Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática

Ministério da Educação - MEC

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES

Diretoria de Educação a Distância – DED

Universidade Aberta do Brasil – UAB

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Reitor Carlos Alexandre Netto
Vice-Reitor Rui Vicente Oppermann
Pró-Reitor de Pós-Graduação Aldo Bolten Lucion
Secretário de Educação a Distância Sérgio Roberto Kieling Franco
Coordenador da UAB/UFRGS Luis Alberto Segovia Gonzalez

Comitê Editorial da SEAD

Presidente Sérgio Roberto Kieling Franco
Lovois de Andrade Miguel
Mára Lúcia Fernandes Carneiro
Silvestre Novak
Sílvio Luiz Souza Cunha

Apoio em Publicações da SEAD

Deise Mazzarella Goulart
Laura Wunsch
Marleni Nascimento Matte
Michelle Donizeth Euzébio

Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática

Diretor do Instituto de Matemática Rudnei Dias da Cunha
Coordenadora do Curso Maria Alice Gravina
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Revisão Textual

Revisor de Língua Portuguesa Zuleica Oprach de Souza (Evangraf)

Projeto Gráfico

Projeto Gráfico e Diagramação Rafael Marczal de Lima (Evangraf)
Capa Bibiana Carapeços de Lima

Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática

Organizadores

Maria Alice Gravina
Elisabete Zardo Búrigo
Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Vera Clotilde Vanzetto Garcia

Editora
Evangraf
Porto Alegre | 2012

CAPES
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
UFRGS SEAD Educação a Distância
INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS ppgemat

1ª edição

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

M425 Matemática, mídias digitais e didática : tripé para formação de professores de matemática / organizadores Maria Alice Gravina … [et al.] Porto Alegre : Evangraf, 2012.

180 p. : il.

ISBN: 978-85-7727-328-7

1. Matemática - Ensino. 2. Mídias digitais. I.Gravina, Maria Alice.II.Búrigo, Elisabete Zardo. III.Basso, Marcus Vinicius de Azevedo. IV.Garcia, Vera Clotilde Vanzetto.

CDU – 51:37

Elaborada pela Biblioteca Central da
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este livro discute possibilidades de inovações na matemática escolar e na formação continuada de professores, a partir da experiência desenvolvida no Curso de Especialização "Matemática - Mídias Digitais – Didática: tripé para formação do professor de Matemática" [1], oferecido de 2009 a 2011, na modalidade a distância, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), em parceria com a Universidade Aberta do Brasil (UAB).

Muitas são as possibilidades de concepção e organização da formação de professores, mesmo a distância. Acreditamos que a experiência do Curso merece ser compartilhada em livro. Como em todo o empreendimento que busca inovar, envolveu muito esforço criativo, a partir de um conjunto de objetivos e critérios estabelecidos desde o início pela equipe. E, como em toda a experiência que é planejada e refletida, possibilitou aprendermos com os acertos e com os tropeços.

O nome do Curso expressa bem seu principal objetivo: articular a formação matemática e a formação pedagógica dos professores com a exploração de mídias digitais, tendo em vista o uso dessas ferramentas nas salas de aula, de modo a favorecer a participação e a aprendizagem dos alunos e possibilitar a introdução de novos conteúdos e novas abordagens.

A prática de sala de aula esteve no centro das reflexões desenvolvidas ao longo do Curso. A cada disciplina, os alunos-professores, em sua ampla maioria atuando na escola pública, foram convidados a desenvolver uma experiência didática em suas próprias escolas, buscando superar limites ou lacunas identificadas em sua própria prática pedagógica, recorrendo ao planejamento, ao uso de novos recursos, e à avaliação reflexiva. Ao final do Curso, as práticas pedagógicas, denominadas "engenharias" em referência à "engenharia didática" tal como é concebida pela Didática da Matemática

[1] Maiores informações sobre o Curso estão disponíveis em <http://www.ufrgs.br/espmat>.

francesa, foram inseridas numa reflexão mais ampla que deu origem aos Trabalhos de Conclusão de Curso[2].

Tratando-se de curso desenvolvido a distância, buscou-se construir ferramentas que propiciassem uma ampla participação dos alunos-professores na discussão dos diversos temas e no desenvolvimento de tarefas, bem como o acesso a um amplo conjunto de materiais. Para cada disciplina, foi construído um site onde foram disponibilizados textos que enunciavam desafios, textos de subsídio, tarefas e um amplo leque de recursos digitais que podem ser utilizados nas escolas. Esses sites tornaram-se públicos desde o início de cada disciplina e seguem disponíveis na rede (Figura 1), acessíveis a partir do endereço <http://www.ufrgs.br/espmat>.

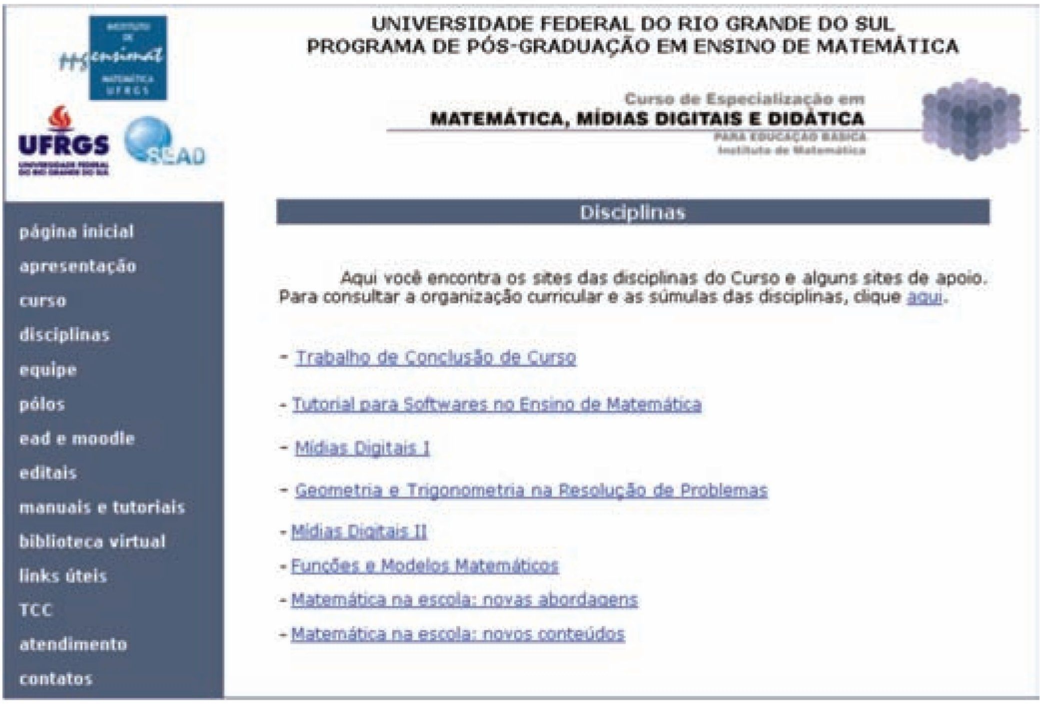


Figura 1- Site do Curso com links para material didático das disciplinas.

A realização do Curso envolveu uma ampla equipe que incluiu professores responsáveis pelas disciplinas, tutores a distância e tutores presenciais, que atuaram em sete cidades-polo do Rio Grande do Sul. A interação cotidiana entre a equipe e os alunos-professores se deu através do

[2] Esses trabalhos podem ser consultados na Biblioteca Virtual da UFRGS, no seu repositório Lume, em <http://www.lume.ufrgs.br>.

ambiente virtual Moodle. Nesse ambiente todos se expressavam: os professores postavam tarefas semanais e orientações para sua realização; os alunos-professores divulgavam e compartilhavam com os colegas suas produções; alunos-professores, tutores e professores dialogavam sobre dúvidas, descobertas, dicas, comentários e avaliações dos trabalhos. Tendo em vista a necessária desenvoltura dos alunos-professores no acesso à internet e ao próprio ambiente Moodle, e considerando diferentes graus de familiaridade com o computador – que para alguns era uma novidade – foi oferecida, inicialmente, uma disciplina de Alfabetização em Educação a Distância.

O primeiro capítulo do livro, **Mídias Digitais na Educação Matemática**, discute as potencialidades do recurso às mídias digitais nos processos de aprendizagem e apresenta várias possibilidades concretas do uso de objetos de aprendizagem (digitais) e softwares na sala de aula.

Os demais capítulos seguem a ordem das disciplinas que sucederam a Alfabetização. Vale observar que cada disciplina do Curso de Especialização incluiu como desdobramento uma Prática Pedagógica.

O segundo capítulo do livro, **Geometria Dinâmica na Escola**, apresenta a modelagem geométrica como uma "porta de entrada" para o estudo da geometria no Ensino Fundamental. O uso de um software de geometria dinâmica - o *GeoGebra* - é explorado para construir mecanismos que estão no nosso dia-a-dia.

No terceiro capítulo, **Parábolas, elipses e hipérboles traçadas por mecanismos**, instrumentos digitais que simulam mecanismos reais de desenho que traçam essas curvas são utilizados como recursos para o estudo das propriedades e aplicações das cônicas, um tema que pode ser abordado no Ensino Médio.

O quarto capítulo, **O vídeo nas aulas de Matemática**, apresenta o trabalho desenvolvido na disciplina Mídias Digitais na Educação Matemática II, com ênfase em reflexões sobre o potencial dos vídeos informativos e educativos como recurso de ensino, através de exemplos concretos de aplicação em sala de aula.

No quinto capítulo, **Modelagem Matemática na Educação a Distância: desafios à formação de professores,** os autores discutem Modelagem Matemática como tendência em Educação Matemática voltada à pesquisa e ao ensino, no âmbito da formação de professores na modalidade a distância.

Finalmente, no sexto capítulo, **Novos conteúdos e novas abordagens**, os autores discutem possibilidades de abordagens diferentes de conteúdos consagrados no Ensino Básico e de introdução de novos conteúdos no currículo escolar, tomando como referência básica diferentes dissertações produzidas no Mestrado em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS.

O que une o conjunto desses capítulos? As experiências vividas no Curso de Especialização "Matemática - Mídias Digitais – Didática". Elas mostram algumas das potencialidades do uso de mídias digitais na sala de aula de matemática, dentre elas o exercício da criatividade e da renovação curricular. Mas também é importante destacar que as ferramentas propiciadas pelas mídias digitais nos provocam, nós professores, a seguir aprendendo matemática. E com elas também ampliamos nosso repertório de recursos didáticos de forma a melhor compreender as ideias, as dificuldades e as descobertas de nossos alunos.

Capítulo 1

MÍDIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MARIA ALICE GRAVINA
MARCUS VINICIUS DE AZEVEDO BASSO

Introdução

Se colocamos nossas rotinas de vida sob atenção, procurando situá-las no contexto maior da vida em sociedade, torna-se interessante observar o quanto elas se organizam em função das facilidades tecnológicas que temos à nossa disposição.

Nossos avós viram os filhos partirem para suas vidas e, muitas vezes, viveram isolamentos que só se rompiam com as cartas que, através dos serviços de correio, percorriam grandes distâncias então dependentes de tempo. Hoje, os telefones celulares nos colocam em contato instantâneo, não importando as distâncias e locais em que se encontram os interlocutores. E não conseguimos mais nos imaginar vivendo sem essa tecnologia que nos propicia tamanha proximidade virtual – isto faz parte de nossa rotina.

O desenvolvimento da internet estabeleceu uma fantástica conexão em rede mundial e é, sobretudo, através de um processo coletivo de participação que a rede cresce de forma exponencial. Notícias circulam no momento de acontecimento dos fatos. Manifestações e protestos se organizam em escala mundial com "cliques de mouse". Informações sobre todos os assuntos estão acessíveis a todo instante. Vejamos alguns exemplos: há poucos anos, quando necessitávamos localizar um endereço, fosse de uma loja ou de um restaurante, nosso primeiro recurso era buscar informações no guia telefônico – hoje, acessamos o GoogleMaps; para pagar contas íamos aos bancos – hoje, acessamos sistemas protegidos por senhas criptografadas; para procurar o significado de uma palavra, folheávamos o "Aurélio" – hoje, é o Google.

As diferentes tecnologias que temos à nossa disposição mudam os nossos ritmos de vida. A quantidade de eventos, compromissos e contatos que vivemos, diariamente, seria inimaginável para as pessoas que viveram nos anos cinquenta do século XX. Essa rapidez nos exige uma prontidão intelectual, em crescente escala.

Nossas rotinas de sala de aula também deveriam incorporar, cada vez mais, as tecnologias, pois elas também influem nas nossas formas de pensar, de aprender, de produzir. O "giz e quadro-negro" é uma tecnologia que teve o seu momento de impacto no processo educativo, no século XIX. Com o crescimento das cidades, decorrente da Revolução Industrial, a necessidade da educação em massa consolida a organização da sala de aula em grandes grupos com atenção voltada para a "fala" do professor. Nesse contexto, o quadro-negro torna-se uma importante ferramenta, e é interessante observar que, segundo o estudo de Barra (2001), o início do uso do quadro-negro se deu no ensino da aritmética, nos seus procedimentos de "fazer contas".

Naquele momento, os métodos de ensino apostavam na manifestação em voz alta e em uníssono do grande grupo, seja repetindo a fala do professor, seja respondendo suas perguntas, e nisso era muito exigida a habilidade de memorização. Se considerarmos que o professor devia atender um grande grupo e que o livro, bem como o material escolar, ainda não eram tecnologias de fácil acesso, podemos entender que o método que hoje referimos como "tradicional" também representou, em determinado momento, um avanço em termos educacionais. É, sobretudo, com a difusão do livro impresso que nos liberamos da necessidade do uso da memória para guardar informação.

O ponto que queremos destacar é que o desenvolvimento da sociedade e de tecnologias são processos que se realimentam, constantemente. Quanto ao nosso desenvolvimento intelectual, e a ser contemplado especialmente durante os anos de formação escolar, temos na tecnologia digital a ampliação das possibilidades para "experimentos de pensamento", quando as comparamos com aquelas que se consegue com o suporte dado pelo texto e desenho estático. Esta tecnologia disponibiliza, cada vez mais, ferramentas que suportam a exteriorização, a diversificação e a ampliação de pensamentos. A versatilidade de tais suportes tecnológicos explica as recorrentes reflexões que aparecem na literatura, associadas às expressões paradigmáticas tais como *tecnologias da inteligência,* cunhada por Levy (1993), ou *ferramenta para o pensamento,* cunhada por Papert (1993). Nessa direção temos a provocativa expressão de Shaffer e Clinton (2006) – "*ferramentaparapensamentos* (*toolforthougths*)" – cunhada com o propósito de registrar uma visão que considera que sujeitos e artefatos tecnológicos podem se colocar em situação de simbiose, em processo mútuo de ação e reação. Ou seja, o artefato também tem o poder de agir sobre o sujeito, daí a expressão que funde as duas palavras.

Essa *ferramentaparapensamentos* estaria sinalizando a criação de uma nova cultura humana, a qual estaria em linha de continuidade com a história das culturas da humanidade, que nos seus primórdios desenvolveu, a partir dos gestos físicos, a *cultura mimética*; com a palavra e a narrativa falada, a *cultura mítica*; com a difusão do registro escrito na forma de texto e símbolos, deu-se a circulação e reuso de ideias e assim cria-se a *cultura das teorias*. E hoje, através das mídias digitais, temos à nossa disposição versáteis sistemas de armazenamento e circulação de informação, de simulação e modelagem, o que estaria sinalizando, segundo os mesmos autores, nossa entrada na *cultura do virtual.*

Vejamos como isso está se encaminhando no ambiente escolar. No que segue apresentamos ferramentas que, quando colocadas nas mãos de nossos alunos, podem provocar mudanças na sala de aula. São *ferramentaparapensamentos* com as quais os alunos podem fazer muitos "experimentos de pensamento"!

As mídias digitais na aprendizagem da matemática

A tecnologia digital coloca à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que descortinam na tela do computador objetos dinâmicos e manipuláveis. E isso vem mostrando interessantes reflexos nas pesquisas em Educação Matemática, especialmente naquelas que têm foco nos imbricados processos de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo nos quais aspectos individuais e sociais se fazem presentes.

No contexto da Educação Matemática, no final dos anos oitenta se difunde um primeiro recurso para a educação que faz uso da tecnologia digital – é a "tartaruga" do ambiente Logo de Papert (1988). Neste ambiente de programação, alunos em idade escolar exploram e vivenciam movimentos da tartaruga – através dos comandos "para frente/para trás" e "para direita/ para esquerda" – e têm acesso a importantes conceitos da geometria. Já naquele momento, Papert vislumbrava o alcance das mídias digitais no processo de aprendizagem ao falar de *bricolagem* ou *pensamento concreto,* como atitudes que tratam de criar modelos, fazer simulações e analogias, experimentar e errar. Já nos dizia ele:

> Bricolage e pensamento concreto sempre existiram, mas foram marginalizados (...) pela privilegiada posição do texto. À medida que passamos para a era da informática e que meios novos e mais dinâmicos surgirem, isso mudará (Ibid., p.156).

Hoje, a variedade de recursos que temos à nossa disposição permite o avanço na discussão que trata de inserir a escola na *cultura do virtual.* A tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam *sistemas dinâmicos de representação* na forma de objetos *concreto-abstratos.* São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais.

Estamos de acordo com a posição teórica defendida por Noss (2001), Radford (2006) e Duval (2006) sobre o papel dos sistemas de representação, que considera como funções primordiais desse sistema: a) ser instrumento para externar, consolidar e comunicar o saber matemático; b) ser instrumento que dá suporte aos pensamentos, mais especificamente aos processos cognitivos que produzem conhecimento matemático. É neste segundo aspecto que vamos colocar nossa atenção.

No que segue, apresentamos exemplos que tratam de ilustrar esta importante função dos sistemas de representação, especialmente quando a eles se agrega o dinamismo e a manipulação. O primeiro exemplo faz uso do *Tangram Virtual*[1]. O Tangram é um quebra-cabeça bastante conhecido: a

[1] O Tangram Virtual está disponível para download em <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br> no link "Softwares".

partir de uma coleção de figuras que compõem um quadrado, o desafio é fazer a montagem de outras formas. Na brincadeira com o quebra-cabeça físico (por exemplo, feito em madeira), a manipulação das peças requer pouco conhecimento de geometria, e as atitudes se restringem ao simples ajuste de peças de um quebra-cabeça.

Já na brincadeira com o *Tangram Virtual* têm-se instruções bem definidas quanto aos movimentos que podem ser feitos com as peças, conforme ilustra a figura 1.

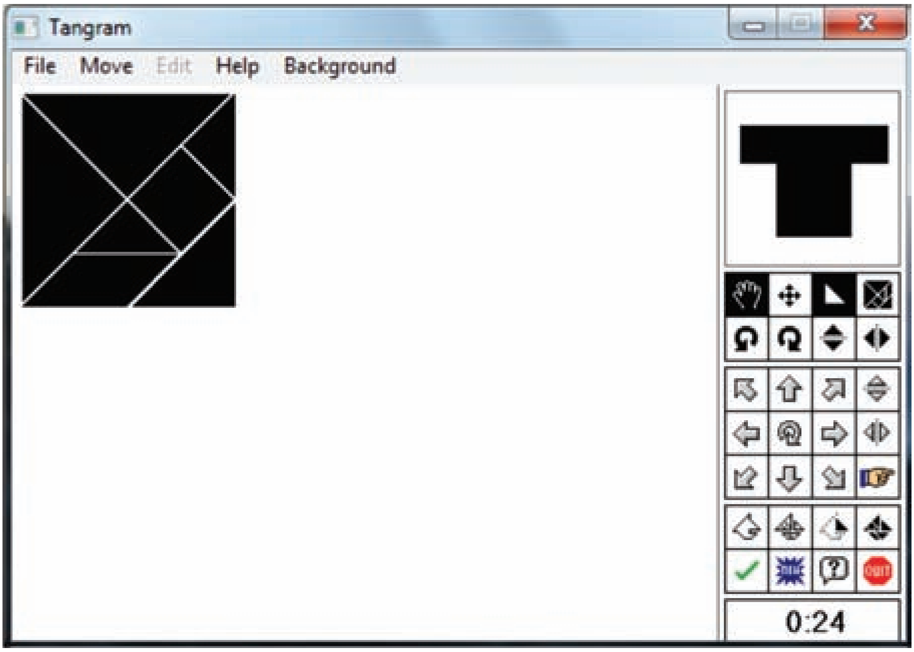


Figura 1 – Interface do *Tangram Virtual*.

Os signos que estão à direita sinalizam os movimentos de translação, rotação e reflexão que podem ser aplicados nas peças que compõem o quadrado de forma a se montar uma nova figura. Com essa brincadeira, o aluno pode começar a entender as transformações geométricas, e esta aprendizagem é resultante de suas explorações no *objeto concreto-abstrato* – no caso o *Tangram Virtual*.

A figura 2 ilustra a situação em que o desafio é montar um barco, a partir das peças que compõem o quadrado. Para colocar o quadrado pequeno na posição desejada, ele deve sofrer uma translação e depois uma rotação; já para ajustar o triângulo, em destaque, é preciso aplicar uma translação e depois uma reflexão segundo uma reta. Assim, o aluno é obrigado a atribuir significados aos signos do sistema de representação, pois não tem como ajustar as peças que montam o barco sem fazer uso das transformações geométricas.

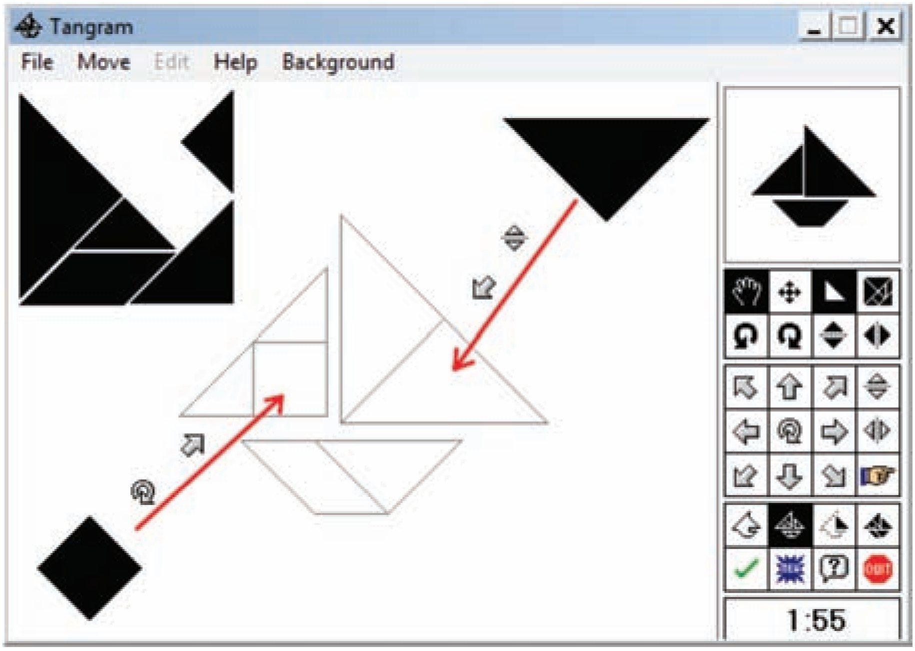


Figura 2 – Movimento de peças no Tangram Virtual.

Ao manipular o *Tangram Virtual*, o aluno faz experimentos de pensamento. A conceituação das transformações acontece no plano abstrato, mas são as suas manipulações que tratam de ajustar esta conceituação, e nisso o dinamismo do sistema de representação é um recurso fundamental.

O outro exemplo é a interessante experiência documentada em Kern (2008), tratando da introdução do conceito de função em turma de sexta série do Ensino Fundamental. Nesta experiência, o autor fez uso do objeto de aprendizagem *Árvores Algébricas* ilustrado na figura 3 e disponível no endereço <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>, no link Atividades Diversas de Funções e Gráficos. De imediato, esclarecemos que um objeto de aprendizagem é um pequeno software, com recursos de interatividade, voltado para a aprendizagem de um conteúdo específico.

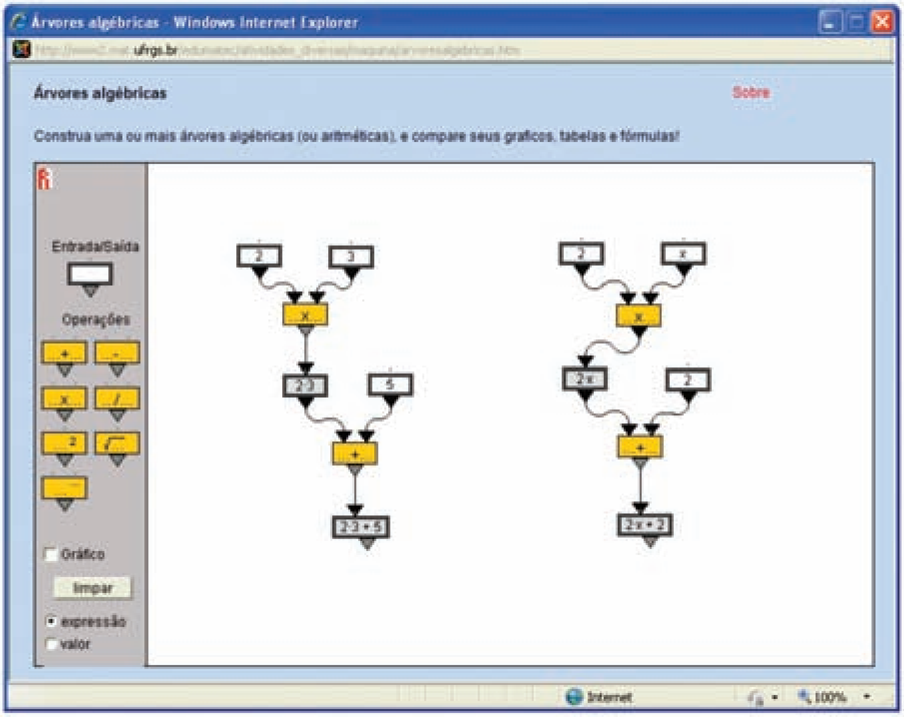


Figura 3 – Árvores Algébricas

Explicamos o funcionamento do objeto: tem-se nele uma área de trabalho e uma área de signos consistindo de "caixas brancas" para entrada e saída de dados e "caixas laranjas" indicando diferentes operações (soma, diferença, multiplicação, divisão, elevar ao quadrado, extrair a raiz quadrada, operar com potências). As operações são implementadas na área de trabalho (região branca) e o aluno pode utilizar livremente as "caixas brancas e laranjas" (ele "arrasta" as caixas para a área de trabalho), ligando-as com setas que estruturam a ordem das operações.

Na figura 3 temos duas máquinas. A primeira implementa a operação aritmética (2 . 3 + 5), usando três "caixas brancas" onde são colocados os números 2, 3 e 5; duas "caixas laranjas" onde são colocadas as operações de multiplicação e soma; e finalmente uma caixa branca que, automaticamente, apresenta o resultado da operação. A segunda máquina implementa a operação algébrica $(2 . x + 2)$. Agora, em uma das caixas brancas tem-se a variável x e associado a esta operação, também se pode obter, automaticamente, o gráfico da função $y = 2.x + 2$.

Foi através de uma sequência didática estruturada para provocar, intencionalmente, procedimentos aritméticos repetitivos que os alunos chegaram ao raciocínio generalizador que dá significado de uso de "letra como variável". Dois dos primeiros problemas resolvidos pelos alunos estão transcritos no Quadro 1.

Primeiro Problema - Parque de Diversões Um parque de diversões cobra R$ 5,00 o ingresso e R$ 3,00 por brinquedo. Qual o valor gasto por Carla se ela andar em 7 brinquedos? E se ela andar em 12?Vitor gastou R$ 56,00. Em quantos brinquedos Vitor andou? Se a mãe de Daniela deu a ela R$ 40,00, em quantos brinquedos poderá andar?
Segundo Problema - Posto de Gasolina Um posto de gasolina vende o combustível a R$ 2,75 o litro. Quanto um cliente vai pagar se comprar 6 litros? E se comprar 12 litros? E se for abastecer 30 litros?E se tiver R$10,00 para abastecer, quantos litros vai comprar? Com R$ 60,00, quantos litros se pode comprar? Se alguém gastou R$ 95,00 para completar o tanque, quantos litros gastou?

Os alunos iniciaram construindo diferentes árvores algébricas para resolver o primeiro problema proposto, sem que ainda fizessem uso de raciocínio generalizador – para cada pergunta a ser respondida uma nova árvore era construída. Mas já no segundo problema proposto, também exigindo repetição de procedimento aritmético, os alunos mostraram entendimento quanto à árvore generalizadora na seguinte atitude: construíram a estrutura da árvore deixando uma caixa-branca vazia e, assim, as perguntas similares (por exemplo, 6 litros, 12 litros e 30 litros) foram respondidas fazendo uso de uma única árvore – viram que bastava preencher a caixa branca com o dado numérico correspondente. A figura 4 ilustra as árvores aritmética e generalizadora produzidas pelos alunos.

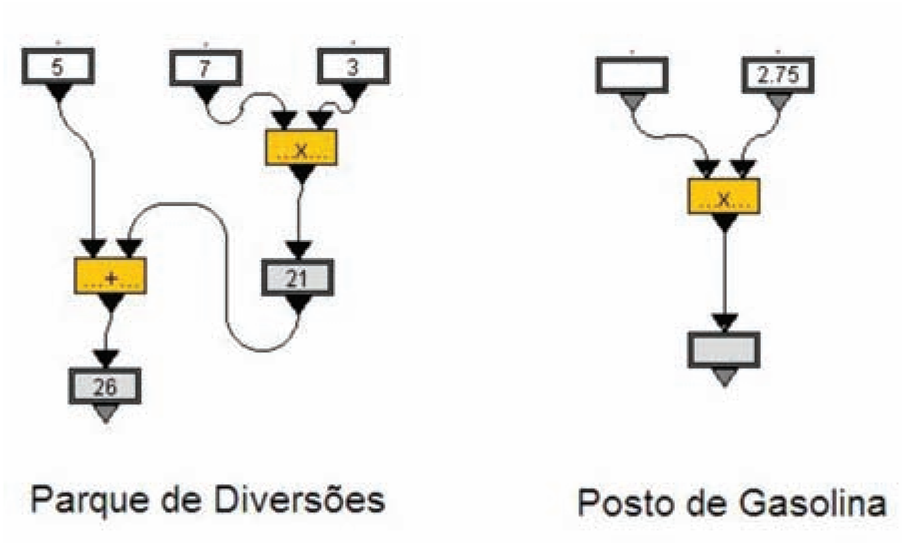


Figura 4 – Arvores aritmética e generalizadora.

A intensiva manipulação do objeto concreto-abstrato *Árvores Algébricas* deu suporte aos "experimentos de pensamento" dos alunos e desta forma construíram os conceitos de variável e função, sem que houvesse a necessidade de se ter um tratamento formal, como aquele com o qual se faz a introdução ao assunto no Ensino Médio. Ou seja, temos no dinamismo da representação a possibilidade de antecipar, na escola, o trabalho com conteúdos que são centrais na Matemática.

Outro exemplo interessante tem-se no projeto *SimCalc* [2]. Através de dinamismo e manipulação de objetos na tela do computador, alunos no final do Ensino Fundamental podem trabalhar com o conceito de taxa de variação, através do registro gráfico de "tempo versus distância percorrida", conforme ilustra o cenário lúdico da figura 5. Manipulando as velocidades de deslocamento, os alunos visualizam as mudanças na reta que aparece na tela do computador e, desta forma, começam a associar a velocidade com a inclinação da correspondente reta e é esta inclinação que guarda o conceito de taxa de variação.

[2] Desenvolvido por Jim Kaput e disponível em <http://www.kaputcenter.umassd.edu/projects/simcalc/>.

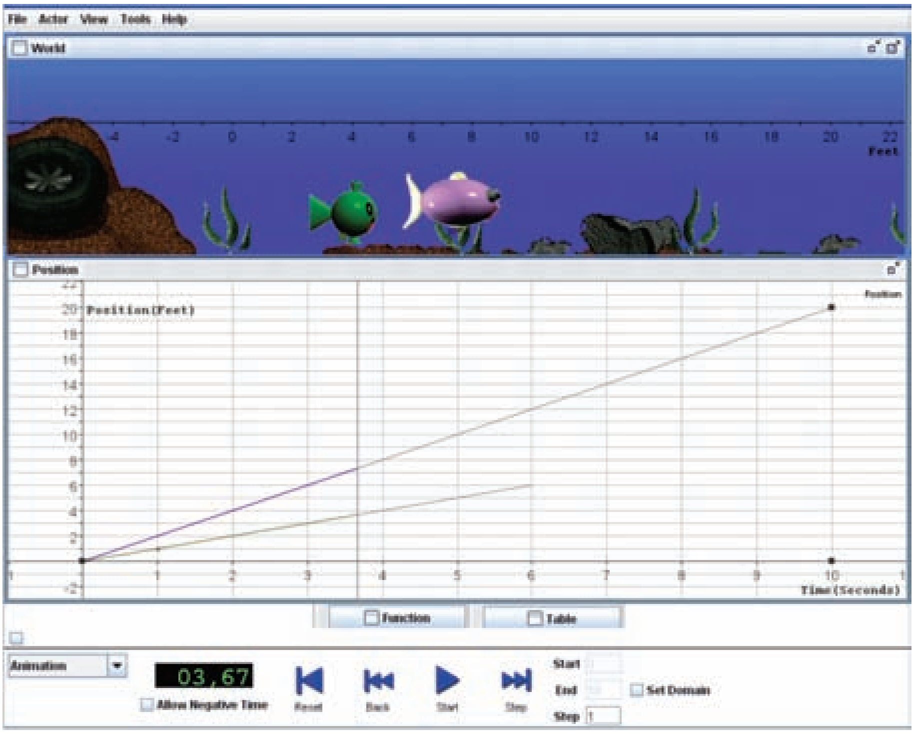


Figura 5 – Projeto SimCal

A discussão desenvolvida nessa sessão procurou sinalizar, sobretudo, a importante função dos sistemas dinâmicos de representação no processo de aprendizagem da Matemática. Aqui tratamos de objetos de aprendizagem. Na próxima sessão vamos tratar de softwares que também tem interfaces dinâmicas e interativas.

Algumas ferramentas e suas possibilidades

Na apresentação dos softwares, vamos também sugerir situações que poderiam ser exploradas em sala de aula. Os exemplos vão tratar de conteúdos que são clássicos e também de conteúdos que poderiam ser incluídos na escola. É interessante que, ao longo da leitura dos exemplos, o leitor faça reflexões sobre as características dos softwares, de modo a avaliar as suas possibilidades quanto à inserção da escola na *cultura virtual*. Vamos nos concentrar em exemplos que mostram o quanto as explorações a serem feitas pelos alunos provocam a construção do conhecimento, sendo que exigências de domínio do sistema de representação nelas se fazem presentes.

Para trabalhar com os conteúdos clássicos de funções e gráficos (funções afim, quadrática, trigonométricas, entre outras) temos o software *Winplot* [3]. Para além deste uso, vamos defender a ideia de que é possível trabalhar no Ensino Médio com o conceito de superfície, em contextos particulares, nisso tendo-se também uma interessante oportunidade para o desenvolvimento da habilidade para visualização espacial, aspecto pouco explorado na formação matemática escolar.

Vejamos como trabalhar com este conceito. Iniciamos com as superfícies de revolução que, no *Winplot*, são obtidas pela rotação de gráficos de funções de uma variável em torno de uma dada reta (o eixo de rotação). Na figura 6, à esquerda, na primeira tela, temos em azul o gráfico da função $y = x+2$ restrita ao domínio [-2, 2] e temos como eixo de rotação a reta $y = x$, desenhada em verde. Antes de executar o procedimento "Superfície de Revolução", podemos provocar os alunos para que imaginem a superfície resultante. Na segunda tela da figura 6 temos o resultado: um cilindro que pode ser manipulado de forma a ter-se diferentes vistas.

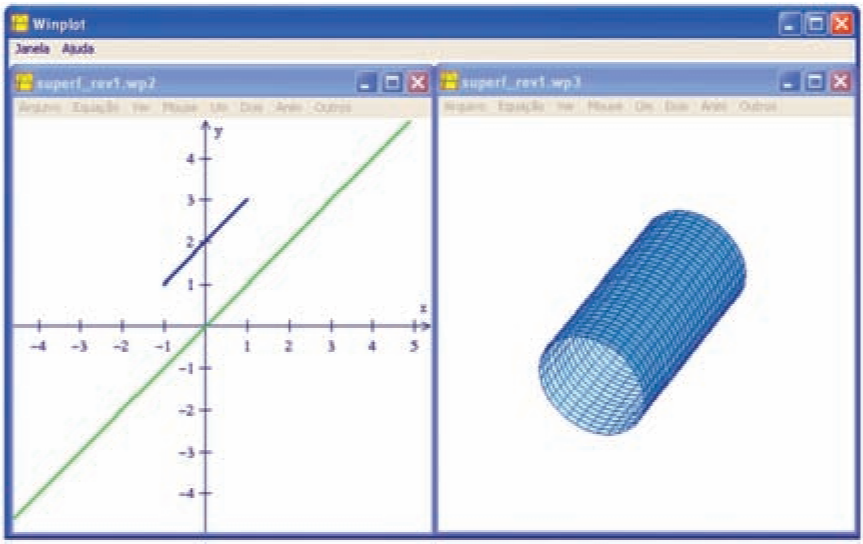


Figura 6 – Cilindro no Winplot

Podemos continuar desafiando os alunos, e a título de ilustração temos na figura 7 um desdobramento da construção que iniciou com um cilindro. Para construir as taças, novas superfícies de revolução precisam ser ajustadas e isso requer raciocínios mais elaborados.

[3] O software Winplot está disponível para download em <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>.

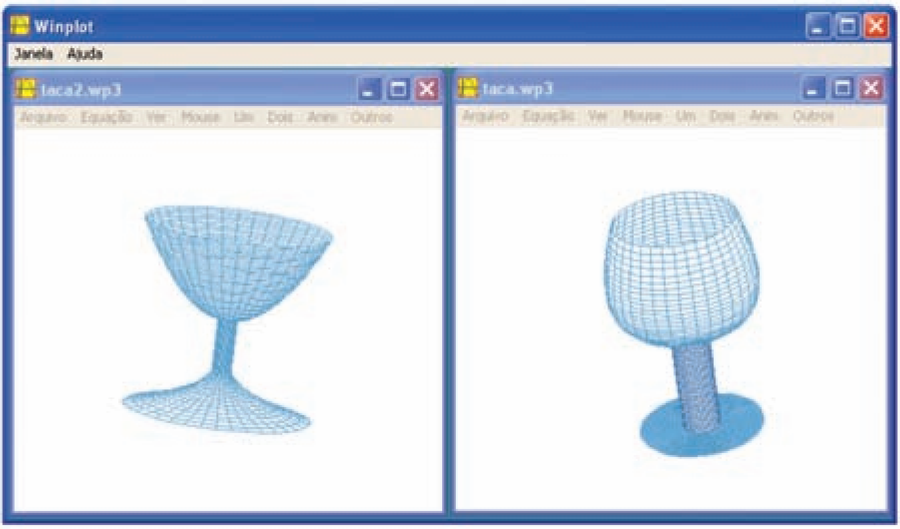


Figura 7 – “Taças” construídas com o software Winplot.

Outra possibilidade é olharmos para superfícies como sendo gráficos de funções de duas variáveis $z = f(x, y)$. Com o recurso do “Fatiador”, disponível no *Winplot*, essas superfícies podem ser interpretadas como conjunto de pontos que correspondem a deslocamentos de gráficos de funções de uma variável. Um exemplo: consideremos a função $f(x, y) = x^2$ definida no conjunto de pontos (x, y) do plano.

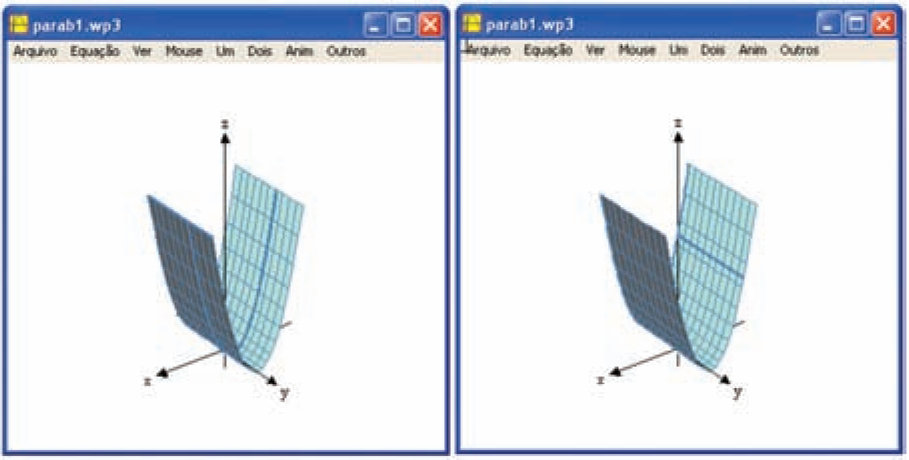


Figura 8 – Recurso de Fatiadores Y e X

Na figura 8 temos a superfície que é o gráfico desta função; na superfície da primeira tela tem-se em destaque o gráfico de uma parábola, obtido com o recurso “Fatiador Y”, correspondente à intersecção da superfície com plano perpendicular ao eixo OY; na superfície da segunda tela temos em destaque uma reta, obtida com o “Fatiador X”, resultante da intersecção da superfície com plano perpendicular ao eixo OX. Assim, com o auxílio do “Fatiador Y”, a superfície pode ser interpretada como uma união de gráficos de parábolas no espaço; com o auxílio do “Fatiador X”, a superfície pode ser interpretada como união de retas.

Essas duas atividades, no *Winplot,* ilustram o quanto o dinamismo do sistema de representação pode provocar raciocínios que levam à compreensão de conteúdos de Matemática que usualmente não são trabalhados na escola – superfícies de revolução e funções de duas variáveis. E é importante observar as exigências que se fazem presentes: quanto ao conhecimento matemático, é aquele relativo a funções de uma variável, um tópico clássico no programa de matemática escolar; quanto a habilidades, as maiores exigências dizem respeito à visualização espacial, um aspecto formativo que deveria ser mais trabalhado na escola.

Para trabalhar com funções $y = f(x)$ de uma variável real, com equações da geometria analítica plana e com conjuntos de pontos que satisfazem desigualdades no plano, temos o software *GrafEq*[4]. A sua interface de trabalho é bastante simples e tem recursos de cores que produzem efeitos interessantes. Com esse software podemos, por exemplo, desenhar paisagens e essa atividade exige associar “formas” a relações matemáticas. Para fazer isso, tomamos como ponto de partida uma função bastante simples e aplicamos operações algébricas sobre sua expressão, assim produzindo diferentes transformações no seu gráfico – translações, reflexões, dilatações, contrações – de modo a obter a “forma” desejada. Exemplificando: na paisagem da figura 9, as montanhas foram obtidas através de transformações no gráfico da função $f(x) = x^2$, ou seja, na expressão da função $g(x) = a\,.(x- m)^2 + k$, os parâmetros a, m e k foram convenientemente escolhidos; do mesmo modo foi obtido o mar, agora através de transformações aplicadas na função $f(x) = sen\ (x)$; e os raios do sol são resultado de transformação sobre a reta $f(x) = x$. Já mais elaborada é a forma que está no guarda-sol: resulta de manipulações algébricas na função $f(x) = x + sen\ (x)$.

---

[4] O software GrafEq está disponível para download em <http://www.peda.com/grafeq/>.

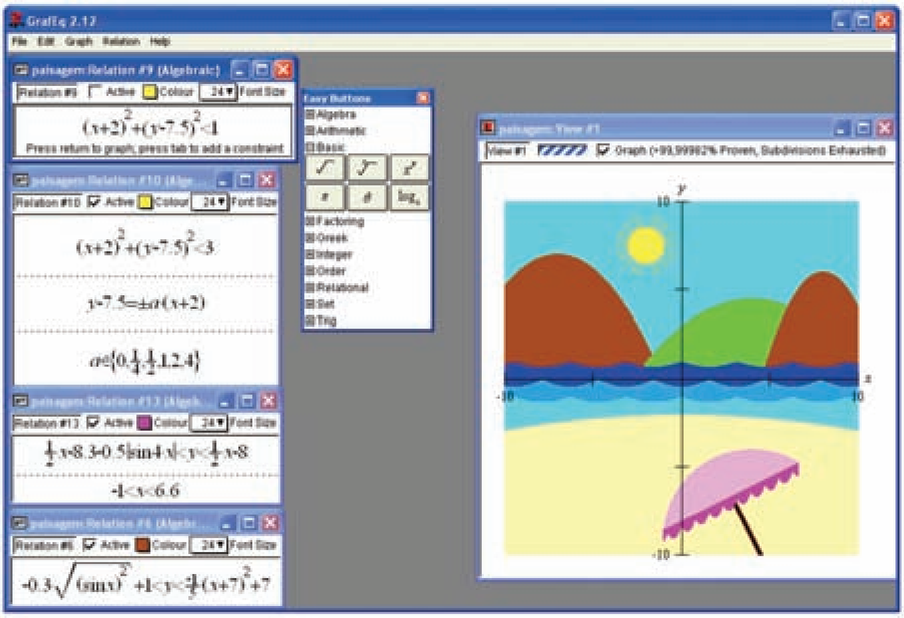


Figura 9 – Paisagem construída com o GrafEq.

Ao controlar os efeitos de desenho a partir de manipulações algébricas, os alunos podem apreender sobre movimentos de gráficos. Desta forma, as expressões algébricas associadas ficam impregnadas de significado geométrico e isso é resultado das explorações feitas no sistema de representação que com seu dinamismo, de imediato, relaciona duas diferentes representações de um objeto – a analítica e a geométrica.

Para trabalhar com geometria existe o software *GeoGebra* [5]. A sua tela de trabalho disponibiliza, em linguagem clássica da geometria, recursos para construção de figuras a partir das propriedades que as definem. O processo de construção é feito mediante escolhas de primitivas que são disponibilizadas nos diferentes menus – pontos, retas, círculos, retas paralelas, retas perpendiculares, transformações geométricas, por exemplo. A base inicial de menus pode ser expandida com a inclusão de automatização de rotina de construção – são as novas ferramentas que se incorporam ao software. Na figura 10, a título de ilustração, apresentamos a construção do círculo inscrito em um triângulo.

[5] O software GeoGebra está disponível para download em <http://www.geogebra.org/cms/>.

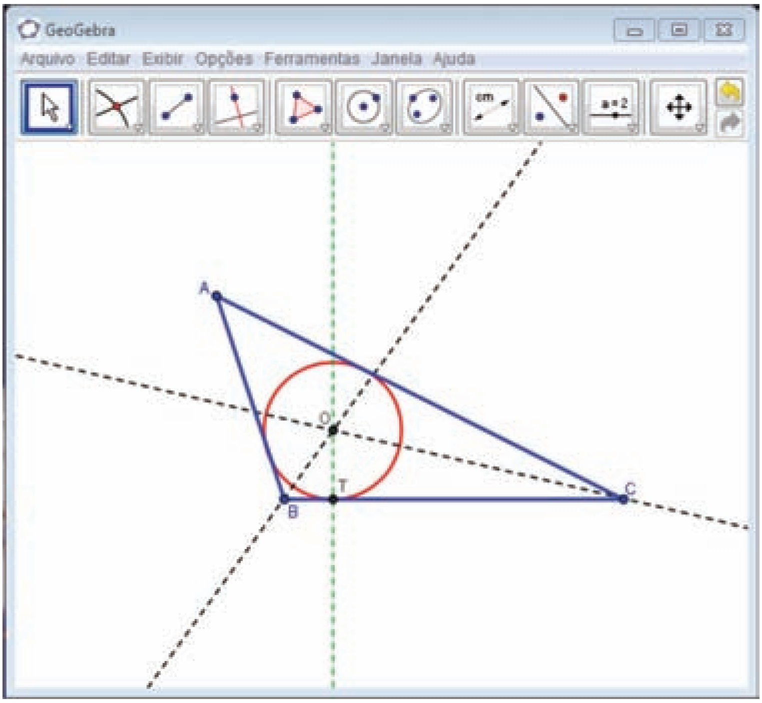


Figura 10 – Interface do software *GeoGebra*

Mediante deslocamentos aplicados aos vértices do triângulo, a figura na tela do computador muda de tamanho e de posição, mas mantém as propriedades que foram impostas à construção: as bissetrizes dos ângulos B e C, o círculo com centro em O e passando pelo ponto de tangência T do círculo com o lado BC do triângulo são propriedades que permanecem na figura. Essa é uma importante característica do *GeoGebra* e de outros softwares similares e é por isso que eles são conhecidos como ambientes de geometria dinâmica – as construções que neles são feitas não se deformam!

O movimento aplicado aos vértices do triângulo evidencia propriedades que não foram declaradas na construção – não importa o tipo de triângulo, sempre vamos ver o círculo tangenciando também os lados AB e AC, e tal fato não foi imposto à construção. Ou seja, é fato que decorre das imposições que foram feitas, e se caracteriza como a conclusão de um teorema. No caso, o teorema diz que "as bissetrizes de dois ângulos de um triângulo se interceptam em um ponto O que é o centro do círculo que tangencia, simultaneamente, os três lados do triângulo". E se traçarmos a terceira bissetriz vemos que ela também passa pelo ponto O e isto corresponde à segunda parte da conclusão do teorema: "e a bissetriz do terceiro ângulo também passa pelo ponto O."

Raciocínios em geometria espacial, bem como a visualização de objetos tri-dimensionais, também podem ter um suporte dinâmico no software *Calques3D*[6]. Feita uma construção no *Calques3D*, há a possibilidade de se olhar o objeto sob diferentes perspectivas, através do movimento de giro no espaço. A título de exemplo, na figura 11 trazemos as diferentes vistas de um cubo.

