figura 2 fornece valores de  $\mu_x$  e de  $\mu_y$  para os momentos positivos e negativos. Com  $p = 500 \text{ kgf/m}^2$  e  $l_x = 4 \text{ m}$ , a fórmula 1 permite obter os valores dos momentos máximos na laje conforme apresenta o quadro 15.

	$\mu$	$Md_{\text{máx}}$ [kgf.m/m]
$M_x$	4,73	378,4
$M_y$	2,25	180,0
$M'_x$	10,41	-832,8
$M'_y$	8,06	-644,8

Quadro 15: momentos na laje 4 pela Teoria de Marcus

### 6.4.2 Laje 4: Solução por Analogia às Grelhas

A grelha de barras utilizada no *software* STRAP está ilustrada na figura 23 a seguir, enquanto os diagramas de momentos fletores nas direções  $x$  e  $y$  seguem nas figuras 24 e 25, respectivamente.

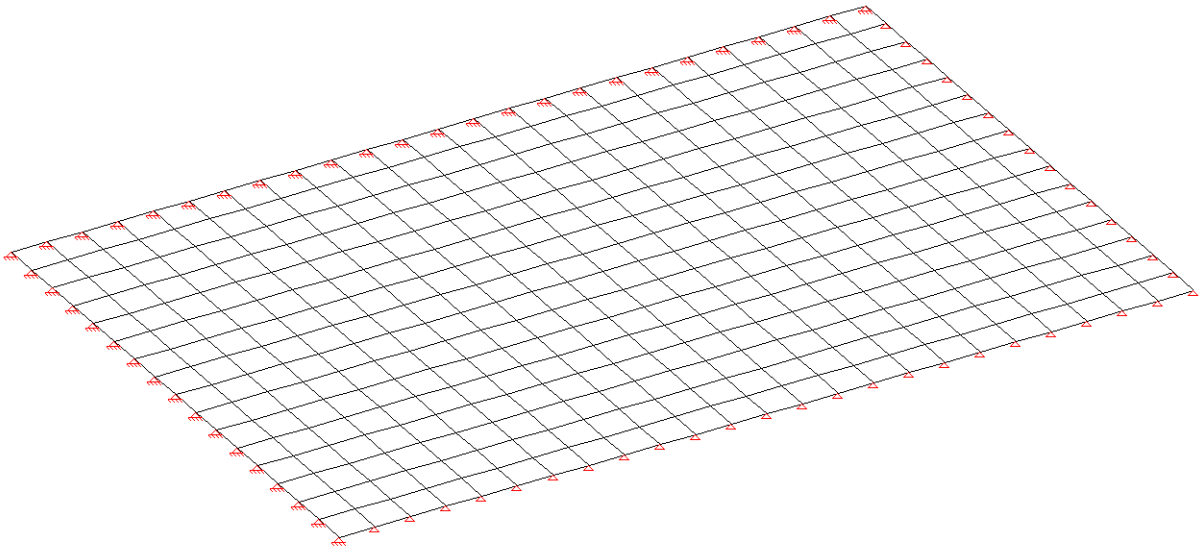


Figura 23: grelha representativa da laje 4

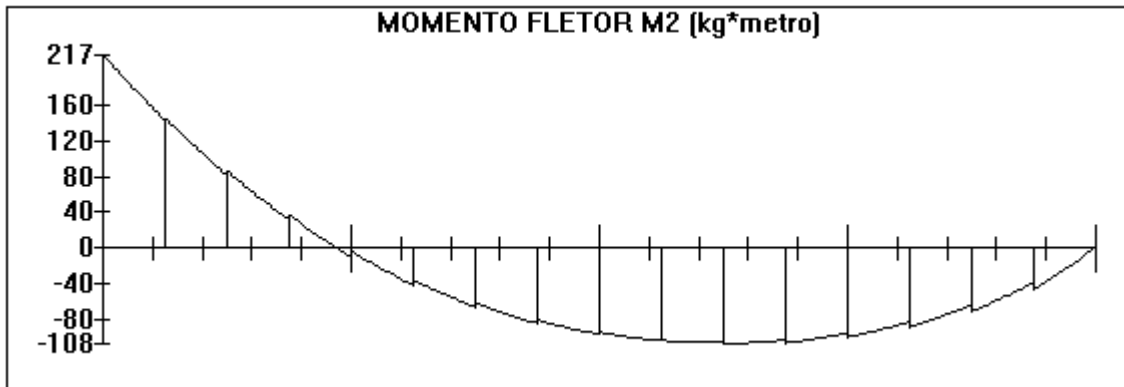


Figura 24: diagrama de momento fletor na barra central da grelha na direção  $x$  [kgf.m]

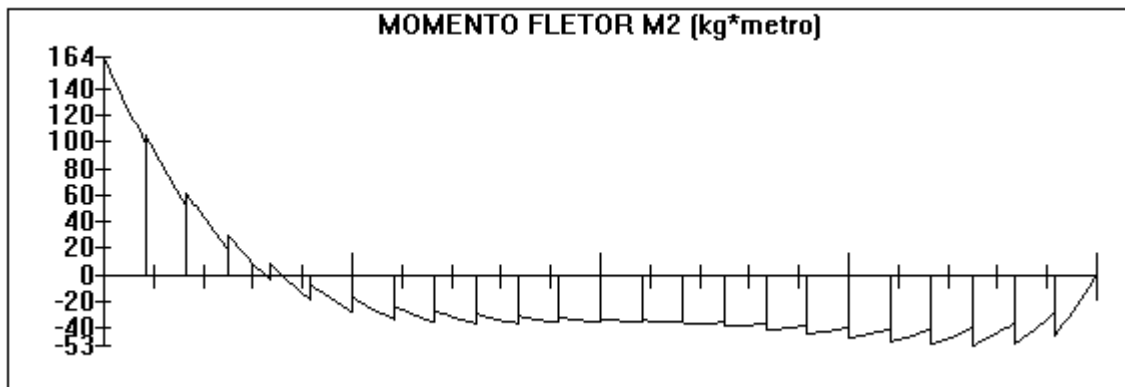


Figura 25: diagrama de momento fletor na barra central da grelha na direção  $y$  [kgf.m]

Observa-se que, mais uma vez, a calibração proposta não parece adequada a uma configuração de laje retangular, resultando em descontinuidades no gráfico do momento na direção do maior vão. Estas descontinuidades ocorrem devido ao erro introduzido com a aplicação de coeficientes multiplicadores para a rigidez torcional de cada barra. Com sua rigidez alterada, existe uma redistribuição de cargas para as barras da grelha que não reproduz o comportamento real da estrutura.

