

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISES EXPERIMENTAIS E NUMÉRICAS DE COMPOSTOS ELASTOMÉRICOS

por
Daniel Angelo Francisco Thomazi

Dissertação para a obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Julho de 2009.

ANÁLISES EXPERIMENTAIS E NUMÉRICAS DE COMPOSTOS ELASTOMÉRICOS

por

Daniel Angelo Francisco Thomazi
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientadores: Prof. Dr. Ignacio Iturrioz
Prof^a. Dr^a. Leticia Fleck Fadel Miguel

Aprovada por:

Prof. Dr. Alberto Tamagna

Prof. Dr. Edson Hikaro Aseka

Prof. Dr. Jun Ono Fonseca

Prof. Dr. Horácio Antônio Vielmo
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, Julho de 2009.

À minha esposa

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Ignácio Iturrioz e Prof^a. Dr^a. Letícia Miguel, pelo incondicional apoio e confiança, por demais exigido nesta fase de desenvolvimento pessoal. Pessoas estas que além de instrutores se tornaram amigos nesta longa caminhada, procurando sempre desenvolver maneiras de tornar o seu orientado uma pessoa produtiva, não exitando para alterar as metodologias de trabalho.

À minha querida esposa Fernanda Artus Thomazi, por toda a compreensão e apoio, pelas cobranças e força nos momentos mais difíceis.

Aos meus grandes companheiros de graduação e mestrado Carlos Uhlmann, Frankin Ferreira, Leonardo Hoss, Gustavo Mezzomo, Otávio Silveira, Vicente Puglia e demais colegas do GMAp, que mesmo não tendo participação direta neste estudo, sempre contribuíram com alguma palavra ou frase de apoio.

Aos meus pais, Balduino e Lorena, e meus irmãos e cunhados, Balduino Jr. e Renata, Luciane e Cristian e Ana Paula e Rogério, pela minha educação, apoio e incentivo diários, fazendo de mim a pessoa que vos fala.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelo ensino público, gratuito e de qualidade e ao PROMEC por todo o apoio confiado.

Ao CETEPO - Centro de Tecnologia em Polímeros - São Leopoldo / RS. Principalmente a Jordão Geller e Lucas Heinemann, que além de realizarem todas as análises experimentais existentes no presente trabalho, dispuseram-se como amigos, apoiando minha causa, apesar do curto tempo de convivência.

E a todos mais que eu não tenha citado nesta lista de agradecimentos, mas que de uma forma ou de outra contribuíram não apenas para a minha dissertação, mas também para eu ser quem eu sou.

RESUMO

Materiais hiperelásticos há muito vem sendo utilizados para construir mecanismos complexos baseados nas suas excelentes características mecânicas e de vedação. O maior problema na sua utilização é determinar suas propriedades mecânicas. Uma consequência disso é que a maioria dos projetos envolvendo elastômeros usam métodos empíricos desenvolvidos com anos de testes laboratoriais. Este fato somado ao crescente nível de exigência por componentes modernos e eficientes requerem uma melhor compreensão das suas propriedades mecânicas. Com um conhecimento específico é possível desenvolver modelos numéricos que facilitem a fase de projetos, tornando-as mais fáceis e rápidas. Baseado nesta linha de raciocínio, a presente dissertação apresenta três diferentes estudos: O primeiro, objetivando simplificar o modelo numérico de materiais elastoméricos, desenvolveu um estudo experimental e numérico de um corpo de prova do composto NBR sob tração. Variando alguns parâmetros, tais quais, a deformação inicial e a frequência de excitação, foram obtidos resultados que demonstraram a sua influência no sistema. Um segundo estudo objetivou discutir a importância dos ensaios experimentais na determinação das constantes constitutivas de materiais elastoméricos. Assim, fazendo mão de um software comercial, diversas curvas foram geradas e suas constantes constitutivas calculadas para o modelo de Yeoh. O terceiro estudo objetivou reproduzir numericamente um ensaio experimental dinâmico. Ao excitar um corpo de prova com uma função harmônica, uma curva de histerese foi gerada e em seguida um modelo numérico equivalente foi gerado a fim de reproduzir os resultados encontrados experimentalmente.

ABSTRACT

Hyperelastic materials have been used for long time to build certain kinds of components applied in simple or complex systems. Their sealing, damping, etc. characteristics allows their application on this purpose. The biggest problem in using this kind of material is to determine its mechanical properties. A consequence of this problem is that the majority of the projects involving elastomers use empirical methods, known with years of experience or with laboratorial tests. This fact added to the raising level of requirement of modern and efficient projects requires a better comprehension and characterization of their mechanical properties. Having this characterization is possible to develop numerical models that can make the faze of project faster and easier. With these concepts on mind, this study consists on three distinct developments: A first study, aiming simplify the element finite model of elastomeric components, it was carried out an experimental an numercial study of a piece of a NBR rubber under traction. Some parameters as inicial deformation and load frequencies were changed. With that, their results were compared with the objetive of determine the influence of this vaiables on the dampinf of the system. A second study aimed to discuss the importance of the laboratorial tests on the determination of the constitutive constants of elastomeric materials. This way, using a comercial software, several curves were generated and their constants were calculated to the Yeoh's constitutive model. The third study aimed to reproduce on a numerical implementation, a laboratorial dynamic test. Loading harmonically a work piece on traction, a hysteresis curve were generated. Then a numerical model were created trying to reproduce this results.

ÍNDICE

Pág.

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. OBJETIVOS DO TRABALHO	3
1.2. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	3
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	5
2.1. DEFINIÇÕES	5
2.2. ELEMENTOS DE DINÂMICA ESTRUTURAL.....	7
2.2.1. Vibrações Livres - Determinação de Modos e Frequências Naturas de Vibração	7
2.2.2. Vibrações Forçadas.....	9
2.3. TENSORES DE TENSÃO E DE DEFORMAÇÃO EM GRANDES DEFORMAÇÕES	13
2.4. VISCOELASTICIDADE	20
2.5. VISCOPLASTICIDADE	24
2.6. AMORTECIMENTO.....	25
2.7. HISTERESE.....	35
2.8. MODELOS CONSTITUTIVOS	36
2.9. TIPOS DE TESTES PARA CARACTERIZAR O COMPORTAMENTO DE MATERIAIS ELASTOMÉRICOS.....	37
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	39
4. METODOLOGIA	42
4.1. CARACTERÍSTICAS DO ABAQUS	42
4.2. CARACTERÍSTICAS DO ANSYS.....	48
4.3. PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS.....	49
5. APLICAÇÕES	50
5.1. AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA FREQUÊNCIA DA EXCITAÇÃO E DEFORMAÇÃO INICIAL NO AMORTECIMENTO DE UM CORPO DE PROVA ELASTOMÉRICO SOLICITADO A TRAÇÃO	50
5.1.1. Descrição do Modelo Físico	51
5.1.2. Descrição dos Ensaio na Mesa Vibratória.....	52
5.1.3. Resultados Experimentais obtidos na Mesa Vibratória	54
5.1.4. Descrição do Modelo Numérico	59
5.1.5. Resultados Numéricos Obtidos.....	61
5.1.6. Calibração do Modelo Numérico via Curva de Histerese.....	62
5.1.7. Discussão dos Resultados	65
5.2. ESTUDO DA SENSIBILIDADE DAS CONSTANTES DO MODELO DE YEOH.....	66

5.2.1.	Descrição dos Estudos Realizados.....	66
5.2.2.	Discussão dos Resultados dos Três Estudos Realizados.....	81
5.3.	SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO HISTERÉTICO DE UM ELASTÔMERO UTILIZANDO O SISTEMA ABAQUS	83
5.3.1.	Descrição do Estudo Realizado	83
5.3.2.	Resultados Obtidos	86
5.3.3.	Discussão dos Resultados	90
6.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	91
6.1.	CONCLUSÕES.....	91
6.2.	SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS.....	91
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	93
	APÊNDICE A – MODELOS VISCOELÁSTICOS	96
	APÊNDICE B – PUBLICAÇÕES	97

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres romanos

A	Área
A_h	Parâmetro histerético
C	Coeficiente de amortecimento
C_h	Parâmetro histerético
C_e	Matriz de amortecimento
C_{ij}	Constantes constitutivas
D	Rigidez tangencial do material
D_i	Constantes de compressibilidade
D_n	Matriz dinâmica
E	Módulo de Young
E^*	Módulo complexo de Young
E_h	Parâmetro histerético
E_L	Tensor deformação de Green-Lagrange
ER	Erro de ajuste das curvas tensão vs. deformação
F^a	Força
F	Gradiente de deformação
F_B^e	Parcela do gradiente de deformação
F_B^{cr}	Parcela do gradiente de deformação
G	Módulo cortante
G^*	Módulo complexo cortante
h	Coeficiente de amortecimento histerético
I	Matriz identidade
I_{Ei}	Invariantes de deformação
J	Função de fluência
J_{EL}	Taxa elástica de variação volumétrica
k	Rigidez
k^*	Rigidez complexa

K	Matriz de rigidez
m_i	Massa
m_h	Parâmetro histerético
M	Matriz de massa
n	Número de ciclos de amortecimento
N	Número de variáveis de um certo parâmetro
N_a	Constante que representa o comportamento viscoso de materiais viscoelásticos
S_B	Tensor tensão de Cauchy
S_h	Parâmetro histerético
t	Variável tempo
T_1	Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff
T_2	Segundo tensor de Piola-Kirchhoff
T_i^{TEST}	Tensão da curva experimental
u_i	Deslocamento na direção i
\dot{u}_i	Velocidade na direção i
\ddot{u}_i	Aceleração na direção i
U_{DEV}	Potencial de energia de deformação deviatórico
U_{VOL}	Potencial de energia de deformação volumétrico
U_P	Energia de deformação de modelos polinomiais
U_{PR}	Energia de deformação de modelos polinomiais reduzidos
U_V	Energia dissipada por ciclo
U_E	Energia potencial da mola
V	Pico da energia potencial
X	Amplitude de excitação
X_{EXP}	Valores experimentais de deformação
x_0	Amplitude inicial
x_n	Enésima amplitude
Y_{EXP}	Valores experimentais de tensão uniaxial

Caracteres gregos

α_i	Funções dos invariantes de Lagrange
δ	Decremento logarítmico
ε	Deformação uniaxial
$\dot{\varepsilon}$	Taxa de deformação uniaxial
$\dot{\varepsilon}_B^{cr}$	Taxa de deformação por fluência
ϕ	Ângulo de fase
λ_{Ei}	Estiramentos do tensor deformação de Green-Lagrange
λ_{Fi}	Estiramentos do tensor deformação de Euler
λ_B^{cr}	Estiramento na rede B
μ_0^{TEST}	Módulo cortante experimental
μ_0^{FIT}	Módulo cortante ajustado
ν	Razão de Poisson
ν^*	Razão complexa de Poisson
ω	Frequência de excitação
ω_{nn}	Frequência natural
Φ	Matriz modal
η	Fator de perda
η_e	Fator de perda relativo à E^*
η_s	Fator de perda relativo à G^*
σ	Tensão uniaxial
σ_B	Tensão efetiva
σ_{Y0}	Tensão de escoamento de viscoplasticidade
ζ	Índice de amortecimento

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Componentes fabricados em borracha.	1
Figura 2.1: Cadeias Moleculares em Materiais Viscoelásticos. Fonte: Askeland e Phulé (2005).....	6
Figura 2.2: Efeito da Vulcanização na borracha (Adaptado de Billmeyer, 1971).....	6
Figura 2.3: Discretização do contínuo para integração numérica.	12
Figura 2.4: Custo operacional entre análise implícita e explícita [Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., 1995].	13
Figura 2.5: Configurações deformada e indeformada.	13
Figura 2.6: Deslocamento relativo entre deformada e indeformada.	15
Figura 2.7: Corpo contínuo sobre o qual se definem as tensões.....	18
Figura 2.8: Cubo elementar com a decomposição das tensões.....	18
Figura 2.9: Representação das direções principais de deformação.	20
Figura 2.10: Mola e amortecedor em série - Material de Maxwell. Fonte: Flugge (1967).	21
Figura 2.11: Curvas Tensão e Deformação no tempo p/ Maxwell. Fonte: Flugge (1967).	22
Figura 2.12: Mola e amortecedor em paralelo - Material de Kelvin. Fonte: Flugge (1967).	22
Figura 2.13: Curvas Tensão e Deformação no tempo p/ Kelvin. Fonte: Flugge (1967).	24
Figura 2.14: Modelo viscoplástico de Bingham.....	25
Figura 2.15: Relação entre energia dissipada no ciclo e amortecimento histerético (Rao - 1995).....	29
Figura 2.16: Resposta de um sistema amortecido a uma excitação impulsiva.	30
Figura 2.17: Representação do método de banda de meia potência.	30
Figura 2.18: Comportamento de Materiais Viscoelásticos. Fonte: Jones (2001).	33
Figura 2.19: Influência da variação da frequência na rigidez do material.....	33
Figura 2.20: Comparação entre: a) sólido elástico perfeito, b) fluido viscoso e c) sólido viscoelástico.	34
Figura 2.21: Exemplo de uma curva de histerese característica.....	35
Figura 2.22: Curva de Mullins: a) teórica e b) experimental.	36
Figura 2.23: Deformações no ensaio de tração uniaxial.....	37
Figura 2.24: Deformações no ensaio de corte puro.....	38
Figura 5.1: Bancada de ensaios experimentais.....	51
Figura 5.2: Dimensões dos corpos de prova utilizados.	52
Figura 5.3: Sistema de controle de excitação e de aquisição de dados: a) Representação física. b) Diagrama de blocos. c) Localização do acelerômetro.	54

Figura 5.4: Comparação de resultados do sistema sem borracha \times com Borracha 1 com as três deformações iniciais (10%, 20% e 30%).	55
Figura 5.5: Comparação de resultados do sistema sem borracha \times com Borracha 2 com as três deformações iniciais (10%, 20% e 30%).	55
Figura 5.6: a) Sinal no tempo do experimento de impacto sem borracha. b) Comparação entre os decrementos logarítmicos dos três experimentos.	57
Figura 5.7: Resposta do experimento de impacto comparado com o experimento de ruído branco.	58
Figura 5.8: Transformada de Fourier da resposta do sistema sob excitação harmônica.	59
Figura 5.9: Representação das condições de contorno e da malha do modelo.	61
Figura 5.10: Comparação das resp. numérica da análise harmônica com 10% e 20% de def. inicial.	62
Figura 5.11: Imagem do ensaio realizado no CETEPO.	63
Figura 5.12: Curva de histerese gerada no CETEPO.	64
Figura 5.13: Modos e freqüências naturais para o modelo com Amortecimento Histerético.	64
Figura 5.14: Gráfico Deslocamento \times Freqüência no local do acelerômetro - 10% deformação inicial.	65
Figura 5.15: Dados experimentais de Treloar.	67
Figura 5.16: Tração uniaxial ajustado apenas com dados experimentais de tração uniaxial (Caminho 1).	68
Figura 5.17: Corte puro ajustado apenas com dados experimentais de tração uniaxial (Caminho 1).	68
Figura 5.18: Tração uniaxial ajustado com dados experimentais de tração uniaxial e corte puro (Caminho 2).	69
Figura 5.19: Corte puro ajustado com dados experimentais de tração uniaxial e corte puro (Caminho 2).	69
Figura 5.20: Ajuste das curvas perturbadas de tração uniaxial só com dados de tração uniaxial (Caminho 1).	70
Figura 5.21: Ajuste das curvas perturbadas de corte puro só com dados de tração uniaxial (Caminho 1).	70
Figura 5.22: Ajuste das curvas perturbadas de tração uniaxial com dados de tração e corte (Caminho 2).	71
Figura 5.23: Ajuste das curvas perturbadas de corte puro com dados de tração e corte (Caminho 2).	71
Figura 5.24: Constantes constitutivas de YEOH (para legenda, vide Tabela 5.11). Esferas representam o Caminho 1 e estrelas o Caminho 2.	72
Figura 5.25: Constantes constitutivas de Yeoh para Treloar.	72
Figura 5.26: Corpos de prova de tração a) e corte puro b) utilizados nos experimentos.	73
Figura 5.27: Máquina de ensaio e agarre para tração uniaxial.	73
Figura 5.28: Agarre para o ensaio de corte puro.	74
Figura 5.29: Curvas experimentais de tração uniaxial geradas no CETEPO.	75
Figura 5.30: Curvas experimentais de corte puro geradas no CETEPO.	75
Figura 5.31: Tração uniaxial ajustado apenas com dados experimentais de tração uniaxial (Caminho 1).	76

Figura 5.32: Corte puro ajustado apenas com dados experimentais de tração uniaxial (Caminho 1).	76
Figura 5.33: Tração uniaxial ajustado com dados experimentais de tração uniaxial e corte puro (Caminho 2).	77
Figura 5.34: Corte puro ajustado com dados experimentais de tração uniaxial e corte puro (Caminho 2).	77
Figura 5.35: Ajuste das curvas perturbadas de tração uniaxial apenas com dados de tração uniaxial (Caminho 1)...	78
Figura 5.36: Ajuste das curvas perturbadas de corte puro apenas com dados de tração uniaxial (Caminho 1).	78
Figura 5.37: Ajuste das curvas perturbadas de tração uniaxial com dados de tração e corte (Caminho 2)	79
Figura 5.38: Ajuste das curvas perturbadas de corte puro com dados de tração e corte (Caminho 2).	79
Figura 5.39: Constantes constitutivas de YEOH (para legenda, vide Tabela 5.15). Esferas representam o Caminho 1 e estrelas o Caminho 2.	80
Figura 5.40: Constantes constitutivas de Yeoh para composto do CETEPO.	80
Figura 5.41: Influência dos coeficientes constitutivos na curva tensão vs. Deformação para o ensaio de Corte Puro.	81
Figura 5.42: Localização no plano dos pontos dos coeficientes constitutivos.	82
Figura 5.43: Máquina de ensaios dinâmicos - CETEPO.	84
Figura 5.44: Corpo de prova adaptado para o ensaio dinâmico.	85
Figura 5.45: 1/8 do corpo de prova analisado com condições de contorno.	85
Figura 5.46: Comparação de resultados alterando as condições de contorno.	86
Figura 5.47: Determinação da área interna do ciclo de histerese experimental.	86
Figura 5.48: Influência do parâmetro S.	87
Figura 5.49: Influência do parâmetro A.	88
Figura 5.50: Influência do parâmetro m.	88
Figura 5.51: Influência do parâmetro C.	89
Figura 5.52: Ajuste da curva de histerese experimental.	89

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4.1: Relação entre módulo de bulk e módulo cortante com o coeficiente de Poisson.	45
Tabela 5.1: Dimensões da seção transversal e comprimento dos corpos de prova.	52
Tabela 5.2: Descrição dos equipamentos utilizados.....	53
Tabela 5.3: Descrição das características dos ensaios realizados.....	54
Tabela 5.4: Comparação de amortecimento dos ensaios experimentais com ruído branco.....	56
Tabela 5.5: Resultados dos índices de amortecimento.....	57
Tabela 5.6: Resultados das frequências naturais - ensaio experimental de impacto.	58
Tabela 5.7: Comparativo da análise modal entre modelo numérico e os experimentais.....	61
Tabela 5.8: Comparativo entre as frequências naturais encontradas.....	65
Tabela 5.9: Constantes constitutivas do ajuste dos dados de Treloar para o modelo de Yeoh.....	69
Tabela 5.10: Esquema das curvas perturbadas a partir dos dados experimentais.....	70
Tabela 5.11: Constantes constitutivas de Yeoh ajustadas com dados de tração e corte.	71
Tabela 5.12: Composto ensaiado no CETEPO.	73
Tabela 5.13: Constantes constitutivas do ajuste dos dados do CETEPO para Yeoh.....	77
Tabela 5.14: Esquema das curvas perturbadas a partir dos dados experimentais (CETEPO).....	78
Tabela 5.15: Constantes constitutivas de Yeoh ajustadas com dados do CETEPO Perturbados.	80
Tabela 5.16: Características do ensaio dinâmico.	84
Tabela 5.17: Parâmetros histeréticos sugeridos.	86

1. INTRODUÇÃO

É cada vez maior a utilização de componentes elastoméricos nos mais variados segmentos da indústria, gerando uma conseqüente demanda por novos compostos que satisfaçam plenamente tais aplicações. Assim, é necessário o desenvolvimento e aprovação de técnicas experimentais para o conhecimento dos seus comportamentos mecânicos. Tendo um comportamento fortemente não linear, suas propriedades de rigidez e de amortecimento variam com a amplitude da deformação e com a taxa de deformação (Haupt e Sedlan, 2001). Suas propriedades variam ainda de composto para composto, de lote de fabricação, com a umidade do ar, exposição à radiação ultravioleta, etc.



Figura 1.1: Componentes fabricados em borracha.

Ao se projetar um componente elastomérico que será exigido mecanicamente, tem-se como primeira etapa a determinação do material a ser utilizado. Isto se realiza através da sua função no conjunto, tais como, que tipo de solicitação sofrerá amplitudes de deformação, frequências das excitações impostas, severidade do ambiente, vida útil esperada, etc. Na grande maioria das aplicações, este componente não tem uma só função mecânica, sendo esta a grande dificuldade de determinar suas características, exigindo ensaios e modelagens cada vez mais elaborados e complexos.

Entre as características deste tipo de material, estão a sua quase incompressibilidade e sua elasticidade não linear, podendo inclusive sofrer grandes níveis de deformação elástica, o que os caracteriza como materiais hiperelásticos. Diversos autores realizaram estudos tentando modelar o comportamento não linear destes materiais. Em 1940, Mooney propôs um modelo hiperelástico para a modelagem do comportamento mecânico de

materiais elastoméricos, sendo este o primeiro modelo que se tem registro. Com o passar dos anos, outros tantos modelos foram gerados, sendo que alguns destes se tornaram mais conhecidos, que é o caso de Mooney-Rivlin (1951), Ogden (1972), Gent (1996) e os modelos polinomiais reduzidos de Yeoh (1990) e Arruda-Boyce (1993). Os parâmetros necessários para a utilização de qualquer um dos modelos propostos são obtidos a partir de ensaios experimentais. Estes ensaios são realizados, na maioria dos casos, segundo normalização específica, por exemplo, o ensaio de tração uniaxial baseia-se na norma ASTM D 412, o de compressão uniaxial por ASTM D575, o de cisalhamento simples pela ISO 1827 etc. Apesar disso, algumas divergências foram encontradas na determinação das velocidades de ensaio apresentadas na literatura com as das normas. Mas o grande desafio do processo está em saber qual a lei constitutiva que melhor representa o comportamento do material, já que este ajuste não é trivial. Ainda hoje, depois de várias propostas de modelos constitutivos ainda há a necessidade de muitos esforços para uma modelagem acurada e eficiente.

No entanto, softwares comerciais de elementos finitos facilitam a escolha do modelo que melhor ajusta a curva gerada experimentalmente, uma vez que, pelo menos, as relações constitutivas mais difundidas são embutidas nestes. Com isso o usuário final consegue experimentar diversas relações até que encontre a melhor delas para analisar seu problema. Uma discussão mais aprofundada sobre ensaios experimentais e sobre a performance de ajuste de diversos modelos constitutivos pode ser encontrada em Marczak, Gheller e Hoss (2006).

Os materiais elastoméricos são largamente utilizados na engenharia como absorvedores de vibrações, isto é, amortecedores, sendo esta uma de suas melhores características mecânicas. Dentro deste conceito, foram realizados ensaios experimentais não convencionais de um componente fixado a uma viga em balanço que recebia excitação em sua base engastada através de uma mesa vibratória. Através da variação de alguns parâmetros, tais como, frequência de excitação e deformação inicial do elastômero foi possível conhecer melhor o problema estudado e realizar a calibração de modelos numéricos de diferentes níveis de complexidade.

Objetivando analisar o comportamento das constantes constitutivas de alguns modelos propostos, foi realizada uma análise de sensibilidade destes. Partindo de dados experimentais convencionais de tração uniaxial e corte puro, foram obtidas tais constantes. Em um segundo momento tais curvas foram perturbadas entre $\pm 25\%$ e $\pm 20\%$ e novas constantes foram obtidas. Diversos gráficos foram gerados a fim de delimitar certa região no espaço onde se encontre o melhor grupo de constantes para o ajuste dos dados experimentais do material.

Em uma terceira e última etapa, também dentro do estudo das propriedades dinâmicas dos elastômeros, realiza-se uma exploração de um *software* comercial para a modelagem de um ensaio laboratorial dinâmico. Apesar desta terceira análise ser preliminar, ela permitiu mostrar as potencialidades do *software* para modelar este tipo de problema.

1.1. OBJETIVOS DO TRABALHO

O presente trabalho tem como objetivo geral, melhorar a compreensão sobre a geração e tratamento de dados experimentais, para uma conseqüente calibração numérica. Tendo estes objetivos alcançados, se torna possível que simulações numéricas deste tipo de material sejam realizadas com eficiência e confiabilidade.

Tomando como base o supracitado, é possível destacar os seguintes objetivos específicos:

- Realizar uma análise experimental de uma bancada de ensaios própria e calibrar a partir desta um modelo numérico simplificado;
- Estudar a sensibilidade dos parâmetros do modelo constitutivo de Yeoh na calibração deste modelo tendo em vista variações observadas nos ensaios experimentais, estabelecendo um novo ponto de vista em relação ao ajuste de curvas experimentais de materiais elastoméricos;
- Explorar as potencialidades do *software* ABAQUS em calibrar e gerar numericamente uma curva de histerese obtida experimentalmente.

1.2. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Em relação à organização e para um melhor entendimento deste trabalho apresenta-se aqui uma breve descrição de cada capítulo.

No capítulo 1 é apresentada uma introdução geral do presente estudo, trazendo ao leitor uma visão geral sobre o assunto apresentado e os objetivos deste trabalho.

No capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica, tratando em forma sumaria os conteúdos teóricos utilizados neste trabalho.

No capítulo 3 é apresentada a revisão bibliográfica, onde se discutem estudos e publicações similares ao presente trabalho.

No capítulo 4 é realizada uma breve descrição das metodologias aplicadas nesta dissertação.

No capítulo 5 são apresentadas as aplicações, isto é, o estudo propriamente dito. Este capítulo é dividido em 3 sub-itens, onde são analisadas as três implementações realizadas:

- Em 5.1 é realizada uma análise dinâmica de um componente elastomérico sob tração com o objetivo de avaliar a influência da frequência de excitação e da pré-deformação nas suas características como amortecedor. Posteriormente modelos numéricos com diferentes níveis de complexidade são implementados e calibrados;
- Em 5.2 é realizado um estudo de sensibilidade das constantes do modelo constitutivo de Yeoh. Levando em conta as perturbações dos dados experimentais que são usualmente utilizados na calibração destes modelos.
- Em 5.3, como objetivo de representar numericamente a energia dissipada por ciclo, um experimento laboratorial é gerado e calibrado com o *Software* Comercial ABAQUS.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões, bem como sugestões de futuros trabalhos.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. DEFINIÇÕES

Não há maneira de iniciar este trabalho sem que estejam claramente definidos os conceitos de polímeros, elastômeros, borrachas e vulcanização. Com base na norma ISO 1382 foi possível realizar as seguintes definições:

- Polímero: agrupamento de moléculas caracterizadas pela repetição múltipla de uma ou de várias espécies de átomos ou de grupos de átomos ligados entre si em quantidade suficiente para conferir um conjunto de propriedades que não variam de uma forma marcada por adição ou remoção de uma ou de algumas unidades constitutivas;
- Elastômero: são materiais poliméricos reticuláveis a temperaturas inferiores à sua temperatura de decomposição. São duros tipo vidro a baixas temperaturas e não são sujeitos a fluxo viscoso a altas temperaturas. Em vez disso, especialmente à temperatura ambiente, eles comportam-se de maneira “*rubber-elastic*”. Este comportamento é caracterizado pelos relativamente baixos valores de módulo de corte que são pouco dependentes da temperatura;
- Borracha: as borrachas (matéria-prima) são polímeros não reticulados, mas reticuláveis (vulcanizáveis) e que são “*rubber-elastic*” à temperatura ambiente e, dentro de certos limites, em gamas adjacentes de temperatura. A temperaturas elevadas e/ou sob a influência de forças de deformação, a borracha, matéria-prima, mostra, de modo crescente, um fluxo viscoso que a torna capaz, sob condições adequadas, de sofrer processos de modelação. A borracha (matéria-prima) é o material de partida para a manufatura de elastômeros;
- Vulcanização: a vulcanização é um processo de reticulação pelo qual a estrutura química da borracha (matéria-prima) é alterada. A mudança de estado torna o material elástico, restaura a elasticidade possuída no início pelo material ou alarga o intervalo de temperaturas em que a elasticidade é observada do princípio ao fim.

Elastômeros são, basicamente, materiais poliméricos formados por longas cadeias moleculares. Eles se caracterizam pelo seu comportamento dependente do tempo e pela dependência da tensão e deformação do histórico de carregamentos. A Figura 2.1 apresenta tais cadeias longas antes (a) e depois do processo de vulcanização (b), sendo que a grande diferença entre eles são as ligações intermoleculares formadas durante o este processo. São estas ligações que irão conferir ao material as suas principais propriedades mecânicas, tais quais sua grande capacidade de sofrer altas deformações e seu retorno elástico.

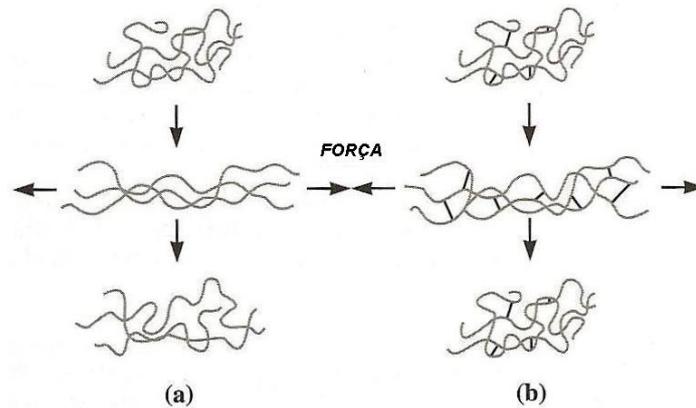


Figura 2.1: Cadeias Moleculares em Materiais Viscoelásticos. Fonte: Askeland e Phulé (2005).

O processo de vulcanização foi descoberto por Charles Goodyear em 1841 adicionando enxofre à matéria-prima aquecendo esta mistura. Mal sabia ele que estaria revolucionando a engenharia. A Figura 2.2 apresenta a diferença entre uma borracha vulcanizada e uma não vulcanizada.

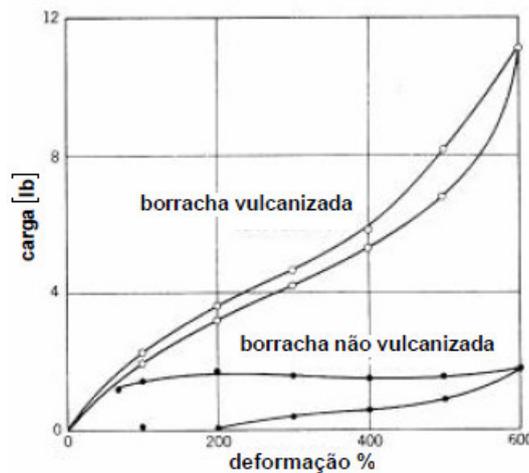


Figura 2.2: Efeito da Vulcanização na borracha (Adaptado de Billmeyer, 1971).

Importante ressaltar aqui que nem todo polímero é um elastômero, podendo ser também um termoplástico. O que diferencia estes dois materiais é a sua característica mecânica à temperatura ambiente, ou seja, um termoplástico é duro e tipo vidro a esta temperatura, enquanto que um elastômero tem um comportamento do tipo “*rubber-elastic*”, podendo serem deformados de 200% a 1000% (casos extremos) e praticamente retornarem a sua configuração indeformada. Esta característica se deve a sua formação molecular, onde cadeias poliméricas se entrelaçam. Sem este, suas moléculas estariam “desligadas” umas das outras fazendo com que o material tivesse um comportamento plástico, isto é, não retornaria a sua configuração inicial após um estiramento inicial. O que diferencia uma borracha plástica de uma elástica é o processo de vulcanização, responsável pelo anteriormente citado processo de cruzamento das longas cadeias

moleculares. Assim, um elastômero é formado pela união entre vulcanização e borracha (matéria-prima).

2.2. ELEMENTOS DE DINÂMICA ESTRUTURAL

2.2.1. Vibrações Livres - Determinação de Modos e Freqüências Naturas de Vibração

É comum em sistemas complexos de infinitos graus de liberdade, onde o modelo matemático que o representa é um sistema de equações diferenciais no domínio do tempo e do espaço, empregar técnicas de discretização, sendo a mais popular destas o método dos elementos finitos (BATHE, 1998). É possível simplificar o sistema de equações passando a ter um sistema algébrico de n graus de liberdade mantendo a dependência diferencial com o tempo. É usual apresentar este sistema de equações em forma matricial como segue:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \quad (1)$$

sendo M a matriz de massa do sistema e considerando que a mesma é diagonal quadrada de dimensões $n \times n$, onde n é o número de *GDL* do sistema. Fisicamente esta matriz representa as propriedades de inércia do sistema, ela pode ser determinada colocando-se na diagonal principal os valores da correspondente a cada *GDL*. Para um sistema discreto com n *GDL* a matriz de massa pode ser expressa por:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

A matriz de amortecimento C , quadrada com dimensão $n \times n$, representa o amortecimento do sistema. A matriz C é formada definindo-se os elementos C_{ij} , os quais podem ser obtidos impondo-se uma velocidade unitária e positiva na direção j e mede-se no nó i uma reação igual e contrária. Esses valores formarão uma matriz banda. Para um sistema com n *GDL* a matriz de amortecimento pode ser expressa de seguinte forma:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ 0 & C_{32} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

A matriz da rigidez K também possui dimensão quadrada de $n \times n$, e representa a rigidez elástica do sistema. A matriz K é formada definindo-se os elementos k_{ij} , os quais podem ser obtidos impondo-se um deslocamento unitário em j e medindo-se a força na direção i . Para um sistema com n GDL a matriz de rigidez pode ser expressa de seguinte forma:

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \quad (4)$$

O vetor deslocamento possui uma dimensão $n \times 1$, sabendo que a solução é apresentada pela expressão (5).

$$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \text{sen}(\omega_m t + \phi_n) \quad (5)$$

Realizando a derivada segunda em relação ao tempo da expressão (5), é obtido o vetor de aceleração também com dimensão $n \times 1$, conforme é apresentado na expressão (6).

$$\vec{\ddot{u}}(t) = -\omega_m^2 \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \text{sen}(\omega_m t + \phi_n) \quad (6)$$

Substituindo as equações (5) e (6) na equação do movimento (1).

$$-\omega_m^2 M \vec{C}_n \text{sen}(\omega_m t + \phi_n) + K \vec{C}_n \text{sen}(\omega_m t + \phi_n) = \vec{0} \quad (7)$$

Como $\text{sen}(\omega_m t + \phi_n) \neq 0$ para todo tempo, a equação (7) ficaria,

$$-\omega_m^2 M \vec{C}_n + K \vec{C}_n = \vec{0} \quad (8)$$

Determinando a solução não trivial, tem-se o determinante dos coeficientes da matriz igual à zero, equação (9).

$$|-\omega_m^2 M + K| = 0 \quad (9)$$

Multiplicando a expressão (9) pela inversa da matriz de massa M^{-1} , obtém-se a expressão (10).

$$|-\omega_m^2 + D_n| = 0 \quad (10)$$

Onde a matriz dinâmica é definida como $D_n = M^{-1}K$, e fazendo $\lambda = \omega_{nn}^2$ e lembrando que I é a matriz identidade, obtém-se a expressão (11).

$$|\lambda I - D_n| = 0 \quad (11)$$

Observa-se que para cada frequência natural há um vetor \vec{C}_n que fornece um modo de vibração do sistema para essa frequência. Os ω_{nn} são as frequências em que o sistema pode vibrar na ausência de excitação externa, ou seja, o sistema dinâmico definido pelas matrizes M e K pode vibrar de maneira livre em uma ou mais frequências naturais. O vetor associado a cada frequência denomina-se modo de vibração e constitui fisicamente a forma na qual o sistema vai vibrar nessa frequência.