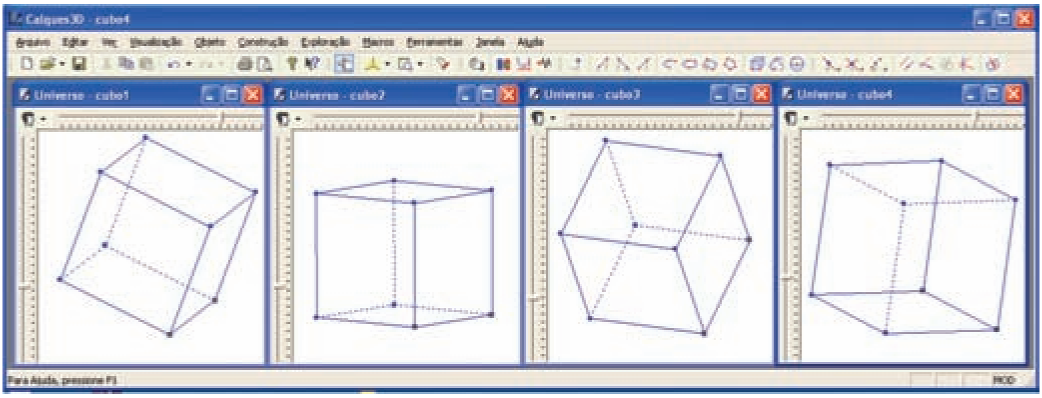


Figura 11 – Diferentes vistas do cubo no Calques3D.

Na figura 12, temos a interface do software com uma construção que simula o movimento de uma porta de garagem. As três diferentes posições da porta são obtidas com movimento aplicado em ponto que está na construção, e para obter este efeito de "abrir a porta" é preciso estabelecer relações entre diferentes elementos geométricos.

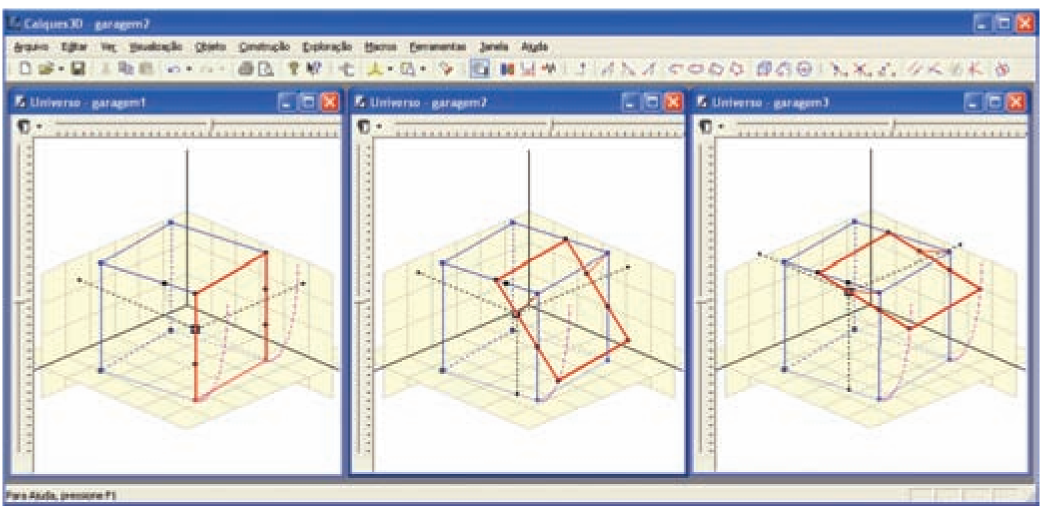


Figura 12 – Porta de garagem construída no Calques3D

6 O software Calques3D está disponível para download em <http://www.calques3d.org/>.

No estudo da geometria espacial, especialmente nos problemas de cálculos de volume, uma das dificuldades que se apresenta para os alunos é quanto ao entendimento de um objeto tridimensional que está sendo representado em desenho bidimensional. O desenho estático é pobre como sistema de representação, quando comparado com uma representação tridimensional, dinâmica e manipulável na tela do computador. Uma atividade de construção das figuras estáticas dos livros, no *Calques3D,* pode ajudar os alunos no desenvolvimento de habilidades para visualização espacial, de forma a melhor resolverem os problemas de cálculos de volume.

Na construção de um objeto no Calques 3D, a visualização espacial é uma habilidade muito exigida. E´ preciso " enxergar", por exemplo, retas ortogonais que não se interceptam, plano mediatriz de segmento , segmento que gira em torno de uma reta

Ainda para trabalhar com geometria espacial temos o dinâmico e colorido software *Poly*[7]. Este software permite explorar diferentes famílias de poliedros convexos, dentre eles os platônicos, aqueles cujas faces são polígonos regulares, sempre do mesmo tipo, e em cada vértice tem-se o mesmo número de arestas; os arquimedianos, que têm como faces polígonos regulares, não necessariamente todos iguais entre si. O *Poly* tem botão que faz girar os poliedros e também é possível transformar, de forma contínua, o poliedro em sua planificação.

[7] O software Poly está disponível para download em <http://www.peda.com/poly/>.

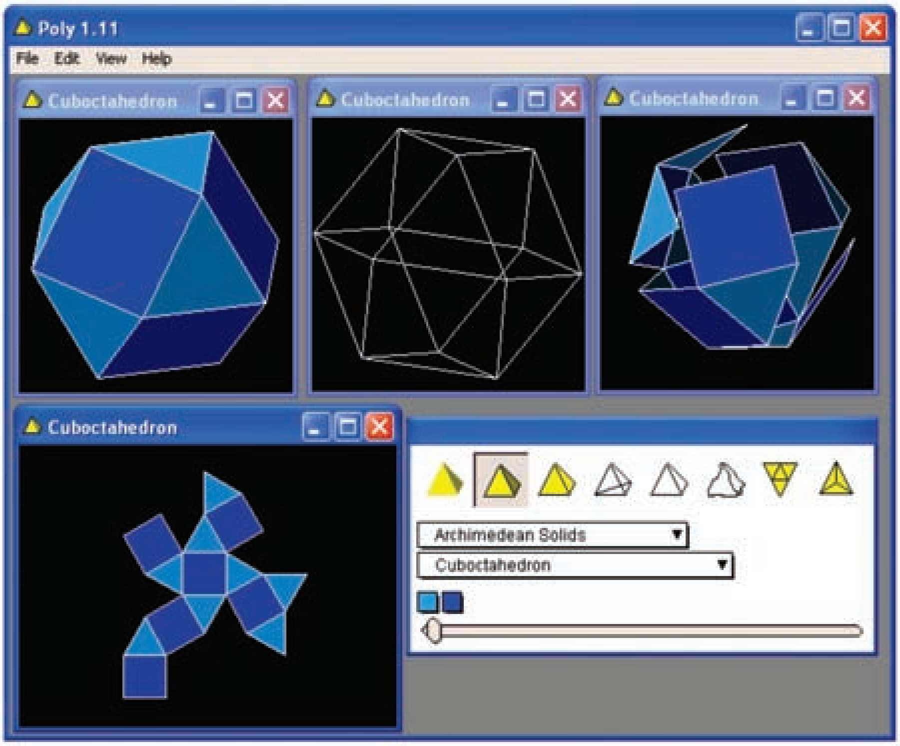


Figura 13 – Visualização 2D e 3D do cubo truncado no Poly.

E, finalizando nossa coletânea, apresentamos os softwares da família *Spelunk*, o *Shapari* e o *Curvay* [8].

São dois softwares que podem ser utilizados por alunos de diferentes faixas etárias, pois a interface apresenta variado nível de exigência quanto ao domínio de conteúdos de matemática. São interfaces simples e intuitivas, nas quais podem ser exploradas coloridas formas geométricas, fazendo uso de pouco conhecimento matemático ou então já no universo das transformações e curvas no plano. As figuras 14 e15 ilustram produções feitas nesses dois softwares.

[8] Os softwares Shapari e o Curvay estão disponíveis para download em <http://www.spelunkcomputing.com>.

Figura 14 – Interface do Shapari e um exemplo de construção.

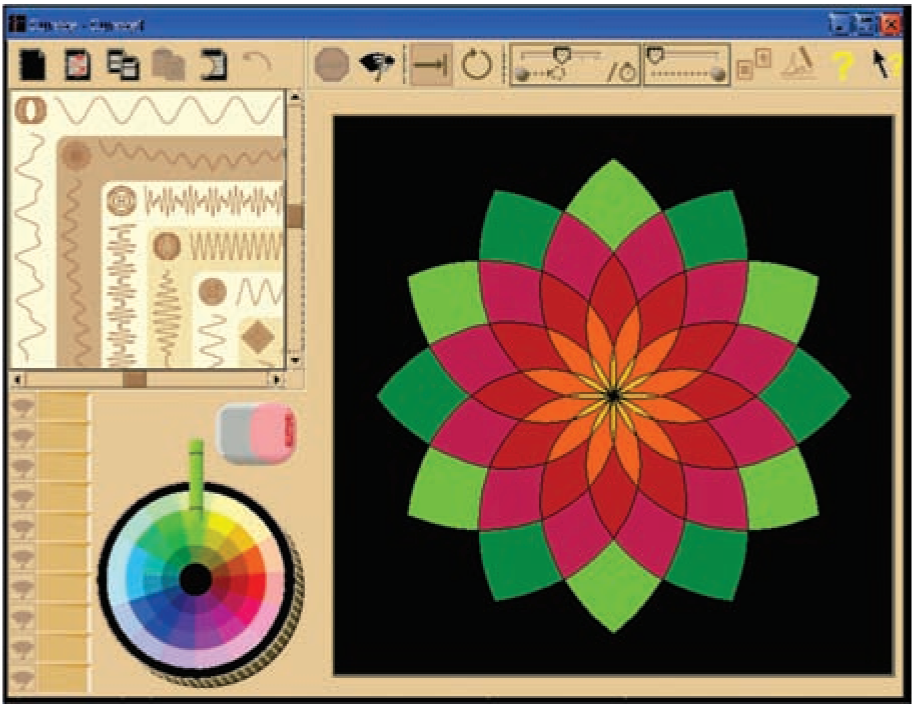


Figura 15 – Interface do Curvay e um exemplo de construção.

O software *Shapari* permite explorar processos recursivos no contexto de transformações no plano – por exemplo, transformações de redução podem ser aplicadas sucessivamente a uma figura inicial e assim obtemos uma figura final que guarda a mesma estrutura da figura inicial em todos os seus detalhes. Esse processo está ilustrado na figura 16.

Figura 16 – Ilustração de processo recursivo no Shapari.

O *Shapari* apresenta comandos simples e com alguns cliques do mouse é possível obter interessantes efeitos artísticos, seja utilizando as transformações já existentes ou, de forma mais avançada, criando novas transformações a partir de matrizes 2 x 2.

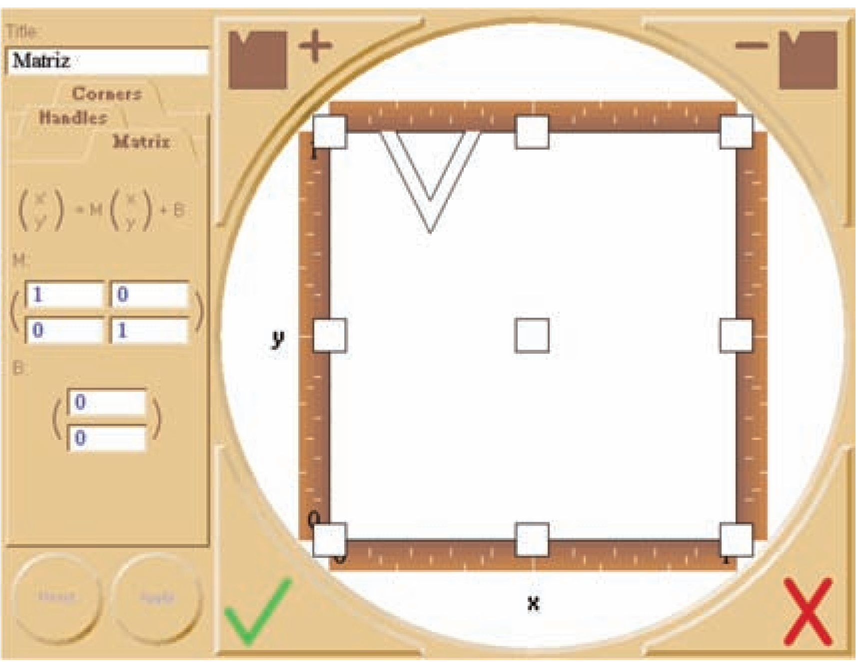


Figura 17 – Janela de edição do Shapari.

Na figura 17 temos a janela de edição de transformações e, conforme indicado na esquerda, os pontos (*x, y*) do plano são transformados em novos pontos (*x', y'*), quando as coordenadas são multiplicadas pela matriz M (2x2); e se, após a multiplicação, é feita a soma com a matriz B (2x1), obtém-se o efeito de translação do ponto. Os valores nas entradas da matriz M determinam o tipo de transformação – compressão/dilatação, rotação, cisalhamento ou ainda composição destas transformações.

O efeito da aplicação de uma transformação nos pontos do plano pode ser visto, de imediato, no quadrado unitário com vértices (0,0), (1,0), (1,1), (0,1), que aparece na figura 17. Vejamos um exemplo: se queremos comprimir os pontos do plano pelo fator 0.5 e depois transladá-los pelo vetor (0.3, 0) informamos ao Shapari , na janela de edição, a transformação a ser feita:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ao aplicar a transformação no quadrado unitário temos o seguinte resultado, ilustrado na figura 18: o quadrado unitário tem seu lado reduzido pela metade (fator 0.5) e, após, é transladado segundo o vetor (0.3, 0). As coordenadas dos vértices do novo quadrado são: (0.3, 0), (0.8, 0), (0.8, 0.5) e (0.3, 0.5).

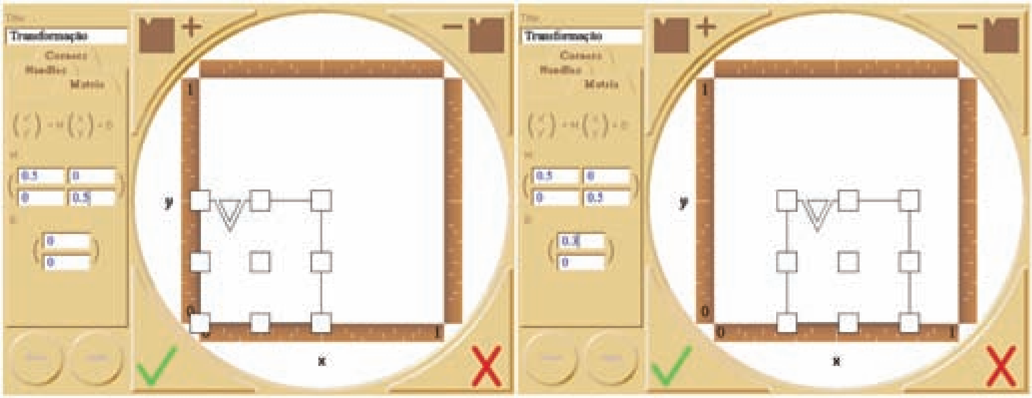


Figura 18 – Transformação aplicada no quadrado unitário.

Com o software *Shapari* podemos trabalhar na escola um novo conteúdo – as transformações geométricas associadas com as matrizes reais 2x2. E também podemos trabalhar com procedimentos recursivos.

Quanto ao software *Curvay*: também tem uma interface simples e intuitiva, e trata de curvas no plano. Ele simula uma caneta que desenha na tela do computador, de forma dinâmica, o movimento de uma partícula. O interessante é que o movimento da partícula é dado pelo movimento de suas coordenadas x e y. Vamos esclarecer este funcionamento usando como exemplo a trajetória circular de uma partícula. Diferentes são as descrições matemáticas do círculo: ele pode ser visto como o conjunto de pontos P que se mantêm a uma distância constante de um ponto fixo O, este o centro do círculo; também pode ser descrito como o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, onde (a, b) são as coordenadas do centro do círculo e r é o raio; ou, ainda, como a curva imagem da função $f(t) = (a + r \,.\, cos\,(t)\,,\, b + r \,.\, sen\,(t))$, onde a imagem $f(t)$ pode ser interpretada como a posição de uma partícula, no instante de tempo t, no círculo de centro (a, b) e raio r.

Para entendimento do funcionamento do *Curvay* é esta última descrição que nos interessa e vamos olhar para o caso particular do círculo de centro (0,0) e raio unitário dado por $f(t) = (cos\,(t), sen\,(t))$. O movimento da partícula pode ser descrito da seguinte forma: o componente $x(t) = cos\,(t)$ corresponde a movimento oscilatório, da partícula, na horizontal; também é oscilatório o movimento vertical da partícula, dado pelo componente $y(t) = sen\,(t)$. Os movimentos dos componentes correspondem ao comportamento das funções trigonométricas e o interessante é que o movimento circular da particula é resultante de uma especial sincronia entre os movimentos oscilatórios horizontal e vertical. Na figura 19 temos a tela do *Curvay* com a partícula em movimento circular e, junto, os movimentos oscilatórios de seus componentes.

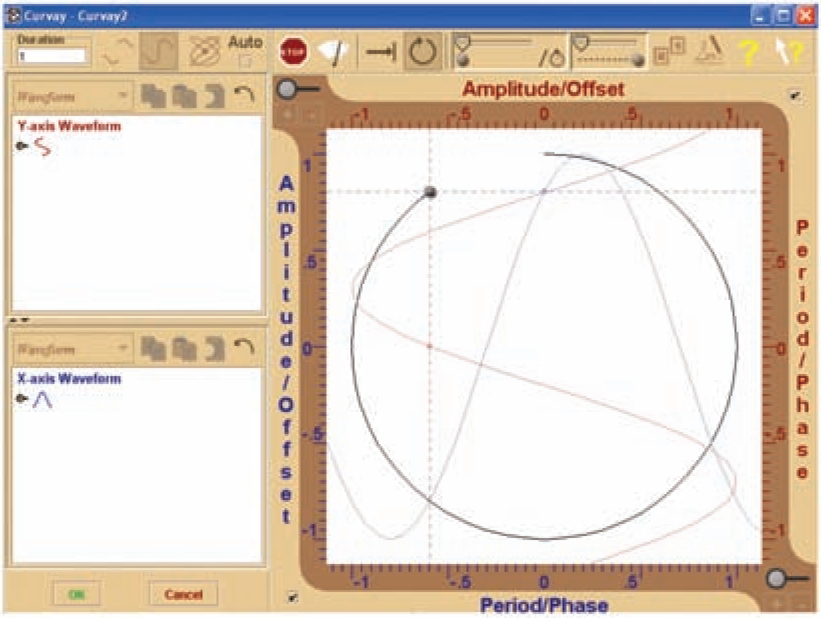


Figura 19 – Movimento circular de partícula.

Agora, mantendo-se o mesmo tipo de movimento oscilatório nos dois componentes e alterando-se, por exemplo, a velocidade de oscilação de um dos componentes, a curva resultante já é bem diferente. Na figura 20 temos a curva correspondente à função $f(t) = (cos\ (t),\ sen\ (3.t))$.

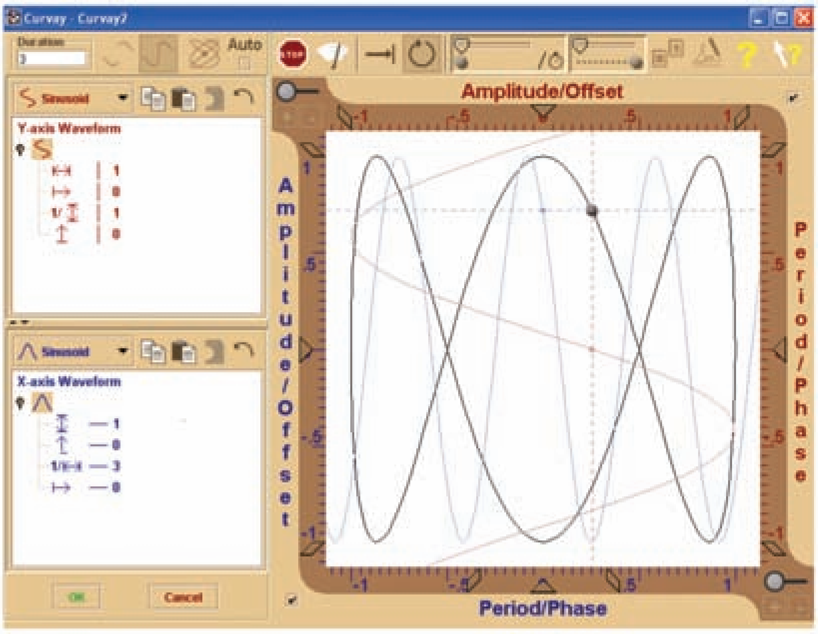


Figura 20 – Curva no Curvay.

Um dos grandes potenciais do software *Curvay* é quanto ao desenvolvimento da intuição para bem entender o movimento de uma partícula a partir do movimento de suas componentes horizontal e vertical.

Esses dois últimos softwares que apresentamos são especialmente interessantes porque permitem trabalhar com conteúdos que não fazem parte do programa de matemática escolar, mas que poderiam fazer! E isto é possível porque eles são objetos concreto-abstratos com os quais o aluno pode explorar conceitos de matemática, inicialmente como uma brincadeira e depois com algum formalismo, e assim é que identificamos o *Shapari* e o *Curvay* como especiais exemplares de *ferramentaparaopensamento*.

Conclusão

Nesse capítulo procuramos apresentar alguns objetos de aprendizagem e alguns softwares, junto com possibilidades de uso no ensino e aprendizagem da Matemática, tanto em conteúdos que já estão presentes na escola quanto em conteúdos que lá poderiam estar.

Mas muitos são os recursos que temos à disposição na Internet e, assim, critérios de escolhas se fazem necessários. Na apresentação feita, procuramos realçar nos diferentes softwares dois aspectos que julgamos relevantes considerar no momento das escolhas: os conteúdos de matemática que neles estão envolvidos e os recursos disponíveis para que os alunos possam fazer muitos experimentos de pensamento. Isto porque consideramos que as mídias digitais se tornam realmente interessantes quando elas nos ajudam a mudar a dinâmica da sala de aula na direção de valorizar o desenvolvimento de habilidades cognitivas com a concomitante aprendizagem da Matemática. Julgamos que os softwares apresentados pertencem a esta categoria dos interessantes. Nos próximos capítulos outras possibilidades das mídias digitais no ensino da matemática serão apresentadas, junto com relatos das apropriações de uso feitas pelos professores-alunos do Curso de Especialização "Matemática, Mídias Digitais e Didática".

Referências

BARRA, V. M. *Da Pedra ao Pó*: O Itinerário da Lousa na Escola Paulista do Século XIX. Dissertação (Mestrado em História e Filosofia da Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

DUVAL, R. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* vol. 61, p. 103-131, 2006.

KERN, Newton. *Uma introdução ao pensamento algébrico na sexta série através de relações funcionais.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/15584>.

LEVY, P. *Tecnologias da Inteligência*: o futuro do pensamento na era da informática. São Paulo: Editora 34, 1993.

NOSS, R. For A Learnable Mathematics in The Digital Culture. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 48, n.1, p. 21-46, oct. 2001.

PAPERT, S. *Logo - computadores e educação.* São Paulo: Brasiliense, 1988.

RADFORD, L. The Anthropology of Meaning. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 61, n. 1-2, p. 39-65, Feb. 2006.

SHAFFER, W. DAVID; CLINTON A. KATHERINE. Toolforthoughts: Reexamining Thinking in the Digital Age. Mind, Culture and Activity, vol. 13, n. 4, California, 2006.

Capítulo 2

GEOMETRIA DINÂMICA NA ESCOLA

MARIA ALICE GRAVINA
MARINA MENNA BARRETO
MARIÂNGELA TORRE DIAS
MELISSA MEIER

Introdução

Nosso propósito, neste capítulo, é detalhar uma das novas possibilidades para o ensino da geometria que foi explorada no Curso – a modelagem geométrica. Como veremos, a modelagem geométrica pode ser uma interessante "porta de entrada" para a aprendizagem da geometria no Ensino Fundamental. O trabalho de modelagem faz uso de software de geometria dinâmica – uma mídia digital que disponibiliza régua e compasso virtuais, que são os instrumentos clássicos com os quais são feitas as construções geométricas, só que agora em ambiente virtual.

Dentre os diferentes softwares de geometria dinâmica que temos à nossa disposição, escolhemos o GeoGebra (disponível em <*www.geogebra.org*>). Duas são as justificativas para essa escolha: é um software com consistente e interessante menu para se trabalhar com a geometria euclidiana; é "software livre", o que significa que tem desenvolvimento compartilhado na comunidade de pessoas que têm interesse no assunto e, assim sendo, o seu uso é livre e não depende de aquisição de licença. Isso é muito bom, porque assim o software GeoGebra pode ser, de imediato, instalado em computadores pessoais e nos computadores dos laboratórios das escolas.

No nosso compartilhamento de experiência, de início, vamos tratar das figuras da geometria dinâmica, procurando esclarecer como funciona o processo de construção quando usamos os diferentes recursos que temos à nossa disposição no GeoGebra. Depois deste entendimento, vamos tratar da modelagem geométrica, tomando como ponto de partida a construção de um mecanismo que todos nós conhecemos – um ventilador. E então avançamos com outras possibilidades, através do material didático que foi produzido para o Curso de Especialização. Esse material, na forma de site web intitulado "Mídias Digitais I" (GRAVINA; BARRETO, 2009) e disponível em <www.ufrgs.br/espmat> no menu "Disciplinas", foi estruturado para que os professores-alunos, a distância, avançassem no seu aprendizado com autonomia. E ilustramos os resultados dessa aprendizagem trazendo um pouco da produção desses professores-alunos.

Na organização do capítulo pensamos, especialmente, no professor de Matemática que ainda não tem familiaridade com geometria dinâmica. Assim, procuramos manter um fio condutor de forma tal que, ao final da leitura, o professor se sinta confiante para instalar o software GeoGebra no seu computador, consultar o material disponibilizado no site Mídias Digitais I, lançar-se nas primeiras aventuras de modelagem geométrica e com elas vivenciar o aspecto lúdico que pode estar presente em situações de aprendizagem da Matemática.

As figuras da geometria dinâmica

Os programas de geometria dinâmica, dentre eles o GeoGebra, são ferramentas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de figuras geométricas a partir das propriedades que as definem. São ambientes que concretizam a geometria euclidiana plana, e diferente daquilo que obtemos com lápis e papel e régua e compasso, pois com o mouse podemos manipular as figuras que estão na tela do computador, ao aplicar movimento em pontos que estão na construção.

O processo de construção das figuras é feito mediante o uso de menus em linguagem natural da geometria – ponto, reta passando por dois pontos, retas paralelas, retas perpendiculares, círculos, transformações geométricas, por exemplo. A régua virtual é dada no recurso *Reta por Dois Pontos* e o compasso virtual é dado no recurso *Círculo com Centro e Ponto*. É importante saber que a coleção inicial de menus pode ser expandida com a inclusão de nova rotina de construção, identificada no GeoGebra como uma *Nova ferramenta*. Por exemplo, pode-se ter como *Nova ferramenta* o procedimento que constrói o círculo que circunscreve um triângulo.

O GeoGebra, assim como outros softwares similares, tem o interessante recurso de "estabilidade sob ação de movimento". Explicamos o que isto significa: feita uma construção, mediante movimento aplicado aos pontos que dão início à construção, a figura que está na tela do computador se transforma quanto ao tamanho e posição, mas preserva as propriedades geométricas que foram impostas no processo de construção, bem como as propriedades delas decorrentes. Ou seja, a "figura em movimento" guarda as regularidades que são importantes sob o ponto de vista da geometria. São figuras que não se deformam, e estas é que são as figuras da geometria dinâmica! Vamos ilustrar essa importante característica com dois exemplos.

No primeiro exemplo temos uma tela do GeoGebra (figura 1) onde vemos dois quadriláteros que identificamos como "quadrados".

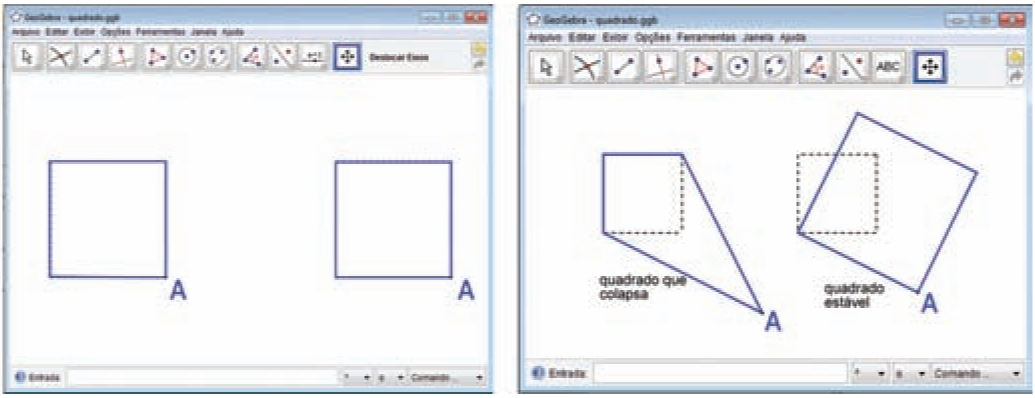


Figura 1 – Quadrados à esquerda e movimento nos quadrados, à direita.

Ao aplicarmos movimento no vértice A, temos na segunda tela do GeoGebra , ainda na figura 1 , o efeito resultante (o desenho pontilhado indica a situação inicial dos quadriláteros): o primeiro quadrado se deforma, pois o movimento não preserva as propriedades "quatro ângulos retos" e "quatro lados congruentes entre si"; já o segundo quadrado muda de tamanho e posição, mas mantém sempre a mesma forma.

A razão que explica os diferentes efeitos do movimento é a seguinte: o primeiro quadrado corresponde a desenho do tipo "a mão livre", tratando-se de construção essencialmente visual, e assim, sob ação de movimento, se deforma. Já o segundo quadrado foi construído com controle geométrico – na construção foram explicitadas as propriedades geométricas do quadrado, via os menus disponibilizados no GeoGebra. Esse é um quadrado da geometria dinâmica – sob movimento do vértice A, mantém a forma. Esclarecemos o procedimento de construção que garante este efeito, ilustrado na figura 2: segmento AB; retas perpendiculares ao segmento passando pelos seus extremos; círculo de centro A passando por B e interceptando uma das retas em D; círculo de centro B passando por A e interceptando a outra reta em C; segmentos AD, DC e CB.

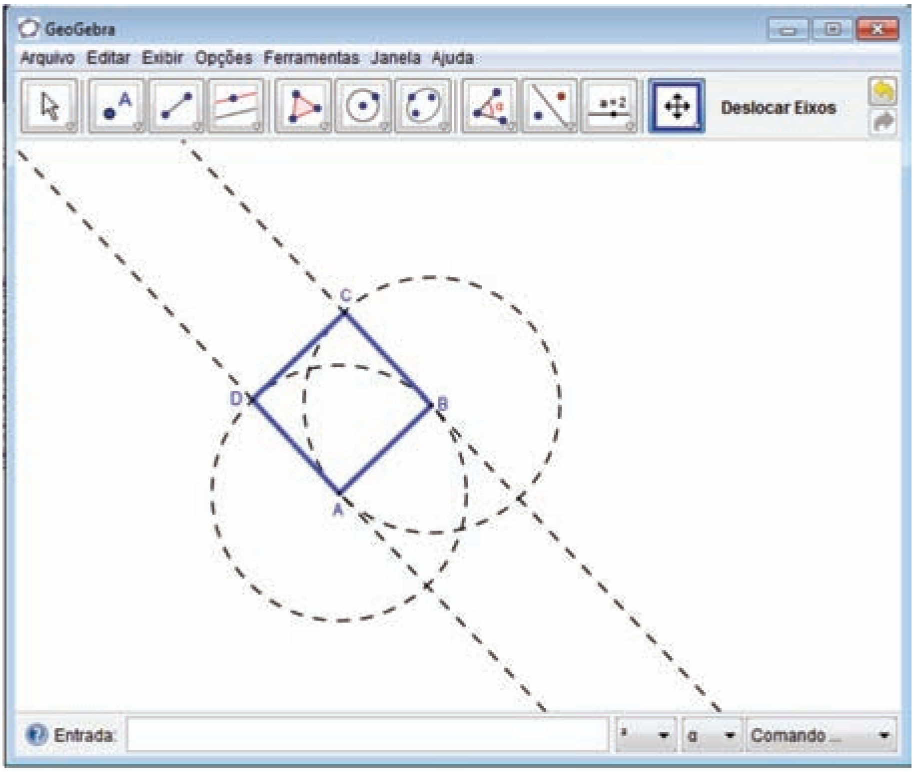


Figura 2 – Construção do quadrado

O segundo exemplo corresponde à construção que está em destaque na figura 3, na qual os passos intermediários são os elementos geométricos que estão pontilhados: iniciamos construindo o triângulo ABC; depois construímos as retas *r* e *s*, as mediatrizes dos lados AB e AC do triângulo (lembramos que a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que passa pelo seu ponto médio); marcamos o ponto O de intersecção das duas retas e finalizamos com a construção do círculo de centro O e que passa pelo ponto A.

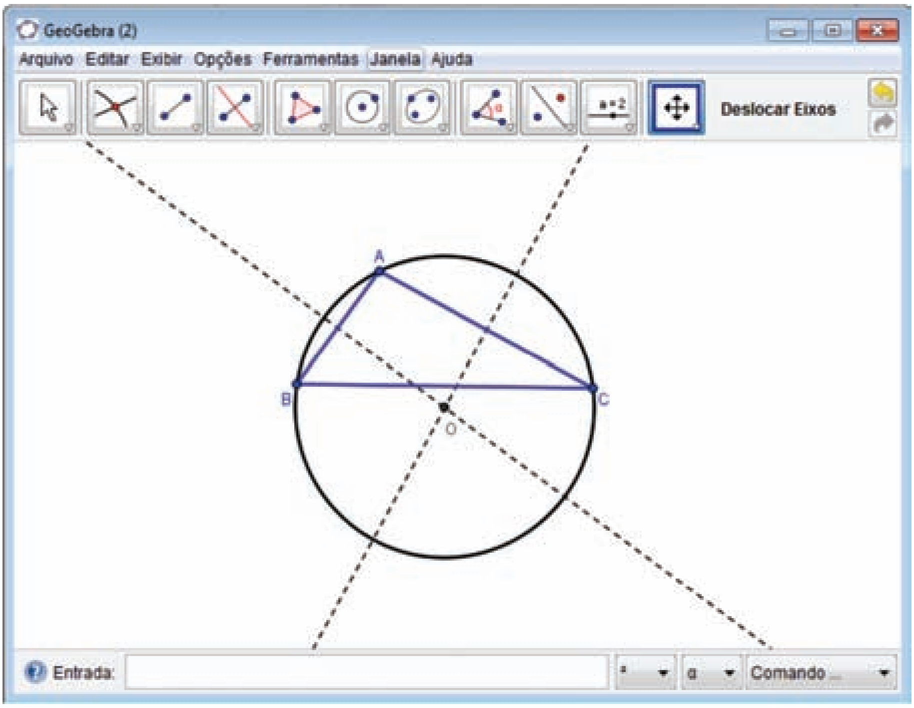


Figura 3 – Teorema do círculo circunscrito.

Como resultado final, vemos um triângulo e um círculo que passa pelos três vértices do triângulo. O procedimento de construção nos garante que o resultado obtido na tela do GeoGebra (usualmente reconhecido como "círculo circunscrevendo um triângulo") é também uma figura da geometria dinâmica: quando aplicamos movimento aos vértices do triângulo, a figura muda de tamanho e posição, mas sempre vamos ver um "círculo circunscrevendo um triângulo".

Vamos aproveitar esse segundo exemplo para destacar um importante recurso pedagógico que se apresenta, de forma natural, nos ambientes de geometria dinâmica: criam-se situações que preparam os alunos para o entendimento da necessidade e da importância das argumentações dedutivas que são características da geometria (GRAVINA, 2001). No exemplo acima, quando movimentamos os vértices do triângulo, fica visualmente claro que o círculo construído continua sempre passando pelos três vértices. Mas se revisamos com atenção o procedimento de construção, encontramos somente a informação "círculo de centro O que passa por A". Assim, temos que a propriedade de "passar pelos vértices B e C" é uma decorrência da construção feita, ou seja, é uma propriedade que a construção tem , sem que isso houvesse sido declarado no passo a passo do procedimento geométrico. Portanto, é uma propriedade que merece explicação e esta nada mais é do que a demonstração do clássico "teorema do circuncentro". Este teorema diz que "o círculo com centro no ponto de intersecção das mediatrizes de *dois lados* (atenção ao nosso grifo) do triângulo e passando por um de seus vértices necessariamente passa pelos outros dois vértices".

Os dois exemplos apresentados acima, além de terem o propósito de esclarecer como funcionam as figuras da geometria dinâmica, também servem para indicar o quanto o processo de construção dessas figuras pode ser um recurso didático que prepara os alunos para iniciarem suas primeiras argumentações dedutivas. Essa é uma habilidade que não deveria ser negligenciada na formação matemática escolar.

Anterior a esse aprendizado, que trata de raciocínios dedutivos, temos as dificuldades que os alunos encontram quanto ao entendimento do significado e alcance da figura, quando trabalham com geometria. Por exemplo, frequentemente os alunos tomam como propriedade da altura de um triângulo "ser um segmento no interior do triângulo", ou se referem ao paralelogramo como o "quadrilátero com dois ângulos agudos e dois obtusos". Tais equívocos estão fortemente associados aos desenhos prototípicos que sempre acompanham, nos livros, a introdução destes conceitos: no caso da altura, ela é sempre apresentada em desenho de triângulo com ângulos agudos e, nessa situação, a altura é de fato um segmento no interior do triângulo (lembramos que a altura relativa a um dos lados de um triângulo é o segmento AH, onde A é vértice oposto ao lado em questão e H é o pé da reta perpendicular à reta suporte do lado, passando pelo vértice A). No caso do paralelogramo, os alunos esquecem que a condição que o define é tão somente "ser quadrilátero com lados opostos paralelos" e, impressionados pelo desenho, registram a presença dos ângulos agudos e obtusos.

Fischbein (1993) esclarece essa dificuldade dos alunos quando introduz a ideia de *conceito figural* com dois componentes: um *conceitual* e outro *figural*. O componente *conceitual*, com maior ou menor grau de formalismo, é expresso em linguagem natural. Já o *componente figural* é de natureza visual (forma, posição, tamanho) e se expressa através de um desenho. Na aprendizagem da geometria, é importante o estabelecimento de adequada simbiose entre os componentes conceitual e figural e nesse sentido nos diz Fischbein:

> [...] no caso especial de raciocínio geométrico, nós temos que lidar com um tipo especial de objeto mental, o qual possui, ao mesmo tempo, propriedades conceituais e propriedades figurais. [...] A dificuldade em manipular conceitos figurais, isto é, a tendência de negligenciar a definição em função da pressão de restrições figurais, representa um dos maiores obstáculos ao raciocínio geométrico. (FISCHBEIN, 1993, p. 144, 151, nossa tradução)

As figuras da geometria dinâmica muito ajudam na superação dessas dificuldades, pois, ao colocar-se sob movimento uma dada construção, temos, na tela do computador, uma coleção de desenhos que correspondem ao componente figural do conceito ou propriedade em questão. No caso da altura de um triângulo ABC relativa ao lado BC, a construção é a seguinte: triângulo ABC, reta perpendicular à reta suporte do lado BC e passando pelo vértice A, H ponto de intersecção das duas retas, segmento AH. Movimentando o vértice A, apresenta-se naturalmente a situação em que o segmento altura não está mais no interior do triângulo, conforme ilustra a Figura 4, que registra algumas das possibilidades resultantes do movimento.

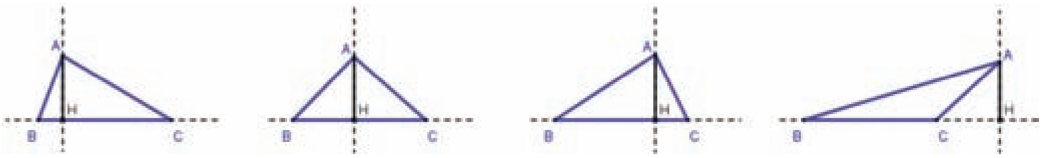


Figura 4 – Altura de um triângulo.

Quanto ao paralelogramo, fazemos a seguinte construção: segmentos AB e AD; reta *r* paralela ao segmento AB passando por D; reta *s* paralela ao segmento AD passando por B; C ponto de intersecção das duas retas; segmentos BC e DC. Movimentando os vértices A, B e D vemos que o quadrilátero construído mantém os lados opostos sempre paralelos; mas o movimento mostra que retângulos, quadrados e losangos são quadriláteros que fazem parte da família dos paralelogramos, e é isso que ilustramos na figura 5, a qual registra o resultado de alguns movimentos aplicados aos vértices A, B e D do paralelogramo. Desta forma, o aluno vê que não é uma característica do paralelogramo "ter dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos".

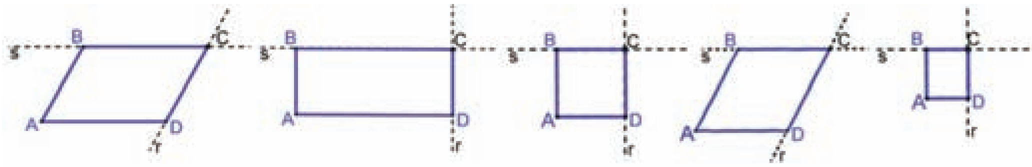


Figura 5 – Movimento aplicado ao paralelogramo

São inúmeros os desdobramentos das situações de aprendizagem quando se trabalha com geometria dinâmica. Dentre eles, temos o estudo da geometria euclidiana que trata de figuras, seus conceitos, suas propriedades e demonstrações. Um outro desdobramento, este de natureza lúdica, é a modelagem geométrica, e é disto que vamos tratar na próxima seção.

Finalizamos essa seção informando sobre mais um desdobramento, o qual é sugerido no próprio nome do software que funde geometria (Geo) com álgebra (Gebra). Com o GeoGebra também é possível trabalhar as figuras sob o ponto de vista analítico. Para isso, basta selecionar os menus “Exibir Eixos” e “Exibir Janela de Álgebra” e aos objetos geométricos construídos são associados, por exemplo, as coordenadas dos pontos, as equações das retas, as equações dos círculos. A Figura 6 mostra essa interface de trabalho do GeoGebra.

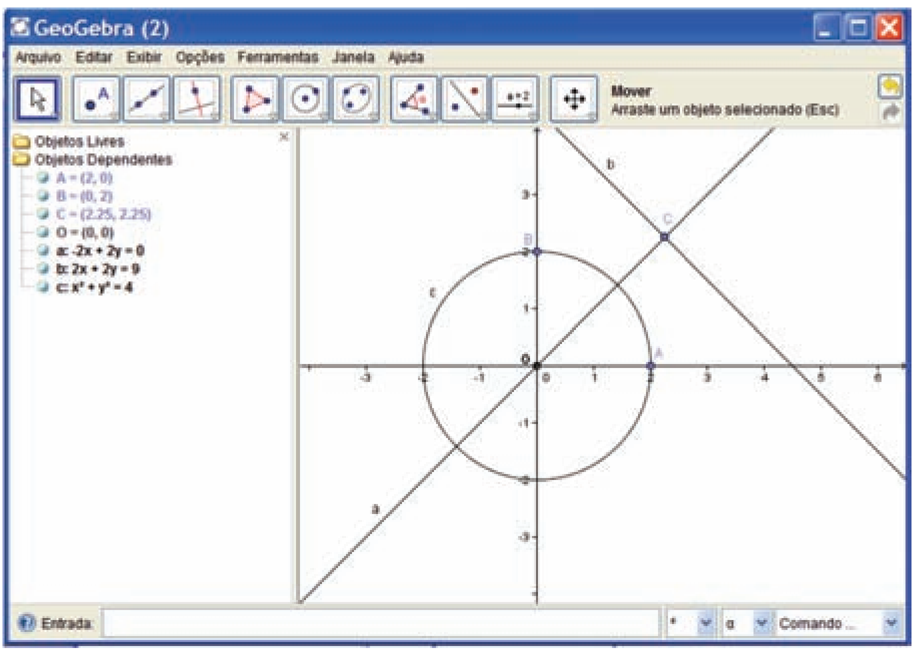


Figura 6 – Geometria e Álgebra no GeoGebra

Modelagem com Geometria Dinâmica

Um modelo matemático é uma representação, em linguagem matemática, de certos aspectos de um fenômeno. Em particular, a modelagem geométrica é uma representação que usa a linguagem da geometria – trata-se de construção baseada em pontos, retas, segmentos, perpendicularidade e paralelismo, círculos, dentre outros elementos.

Podemos observar em diversos mecanismos ao nosso redor situações em que a geometria se faz presente, e neles as formas geométricas se apresentam em movimento. Por exemplo, em ventiladores podemos observar o movimento circular de suas hastes em torno do seu ponto central; em roldanas, observamos movimentos de sobe-desce conforme a roldana gira; na praça de brinquedos temos o vai-e-vem do balanço; nas janelas basculantes vemos o movimento de giro de suas folhas; na escada rolante temos os deslocamentos dos degraus; nas portas pantográficas vemos o deslizamento das grades.

Para implementar uma modelagem geométrica, a primeira atitude é ter um olhar atento ao mecanismo que se pretende modelar. Ao observá-lo, precisamos identificar as características do movimento: é um deslocamento? É um movimento circular? É uma composição de movimentos? Em algumas dessas situações nós identificamos movimentos muito simples, como o movimento circular das hastes do ventilador ou de deslocamento ao abrir e fechar uma porta pantográfica. Em outras, podemos observar múltiplos movimentos ou uma composição de movimentos.

Nos casos de objetos que possuem múltiplos movimentos, é importante prestar atenção na ordem em que eles acontecem. Na combinação de movimentos, estes podem ser do mesmo tipo, como no caso de um mecanismo com várias engrenagens conectadas em que o movimento de rotação da primeira engrenagem desencadeia o movimento de rotação da segunda, e assim por diante. Também encontramos mecanismos em que o primeiro movimento desencadeia um segundo movimento com características diferentes; é o caso do macaco do carro, no qual um movimento de giro desencadeia um movimento de deslocamento vertical.

Podemos também modelar situações de movimento do corpo humano. Por exemplo, pode-se modelar o movimento de uma pessoa fazendo "polichinelo", que envolve o movimento coordenado de braços e pernas; ou então o movimento de pernas que pedalam uma bicicleta. Em qualquer situação, é importante observar qual é o movimento que aciona os demais e de que modo tudo se sincroniza.

Com o propósito de esclarecer os princípios da modelagem geométrica, vamos apresentar os procedimentos para a construção de réplica de um ventilador, indicando como isso se implementa no GeoGebra. Como já mencionado, iniciamos o processo de modelagem olhando atentamente o funcionamento do mecanismo que queremos modelar. No caso do ventilador (figura 7), vemos que as pás, todas do mesmo tamanho, giram em torno de "um centro".

Figura 7 – Ventiladores

A modelagem, quanto ao número de pás ou quanto à forma das pás, não apresenta maiores dificuldades, como veremos. Precisamos é nos concentrar na construção da primeira pá: é a partir dela que vamos obter as demais pás e é ela que vai desencadear o movimento de "giro". Na figura 8 temos o "esqueleto" do ventilador que vamos construir no GeoGebra: o círculo pontilhado determina o tamanho do ventilador e os cinco segmentos, com um ponto em comum, correspondem às pás.

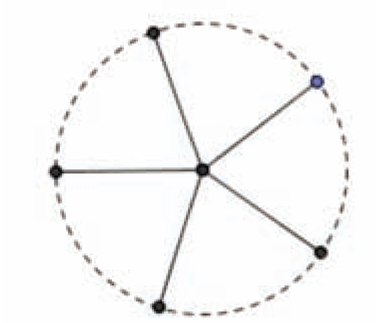


Figura 8 – Esqueleto do ventilador

Vejamos como proceder. Inicialmente construímos o segmento que vai determinar o raio do círculo pontilhado e um ponto O que vai ser o centro do círculo. Com o recurso *Compasso* construímos o círculo, depois um ponto M sobre o círculo e finalmente o segmento que corresponde à primeira haste (figura 9).