O quadro 16 resume os valores máximos e mínimos de momentos encontrados em cada direção, fornecendo o valor do momento fletor por barra, bem como o momento resultante da área de influência de 0,25 m de cada barra da grelha.



	$M_{d,m\acute{a}x}$ [kgf.m]	$M_{d,m\acute{a}x}$ [kgf.m/m]	$W_{m\acute{a}x}$ [cm]
$M_x$	108,00	432,0	-0,278
$M_y$	53,00	212,0	
$M'_x$	-217,00	-868,0	
$M'_y$	-164,00	-656,0	

Quadro 16: momentos fletores na laje 4 por Analogia às Grelhas

Para critérios de dimensionamento do elemento estudado, entretanto, o método fornece novamente valores coerentes de momentos máximos e mínimos em ambas as direções.

### 6.4.3 Laje 4: Solução pelo Método dos Elementos Finitos

O mapa de contorno descrito na figura 26 apresenta a distribuição dos momentos na direção  $x$  da laje 4.

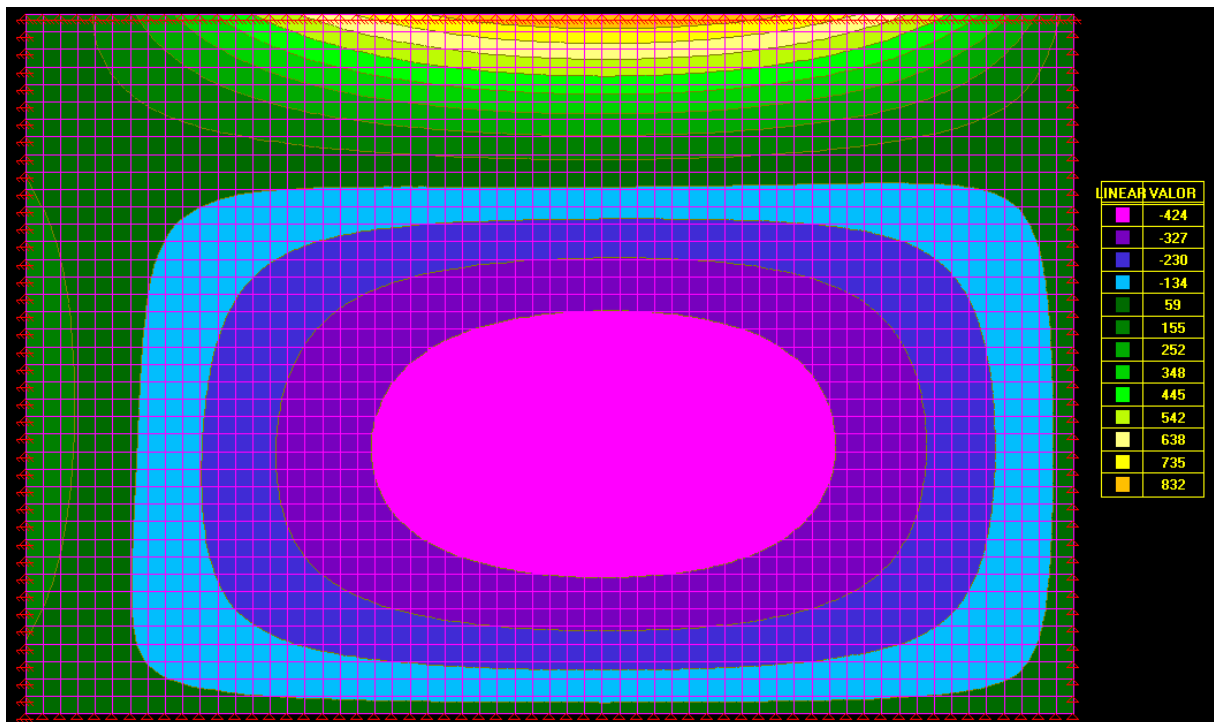


Figura 26: mapa de contorno dos momentos na direção  $x$  da laje 4 [kgf.m/m] (STRAP, 2009)

Nesta direção, o momento negativo mínimo encontrado na borda com engaste é de -832 kgf.m/m, ao passo que o momento positivo máximo é de 424 kgf.m/m.

A figura 27 mostra a distribuição de momentos para a direção y, resultando em um momento negativo no engaste de -640 kgf.m/m e um momento positivo no vão de 218 kgf.m/m.