Agrupando todos os modos de vibração de um sistema em uma matriz de maneira crescente, forma-se a matriz modal Φ , sendo que as frequências naturais são proporcionais aos autovalores e os modos de vibração para cada frequência natural estão representados pelos autovetores do sistema.

$$\Phi = [\vec{C}_1 \ \vec{C}_2 \ \dots \ \vec{C}_n] \quad (12)$$

2.2.2. Vibrações Forçadas

Neste caso vamos considerar, na equação de movimento, é aplicada também um vetor de cargas como termo independente. Dependendo de como este vetor muda no tempo, se torna mais conveniente tratar a referida equação no domínio do tempo ou no domínio da frequência.

Teorema de Preservação da Frequência

Antes de apresentar os aspectos fundamentais de trabalhar a equação de movimento no domínio da frequência, é citado um teorema aplicável nos sistemas dinâmicos lineares que é o teorema da preservação da frequência Rao[1995]. Este teorema pode ser expressado da seguinte forma:

Se, sobre um sistema linear, aplica-se uma excitação harmônica de frequência f , a resposta frente a dita excitação será harmônica. Em princípio não é possível afirmar nada sobre a amplitude e a fase da resposta, mas é possível afirmar que a resposta vai ter a mesma frequência que a excitação.

Este teorema que é facilmente demonstrável serve para verificar a linearidade de sistemas, pois quando excitado com uma função periódica, a resposta não pode ter frequências diferentes das que compõem a excitação.

Análise no Domínio da frequência

Análise no domínio da frequência é uma técnica usada para determinar o estado de resposta permanente de uma estrutura linear sob ação de um carregamento no domínio do tempo desprezando as vibrações transientes que ocorrem no início da excitação. Esta análise consiste em determinar a resposta da estrutura no domínio da frequência. Ela é preferencialmente utilizada quando a excitação é periódica.

Quando uma estrutura ou sistema linear é submetido a uma excitação periódica ou cíclica, a resposta também será cíclica e com a mesma frequência de excitação (pelo teorema de preservação da frequência supracitado). A resposta da análise no domínio da frequência prediz o comportamento dinâmico de uma estrutura, verificando assim a existência de amplificações (ressonâncias) na faixa de frequência de excitação em que a estrutura trabalhe.

Considerando a equação geral do movimento,

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + Ku = F^a \quad (13)$$

Considerando que a excitação seja harmônica (isto pode ser generalizado para excitações periódicas aplicando o princípio de superposição dos efeitos). Então F^a vai ter a forma:

$$F^a = F_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) \quad (14)$$

Na expressão (13), ω é sempre o mesmo, mas a amplitude e a fase mudam para cada termo do vetor. A solução desta equação consiste de duas partes, a função complementar, que é a solução da equação homogênea, e a solução particular. A função complementar, neste caso, é uma vibração livre amortecida. A solução particular para a equação acima é uma oscilação de estado permanente de mesma frequência ω [Hz] que a da excitação. A solução particular é mostrada pela equação (14).

$$u = \{Ue^{i\phi}\} e^{i\omega t} \quad (15)$$

onde U é a amplitude de oscilação, ω [Hz] a frequência, ϕ é a fase do deslocamento, t é o tempo e f [1/sec] frequência da excitação, sendo que $\omega = 2\pi f$. O valor da amplitude de oscilação e da fase podem ser diferentes em cada grau de liberdade da estrutura. Usando a

notação complexa na equação (14) se apresenta a solução do problema em forma compacta, que se pode escrever como segue:

$$\{u\} = \{U (\cos \phi + i \text{sen} \phi)\} e^{i\omega t} \quad (16)$$

Esta última expressão (15) pode ser expressa também como:

$$\{u\} = (U_1 + i\{U_2\}) e^{i\omega t} \quad (17)$$

O vetor de forças pode ser definido analogamente como se mostra a continuação na equação (17).

$$\{F^a\} = \{F_{\max} e^{i\phi}\} e^{i\omega t} \quad (18)$$

Em forma análoga a como tratamos o deslocamento temos agora a equação (18) reescrita como:

$$\{F^a\} = (F_1 + i\{F_2\}) e^{i\omega t} \quad (19)$$

ou pela Equação (19):

$$\{F^a\} = \{F_{\max} (\cos \phi + i \text{sen} \phi)\} e^{i\omega t} \quad (20)$$

onde F_{\max} é a amplitude da força máxima, ϕ é o ângulo de fase, ω é a frequência, t é o tempo.

Substituindo as equações (17), (19) na equação (12).

$$(-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K]) (\{U_1\} + i\{U_2\}) e^{i\omega t} = (\{F_1\} + i\{F_2\}) e^{i\omega t} \quad (21)$$

Observa-se que na expressão (21), pode-se cancelar o fator $e^{i\omega t}$ por aparecer em ambos os lados da equação. Sendo então possível achar o vetor de deslocamentos complexo quando atua sobre o sistema uma excitação harmônica de uma determinada frequência ω .

Este tipo de análise foi utilizado na primeira aplicação apresentada no Capítulo 5.

Análise no Domínio do Tempo

Outra maneira de resolver as equações de movimento é através da integração direta no tempo. Desta forma, são mais facilmente tratadas quando a equação é não linear. Sendo este método baseado na determinação dos deslocamentos nodais em um dado instante $(t + \Delta t)$, a partir do conhecimento dos deslocamentos dos instantes anteriores $(t - \Delta t)$ e (t) . Em princípio, duas considerações são importantes na implementação deste tipo de integração numérica:

- A equação de equilíbrio dinâmico incluindo todos os efeitos de forças restitutivas (elásticas por exemplo), de inércia e as dissipativas por (amortecimento por exemplo) é satisfeita somente em alguns instantes discretos do intervalo que ocorre o fenômeno dinâmico, onde tais instantes estão separados por intervalos de tempo (Δt). Ou seja, além de discretizar o corpo contínuo em uma malha de pontos, o fenômeno do tempo também é particionado.
- Dentro de cada intervalo de tempo, portanto entre dois instantes consecutivos, é assumida uma lei de variação para os deslocamentos, velocidades e acelerações nodais, conforme Figura 2.3.

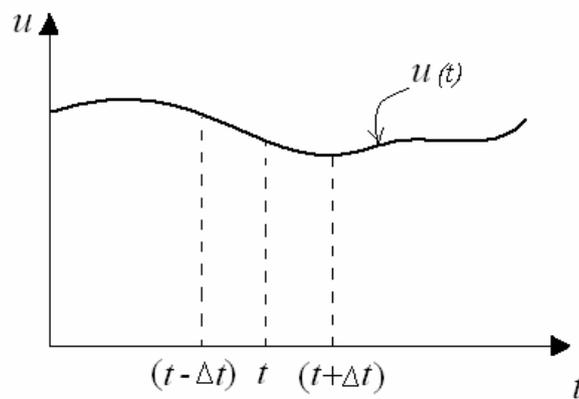


Figura 2.3: Discretização do contínuo para integração numérica.

Existem dois tipos de métodos utilizados para realizar esta integração, sendo eles os métodos implícitos e os explícitos.

A principal característica dos métodos de solução implícitos está no fato de as acelerações e velocidades serem resolvidas em $(t + \Delta t)$ para posteriormente serem substituídas na equação de movimento. Um dos problemas desta aplicação é que cada iteração da análise implícita requer a solução simultânea das equações para os elementos do problema [Hibbit et al., 1995]. Sendo assim, o custo computacional aumenta com o número de graus de liberdade analisados. O método mais eficiente entre os métodos implícitos é o método de Newmark.

A principal característica dos métodos de solução explícitos está no fato de as acelerações e velocidades serem resolvidas no tempo presente t , para então serem substituídas na equação de movimento. Ou seja, os deslocamentos calculados para o tempo $(t + \Delta t)$ são obtidos em função dos valores conhecidos no tempo t . O que torna o método barato computacionalmente é que a fatorização da matriz de rigidez na solução passo a passo não é requerida, o que permite também resolver problemas com matrizes mal condicionadas que

possuam movimento de corpo rígido. O método é condicionalmente estável, pois converge para intervalos de integração menores que um determinado valor crítico, podendo este ser aproximado, no caso de sistemas lineares, por:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (22)$$

onde ω_{\max} é a frequência natural mais alta obtida.

A Figura 2.4 apresenta a comparação entre os custos computacionais de ambas as análises levando em consideração os graus de liberdade do problema estudado.

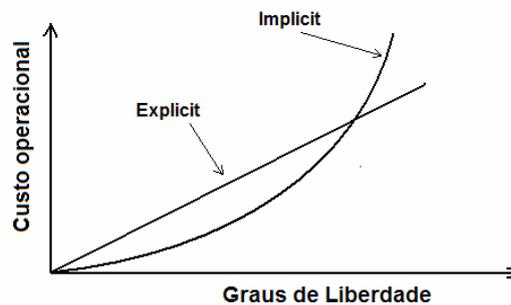


Figura 2.4: Custo operacional entre análise implícita e explícita [Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., 1995].

Nas análises realizadas no capítulo 5 será utilizado o esquema de integração direta utilizando a análise implícita tanto na primeira como na terceira aplicação.

2.3. TENSORES DE TENSÃO E DE DEFORMAÇÃO EM GRANDES DEFORMAÇÕES

Trabalhando com grandes deformações, se faz necessário definir as posições deformada e indeformada de um corpo. Observando a Figura 2.5, observa-se que os vetores deformação das configurações deformada e indeformada são:

$$X = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3 \quad (23)$$

$$x = xe_1 + ye_2 + ze_3 \quad (24)$$

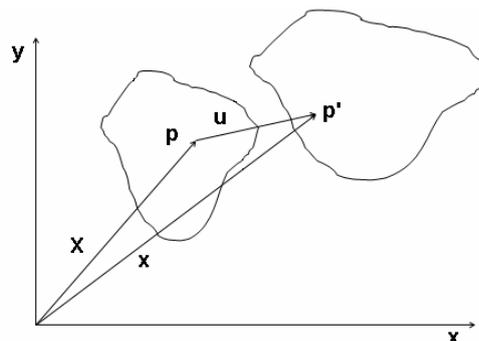


Figura 2.5: Configurações deformada e indeformada.

Assim, o vetor deslocamento de um ponto genérico p do corpo após a sua deformação é representada pelo vetor \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = ue_1 + ve_2 + we_3 = (X - x)e_1 + (Y - y)e_2 + (Z - z)e_3 = (X - x) \quad (25)$$

onde e_1, e_2, e_3 são os versores do sistema de coordenadas cartesiano adotado e $u, v, w, X, Y, Z, x, y, z$ são as componentes dos vetores \mathbf{u}, \mathbf{X} e \mathbf{x} respectivamente.

Partindo da observação experimental de que ao se aplicar forças sobre um meio contínuo, aparecem tensões levando o corpo para uma configuração diversa, ou seja, surge um campo de deslocamentos para cada partícula do corpo. Sabe-se que a inversa não é sempre verdadeira, podendo surgir um campo de deformações sem que surjam tensões interiores. Em um movimento de corpo rígido por exemplo, não é possível relacionar em forma direta as tensões com os deslocamentos, sendo necessária a utilização de outra grandeza, a deformação.

Assim, para se definir uma métrica de deformação, seria desejável que algumas condições fossem satisfeitas, tais como:

- As deformações sejam nulas se o corpo se mover como rígido;
- Os valores das deformações possam se organizar em uma matriz simétrica de 3×3 para poder relacioná-la com as tensões;
- Que representem extensões e distorções que são as duas formas principais de deformação.

É possível agora definir a matriz F como segue:

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \quad (26)$$

onde se verifica que o determinante de F nada mais é que a razão entre a variação de volume do corpo deformado e indeformado. Ou seja, com movimento de corpo rígido, não há variação de volume, assim, o determinante de F é igual a matriz identidade.

De forma simplificada, é possível afirmar que a deformação é a parte da transformação de um corpo que não representa o movimento de corpo rígido. Para tanto, bastaria apenas medir o deslocamento relativo entre dois pontos do corpo contínuo. A Figura 2.6 representa esta definição através dos pontos p e q contra p' e q' nas situações indeformada e deformada respectivamente.

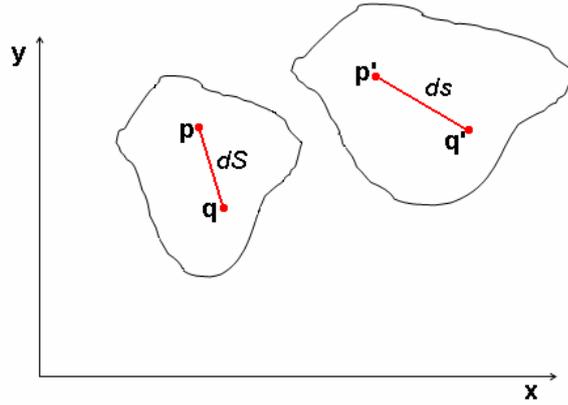


Figura 2.6: Deslocamento relativo entre deformada e indeformada.

Desta forma, observa-se que o quadrado das distâncias entre os dois p e q pontos será, na configuração indeformada, dado pela seguinte expressão:

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dx^T (F^{-T} F^{-1}) dx = dx^T (F^T F)^{-1} dx = dx^T B dx \quad (27)$$

e na configuração deformada:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dX^T (F^T F) dX = dX^T G dX \quad (28)$$

onde o tensor $B = (F^T F)^{-1}$ é chamado de tensor deformação de Cauchy Green à Esquerda que relaciona dS com ds e $G = (F^T F)$ é chamado de tensor deformação de Cauchy Green à Direita que relaciona ds com dS . Estes dois tensores são simétricos, mas não cumprem a condição de serem nulos no caso de deslocamentos de corpo rígido. Neste caso se verifica que $B = G = I$. Para borrachas, o tensor utilizado é o de Cauchy Green a Direita (G).

Buscando encontrar relações que se anulem com movimentos de corpo rígido, é possível escrever:

$$ds^2 - dS^2 = dx^T dx - dX^T dX = dX^T (F^T F - I) dX = dX^T (2E_{GL}) dX \quad (29)$$

onde E_{GL} é o tensor deformação de Green Lagrange e representa a variação do comprimento de um segmento com relação ao seu comprimento inicial. Verifica-se também que:

$$G = I + 2E_{GL} \quad (30)$$

Procedendo de forma análoga:

$$ds^2 - dS^2 = dx^T dx - dX^T dX = dx^T (I - F^{-T} F^{-1}) dx = dx^T (2E_A) dx \quad (31)$$

onde E_A é o tensor deformação de Almansi. Verifica-se ainda que:

$$B = I + 2E_A \quad (32)$$

Reescrevendo estes tensores em função do vetor de deslocamentos u , temos:

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial (X + u)}{\partial X} = I + \frac{\partial u}{\partial X} \quad (33)$$

$$B = \left(I + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(I + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \quad (34)$$

$$G = \left(I + \frac{\partial u}{\partial X} \right)^T \left(I + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \quad (35)$$

$$E_A = \frac{1}{2}(B - I) = \frac{1}{2} \left(\left(I + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(I + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T - I \right) \quad (36)$$

$$E_{GL} = \frac{1}{2}(G - I) = \frac{1}{2} \left(\left(I + \frac{\partial u}{\partial X} \right)^T \left(I + \frac{\partial u}{\partial X} \right) - I \right) \quad (37)$$

Reescrevendo agora fazendo mão de notação indicial:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (38)$$

$$B_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \quad (39)$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \quad (40)$$

$$E_{A_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \quad (41)$$

$$E_{GL_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \right) \quad (42)$$

Estas são as quatro definições das medidas de deformações utilizadas segundo a aplicação em diferentes formulações da mecânica do contínuo. Sobre elas podem ser realizadas as seguintes observações:

- Para deformações infinitesimais, os termos de ordem superior podem ser desconsiderados. Assim:

$$B_{ij} = G_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} = 1 + 2\varepsilon_{ij} \quad (43)$$

$$E_{A_{ij}} = E_{GL_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \varepsilon_{ij} \quad (44)$$

onde ε_{ij} é o tensor deformação de Cauchy utilizado como medida de deformação no caso de deformações infinitesimais.

- Sendo tensores, as equações definidas devem seguir algumas regras matemáticas:
 - Rotacionando o sistema de referência e transformando o tensor em uma matriz diagonal, sabe-se que os valores da diagonal principal são os autovalores da matriz;
 - É possível definir os tensores pelos seus invariantes escalares. Assim, para um tensor de segunda ordem A_{ij} genérico, definimos seus invariantes como:

$$I_1 = A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad (45)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{33} & A_{31} \\ A_{13} & A_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \quad (46)$$

$$I_3 = |\mathbf{A}| \quad (47)$$

- Para uma barra longa solicitada a tração temos as seguintes medidas de deformação:

$$B_{11} = \left(\frac{L_0}{L} \right)^2 \quad (48)$$

$$G_{11} = \left(\frac{L}{L_0} \right)^2 \quad (49)$$

$$E_{A11} = \frac{(L - L_0)}{L} \quad (50)$$

$$E_{GL11} = \frac{(L - L_0)}{L_0} \quad (51)$$

onde L e L_0 são o comprimento do corpo deformado e indeformado respectivamente. Em caso de deformações infinitesimais, temos:

$$\varepsilon_{11} = E_{A11} = E_{GL11} = \frac{(L - L_0)}{L_0} \quad (52)$$

$$B_{11} = G_{11} = 1 + 2 \frac{(L - L_0)}{L_0} \quad (53)$$

Para definir as medidas de tensão, primeiramente considera-se um meio material contínuo A ocupando um volume espacial conforme apresentado na Figura 2.7. Imagina-se uma superfície fechada S e deseja-se expressar a interação do meio material externo sobre o seu meio material interno. Esta interação se manifesta, do ponto de vista mecânico, através de forças de volume e forças de superfície. Admite-se aqui esta interação ocorre apenas devido as forças de superfície, de onde postula-se o princípio das tensões de Euler. Tendendo a superfície a zero, temos a seguinte relação:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta S} = \vec{T} \quad (54)$$

onde \vec{T} é o vetor tensão no ponto P sobre a superfície da normal externa n .

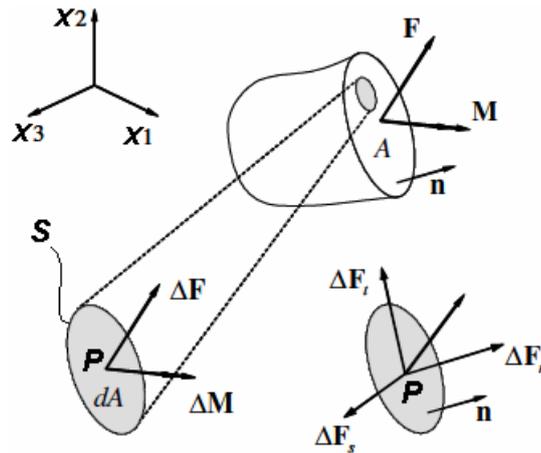


Figura 2.7: Corpo contínuo sobre o qual se definem as tensões.

Considerando agora, nas vizinhanças de um ponto P de um meio contínuo, um paralelepípedo elementar com faces paralelas aos planos coordenados conforme Figura 2.8.

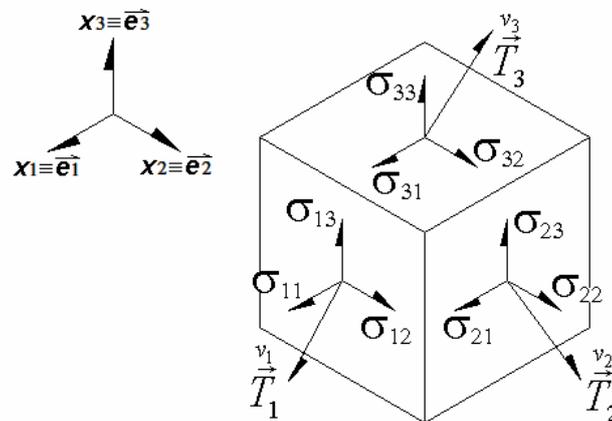


Figura 2.8: Cubo elementar com a decomposição das tensões.

Considera-se aqui que as faces direcionadas no sentido positivo dos eixos cartesianos se denominam faces positivas e aquelas que são direcionadas no sentido negativo destes eixos denominam-se faces negativas. Sobre as faces positivas temos os vetores tensão

\vec{T}_1 , \vec{T}_2 e \vec{T}_3 , que decompostos resultam em:

$$\vec{T}_1 = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3 \quad (55)$$

$$\vec{T}_2 = \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3 \quad (56)$$

$$\vec{T}_3 = \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3 \quad (57)$$

Matricialmente temos:

$$\vec{T}_i = \sigma_{ij}\vec{e}_j + \sigma_{ij}\vec{e}_j + \sigma_{ij}\vec{e}_j \quad (58)$$

onde as nove quantidades σ_{ij} se denominam as componentes do tensor tensão no ponto considerado.

Na formulação apresentada, dependendo da área sobre a qual a tensão é medida (deformada ou indeformada) vamos poder definir as diferentes formas do tensor tensão. Assim, temos um tensor simétrico, que gera grande vantagem na simplificação das relações constitutivas, conhecido como tensor tensão de Cauchy. Este tensor é gerado a partir da configuração indeformada tanto de sua área como das forças atuantes. Já no tensor de Piola Kirchoff de segunda espécie, a variação das forças atuantes é medida a partir da configuração deformada do corpo. Já a sua área é referenciada com a o corpo indeformado. Temos assim:

$$T_1 = \det(F) F^{-1} \sigma \quad (59)$$

$$T_2 = \det(F) F^{-1} \sigma F^{-T} \quad (60)$$

onde T_1 e T_2 são os tensores de primeira e segunda espécie de Piola Kirchoff. Para deformações muito pequenas, os valores destes tensores tendem a convergir.

Outra maneira de descrever as tensões existentes em um material elástico isotrópico não linear através do segundo tensor tensão de Piola Kirchoff foi apresentado por Zohdi [2007].

$$T_2 = \alpha_0 \cdot I + \alpha_1 \cdot E_L + \alpha_2 \cdot E_L^2 \quad (61)$$

onde T_2 é o segundo tensor de Piola Kirchoff, E_L é o tensor deformação de Green-Lagrange, I é a matriz identidade e α_i são funções dos invariantes do tensor de deformações de Lagrange I_{E1} , I_{E2} e I_{E3} . Estes invariantes são determinados unicamente através dos estiramentos principais λ_{Fi} do tensor deformação de Euler que representam as deformações nas três direções principais conforme Figura 2.9. Assim:

$$I_{E1} = \lambda_{E1} + \lambda_{E2} + \lambda_{E3} \quad (62)$$

$$I_{E2} = \lambda_{E1} \cdot \lambda_{E2} + \lambda_{E2} \cdot \lambda_{E3} + \lambda_{E1} \cdot \lambda_{E3} \quad (63)$$

$$I_{E3} = \lambda_{E1} \cdot \lambda_{E2} \cdot \lambda_{E3} \quad (64)$$

Os autovalores deste tensor representam os estiramentos principais:

$$\lambda_{E1} = \frac{1}{2} \cdot ((\lambda_{F1})^2 - 1), \quad \lambda_{E2} = \frac{1}{2} \cdot ((\lambda_{F2})^2 - 1), \quad \lambda_{E3} = \frac{1}{2} \cdot ((\lambda_{F3})^2 - 1) \quad (65)$$

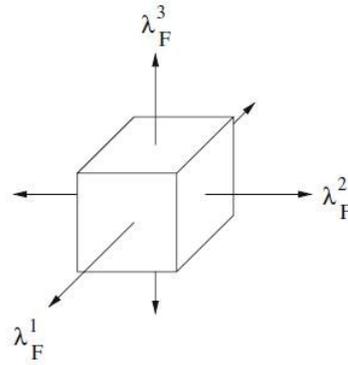


Figura 2.9: Representação das direções principais de deformação.

Desta forma o tensor gradiente de deformação F , quando esta se referindo às suas direções principais é:

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{F3} \end{pmatrix} \quad (66)$$

onde $\lambda_{Fi} = l_{fi}/l_{0i}$ (sendo l_{fi} o comprimento deformado na direção i e l_{0i} o comprimento inicial na direção i).

A forma clássica de relacionar a tensões e deformações em materiais hiperelásticos não é a apresentada em 2.3. Este se dá a partir da derivada da função de energia de deformação. É sobre esta formulação clássica que se derivam os modelos constitutivos. Na seção 4.1 serão assim apresentadas.

2.4. VISCOELASTICIDADE

A viscoelasticidade é uma característica dos materiais que tem um comportamento intermediário entre os linearmente elásticos governados pela lei de Hooke (equação 67) e o comportamento dos corpos fluidos idealmente viscosos governados pela lei de Newton (equação 68):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (67)$$

onde ε é a deformação e a constante E é o módulo de Young. Fisicamente, este comportamento pode ser representado por uma mola.

$$\sigma = N_a \cdot \dot{\varepsilon} \quad (68)$$

onde $\dot{\varepsilon}$ representa a primeira derivada da deformação em relação ao tempo, e N_a expressa o comportamento viscoso do material. Fisicamente este comportamento pode ser considerado como um amortecedor.

Os materiais existentes na natureza não seguem uma regra única de comportamento mecânico. Desta maneira, se faz necessário agrupar diferentes modelos de materiais ideais a fim de aproximar ao máximo o comportamento de um material mais complexo. Assim, combinando estes materiais ideais, isto é, molas e amortecedores, das mais diferentes formas, é possível desenvolver equações constitutivas que permitam prever o comportamento viscoelástico existente na natureza. Diversos modelos reológicos são apresentados no APÊNDICE A.

Dos diversos comportamentos viscoelásticos possíveis, são explicados a seguir os mais conhecidos que são os modelos de Maxwell e Kelvin.

O modelo de Maxwell, ou Fluido de Maxwell, é formado por uma mola e um amortecedor ligados em série. Através da Figura 2.10, é possível perceber que, ao aplicar uma carga “P” no sistema, a deformação total do mesmo nada mais é que a soma das deformações individuais de cada um dos elementos ϵ' e ϵ'' . Desta forma, fica clara a validade da equação 69 ao diferenciá-la e introduzir $\dot{\epsilon}'$ e $\dot{\epsilon}''$:

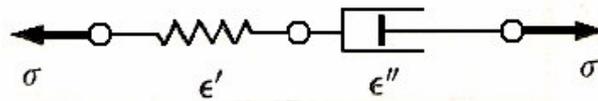


Figura 2.10: Mola e amortecedor em série - Material de Maxwell. Fonte: Flugge (1967).

$$\epsilon = \epsilon' + \epsilon'' \rightarrow \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{N_a} = \dot{\epsilon}' + \dot{\epsilon}'' = \dot{\epsilon} \rightarrow \dot{\sigma} + \frac{E}{N_a} \sigma = E \cdot \dot{\epsilon}(t) \quad (69)$$

Para se entender o significado físico desta equação, faz-se necessário reproduzir um ensaio de relaxação, ou seja, estudar a variação da tensão sob uma deformação constante. Desta forma, em um primeiro estágio, isto é, em $t = 0$, se aplica uma tensão constante $\sigma = \sigma_0$ ao sistema e se pergunta o que acontece com a sua deformação. Assim, para $0 < t < t_1$, a tensão $\sigma = \sigma_0$ é toda absorvida pela mola, isto é, neste estágio o amortecedor não “teve tempo suficiente” para iniciar seu trabalho. Como o comportamento da mola é linear, a sua deformação tem um valor inicial $\epsilon = \epsilon_0$ para $t = t_0$, crescendo linearmente até um valor $\epsilon = \epsilon_1$ para $t = t_1$. Em um segundo estágio que começa em $t = t_1$, a deformação é fixada em um valor $\epsilon = \epsilon_1$ e pergunta-se o que acontece com a tensão neste momento. Assim, conforme o tempo t cresce, o amortecedor começa a ter efeito, absorvendo parte da tensão aplicada pela mola. A forma em que a mola vai se descarregando é exponencial e determinada através do chamado módulo de relaxação $E(t)$ do material. Este módulo, por sua vez, nada mais é que a razão entre o resultado

da equação diferencial (equação 33) para $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$ e a deformação inicial ε_0 . Assim, a solução da equação 69 nos fornece:

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{E}{N_a} \cdot t\right) \quad (70)$$

Resultando em:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E \cdot \exp\left(-\frac{E}{N_a} \cdot t\right) \quad (71)$$

A Figura 2.11 apresenta as curvas $\sigma \times t$ e $\varepsilon \times t$ para este modelo.

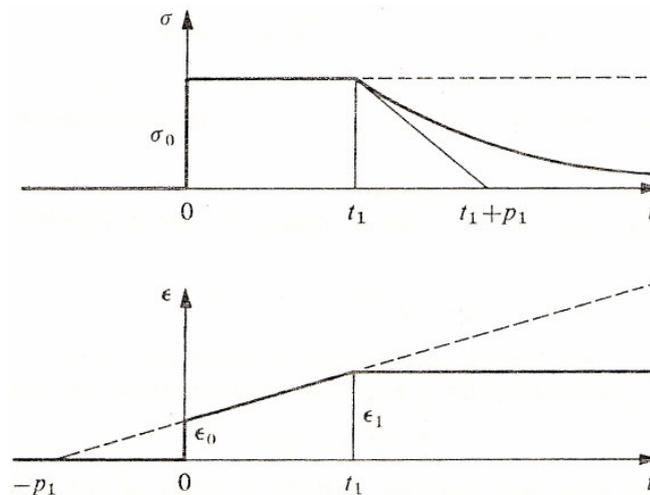


Figura 2.11: Curvas Tensão e Deformação no tempo p/ Maxwell. Fonte: Flugge (1967).

No primeiro estágio, quando ε cresce sob tensão constante, ocorre o fenômeno de fluência. No segundo estágio, quando a σ decresce sob deformação constante, ocorre o fenômeno de relaxação do material. Se a fase de fluência fosse estendida além de $t = t_1$, a deformação iria crescer infinitamente. Na realidade isso poderia ocorrer apenas em fluidos, justificando assim a denominação do modelo, isto é, Fluido de Maxwell.

O modelo de Kelvin, por sua vez, foi desenvolvido considerando que a mola e o amortecedor acima listados estariam ligados em paralelo (Figura 2.12).

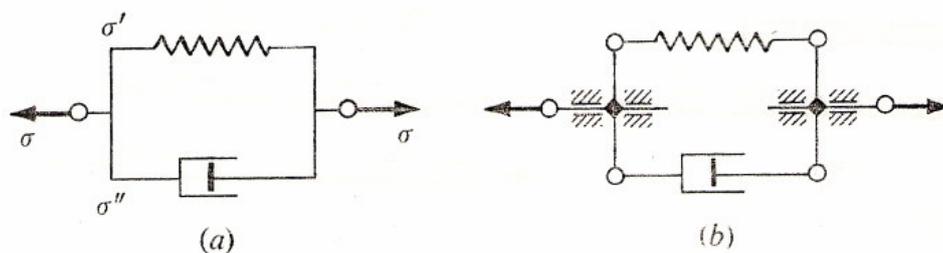


Figura 2.12: Mola e amortecedor em paralelo - Material de Kelvin. Fonte: Flugge (1967).

Isso nos sugere que, ao se aplicar uma tensão ao sistema, esta teria de ser absorvida pelos dois elementos, sendo esta tensão igual à soma das tensões em cada um dos elementos (levando em consideração que as deformações em ambos os elementos são idênticas, independente das condições destes). A equação 72 a apresenta:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = E \cdot \varepsilon + N_a \cdot \dot{\varepsilon} \rightarrow \frac{\sigma(t)}{N_a} = \frac{E}{N_a} \cdot \varepsilon + \dot{\varepsilon} \quad (72)$$

Para se entender o significado físico desta equação, faz-se necessário reproduzir um ensaio de fluência, ou seja, estuda-se o comportamento das deformações ao se aplicar uma tensão constante. Desta forma, em um primeiro estágio, para $t = t_0$, a tensão salta de zero para $\sigma = \sigma_0$, se mantendo constante até $t = t_1$. Como as deformações de ambos os elementos tem de ser idênticas, ε não pode crescer abruptamente, pois é restringido por $\dot{\varepsilon}$. Assim, a deformação tem um crescimento exponencial limitado pela abertura do amortecedor. O comportamento exponencial da deformação é representado pela função de fluência deste material. A função de fluência $J(t)$ é gerada a partir da razão entre a solução da equação diferencial (equação 72) com condição inicial de $\varepsilon(t=0) = 0$ e a tensão inicial σ_0 aplicada ao sistema. Assim, a solução da equação 72 nos fornece $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{E}{N_a} \cdot t\right) \right) \quad (73)$$

Resultando em:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{E}{N_a} \cdot t\right) \right) \quad (74)$$

Em um segundo momento, isto é, para $t > t_1$, a deformação é fixada em $\varepsilon = \varepsilon_1$ e se pergunta o que acontece com a tensão. Já que a deformação não está mais variando, isto é, $\dot{\varepsilon} = 0$, o amortecedor não possui mais parcela alguma de tensão, sendo ela apenas armazenada como energia potencial da mola. A Figura 2.13 apresenta as curvas $\sigma \times t$ e $\varepsilon \times t$ para este modelo.