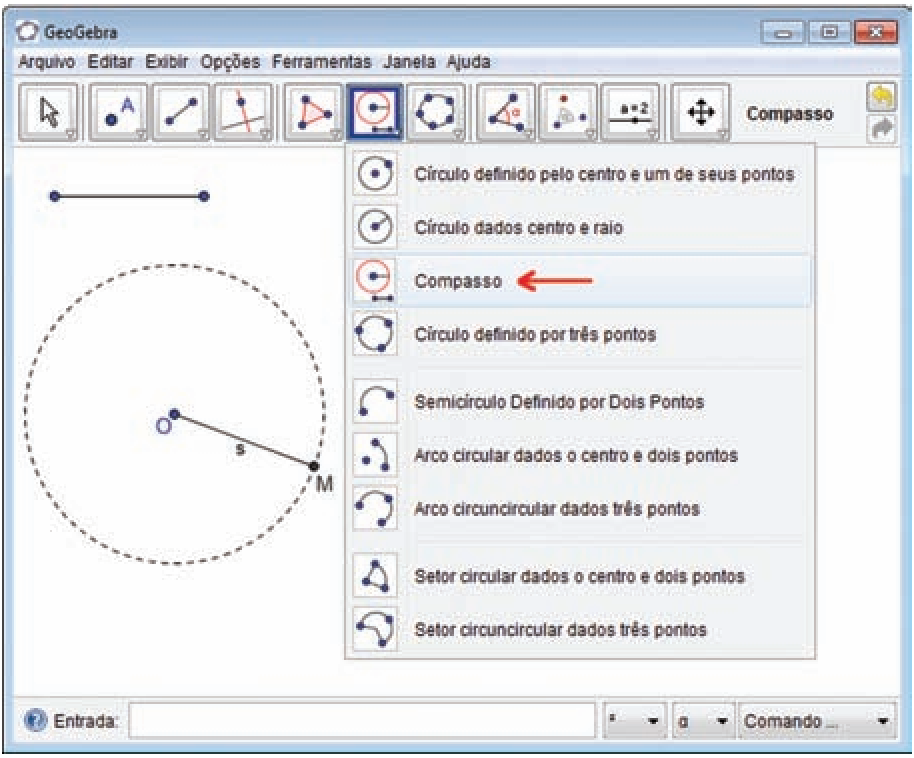


Figura 9 – Início da construção do ventilador

Quando movimentamos o ponto M, o segmento raio gira em torno do ponto O e desta forma já temos a simulação do movimento da primeira pá. Agora vamos dar uma "forma" à pá, e aqui podemos trabalhar com maior ou menor realismo. Neste momento queremos explorar, sobretudo, os aspectos relativos à geometria e assim vamos construir uma pá muito simples – aquela que é mostrada na figura 10.

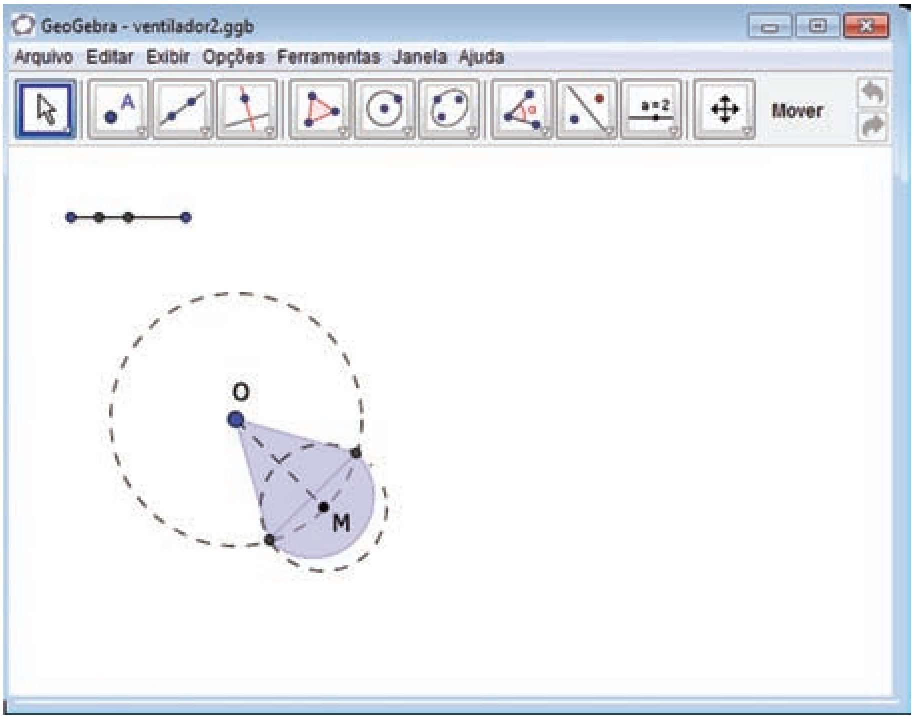


Figura 10 – Construção da primeira pá do ventilador

Para fazer a construção da pá, vamos utilizar o segmento que determinou o raio do círculo. Esse segmento inicial é muito importante na definição dos detalhes do ventilador, pois é a partir dele que criamos elementos que guardam proporção – isto significa que ao mudar o tamanho do segmento inicial, vemos na tela do computador a ampliação ou a redução do ventilador.

O procedimento de construção da pá é o seguinte: no segmento inicial construímos o segmento que é sua quarta parte, nisso utilizando duas vezes a ferramenta P*onto Médio*. Com o C*ompasso* construímos o círculo de centro M e com raio igual ao "segmento quarta-parte"; esse é o círculo menor que está pontilhado na figura 10. Usando os pontos de intersecção dos dois círculos e o ponto O, construímos um triângulo e neste momento já temos um formato aproximado da pá do ventilador – um triângulo isósceles. E vamos adiante, de forma a melhorar esta aparência: a partir dos dois vértices da base do triângulo e usando a ferramenta S*emicírculo definido por Dois Pontos* criamos a parte arredondada da pá do ventilador.

Finalizamos a primeira pá usando o recurso E*sconder Objeto* e o nosso próximo passo é fazer a construção das demais pás. Lembramos que o movimento das demais pás deve estar associado ao movimento da primeira – isto é, ao movimentar o ponto M, as pás devem girar em sincronia. Como fazer isso no GeoGebra? Escolhido o número de pás (no nosso caso são cinco), calculamos a medida do ângulo entre as hastes de duas pás consecutivas (no nosso caso $72^o = 360^o/5$) e usando a ferramenta *Girar em torno de um Ponto por um Ângulo* (indicada na figura 11) obtemos a segunda pá, resultante da rotação da primeira, segundo ângulo de medida de 72º, em torno do ponto centro do ventilador. Para construir as demais pás, procedemos da mesma forma: giramos a segunda pá e obtemos a terceira, giramos a terceira e obtemos a quarta e assim por diante.

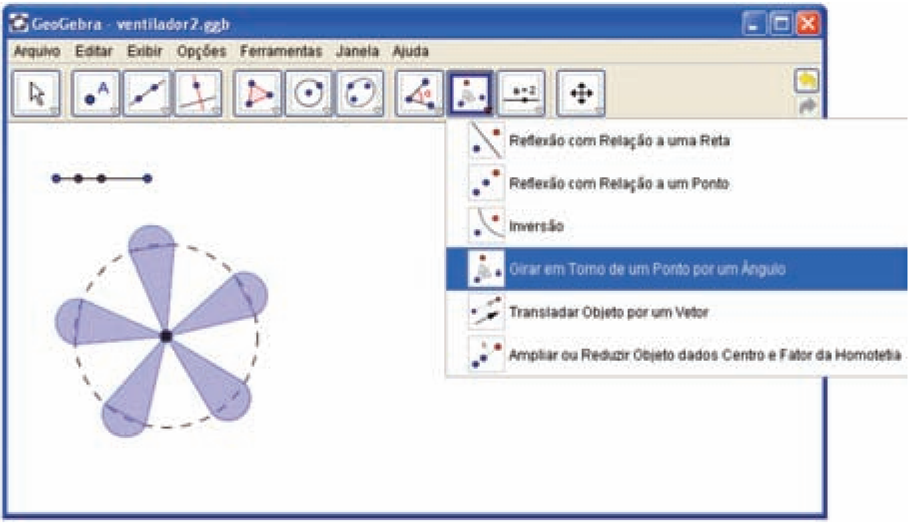


Figura 11 – Construção das pás do ventilador

A réplica aqui construída é simples em sua estrutura geométrica e pode ser uma primeira atividade de modelagem na escola. Podemos trabalhar mais o seu realismo, por exemplo, construindo a grade protetora e/ou o pé do ventilador. Mas esses são detalhes de "decoração" que não apresentam maiores dificuldades para implementação no GeoGebra.

Com a construção do ventilador procuramos mostrar o quanto a modelagem das "formas em movimento", mesmo em situações muito simples, propicia o desenvolvimento de raciocínios geométricos. É com esse espírito que desenvolvemos o material do site "Mídias Digitais I", no seu Módulo III (figura 12).

Figura 12 – Interface do Módulo III do site Mídias Digitais I

Nesse módulo, o submenu “Objetivos” chama atenção para mecanismos que estão no nosso dia-a-dia, mostra alguns exemplos e coloca o desafio: como construir réplicas dos objetos usando geometria dinâmica. No submenu “Conteúdos”, do mesmo módulo, são apresentadas as réplicas do ventilador, do macaco de carro, do pistão e da balança de prato construídas no software Geogebra (figura 13).

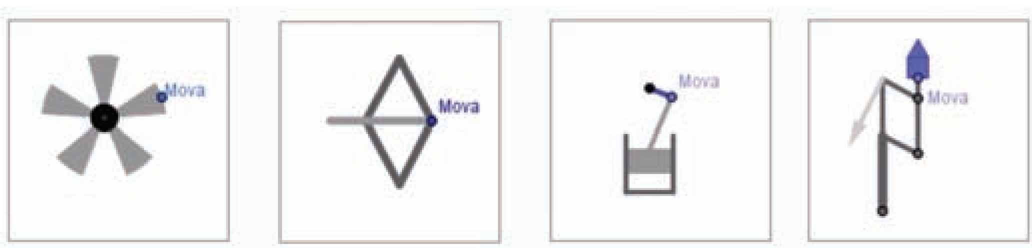


Figura 13 – Modelos geométricos de ventilador, macaco de carro, pistão e balança

Essas réplicas podem ser manipuladas (através do ponto Mova) e, com o movimento, elas esclarecem as relações geométricas que definem o funcionamento dos mecanismos[1]. Por exemplo, ao manipular o ponto “Mova” do esqueleto do macaco, o losango se modifica conforme ilustra a

[1] Para melhor entendimento do que está sendo explicado é interessante manipular as simulações que estão em <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/> no link Módulo III.

figura 14 – nela temos algumas instâncias resultantes do movimento. Um olhar cuidadoso para o dinamismo que se apresenta na tela do computador pode identificar o movimento a ser modelado – é essencialmente um "raio de círculo" em movimento. É a partir deste segmento "raio" que é feita a construção do losango.

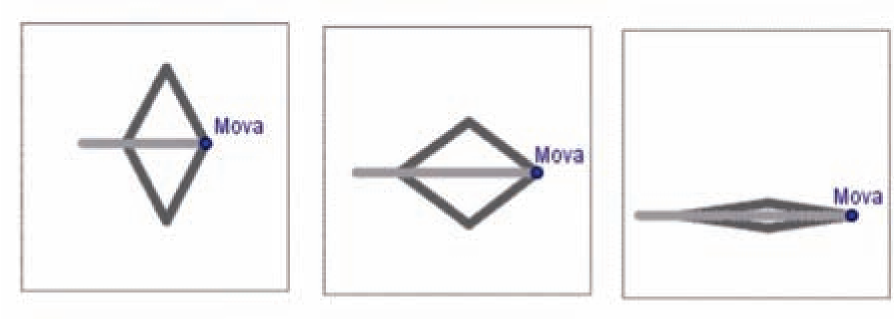


Figura 14 – Manipulação do ponto "Mova" no macaco de carro

No submenu "Recursos" do Módulo III são detalhados os procedimentos de construção a serem feitos no GeoGebra, através de material interativo que permite o acompanhamento de todos os detalhes. A Figura 15 ilustra o material que está disponível no site, relativo à construção do macaco. Em particular, fica claro no procedimento de construção que é o movimento circular do ponto "Mova" que provoca o movimento retilíneo vertical do ponto E – este é o ponto em que o carro se apóia no macaco. Essa sincronização de movimentos resulta da propriedade que caracteriza o losango – aquela de ter diagonais perpendiculares.

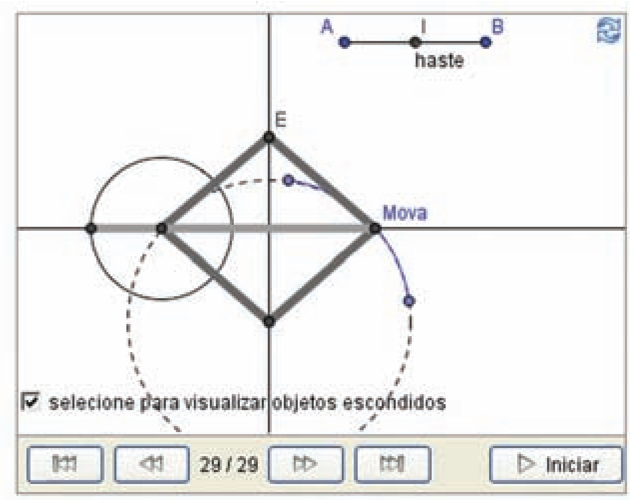


Figura 15 – Instruções para construção do macaco do carro , com barra de navegação.

Para as demais réplicas que estão no submenu “Conteúdos” também são disponibilizadas explicações.

Outras tantas situações interessantes, e até mesmo divertidas, podem ser modeladas no GeoGebra. Podemos, por exemplo, criar brinquedos e jogos com movimento sincronizado, como um caleidoscópio, uma pista de corrida de carros, brinquedos de parques de diversões. Também podemos pensar no próprio corpo humano e criar modelos que representem os movimentos de braços, pernas, mãos, olhos, dentre outros. Na figura 16 temos a modelagem de grupo de bailarinos em movimento, onde todo grupo dança quando se manipula o ponto M. Esse efeito é obtido através da ferramenta *Ampliar ou Reduzir Objeto*, disponível no menu das Transformações Geométricas. A segunda situação simula o brinquedo conhecido como Pogobol; aqui o uso da ferramenta *Lugar Geométrico* pode criar interessantes efeitos de “caminhos de pulos” e a imaginação provoca raciocínios geométricos que dificilmente se fariam presentes na sala de aula tradicional.

Figura 16 – Modelagem de movimentos do corpo humano

Os dois exemplos acima também ilustram o quanto a atividade de modelagem geométrica provoca incessantes desafios de construção. E quanto maior o número de desafios superados, maiores serão as habilidades para implementar réplicas de mecanismos ou situações com movimentos mais elaborados. No submenu “Complementos” do site Mídias Digitais I apresentamos outras ideias, dicas e truques para aqueles que queiram se aventurar mais e mais no mundo (divertido) da modelagem geométrica.

Professores trabalhando com Geometria Dinâmica

O Curso de Especialização "Matemática Mídias Digitais e Didática" teve como objetivos: a) a atualização dos conhecimentos dos professores de matemática, integrando o uso de mídias digitais na sala de aula; b) a implementação de práticas-pedagógicas inovadoras nas escolas, contemplando um papel ativo do aluno no processo de aprendizagem. O curso desenvolveu-se em três semestres, sempre articulando os três componentes do tripé "Matemática – Mídias Digitais – Didática". Na disciplina "Mídias Digitais I", uma das primeiras ofertadas, os professores-alunos iniciaram o trabalho com a geometria dinâmica e, mais especificamente, com a modelagem geométrica. A grande maioria desconhecia o assunto e foi com entusiasmo que se engajaram nas primeiras atividades de construções geométricas e, ao final de três semanas, estavam produzindo suas "réplicas de mecanismos".

No Curso, desde o primeiro momento, se buscou estabelecer uma rotina de reunião semanal da equipe pedagógica, constituída por professores, tutores a distância e coordenação do Curso. Nesta reunião semanal definiam-se os estudos e trabalhos a serem realizadas pelos professores-alunos, bem como os critérios para acompanhamento e avaliação da produção semanal. E a rotina dos alunos assim se estabeleceu: em cada semana fizeram estudo do material disponibilizado nos módulos dos sites das disciplinas, realizaram a tarefa correspondente e fizeram a entrega do trabalho no ambiente virtual de aprendizagem Moodle.

Na primeira semana da disciplina "Mídias Digitais I" os professores-alunos estudaram o material do Módulo I disponibilizado no site "Mídias Digitais I" e então realizaram as primeiras construções no GeoGebra, na forma de mosaicos. Os professores-alunos foram convidados a "olhar" para a geometria dos mosaicos que decoram os diferentes ambientes nos quais circulam no dia-a-dia, e então a construir réplicas que fossem figuras da geometria dinâmica, isto é, sob movimento, os desenhos do mosaico deveriam permanecer perfeitos. Os resultados obtidos foram interessantes, conforme registra a figura 17.

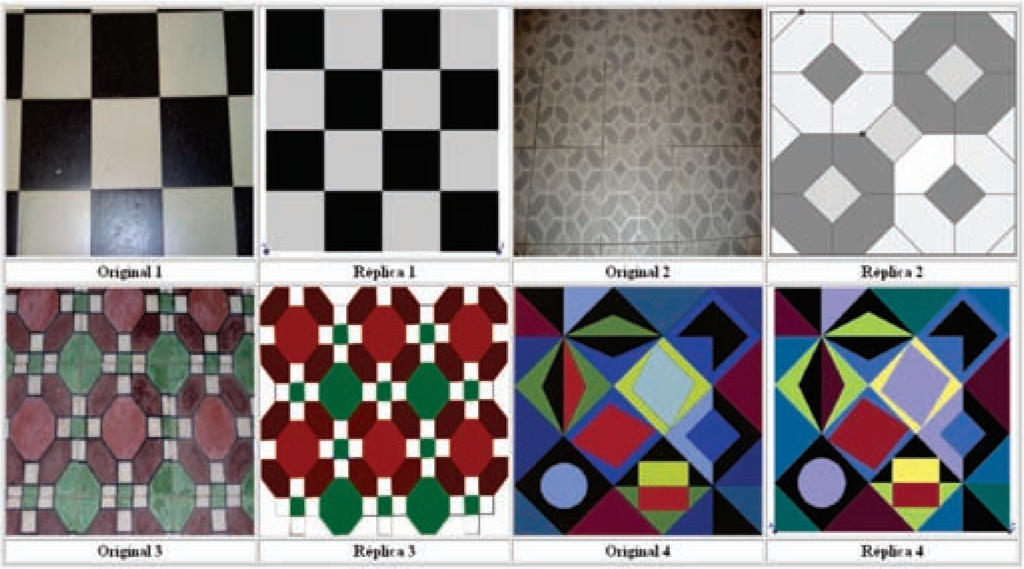


Figura 17 – Mosaicos produzidos pelos professores-alunos

Na escola, essa atividade pode ser desenvolvida com o propósito de introduzir os primeiros conceitos da geometria. Ao construir um mosaico, trabalhamos com vários conceitos da geometria: pontos, retas, retas perpendiculares, retas paralelas, triângulos e quadriláteros, círculos, entre outros. Na figura 18 temos uma amostra da produção dos alunos destes professores, que registra as diferentes fases das construções – no terceiro mosaico, finalizado, muitos dos procedimentos de construção feitos pelo aluno estão "escondidos".

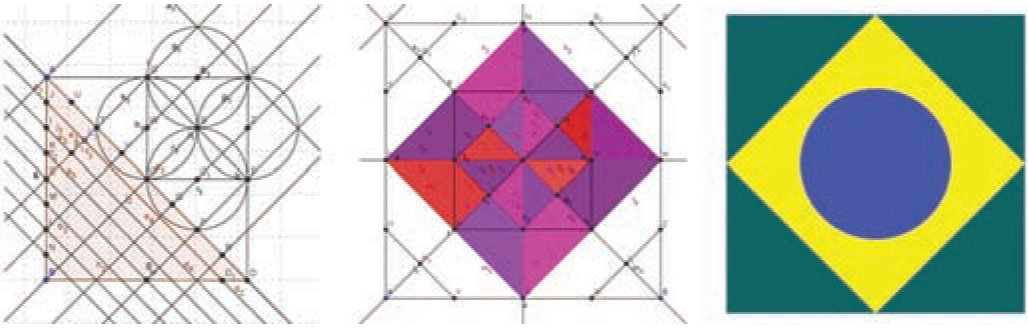


Figura 18 – Mosaicos produzidos por alunos dos professores-alunos

Essa foi uma atividade realizada na sala de aula dos professores-alunos. A realização de novas práticas pedagógicas foi uma exigência feita aos professores-alunos em diferentes momentos do Curso. Muitos deles implementaram as primeiras experiências de geometria dinâmica, em suas salas de aulas, através da atividade "mosaicos". Vale mencionar que a implementação das novas práticas pedagógicas sempre exigiu, dos professores-alunos, a transposição didática daquilo que estavam aprendendo. Esta etapa de transposição didática foi denominada "Engenharia Didática", expressão emprestada da metodologia de pesquisa criada na escola francesa de Didática da Matemática. Nela, o professor-aluno escolhia um tema e desenvolvia um projeto de estudo e investigação, que incluía levantamento bibliográfico, formulação de hipóteses, coleta de dados, análise e relatório final.

As Engenharias Didáticas produzidas sinalizam o impacto da geometria dinâmica na prática pedagógica dos professores-alunos. Algumas das manifestações destes professores-alunos:

> "As atividades desenvolvidas com os 12 alunos foram especiais [...] no decorrer das aulas pudemos sentir a satisfação e encantamento dos alunos com o conteúdo de geometria, apresentado de forma diferenciada [...] as construções foram bem variadas, e percebemos a facilidade de alguns na construção das figuras geométricas, e outros nem tanto..."
>
> "A prática foi realizada com o primeiro ano, noturno. No primeiro encontro foram trabalhadas as ferramentas do Geogebra, e após as atividades [...] Foram construções de quadrados que não se deformassem, harmonizando os conceitos com as figuras. As atividades foram realizadas com motivação, interesse e cooperação por parte dos alunos. Adoraram trabalhar no Geogebra!"
>
> "Observei que os alunos demonstravam facilidade ao construir figuras no programa e ao "brincar" com o mesmo. O que levei tempo para utilizar, foi usado tranquilamente por eles... No último encontro a construção de mosaicos com figuras geométricas foi realizada com facilidade."

Na terceira semana do Curso, os professores-alunos iniciaram o trabalho com modelagem geométrica – o Módulo III da disciplina. Após o estudo do material que explicava os procedimentos para fazer a modelagem de alguns mecanismos (ventilador, macaco-de-carro e pistão, entre outros, apresentados na sessão 2 deste capítulo), eles iniciaram suas construções. A entrega do trabalho foi feita no espaço “Banco de Dados” do ambiente Moodle, e desta forma a produção se organizou como uma Galeria de Trabalhos – um espaço em que todos tinham acesso às produções feitas pelos seus colegas.

A Galeria descortinou muitos ventiladores e rodas-gigantes, mas também outros mecanismos como automóveis, relógios, brinquedos e pontes móveis. É importante lembrar que esses professores-alunos, nesta disciplina de “Mídias Digitais I”, estavam tendo as primeiras experiências com geometria dinâmica e assim, naturalmente, foram apresentadas muitas produções simples e parecidas com aquelas explicadas no Módulo III.

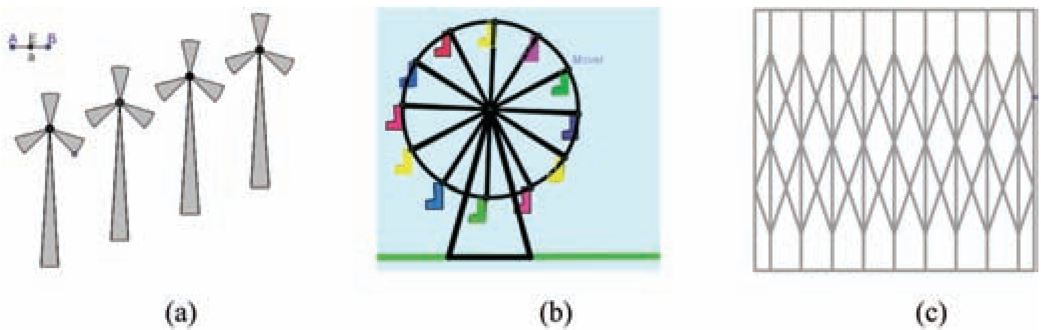
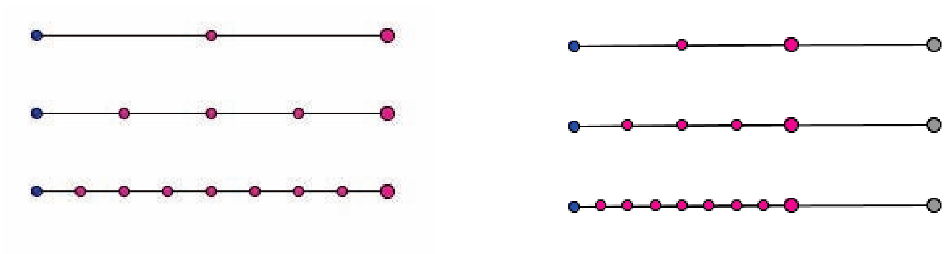


Figura 19 – Situações de modelagem apresentadas pelos professores-alunos

A figura 19 traz uma amostra das produções. A modelagem do cata-vento usa os mesmos princípios geométricos usados na modelagem do ventilador, mas ao apresentar “muitos cata-ventos” (que lembram o parque eólico da cidade de Osório, Rio Grande do Sul) ela integra à construção o movimento de translação. Na construção da roda-gigante também está presente o movimento de translação – construído o primeiro banco, os demais são obtidos aplicando-se o movimento de translação e é desta forma que todos os bancos se mantêm na posição “horizontal”.

Já para a construção da porta pantográfica, o professor-aluno trabalhou com o conceito de ponto médio para criar o efeito de “abrir/fechar” a porta. Para este efeito, inicia-se com a construção de um segmento e a marcação de seu ponto médio, e depois é feita a marcação dos pontos médios dos segmentos determinados por estes três pontos, e sucessivamente segue-se com a marcação de pontos médios. Desta maneira, é com o movimento do ponto extremidade do segmento que se cria o efeito de “recuo” da porta, pois os pontos que estão no segmento se acumulam conforme os pontos extremos se aproximam. Este procedimento de construção e o efeito do movimento estão ilustrados na figura 20.



Sequência de imagens que ilustra a inserção de pontos médios

Sequência de imagens com pontos se acumulando

Figura 20 – Construção do efeito “abrir/fechar” a porta pantográfica

Feito isso, falta apenas construir a grade da porta pantográfica. Essa grade é gerada a partir de dois segmentos: inicia-se esta etapa construindo o primeiro “X” da grade, conforme figura 21.

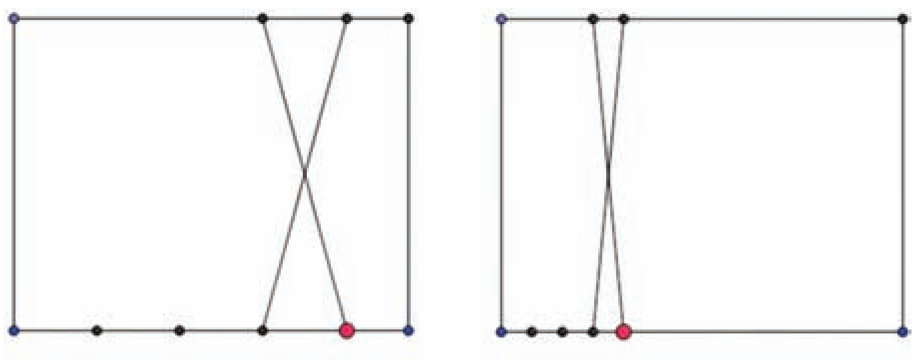


Figura 21 – Início da construção da grade da porta pantográfica

Os demais elementos que compõem a “grade” da porta são construídos através do recurso *Reflexão com Relação a uma Reta*. Com esse procedimento, quando movimentamos o ponto extremidade do segmento, o efeito “sanfona” dos pontos produz o efeito “sanfona” da grade.

As três modelagens produzidas pelos professores-alunos utilizaram recursos do menu das Transformações Geométricas. Esse é realmente um menu importante, quando trabalhamos com modelagem. Vale a pena conhecê-lo e na figura 22 colocamos em destaque as opções que nele se apresentam.

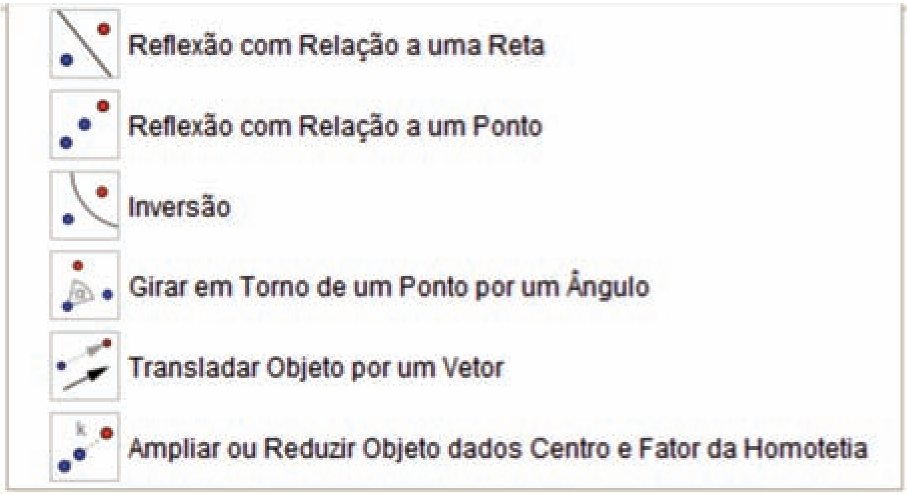


Figura 22 – Imagem do menu de Transformações Geométricas do GeoGebra

No caso da coleção de cata-ventos, aplica-se o recurso *Transladar um Objeto por um Vetor* no primeiro cata-vento, escolhendo-se um conveniente vetor para definir a translação (figura 23). E depois se aplica novamente o recurso, produzindo um terceiro cata-vento e um quarto cata-vento. E se escolhemos um novo vetor, usando sucessivas translações segundo este vetor, produzimos outros tantos cata-ventos.

Figura 23 – A transformação de Translação

No caso da porta pantográfica, aplicamos uma primeira vez o recurso *Reflexão com Relação a uma Reta* sobre um dos segmentos do primeiro “X” da grade, escolhendo uma conveniente reta de reflexão (figura 24). E prosseguimos com sucessivas aplicações desse recurso, até que se complete o primeiro “zigue-zague de segmentos”. E com o mesmo procedimento, construímos o segundo zigue-zague de segmentos, assim completando a grade.

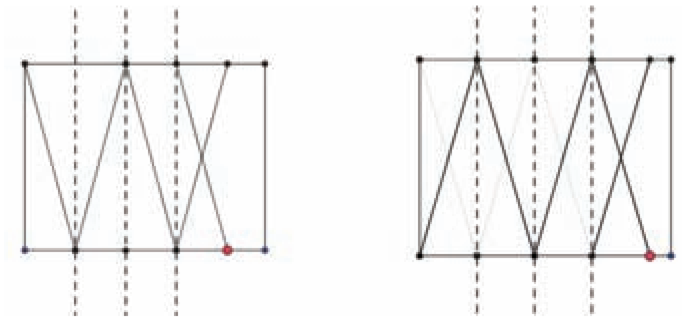


Figura 24 – Construção da grade da porta pantográfica

Nesta seção, procuramos compartilhar com o leitor o processo de aprendizagem vivenciado pelos professores-alunos. Ao identificar movimentos que estão presentes no dia-a-dia e fazer uma modelagem, os professores-alunos puderam, novamente, olhar o mundo sob a ótica da geometria. Aos poucos foram se aventurando em construções mais elaboradas, com aprofundamento do raciocínio de natureza geométrica, e assim eles se manifestaram:

> "Para a modelagem da roda tive como base a modelagem do ventilador. Porém, gostaria de conseguir modelar outros objetos que têm como princípio a construção do macaco, tentarei."
>
> "Cheguei a construir uma lixeira de pedal, ficou funcionando bem, porém existem vários pontos que deformam a figura original [...]. Até mesmo nesta janela que estou enviando existem alguns elementos geométricos que talvez não sejam necessários. Ao final de muitas tentativas, construí este modelo da janela. Estou contente por isso."
>
> "Na primeira modelagem que havia feito a gangorra da praça infantil, girava 360º ... mas consegui fazer com que a gangorra se movimentasse de maneira certa [...] Fiz várias vezes, com muita persistência e acredito que tenha dado certo. Durante estas tentativas descobri outros elementos do Geogebra e estou cada vez mais encantada com as maravilhas que podem ser criadas com esse programa."

Finalizando

O software GeoGebra, com suas infinitas possibilidades, permite ao professor discorrer sobre temas importantes da geometria, cujo aprendizado exige muita abstração por parte do aluno. No decorrer do capítulo, inicialmente vimos como a geometria dinâmica pode auxiliar o professor que deseja trabalhar com seus alunos as figuras geométricas e suas propriedades, desta forma procurando avançar com o desenvolvimento de habilidades que se fazem presentes nas atitudes de argumentar, explicar propriedades da geometria.

Mas antes de trabalhar com os alunos sob esta perspectiva da argumentação dedutiva, ou seja, com foco nos teoremas e suas demonstrações, o professor pode entusiasmá-los com uma atividade de modelagem. O interessante é que a modelagem matemática possibilita modificar nosso olhar diante das situações cotidianas – ela nos faz perceber a presença da matemática em atividades do nosso dia-a-dia. É com este olhar de "geômetra" que vamos ver os alunos transformando objetos comuns em dinâmicos objetos geométricos com a ajuda do GeoGebra. Essa transformação dos objetos requer uma sutileza de olhar e domínio de procedimentos geométricos, e desta forma os alunos estão desenvolvendo habilidades que são características do pensamento matemático – observar, relacionar, experimentar, conjecturar, errar e refinar suposições.

O material apresentado no Capítulo pode servir como uma "aula" de introdução à modelagem geométrica. Se, ao final da leitura, o leitor instalar o software GeoGebra no seu computador, consultar o material disponibilizado no site "Mídias Digitais I" e se lançar nas primeiras aventuras de modelagem geométrica, podemos dizer que realizamos o objetivo do Capítulo.

Referências

BORTOLOSSI, H. J. *Tutorial do GeoGebra*. Disponível em <www.professores.uff.br/hjbortol/geogebra/>.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 24, n. 2, p. 139-162, Feb. 1993.

GRAVINA, M. A. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo*. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001. Disponível em <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/2545>.

GRAVINA, M.A.; BARRETO, M. *Mídias Digitais I*. Material Didático. Curso de Especialização: Matemática, Mídias Digitais e Didática para a Educação Básica. Porto Alegre, UAB/IM/UFRGS, 2009. Disponível em: <www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/>

Capítulo 3

PARÁBOLAS, ELIPSES E HIPÉRBOLES TRAÇADAS POR MECANISMOS

DANIELA STEVANIN HOFFMANN
ELISABETE ZARDO BÚRIGO
MARCIO A. RODRIGUEZ DE RODRIGUES
MARINA MENNA BARRETO
SANDRA DENISE STROSCHEIN

Introdução

As chamadas seções cônicas raramente são estudadas no Ensino Médio, embora sejam, de algum modo, familiares aos estudantes: a parábola aparece, em geral, associada ao gráfico da função quadrática e a elipse, à trajetória dos planetas do Sistema Solar. No Curso de Especialização Matemática – Mídias Digitais – Didática, essas curvas foram objeto de estudo no Módulo IV da disciplina “Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas”, buscando-se propiciar, aos professores em formação continuada, maior desenvoltura no seu manejo, na compreensão de suas propriedades e de suas aplicações em situações diversas, favorecendo a abordagem do tema em sala de aula do Ensino Médio.

O recurso às mídias digitais permitiu introduzir, nesse estudo, uma inovação interessante: a construção de mecanismos digitais, com software de matemática, que simulam mecanismos reais (construtíveis com hastes de madeira, parafusos e lapiseiras) e que traçam parábolas, elipses e hipérboles. Foram examinadas as condições de construção desses mecanismos que garantem que as curvas traçadas sejam as respectivas cônicas. A experimentação com os mecanismos permitiu também a variação de parâmetros, como a distância entre os focos, ou o comprimento dos semi-eixos, e a análise de como essa variação incide sobre o formato das figuras. Os protocolos de construção foram disponibilizados, de modo que os mecanismos pudessem ser reproduzidos e utilizados em sala de aula.

Na Geometria grega, o interesse pelas seções planas do cone teve origem na busca de soluções para o famoso problema da duplicação do cubo, que é o de, dado um cubo de volume V, obter-se um cubo de volume $2V$ (HEATH, 1981, p. 110). O problema deve ser resolvido em termos de construção de segmentos, isto é, conhecida a aresta a do cubo de volume V, o que se procura é construir a aresta do cubo de volume $2V$. Em linguagem algébrica, o problema pode ser traduzido como segue: dado $V = a^3$, obter x tal que $2V = x^3$, o que equivale a resolver a equação $x^3 = 2a^3$. Mas a solução buscada é geométrica, isto é, deve-se obter o segmento de medida x a partir do segmento de medida a. O desafio entre os gregos era construir o novo segmento usando apenas régua e compasso, e a impossibilidade de uma solução com esses instrumentos euclidianos[1] só foi demonstrada no século XIX.

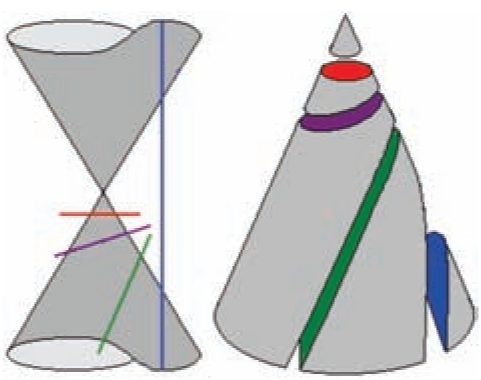


Figura 1 – Seccionamentos do cone circular reto.
Fonte: site da disciplina "Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas".

[1] Aqui nos referimos à impossibilidade da construção do segmento dadas as seguintes regras: com a régua (não graduada) permite-se apenas traçar uma reta passando por dois pontos dados; com o compasso permite-se apenas traçar um círculo com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado.

Seccionando um cone circular reto por um plano, e variando o ângulo de corte, podemos obter as curvas que hoje conhecemos como parábolas, elipses e hipérboles – daí sua designação como "seções cônicas". Na figura 1 estão ilustrados alguns desses cortes. Quando o plano é paralelo a uma geratriz do cone, a curva obtida na intersecção do cone e do plano é uma parábola (corte em verde na figura 1); se o plano é perpendicular ao eixo, a curva é um círculo (corte em vermelho); se o plano faz um ângulo oblíquo com o eixo de modo a atravessar o cone, a curva é uma elipse (corte em roxo); se o plano corta o cone de modo a interseccionar suas duas folhas, a curva é uma hipérbole (corte em azul).

Menaecmo, cerca de 350 a. C., obteve duas soluções para o problema da duplicação do cubo, recorrendo a essas curvas. Usando apenas círculos e triângulos semelhantes, Menaecmo provou que, para a parábola, valia a propriedade que hoje escrevemos como $y^2 = kx$ e, interseccionando duas parábolas distintas, pôde construir o segmento desejado [2].

A elipse e a hipérbole também podem ser apresentadas a partir de suas propriedades focais, tomando-se dois pontos fixos F_1 e F_2 (denominados focos) num plano π [3]. A elipse é definida como o lugar geométrico dos pontos do plano para os quais a soma das distâncias a cada um dos dois focos é igual a uma constante positiva *k*, isto é, como o conjunto dos pontos P para os quais vale $d(P,F_1)+d(P,F_2)=k$ [4], e a hipérbole é definida como o lugar geométrico

---

[2] A descrição dessa solução pode ser encontrada em Eves (2004, p. 149-150) ou Boyer (1994), assim como a dedução das equações das curvas em termos do que hoje denominamos coordenadas.

[3] Pode-se demonstrar que as definições das cônicas a partir de suas propriedades focais (nos casos da elipse e da hipérbole) ou a partir da propriedade foco-diretriz (no caso da parábola) são equivalentes às definições anteriormente apresentadas das curvas como seccionamentos do cone. Essa demonstração fica abreviada mostrando-se as equivalências entre as equações correspondentes às curvas, num e noutro caso. No site da disciplina "Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas" (Módulo IV – Conteúdos) as equações das cônicas em coordenadas retangulares são deduzidas a partir das definições geométricas aqui apresentadas. Para a dedução das equações a partir dos cortes do cone, indicamos, conforme nota anterior, Eves (2004, p. 149-150) e Boyer (1994). Uma interessante demonstração geométrica das equivalências de definições é dada no Teorema de Dandelin, explicado através de animações no endereço <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ dandelin/index.html>.

[4] Designamos como $d(P, F_1)$ a distância entre os pontos P e F_1 e, analogamente, como $d(P, F_2)$ a distância entre os pontos P e F_2; dados F_1, F_2 e *k*, a elipse (ou a hipérbole) fica determinada.

dos pontos do plano para os quais o módulo da diferença entre as distâncias aos focos é igual a uma constante positiva dada, isto é, como o conjunto dos pontos P para os quais vale $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = k$.

É possível ter-se uma definição que abrange as três curvas, que pode ser chamada de propriedade foco-diretriz. Dados uma reta *r* (diretriz) e um ponto F (foco) fora dela, e uma constante positiva *e*, o lugar geométrico dos pontos P do plano que contém *r* e F e para os quais vale $\frac{d(P,F)}{d(P,r)} = e$ é uma cônica [5]. Demonstra-se que a curva será uma parábola, elipse ou hipérbole, respectivamente, quando essa razão for igual, menor que ou maior que um[6]. No caso da parábola temos, então, a definição bem conhecida: dados uma reta *r* (diretriz) e um ponto F (foco) fora dela, o conjunto dos pontos P para os quais $d(P, F) = d(P, r)$ é uma parábola. Essas propriedades já eram conhecidas de Apolônio, cerca de 250 a.C.

No quadro que segue, sistematizamos os resultados aqui mencionados. Na última coluna incluímos as propriedades refletoras das cônicas[7], que resultam das propriedades focais e que são importantes para a compreensão de aplicações diversas.

Quadro 1 – Propriedades das seções cônicas

Curva	**Plano que secciona o cone circular reto**	**Equação em coordenadas retangulares** (centro ou vértice na origem, focos no eixo OX)	**Propriedade foco-diretriz** (foco F e reta diretriz r)	**Propriedade focal** (focos F1 e F2)	**Propriedade refletora** (A reta tangente à curva em P é...)
Parábola	Paralelo a uma geratriz do cone	$y^2 = 4px$, sendo *p* a distância entre foco e vértice	$\frac{d(P,F)}{d(P,r)} = 1$		... bissetriz das semirretas PF e PD (sendo PD perpendicular à diretriz *r*).
Elipse	Oblíquo em relação ao eixo do cone e cortando todas as geratrizes	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sendo *a* e *b* medidas dos semi-eixos	$\frac{d(P,F)}{d(P,r)} = e$ sendo $0 < e < 1$	$d(P, F_1) + d(P,F_2) = k$	... perpendicular à bissetriz das semirretas PF_1 e PF_2.
Hipérbole	Secciona as duas folhas do cone (oblíquo ou paralelo ao eixo do cone)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, sendo *a* e *b* medidas dos semi-eixos	$\frac{d(P,F)}{d(P,r)} = e$ sendo $e > 1$	$\|d(P, F_1) - d(P, F_2)\| = k$	... perpendicular à bissetriz das semirretas PF_1 e PF_2.

5 Designamos como *d* (P, *r*) a distância entre o ponto P e a reta *r*.

6 A equivalência entre a propriedade foco-diretriz e as propriedades focais, para os casos da elipse e da hipérbole, está demonstrada em livros de Cálculo, como Anton (2007).

7 A propriedade refletora da parábola está demonstrada no site da disciplina (HOFFMAN; BARRETO, 2009) e no texto que segue. Para a demonstração das propriedades refletoras da elipse e da hipérbole, indicamos Vasíliev (1980).

A abordagem das cônicas no curso

Para os estudantes do Ensino Médio, a parábola está associada ao gráfico da função polinomial do segundo grau, ou função quadrática. Como, em geral, as propriedades das parábolas não são discutidas, e o estudo das funções toma como referência as fórmulas, restringindo-se a poucos casos – funções lineares, quadráticas, exponenciais e, eventualmente, trigonométricas – essa associação permanece bastante vaga. A maioria dos estudantes, ao final do Ensino Médio, nomeia como "parábola" qualquer curva que não muda de concavidade e que tem eixo de simetria vertical. Muitos inclusive confundem a parábola com o desenho de um "U", como se a curva tivesse assíntotas. Elipses são identificadas, pelos estudantes, com círculos "achatados" ou "alongados".

Nos cursos de formação de professores de Matemática, parábolas, elipses e hipérboles são estudadas, em geral, nas disciplinas de Geometria Analítica. As curvas são tratadas como conjuntos de pontos representados por pares de coordenadas retangulares, e são enfatizadas as equações que estabelecem relações entre essas coordenadas. As propriedades focais das curvas são utilizadas para a obtenção das equações e, depois, deixadas de lado.

Na disciplina "Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas", o estudo das cônicas foi motivado, inicialmente, pela questão: "Por que as antenas são parabólicas?" [8].

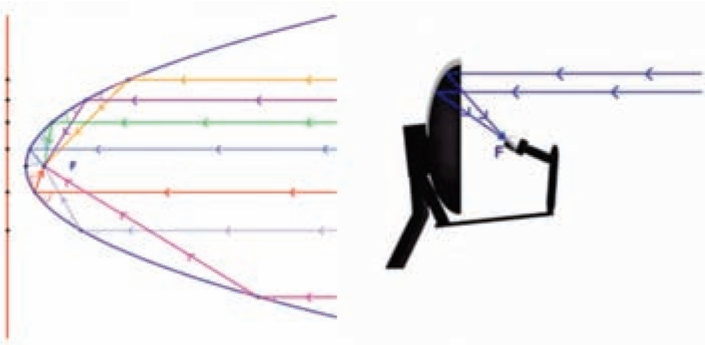


Figura 2 – Ilustração da propriedade refletora das parábolas
e de sua aplicação na antena parabólica.
Fonte: site da disciplina "Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas".

[8] O material didático produzido para a disciplina, Hoffman e Barreto (2009), pode ser acessado através do endereço <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri>. O problema aqui mencionado dá início ao Módulo IV do material, acessível através do submenu "problema IV".

Os sinais captados pelas antenas parabólicas devem convergir para o receptor F, como ilustra o esquema da direita na figura 2. Qual o efeito produzido pela curvatura parabólica? Os sinais recebidos na direção do eixo da superfície parabolóide, ao serem refletidos pela antena, tomam a direção do foco. Isso resulta da propriedade refletora das parábolas, que são as curvas obtidas quando seccionamos o parabolóide através de planos passando pelo seu eixo de simetria.

No site da disciplina, foi proporcionada a exploração de um objeto digital, construído com o software GeoGebra [9], que ilustra essa propriedade (conforme figura 3). Movimentando-se um ponto P ao longo da curva, observa-se que os dois ângulos formados pelo "sinal verde" com a reta tangente à parábola no ponto P têm a mesma medida. Isto é: a semirreta que parte de P e é paralela ao eixo (em verde na figura 3) faz, com a reta tangente à parábola em P (em roxo na figura 3), um ângulo de mesma medida que a reta que passa por P e por F (em verde) faz com essa tangente.

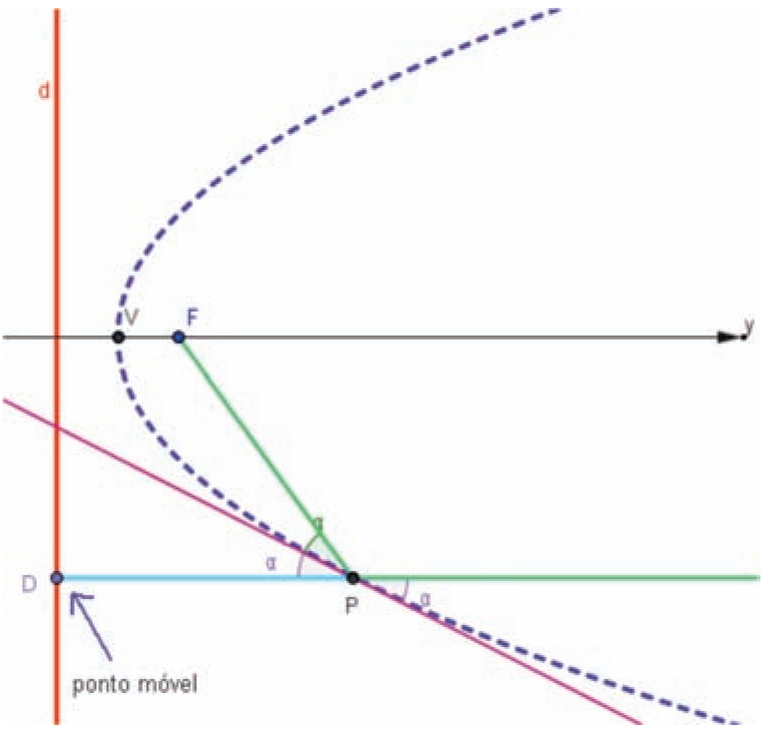


Figura 3 – Dispositivo para experimentação da propriedade refletora da parábola. Quando movemos o ponto D na reta diretriz, o ponto P se desloca ao longo da curva.

---

[9] Software geométrico de livre acesso, disponibilizado no site <http://www.geogebra.org>.

Por que isso acontece? A propriedade refletora da parábola pode ser deduzida da propriedade foco-diretriz, como mostramos a seguir.

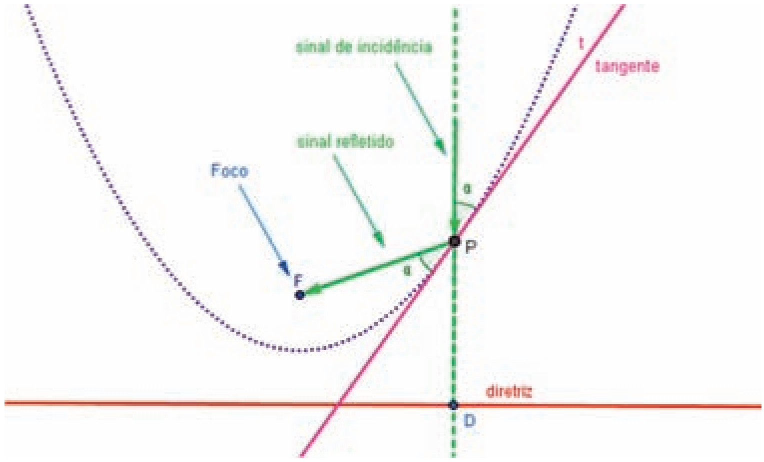


Figura 4 – Ilustração da demonstração da propriedade refletora da parábola.
Fonte: site da disciplina "Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas".