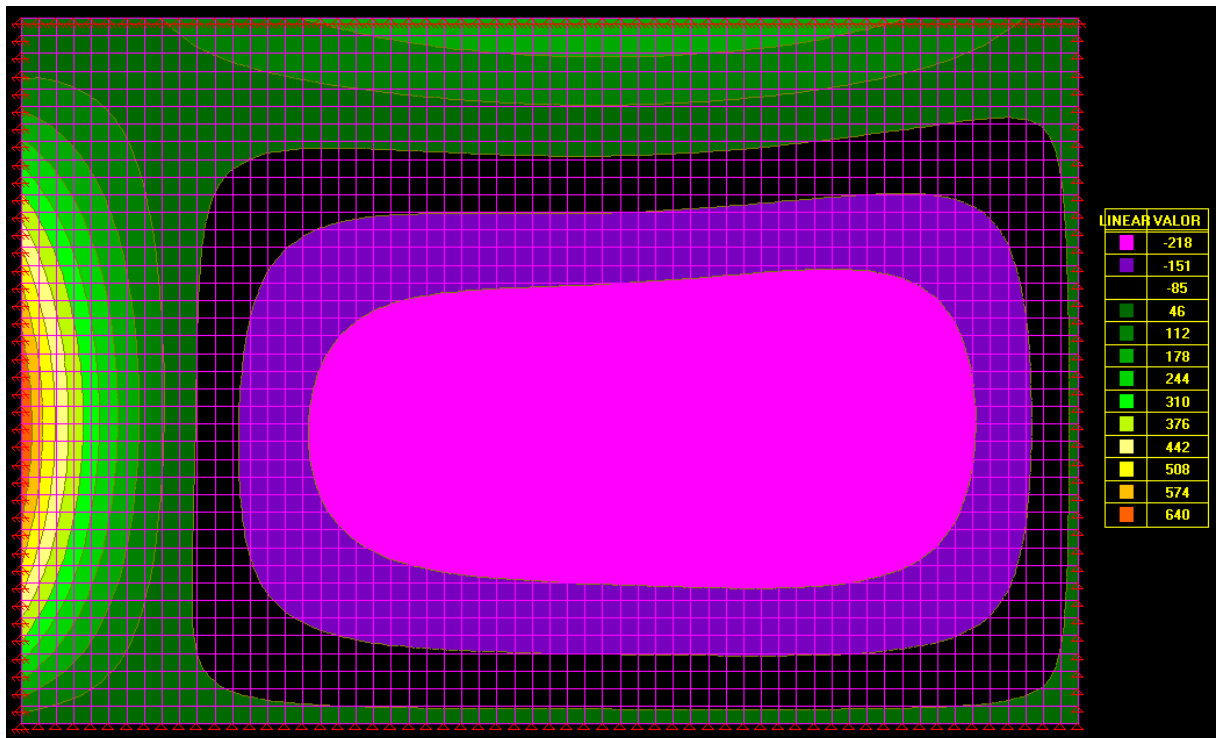


Figura 27: mapa de contorno dos momentos na direção y da laje 4 [kgf.m/m]  
(STRAP, 2009)

Mais uma vez pode-se observar a distribuição de cargas gerando momentos maiores na direção do menor vão, visto que a laje tende a distribuir suas solicitações para os apoios mais próximos. O quadro 17 a seguir apresenta os resultados obtidos através da utilização do método.

	$Md_{m\acute{a}x}$ [kgf.m/m]	$W_{m\acute{a}x}$ [cm]
$M_x$	424,0	-0,247
$M_y$	218,0	
$M'_x$	-832,0	
$M'_y$	-640,0	

Quadro 17: momentos na laje 4 por Elementos Finitos

## 7 LAJES ESPECIAIS

Foram escolhidas duas lajes de dimensões especiais para a análise dos resultados obtidos por cada método, sendo elas uma laje quadrada de grandes dimensões e outra, também quadrada, de pequenas dimensões.

### 7.1 LAJE RETANGULAR DE GRANDES DIMENSÕES

Para a laje considerada de grandes dimensões escolheu-se uma geometria de 10,00 x 10,00 x 0,20 m, representada na figura 28. Optou-se por aumentar a espessura da laje de 10 cm para 20 cm para manter a coerência de utilização de elementos estruturais viáveis do ponto de vista de utilização. Uma laje com vãos de 10 m e espessura de 10 cm estaria em desacordo com a proposta do estudo.

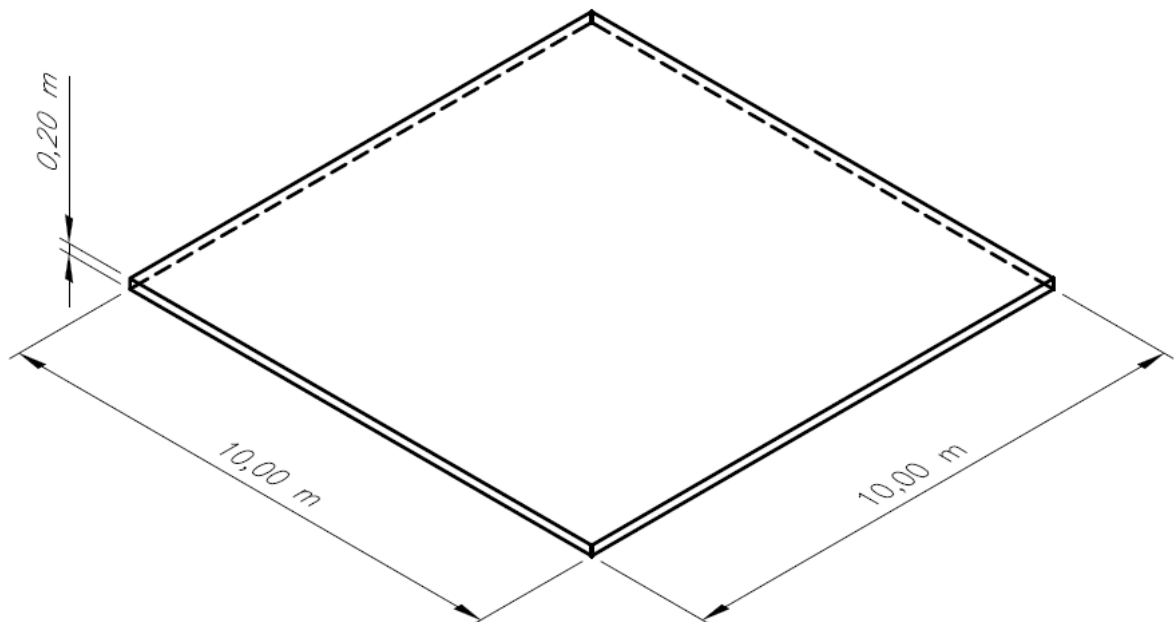


Figura 28: laje 5 - dimensões 10,00 x 10,00 x 0,20 m

### 7.1.1 Laje 5: Solução pela Teoria Simplificada de Marcus

Para uma laje retangular simplesmente apoiada em seus quatro bordos com relação  $l_y/l_x = 1$ , obtemos os valores de momento conforme o quadro 18.