Neste modelo, a fase de relaxação ocorre subitamente em $t = t_1$ quando a deformação é fixada. Já a fase de fluência, diferentemente do modelo de Maxwell, tende a um limite de deformação que é proporcional a tensão aplicada ao sistema. Sendo este um comportamento similar ao de um sólido elástico, o modelo de Kelvin é também conhecido como Sólido de Kelvin.

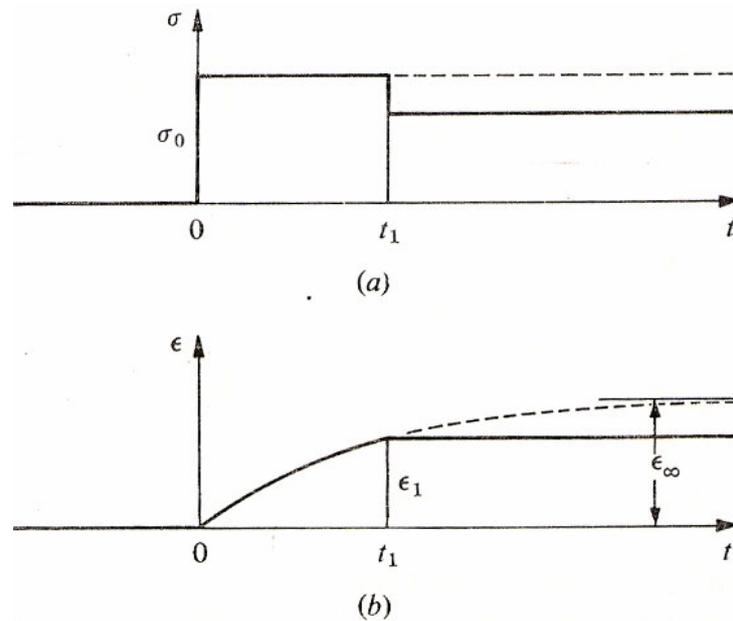


Figura 2.13: Curvas Tensão e Deformação no tempo p/ Kelvin. Fonte: Flugge (1967).

2.5. VISCOPLASTICIDADE

A viscoplasticidade é uma característica presente em algumas aplicações muito específicas da engenharia, entre elas na conformação de metais a altas temperaturas ou em problemas que envolvem certos tipos de polímeros. Seu comportamento nada mais é que adicionar uma dependência do tempo na plasticidade clássica. Enquanto esta teria deformações apenas acima de certo valor de tensão, aquela o faria antes de alcançado este limite, mas adicionando a variável tempo na equação.

Desta maneira, o comportamento viscoplástico é formado pela combinação entre uma componente viscosa e outra rígido-plástica. O elemento viscoso é representado pela equação 31 apresentada no tópico 2.4. Já o elemento rígido-plástico pode ser representado por um corpo que não se deforma para uma tensão inferior a σ_{y0} . Uma analogia ao modelo viscoelástico de Kelvin foi desenvolvida por Bingham (1922) (Figura 2.14). As tensões deste modelo podem ser representadas pela equação 75:

$$\sigma = \sigma_{y0} + N_a \cdot \dot{\epsilon} \quad (75)$$

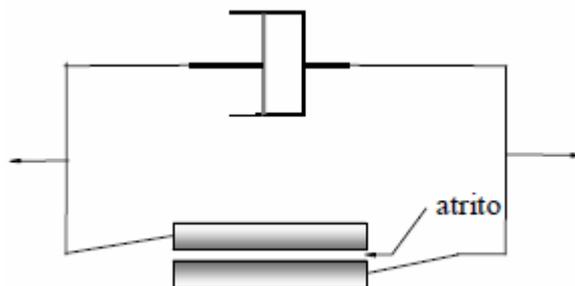


Figura 2.14: Modelo viscoplástico de Bingham.

2.6. AMORTECIMENTO

Crandall (1975) define o amortecimento como a retirada de energia de um sistema vibrante, que pode ser transmitida para fora do sistema através de mecanismos de radiação ou pode ser dissipada internamente. Para um sistema vibrante livre a perda de energia devido ao amortecimento provoca o decaimento das amplitudes de vibrações, ou seja, há uma atenuação nas conversões de energias cinéticas para potenciais e vice-versa de um ciclo para o ciclo seguinte.

O amortecimento é um fenômeno físico difícil de ser trabalhado devido aos seus complexos mecanismos de dissipação, bem como da influência exercida sobre o meio no sistema vibrante. Dentre os fatores mais importantes na análise de sistemas amortecidos, é possível citar a frequência de excitação, o tipo de material empregado, a pré-carga aplicada e, dependendo do tipo de material, considera-se também a umidade e o envelhecimento.

A fim de modelar melhor os diversos mecanismos de amortecimento existentes, vários modelos matemáticos foram desenvolvidos e propostos. A seguir são apresentados alguns:

- *Amortecimento devido ao meio – amortecimento não material*

Uma estrutura, quando submetida a alguma excitação, tem sua resposta a ela dependente do meio que a circunda, podendo ser um meio sólido, fluido ou forças de campo. Ou seja, ela é diretamente dependente da sua interação com o meio. O que irá definir o nível de amortecimento é a forma desta interação.

Estando uma estrutura imersa em um meio gasoso, por exemplo, uma pequena energia será dissipada, sendo esta modelada através das suas forças reativas. Em um contexto geral, este tipo de amortecimento influencia pouco na resposta de um sistema vibrante devido a baixa quantidade de energia dissipada por ciclo, sendo muitas vezes desprezada nas modelagens.

A energia dissipada através do atrito entre duas superfícies, por sua vez, é bem eficaz e está presente na maioria das aplicações. Conhecido como atrito seco ou de Coulomb, sua intensidade depende das características do par de superfícies em contato, bem como da força normal a elas imposta.

- *Amortecimento inerente ao material*

Neste tipo de mecanismo de amortecimento, a energia dissipada por ciclo é gerada através de seu volume. Ou seja, iterações elétricas, magnéticas e mecânicas oriundas dos movimentos atômicos e moleculares ocasionados na deformação dos corpos. Este amortecimento é quantificado através de um parâmetro denominado fator de perda, que é determinado através da razão entre a energia dissipada por ciclo e a sua densidade de volume. Cada material possui características particulares quanto a sua propriedade de dissipar energia, sendo esta muito pequena para materiais estruturais como aço e alumínio e consideravelmente maiores para elastômeros.

Existem hoje diversos tipos de materiais com diversas características de amortecimento que são basicamente divididos em três categorias. Uma delas são as ligas de alto amortecimento que vem sendo desenvolvidas principalmente para a indústria espacial. Materiais compósitos que possuem baixo amortecimento e dificuldade de modelagem. Materiais viscoelásticos que possuem grande capacidade de amortecimento interno, podendo ser aplicados sob diversas condições em diversos ambientes.

Aplicações dinâmicas exigem sistemas atenuadores. É de fundamental importância discutir nesta etapa os diversos tipos de amortecedores empregados atualmente na indústria.

- *Amortecedores de fluido viscoso*

Este tipo de amortecedor se baseia na passagem de fluido através de orifícios. Desta maneira, o amortecimento dependerá da viscosidade do fluido. Sendo este um fluido newtoniano, a força reativa será diretamente proporcional à velocidade instantânea do fluido nos orifícios.

- *Amortecedores de atrito seco*

São dispositivos que dissipam energia através do atrito entre duas superfícies sobrepostas e em contato. Seu funcionamento e eficiência dependem das características das superfícies em contato, bem como da força normal que as une. Ao receber uma força maior que a força de atrito, haverá deslocamento relativo entre as peças gerando dissipação de energia. Esta família de amortecedores foi desenvolvida no trabalho de dissertação de mestrado realizado por Letícia F. F. Miguel (Miguel, 2002) no programa de pós-graduação em engenharia civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – CPGEC.

- *Amortecedores de metal*

Tais amortecedores funcionam acima do limite de escoamento do material utilizado. Ou seja, a energia dissipada ocorre na plastificação do material. Caso este limite não seja alcançado, o retorno elástico do material devolverá a energia potencial absorvida. Materiais comumente utilizados são aços de baixa liga ou chumbo. Oscar Curadelli (Curadelli, 2001), como parte da sua tese de doutorado, desenvolveu amortecedores metálicos de chumbo para implementação em um pórtico e para análises numéricas.

- *Amortecedores Viscoelásticos*

Materiais viscoelásticos se caracterizam por apresentarem propriedades viscosas e elásticas, tendo uma grande capacidade de dissipação de energia. Neste tipo de amortecedores, tais materiais, ao deformarem-se, dissipam energia vibratória causando amortecimento do equipamento ou estrutura. Suas propriedades de rigidez e amortecimento são representados pela rigidez complexa $k^* = k \cdot (1 + i\eta)$, onde k é a rigidez e η é o fator de perda do material. Estes parâmetros devem ser cuidadosamente estudados, já que podem variar juntamente com os parâmetros de aplicação.

Assim, o fator de perda η , também conhecido como fator de amortecimento, é definido como a razão entre a energia dissipada por ciclo e o pico de energia potencial (ou a máxima quantidade de energia armazenada durante o ciclo) conforme a equação 76.

$$\eta = \frac{U_v}{2 \cdot \pi \cdot V} \quad (76)$$

onde U_v é a energia dissipada por ciclo, V é o pico de energia potencial, e η é o fator de perda.

Mais precisamente, pode-se dizer que este fator é diretamente relacionado com a energia dissipada num ciclo de histerese através da área compreendida em sua curva. Considerando que o amortecimento é viscoso, passam a existir forças viscosas $C \cdot \dot{x}$ relativas ao amortecedor, onde a amplitude de oscilação $x(t) = X \cdot \cos(\omega \cdot t)$ para um problema dinâmico (Vide Figura 2.15). Ao derivar esta expressão, chega-se a $\dot{x} = i \cdot \omega \cdot X$ e $dx = \dot{x} \cdot dt$. Agrupando estes termos, é possível montar a integral para o cálculo da área da curva de histerese através da equação 77:

$$U_V = \oint_{\text{ciclo}} C \cdot \dot{x} \cdot dx = \int_0^{2\pi/\omega} C \cdot (i \cdot \omega \cdot X) \cdot (i \cdot \omega \cdot X \cdot dt) = \int_0^{2\pi/\omega} -C \cdot (\omega^2) \cdot X^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) \cdot dt \quad (77)$$

que quando resolvida nos fornece a energia dissipada em cada ciclo, ou a área interna da curva de histerese através da equação 78:

$$U_V = C \cdot X^2 \cdot \omega \cdot \pi \quad (78)$$

onde C é o coeficiente de amortecimento histerético, ω é a frequência de excitação e X é a amplitude de excitação.

A equação 78 ainda pode ser simplificada utilizando a equação de movimento, onde $C = \eta \cdot k / \omega$:

$$U_V = \eta \cdot k \cdot X^2 \cdot \pi \quad (79)$$

onde η é o fator de perda e k a rigidez.

Ou, segundo Rao (1995) $C = h / \omega^2$, onde h é a constante de amortecimento histerético. Rearranjando 79 tem-se:

$$U_V = \pi \cdot h \cdot X^2 \quad (80)$$

Simplificando ainda mais, é possível, dependendo da situação, aproximar este sistema para um sistema linear. Desta maneira tem-se que a energia acumulada em uma mola em um ciclo de carga é:

$$U_E = k \cdot X^2 \quad (81)$$

onde k [N/m] é a rigidez do material e pode ser determinada através da inclinação da curva de histerese.

Assim, tem-se que a relação entre a energia dissipada em um ciclo de histerese e a energia elástica é:

$$\frac{U_V}{U_E} = \eta \cdot \pi \quad (82)$$

Segundo Rao (1995), é ainda possível relacionar o decremento logarítmico $[\delta]$ e um amortecimento viscoso equivalente $[C_{eq}]$ a partir do amortecimento histerético:

$$\delta = \pi \cdot h \cdot k^{-1} \quad (83)$$

$$C_{eq} \approx h/\omega \quad (84)$$

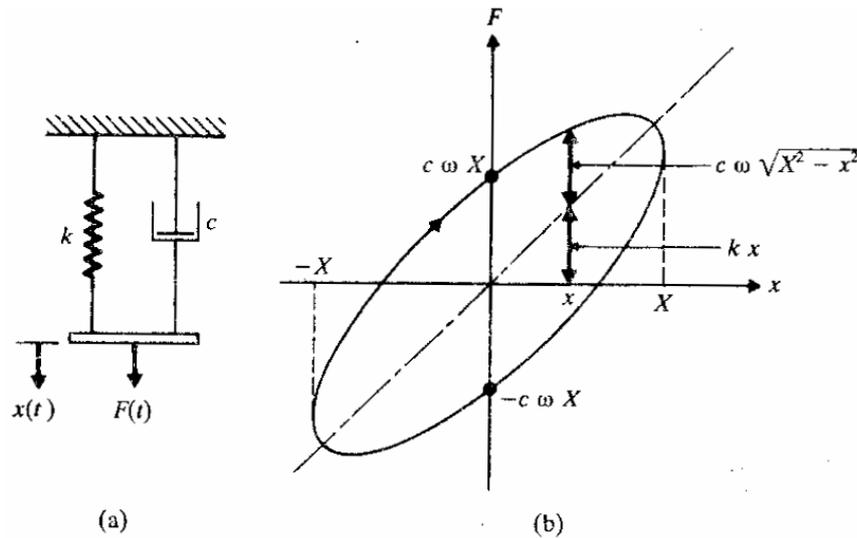


Figura 2.15: Relação entre energia dissipada no ciclo e amortecimento histerético (Rao - 1995).

Além do fator de perda, outro método muito empregado para determinar o amortecimento de uma estrutura ou componente é via decremento logarítmico. Nele, o amortecimento é calculado através da resposta transiente da estrutura quando submetida a uma carga impulsiva, estando esta sobre vibração livre. Assim, seja uma estrutura excitada impulsivamente que apresenta a resposta conforme Figura 2.16, tem a solução da equação de movimento definida por:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + c \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0 \quad \rightarrow \quad x(t) = X \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \text{sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi\right) \quad (85)$$

onde ζ é a razão de amortecimento, ω_n é a frequência natural do sistema, ϕ é o ângulo de fase e X é a amplitude da resposta. O termo $e^{-\zeta\omega_n t}$ representa o decaimento das amplitudes entre os ciclos. Utilizando o conceito de decremento logarítmico $\delta = \ln \frac{x_1}{x_2}$ e a solução da equação de movimento, obtém-se:

$$\delta = \frac{2 \cdot \pi \cdot \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{N} \cdot \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+N}}\right) \quad (86)$$

onde N é o número de ciclos entre as amplitudes consideradas, δ é o decremento logarítmico, x_n é a resposta do sistema no n -ésimo ciclo e x_{n+N} é a resposta do sistema no $n+N$ -ésimo ciclo. Dessa forma, conforme Rao (1995), por exemplo, calcula-se o índice de amortecimento ζ através da equação 87:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2 \cdot \pi)^2 + \delta^2}} \quad (87)$$

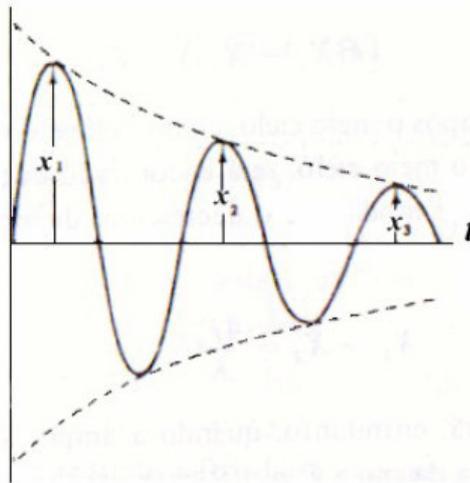


Figura 2.16: Resposta de um sistema amortecido a uma excitação impulsiva.

O método da banda de meia potência é também largamente utilizado para quantificar o amortecimento de sistemas e estruturas. Este método consiste em determinar uma faixa de frequências que circundem a frequência de ressonância a uma fração de $1/\sqrt{2}$ da amplitude de ressonância (Figura 2.17).

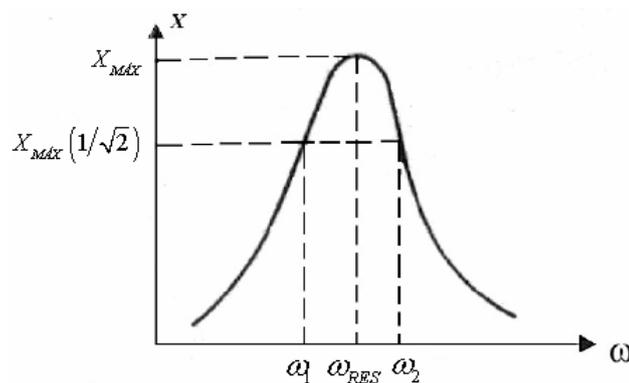


Figura 2.17: Representação do método de banda de meia potência.

Desta forma, a relação entre a banda de frequências e a razão de amortecimento é:

$$2 \cdot \zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_{RES}} \quad (88)$$

Em materiais viscoelásticos, o amortecimento e as não linearidades estão fortemente ligados. O teorema da preservação da frequência já tratado nestes fundamentos teóricos trata deste aspecto relacionando as não linearidades do sistema com a excitação e a resposta do mesmo. Assim, segundo o teorema, para um sistema linear excitado por um sinal harmônico, sua resposta deve ser harmônica e de mesma frequência da excitação. Quanto mais frequências diferentes daquela que o excitaram, mais não linear ele é.

- *Módulos Complexos*

A modelagem de materiais viscoelásticos pode ser obtida trabalhando-se no domínio da frequência. Com isso, há uma vantagem na manipulação de dados experimentais obtidos no referido domínio. Com isso, faz-se necessário conhecer melhor os módulos complexos que são equivalentes aos módulos no domínio tempo convertidos para o domínio das frequências. Para materiais isotrópicos, somente três módulos são necessários para descrever todo o estado de tensões. São eles o módulo de Young, o módulo de cisalhamento e a razão de Poisson.

Temos assim o módulo complexo de Young expresso por:

$$E^* = E \cdot (1 + i \cdot \eta_e) \quad (89)$$

onde E é a componente real do módulo de Young, η_e é o fator de perda e E^* é o módulo complexo de Young .

O módulo complexo de cisalhamento é definido por:

$$G^* = G \cdot (1 + i \cdot \eta_s) \quad (90)$$

onde G é a componente real do módulo de cisalhamento, η_s é o fator de perda devido ao cisalhamento e G^* é o módulo complexo de cisalhamento.

A razão complexa de Poisson pode ser definida da seguinte maneira:

$$E^* = 2 \cdot (1 + \nu^*) \cdot G^* \quad (91)$$

Tomando $\nu^* = \nu \cdot (1 + i \cdot \eta)$ e realizando algumas operações algébricas encontra-se:

$$(1 + \nu^*) = E \cdot G \cdot \frac{1 - i \cdot \eta_s + i \cdot \eta_e + \eta_s \cdot \eta_e}{2 \cdot G^2 \cdot (1 + \eta_s^2)} \quad (92)$$

Segundo Nashif (Nashif e Henderson, 1985), $\eta_e \cong \eta_s$ o que torna a parte imaginária de ν^* será muito pequena. Assim, trabalhando a equação 92 temos:

$$E = 2 \cdot (1 + \nu) \cdot G \rightarrow \nu = \frac{E}{2 \cdot G} - 1 \quad (93)$$

ou seja, a variação da componente real da razão de Poisson com a frequência e temperatura pode ser determinada diretamente através dos componentes reais de E e G .

Utilizando a mesma analogia, é possível determinar o conceito de rigidez complexa $k^* = k \cdot (1 + i \cdot \eta)$ de um sistema amortecido por um material viscoelástico. Nela, k e η são dependentes da temperatura e da frequência, o que nos leva a concluir que o modelo de amortecimento viscoso ($k = const.$ e $\eta = c \cdot \omega$) e o modelo de amortecimento histerético ($k = const.$ e $\eta = const.$) não prevêem a forma completa da resposta. Felizmente, para uma dada faixa de frequências e temperaturas, materiais viscoelásticos tem pequena variação das suas propriedades físicas.

- *Propriedades dos materiais viscoelásticos*

Como mencionado anteriormente, o amortecimento em materiais viscoelásticos advém da relaxação e recuperação da rede polimérica depois de deformada e existe uma forte dependência do fator de amortecimento com a frequência e com a temperatura (NASHIF, 1985). Materiais viscoelásticos possuem propriedades diferentes e peculiares de acordo com a temperatura. A região vítrea é aquela em que o material apresenta-se no estado mais rígido; a região de transição é a interface entre a região vítrea e a região na qual as propriedades do material viscoelástico assemelham-se às propriedades de borracha. Esta última é encontrada na literatura pelo termo “*rubbery like*” ou “*rubbery state*”. Para uma melhor compreensão, neste texto, essa região será denominada como “estado de borracha”. Novamente, o efeito da temperatura no material, está relacionado com a região vítrea, de transição e de borracha. Em altas temperaturas o material é macio e apresenta mobilidade suficiente para que a deformação acompanhe uma tensão aplicada sem apreciável diferença de fase, desta forma o amortecimento é pequeno; o material é dito em estado de borracha. Em baixas temperaturas o material é rígido, imóvel, com tendência à fragilidade, e relativamente não amortecida, comportando-se como vítreo. Em temperaturas intermediárias o módulo de elasticidade toma um valor intermediário e o fator de amortecimento é máximo. Neste estado tem-se a transição.

Quanto à dependência com a frequência, o material apresenta comportamento inverso. Em baixas frequências há mobilidade suficiente para a deformação acompanhar a tensão, em altas frequências o material oferece maior rigidez e em frequências intermediárias o

material apresenta o maior fator de amortecimento devido à transição, como mostrado na Figura 2.18.

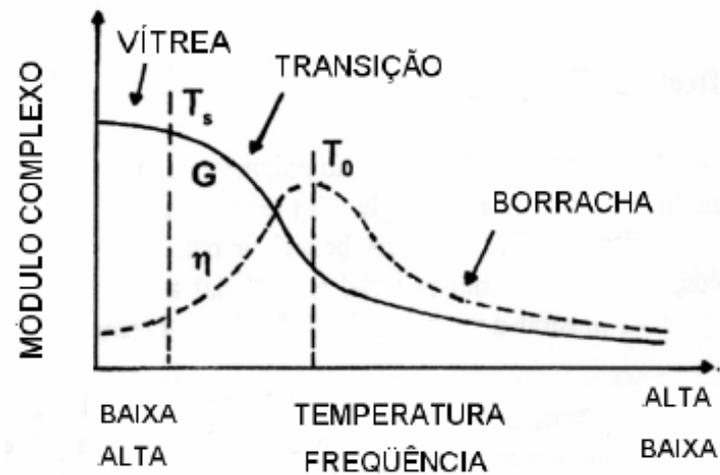


Figura 2.18: Comportamento de Materiais Viscoelásticos. Fonte: Jones (2001).

Um modelo muito simples foi rodado no ABAQUS com fins ilustrativos da variação de frequência na rigidez de um material hiperelástico. A Figura 2.19 mostra que mesmo com uma pequena variação de frequência, ou seja, de 4 Hz para 12 Hz, já é possível perceber que a maiores frequências a rigidez do material é maior.

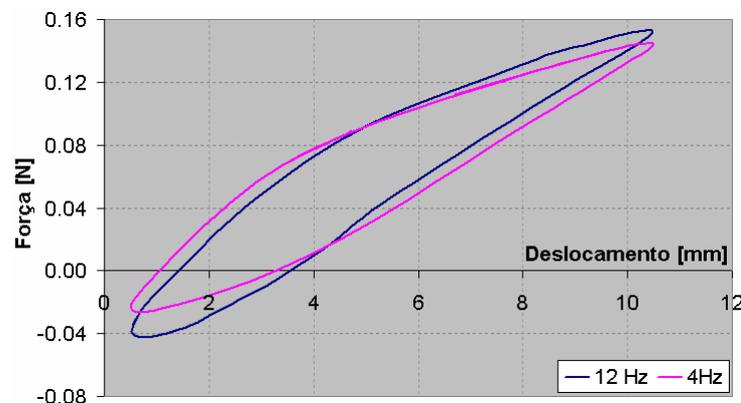


Figura 2.19: Influência da variação da frequência na rigidez do material.

Esse comportamento do material pode ser explicado com base na interação das longas cadeias moleculares. Em baixas temperaturas as moléculas estão relativamente inativas e se mantêm juntas resultando em alta rigidez, e por causa do movimento relativo reduzido entre elas, há pouco atrito intermolecular e, portanto, baixo amortecimento. Em altas temperaturas as moléculas se tornam ativas e se movem facilmente resultando em baixa rigidez. Por causa da baixa interação entre elas há uma baixa dissipação de energia devido à baixa fricção intermolecular. Em temperaturas intermediárias o movimento relativo e interação entre as moléculas resultam em módulo de rigidez intermediário e máximo fator de amortecimento.

Em altas frequências a inércia das moléculas resulta em pouco movimento relativo e em baixa dissipação. Para baixas frequências há boa mobilidade suficiente nas cadeias para que a deformação acompanhe a tensão com baixa interação entre as moléculas e pouca dissipação. Analogamente à temperatura, em frequências intermediárias tem-se inércia de moléculas intermediária, resultando em módulo baixo e máximo amortecimento. Isto é, quanto maior for a diferença de fase entre a tensão e a deformação, maior será o amortecimento do componente.

Sendo as anteriormente listadas, fluência e relaxação, também um efeito dinâmico, torna-se importante neste momento, abordar em que escala de tempo se trabalha. Desta maneira, quando se refere às propriedades dinâmicas de um elastômero, serão apresentadas apenas aquelas que a escala de tempo seja muito inferior ao seu tempo de relaxação ou fluência.

Experimentos oscilatórios se diferem da fluência e relaxação, pois, além de a escala de tempo ser determinada inversamente da frequência da excitação, a tensão e a deformação não estão em fase. O ângulo de fase existente entre a tensão e a deformação pode ser medido e depende da viscosidade dinâmica do material, se tornando zero quando esta é zero. Estes conceitos podem ser mais bem visualizados na Figura 2.20, onde é realizada uma comparação entre um sólido elástico perfeito (a), um fluido viscoso (b) e um sólido viscoelástico (c). A Figura 2.20 (d) é a comparação entre os ângulos de fase para um sólido elástico perfeito e um sólido viscoelástico.

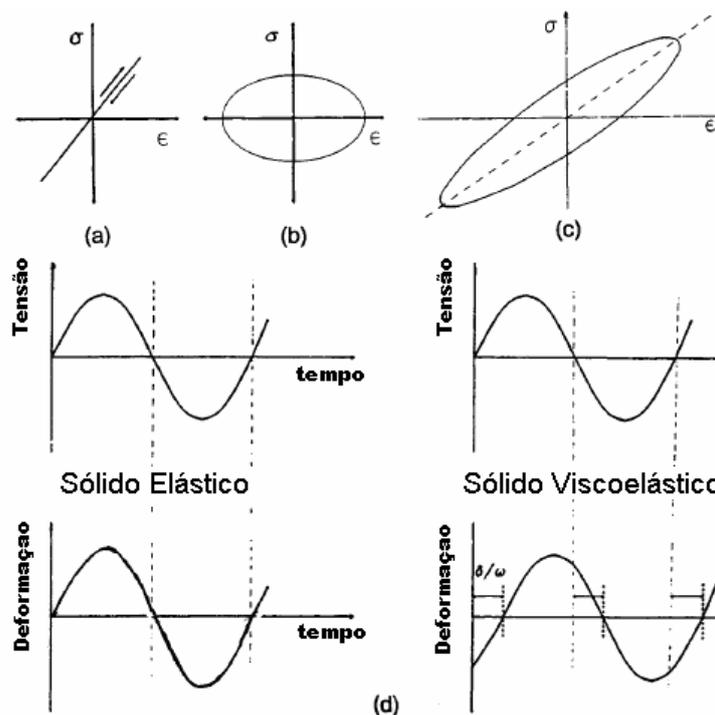


Figura 2.20: Comparação entre: a) sólido elástico perfeito, b) fluido viscoso e c) sólido viscoelástico.

2.7. HISTERESE

A histerese nada mais é que uma forma particular de relação entre tensão e deformação que acontece em materiais com comportamento viscoelástico quando estes são submetidos a carregamentos cíclicos. Durante os sucessivos processos de carregamento e descarregamento, ocorre uma dissipação da energia devido ao atrito interno do material. A Figura 2.21 mostra um exemplo disto num material susceptível ao fenômeno de histerese. Como pode ser observado, há duas curvas diferentes, sendo a curva “a” relativa ao carregamento do componente e a curva “b” relativa ao seu descarregamento. A área formada entre estas duas curvas é a energia dissipada no ciclo, sendo esta diretamente proporcional à capacidade de amortecimento do componente. Mais detalhes sobre a forma como o ABAQUS trabalha esta propriedade serão apresentadas na seção 4.

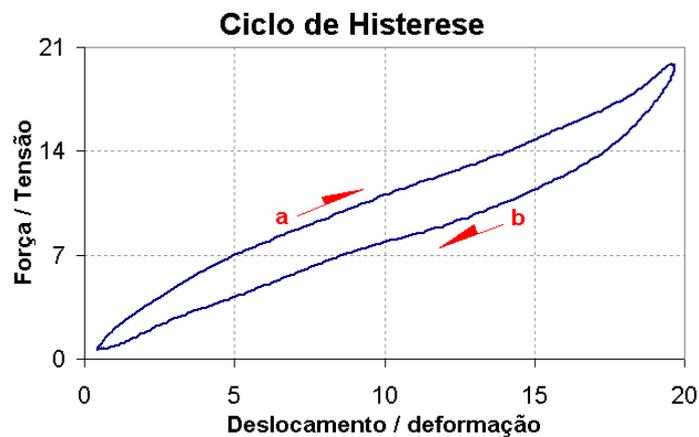


Figura 2.21: Exemplo de uma curva de histerese característica.

Infelizmente o comportamento desta curva não é tão perfeito assim. Como se sabe, um composto recém vulcanizado possui tensões internas resultantes das ligações cruzadas de enxofre formadas durante o processo. Essas tensões são, de certa forma, “aliviadas” durante os primeiros ciclos de carga do componente para só então apresentarem um comportamento cíclico repetitivo (diz-se repetitivo não levando-se em consideração a acumulação de danos existente neste tipo de material). Desta forma, para uma determinada faixa de deformações, em seu primeiro ciclo pós-vulcanização, o componente apresenta uma rigidez superior ao segundo ciclo, que, por sua vez, é superior ao terceiro e assim por diante (Figura 2.22). Mas, ciclo após ciclo, essas curvas começam a convergir para uma única linha que forma a curva de histerese do material. Ao se aumentar a faixa de deformação, utilizando este mesmo componente, o processo se repete conforme pode ser observado na Figura 2.22. Este efeito é conhecido como efeito de Mullins.

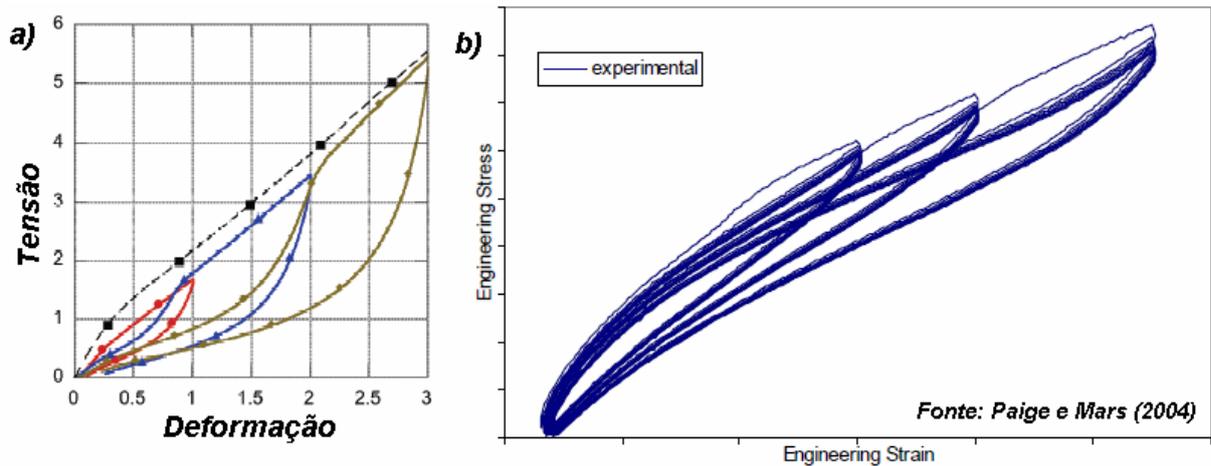


Figura 2.22: Curva de Mullins: a) teórica e b) experimental.

2.8. MODELOS CONSTITUTIVOS

Uma relação constitutiva pode ser definida como uma relação entre duas grandezas físicas que são específicas de um material ou substância ou de uma classe destes. Estas relações não necessitam seguir diretamente uma relação física, sendo basicamente divididas em dois grandes grupos:

- Relações Fenomenológicas: baseados em estudos realizados na escala macroscópica, isto é, na observação de análises experimentais.
- Relações de princípios fundamentais: baseados em estudos de micromecânica, estes modelos são construídos sob os conhecimentos moleculares do material.

As equações constitutivas da hiperelasticidade são escritas em termos das funções densidade de energia de deformação. Deste forma, é possível descrever em termos do tensor tensão de Cauchy e do tensor deformação de Green-Lagrange a direita que:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial (W(G_{ij}))}{\partial G_{ij}} \quad (94)$$

Se o material estudado é isotrópico, é possível dizer que W é função apenas dos invariantes do tensor deformação, não sendo dependente, desta maneira, do sistema de coordenadas.

Assim, a modelagem deste tipo de material depende da escolha do modelo que melhor represente as suas propriedades mecânicas. Dentro dos modelos fenomenológicos e de primeiros princípios existem diversos modelos constitutivos, possuindo cada um deles

características próprias de utilização. O presente trabalho utilizou os modelos fenomenológicos de Yeoh, sendo este mais bem explicado no item 4.

2.9. TIPOS DE TESTES PARA CARACTERIZAR O COMPORTAMENTO DE MATERIAIS ELASTOMÉRICOS

Os ensaios experimentais são utilizados para caracterizar o comportamento de materiais elastoméricos. Diversos tipos de ensaios são aplicados a este tipo de material, sendo dois deles apresentados a seguir por serem utilizados no presente estudo.