Sejam F o foco da parábola, P um ponto qualquer da parábola e D a projeção ortogonal de P sobre a reta diretriz, como ilustra a figura 4. Vamos, inicialmente, mostrar que a reta bissetriz do ângulo FPD, que denominamos *t*, é tangente à parábola em P; para isso mostraremos que qualquer ponto Q da reta *t* e distinto de P não está na parábola.

Partindo da propriedade foco-diretriz, temos que se P é um ponto da parábola (vide figura 5), então a distância de P ao foco F é igual à distância de P à reta diretriz e, portanto, o triângulo FPD é isósceles e *t* é também reta mediatriz do segmento FD. Como Q é ponto dessa reta mediatriz, temos que QF = QD. Olhando para o triângulo retângulo QD´D, onde D' é a projeção ortogonal de Q sobre a reta diretriz D, vemos que QD' < QD (pois QD´ é cateto e QD é hipotenusa) ou seja, QD´< QF. Concluímos que Q não é ponto da parábola. Então *t* intercepta a parábola apenas no ponto P. Assim, conforme ilustra a figura 5, mostramos que a reta *t*, bissetriz do ângulo FPD, é tangente à parábola no ponto P.

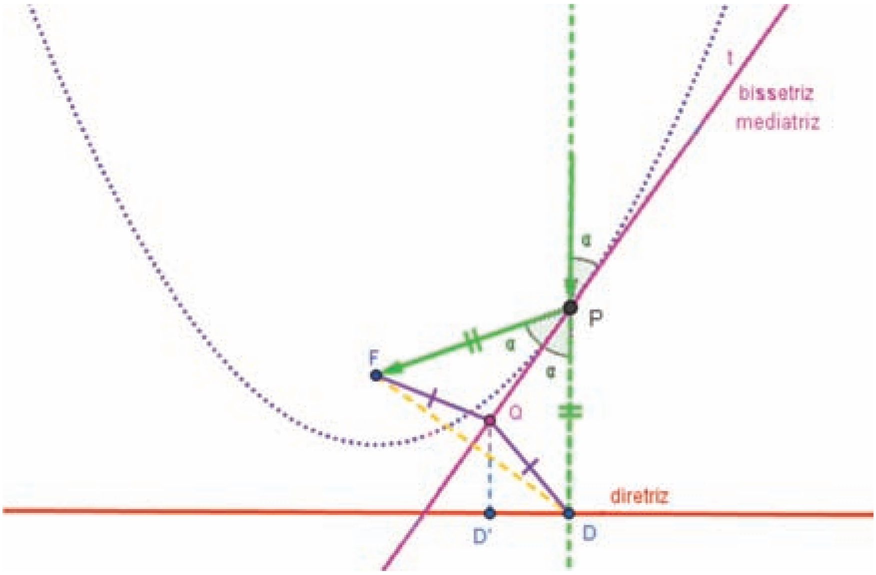


Figura 5 – Ilustração da demonstração da propriedade refletora da parábola.
Fonte: site da disciplina "Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas".

Os ângulos FPQ e QPD (figura 5) têm a mesma medida α, porque *t* é bissetriz de FPD. E o ângulo QPD tem a mesma medida α do ângulo que é oposto a ele pelo vértice. Isso significa que os dois ângulos que o "sinal verde" faz com a reta tangente à parábola em P têm a mesma medida α.

Considerando válido o princípio da Física que diz que "o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão", e considerando os ângulos que os sinais fazem com a reta tangente à curva, concluímos que, no caso da antena parabólica, os sinais recebidos na direção do eixo da parábola convergirão para o foco[10].

No site da disciplina, também foram apresentadas aplicações das propriedades refletoras das elipses e das hipérboles, como nos casos dos telescópios e dos refletores odontológicos.

Mecanismos que desenham cônicas

O estudo das propriedades das cônicas teve sequência com a construção no GeoGebra, e a experimentação de instrumentos de desenho que traçam parábolas, elipses e hipérboles.

[10] Uma discussão mais completa dessa aplicação e a demonstração da propriedade refletora das parábolas estão disponíveis no site da disciplina.

Sabemos que a representação gráfica de curvas pode ser tratada segundo diferentes abordagens ao longo do processo educativo. As curvas podem representar trajetórias correspondentes a movimentos e fenômenos físicos, funções expressando relações de dependência entre variáveis e figuras geométricas interessantes. Em alguns casos, pode ser interessante traçar a curva usando um instrumento ou mecanismo de desenho especial. No estudo das curvas, o uso desses mecanismos apresenta várias vantagens didáticas:

> [...] eles despertam interesse, eles reforçam a intuição e imaginação, eles permitem que se aprofunde a relação entre modelos matemáticos e realidade, eles promovem a busca e a produção de provas matemáticas; eles tratam de questões novas ou incomuns, relacionadas ao movimento; e por último, mas não menos importante, eles levam, de uma maneira natural e espontânea, os usuários (professores e alunos) a mergulharem na sua dimensão histórica e a refletirem sobre as relações entre a matemática, sociedade e cultura. (PERGOLA, 1999, nossa tradução).

Em módulo anterior, na mesma disciplina, já havíamos discutido que antigamente não existiam as técnicas e as facilidades que temos hoje e que engenheiros e arquitetos precisavam desenhar projetos à mão. Para ajudar nos traçados, instrumentos articulados de desenho, feitos geralmente em madeira, eram bastante usados. Nesse módulo anterior, estudamos o funcionamento do pantógrafo, instrumento articulado que amplia ou reduz figuras segundo o princípio da semelhança de triângulos.

Neste Módulo IV, trabalhamos com parabológrafos, elipsógrafos e hiperbológrafos. Para cada instrumento de desenho, desenvolvemos a seguinte sequência de estudo:

a) estudo das propriedades geométricas da curva produzida pelo instrumento;
b) observação de uma foto do mecanismo construído em madeira ou metal e disponível na coleção de Máquinas Matemáticas do *Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica da Università di Modena e Reggio Emilia*, Itália [11];

---

[11] Disponível no site <http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00lab.htm>.

c) manipulação do mecanismo digital, análogo ao de madeira, na própria tela do computador, observando a curva sendo desenhada conforme o movimento do mecanismo;
d) estudo mais detalhado da construção do mecanismo no software GeoGebra;
e) estudo das relações entre as propriedades do mecanismo e as da curva.

Os alunos foram convidados a manipular cada um dos mecanismos animados na tela do computador, e observar, ao mesmo tempo, o traçado de cada curva. Desta forma tiveram o primeiro contato com os mecanismos, observando seu funcionamento e sua constituição. A figura 6 ilustra o início da sequência proposta para o parabológrafo, com a foto do mecanismo em madeira e um mecanismo digital análogo a ele, onde o traçado desenhado pelo lápis (ou lapiseira, como será referenciado o recurso daqui em diante), quando o mecanismo é manipulado, aparece em vermelho.

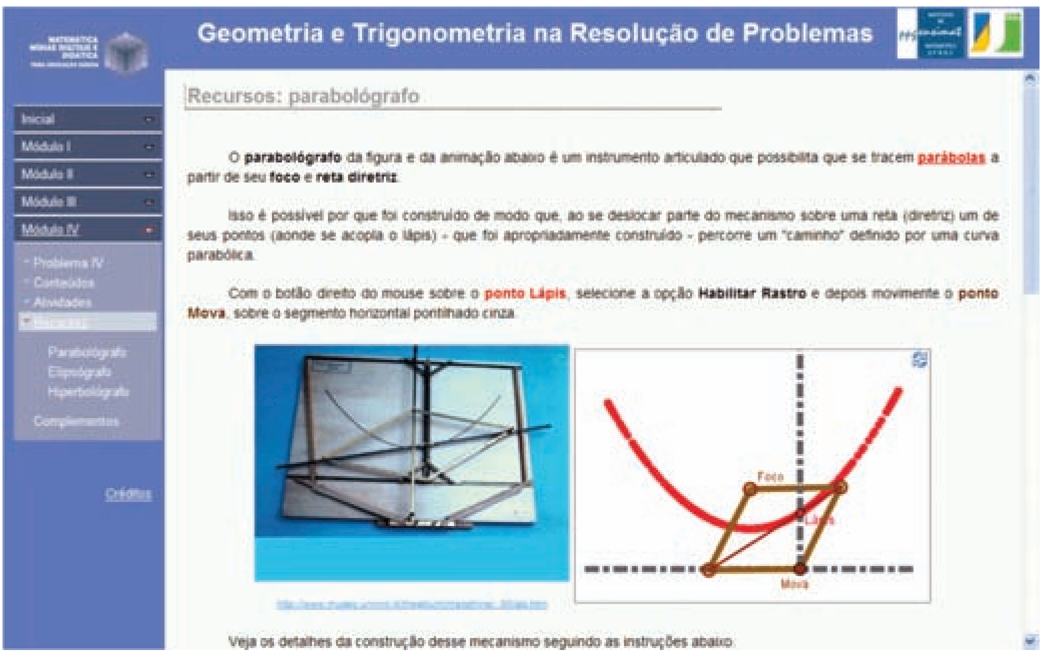


Figura 6 – Interface de parte do submenu Recursos do Módulo IV da disciplina "Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas".

Esse mecanismo utiliza um losango cujos lados têm comprimento fixo, mas cujas diagonais mudam de tamanho conforme os vértices se afastam ou aproximam. O foco da parábola é um vértice do losango que permanece fixo (ponto F na figura 7), enquanto o vértice oposto (ponto M na figura) desliza sobre a reta que é a diretriz da parábola (em azul na figura 7). Quando o ponto M se move, a lapiseira (ponto L na figura 7), também se desloca, mas sempre na intersecção da outra diagonal do losango (na figura, HH') com a reta *j* (em cinza, na figura 7), que passa pelo ponto móvel e é perpendicular à diretriz.

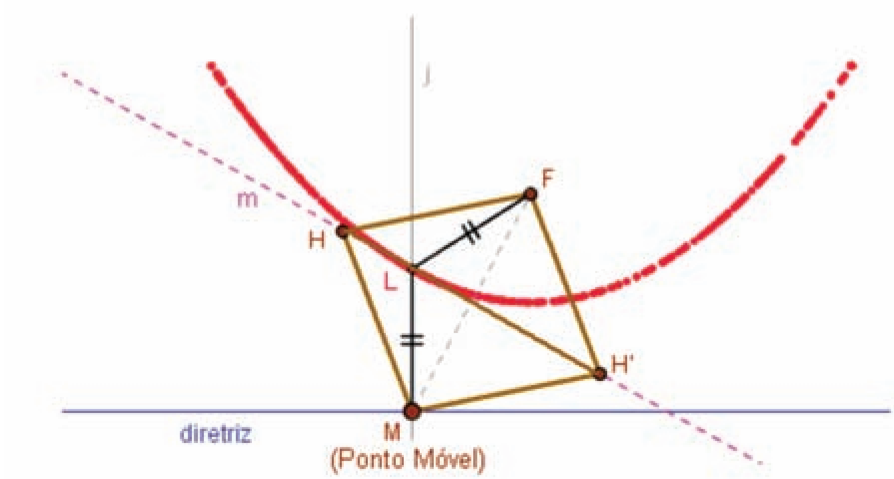


Figura 7 – Ilustração da demonstração do funcionamento do parabológrafo.
Fonte: site da disciplina "Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas".

O mecanismo foi concebido de modo a observar a propriedade foco-diretriz da parábola, garantindo que a lapiseira (ponto L na figura 7) estivesse sempre equidistante do ponto fixo F e da reta diretriz (em azul na figura 7).

Isso foi garantido com os seguintes elementos de construção: FHMH' é losango, sendo F fixo e M um ponto que desliza sobre a reta diretriz; L está na intersecção da reta *m* (que passa por H e H') com a reta *j*. Como a reta *m* é mediatriz da diagonal FM do losango, então LF = LM. Portanto, qualquer que seja a posição de L, a distância de L ao foco é igual à distância de L à diretriz, o que garante que a curva traçada seja de fato uma parábola.

Observamos, na figura 6, que os mecanismos digitais não são idênticos aos do Museo, pois obedecem a restrições de construção diferentes.

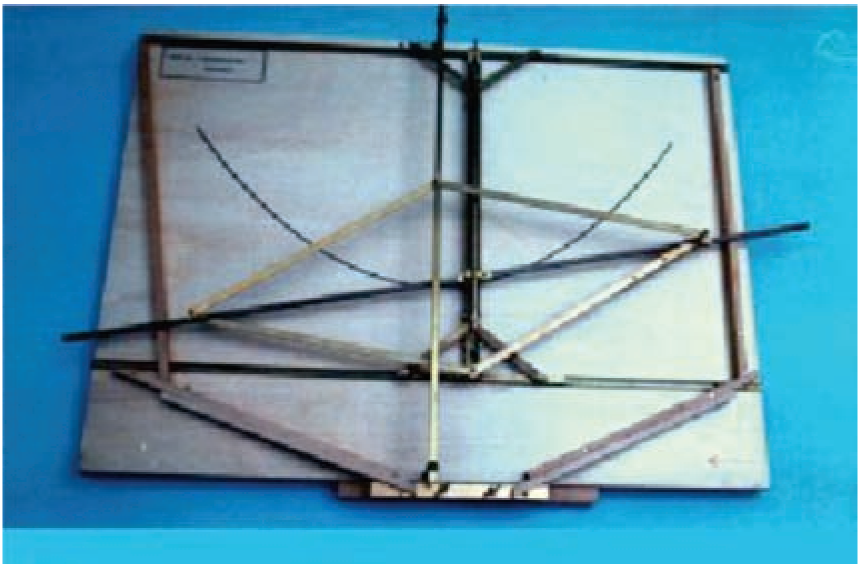


Figura 8 – Parabológrafo “che utilizza il cerchio direttore”.
Fonte: site <http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00lab.htm>.

No caso do parabológrafo do *Museo* (figura 8), a “lapiseira” está na intersecção de duas hastes. Uma delas (que corresponde ao “trilho móvel” da figura 9) deve deslizar permanecendo sempre perpendicular à diretriz da parábola (que corresponde ao “trilho fixo” da figura 9) e, para isso, é preciso usar um quadro suporte e dois triângulos rígidos que também deslizam. A outra haste suporta dois vértices opostos de um losango flexível, mas limitado pelo quadro. As duas hastes devem ter ranhuras por onde deslizam a lapiseira e parafusos de articulação.

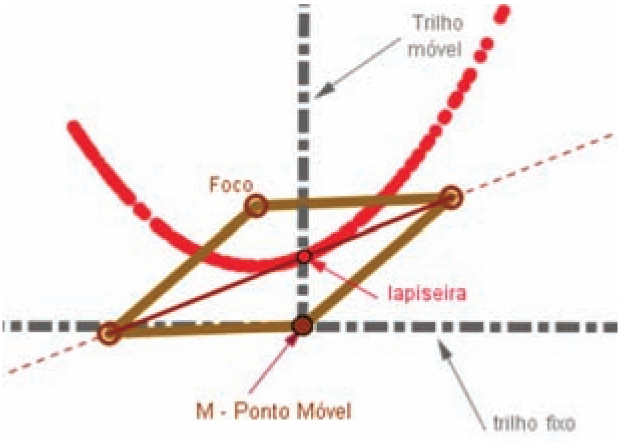


Figura 9 – Ilustração do parabológrafo digital.
Construído a partir do disponível no site da disciplina “Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas”.

No mecanismo digital, ranhuras, parafusos e elementos de apoio, como o quadro suporte, são desnecessários. A perpendicularidade entre as retas é garantida pelo comando "reta perpendicular" do GeoGebra. A lapiseira pode deslizar ao longo da reta que suporta a diagonal do losango (não apenas dentro do losango), o que permite um traçado de uma porção maior da parábola.

Por outro lado, no GeoGebra, é preciso construir os objetos numa determinada ordem, para que uns permaneçam fixos e outros se movam segundo as condições desejadas. Por exemplo, o ponto móvel M é um ponto livre sobre a reta diretriz, e o ponto F é fixo. Os outros vértices do losango devem ser construídos depois desses, de modo que sejam "arrastados" quando o ponto móvel M se desloca.

Além disso, muitos elementos usados na construção – pontos, segmentos, retas, círculos, entre outros – podem ser, ao longo ou ao final da construção, convenientemente "escondidos" [12], pois não são relevantes para quem quer apenas experimentar o mecanismo. Nos objetos do *Museo*, todos os elementos permanecem aparentes. Feitas essas observações, ressaltamos que os instrumentos digitais funcionam segundo os mesmos princípios daqueles exibidos pelo *Museo* [13].

Na sequência do Módulo, disponibilizamos no site da disciplina, para cada um dos mecanismos – parabológrafo, elipsógrafo, hiperbológrafo – um objeto de aprendizagem que mostra os detalhes da construção do mecanismo, incluindo os "objetos escondidos". Na figura 10, temos um exemplo de interface desses objetos na qual se vê uma barra de navegação que permite ao usuário acompanhar o procedimento de construção do mecanismo no GeoGebra, em todos os seus detalhes.

---

12 São objetos que não aparecem na tela, mas que foram utilizados como apoio na construção dos elementos visíveis do mecanismo segundo as restrições do GeoGebra. Alguns dos "objetos escondidos" no mecanismo digital são visíveis no instrumento de madeira e foram ocultos apenas para facilitar a visualização dos instrumentos.

13 Observamos ainda que o site do *Museo* <http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00lab.htm> também disponibiliza uma versão digital de cada mecanismo, construída com o software Mathmachine. Os mecanismos digitais utilizados no site da disciplina "Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas" não foram construídos a partir desses instrumentos, mas a partir da interpretação dos mecanismos reais exibidos no site e em outras fontes, como Bolt (1994).

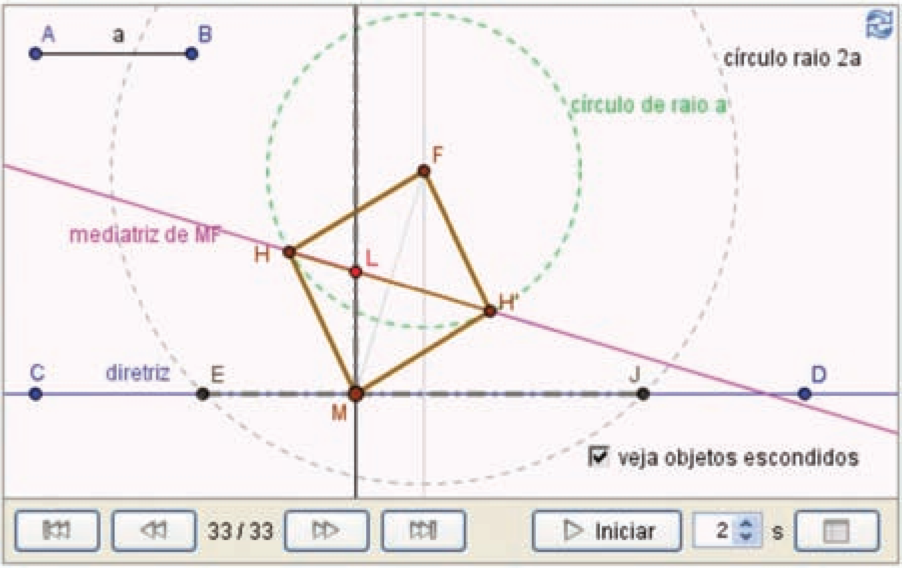


Figura 10 – Interface do objeto de aprendizagem.
Fonte: site da disciplina "Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas".

Nesse objeto, o usuário pode modificar o tamanho das hastes do instrumento digital ou deslocar determinados elementos. Essa experimentação favorece a distinção entre os elementos que podem ser modificados (por exemplo, posição do ponto F e da reta diretriz na tela, tamanho das hastes) e aqueles invariantes que são próprios do mecanismo (congruência entre os lados do losango, perpendicularidade entre as retas).

Além de acompanhar a construção com a barra de navegação, o usuário pode, ainda, acessar o chamado "protocolo de construção" e reproduzir a construção, passo a passo, identificando os elementos envolvidos (pontos, segmentos, círculos...) suas características e as relações de dependência entre eles [14].

Todas essas experimentações, possibilitadas pelo uso dos objetos digitais, visaram favorecer a compreensão do funcionamento do mecanismo por parte dos alunos. Essa compreensão possibilita, inclusive, a reprodução do mecanismo de madeira exibido no site do *Museo*, com o entendimento das relações entre seus diferentes componentes.

[14] Convidamos o leitor a se aventurar nessa experiência de construção dos mecanismos, acessando os objetos digitais disponíveis no site da disciplina: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/>, submenu "Recursos" do Módulo IV.

Entendendo os mecanismos: parabológrafos, elipsógrafos, hiperbológrafos

O Laboratório de Máquinas Matemáticas do já referido *Museo Universitario da Università di Modena e Reggio Emilia* exibe várias versões diferentes de parabológrafos, elipsógrafos e hiperbológrafos. Para quem decifra o funcionamento de cada mecanismo, é interessante perceber como sua construção está apoiada em propriedades simples e, ao mesmo tempo, observar a engenhosidade de quem o concebeu.

Em alguns casos, a construção do mecanismo está apoiada na propriedade focal da curva, como ocorre com o parabológrafo que acabamos de descrever; em outros casos, como ocorre com o hiperbológrafo de Delaunay, que apresentamos a seguir, é mais simples situar os pontos num sistema cartesiano e explicar o mecanismo através das relações entre as coordenadas.

O hiperbológrafo de Delaunay, ilustrado na figura 11, está baseado em um losango que tem duas hastes no seu interior (menores que cada lado do losango), articuladas em um ponto que vamos denominar M, que desliza sobre uma reta. O movimento do ponto móvel M aciona o mecanismo da seguinte forma: dois vértices opostos do losango deslizam sobre outra reta fixa, enquanto os outros dois vértices, onde estão as lapiseiras, desenham os ramos da hipérbole. Apesar da aparente simplicidade da construção, a compreensão do mecanismo não é tão direta, uma vez que elementos importantes, como os focos da hipérbole traçada, não correspondem a nenhum componente do instrumento.

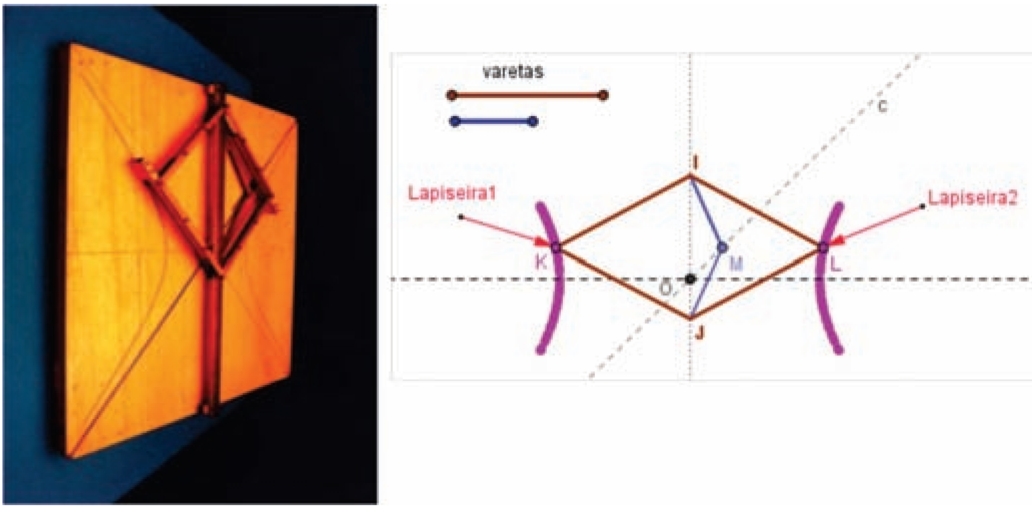


Figura 11 – Hiperbológrafo de Delaunay. À esquerda, fotografia do mecanismo disponível em <http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00lab.htm> e, à direita, o instrumento digital construído com o GeoGebra.

Na figura 11 temos o mecanismo digital construído a partir de duas hastes azuis (segmentos internos) e quatro hastes marrons (que formam o losango), convenientemente dispostas a partir de três retas concorrentes no ponto O (retas pontilhadas na figura 11). Duas destas retas são perpendiculares entre si, e na terceira, a reta *c*, oblíqua a elas, desliza o ponto M, que é o ponto que desencadeia o movimento do instrumento. Quando M desliza na reta *c*, os vértices I e J deslizam sobre outra reta, o losango vai mudando seus ângulos. Os pontos marcados como K e L (posições das lapiseiras) desenham a curva cor-de-rosa. Vamos mostrar que esta curva é, de fato, uma hipérbole.

Na demonstração do funcionamento do mecanismo, vamos recorrer às coordenadas retangulares, mostrando que os pontos móveis onde estão as lapiseiras, e que traçam a curva, respeitam, para um sistema de eixos escolhido convenientemente, a equação $\frac{x^2}{u^2} - \frac{y^2}{v^2} = 1$, com u e v não nulos, que é a equação de uma hipérbole, obtida a partir de sua definição geométrica [15].

Vamos designar como eixo das ordenadas a reta por onde deslizam os pontos I e J, e o ponto O como sendo a origem do sistema de eixos. Então

[15] A equação da hipérbole é obtida a partir de sua propriedade focal, enunciada em seção anterior. A obtenção da equação está disponível no site da disciplina: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/>, submenu “Conteúdo” do Módulo IV.

a reta que passa por O e é perpendicular à outra será o eixo das abscissas (figura 12).

Denominamos x e y as coordenadas do ponto móvel L. Denominamos x' e y' as coordenadas do ponto M. Isto é, L = (x, y) e M = (x', y'). Como a reta c passa pela origem do sistema de eixos, sabemos que $y' = k.x'$ para um valor não nulo de k (sendo que, no mecanismo, o coeficiente angular k determina a maior ou menor abertura da curva). Observamos que nos pontos L e M temos $y = y'$, pois a reta que passa por L e M é paralela ao eixo das abscissas. Então podemos escrever $x' = \frac{y}{k}$.

Denominamos o comprimento de cada lado do losango de a e o comprimento de cada barra no interior do losango de b. Temos que $b < a$.

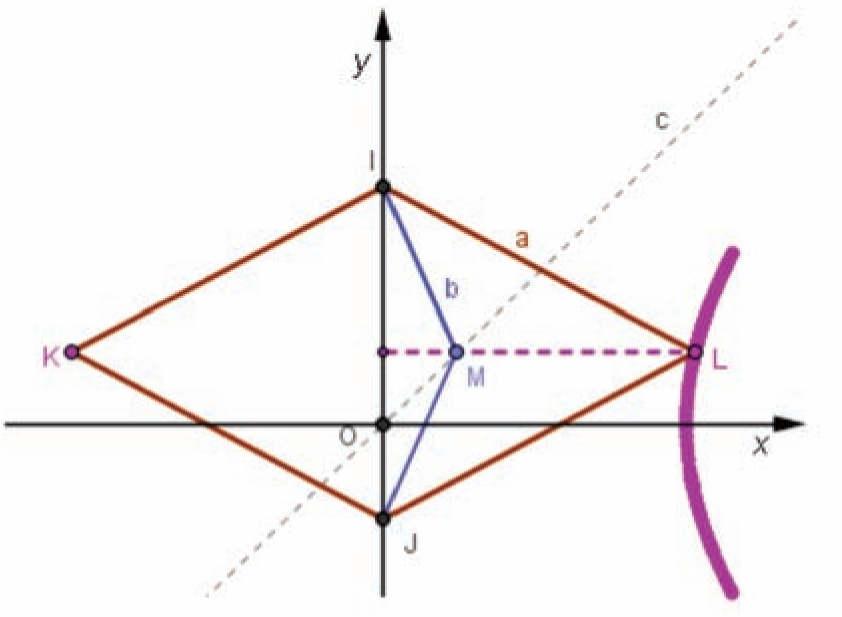


Figura 12 – Visualização do instrumento em relação ao sistema de eixos.

Por Pitágoras (vide triângulo cor-de-rosa na figura 13), temos que $x^2 + \left(\frac{IJ}{2}\right)^2 = a^2$.

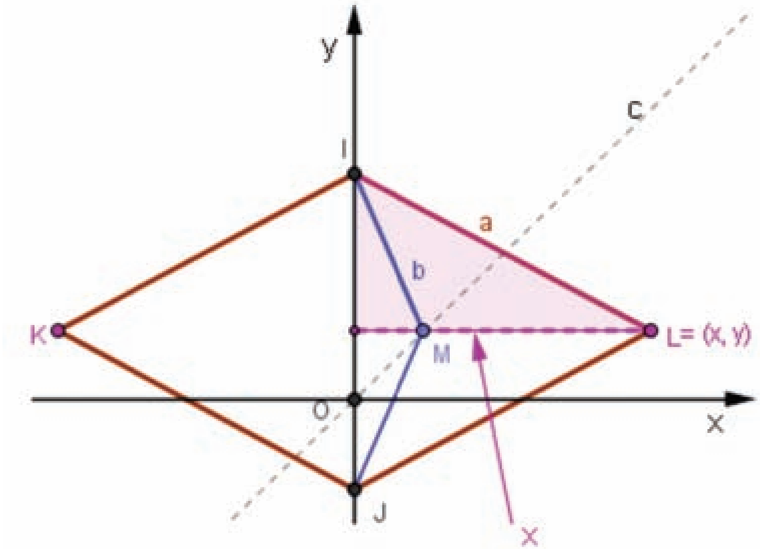


Figura 13 – Ilustração da demonstração do funcionamento do hiperbológrafo de Delaunay.

Temos também por Pitágoras (vide triângulo azul na figura 14) que $x'^2 + \left(\frac{IJ}{2}\right)^2 = b^2$. Diminuindo a segunda equação da primeira, temos que $x^2 - x'^2 = a^2 - b^2$.

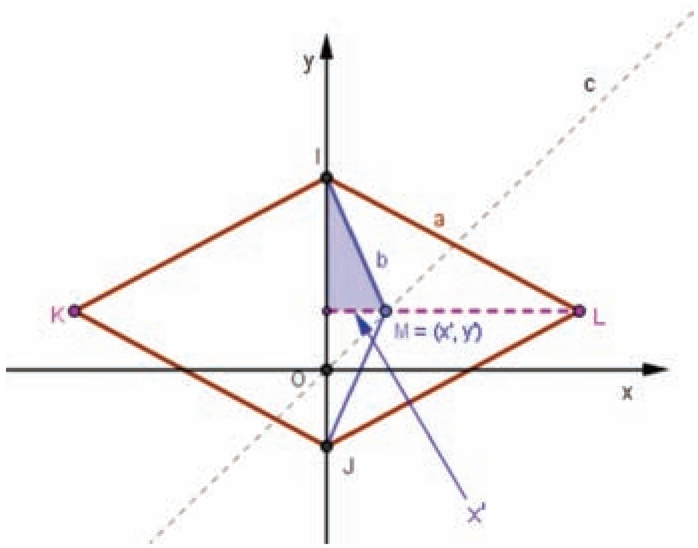


Figura 14 – Ilustração da demonstração do funcionamento do hiperbológrafo de Delaunay.

Mas, como tínhamos visto anteriormente, $x' = \frac{y}{k}$, então temos que $x^2 - \left(\frac{y}{k}\right)^2 = a^2 - b^2$. Dividindo os dois termos da igualdade por $a^2 - b^2$, temos $\frac{x^2}{(a^2 - b^2)} - \frac{y^2}{k^2(a^2 - b^2)} = 1$, que pode ser reescrita como

$$\frac{x^2}{u^2} - \frac{y^2}{v^2} = 1,$$

onde $u^2 = a^2 - b^2$ e $v^2 = k^2.\,(a^2 - b^2)$.

Analogamente, mostramos que as coordenadas do ponto K respeitam a equação $\frac{x^2}{u^2} - \frac{y^2}{v^2} = 1$.

Portanto, concluímos que os pontos L e K traçam os dois ramos de uma hipérbole de semi-eixos $2|u|$, cujas assíntotas têm equação $y = \pm\left(\frac{v}{u}\right)x$ e onde a distância entre os focos é dada por $2|f|$, sendo $f^2 = u^2 - v^2$[16].

Vamos agora identificar no instrumento o significado geométrico de u e de v. Trazendo o ponto móvel M até a posição do ponto O (como na figura 15), temos quatro triângulos retângulos de hipotenusa a e cateto b. Como já vimos acima, temos que $u^2 = a^2 - b^2$, e escolhendo $u > 0$, concluímos que a medida do outro cateto é u.

Então, quando o ponto móvel M estiver na posição do ponto O (figura 15), a distância entre os pontos L e K será $2u$; e cada uma das lapiseiras estará sobre um dos vértices da hipérbole.

[16] A equação da hipérbole é obtida a partir de sua definição geométrica, isto é, da sua propriedade focal. A obtenção dessa equação, das assíntotas, focos e semi-eixos da hipérbole está disponível no site da disciplina: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/>, submenu “Conteúdo” do Módulo IV.

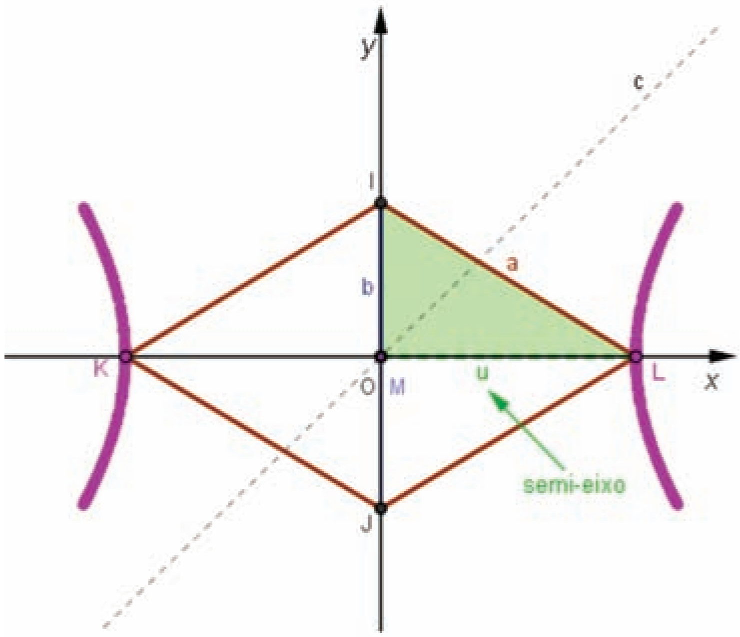


Figura 15 – Visualização de posição do instrumento em que o ponto M coincide com o ponto O e destacando um dos semi-eixos da hipérbole.

Lembramos agora que a equação da reta c é $y = kx$ e que escolhemos u e v de modo que

$$u^2 = a^2 - b^2 \qquad \text{e} \qquad v^2 = k^2.(a^2 - b^2).$$

Então, $v^2 = k^2.\, u^2$ e $v = \pm ku$ e, portanto, $k = \pm \frac{v}{u}$.

Mas como vimos antes, as retas de equação $y = \pm\left(\frac{v}{u}\right)x$ são as assíntotas da hipérbole. Portanto, a reta c, percorrida pelo ponto M é uma das assíntotas da hipérbole.

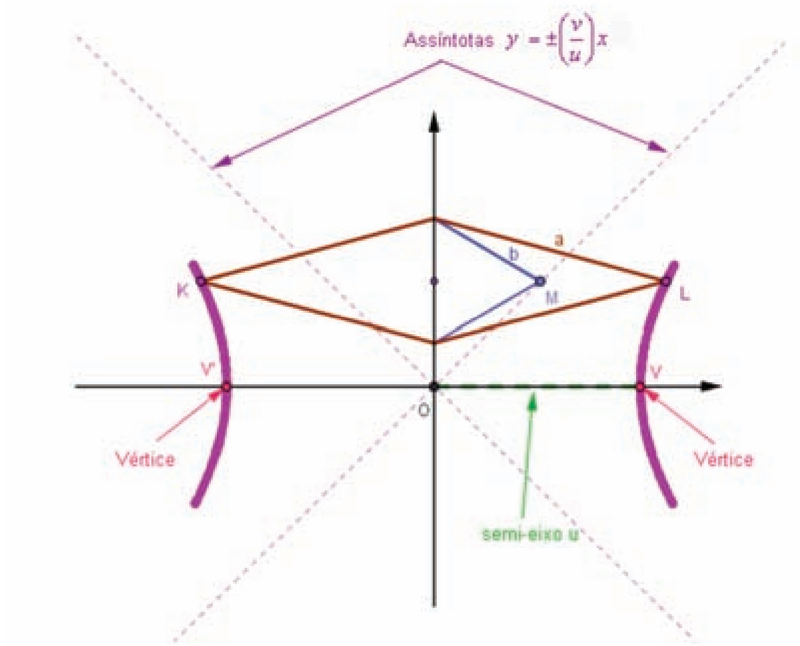


Figura 16 – Ilustração da demonstração do funcionamento do hiperbológrafo de Delaunay.

Cabe aqui um comentário sobre uma das potencialidades do recurso à movimentação do mecanismo, que é a de fazer variar algumas condições da figura – no caso, a posição do ponto M, que pode estar ou não sobre a origem do sistema de eixos ortogonais –, favorecendo a visualização de determinadas relações numa e noutra situação.

Enfim, cabe destacar que, com as discussões sobre o funcionamento dos mecanismos – aqui ilustradas pela construção e demonstração do parabológrafo e do hiperbológrafo de Delaunay [17] – buscou-se enfatizar as propriedades das curvas, identificando parábolas, elipses e hipérboles não pela sua aparência, mas pelas propriedades que as caracterizam.

A exploração dos mecanismos pelos professores em formação continuada

No segundo momento do módulo, os alunos do curso foram convidados a construir outros mecanismos (outras versões de parabológrafos, elipsógrafos

[17] No site da disciplina: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/>, submenus "Recursos" e "Atividades" do Módulo IV, estão disponíveis a construção e a demonstração do funcionamento de elipsógrafos e de outros tipos de parabológrafo e hiperbológrafo.

e hiperbológrafos) seguindo um protocolo de construção do GeoGebra a ser escolhido dentre quatro disponibilizados no site. Na figura 17, temos um protocolo de construção de um desses mecanismos.

Protocolo de Construção

Arquivo Exibir Ajuda

N.	Nome	Definição
1	Ponto A	
2	Ponto B	
3	Círculo c	Círculo por B com centro A
4	Ponto C	
5	Ponto D	
6	Reta a	Reta CD
7	Ponto E	
8	Ponto F	
9	Segmento b	Segmento [E, F]
10	Ponto MOVA	Ponto sobre c
11	Círculo d	Círculo com centro MOVA e raio b
12	Ponto H	Ponto de interseção de d, a
13	Segmento e	Segmento [A, MOVA]
14	Segmento f	Segmento [MOVA, H]
15	Círculo g	Círculo com centro H e raio b
16	Ponto I	
17	Ponto J	
18	Segmento h	Segmento [I, J]
19	Círculo k	Círculo com centro H e raio h
20	Ponto K	Ponto de interseção de k, f
21	Ponto L	Ponto de interseção de d, a
22	Segmento i	Segmento [MOVA, L]
23	Círculo p	Círculo com centro L e raio h
24	Ponto M	Ponto de interseção de p, i
25	Reta j	Reta passando por M e paralela a f
26	Reta l	Reta passando por K e paralela a i
27	Ponto Lapiseira	Ponto de interseção de j, l
28	Segmento m	Segmento [K, Lapiseira]
29	Segmento n	Segmento [M, Lapiseira]
30	Reta t	Reta passando por A e paralela a a

30 / 30

Figura 17 – Protocolo de construção de um mecanismo.

Observa-se que, na coluna da esquerda, o protocolo traz o nome dos elementos, na ordem de sua construção e, na coluna da direita, a descrição dessa construção. Por exemplo, no passo 3, temos um círculo *c* que foi construído a partir dos pontos iniciais A e B (círculo passando por B com centro em A). Neste caso, a construção do elipsógrafo é feita em 30 passos. As cores que aparecem no protocolo indicam as cores que foram usadas na construção do mecanismo e que ajudam na sua visualização (conforme figura 18).

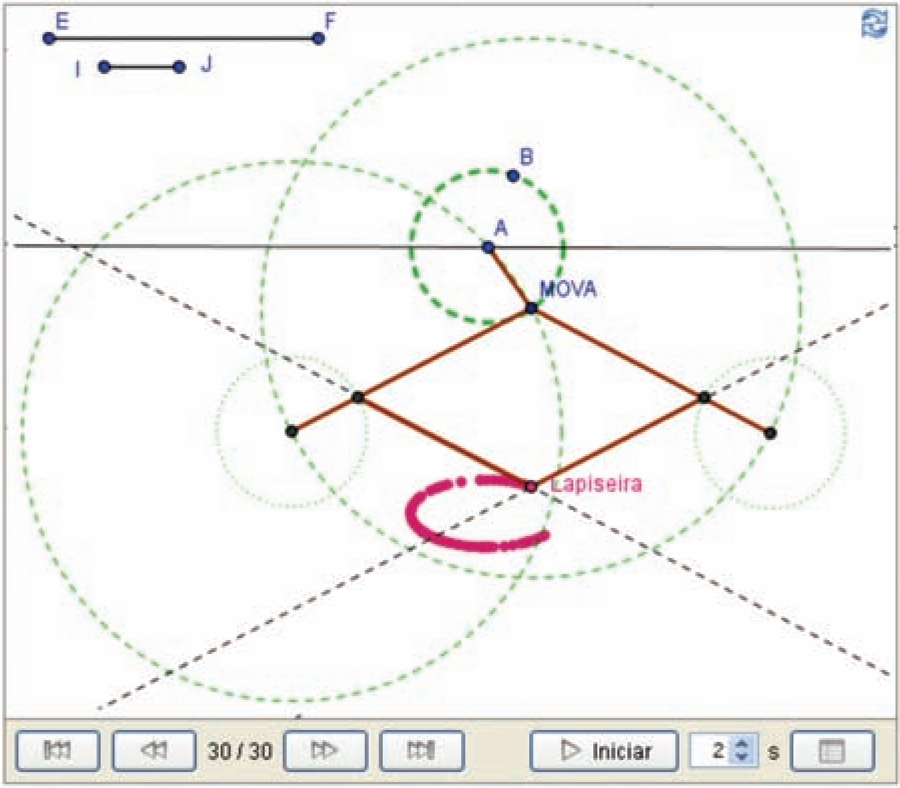


Figura 18 – Mecanismo construído segundo as instruções do protocolo da figura 17.

Os mecanismos foram designados como “surpresas”, uma vez que até o final da construção não estavam identificadas as curvas que seriam traçadas por eles. Cada aluno-professor foi convidado a seguir as instruções do protocolo escolhido, testar o mecanismo, estudar seu funcionamento e as curvas por ele traçadas, variando alguns parâmetros da construção:

> Você vai construir um instrumento de desenho surpresa, a partir do passo a passo gerado pelo protocolo de construção do GeoGebra, disponibilizado para cada uma das atividades. Depois de construído você vai movimentar o instrumento, reconhecer a cônica que o mesmo desenha, observar alterações na curva determinadas por modificações nos tamanhos de hastes ou distância entre pontos, por exemplo, e tentar explicar matematicamente por que o instrumento construído desenha a respectiva curva. (extraído do submenu Atividades, Módulo IV, do site da disciplina "Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas").

As primeiras dificuldades apareceram na própria construção dos mecanismos. No fórum virtual da disciplina, onde os alunos de cada polo podiam dialogar entre si e com professores-tutores, apareceram muitos desabafos e pedidos de ajuda: "acho que não vou conseguir fazer a construção seguindo o protocolo sem ter um desenho como base"; "Eu não sei nem como começar!!! Pois ali indica os pontos, mas não fala onde colocá-los!!! Como irei montar no escuro?"; "Faltam informações no protocolo... tipo fiz o círculo aí fala ponto *c* e *d*... mas onde pôr os pontos não é dito... help". Muitas vezes o auxílio vinha dos próprios colegas: "dá pra colocar os pontos em qualquer lugar e o ponto mova é só colocar um ponto móvel e mudar o nome para 'mova'"; "Se no protocolo não especifica 'ponto sobre...' os pontos são livres, em qualquer lugar da tela. Quando os pontos devem ser sobre algum objeto específico, o protocolo indica isso". Em outros momentos os colegas não conseguiram ajudar: "não consigo vizualisar uma hipérbole no rastro, desculpe não poder ajudar, fiquei com a mesma dúvida". Então houve a intervenção da tutora a distância: "Pode ser que o teu problema seja no tamanho dos segmentos auxiliares (que devem ser os segmentos que ligam os pontos livres...). Dá uma modificada no tamanho deles (ou dele) e veja se não funcionará."

O último diálogo citado acima refere-se a restrições sobre as medidas dos segmentos (hastes) que não estão explicitadas nos protocolos de construção a serem seguidos. Nos outros diálogos, as dificuldades referem-se, em parte, à desenvoltura no uso do programa GeoGebra, que já havia sido utilizado em outras atividades e em outras disciplinas; mas revelam também os problemas envolvidos no uso da linguagem verbal para designar objetos geométricos. Gravina (1996) observa que comumente, na escola, a construção de objetos geométricos é substituída pela apresentação de "desenhos prototípicos", e a compreensão dos objetos a partir de suas propriedades é então contornada com a identificação entre objetos e figuras particulares. Consideramos, portanto, que a atividade de construção do mecanismo aqui relatada envolveu um interessante desafio, pois não bastava apenas repetir as instruções: era preciso "decifrar" o protocolo disponibilizado e lidar com os objetos designados sem o recurso a figuras de apoio.

Na figura 19, vemos o mecanismo "surpresa 1" construído por uma aluna.

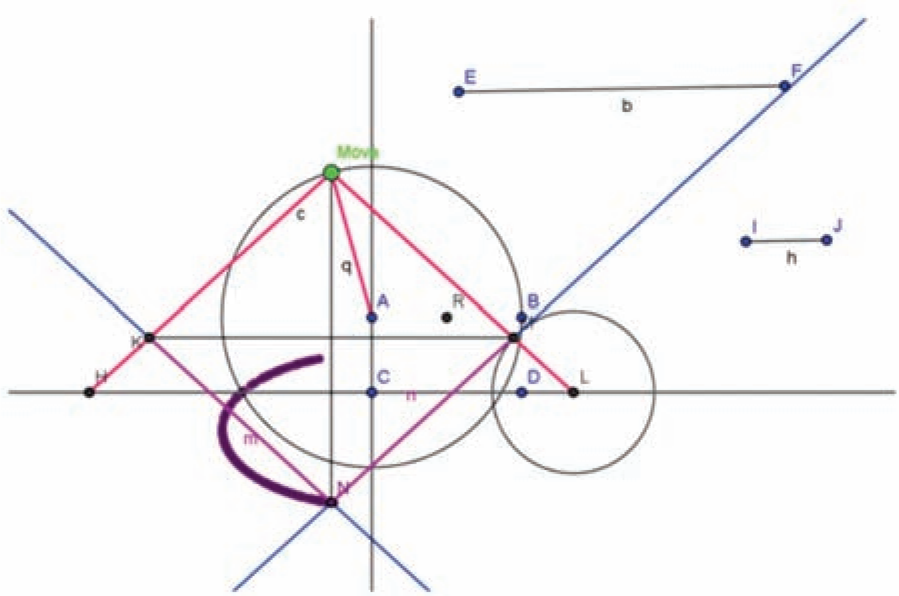


Figura 19 – Mecanismo "surpresa 1" construído pela aluna.

Uma vez construído o mecanismo, cada aluno-professor deveria experimentá-lo, traçando a curva e examinando mudanças no seu traçado conforme as alterações que impunha nos tamanhos das hastes do mecanismo.Na figura 19, vemos os segmentos EF e IJ marcados acima e à direita do mecanismo. Quando os comprimentos de EF e IJ são alterados, modificam-se os comprimentos dos componentes correspondentes no mecanismo. Abaixo, a resposta da mesma aluna para o instrumento "surpresa 1", ao fazer variar os comprimentos de IJ e EF:

- Se IJ > EF, não temos formação de curva nenhuma.
- Se IJ = EF, temos a formação de um círculo.
- Se IJ < EF, à medida que vamos aumentando o segmento EF, tem-se a formação cada vez mais definida de uma elipse.

A resposta está correta. Observamos na figura 19 que o ponto "Mova", que aciona o mecanismo, percorre um círculo de centro A e raio que denominamos *r*. Queremos conhecer a trajetória do ponto N, onde está a lapiseira. Tomando o ponto C como origem do sistema de eixos e a reta CA como eixo das ordenadas, observamos que os pontos "Mova" e N têm sempre a mesma abscissa (pois são vértices de uma diagonal do losango KNMMova paralela à reta CA). Os segmentos HMova e LMova têm o mesmo comprimento de EF, e os segmentos HK e LM têm o mesmo comprimento de IJ. Observando semelhança de triângulos, obtemos a seguinte relação entre as ordenadas y_{mova} e y_N:

$$\frac{y_{mova}}{EF} = -\frac{y_N}{EF - 2IJ},$$

sendo y_{mova} a ordenada do ponto "Mova", e y_N a ordenada do ponto N. Se EF = IJ, teremos $y_{\text{mova}} = y_N$ e, portanto, o ponto N vai coincidir com o "Mova", percorrendo o mesmo círculo. Quando EF > IJ, o ponto N percorre uma elipse, cujo semi-eixo maior tem o mesmo raio *r* do círculo percorrido pelo ponto "Mova" e cujo semi-eixo menor mede $\frac{r(EF - 2IJ)}{EF}$.