	$\mu$	$Md_{m\acute{a}x}$ [kgf.m/m]
$M_x$	4,23	2115,0
$M_y$	4,23	2115,0

Quadro 18: momentos na laje 5 pela Teoria de Marcus

### 7.1.2 Laje 5: Solução por Analogia às Grelhas

Utilizaram-se os mesmos critérios utilizados anteriormente para o espaçamento e para as rigidezes à flexão e à torção nas barras da grelha, sendo a relação  $J/I_{xx}$  igual a 2,3 e o espaçamento igual a 25 cm.

Os diagramas de momento fletor nas direções  $x$  e  $y$  são idênticos para esta configuração de laje, e estão representados na figura 29.

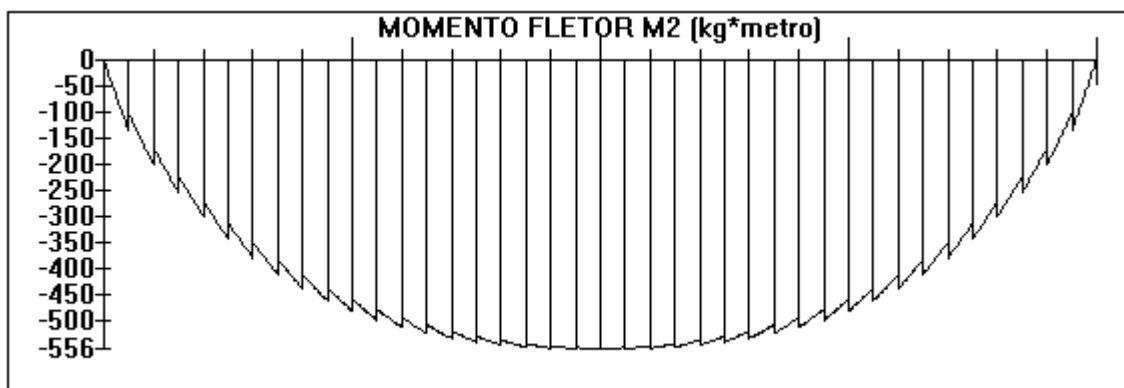


Figura 29: diagrama de momento fletor na barra central da grelha em ambas as direções [kgf.m]

O quadro 19 resume os valores encontrados para os momentos máximos e para a deformação na laje, através do Método de Analogia às Grelhas.

	$Md_{m\acute{a}x}$ [kgf.m]	$Md_{m\acute{a}x}$ [kgf.m/m]	$W_{m\acute{a}x}$ [cm]
$M_x$	556,00	2224,0	-1,560
$M_y$	556,00	2224,0	

Quadro 19: momentos fletores na laje 5 por Analogia às Grelhas

### 7.1.3 Laje 5: Solução pelo Método dos Elementos Finitos

Conforme proposto anteriormente, utilizou-se uma malha de elementos retangulares de 10 x 10 cm. O quadro 20 apresenta os momentos máximos encontrados em cada direção da laje, bem como a deformação máxima.

	$Md_{m\acute{a}x}$ [kgf.m/m]	$W_{m\acute{a}x}$ [cm]
$M_x$	2210,0	-1,230
$M_y$	2210,0	

Quadro 20: momentos na laje 5 por Elementos Finitos

O mapa de contorno da figura 30 ilustra os momentos na direção  $x$  da laje 5. Sendo a laje quadrada, apoiada em todos os seus bordos e carregada por uma carga uniformemente distribuída de 500 kgf.m/m, a distribuição dos momentos na direção  $y$  é idêntica à da direção  $x$ .