Tração de uma lâmina fina incompressível

Considerando um corpo de prova cuja dimensão 1 \gg dimensão 3 $>$ dimensão 2, realiza-se um ensaio de tração uniaxial. Este ensaio consiste em fixar o corpo de prova na máquina de testes e tracioná-lo ao longo do eixo 1, ou seja, sua maior dimensão conforme a Figura 2.23. Seus estiramentos principais são definidos por:

$$\lambda_{F1} = \lambda_{Fu} \quad ; \quad \lambda_{F2} = \lambda_{F3} = \lambda_{Fu}^{-1/2} \quad ; \quad \lambda_{Fu} = 1 + \varepsilon_u \quad (95)$$

A tensão de Piola-Kirchhoff para o modelo constitutivo de Yeoh é definida por:

$$T_{Fu} = 2 \cdot (\lambda_{Fu} - \lambda_{Fu}^{-2}) \cdot \sum_{i=1}^3 i \cdot C_{i0} \cdot (I_{E1} - 3)^{i-1} \quad (96)$$

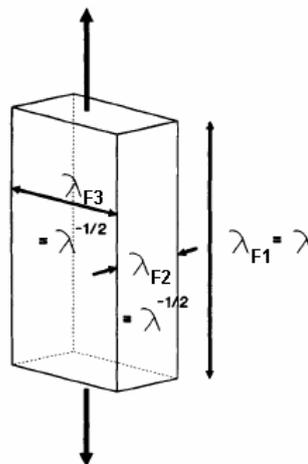


Figura 2.23: Deformações no ensaio de tração uniaxial.

Cisalhamento puro de uma lâmina fina incompressível

Utilizando um corpo de prova, com dimensão 2 \gg dimensão 1 $>$ dimensão 2, é possível realizar um ensaio de corte puro. O corpo de prova é fixado entre os agarres da máquina

de ensaio e tracionado ao longo do eixo 1 conforme Figura 2.24. Seus estiramentos principais são definidos por:

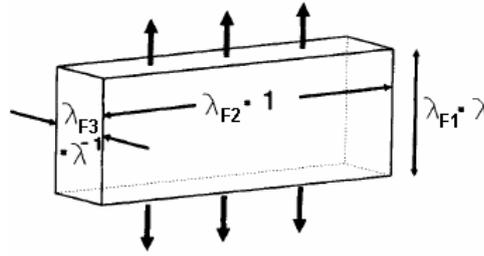


Figura 2.24: Deformações no ensaio de corte puro.

$$\lambda_{F1} = \lambda_{Fs} \quad ; \quad \lambda_{F2} = 1 \quad ; \quad \lambda_{F3} = \lambda_{Fs}^{-1} \quad ; \quad \lambda_{Fs} = 1 + \varepsilon_s \quad (97)$$

A tensão de Piola-Kirshhoff para o modelo constitutivo de Yeoh é definida por:

$$T_{Fs} = 2 \cdot (\lambda_{Fs} - \lambda_{Fs}^{-3}) \cdot \sum_{i=1}^3 i \cdot C_{i0} \cdot (I_{E1} - 3)^{i-1} \quad (98)$$

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo serão apresentados alguns estudos que se refiram direta ou indiretamente a presente dissertação.

Morman e Pan (1987) fizeram comparações entre metodologias de cálculo direto e metodologias de análise via elementos finitos para materiais hiperelásticos existentes em buchas cilíndricas. O software utilizado foi o ABAQUS e as buchas foram modeladas com elementos híbridos devido à incompressibilidade do material. Os autores perceberam que os resultados via elementos finitos são muito precisos, além de fornecer uma quantidade muito maior de informações detalhadas. Analisando os custos, os autores concluíram que é mais vantajoso para as indústrias, investirem em prototipagem digital em vez de desenvolverem produtos via tentativa e erro.

Charlton e Yang (1993) realizaram um estudo de caso com a análise de um pneu maciço industrial a fim de formar bases para futuros projetos na área. Utilizando o *software* ABAQUS, os autores executaram o modelo de uma seção do pneu utilizando elementos híbridos C3D8H, assumindo que este possui comportamento totalmente incompressível, ou seja, o material é muito sensível às variações de deformação. Sendo este um problema de deslocamentos prescritos, houve problemas de instabilidade na solução devido à característica incompressível do material. O material foi calibrado unicamente com ensaio de tração uniaxial. Apesar dos bons resultados encontrados na comparação entre o modelo numérico e o protótipo físico, o autor ressalta que a maioria dos erros são relativos à baixa qualidade dos dados experimentais que pode implicar na escolha do modelo constitutivo errado.

Yintao, Tingqing e Xingwen (1999) apresentaram leis constitutivas para materiais poliméricos incompressíveis, apresentando também a sua implementação computacional através de elementos finitos. Em seus estudos consideraram o modelo constitutivo de Yeoh (1990) como sendo de boa precisão e simplicidade matemática.

Sze, Zeng e Lo (2004) desenvolveram um processo de estabilização híbrida em um elemento de casca hiperelástica com capacidade de sofrer grandes deformações. A fim de evitar o travamento por Poisson, o autor enriqueceu o equacionamento dos modos de vibração ao longo da espessura.

Belytschko, Liu e Moran (2000) realizaram estudos sobre o travamento volumétrico durante análises numéricas. Segundo ele, o travamento ocorre quando o elemento infinitesimal não consegue representar modos de vibração isocóricos, ou seja, de volume constante. De forma geral, quando o elemento não pode satisfazer uma restrição, o modo restrito

absorve muito mais energia, possuindo rigidez maior que a rigidez do modo do movimento correto.

El-Abbasi e Meguid (2000), na mesma linha de estudos, concluíram que os elementos finitos que possuem apenas movimentos translacionais não conseguem representar estados de flexão pura ao longo da espessura, o que leva ao travamento por Poisson. Já Bischoff e Ramm (2000) concluíram que a omissão dos embarrigamentos transversais causa o aparecimento de uma rigidez artificial o que gera o travamento por Poisson.

Aseka (2002), em sua dissertação de mestrado, realizou diversos estudos a fim de compreender o comportamento de materiais viscoelásticos com relação a sua capacidade de amortecimento. Neste contexto, fatores como temperatura, frequência e amplitude de vibração foram avaliados e discutidos. Para isso, foram realizados experimentos com um amortecedor (por ele desenvolvido) sob as temperaturas de 27°C, 39°C, 47°C e 59°C, sob as frequências de 0,1Hz, 0,3Hz, 0,5Hz, 1,0Hz e 2,0Hz e sob as oscilações com amplitudes de 0,2mm, 0,4mm, 0,6mm, 0,8mm e 1,6mm. Suas conclusões foram baseadas nas curvas de histerese geradas. Entre elas, percebeu que a energia dissipada e a rigidez do material reduzem com o aumento da temperatura. Aumentando a frequência de excitação, aumentaram também a rigidez do material e sua energia dissipada. Já com o aumento da amplitude de excitação, a rigidez do material reduziu.

Dall'Asta e Ragni (2008) realizaram análises em borrachas de alto amortecimento com excitações harmônicas e impulsivas a fim de caracterizar respostas transientes do sistema. Em seguida aplicaram carregamentos sísmicos de diversas intensidades ao sistema e observaram que os resultados são bastante influenciados pelo efeito de Mullins e pela intensidade dos carregamentos.

Gheller (2008), tendo como objetivo analisar a influência da variação da frequência de excitação na transmissibilidade de elastômeros com diferentes tipos de compostos, realizou vários experimentos com corpos de prova no Centro de Tecnologia em Polímeros (CETEPO) em São Leopoldo - RS. Levando em consideração a capacidade de amortecimento, concluiu que quanto maior a frequência, maior a capacidade de amortecimento do composto, sendo esta característica mais evidente para compostos com mais aditivos, isto é, mais carregados. Isto é bem evidente, já que quanto mais distante da frequência natural do sistema, menor é a transmissibilidade.

Boyce (1998) realizou estudos experimentais a fim de determinar a influência da taxa de deformação na resposta histerética de compostos de cloropropeno. O autor concluiu, entre outras, que a resposta do material a uma excitação cíclica se torna repetitiva depois de o

efeito de Mullins perder seu efeito e que, independente da carga de aditivo, seu comportamento é dependente da taxa de deformação, sendo os resultados deste mais significativos durante a fase de carga do que na fase de descarga. Estes estudos foram a base para um novo modelo constitutivo onde o comportamento mecânico pode ser decomposto em duas partes, sendo uma relativa à resposta dependente do tempo, isto é, relaxação e a outra relativa as não-linearidades da variação da taxa de deformação. Este modelo é capaz de capturar os efeitos histeréticos de um material, podendo desta maneira, representar matematicamente seu comportamento histerético.

4. METODOLOGIA

Descrevem-se a seguir as ferramentas utilizadas para realizar as aplicações apresentadas no Capítulo 5.

4.1. CARACTERÍSTICAS DO ABAQUS

Para o estudo numérico do comportamento de materiais elastoméricos sujeitos a carregamentos cíclicos, foi utilizado o *software* comercial ABAQUS. Desta maneira, algumas características suas são apresentadas neste tópico.

Calibração dos Modelos Elastoméricos

O primeiro procedimento utilizado ao se realizar uma análise numérica no *software* em questão é ajustar dos dados experimentais disponíveis e escolher o modelo constitutivo que melhor modela estas curvas. Ou também, quando se dispõe das constantes constitutivas, estas podem ser inseridas diretamente como dados de entrada.

Como já é conhecido, os dados experimentais geralmente são gerados com ruídos e com uma taxa de aquisição de muito pequena, gerando assim arquivos muito grandes. O ABAQUS não trabalha bem com este tipo de informação. Desta forma, é necessário tratar os dados experimentais a fim de reduzir a quantidade de pontos gerados experimentalmente para um valor aproximado de 50. Outro aspecto importante a ser considerado no tratamento destes dados, é deixar dados experimentais para intervalos de deformação igualmente espaçados. Isto fará com que os erros gerados no ajuste sejam minimizados e/ou não se concentrem em uma faixa de deformações com escassez de pontos. Outra alternativa que o *software* oferece para a amenização dos ruídos experimentais é o *softening* que é baseado no método de Savitzky-Golay (manual teórico do ABAQUS). A idéia do método é substituir cada ponto por uma média dos pontos de uma região. Assim, o ruído é reduzido sem alterar a tendência dominante dos dados. O método, para cada ponto, pega um número N de pontos anteriores e posteriores e realiza uma média aritmética destes. Como padrão, o ABAQUS captura 3 pontos, sendo um antes e um depois do valor central do ajuste. Este valor pode ser alterado dependendo da necessidade. Após isso, o método de ajuste da curva é o mesmo, ou seja, o método dos mínimos quadrados é

aplicado repetidamente até que todos os dados dentro de dois passes consecutivos produzam resultados muito similares, ou seja, menores que o erro admissível.

Alguns outros pontos podem ser trabalhados quando não se obtém resultados desejados no ajuste de valores experimentais. São eles:

- Usar sempre muito mais pontos experimentais do que coeficientes desconhecidos;
- Quando $N \geq 3$, utilizar dados com no mínimo até 100% de deformação ou 50% de compressão;
- Utilizar diferentes tipos de ensaios.

Se vários tipos de ensaios experimentais estão sendo utilizados e o ajuste continua pobre, algum ou alguns dos dados podem conter erros. Nesse caso os ensaios experimentais devem ser realizados novamente. Uma maneira de determinar qual dos dados está com erro é, primeiro, calibrar o módulo cortante μ_0^{TEST} do material. Em seguida, ajustar cada tipo de dado separadamente e computar μ_0^{FIT} das constantes dos materiais utilizando as relações.

- Para modelos polinomiais:

$$\mu_0^{FIT} = 2(C_{10} + C_{01}) \quad (99)$$

- Para Ogden:

$$\mu_0^{FIT} = \sum_{i=1}^N \mu_i \quad (100)$$

assim, os valores de μ_0^{FIT} que sejam mais diferentes de μ_0^{TEST} indicam o ensaio errado.

Os dados experimentais inseridos no ABAQUS devem ter em seus eixos tensão nominal, isto é, força por unidade de área inicial, e deformação nominal, isto é, variação de comprimento por comprimento inicial. Para dados dos ensaios compressivos, tanto a tensão quanto a deformação devem ser negativas. O ensaio de solitação planar pode ser convertido em corte puro modificando a forma da deformação calculada. Para o ensaio planar, utiliza-se deformação nominal conforme descrito acima. Já para corte puro, utilizam-se os mesmos valores de tensão que o ensaio planar, mas em vez de calcular a deformação nominal, utiliza-se deformação logarítmica:

$$\varepsilon_1 = \ln \lambda_{F1} = -\ln \lambda_{F3} = -\varepsilon_3 \quad \therefore \quad \varepsilon_2 = \ln \lambda_{F2} = 0 \quad (101)$$

onde ε_1 e λ_{F1} são, respectivamente, a deformação e o estiramento no sentido do carregamento, ε_2 e λ_{F2} são, respectivamente, a deformação e o estiramento a deformação transversal ao carregamento e ε_3 e λ_{F3} são, respectivamente, a deformação e o estiramento a deformação ao longo da espessura.

Isto corresponde a um estado de corte puro a um ângulo de 45° da direção do carregamento.

No ajuste dos dados experimentais, o *software* trabalha o critério de estabilidade de Ducker. Para que este critério seja aceito a seguinte desigualdade deve ser satisfeita:

$$d\sigma : d\varepsilon > 0 \rightarrow d\varepsilon \cdot D : d\varepsilon > 0 \quad (102)$$

onde $d\sigma$ é a variação de tensão à uma variação infinitesimal da deformação $d\varepsilon$ e D é a rigidez tangencial do material. Desta forma, para que a desigualdade seja verdadeira, D deve ser positivo definido.

A curva tensão *vs.* deformação é ajustada a fim de se minimizar o erro relativo na tensão. Para tanto, a seguinte equação deve ser minimizada.

$$ER = \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{T_i^{TH}}{T_i^{TEST}} \right)^2 \quad (103)$$

O modelo hiperelástico do ABAQUS é isotrópico não-linear e é válido para materiais que possuem resposta elástica instantânea para grandes deformações, isto é, para elastômeros. A maioria dos elastômeros possui uma capacidade compressiva muito pequena quando comparada a sua capacidade de extensão. Desta maneira, a solução numérica pode ser muito sensível ao grau de compressibilidade, ou ao seu Poisson, quando utilizados elementos sólidos 3D em estado plano de deformações. Um ponto positivo é que para casos onde o componente não está altamente confinado, o grau de compressibilidade deste não é fator crucial para o resultado. É possível avaliar a compressibilidade relativa de um material através da relação entre o módulo de Bulk k_0 e o módulo cortante inicial μ_0 . Esta relação, quando ajustada nos fornece o coeficiente de Poisson:

$$\nu = \frac{3k_0/\mu_0 - 2}{6k_0/\mu_0 + 2} \quad (104)$$

Desta forma, é possível determinar um coeficiente de Poisson específico para cada relação k_0/μ_0 conforme Tabela 4.1:

No módulo *standard* (esquema implícito de integração direta da equação de movimento) do ABAQUS é possível utilizar modelos tanto incompressíveis como quase incompressíveis. A título de curiosidade, sabe-se que borrachas com aditivos possuem k_0/μ_0 entre 1000 e 10000

Tabela 4.1: Relação entre módulo de bulk e módulo cortante com o coeficiente de Poisson.

k_0/μ_0	ν
10	0.452
20	0.475
50	0.490
100	0.495
1000	0.4995
10000	0.49995

($0.4995 < \nu < 0.49995$) e que borrachas sem aditivos possuem esta relação com valores entre 50 e 200 ($0.490 < \nu < 0.497$). Quando não informado sobre o coeficiente de Poisson, o ABAQUS utiliza o valor de 0.475, fornecendo um material muito mais compressível do que a maioria dos existentes comercialmente. Mas conforme comentado anteriormente, se o modelo em análise não é confinado, este amaciamento no seu comportamento não altera significativamente os resultados. Em uma aplicação típica de um absorvedor sísmico tipo sanduíche para a construção civil, o elastômero é altamente confinado, desta maneira, seria interessante utilizar o coeficiente de Poisson real do composto, bem como utilizar uma análise com o módulo *standard* do *software*. Quando a aplicação realmente exige uma análise explícita e a utilização do módulo *explicit* se torna inevitável, aconselha-se utilizar um coeficiente de Poisson relativo a uma relação k_0/μ_0 de no máximo 100. Valores maiores induzirão frequências naturais muito elevadas dentro da análise dinâmica, exigindo o uso de tempos incrementais excessivamente pequenos, aumentando em muito o custo computacional e em alguns casos até inviabilizando a análise.

A energia de deformação de um composto elastomérico define a quantidade de energia armazenada por unidade de volume como função da deformação em algum ponto do material. Há diversos tipos de potenciais de energia de deformação para modelar materiais isotrópicos quase incompressíveis. Neste estudo foi utilizado o modelo de Yeoh. Os critérios utilizados na sua escolha foram:

- Apresentou bons resultados no ajuste das curvas estudadas, não tendo problemas com instabilidades;
- A quantidade de constantes constitutivas é reduzida neste modelo, facilitando assim uma possível comparação gráfica entre eles;
- As constantes constitutivas do modelo de Yeoh são obtidas através de uma regressão linear.

Na resposta hiperelástica, o potencial de energia de deformação é escrito como funções separáveis, sendo uma relativa ao componente deviatórico (U_{dev}) e outra relativa ao componente volumétrico (U_{vol}):

$$U = U_{dev}(I_{E1}, I_{E2}) + U_{vol}(J_{el}) \quad (105)$$

onde I_{E1} e I_{E2} são, respectivamente, o primeiro e o segundo invariantes de deformação (equações 25 e 26) e $J_{el} = \det(F)$ é a taxa de variação elástica de volume, onde F é o gradiente de deformações.

Para os modelos fenomenológicos, tais como, Ogden e polinomiais, quanto maior for o número de experimentos realizados com deformações na faixa de interesse, melhor será o ajuste. Quando isso não é possível, o segundo invariante de deformações pode ser removido da formulação, gerando a categoria de modelos polinomiais reduzidos. Com isso, problema de instabilidades no ajuste de materiais com poucos dados experimentais ou a grandes deformações pode ser minimizado e/ou eliminado.

Assim, a equação da energia de deformação do modelo de Yeoh é obtida através da equação geral dos modelos polinomiais, simplificando-se a mesma a fim de eliminar o segundo invariante de deformações:

$$U_p = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} \cdot (I_{E1} - 3)^i \cdot (I_{E2} - 3)^j + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} \cdot (J_{el} - 1)^{2i} \quad (106)$$

onde U_p é a energia de deformação por unidade de volume para os modelos polinomiais, C_{ij} são as constantes constitutivas, D_i são as constantes de compressibilidade, I_{E1} e I_{E2} são o primeiro e o segundo invariantes de deformação e J_{el} é a taxa de variação elástica de volume.

Considerando-se $C_{ij} = 0$ para $j \neq 0$, é possível eliminar o segundo invariante de deformações:

$$U_{pr} = \sum_{i+j=1}^N C_{i0} \cdot (I_{E1} - 3)^i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} \cdot (J_{el} - 1)^{2i} \quad (107)$$

onde U_{pr} é a energia de deformação para modelos polinomiais reduzidos. Utilizando $N = 3$, obtém a equação do modelo constitutivo de Yeoh.

Modelagem do Fenômeno de Histerese

A modelagem do fenômeno de histerese no ABAQUS se dá pela decomposição da resposta mecânica do elastômero em uma rede de equilíbrio A correspondendo ao estado que

é aproximado em testes de relaxação, e em uma rede B dependente do tempo, que captura a variação não linear dependente da taxa de deformação do estado de equilíbrio. Esta dependência do tempo da rede B é assumida por ser governada pelo movimento repetitivo das moléculas que tem a habilidade de alterar sua conformação significativamente, relaxando, desta maneira, o estado geral de tensões. Esta observação, nem este modelo, podem ser empregados nos primeiros ciclos pós vulcanização de um composto, onde ocorre o efeito de Mullins.

Assim, a tensão total é a soma das tensões individuais nas redes A e B . O gradiente de deformações age simultaneamente e igualmente nas duas redes e é decomposto em uma parte elástica e outra inelástica na rede B , de acordo com uma decomposição multiplicativa.

Desta forma, o modelo do material é definido completamente especificando-se um material isotrópico, um modelo hiperelástico que caracterize a resposta da rede A e através da determinação dos seguintes parâmetros:

- Parâmetro S_h -> *Stress Scaling Factor*

Determina a parcela da tensão carregada pela rede B sobre aquela da rede A quando ambas sofrem um estiramento ou uma deformação idênticos em ambas as redes.

- Parâmetro m_h -> *Eff Stress Exponent*

Expoente positivo, geralmente maior que 1 que caracteriza a dependência da tensão gerada pela taxa de deformação por fluência na rede B .

- Parâmetro C_h -> *Creep Strain Exponent*

Possuindo valores entre $[-1;0]$, este parâmetro caracteriza a dependência da deformação por fluência gerada pela taxa de deformação por fluência na rede B .

- Parâmetro A_h -> *Creep Parameter*

Este é uma constante de escala na expressão para a taxa de deformação por fluência para manter a consistência dimensional da equação.

- Parâmetro E_h

Este parâmetro ajuda a regularizar a taxa de deformação por fluência nas proximidades do estado indeformado.

Conforme citado, a resposta mecânica da rede A sob um gradiente de deformações F é governada pelo modelo hiperelástico isotrópico. A resposta da rede B é dependente apenas de F_B^e e é governado pelo mesmo potencial hiperelástico da rede A ,

acrescido do parâmetro S . Para um dado gradiente de deformações F , a determinação de F_B^e requer uma especificação constitutiva para F_B^{cr} que é fornecido por:

$$F_B^e \cdot \dot{F}_B^{cr} \cdot (F_B^{cr})^{-1} \cdot (F_B^e)^{-1} = \dot{\epsilon}_B^{cr} \frac{S_B}{\sigma_B} \quad (108)$$

onde $\dot{\epsilon}_B^{cr}$ é a taxa de deformação por fluência na rede B , S_B é o tensor tensão de Cauchy na rede B e $\sigma_B = \sqrt{3/2 \cdot S_B : S_B}$ é a tensão efetiva na rede B . Assim, $\dot{\epsilon}_B^{cr}$ é governada por:

$$\dot{\epsilon}_B^{cr} = A_h \cdot [\lambda_{FB}^{cr} - 1 + E_h]^C \cdot (\sigma_B)^m \quad (109)$$

onde $(\lambda_{FB}^{cr} - 1)$ é a deformação nominal por fluência na rede B . Assim, λ_{FB}^{cr} (estiramento da rede B) é definido por:

$$\lambda_{FB}^{cr} = \sqrt{1/3 \cdot I : C_B^{cr}} \quad (110)$$

onde $C_B^{cr} = (F_B^{cr})^T \cdot F_B^{cr}$.

4.2. CARACTERÍSTICAS DO ANSYS

As primeiras simulações numéricas realizadas no presente trabalho foram feitas no Sistema de elementos finitos ANSYS. Nele foram modelados uma viga em balanço de aço carbono com o elemento SHELL93 e, na sua extremidade livre, foi modelada uma tira de borracha, em um primeiro momento, com o elemento de mola COMBIN14 e posteriormente com o elemento COMBIN39. O elemento SHELL93 é quadrático com oito nós e seis graus de liberdade em cada nó, translação e rotação em x , y e z , este elemento possui rigidez membranal à flexão. A espessura do elemento irá influenciar na rigidez do mesmo. O elemento COMBIN14 é linear e pode ser considerado como mola - amortecedor longitudinal ou torcional. A opção utilizada foi mola - amortecedor longitudinal no qual o elemento possui dois nós com três graus de liberdade em cada nó considerando apenas deslocamentos em x , y e z , não permitindo rotação e flexão do elemento. O elemento COMBIN39 é não-linear na curva força \times deslocamento e pode ser considerado como mola - amortecedor longitudinal ou torcional. A opção utilizada foi mola - amortecedor longitudinal no qual o elemento possui dois nós com três graus de liberdade em cada nó considerando apenas deslocamentos em x , y e z , não permitindo rotação e flexão do elemento. Tendo como dados de entrada os pontos da curva de histerese, o amortecimento deste elemento é definido implicitamente. Outra característica do elemento está em permitir grandes deslocamentos.

No Ansys, há três métodos de solução para análise harmônica, o Método *Full*, Reduzido, Superposição Modal. Método *Full* é o mais completo, não havendo redução do tamanho da matriz. Este método tem como vantagem, facilidade de uso, pois não é necessário escolher os principais graus de liberdade ou formas modais. Como desvantagem principal pode ser citado o alto custo computacional frente aos outros métodos. O método reduzido simplifica o problema usando os principais graus de liberdade, sendo estes selecionados pelo usuário. Uma grande vantagem é o reduzido custo computacional. Uma limitação do sistema está no número reduzido de graus de liberdade considerados. O método da superposição modal é a soma fatorada das formas modais (autovetores) feitas através da análise modal da resposta da estrutura. Suas vantagens são a velocidade e o menor custo computacional quando comparado com outros dois métodos já mencionados.

A análise modal tem o objetivo de encontrar os modos de vibração e as frequências naturais de uma estrutura. O ansys resolve esta análise encontrando a solução não trivial para a equação de movimento. Esta solução irá gerar autovalores e autovetores, que serão respectivamente, as frequências naturais de vibração do sistema estudado e seus modos de vibração.

4.3. PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Os experimentos realizados no presente estudo foram divididos em duas etapas principais. Em um primeiro momento, com o objetivo de verificar o comportamento de uma tira de borracha sob tração, foi construída uma bancada em aço e fixada a uma mesa vibratória pertencente ao Grupo de Mecânica Aplicada da UFRGS. Desta forma, fazendo mão de geradores de sinal, softwares de aquisição e tratamento de dados, acelerômetros, visualizadores de sinal, etc. foi realizado todo o estudo. O item 5.1 descreve mais detalhadamente tal procedimento.

Em um segundo momento, ensaios normalizados foram realizados no Centro de Tecnologia em Polímeros em São Leopoldo / RS. Estes ensaios foram baseados em normas nacionais e internacionais com o objetivo de tirar as curvas tensão x deformação de alguns materiais poliméricos para a sua caracterização mecânica. Maiores detalhes tais como equipamentos, sensores e materiais utilizados nestes experimentos são apresentados nos itens 5.2 e 5.3.

5. APLICAÇÕES

Neste capítulo serão apresentados 3 estudos relacionados com materiais elastoméricos. Em todos eles se comparam resultados experimentais e modelos numéricos de diferente nível de complexidade.

No primeiro deles, é analisada em forma experimental e numérica uma estrutura formada por uma viga em balanço metálica com sua base fixa em uma mesa vibratória, sendo que em sua extremidade livre é colocada uma tira de borracha. A sensibilidade da resposta às variações de frequência de excitação e no nível de deformação inicial aplicado na tira de borracha são apresentados modelos numéricos de diferentes níveis de complexidade.

Na segunda aplicação, levando em consideração as variações esperadas nos resultados de análises experimentais de ensaios simples foi estudado como estas variações se transmitem às constantes de ajuste do modelo constitutivo proposto, neste caso o Yeoh, que possui três constantes. Os resultados de ensaios disponíveis são em termos do teste de tração uniaxial e de corte puro. Este estudo é realizado sobre os resultados experimentais de Treloar (1975) que foram perturbados para simular certa dispersão e sobre ensaios próprios onde cinco e três ensaios de cada tipo (uniaxial e corte puro respectivamente) apresentaram naturalmente certa dispersão.

Finalmente na terceira aplicação a partir de ensaios experimentais que permitiram medir a dissipação histerética de um corpo de prova de borracha. Foi realizada um ajuste preliminar deste comportamento com o software ABAQUS.

5.1. AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA FREQUÊNCIA DA EXCITAÇÃO E DEFORMAÇÃO INICIAL NO AMORTECIMENTO DE UM CORPO DE PROVA ELASTOMÉRICO SOLICITADO A TRAÇÃO

Como já mencionado nesta primeira aplicação se avalia o comportamento de uma tira de borracha nitrilica NBR Buna N como amortecedor. E se avalia a importância do mesmo frente à mudança de frequência e diferentes níveis de deformação inicial. Outros parâmetros também mencionados como importantes por Gent (2001) como temperatura, umidade e envelhecimento foram desconsiderados.

5.1.1. Descrição do Modelo Físico

O amortecedor a ser avaliado é montado sobre uma viga Cantilever montada numa mesa vibratória como apresentado na Figura 5.1.

Estes experimentos foram realizados nas instalações do Grupo de Mecânica Aplicada (GMAp) do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (DEMEC / UFRGS), com equipamento para aquisição de dados, gerador de sinal e mesa vibratória pertencentes ao laboratório. Já a bancada e os corpos de prova foram dimensionados e fabricados separadamente especialmente para estes testes. Neste sistema, um dispositivo de engaste (considerado rígido) é fixado através de parafusos à mesa vibratória e neste dispositivo é fixada uma régua metálica que funcionará estruturalmente como uma viga engastada-livre. O amortecedor, formado por uma tira de borracha, é fixado na viga em balanço (na extremidade livre) e em outro ponto no corpo da mesa vibratória. Quando em funcionamento, a mesa vibratória introduz oscilações verticais na base fixa da viga que se transmitem a toda a estrutura. Ao introduzir a tira de se espera poder amortecer estas oscilações.

Foram utilizados como amortecedores dois corpos de prova com suas dimensões indicadas na Figura 5.2 e na Tabela 5.1, na qual h é a sua espessura, b é a sua largura e L o seu comprimento livre. A geometria e dimensões dos corpos de prova foram determinadas a fim de suprir as necessidades do experimento e a disponibilidade de matéria prima, não sendo utilizadas normas nem matrizes especiais para corte e/ou vulcanização.

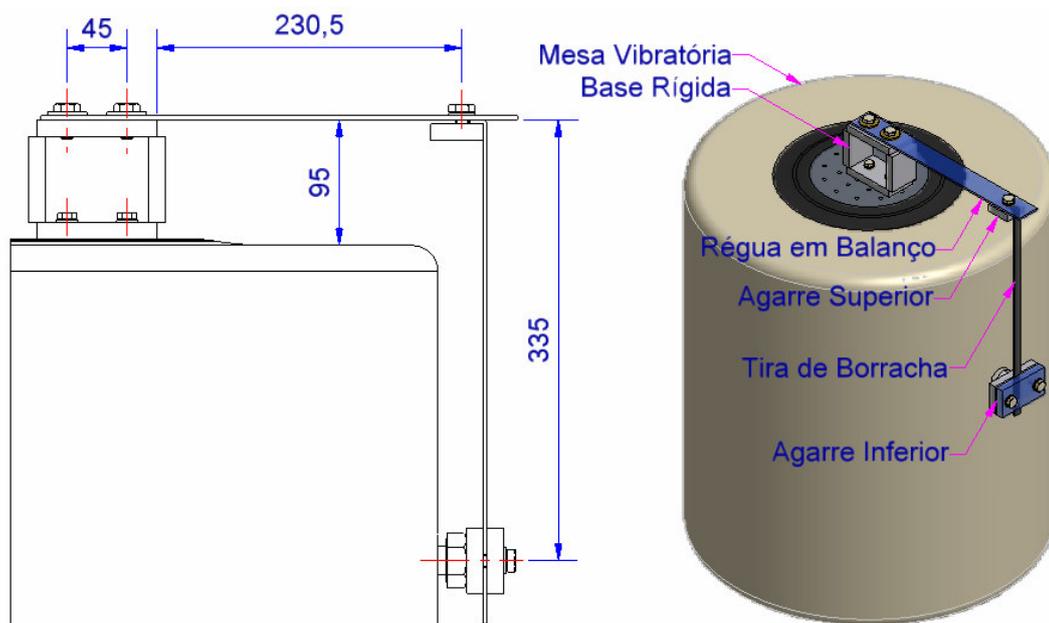


Figura 5.1: Bancada de ensaios experimentais.



Figura 5.2: Dimensões dos corpos de prova utilizados.

Tabela 5.1: Dimensões da seção transversal e comprimento dos corpos de prova.

Corpo de Prova	b [mm]	h [mm]	L [mm]	Área [mm ²]
Borracha 1	9	3	310	27
Borracha 2	12	3		36

5.1.2. Descrição dos Ensaio na Mesa Vibratória

Os experimentos foram divididos em duas baterias de ensaios:

Na primeira bateria, um gerador de sinais foi conectado ao sistema de excitação da mesa vibratória. Este gerador foi utilizado para produzir uma excitação do tipo ruído-branco de zero a 800Hz, isto é, ele produziu um sinal de excitação composto por todas as frequências dentro desta faixa. O sensor utilizado foi um acelerômetro piezoelétrico alimentado diretamente na rede elétrica local. Os sinais por ele captados foram enviados a um computador que fazia a aquisição dos resultados através do *software* HPVee.

Na primeira bateria de experimentos foram realizados sete ensaios sobre a estrutura e dispositivos auxiliares apresentados na Figura 5.1. A fim de saber qual é o comportamento da borracha em uma faixa pré-estabelecida de frequências, a estrutura foi excitada a partir do sinal ruído branco descrito anteriormente. Foram realizados os ensaios sem borracha, com o corpo de prova “Borracha 1” e com o corpo de prova “Borracha 2” variando os níveis de deformação inicial conforme apresentado na Tabela 5.3. Este experimento foi realizado tendo uma limitação na deformação inicial do corpo de prova, já que valores maiores que 30% fizeram com que a viga engastada-livre da bancada sofresse uma deformação excessiva por causa da rigidez da borracha.

A resposta do sistema a esta excitação foi adquirida pelo *software* HPVee, isto é, as respostas do acelerômetro foram armazenadas em um arquivo na forma de aceleração (em g) em função do tempo. Utilizando o *software* Adobe Audition 1.5, foi aplicada a transformada de Fourier para cada uma das listas de dados, obtendo-se assim o espectro de amplitude de resposta (em dB) para cada frequência numa faixa de 0 a 800Hz.

Na segunda bateria de ensaios foram utilizados os mesmos equipamentos da primeira bateria de ensaios, sem o gerador de sinal. O *software* de aquisição de dados neste caso

foi o Matlab. Aplicando solicitações harmônicas e impulsivas sobre o sistema verificando algumas propriedades do sistema analisado. Para isso, foram realizados cinco testes, sendo três deles com uma excitação de impacto e dois com uma excitação harmônica. O objetivo deles foi confirmar os resultados da primeira bateria de ensaios, determinar o nível de não-linearidades do sistema e quantificar o amortecimento através do seu cálculo pelo método do Decremento Logarítmico (Dimarogonas, 1976; Rao, 1995). Desta vez as análises foram realizadas apenas com o corpo de prova “Borracha 1” e com uma deformação inicial de 10% e 20%. A excitação aplicada consistiu em imprimir uma pancada na base da régua em balanço da bancada e coletar sua resposta através dos acelerômetros. A excitação harmônica consistiu em imprimir na base da bancada uma excitação senoidal. A frequência utilizada nesta excitação foi a primeira frequência natural determinada a partir do ensaio de impacto.