Na identificação do mecanismo, a aluna escolheu o modelo do *Museo "Conicografi que utilizzano il cerchio direttore – Ellisse"*. O elipsógrafo construído, de fato, é outro – trata-se de uma versão do "Elipsógrafo de Delaunay" exibido pelo *Museo* –, mas a justificativa da aluna é uma boa aproximação da resposta, pois ela observa que o mecanismo transforma o movimento circular do ponto "Mova" na trajetória elíptica do ponto N.

A maioria dos alunos que construíram o mecanismo "surpresa 4" nomearam-no, corretamente, como o "Hiperbológrafo de Delaunay". A identificação dos mecanismos não é uma tarefa tão simples quanto possa parecer, já que há vários casos diferentes de parabológrafos, elipsógrafos e hiperbológrafos no catálogo exibido pelo *Museo* e considerando-se que a aparência dos mecanismos digitais não é tão assemelhada à dos mecanismos que aparecem nas fotografias. Essa identificação envolvia, portanto, uma análise da composição do mecanismo. Acreditamos que essa análise foi favorecida pela manipulação dos instrumentos digitais, que permite ao usuário distinguir, através da exploração, os elementos invariantes dos mecanismos. Segundo Gravina (2001):

> Uma família de "desenhos em movimento" substitui o desenho particular como expressão do componente figural, descaracterizando as particularidades não relevantes do desenho particular.
> Em configurações geométricas mais complexas, é no dinamismo da figura que se revelam muitos dos fatos estáveis implícitos, ao mesmo tempo em que os fatos aparentes, provenientes de instância particular de desenho expressão do componente figural, tornam-se irrelevantes na exploração. (GRAVINA, 2001, p. 89, 91).

A maioria dos alunos que construíram o mecanismo "surpresa 4" também identificaram corretamente a reta EF como assíntota da hipérbole traçada e concluíram que, ao modificar o comprimento dos segmentos CG e CD, alteramos a distância entre os focos e a distância entre os vértices da hipérbole. Experimentando alterações nesses valores e mantendo a reta EF fixa, pode-se observar que a "abertura" ou a excentricidade da hipérbole (representada pela constante *e* no Quadro 1) não varia; portanto, pode-se conjecturar que a excentricidade depende apenas da inclinação da assíntota em relação ao eixo focal.

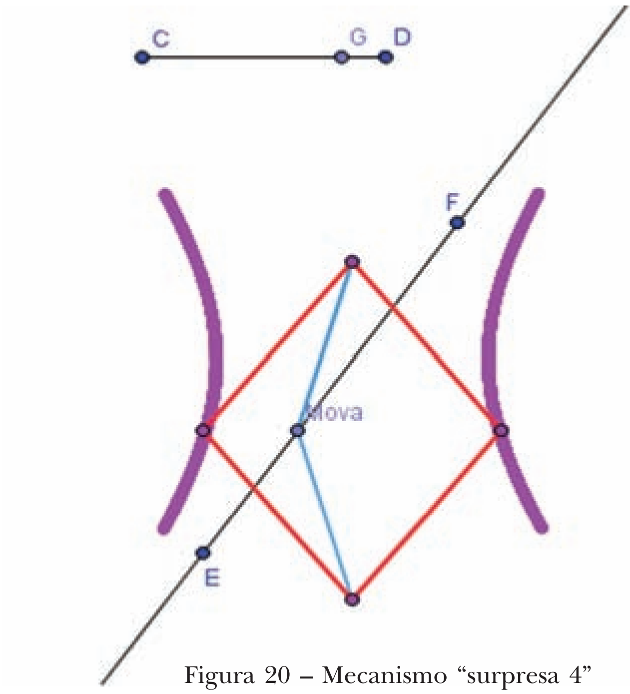


Figura 20 – Mecanismo "surpresa 4"

As tentativas de explicação do funcionamento dos mecanismos foram, em geral, informais ou muito iniciais. No caso do hiperbológrafo, essas explicações enfatizaram os elementos que garantiam a simetria entre os ramos em cada hipérbole. As dificuldades evidenciadas pelos alunos-professores em construir explicações mais completas do funcionamento dos mecanismos podem ser, em parte, atribuídas a complexidades dos próprios instrumentos. Podem ser também atribuída à falta de familiaridade com as propriedades das cônicas que, como já foi observado, em geral não são discutidas na escola básica. Dificuldades em construir argumentos genéricos, baseados nas propriedades das figuras, porém, já haviam se manifestado em outros momentos do curso, indicando que demonstrações em geometria não são práticas comuns entre os professores.

Por outro lado, foi possível observar um importante engajamento por parte dos alunos-professores na atividade de construção e exploração dos mecanismos. Os vários pedidos de ajuda aos colegas e professores-tutores indicam o empenho de cada um em compreender as falhas de sua própria construção ou interpretação do protocolo disponibilizado.

Considerações finais

A disciplina de "Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas" utilizou-se de situações-problema para disparar o estudo de tópicos específicos dessas duas áreas da Matemática, partindo da vivência para a teoria. No estudo da metodologia de resolução de problemas, trouxemos as mídias digitais para auxiliar nas simulações, na visualização, enfim, na compreensão dos conceitos envolvidos nas situações escolhidas.

Em módulo anterior da disciplina, havíamos disponibilizado protocolos de construção de objetos de aprendizagem com os quais era possível explorar as funções seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico. Tais objetos são úteis para o ensino da trigonometria, que é um tema atualmente valorizado no Ensino Médio.

Já o estudo dos mecanismos de desenho aqui discutidos não é tema presente no Ensino Médio. Na nossa proposta, a construção e a experimentação dos parabológrafos , elipsógrafos e hiperbológrafos não tinham como principal objetivo o traçado das curvas , mas visavam à familiarização e à investigação de suas propriedades por parte dos alunos-professores. Considerando as tarefas enviadas e o diálogo produzido em torno delas, acreditamos que esse objetivo foi alcançado em relação à maioria dos alunos do curso.

É interessante pensar em como mecanismos tão antigos – como os que são atribuídos a Leonardo da Vinci – e hoje dispensáveis, do ponto de vista prático do traçado das curvas, podem constituir-se em modelos de ferramentas inovadoras de aprendizagem. A memória dos instrumentos, recuperada e preservada pelo *Museo*, permite-nos compreender melhor os desafios e as restrições com que se confrontaram aqueles que os conceberam, em sua época. A reconstrução digital e a experimentação dos mecanismos permitem-nos reviver as descobertas desses inventores e perceber a profusão de resultados interessantes que se podem obter quando se movimentam extremos de segmentos, vértices de triângulos ou paralelogramos articulados segundo trajetórias tão simples como as de uma reta ou um círculo.

Referências

ANTON, Howard. *Cálculo*.v. 2. Porto Alegre: Bookman, 2007.

BOLT, Brian. *Matemáquinas:* o ponto de encontro da matemática com a tecnologia. Lisboa: Gradiva, 1994.

BOYER, Carl. *História da matemática*. São Paulo: E. Blücher, 1994.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GRAVINA, Maria Alice. *Geometria dinâmica*: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, VII, 1996, Belo Horizonte. *Anais*. Belo Horizonte: 1996. p. 1-13.

_______. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*. 2001. 277 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

HEATH, Sir Thomas. *A history of greek mathematics*. New York: Dover, 1981.

HOFFMANN, D.; BARRETO, M. M. *Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas*. Material Didático. Curso de Especialização: Matemática, Mídias Digitais e Didática para a Educação Básica. Porto Alegre, UAB/IM/UFRGS, 2009. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/>.

PERGOLA, Marcello. La collezione di Macchine Matematiche del Museo Universitario. In: BUSSI, M. G. B. et alii. *Laboratorio di Matematica. Theatrum Machinarum*. Modena: Museo

Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica, 1999. CD-ROM. Disponível em: <http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00lab.htm>. Acesso em: 17 fev. 2011.

VASÍLIEV, N.B. *Rectas y curvas*. Moscou: MIR, 1980.

Capítulo 4

O VÍDEO NAS AULAS DE MATEMÁTICA

MÁRCIA RODRIGUES NOTARE
MARINA MENNA BARRETO
SANDRA DENISE STROSCHEIN
VERA CLOTILDE VANZETTO GARCIA

Introdução

Moran (1995, 2002, 2009a, 2009b) incentiva o uso, na escola, de vídeos e de outros meios de comunicação e informação atuais, como a televisão e a internet. Essa opção didática, certamente, não garante solução para todos os problemas de ensino e aprendizagem de Matemática, mas tem um grande potencial, pois combina a comunicação sensorial-cinestésica com a audiovisual, a intuição com a lógica, a emoção com a razão.

Nessa perspectiva, foi organizada uma das disciplinas do Curso de Especialização, "Matemática, Mídias Digitais e Didática", intitulada "Mídias Digitais na Educação Matemática II", composta por quatro módulos de ensino: cada um parte de um *vídeo como sensibilização*, no sentido dado por Moran (1995), para introduzir um novo assunto, para despertar a curiosidade e a motivação para novos temas.

O primeiro módulo discutiu a questão dos vídeos na sala de aula; o segundo iniciou com um vídeo produzido por um professor, com objetivos relacionados com conteúdos e habilidades matemáticas; o terceiro, com um vídeo educativo produzido pela TV Escola, específico para Matemática; o último, com um vídeo sobre obras de Arte, produzido sem objetivos relacionados com Matemática, adaptado aos propósitos do professor. Em todos os módulos, foram, também, produzidos vídeos pela equipe docente, utilizados como ilustração, como conteúdo de ensino ou como parte de sequências de instruções, para desenvolver habilidades no uso de softwares ou em outras atividades matemáticas.

O desenvolvimento da disciplina aconteceu em dois diferentes ambientes: na plataforma Moodle, a "sala de aula" virtual; e no site, desenvolvido especialmente para a disciplina.

O ambiente Moodle (figura 1) foi o espaço utilizado para a interação professor-tutor-aluno, contendo orientações, tarefas, recados e informações sobre avaliação. Como recurso de interação e para incentivar a troca de ideias, foram criados, neste ambiente, diferentes fóruns de discussão.

Figura 1 – Ambiente Moodle

O site da disciplina (NOTARE; GARCIA; BARRETO, 2010)[1] foi o local em que os alunos-professores [2] encontraram instruções sobre as tarefas semanais e também caminhos para diferentes sites de apoio. Cada módulo de ensino estava organizado com a seguinte estrutura: objetivos, atividades, conteúdos, recursos e material complementar (figura 2).

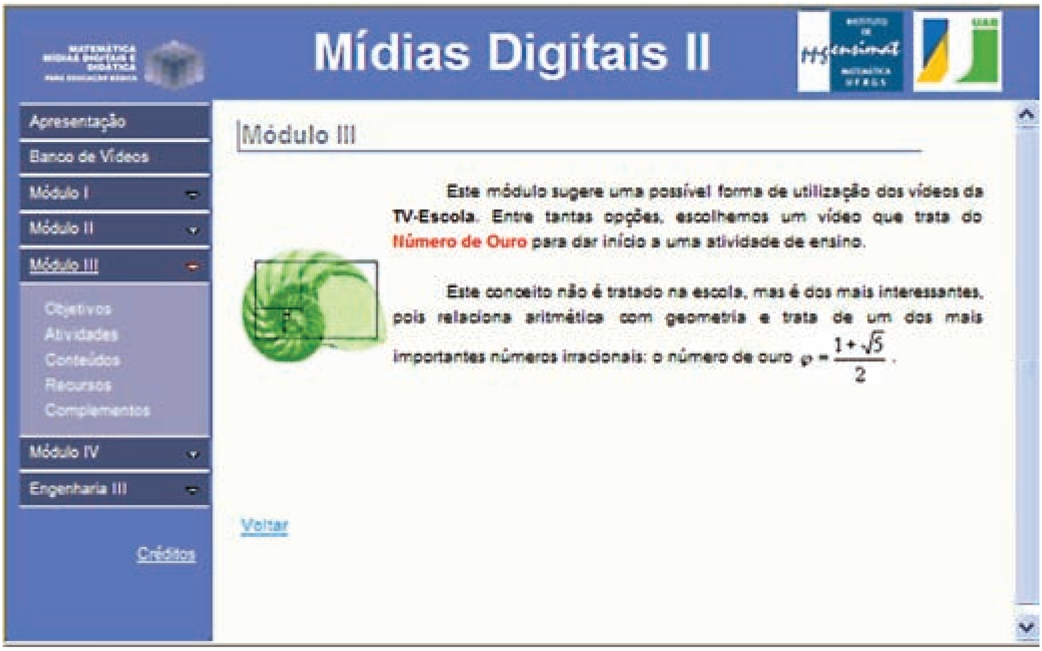


Figura 2 – Site da disciplina Mídias Digitais II/Módulo III

Como material para a disciplina, foram produzidos diferentes recursos digitais: um Banco de Vídeos; diferentes sequências de instruções, denominadas de “orientações passo a passo”, para esclarecer as atividades propostas; uma coleção de objetos de aprendizagem, constituída de vídeo-aulas e de animações.

Este artigo apresenta os módulos do site “Mídias Digitais II”, com seus objetivos, conteúdos, tarefas e recursos tecnológicos. Ao final, é feita uma reflexão sobre a experiência, com depoimentos dos alunos-professores.

1 O endereço do site “Mídias Digitais II” é <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/>.

2 No texto, usamos a expressão aluno-professor para distinguir o aluno do Curso de seu próprio aluno, da escola.

Módulo I – O vídeo na sala de aula

O objetivo do primeiro módulo foi desenvolver, no aluno-professor, a percepção das potencialidades do uso de vídeos na sua prática docente. Para isso, foi disponibilizado o Banco de Vídeos, composto de vídeos informativos ou educativos, previamente selecionados pela equipe pedagógica (professores e tutores) e escolhidos de acordo com a sua qualidade, sua relevância ou seu interesse.

Na página inicial do Banco de Vídeos (figura 3), os vídeos estão disponíveis e separados em quadros, classificados de acordo com estilo (por exemplo, documentário ou vídeo-aula) ou produtora (por exemplo, TV Escola ou Cosmos).

Figura 3 – O Banco de Vídeos

Alguns vídeos tratam especificamente de Matemática. Por exemplo, o vídeo *O barato de Pitágoras,* produzido pela TV Escola, problematiza o Teorema de Pitágoras e foi produzido para dar significado à expressão "*a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*": apresenta o triângulo, justifica sua importância relacionada com a estabilidade de estruturas, ensina a construir figuras e sólidos a partir do triângulo, classifica os triângulos com relação aos ângulos e focaliza, finalmente, o triângulo retângulo. Oferece, então, uma animação que permite visualizar o Teorema de Pitágoras, com movimentos dos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo. Os movimentos mostram que a soma das áreas dos quadrados cujos lados coincidem com os catetos é igual à área do quadrado cujo lado coincide com a hipotenusa.

Outros vídeos tratam de assuntos que podem, indiretamente, proporcionar uma relação com a Matemática como, por exemplo, os vídeos da TV Escola das séries *Como funciona*, *Como se faz* e *A Ciência por trás*; ou são documentários de cultura matemática, com programas de entrevistas, como os vídeos da TV Escola da série *Conversa com o professor*; e há alguns, como os desenvolvidos pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), que consistem em aulas teóricas sobre determinados conteúdos matemáticos.

Em uma das tarefas do Módulo I da disciplina, cada aluno-professor deveria escolher um vídeo para utilizar em sala de aula, justificando a escolha. Transcrevemos o depoimento de um aluno-professor:

> "O vídeo que escolhi foi 'A ciência por trás das embalagens tetra', de autoria do Ministério da Educação – TV ESCOLA, com 4:45 de duração. Com este vídeo podemos trabalhar tanto na 6ª série quanto no 3º ano do ensino médio, formas geométricas, passando pelo tetraedro [...] até áreas e volumes, como por exemplo, a quantidade de material e o melhor formato das embalagens para se ter um melhor aproveitamento [...]. Pode-se dar sequência com os próprios livros didáticos que abordam este assunto."

Com o objetivo de facilitar o acesso ao material, para aqueles que possuem uma conexão de internet de baixa velocidade, foi criado, na página inicial, um dispositivo que permite ao usuário fazer "download" de vídeos. Ou seja, é possível transferir para o computador pessoal os arquivos que estão em um servidor distante e cujo acesso pode ser muito demorado, no momento de uso em sala de aula. Quando o navegador não pode abrir um arquivo em sua janela, ele abre a opção para que o mesmo seja salvo; configura-se assim o "download", termo traduzido para o português como "baixar".

Além disto, foi sugerido pesquisar novos vídeos em sites de busca e também procurar diretamente nas suas escolas a coleção de vídeos da TV Escola, que foi disponibilizada pelo MEC para ser utilizada pelos professores. Também foi organizado um CD-ROM, com uma coletânea dos vídeos do Banco, que foi enviado para todas as cidades-polo.

Módulo II – Vídeo produzido por um professor

O segundo módulo parte de um vídeo produzido por um professor [3], que filmou uma entrevista com uma médica ginecologista e obstetra, sobre gravidez precoce e métodos de anticoncepção. O vídeo foi utilizado como recurso de sensibilização para dar início a uma atividade de modelagem matemática, em um exemplo de articulação entre Educação para Sexualidade e Ensino de Matemática na escola.

Os objetivos do módulo foram, além de mostrar o potencial dos vídeos para estimular o interesse e a discussão sobre a vida e sobre a Matemática, envolver o aluno-professor em um processo de modelagem matemática, que explica o mecanismo da absorção e eliminação dos anticoncepcionais orais (ACO) de uso diário. Neste processo, os alunos passariam a conhecer e aplicar conceitos e ferramentas úteis para a compreensão deste e de outros fenômenos, tais como as noções de variável, de relação funcional, de função e suas representações e de modelo matemático.

A primeira tarefa consistiu em participar do Fórum de Discussão, espaço destinado a promover debates por meio de mensagens sobre determinada questão – no caso, a presença dos temas transversais, entre eles Educação para a Sexualidade, na escola.

O Fórum é um dos recursos disponíveis no Moodle para favorecer a interação (nesse caso assíncrona) entre os participantes do curso. A utilização deste recurso aproximou colegas que se identificaram, neste espaço, como

[3] Disponível em http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_II/anticoncepcionais/videoconcepcional.htm

integrantes de um mesmo grupo e, ao mesmo tempo, tornou-se lugar de encontro, em que professores, tutores e alunos-professores trocaram experiências profissionais e acadêmicas, intensificando o envolvimento de todos com o projeto. Contribuiu, também, para o aprendizado das questões específicas propostas no módulo, auxiliando na concepção e implementação de planos de ensino, relacionando Matemática com os temas transversais, num trabalho interdisciplinar e contextualizado.

> “Conheço os temas transversais a partir dos PCNs propostos pelo MEC. Quando do lançamento dos temas transversais, houve muitas discussões e sugestões de atividades nas diferentes disciplinas, porém percebo que hoje a ideia não se aplica a todas as disciplinas, especialmente na Matemática. Procuro, no decorrer das atividades e projetos propostos nas escolas, discutir alguns desses temas, como a importância de uma alimentação saudável, a importância do ferro no organismo, através de pesquisas e gráficos trabalhar a questão ambiental... “(Depoimento de um aluno/professor)

Houve discussão sobre a seguinte questão: “Sua escola promove a Educação para Sexualidade?”. Alguns depoimentos dos alunos-professores:

> “Promove. Através das aulas de Ciências, palestras com profissionais qualificados como médicos e enfermeiros(as) e o setor de orientação educacional da escola também trabalha quando se percebe a necessidade.”
> “Na escola em que atuo no momento, a parte de Educação Sexual infelizmente fica restrita ao professor de Ciências da Escola.”

Na sua maioria, os alunos-professores indicaram que conhecem os temas transversais e a importância da Educação para a Sexualidade, mas consideram muito difícil inseri-los na sala de aula de Matemática. Muitos manifestaram a importância de discutir o assunto neste Curso, e nas palavras de um deles:

> “Penso que a discussão sobre este tema no curso de Pós veio em boa hora, pois estamos passando por um período bem complicado em relação às doenças sexualmente transmissíveis e gravidez na

adolescência. Seria interessante fazer uma parceria com o professor de Ciências da escola."

A segunda tarefa do módulo consistiu na construção de um modelo matemático para o fenômeno da absorção e eliminação dos anticoncepcionais orais e foi baseada na dissertação de mestrado de Barreto (2008).

Dito de forma simplificada, um modelo matemático nada mais é do que uma representação na linguagem da Matemática de um fenômeno não matemático. E modelagem é um processo de tradução de um fenômeno do mundo físico em equações ou gráficos, obtidos a partir da análise, abstração, formulação de hipóteses, escolha adequada de variáveis e busca das relações entre elas. Para que um modelo seja eficiente, ele deve permitir fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender o fenômeno a ser modelado.

O ponto de partida da modelagem foi o vídeo com a entrevista, em que consta um gráfico elaborado na área médica (figura 4). O trabalho de modelagem consistia em compreeender o gráfico e depois transcrevê-lo para linguagem convencional da Matemática.

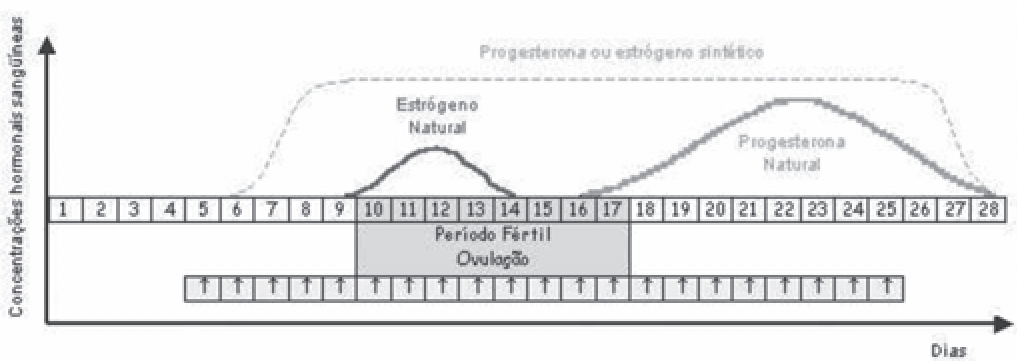


Figura 4 – Gráfico da área médica. A linha contínua representa a evolução, durante um mês, da concentração hormonal da mulher que não faz uso de anticoncepcional. A linha pontilhada representa a evolução da concentração hormonal da mulher nos casos em que se faz uso de anticoncepcional oral (ACO). As setas indicam a ingestão diária de ACO, que inicia no quinto dia do ciclo e tem duração de 21 dias (BARRETO, 2008).

Para melhor orientar o aluno-professor nas diferentes etapas do processo de modelagem, foi elaborada uma "orientação passo a passo", ou seja, uma sequencia de textos e videos , criada com o objetivo de conduzir o aluno-professor ao longo do processo de modelagem. O Quadro 1 apresenta essa sequência de orientações [4].

Quadro 1 – "Orientação passo a passo" para o processo de modelagem matemática

Passo 1
Escolha do anticoncepcional, elaboração do problema, elaboração de perguntas a serem respondidas ao final da modelagem.

Passo 2
Identificação das variáveis envolvidas no fenômeno da absorção e eliminação do ACO.

Passo 3
Construção de uma tabela que resultará em um modelo algébrico discreto, para estabelecer relações entre as variáveis, no caso da ingestão de um único comprimido.

Passo 4
Construção de um gráfico de pontos que representa a relação entre as variáveis envolvidas. Vídeo explicativo para uso do Geogebra

Passo 5
Passagem do modelo discreto para o modelo contínuo; elaboração dos modelos gráfico e algébrico para o caso de ingestão de um único comprimido. Vídeo explicativo para uso do Geogebra

Passo 6
Construção de um gráfico para representar o fenômeno, no caso da ingestão de doses diárias de ACO, durante 21 dias.

Nesse esquema, cada etapa da modelagem foi detalhada: escolha do anticoncepcional, análise da bula com coleta de dados, colocação de

[4] A orientação completa está disponível no site da disciplina (Módulo II): http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/.

problemas sobre absorção e eliminação de um único comprimido ou de um comprimido ingerido diariamente, durante 21 dias; identificação, escolha e representação de variáveis presentes no fenômeno (no caso, foram escolhidas quantidade da droga *a* no organismo e tempo *t*, em dias, a partir do início do processo de ingestão, t=0), verificando quando são variáveis contínuas e quando são discretas; formulação de hipóteses a respeito do fenômeno, para facilitar a tradução matemática, lembrando que o modelo é sempre uma aproximação da realidade; resolução dos problemas inicialmente colocados, com construção de tabela relacionando as variáveis, para chegar a equações e/ou gráficos, traçados com o software GeoGebra [5].

Para desenvolver o processo, foram elaboradas hipóteses:

1) Quanto à eliminação da quantidade ***a*** do anticoncepcional pelo organismo, que ocorre em função do tempo, $\boldsymbol{t > 0}$, sua taxa de variação (no caso, a taxa de eliminação), $\frac{da}{dt}$, é proporcional à quantidade existente, no instante *t*, na corrente sanguínea. Isso quer dizer, em termos de matemática, que a função que expressa o decaimento da quantidade de droga no sangue, com relação ao tempo, é solução da equação diferencial $\frac{da}{dt} = k.a$ (que expressa a relação de proporcionalidade dessa hipótese). Esta solução é uma função exponencial, real de variável real, que pode ser expressa na forma $a(t)=a_0 .\ e^{kt}$, em que a_0 é a quantidade inicial de droga, presente no momento da ingestão do primeiro comprimido, e *k* é a constante de proporcionalidade própria do medicamento. No decorrer da modelagem, a obtenção desta função exponencial se dá com ferramentas próprias da matemática básica.
2) Cada comprimido é absorvido instantaneamente pelo sangue, deste modo, pode-se dizer que y_0 é a quantidade inicial de droga, presente no momento da ingestão do primeiro comprimido.
3) O uso adequado do anticoncepcional consiste em administrar doses iguais, a cada dia, por 21 dias ininterruptos, sempre no mesmo

[5] GeoGebra é um software de matemática dinâmica que reúne geometria e álgebra. Permite construções com pontos, vetores, segmentos, retas, etc., bem como de funções e gráficos.

horário, para garantir um intervalo de 24 horas entre cada comprimido.

Também foram coletados dados sobre o anticoncepcional a ser analisado, a partir da leitura de sua bula:

1) Cada comprimido ingerido contém 120 µg de substância ativa (hormônios sintéticos correspondentes à progesterona e estrogênios naturais).
2) O produto tem meia-vida de 12 horas, isto é, a quantidade da droga presente no organismo, em qualquer momento, se reduz à metade, após um intervalo de 12 horas

Utilizando apenas a noção de meia-vida, encontra-se o modelo algébrico para a eliminação da droga contida em um único comprimido, cuja quantidade é simbolizada por $a(t)$, no decorrer do tempo t, em dias, após a ingestão de apenas um comprimido, com 120 µg. Pode-se construir uma tabela relacionando a quantidade a e o tempo t, partindo de um único comprimido $a_0 = 120$ e sabendo, com o dado da meia-vida, que a quantidade se reduz a um quarto após um dia:

Quadro 2 – Evolução quantidade de droga, presente no organismo, em função do tempo, com ingestão de um único comprimido.

t (dias)	a (µg)
0	120
1	$120.\ \frac{1}{4}$
2	$120.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} = 120.\ (\frac{1}{4})^2$
3	$120.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} = 120.\ (\frac{1}{4})^3$
t	$120.\ (\frac{1}{4})^t$

Também sabendo, por hipótese, que a função desejada é uma função real de variável real e que é uma função exponencial decrescente, pode-se estender o termo geral obtido na tabela para todos os números reais e adotar o seguinte modelo:

$$a(t) = 120\left(\frac{1}{4}\right)^{t}$$

Com as ferramentas e a linguagem da matemática, com $\frac{1}{4} = 0{,}25$, obtém-se a equação diferencial $\frac{da}{dt} = 0{,}25 \cdot a$, com $a_0 = 120$, cuja solução é $a(t) = 120 \cdot e^{(\ln 0{,}25)\cdot t}$.

Para buscar o modelo para a ingestão diária de comprimidos, é preciso analisar o fenômeno conjunto da absorção e da eliminação. Decorrido um dia, a quantidade de droga presente no organismo diminui, reduzindo-se a um quarto do valor inicial naquele dia (já que a meia-vida é igual a 12 horas); no entanto, quando, ao fim de um dia, é ingerido outro comprimido, a quantidade volta a aumentar. Se a ingestão do anticoncepcional é diária, ocorre uma oscilação da quantidade da droga presente no organismo: aumenta na ingestão, diminui durante o dia, e assim por diante. Pode-se perguntar: ao fim de um número indeterminado e muito grande de caixas de comprimidos, regularmente ingeridos, dia a dia (durante anos), a quantidade de droga presente no organismo crescerá sem limite, podendo tornar-se muito alta, talvez causando sequelas imprevisíveis? Isto não ocorre. O interessante é que a peculiaridade do comportamento deste fenômeno consiste na existência de um limite superior para a quantidade de droga presente no organismo, que não é ultrapassado, seja qual for a quantidade de comprimidos ingeridos, dia a dia, durante anos, por uma mulher. Esse limite superior, calculado para um certo anticoncepcional, foi de 53,33 μg e é visível quando se constrói a tabela para os valores da quantidade de droga, presente no sangue, dia a dia, no gráfico e no modelo algébrico. Existe também um limite inferior, 13,33 μg, indicando que, no uso diário, por longos períodos, a quantidade de droga nunca se aproxima de zero.

Neste módulo da disciplina, foi desenvolvido apenas o modelo gráfico (o modelo algébrico foi desenvolvido em uma disciplina subsequente, denominada "Funções e Modelos Matemáticos") para a absorção e eliminação da droga (figura 5), $a(t)$, no decorrer do tempo t, quando ocorre ingestão de um comprimido diariamente, com 120 μg. O gráfico foi construído a partir de uma tabela com valores máximos e mínimos, obtidos dia a dia e com auxílio do modelo exponencial decrescente, obtido para descrever o processo de eliminação diário. Os detalhes do modelo algébrico estão em Barreto (2008).

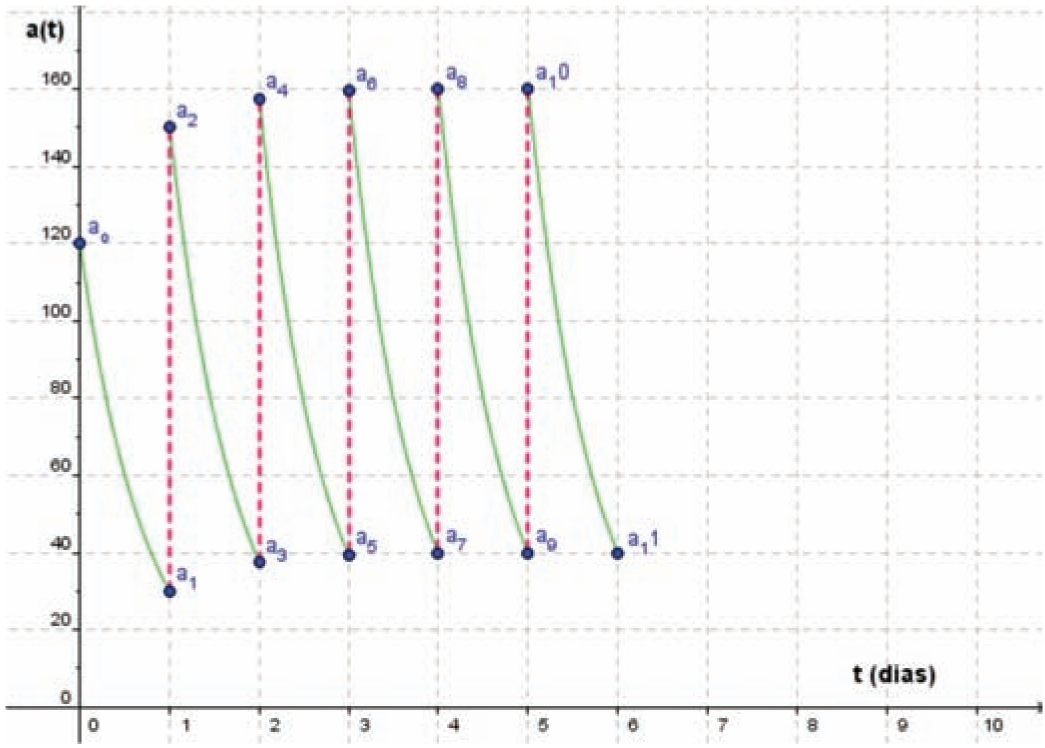


Figura 5 – Gráfico que representa a variação da quantidade de anticoncepcional oral de uso diário, no organismo, quando a primeira dose é de 120 μg (BARRETO, 2008)

Com o modelo gráfico e algébrico, é possível determinar a quantidade do anticoncepcional no corpo, depois de alguns dias, se os comprimidos forem ingeridos diariamente.

O gráfico da figura 5, em linguagem matemática, permite interpretar o gráfico da figura 4. Na construção daquele gráfico, as variáveis escolhidas foram concentração da droga no organismo e tempo em dias. A linha pontilhada representa a evolução dos valores da concentração da droga no organismo, dia a dia, logo após a ingestão, e ignora o decaimento que ocorre durante o dia. Também considera que o primeiro comprimido é ingerido no primeiro dia, mostrando um pequeno intervalo com o número 1, diferentemente do gráfico matemático representado na figura 5, onde se trabalha com a variável contínua *t*, em dias, sendo que o primeiro dia inicia em t=0 e é concluído quando t=1. O gráfico também traduz a realidade da absorção do primeiro comprimido: diferentemente da hipótese que deu início à modelagem matemática, a absorção inicial é lenta e não instantânea. No entanto, existem boas aproximações entre o gráfico matemático e o gráfico construído com informações e linguagem da área médica. Fica evidente a existência de um limite superior para a concentração, atingido por volta do oitavo dia, e estável durante todo o período de ingestão dos comprimidos de anticoncepcional. Alcançar e manter este valor máximo significa obter segurança contraceptiva. Também, ao final de 21 dias, quando ocorre a ingestão do último comprimido, pode-se perceber a curva de eliminação da droga, numa forma de decaimento, que pode ser modelado por uma função exponencial.

Um modelo matemático é uma boa aproximação para um fenômeno real, e tem grande potencial educativo, pois, diferentemente das "fórmulas" ou gráficos desconectados da realidade, permite desenvolver habilidades matemáticas importantes, como conjecturas, inferências, estimativas e previsões.

Neste caso, a modelagem tem efeito educativo, pois esclarece os alunos quanto à importância da ingestão de forma regular do comprimido anticoncepcional.

Módulo III – Vídeo da TV Escola

Este módulo sugere uma forma de utilização dos vídeos da TV Escola como sensibilização. Entre tantas opções, foi escolhido um vídeo que trata do número de ouro, pois esse conceito não está presente no currículo, sendo desconhecido para muitos alunos-professores, mas tem grande potencial educativo: relaciona Matemática, Arte e História; é um exemplo de número irracional, muito usado na prática; é um conceito que relaciona aritmética, conjuntos numéricos e geometria.

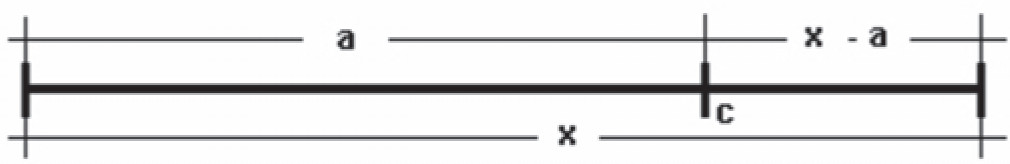
Os objetivos foram definir e construir o número de ouro $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a partir do conceito de razão entre segmentos, e o retângulo de ouro, nisso fazendo uso do software GeoGebra[6].

[6] http://www.geogebra.org/cms/pt_BR

A primeira tarefa consistiu em aassistir ao video sobre o assunto, disponível no site da disciplina; a segunda tarefa solicitou o estudo de um texto com conceitos matemáticos; a terceira propôs construções geométricas, no software Geogebra.

Como este assunto está ausente da escola, cabe colocar aqui detalhes da definição e da construção do retângulo de ouro, como constam no site.

Para compreender como é determinado o número de ouro, vamos considerar um segmento de reta AB de comprimento *x*. Dizemos que um ponto C divide este segmento em média e extrema razão (figura 6) se a razão entre a medida *x* do segmento e a medida *a* de sua parte maior, determinada por C, é igual à razão entre a medida *a* e a medida *(x-a)* da sua parte menor, determinada por C.



Ou seja, tem-se a igualdade entre razões:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}$$

Na resolução desta equação de segundo grau, obtemos

$$\frac{x}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ou seja, a razão de proporcionalidade entre as medidas é um número irracional, com representação decimal infinita e não periódica. Este é o número de ouro e ele tem como valor aproximado 1,61803398.

Define-se o retângulo áureo como sendo o retângulo cuja razão entre as medidas dos lados é o número de ouro.

Para o entendimento da construção do retângulo de ouro no Geogebra, foi elaborado um objeto de aprendizagem, consistindo de texto e animação. Na animação tem-se uma barra de navegação que permite o usuário controlar o rítmo de apresentação dos passos da construção do retângulo.

Assim é apresentado o texto da construção , passo a passo, acompanhado da animação que está ilustrada na figura 7:

Passo 1) Construa um quadrado qualquer e nomeie ABCD. Este quadrado tem lado de medida a .

Passo 2) Em seguida, marque o ponto médio M do segmento AB.

Passo 3) Trace uma reta perpendicular ao segmento AB passando por M.

Passo 4) Escolha um dos retângulos obtidos, digamos, aquele com base AM e trace a diagonal MD.

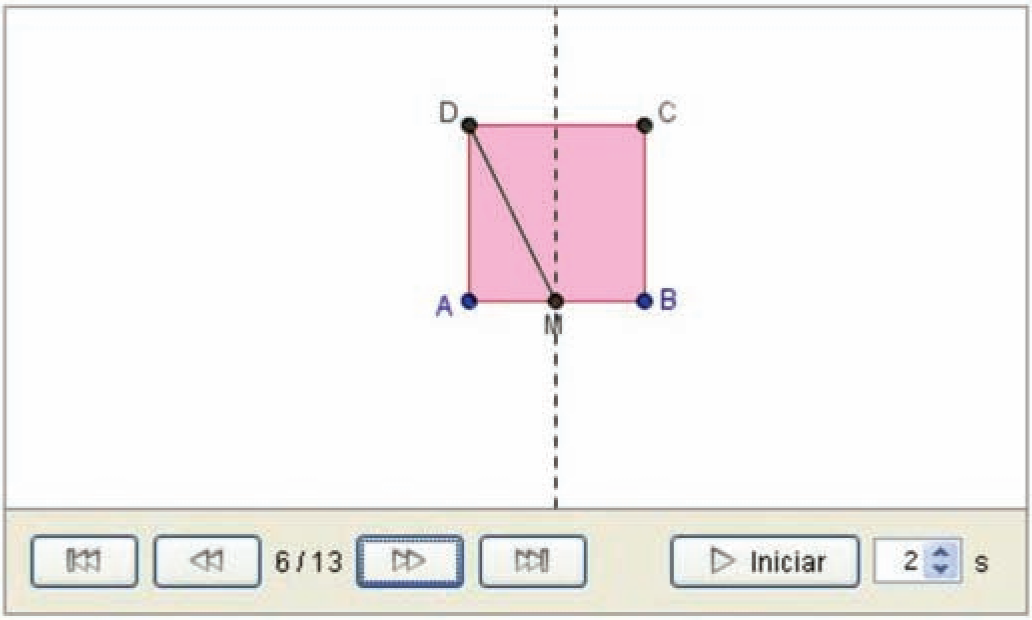


Figura 7 – Os quatro primeiros passos da construção

E a construção prossegue, com texto e animação, conforme ilustra a figura 8:

Passo 5) Construa uma semirreta com origem M e passando por A.

Passo 6) Construa uma circunferência com centro em M e raio MD e nomeie E o ponto de intersecção da circunferência com a semirreta.

Passo 7) É neste ponto da construção que chegamos ao retângulo áureo, com o seguinte procedimento: construa um retângulo, utilizando os pontos C, B e E como vértices.

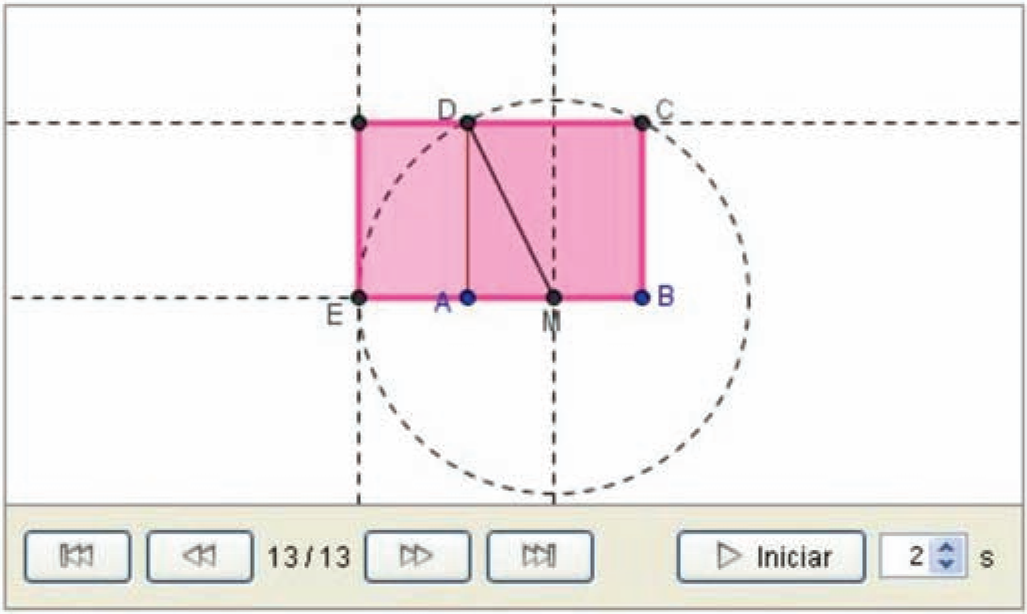


Figura 8 – Um retângulo de ouro

Os lados desse retângulo têm medidas a e $a + b$, sendo a a medida do lado do quadrado ABCD e b a medida do segmento AE, conforme a construção apresentada na Figura 8.

Vamos mostrar que este é um retângulo de ouro. Conforme a definição apresentada anteriormente, isso significa mostrar que a razão entre as medidas dos seus lados é o número de ouro. Se denominarmos r o raio MD da circunferência que está na construção do retângulo, obtemos: $b = r - a/2$ e, portanto, $a + b = a + r - a/2 = r + a/2$.

Portanto, as medidas do retângulo são: $r + a/2$ e a.

Para calcular a razão entre essas medidas, é preciso que ambas sejam dadas em função de a. Para obter r em função de a, basta observar que o triângulo DAM é retângulo com ângulo reto em A, como mostra a figura 9.

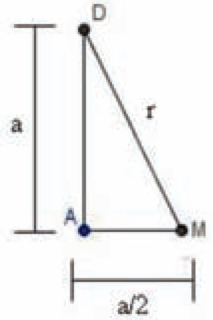


Figura 9 – Triângulo retângulo DAM

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo, obtém-se r em função de a:

$$r = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

E assim:

$$\frac{a}{2} + r = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$$

Finalmente, calculamos a razão entre os dois lados e ela nos mostra que o retângulo construído da figura 8 é um retângulo de ouro:

$$\frac{\frac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Com as atividades propostas neste módulo, foi possível apresentar aos alunos-professores os vídeos produzidos pela TV Escola e mostrar uma possível forma de utilização dos mesmos, como forma de sensibilizar e motivar o estudo de um novo conteúdo de Matemática. Percebeu-se uma boa receptividade por parte dos alunos-professores, pois muitos deles inspiraram-se nesta proposta para elaborar suas práticas de ensino. Além disso, o módulo apresentou o estudo de um conteúdo não usual em sala de aula – o número de ouro – com suas curiosidades e aplicações em outras áreas de conhecimento, bem como construções com geometria dinâmica.

Módulo IV

Nem sempre é possível encontrar vídeos de qualidade que tratem especificamente de conteúdos de Matemática; entretanto, existem muitas opções, em outras áreas, como Artes, Ciências, Geografia, ou até mesmo tratando de assuntos gerais, do cotidiano, que podem ser utilizadas em atividades interdisciplinares vinculadas com a Matemática. Neste módulo, o objetivo foi mostrar a potencialidade de sensibilização de vídeos que tratam de Arte Moderna. A ideia foi dar oportunidade aos alunos de conhecerem trabalhos de artitstas famosos, que utilizam formas geométricas em suas criações, para discutirem critérios de análise de obras de arte e para criarem suas próprias obras, usando o software GrafEq [7], que permite a construção de curvas e regiões no plano cartesiano a partir de equações e inequações.

Pensando em dificuldades no uso de um software desconhecido, foram criados recursos de apoio que incluem: apresentações das telas, os primeiros passos para o uso do GrafEq e instruções para construir círculos, retas e quadriláteros. São importantes, no trabalho de criação de figuras com este software, as noções de curvas e regiões do plano. Inequações geram regiões planas e equações geram curvas, ou linhas, no plano. A figura 10 mostra a construção de círculos (regiões do plano) a partir de inequações. O círculo que limita estas regiões é obtido pelas correspondentes equações.

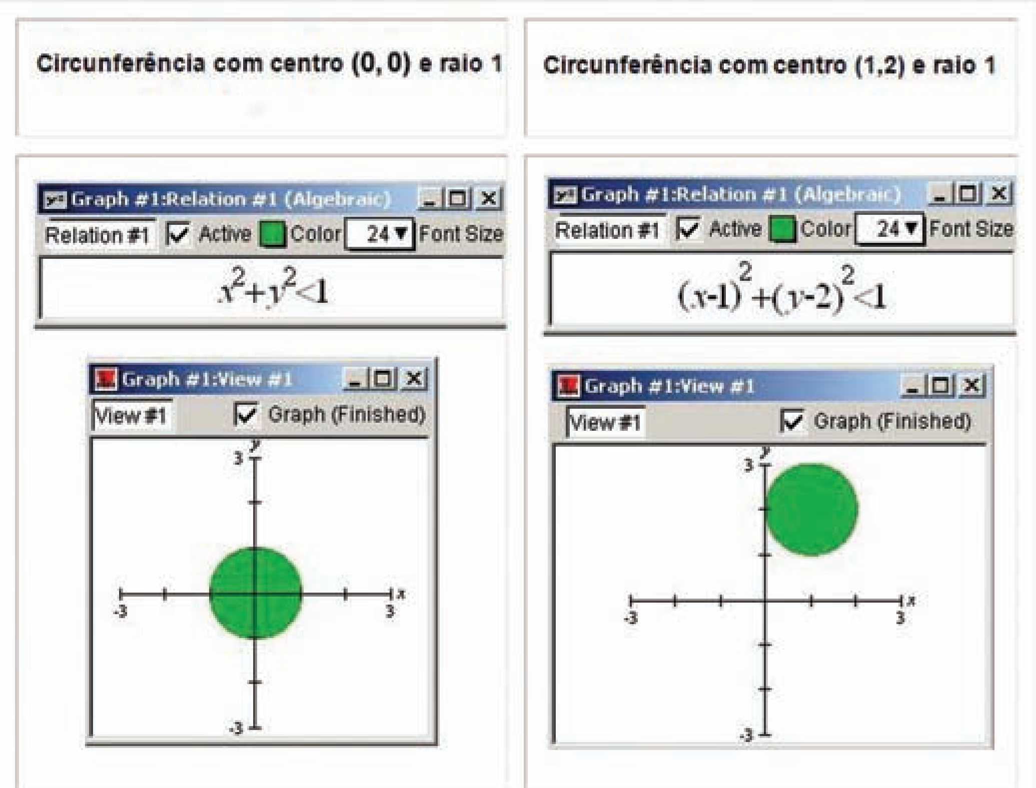


Figura 10 – Instruções para a construção de circunferências com o GrafEq

[7] http://www.peda.com/grafeq/

Também foi disponibilizado para os alunos-professores um “ passo a passo” na forma de texto com figuras[8] , detalhado a seguir, mostrando o desenho de uma paisagem construída com o GrafEq (figura 11). Na construção final não aparece o sistema de eixos cartesianos, localizado no centro da composição e no qual todas as equações e inequações utilizadas para criar este desenho foram expressas.

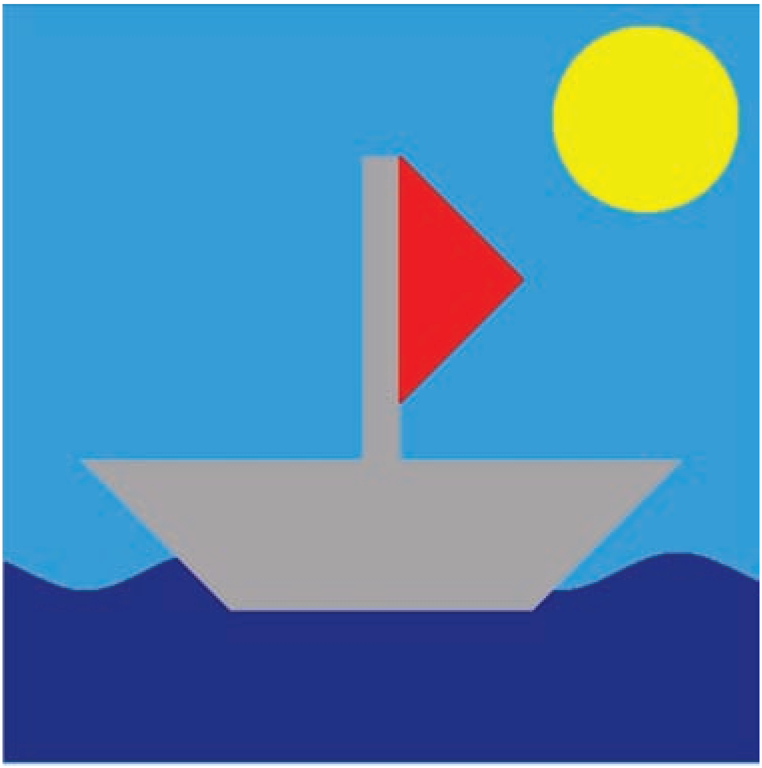


Figura 11 – Paisagem construída com o GrafEq

Para desenhar o “mar” da paisagem, pode-se construir uma inequação, partindo da função $y = sen(x)$. Para manter as proporções da paisagem, é preciso, primeiramente, diminuir a amplitude da onda (a altura das ondas do mar). Para isso, faz-se uma contração vertical no gráfico da função seno, multiplicando-a por $1/2$ e criando a função $y = (1/2)\ sen(x)$. Por outro lado, o mar parece estar bem abaixo do eixo das abscissas (reta horizontal, passando pelo centro da tela); portanto, sobre o segundo gráfico, é preciso aplicar um movimento para deslocá-lo verticalmente para baixo. Para isso,

[8] No site da disciplina, em http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/ no Módulo IV, tem-se também um vídeo que explica a construção desta paisagem.

cria-se a função $y = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot sen(x) - 5$ (deslocamento do gráfico, cinco unidades para baixo). O desenho do mar corresponde a uma região do plano obtida pela inequação da figura 12.