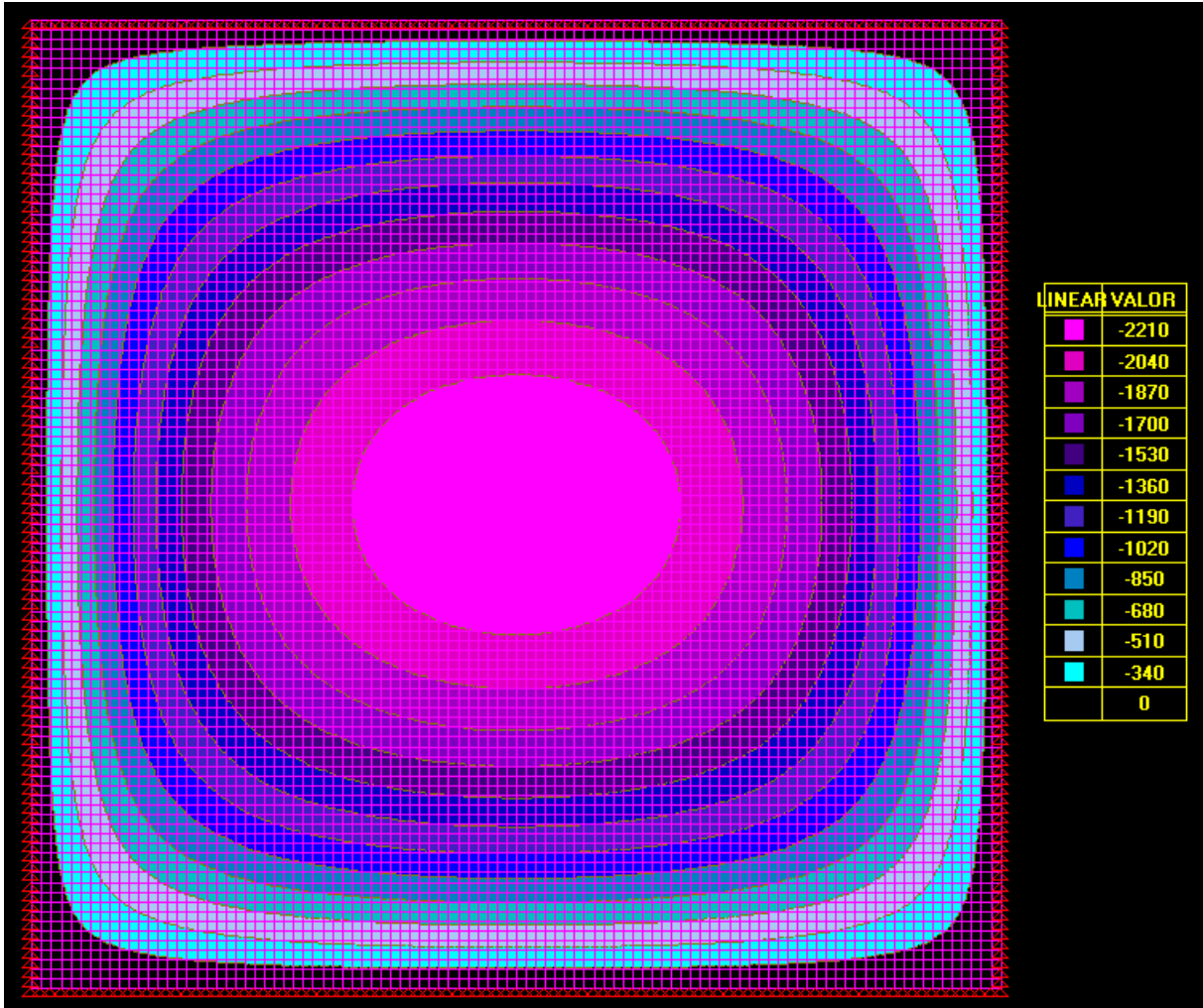


Figura 30: mapa de contorno dos momentos na direção  $x$  da laje 5 [kgf.m/m] (STRAP, 2009)

## 7.2 LAJE RETANGULAR DE PEQUENAS DIMENSÕES

Para a laje considerada de pequenas dimensões escolheu-se uma geometria de 2,00 x 2,00 x 0,08 m, representada na figura 31. Novamente, optou-se por variar a espessura da laje para compatibilizá-la às dimensões dos vãos propostos.

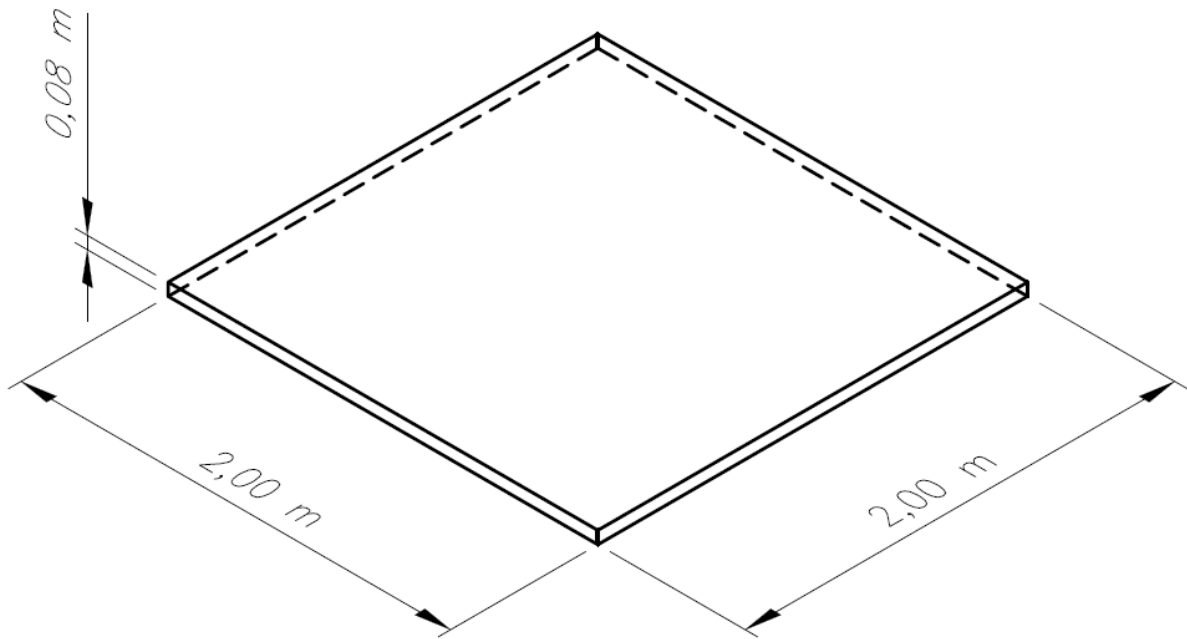


Figura 31: laje 6 - dimensões 2,00 x 2,00 x 0,08 m

### 7.2.1 Laje 6: Solução pela Teoria Simplificada de Marcus

Assim como na laje de grandes dimensões, obtemos através da figura 2 os valores para o coeficiente  $\mu$  nas direções  $x$  e  $y$ , possibilitando o cálculo dos momentos em ambas as direções através da fórmula 1, conforme segue no quadro 21.