Na Tabela 5.2 são apresentadas as características técnicas dos equipamentos utilizados nas duas baterias de ensaios e a Figura 5.3 representa os equipamentos acima listados e como eles estão interligados.

A Tabela 5.3 resume as configurações ensaiadas para a primeira e para a segunda bateria de ensaios. A resposta do sistema às excitações da segunda bateria de testes foi adquirida pelo programa Matlab, isto é, as respostas do acelerômetro foram armazenadas em um arquivo na forma de aceleração (em g) em função do tempo. O tratamento destes dados, ou melhor, a aplicação da transformada de Fourier para cada uma das listas de dados foi realizada pelo próprio Matlab numa faixa de 0 a 800Hz.

Tabela 5.2: Descrição dos equipamentos utilizados.

Equipamento	Características Técnicas
Mesa Vibratória	Marca: Veb Thüringer Industriewerk Ravenstein. Modelo: ST 5000/300. Faixa Freq: de 5 a 5kHz. Amplitude máx: de + 6mm.
Controle da Mesa	Marca: Wattsom. Modelo: DBK6000. Potência 4x 375watts rms.
Gerador de Sinal	Marca: Brüel & Kjaer. Modelo: 2034.
Visualizador de Sinal	Marca: DL1200A. Modelo 7006. Escala: 5mV/d.
Acelerômetro 1° Bateria	Marca: Endevco. Modelo: 2250A. Sensibilidade: 9.93mV/g.
Acelerômetro 2° Bateria	Marca: Brüel & Kjaer. Modelo: 4332. Sensibilidade 62.2mV/g.
<i>Notebook</i> 1° Bateria	Toshiba core2duo Intel 1,66MHz 1Gb RAM.
<i>Notebook</i> 2° Bateria	Toshiba core2duo Intel 2,00MHz 1Gb RAM.
<i>Software</i> 1° Bateria	HPVee.
<i>Software</i> 2° Bateria	Matlab.

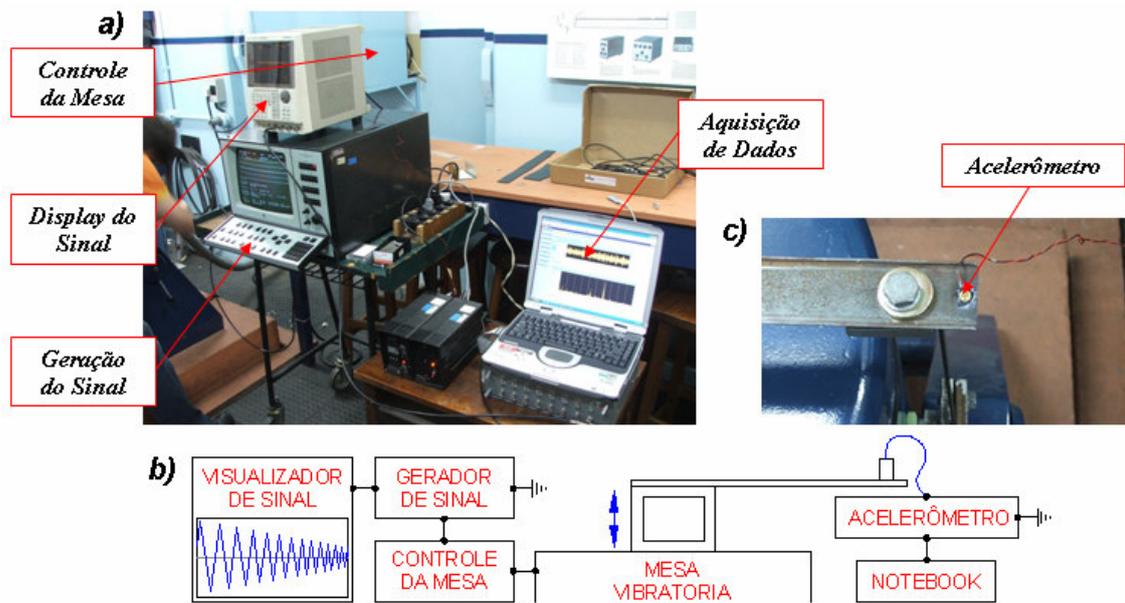


Figura 5.3: Sistema de controle de excitação e de aquisição de dados: a) Representação física. b) Diagrama de blocos. c) Localização do acelerômetro.

Tabela 5.3: Descrição das características dos ensaios realizados.

Excitação Bancada	Primeira Bateria			Segunda Bateria	
	Ruído Branco			Impacto	Harmônica
Sem Borracha	Realizado			Realizado	Não Realizado
Com Borracha 1	def. = 10%	Def. = 20%	def. = 30%	def. = 10% e 20%	def. = 10% e 20%
Com Borracha 2	def. = 10%	Def. = 20%	def. = 30%	-	-

5.1.3. Resultados Experimentais obtidos na Mesa Vibratória

Na primeira bateria de experimentos, inicialmente são comparados os resultados do experimento sem borracha com o teste do corpo de prova “Borracha 1” com o intuito de determinar a influência deste primeiro corpo de prova na resposta do sistema. A partir da Figura 5.4, percebe-se que a adição do corpo de prova “Borracha 1” ao sistema foi eficiente, mas a variação da deformação inicial, em 10%, 20% e 30%, não causou grandes alterações no amortecimento. Em uma segunda análise foram comparados os resultados do experimento sem borracha com o teste do corpo de prova “Borracha 2” tendo o mesmo objetivo da comparação anterior. A partir da Figura 5.5, percebe-se que a adição do corpo de prova “Borracha 2” ao sistema foi, da mesma forma que para “Borracha 1”, eficiente, mas sem grandes alterações no amortecimento para as diferentes deformações iniciais (10%, 20% e 30%).

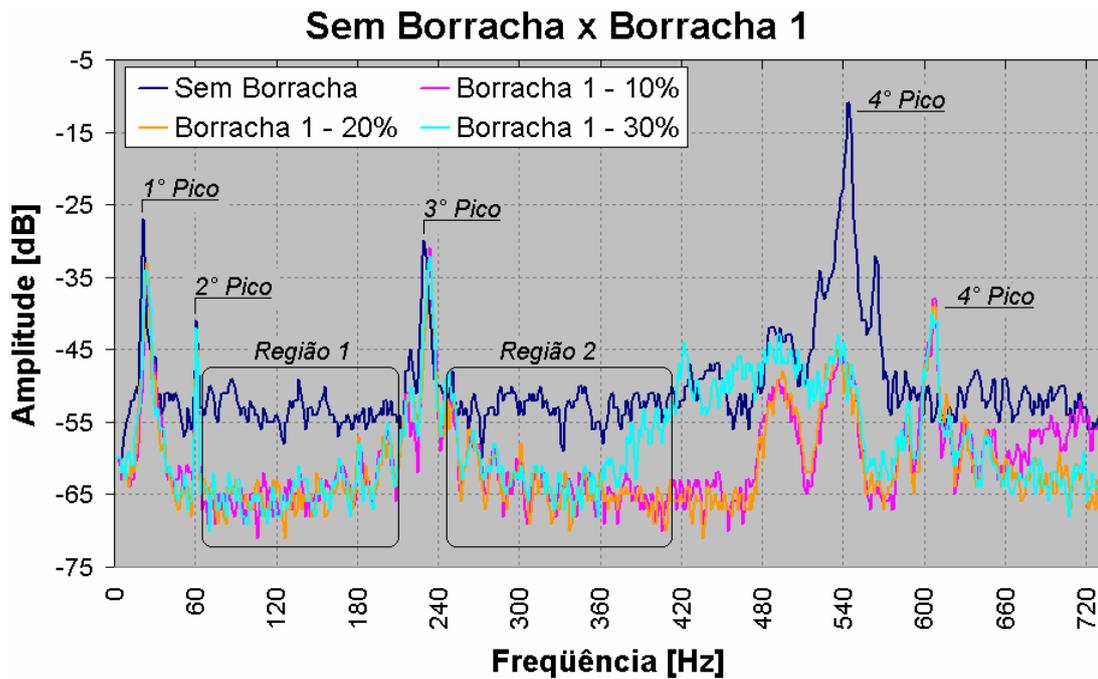


Figura 5.4: Comparação de resultados do sistema sem borracha \times com Borracha 1 com as três deformações iniciais (10%, 20% e 30%).

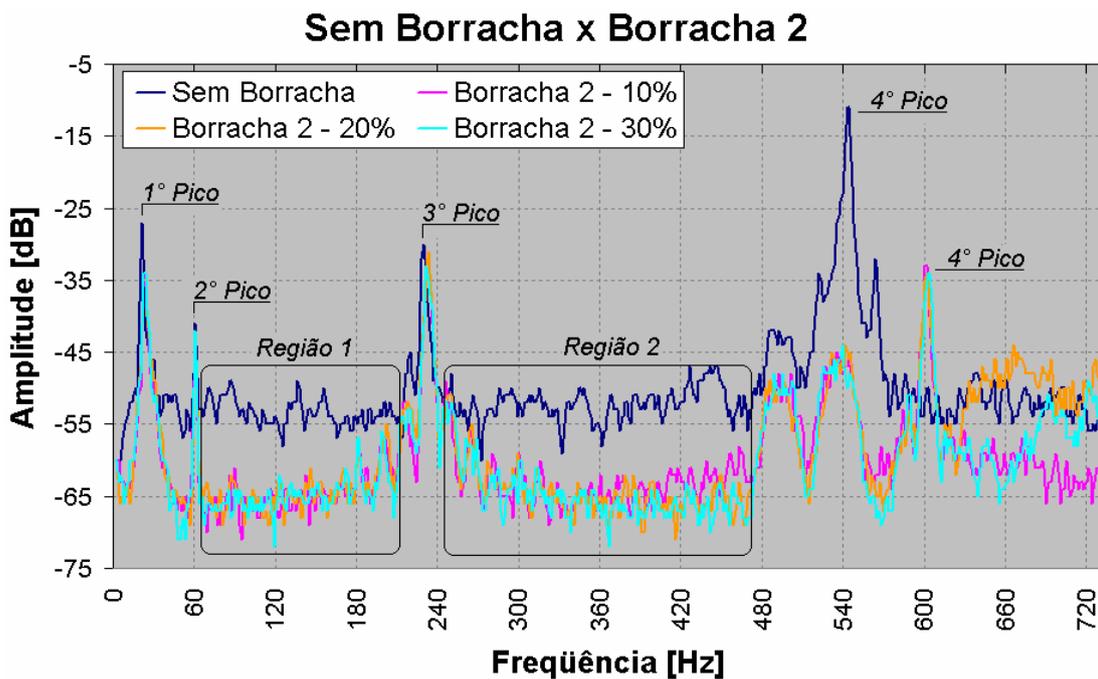


Figura 5.5: Comparação de resultados do sistema sem borracha \times com Borracha 2 com as três deformações iniciais (10%, 20% e 30%).

É importante ressaltar também o comportamento do sistema nas regiões dos vales, assinaladas e nomeadas na Figura 5.4 e na Figura 5.5 como “Região 1” e “Região 2”. Nestas regiões, tanto para o ensaio com o corpo de prova “Borracha 1” quanto para “Borracha 2”, houve uma redução da resposta do sistema em aproximadamente 20% em decibéis, não variando significativamente com a variação da deformação inicial. Desta forma, a Tabela 5.4 resume os

resultados apresentados na Figura 5.4 e na Figura 5.5. Além disso, percebe-se através destas figuras que a resposta mais significativa do sistema à adição da tira da borracha se deu para o 4° Pico que se deslocou no eixo das frequências. Uma das possíveis explicações para isto está na alteração das condições de contorno do sistema com a adição do amortecedor ao sistema, que não só adiciona amortecimento, mas também certo grau de rigidez.

A partir dos resultados extraídos da segunda bateria de experimentos foi possível determinar o índice de amortecimento da estrutura para os ensaios de impacto sobre a viga sem amortecedor e com amortecedor (“Borracha 1” e deformações iniciais de 10% e 20%). A Figura 5.6 (a) representa um exemplo do sinal obtido.

Com estes dados foram calculados o decremento logarítmico e o índice de amortecimento através do método do decremento logarítmico. A Tabela 5.5 resume os resultados encontrados e a Figura 5.6 (b) os representa graficamente.

Tabela 5.4: Comparação de amortecimento dos ensaios experimentais com ruído branco.

Ensaio	1° Pico		2° Pico		3° Pico		4° Pico	
	Freq.	Amort.*	Freq.	Amort.*	Freq.	Amort.*	Freq.	Amort.*
Sem Borracha	20,7Hz	0%	59,8Hz	0%	228,1Hz	0%	541,3Hz	-
Borracha 1 10%	23,2Hz	30%	59,8Hz	2,8%	231,8Hz	4%	605,0Hz	-
Borracha 1 20%	23,2Hz	20%	59,8Hz	1,6%	231,8Hz	17%	605,0Hz	-
Borracha 1 30%	22,0Hz	26%	59,8Hz	2,2%	231,8Hz	5%	605,5Hz	-
Borracha 2 10%	23,2Hz	26%	59,8Hz	2,4%	231,8Hz	5%	600,0Hz	-
Borracha 2 20%	22,0Hz	28%	59,8Hz	3,4%	231,8Hz	3%	600,0Hz	-
Borracha 2 30%	22,0Hz	23%	59,8Hz	2,6%	230,6Hz	10%	601,5Hz	-

* O amortecimento apresentado na Tabela 5.4 foi calculado da seguinte maneira: (1) Foi considerado como 0% amortecido a resposta do sistema sem borracha. (2) As demais percentagens de amortecimento foram calculadas a partir da razão entre a diferença dos valores de pico do ensaio com corpo de prova e do ensaio sem borracha pelo ensaio sem borracha.

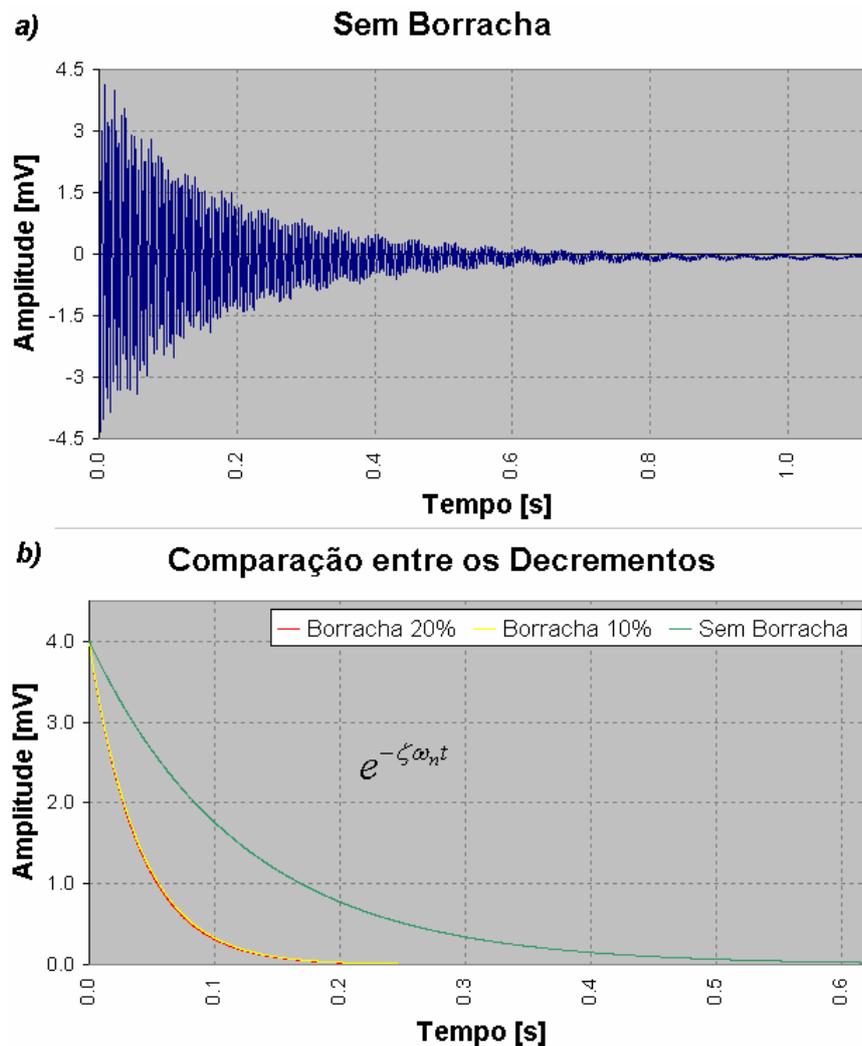


Figura 5.6: a) Sinal no tempo do experimento de impacto sem borracha. b) Comparação entre os decrementos logarítmicos dos três experimentos.

Tabela 5.5: Resultados dos índices de amortecimento.

	Sem Borracha	Borracha 10%	Borracha 20%
x_0 [mV]	2,78	2,01	3,96
x_N [mV]	0,44	0,04	0,06
n	68	55	57
δ	0,0271	0,0711	0,0743
ζ	0,43%	1,13%	1,18%

Como pode ser observado na a Figura 5.6 (b), não há uma mudança significativa nos resultados com a variação da deformação inicial no amortecedor (10% e 20%).

Na Figura 5.7 (ordenadas em escala logarítmica de base 10) se apresentam os resultados no domínio da frequência da viga em balanço para o ensaio de impacto sem amortecedor, e com amortecedor sob 10% e 20% de deformação inicial. É apresentada também, para comparação, a curva do ensaio sob ruído branco com borracha a 10% de deformação inicial. Observando a Figura 5.7 observa-se que:

- A adição do amortecedor atenuou os ruídos no ensaio de impacto. Isso pode ser observado comparando as linhas azul com a verde e a rosa;
- As frequências de $\sim 20\text{Hz}$, $\sim 208\text{Hz}$ e $\sim 514\text{Hz}$ foram bem captadas por ambos os ensaios;

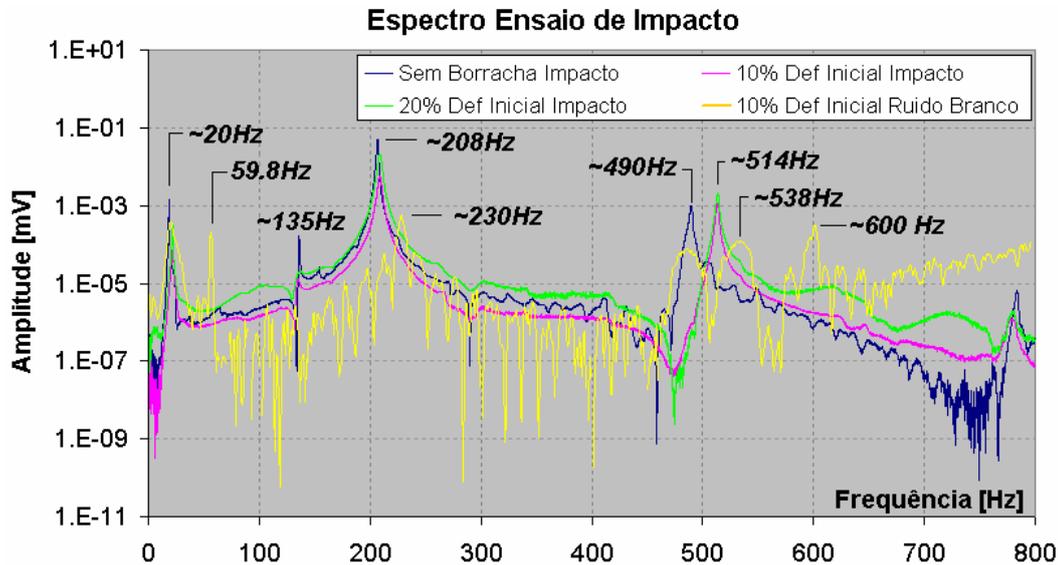


Figura 5.7: Resposta do experimento de impacto comparado com o experimento de ruído branco.

- Surge uma segunda frequência natural ($\sim 135\text{Hz}$) que não apareceu no experimento com ruído branco. Isso deve ter ocorrido pela forma da pancada no ensaio de impacto, que provavelmente não tenha sido realizada precisamente no centro ativando um modo flexo-torcional;
 - A frequência de 59.8Hz (frequência da rede elétrica) não aparece no ensaio de impacto, já que o acelerômetro utilizado tem fonte de energia com baterias;
 - As frequências de $\sim 600\text{Hz}$ não foi captada pelo ensaio de impacto;
- Os resultados das frequências naturais sem e com borracha para o ensaio de impacto são compilados na Tabela 5.6.

Tabela 5.6: Resultados das frequências naturais - ensaio experimental de impacto.

	1° Frequência	2° Frequência	3° Frequência	4° Frequência
Sem Borracha	19,0Hz	136,0Hz	206,5Hz	490,0Hz
Borracha 10%	22,0Hz	135,0Hz	208,0Hz	513,5Hz
Borracha 20%	21,5Hz	135,0Hz	208,8Hz	514,2Hz

Não foi possível a partir do gráfico da Figura 5.7 inferir o valor do amortecimento aplicando as expressões do método da banda de meia potência devido a baixa taxa de aquisição dos resultados experimentais, o que resultou em falta de precisão do gráfico.

Depois de determinadas as frequências naturais do sistema, este foi excitado com uma força harmônica com frequência próxima à da primeira frequência natural de vibração a fim de determinar o grau de não-linearidades do sistema. Segundo o Teorema da Preservação da Frequência (seção 2.2.2), se o sistema é linear, quando este é excitado por um sinal harmônico, sua resposta deve ser harmônica e de mesma frequência da excitação. Quanto mais frequências diferentes daquela sob a qual o sistema foi excitado aparecerem, mais não-linear será o sistema. Fazendo uso deste conceito e observando o gráfico apresentado na Figura 5.8, o qual está em escala logarítmica de base 10, é possível observar que o sistema possui não-linearidades, as quais são de pequena magnitude, já que elas começam a surgir em uma escala 10^4 vezes menor que o pico da magnitude da resposta na frequência da excitação.

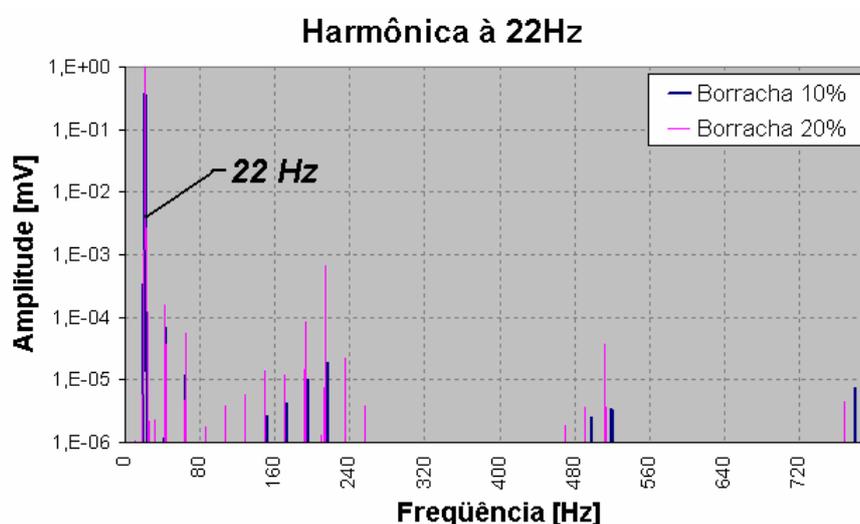


Figura 5.8: Transformada de Fourier da resposta do sistema sob excitação harmônica.

5.1.4. Descrição do Modelo Numérico

O modelo numérico foi construído em elementos finitos no espaço tridimensional, considerando uma lei constitutiva isotrópica e linear utilizando o *software* comercial ANSYS. Os elementos utilizados na construção do modelo numérico são SHELL93 e COMBIN14. O elemento SHELL93 é um elemento de casca quadrático com oito nós e seis graus de liberdade em cada nó, (translação e rotação em x, y e z), este elemento possui rigidez membranal e à flexão. O elemento COMBIN14 é um elemento que permite representar um conjunto mola linear e amortecedor longitudinal no qual o elemento possui dois nós com três graus de liberdade em cada nó considerando apenas deslocamentos em x, y e z. A viga de aço é definida pelo elemento SHELL93, com módulo de elasticidade de 200GPa, densidade de 8000kg/m^3 e coeficiente de Poisson de 0,27. As espessuras do conjunto régua e agarre é, 1mm e 6mm, respectivamente.

Para alimentar a mola e o amortecedor foi necessário medir em laboratório o módulo de elasticidade da “Borracha 1” $E=6.63\text{MPa}$ que combinada com as dimensões da borracha apresentadas na Tabela 5.1 permitem definir uma rigidez de 500N/m , os valores de coeficiente de amortecimento adotados para alimentar o elemento mola-amortecedor foram os obtidos experimentalmente e apresentados na Tabela 5.5 ($\zeta = 1,13\%$ para deformação inicial à 10% e $\zeta = 1,18\%$ para deformação inicial à 20%).

Na realização da análise modal, todos os graus de liberdade localizados na base da régua foram restringidos. Já na fixação da borracha com a base rígida, foram restringidos todos os graus de liberdade, exceto na direção u_y que foi imposto uma deformação inicial de 10% e 20% no comprimento da borracha para cada análise.

Na realização da análise harmônica todos os graus de liberdade localizados na base da régua foram restringidos com exceção de u_y . Nesta direção, foi inserido como excitação na base um deslocamento prescrito harmônico de amplitude $0,01\text{m}$ representando o movimento harmônico na base da régua. Os graus de liberdade localizados na fixação da borracha com a base rígida foram restringidos da mesma forma que os citados na análise modal.

Foi realizada análise modal da bancada sem borracha e com borracha, esta com deformação inicial de 10% e 20% . Em ambas as situações foram visualizados os 4 primeiros modos de vibração.

A análise harmônica se deu para as deformações iniciais de 10% e 20% . Em ambos os casos a excitação harmônica foi dada na base da bancada na direção u_y e com uma amplitude de $0,01\text{m}$ na faixa de frequência de 0 a 800Hz . Através desta análise foi verificada a validade da calibração frente aos dados experimentais. Isto se dá comparando as respostas dos picos do espectro das frequências na análise harmônica com as respostas do espectro da análise experimental.

A calibração do modelo numérico consiste em transferir os dados de coeficiente de amortecimento e rigidez da borracha obtida experimentalmente para o modelo numérico, em seguida determinar os modos e as frequências naturais do modelo. Para obter um melhor resultado na calibração do modelo, o módulo de elasticidade e a densidade da estrutura também foram ajustados, esse ajuste ocorreu variando em pequenas proporções a densidade e o módulo de elasticidade da estrutura. Conforme descrito anteriormente, o módulo de elasticidade que gerou uma melhor calibração do modelo foi de 200GPa e a densidade foi de 8000kg/m^3 . A Figura 5.9 apresenta o modelo numérico com suas restrições e malha. As propriedades mecânicas da borracha não foram modificadas.

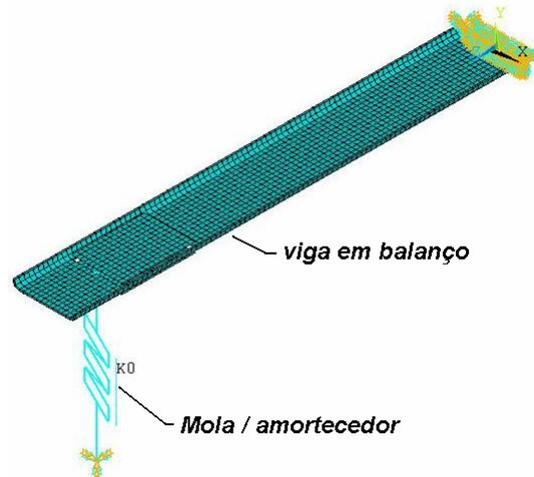


Figura 5.9: Representação das condições de contorno e da malha do modelo.

5.1.5. Resultados Numéricos Obtidos

A Tabela 5.7 apresenta uma comparação das quatro primeiras frequências naturais obtidas experimentalmente e numericamente. Os resultados obtidos numericamente foram satisfatórios, o que permitiu um bom ajuste do modelo numérico em relação ao modelo experimental.

A análise harmônica serviu para verificar a validade da calibração do modelo numérico em relação ao modelo experimental, comparando os resultados obtidos nos ensaios com a análise harmônica.

No gráfico da Figura 5.10 (eixo das ordenadas em escala logarítmica de base 10) se apresentam as respostas do modelo numérico sob excitação harmônica para uma faixa de frequência de 0 a 800Hz, de um nó localizado na região próxima em que foi fixado o acelerômetro durante o ensaio, os picos representam as frequências naturais atingidas pelo sistema durante análise no domínio da frequência do modelo numérico.

Tabela 5.7: Comparativo da análise modal entre modelo numérico e os experimentais.

Deformação inicial da borracha 10%				Deformação inicial da borracha 20%			
Modelo Numérico		Bancada		Modelo Numérico		Bancada	
Modo	Freq [Hz]	Modo	Freq. [Hz]	Modo	Freq [Hz]	Modo	Freq. [Hz]
1°	27,0	1°	23,2	1°	26,98	1°	23,2
2°	139,2	2°	136,0*	2°	145,6	2°	136,0*
3°	215,5	3°	231,8	3°	215,4	3°	231,8
4°	605,7	4°	605,0	4°	603,9	4°	605,2

* valor obtido do ensaio experimental de impacto. Demais valores do ensaio com ruído branco.

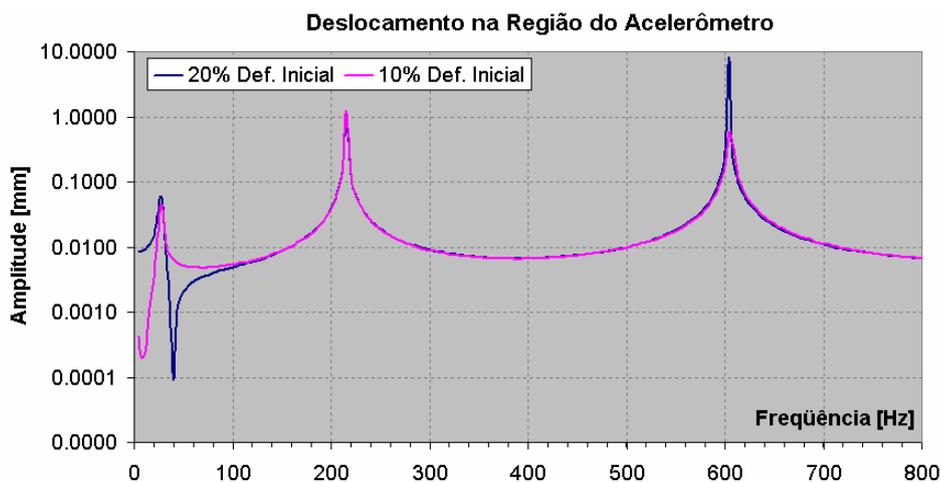


Figura 5.10: Comparação das resp. numérica da análise harmônica com 10% e 20% de def. inicial.

Comparando as respostas experimentais com as numéricas (Figura 5.7 com Figura 5.10) para os dois casos de deformação inicial, observa-se que os picos são coincidentes em faixas de frequências semelhantes. A não aparição de alguns picos na análise experimental devem representar modos puramente torcionais, que devido as imperfeições do modelo experimental foram captados pelos acelerômetros (Ver Figura 5.13).

5.1.6. Calibração do Modelo Numérico via Curva de Histerese

Utilizando mesmo tipo de borracha empregado como amortecedor nos ensaios na mesa vibratória, foi solicitado ao CETEPO (Centro de Tecnologia em Polímeros), que faz parte do grupo SENAI, da possibilidade de realizar um ensaio experimental com um dos corpos de prova listados anteriormente a fim de caracterizar o material através da sua curva de histerese. Este experimento foi realizado tendo 22Hz como frequência de ensaio, 10N como pré-carga de tração, amplitude de ± 4 mm, nível médio de 4mm e número de ciclos igual a 100. Na coleta de dados foram capturados 280 pontos por ciclo. Na Figura 5.11 se apresenta a maquina de ensaio utilizada com o corpo de prova na posição na qual foi ensaiado. Na Figura 5.12 se apresenta a curva tensão deformação obtida no ensaio onde é possível observar claramente o comportamento histerético da borracha quando submetida à carga cíclica.

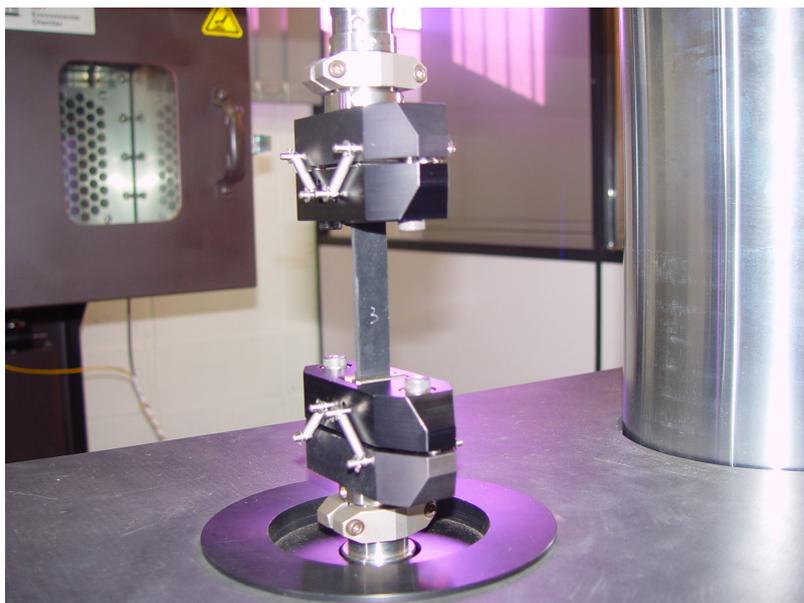


Figura 5.11: Imagem do ensaio realizado no CETEPO.

Da mesma maneira, o modelo utilizado foi representado em elementos finitos, no espaço tridimensional, com material constitutivo isotrópico no *software* comercial ANSYS, mas desta vez foi utilizado um elemento de mola não-linear CONBIM39, para a tira de borracha. O elemento COMBIN39 é não-linear na curva força \times deslocamento e pode ser considerado como mola - amortecedor longitudinal ou torcional. A opção utilizada foi mola - amortecedor longitudinal no qual o elemento possui dois nós com três graus de liberdade em cada nó considerando apenas deslocamentos em x , y e z , não permitindo rotação e flexão do elemento. Tendo como dados de entrada os pontos da curva de histerese, o amortecimento deste elemento é definido implicitamente. Outra característica do elemento está em permitir grandes deslocamentos.