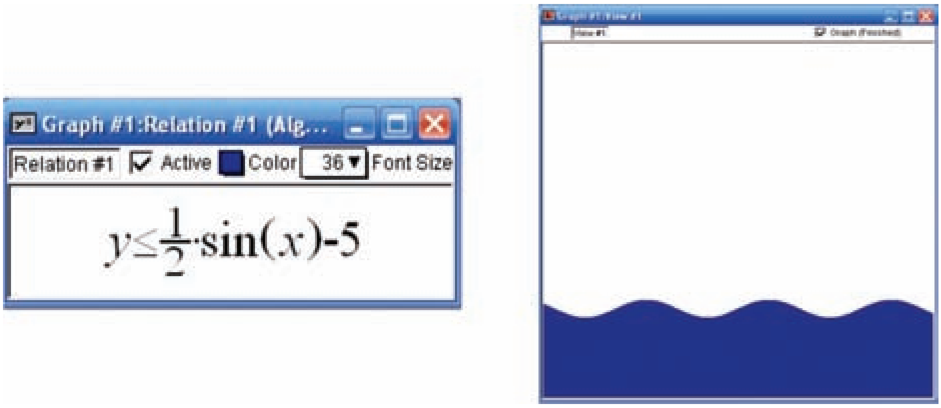


Figura 12 – Inequação que gera o mar e região correspondente

Para desenhar o “barco”, é preciso linhas retas. Inicialmente, limita-se a região do plano que será ocupada pelo barco por duas retas horizontais: $y = -2$ e $y = -6$. A seguir, limita-se a região com duas retas inclinadas, que correspondem às laterais do barco: $y = x - 10$ (lateral esquerda) e $y = x + 10$ (lateral direita). A figura 13 mostra as inequações que geram a região plana correspondente ao barco.

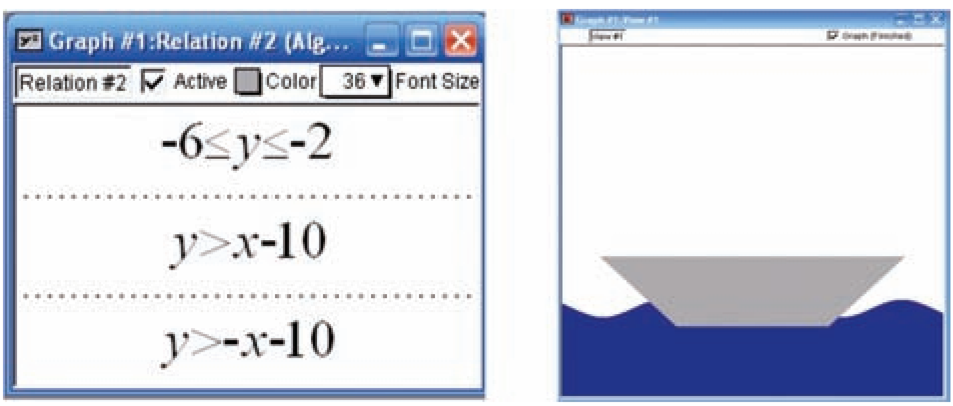


Figura 13 – Inequações que geram o barco e região correspondente

Para desenhar o “mastro” do barco, bastam inequações que limitem uma pequena região do plano, com retas verticais e horizontais, como mostra a figura 14.

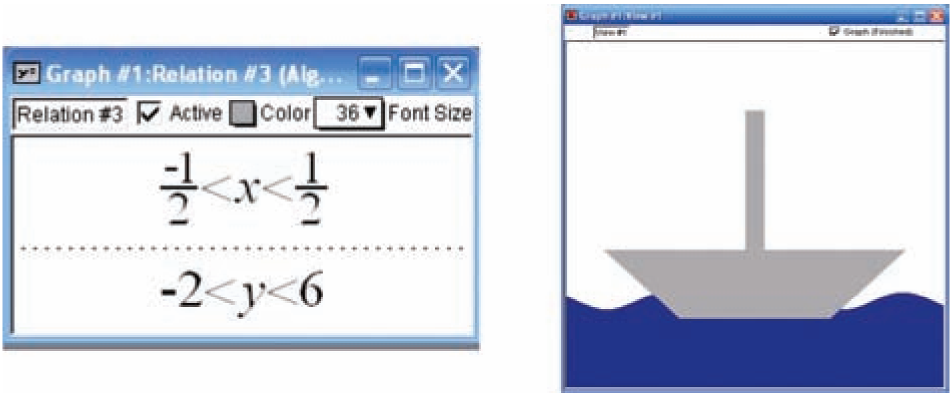


Figura 14 – Inequações que geram o mastro e região correspondente

Para desenhar a “bandeira triangular”, são necessárias três retas, correspondentes aos três lados da bandeira, e as três inequações que determinam a região do plano limitada por essas retas, como na figura 15.

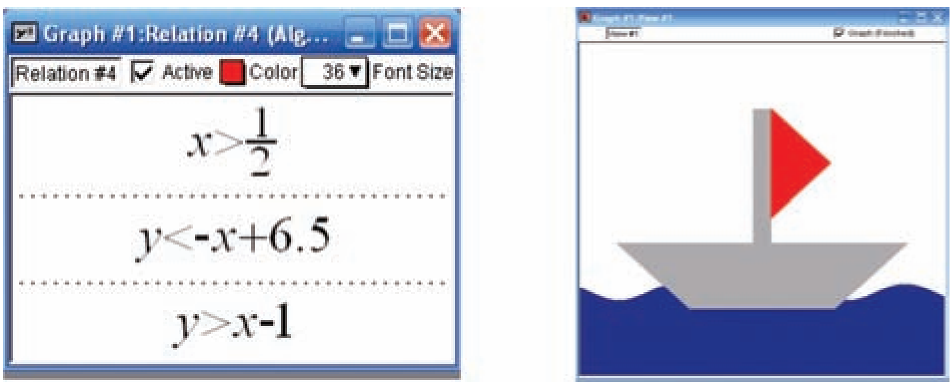


Figura 15 – Inequações que geram a bandeira e região correspondente

O “sol” é um círculo que, para se manter as proporções da paisagem, foi construído com raio medindo $\sqrt{6}$ e centro no ponto de coordenadas $(7,7)$. A figura 16 mostra a inequação que gera o sol.

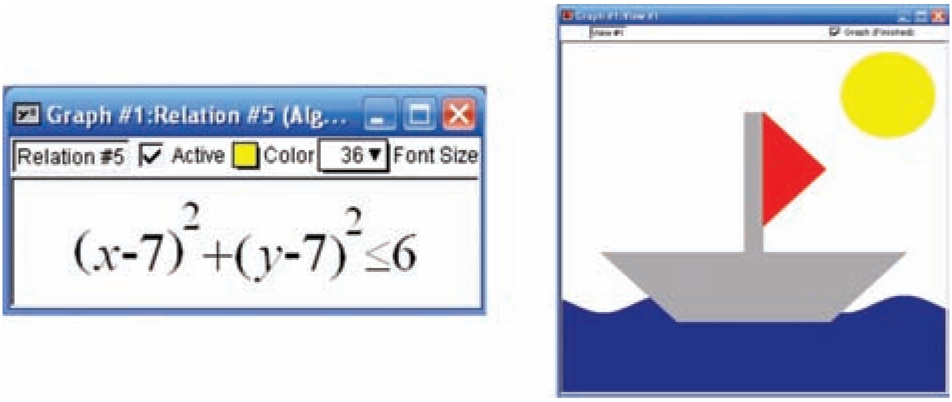


Figura 16 – Inequação que gera o sol e região correspondente

Nas construções com o GrafEq são necessários os conceitos de função, equação, inequação e suas representações gráficas, e ferramentas para transformar gráficos, movimentando-os ou mudando sua forma, para alcançar os resultados desejados.

Dada uma função qualquer $y = f(x)$ e construído o seu gráfico, é possível transformá-lo em outros, aplicando algumas operações matemáticas elementares sobre a lei de formação: quando a função é multiplicada por uma constante a, obtendo-se $y = af(x)$, ocorre uma dilatação (se $a > 1$) ou contração (se $0 < a < 1$) vertical do gráfico; quando é adicionada uma constante b à variável independente x, obtendo-se $y = f(x + b)$, ocorre um deslocamento horizontal para a direita (se $b < 0$) ou para a esquerda (se $b > 0$); quando é adicionada uma constante c, obtendo $y = f(x) + c$, ocorre um deslocamento vertical, no sentido positivo do eixo das ordenadas, isto é, para cima (se $c > 0$) ou no sentido negativo do eixo, isto é, para baixo (se $c < 0$).

Um objeto de aprendizagem com animação foi especialmente produzido para esclarecer essa ideia de movimentos do gráfico que são decorrentes das manipulações algébricas na expressão da função inicial. A figura 17 é um exemplo do que pode ser observado no objeto.

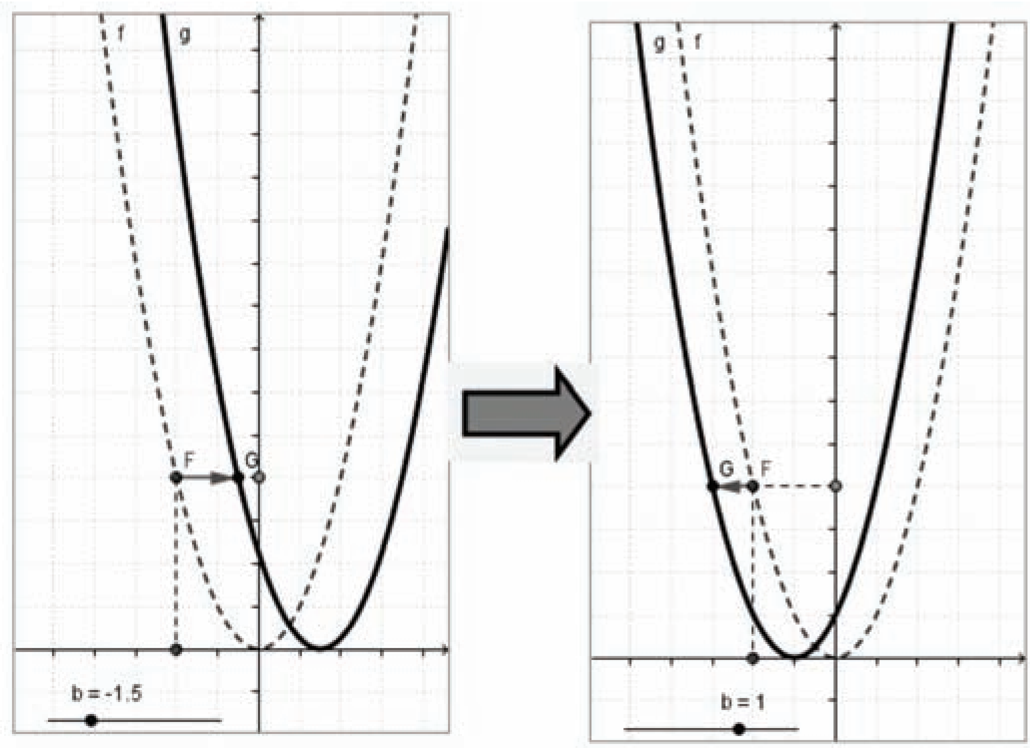


Figura 17 – Partindo da função $y{=}x^2$ e de seu gráfico e adicionando b = -1,5 à variável independente, obtém-se o gráfico da função , que corresponde a um deslocamento horizontal do primeiro, para a direita; adicionando $b{=}1$, obtém-se o gráfico da função $y = (x + 1)^2$, que corresponde a um deslocamento horizontal para a esquerda.

A primeira tarefa do Módulo IV consistiu em selecionar uma obra de arte presente em um dos vídeos sugeridos e reproduzi-la, utilizando as ferramentas matemáticas do software GrafEq. Essa escolha deveria contemplar uma tela rica em objetos matemáticos (retas, quadriláteros, circunferência, funções quadráticas, exponenciais, trigonométricas, etc.). A figura 18 mostra uma obra de Kandinsky e uma réplica construída com o ferramental matemático do programa GraphEq, a partir de funções elementares e movimentos aplicados em seus gráficos.

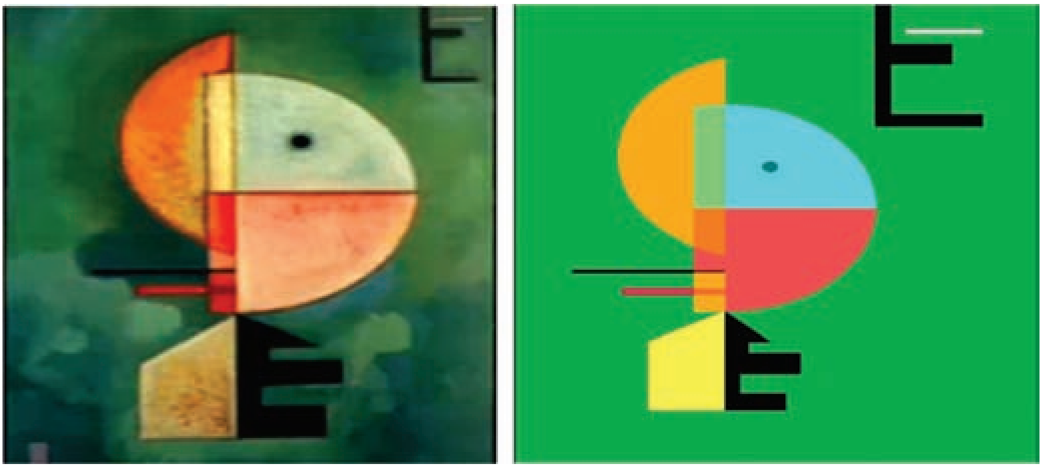


Figura 18 – Obra de Kandinsky e uma réplica

Outra tarefa do módulo propôs uma classificação dos diferentes níveis de dificuldades presentes nas obras, pensando na sua réplica: níveis básico, intermediário e avançado. Ao aluno-professor, cabia selecionar obras, nos diferentes níveis, determinar quais conteúdos matemáticos poderiam ser trabalhados em cada obra e qual a série escolar em que cada obra poderia ser trabalhada.

As figuras 19, 20, 21, a seguir, mostram os diferentes pontos de vista quanto à classificação, com obras classificadas pelos alunos-professores como sendo do nível básico, intermediário e avançado.

Figura 19 – Obra de Malevic nível básico.

Figura 20 – Obra de Kandinsky, classificado como nível intermediário

Figura 21 – Obra de Kandinsky classificada como nível avançado

O aluno-professor justifica a sua escolha (figura 19) com o seguinte comentário:

> "... escolhi a obra de Kasimir Malevich, cujo endereço é http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/, terceiro vídeo, 6ª imagem, por ter figuras geométricas: trapézio, quadrado, retângulo e círculo, bem definidas e claras."

A seguir, o comentário do aluno-professor justificando a sua classificação da obra como de nível intermediário (figura 20):

> "Escolhi a obra de Wassily Kandinsky (1866-1944), retirada do endereço http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/, cujo vídeo é o primeiro sugerido neste site e a imagem é a 6ª. Podemos trabalhar diferentes figuras geométricas como triângulos, quadrados e círculos, sobreposição de figuras, feixe de retas, retas transversais. Bom para ser explorado com alunos de 6ª e 7ª série."

O aluno-professor justifica a sua escolha da figura 21, com o seguinte comentário:

> "Artista: Wassily Kandinsky. Fonte do vídeo: site Mídias Digitais II - Módulo IV – Atividades. Esta obra é de nível avançado. Nela constam retas, circunferências, triângulos, arcos, curvas, etc. Pode ser trabalhado no 3º ano do Ensino Médio."

As atividades do módulo foram publicadas no espaço Banco de Dados (figura 22) no ambiente Moodle, o que permitiu aos alunos-professores compartilharem trabalhos e comentários, configurando-se a apresentação como um "mural" das atividades do grupo.

Figura 22 – Interface do Banco de Dados no ambiente Moodle mostrando a publicação na forma de mural

Esse mural mostrou-se um interessante espaço de discussão e interação, um aspecto importante no ensino a distância.

Considerações finais

Neste artigo, o objetivo principal foi incentivar o uso de vídeos na sala de aula de Matemática e na formação de professores, na modalidade educação a distância, detalhando três propostas. Vídeos foram utilizados como sensibilização, para dar início ao desenvolvimento de habilidades ou conteúdos, como no caso da atividade de modelagem matemática ou das atividades de construções gráficas. Mas também foram usados vídeos produzidos como recursos didáticos, pelos professores e tutores do Curso, com conteúdos e instruções para as diversas atividades.

Com esse objetivo, foi disponibilizado um Banco de Vídeos, que se constituiu como fonte de possibilidades novas para a sala de aula, como foi visto nas práticas pedagógicas, posteriormente desenvolvidas pelos alunos-professores e como relata a aluna/professora Deise Guder [9]:

[9] Todos os alunos-professores citados neste texto autorizaram que seus nomes e textos fossem mencionados.

> "[...] desenvolvi uma compreensão melhor a respeito das possibilidades de utilização das mídias digitais e recursos de tecnologia. Antes, nunca havia feito uma pesquisa mais aprofundada sobre vídeos que podiam ser aproveitados nas aulas de Matemática. Acreditava que houvesse poucas opções de vídeos para essa disciplina. Agora sei que existem, sei onde buscá-los e como baixá-los da Internet."

Foi criado um Fórum para a discussão dos temas transversais sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e, em especial, sobre a inserção da Educação para a Sexualidade, na escola e nas aulas de Matemática. Foram propostos novos conteúdos, ausentes dos programas escolares, como o Número de Ouro e as construções geométricas associadas a este conceito, criadas com o software Geogebra; também foram exploradas aplicações para equações e inequações, a partir da Arte e da reprodução de obras de pintores famosos, criadas com o software GrafEq.

A disciplina foi, porém, muito além.

Muitos conceitos matemáticos estiveram envolvidos e foram revistos, com diferentes abordagens: a modelagem matemática proporcionou a revisão das noções de variável e de relação funcional, de função e de suas representações, nas formas tabular, algébrica e gráfica; as atividades com o GrafEq proporcionaram o estudo de noções sobre transformações nos gráficos, que ocorrem com as mudanças dos parâmetros a, b, c, na família de funções $y = a\,f\,(x+b) + c$, e sobre inequações representadas como regiões do plano; o uso do Geogebra proporcionou o estudo de construções geométricas que podem ser feitas também no papel, com régua e compasso, cálculos de razões entre medidas de figuras geométricas, relações entre razão das medidas com um número irracional – o número de ouro –, afastando, assim, a ideia errônea de que uma razão entre medidas sempre gera um número racional.

Para tratar desta variedade de conceitos, houve uma intensa e eficiente produção de apoio. Foram criadas vídeo-aulas, animações e sequências de instruções, denominadas "orientações passo a passo", contribuindo significativamente não só para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos-professores, como também para o processo de formação para ensino a distância dos professores e tutores do Curso.

Por outro lado, a disciplina foi de grande importância para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Paralelamente ao seu desenrolar, ocorria um Fórum específico para orientar a construção de uma “engenharia” [10] (ARTIGUE, 1996) com uso de vídeos. A discussão foi intensa e contínua, conduzindo para artigos e para sites de diferentes universidades, para acesso a dissertações e teses de mestrado/doutorado em Educação ou Ensino de Matemática, ampliando o conhecimento nestas áreas.

Como resultado, foram produzidas muitas propostas didáticas implementadas pelos alunos-professores, desenvolvidas a partir de vídeos de sensibilização, de conteúdo ou de ilustração.

A maior parte dos vídeos utilizados foi extraída da coleção organizada pela TV Escola, específicos para Matemática, como numa experiência com alunos da sexta série, desenvolvida pela aluna-professora Grascielle Centenaro:

> “Na primeira etapa da experiência didática foi realizada uma discussão inicial sobre os conceitos de perímetro e área, utilizando como ponto de partida o vídeo “As coisas têm área, volume e forma” (TV-Escola). Os alunos assistiram ao vídeo e posteriormente discutiram em pequenos grupos a situação ali apresentada. Cada grupo escolheu um representante para explicar a proposta apresentada pelo vídeo. Mesmo sem saber ao certo o significado de todos os termos apresentados nas falas, os alunos conseguiram explicar que a proposta do vídeo era realizar a medição de um terreno que foi dividido em quatro partes iguais, sendo que estas partes não tinham o mesmo formato.”

O relato da aluna-professora Joseane Gandin Hettwer refere as possibilidades de uso para vídeos de outras áreas, em projetos interdisciplinares envolvendo Matemática. No caso, o projeto foi desenvolvido com alunos do primeiro ano do ensino médio, visando o estudo e a compreensão do fenômeno da manifestação da Aids, na fronteira do Rio Grande do Sul, município de Livramento. A Matemática participou com atividades de coleta de dados, definição de variáveis, representação gráfica e análise estatística.

---

[10] Neste Curso, ocorreu uma adaptação no conceito original de “engenharia didática”, restringindo-a a uma tarefa que envolve prática com reflexão. As práticas pedagógicas dos alunos-professores são denominadas “engenharias”.

O projeto iniciou ao assistir um vídeo sensibilizador retirado do Ministério da Saúde sobre depoimentos de pessoas com o vírus HIV. Após o filme, foi realizado um debate e foram apresentados dados veiculados pela Secretaria Municipal da Saúde (SMS) alertando sobre o problema no município de Santana do Livramento. Ao final da aula foi solicitado um relato escrito coletivo, referente ao vídeo e ao debate. No relato, cada aluno começou a escrever um comentário sobre o vídeo e depois de alguns minutos trocou a folha com o colega do seu lado direito, o qual continuou o texto, considerando o comentário do colega anterior, dando sequência textual. O aluno autor do primeiro comentário fez a conclusão do seu texto. Depois desse encontro inicial os alunos tiveram a palestra com a SMS, sobre o tema AIDS, na disciplina de Biologia.

O relato da aluna-professora Márcia Erondina Dias de Souza, que produziu uma engenharia para o ensino das operações na primeira série do nível fundamental, mostra muito bem como se deu a escolha e a utilização do vídeo introdutório, com outra origem:

> "Utilizei esse vídeo com a intenção de sensibilizar as crianças para o trabalho. Escolhi a história "O Aniversário do Arthur", que é um vídeo produzido pela Broderbond, software chamado de Livro Vivo, pois tem a configuração de um livro e os personagens têm "vida".[...] Meu objetivo nessa engenharia foi a construção (pelos alunos) do conceito de multiplicação, através de uma abordagem lúdica [...]. Os alunos se envolveram na história do Aniversário do Arthur e, depois de assistirmos ao filme, conseguiram contar a história, listando os principais personagens, inclusive fazendo associações com situações ocorridas no cotidiano."

Para finalizar, pode-se perceber, a partir de diferentes depoimentos, que existem muitos vídeos disponíveis, úteis para diferentes conteúdos, abordagens e propostas de ensino interessantes para o professor de Matemática; e que o uso de vídeos traz em si potencial para a criação de um ambiente interativo de aprendizagem, com a mobilização do interesse e da participação dos alunos, em todos os níveis da escola e em todas as faixas etárias.

Referências

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. *Didáctica das Matemáticas.* Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BARRETO, M. M. *Matemática e Educação Sexual: modelagem do fenômeno da absorção /eliminação de anticoncepcionais orais diários.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/12669>.

MORAN, J. M. O vídeo na sala de aula? *Comunicação & Educação,* São Paulo, ECA-Ed. Moderna, n. 2, p. 27-35, 1995. Disponível em <http://www.eca.usp.br/prof/moran/textos.htm>. Acesso em: 29 dez. 2010.

______ . *Desafios da televisão e do vídeo à escola.* Texto de apoio ao programa Salto para o Futuro da TV Escola no módulo TV na Escola e os Desafios de Hoje, 2002. Disponível em <http://www.eca.usp.br/prof/moran/textos.htm>. Acesso em: 29 dez. 2010.

______ . *Vídeos são instrumentos de comunicação e produção. Entrevista publicada no Portal do Professor do MEC em 6 mar. 2009, 2009a.* Disponível em <http://www.eca.usp.br/prof/moran/textos.htm>. Acesso em: 10 dez. 2010.

______ . Como utilizar as tecnologias na escola. In: MORAN, J.M (Org.). *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 4 ed. São Paulo: Papirus, 2009b. p. 101-111. Disponível em <http://www.eca.usp.br/prof/moran/textos.htm>. Acesso em: 10 dez. 2010.

NOTARE, M. R.; GARCIA, V. C.; BARRETO, M. M. *Mídias Digitais II.* Material Didático. Curso de Especialização: Matemática, Mídias Digitais e Didática para Educação Básica. Porto Alegre, UAB/IM/UFRGS, 2010. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/>.

Capítulo 5

MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA: DESAFIOS À FORMAÇÃO DE PROFESSORES

SAMUEL EDMUNDO LOPEZ BELLO
MARINA MENNA BARRETO
MELISSA MEIER
THAÍSA JACINTHO MÜLLER

A Modelagem Matemática, como tendência em Educação Matemática voltada à pesquisa e ao ensino no âmbito da formação de professores, vem sendo objeto de investigação e discussão desde os trabalhos iniciados por volta dos anos 1990. Contudo, o que parece ser novidade e desafiador é colocar os princípios de organização curricular e de ação pedagógica dessa modelagem no âmbito da formação continuada de professores na modalidade a distância.

Nesse sentido, tomamos como ponto de partida para esta discussão o desenvolvimento da disciplina "Funções e Modelos Matemáticos e Prática Pedagógica IV", oferecida entre os meses de maio a agosto de 2010, e o material didático organizado por Bello e Barreto (2010), no Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática para a Educação Básica, promovido pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS.

É tomando como referência essa experiência de ensino que queremos trazer algumas considerações sobre os alcances, as prioridades, as expectativas e problemáticas dos processos de Modelagem Matemática [1], ao se pensarem os materiais pedagógicos, os recursos midiáticos e de informática (como softwares) a serem utilizados; e, também, o conjunto de atividades a serem realizadas pelos professores-alunos e a participação pedagógica dos professores tutores a distância, em cursos de formação continuada de professores de Matemática a distância.

Na primeira parte deste texto, são discutidos os pressupostos e entendimentos do uso de modelos nos processos de Modelagem e com os quais os materiais de estudo (estruturados em seis Módulos) e as atividades de caráter pedagógico foram propostos.

A seguir, apresenta-se também uma discussão sobre o uso de softwares, em particular do GeoGebra [2], e de vídeos que fizeram parte dos materiais postos à disposição dos professores-alunos e que deviam não somente se articular às temáticas propostas em cada um dos Módulos, mas serem ferramentas auxiliares no processo de realização das atividades de ensino e na compreensão dos conteúdos matemáticos que estavam sendo estudados.

Na terceira parte deste texto, problematizam-se os encontros e desencontros com os materiais propostos, destacando-se o papel e as intervenções de professores e tutores a distância.

Finalmente, e como considerações finais, apontamos uma série de reflexões em torno da proposta da disciplina, seus resultados e sua inter-relação com a proposta maior do Curso de Especialização e a formação continuada a distância.

Modelagem Matemática: algumas reflexões

Vista como um processo que se opera desde uma situação-problema até um modelo matemático, isto é, como “a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, apud SANT´ANA, 2007, p. 149) – ou como uma atividade de aplicação da matemática em outras

---

[1] A partir daqui, sempre que for mencionado no corpo do texto o termo Modelagem, estaremos nos referindo à “Modelagem Matemática”. Essa terminologia será usada a fim de evitarmos repetições desnecessárias.

[2] Software geométrico de livre acesso, disponibilizado no site <http://www.geogebra.org>.

áreas do conhecimento ou do cotidiano – a Modelagem Matemática tem sido entendida como uma estratégia que procura relacionar o mundo real com o mundo matemático.

Segundo Barbosa (2007, p. 2), para fins educacionais, a Modelagem pode ser considerada como o ambiente de aprendizagem no qual os alunos são *convidados a indagar e/ou investigar,* por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade (grifo nosso). Deste modo, o recurso aos conceitos e métodos matemáticos depende do encaminhamento que os alunos dão para a investigação e dos campos de interesse dos alunos.

Barbosa (2001) também considera que a Modelagem pode se configurar em três diferentes níveis, como resultado de uma teorização crítica da prática corrente. Em outros termos, tratam-se de zonas de possibilidades que, segundo Barbosa, ilustram a realização da Modelagem na sala de aula. São esses:

Nível 1. “Problematização” de algum episódio “real”. A uma dada situação, e após uma breve discussão com os alunos, o professor associa determinados tipos de problemas. A partir das informações qualitativas e quantitativas apresentadas no texto da situação, o aluno desenvolve a investigação do problema proposto.

Nível 2. O professor apresenta um problema aplicado, mas os dados são coletados pelos próprios alunos durante o processo de investigação.

Nível 3. A partir de um tema gerador, os alunos coletam informações qualitativas e quantitativas, formulam e solucionam problemas.

Barbosa (idem) também destaca que, à medida que se vai avançando do nível 1 em direção ao 3, aumenta-se o “grau de abertura” e espera-se que os alunos assumam paulatinamente a condução das atividades.

Dessa forma, para Bello (2010), procedimentos como a escolha do tema, a identificação do problema, a elaboração de hipóteses, o levantamento e a análise de informações através de modelos matemáticos, a obtenção de respostas e sua aplicação ao problema inicial são aspectos essenciais que orientam todo o processo de Modelagem. Segundo Scheffer e Campagnollo (1998), o trabalho com Modelagem é uma alternativa de ensino-aprendizagem na qual a Matemática trabalhada com os alunos parte de seus próprios interesses, e o conteúdo desenvolvido tem origem em um tema a ser problematizado. A Modelagem valoriza o saber do aluno, possibilitando o aprendizado de conteúdos matemáticos interligados aos de outras ciências e o desenvolvimento da capacidade criadora, tanto do professor quanto do aluno, ao resolverem os problemas propostos. A Modelagem redefine, pois, o papel do professor desde o momento em que ele passa a ser quem deverá problematizar, conduzir e direcionar as atividades numa posição de partícipe do processo (BARBOSA, 1999, p. 71). Para o trabalho de sala de aula, Sant´Ana (2007) nos sugere abordar as questões, temáticas ou problemas da modelagem de forma experimental. Nesse sentido, os problemas formulados consistem na descrição e compreensão da situação abordada.

Assim, diferentemente da resolução de problemas, em que muitas vezes se passa de uma linguagem cotidiana a uma linguagem matemática por processos heurísticos (problemas interpretados, características levantadas, planos de resolução e respostas verificadas), na Modelagem exigem-se hipóteses e aproximações para obter múltiplas respostas, ou múltiplos procedimentos, sem que haja necessidade de escolher uma melhor resposta ou um único procedimento para se chegar a uma única resposta.

Todos esses foram os entendimentos com os quais pensou-se a organização do material didático utilizado na educação a distância e as atividades que seriam desenvolvidas. Como indicado na parte introdutória deste texto, a disciplina "Funções e Modelos Matemáticos e Prática Pedagógica IV" foi organizada em seis Módulos de ensino, em que cada um tratava de uma determinada temática e enfatizava um objetivo, uma prática pedagógica, um recurso de mídia em particular e, da mesma forma, trazia um material complementar específico.

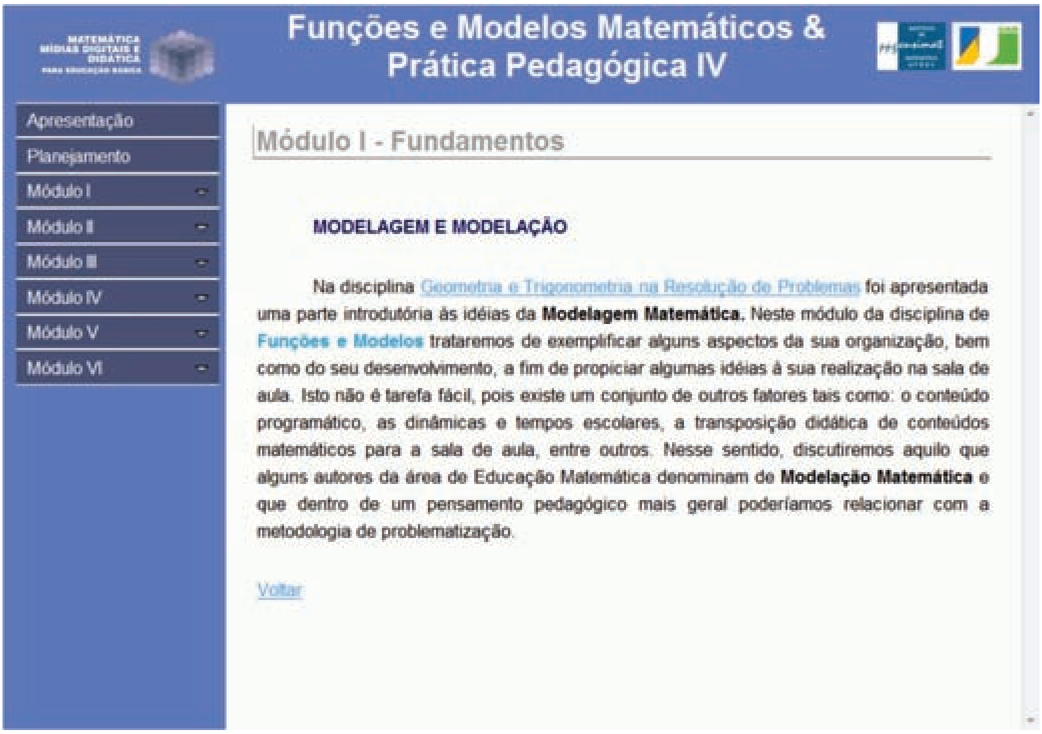


Figura 1 – Interface do site da disciplina Funções e Modelos Matemáticos & Prática Pedagógica IV. À esquerda têm-se os menus e, em destaque, os submenus referentes ao Módulo I.

Todas as questões em termos de estudos e teorizações sobre o processo de Modelagem foram organizadas para os alunos no Módulo I (Modelagem e Modelação) da disciplina (BELLO; BARRETO, 2010). Nesse mesmo Módulo, considerou-se que os processos de escolhas temáticas e problematização deveriam ser exercitados, sendo propostas aos professores-alunos atividades a esse respeito.

Contudo, esse modo de ver a Modelagem, isto é, como processo aberto, inventivo, convidativo à pesquisa – e, em grande medida, flexível diante das questões curriculares – colocava alguns desafios para se pensar a organização da disciplina, na modalidade a distância. Em princípio, pelos motivos que seguem:

1. Havia *a priori*, pelo plano de estudos da disciplina, uma definição das temáticas de estudo e de conteúdos matemáticos a serem abordados (função linear, função quadrática, função exponencial); portanto, as *diferentes situações que envolvessem a*

"realidade" deveriam ser dadas, e as indagações a serem feitas pelos alunos deviam ser necessariamente matemáticas. Essa prerrogativa colocou a experiência de ensino no âmbito Nível 1 proposto por Barbosa (2001), uma vez que a Modelagem Matemática, ao nosso ver, mobiliza possibilidades mais amplas de ensino e de aprendizagem, através de processos mais abertos como os descritos por Barbosa (idem) no nível 3.

2. Não se tratava de um professor levando adiante as ações de problematizar, conduzir e direcionar as atividades numa posição de partícipe junto aos seus alunos, em pequenos grupos com temáticas distintas. Tratava-se de sete tutores a distância acompanhando sete turmas diferentes, organizadas por polos, em centros urbanos geograficamente afastados, comunicando-se durante grande parte do tempo através do ambiente virtual Moodle, devendo dar conta de auxiliar os seus alunos nas atividades propostas e em suas dificuldades quanto ao uso dos recursos tecnológicos, visando desenvolver o conteúdo a partir de um tema problematizado.

3. Trabalhar com situações de caráter empírico-experimental que não envolvessem o uso de ferramentas computacionais e, sim, outro tipo de instrumentos e processos (tais como recipientes, papel milimetrado, esboços, estimativas) implicava em pensar de que maneira os resultados e o próprio processo seriam socializados e avaliados através do recurso informático disponível.

Assim, diante das contingências do Curso em andamento, um primeiro passo para o redimensionamento de nossa proposta de Modelagem foi reconsiderar o que seria entendido por Modelo no material pedagógico da disciplina.

Desse modo, diferentemente de entender o Modelo Matemático como algo extraído da realidade, preferimos entender Modelo como uma possibilidade de nos referirmos ao real, ou melhor, uma forma, dentre outras tantas possíveis, para se ver-ler-falar esse real, entendido como uma linguagem necessária à organização e ao entendimento das situações e fenômenos. Esse entendimento da matemática como uma possível leitura da realidade nos permitiu argumentar a favor de uma apropriação inicial do referencial matemático, o qual passou a ser visto como uma linguagem operando sentidos no estudo de situações e problemas. Nessa perspectiva, os diferentes Módulos do curso pautavam-se por enunciações de problemas, definições, situações abertas, ou até mesmo objetivas, que requeriam que fosse dado o instrumental matemático necessário a seu entendimento.

Nesse sentido, no Módulo II da disciplina "Funções e Modelos Matemáticos e Prática Pedagógica IV" (BELLO; BARRETO, 2010) apresentamos uma situação em que se discutia, por exemplo, como a relação massa do fígado (em gramas) e volume do coração (em mililitros) pode ser vista e estudada através da relação matemática da forma: $y = f(x) = 0{,}95x - 585$, em que o peso do fígado x é posto em relação ao volume do coração y. Cabe ressaltar que funções do tipo linear são muito comuns na pesquisa em Biologia e, particularmente, na Medicina. Contudo, experimentalmente nos mostram, também, erros e flutuações, se comparadas com a coleta empírica de dados coletados. Mesmo assim, esses modelos são de grande valia, especialmente quando permitem que se façam estimativas ou prognósticos para orientar determinados tratamentos médicos.

Um segundo passo também foi priorizar, conforme Barbosa (2001, p. 10), o entendimento dos processos de modelagem, através da análise de modelos prontos, a fim de que se observasse, discutisse e refletisse sobre os procedimentos utilizados. Assim, foi proposta aos professores-alunos uma atividade 3, no Módulo II:

> A partir da discussão sobre Modelos como aproximações do real feita aqui no nosso site, procure na internet por outras funções e modelos obtidos a partir de dados experimentais. Estes modelos poderão ser das ciências físicas, biológicas ou humanas. Do mesmo modo que fizemos aqui na disciplina, você também deverá situar brevemente a discussão da temática que foi modelada, a expressão analítica e o respectivo gráfico que mostre que foi necessário um ajuste. (BELLO; BARRETO, 2010)

Para Bean (2001), autores mais preocupados com os conteúdos propõem modificações no processo metodológico da própria Modelagem, sendo que a escolha dos temas e os problemas são feitos especificamente para suscitar o conteúdo da disciplina específica – objeto de estudo. Essa preocupação traduz-se na derivação, a partir da Modelagem, de um método de ensino denominado *Modelação*. Assim, diferentemente da resolução de problemas comumente encontrados na matemática escolar, a modelagem ou modelação exigiria um processo no qual as características da situação em estudo vão sendo extraídas com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, sendo representadas a seguir em termos matemáticos, a fim de se constituir um modelo esperado.

Essas considerações permitiram-nos alguns desdobramentos do processo de elaboração do material, tais como:

1. que os diferentes Módulos constituíssem especificamente um objeto matemático de estudo – assim, o Módulo II tratou do tema de funções, o Módulo III do tema função linear, o Módulo IV da função quadrática e o Módulo V, do estudo da função exponencial;
2. que as diferentes etapas do processo de modelagem fossem vistas com prioridade em cada um dos Módulos. Assim, além do exercício de escolha temática e da problematização do Módulo I, o Módulo II enfatizou a coleta de dados; o Módulo III tratou da organização dos dados e os encaminhamentos para a formulação de modelos; o Módulo IV, além de retomar as etapas anteriores, avançou na interpretação e verificação de resultados; e o Módulo V retomou não apenas a análise de um modelo pronto, como o caso do problema de medicamentos (BELLO; BARRETO, 2010), mas propôs um novo problema de Modelagem. No Módulo VI, o intuito foi pensar e organizar processos de modelagem que pudessem ser levados para a sala de aula, deixando a maior abertura possível ao exercício analítico dos alunos;
3. que práticas experimentais (Módulos II e VI) fossem propostas para serem desenvolvidas pelos professores-alunos, não sendo esperado um único procedimento nem uma única resposta em sua realização.

A todo esse conjunto de atividades ainda somaram-se, no desenrolar de todos e de cada um dos Módulos, a utilização de recursos digitais como vídeos e softwares, cujo objetivo era, principalmente, auxiliar os professores na execução das atividades e no aprimoramento da sua formação em termos de uso de tecnologia na sua prática pedagógica. A seguir, serão relatadas as perspectivas e as abordagens com que alguns softwares foram usados na disciplina.

As possibilidades das mídias digitais na aprendizagem da modelagem

Entre os objetivos almejados quando se realiza qualquer processo educacional, e que não deixam de ser considerados quando se pensa e se desenvolve a educação a distância, está o aprendizado com criticidade e autonomia. Entretanto, quer os processos pedagógicos se organizem no modo presencial ou a distância, os alunos apresentam pouca familiaridade no que se refere ao estudo individualizado e à melhor maneira de fazê-lo. Foi com a intenção de diminuir essas dificuldades que foi pensado e elaborado o material didático para a disciplina de Funções e Modelos Matemáticos (BELLO; BARRETO, 2010).

O material foi construído na forma de hipertexto [3], criando um ambiente de navegação com diferentes ferramentas de interação e uso de diferentes recursos de mídia, entre softwares e vídeos, que foram utilizados ao longo da disciplina para se trabalhar os conteúdos de cada Módulo. O site era o local em que se apresentavam não somente os conteúdos matemáticos, mas também diversos tipos de materiais bibliográficos e de consulta para a realização das atividades semanais.

A disciplina foi organizada em 6 Módulos e a maneira como os conteúdos foram organizados orientou-se pelas inter-relações possíveis entre as temáticas de estudo, os conteúdos matemáticos a serem abordados e as abordagens pedagógicas pertinentes à sua exploração.

O Módulo I tratou dos fundamentos pedagógicos, possibilidades curriculares, críticas e desafios gerais sobre a modelagem matemática e os principais recursos de mídia utilizados foram a própria internet, como recurso de pesquisa, e os programas *Power Point* e *Word*, para a construção de esquemas e organogramas.

[3] O endereço do site da disciplina é <http://www6ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/>.

No Módulo II enfatizou-se a relação entre as funções e as características de um modelo e utilizou-se principalmente o recurso de vídeo como ferramenta de ensino e interação com o estudante. O Módulo III deu destaque à função linear e às relações diretamente proporcionais entre variáveis, presentes em diversas situações, dando-se significado à taxa de variação no modelo linear e em outros modelos matemáticos. Neste Módulo, o recurso de vídeo serviu para explicar conteúdo e introduzir um novo recurso: como utilizar o *Excel* na construção de gráficos a partir de tabelas. O Módulo IV tratou da função quadrática, a partir da leitura e interpretação do uso desta função e de seus parâmetros em situações cotidianas e das ciências humanas e da natureza. Neste Módulo, dois recursos de mídia foram utilizados: vídeo, como uma ferramenta de ensino e interação com os alunos, e objetos de aprendizagem na forma de *applets* [4], com recurso dinâmico de visualização. O Módulo V destacou o modelo exponencial e seu uso na leitura, análise e interpretação de situações do cotidiano e das ciências em geral, utilizando animações para o estudo do movimento de gráficos. E, por fim, no Módulo VI foi feita uma revisão da temática Modelagem Matemática em situações de estudo com funções em que os recursos utilizados foram animações e vídeos explicativos.

Em todos os Módulos foi mantida a mesma estrutura, disponibilizando-se, em cada um deles, o recurso de mídia a ser trabalhado naquele momento. No entanto, foram nos Módulos II, V e VI que as mídias se fizeram mais presentes.

No Módulo II, por exemplo, foi proposto o estudo da representação gráfica das funções e de comportamentos como continuidades, pontos de inflexão, crescimentos e decrescimentos. Em uma das atividades do Módulo foi solicitado que os alunos construíssem alguns gráficos, utilizando para isso o software GeoGebra. Houve a preocupação de criar vídeos explicativos sobre como utilizar certas as ferramentas desse software. Pode-se dizer, então, que neste Módulo o recurso de vídeo (criado e utilizado pela equipe de produção de material) serviu como uma ferramenta de ensino e de apoio ao aluno no uso de outro recurso digital: o próprio software GeoGebra.

[4] Foram construídos e transformados em animação Java no GeoGebra.

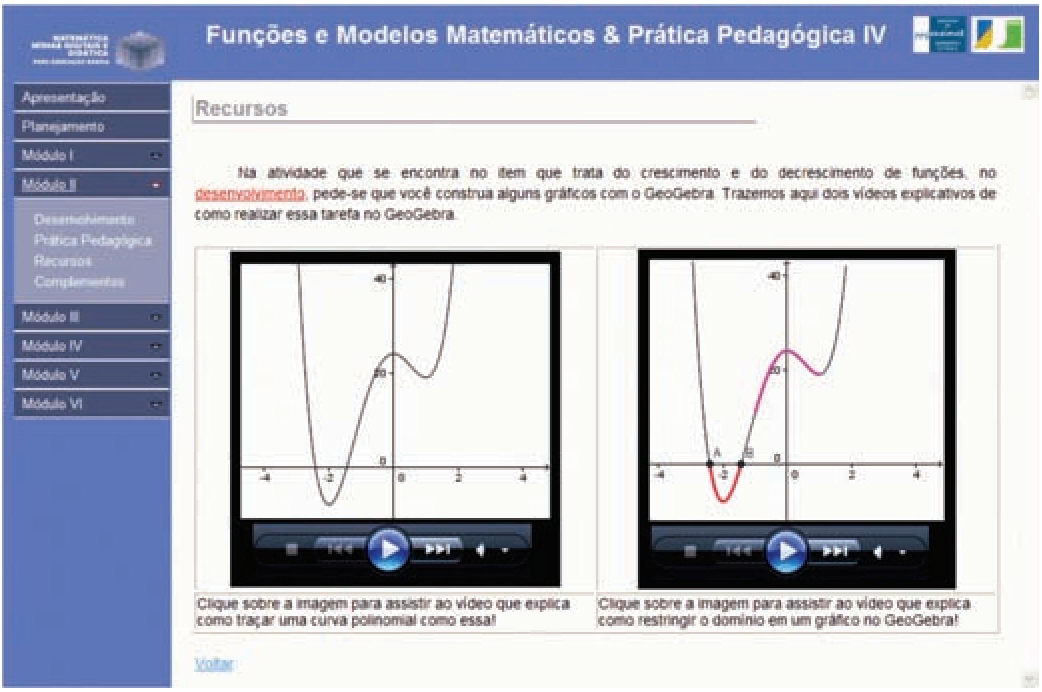


Figura 2 – Menu Recursos do Módulo II com os vídeos que explicam como traçar uma curva polinomial e como restringir o domínio em um gráfico no GeoGebra.

No Módulo IV, que tratou do estudo da função quadrática em situações cotidianas, foi proposto um problema de maximização. Para auxiliar na compreensão do problema, foi criado um objeto de aprendizagem interativo (figura 3) que representa a situação de cercar uma região retangular, com um comprimento fixo de tela a ser utilizado[5]. O objeto de aprendizagem se constitui em um *applet*, composto por um retângulo que representa a região a ser cercada e que pode ter suas dimensões modificadas ao se movimentar o ponto externo denominado "Mova", mas mantendo o perímetro constante, correspondente ao comprimento fixo de tela utilizada para a construção da cerca. À medida que se modificam as dimensões do retângulo, sua área também se modifica, e é essa a relação que o professor-aluno é solicitado a observar e a expressar matematicamente.

---

[5] Para fazer uma horta retangular aproveitando uma parte do muro da chácara utilizam-se 120 metros de tela. Movimente o ponto Mova e observe o que acontece com os lados do retângulo que representam a cerca. Com o botão direito do mouse habilite o rastro no ponto K. Observe a curva traçada! a) Qual é a função que melhor representa a área da horta em função do lado? b) Quais devem ser as dimensões dos lados da horta para que a área cercada seja máxima?