	$\mu$	$Md_{\text{máx}}$ [kgf.m/m]
$M_x$	4,23	84,6
$M_y$	4,23	84,6

Quadro 21: momentos na laje 6 pela Teoria de Marcus



### 7.2.2 Laje 6: Solução por Analogia às Grelhas

Conforme esperado, os diagramas de momento das barras em ambas as direções é idêntico, e está ilustrado na figura 32. Observa-se que o espaçamento de 25 cm entre as barras da grelha não se adequou a esta configuração de laje pela presença de descontinuidades grandes no gráfico. Este erro poderia ser corrigido com a utilização de uma grelha menos espaçada, entretanto, é de interesse do trabalho verificar a adequação da calibração utilizada para diferentes configurações de lajes.

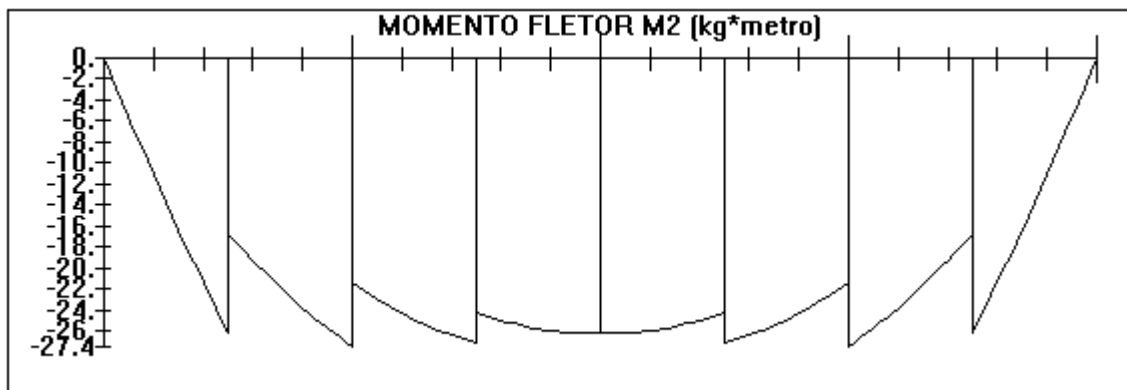


Figura 32: diagrama de momento fletor na barra central da grelha em ambas as direções [kgf.m]

O quadro 22 sintetiza os momentos máximos obtidos em cada direção das barras da grelha.

	$Md_{máx}$ [kgf.m]	$Md_{máx}$ [kgf.m/m]	$W_{máx}$ [cm]
$M_x$	27,40	109,6	-0,483
$M_y$	27,40	109,6	

Quadro 22: momentos fletores na laje 6 por Analogia às Grelhas

### 7.2.3 Laje 6: Solução pelo Método dos Elementos Finitos

O mapa de contorno ilustrado na figura 33 mostra a distribuição dos momentos na direção  $x$  ao longo da laje 6. O momento máximo encontra-se no centro do vão, e corresponde a 88,4 kgf.m/m.