Diferentemente do estudo anterior, nesta etapa, é realizada a análise modal e foram realizadas apenas com 10% de deformação inicial, já tendo sido esta explicada anteriormente. Além do elemento utilizado, a diferença está na inserção das propriedades do mesmo. Neste caso é introduzido como dados de entrada os pontos da metade superior da curva de histerese gerada experimentalmente, isto é, a parte do ciclo relativa ao seu carregamento. A parte relativa ao descarregamento, ou o retorno da curva de histerese, é gerado automaticamente pelo elemento COMBIN39.

Gráfico da Histerese - NBR BunaN Força x Deslocamento

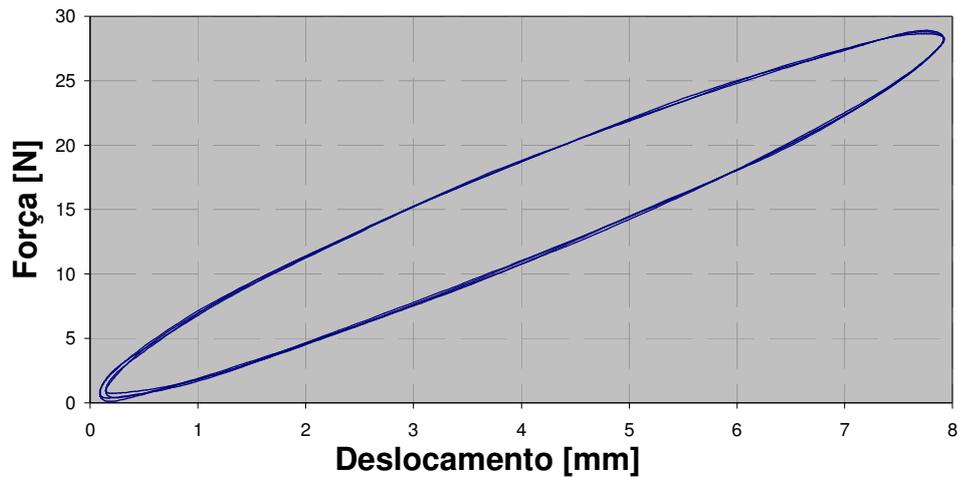


Figura 5.12: Curva de histerese gerada no CETEPO.

Os resultados obtidos com o modelo com mola-amortecedor não linear são apresentados a seguir junto com os obtidos utilizando a mola-amortecedor linear já apresentado na secção 5.1.5 e os resultados experimentais já apresentados na secção 5.1.3.

Na Figura 5.13 se apresentam as formas modais obtidas com este novo modelo com amortecimento histerético.



Figura 5.13: Modos e frequências naturais para o modelo com Amortecimento Histerético.

Observando a Tabela 5.8 e Figura 5.13, é possível perceber que a calibração do modelo numérico através da curva de histerese é satisfatória frente aos resultados experimentais.

Uma análise harmônica também foi realizada com o modelo com amortecimento histerético. Os resultados são apresentados em forma gráfica deslocamento \times frequência, sendo estes dados relativos ao ponto onde, experimentalmente, se encontrava o acelerômetro, isto é, na extremidade livre da régua. Como pode ser observado na Figura 5.14, o segundo modo de vibração, diferentemente da análise experimental, não foi detectado na análise numérica,

confirmando que este modo, no âmbito numérico, é apenas torsional, não possuindo nenhuma parcela de flexão. Já no âmbito experimental, devido a imperfeições de procedimento ou da bancada, este modo se apresentou como sendo flexo-torcional.

Tabela 5.8: Comparativo entre as frequências naturais encontradas.

Deformação inicial da borracha 10%					
Modelos Numéricos				Result. Experimentais	
	Viga + amortecedor Linear	Viga + Amortecimento Histerético			
Modo	Frequência [Hz]			Modo	Freq. [Hz]
1°	27,0	23,7		1°	23,2
2°	139,2 (torcional)	132,5 (torcional)		2°	136,0*
3°	215,5	215,4		3°	231,8
4°	605,7	607,1		4°	605,0

* valor experimental extraído do resultado de impacto. Demais valores do ensaio de ruído branco.

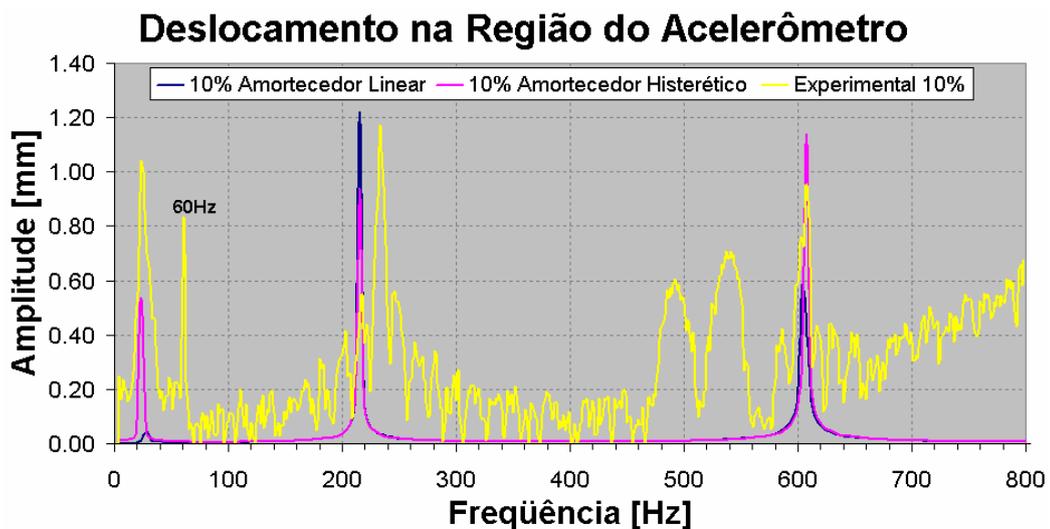


Figura 5.14: Gráfico Deslocamento \times Frequência no local do acelerômetro - 10% deformação inicial.

5.1.7. Discussão dos Resultados

Neste item 5.1 foram realizados experimentos visando comparar a influência da frequência de excitação e da deformação inicial de um elastômero sobre um sistema mecânico simples. Foi também verificado o nível de amortecimento obtido nas diferentes condições ensaiadas e o nível de não-linearidade que o sistema apresentou em função dos resultados obtidos. Em um segundo momento, foram gerados e calibrados modelos numéricos utilizando elementos de mola linear, alterando os parâmetros de densidade e modo de elasticidade da viga engastada-livre, e não-linear, inserindo os pontos da curva de histerese do composto de borracha.

É importante salientar aqui, que as amplitudes absolutas dos resultados apresentados nas figuras deste capítulo não eram de interesse do presente estudo, sendo elas importantes apenas para uma comparação relativa entre resultados apresentados.

A partir destes resultados é possível observar:

- Não se obtiveram mudanças significativas no nível de amortecimento ao mudar de 10% a 30% as tensões iniciais nos amortecedores. Fica como dúvida se esta tendência se manteria para valores de tensões iniciais de maior magnitude;
- Apesar dos ensaios não seguirem nenhuma normalização, foi possível definir tendências de comportamento que auxiliem no conhecimento da potencialidade dos amortecedores ensaiados na redução de vibrações em condições similares de trabalho;
- É possível dizer que um amortecedor elastomérico pode ser substituído por um elemento de amortecedor num modelo numérico simplificado obtendo-se bons resultados;
- Dentre os modelos analisados, é possível dizer que a calibração realizada com a curva de histerese se mostrou muito mais simples e eficiente quando se dispõe destes dados.

5.2. ESTUDO DA SENSIBILIDADE DAS CONSTANTES DO MODELO DE YEOH

Nesta aplicação se investiga como a variabilidade dos resultados obtidos nos ensaios se transmitem as constantes do modelo usado. Foi utilizado o modelo de Yeoh por ser simples e com responsabilidades bem definidas para os parâmetros do modelo, diferentes para cada parte da curva tensão deformação obtida. Variabilidades como as aqui induzidas são comuns de ser achadas entre diferentes corpos de prova. Este estudo visa ponderar a importância de um ajuste acurado ao extremo na calibração de um modelo constitutivo para ser utilizado em um software de elementos finitos.

5.2.1. Descrição dos Estudos Realizados

O estudo foi realizado empregando os dados obtidos por Treloar (1975) em termos de tração uniaxial e corte puro, estas curvas são apresentadas na Figura 5.15. E a calibração do modelo foi realizado utilizando o algoritmo de regressão apresentado pelo sistema de elementos finitos ABAQUS.

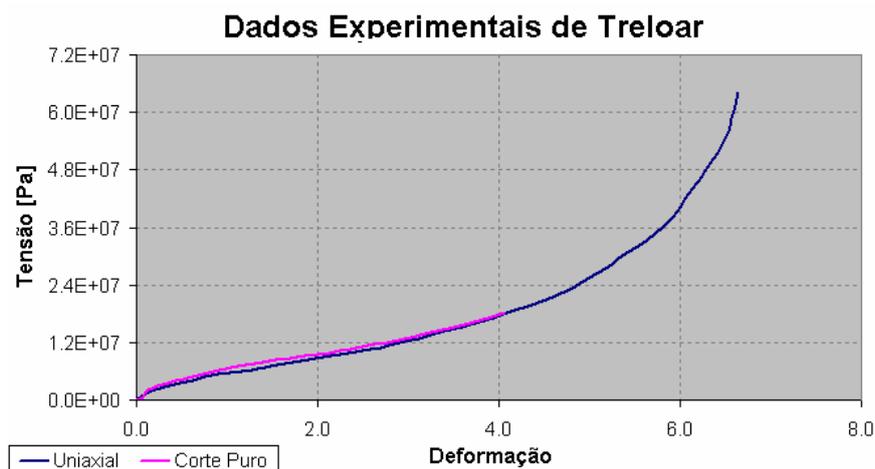


Figura 5.15: Dados experimentais de Treloar.

Para realizar o ajuste da curva foi eleito o modelo Constitutivo de Yeoh. Sua escolha se deu por se mostrar estável para o ajuste das duas curvas experimentais a serem ajustadas (ensaio de tração uniaxial e ensaio de corte puro), apresentando um ajuste aceitável para tais curvas.

Estudo 1: Ajuste dos Parâmetros do Modelo de Yeoh para os resultados experimentais de Treloar.

Para realizar o ajuste das constantes do Modelo Yeoh aos resultados experimentais de Treloar [1975] foram seguidos dois caminhos:

Caminho 1: O algoritmo de ajuste do ABAQUS foi alimentado com os dados de tração uniaxial gerando os parâmetros do modelo Yeoh. Através destes parâmetros, o *software* gerou as curvas ajustadas de tração uniaxial e corte puro. A Figura 5.16 e a Figura 5.17 apresentam os resultados experimentais e os ajustes obtidos. Na Tabela 5.9 se apresentam os valores das constantes obtidos. Cabe ressaltar aqui que a curva ajustada de corte puro foi gerada a partir das constantes constitutivas do modelo abastecido apenas com dados experimentais de tração uniaxial.

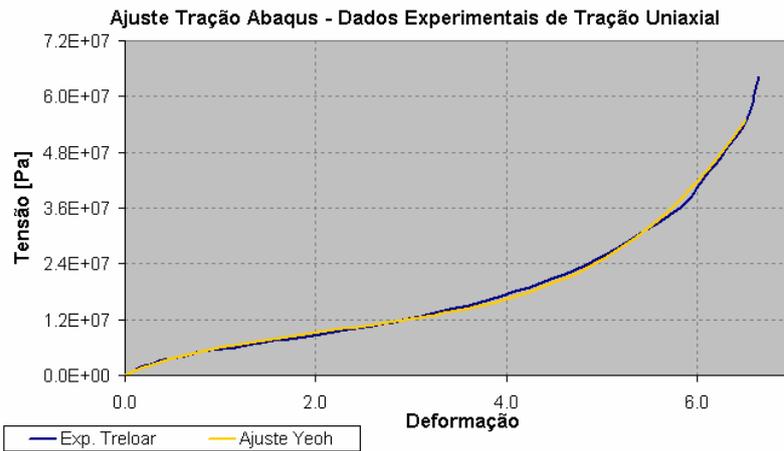


Figura 5.16: Tração uniaxial ajustado apenas com dados experimentais de tração uniaxial (Caminho 1).

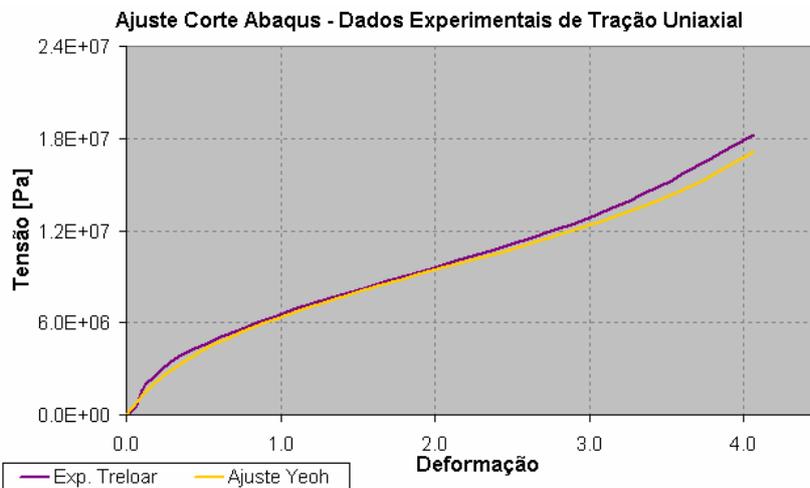


Figura 5.17: Corte puro ajustado apenas com dados experimentais de tração uniaxial (Caminho 1).

Caminho 2: O algoritmo de ajuste do ABAQUS foi alimentado com dados experimentais de tração uniaxial e corte puro. Foi utilizado neste caso também o modelo de Yeoh e com o modelo ajustado foram obtidas as curvas para os dois testes. Na Figura 5.18 e Figura 5.19 se apresentam as curvas experimentais e os ajustes obtidos e na Tabela 5.9 se apresentam os parâmetros de ajuste considerados neste caso. É possível apreciar nesta última tabela que a maior diferença entre os coeficientes acontece no C20 onde a diferença normalizada entre as duas constantes pelos dois caminhos em porcentagem resulta em 17,31%.

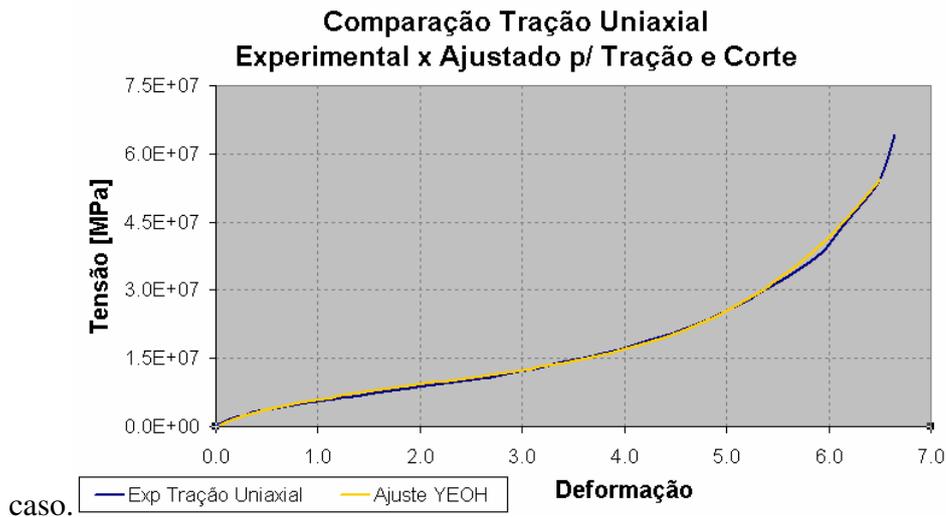


Figura 5.18: Tração uniaxial ajustado com dados experimentais de tração uniaxial e corte puro (Caminho 2).

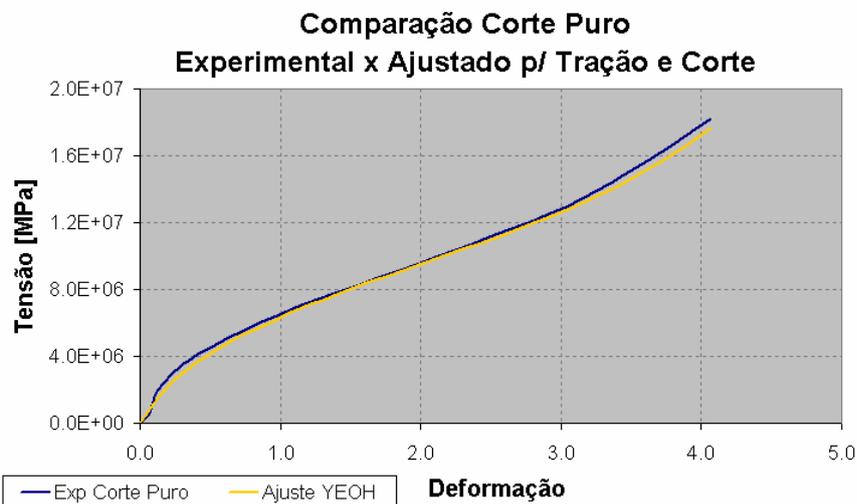


Figura 5.19: Corte puro ajustado com dados experimentais de tração uniaxial e corte puro (Caminho 2).

Tabela 5.9: Constantes constitutivas do ajuste dos dados de Treloar para o modelo de Yeoh.

Valores [Pa]	<i>C10</i>	<i>C20</i>	<i>C30</i>
Caminho 1	1766554,54	-16944,03	433,46
Caminho 2	1745265,01 (-1,21%)*	-14011,06 (-17,31%)*	395,08 (-8,85%)*

*o valor entre parêntesis se obtém dividindo o valor do [(Caminho 2-Caminho1)/ valor do Caminho 1]x100.

Estudo 2: Estudo de sensibilidade dos parâmetros do Modelo Yeoh a partir dos ensaios de Treloar.

Neste estudo se perturbarão os resultados experimentais de Treloar gerando uma família de 6 curvas para cada tipo de ensaio. A forma de realizar a perturbação foi multiplicando os valores originais por constantes de perturbação, sendo que ditas constantes são apresentadas na Tabela 5.10.

Tabela 5.10: Esquema das curvas perturbadas a partir dos dados experimentais.

	Fatores de Multiplicação					
Nova Curva	A	B	C	D	E	F
Tensão	1,00	1,00	1,25	0,75	1,25	0,75
Deformação	1,25	0,75	1,00	1,00	1,25	0,75

Se realiza o ajuste de cada uma das curvas geradas empregando os dois Caminhos apresentados no Estudo 1. Isto é, achando os parâmetros de Yeoh utilizando so os dados perturbados do ensaio de tração uniaxial é o Caminho 1 e achando os parâmetros de Yeoh utilizando so os dados perturbados do ensaio de tração uniaxial e corte puro é o Caminho 2. Nas Figura 5.20 e Figura 5.21 se apresentam as curvas experimentais e os ajustes realizados para o Caminho 1, e na Tabela 5.11 se apresentam as suas constantes obtidas para o Modelo de Yeoh.

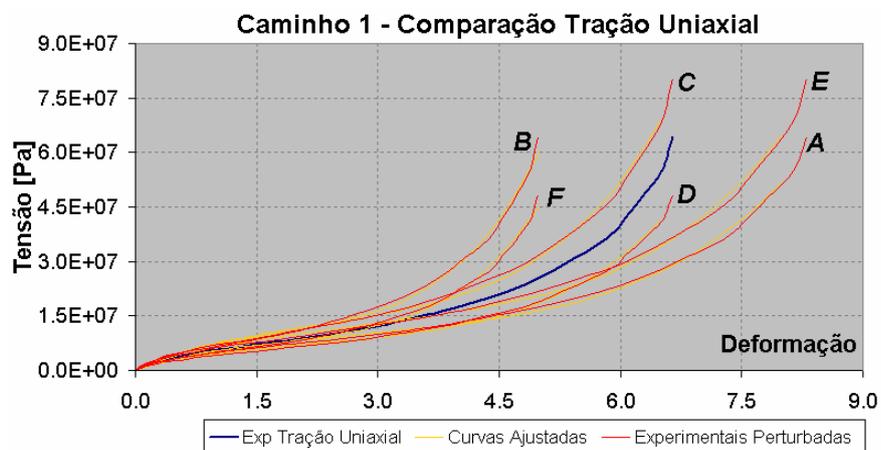


Figura 5.20: Ajuste das curvas perturbadas de tração uniaxial só com dados de tração uniaxial (Caminho 1).

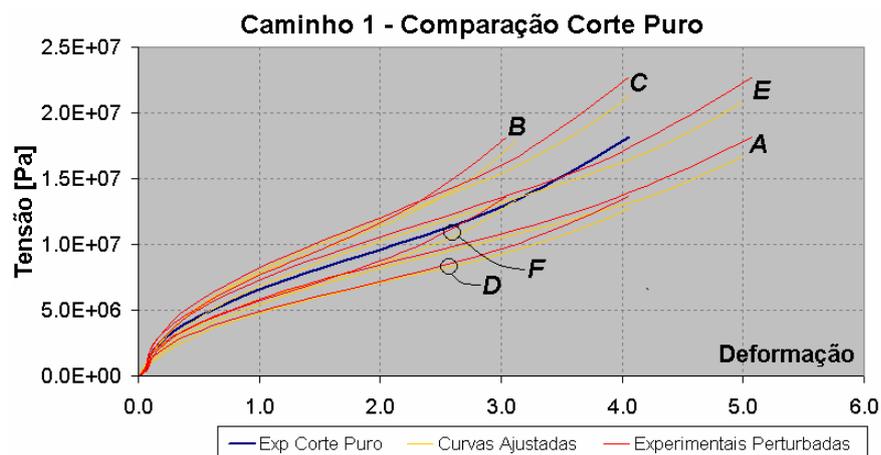


Figura 5.21: Ajuste das curvas perturbadas de corte puro só com dados de tração uniaxial (Caminho 1).

O mesmo procedimento foi realizado abastecendo o algoritmo de ajuste com as curvas perturbadas de tração uniaxial e corte puro. A Figura 5.22, a Figura 5.23 e a Tabela 5.11 ilustram os resultados obtidos.

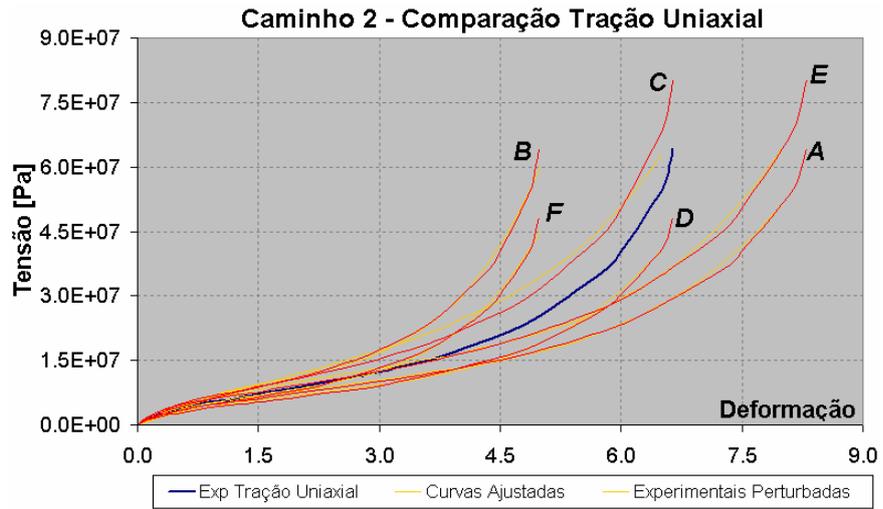


Figura 5.22: Ajuste das curvas perturbadas de tração uniaxial com dados de tração e corte (Caminho 2).

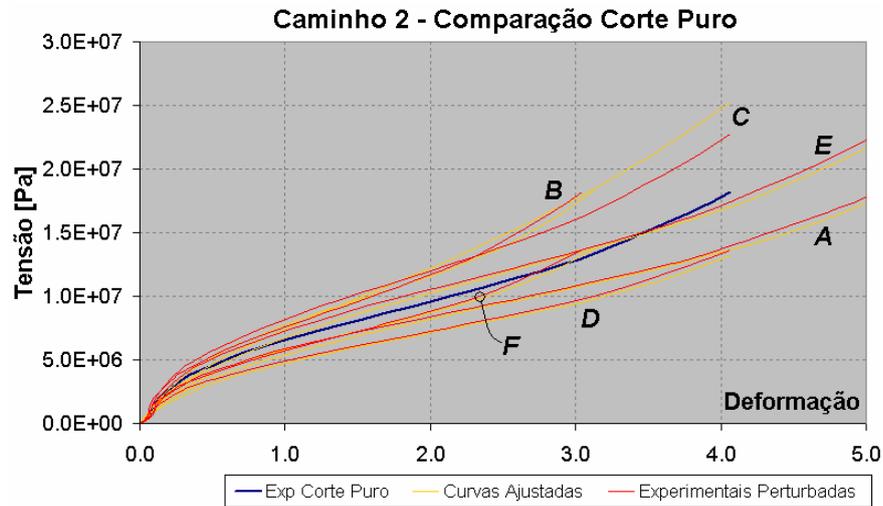


Figura 5.23: Ajuste das curvas perturbadas de corte puro com dados de tração e corte (Caminho 2).

Para uma melhor compreensão, os valores apresentados na Tabela 5.11 foram normalizados segundo a equação (111) (valores entre parênteses em dita tabela) e graficados na Figura 5.24 e na Figura 5.25.

$$\bar{C}_{0j} = \frac{C_{0i}}{C_{\text{experimental}}} \tag{111}$$

Tabela 5.11: Constantes constitutivas de Yeoh ajustadas com dados de tração e corte.

	Curvas Perturbadas	C10 [Pa]	C10 [Pa]	C20 [Pa]	C20 [Pa]	C30 [Pa]	C30 [Pa]
		Caminho 1	Caminho 2	Caminho 1	Caminho 2	Caminho 1	Caminho 2
		1766554,54	1745265,01	-16944,03	-14011,06	433,46	395,08
A	Xexp*1,25; Yexp	1491465,65 (0,84)	1468009,35 (0,84)	-9510,86 (0,56)	-7567,55 (0,54)	157,54 (0,36)	140,73 (0,36)
B	Xexp*0,75; Yexp	2201733,86 (1,25)	2185947,52 (1,25)	-36770,49 (2,17)	-32043,03 (2,29)	1592,65 (3,67)	1488,32 (3,77)
C	Xexp; Yexp*1,25	2209639,00 (1,25)	2182650,19 (1,25)	-21222,71 (1,25)	-17221,89 (1,23)	542,20 (1,25)	489,69 (1,24)
D	Xexp; Yexp*0,75	1325650,78 (0,75)	1310785,38 (0,75)	-12735,40 (0,75)	-10746,07 (0,77)	325,35 (0,75)	299,43 (0,76)
E	Xexp*1,25; Yexp*1,25	1865542,75 (1,06)	1835848,99 (1,05)	-11901,99 (0,70)	-9361,15 (0,69)	196,96 (0,45)	174,95 (0,44)
F	Xexp*0,75; Yexp*0,75	1652198,17 (0,93)	1642017,08 (0,94)	-27607,13 (1,63)	-24687,58 (1,76)	1194,68 (2,76)	1130,63 (2,86)

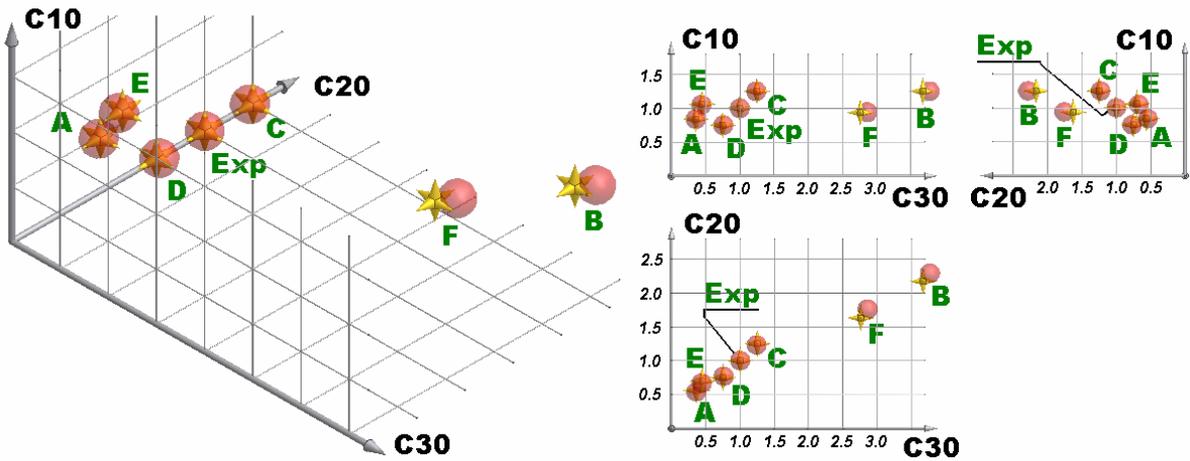


Figura 5.24: Constantes constitutivas de YEOH (para legenda, vide Tabela 5.11). Esferas representam o Caminho 1 e estrelas o Caminho 2.

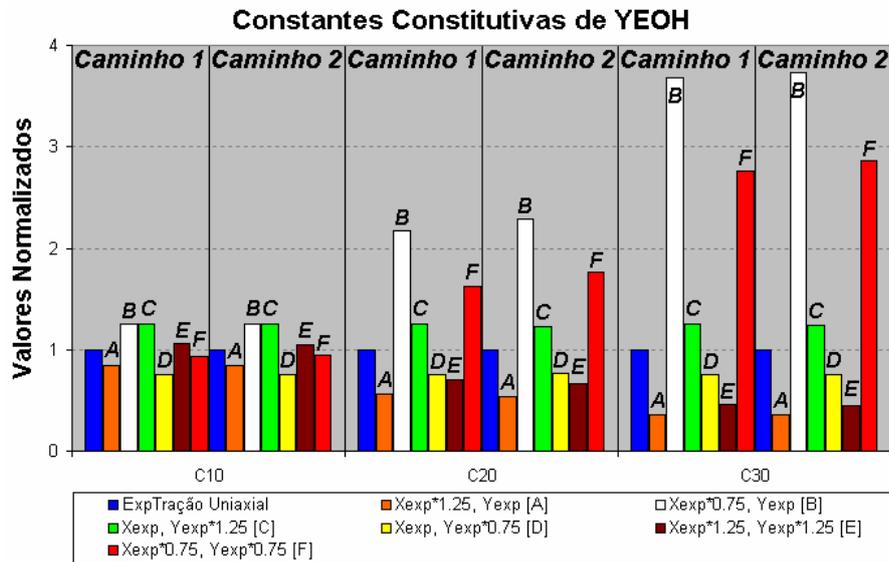


Figura 5.25: Constantes constitutivas de Yeoh para Treloar.

Estudo 3: Estudo de sensibilidade dos parâmetros do Modelo Yeoh a partir de ensaios próprios.

Tendo sido obtidos bons resultados numéricos a partir dos dados experimentais de Treloar, decidiu-se realizar o mesmo procedimento a partir de dados experimentais próprios os quais foram realizados no CETEPO (Centro de Tecnologia em Polímeros – SENAI / RS). Se realizaram dois conjuntos de ensaios, um de tração uniaxial e outro de corte puro. Os corpos de prova utilizados seguiram a norma ASTM D412a-06 e o procedimento de ensaio esteve em conformidade com a norma BS 903-5. A velocidade de estiramento do corpo de prova que foi de 5mm/min conforme Gent (2001). A Figura 5.26 a) e b) apresenta as dimensões dos corpos de prova utilizados e as características do Elastomero ensaiado se apresenta na Tabela 5.12.

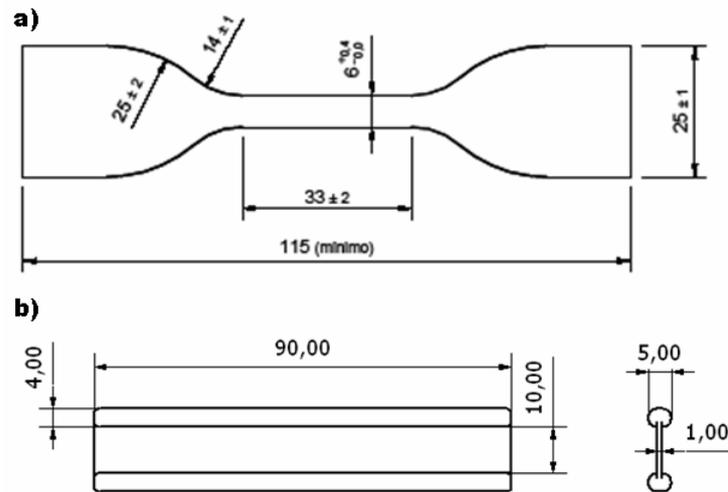


Figura 5.26: Corpos de prova de tração a) e corte puro b) utilizados nos experimentos.

Tabela 5.12: Composto ensaiado no CETEPO.

Ingrediente	Qty [phr]*
Elastômero NR GEB1	100,00
Ativador Esterina Dupla	1,00
Ativador Oxido de Zinco	5,00
Negro de Fumo N660	65,00
Agente de Cura Enxofre Duplamente Ventilado	2,00
Acelerador Perkacit MBTS	1,00
Acelerador Dissulfeto de Tetrametiluram	0,15

*phr = *parts per hundred of rubber*, ou seja, quantidade do aditivo para cada 100 partes de borracha.



Figura 5.27: Máquina de ensaio e agarre para tração uniaxial.

Para a realização dos experimentos foi utilizada uma máquina de ensaios universal EMIC (Figura 5.27) com velocidade constante de separação entre as garras. Para o ensaio de tração uniaxial, além do dispositivo de agarre do corpo de prova, utiliza-se também um extensômetro para a medição do seu estiramento (Figura 5.27). O dispositivo de agarre para o ensaio de corte puro pode ser visualizado na Figura 5.28.

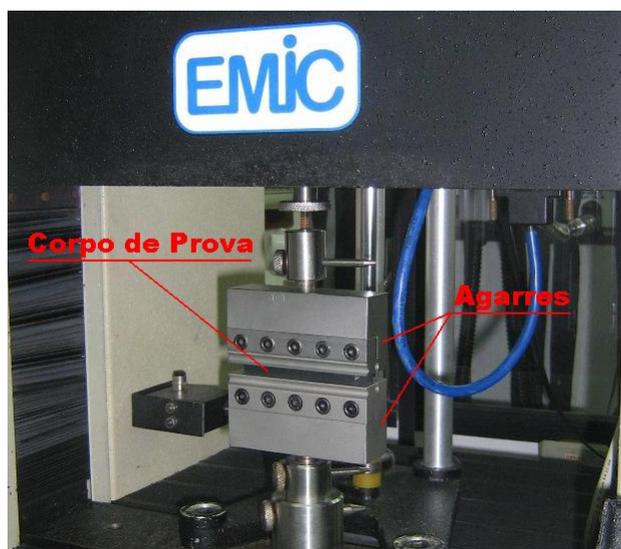


Figura 5.28: Agarre para o ensaio de corte puro.