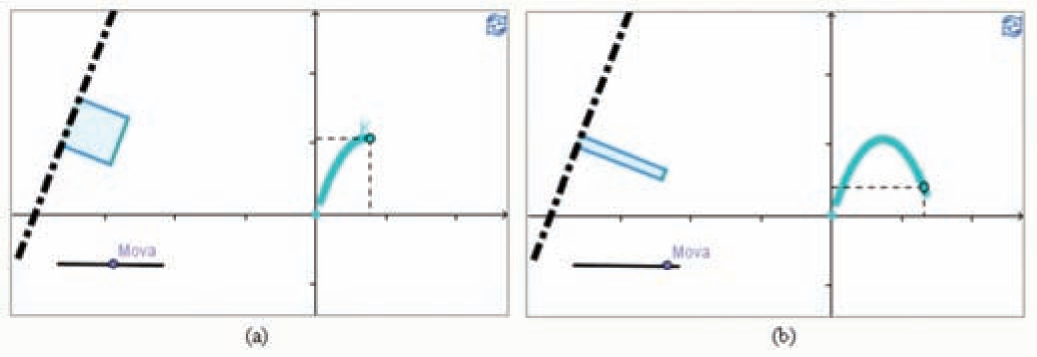


Figura 3 – Objeto de aprendizagem construído no software GeoGebra, em dois momentos de manipulação do ponto "Mova". Ao se movimentar o ponto "Mova", modificam-se as dimensões do retângulo que representa a cerca do problema. Ao mesmo tempo, o ponto K traça a curva que representa a área do retângulo como função da medida de um de seus lados.

É interessante destacar que o dinamismo do gráfico associado ao movimento da figura que representa o problema permite que o aluno tenha um melhor entendimento da situação proposta, podendo testar as suas hipóteses de forma mais concreta. É interessante também observar que o objeto de aprendizagem em si não traz resposta direta para o aluno, pois o objeto ilustra a situação, mas não responde às questões propostas.

No submenu "Prática Pedagógica" do Módulo IV foi proposto um problema [6] com o objetivo de se refletir sobre a importância de coletar e organizar dados na modelagem matemática. A ideia da atividade era a de se esboçar caminhos que envolvessem a elaboração de tabelas, relações entre variáveis e elaboração de gráficos. Novamente foi criado um objeto de aprendizagem interativo que modela o problema proposto e que auxilia tanto na compreensão do problema como na formulação de hipóteses. O objeto

[6] Para construir uma caixa a partir de uma chapa de papelão de 60 cm por 40 cm, deve-se cortar, em cada um dos quatro cantos, um quadrado de x cm de lado. a) Se o corte for grande, como será a forma da caixa resultante? O seu volume será grande ou pequeno?; b) Se o corte for pequeno, como será a forma da caixa resultante? O seu volume será grande ou pequeno?; c) Nosso problema consiste em determinar o valor de x a ser cortado, para obtermos uma caixa de volume máximo. Elabore uma tabela que contenha o valor do volume para vários valores de x. Para isso observe quais são os valores mínimo e máximo que x pode assumir!; d) A partir das informações obtidas de sua tabela, qual deve ser a medida do corte para que o volume seja máximo?; e) Escreva uma sentença matemática que expresse o volume da caixa em função do tamanho x do corte efetuado.

de aprendizagem (figura 4) constitui-se da representação, lado a lado, da chapa de papelão com os respectivos cortes nas pontas e da caixa construída a partir destes cortes. O objeto é interativo, já que o usuário pode movimentar um ponto externo ("Corte") e modificar as dimensões dos cortes (representados por pequenos quadrados pontilhados nas extremidades do retângulo). À medida que se modificam as dimensões desses quadrados, as dimensões da caixa também se modificam, dando uma ideia bem real da situação-problema colocada.

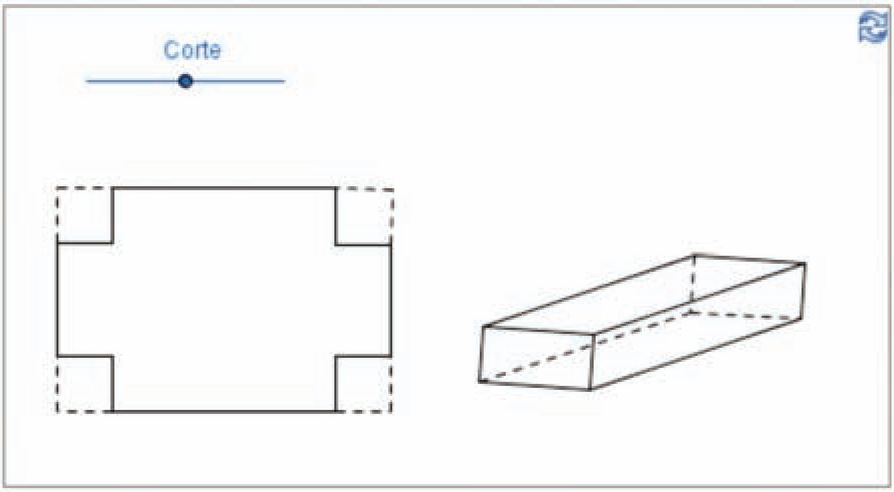


Figura 4 – Objeto de aprendizagem representando uma chapa de papelão e a respectiva caixa construída com a chapa. Ao se movimentar o **ponto "Corte",** as dimensões do corte na chapa (representada pelo retângulo à esquerda) e as dimensões da caixa (à direita) se modificam.

É interessante observar que o objeto de aprendizagem, neste caso, serve como um instrumento de manipulação por parte do aluno-professor. O dinamismo do objeto permite que sejam testados diferentes tamanhos de corte e que sejam observadas a relação destes com o volume da caixa.

Para complementar ainda o estudo deste último problema, foi criado outro objeto de aprendizagem (figura 5) que relaciona o tamanho do corte com o volume da caixa de papelão, através de um gráfico interativo. Esse recurso tem por objetivo chamar a atenção do aluno para o gráfico da função e para o significado dos pontos de máximo e mínimo da função.

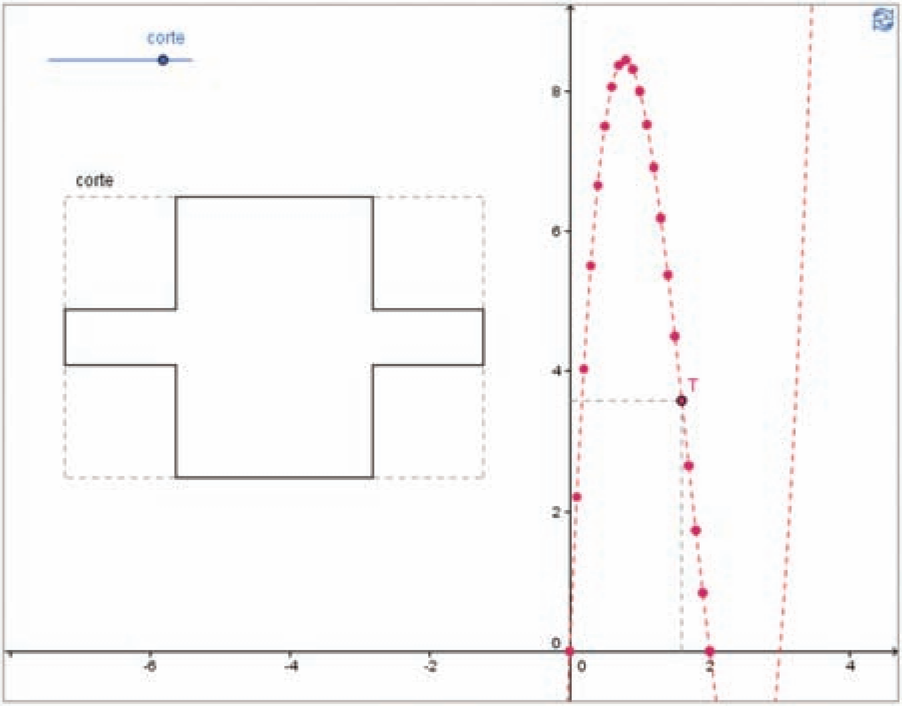


Figura 5 – Objeto de aprendizagem representando uma chapa de papelão e o gráfico da relação entre o tamanho do corte na chapa e o volume da correspondente caixa (planificada). Movimento aplicado ao ponto "Corte" , altera as dimensões da caixa e o ponto T , no sistema de coordenadas, traça o gráfico.

Já no Módulo V, que tratou do estudo das funções exponenciais, procurou-se enfatizar as relações entre transformações de funções e de gráficos. Na disciplina anterior, que era a de Mídias Digitais II, os alunos já tinham feito um estudo sobre deslocamentos de gráficos de funções quadráticas através da manipulação de objetos de aprendizagem interativos desenvolvidos com os recursos do software GeoGebra. Assim, para a disciplina de Funções e Modelos, foram criados objetos de aprendizagem semelhantes àqueles, focando, desta vez, as funções exponenciais. Por exemplo, nos objetos de aprendizagem da figura 6, o aluno era convidado a movimentar pontos móveis (correspondentes à variável independente x) nas animações e observar a relação entre os pontos F e G, pertencentes aos gráficos das funções f e g, respectivamente. O aluno também era desafiado a modificar o valor dos parâmetros c e d em cada um dos objetos e a observar o comportamento dos gráficos deslocados em relação à curva original (em pontilhado) de $f(x) = 10^x$.

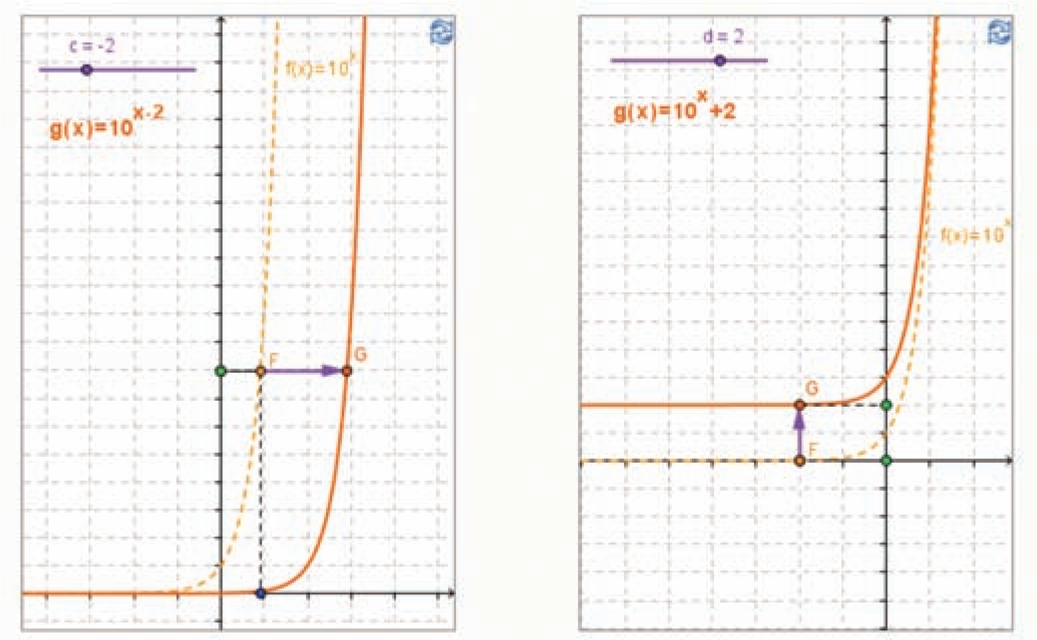


Figura 6 – Objetos de aprendizagem desenvolvidos com os recursos do software GeoGebra para o estudo de deslocamento de gráficos de funções exponenciais.

Ao final, depois de estudar e manipular os objetos de aprendizagem, o aluno-professor deveria ser capaz de compreender e dar significado aos diferentes tipos de movimento aplicados a uma mesma função exponencial.

Já no Módulo VI, foram desenvolvidas todas as etapas da Modelagem exercitadas nos Módulos anteriores, e para isso organizaram-se experiências de Modelagem plausíveis de serem realizadas na sala de aula. Em uma das atividades foi proposto um trabalho com embalagens, semelhante ao da atividade do Módulo IV, discutida anteriormente. Desta vez, no entanto, solicitou-se que o aluno-professor criasse uma animação no GeoGebra, como a apresentada na atividade do Módulo IV (figuras 4 e 5), que representasse o volume da caixa variando em função do tamanho de corte, bem como o gráfico dessa relação. Essa atividade também procurava incentivar o professor a construir sua própria animação, podendo mais adiante usá-la em sua própria prática escolar. Para auxiliar o aluno-professor na realização de parte desta atividade, criou-se um objeto de aprendizagem que explica todos os passos da construção de tal situação. Também foram produzidos vídeos que mostram, com maior detalhe, as ferramentas do software necessárias para a construção de gráficos de funções.

Como se pode perceber, o intuito em todas essas ações envolvendo as mídias, principalmente os vídeos explicativos e o uso de software, tinham como objetivo maior auxiliar e facilitar a aprendizagem dos alunos através da realização efetiva das tarefas que lhes eram propostas, além de fornecer subsídios de caráter prático-experimental à inserção das mídias na prática pedagógica. Entretanto, nem sempre isso acontecia, seja pelo entendimento do uso das mídias adquiria no contexto da educação a distância, seja porque os processos de Modelagem exigiam dos professores-alunos lidarem com imprevistos e incertezas que lhes causavam bastante insegurança.

No desenrolar da disciplina, o papel dos tutores foi fundamental, não apenas para que fossem dados aos professores-alunos os devidos esclarecimentos relativos à execução das tarefas e à organização do material, mas, também, como sujeitos-chave para o processo de formação e de ensino. Eram os tutores que traziam o retorno e os impactos do processo pedagógico importantes à reflexão sobre o trabalho que vinha sendo realizado e assim permitindo que ajustes fossem feitos, à medida que a disciplina se desenvolvia.

Sobre a aprendizagem na modalidade EAD: o olhar da Tutoria.

Com relação à disciplina "Funções e Modelos Matemáticos e Prática Pedagógica IV", é importante observar que ela ocorreu na fase final do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Isso significa que, quando do início da disciplina, já existia uma equipe pedagógica composta por professores e tutores bastante consolidada, com experiência e conhecimento da turma. Assim, nesse momento do Curso, já era possível fazer uma avaliação das ações que tinham funcionado adequadamente em outras ocasiões e de outras que ainda precisavam ser mais enfatizadas ou reformuladas. Contudo, o maior desafio continuava sendo o de estimular os estudantes à leitura/estudo do material disponibilizado pelo curso, não apenas das seções ou submenus, nos quais se localizavam as tarefas a serem realizadas, mas também nos links adicionais ou mesmo em outros materiais. Para provocar essa leitura e estudo, no site da disciplina, algumas das atividades a realizar encontravam-se, estrategicamente, dispersas ao longo do próprio material de estudo. Desta forma, para acessar e realizar as atividades propostas em cada Módulo, os alunos precisavam acessar o material de estudo.

Tal estratégia, além de cumprir de forma expressiva seu objetivo, possibilitou uma revisão de aspectos importantes a serem discutidos pela equipe pedagógica do Curso. Alguns alunos demonstravam dificuldades em navegar pelo site da disciplina, de modo que não conseguiam encontrar as tarefas que deveriam realizar. Nesse sentido, a participação dos tutores a distância e do professor responsável pela disciplina no fórum geral [7] foi fundamental. Este espaço para comunicação funcionou de forma efetiva nas trocas entre equipe e alunos. Conseguimos, com ele, auxiliar os alunos na navegação pelo site e realizar discussões importantes sobre a relação tempo/ quantidade de tarefas, avaliando o grau de dificuldade do que estava sendo solicitado.

Com o objetivo de discutir problemas e dar seguimento à disciplina, a partir do que ia sendo observado no andamento das atividades, o grupo de tutores a distância, professor e coordenação do curso, reunia-se semanalmente para avaliar e planejar cada semana de trabalho.

A disciplina Funções e Modelos Matemáticos, assim como as outras disciplinas do Curso de Especialização, contou com dois encontros presenciais, nos polos, com os grupos de professores-alunos. O primeiro encontro foi realizado dois meses após o início da disciplina e o outro no último mês, quando foi feita uma avaliação individual de aprendizagem. De modo geral, os encontros presenciais foram muito produtivos em termos de esclarecimentos quanto ao material e às tarefas propostas. Uma webconferência[8] com essa mesma finalidade, realizada com um dos polos durante mais ou menos 4 horas, permitiu verificar que, através desse recurso, é possível esclarecer dúvidas e desenvolver uma comunicação bastante eficaz, conforme conseguimos observar no retorno dos professores-alunos.

---

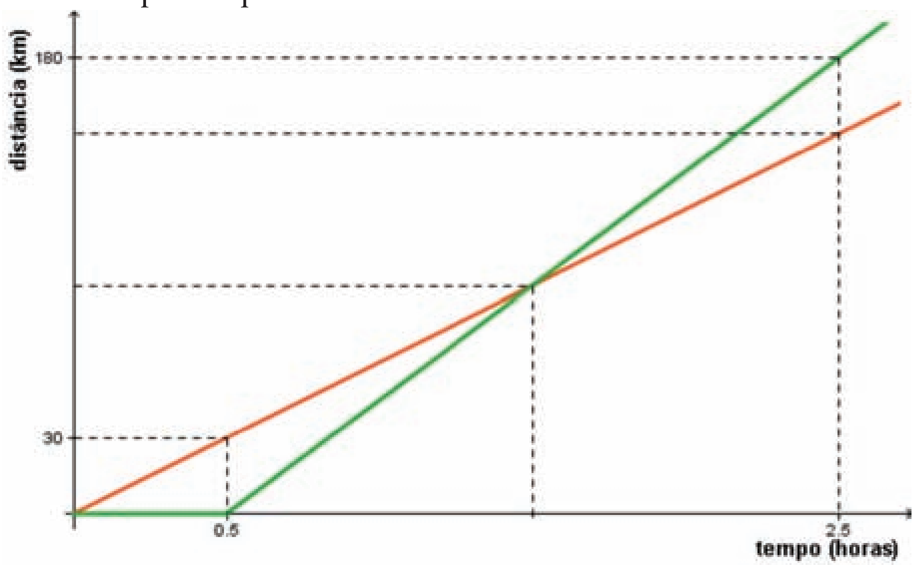
[7] O *fórum* é uma interface assíncrona, que possibilita a interação e discussão entre os participantes do curso sobre determinado assunto. As mensagens são estruturadas de forma hierárquica, apresentando os assuntos em destaque. O fórum geral permite que os participantes do curso possam inserir tantos tópicos quantos desejarem.

[8] Entendemos por webconferência uma discussão em grupo ou pessoa-a-pessoa na qual os participantes estão em locais diferentes, mas podem ver-se e ouvir-se uns aos outros como se estivessem reunidos em um único local; reunião ou encontro virtual realizada pela internet através de aplicativos ou serviço com possibilidade de compartilhamento de voz, vídeo, textos e arquivos via web.

No segundo encontro, foi proposta a realização de uma "avaliação final" da disciplina, na qual se apresentava uma situação-problema envolvendo função exponencial (um dos assuntos abordados durante a disciplina) e, entre outras solicitações, os alunos deveriam construir um gráfico utilizando o software GeoGebra. Neste momento, a necessidade de auxiliar os alunos com relação à matemática envolvida na questão foi maior do que na utilização do software. Entendemos, com essa observação, que as dificuldades com a tecnologia foram sendo superadas no decorrer do curso, uma vez que um dos objetivos deste curso era estimular o uso de softwares, familiarizando os alunos com tais recursos.

De maneira geral foi observado, especialmente no fórum geral da disciplina, que de todas as mensagens enviadas pelos alunos, poucas estavam diretamente relacionadas com dificuldades em lidar com o software escolhido para a atividade. Cabe destacar que, no site da disciplina, explanações referentes ao uso de software vinham acompanhadas de vídeos explicativos. Por outro lado, a questão do conteúdo matemático, seu domínio, seus modos de ler e escrever, foi amplamente discutida e trabalhada com os professores-alunos. O diálogo transcrito abaixo (registrado em Chat) registra um destes momentos de discussão entre aluno e tutor, relativo a uma atividade do Módulo III:

Atividade 2: Dois carros partem de uma cidade, deslocando-se pela mesma estrada. O gráfico apresenta as distâncias percorridas pelos carros, em função do tempo. Analisando o gráfico, em que tempo e a que distância os carros irão se encontrar?



TUTOR: percebeu que o carro verde ficou 0,5h parado enquanto o vermelho andou 30km?
ALUNO: sim, por isso usamos como o tempo do verde 2h
TUTOR: por que? o tempo não parou!
ALUNO: o q pensamos foi q ele saiu meia hora depois que o vermelho
TUTOR: melhor, deu uma vantagem de30km para o vermelho!
ALUNO: não estamos conseguindo achar, percebemos isto, mas onde vamos colocar esse dado, para que ele nos ajuda??
TUTOR: se o verde não tivesse saído da mesma cidade que o vermelho, ou seja, da posição zero, de qual posição ele teria que ter saído para dar essa vantagem de 30km? Ou geometricamente falando, se prolongar para baixo no eixo dos xx a reta verde, onde ela cortaria o eixo dos yy?
ALUNO: ta se ele tivesse dado um vantagem de 30 km ele teria q ter saído da posição 30km no tempo zero.

Nesse diálogo, podemos observar a atenta intervenção do tutor para superar a dificuldade do aluno. Essa interação entre tutores e alunos foi uma importante estratégia de apoio na realização das diferentes atividades realizadas semanalmente.

Por fim, é conveniente destacar mais uma vez que o maior obstáculo desta disciplina estava relacionado à leitura e compreensão do material por parte dos alunos. Estamos dando os primeiros passos nesta modalidade de educação e acreditamos que, nesta disciplina, conseguimos contribuir para o envolvimento dos alunos, neste modelo de educação a distância, que exige muita organização para estudos individualizados e de tempo para a realização das tarefas. É importante salientar que o curso se propunha a tratar de Matemática, Mídias Digitais e Didática e assim foi exigido dos alunos o desenvolvimento de um amplo leque de competências, e naturalmente se apresentaram as dificuldades. Mas a experiência certamente contribuiu muito para a formação continuada dos professores-alunos envolvidos e também para o crescimento da equipe de professores e tutores.

Considerações finais

Procurou-se, ao longo deste texto, deixar alguns registros do olhar teórico e dos encaminhamentos metodológicos realizados em uma disciplina sobre Funções e Modelagem, em termos matemáticos, tecnológicos e pedagógicos, seus alcances e resultados. Ficou, de alguma forma, posta a necessidade de que mais experiências de ensino através de processos de modelagem, na formação continuada de professores de Matemática a distância e envolvendo a produção de processos de leitura e escrita, sejam estudadas e discutidas.

Certamente, os princípios sobre os quais vem se sustentando a organização de processos de Modelagem como processo aberto, inventivo e convidativo à pesquisa e que têm sido resultado das pesquisas em Educação Matemática nos últimos 20 anos, diante da educação a distância, estão sendo desafiados. Isso acontece não porque esses princípios sejam insuficientes para uma educação de qualidade, mas porque estão demandando, para professores e estudantes, um conjunto de condições sobre as quais precisamos ainda refletir; dentre elas, as formas de se construir e apropriar "conhecimentos" e, consequentemente, os modos de ensinar e aprender.

Assim, a pesquisa torna-se necessária e urgente, devendo tomar as ações que vêm sendo realizadas na educação a distância como objeto de estudo, sendo apenas alguns dos pontos de partida: a problematização da elaboração de materiais; a discussão sobre o papel e a importância da linguagem no processo constitutivo das práticas, atividades, tarefas, explanações dos/nos espaços virtuais; o redimensionamento da importância e os alcances das mídias nessa construção/apropriação de conhecimento, entre outros pontos.

Por outro lado, é preciso se considerar também que o contexto no qual se articulam todos esses questionamentos escapa do que tradicionalmente se conhece como parte dos denominados espaços escolares da sala de aula. Foi possível perceber, pelos relatos de tutoria e dos próprios professores-alunos, que os encontros e desencontros se organizam e se instituem em espaços e tempos descontínuos, próprios, específicos. Parafraseando Santos (2009, p. 30), torna-se emergente repensar o sujeito, neste caso, a partir de uma análise conjunta com a evolução tecnológica – dando ênfase ao contemporâneo, à Internet, ao ciberespaço e às facilidades/empecilhos da comunicação virtual. A produção do sujeito da educação a distância está potencialmente imbricada pelos sentidos e significados que o ciberespaço e a Internet assumem; ora, um espaço-tempo de produção de identidades e subjetividades.

Modelagem Matemática e Educação a Distância são, certamente, processos desafiadores para a formação de professores. As tentativas e reflexões descritas e apresentadas sugerem que está aberto um campo bastante fértil de discussão e produção intelectual.

Referências

BARBOSA, Jonei Cerqueira. O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? *Zetetike*, Campinas, v. 7, n. 11, p. 67- 86, jan/jun. 1999.

_______. Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. *Bolema*, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001.

BARBOSA, Jonei Cerqueira; SANTOS, Marluce Alves dos. Modelagem matemática, perspectivas e discussões. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, Belo Horizonte. *Anais*... Recife: SBEM, 2007. Disponível em: <http://www.uefs.br/nupemm/cc86136755572.pdf>.

BEAN, Dale. O que é modelagem matemática? *Educação Matemática em Revista*, SBEM, Ano 8, n. 9-10, p. 49-57, abr. 2001.

BELLO, Samuel Edmundo L. Pedagogia de Projetos e a Prática pedagógica em matemática: alguns outros referenciais. In: BITENCOURT, Karliúza F. *Educação Matemática por projetos na escola*: prática pedagógica e formação de professores. Curitiba: Certa Editorial, 2010. p. 51-68.

BELLO, Samuel E. L.; BARRETO, Marina M. *Funções e Modelos Matemáticos*. Material Didático. Curso de Especialização: Matemática, Mídias Digitais e Didática para a Educação Básica. Porto Alegre, UAB/IM/UFRGS, 2010. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/>.

SANT´ANA, Marilaine de Fraga. Modelagem de experimento e ensino de cálculo. In: BARBOSA, J.; CALDEIRA, A.; ARAUJO, J. (orgs). *Modelagem matemática na educação matemática brasileira:* pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 149-160.

SANTOS, Suelen A. *Experiências narradas no ciberespaço*: um olhar para as formas de se pensar e ser professora que ensina matemática. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. 123 f.

SCHEFFER, Nilce; CAMPAGNOLLO, Adriano J. Modelagem Matemática uma alternativa para o ensino-aprendizagem da matemática no meio rural. *Zetetike*, Campinas, v. 6, n. 10, p.35-56, jul/dez. 1998.

Capítulo 6

NOVAS ABORDAGENS E NOVOS CONTEÚDOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

MARIA CRISTINA VARRIALE
VILMAR TREVISAN
ALINE SILVA DE BONA
JULIANA FRONZA
LUCIANA ROSSATO PIOVESAN
MARINA MENNA BARRETO
SANDRA DENISE STROSCHEIN

Introdução

A proposta deste capítulo é apresentar uma breve síntese da nossa prática docente nas disciplinas "Matemática na Escola: novas abordagens" e "Matemática na Escola: novos conteúdos". Esperamos que, após ler este capítulo, o leitor se sinta motivado para também adotar as mídias digitais em sua sala de aula.

As duas disciplinas juntas incluíram no seu planejamento a divulgação, junto aos alunos-docentes, de seis dissertações que foram apresentadas no Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da UFRGS. A clientela deste mestrado é constituída por docentes em exercício, no Ensino Médio e/ou Fundamental, e as suas dissertações resultam, em geral, em uma sequência didática, que busca superar inquietudes/frustrações prévias desses docentes, com relação ao ensino de algum tópico específico, e que é materializada sob a forma de um produto concreto. As seis dissertações escolhidas incluíam o uso de algum software/aplicativo de domínio público, que assim poderiam ser utilizados livremente por nossos alunos-docentes em escolas de Ensino Médio ou Fundamental.

Como em todas as disciplinas que constituíram este curso de Especialização, trabalhamos simultaneamente no Moodle Institucional da UFRGS [1], onde eram divulgadas as instruções para cada atividade, e no site da disciplina na Web[2], onde era publicado o material produzido pelos professores das disciplinas.

A disciplina “Matemática na Escola: novas abordagens”

Nesta disciplina, os alunos-docentes tiveram a oportunidade de conhecer formas alternativas para tratar conteúdos que já são ensinados na escola. A implementação de cada uma dessas formas alternativas já havia sido experimentada e testada pelo autor da dissertação de Mestrado que seria enfocada. A figura 1 apresenta uma interface do site da disciplina (VARRIALE; BARRETO, 2010), que foi organizada em três módulos, cada um deles planejado com base nas dissertações especificadas abaixo. Temos na figura uma das atividades do Módulo I, que trata da introdução ao pensamento algébrico, na sexta série.

[1] Trata-se de um ambiente virtual de aprendizagem que permite trabalho colaborativo (veja em <http://moodleinstitucional.ufrgs.br/>), com funcionalidades divididas em “recursos” e “atividades”.

[2] Para a disciplina de Novas Abordagens veja em <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/novas_abordagens/> e, para a disciplinas de Novos Conteúdos, veja em <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/novos_conteudos/>.

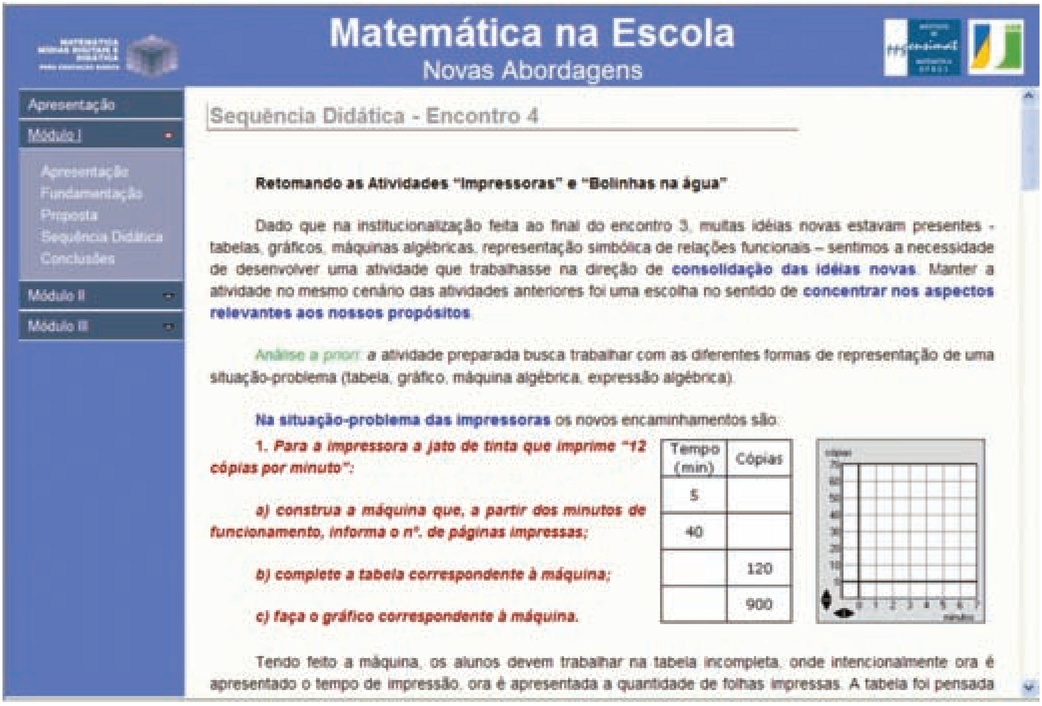


Figura 1 – Interface do site da disciplina Matemática na Escola: novas abordagens.

Módulo I: *Uma Introdução ao Pensamento Algébrico na sexta série através de Relações Funcionais* (KERN, 2008).

Neste módulo, trabalhou-se a problemática de como introduzir o pensamento algébrico na sexta série. A alternativa sugerida por Newton Kern incluía o uso do aplicativo “Máquinas Algébricas” desenvolvido pelo Instituto Freudenthal, da Universidade de Utrecht, na Holanda, traduzido do original em inglês para o português através de uma parceria com esse Instituto, e então disponibilizado na Internet [3].

Após identificar que a introdução ao pensamento algébrico não tem sido trabalhada satisfatoriamente em sala de aula, o objetivo do autor era o de introduzir álgebra acompanhada de significado, e decorrente da necessidade de expressar relações entre variáveis; neste sentido, contou com a ajuda do aplicativo “Máquinas Algébricas”. Este aplicativo é composto de dois recursos: o das “Árvores Algébricas” e o das “Balanças Algébricas”, sendo

[3] O objeto de aprendizagem “Máquinas Algébricas” está disponível em <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br> no link Atividades.

que apenas o recurso "Árvores Algébricas" foi utilizado na dissertação estudada. Na disciplina, entretanto, exploramos também o recurso das "Balanças Algébricas". A hipótese do autor da dissertação era de que esta abordagem seria mais adequada, facilitando a compreensão e a aprendizagem do aluno. Ao invés de iniciar o estudo de álgebra introduzindo de imediato o uso de letras, a ideia era a de propiciar ao aluno situações nas quais ele percebesse a necessidade ou utilidade de operar com valores desconhecidos.

A necessidade da estruturação de um problema, através da explicitação de uma relação funcional, era provocada nos alunos ao usarem o aplicativo "Árvores Algébricas". Segundo o autor, este aplicativo permitiu que os alunos fizessem essa estruturação de forma muito concreta e, assim, a "caixa de entrada" vazia foi o primeiro passo no entendimento do uso da letra para expressar algebricamente relações entre variáveis.

O professor, autor da dissertação, relata que teve a oportunidade de identificar o crescimento dos seus alunos na compreensão da linguagem algébrica: iniciando com atividades nas quais havia apenas resoluções de natureza aritmética, os alunos começaram a construir, para cada caso particular do problema, uma "árvore algébrica" e, por fim, depois de algumas repetições, reconheceram a possibilidade de utilizar a "árvore algébrica" genérica que resolveria o problema em todos os casos particulares. Os alunos entenderam que algumas das caixas de entrada tinham valores fixos, enquanto em outras caixas mudavam os valores de entrada, várias vezes, no mesmo problema. Esse comportamento indica a compreensão da ideia de variabilidade. Além da ideia de variabilidade e de dependência entre variáveis, os alunos demonstraram assimilar as diferentes formas de representação de uma situação que envolve uma relação funcional – tabelas, gráficos, leis da função.

Módulo II: *O Uso de Jogos na Resolução de Problemas de Contagem* (CARVALHO, 2009).

Neste módulo, tratou-se da utilização de jogos, explorando as situações que neles ocorrem, para auxiliar no aprendizado dos conteúdos de problemas de Contagem. A ideia foi de que, após estudar o trabalho desenvolvido por Gustavo Quevedo Carvalho, que apresenta o estudo de uma variedade de problemas envolvendo contagem em relação direta com as diversas situações dos jogos, os alunos-docentes do Curso de Especialização se sentissem motivados a buscar novos jogos para a abordagem desses conteúdos.

A nova abordagem, proposta pelo autor dessa dissertação, vem acompanhada de uma sequência didática estruturada a partir de problemas de contagem, visando à construção e à apropriação de propriedades do campo conceitual multiplicativo. Os jogos por ele aplicados (A Grande Aposta, Contig60, Senha, Bicolorido) seguem uma ordem em relação aos diferentes níveis do campo conceitual multiplicativo. No primeiro jogo, foram propostas situações de problemas de contagem mais simples, enquanto no último já era possível abordar alguns problemas de combinações, não deixando de explorar outros conceitos dentro do raciocínio combinatório.

Os conceitos explorados foram: princípio multiplicativo, permutações simples, permutações com repetição, arranjos simples e combinações simples. A introdução desses conceitos ocorreu após a aplicação dos questionários, preparados pelo autor especificamente para cada jogo. Em nenhum momento definiu-se permutação, arranjo ou combinação: a apresentação dos conceitos ocorreu de maneira informal, sem que os alunos soubessem, de antemão, a definição formal de cada um. Desta forma, o autor pretendia que os seus alunos superassem o clima inicial de insegurança que costumavam apresentar quando o professor anunciava o estudo desse assunto, por eles considerado muito difícil.

Para exemplificar como se pode estabelecer esta nova abordagem, apresentamos, a seguir, situações que foram exploradas por Carvalho (2009) e relatadas na sua dissertação. No jogo Senha, que se joga em dupla – um desafiante e um desafiado – o objetivo [4] é (o desafiado) descobrir a sequência de quatro cores (dentre seis cores disponíveis) que compõe uma senha, construída pelo desafiante; essa senha pode ter cores repetidas ou não.

Para não onerar o colégio com a compra de tabuleiros, o jogo foi adaptado para o papel. Em vez de encaixar pinos coloridos nos orifícios do tabuleiro original, foram usados lápis de cor para pintar círculos em um tabuleiro de papel, como mostrado na figura 2, a seguir.

[4] Ver em <http://carrosseldaaprendizagem.blogspot.com/2009/04/jogo-da-senha.html>.

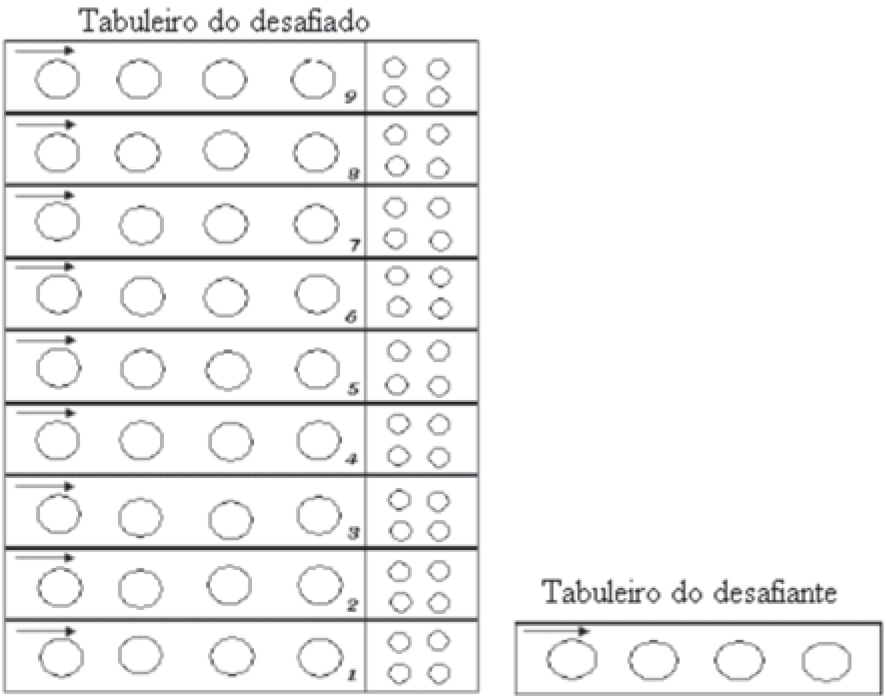


Figura 2 – Tabuleiros adaptados do jogo Senha.

No exemplo que iremos relatar, após combinar que a senha deveria ser construída sem repetir nenhuma cor, as regras estabelecidas foram as seguintes:

a) O desafiante pinta os círculos do seu tabuleiro na ordem estabelecida pela seta, isto é, da esquerda para a direita; por exemplo, a senha azul-laranja-vermelho-amarelo é como ilustrado na figura 3.

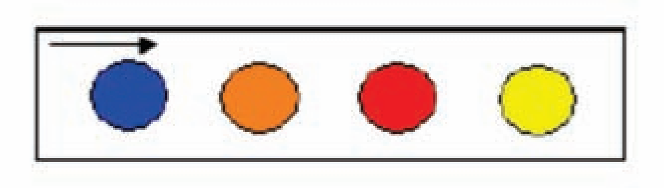


Figura 3 – A senha azul-laranja-vermelho-amarelo.

b) O desafiado tenta adivinhar a senha formada pelo desafiante, e este dá 'dicas' na coluna da direita do tabuleiro do desafiado; as dicas não seguem ordem alguma. Se o desafiado acertar alguma cor e a posição em que ela está, o desafiante pinta um dos círculos de preto; se acertar apenas alguma cor, mas não sua posição, o desafiante deixa algum dos círculos em branco; caso a senha tentativa apresentada pelo desafiado contenha alguma cor que não é nenhuma das usadas pelo desafiante, este marca um “X” em algum dos círculos. Na figura 4, apresentamos uma tentativa em que o desafiado acertou uma cor e sua posição (daí o circulo preto) e indicou uma cor que não faz parte da senha que ele deseja adivinhar (daí o círculo com “X”); outras duas cores estão corretas, mas não sua posição (daí os dois círculos em branco).

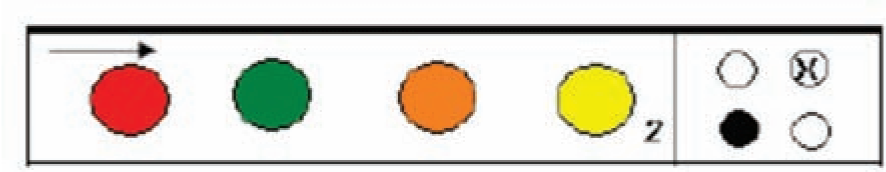


Figura 4 – Tentativa pintada pelo desafiado, e ‘dicas’ dadas pelo desafiante.

c) O desafiado tem nove chances (o tamanho do tabuleiro) para descobrir a senha; se, ao final destas nove oportunidades, ele não acertar a senha, ele contabiliza nove pontos.

d) Alternadamente, os jogadores invertem seus papéis. Vencedor é aquele que descobrir a senha construída pelo outro em um menor número de tentativas; ou seja, aquele que obtiver o menor número de pontos.

Evidentemente, a mera introdução do jogo nas aulas de matemática não é garantia de aprendizagem; a mediação do professor, que deverá ter muita clareza quanto aos objetivos a serem alcançados, é essencial para fazer do jogo um auxiliar didático do seu planejamento. Tendo isso em vista, uma vez claras as regras de cada jogo, o autor distribuía um questionário aos alunos, visando explorar diversas situações inerentes ao jogo em questão, as quais induziriam à introdução de conceitos dentro do raciocínio combinatório. Para este jogo em particular, as questões (ver no site da disciplina ou na própria dissertação) eram todas do tipo: “Dada a seguinte sequência de tentativas apresentadas pelo desafiado, e as correspondentes dicas dadas pelo desafiante, quantas são as possibilidades de tentativas para a próxima jogada?”

Ao término da sua pesquisa, o autor concluiu que o conjunto das diversas situações que ocorrem nos jogos que ele utilizou, ampliou de fato o leque de representações de contagem, além de tornar o ambiente de sala de aula mais sociável, à medida que os alunos se uniam em torno de um objetivo comum.

Módulo III: *Tecnologias digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica: manipulações no software GrafEquation* (SANTOS, 2008).

Neste módulo, a nova abordagem proposta refere-se à contribuição que o software GrafEq [5] oferece para gerar situações de aprendizagem de conteúdos de Geometria Analítica no Ensino Médio. Além de apresentar a sequência de atividades que foi implementada pelo seu autor, Ricardo de Souza Santos, essa dissertação inclui um tutorial [6] para o software em questão. Esse tutorial inclui uma sequência de atividades em Geometria Analítica, que evoluem à medida que o usuário vai aprendendo as ferramentas do software.

A motivação do autor ao escolher esse assunto decorreu do fato de que, em sua experiência como professor, ele vinha observando que os alunos não faziam a conexão entre as representações algébrica e geométrica, desqualificando o ensino-aprendizagem de geometria analítica e resumindo-o a memorizações de fórmulas. E o que o autor pretendeu foi, a partir da manipulação de igualdades e desigualdades no GrafEq, e da verificação de suas representações no plano cartesiano, ajudar os alunos a estabelecerem relações entre conceitos tratados de forma algébrica e geométrica, a se apropriarem da linguagem algébrica representativa de situações no plano e a adquirirem conceitos em Geometria Analítica.

Equações de reta e de circunferência, e o estudo dos seus parâmetros, são exemplos do campo conceitual da Geometria Analítica que foram discutidos pelos estudantes na realização das atividades propostas. Além disso, o estudo do plano cartesiano fez com que os estudantes estabelecessem relações entre a álgebra e a geometria. Outro aspecto importante, alcançado com a implementação da proposta, foi a diferenciação entre equações e inequações, e a visualização de suas respectivas representações no plano cartesiano.

O autor conclui o seu trabalho afirmando que a implantação do GrafEq no estudo de Geometria Analítica, de fato, ampliou a percepção dos seus alunos sobre os objetos algébricos e geométricos e sobre as equivalências entre eles.

[5] Breve apresentação do software GrafEq foi feita no Capítulo 1.

[6] Disponível em <http://mdmat.mat.ufrgs.br/grafeq_guia/>.

A disciplina “Matemática na Escola: novos conteúdos”

Nesta disciplina de novos conteúdos, o objetivo era o de apresentar propostas didáticas para ensinar conteúdos de matemática que não são usualmente trabalhados na escola. Dessa forma, a disciplina tinha a finalidade de desafiar os alunos-docentes, apresentando-lhes novos conteúdos que poderiam ser abordados na escola básica, tais como grafos, transformações lineares associados a matrizes e geometria vetorial. Importante relatar que a proposta didática para ensinar os novos conteúdos já havia sido previamente adotada e testada pelo autor da dissertação de Mestrado na qual cada módulo se fundamentaria.

O site da disciplina (TREVISAN; BARRETO, 2010) também está organizado em três módulos, cada um deles tratando de uma dissertação. A figura 5 apresenta a interface do site, e nela temos conteúdos relativos às transformações geométricas, assunto tratado no Módulo II.

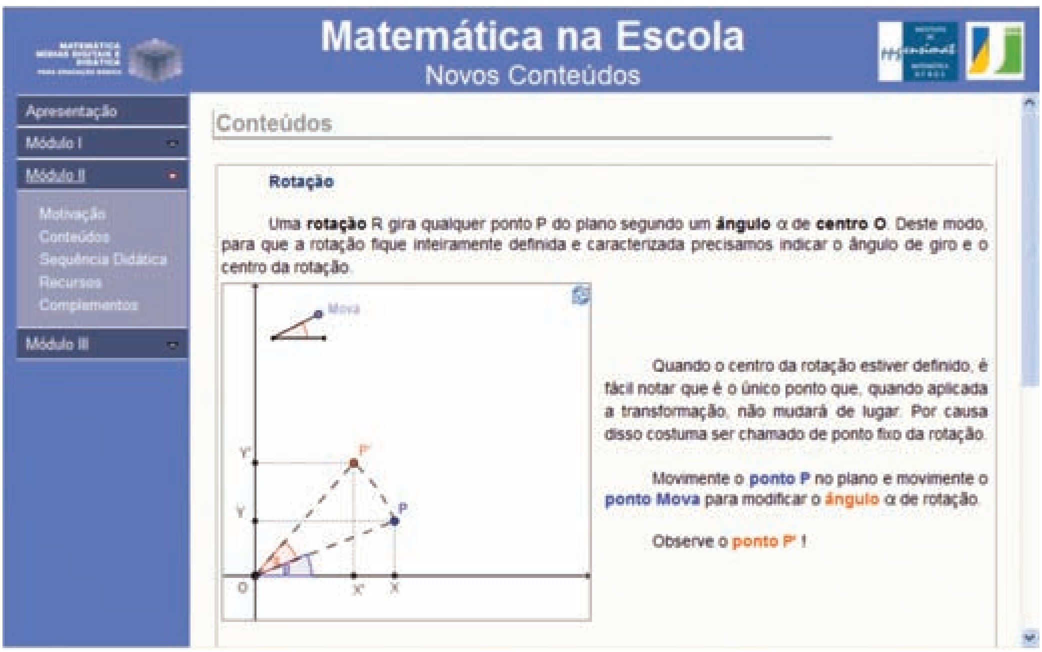


Figura 5 – Interface do site da disciplina Matemática na Escola: novos conteúdos.

Módulo I: *Grafos no ensino médio: uma inserção possível* (MALTA, 2008).

A proposta era a de se ensinar grafos, conteúdo que normalmente não é trabalhado no Ensino Médio, e que envolve muitas aplicações. A autora da dissertação, Glaucia Helena Sarmento Malta, propôs uma sequência didática que, resgatando a História dessa teoria, tem como metodologia de ensino a Resolução de Problemas. Como ilustração de sua técnica, ela propôs aos alunos o Problema das Sete Pontes de Koenigsberg:

> Os moradores da cidade de Koenigsberg inquietavam-se com a possibilidade de fazer um passeio pela cidade que, partindo de algum lugar, atravessasse cada uma das sete pontes exatamente uma vez e então retornasse ao ponto de partida.

Figura 6 – Pontes de Koenigsberg.

O problema foi proposto a Euler em 1736 (ver figura 6) e os alunos puderam seguir os passos desse grande matemático e compreender o nascimento de uma teoria (dos grafos) cujas aplicações e importância no mundo moderno superam em muito o que se poderia esperar. O fato é que Euler, ao representar as porções de terra por pontos e as pontes por arcos, indicando as ligações entre os pontos (ver figura 7), criou o que no mundo matemático se chama de um grafo: um conjunto de pontos no plano (vértices) com ligações entre eles (arestas). Esse modelo discreto pode ser usado em inúmeros problemas modernos como, por exemplo, de distribuição de energia, de material, de correspondência, de combustível.

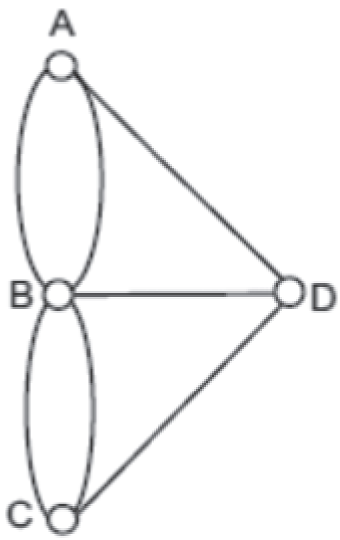


Figura 7 – Grafo representando o Problema das Pontes de Koenigsberg

Observamos que o problema das pontes pode ser generalizado para qualquer grafo – isto significa encontrar um caminho que passe por todas as arestas, sem repeti-las, saindo e chegando ao mesmo vértice (este caminho é chamado de circuito euleriano). Euler mostrou que para haver um circuito euleriano é necessário que todos os vértices tenham grau par (grau de um vértice é o número de arestas incidentes ao vértice). Portanto, o grafo das Pontes de Koenigsberg não tem circuito euleriano, já que existem nele vértices com grau ímpar.