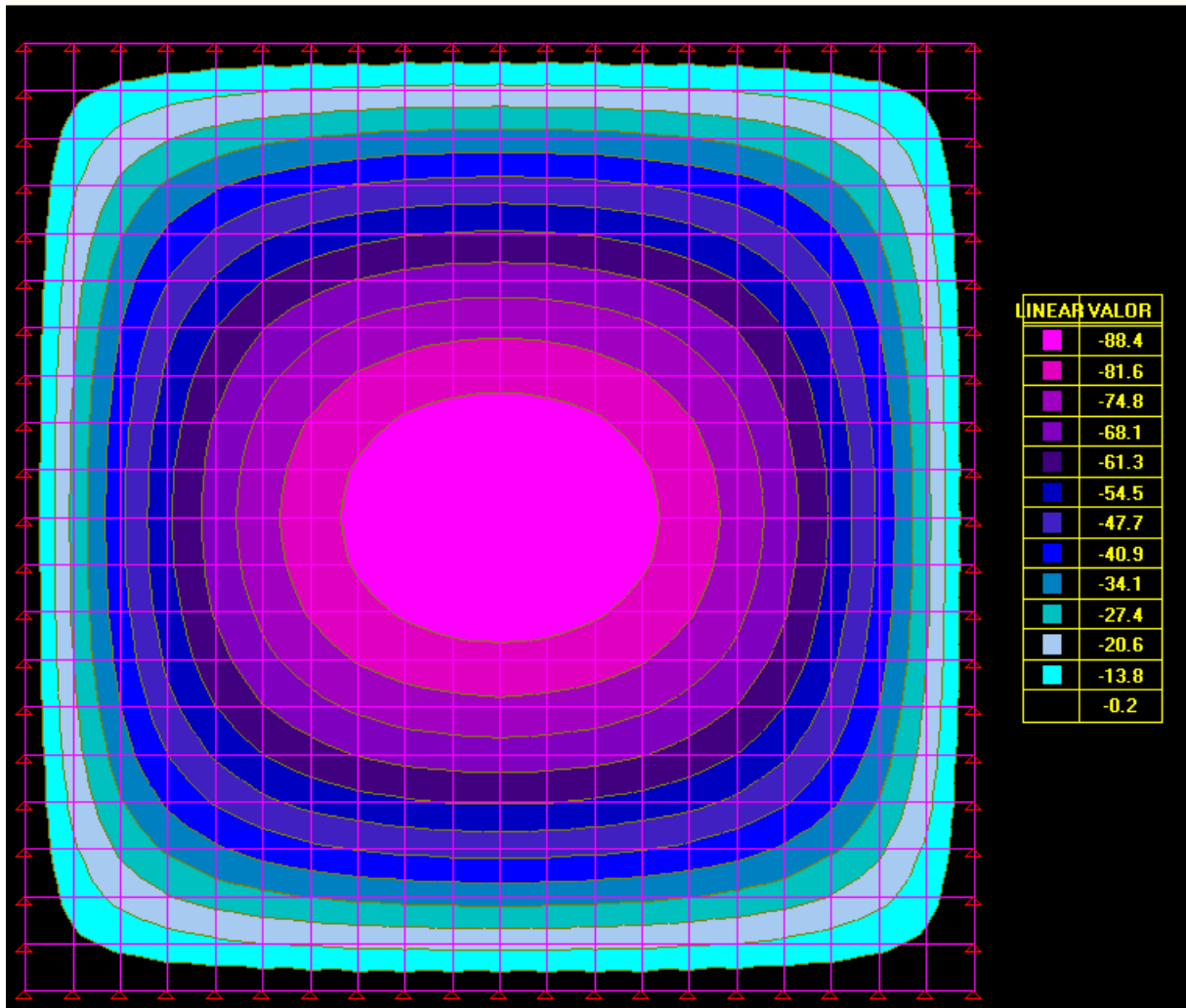


Figura 33: mapa de contorno dos momentos na direção  $x$  da laje 6 [kgf.m/m] (STRAP, 2009)

O quadro 23 mostra a deformação máxima encontrada nesta laje para a carga proposta, bem como os valores dos momentos máximos em ambas as direções.

	$Md_{m\acute{a}x}$ [kgf.m/m]	$W_{m\acute{a}x}$ [cm]
$M_x$	88,4	-0,307
$M_y$	88,4	

Quadro 23: momentos na laje 6 por Elementos Finitos

## 8 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Compararam-se os resultados obtidos por cada um dos métodos para as seis lajes propostas neste trabalho. O quadro 24 mostra o resumo dos momentos fletores máximos obtidos pelos três métodos de cálculo.

	Teoria Simplificada de Marcus				Método de Analogia às Grelhas				Método dos Elementos Finitos			
	$M_x$	$M_y$	$M_x^-$	$M_y^-$	$M_x$	$M_y$	$M_x^-$	$M_y^-$	$M_x$	$M_y$	$M_x^-$	$M_y^-$
Laje 1	528,8	528,8	0,0	0,0	536,0	536,0	0,0	0,0	552,0	552,0	0,0	0,0
Laje 2	617,6	311,2	0,0	0,0	668,0	309,2	0,0	0,0	626,0	340,0	0,0	0,0
Laje 3	336,3	336,3	-873,8	-873,8	360,0	360,0	-908,0	-908,0	380,0	380,0	-867,0	-867,0
Laje 4	378,4	180,0	-932,8	-644,8	432,0	212,0	-868,0	-656,0	424,0	218,0	-832,0	-640,0
Laje 5	2115,0	2115,0	0,0	0,0	2224,0	2224,0	0,0	0,0	2210,0	2210,0	0,0	0,0
Laje 6	84,6	84,6	0,0	0,0	109,6	109,6	0,0	0,0	88,4	88,4	0,0	0,0

Quadro 24: momentos fletores pelos três métodos [kgf.m/m]

A análise do quadro permite observar que os momentos fletores positivos obtidos através da utilização da Teoria Simplificada de Marcus são, em sua maioria, menores do que os obtidos através dos outros métodos. Desta forma, é possível afirmar que este é o método mais desfavorável do ponto de vista da segurança.

O quadro 25 apresenta os erros relativos nos momentos obtidos pelos métodos simplificados quando comparados ao Método dos elementos Finitos.

	Teoria Simplificada de Marcus				Método de Analogia às Grelhas			
	$M_x$	$M_y$	$M_x^-$	$M_y^-$	$M_x$	$M_y$	$M_x^-$	$M_y^-$
Laje 1	-4,2%	-4,2%	0,0%	0,0%	-2,9%	-2,9%	0,0%	0,0%
Laje 2	-1,3%	-8,5%	0,0%	0,0%	6,7%	-9,1%	0,0%	0,0%
Laje 3	-11,5%	-11,5%	0,8%	0,8%	-5,3%	-5,3%	4,7%	4,7%
Laje 4	-10,8%	-17,4%	12,1%	0,7%	1,9%	-2,8%	4,3%	2,5%
Laje 5	-4,3%	-4,3%	0,0%	0,0%	0,6%	0,6%	0,0%	0,0%
Laje 6	-4,3%	-4,3%	0,0%	0,0%	24,0%	24,0%	0,0%	0,0%

Quadro 25: erro nos momentos considerando-se os resultados do MEF como corretos [%]

Considerando-se o Método dos Elementos Finitos como convergente para a solução exata do momento máximo nas lajes, observa-se que a Teoria Simplificada de Marcus apresenta erros de até -17,4% na laje quatro, os quais poderiam acarretar em uma estrutura subdimensionada. Para as lajes quadradas e simplesmente apoiadas (lajes 1, 5 e 6), entretanto, o método apresenta praticamente o mesmo erro, em torno de -4,3%, o que é considerado satisfatório para uma análise manual dos momentos fletores nas lajes em questão.

Os modelos de Analogia às Grelhas com uma relação  $J/I_{xx} = 2,3$ , por sua vez, apresentaram erros, em módulo, inferiores a 10%, com exceção da laje 6. Esta laje não se adequou à calibração proposta uma vez que possui pequenas dimensões, e seria aconselhável discretizá-la em uma grelha menos espaçada para se obter resultados melhores.

Conforme proposto no capítulo 5, o modelo de calibração das grelhas teve a relação entre as rigidezes à torção e à flexão adequada aos valores de momento máximo, sem preocupar-se com os valores das deformações na laje de calibração. O quadro 26 apresenta o resumo das deformações encontradas com a utilização do Método de Analogia às Grelhas, bem como do Método dos Elementos Finitos.