Ensaio de Tração Uniaxial : Para tração uniaxial, são realizados cinco experimentos com cinco corpos de prova até a sua ruptura. A partir destes valores, é extraída uma média aritmética simples para obter a curva do material. Como pode ser observado na Figura 5.29, houve uma grande variação das curvas entre o primeiro e o quinto corpo de prova. Os profissionais do CETEPO, quando indagados sobre as discrepâncias entre as curvas, sugeriu que fossem desconsideradas a primeira e a segunda e que fosse realizada a média das três curvas centrais referentes aos corpos de prova 3, 4 e 5. Segundo o CETEPO, é comum a existência de curvas muito distantes entre si neste experimento e que, historicamente, há uma variação de aproximadamente 20% entre as curvas extremas e a curva do material, isto é, a média aritmética das curvas geradas nos ensaios. Desta maneira, foi então gerada a curva média a partir das curvas 3,4,5 conforme sugerido e a partir desta foi calculado percentualmente o erro máximo e mínimo das curvas CP1 e CP2. Este foi calculado dividindo-se a diferença entre as tensões sob 210% de deformação das curvas CP1 e CP2 pela tensão da curva média sob esta mesma deformação. Como resultado encontra-se 16,3% de diferença entre a curva média e as curvas CP1 e CP2. Este valor é considerado admissível pelo Laboratório CETEPO. Retornando ao estudo 2 percebe-se que 16,3% fica dentro do valor de 25% utilizado para perturbar as curvas experimentais.

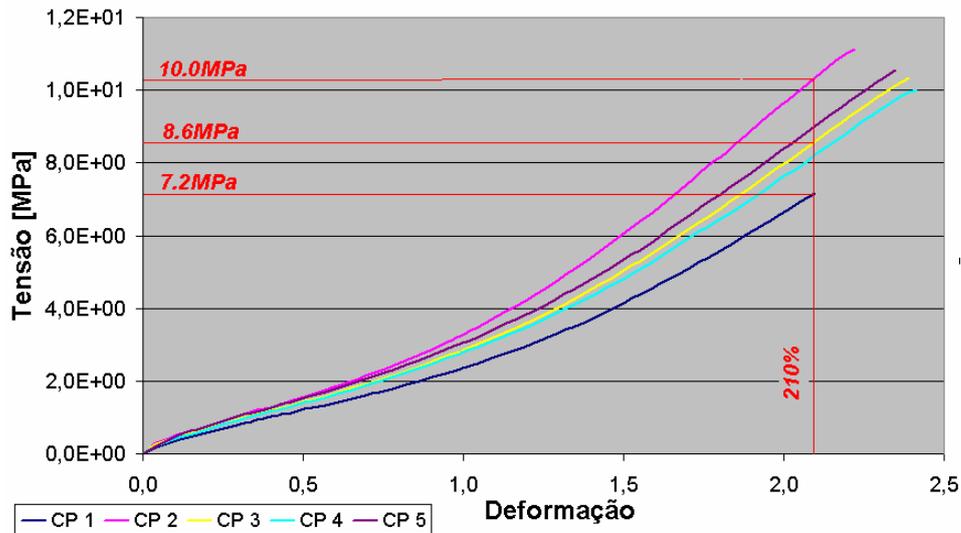


Figura 5.29: Curvas experimentais de tração uniaxial geradas no CETEPO.

Ensaio de Corte Puro: Para o ensaio de corte puro, foram utilizados três corpos de prova. A partir destas curvas, da mesma maneira que para tração uniaxial, é determinada a curva do material realizando uma média aritmética simples. Conforme pode ser observado na Figura 5.30, neste ensaio houve uma curva que se distanciou bastante das outras duas, curva que os laboratoristas do CETEPO sugeriu que fosse eliminada do cálculo da média. Realizando a média das curvas CP2 e CP3 e calculando o erro para a curva CP1 (utilizando o mesmo procedimento de tração uniaxial) foi encontrado o valor de 39.3%. Este elevado erro foi relacionado a alguma falha de procedimento no ensaio do CP1.

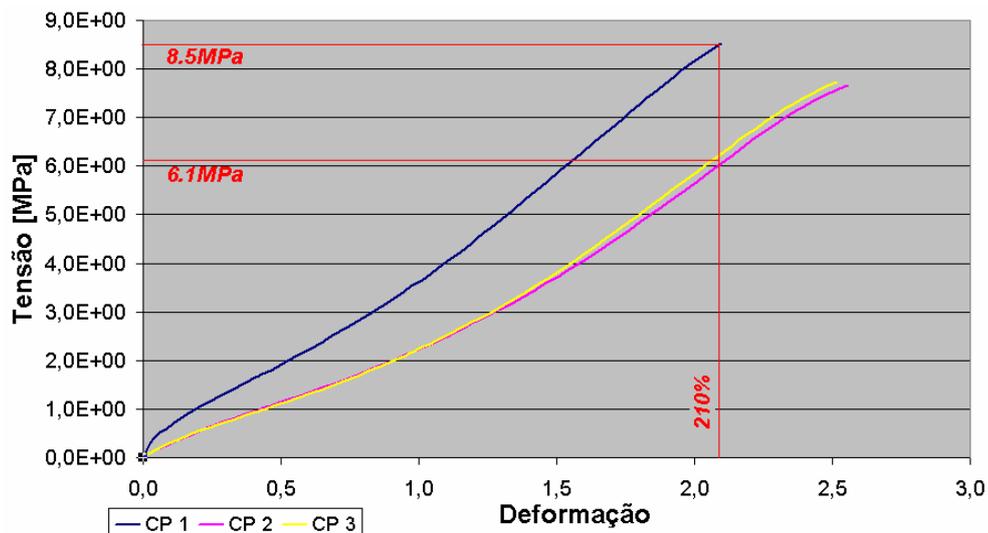


Figura 5.30: Curvas experimentais de corte puro geradas no CETEPO.

Calibração das Curvas experimentais utilizando o Modelo de Yeoh: Primeramente se alimenta o algoritmo de ajuste do ABAQUS com os valores experimentais de tração uniaxial (Caminho 1). Os resultados obtidos na calibração do modelo de Yeoh se

apresentam nas Figura 5.31 e Figura 5.32 As constantes se apresentam na Tabela 5.13. É possível visualizar que neste caso o ajuste da curva de corte puro foi deficiente.

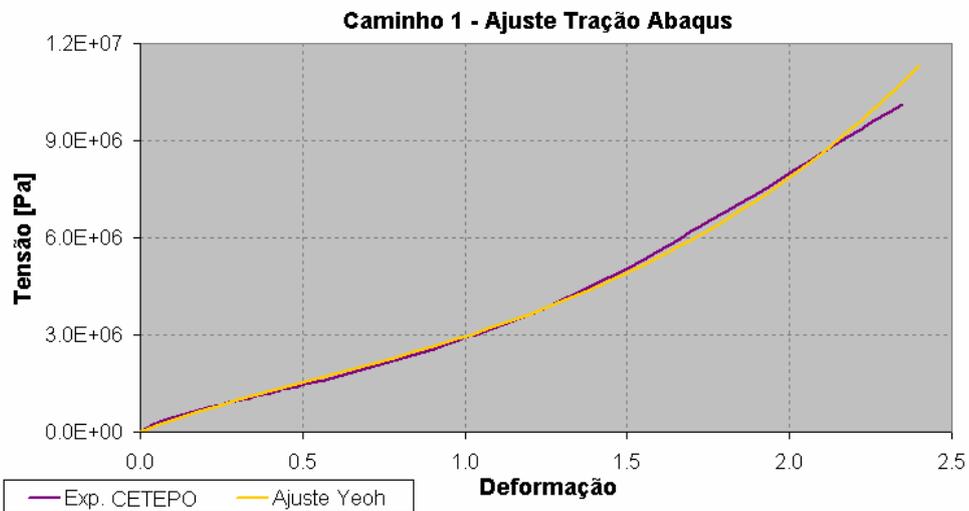


Figura 5.31: Tração uniaxial ajustado apenas com dados experimentais de tração uniaxial (Caminho 1).

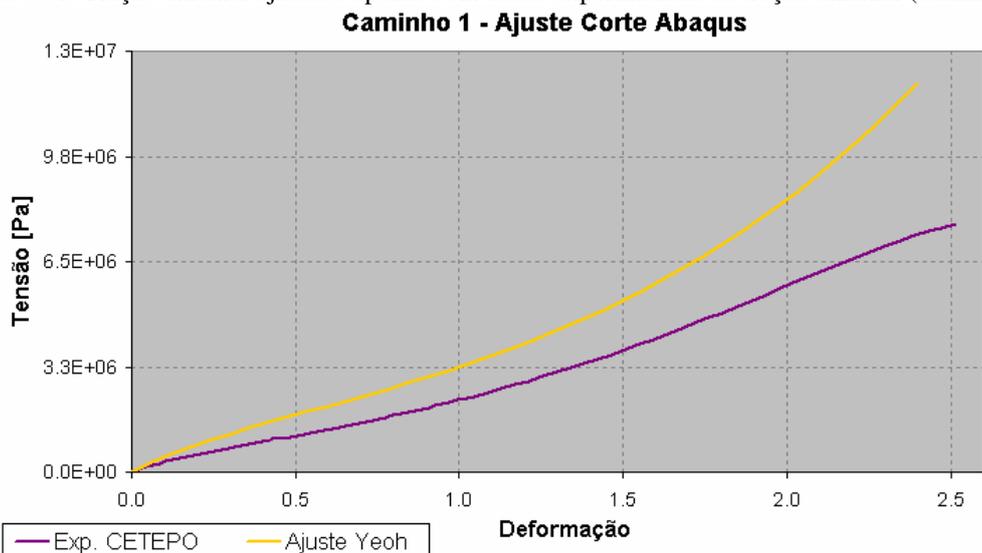


Figura 5.32: Corte puro ajustado apenas com dados experimentais de tração uniaxial (Caminho 1).

Posteriormente se realiza o cálculo dos parâmetros do Modelo de Yeoh utilizando as curvas experimentais a tração uniaxial e a corte puro (Caminho 2). Os resultados no ajuste são apresentados na Figura 5.33 e na Figura 5.34. E na Tabela 5.13 se apresentam os parâmetros do modelo de Yeoh obtidos. Neste caso, como evidenciam as figuras, o ajuste foi consideravelmente melhor que aquele realizado com o Caminho 1.

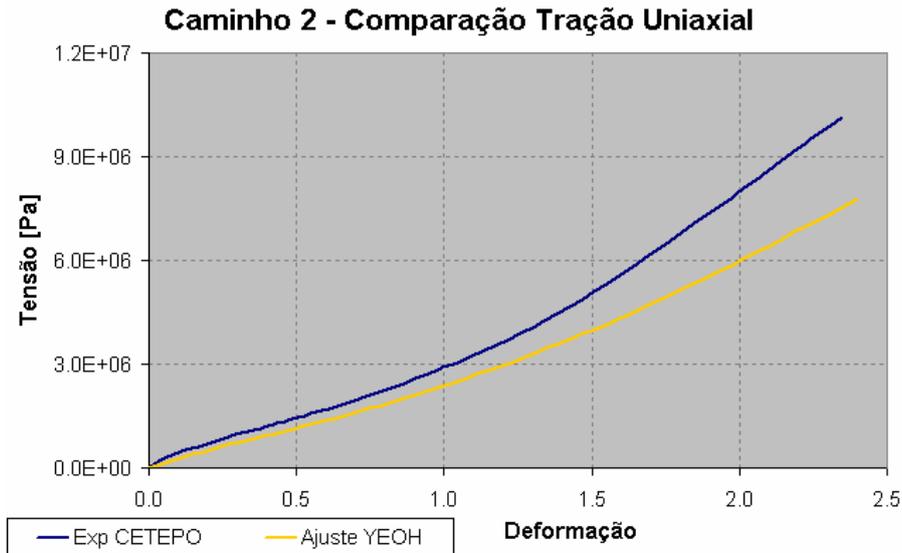


Figura 5.33: Tração uniaxial ajustado com dados experimentais de tração uniaxial e corte puro (Caminho 2).

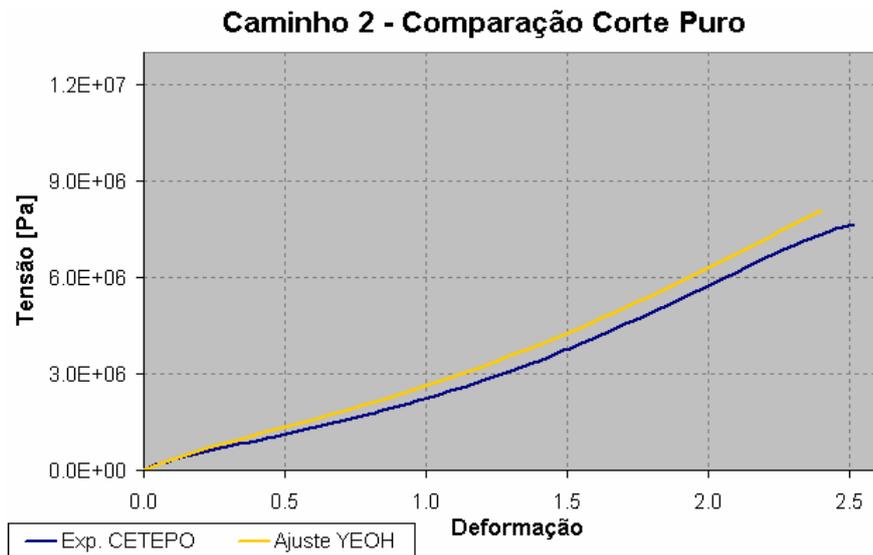


Figura 5.34: Corte puro ajustado com dados experimentais de tração uniaxial e corte puro (Caminho 2).

Tabela 5.13: Constantes constitutivas do ajuste dos dados do CETEPO para Yeoh.

Valores [Pa]	$C10$	$C20$	$C30$
Caminho 1	677696,95	37544,50	1362,55
Caminho 2	488065,94 (-27,98%)	50215,51 (33,75%)	-923,34 (-1,68%)

*o valor entre parêntesis se obtém dividindo o valor do [(Caminho 2-Caminho1)/ valor do Caminho 1]x100.

Estudo de sensibilidade a partir dos resultados experimentais perturbados: A partir das curvas medias para os ensaios experimentais de Tração Uniaxial e Corte Puro realizados no CETEPO realiza-se um estudo similar ao Estudo 2. Desta vez, as perturbações dos valores experimentais serão distorcidos em 20% a partir das curvas medias (distorção considerada como a tolerada para resultados experimentais pelo laboratório CETEPO). As curvas ajustadas a partir destas constantes são apresentadas na Figura 5.35 e na Figura 5.36. Na

Tabela 5.14 são apresentados os coeficientes que permitem gerar a famílias de cruvas perturbadas a partir da curva experimental media.

Tabela 5.14: Esquema das curvas perturbadas a partir dos dados experimentais (CETEPO).

	Constante Multiplicadora					
Nova Curva	1	2	3	4	5	6
Tensão	1,00	1,00	1,20	0,80	1,20	0,80
Deformação	1,20	0,80	1,00	1,00	1,20	0,80

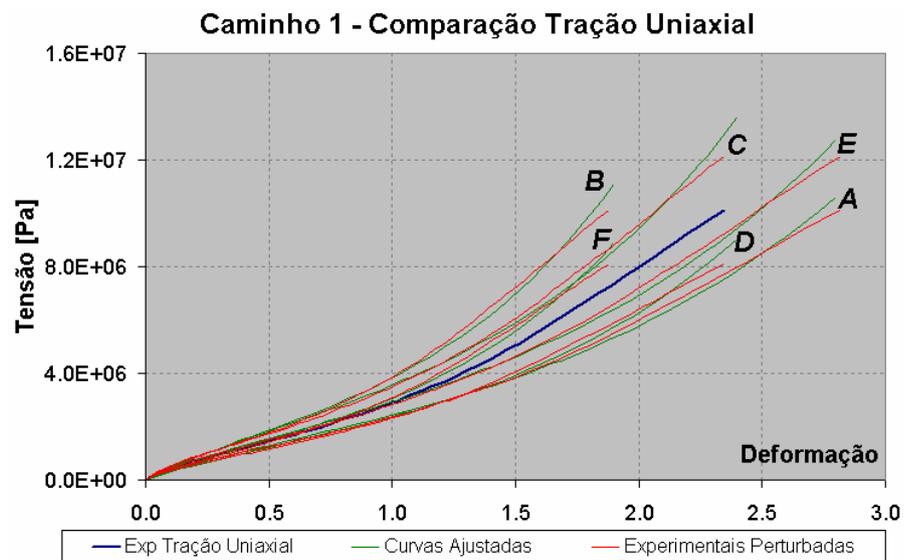


Figura 5.35: Ajuste das curvas perturbadas de tração uniaxial apenas com dados de tração uniaxial (Caminho 1).

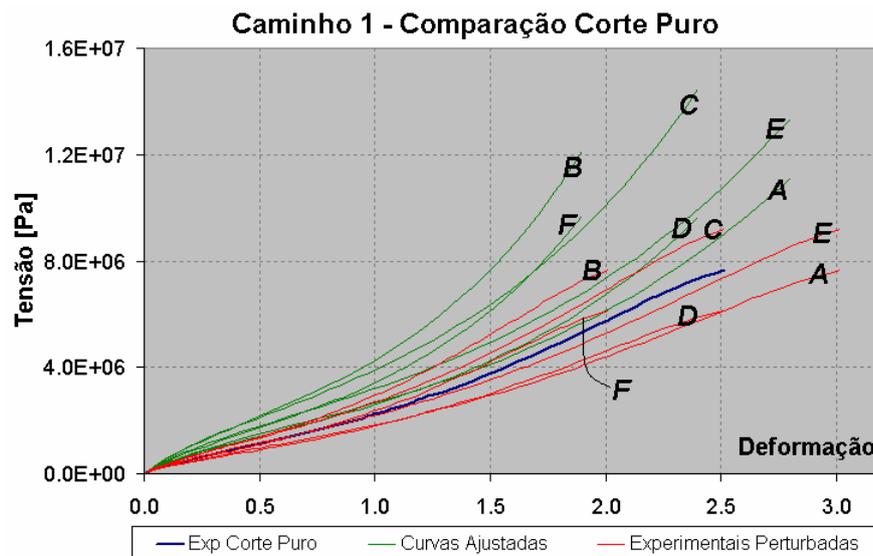


Figura 5.36: Ajuste das curvas perturbadas de corte puro apenas com dados de tração uniaxial (Caminho 1).

O mesmo procedimento foi realizado, mas desta vez abastecendo algoritmo de ajuste com os dados experimentais de tração uniaxial e corte puro (Caminho 2). Com as seis

novas curvas geradas foram obtidas as constantes apresentadas na Tabela 5.15. As curvas ajustadas com estas constantes são apresentadas na Figura 5.37 e na Figura 5.38.

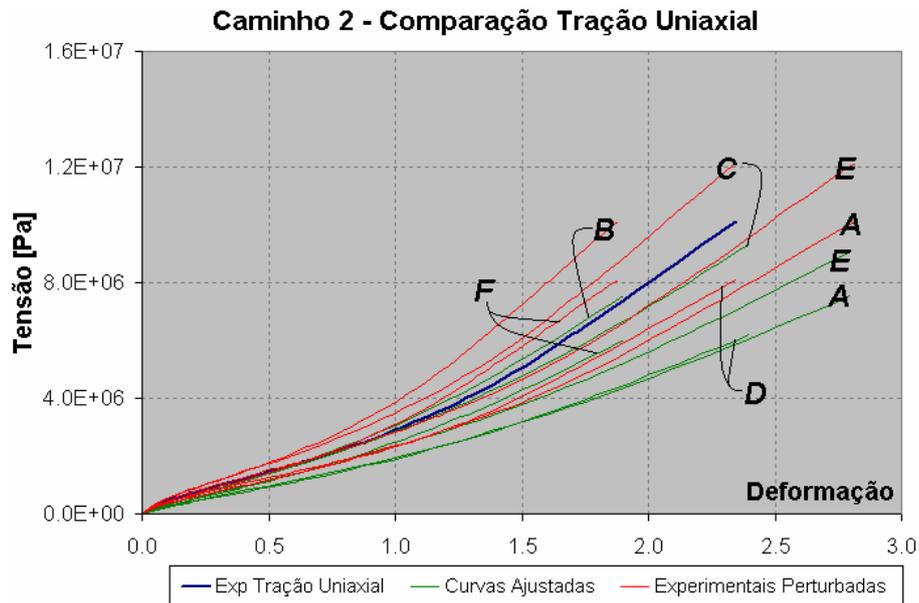


Figura 5.37: Ajuste das curvas perturbadas de tração uniaxial com dados de tração e corte (Caminho 2).

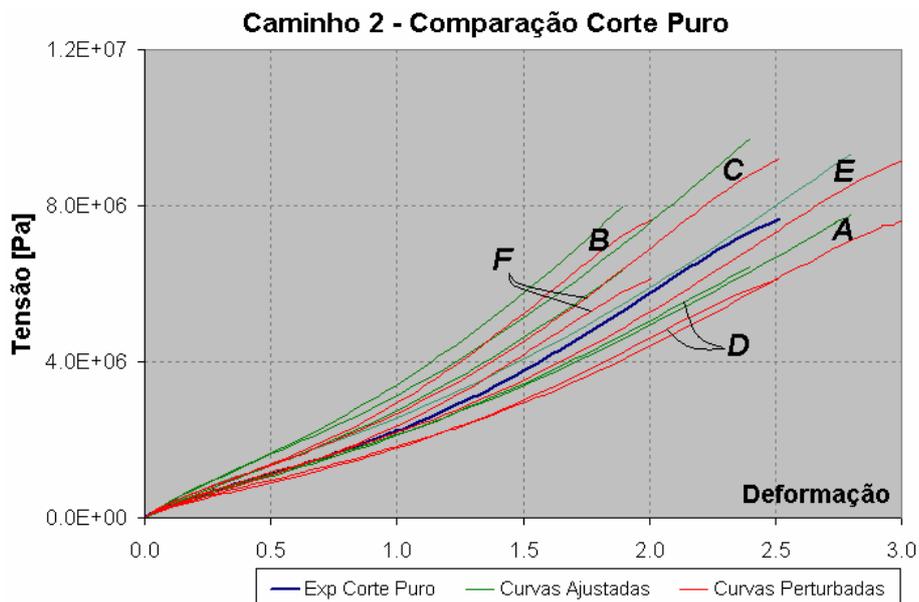


Figura 5.38: Ajuste das curvas perturbadas de corte puro com dados de tração e corte (Caminho 2).

Para uma melhor compreensão dos resultados, as constantes constitutivas do modelo de Yeoh são apresentadas na Figura 5.39 e na Figura 5.40. normalizadas utilizando a expressão 4.3, estes valores normalizados estão na Tabela 5.15 entre parêntesis

Tabela 5.15: Constantes constitutivas de Yeoh ajustadas com dados do CETEPO Perturbados.

Curva	Curvas Perturbadas	C10 [Pa] Caminho 1	C10 [Pa] Caminho 2	C20 [Pa] Caminho 1	C20 [Pa] Caminho 2	C30 [Pa] Caminho 1	C30 [Pa] Caminho 2
Exp		677696,95	488065,94	37544,50	50215,51	1362,55	-923,34
A	Xexp*1,20; Yexp	584647,47 (0,86)	422983,92 (0,87)	26226,78 (0,70)	34485,86 (0,69)	486,71 (0,36)	-548,50 (0,59)
B	Xexp*0,80; Yexp	815445,75 (1,20)	579756,08 (1,19)	56790,42 (1,51)	79653,47 (1,59)	4397,80 (3,23)	-1730,68 (1,87)
C	Xexp; Yexp*1,20	812869,27 (1,20)	585520,64 (1,20)	44991,32 (1,20)	59885,33 (1,19)	1655,73 (1,21)	-1077,80 (1,17)
D	Xexp; Yexp*0,80	541026,00 (0,80)	389781,67 (0,80)	30245,91 (0,81)	41153,40 (0,82)	1080,65 (0,79)	-822,85 (0,89)
E	Xexp*1,20; Yexp*1,20	701259,05 (1,03)	509365,89 (1,04)	31432,67 (0,84)	40824,38 (0,81)	593,57 (0,44)	-632,24 (0,68)
F	Xexp*0,80; Yexp*0,80	650970,33 (0,96)	464631,87 (0,95)	45821,37 (1,22)	64905,99 (1,29)	3491,65 (2,56)	-1560,53 (1,69)

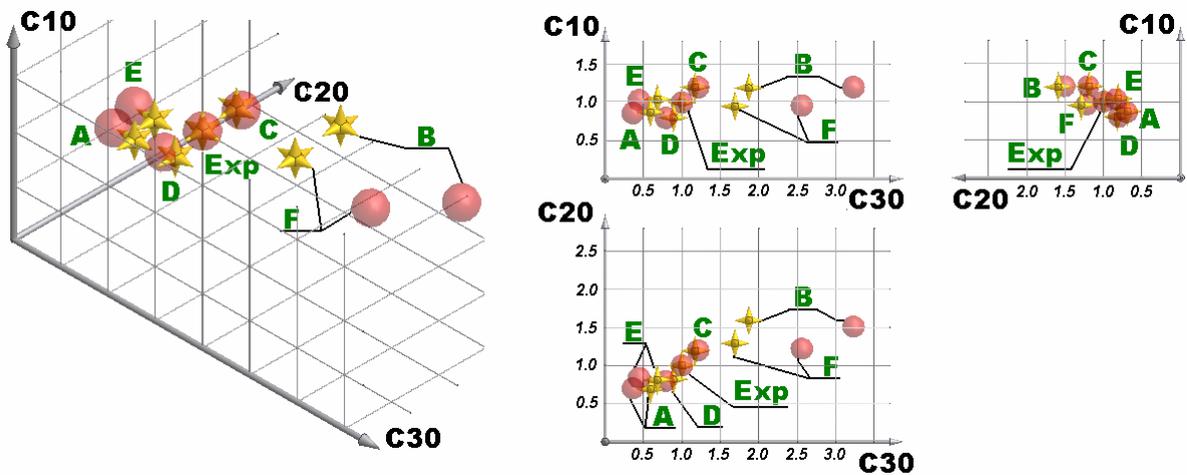


Figura 5.39: Constantes constitutivas de YEOH (para legenda, vide Tabela 5.15). Esferas representam o Caminho 1 e estrelas o Caminho 2.

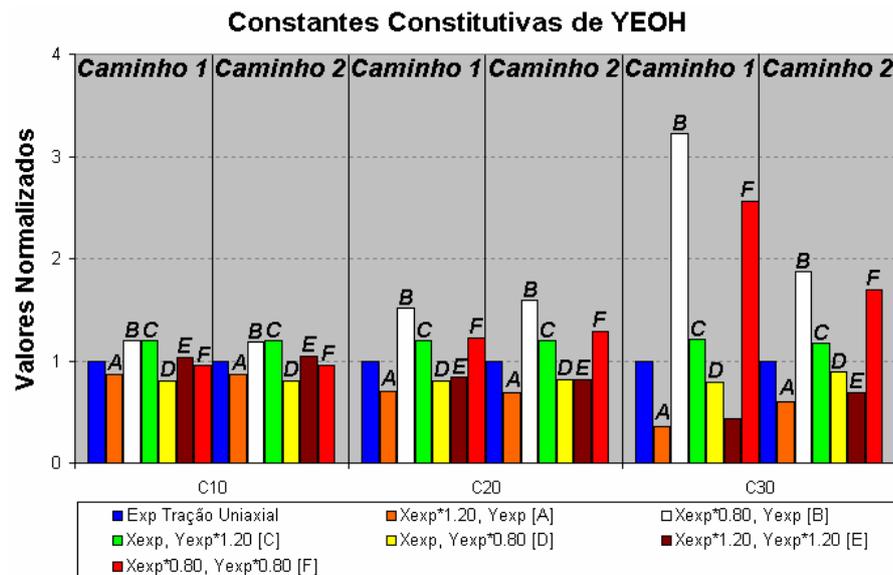


Figura 5.40: Constantes constitutivas de Yeoh para composto do CETEPO.

A Figura 5.41 apresenta a influência de cada uma das constantes no ajuste das curvas tensão vs. deformação. Isto é, a constante C10 influencia na primeira parte da curva, C20 na parte intermediária ou de inflexão e C30 na parte final onde o material sofre um enrijecimento. Para uma melhor compreensão, este gráfico foi gerado apenas com os fatores de multiplicação que geraram ajustes extremos.

Assim, comparando a Figura 5.39 e a Figura 5.41, é possível perceber que o parâmetro que mais varia é o responsável pela parte da curva relativa ao enrijecimento (C30), tendo menores valores as constantes de $X_{exp} * 1,20$; Y_{exp} (curva A) e crescendo a partir deste até $X_{exp} * 0,80$; Y_{exp} (Curva B). Isso pode ser confirmado observando a Figura 5.40, no gráfico C20xC30, onde os pontos dos coeficientes das curvas A e B são os mais distantes dos pontos relativos ao experimental. O segundo parâmetro que mais varia é C20, ficando bem clara a diferença de inclinação das curvas nesta faixa. Mais uma vez, comparando com a Figura 5.40, gráfico C10xC20, percebe-se que os pontos relativos a curva B encontram-se mais distantes dos pontos relativos ao experimental do que os pontos relativos a curva A. Na Figura 5.41 evidencia-se a influencia deste parametro nas curvas, já que a curva B está mais distante da experimental que a curva A. O mesmo acontecendo para o coeficiente C10, mas em menor escala devido a baixa faixa de deformações em que ele atua.

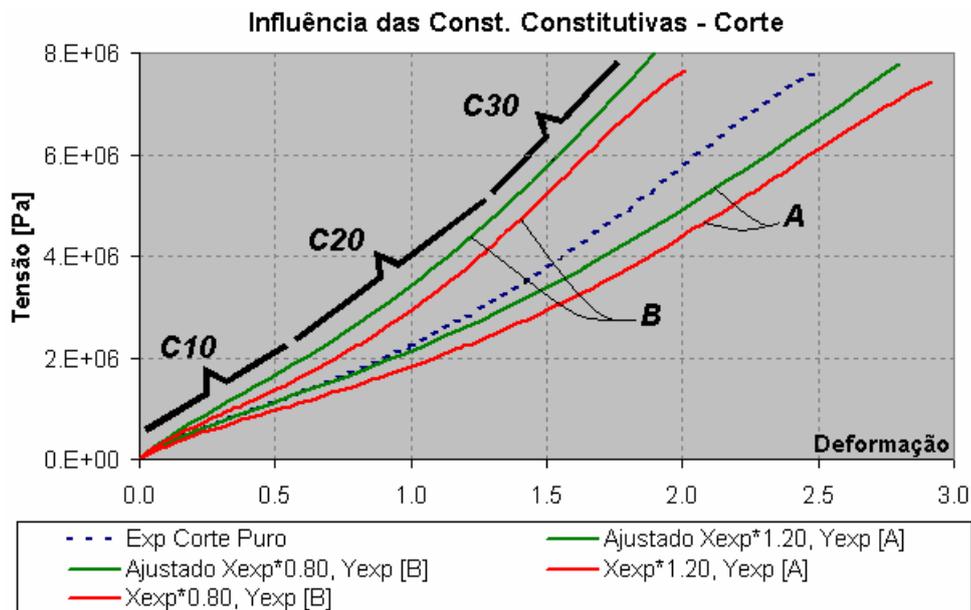


Figura 5.41: Influência dos coeficientes constitutivos na curva tensão vs. Deformação para o ensaio de Corte Puro.

5.2.2. Discussão dos Resultados dos Três Estudos Realizados

Estudos preliminares utilizando dados experimentais de Treloar extraídos da literatura foram realizados a fim de se analisar a influência das constantes constitutivas no ajuste

de dados experimentais e a necessidade ou não da utilização dos dados do ensaio de corte puro para tal ajuste. Para tanto foram utilizados fatores de multiplicação para perturbar as curvas experimentais a fim de gerar uma região no espaço que pudesse conter um bom ajuste para ambas as solicitações. A partir deste estudo conclui-se:

- O método apresentou excelentes resultados no ajuste das curvas experimentais, independentemente se o algoritmo do ABAQUS foi abastecido apenas com dados de tração uniaxial (Caminho 1) ou em conjunto os valores de Tração Uniaxial e de Corte Puro (Caminho 2);
- As constantes constitutivas geradas a partir das curvas perturbadas forneceram valores coerentes. Como pode ser observado na Figura 5.42, os coeficientes gerados com os dados experimentais, encontram-se aproximadamente no baricentro dos demais pontos gerados pelas curvas perturbadas. Esta figura representa apenas C10xC20, mas o mesmo fenômeno é observado nos outros planos;

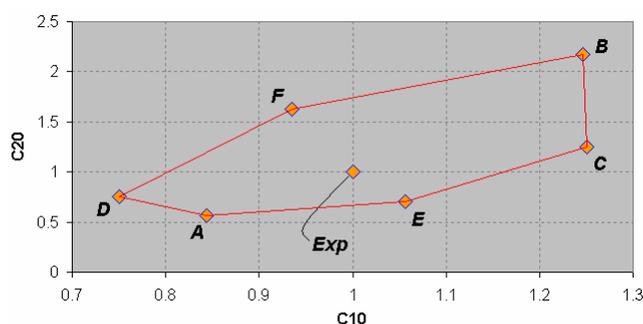


Figura 5.42: Localização no plano dos pontos dos coeficientes constitutivos.

- Ao perturbar os dados experimentais, uma maior variação das constantes C30 e C20 vão de encontro com uma maior variação nas regiões central (região de inflexão) e final (região de enrijecimento) das curvas;
- A região gerada no plano se deu entre as curvas perturbadas $X_{exp} * 1,25$; Y_{exp} e $X_{exp} * 0,75$; Y_{exp} estando dentro destes limites um bom ajuste.