A sequência didática da autora da dissertação explora vários problemas históricos que são também atrativos e significativos na atualidade, porque resolvem situações concretas de nossa vida em sociedade.

Módulo II: *Estudando matrizes a partir de transformações geométricas* (STORMOWSKI, 2008).

O autor dessa dissertação, Vandoir Stormowski, tinha em mente a introdução de fractais para os alunos do Ensino Médio. Figuras fractais são objetos geométricos que podem ser divididos em partes, cada uma das quais é semelhante ao objeto original. Além de serem esteticamente atrativos, tais objetos têm raízes na medição de objetos para os quais a geometria tradicional euclidiana falha. Figuras fractais podem ser geradas por um padrão repetido e são autossimilares (ver figura 8), isto é, cada uma das partes é semelhante ao objeto original. E as transformações geométricas são fundamentais para

se gerar tais objetos.

Figura 8 – Objeto fractal autossimilar.

Desse modo, é natural que a representação das transformações geométricas por matrizes tenha sido o objeto de estudo da dissertação. Os estudantes aprenderam como a rotação, a translação, a reflexão, o cisalhamento, entre outras transformações, podem ser representadas por uma matriz. Além disso, a composição das transformações geométricas é uma excelente motivação para introduzir a multiplicação de matrizes.

Neste módulo ainda trabalhou-se com o uso do software Shapari [7], disponível gratuitamente em <http://www.spelunkcomputing.com/shapari/download.html>. Este software permite a obtenção de figuras fractais através de aplicações sucessivas de uma mesma transformação.

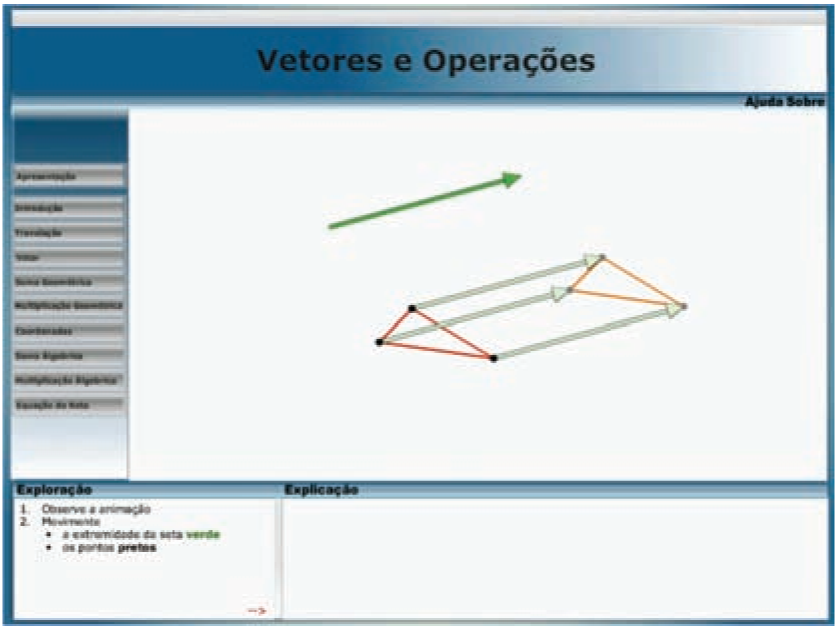
Módulo III: *Geometria Vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações* (CARNEIRO, 2007).

Aqui, trabalhou-se com a geometria vetorial, abordando operações com

7 Breve apresentação do software Shapari foi feita no Capítulo 1.

vetores e posições relativas de retas e de plano, utilizando-se vetores normais extraídos a partir das equações de retas e planos. Uma das motivações propostas pelo autor, Pedro Sica Carneiro, foi a discussão de sistemas de equações lineares sob o ponto de vista geométrico. Assim, no plano, o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem a equação $ax+by=c$ foi interpretado como sendo a reta que passa pelo ponto $(0, c/b)$ e que é ortogonal à direção dada pelo vetor $n=(a,b)$; e no espaço, o conjunto de pontos (x, y, z) que satisfazem a equação $ax+by+cz=d$ foi interpretado como sendo o plano ortogonal à direção dada pelo vetor $n=(a, b, c)$ que passa pelo ponto $(0, 0, d/c)$.

Nessa dissertação, o estudo das soluções de sistemas de equações de grau um, em duas e três variáveis, une duas áreas distintas da matemática: a álgebra e a geometria. Para facilitar o entendimento do conceito de vetor e as operações de soma e multiplicação, foi desenvolvido o objeto de aprendizagem “Vetores e Operações” [8], com interface ilustrada na figura 9. Neste objeto, vetores podem ser manipulados e os diferentes conceitos são veiculados através de animações.



[8] O objeto de aprendizagem “Vetores e Operações” foi desenvolvido pelo aluno bolsista Carlos Eduardo Souza Ferreira, no âmbito de projeto financiado pela Secretaria de Educação a Distância da UFRGS. Está disponível no site EDUMATEC em<http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/vetores/vetores.htm>.

Figura 9 – Interface do objeto de aprendizagem Vetores e Operações.

O processo de aprendizagem dos alunos-docentes

Nosso objetivo, nas duas disciplinas do Curso, era o de sensibilizar nossos alunos-docentes, de modo que eles se motivassem a adequar, à sua prática docente, a experiência da prática docente realizada pelo autor da dissertação associada a cada módulo.

A seleção que apresentaremos a seguir abrange material coletado pelos tutores, a partir do que foi produzido pelos alunos-docentes, em resposta às atividades desenvolvidas, e visa a ilustrar os resultados que estas disciplinas, do Curso de Especialização, proporcionaram.

Matemática na Escola: novas abordagens

Módulo I

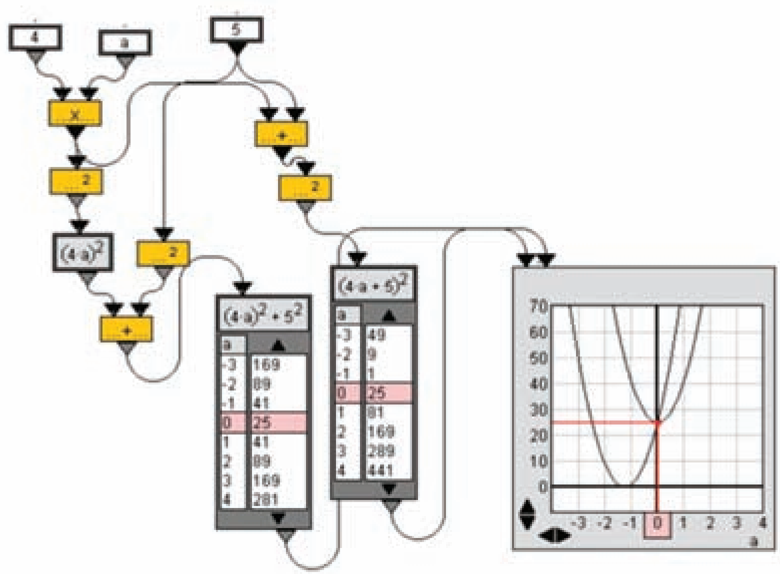
A dissertação associada a este módulo tratava da problemática de como introduzir o pensamento algébrico na sexta série. Como relatamos na Seção 6.2, o autor desta dissertação fez uso do recurso das "Árvores Algébricas" do aplicativo "Máquinas Algébricas", pois ele permitia ao usuário trabalhar com a estrutura de um problema, mesmo sem serem conhecidos todos os valores envolvidos; e isso era considerado pelo autor como um ponto essencial do seu trabalho. Em outras palavras, dado um problema, o recurso "Árvores Algébricas" permitia ao aluno entender o processo de resolução do problema, isto é, relatar todas as operações necessárias para a sua resolução, mesmo se alguns valores não estivessem disponíveis. A partir da habilidade em representar essa estrutura, era possível introduzir o pensamento algébrico através de relações funcionais.

Por outro lado, não são todos os problemas que são adequados para a introdução à linguagem algébrica, seguindo as etapas acima descritas. Para reconhecer quais seriam os problemas adequados para desenvolver esse enfoque, o autor da dissertação apresenta uma classificação, estabelecida por Bednarz e Janvier (apud KERN, 2008), das estruturas dos problemas como aritméticas ou algébricas, sendo que apenas os problemas que tiverem estrutura algébrica são os adequados ao objetivo proposto. Por tratar-se de uma nomenclatura não usual nos livros didáticos utilizados por nossos alunos-docentes, disponibilizamos no submenu Fundamentação/Estrutura, do menu do Módulo I do site da disciplina, material esclarecendo esta classificação, incluindo exemplos e figuras ilustrativas retirados da dissertação estudada.

Neste mesmo Módulo I, no submenu Proposta, disponibilizamos a sequência de etapas proposta pelo autor da dissertação na construção do processo de aprendizagem do pensamento algébrico, a qual inclui o conceito de "árvore generalizadora". A sequência proposta contempla um processo de aprendizagem com crescente exigência quanto ao uso da linguagem algébrica. De início, cria-se a necessidade da generalização, ainda que de forma intuitiva; depois vem a exigência de expressar as relações funcionais através da linguagem matemática, usando diferentes representações – expressão algébrica, tabelas, gráficos.

Pode-se perceber que os alunos-docentes aprenderam e gostaram de utilizar a "Árvore Algébrica". Muitos comentaram sobre a possibilidade de futuramente aplicá-la em sala de aula: "*Irei utilizar com meus alunos, pois adorei a árvore algébrica. Creio que desta forma irei dar um sentido especial às equações, hoje em dia tão temidas pelas crianças.*"

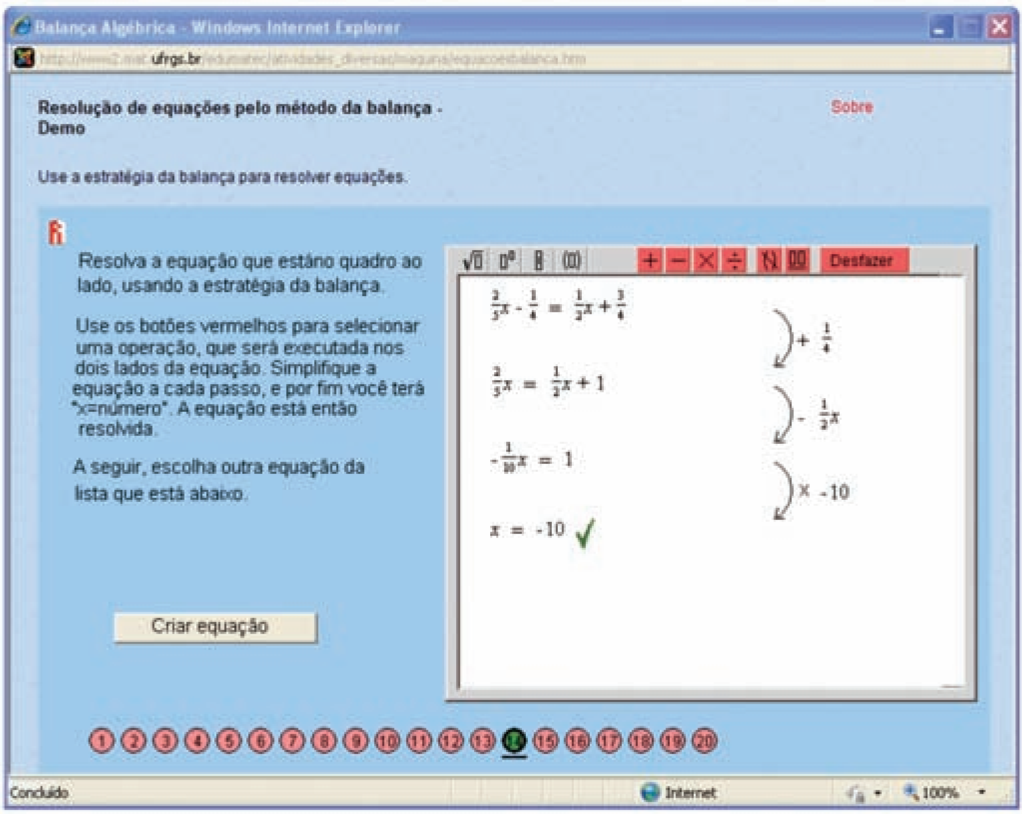
Na figura 10, apresentamos uma atividade desenvolvida por um aluno-docente, que utilizou o recurso da "Árvore Algébrica" para ratificar que a



expressão algébrica $(4a+5)^2$ é diferente de $(4a)^2+5^2$, não apenas pelo cálculo algébrico das operações envolvidas, mas também por meio das tabelas e dos gráficos correspondentes.

Figura 10 – Atividade desenvolvida pelo aluno-docente A, utilizando o recurso "Árvores Algébricas", para ratificar que $(4a + 5)^2$ é diferente de $(4a)^2 + 5^2$.

Mesmo não tendo sido utilizado na dissertação associada com este módulo, o recurso "Balança Algébrica" [9], que possibilita aos alunos do Ensino Fundamental verificar, de forma muito clara, as diversas operações utilizadas durante a resolução de uma equação linear, foi apresentado (ver Figura 11)



por ocasião de um dos encontros presenciais com nossos alunos-docentes. Nossos alunos-docentes também gostaram muito deste recurso, e muitos comentaram que iriam utilizá-lo em suas aulas de resolução de equações de primeiro grau.

Figura 11 – Resolução de uma equação de 1º. grau através da "Balança Algébrica".

[9] Acessível em <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/maquina/equacoesbalanca.htm>.

Por outro lado, não obstante a facilidade dos alunos-docentes no que tange à apropriação tecnológica dos recursos apresentados, de imediato foi possível identificar grandes dificuldades conceituais. Para exemplificar:

- em uma das tarefas, em que os alunos deveriam diferenciar problemas com estrutura aritmética de problemas com estrutura algébrica, foi fundamental a mediação dos tutores;
- na atividade que solicitava aos alunos-docentes que utilizassem a árvore algébrica para generalizar um problema a partir de situações com a mesma estrutura algébrica, a maioria dos alunos-docentes construiu uma árvore para cada caso, não conseguindo identificar a generalização;
- também foi fundamental a mediação dos tutores para ajudar a responder questões do tipo: "O que significa resolver um problema por operação inversa? Exemplifique."; "O que significa resolver um problema por tentativa? Exemplifique."

Módulo II

No Módulo II da disciplina sobre novas abordagens, foram utilizados jogos para introduzir problemas de contagem.

Ao estudar a dissertação associada a este módulo, grande parte dos alunos-docentes tomou conhecimento pela primeira vez dos jogos utilizados pelo autor. Por isso, uma das tarefas destinou-se à experimentação desses jogos pelos alunos-docentes:

> Tarefa: Suponha que dois principiantes, em um jogo de senha, tenham decidido jogar com apenas quatro cores e que acordaram que a senha não teria cor repetida. Apresente uma sequência de tentativas para um desafiado descobrir a senha formada por um desafiante. Lembre que após cada tentativa o desafiante informa com uma bolinha preta cada cor que estiver na posição correta. Apresente também a senha formada pelo desafiante.

Na figura 12, apresentamos a solução dada por uma aluna-docente, na posição de desafiada, com a sequência de jogadas e a senha proposta pelo

desafiante; logo abaixo, estão os seus comentários de como aconteceu a jogada.

Figura 12 – Atividade desenvolvida no Módulo II de Novas Abordagens.

Comentários: *Convidei o meu marido para jogar e combinamos que usaríamos as cores da Bandeira do Brasil.*

Jogada 1: "Chute"

Jogada 2: Apostei que o azul estava correto

Jogada 3: Continuei apostando no azul

Jogada 4: Constatei que todas as cores estavam erradas

Jogada 5: Troquei todas de lugar porque na jogada anterior todas estavam erradas.

Jogada 6: Mantive o amarelo em relação à primeira jogada e o verde em relação à segunda jogada.

Jogada 7: Ficou fácil porque eu tinha a jogada 6 como referência e todas as anteriores".

Dos jogos apresentados pelo autor da dissertação estudada neste módulo, o jogo Senha foi o que mais agradou aos nossos alunos-docentes. Citamos aqui um comentário explicitado por um deles: "*Adorei tanto, que agora à noite fiz um arquivo com as cartelas do jogo... Joguei com os alunos... Eles amaram e já contaram para as outras turmas.*"

Após terem observado como um professor poderia se valer de situações que ocorrem em certos jogos para induzir o aluno a formular conceitos de contagem e de combinatória, solicitamos aos nossos alunos-docentes que apresentassem outros jogos que pudessem servir para ilustrar problemas de contagem e, possivelmente, outros conteúdos de Matemática. Para ajudar os alunos-docentes nessa pesquisa, formulamos algumas perguntas que eles deveriam responder, ratificando a sua escolha.

Assim, ao final deste Módulo II, os alunos-docentes tiveram à disposição

um grande número de jogos envolvendo situações de contagem, os quais poderiam posteriormente ser utilizados para ilustrar e motivar o estudo deste tópico na escola. Apresentamos a seguir a escolha de um jogo feita por um aluno e suas justificativas frente às questões propostas. O jogo escolhido foi o Vitral Quebrado (Figura 13).

Figura 13 – Interface do jogo Vital Quebrado, disponível em < http://rachacuca.com.br/jogos/vitral-quebrado/>

Questão: O que você olharia, para decidir se um jogo pode ser útil ou não, como auxiliar didático em seu planejamento de ensino de problemas de contagem e de análise combinatória?

Resposta: *Acredito que através do uso de jogos os educandos expõem suas potencialidades (...)*

Questão: Explique qual o aspecto deste jogo, que você exploraria, para formular perguntas explorando situações que nele se apresentam, visando abordar problemas de contagem ou de combinatória.

Resposta: *O objetivo do jogo é juntar os vidros (...) de maneira que as cores adjacentes sejam iguais. À medida que o jogador vai acertando, o grau de dificuldade vai aumentando (...). A partir dessas regras, é possível trabalhar o número de combinações que podemos fazer para organizar os quadrados coloridos dentro do quadrado maior.*

Questão: Escreva explicitamente duas perguntas com o objetivo descrito anteriormente, indicando a resposta esperada.

Q1) Supondo que estamos iniciando o jogo, logo, dispomos de 4 vidros (quadrado coloridos) que devemos organizar no quadrado maior. De quantas maneiras

ABCD	ABDC	ACBD	ACDB	ADBC	ADCB
BACD	BADC	BCAD	BCDA	BDAC	BDCA
CABD	CADB	CBAD	CBDA	CDAB	CDBA
DABC	DACB	DBAC	DBCA	DCAB	DCBA

diferentes podemos organizar esses vidros?

R1) Considerando os vidros como sendo A, B, C e D, podemos organizá-los da seguinte maneira:

*Portanto, podemos organizá-los de 24 maneiras diferentes, ou seja, 4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24*

Q2) Supondo que após a primeira jogada, 2 vidros estejam na posição certa, de quantas maneiras podemos organizar os outros 2 vidros?

R2) Considerand B, C e D, e ainda, que A e B estejam na posiç anizar os outros 2 da seguinte maneira:

*Portanto, podemos organizá-los de 2 maneiras diferentes, ou seja, 2! = 2 * 1 = 2.*

Observamos, entretanto, que, enquanto alguns alunos-docentes apresentaram jogos interessantes e adequados para o objetivo de ensino-aprendizagem proposto, outros apresentaram dificuldades para discernir quais jogos poderiam ser úteis no ensino deste conteúdo, e apresentaram jogos que não eram adequados à proposta estabelecida na tarefa solicitada.

Módulo III

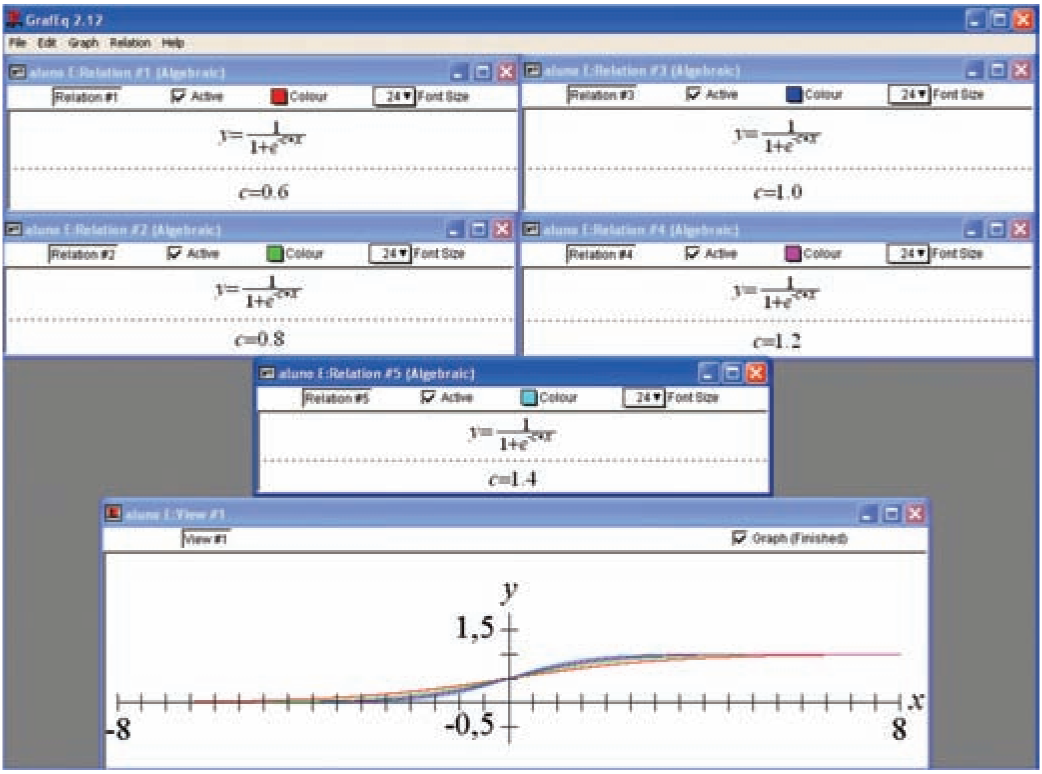
Neste módulo, que incluía atividades para trabalhar conteúdos de Geometria Analítica através do uso do software GrafEq, a maioria dos alunos alcançou os objetivos propostos.

Apresentamos, a seguir, um exemplo de tarefa que os nossos alunos-docentes foram solicitados a apresentar, e que foi corretamente respondida por um dos alunos.

Questão: A respeito do assunto abordado nesta dissertação, explique o que significa Geometria Analítica.

Resposta: *Geometria analítica – é o ramo da Geometria que cria um intercâmbio entre Geometria e Álgebra, ou seja, problemas geométricos podem ser explicados a partir de cálculos algébricos e vice-versa.*

Questão: Usando o software GrafEq, faça o gráfico de $y = 1/(1 + e^{cx})$, para c = 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4. Desenhe as 5 curvas em um mesmo



-8 a +8, e o eixo dos y de 0 a 1. Ao lado de cada curva, escreva o valor de c correspondente. Identifique ambos os eixos (x e y). Explique qual é a influência do parâmetro c.

Figura 14 – Resposta dada pelo aluno-docente com a função do parâmetro c em cada gráfico é a curvatura do gráfico em relação ao eixo x.

De um modo geral, pode-se dizer que o assunto Grafos foi muito bem trabalhado e desenvolvido pelos alunos-docentes, embora um pequeno grupo tenha apresentado algumas dificuldades, possivelmente por nunca terem tido, anteriormente, contato com este conteúdo. Note-se que chats e mensagens possibilitaram que esclarecessem as suas dúvidas junto aos tutores da disciplina.

Uma das atividades do módulo, que tem muitas aplicações em logística de distribuição, foi sobre caminho hamiltoniano – um caminho que passa por todos os vértices sem repeti-los. Uma aplicação prática desse problema é determinar um caminho que percorra um certo número de cidades passando uma única vez por cada uma delas. No problema proposto aos alunos, tal situação aparece e está representada no grafo da figura 16, no qual os vértices representam as cidades e as arestas representam os caminhos entre as cidades.

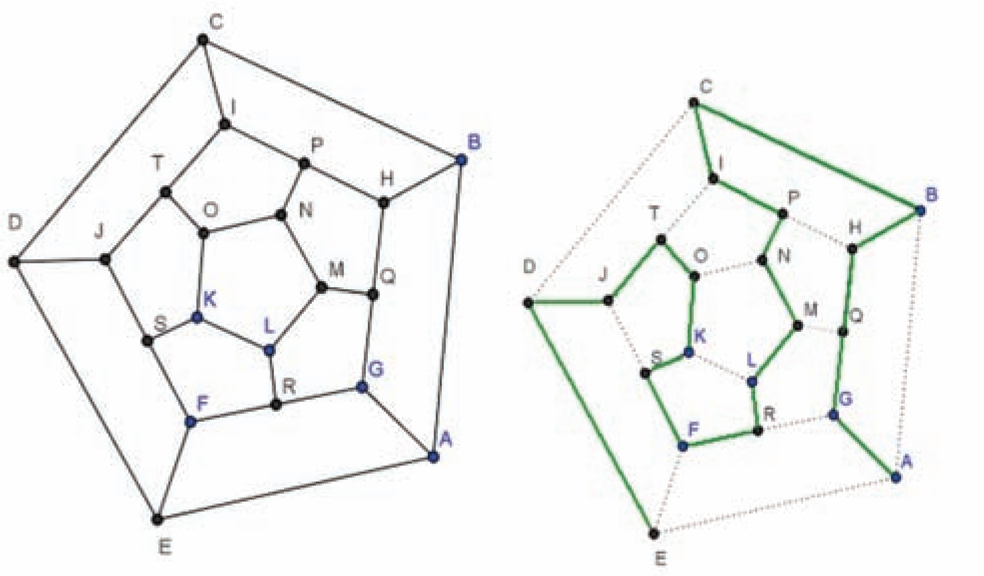
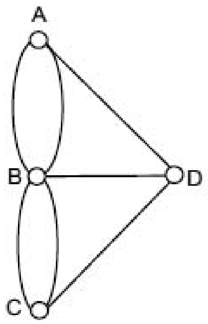


Figura 15 – Caminho Hamiltoniano apresentado por aluno.

Como forma de ilustração, citamos agora um dos assuntos tratado neste módulo, que é um dos aspectos importantes da teoria dos grafos: sua forte ligação com matrizes. Por exemplo, podemos representar um grafo através de matrizes. Uma delas é a matriz de adjacências, que descrevemos a seguir.

[10] O GeoGebra é um software que havia sido previamente trabalhado em outras disciplinas e os alunos-docentes fizeram uso dele para desenhar os grafos.

A matriz de adjacências de um grafo é uma matriz na qual as linhas e as colunas estão associadas aos seus vértices: o elemento da linha *i* e coluna *j* é o número de arestas que têm *i* e *j* como extremidades. Por exemplo, na figura 16 temos matriz de adjacência do grafo que representa as pontes de Koenigsberg, onde a primeira coluna indica as adjacências do vértice A, a segunda coluna indica as adjacências do vértice B, e assim por diante.



Grafo das pontes de Koenigsberg

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de adjacência

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de incidência

Figura 16 – grafo que representa as pontes de Koenigsberg e as respectivas matrizes adjacência e incidência.

Já a matriz de incidências é a matriz na qual as linhas estão associadas aos vértices e as colunas estão associadas às arestas. Um elemento da linha *i* e coluna *j* é 1 se a aresta *j* é incidente ao vértice *i*, e 0, caso contrário. A matriz de incidências do grafo das pontes de Koenigsberg está registrada na figura 16.

No assunto grafos, a multiplicação de matrizes adquire um significado importante: o elemento da linha *i* e coluna *j* da matriz produto AxA, onde A é a matriz adjacência do grafo, corresponde ao número de caminhos de comprimento 2 que ligam o vértice *i* ao vértice *j*. No caso do grafo das pontes de Koenigsberg temos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AxA = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

O elemento que está na linha 1 e coluna 2 da matriz AxA é 1. Isso significa que existe 1 caminho de comprimento 2 entre os vértices 1 e 2 (vértices A e B do grafo da figura 16). De fato, o caminho é sair de A, passar por D até chegar ao B. Veja ainda, na figura 17, os quatro caminhos de comprimento 2 que ligam os vértices B e D, partindo de B: B, A, D (aresta verde); B, A, D (aresta laranja); B, C, D (aresta azul) e B, C, D (aresta vermelha). Esses caminhos estão representados pelo elemento a_{24} (onde 2 corresponde ao vértice B e 4 ao vértice D) na matriz AxA.

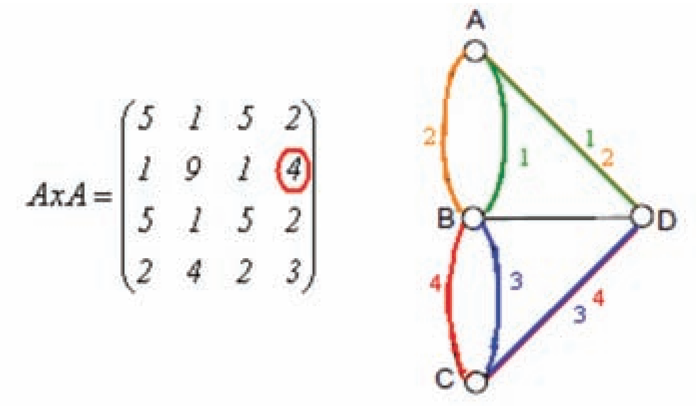


Figura 17 – Matriz AxA destacando o elemento que representa o caminho de comprimento 2 que liga o vértice B ao vértice D e o grafo com os quatro possíveis caminhos de comprimento 2 que ligam os vértices B e D.

O leitor é convidado a encontrar quais são os outros caminhos de comprimento 2 que estão informados na matriz AxA dada acima.

Da mesma forma temos que, na matriz produto AxAxA, o elemento da linha i e da coluna j da matriz corresponde ao número de caminhos de comprimento 3 que ligam os vértices i e j. E assim, se queremos determinar o número de caminhos de comprimento n que ligam os vértices i e j, basta olhar o número que está na linha i e coluna j da matriz produto AxAx...xA , sendo A multiplicada n vezes.

Esses dois conceitos aqui apresentados, matriz de adjacências e matriz de incidências, ilustram uma possível aplicação do assunto matrizes e operações.

Módulo II

Neste módulo, cuja inovação consistia em aprender a representar transformações geométricas sob forma matricial, as dificuldades dos alunos mostraram-se não apenas com relação ao Shapari, o software utilizado, mas também com relação às transformações propriamente ditas. Isso, porque efeitos de transformação sobre as figuras devem ser expressos através de matrizes 2 x 2 de números reais. Se quisermos, por exemplo, o efeito de “achatamento vertical de uma figura pelo fator 0.5” [11], devemos transformar o ponto (x, y) no ponto (x', y') da seguinte forma:

$$(x', y') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Efetuando a multiplicação das matrizes obtemos: $(x', y') = (x, 0.5*y)$. Ou seja, as coordenadas do ponto transformado, em relação ao ponto (x,y) , têm uma redução pelo fator 0.5 na vertical (a ordenada do ponto) e se mantêm igual na horizontal (a abscissa do ponto)

Se quisermos o achatamento de uma dada figura, nas duas direções, basta efetuar o mesmo procedimento em relação à coordenada x do ponto. Por exemplo, a transformação dada por:

$$(x', y') = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

transforma quadrados em retângulos e círculos em elipses, sendo que na horizontal tem-se uma redução segundo o fator 0.2 e na vertical segundo o fator 0.5.

Na figura 18, temos a produção de um aluno-docente, na qual as elipses são resultado de “achatamentos” horizontais aplicados a círculos. Mas também se tem, na produção, um movimento de translação que faz os deslocamentos das elipses para a direita e esquerda. Esse movimento é obtido com uma

[11] A expressão “achatamento na vertical” supõe que a figura está representada em um sistema de coordenadas e as direções “vertical” e “ horizontal” são dadas , respectivamente, pelos eixos OY e OX.

transformação do tipo $(x', y') = (x + a, y + b)$, que produz o efeito de deslocar uma figura de $|a|$ unidades na horizontal e $|b|$ unidades na vertical (para direita ou esquerda, dependendo do sinal de a, e para cima ou para baixo, dependendo do sinal de b).

Figura 18 – Transformação criada pelo aluno-docente

Com o uso do software Shapari, pode-se iniciar o estudo de transformações e matrizes de uma forma bastante concreta. Isso porque, uma vez informada a matriz da transformação, tem-se na tela do computador, de imediato, o efeito que se produz em diferentes figuras que estão disponíveis na interface do software (quadrado, círculo, estrela, dentre outras). Esse é um assunto que não está no programa da matemática das escolas, mas que, com o auxílio do Shapari, poderia ser nele incluído, como uma introdução elementar aos espaços vetoriais de dimensão dois e suas transformações. Esse conteúdo é o pré-requisito para uma introdução ao estudo de fractais.

Módulo III

O módulo começou com os conceitos de vetor geométrico e vetor algébrico. Na figura 19, temos uma das atividades resolvida por um aluno. Essa atividade teve como propósito tornar claro o significado das setas que representam vetores e, assim, diferentes setas foram utilizadas para fazer a translação de um triângulo cinza.

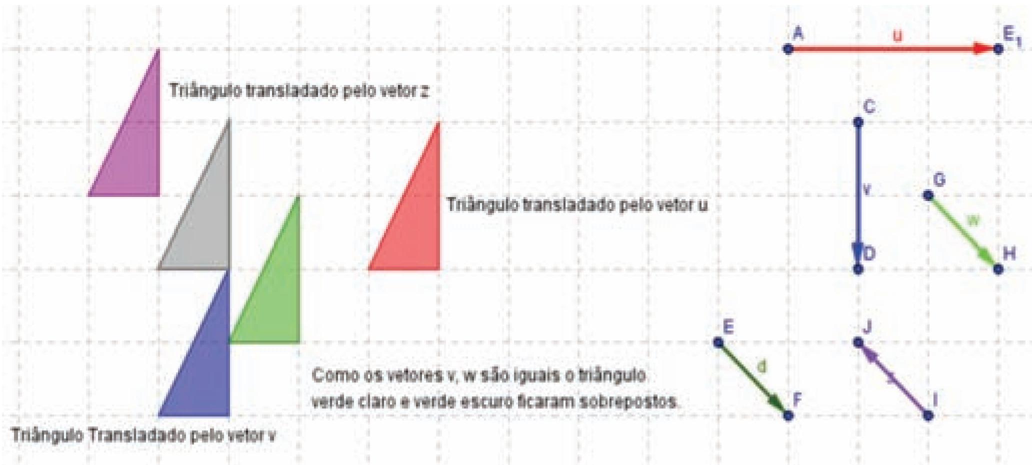


Figura 19 – Produção de um dos alunos-docentes

O conceito de vetor algébrico foi trabalhado em diferentes atividades. Inicialmente, as atividades informavam as coordenadas dos pontos extremos da seta, para então serem determinadas as coordenadas do vetor, como, por exemplo, na tarefa a seguir:

> Tarefa: Determine as coordenadas do vetor $\vec{v}$ representado pela seta $\overrightarrow{AB}$ sendo:
>
> a) A = (3, 3) e B=(5, 4)
>
> b) A=(1, 3) e B=(4, -1)

A figura 20 registra uma solução apresentada, que inicia com a representação geométrica do vetor, para então serem feitos os cálculos das suas coordenadas e, segundo o aluno:

> "As coordenadas do vetor $\vec{v}$ (item a) são dadas pelo ponto D = (2,1). Também podem ser obtidas calculando-se a diferença B – A = (2,1).

Da mesma forma se encontram as coordenadas do vetor $\vec{u}$ (item b) e tem-se que as coordenadas do vetor são (3,-4)."

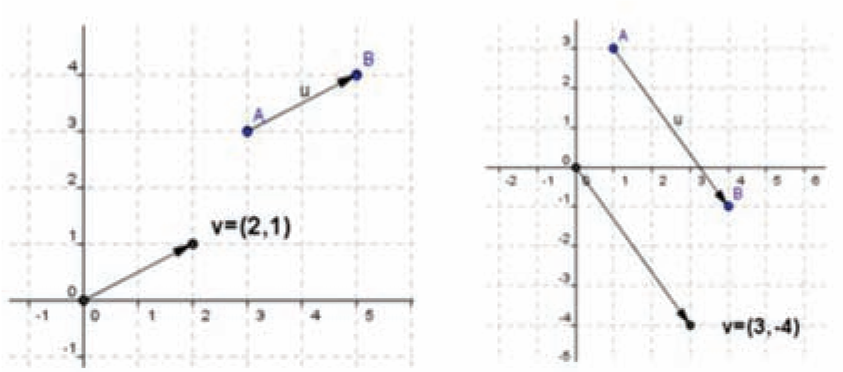


Figura 20 – Soluções apresentadas por um dos alunos-docentes para a tarefa acima citada.

Depois, foram trabalhadas atividades que informavam as coordenadas do vetor, para então serem determinadas as coordenadas de extremidades de setas representantes do vetor, como, por exemplo, a atividade em que se pede para determinar as coordenadas de dois pontos A e B a partir da informação de que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, conforme a Figura 21.

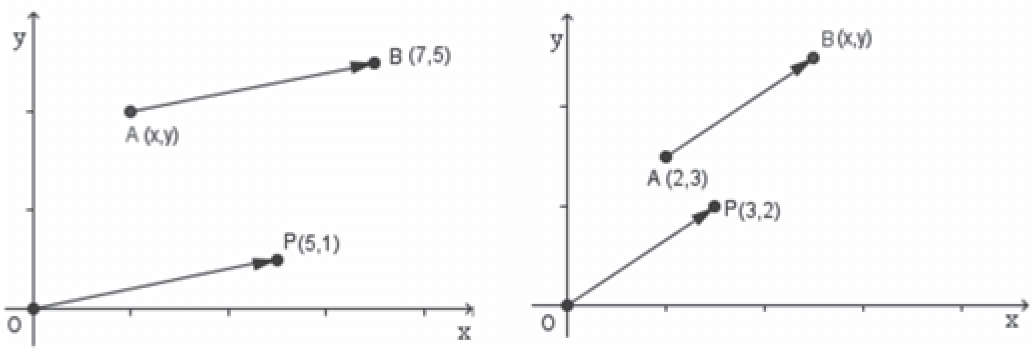


Figura 21 – Exemplo de tarefa em que o aluno deve determinar as coordenadas de extremidades de setas a partir das coordenadas de um vetor.

Uma vez entendido o conceito de vetor, foram introduzidas as operações entre vetores e também o conceito de ortogonalidade. É com este pré-requisito que se pode entender a equação $ax+by=c$, em duas variáveis, como sendo a reta que passa pelo ponto $(0, c/b)$ e que é ortogonal ao vetor n=(a,b). Com essa interpretação, pode-se fazer um estudo qualitativo das soluções de um de sistemas de duas equações e duas incógnitas.

Por exemplo, no sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = -3 \end{cases}$$

a primeira equação representa uma reta ortogonal ao vetor $n_1=(2,1)$, passando por $(0, 1)$; a segunda equação representa uma reta que é ortogonal ao vetor $n_2=(4,2)$, passando por $(0, -3/2)$, conforme observa-se na figura 22.

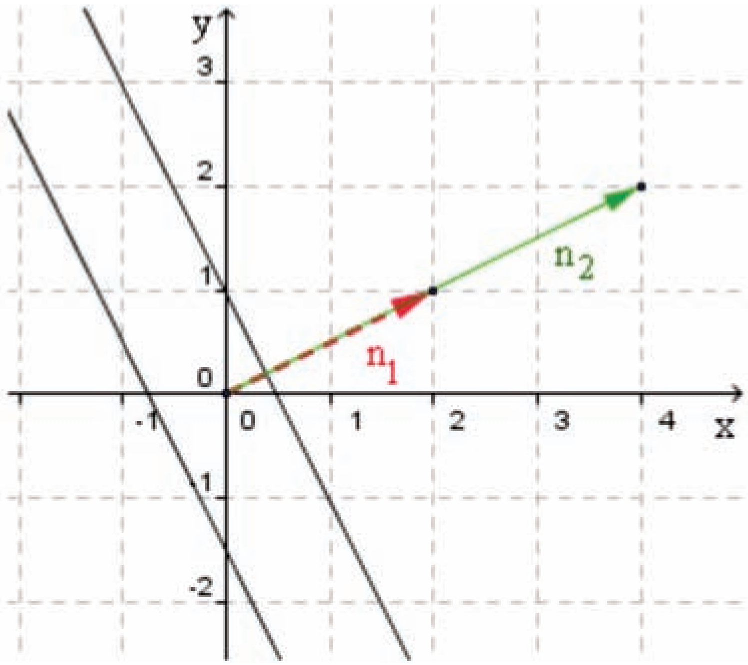


Figura 22 – Representação das retas das equações.

Como os vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são múltiplos um do outro, as retas são paralelas. Assim, não existe nenhum ponto (x, y) que pertença às duas retas e, portanto, o sistema não admite solução.

Foi com esse conhecimento que foram resolvidos, qualitativamente, diferentes sistemas. Abaixo temos as transcrições de duas resoluções; a primeira delas trata de sistema indeterminado e a segunda de sistema determinado:

"As retas de equação $3x + y = 1$ *e* $x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}$ *têm a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas,* $\vec{n}_1 = (3,1)$ e $\vec{n}_2 = (1, \frac{1}{3})$, *têm a mesma direção. Como as retas são idênticas, o sistema de equações*

tem infinitas soluções." $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3} \end{cases}$

E mais:

"As retas de equação $3x + 2y = 1$ e $2x - 4y = 3$ *não têm a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas,* $\vec{n}_1 = (3,2)$ e $\vec{n}_2 = (2,-1)$, *não têm a mesma direção. Como as retas são distintas, o sistema de*

equações $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$

tem uma única solução."

O ensino de sistemas de equações sob um ponto de vista geométrico, além de esclarecer o vocabulário que sempre aparece nos livros, no tópico que trata de "matrizes e sistemas" (sistema possível e determinado, sistema possível e indeterminado, e sistema impossível), torna "vetores e operações" um conteúdo que pode e deve ser contemplado nas aulas de matemática. Dessa forma, na escola, os alunos também passam a entender que vetores são entes abstratos importantes, tanto na Física quanto na Matemática.

Reflexões

Como já expusemos no início deste capítulo, um dos pontos positivos mais marcantes em ambas as disciplinas consistiu no efeito alcançado quanto à difusão dos produtos que constituem as dissertações do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da nossa universidade. Essas dissertações [12], por sua vez, já resultaram de alguma expectativa de superação de inquietudes ou frustrações de outros alunos-docentes (do Mestrado

[12] As dissertações, na íntegra, podem ser consultadas na Biblioteca Virtual da UFRGS , no repositório Lume em <http://www.biblioteca.ufrgs.br/>.

Profissionalizante) com relação ao ensino de algum tópico específico, e incluíam propostas didáticas implementadas e testadas em sala de aula, as quais poderão, no futuro, servir de ponto de partida para investigações e experimentos de muitos outros docentes.

Adicionalmente, a nossa expectativa é de que boa parte dos alunos-docentes tenha concluído estas disciplinas conscientes de que o uso de mídias digitais auxilia muito no desenvolvimento dos conteúdos de Matemática, tanto daqueles que já se abordavam na escola, quanto de novos conteúdos, que não fazem parte do que usualmente se ensina na Escola Básica. Nesse sentido, pode-se afirmar que ambas as disciplinas irão propiciar contribuições positivas para o ensino da Matemática nas escolas, dentro dos princípios que nortearam a proposta deste Curso de Especialização, que consiste em promover a inclusão do uso de Mídias Digitais nas aulas de Matemática, em busca de melhoria nas práticas de ensino.

Por outro lado, ao cursar estas disciplinas, os alunos-docentes também tiveram a oportunidade de constatar a necessidade de refletir sobre a sua prática docente, não raras vezes enraizada num método de fazer sem muito pensar, e, se necessário, modificá-la de modo a atender as necessidades que se apresentam, possivelmente optando por novas formas de abordagem de alguns conteúdos.

Em várias oportunidades ao longo dessas disciplinas, nossos alunos-docentes viram-se eles próprios em dificuldades inerentes à compreensão de certos conceitos de matemática, evidenciando a necessidade de rever certos conteúdos para poder melhor explorar todos os elementos de um problema.

Foi com grande satisfação que atendemos alunos-docentes que se mostraram sempre interessados em aprender mais, para serem melhores profissionais, e cumpriam as tarefas de forma exemplar, tentando sempre explorá-las ao máximo para seu próprio aprimoramento.

Além de evidenciar que a boa apropriação dos recursos tecnológicos digitais pode auxiliar grandemente a compreensão da matemática, estas disciplinas também mostraram que aderir ao uso destes recursos constitui um desafio para o professor, pois exige dele mais cuidado com a preparação do seu plano, com uma definição clara do objetivo, além de um domínio das potencialidades do recurso a ser utilizado.

Por fim, sugere-se ao leitor docente que vier a adotar as mídias digitais na sua prática pedagógica, que ao mesmo tempo sempre divulgue o material didático e também os diversos tutoriais explicativos sobre os softwares utilizados neste curso de especialização, os quais se encontram disponíveis no site web do curso. Espera-se também que fique atento para as oportunidades de participar de cursos e oficinas que explorem os softwares e objetos de aprendizagem disponíveis na rede, para qualificar o ensino básico, na busca de desenvolver nos alunos um maior interesse em aprender Matemática.

Referências

CARNEIRO, Pedro Sica. *Geometria vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/13337>.

CARVALHO, Gustavo Quevedo. *O uso de jogos na resolução de problemas de contagem: um estudo de caso em uma turma do 8º ano do Colégio Militar de Porto Alegre.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/17845>.

KERN, Newton. *Uma introdução ao pensamento algébrico na sexta série através de relações funcionais.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/15584>.

MALTA, Gláucia Sarmento. *Grafos no Ensino Médio – Uma Inserção Possível.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/14829>.

SANTOS, Ricardo de Souza. *Tecnologias Digitais na Sala de Aula para Aprendizagem de Conceitos de Geometria Analítica: Manipulações no Software Grafeq.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/15880>.

STORMOWSKI, Vandoir. *Estudando Matrizes a partir de Transformações Geométricas.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/14965>.

TREVISAN, V; BARRETO, M. *Matemática na Escola: novos conteúdos.* Material Didático. Curso de Especialização: Matemática, Mídias Digitais e Didática para a Educação Básica. Porto Alegre, UAB/IM/UFRGS, 2010. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/novos_conteudos>

VARRIALE, M. C.; BARRETO, M.. *Matemática na Escola: novas abordagens.* Material Didático. Curso de Especialização: Matemática, Mídias Digitais e Didática para a Educação Básica. Porto Alegre, UAB/IM/UFRGS, 2010. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/novas_abordagens/>

OS AUTORES

Aline Silva de Bona foi tutora a distância do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Mestre em Ensino de Matemática. E-mail: vivaexatas@yahoo.com.br .

Daniela Stevanin Hoffmann foi professora responsável pela disciplina Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutora em Informática na Educação. E-mail: daniela.hoffman@ufrgs.br .

Elisabete Zardo Búrigo foi membro da equipe coordenadora do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutora em Educação. E-mail: elisabete.burigo@ufrgs.br .

Juliana Fronza foi tutora a distância do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Mestre em Matemática Aplicada. E-mail: duda_mat@yahoo.com.br .

Luciana Rossato Piovesan foi tutora a distância do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Mestre em Matemática Aplicada. E-mail: lurpiovesan@gmail.com.

Marcia Rodrigues Notare foi professora responsável pela disciplina Mídias Digitais na Educação Matemática II do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutora em Informática na Educação. E-mail: marcianotare@gmail.com .

Marcio Alexandre Rodriguez de Rodrigues foi tutor a distância do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Mestre em Ensino de Matemática. E-mail: rdrgzma@yahoo.com.br .

Marcus Vinicius de Azevedo Basso foi membro da equipe coordenadora e professor responsável pela disciplina Alfabetização na Educação a Distância do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutor em Informática na Educação. E-mail: mbasso@ufrgs.br .

Maria Alice Gravina foi Coordenadora do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática e professora responsável pela disciplina Mídias Digitais na Educação Matemática I. Doutora em Informática na Educação. E-mail: gravina@mat.ufrgs.br.

Maria Cristina Varriale foi professora responsável pela disciplina Matemática na Escola: Novas Abordagens do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutora em Física. E-mail: cris@mat.ufrgs.br.

Mariângela Torre Dias foi membro da equipe de produção de material digital do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Acadêmica de Licenciatura em Matemática. E-mail: torre.dias@ufrgs.br.

Marina Menna Barreto foi tutora a distância e co-autora dos sites das disciplinas do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Mestre em Ensino de Matemática. E-mail: marinambarreto@gmail.com .

Melissa Meier foi tutora a distância do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Especialista em Tutoria de Educação a Distância. E-mail: melissameier@gmail.com.

Samuel Edmundo Lopez Bello foi professor responsável pela disciplina Funções e Modelos Matemáticos e Prática Pedagógica IV do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutor em Educação Matemática. E-mail: samuel.bello@ufrgs.br .

Sandra Denise Stroschein foi tutora a distância do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Mestre em Matemática Aplicada. E-mail: sandrastroschein@gmail.com.

Thaísa Jacintho Müller foi tutora a distância do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Mestre em Matemática Pura. E-mail: thaisamuller@gmail.com .

Vera Clotilde Vanzetto Garcia foi membro da equipe coordenadora e professora responsável pela disciplina Prática Pedagógica III do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutora em Educação. E-mail: veraclot@ufrgs.br .

Vilmar Trevisan foi professor responsável pela disciplina Matemática na Escola: Novos Conteúdos do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutor em Matemática Aplicada. E-mail: trevisan@mat.ufrgs.br .