	Analogia às Grelhas $W_{\text{máx}}$ [cm]	Elementos Finitos $W_{\text{máx}}$ [cm]	Erro [%]
Laje 1	-0,769	-0,614	25,2
Laje 2	-0,584	-0,478	22,2
Laje 3	-0,379	-0,333	13,8
Laje 4	-0,278	-0,247	12,6
Laje 5	-1,560	-1,230	26,8
Laje 6	-0,483	-0,307	57,3

Quadro 26: deformações por Grelhas e MEF [cm]

Observa-se que o Método de Analogia às Grelhas com a calibração proposta apresenta menores erros para as lajes 3 e 4, onde existem engastes em dois bordos e, conseqüentemente, onde as flechas são menores. Mesmo assim, os erros nas deformações são grandes demais para que os resultados sejam considerados satisfatórios. Não foi possível encontrar um coeficiente de redução único para as deformações encontradas pelo método que garantisse a qualidade dos resultados.

## 9 CONCLUSÕES

Dentre os dois métodos aproximados estudados neste trabalho, fica evidente que o Método de Analogia às Grelhas apresenta resultados mais satisfatórios do que os obtidos através da Teoria Simplificada de Marcus, desde que seu emprego seja precedido por uma criteriosa calibração dos modelos. Conforme apresentado anteriormente, para a laje 6, considerada especial por suas pequenas dimensões, o método mostrou-se ineficaz tanto na obtenção dos momentos quanto na obtenção das flechas. Ao substituímos uma laje de 2 m de vão por uma grelha equivalente de barras espaçadas de 25 cm entre si, dividimos cada vão da laje em apenas oito faixas influentes, número este que se mostrou insuficiente para a correta análise do elemento. Desta forma, para efetuar o seu dimensionamento é necessário reavaliar a disposição da grelha proposta e, provavelmente, substituí-la por uma grelha com espaçamento menor. Diferentes espaçamentos de grelha, entretanto, acarretam em novas calibrações do modelo proposto.

Vale ressaltar que os modelos estudados neste trabalho possuem uma geometria favorável à convergência dos resultados obtidos através de cada um dos métodos, uma vez que as lajes propostas são todas retangulares. A mesma calibração ideal proposta para estas lajes não necessariamente forneceria resultados igualmente satisfatórios caso aplicada a lajes com geometrias e condições de apoio diferenciadas, sendo aconselhável o desenvolvimento de uma nova calibração para a utilização dos métodos.

Do ponto de vista das deformações a calibração proposta não se mostrou adequada, apresentando erros demasiadamente grandes quando comparados os resultados do Método de Analogia às Grelhas com o Método dos Elementos Finitos. Não foi possível estabelecer uma relação  $J/I_{xx}$  que se adequasse tanto para os momentos quanto para as deformações, de modo que seria necessária a utilização de uma calibração diferente para uma melhor análise das flechas nas lajes estudadas. ROSA (2008) propôs uma calibração baseada nos deslocamentos correspondente a  $J/I_{xx} = 3$ , a qual se mostrou adequada para os modelos de barra propostos.

No que diz respeito ao Método Simplificado de Marcus, este tem seu uso aconselhado para análises prévias das estruturas ou para uma análise na ausência de recursos computacionais.

Sempre que estes puderem ser empregados, entretanto, é favorável o desenvolvimento de um modelo a partir da aplicação de outro método.

Dada a facilidade de aplicação do Método de Analogia às Grelhas em modelos computacionais, bem como a facilidade no desenvolvimento das armaduras a partir dos resultados obtidos, observa-se que este é um método interessante do ponto de vista prático, desde que seja devidamente estudado e que suas calibrações sejam feitas atendendo aos requisitos de cada elemento estrutural analisado. Salienta-se que neste trabalho foram comparados apenas os valores de momento fletor máximo na estrutura, visto que as distribuições dos momentos obtidos através deste método diferem demasiadamente daquelas obtidas através do Método dos Elementos Finitos.

O Método dos Elementos Finitos, por sua vez, tem sua aplicação aconselhada sempre que for necessária a análise mais criteriosa de um elemento, seja por sua geometria diferenciada, ou por qualquer outro fator que inviabilize a garantia de obtenção de resultados satisfatórios quando empregados os outros métodos.

Como continuação desta pesquisa, sugere-se um estudo aprofundado para a análise de lajes não-retangulares, considerando-se que a calibração dos modelos deste trabalho teve como base apenas uma laje quadrada.



## REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de Estruturas de Concreto. Rio de Janeiro, 2007.
- AWRUCH, A. M.; MORSCH, I. B. **Teoria da Elasticidade Aplicada à Mecânica Estrutural**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.
- CAMACHO, J. S. **Estudo das Lajes**. Ilha Solteira, 2004.
- GROEHS, A. G. **Resistência dos Materiais e Vasos de Pressão**. São Leopoldo: Editora da UNISINOS, 2002.
- MONTOYA, P. J.; MESEGUER, A. G.; CABRÉ, F. M. **Hormigón Armado**. Barcelona: Gustavo Gili, 2000.
- ROSA, C. M. **Comparação entre modelo de grelha e elementos de placa na análise de lajes planas**. 2008. 96 f. Trabalho de Diplomação (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- SILVA, M. A. F. A utilização da analogia de grelha para análise de pavimentos de edifícios em concreto armado. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 5., 2003, São Carlos. **Anais...** São Carlos. EPUSP. 2003. 1 CD.
- SILVA, F. A. N.; HOROWITZ, B. Momentos fletores em vigas de edifícios de concreto armado. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v. 1, n. 2, p. 197-211, jun. 2008.
- SORIANO, H.L. **Elementos Finitos**: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.
- STRAMANDINOLI, J. S. B. **Contribuição à Análise de Lajes Nervuradas por Analogia de Grelha**. 2003. 179 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- STRAP, versão 12.5. São Paulo: SAE Informática, 2009 – 1 CD-ROM.
- TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY, K. S. **Theory of Plates and Shells**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1959.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. Londres: McGraw-Hill, 1991.