Dando continuação ao estudo acima descrito, o mesmo procedimento foi aplicado sobre dados experimentais próprios processados no CETEPO. Desta maneira, ensaios experimentais foram realizados segundo normas pertinentes e bibliografia consagrada para a geração das curvas do material. Já nesta etapa foi possível avaliar a pertinência da metodologia utilizada, já que historicamente os dados experimentais tem uma variação em torno de 20% da

curva media do material (Vide Figura 5.29). A partir dos resultados obtidos deste segundo estudo se obtiveram as seguintes conclusões:

- Já que curvas experimentais tem uma variação de $\pm 20\%$ da curva do material, é possível afirmar que em algum local desta região se encontra uma boa solução para o ajuste do material;
- O ajuste da curvas de corte puro utilizando o Caminho 1 foi deficiente. Seria necesario o abastecimento do *software* com os resultados dos dois ensaios experimentais (Caminho 2) para obter um ajuste razoável;
- Utilizando o Caminho 2 para o ajuste, a calibração da curva de tração foi sacrificada em função de uma melhora no ajuste de corte puro. O erro para o ajuste de corte puro fica em torno de 10%. Já para tração uniaxial, o erro vai crescendo conforme aumenta a deformação. O limite de 20% imposto no estudo ocorre com 100% de deformação nominal do corpo de prova, estando em 30% de erro a 200% de deformação. Isto condiz com a análise realizada por Hoss [2009] que apresenta o modelo de Yeoh como bom para ajustes até 100% de deformação.

5.3. SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO HISTERÉTICO DE UM ELASTÔMERO UTILIZANDO O SISTEMA ABAQUS

Neste terceiro estudo se pretende simular utilizando o método dos elementos finitos implementado no *software* comercial ABAQUS, um ensaio experimental dinâmico realizado em São Leopoldo no CETEPO - Centro de Tecnologia em Polímeros, pertencente ao grupo SENAI. O experimento foi realizado com um corpo de prova simples submetido a uma excitação harmônica de tração uniaxial, sendo extraída sua curva de histerese. Não foram obtidos resultados totalmente satisfatórios com relação ao ajuste da curva de histerese do modelo numérico em relação aos dados experimentais. Mas foi possível, neste estudo preliminar, vislumbrar as potencialidades deste tipo de ajuste.

5.3.1. Descrição do Estudo Realizado

A primeira etapa para a geração deste estudo é a realização de ensaios experimentais de tração uniaxial para a caracterização do comportamento mecânico do material. Detalhes sobre a determinação desta curva já foram apresentados no segundo estudo na seção 5.2. Assim, a curva tensão vs. deformação, bem como o seu ajuste com o modelo constitutivo de

YEOH podem ser observados na Figura 5.31. As características químicas deste material são apresentadas na Tabela 5.12.

A segunda etapa é a realização do ensaio dinâmico para a obtenção da curva de histerese do material. Este procedimento foi realizado na máquina de ensaios dinâmicos MTS 831 pertencente ao CETEPO em São Leopoldo / RS. O equipamento possui célula de carga de 10kN, deslocamento máximo de 50mm e uma gama de frequências de 0,1Hz a 1000Hz. É possível adaptar a ele uma câmara térmica para ensaios em diferentes temperaturas. Vide Figura 5.43.

O corpo de prova utilizado neste ensaio é uma adaptação do apresentado na Figura 5.26a. A medida de deslocamento é realizada diretamente através do deslocamento da haste do equipamento. Para que fosse possível a fixação do corpo de prova no agarre, foi necessário cortar os seus dois extremos (regiões indicadas na Figura 5.44) mantendo assim um comprimento livre de seção constante. Parte-se assim, de um comprimento inicial de 33mm para os cálculos de deformação conforme pode ser observado na Figura 5.44. O experimento foi realizado com 3 corpos de prova, sendo as características de frequência da excitação aplicada assim como amplitude do deslocamento aplicado e taxa de aquisição são apresentados na Tabela 5.16.

Tabela 5.16: Características do ensaio dinâmico.

Frequência	Deslocamento	Taxa de Aquisição
12Hz	20mm	256 pts / ciclo



Figura 5.43: Máquina de ensaios dinâmicos - CETEPO.

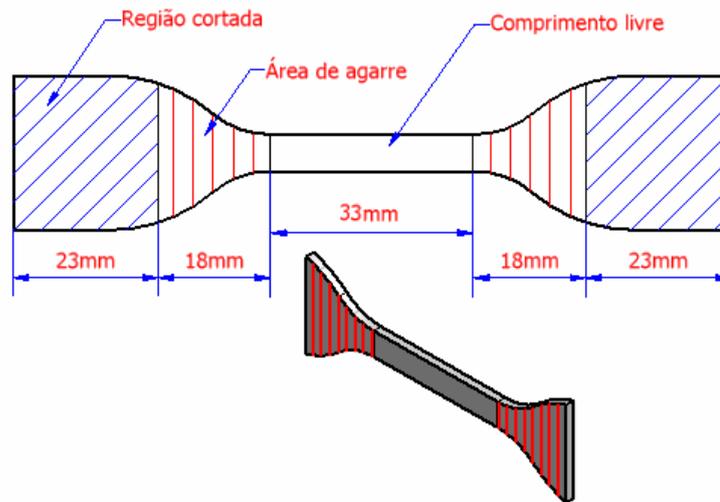


Figura 5.44: Corpo de prova adaptado para o ensaio dinâmico.

Para realizar a simulação numérica foi criado um modelo prismático que aproveita a tripla simetria do problema e que permite analisar só 1/8 do modelo. Sobre tal modelo, foi aplicado um deslocamento prescrito em forma de senoide descrita por quarenta pontos por ciclo. A análise se deu realizando a integração direta no domínio do tempo da equação de movimento resultante da discretização espacial utilizando um esquema implícito de integração. A lei constitutiva para o elastomero foi implementada utilizando o modelo Yeoh calibrado com ensaio experimental de tração uniaxial (ver Figura 5.31). Na Figura 5.45 se aprecia as condições de contorno aplicadas e malha do modelo implementado.

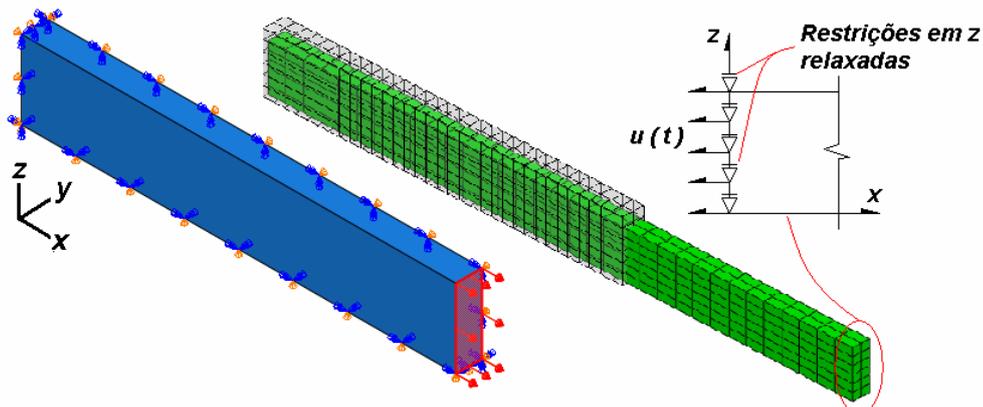


Figura 5.45: 1/8 do corpo de prova analisado com condições de contorno.

Para diminuir o tempo de análise foi relaxada a condição de contorno em z (Figura 5.45) na região do agarre na máquina de ensaios. Esta simplificação foi implementada a fim de reduzir o tempo de processamento. Como pode ser observado na Figura 5.46, não houve alteração significativa na curva de histerese relaxando tal condição de contorno.

A calibração do comportamento histerético do modelo numérico a partir da curva de histerese do material se precisa do ajuste de quatro constantes S_h , m_h , C_h e A_h . Antes de

pretender ajustar se realizou um estudo de sensibilidade de ditas constantes para saber como elas variam a forma do ciclo de histerese resultante.

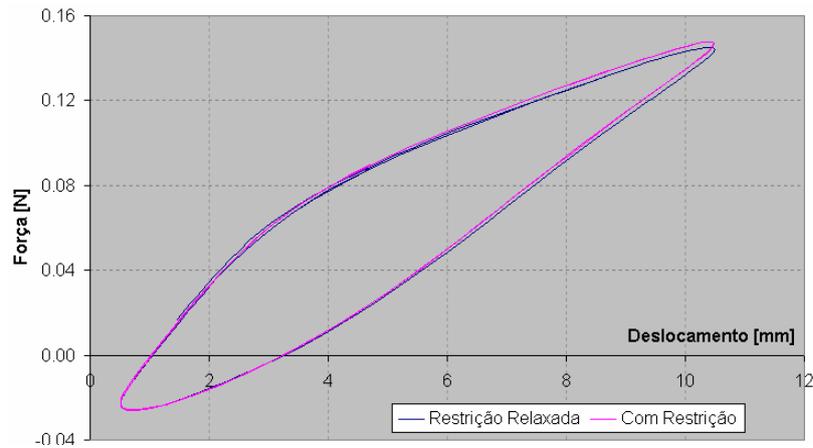


Figura 5.46: Comparação de resultados alterando as condições de contorno.

O Manual Teórico do Software ABAQUS apresenta valores para estas constantes ajustadas para um composto elastomérico de Cloropropeno, as mesmas são apresentadas na Tabela 5.17.

Tabela 5.17: Parâmetros histeréticos sugeridos.

S_h	A_h [MPa ⁻⁴ .s ⁻¹]	m_h	C_h
1,6	0,55	4	-1

5.3.2. Resultados Obtidos

Como resultado da análise experimental a 12Hz e 20mm de deslocamento, foi obtido o gráfico apresentado na Figura 5.47.

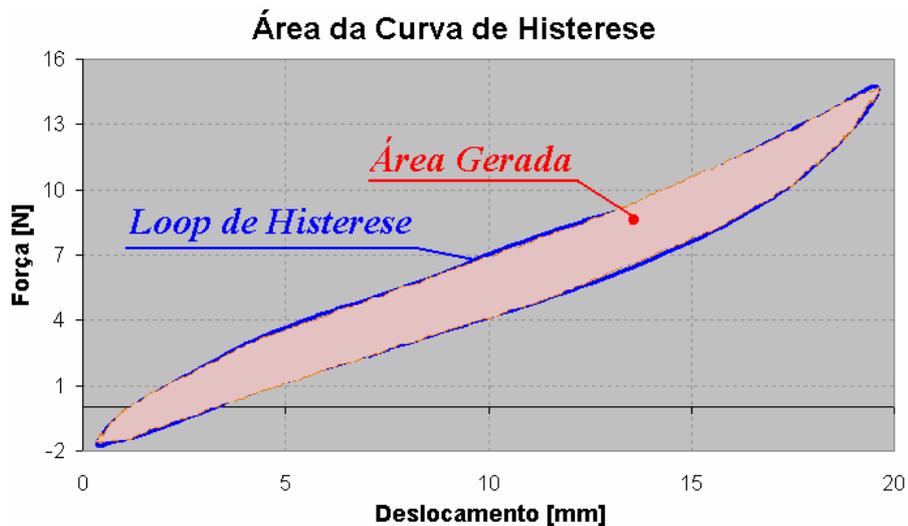


Figura 5.47: Determinação da área interna do ciclo de histerese experimental.

Para que fosse possível a calibração do modelo numérico, foi necessário compreender qual é a influência de cada parâmetro histerético sobre a curva gerada. A realização deste estudo de sensibilidade iniciou gerando uma curva de histerese de referência com os parâmetros apresentados na Tabela 5.17. A partir deles, variou-se independentemente cada parâmetro e uma comparação com a curva de referência foi realizada.

Varição do S_h : Observando a Figura 5.48 é possível perceber que a variação do parâmetro S_h aumenta significativamente a área interna da curva, isto é, aumenta a energia dissipada por ciclo. Este resultado é bastante lógico partindo da definição deste parâmetro apresentado nos fundamentos teóricos no item 2.7. Desta forma, sabe-se que quanto maior o valor de S_h , maior será a parcela da tensão na rede B (Este parâmetro magnifica a parcela Viscosa do material). Outro fenômeno observado é o formato da curva. Aumentando S_h , a curva perde o formato de “gota” e se torna mais simétrica.

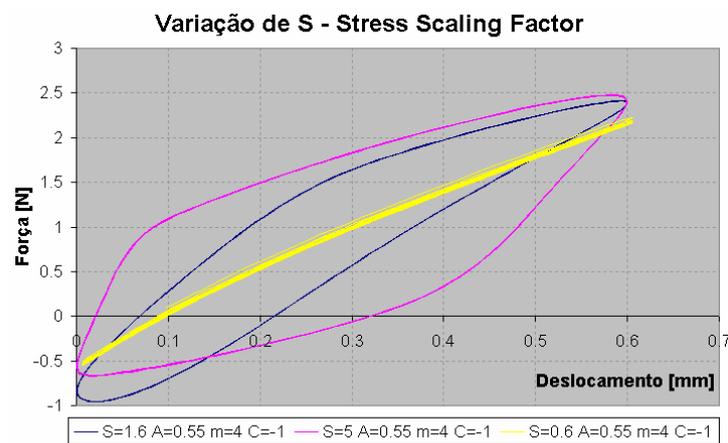


Figura 5.48: Influência do parâmetro S.

Varição do A_h : Na Figura 5.49, é possível observar que ao se aumentar o valor do parâmetro A_h , há uma redução tanto da área interna da curva, quanto da rigidez do material. Como este parâmetro é responsável pela consistência dimensional da expressão (ver item 2.7), ele influencia a relação tensão vs. deformação da mesma (para mais detalhes, consultar o manual teórico do ABAQUS) ver na fundamentação.

Varição do m_h : A Figura 5.50 mostra a influência da variação do parâmetro m_h na curva de histerese. Como pode ser observado, o aumento de m_h reduz a energia dissipada principalmente na extremidade inferior da curva, isto é, quando o corpo de prova altera seu sentido de deslocamento. Sendo este parâmetro é responsável pela dependência da tensão com a taxa de deformação, e sabendo nos topos e vales de uma senoide, há uma variação significativa

na sua inclinação, isto é, na taxa de deformação imposta é possível entender o comportamento deste fenômeno.

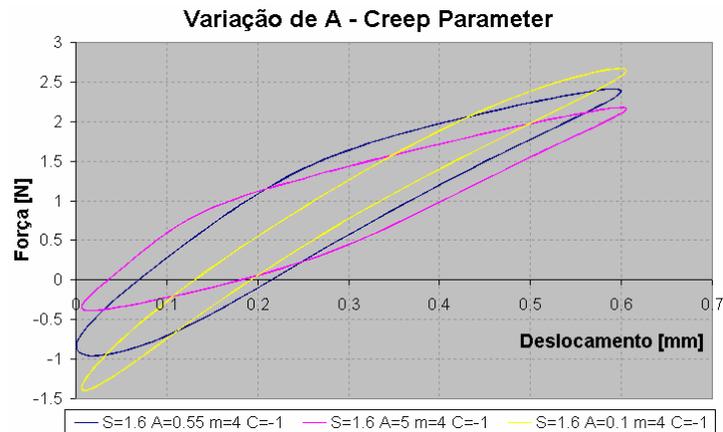


Figura 5.49: Influência do parâmetro A.

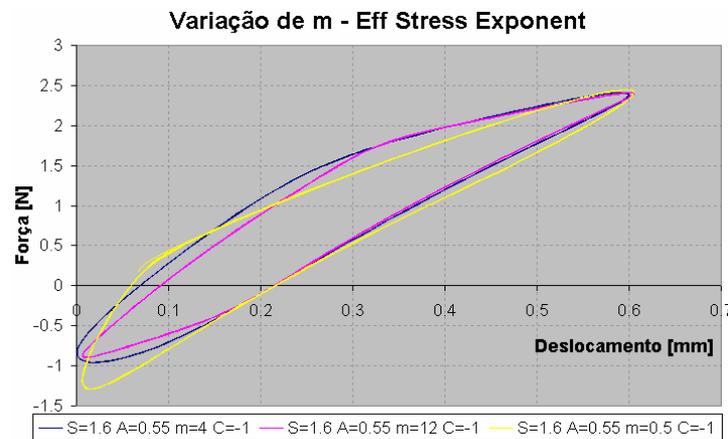


Figura 5.50: Influência do parâmetro m.

Varição do C_h : O parâmetro C_h apresentado na Figura 5.51, ao ter seu valor aproximado de zero, reduz a energia dissipada por ciclo, aumenta a rigidez do material e torna a curva praticamente simétrica. Este parâmetro é responsável pela dependência da deformação sobre a taxa de deformação. Assim, quanto mais próximo de -1, maior será a influência da taxa de deformação na rede B (parcela viscoelástica da equação - ver item 2.7), e quanto mais próximo de zero, menor será a influência da taxa de deformação sobre esta rede, reduzindo a energia dissipada.

A Figura 5.52 mostra os resultados experimentais (em amarelo), o numérico com os parâmetros de referência sugeridos pelo ABAQUS (em azul) e a curva resultante do ajuste dos parâmetros para aproximar aos valores experimentais (em rosa). Os ajustes realizados estão longe de ser satisfatórios.

De todas as observações postadas, a que mais difere é a forma das curvas apresentadas. A curva experimental possui a forma de “S”, ou seja, seu comportamento está

claramente dividido em 3 regiões, uma inicial com alta rigidez, uma intermediária e predominante com menor rigidez e outra final, novamente com alta rigidez. O formato da curva numérica não apresenta tal característica, possuindo o formato de uma gota. A explicação mais pertinente deste fenômeno está na forma como o ensaio experimental foi realizado. Conforme descrito anteriormente, o corpo de prova tipo borboleta foi fixado pelas agarras de maneira que seu volume passível de deformação fosse o de seção constante (Figura 5.44). Já o ensaio de tração uniaxial realizado que abasteceu o *software* para caracterizar o material, foi realizado como corpo de prova completo, tendo, além da área de seção constante, a área de transferência de geometria (área hachurada em vermelho na Figura 5.44) para deformar e acumular energia. Assim, ao ser tracionado, em vez de enrijecer, o material transfere parte da sua energia de deformação para esta área.

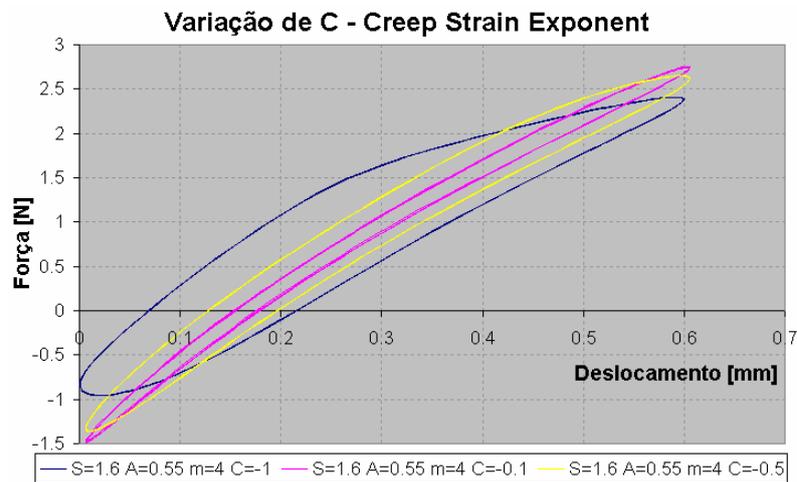


Figura 5.51: Influência do parâmetro C.

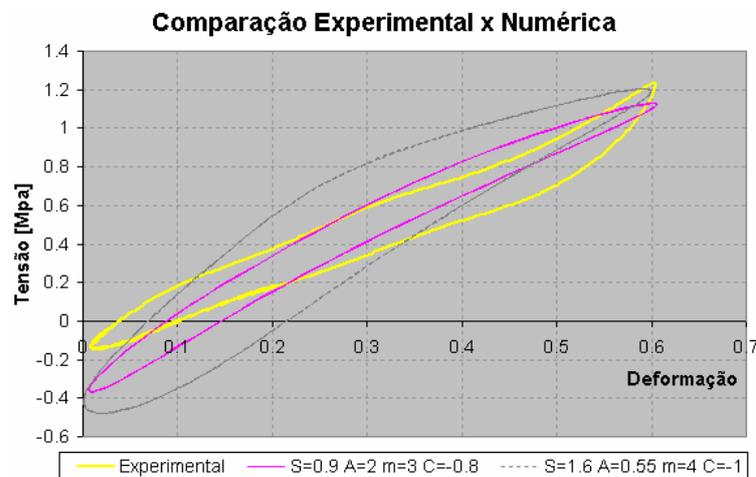


Figura 5.52: Ajuste da curva de histerese experimental.

5.3.3. Discussão dos Resultados

Neste estudo, ensaios experimentais foram realizados gerando dados que caracterizam as propriedades mecânicas do material estudado, bem como suas propriedades dinâmicas através da curva de histerese. Utilizando o *software* ABAQUS, análises numéricas foram realizadas e algumas dificuldades foram encontradas neste aspecto. São elas:

- Modelos com malhas refinadas possuem difícil convergência, principalmente trabalhando perto da incompressibilidade do material;
- O Software não apresenta um algoritmo de ajuste de histerese similar ao disponibilizado para ajustar os modelos constitutivos dos elastômeros. Desta forma o ajuste é manual e pouco eficiente;

Dentro disso, foi possível observar:

- O ajuste da curva de histerese experimental foi realizado numericamente via parâmetros histeréticos. Este ajuste teve como critérios a forma e a energia dissipada, isto é, a área interna. No ajuste a energia dissipada no ciclo foi bem representada, não tendo o mesmo resultado para a forma do ciclo;

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1. CONCLUSÕES

Neste trabalho se realizaram varias aplicações relacionadas com a calibração de modelos numéricos de estruturas elastoméricas. No primeiro deles se analisou um amortecedor de borracha procurando sua simulação através de diversos modelos de diferentes níveis de complexidade. Na segunda aplicação se discute como a variabilidade de resultados experimentais se traduzem na variabilidade de coeficientes de um modelo constitutivo para o modelo de Yeoh. Na terceira aplicação se realiza um estudo preliminar no ajuste de um modelo histerético de quatro parâmetros propostos pelo ABAQUS, discutindo brevemente como eles modificam a curva de histerese resultante. No transcurso do trabalho foram obtidas conclusões que são apresentadas no fim de cada aplicação.

Sobre aspectos de ordem geral é possível concluir que:

- A análise experimental do primeiro estudo mostrou resultados coerentes com a literatura. O modelo numérico simplificado foi calibrado com sucesso, fornecendo bons resultados;
- O segundo estudo reavalia a necessidade de utilização de modelos constitutivos caros visando um ajuste demasiadamente preciso das curvas experimentais de componentes elastoméricos. Assim, conhecer as limitações e condições em que foram realizados os ensaios experimentais, é mais importante que gerar custos computacionais no ajuste das curvas obtidas;
- A terceira aplicação forneceu resultados preliminares, mas que permitiram avaliar as potencialidades do ABAQUS em ajustar o comportamento histerético de materiais reais.

6.2. SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Como futuras ações para a continuação da presente dissertação se propõem:

- No primeiro estudo, verificar a linearidade dos ensaios experimentais calculando a função coerência entre o sinal de entrada e o sinal de saída. Desta forma será possível saber até que ponto o sistema continua se comportando linearmente. A função coerência pode ser obtida através de um tratamento dos sinais experimentais obtidos. Para mais informações, consultar Bendat & Piersol (1966).

- Realizar uma exploração exaustiva das possibilidades do sistema ABAQUS no que se refere a sua capacidade na modelagem de borrachas frente a cargas dinâmicas, estudando as possibilidades de efeitos tais como velocidade de carga, efeito de Mullin, etc., sempre calibrando estes efeitos com resultados experimentais;
- Apresentar em forma mais clara como a variabilidade dos resultados experimentais se transmitem aos coeficientes dos modelos constitutivos ajustados (realizar o procedimento utilizado na segunda aplicação para outros modelos). E quantificar em forma estatística as variabilidades identificadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aseka, E. H., Projeto, Construção e Determinação de Propriedades de Amortecedor Viscoelástico para Uso em Estruturas, Dissertação de Mestrado, Porto Alegre, 2002.
- Askeland, D. R., Phulé, P. P., Ciência e Ingeniería de los Materiales, México, 2005.
- Atkin, R. J. e Fox, N., “Introduction to the Theory of Elasticity”, Longman, 1ª ed., 1980.
- Bathe, K.J., “Finite Element Procedures in Engineering”, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, 1998.
- Belytschko, T., Liu, W. K., Moran, B., Non Linear Finite Elements for Continua and Structures, England, 2000.
- Bendat, J., Piersol, A. G. Measurement and Analysis of Random Data. John Wiley and Sons, New York, 1966.
- Bergstrom, J. S., Boyce, M. C., Constitutive Modeling of the Large Strain Time-Dependent Behavior of Elastomers, Department of Mechanical Engineering, USA, 1998.
- Billmeyer, F. W., Textbook of Polymer Science, 1971.
- Bingham, E.C., Fluidity and Plasticity, New York, 1922.
- Bischoff, M., Ramm, E., On the Physical Significance of Higher Order Kinematic and Static Variables in the Three-Dimensional Shell Formulation, International Journal of Solids and Structures, 2000.
- Charlton, D. J., Yang, J., A Review of Methods to Characterize Rubber Elastic Behavior for Use in Finite Element Analysis, Australia, 1993.
- Crandall, S. H., The Role of Damping in Vibration Theory, Journal of Sound and Vibration, 11 (1), pp. 3-18, 1970.
- Curadelli, R. O., Dissipação de Energia através de Dispositivos Metálicos, Dissertação de Mestrado, Porto Alegre, 2001.
- Dall’Asta, A., Ragni, L., Non Linear Behavior of Dynamic Systems with High Damping Rubber Devices, Engineering Structures, 2008.
- Dimarogonas, A. D., 1976. Vibration Engineering. St. Paul, Minn.: West Publishing.
- El-Abbasi, N., Meguid, S. A., A New Shell Element Accounting for Through-Thickness Deformation, Computacional Methods Applied to Mechanical Engineering, 2000.

- Ferry, J. D., *Viscoelastic Properties of Polymers*, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1980
- Flugge, W., *Viscoelasticity*. Waltham, Massachusetts, Toronto, London, 1967.
- Fruet, G., *Dissipação de Energia em Estruturas com Utilização de Polímeros Termoplásticos*. Dissertação de Mestrado. Porto Alegre. 2005.
- Gent, A. N., 2001. *Engineering with Rubber*. Hanser Publishers, Munich. 2a ed.
- Gheller, J., *Avaliação do isolamento de vibrações com elastômeros*, 12º Congresso Bras.de Tecnologia da Borracha. São Paulo, 2008.
- Haupt P, e Sedlan H. *Viscoplasticity of elastomeric materials: Experimental facts and constitutive modelling*. Arch Appl Mech 2001;71:89–109.
- Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., *Introduction to the Abaqus / Explicit*, U.S.A., 1995.
- Hoss, L., *Modelos Constitutivos Hiperelásticos para Elastômeros Incompressíveis: Ajuste, comparação de desempenho e proposta de novo modelo*, Dissertação de Mestrado, Porto Alegre, 2009.
- Jones, D.I.G, *Viscoelastic Vibration Damping*, John Wiley & Sons, LTD, Chichester, 2001
- Lin, T. R., Farag, N. H., Pan, J., *Evaluation of Frequency Dependent Rubber Mount Stiffness and Damping by Impact Test*, Austrália, 2004.
- Marczak, R.; Gheller, J.; Hoss, L. *Caracterização de Elastômeros para Simulação Numérica*. São Leopoldo. 2006.
- Miguel, L. F., *Estudo Teórico e Experimental de Amortecedores de Vibração por Atrito*, Dissertação de Mestrado, Porto Alegre, 2002.
- Morman, K. N., Pan, T. Y., *Application of Finite Element Analysis in the Design of Automotive Elastomeric Components*, Ohio, 1987.
- Nashif, D. A., Jones, D. I. G., Henderson, J. P., *Vibration Damping*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1985.
- Norma ASTM D412-06ae2, “Standard Test Methods for Vulcanized Rubber and Thermoplastic Elastomers-Tension”, 2006.
- Norma ASTM D575-91, “Standard Test Methods for Rubber Properties in Compression”, 2007.
- Norma BS ISO 1827:2007, “Rubber, vulcanized or thermoplastic. Determination of shear modulus and adhesion to rigid plates. Quadruple-shear methods”, 2007

- Norma ISO 1382:2008, "Rubber. Vocabulary British Standard / International Organization for Standardization", 2009.
- Paige, R. E., Mars, W. V., Implications of the Mullins Effect on the Stiffness of a Pre-loaded Rubber Component, ABAQUS Users Conference, 2004.
- Sze, K. Y., Zheng, S. J., Lo, S. H., A Stabilized Eighteen-node Solid Element for Hyperelastic Analysis of Shells, Finite Elements in Analysis and Design, 2004.
- Rao, S. S., 1995. Mechanical Vibrations. Addison-Wesley Publishing Company, 3^a ed.
- Treloar, L. R. G., The Physics of Rubber Elasticity. Oxford, 1975.
- www.adobe.com/br/products/audition, Maio de 2008.
- www.ansys.com, Junho de 2008.
- www.hp.com/go/hpvee, Agosto de 2008.
- www.mathworks.com/matlab, Junho de 2008.
- www.rubberpedia.com/borrachas/borrachas.php, Julho de 2009.
- Yintao, W., Tingqing, Y., Xingwen, D., On The Large deformation Rubber-Like Materials: Constitutive Laws and FEM, ACTA Mechanica Solida Sinica 12, 1999.
- Zohdi, T. I., Temizer, I., A numerical method for homogenization in non-linear elasticity, Universidade da California, 2006.

APÊNDICE A – MODELOS VISCOELÁSTICOS

Model	Name	Differential equation		Creep compliance $J(t)$	Relaxation modulus $Y(t)$	Complex compliance	
		Inequalities				Real part $G_1(\omega)$	Imaginary part $G_2(\omega)$
	elastic solid	$\sigma = q_0 \epsilon$	$1/q_0$	q_0	$1/q_0$	0	
	viscous fluid	$\sigma = q_1 \dot{\epsilon}$	t/q_1	$q_1 \delta(t)$	0	$-1/q_1 \omega$	
	Maxwell fluid	$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon}$	$(p_2 + t)/q_1$	$\frac{q_1}{p_1} e^{-t/p_1}$	$\frac{p_1}{q_1}$	$-\frac{1}{q_1 \omega}$	
	Kelvin solid	$\sigma = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon}$	$\frac{1}{q_0} (1 - e^{-\lambda t}), \quad \lambda = \frac{q_0}{q_1}$	$q_0 + q_1 \delta(t)$	$\frac{q_0}{q_0^2 + q_1^2 \omega^2}$	$-\frac{q_1 \omega}{q_0^2 + q_1^2 \omega^2}$	
	3-parameter solid	$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon}$ $q_1 > p_1 q_0$	$\frac{p_1}{q_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{q_0} (1 - e^{-\lambda_2 t}),$ $\lambda = q_0/q_1$	$\frac{q_1}{p_1} e^{-t/p_1} + q_0 (1 - e^{-t/p_1})$	$\frac{q_0 + p_1 q_1 \omega^2}{q_0^2 + q_1^2 \omega^2}$	$-\frac{(q_1 - q_0 p_1) \omega}{q_0^2 + q_1^2 \omega^2}$	
	3-parameter fluid	$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \ddot{\epsilon}$ $p_1 q_1 > q_2$	$\frac{t}{q_1} + \frac{p_1 q_1 - q_2}{q_1^2} (1 - e^{-\lambda_1 t})$ $\lambda = q_1/q_2$	$\frac{q_2}{p_1} \delta(t) + \frac{1}{p_1} \left(q_1 - \frac{q_2}{p_1} \right) e^{-t/p_1}$	$\frac{p_1 q_1 - q_2}{q_1^2 + q_2^2 \omega^2}$	$-\frac{q_1 + p_1 q_1 \omega^2}{(q_1^2 + q_2^2 \omega^2) \omega}$	
	4-parameter fluid	$\sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \ddot{\epsilon}$ $p_1 q_1 > q_2, \quad p_2^2 > 4p_1 q_2$ $p_1 q_1 q_2 > p_2 q_1^2 + q_2^2$	$\frac{t}{q_1} + \frac{p_1 q_1 - q_2}{q_1^2} (1 - e^{-\lambda_1 t})$ $+ \frac{p_2}{q_2} e^{-\lambda_2 t}, \quad \lambda = q_1/q_2$	$\frac{1}{\sqrt{p_2^2 - 4p_1 q_2}} [(q_1 - \alpha q_2) e^{-\alpha t} - (q_1 - \beta q_2) e^{-\beta t}]$ $\alpha = \frac{1}{2p_1} \left(p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_1 q_2} \right)$	$\frac{(p_1 q_1 - q_2) + p_2 q_2 \omega^2}{q_1^2 + q_2^2 \omega^2}$	$-\frac{q_1 + (q_2 p_1 - p_2 q_1) \omega^2}{(q_1^2 + q_2^2 \omega^2) \omega}$	
	4-parameter solid	$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \ddot{\epsilon}$ $q_1 > p_1 q_0, \quad q_1^2 > 4q_0 q_2$ $q_1 p_1 > q_0 p_1^2 + q_2$	$\frac{1 + p_1 \lambda_1}{q_0 \lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} (1 - e^{-\lambda_1 t})$ $+ \frac{1 + p_1 \lambda_2}{q_2 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)} (1 - e^{-\lambda_2 t})$ where λ_1, λ_2 are roots of $q_2 \lambda^2 - q_1 \lambda + q_0 = 0$	$\frac{q_2}{p_1} \delta(t) + \frac{q_1 p_1 - q_2}{p_1^2} - \frac{1}{p_1^2} (q_1 p_1 - q_0 p_1^2 - q_2) (1 - e^{-t/p_1})$	$\frac{q_0 + (p_1 q_1 - q_2) \omega^2}{q_0^2 + (q_1^2 - 2q_0 q_2) \omega^2 + q_2^2 \omega^4}$	$-\frac{(q_1 - p_1 q_0) \omega + q_2 p_1 \omega^2}{q_0^2 + (q_1^2 - 2q_0 q_2) \omega^2 + q_2^2 \omega^4}$	

APÊNDICE B – PUBLICAÇÕES

Os resultados apresentados na presente dissertação foram parcialmente publicados conforme lista abaixo:

- **XXXIII Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural.** Santiago / Chile - Maio de 2008. “**Análise Experimental de Amortecimento de um Composto Elastomérico sob Tração**”. Daniel Ângelo Francisco Thomazi, Prof. Dr. Ignacio Iturrioz (PROMEC - UFRGS), Prof. Dr. Letícia Fleck Fadel Miguel (PROMEC - UFRGS).
- **XXXIV CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia.** Maceió / Brasil - Novembro de 2008. “**Avaliação Numérica e Experimental de um Composto Elastomérico Sob Tração**”. Daniel Ângelo Francisco Thomazi, Prof. Dr. Ignacio Iturrioz (PROMEC - UFRGS), Prof. Dr. Letícia Fleck Fadel Miguel (PROMEC - UFRGS).